

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**ESCUELA DE POSGRADO**



**“APLICACIONES MULTIMEDIA PARA EL CURSO DE MECÁNICA  
ESTRUCTURAL”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGÍSTER EN INGENIERIA CIVIL**

**PRESENTADO POR**

**CARLOS DAVID NONTOL ESPINOZA**

**ASESOR: Mag. JOSÉ ALBERTO ACERO MARTINEZ**

**LIMA – PERÚ**

**2016**

## RESUMEN

En el presente trabajo, se desarrollan aplicaciones en MATLAB a modo de herramientas didácticas, que permitan ilustrar de manera sencilla y amigable los conceptos del curso de Mecánica Estructural para facilitar el aprendizaje de los alumnos.

El código de las aplicaciones está escrito en MATLAB y compilado en archivos ejecutables (archivos \*.exe) de tal forma que no se requiera del programa principal para ser utilizados.

Se desarrollan aplicaciones para los siguientes temas:

Teoría de esfuerzos y deformaciones en el rango elástico, se abarca desde las definiciones básicas, la transformación de esfuerzos y deformaciones en general y en particular para encontrar los valores principales y direcciones principales.

Ley de Hooke generalizada para distintos materiales, Incluyendo los efectos de cambios de temperatura.

Teoría de falla para materiales frágiles y dúctiles: Máximo esfuerzo normal (Rankine Coulomb), Máxima deformación unitaria (Saint Venant), Densidad de energía de deformación (Beltrami), Máximo esfuerzo cortante (Tresca), Densidad de Energía de Distorsión (Von Mises). Se analiza los factores de seguridad y se grafica las superficies de fluencia de cada criterio de falla.

Vigas con cimentación elástica y cargas variables, se calcula la deflexión, giro, fuerza cortante, momento flector y el esfuerzo máximo. Se desarrolla la teoría para “n” cargas aplicadas.

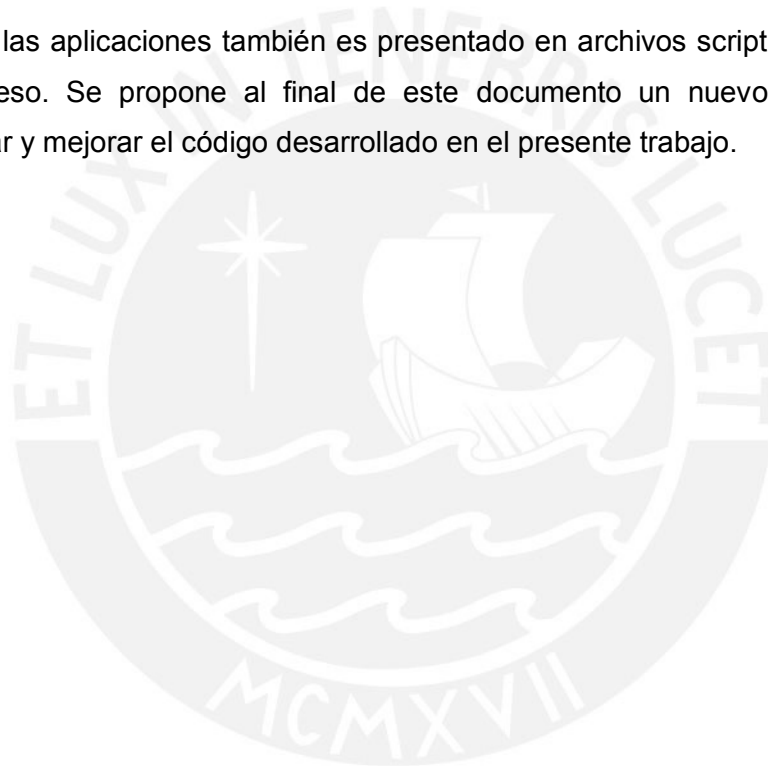
Pandeo, enfoque clásico y con polinomios para diversas condiciones de apoyo, obteniendo la carga crítica y la forma modal de pandeo. Se analiza además la carga crítica de pandeo para elementos esbeltos de sección variable y de sección compuesta.

En el análisis de teorías de falla se puede comparar los factores de seguridad y las superficies de falla para distintos criterios, observando que en bajo cierta combinación de cargas uno resulta más conservador que otro.

En el análisis de pandeo de elementos esbeltos, se presenta tablas de la carga crítica obtenida para varias condiciones de apoyo, para elementos de sección constante, variable y de sección compuesta. La precisión de estos valores depende directamente de la exactitud de la ecuación de la deformada asumida.

Al tener una viga apoyada sobre una cimentación elástica se obtiene esfuerzos en su sección. Se puede analizar el máximo de estos esfuerzos con alguno de los criterios de falla dependiendo del material en estudio. Así por ejemplo si es un material frágil se puede usar el criterio de Rankine, si es un material dúctil se puede usar el criterio de Tresca.

El código de las aplicaciones también es presentado en archivos script (archivos \*.m) de libre acceso. Se propone al final de este documento un nuevo alcance para complementar y mejorar el código desarrollado en el presente trabajo.



## ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1 .....</b>	<b>1</b>
1.1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.2. ANTECEDENTES .....	2
1.3. OBJETIVOS.....	2
1.4. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA .....	3
1.5. METODOLOGÍA.....	4
<b>CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>5</b>
<b>TEORÍA DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.....</b>	<b>5</b>
2.1. DEFINICIONES GENERALES.....	5
2.1.1. ESFUERZO EN UN PUNTO.....	5
2.1.2. TENSOR DE ESFUERZOS .....	6
2.1.3. ESFUERZOS ACTUANDO EN UN PLANO .....	7
2.1.4. ESFUERZO NORMAL Y ESFUERZO CORTANTE EN UN PLANO .....	8
2.1.5. TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS.....	10
2.1.6. ESFUERZOS PRINCIPALES Y SUS DIRECCIONES.....	14
2.1.7. CÍRCULO DE MOHR PARA EL ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS.....	18
2.1.8. CÍRCULO DE MOHR PARA EL ESTADO PLANO DE ESFUERZOS .....	21
2.2. APLICACIONES EN MATLAB.....	24
2.2.1. ESFUERZOS PRINCIPALES.....	25
2.2.2. ROTAR EJES DE ESFUERZOS.....	27
2.2.3. ESFUERZOS EN UN PLANO.....	30
2.2.4. CÍRCULO DE MOHR.....	31
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>34</b>
<b>LEY DE HOOKE GENERALIZADA CON APLICACIONES DE TEMPERATURA .....</b>	<b>34</b>
3.1. DEFINICIONES GENERALES.....	34
3.1.1. TENSOR DE DEFORMACIONES.....	34
3.1.2. DEFORMACIONES PRINCIPALES Y SUS DIRECCIONES .....	35
3.1.1. ROTACIÓN DE DEFORMACIONES.....	41
3.1.2. DEFORMACIÓN PLANA .....	44
3.2. APLICACIONES EN MATLAB.....	44
3.2.1. DEFORMACIONES UNITARIAS.....	44
3.2.2. ROTAR EJES.....	47
3.2.3. CÍRCULO DE MOHR.....	48

<b>CAPÍTULO 4 .....</b>	<b>51</b>
<b>CRITERIOS DE FALLA PARA MATERIALES FRÁGILES Y DÚCTILES.....</b>	<b>51</b>
4.1    DEFINICIONES GENERALES.....	51
4.1.1    CRITERIO DE FALLA .....	51
4.1.2    SUPERFICIE DE FLUENCIA.....	52
4.1.3    CRITERIO DE FALLA PARA MATERIALES FRÁGILES .....	53
4.1.3.1    CRITERIO DEL MÁXIMO ESFUERZO NORMAL - RANKINE COULOMB .....	53
4.1.3.2    CRITERIO DE LA MÁXIMA DEFORMACIÓN UNITARIA LINEAL - SAINT VENANT.....	54
4.1.3.3    CRITERIO DE LA DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN - BELTRAMI.....	56
4.1.4    CRITERIO DE FALLA PARA MATERIALES DÚCTILES .....	60
4.1.4.1    CRITERIO DEL MÁXIMO ESFUERZO CORTANTE - TRESCA.....	60
4.1.4.2    CRITERIO DE LA DENSIDAD DE ENERGÍA DE DISTORSIÓN - VON MISES.....	61
4.1.5    OTROS CRITERIOS DE FALLA PARA MATERIALES DÚCTILES .....	63
4.2    APLICACIONES EN MATLAB.....	66
4.2.1    RANKINE – COULOMB: CRITERIO DEL MÁXIMO ESFUERZO NORMAL .....	66
4.2.2    SAINT VENANT: CRITERIO DE LA MÁXIMA DEFORMACIÓN UNITARIA LINEAL.....	69
4.2.3    BELTRAMI: CRITERIO DE LA DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN .....	72
4.2.4    TRESCA: CRITERIO DEL MÁXIMO ESFUERZO CORTANTE.....	74
4.2.5    VON MISES: CRITERIO DE LA DENSIDAD DE ENERGÍA DE DISTORSIÓN.....	76
<b>CAPÍTULO 5 .....</b>	<b>79</b>
<b>VIGAS CON CIMENTACIONES ELÁSTICAS Y CARGAS VARIABLES .....</b>	<b>79</b>
5.1    DEFINICIONES GENERALES.....	79
5.1.1    VIGA SOBRE CIMENTACIÓN ELÁSTICA.....	79
5.1.2    DEFLEXIÓN Y REACCIONES EN UNA VIGA APOYADA SOBRE CIMENTACIÓN ELÁSTICA 81	
5.2    APLICACIONES EN MATLAB.....	86
<b>CAPÍTULO 6 .....</b>	<b>89</b>
<b>PANDEO, ENFOQUE CLÁSICO PARA VARIAS CONDICIONES DE APOYO .....</b>	<b>89</b>
6.1    DEFINICIONES GENERALES.....	89
6.1.1    PANDEO.....	89
6.1.2    CARGA CRÍTICA .....	90
6.1.3    LONGITUD EFECTIVA.....	93
6.1.4    FORMA MODAL DE PANDEO .....	95
6.1.5    PANDEO DE COLUMNAS CARGADAS EXCÉNTRICAMENTE.....	96
6.1.6    PANDEO DE COLUMNAS DE SECCIÓN VARIABLE.....	100
6.1.6.1    COLUMNA DE INERCIA VARIABLE BIARTICULADA .....	104

6.1.6.2	COLUMNA DE INERCIA VARIABLE EMPOTRADA-LIBRE .....	106
6.1.6.3	COLUMNA DE INERCIA VARIABLE LIBRE-EMPOTRADA .....	107
6.1.6.4	COLUMNA DE INERCIA VARIABLE EMPOTRADA-EMPOTRADA .....	108
6.1.6.5	COLUMNA DE INERCIA VARIABLE EMPOTRADA-MÓVIL .....	110
6.1.6.6	COLUMNA DE INERCIA VARIABLE EMPOTRADA-ARTICULADA .....	111
6.1.6.7	COLUMNA DE INERCIA VARIABLE ARTICULADA-EMPOTRADA .....	112
6.1.7	PANDEO DE COLUMNAS COMPUESTAS .....	115
6.1.7.1	COLUMNA COMPUESTA ARTICULADO-ARTICULADO .....	117
6.1.7.2	COLUMNA COMPUESTA MÓVIL-LIBRE .....	119
6.1.7.3	COLUMNA COMPUESTA MÓVIL-ARTICULADO .....	121
6.1.7.4	COLUMNA COMPUESTA MÓVIL-MÓVIL .....	123
6.1.7.5	COLUMNA COMPUESTA EMPOTRADA-LIBRE .....	125
6.1.7.6	COLUMNA COMPUESTA EMPOTRADA-ARTICULADA .....	127
6.1.7.7	COLUMNA COMPUESTA EMPOTRADA-MÓVIL .....	129
6.1.7.8	COLUMNA COMPUESTA EMPOTRADA-EMPOTRADA .....	131
6.2	APLICACIONES EN MATLAB .....	134
6.2.1	SECCIÓN CONSTANTE .....	134
6.2.2	SECCIÓN VARIABLE .....	136
6.2.3	SECCIÓN COMPUESTA .....	137
<b>CAPÍTULO 7</b>	<b>.....</b>	<b>138</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>.....</b>	<b>138</b>
7.1	CONCLUSIONES .....	138
7.2	RECOMENDACIONES .....	139
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>.....</b>	<b>141</b>

## CAPÍTULO 1

### 1.1. INTRODUCCIÓN

En el curso de Mecánica Estructural, dictado en el programa de maestría en ingeniería Civil de la PUCP, se desarrollan conceptos y métodos de la Mecánica de Materiales, se estudia la teoría de esfuerzos y deformaciones, temas de mecánica como torsión, flexión, corte y pandeo de elementos esbeltos.

Matlab es un software matemático que permite realizar análisis numéricos, cálculo matricial y visualización gráfica. Posee un lenguaje de programación propio con el cuál es posible desarrollar aplicaciones con interfaz de usuario personalizadas.

En el presente trabajo se desarrollan aplicaciones en MATLAB que permitan ejemplificar de manera numérica y gráfica los conceptos impartidos en el curso.

El código desarrollado puede ser utilizado como archivo script (archivo \*.m) o usar el compilador interno de Matlab y convertirlo en un ejecutable (archivo \*.exe). La ventaja de este último tipo de archivo es que no requiere la instalación del programa principal para poder ser utilizado.

Las aplicaciones desarrolladas emplean una interfaz gráfica de usuario conocida como GUI, la cual permite un fácil uso de las aplicaciones desarrolladas. Estas GUI incluyen menús, botones y cuadros de diálogo que pueden ser programados para definir su comportamiento dentro de la aplicación. Para mostrar los resultados numéricos se hace uso de tablas y gráficos en 2D y 3D según sea requerido.

Para el desarrollo de las aplicaciones se ha tomado como base el libro de texto del curso de Mecánica Estructural, Guzmán Barrón, L. D.; Quiun, D. R. y Acero, J. A. (2010). *Apuntes de clase del Curso Mecánica Estructural (1a Edición)*. Lima: PUCP. Se usa los conceptos teóricos, ecuaciones y gráficos desarrollados.

El código final de cada aplicación es también presentado en archivos script para que pueda ser modificado y mejorado en futuros trabajos.

## 1.2. ANTECEDENTES

Actualmente existe software desarrollado por docentes de la PUCP y diversas aplicaciones escritas por los alumnos, como trabajos individuales o como parte de proyectos de tesis. Estos programas al presentar resultados numéricos y gráficos permiten una mejor conceptualización de los conceptos teóricos involucrados.

En el año 2003 se desarrolló el curso Multimedia de Resistencia de Materiales (REMM), Muñoz, J. A. (2004). *REMM Curso Multimedia de Resistencia de Materiales*. Fondo editorial PUCP, que consiste en un CD del curso de pregrado dictado en la PUCP. Este trabajo es utilizado por docentes y alumnos para afianzar los conocimientos impartidos en clase proporcionando no solo una mejor perspectiva con resultados numéricos, sino también empleando una interfaz gráfica.

En internet se encuentra disponible el *Instructor companion site* del libro *Advanced Mechanics of Materials de Boresi y Schmidt* como herramienta de ayuda para el docente en: <http://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=index&bcsId=1591&itemId=0471438812>

También se puede encontrar en internet páginas web involucradas en ofrecer y facilitar el cálculo numérico de temas relacionados con la Mecánica Estructural como en el sitio: <https://www.ecomputingx.com/SM-03.jsp>, que permite calcular el pandeo de elementos esbeltos para diferentes condiciones.

## 1.3. OBJETIVOS

### **Objetivo general:**

El objetivo principal de la tesis es proporcionar herramientas a modo de aplicaciones escritas en MATLAB, que faciliten el dictado del curso de Mecánica Estructural por parte del docente y ayuden al aprendizaje de los alumnos.

Las aplicaciones serán de ejecución independiente, pues no requerirá de MATLAB para ser ejecutadas. Contarán con una interfaz amigable (GUI), salida numérica y gráfica para conceptualizar mejor los resultados.

### **Objetivo específico:**

Desarrollar aplicaciones que ilustren la teoría del curso de manera didáctica y gráfica de los siguientes temas:



- Teoría de esfuerzos y deformaciones en el rango elástico, se abarca desde las definiciones básicas, la transformación de esfuerzos y deformaciones en general y en particular para encontrar los valores principales y direcciones principales.
- Ley de Hooke generalizada para distintos materiales, Incluyendo los efectos de cambios de temperatura.
- Teoría de falla para materiales frágiles y dúctiles: Máximo esfuerzo normal, Máxima deformación unitaria, Densidad de energía de deformación, Máximo esfuerzo cortante (Tresca), Densidad de Energía de Distorsión (Von Mises).
- Vigas con cimentación elástica y cargas variables, se calcula la deflexión, giro, fuerza cortante, momento flector y el esfuerzo máximo en la sección analizada.
- Pandeo, enfoque clásico y con polinomios para diversas condiciones de apoyo, obteniendo la carga crítica y la forma modal de pandeo.

#### **1.4. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA**

Para dictar satisfactoriamente un curso es necesario contar con herramientas que permitan explicar los conceptos teóricos, estas herramientas comprenden libros de texto, ejemplos numéricos y medios gráficos.

Existe un libro para el dictado del curso, pero algunos conceptos y métodos de la Mecánica de Materiales son complicados de explicar por el docente y de ser asimilados por los alumnos. Por ejemplo, existen expresiones matemáticas involucradas que requieren interpretación gráfica o manipuleo numérico intensivo.

Actualmente no existe una herramienta como la que se presenta para la enseñanza del curso Mecánica Estructural.

Es por ello que se ve la necesidad de desarrollar aplicaciones que permitan el ingreso y manipulación de datos para obtener resultados numéricos y gráficos para de este modo ilustrar los conceptos de manera amigable y establecer las limitaciones y restricciones en las aplicaciones.

## 1.5. METODOLOGÍA

La metodología a seguir para el desarrollo del presente trabajo será la siguiente:

1. Revisión bibliográfica y recopilación de la base teórica de los temas a desarrollar.  
La base de la revisión bibliográfica será el libro del curso de Mecánica Estructural, Guzmán Barrón, L. D.; Quiun, D. R. y Acero, J. A. (2010). *Apuntes de clase del Curso Mecánica Estructural (1a Edición)*. Lima: PUCP, complementado con bibliografía afin.
2. Desarrollo de programas y aplicaciones interactivas.  
El código de las aplicaciones será escrito en MATLAB, haciendo uso de la interfaz GUI, con salida numérica y gráfica de fácil uso.
3. Compilación de las aplicaciones desarrolladas en un paquete multimedia.  
Las aplicaciones desarrolladas serán finalmente compiladas en archivos ejecutables (archivos \*.exe), que podrán ser usados sin requerir la instalación de MATLAB.

## CAPÍTULO 2

### TEORÍA DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

#### 2.1. DEFINICIONES GENERALES

##### 2.1.1. Esfuerzo en un punto

Sea un cuerpo sujeto a fuerzas actuando sobre su superficie y un plano Q que lo corta sobre la superficie A, dividiendo el cuerpo en dos partes, positivo y negativo. Se tiene una fuerza  $\Delta F$  actuante sobre una porción de área  $\Delta A$ , dicha fuerza  $\Delta F$  se descompone sobre el plano Q en  $\Delta F_N$  y  $\Delta F_S$ .

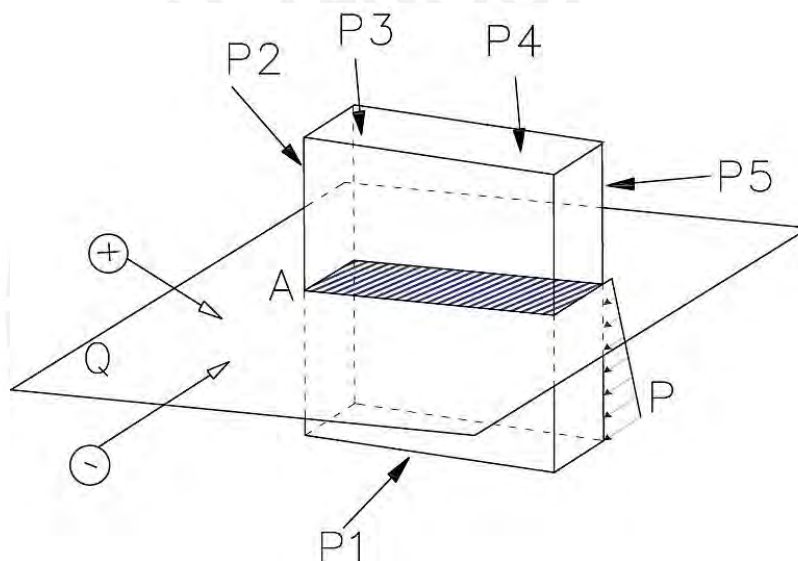


Figura 2.1. Cuerpo general cargado cortado por el plano Q.

En concordancia con la tercera ley de Newton la fuerza  $\Delta F$  producirá en el lado contrario al plano una fuerza  $-\Delta F$ . La fuerza en  $\Delta F_N$  es llamada fuerza normal y  $\Delta F_S$  es llamada fuerza cortante, ambas aplicadas en el área  $\Delta A$ .

Las magnitudes de las fuerzas  $\Delta F$ ,  $\Delta F_N$  y  $\Delta F_S$  por unidad de área  $\Delta A$  corresponden al esfuerzo promedio, esfuerzo promedio normal y esfuerzo promedio cortante.

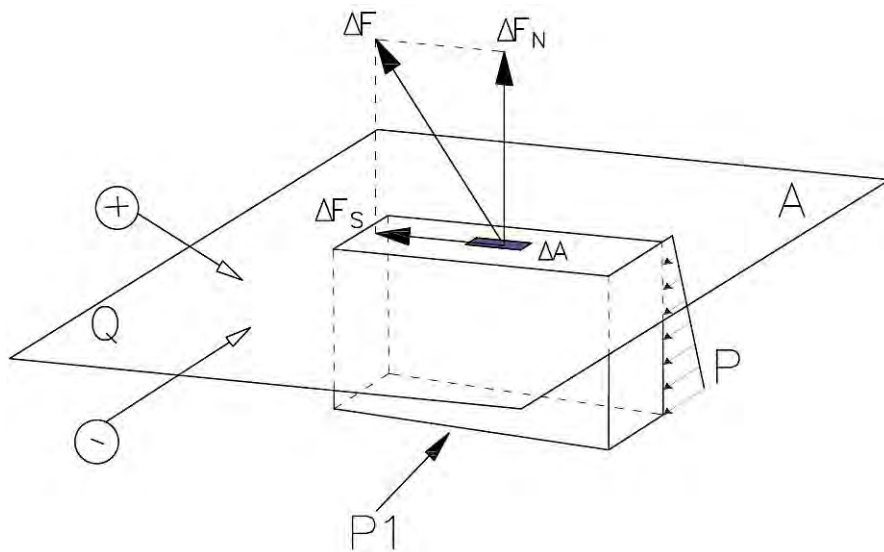


Figura 2.2. Cuerpo general cargado cortado por el plano Q.

La definición de esfuerzo en un punto viene dada al definir  $\Delta A$  infinitesimal, entonces las fuerzas  $\Delta F$ ,  $\Delta F_N$  y  $\Delta F_S$  tienden a cero. Se define entonces el vector de esfuerzo cuando  $\Delta A$  tiende a cero.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$\sigma_N = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

$$\sigma_S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_S}{\Delta A}$$

(2. 1)

### 2.1.2. Tensor de esfuerzos

Sea el diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial en forma de paralelepípedo (Figura 2.3), de lados  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , con sus caras paralelas a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Se tiene por lo tanto tres componentes de esfuerzo perpendiculares entre sí, dos de esfuerzo cortante y una de esfuerzo normal, actuando en cada cara del paralelepípedo.

Se tiene por lo tanto 9 componentes de esfuerzo actuando en el elemento diferencial, 3 esfuerzos normales y 6 esfuerzos cortantes.

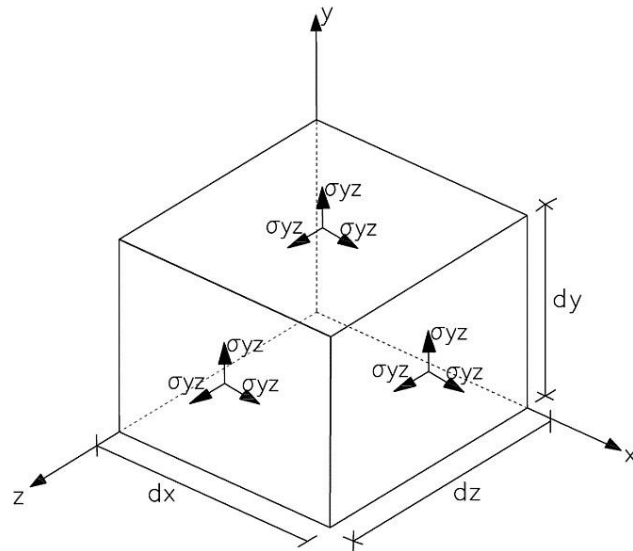


Figura 2.3. Componentes de esfuerzo en un punto de un cuerpo cargado.

Las nueve componentes descritas de esfuerzo pueden presentarse en un arreglo matricial denominado tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Donde:

Esfuerzos normales:  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

Esfuerzos cortantes:  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$

### 2.1.3. Esfuerzos actuando en un plano

Los vectores de esfuerzo en planos perpendiculares a los ejes x, y, z son  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xx} i + \sigma_{xy} j + \sigma_{xz} k \\ \sigma_y &= \sigma_{yx} i + \sigma_{yy} j + \sigma_{yz} k \\ \sigma_z &= \sigma_{zx} i + \sigma_{zy} j + \sigma_{zz} k \end{aligned} \quad (2.3)$$

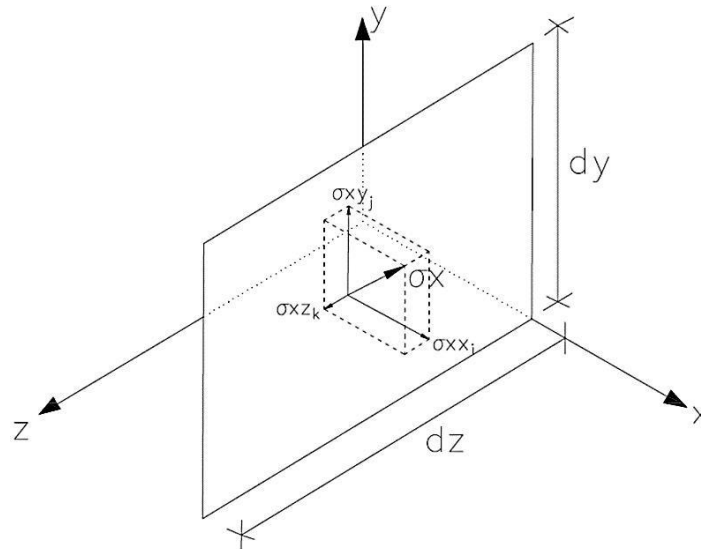


Figura 2.4. Componentes de esfuerzo en un punto de un cuerpo cargado.

Donde  $i, j$  y  $k$  son los vectores unitarios correspondientes a los ejes  $x, y, z$ .

Para obtener el esfuerzo  $\sigma_P$  correspondiente a un plano cualquiera, el vector unitario a dicho plano es:

$$N = l i + m j + n k.$$

Donde  $(l, m, n)$  son los cosenos directores del vector  $N$ , por lo tanto, se puede describir a  $\sigma_P$  como:

$$\sigma_P = l \sigma_x + m \sigma_y + n \sigma_z \quad (2.4)$$

Conocidos los esfuerzos  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  se puede reescribir  $\sigma_P$  como:

$$\begin{aligned} \sigma_{P_x} &= l \sigma_{xx} + m \sigma_{xy} + n \sigma_{xz} \\ \sigma_{P_y} &= l \sigma_{xy} + m \sigma_{yy} + n \sigma_{yz} \\ \sigma_{P_z} &= l \sigma_{xz} + m \sigma_{yz} + n \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (2.5)$$

#### 2.1.4. Esfuerzo normal y esfuerzo cortante en un plano

La componente normal del esfuerzo  $\sigma_P$  en el plano  $P$  se denomina esfuerzo normal ( $\sigma_{PN}$ ) y se obtiene proyectando  $\sigma_P$  en esa dirección, la proyección sobre el plano  $P$  se denomina esfuerzo cortante ( $\sigma_{PS}$ ).

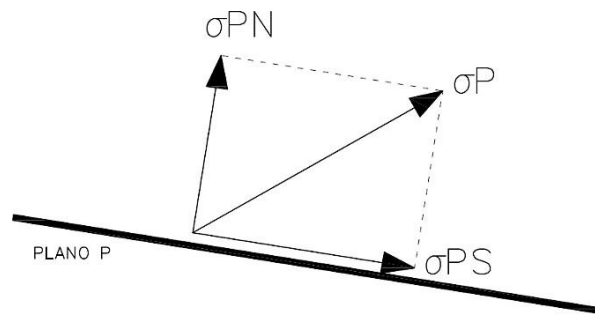


Figura 2.5. Componentes de esfuerzo en un punto de un cuerpo cargado.

Por lo tanto:

$$\sigma^{PN} = \sigma^P \cdot N$$

$$\sigma^{PN} = l^2 \sigma_{xx} + m^2 \sigma_{yy} + n^2 \sigma_{zz} + 2mn \sigma_{yz} + 2ln \sigma_{xz} + 2lm \sigma_{xy} \quad (2.6)$$

El esfuerzo cortante será:

$$\sigma^{P^2} = \sigma^{PS^2} + \sigma^{PN^2} \quad (2.7)$$

**Ejemplo:**

Dado el tensor de esfuerzos  $[\sigma]$ .

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 40 & 50 \\ 40 & 80 & -30 \\ 50 & -30 & 150 \end{bmatrix} MPa$$

Determinar el esfuerzo normal y cortante para un plano:

$$N = (0.6157, 0.3746, 0.6935)$$

**Solución:**

Se tiene:

$$\sigma_{P_x} = l \sigma_{xx} + m \sigma_{xy} + n \sigma_{xz} = 0.6157(100) + 0.3746(40) + 0.6935(50)$$

$$\sigma P_y = l \sigma_{xy} + m \sigma_{yy} + n \sigma_{yz} = 0.6157(40) + 0.3746(80) + 0.6935(-30)$$

$$\sigma P_z = l \sigma_{xz} + m \sigma_{yz} + n \sigma_{zz} = 0.6157(50) + 0.3746(-30) + 0.6935(150)$$

$$\sigma P_x = 111.2 \text{MPa}$$

$$\sigma P_y = 33.8 \text{MPa}$$

$$\sigma P_z = 123.6 \text{MPa}$$

Luego:

$$\sigma_{PN} = \sigma P \cdot N = (111.2, 33.8, 123.6)(0.6157, 0.3746, 0.6935)$$

$$\sigma_{PN} = 166.84 \text{MPa}$$

$$\sigma P = \sqrt{\sigma P_x^2 + \sigma P_y^2 + \sigma P_z^2} = 169.7$$

Finalmente:

$$\sigma_{PS} = \sqrt{\sigma P^2 - \sigma_{PN}^2} = \sqrt{169.7^2 - 166.84^2}$$

$$\sigma_{PS} = 31.02 \text{MPa}$$

### 2.1.5. Transformación de esfuerzos

Se desea conocer el tensor de esfuerzos en un sistema (X, Y, Z) a partir de un sistema (x, y, z) conocido. Ambos sistemas tienen el mismo origen común "o".

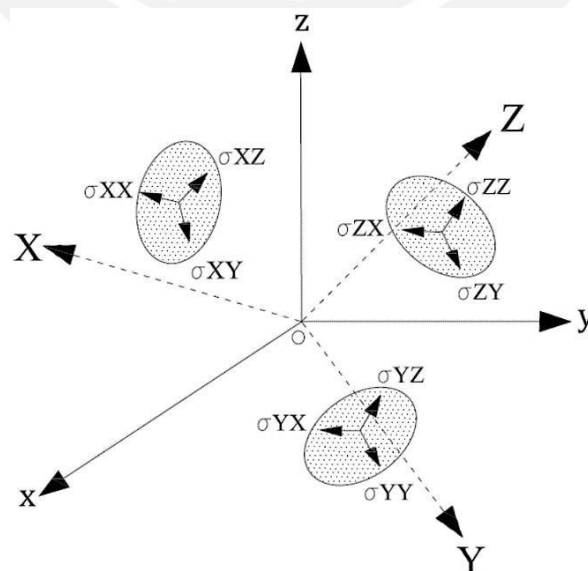


Figura 2.6. Componentes de esfuerzo en un plano perpendicular al eje X rotado.



Sean dos sistemas de ejes rectangulares  $(x, y, z)$  y  $(X, Y, Z)$  con el mismo origen común, los cosenos de ángulos que forman dichos ejes son los siguientes:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \theta_{xX}, & l_2 &= \cos \theta_{xY}, & l_3 &= \cos \theta_{xZ} \\ m_1 &= \cos \theta_{yX}, & m_2 &= \cos \theta_{yY}, & m_3 &= \cos \theta_{yZ} \\ n_1 &= \cos \theta_{zX}, & n_2 &= \cos \theta_{zY}, & n_3 &= \cos \theta_{zZ} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dado que ambos sistemas rectangulares son ortogonales debe cumplirse que:

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Los cosenos directores que definen la dirección de  $(X, Y, Z)$  respecto a  $(x, y, z)$  son:

$$\begin{aligned} N_1 &= (l_1, m_1, n_1) \\ N_2 &= (l_2, m_2, n_2) \\ N_3 &= (l_3, m_3, n_3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se tiene entonces que  $\sigma_{XX}$ ,  $\sigma_{YY}$ ,  $\sigma_{ZZ}$  representan la componente de esfuerzo normal y  $\sigma_{XY}$ ,  $\sigma_{YZ}$ ,  $\sigma_{XZ}$  son los esfuerzos cortantes en los planos X, Y, Z. Por lo tanto, aplicando la teoría de esfuerzo normal y cortante en un plano:

$$\begin{aligned} \sigma_{XX} &= l_1^2 \sigma_{xx} + m_1^2 \sigma_{yy} + n_1^2 \sigma_{zz} + 2l_1 m_1 \sigma_{xy} + 2l_1 n_1 \sigma_{xz} + 2m_1 n_1 \sigma_{yz} \\ \sigma_{YY} &= l_2^2 \sigma_{xx} + m_2^2 \sigma_{yy} + n_2^2 \sigma_{zz} + 2l_2 m_2 \sigma_{xy} + 2l_2 n_2 \sigma_{xz} + 2m_2 n_2 \sigma_{yz} \\ \sigma_{ZZ} &= l_3^2 \sigma_{xx} + m_3^2 \sigma_{yy} + n_3^2 \sigma_{zz} + 2l_3 m_3 \sigma_{xy} + 2l_3 n_3 \sigma_{xz} + 2m_3 n_3 \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \sigma_{XX} &= \sigma_x \cdot N_1 \\ \sigma_{YY} &= \sigma_y \cdot N_2 \\ \sigma_{ZZ} &= \sigma_z \cdot N_3 \end{aligned} \quad (2.12)$$

El esfuerzo cortante  $\sigma_{XS}$  se descompone en un plano perpendicular al eje X en las direcciones Y y Z, obteniéndose:

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= \sigma_X \cdot N2 \\ \sigma_{XZ} &= \sigma_X \cdot N3\end{aligned}\tag{2. 13}$$

De manera similar para  $\sigma_{YS}$  y  $\sigma_{XS}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{YX} &= \sigma_Y \cdot N1 \\ \sigma_{YZ} &= \sigma_Y \cdot N3 \\ \sigma_{ZX} &= \sigma_Z \cdot N1 \\ \sigma_{ZY} &= \sigma_Z \cdot N2\end{aligned}\tag{2. 14}$$

Además  $\sigma_X$  puede escribirse como:

$$\sigma_X = l \sigma_x + m \sigma_y + n \sigma_z\tag{2. 15}$$

$$\sigma_X = [(l_1\sigma_{xx} + m_1\sigma_{xy} + n_1\sigma_{xz}), (l_1\sigma_{xy} + m_1\sigma_{yy} + n_1\sigma_{yz}), (l_1\sigma_{xz} + m_1\sigma_{yz} + n_1\sigma_{zz})]\tag{2. 16}$$

Desarrollando la ecuación (2.11) se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= l_1l_2\sigma_{xx} + m_1m_2\sigma_{yy} + n_1n_2\sigma_{zz} + (l_1m_2 + l_2m_1)\sigma_{xy} \\ &\quad + (l_1n_2 + l_2n_1)\sigma_{xz} + (m_1n_2 + m_2n_1)\sigma_{yz} \\ \sigma_{XZ} &= l_1l_3\sigma_{xx} + m_1m_3\sigma_{yy} + n_1n_3\sigma_{zz} + (l_1m_3 + l_3m_1)\sigma_{xy} \\ &\quad + (l_1n_3 + l_3n_1)\sigma_{xz} + (m_1n_3 + m_3n_1)\sigma_{yz} \\ \sigma_{YZ} &= l_2l_3\sigma_{xx} + m_2m_3\sigma_{yy} + n_2n_3\sigma_{zz} + (l_2m_3 + l_3m_2)\sigma_{xy} \\ &\quad + (l_2n_3 + l_3n_2)\sigma_{xz} + (m_2n_3 + m_3n_2)\sigma_{yz}\end{aligned}\tag{2. 17}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Se define entonces la matriz de transformación [T] como:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, la transformación de un sistema de coordenadas (x,y,z) a uno (X,Y,Z) se obtiene aplicando la siguiente ecuación de transformación:

$$[\sigma_{IJ}] = [T] \cdot [\sigma_{ij}] \cdot [T]^T \quad (2.20)$$

**Ejemplo:**

Dado el tensor de esfuerzos  $[\sigma]$ .

$$\sigma = \begin{bmatrix} 80 & -20 & 100 \\ -20 & 40 & 70 \\ 100 & 70 & 40 \end{bmatrix} MPa$$

Calcular los esfuerzos y direcciones para:

$$N1 = (0.4126, 0.4136, -0.8116)$$

$$N2 = (0.4295, 0.6974, 0.5738)$$

$$N3 = (0.8033, -0.5853, 0.1101)$$

Solución:

Se tiene:

$$[\sigma_{IJ}] = [T] \cdot [\sigma_{ij}] \cdot [T]^T$$

Donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} l1 & m1 & n1 \\ l2 & m2 & n2 \\ l3 & m3 & n3 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.4126 & 0.4136 & -0.8116 \\ 0.4295 & 0.6974 & 0.5738 \\ 0.8033 & -0.5853 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

Operando se tiene:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.4126 & 0.4136 & -0.8116 \\ 0.4295 & 0.6974 & 0.5738 \\ 0.8033 & -0.5853 & 0.1101 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 80 & -20 & 100 \\ -20 & 40 & 70 \\ 100 & 70 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0.4126 & 0.4295 & 0.8033 \\ 0.4136 & 0.6974 & -0.5853 \\ -0.8116 & 0.5738 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 13.6191 & -3.5528 & -65.1958 \\ -3.5528 & 19.4547 & -23.5092 \\ -65.1958 & -23.5092 & 0.4849 \end{bmatrix}$$

### 2.1.6. Esfuerzos principales y sus direcciones

Para un trío de esfuerzos en un sistema de ejes ortogonales, existe un plano donde el esfuerzo normal es máximo, en dicho plano para que el esfuerzo normal sea máximo se debe cumplir que el esfuerzo cortante asociado sea cero.

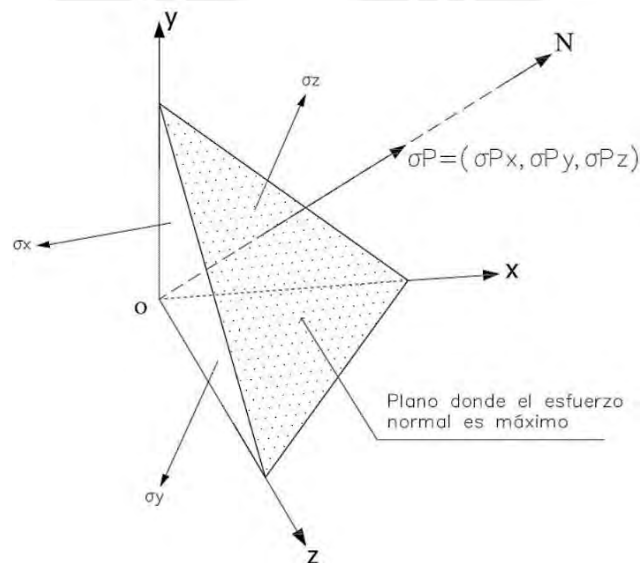


Figura 2.7. Composición vectorial del esfuerzo máximo  $\sigma_P$ .

En la figura 2.7 se muestra el plano P donde el esfuerzo cortante para el sistema de cargas ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) es cero y el esfuerzo  $\sigma_P$  es máximo.

Los esfuerzos actuando en el plano P son:

$$\sigma_P x = l \sigma_{xx} + m \sigma_{xy} + n \sigma_{xz} \quad (2.21)$$

$$\sigma_P y = l \sigma_{xy} + m \sigma_{yy} + n \sigma_{yz}$$

$$\sigma_P z = l \sigma_{xz} + m \sigma_{yz} + n \sigma_{zz}$$

Se define " $\sigma$ " como el módulo del esfuerzo máximo  $\sigma_P$ , siendo:

$$\sigma_P x = \sigma l \quad (2.22)$$

$$\sigma_P y = \sigma m$$

$$\sigma_P z = \sigma n$$

Se obtiene entonces tres ecuaciones homogéneas con cuatro incógnitas " $\sigma$ ", " $l$ ", " $m$ " y " $n$ ":

$$(\sigma_{xx} - \sigma) l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n = 0 \quad (2.23)$$

$$\sigma_{xy} l + (\sigma_{yy} - \sigma) m + \sigma_{yz} n = 0$$

$$\sigma_{xz} l + \sigma_{yz} m + (\sigma_{zz} - \sigma) n = 0$$

Para obtener el valor de " $\sigma$ " se debe cumplir que el determinante de los coeficientes del sistema anterior sea cero. La dirección de " $\sigma$ " está dada por el vector  $N = (l, m, n)$  que debe cumplir  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

El cálculo de este determinante nos lleva a tener tres valores o tres raíces posibles para satisfacer el sistema. Por lo tanto, se tiene:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.25)$$

Los términos  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son las invariantes de esfuerzos, donde:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2. 26)$$

$$I_2 = - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2. 27)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (2. 28)$$

Resolviendo los determinantes anteriores y definiendo los tres valores de esfuerzos principales como  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ , los esfuerzos máximos son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{zz} - \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} \\ I_3 &= \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} + 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sigma_{xz} \cdot \sigma_{yz} - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy} \cdot \sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz} \cdot \sigma_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2. 29)$$

Las direcciones principales se obtienen de reemplazar el valor de los esfuerzos principales en las ecuaciones homogéneas anteriormente definidas (2.23) que incluyen  $l, m$  y  $n$ .

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_1) l_1 + \sigma_{xy} m_1 + \sigma_{xz} n_1 &= 0 \\ \sigma_{xy} l_1 + (\sigma_{yy} - \sigma_1) m_1 + \sigma_{yz} n_1 &= 0 \\ \sigma_{xz} l_1 + \sigma_{yz} m_1 + (\sigma_{zz} - \sigma_1) n_1 &= 0 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2. 30)$$

Luego se obtiene:

$$\begin{aligned} N1 &= (l_1, m_1, n_1) \\ N2 &= (l_2, m_2, n_2) \\ N3 &= (l_3, m_3, n_3) \end{aligned} \quad (2. 31)$$

**Ejemplo:**

Dado el tensor de esfuerzos  $[\sigma]$ , calcular los esfuerzos principales y sus direcciones.

$$\sigma = \begin{bmatrix} -90 & 70 & -55 \\ 70 & -60 & -40 \\ -55 & -40 & 40 \end{bmatrix} MPa$$

Solución:

Se halla las invariantes:

$$I_1 = -90 - 60 + 40 = -110$$

$$I_2 = - \begin{vmatrix} -90 & 70 \\ 70 & -60 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -90 & -55 \\ -55 & 40 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -60 & -40 \\ -40 & 40 \end{vmatrix} = 10125$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} -90 & 70 & -55 \\ 70 & -60 & -40 \\ -55 & -40 & 40 \end{vmatrix} = 653500$$

Luego:

$$\sigma^3 - (-110)\sigma^2 - 10125\sigma - 653500 = 0$$

Se obtiene las 3 raíces:

$$\sigma_1 = 88.34MPa, \quad \sigma_2 = -49.80MPa, \quad \sigma_3 = -148.54MPa$$

Las direcciones principales se obtienen de:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_1) l_1 + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n_1 = 0$$

$$\sigma_{xy} l_1 + (\sigma_{yy} - \sigma_1) m_1 + \sigma_{yz} n = 0$$

$$\sigma_{xz} l_1 + \sigma_{yz} m_1 + (\sigma_{zz} - \sigma_1) n_1 = 0$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

Por lo tanto:

$$(-90 - 88.34) l_1 + 70 m + -55 n_1 = 0$$

$$70 l_1 + (-60 - 88.34) m_1 + -40 n = 0$$

$$-55 l_1 + -40 m_1 + (40 - \sigma_1) n_1 = 0$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

De donde se obtiene:

$$l_1 = -0.4126 \quad m_1 = -0.4136 \quad n_1 = 0.8116$$

De manera similar se resuelve:

$$l_2 = 0.4295 \quad m_2 = 0.6974 \quad n_3 = 0.5737$$

$$l_3 = -0.8033 \quad m_3 = 0.5853 \quad n_3 = -0.1102$$

### 2.1.7. Círculo de Mohr para el estado general de esfuerzos

La falla de un cuerpo cargado viene asociada a un esfuerzo normal o cortante máximo en un punto. El esfuerzo normal máximo es el mayor de los tres esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , ordenados de mayor a menor.

El círculo de Mohr es una técnica que se usa para representar el estado de esfuerzos en un punto en forma gráfica, para ello se asume conocidos los ejes principales 1, 2 y 3, asociados a los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ .

Para graficar los tres círculos se define un plano "P", dado por los cosenos directores (l, m, n), con un esfuerzo normal  $\sigma P_n$  y un esfuerzo cortante  $\sigma P_s$ . Siendo  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  los esfuerzos principales, se tiene entonces:

$$\sigma P_n = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3$$

$$\sigma P_n^2 + \sigma P_s^2 = \sigma P^2 \quad (2.32)$$



Siendo:

$$\begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \\ \sigma P^2 &= l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Las ecuaciones anteriores pueden representarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l^2 \\ m^2 \\ n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma P n \\ \sigma P n^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{\sigma P s^2 + (\sigma P n - \sigma_2)(\sigma P n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)} \\ m^2 &= \frac{\sigma P s^2 + (\sigma P n - \sigma_1)(\sigma P n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n^2 &= \frac{\sigma P s^2 + (\sigma P n - \sigma_1)(\sigma P n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Los valores de  $l^2$ ,  $m^2$ ,  $n^2$  deben ser mayores a cero y siendo  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  se concluye que los denominadores de  $l^2$  y  $n^2$  son mayores a cero y el de  $m^2$  menor de cero. Por lo tanto, se obtiene las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma P s^2 + (\sigma P n - \sigma_2) + (\sigma P n - \sigma_3) &\geq 0 \\ \sigma P s^2 + (\sigma P n - \sigma_1) + (\sigma P n - \sigma_3) &\leq 0 \\ \sigma P s^2 + (\sigma P n - \sigma_1) + (\sigma P n - \sigma_2) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

De estas inecuaciones se puede desarrollar ecuaciones cartesianas de circunferencias tomando los ejes normales como abscisas y los esfuerzos cortantes como ordenadas:

$$\left[ \sigma P n - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \right]^2 + \sigma P s^2 \geq \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} = \tau_3^2 \quad (2.36)$$

$$[\sigma P_n - (\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2})]^2 + \sigma P_s^2 \geq \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} = \tau_2^2$$

$$[\sigma P_n - (\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})]^2 + \sigma P_s^2 \geq \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} = \tau_1^2$$

El máximo esfuerzo cortante absoluto es:

$$\sigma P_{s\text{máx}} = \tau_{\text{máx}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad (2.37)$$

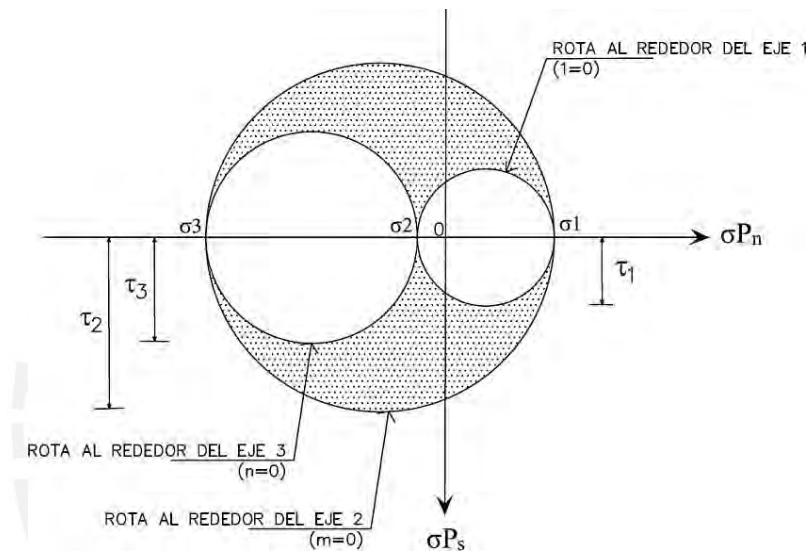


Figura 2.8. Círculo de Mohr para el estado general de esfuerzos.

El área sombreada de la figura 2.8 representa la intersección de las 3 inecuaciones (2.29), cada inecuación se representa como puntos  $(\sigma P_n, \sigma P_s)$ . Cada círculo representa la rotación alrededor de uno de los ejes principales, así, el círculo  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  representa todos los ejes que se dan en la rotación alrededor del eje 3, cuando  $(n=0)$ .

Existen dos opciones para graficar los ejes del círculo de Mohr, con el eje de esfuerzos cortantes hacia arriba o hacia abajo. La ventaja de graficar el eje de esfuerzos cortantes hacia abajo es que las rotaciones tienen signo positivo en la dirección contraria a las agujas del reloj, lo que concuerda con la convención de signos para esfuerzos cortantes.

### 2.1.8. Círculo de Mohr para el estado plano de esfuerzos

En algunos problemas de esfuerzos, es necesario realizar ciertas simplificaciones, tal es el caso de una placa delgada sujeta a esfuerzos en su plano. Una placa delgada se define como un cuerpo prismático con un espesor muy pequeño, como en el caso de una plancha de acero sometida a tracción.

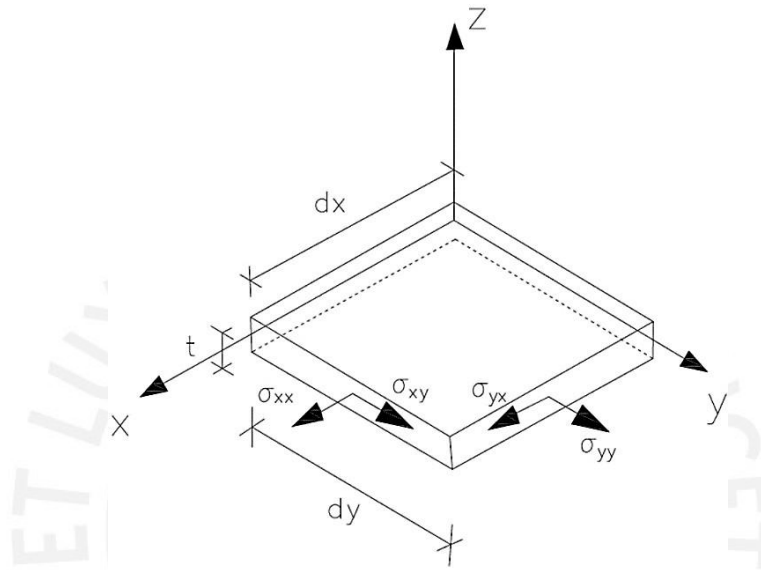


Figura 2.9. Estado plano de esfuerzos.

Si consideramos que el eje z se ubica en la dirección del espesor de la placa delgada y en este no actúan cargas, se tiene:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (2.38)$$

Entonces el tensor de esfuerzos se convierte en una función dependiente de dos direcciones (x, y). A esta condición se llama estado plano de esfuerzos, siendo el tensor plano de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

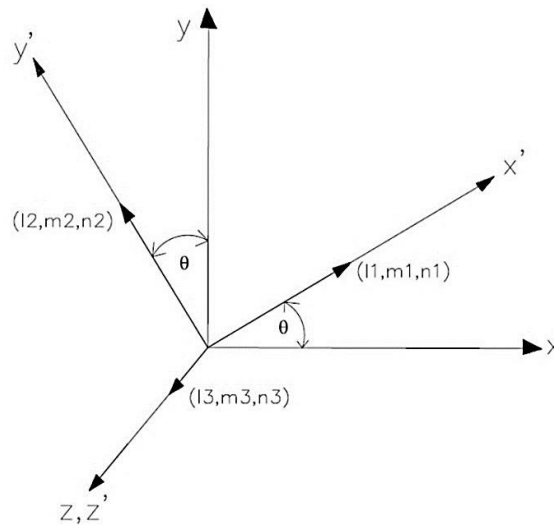


Figura 2.10. Estado plano de esfuerzos.

Si transformamos estos esfuerzos de un sistema  $(x,y,z)$  a otro  $(x',y',z')$  con cosenos directores:

$$(l_1, m_1, n_1) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (2.40)$$

$$(l_2, m_2, n_2) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$(l_3, m_3, n_3) = (0, 0, 1)$$

Utilizando las ecuaciones de transformación de esfuerzos y relaciones trigonométricas se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{xy} \sin(2\theta) \quad (2.41)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \sigma_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\sigma_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \sigma_{xy} \cos(2\theta)$$

Para hallar los valores máximos se deriva las ecuaciones anteriores con respecto a  $\theta$  y se iguala a cero, por lo tanto:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.42)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.43)$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.44)$$

Siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  los esfuerzos principales y  $\tau_{m\acute{a}x}$  el máximo esfuerzo cortante en el plano  $(x, y)$ .

El círculo de Mohr para un estado plano de esfuerzos se obtiene de graficar  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\tau_{m\acute{a}x}$  sobre los ejes  $(\sigma_x, \sigma_x)$  y el cortante  $\sigma_{xy}$ . Siendo el radio del círculo "R" y el centro "C".

$$C = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} \quad (2.45)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.46)$$

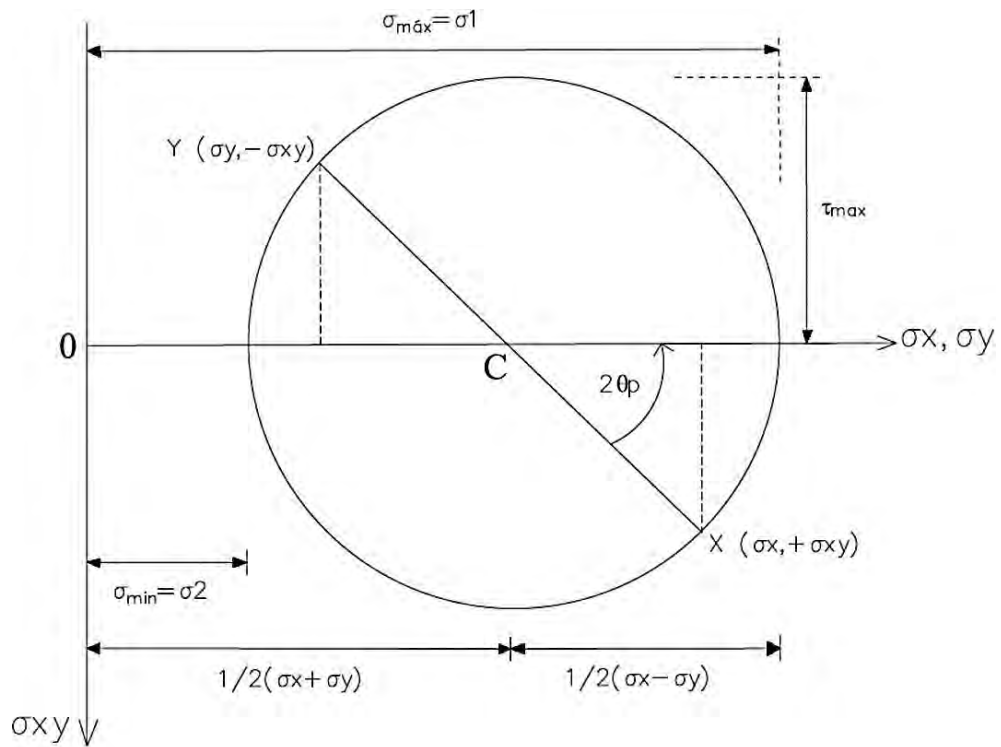


Figura 2.11. Círculo de Mohr para el estado plano de esfuerzos.

## 2.2 APLICACIONES EN MATLAB

Esta aplicación permite calcular los esfuerzos principales, rotar los ejes de esfuerzos, calcular los esfuerzos en un plano determinado y graficar el círculo de Mohr para un estado general de esfuerzos.

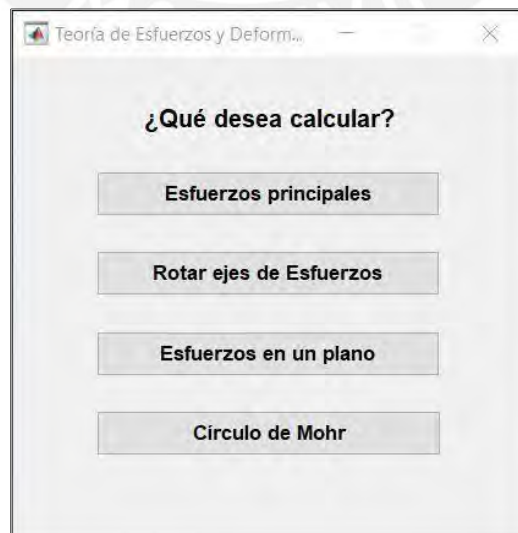


Figura 2.12. Menú principal.

Al ejecutar la aplicación se despliega el menú principal del programa (Figura 2.12).

### 2.2.1 Esfuerzos Principales

Para calcular los esfuerzos principales se debe ingresar los esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$   $\sigma_{yy}$   $\sigma_{zz}$  y cortantes  $\sigma_{xy}$   $\sigma_{xz}$   $\sigma_{yz}$  solicitados, en MPa. (Figura 2.13).

Figura 2.13. Ventana de ingreso de datos.

Los esfuerzos ingresados corresponden al tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Al ejecutar el programa se obtiene:

- a) El tensor de esfuerzos. Muestra los valores ingresados en un arreglo matricial de 3x3.

	x	y	z
x	-90	70	-55
y	70	-60	-40
z	-55	-40	40

Figura 2.14. Tensor de esfuerzos.

- b) Los esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.

	Esfuerzos (MPa)
1	-148.5450
2	-49.7983
3	88.3432

Figura 2.15. Esfuerzos principales.

- c) Dirección de esfuerzos principales. Muestra los cosenos directores correspondiente a la dirección de los esfuerzos principales.

	i	j	k
1	-0.8033	0.5853	-0.1102
2	0.4295	0.6974	0.5737
3	-0.4126	-0.4136	0.8116

Figura 2.16. Cosenos directores de los esfuerzos principales.

- d) El tensor de esfuerzos principales. Muestra el tensor de esfuerzos principales en un arreglo matricial de 3x3.

	X	Y	Z
X	-111.8427	25.3372	-45.0811
Y	25.3372	-22.5436	81.8222
Z	-45.0811	81.8222	24.3863

Figura 2.17. Tensor de esfuerzos principales.



- e) Gráfica de esfuerzos. Muestra gráficamente el tensor de esfuerzos ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) en color negro y el tensor de esfuerzos principales ( $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ ) de colores rojo, verde y azul.

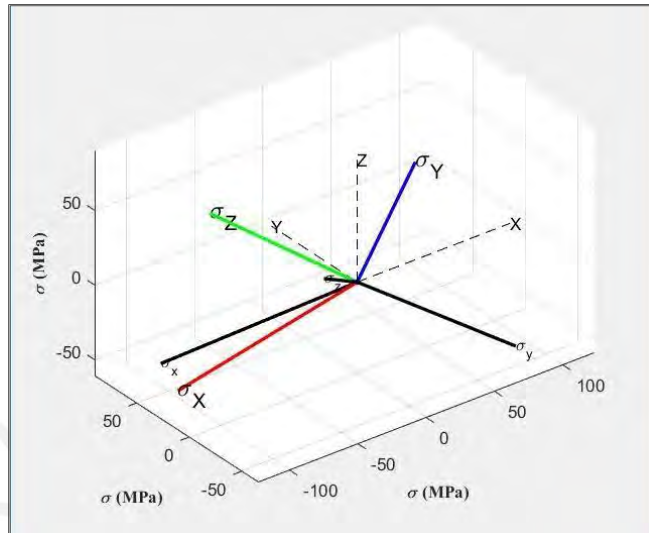


Figura 2.18. Esfuerzos principales ( $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ )

## 2.2.2 Rotar ejes de esfuerzos

Un tensor de esfuerzos se puede rotar a partir de un vector unitario con cosenos directores ( $l, m, n$ ). Se ingresa el vector unitario de rotación (Fig. 2.19), los esfuerzos normales  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  y cortantes  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ , en MPa (Fig. 2.20).

Figuras 2.19. Ingreso del vector unitario de rotación.

El vector unitario de rotación ingresado corresponde a:

$$N1 = (l1, m1, n1)$$

$$N2 = (l2, m2, n2)$$

El vector N3 es calculado perpendicular al plano N1xN2.

$$N3 = (l3, m3, n3)$$

Los esfuerzos ingresados corresponden al tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

The screenshot shows a dialog box with the following input values:

- $\sigma_{xx}$  (MPa): 80
- $\sigma_{yy}$  (MPa): 40
- $\sigma_{zz}$  (MPa): 40
- $\sigma_{xy}$  (MPa): -20
- $\sigma_{xz}$  (MPa): 100
- $\sigma_{yz}$  (MPa): 70

Figuras 2.20. Ingreso del tensor de esfuerzos.

Se obtiene:

- a) El tensor de esfuerzos rotado. Muestra los valores del tensor de esfuerzos rotados a partir de los cosenos directores de rotación.

	i	j	k
i	-73.9847	-36.4235	-12.7706
j	-36.4235	140.6449	40.2989
k	-12.7706	40.2989	93.2849

Figura 2.21. Esfuerzos rotados.

- b) El vector unitario de rotación. Muestra los valores del vector unitario de rotación ( $N1, N2, N3$ ).

Figure 1: VECTOR UNITARIO DE ROTACIÓN

File Edit View Insert Tools Desktop Window Help

	mi	ni	li
N1	0.4126	0.4136	-0.8116
N2	0.4295	0.6974	0.5735
N3	0.8032	-0.5852	0.1101

Figura 2.22. Esfuerzos rotados.

- c) Gráfica de esfuerzos. Muestra gráficamente el tensor de esfuerzos  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  en color negro y el tensor de esfuerzos rotado  $(\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'})$  de colores rojo, verde y azul.

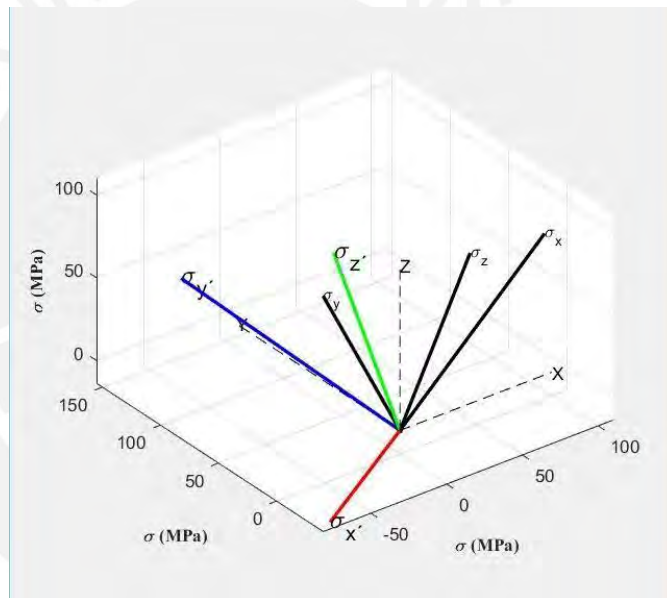


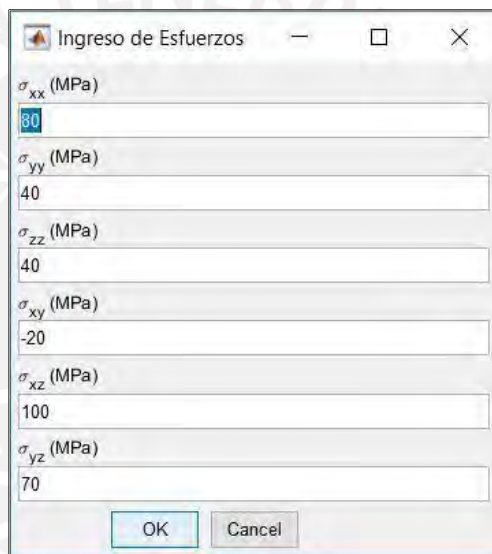
Figura 2.23. Esfuerzos rotados  $(\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'})$ .

### 2.2.3 Esfuerzos en un plano

Para un tensor de esfuerzos, se puede calcular los esfuerzos en un plano definido por sus cosenos directores ( $l$ ,  $m$ ,  $n$ ). Se ingresa el tensor de esfuerzos (Fig. 2.24) y los cosenos directores del plano correspondiente (Fig. 2.25).

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Ingreso de Esfuerzos

$\sigma_{xx}$  (MPa)  
80

$\sigma_{yy}$  (MPa)  
40

$\sigma_{zz}$  (MPa)  
40

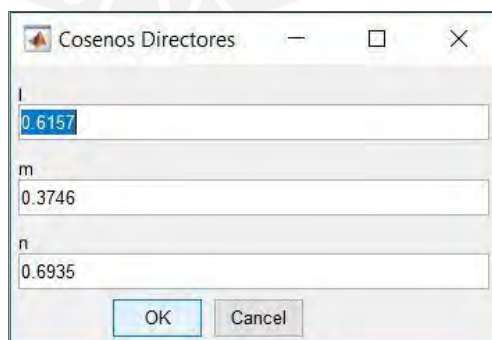
$\sigma_{xy}$  (MPa)  
-20

$\sigma_{xz}$  (MPa)  
100

$\sigma_{yz}$  (MPa)  
70

OK Cancel

Figura 2.24. Ingreso del tensor de esfuerzos.



Cosenos Directores

l  
0.6157

m  
0.3746


n  
0.6935

OK Cancel

Figura 2.25. Ingreso de los cosenos directores.

Se obtiene:

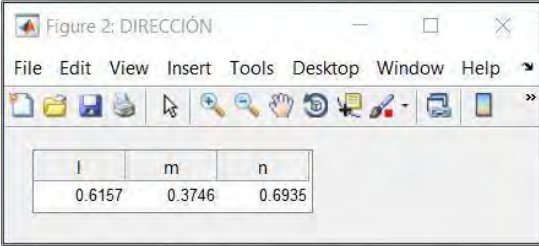
- a) El tensor de esfuerzos rotado. Muestra los valores del tensor de esfuerzos rotado a partir de los cosenos directores de rotación  $(l, m, n)$ .



Normal (MPa)	Cortante (MPa)
167.7195	13.6792

Figura 2.26. Esfuerzos en un plano dado.

- b) Dirección del tensor de esfuerzos rotado.



l	m	n
0.6157	0.3746	0.6935

Figura 2.27. Esfuerzos en un plano dado.

## 2.2.4 Círculo de Mohr

Esta aplicación calcula los esfuerzos principales y su dirección, además grafica el círculo de Mohr del estado de esfuerzo.

Se ingresa el tensor de esfuerzos en MPa (*Figura 2.28*) y la aplicación determina de acuerdo a los datos ingresados si se trata de un estado general o un estado plano de esfuerzos.

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Ingreso de Esfuerzos

$\sigma_{xx}$  (MPa)  
30

$\sigma_{yy}$  (MPa)  
-40

$\sigma_{zz}$  (MPa)  
70

$\sigma_{xy}$  (MPa)  
-20

$\sigma_{xz}$  (MPa)  
15

$\sigma_{yz}$  (MPa)  
10

OK Cancel

Figura 2.28. Ingreso del tensor de esfuerzos.

Se obtiene:

- a) Gráfico del círculo de Mohr. Muestra los esfuerzos principales, normales y cortantes máximos para el estado de esfuerzos dado.

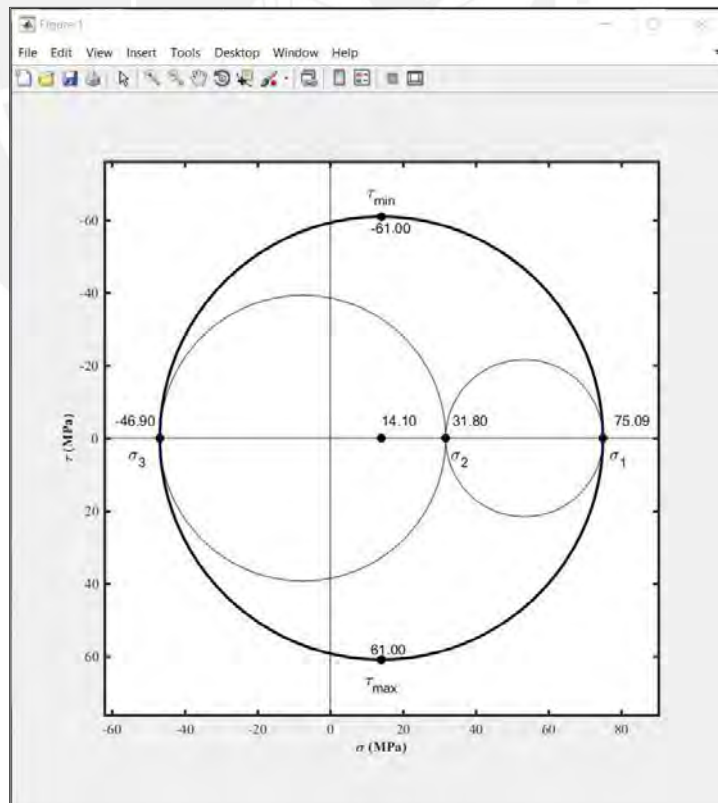


Figura 2.29. Círculo de Mohr en 3D.

- b) Esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.

	Esfuerzo (MPa)
1	-46.8973
2	31.8024
3	75.0950

Figura 2.30. Esfuerzos principales.

- c) Dirección de esfuerzos principales. Muestra los cosenos directores correspondiente a los esfuerzos principales.

	i	j	k
i	0.2712	0.9554	-0.1165
j	0.9134	-0.2937	-0.2818
k	0.3035	0.0300	0.9524

Figura 2.31. Dirección de esfuerzos principales.

- d) Dirección de esfuerzos principales. Muestra los cosenos directores correspondiente a los esfuerzos principales.

	X	Y	Z
X	26.6008	-18.0757	-11.2827
Y	-18.0757	-30.4215	-33.4349
Z	-11.2827	-33.4349	63.8207

Figura 2.32. Tensor de esfuerzos principales.

## CAPÍTULO 3

### LEY DE HOOKE GENERALIZADA CON APLICACIONES DE TEMPERATURA

#### 3.1 DEFINICIONES GENERALES

##### 3.1.1 Tensor de deformaciones

La ley generalizada de Hooke establece que es posible conocer la deformación de un cuerpo elástico a partir del tensor de esfuerzos, conociendo el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y la variación de temperatura para un sistema coordenado (x,y,z).

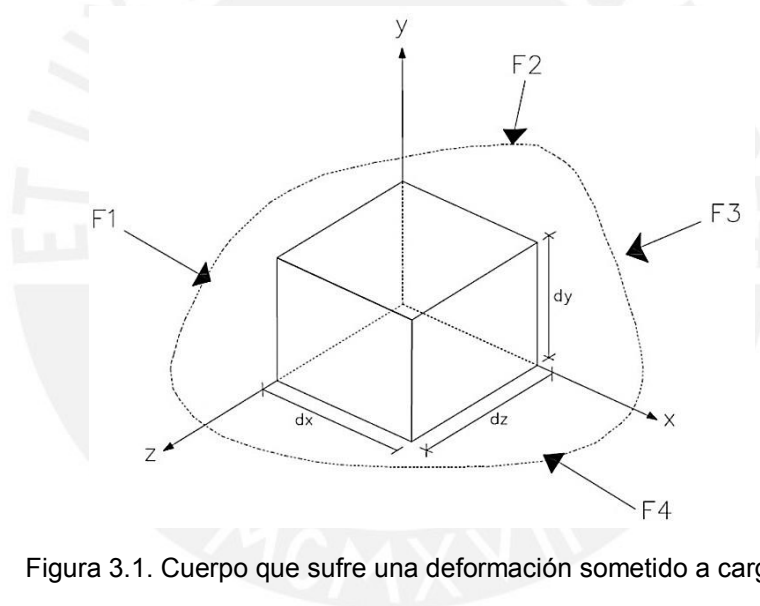


Figura 3.1. Cuerpo que sufre una deformación sometido a cargas.

Se tiene:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha\Delta T$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{yz}\end{aligned}\tag{3. 1}$$

Donde:

$E$  = Módulo de Young.

$\nu$  = Coeficiente de Poisson.

$\varepsilon_{ij}$  = deformación unitaria en la dirección  $i, j$ .

$\Delta T$  = Variación de temperatura.

$\alpha$  = Coeficiente de temperatura.

Se define entonces el tensor de deformaciones como:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\tag{3. 2}$$

### 3.1.2 Deformaciones Principales y sus direcciones

Cuando un cuerpo se deforma los puntos contiguos  $P(x, y, z)$  y  $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$  pasan a las posiciones  $P^*(x^*, y^*, z^*)$  y  $Q^*(x^* + dx^*, y^* + dy^*, z^* + dz^*)$ . El elemento infinitesimal definido por estos dos puntos  $PQ=ds$  en la deformación pasa a ser  $P^*Q^*=ds^*$ .

Se define entonces la deformación unitaria de  $PQ=ds$  como:

$$\varepsilon_E = \frac{ds^* - ds}{ds}\tag{3. 3}$$

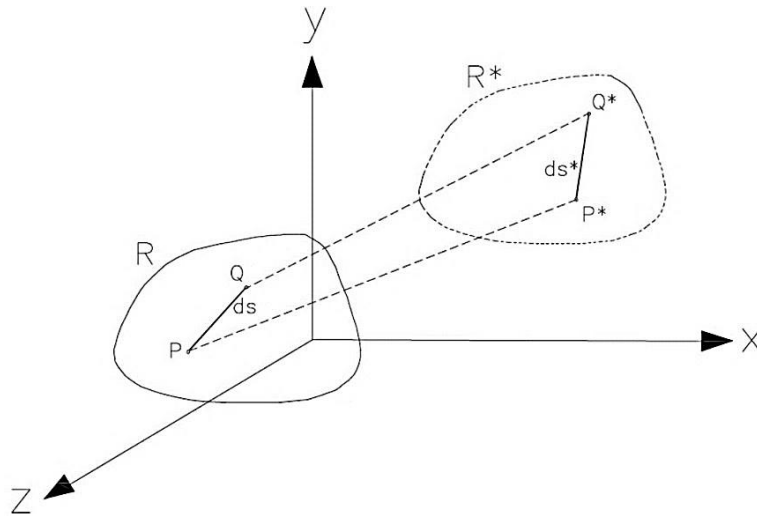


Figura 3.2. Segmento de línea  $PQ=ds$ , en un cuerpo después de deformarse.

Deformación Unitaria ( $\epsilon_E$ ) es la relación existente entre la deformación total del elemento ( $ds^* - ds$ ) y la longitud inicial del elemento.

Además se tiene que la posición final de  $(x^*, y^*, z^*)$  será una función de  $(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} x^* &= x^*(x, y, z) \\ y^* &= y^*(x, y, z) \\ z^* &= z^*(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se define el gradiente de deformación como la derivada de las coordenadas en la configuración deformada respecto de las coordenadas en la configuración informada. Al aplicar este gradiente sobre vectores definidos en el estado no deformado, los transforma en los correspondientes a su estado deformado.

El gradiente de deformación incluye la deformación por esfuerzos y las producidas por cambio de temperatura ( $\alpha\Delta T$ ).

Por lo tanto, el gradiente de deformación será:

$$\begin{aligned} dx^* &= \frac{\partial x^*}{\partial x} dx + \frac{\partial x^*}{\partial y} dy + \frac{\partial x^*}{\partial z} dz \\ dy^* &= \frac{\partial y^*}{\partial x} dx + \frac{\partial y^*}{\partial y} dy + \frac{\partial y^*}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$dx^* = \frac{\partial z^*}{\partial x} dx + \frac{\partial z^*}{\partial y} dy + \frac{\partial z^*}{\partial z} dz$$

Se reemplaza los valores  $x^* = x + u$ ,  $y^* = y + v$ ,  $z^* = z + w$ , donde  $(u, v, w)$  son las componentes de desplazamiento de  $(x, y, z)$ . Se tendrá entonces:

$$\begin{aligned} dx^* &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dy^* &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dz^* &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Además, se tiene:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ (ds^*)^2 &= (dx^*)^2 + (dy^*)^2 + (dz^*)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Se puede definir la deformación de un cuerpo como  $(ds^*)^2 - (ds)^2$ .

$$(ds^*)^2 - (ds)^2 = (dx^*)^2 - (dx)^2 + (dy^*)^2 - (dy)^2 + (dz^*)^2 - (dz)^2 \quad (3.8)$$

Operando (3.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} &(ds^*)^2 - (ds)^2 \\ &= \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] (dx)^2 \\ &+ \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] (dy)^2 \\ &+ \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] (dz)^2 \\ &+ 2 \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right] dx dy \\ &+ 2 \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\right] dx dz \\ &+ 2 \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right] dy dz \end{aligned} \quad (3.9)$$

Entonces se define las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

Definimos entonces el factor de amplificación M como:

$$M = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{ds^*}{ds} \right)^2 - 1 \right] = \varepsilon_E + \frac{1}{2} \varepsilon_E^2 \quad (3.12)$$

$$M = l^2 \varepsilon_{xx} + m^2 \varepsilon_{yy} + n^2 \varepsilon_{zz} + 2lm \varepsilon_{xy} + 2ln \varepsilon_{xz} + 2mn \varepsilon_{yz} \quad (3.13)$$

El factor de amplificación M es una medida de la deformación de una línea del cuerpo con los cosenos directores  $(l, m, n)$ , siendo los cosenos directores:

$$l = \frac{dx}{ds}, m = \frac{dy}{ds}, n = \frac{dz}{ds} \quad (3.14)$$

Al igual que para el caso de un estado de esfuerzos existe un estado principal de deformación. En un punto cualquiera de un elemento no deformado existen tres ejes perpendiculares que permanecen perpendiculares en la deformación. La deformación de estos tres ejes se llama deformación principal.

Se tiene así 3 deformaciones principales  $(\varepsilon_{E1}, \varepsilon_{E2}, \varepsilon_{E3})$  y 3 factores de amplificación  $(M_1, M_2, M_3)$ .

De manera análoga a la teoría de esfuerzos, los valores principales del factor de amplificación se obtiene de las tres raíces del determinante de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - M & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - M & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - M \end{vmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

El cálculo de este determinante nos lleva a tener tres valores o tres raíces posibles para satisfacer el sistema. Por lo tanto, se tiene:

$$M^3 - I_1 M^2 + I_2 M - I_3 = 0 \quad (3.16)$$

$$M = \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{E} \quad (3.17)$$

Los términos ( $I_1, I_2, I_3$ ) son las invariantes de deformaciones, donde:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (3.18) \\ I_2 &= - \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En el caso en que los ejes principales coincidan con los ejes (x,y,z) se cumplirá que  $M_1 = \varepsilon_{xx}, M_2 = \varepsilon_{yy}, M_3 = \varepsilon_{zz}$ . Por lo que las deformaciones principales pueden calcularse con las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (3.19) \\ I_2 &= \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2 \\ I_3 &= \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{zz} + 2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot \varepsilon_{xz} \cdot \varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{zz} \cdot \varepsilon_{xy}^2 \end{aligned}$$

Debido a la simetría del determinante de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - M & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - M & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - M \end{vmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

Las direcciones principales pueden obtenerse de resolver las ecuaciones:

$$(\varepsilon_{xx} - M)l + \varepsilon_{xy}m + \varepsilon_{xz}n = 0 \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{xy}l + (\varepsilon_{yy} - M)m + \varepsilon_{yz}n = 0$$

$$\varepsilon_{xz}l + \varepsilon_{yz}m + (\varepsilon_{zz} - M)n = 0$$

$$M = \varepsilon_E + \frac{1}{2} \varepsilon_E^2 \quad (3.22)$$

Con:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (3.23)$$

**Ejemplo:**

Dado el tensor de deformación  $[\varepsilon]$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0.00148 & -0.00026 & 0.00130 \\ -0.00026 & 0.00122 & 0.00091 \\ 0.00130 & 0.00091 & 0.00122 \end{bmatrix}$$

Calcular las deformaciones principales y sus direcciones.

**Solución:**

Se halla las invariantes:

$$I_1 = -0.002 + 0.0025$$

$$I_2 = - \begin{vmatrix} -0.00148 & -0.00026 \\ -0.00026 & 0.00122 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -0.00148 & 0.00130 \\ 0.00130 & 0.00122 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.00122 & 0.00091 \\ 0.00091 & 0.00122 \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0.00148 & -0.00026 & 0.00130 \\ -0.00026 & 0.00122 & 0.00091 \\ 0.00130 & 0.00091 & 0.00122 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$M^3 - I_1M^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

Se obtiene las 3 raíces:

$$\varepsilon_1 = 0.0028, \quad \varepsilon_2 = 0.0015, \quad \varepsilon_3 = 0.00041$$

### 3.1.1 Rotación de deformaciones

Se tiene el factor de amplificación M en el sistema coordenado  $(x, y, z)$  de cosenos directores  $(l, m, n)$ .

$$M = l^2\varepsilon_{xx} + m^2\varepsilon_{yy} + n^2\varepsilon_{zz} + 2lm\varepsilon_{xy} + 2ln\varepsilon_{xz} + 2mn\varepsilon_{yz} \quad (3.24)$$

El cual se transformará a un sistema  $(X, Y, Z)$  definido por los cosenos directores:  $X(l_1, m_1, n_1)$ ,  $Y(l_2, m_2, n_2)$  y  $Z(l_3, m_3, n_3)$ .

El factor de amplificación, orientado según los ejes  $(X, Y, Z)$  será:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{XX} &= l_1^2\varepsilon_{xx} + m_1^2\varepsilon_{yy} + n_1^2\varepsilon_{zz} + 2l_1m_1\varepsilon_{xy} + 2l_1n_1\varepsilon_{xz} + 2m_1n_1\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{YY} &= l_2^2\varepsilon_{xx} + m_2^2\varepsilon_{yy} + n_2^2\varepsilon_{zz} + 2l_2m_2\varepsilon_{xy} + 2l_2n_2\varepsilon_{xz} + 2m_2n_2\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{ZZ} &= l_3^2\varepsilon_{xx} + m_3^2\varepsilon_{yy} + n_3^2\varepsilon_{zz} + 2l_3m_3\varepsilon_{xy} + 2l_3n_3\varepsilon_{xz} + 2m_3n_3\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (3.25)$$

La deformación por corte entre dos elementos lineales se calcula como:

$$\gamma_{12} = (1 + \varepsilon_{E1})(1 + \varepsilon_{E2}) \cos \theta_{12} \quad (3.26)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \gamma_{XY} &= 2\varepsilon_{xx}l_1l_2 + 2\varepsilon_{yy}m_1m_2 + 2\varepsilon_{zz}n_1n_2 + 2\varepsilon_{xy}(l_1m_2 + l_2m_1) \\ &\quad + 2\varepsilon_{xz}(l_1n_2 + l_2n_1) + 2\varepsilon_{yz}(m_1n_2 + m_2n_1) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{XY} = \varepsilon_{XY} = \varepsilon_{xx}l_1l_2 + \varepsilon_{yy}m_1m_2 + \varepsilon_{zz}n_1n_2 + \varepsilon_{xy}(l_1m_2 + l_2m_1) + \varepsilon_{xz}(l_1n_2 + l_2n_1) + \varepsilon_{yz}(m_1n_2 + m_2n_1) \quad (3.28)$$

De manera similar:

$$\frac{1}{2}\gamma_{XZ} = \varepsilon_{XZ} = \varepsilon_{xx}l_1l_3 + \varepsilon_{yy}m_1m_3 + \varepsilon_{zz}n_1n_3 + \varepsilon_{xy}(l_1m_3 + l_3m_1) + \varepsilon_{xz}(l_1n_3 + l_3n_1) + \varepsilon_{yz}(m_1n_3 + m_3n_1) \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{YZ} = \varepsilon_{YZ} = \varepsilon_{xx}l_2l_3 + \varepsilon_{yy}m_2m_3 + \varepsilon_{zz}n_2n_3 + \varepsilon_{xy}(l_2m_3 + l_3m_2) + \varepsilon_{xz}(l_2n_3 + l_3n_2) + \varepsilon_{yz}(m_2n_3 + m_3n_2) \quad (3.30)$$

La transformación de deformaciones es entonces similar a la transformación de esfuerzos. Por lo tanto la transformación de un sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  a uno  $(X, Y, Z)$  se obtiene aplicando la siguiente ecuación de transformación:

$$[\varepsilon_{XY}] = [T] \cdot [\varepsilon_{xy}] \cdot [T]^T \quad (3.31)$$

Siendo:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

### **Ejemplo:**

Dado el tensor de deformación  $[\varepsilon]$ , calcular los esfuerzos principales y sus direcciones.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0.00148 & -0.00026 & 0.00130 \\ -0.00026 & 0.00122 & 0.00091 \\ 0.00130 & 0.00091 & 0.00122 \end{bmatrix}$$



Calcular los esfuerzos y direcciones para:

$$N1 = (0.4126, 0.4136, -0.8116)$$

$$N2 = (0.4295, 0.6974, 0.5735)$$

$$N3 = (0.8033, -0.5853, 0.1101)$$

Solución:

Se tiene:

$$[\sigma_{ij}] = [T] \cdot [\sigma_{ij}] \cdot [T]^T$$

Donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} l1 & m1 & n1 \\ l2 & m2 & n2 \\ l3 & m3 & n3 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.4126 & 0.4136 & -0.8116 \\ 0.4295 & 0.6974 & 0.5735 \\ 0.8033 & -0.5853 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.4126 & 0.4136 & -0.8116 \\ 0.4295 & 0.6974 & 0.5735 \\ 0.8033 & -0.5853 & 0.1101 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00148 & -0.00026 & 0.00130 \\ -0.00026 & 0.00122 & 0.00091 \\ 0.00130 & 0.00091 & 0.00122 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0.4126 & 0.4136 & -0.8116 \\ 0.4295 & 0.6974 & 0.5735 \\ 0.8033 & -0.5853 & 0.1101 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.00031 & -0.0052 & -0.00025 \\ -0.00052 & 0.0025 & 0.00043 \\ -0.00025 & 0.00043 & 0.00170 \end{bmatrix}$$

### 3.1.2 Deformación Plana

En algunos problemas de deformación, como en el caso de dos planchas de acero empernadas, se considera que no se presentan deformaciones en la dirección de su espesor, por lo que solo tendrán deformaciones en su plano.

Se considera entonces que el eje z, en la dirección de su espesor no presenta deformaciones, por lo tanto:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

Con lo que el tensor de deformaciones se convierte en una función dependiente de dos direcciones (x, y).

## 3.2 APLICACIONES EN MATLAB

Esta aplicación permite calcular las deformaciones unitarias principales, rotar los ejes de deformaciones y graficar el círculo de Mohr para un estado general de deformación.

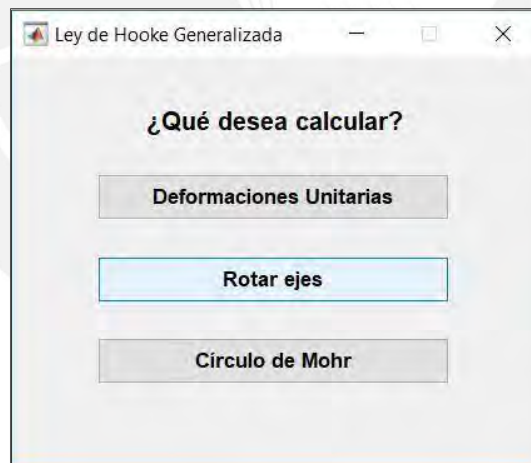


Figura 3.3. Menú principal.

Al ejecutar la aplicación se despliega el menú principal del programa.

### 3.2.1 Deformaciones Unitarias

Como se definió anteriormente, la deformación Unitaria ( $\varepsilon_E$ ) es la relación existente entre la deformación total del elemento ( $ds^* - ds$ ) y la longitud inicial del elemento.

$$\varepsilon_E = \frac{ds^* - ds}{ds}$$

Para calcular las deformaciones unitarias se ingresa el tensor de esfuerzos (Fig. 3.4) y las propiedades del material (Fig. 3.5).

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Propiedades del material:

$E$  = Módulo de Young

$\nu$  = Coeficiente de Poisson

$\alpha$  = Coeficiente de dilatación

$\Delta t$  = Variación de temperatura

The image shows a software window titled "Ingreso de Esfuerzos" (Input of Stresses). It contains seven input fields for stress components in MPa:

- $\sigma_{xx}$  (MPa): 80
- $\sigma_{yy}$  (MPa): 40
- $\sigma_{zz}$  (MPa): 40
- $\sigma_{xy}$  (MPa): -20
- $\sigma_{xz}$  (MPa): 100
- $\sigma_{yz}$  (MPa): 70

At the bottom of the window, there are "OK" and "Cancel" buttons.

Figura 3.4. Ingreso del tensor de esfuerzos.

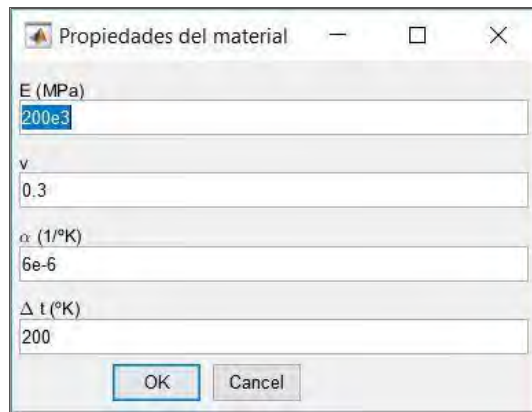


Figura 3.5. Ingreso de las propiedades del material.

Se obtiene:

- a) El tensor de esfuerzos. Muestra los valores ingresados en un arreglo matricial de 3x3.

	i	j	k
i	80	-20	100
j	-20	40	70
k	100	70	40

Figura 3.6. Tensor de esfuerzos.

- b) Deformaciones unitarias. Muestra las deformaciones unitarias para el estado de esfuerzos dado.

	Def. Unitaria
exx	0.0015
eyy	0.0012
ezz	0.0012
exy	-2.6000e-04
exz	0.0013
eyz	9.1000e-04

Figura 3.7. Deformaciones unitarias.

### 3.2.2 Rotar Ejes

Dado un tensor de deformaciones se puede rotar a partir de un vector unitario  $(l, m, n)$ . Se ingresa el tensor de deformaciones unitarias (Fig. 3.8) y el vector unitario de rotación (Fig. 3.9).

Tensor de deformaciones unitarias:

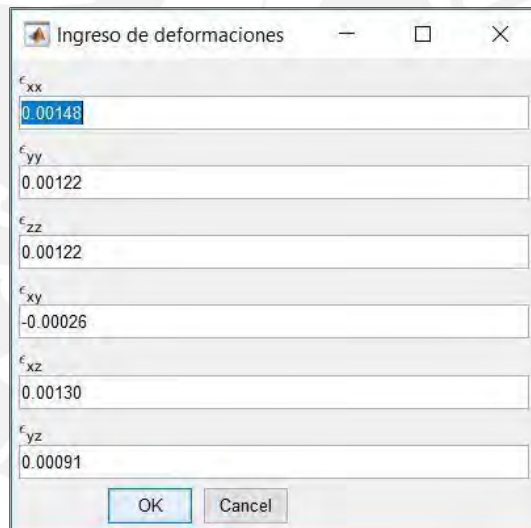
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Vector unitario de rotación:

$$\text{Eje X: } N1 = (l1, m1, n1)$$

$$\text{Eje Y: } N2 = (l2, m2, n2)$$

$$\text{Eje Z: } N3 = (l3, m3, n3)$$



Ingreso de deformaciones

$\varepsilon_{xx}$   
0.00148

$\varepsilon_{yy}$   
0.00122

$\varepsilon_{zz}$   
0.00122

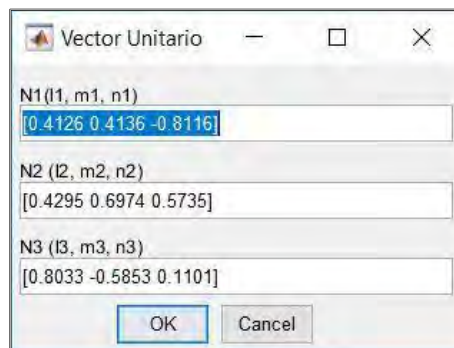
$\varepsilon_{xy}$   
-0.00026

$\varepsilon_{xz}$   
0.00130

$\varepsilon_{yz}$   
0.00091

OK Cancel

Figuras 3.8. Ingreso del tensor de deformaciones.



Vector Unitario

N1 (l1, m1, n1)  
[0.4126 0.4136 -0.8116]

N2 (l2, m2, n2)  
[0.4295 0.6974 0.5735]


N3 (l3, m3, n3)  
[0.8033 -0.5853 0.1101]

OK Cancel

Figuras 3.9. Ingreso del vector unitario de rotación.

Se obtiene:

- a) El tensor de deformaciones rotado. Muestra los valores del tensor de deformaciones unitarias rotados a partir de los cosenos directores de rotación.



	i	j	k
i	-3.0606e-04	-5.1944e-04	-2.5219e-04
j	-5.1944e-04	0.0025	4.3416e-04
k	-2.5219e-04	4.3416e-04	0.0017

Figura 3.10. Deformaciones unitarias rotadas.

### 3.2.3 Círculo de Mohr

Esta aplicación calcula las deformaciones unitarias principales, dirección asociada y grafica el círculo de Mohr del estado de deformación dado.

Se ingresar el tensor de deformaciones unitarias (*Figura 3.11*), la aplicación determina de acuerdo a los datos ingresados si se trata de un estado plano o tridimensional.

Tensor de deformaciones unitarias:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Figura 3.11. Ingreso del tensor de esfuerzos.

Se obtiene:

- a) Gráfico del círculo de Mohr. Muestra los esfuerzos principales, normales y cortantes máximos para el estado de deformación dado.

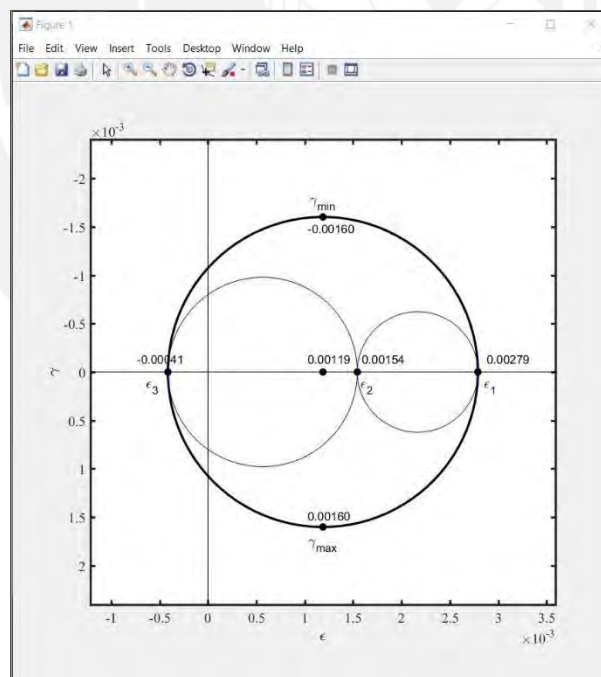
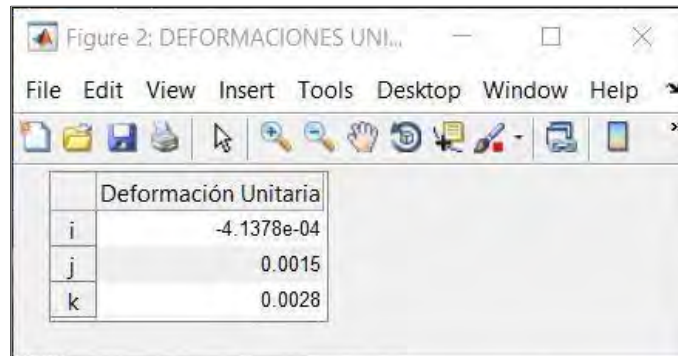


Figura 3.12. Círculo de Mohr en 3D.

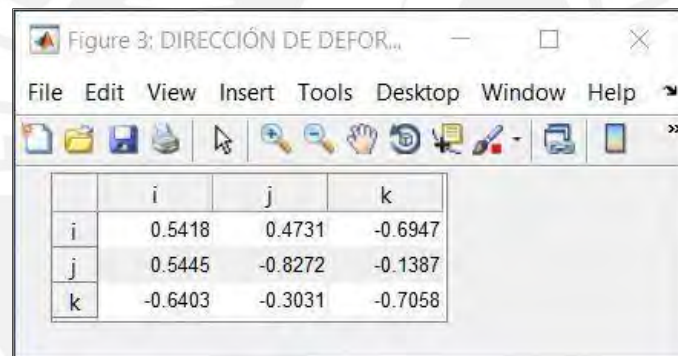
- b) Esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.



Deformación Unitaria	
i	-4.1378e-04
j	0.0015
k	0.0028

Figura 3.13. Deformaciones principales.

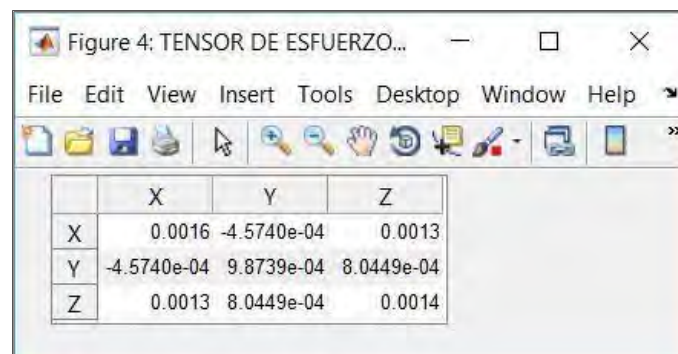
- c) Dirección de esfuerzos principales. Muestra los cosenos directores correspondiente a los esfuerzos principales.



	i	j	k
i	0.5418	0.4731	-0.6947
j	0.5445	-0.8272	-0.1387
k	-0.6403	-0.3031	-0.7058

Figura 3.14. Dirección de deformaciones unitarias principales.

- d) Tensor esfuerzos principales. Muestra los cosenos directores correspondiente a los esfuerzos principales.



	X	Y	Z
X	0.0016	-4.5740e-04	0.0013
Y	-4.5740e-04	9.8739e-04	8.0449e-04
Z	0.0013	8.0449e-04	0.0014

Figura 3.15. Tensor de esfuerzos principales.



## CAPÍTULO 4

### CRITERIOS DE FALLA PARA MATERIALES FRÁGILES Y DÚCTILES

#### 4.1 DEFINICIONES GENERALES

##### 4.1.1 Criterio de falla

En un estado multiaxial de cargas, representado por el tensor de esfuerzos, un cuerpo puede presentar comportamiento inelástico, aún si ninguno de los esfuerzos individuales supera el esfuerzo de fluencia del material.

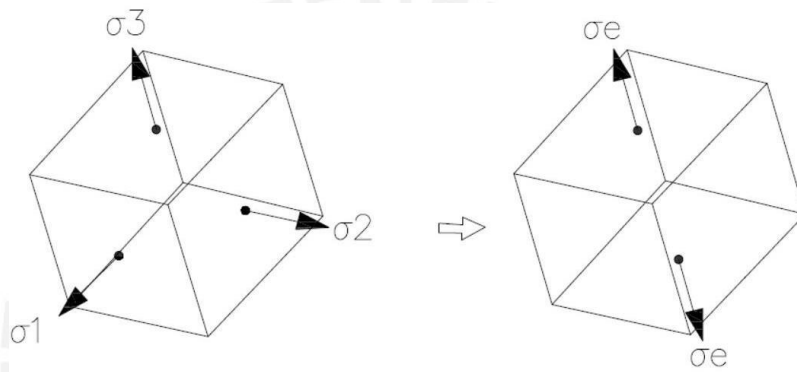


Figura 4.1. Estado multiaxial de esfuerzos y estado uniaxial de esfuerzo equivalente.

La falla de un cuerpo se produce cuando se inicia el comportamiento inelástico, por fluencia o fractura. Se define entonces el criterio de falla a una función que relaciona el esfuerzo de fluencia del material con un esfuerzo equivalente del estado multiaxial de esfuerzos.

Es necesario entonces obtener un esfuerzo equivalente ( $\sigma_e$ ) que corresponda al estado multiaxial de esfuerzos ( $\sigma_{ij}$ ) y compararlo con el esfuerzo uniaxial de fluencia ( $\sigma_f$ ) del material para predecir comportamiento inelástico.

Un criterio de fluencia viene definido matemáticamente por una función de fluencia  $f(\sigma_{ij}, \sigma_f)$ , donde  $\sigma_{ij}$  es el estado de esfuerzos y  $\sigma_f$  el esfuerzo de fluencia uniaxial del material. La función de fluencia satisface al criterio de falla si  $f(\sigma_{ij}, \sigma_f) = 0$ , por lo tanto, cuando  $f(\sigma_{ij}, \sigma_f) < 0$  se produce comportamiento elástico.

Para obtener el esfuerzo equivalente a partir del tensor de esfuerzos, existen varios criterios, tanto para materiales dúctiles y para materiales frágiles.

Materiales frágiles

- a) Criterio del máximo esfuerzo normal - Rankine Coulomb
- b) Criterio de la máxima deformación unitaria lineal - Saint Venant
- c) Criterio de la densidad de energía de deformación - Beltrami.

Materiales Dúctiles

- a) Criterio del Máximo Esfuerzo Cortante – Tresca
- b) Criterio de la densidad de energía de distorsión - Von Mises.

#### 4.1.2 Superficie de fluencia

Para facilitar la comprensión de un criterio de falla se desarrolla el concepto de superficie de fluencia, el cual representa gráficamente la función de fluencia. De esta forma se ilustra gráficamente la ubicación del esfuerzo para el cual la función de fluencia es cero ( $f=0$ ).

Para un estado general de esfuerzos, la superficie de fluencia se grafica tomando la dirección de los esfuerzos principales ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) como ejes principales.

Conocida la superficie de fluencia es posible determinar el factor de seguridad, que será el cociente entre la resistencia del material y la tensión existente.

$$F. S. = \frac{\sigma_f}{\sigma} \quad (4. 1)$$

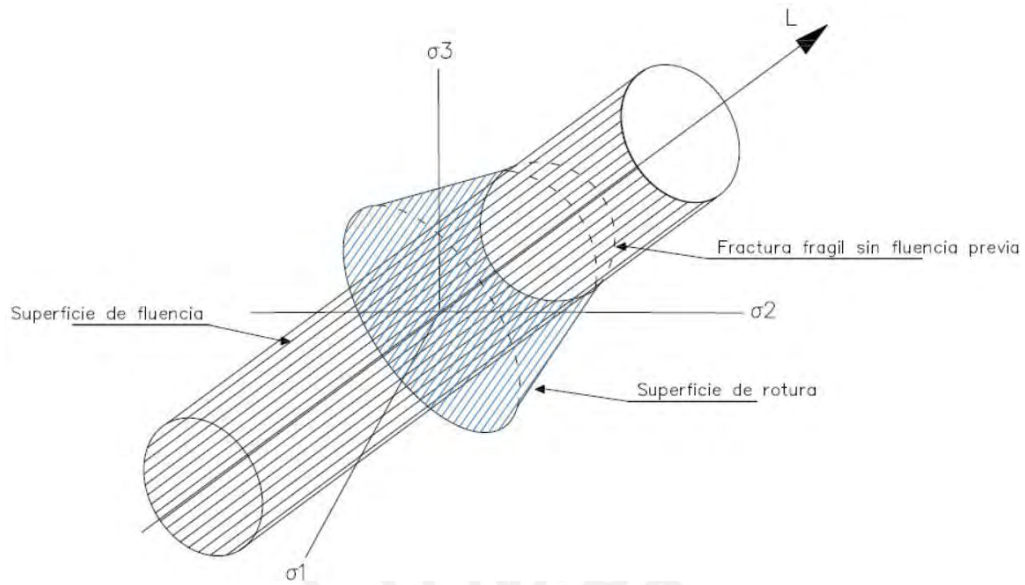


Figura 4.2. Superficie de fluencia y de rotura.

Se muestra la superficie de fluencia definida por el cilindro alrededor del eje "L" (Figura 4.2), toda combinación de esfuerzos dentro del cilindro se encuentra en deformación elástica.

Definida una superficie con combinación de esfuerzos en la que se producirá la falla, la parte de esta superficie dentro del cilindro de fluencia presentará falla frágil.

La combinación de esfuerzos fuera del cilindro de fluencia y dentro de la superficie de rotura producirá deformación permanente.

### 4.1.3 Criterio de falla para materiales frágiles

#### 4.1.3.1 Criterio del máximo esfuerzo normal - Rankine Coulomb

Este criterio considera que la fluencia ocurre cuando el máximo esfuerzo principal alcanza el valor del esfuerzo de fluencia  $\sigma_f$ . Es decir la fluencia ocurre cuando  $\sigma_1$  alcanza el valor de  $\sigma_f$ , ignorando los otros dos esfuerzos principales.

Este criterio puede ser usado para predecir fracturas por tracción como en el caso del concreto.

La función de fluencia del criterio de máximo esfuerzo normal se expresa como:

$$f = \text{máx} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_f \quad (4.2)$$

Siendo  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  los esfuerzos principales.

El esfuerzo efectivo será entonces:

$$\sigma_e = \text{máx} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (4.3)$$

Por lo tanto la función de fluencia queda definida como:

$$f = \sigma_e - \sigma_f \quad (4.4)$$

Si se considera que el criterio de fluencia debe satisfacer que  $(f=0)$ , entonces la superficie de fluencia viene definida por:

$$\sigma_1 = \pm\sigma_f \quad \sigma_2 = \pm\sigma_f \quad \sigma_3 = \pm\sigma_f \quad (4.5)$$

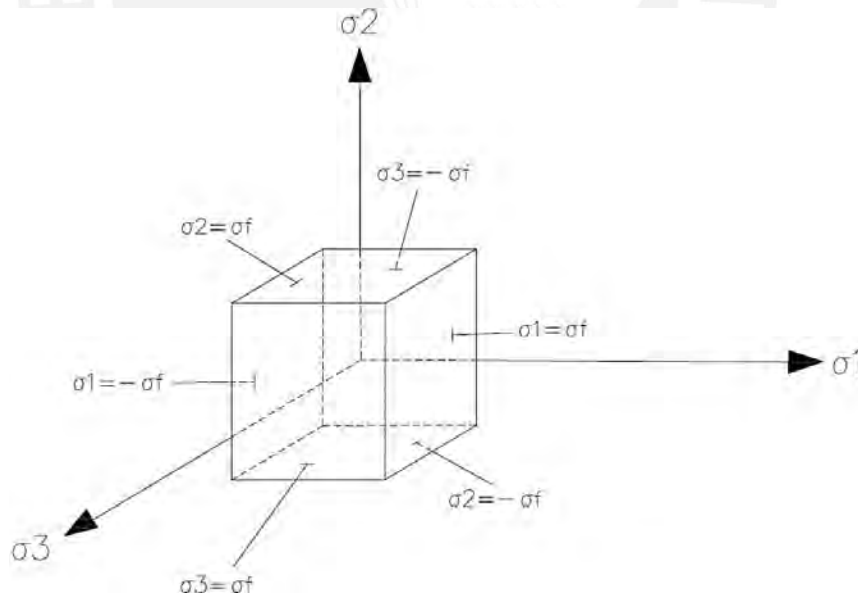


Figura 4.3. Superficie de fluencia, para el criterio de máximo esfuerzo normal.

#### 4.1.3.2 Criterio de la máxima deformación unitaria lineal - Saint Venant.

Este criterio considera que la fluencia ocurre cuando la máxima deformación unitaria principal alcanza el valor de deformación de fluencia, es decir ocurre

cuando  $\varepsilon_1 = \varepsilon_f = \sigma_f / E$ .

Esta teoría predice la falla de materiales dentro del rango elástico, por lo que puede aplicarse en materiales frágiles como el vidrio o el concreto.

Se sabe que la máxima deformación unitaria se calcula como:

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_1 / E) - \nu(\varepsilon_2 / E) - \nu(\varepsilon_3 / E) \quad (4.6)$$

Siendo  $\varepsilon_1$  la mayor deformación principal, se iguala a la deformación de fluencia  $\varepsilon_f$ , de donde se obtiene las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 = \pm \sigma_f \\ f_2 &= \sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3 = \pm \sigma_f \\ f_3 &= \sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \pm \sigma_f \end{aligned} \quad (4.7)$$

El esfuerzo efectivo es entonces:

$$\sigma_e = \text{máx} | \sigma_i - \nu\sigma_j - \nu\sigma_k | \quad (4.8)$$

Por lo tanto la función de fluencia queda definida como:

$$f = \sigma_e - \sigma_f \quad (4.9)$$

La superficie de fluencia se obtiene de igualar ( $f=0$ )

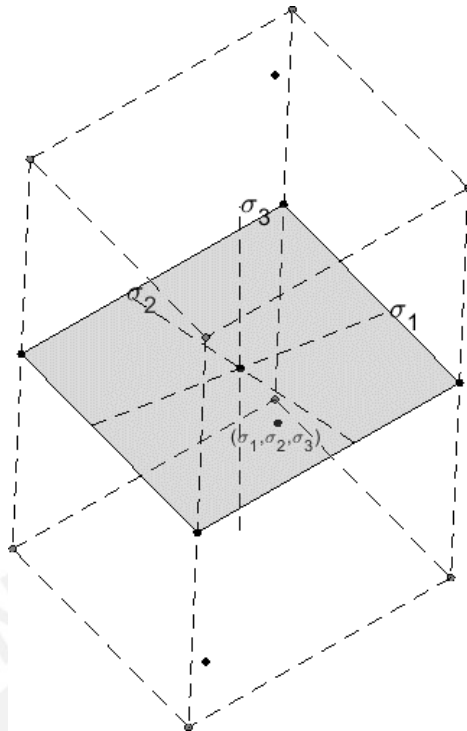


Figura 4.4. Superficie de fluencia para el criterio de la máxima deformación unitaria lineal.

#### 4.1.3.3 Criterio de la densidad de energía de deformación - Beltrami.

Este criterio considera que la fluencia ocurre cuando la densidad de energía de deformación en un punto iguala a la densidad de energía de deformación de fluencia de un estado uniaxial de esfuerzos.

Este criterio al considerar el trabajo interno de deformación y compararlo con el de fluencia considera únicamente materiales elásticos. Por consiguiente se usa para materiales frágiles con rotura elástica sin fluencia.

Escrito en términos de esfuerzos principales, la densidad de energía de deformación se calcula como:

$$U_o = \frac{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]}{2E} > 0 \quad (4.10)$$

Para un estado uniaxial de esfuerzos se tiene que  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , entonces la densidad de energía de deformación resulta ser:

$$U_{of} = \frac{\sigma_f^2}{2E} \quad (4.11)$$

La función de fluencia se obtiene de igualar  $U_o$  con  $U_{of}$ , de donde se obtiene:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) - \sigma_f^2 = 0 \quad (4.12)$$

Ya que se debe igualar el esfuerzo de fluencia con  $\sigma_e$ , el esfuerzo efectivo será:

$$\sigma_e = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (4.13)$$

Por lo tanto la función de fluencia queda definida por:

$$f = \sigma_e^2 - \sigma_f^2 \quad (4.14)$$

La superficie de fluencia se obtiene de igualar ( $f=0$ ).

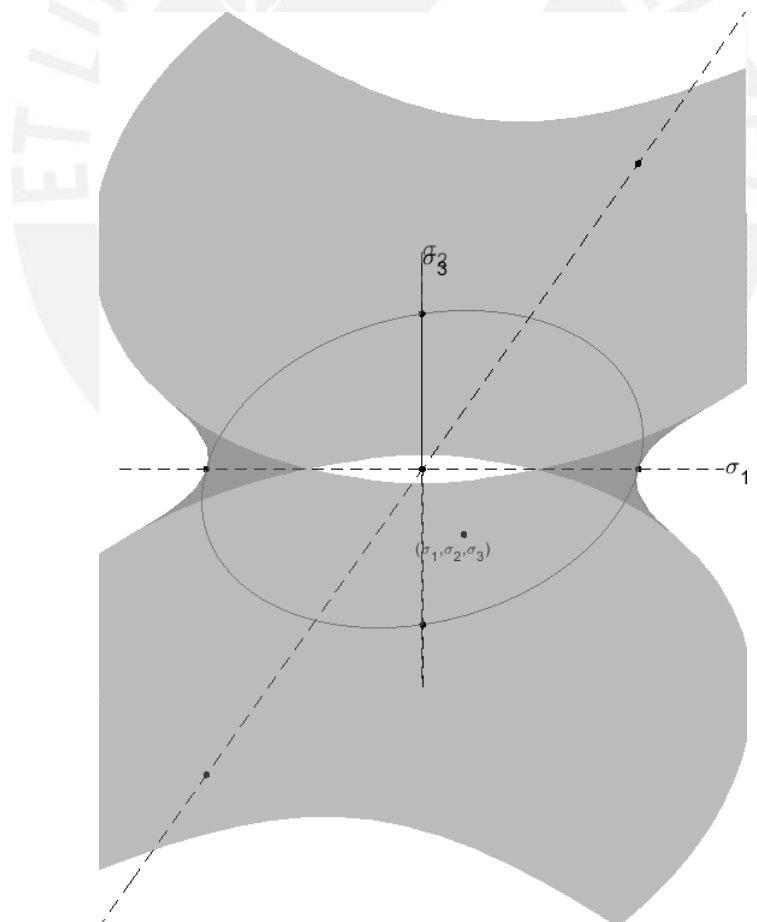


Figura 4.5. Superficie de fluencia para el criterio de la densidad de energía de deformación.

**Ejemplo:**

Dado el tensor de esfuerzo  $[\sigma]$  en un punto y el  $\sigma_{ULT} = 460\text{MPa}$  y  $\nu = 0.2$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -60 & 80 & 15 \\ 70 & 80 & 90 \\ 15 & 90 & 30 \end{bmatrix}$$

Determinar el factor de seguridad para los criterios de Rankine, Saint Venant y Beltrami.

**Solución:**

a) Criterio del máximo esfuerzo normal – Rankine.

Se obtiene los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = 167.26\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = -23.28\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = -93.97\text{MPa}$$

Según el criterio de Rankine:

$$\sigma_e = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 167.26\text{MPa}$$

El factor de seguridad será:

$$FS = \frac{\sigma_{ULT}}{\sigma_{MAX}} = \frac{460}{167.26} = 2.75$$

b) Criterio de la máxima deformación unitaria – Saint Venant

$$\sigma_e = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(167.26 - 0.2(-23.28) - 0.2(-93.97)) = \frac{190.71}{E}$$



$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (-23.28 - 0.2(167.26) - 0.2(-93.97)) = \frac{37.94}{E}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (-93.97 - 0.2(167.26) - 0.2(23.28)) = -\frac{122.77}{E}$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{190.71}{E}$$

$$\varepsilon_{ULT} = \frac{460}{E}$$

El esfuerzo efectivo es entonces:

$$\sigma_e = \max | \sigma_i - \nu \sigma_j - \nu \sigma_k |$$

$$\sigma_e = 190.71E$$

El factor de seguridad será:

$$FS = \frac{\sigma_{ULT}}{\sigma_{MAX}} = \frac{460}{190.71} = 2.41$$

c) Criterio de la densidad de energía – Beltrami

El esfuerzo efectivo es:

$$\sigma_e = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= 167.26^2 + (-23.28)^2 + (-93.97)^2 \\ &\quad - 2 \times 0.2(167.26 \times -23.28) + 167.26 \times -93.97 \\ &\quad + (-23.28) \times (-93.97) \\ \sigma_e &= 210.52 \text{ MPa} \end{aligned}$$

El factor de seguridad será:

$$FS = \frac{460}{210.52} = 2.18$$

#### 4.1.4 Criterio de falla para Materiales dúctiles

##### 4.1.4.1 Criterio del Máximo Esfuerzo Cortante - Tresca.

Este criterio considera que la fluencia ocurre cuando el máximo esfuerzo cortante en un punto alcanza el máximo esfuerzo cortante de fluencia. Este criterio se usa para predecir fallas en materiales dúctiles como el acero.

El cortante máximo para un estado multiaxial de esfuerzos se calcula como:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{(\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n})}{2} \quad (4.15)$$

Considerando los esfuerzos principales, los esfuerzos máximos y mínimos corresponderían a  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  respectivamente.

Dado que para la tracción uniaxial ocurre cuando  $\sigma_1 = \sigma_f$ , entonces el esfuerzo de fluencia debe ser:

$$\tau_f = \frac{\sigma_f}{2} \quad (4.16)$$

Por lo tanto la función de fluencia queda definida como:

$$f = \tau_{m\acute{a}x} - \tau_f \quad (4.17)$$

Definiendo:  $\sigma_e = \tau_{m\acute{a}x}$ , se tiene:

$$f = \frac{\sigma_e - \sigma_f}{2} \quad (4.18)$$

El valor de  $\tau_{m\acute{a}x}$ , es el mayor de:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_f \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_f \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm \sigma_f \end{aligned} \quad (4.19)$$

La superficie de fluencia se obtiene de igualar ( $f=0$ ).

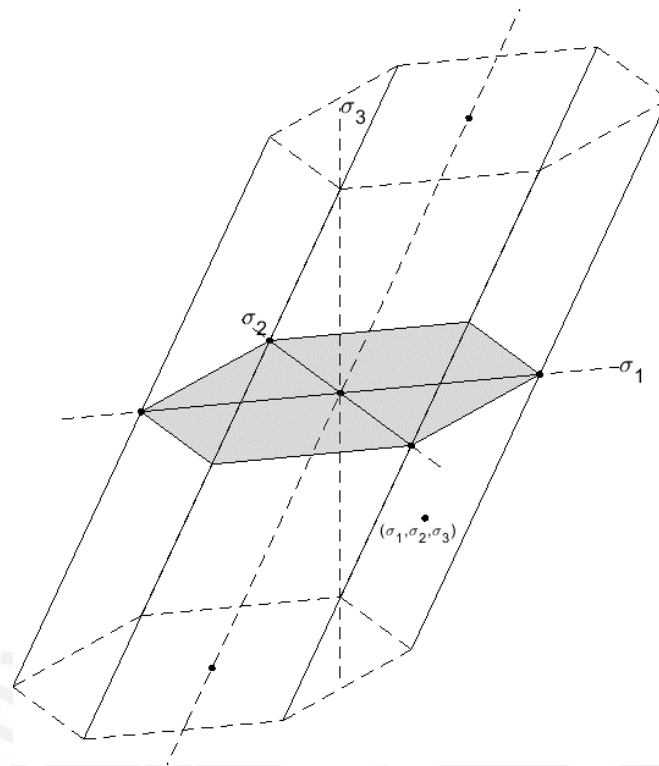


Figura 4.6. Superficie de falla para el criterio de Tresca.

#### 4.1.4.2 Criterio de la densidad de energía de distorsión - Von Mises.

Este criterio considera que la fluencia ocurre cuando la densidad de energía de distorsión en un punto iguala a la densidad de energía de distorsión de fluencia de un estado uniaxial de esfuerzos.

La densidad de energía de deformación  $U_o$  se divide en dos, la energía de distorsión es la asociada a la deformación del cuerpo y la energía asociada con el cambio volumétrico.

$$U_o = U_V + U_D \quad (4.20)$$

Escrito en términos de esfuerzos principales, la densidad de energía de deformación se calcula como:

$$U_o = \frac{[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]}{2E} > 0 \quad (4.21)$$

Se define  $U_V$  como el cambio volumétrico del cuerpo, siendo  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$  y  $U_D$  como el cambio de forma siendo  $\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0$ .

Por lo tanto, bajo estas condiciones  $U_V$  será:

$$U_V = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K} \quad (4.22)$$

$$K = \frac{E}{[3(1 - 2\nu)]} \quad (4.23)$$

Luego se calcula  $U_V$ :

$$U_D = U_o - U_V \quad (4.24)$$

Entonces la densidad de energía de deformación es:

$$U_D = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12G} \quad (4.25)$$

$$G = \frac{E}{[2(1 + \nu)]} \quad (4.26)$$

En el caso particular de fluencia uniaxial, se tiene:  $\sigma_1=\sigma_f$ ,  $\sigma_2=\sigma_3=0$ , por lo tanto:

$$U_D = U_{Df} = \frac{\sigma_f^2}{6G} \quad (4.27)$$

Para satisfacer el criterio de falla, se debe igualar  $U_D$  en el estado multiaxial de esfuerzos a la energía de fluencia  $U_{Df}$ , de donde se obtiene:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_f^2 \quad (4.28)$$

Se define entonces el esfuerzo equivalente como:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (4.29)$$

Por lo tanto la función de fluencia se expresa como:

$$f = \sigma_e^2 - \sigma_f^2 \quad (4.30)$$

La superficie de fluencia se obtiene de igualar ( $f=0$ ).

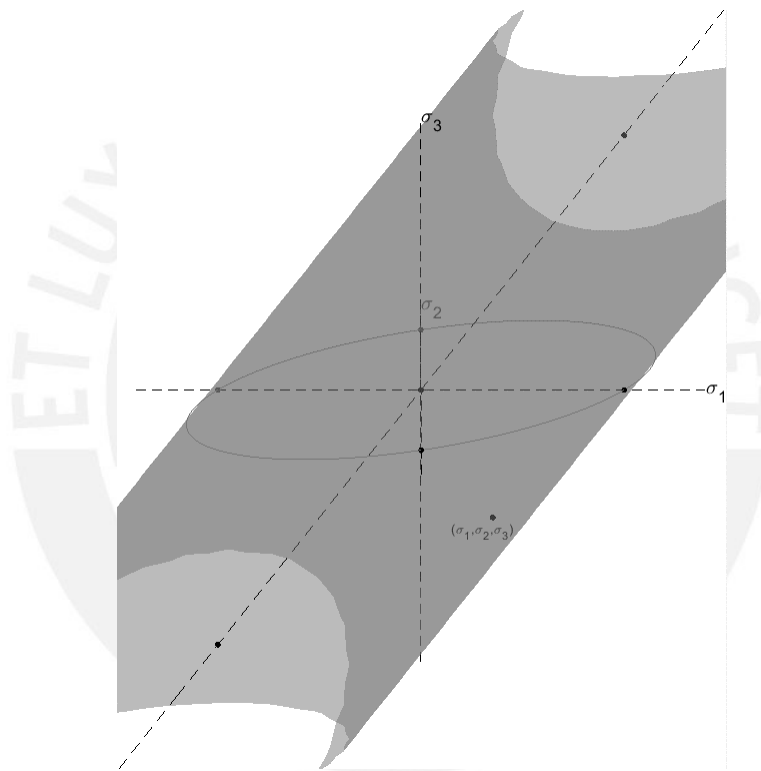


Figura 4.7. Superficie de fluencia para el criterio de Von Mises.

#### 4.1.5 Otros criterios de falla para materiales dúctiles

Existen otro tipo de materiales con comportamiento distinto al de los materiales dúctiles, teniendo una respuesta no lineal frágil cuando no existe una presión de confinamiento relativamente alta. Entre estos materiales se tiene a los suelos, la roca o el concreto.

Por lo tanto debe definirse criterios de falla que incluya en su análisis el esfuerzo

de presión hidrostático, siendo que el incremento de este último aumenta la capacidad de estos materiales a resistir la fluencia. Entre estos criterios de falla se tiene al **Criterio de Mohr-Coulomb**, el cual es una generalización del criterio de Tresca.

En el caso de materiales anisotrópicos, la fluencia depende de la dirección de los esfuerzos respecto a los ejes del material. Para el caso particular de un material ortotrópico se tiene el **Criterio de Hill**, el cual es una generalización del criterio de Von Mises.

**Ejemplo:**

Dado el tensor de esfuerzo  $[\sigma]$  en un punto y el  $\sigma_f = 250MPa$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 80 & 25 & 55 \\ 25 & -40 & 30 \\ 55 & 30 & 60 \end{bmatrix}$$

Determinar el factor de seguridad para los criterios de Tresca y Von Mises.

**Solución:**

a) Criterio del esfuerzo cortante máximo - Tresca

Se calcula los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = 134.38MPa$$

$$\sigma_2 = 14.82MPa$$

$$\sigma_3 = -49.21MPa$$

Para el criterio, el cortante máximo para un estado multiaxial de esfuerzos se calcula como:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{(\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n})}{2} = \frac{134.38 - (-49.21)}{2} = 91.79MPa$$

Y el esfuerzo se calcula como:

$$\tau_f = \frac{\sigma_f}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{MPa}$$

El factor de seguridad será:

$$FS = \frac{125}{91.79} = 1.36$$

b) Criterio de la densidad de energía de distorsión – Von Mises

Para el criterio el esfuerzo equivalente se calcula como:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$
$$\sigma_e = \sqrt{\frac{(134.38 - 14.82)^2 + (14.82 - (-49.84))^2 + ((-49.84) - 134.38)^2}{2}} = 161.4$$

El factor de seguridad será:

$$FS = \frac{250}{161.4} = 1.55$$

## 4.2 APLICACIONES EN MATLAB

Esta aplicación calcula los esfuerzos principales, el esfuerzo máximo, el factor de seguridad y grafica la superficie de fluencia para un estado plano de esfuerzos.



Figura 4.8. Menú principal.

Al ejecutar la aplicación se despliega el menú principal del programa.

### 4.2.1 Rankine – Coulomb: Criterio del máximo esfuerzo normal.

Se ingresa el tensor de esfuerzos en un punto y el esfuerzo último del material (*Figura 4.9*).

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Ingreso de Esfuerzos

$\sigma_{xx}$  (MPa)  
-60

$\sigma_{yy}$  (MPa)  
80

$\sigma_{zz}$  (MPa)  
0

$\sigma_{xy}$  (MPa)  
70

$\sigma_{xz}$  (MPa)  
0

$\sigma_{yz}$  (MPa)  
0

$\sigma_{ULT}$  (MPa)  
460

OK Cancel

Figura 4.9. Ingreso de esfuerzos.

Se obtiene:

- a) Gráfico de la superficie de fluencia, para un estado plano de esfuerzos.

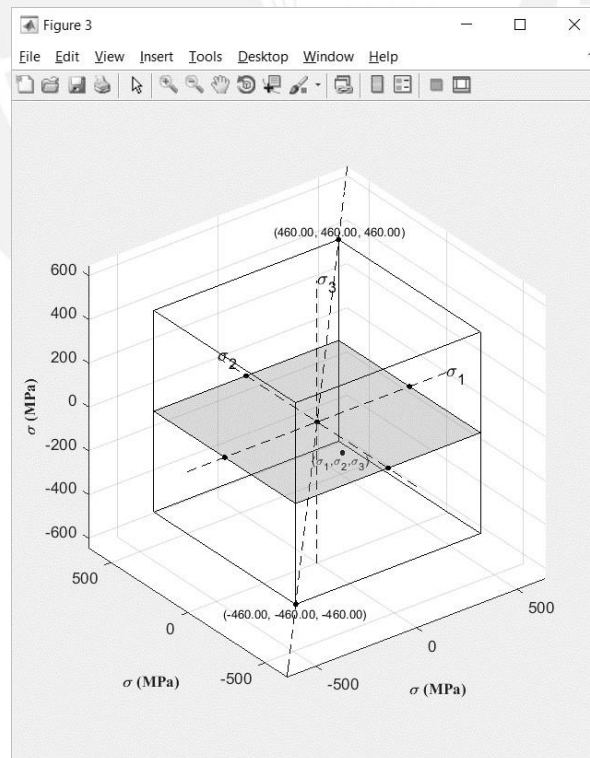


Figura 4.10. Superficie de fluencia para un estado multiaxial de esfuerzos.

- b) Esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.

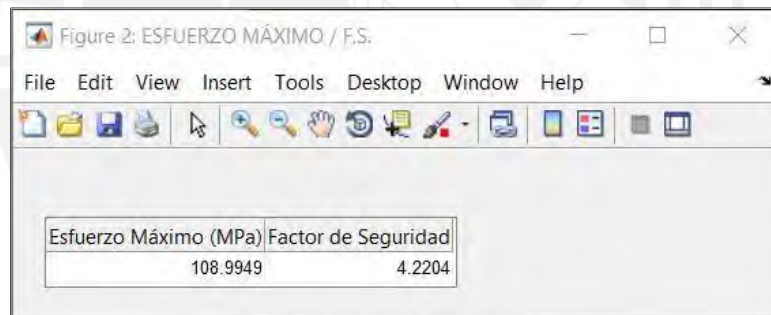


The screenshot shows a software window with a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Desktop, Window, Help) and a toolbar. Below the toolbar is a table with the following data:

	Esfuerzo (MPa)
i	108.9949
j	-88.9949

Figura 4.11. Esfuerzos principales.

- c) El esfuerzo máximo, asociado al estado de esfuerzos y su factor de seguridad.



The screenshot shows a software window with a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Desktop, Window, Help) and a toolbar. Below the toolbar is a table with the following data:

Esfuerzo Máximo (MPa)	Factor de Seguridad
108.9949	4.2204

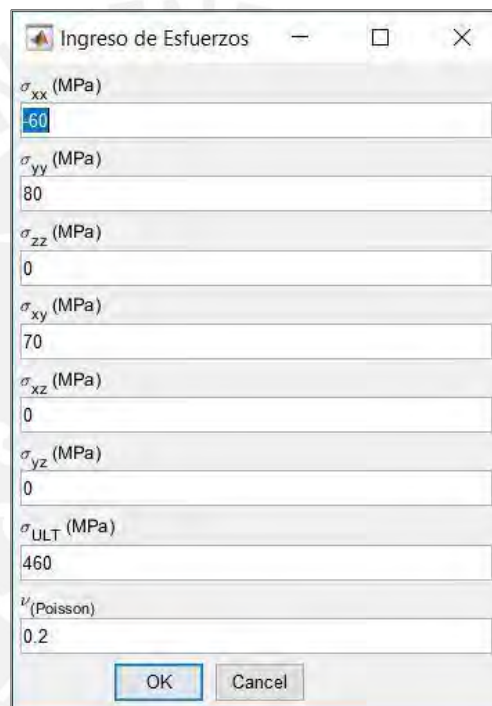
Figura 4.12. Esfuerzo máximo y factor de seguridad.

#### 4.2.2 Saint Venant: Criterio de la máxima deformación unitaria lineal.

Se ingresa el tensor de esfuerzos en un punto y el esfuerzo último del material (Figura 4.13)

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



The image shows a software dialog box titled "Ingreso de Esfuerzos" (Stress Input). It contains several input fields for stress components and material properties. The values entered are:

Variable	Value
$\sigma_{xx}$ (MPa)	-60
$\sigma_{yy}$ (MPa)	80
$\sigma_{zz}$ (MPa)	0
$\sigma_{xy}$ (MPa)	70
$\sigma_{xz}$ (MPa)	0
$\sigma_{yz}$ (MPa)	0
$\sigma_{ULT}$ (MPa)	460
$\nu$ (Poisson)	0.2

At the bottom of the dialog box, there are "OK" and "Cancel" buttons.

Figura 4.13. Ingreso de esfuerzos.

Se obtiene:

a) Gráfico de la superficie de fluencia, para un estado plano de esfuerzos.

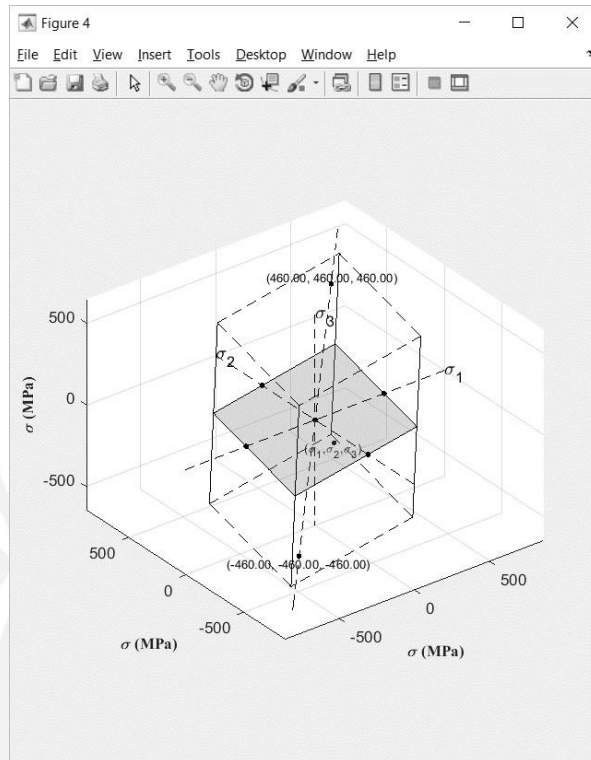


Figura 4.14. Superficie de fluencia para un estado multiaxial de esfuerzos.

b) Esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.



Figura 4.15. Esfuerzos principales.

c) Deformaciones principales, asociado al estado de esfuerzos.

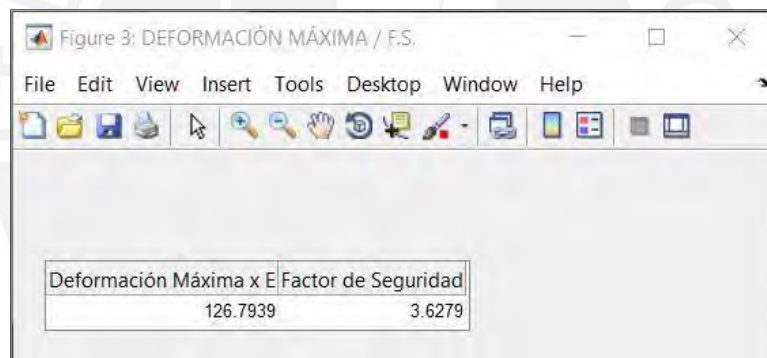


The screenshot shows a software window with a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Desktop, Window, Help) and a toolbar. The main content area contains a table with the following data:

	Deformación x E
i	126.7939
j	-4.0000
k	-110.7939

Figura 4.16. Esfuerzo máximo y factor de seguridad.

d) El esfuerzo máximo, asociado al estado de esfuerzos y su factor de seguridad.



The screenshot shows a software window with a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Desktop, Window, Help) and a toolbar. The main content area contains a table with the following data:

Deformación Máxima x E	Factor de Seguridad
126.7939	3.6279

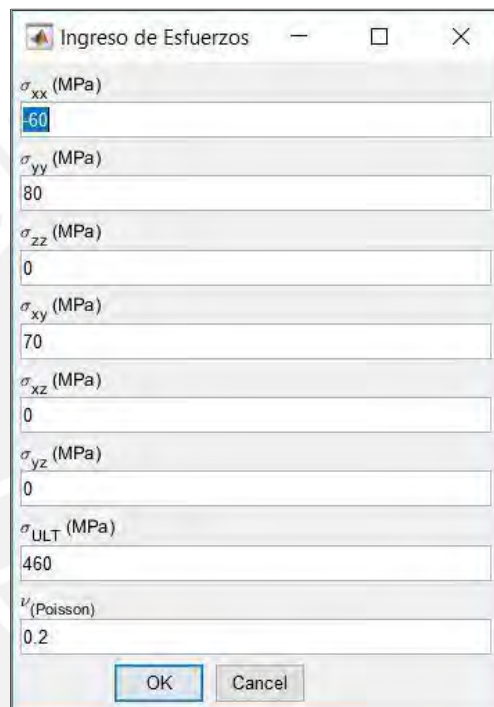
Figura 4.17. Esfuerzo máximo y factor de seguridad.

#### 4.2.3 Beltrami: Criterio de la densidad de energía de deformación.

Se ingresa el tensor de esfuerzos en un punto y el esfuerzo último del material (Figura 4.18)

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



The screenshot shows a dialog box titled "Ingreso de Esfuerzos" with the following fields and values:

Variable	Value
$\sigma_{xx}$ (MPa)	-60
$\sigma_{yy}$ (MPa)	80
$\sigma_{zz}$ (MPa)	0
$\sigma_{xy}$ (MPa)	70
$\sigma_{xz}$ (MPa)	0
$\sigma_{yz}$ (MPa)	0
$\sigma_{ULT}$ (MPa)	460
$\nu$ (Poisson)	0.2

Buttons: OK, Cancel

Figura 4.18. Ingreso de esfuerzos.

Se obtiene:

- a) Gráfico de la superficie de fluencia, para un estado plano de esfuerzos.

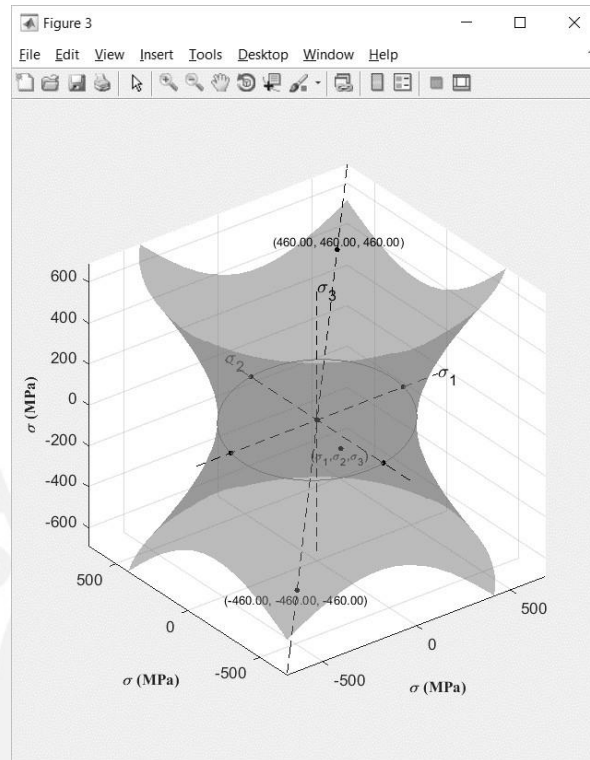


Figura 4.19. Superficie de fluencia para un estado multiaxial de esfuerzos.

- b) Esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.



Figura 4.20. Esfuerzos principales.

- c) El esfuerzo máximo asociado al estado de esfuerzos y su factor de seguridad.



Figura 4.21. Esfuerzo máximo y factor de seguridad.

#### 4.2.4 Tresca: Criterio del Máximo Esfuerzo Cortante.

Se ingresa el tensor de esfuerzos en un punto y el esfuerzo último del material (Figura 4.22)

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Ingreso de Esfuerzos

$\sigma_{xx}$  (MPa): 80

$\sigma_{yy}$  (MPa): -40

$\sigma_{zz}$  (MPa): 0

$\sigma_{xy}$  (MPa): 25

$\sigma_{xz}$  (MPa): 0

$\sigma_{yz}$  (MPa): 0

$\sigma_f$  (MPa): 250

OK Cancel

Figura 4.22. Ingreso de esfuerzos.



Se obtiene:

a) Gráfico de la superficie de fluencia, para un estado plano de esfuerzos.

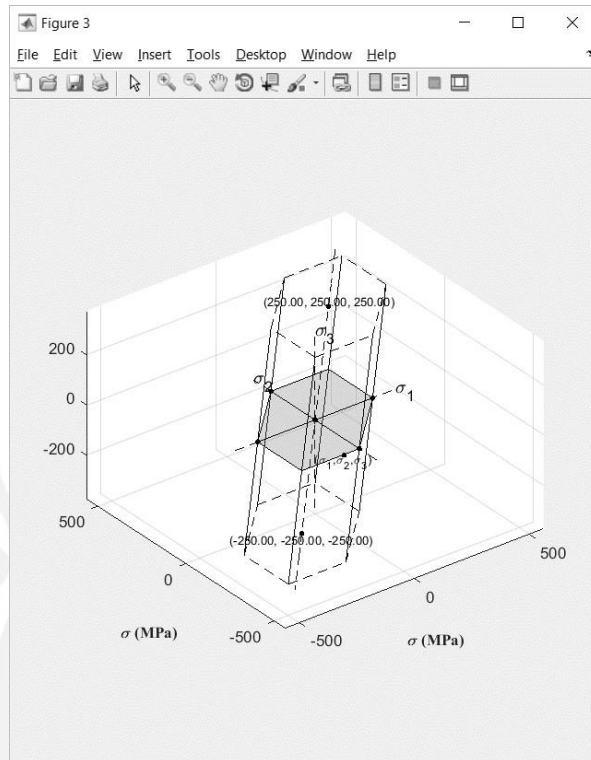


Figura 4.23. Superficie de fluencia para un estado multiaxial de esfuerzos.

b) Esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.

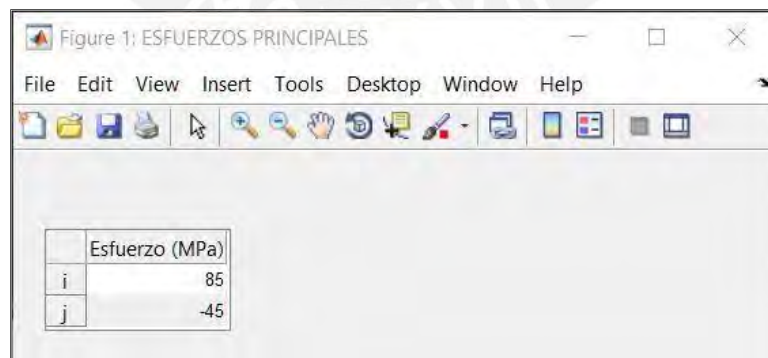


Figura 4.24. Esfuerzos principales.

- c) El esfuerzo máximo, asociado al estado de esfuerzos y su factor de seguridad.



Figura 4.25. Esfuerzo máximo y factor de seguridad.

#### 4.2.5 Von Mises: Criterio de la densidad de energía de distorsión.

Se ingresa el tensor de esfuerzos en un punto y el esfuerzo último del material (Figura 4.26)

Tensor de esfuerzos:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

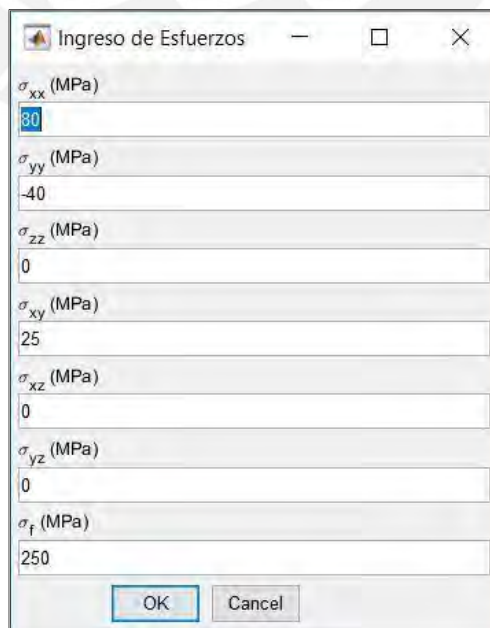


Figura 4.26. Ingreso del tensor de esfuerzos.

Se obtiene:

a) Gráfico de la superficie de fluencia, para un estado plano de esfuerzos.

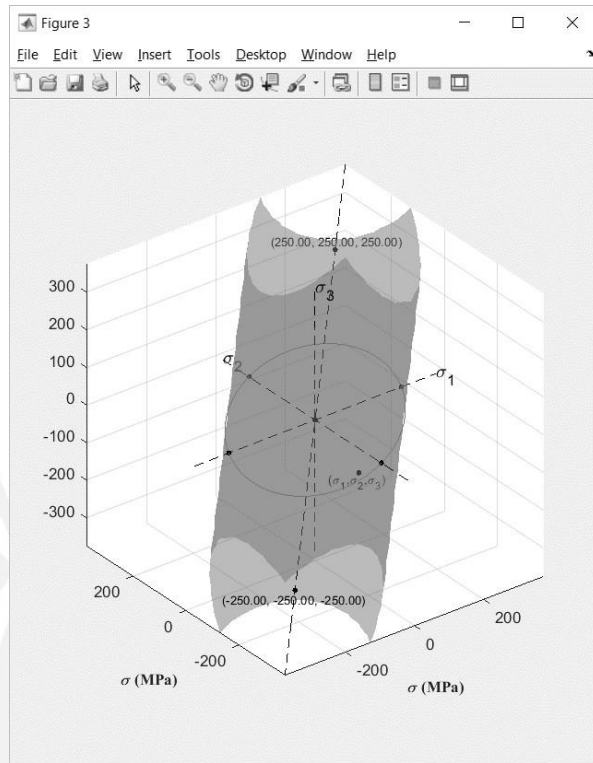


Figura 4.27. Superficie de fluencia para un estado multiaxial de esfuerzos.

b) Esfuerzos principales. Muestra los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  calculados a partir del tensor de esfuerzos.

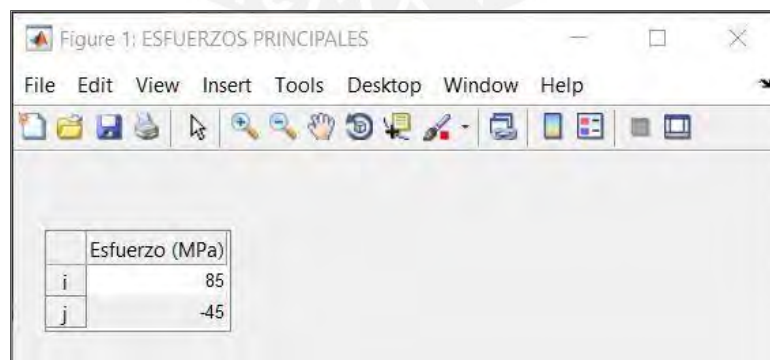


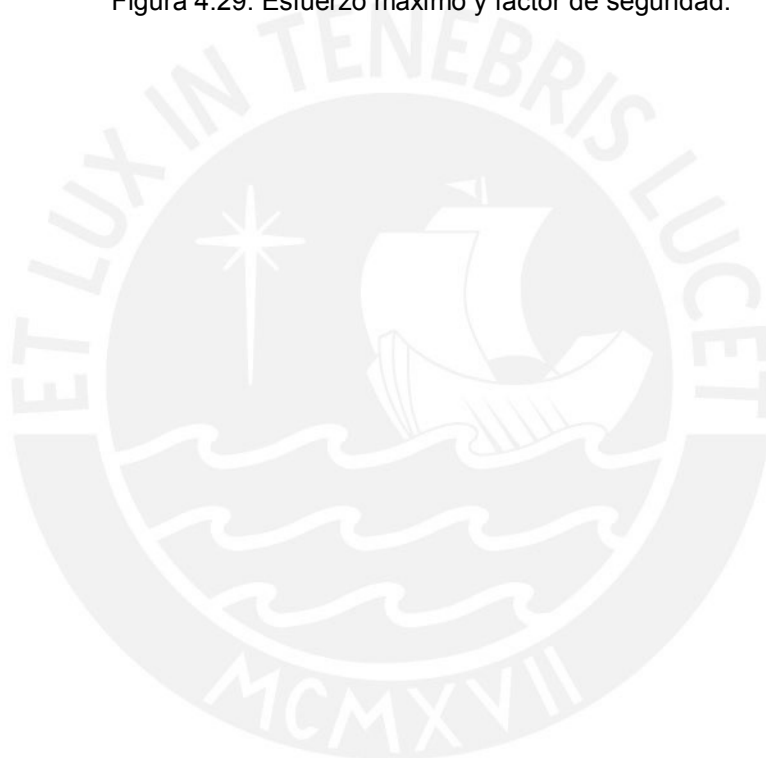
Figura 4.28. Esfuerzos principales.

- El esfuerzo máximo, asociado al estado de esfuerzos y su factor de seguridad (Figura 4.21).



Esfuerzo Equivalente (MPa)	Factor de Seguridad
114.3460	2.1863

Figura 4.29. Esfuerzo máximo y factor de seguridad.



## CAPÍTULO 5

### VIGAS CON CIMENTACIONES ELÁSTICAS Y CARGAS VARIABLES

#### 5.1 DEFINICIONES GENERALES

##### 5.1.1 Viga sobre cimentación elástica

En estructuras en forma de viga, sometidas a carga y apoyadas sobre una superficie elástica, la falla se produce en ocasiones sobre el elemento y no sobre el suelo. Tal es el caso de canales, cimentaciones superficiales, líneas de ferrocarriles o losas de cimentación sometida a carga vehicular.

Para el estudio de este tipo de estructuras se plantea una viga de longitud infinita apoyada sobre una cimentación elástica y sometida a cargas transversales. Se asume que la cimentación es capaz de resistir las cargas transmitidas por la viga.

Se aplica una carga "P" a la viga la cual produce deflexión y desplazamiento (figura 5.1), como respuesta se desarrolla una carga distribuida "q" entre la viga y la cimentación. Esta carga "q" depende directamente de la fuerza "P" aplicada y de la rigidez de la viga.

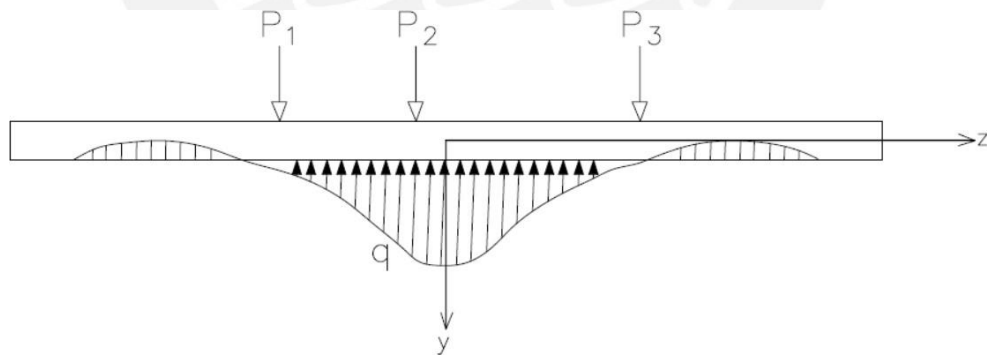


Figura 5.1. Viga cargada sobre cimentación elástica.

Por conveniencia se define los ejes cartesianos, con el eje "z" a lo largo del eje de la viga y el eje "y" en la dirección positiva de la aplicación de la carga P y con la deformación de la viga.

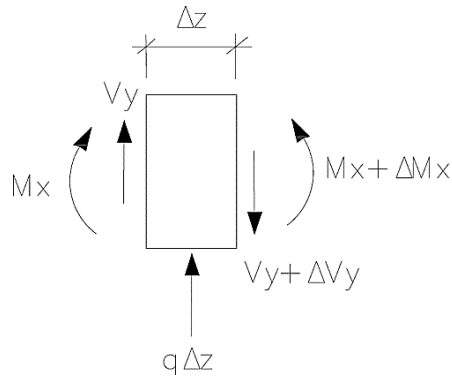


Figura 5.2. Diagrama de cuerpo libre de la sección de la viga.

Se plantea el diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial  $\Delta z$ , sometido a una carga  $q \cdot \Delta z$ . Las ecuaciones de equilibrio serán entonces:

Sumatoria de fuerzas:

$$q \cdot dz = -V_y + V_y + dV_y \quad (5.1)$$

$$q = \frac{dV_y}{dz} \quad (5.2)$$

Sumatoria de momentos:

$$V_y \cdot dz = dM_x \quad (5.3)$$

$$V_y = \frac{dM_x}{dz} \quad (5.4)$$

Curvatura de la viga:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (5.5)$$

Tangente a la curvatura:

$$\frac{dy}{dz} = \tan \theta \approx \theta \quad (5.6)$$

Para el diagrama de cuerpo libre dado y las ecuaciones planteadas anteriormente se obtiene:

$$\frac{dy}{dz} = \theta \quad (5.7)$$

$$EI_x \frac{d^2y}{dz^2} = -M_x \quad (5.8)$$

$$EI_x \frac{d^3y}{dz^3} = -V_y \quad (5.9)$$

$$EI_x \frac{d^4y}{dz^4} = -q \quad (5.10)$$

En el caso de una viga apoyada sobre una cimentación elástica, la carga “q” resultante de aplicar la carga “P” es linealmente proporcional a la deflexión de la viga, siendo:

$$q = k \cdot y \quad (5.11)$$

Donde “k” es una constante que depende de las propiedades del suelo por lo que puede escribirse como:

$$k = b \cdot k_0 \quad (5.12)$$

Siendo “b” el ancho de la viga y “k<sub>0</sub>” la constante elástica de rigidez del suelo, con unidades de fuerza/longitud<sup>3</sup>.

### 5.1.2 Deflexión y reacciones en una viga apoyada sobre cimentación elástica

Relacionando la carga “q”, la constante elástica de rigidez del suelo “k” y las ecuaciones diferenciadas anteriormente planteadas se obtiene la ecuación diferencial de la deformada:

$$EI_x \frac{d^4y}{dx^4} = -ky \quad (5.13)$$

Donde:

$E =$  Módulo de Young.

$I_x =$  Inercia de la sección

$k =$  Constante elástica del suelo

La solución general de la ecuación diferencial viene dada por:

$$y = e^{\beta z}(C_1 \operatorname{sen} \beta z + C_2 \operatorname{cos} \beta z) + e^{-\beta z}(C_3 \operatorname{sen} \beta z + C_4 \operatorname{cos} \beta z) \quad (5.14)$$

Siendo  $\beta$ :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} \quad (5.15)$$

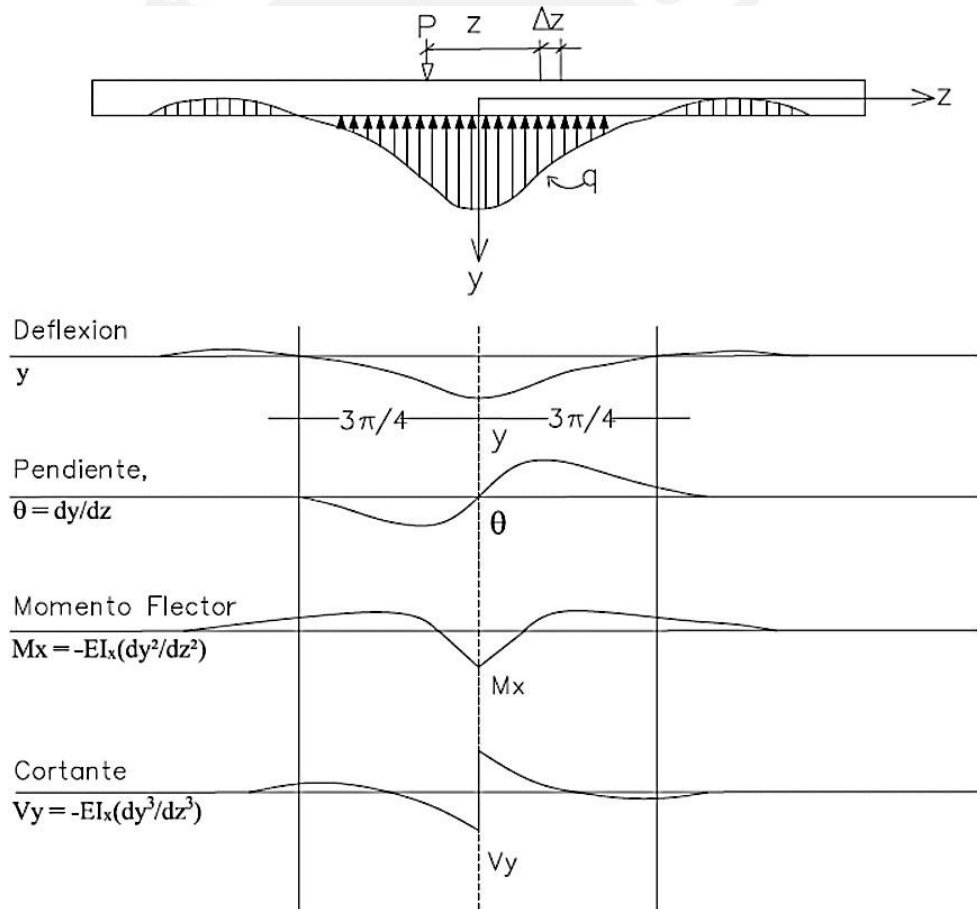


Figura 5.3. Viga con carga puntual sobre cimentación elástica.



Los valores de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  de la ecuación (5.14) vienen dados por las condiciones de borde

Para el caso de una viga infinita sometida a carga concentrada, es posible conocer deflexión  $y$ , la pendiente  $\theta$  el momento flector  $M_x$  derivando dos veces y el cortante  $V_y$  derivando 3 veces.

Se tiene entonces una viga infinita sometida a una carga  $P$ , el origen de coordenadas se ubica en el punto de aplicación de la carga.

Se plantea la ecuación y con coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ .

$$y = e^{\beta z}(C_1 \operatorname{sen} \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{-\beta z}(C_3 \operatorname{sen} \beta z + C_4 \cos \beta z) \quad (5.16)$$

Para determinar los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ , se plantea las condiciones de borde: para  $y=0$ ,  $z=\infty$ . Se obtiene entonces  $C_1=C_2=0$ .

Para determinar los coeficientes  $C_3$  y  $C_4$ , se plantea las condiciones de borde: para  $dy/dz=0$ ,  $x=0$ . Se obtiene entonces  $C_3=C_4$ .

Se tiene entonces una constante única "C". La ecuación se puede escribir entonces como:

$$y = C e^{-\beta z}(\operatorname{sen} \beta z + \cos \beta z) \quad (5.17)$$

Por simetría la carga "P" se reparte en dos mitades, con lo que resolviendo la ecuación para el valor de "C", se tiene:

$$C = \frac{P\beta}{2k} \quad (5.18)$$

Por lo tanto, la ecuación de la deformada será:

$$y = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta z}(\operatorname{sen} \beta z + \cos \beta z), \quad z \geq 0 \quad (5.19)$$

Por simetría de la viga respecto a la carga aplicada se tiene que:

$$\begin{aligned}
 y(-z) &= y(z) & (5.20) \\
 -\theta(-z) &= \theta(z) \\
 Mx(-z) &= Mx(z) \\
 -Vy(-z) &= Vy(z)
 \end{aligned}$$

Siendo:

$$y = \frac{P\beta}{2k} A\beta_z \quad z \geq 0 \quad (5.21)$$

$$\theta = \frac{P\beta^2}{k} B\beta_z \quad z \geq 0$$

$$M_x = \frac{P}{4\beta} C\beta_z \quad z \geq 0$$

$$V_y = -\frac{P}{2} D\beta_z \quad z \geq 0$$

Donde:

$$A\beta_z = e^{-\beta z}(\text{sen}\beta z + \text{cos}\beta z) \quad (5.22)$$

$$B\beta_z = e^{-\beta z}\text{sen}\beta z$$

$$C\beta_z = e^{-\beta z}(-\text{sen}\beta z + \text{cos}\beta z)$$

$$D\beta_z = e^{-\beta z}\text{cos}\beta z$$

Para el caso en que haya múltiples cargas actuando sobre la viga, se usa el principio de superposición para calcular el efecto de todas las cargas sobre un punto.

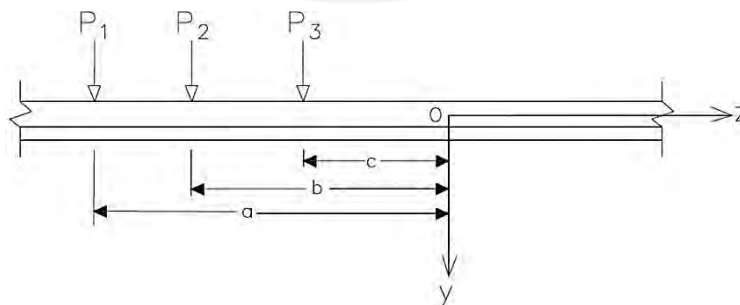


Figura 5.4. Cimentación sometida a múltiples cargas puntuales.

Así supongamos que son aplicadas las cargas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  actuando en  $z=-a$ ,  $z=-b$  y  $z=-c$ , el desplazamiento resultante es:

$$y(z) = \frac{\beta}{2k} [P_1 A_{\beta(z+a)} + P_2 A_{\beta(z+b)} + P_3 A_{\beta(z+c)}] \quad (5.23)$$

**Ejemplo:**

Los rieles de un tren tienen módulo de elasticidad  $E = 200GPa$ , peralte  $h = 184mm$ , Inercia de su sección  $I = 36.9 \times 10^6 mm^4$  y se soportan sobre suelo con un valor de  $k = 14N/mm^2$ . Se requiere calcular la deflexión, momento y cortante máximos para una carga aplicada  $P = 170kN$ . Se sabe además que la distancia al centroide de la sección es  $c = 99.1mm$ .

**Solución:**

Se tiene:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} = \sqrt[4]{\frac{14}{4 \cdot 200000 \cdot (36.9 \cdot 10^6)}} = 8.29 \times 10^{-4}$$

Siendo:

$$y = \frac{P\beta}{2k} A\beta_z \quad z \geq 0$$

$$\theta = \frac{P\beta^2}{k} B\beta_z \quad z \geq 0$$

$$M_x = \frac{P}{4\beta} C\beta_z \quad z \geq 0$$

$$V_y = -\frac{P}{2} D\beta_z \quad z \geq 0$$

Entonces:

$$y_{\max} = \frac{P\beta}{2k} = \frac{170000(8.29 \times 10^{-4})}{2 \times 14} = 5.04mm$$

$$\theta_{\max} = \frac{P\beta^2}{k} = \frac{170000(8.29 \times 10^{-4})^2}{14} = 8.34 \times 10^{-3} rad$$

$$M_{x_{m\acute{a}x}} = \frac{P}{4\beta} = \frac{170000}{4 \times 8.29 \times 10^{-4}} = 51.20 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$V_{y_{m\acute{a}x}} = -\frac{P}{2} = \frac{170000}{2} = -85 \text{ kN}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{Mc}{I} = \frac{51.2 \times 10^6 (99.1)}{36.9 \times 10^6} = 137.53 \text{ Mpa}$$

Como comentario se puede destacar que con este esfuerzo máximo obtenido ( $\sigma_{m\acute{a}x} = 137.53 \text{ Mpa}$ ) se puede aplicar uno de los criterios de falla para materiales dúctiles. Conociendo el esfuerzo de fluencia se puede conocer el factor de seguridad de los rieles para la carga aplicada  $P = 170 \text{ kN}$ .

## 5.2 APLICACIONES EN MATLAB

Esta aplicación permite calcular la deflexión máxima, el giro, la fuerza cortante, el momento flector y el esfuerzo bajo una cimentación elástica con cargas variables, aplicadas en varios puntos.

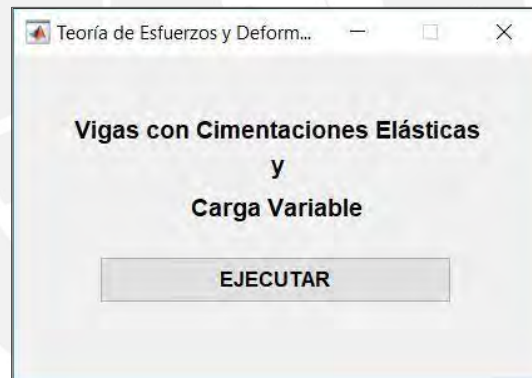


Figura 5.5. Ingreso de datos.

Al ejecutar la aplicación se despliega el menú principal del programa, para luego aparecer la ventana de ingreso de datos (*Figura 5.6*).

Ingreso de Datos  
 k (Mpa)  
 14  
 E (MPa)  
 200E03  
 I (mm4)  
 36.9E6  
 c (mm)  
 99.1  
 Pi (kN)  
 [170 170 170]  
 zi (m)  
 [0 1.7 3.4]  
 z (m)  
 0  
 OK Cancel

Figura 5.6. Ingreso de datos.

Donde:

$K$  = Rigidez del suelo

$E$  = Módulo de elasticidad

$I$  = Inercia de la sección

$c$  = Distancia al centroide de la sección

$P_i$  = Carga  $P$  aplicada en el punto "i"

$z_i$  = Distancia de aplicación de la carga  $P_i$

$z$  = Distancia  $z$  en la que se desea obtener los resultados.

Se obtiene:

- a) La deflexión ( $Y_i$ ), la pendiente  $\theta$ , La fuerza cortante  $V_y$ , el momento flector  $M_x$ , el esfuerzo normal en la sección  $\sigma_n$  y el coeficiente  $\beta$ .

Yí (mm)	theta (rad)	Vy (kN)	Mx (kN.m)	Esfuerzo (Mpa)	Beta
6.26	-0.0022	-83.50	37.02	99.42	8.2986e-04

Figura 5.7. Resultados obtenidos en la viga de cimentación.



## CAPÍTULO 6

### PANDEO. ENFOQUE CLÁSICO PARA VARIAS CONDICIONES DE APOYO

#### 6.1 DEFINICIONES GENERALES

##### 6.1.1 Pandeo

En elementos sometidos a carga axial se presenta fallas por compresión, por fluencia y en algunos casos fallas por pandeo. El pandeo se manifiesta como deflexión lateral, perpendicular a la aplicación de la carga, produciendo inestabilidad elástica. La falla se da dentro del rango elástico con esfuerzos menores al de fluencia.

Al producirse la deflexión lateral, esta puede continuar hasta llegar a deformaciones plásticas para luego llegar al colapso. Para cuerpos perfectamente elásticos, la carga crítica que produce pandeo depende del módulo de elasticidad y de la geometría de la sección del elemento.

La falla por pandeo se produce teóricamente cuando la carga axial alcanza un valor denominado “carga crítica” ( $P_{cr}$ ).

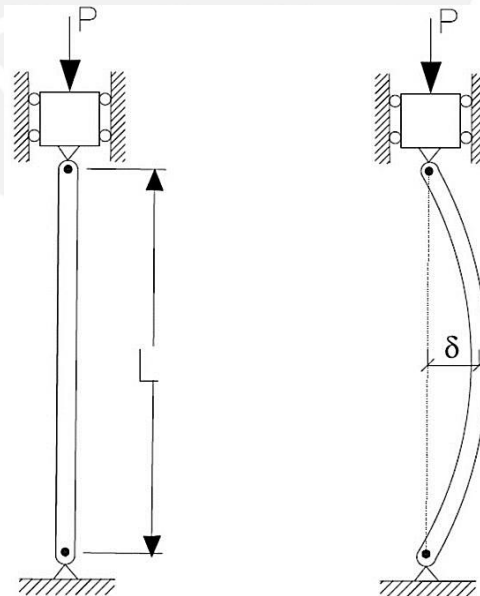


Figura 6.1. Elemento esbelto sometida a carga de compresión.

### 6.1.2 Carga crítica

Para obtener la carga crítica que produce pandeo en un elemento sometido a compresión puede aplicarse métodos de equilibrio, que conduce a un problema de valores propios o métodos de energía.

Aplicando el método de equilibrio, Euler definió la siguiente ecuación para una columna sometida a compresión con un extremo y libre en el otro empotrado.

Se estudia entonces el equilibrio en la posición deformada, asumiendo desplazamientos pequeños.

#### Columna Biarticulada

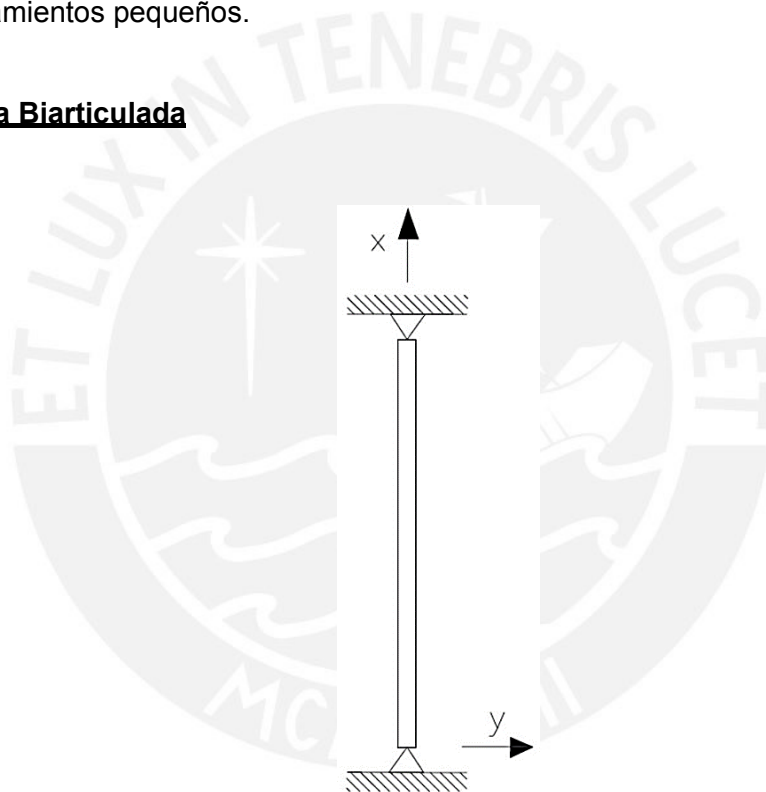


Figura 6.2. Columna con apoyos articulados.

Por sumatoria de fuerzas y momentos se tiene:

$$P \cdot y + M = 0 \quad (6.1)$$

$$M(x) = -P \cdot y \quad (6.2)$$



La curvatura del elemento es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (6.3)$$

Si se considera deformaciones pequeñas,  $(dy/dx)=0$ , por lo tanto, la curvatura del elemento deformado se puede reescribir como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (6.4)$$

Relacionando la curvatura de deformación con el momento flector aplicado a la sección, las propiedades del material y su geometría, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{-P \cdot y}{EI} \quad (6.5)$$

Lo cual lleva a plantear la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P \cdot y}{EI} = 0 \quad (6.6)$$

Se define la variable auxiliar  $\mu^2 = P/EI$ , por lo que la solución de la ecuación diferencial puede expresarse como:

$$y = C1 \cdot \text{sen}(\mu x) + C2 \cdot \text{cos}(\mu x) \quad (6.7)$$

Los valores de C1 y C2 se obtienen de las condiciones de borde del elemento en estudio. En el caso de una columna biarticulada no se produce desplazamiento en sus extremos, por lo tanto, para  $x=0$ ,  $y=0$  y para  $x=L$ ,  $y=0$ .

Se obtiene entonces que  $C2 = 0$ ,  $C1 \neq 0$  y  $\text{sen}(\mu L) = 0$ .

La solución menor para  $\text{sen}(\mu L) = 0$  es:  $\mu \cdot L = \pi$

Se tiene entonces:

$$\mu^2 = P/EI, \mu \cdot L = \pi \quad (6.8)$$

$$\frac{\pi^2}{L^2} = \frac{P}{EI} \quad (6.9)$$

Se define entonces la carga crítica de pandeo como:

$$P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2} \quad (6.10)$$

Y la forma de la curva deflectada será:

$$y = C_1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (6.11)$$

La ecuación general de la deformación de una columna viene dada por:

$$v = C_1 \text{sen } \mu x + C_2 \text{sen } \mu x + C_3 x + C_4 \quad (6.12)$$

Con esto se puede deducir la carga crítica de pandeo para diferentes condiciones de borde, con apoyos libres, articulados, móviles y empotrados.

### **Columna Biempotrada**

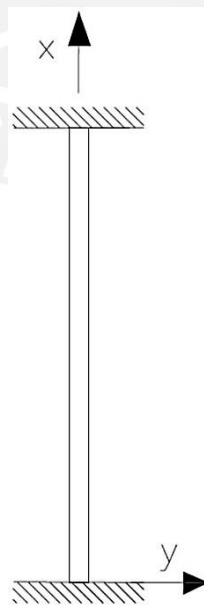


Figura 6.3. Columna con apoyos empotrados.

Deformación de la viga:

$$v = C_1 \operatorname{sen} \mu x + C_2 \operatorname{sen} \mu x + C_3 x + C_4 \quad (6.13)$$

Por condiciones de borde:

Para  $x=0$ ,  $v=0$  y  $v'=0$

Para  $x=L$ ,  $v=0$  y  $v'=0$

Por lo tanto, de la condición  $x=L$ , se tiene:

$$C_2 = -C_4 \quad (6.14)$$

$$C_2 = \frac{\cos \mu L - 1}{\operatorname{sen} \mu L}$$

$$C_1 \mu = -C_3$$
$$C_1 \left( \operatorname{sen} \mu L - \mu L + \frac{(\cos \mu L - 1)^2}{\operatorname{sen} \mu L} \right) = 0$$

Por lo tanto  $\mu L = 2n\pi$ , entonces:

$$P_{cr} = \frac{4n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.15)$$

Para  $n=1$ :

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.16)$$

### 6.1.3 Longitud efectiva

Los casos anteriormente analizados pueden expresarse con una fórmula genérica tomando como base la ecuación:

$$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2} \quad (6.17)$$

Se tiene entonces, para las 4 condiciones de borde planteadas la ecuación general:

$$P_{cr} = \alpha \frac{EI\pi^2}{L^2} = \frac{EI\pi^2}{(kL)^2} = L^2 \frac{EI\pi^2}{e} \quad (6.18)$$

Se define entonces  $L_e$  como el valor que relaciona  $EI\pi^2$  con la carga crítica  $P_{cr}$ , dependiendo de las condiciones de borde.

Donde:

$P_{cr}$  = carga crítica de pandeo.

$E$  = Módulo de Young.

$I$  = Inercia de la sección

$L_e$  = Longitud efectiva del elemento

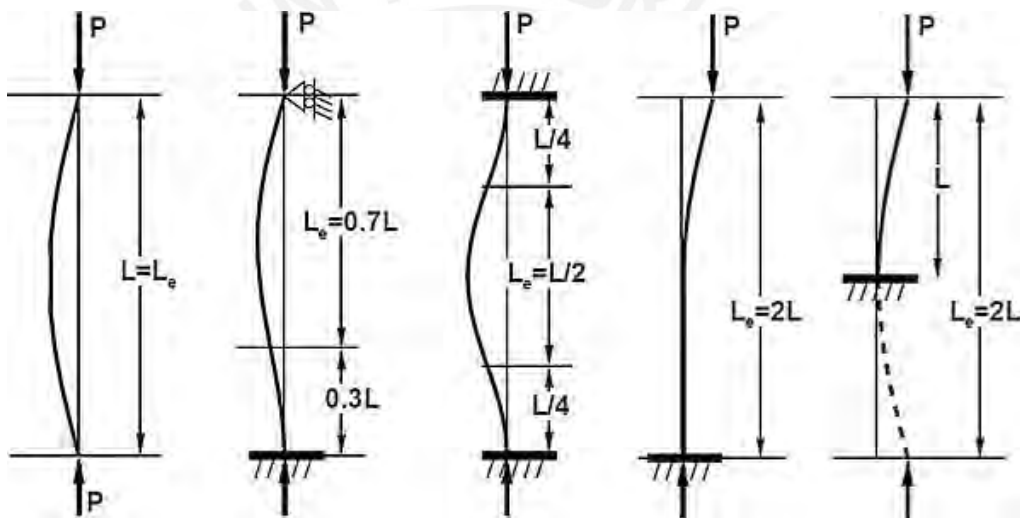


Figura 6.4. Pandeo de elementos esbeltos sometidos a cargas axiales, para diferentes condiciones de apoyo.

La longitud efectiva ( $L_e$ ) depende de las condiciones de apoyo en cada extremo del elemento. Se tiene apoyo libre, articulado, móvil y empotrado.

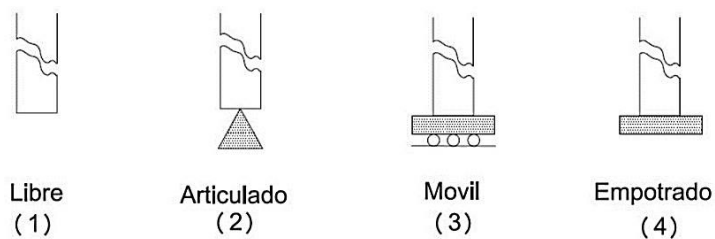


Figura 6.5. Tipos de apoyo.

### 6.1.4 Forma modal de pandeo

La carga crítica  $P_{cr}$  aplicada a un elemento producirá deformación lateral. Esta deformación lateral depende de las propiedades del material, geometría de la sección y condiciones de borde del sistema.

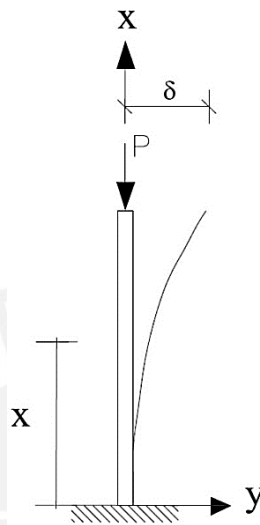


Figura 6.6. Forma de pandeo de una columna comprimida.

Con cada combinación de condición de borde (tipo de apoyo), viene asociado una forma modal de pandeo. Conociendo la forma modal de pandeo, se puede predecir la forma de la deformación lateral que se producirá en el elemento sometido a carga axial.

Se presenta a continuación la forma modal de pandeo para diferentes condiciones de borde.

Condiciones de borde	Longitud efectiva ( $L_e$ )	Forma modal de pandeo
<i>Libre – Libre</i>	$L$	$\sin \frac{\pi x}{L}$
<i>Articulado – Libre</i>	$L$	$\sin \frac{\pi x}{L}$
<i>Articulado – Articulado</i>	$L$	$\sin \frac{\pi x}{L}$
<i>Móvil – Libre</i>	$2 \cdot L$	$\sin \frac{\pi x}{2L}$

<i>Móvil – Articulado</i>	$2 \cdot L$	$\cos \frac{\pi x}{2L}$
<i>Móvil – Móvil</i>	$L$	$\cos \frac{\pi x}{L}$
<i>Empotrado – Libre</i>	$2 \cdot L$	$1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$
<i>Empotrado – Articulado</i>	$0.7 \cdot L$	$\sin kx - kL \cos kx + kL \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ $k = 1.4318 \frac{\pi}{L}$
<i>Empotrado – Móvil</i>	$L$	$1 - \cos \frac{\pi x}{L}$
<i>Empotrado – Empotrado</i>	$0.5 \cdot L$	$1 - \cos \frac{2\pi x}{L}$

### 6.1.5 Pandeo de columnas cargadas excéntricamente

Dentro del estudio de elementos sometidos a compresión se tiene el caso particular de pandeo de columnas bajo cargas excéntricas. Al existir una carga “P” con un excentricidad “e” se genera un momento igual a “P x e”.

Se analiza entonces las condiciones bajo las cuales se produce la carga crítica “Pcr” bajo las condiciones mencionadas.

#### Columna excéntricamente cargada con ambos extremos fijos.

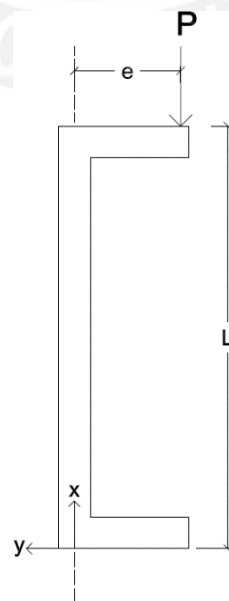


Figura 6.7. Elemento esbelto con carga excéntrica.

La columna excéntricamente cargada tendrá un momento igual a:

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (6.19)$$

La carga "P" con la deflexión de la columna y la excentricidad "e" produce el momento M:

$$M = -P(y + e) \quad (6.20)$$

De igualar estas dos ecuaciones se tiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = -Pe \quad (6.21)$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) - e \quad (6.22)$$

Se tiene dos condiciones de borde:

Para  $y=0$  en  $x=0$ , se obtiene:

$$y = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + e \left[ \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) - 1 \right] \quad (6.23)$$

Para  $y=0$  en  $x=L$ , se obtiene:

$$A = e \tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right) \quad (6.24)$$

Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$y = e \left[ \tan \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) A \sin \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) - 1 \right] \quad (6.25)$$

Se observa que la deflexión de cada tramo de la columna es directamente dependiente de la excentricidad “e”. También es interesante notar que el resultado obtenido predice que la deflexión será cero cuando “e=0” aún en presencia de carga “P”.

En el caso de “e≠0”, la deflexión “y” tiende a ser infinita cuando el valor dentro de la tangente se aproxima a  $\pi/2$ . Por lo tanto, la deflexión de la columna se vuelve infinita cada vez que:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (6.26)$$

Resolviendo la ecuación anterior se tiene:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.27)$$

Se demuestra entonces que la carga crítica es independiente de la excentricidad de la carga aplicada.

Es necesario entonces analizar los esfuerzos internos producidos en la sección de la columna para definir bajo qué condiciones se producirá la falla, si debido a la aplicación de una carga crítica o a la fluencia de la sección.

El esfuerzo máximo se produce en la fibra externa de la sección, a una distancia “c” del eje.

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max} \times c}{I} \quad (6.28)$$



Siendo:

$$M_{max} = P(y_{max} + e) \quad (6.29)$$

La deflexión máxima se producirá en  $x = L/2$ , siendo entonces la deflexión máxima:

$$y_{max} = e \left[ \tan \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \operatorname{Asin} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) + \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad (6.30)$$

$$y_{max} = e \left[ \sec \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad (6.31)$$

Reemplazando en (4) se tiene:

$$\sigma_{max} = P \left[ \frac{1}{A} + \frac{e \times c}{I} \sec \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \right] \quad (6.32)$$

Se observa que la función secante tiende a infinito cuando su argumento tiene a  $\pi/2$ , lo que resulta en  $\sigma_{max} = \infty$ . Esto nos lleva a concluir que la falla de la columna estará gobernada por el esfuerzo de fluencia.

Se tiene:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.33)$$

La ecuación (6.32) se puede escribir como:

$$\sigma_{max} = P \left[ \frac{1}{A} + \frac{e \times c}{I} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right] \quad (6.34)$$

Se demuestra entonces que la columna en realidad fallará cuando  $\sigma_{max} = \sigma_{yield}$ , lo que ocurrirá para cargas menores que  $P_{cr}$ .

### 6.1.6 Pandeo de columnas de sección variable

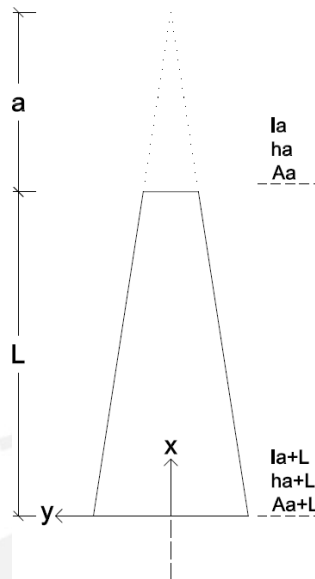


Figura 6.8. Columna de sección variable.

Se analiza el caso particular de columnas de sección variable. Una vez definida su geometría es necesario definir una ley de variación de inercia.

Timoshenko propuso la siguiente ley general de variación de inercia.

$$I(x) = I_a \left(\frac{x}{a}\right)^n \quad (6.35)$$

Donde:

$x$  = Longitud de la barra

$I_a$  = Momento de inercia menor de la barra

$a$  = Longitud ficticia de la prolongación de aristas.

$n$  = Coeficiente que depende de la forma de la sección.

El valor de  $n=2$  se usa para secciones cuadradas, I o T.

Para relacionar la longitud de la barra " $L$ " y la distancia ficticia " $a$ " se define el coeficiente de ahusamiento,  $\gamma$ , de la barra:

$$\gamma = \frac{L}{a} = \frac{h_{a+L} - h_a}{h_a} \quad (6.36)$$

Para  $x = L + a$  se tiene:

$$I(L + a) = I_a \left( \frac{a + L}{a} \right)^2 = I_a (1 + \gamma)^2 \quad (6.37)$$

Entonces la relación entre la inercia de las dos secciones será:

$$\frac{I_{(a+L)}}{I_a} = \frac{I_a (1 + \gamma)^2}{I_a} = (1 + \gamma)^2 \quad (6.38)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{I_{(a+L)}}{I_a}} - 1 \quad (6.39)$$

Se analiza el caso de la carga axial  $P$  y columna con un extremo empotrado y el otro libre.

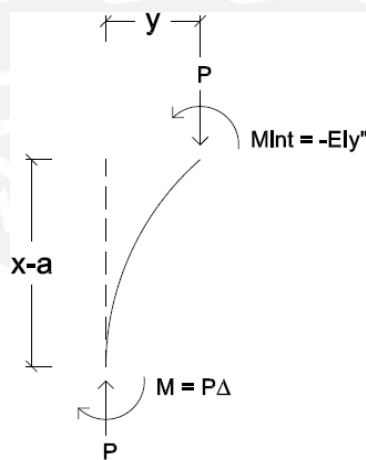


Figura 6.9. Diagrama de cuerpo libre de columna con apoyos empotrado-libre.

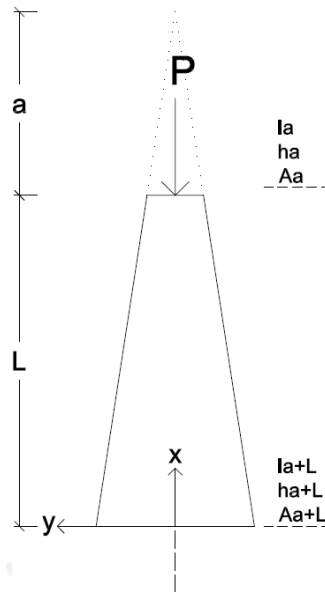


Figura 6.10. Columna de sección variable sometida a compresión.  
Apoyos empotrado-libre.

La ecuación diferencial del caso analizado en la figura es:

$$EI_1 \left(\frac{x}{a}\right)^n \frac{d^2y}{dx^2} = -(Py + P\Delta) \quad (6.40)$$

Se define:

$$k^2 = \frac{r}{EI_a} \quad (6.41)$$

Se tiene:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + k^2 a^2 y - k^2 a^2 \Delta = 0 \quad (6.42)$$

Se hace el cambio de variable para:

$$\frac{x}{a} = e^t \quad (6.43)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \quad (6.44)$$

Se obtiene la ecuación diferencial:

$$y''(t) - y'(t) + k^2 a^2 y(t) - k^2 a^2 \Delta = 0 \quad (6.45)$$

Cuya solución es:

$$y(t) = A\sqrt{e^t} \sin \delta t + B\sqrt{e^t} \cos \delta t + \Delta \quad (6.46)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{(ka)^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.47)$$

Se realiza un nuevo cambio de variable se obtiene la ecuación de la deformada:

$$y(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \quad (6.48)$$

Los valores de A y B se obtienen de las condiciones de borde.

$$y = \Delta, \text{ para } x = a$$

$$y = 0, \text{ para } x = a+L$$

$$y' = 0, \text{ para } x = a+L$$

$$y(x) = \frac{-\Delta}{\sqrt{1 + \gamma \sin(\delta \ln(1 + \gamma))}} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \quad (6.49)$$

Donde:

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{kL}{\gamma}\right)^2 - \frac{1}{4}} \quad (6.50)$$

Y habiendo definido:

$$k^2 = \frac{r}{EI_a} \quad (6.51)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{I_{(a+L)}}{I_a}} - 1 \quad (6.52)$$

Se puede despejar el valor de "P", siendo la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\gamma^2 \left(\delta^2 + \frac{1}{4}\right) EI_a}{L^2} \quad (6.53)$$

Se analiza entonces el pandeo de una columna de sección variable para las siguientes condiciones de apoyo.

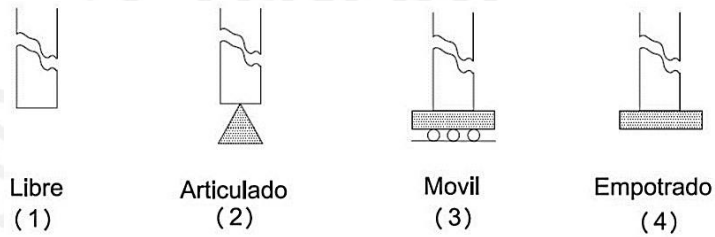


Figura 6.11. Tipos de apoyo.

### 6.1.6.1 Columna de inercia variable biarticulada

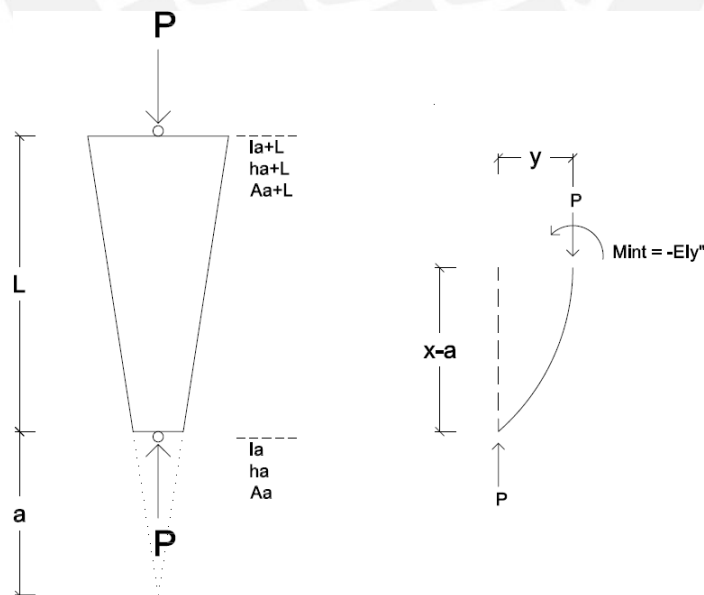


Figura 6.12. Columna de sección variable. Apoyos articulado-articulado.

Ecuación diferencial:

$$x^2 y''(x) + k^2 a^2 y(x) = 0 \quad (6.54)$$

Cuya solución es:

$$y(x) = A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + B \sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) \quad (6.55)$$

Para las condiciones de una columna bi-articulada se tiene:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.56)$$

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.57)$$

Se halla la carga crítica:

$$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2 EI}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{a}{L^2} \quad (6.58)$$

Y la ecuación de forma:

$$y(x) = A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left( \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \ln \frac{x}{a} \right) \quad (6.59)$$

### 6.1.6.2 Columna de inercia variable empotrada-libre

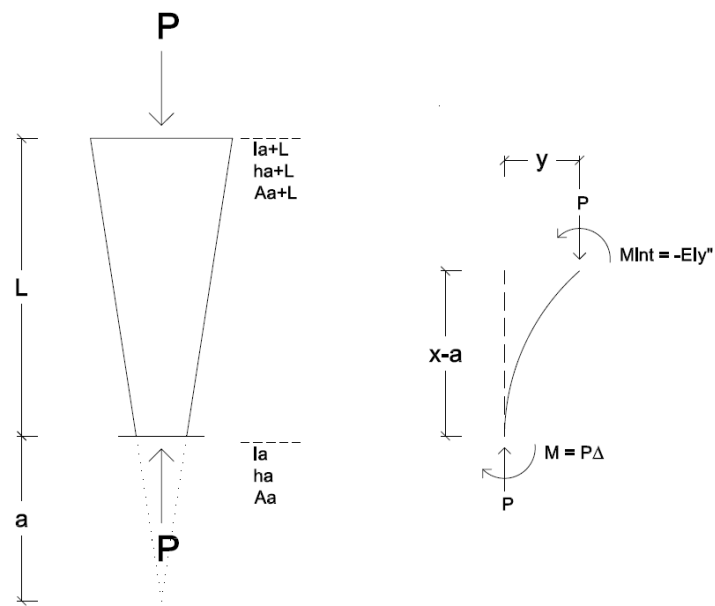


Figura 6.13. Columna de sección variable. Apoyos empotrado-libre.

Ecuación diferencial:

$$EI \left(\frac{x}{a}\right)^2 y''(x) + P y(x) - P\Delta = 0 \quad (6.60)$$

Cuya solución es:

$$y(x) = A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \Delta \quad (6.61)$$

Para las condiciones de una columna empotrada-libre se tiene:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \sqrt{\frac{6 - 3 \ln(1+\gamma)}{24 + (\pi^2 - 12) \ln(1+\gamma)}} \quad (6.62)$$

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 \left(\frac{6 - 3 \ln(1+\gamma)}{24 + (\pi^2 - 12) \ln(1+\gamma)}\right) + \ln^2(1+\gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1+\gamma)}} \quad (6.63)$$



Se halla la carga crítica:

$$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 \left( \frac{6 - 3 \ln(1 + \gamma)}{24 + (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)} \right) + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.64)$$

Y la ecuación de forma:

$$y(x) = \frac{\Delta}{2\delta} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + \Delta \sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) \quad (6.65)$$

### 6.1.6.3 Columna de inercia variable libre-empotrada

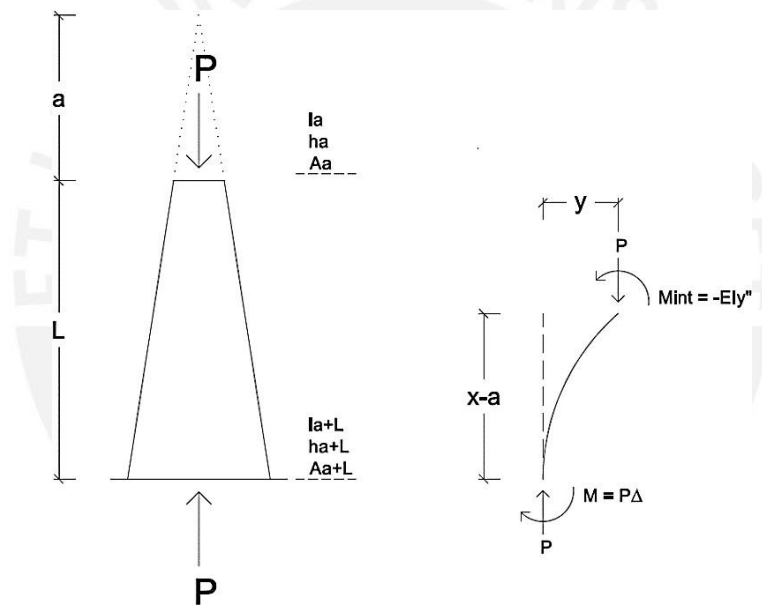


Figura 6.14. Columna de sección variable. Apoyos libre-empotrado.

Ecuación diferencial:

$$EI \left( \frac{x}{a} \right)^2 y''(x) + P y(x) - P \Delta = 0 \quad (6.66)$$

Cuya solución es:

$$y(x) = A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) + B \sqrt{\frac{x}{a}} \cos \left( \delta \ln \frac{x}{a} \right) \quad (6.67)$$

Para las condiciones de una columna libre-empotrada se tiene:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1+\gamma)} \sqrt{\frac{6+3\ln(1+\gamma)}{24-(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)}} \quad (6.68)$$

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 \left( \frac{6+3\ln(1+\gamma)}{24-(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)} \right) + \ln^2(1+\gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1+\gamma)}} \quad (6.69)$$

Se halla la carga crítica:

$$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 \left( \frac{6+3\ln(1+\gamma)}{24-(\pi^2-12)\ln(1+\gamma)} \right) + \ln^2(1+\gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1+\gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.70)$$

Y la ecuación de forma:

$$y(x) = -\frac{\Delta}{\sqrt{1+\delta \sin(\delta \ln(1+\gamma))}} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \Delta \quad (6.71)$$

#### 6.1.6.4 Columna de inercia variable empotrada-empotrada

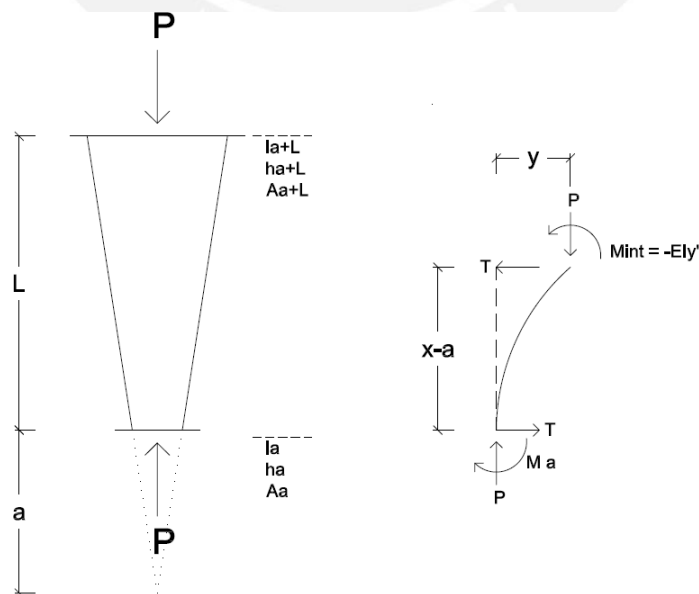


Figura 6.15. Columna de sección variable. Apoyos empotrado-empotrado.

Ecuación diferencial:

$$EI \left(\frac{x}{a}\right)^2 y''(x) + Py(x) - Ma - T(x - a) = 0 \quad (6.72)$$

Cuya solución es:

$$y(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{Ma}{P} + \frac{T(x - a)}{P} \quad (6.73)$$

Para las condiciones de una columna libre-empotrada se tiene:

$$\delta = \frac{2\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.74)$$

$$k = \sqrt{\frac{(16\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.75)$$

Se halla la carga crítica:

$$P_{cr} = \left[ \frac{(16\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2 EI}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{a}{L^2} \quad (6.76)$$

Y la ecuación de forma:

$$y(x) = \frac{Ma - 2aT}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{Ma}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{Ma}{P} + \frac{T(x - a)}{P} \quad (6.77)$$

### 6.1.6.5 Columna de inercia variable empotrada-móvil

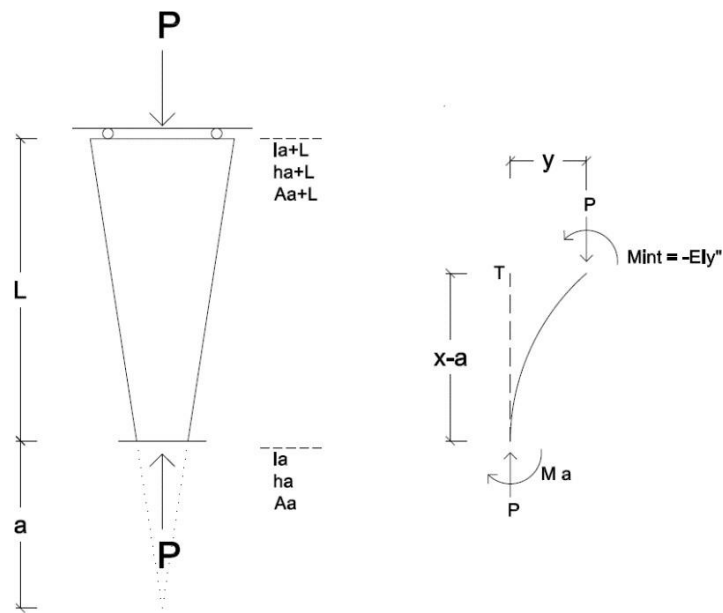


Figura 6.16. Columna de sección variable. Apoyos empotrado-móvil.

Ecuación diferencial:

$$EI \left(\frac{x}{a}\right)^2 y''(x) + Py(x) - Ma = 0 \quad (6.78)$$

Cuya solución es:

$$y(x) = A \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{Ma}{P} \quad (6.79)$$

Para las condiciones de una columna libre-empotrada se tiene:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \quad (6.80)$$

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.81)$$

Se halla la carga crítica:

$$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2 EI}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{a}{L^2} \quad (6.82)$$

Y la ecuación de forma:

$$y(x) = \frac{Ma}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{Ma}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{Ma}{P} \quad (6.83)$$

### 6.1.6.6 Columna de inercia variable empotrada-articulada

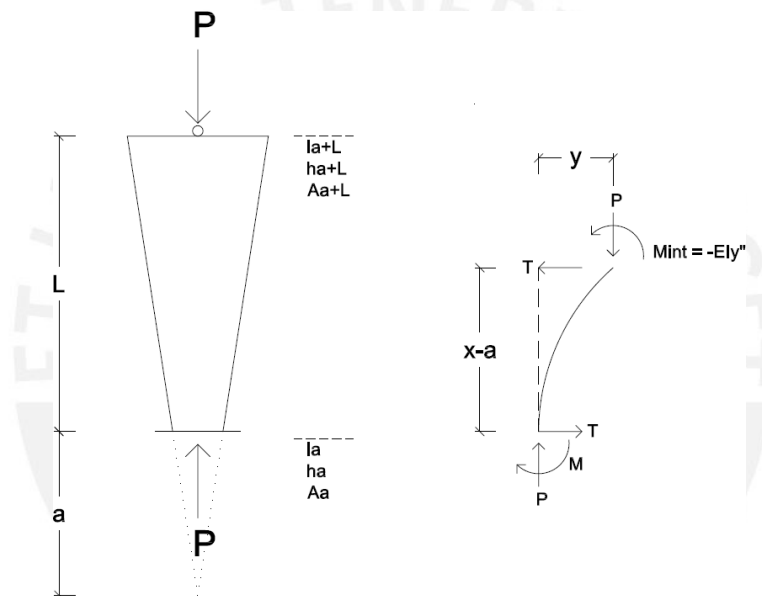


Figura 6.17. Columna de sección variable. Apoyos empotrado-articulado.

Ecuación diferencial:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 y''(x) + Py(x) - M + \frac{M}{L}(x-a) = 0 \quad (6.84)$$

Cuya solución es:

$$y(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(x-a)}{P} \quad (6.85)$$

Para las condiciones de una columna libre-empotrada se tiene:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \quad (6.86)$$

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1 + \gamma))\gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.87)$$

Se halla la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{(4\pi^2 \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right)^2 + \ln^2(1 + \gamma))\gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.88)$$

Y la ecuación de forma:

$$y(x) = \frac{M + 2aT}{2\delta P} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) - \frac{M}{P} \sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(x - a)}{LP} \quad (6.89)$$

### 6.1.6.7 Columna de inercia variable articulada-empotrada

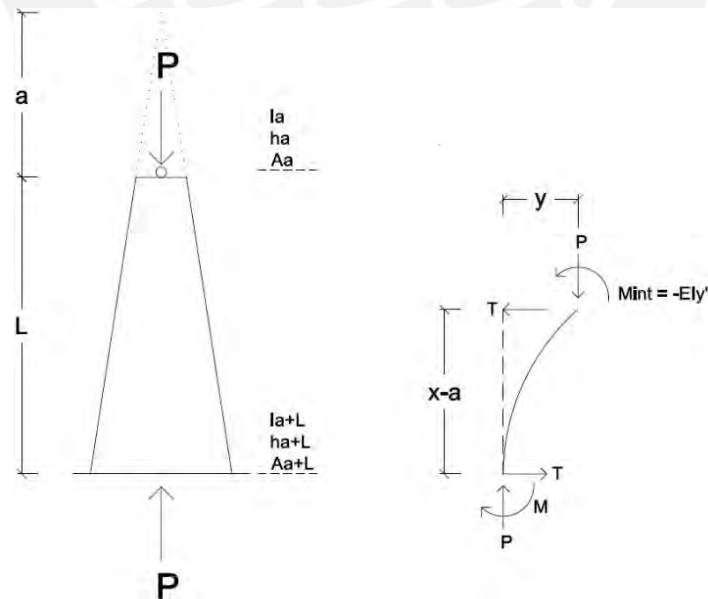


Figura 6.18. Columna de sección variable. Apoyos articulado-empotrado.

Ecuación diferencial:

$$EI_a \left(\frac{x}{a}\right)^2 y''(x) + Py(x) - M + \frac{M}{L}(x - a) = 0 \quad (6.90)$$

Cuya solución es:

$$y(x) = A\sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + B\sqrt{\frac{x}{a}} \cos\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(x - a)}{P} \quad (6.91)$$

Para las condiciones de una columna libre-empotrada se tiene:

$$\delta = \frac{\pi}{\ln(1 + \gamma)} \left( \frac{14311 - 38\gamma}{10000} \right) \quad (6.92)$$

$$k = \sqrt{\frac{(4\pi^2 \left(\frac{14311 - 38\gamma^2}{10000}\right) + \ln^2(1 + \gamma))\gamma^2}{4L^2 \ln^2(1 + \gamma)}} \quad (6.93)$$

Se halla la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{(4\pi^2 \left(\frac{14311 - 38\gamma^2}{10000}\right) + \ln^2(1 + \gamma))\gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \frac{EI_a}{L^2} \quad (6.94)$$

Y la ecuación de forma:

$$y(x) = -\frac{M}{P\sqrt{1 + \gamma} \sin(\delta \ln(1 + \gamma))} \sqrt{\frac{x}{a}} \sin\left(\delta \ln \frac{x}{a}\right) + \frac{M}{P} - \frac{M(a + L - x)}{LP} \quad (6.95)$$

Se presenta a continuación la carga crítica de pandeo para diferentes condiciones de borde.

Condiciones de borde	Carga crítica (Pcr)
<i>Articulado – Articulado</i>	$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma))\gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2}$
<i>Libre – Empotrado</i>	$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 \left( \frac{6 + 3 \ln(1 + \gamma)}{24 - (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)} \right) + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2}$
<i>Empotrado – Libre</i>	$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 \left( \frac{6 - 3 \ln(1 + \gamma)}{24 + (\pi^2 - 12) \ln(1 + \gamma)} \right) + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2}$
<i>Empotrado – Articulado</i>	$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 \left( \frac{14311 - 38\gamma^2}{10000} \right) + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2}$
<i>Articulado – Empotrado</i>	$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 \left( \frac{14311 - 38\gamma^2}{10000} \right) + \ln^2(1 + \gamma)) \gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2}$
<i>Empotrado – Móvil</i>	$P_{cr} = \left[ \frac{(4\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma))\gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2}$
<i>Empotrado – Empotrado</i>	$P_{cr} = \left[ \frac{(16\pi^2 + \ln^2(1 + \gamma))\gamma^2}{4 \ln^2(1 + \gamma)} \right] \frac{EI_a}{L^2}$



### 6.1.7 Pandeo de columnas compuestas

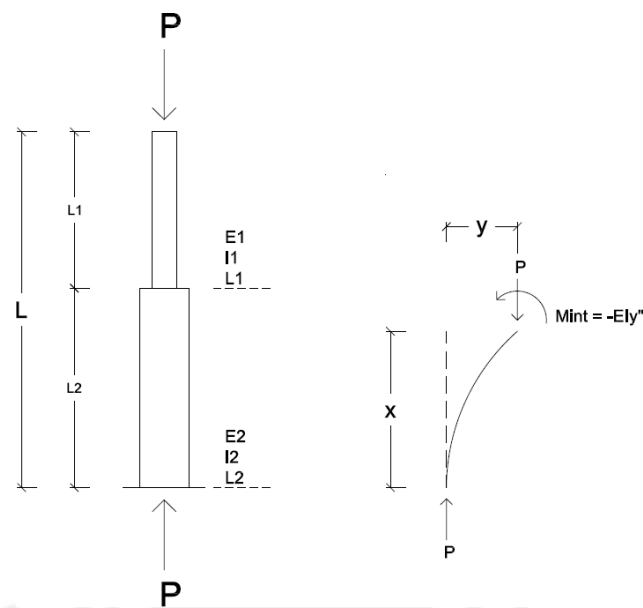


Figura 6.19. Columna de sección Compuesta.

Se estudia el pandeo de elementos sometidos a compresión compuesto por dos elementos de diferente inercia ( $I_1$ ,  $I_2$ ) y diferente módulo de elasticidad ( $E_1$ ,  $E_2$ ).

Se realiza el análisis con varias condiciones de soporte usando el método de energía.

Se define la energía de deformación por flexión como:

$$\Delta U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (6.96)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{P^2 (y)'^2 dx}{2EI} \quad (6.97)$$

El trabajo realizado por la fuerza externa "P" es:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (6.98)$$

Siendo  $\Delta U = \Delta T$ , se halla el valor de la carga crítica  $P_{cr}$  tomando como como

primera aproximación de la deformada “y” las ecuaciones halladas en columnas de sección constante.

Condiciones de borde	Ecuación de la deformada
<i>Libre – Libre</i>	$\sin \frac{\pi x}{L}$
<i>Articulado – Libre</i>	$\sin \frac{\pi x}{L}$
<i>Articulado – Articulado</i>	$\sin \frac{\pi x}{L}$
<i>Móvil – Libre</i>	$\sin \frac{\pi x}{2L}$
<i>Móvil – Articulado</i>	$\cos \frac{\pi x}{2L}$
<i>Móvil – Móvil</i>	$\cos \frac{\pi x}{L}$
<i>Empotrado – Libre</i>	$1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$
<i>Empotrado – Articulado</i>	$\sin kx - kL \cos kx + kL \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ $k = 1.4318 \frac{\pi}{L}$
<i>Empotrado – Móvil</i>	$1 - \cos \frac{\pi x}{L}$
<i>Empotrado – Empotrado</i>	$1 - \cos \frac{2\pi x}{L}$

### 6.1.7.1 Columna compuesta articulado-articulado

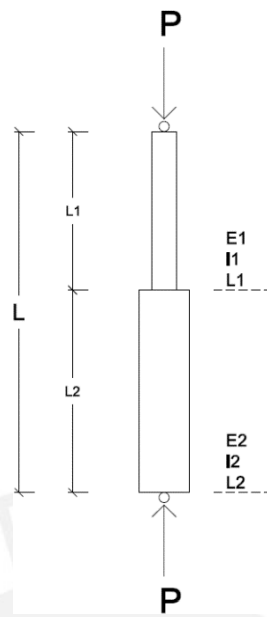


Figura 6.20. Columna de sección compuesta. Apoyos articulado-articulado.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right) \quad (6.99)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.100)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (y')^2 dx}{2EI} \quad (6.101)$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (6.102)$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{P^2 (\delta (\sin \frac{\pi x}{L}))^2 dx}{2E_1 I_1} + \int_{L_2}^L \frac{P^2 (\delta (\sin \frac{\pi x}{L}))^2 dx}{2E_2 I_2} \quad (6.103)$$

$$\Delta U = \frac{P^2 \delta^2 (2L \pi - L \sin \frac{2L_2 \pi}{L})}{8E_2 I_2 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (2(L - L_2) \pi + L \sin \frac{2L_2 \pi}{L})}{8E_1 I_1 \pi} \quad (6.104)$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L d \left( \frac{\delta \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right)}{dx} \right) dx \quad (6.105)$$

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{4L} \quad (6.106)$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.107)$$

$$\frac{P^2 \delta^2 (2L \pi - L \sin \frac{2L_2 \pi}{L})}{8E_2 I_2 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (2(L - L_2) \pi + L \sin \frac{2L_2 \pi}{L})}{8E_1 I_1 \pi} = \frac{P \delta^2 \pi^2}{4L} \quad (6.108)$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{2E_2 I_2 E_1 I_1 \pi^3}{L} / (2(E_2 I_2 (L - L_2) + E_1 I_1 L_2) \pi + (-E_1 I_1 L + E I L) \sin \frac{2L_2 \pi}{L}) \quad (6.109)$$

### 6.1.7.2 Columna compuesta móvil-libre

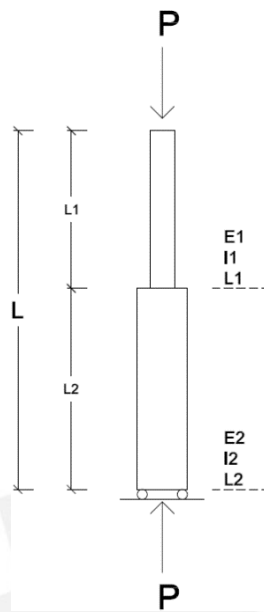


Figura 6.21. Columna de sección compuesta. Apoyos móvil-libre.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( \sin \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (6.110)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.111)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (y')^2}{2EI} dx \quad (6.112)$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (6.113)$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{P^2 (\delta (\sin \frac{\pi x}{2L}))^2}{2E_1 I_1} dx + \int_{L_2}^L \frac{P^2 (\delta (\sin \frac{\pi x}{2L}))^2}{2E_2 I_2} dx \quad (6.114)$$

$$\Delta U = \frac{P^2 \delta^2 ((L - L_2) \pi + L \sin \frac{L_2 \pi}{L})}{4E_1 I_1 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (L_2 - \frac{L \sin \frac{L_2 \pi}{L}}{\pi})}{4E_2 I_2} \quad (6.115)$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L d \left( \frac{\delta \left( \sin \frac{\pi x}{2L} \right)}{dx} \right)^2 dx \quad (6.116)$$

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{16L} \quad (6.117)$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.118)$$

$$\frac{P^2 \delta^2 ((L - L_2) \pi + L \sin \frac{L_2 \pi}{L})}{4E_1 I_1 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (L_2 - \frac{L \sin \frac{L_2 \pi}{L}}{\pi})}{4E_2 I_2} = \frac{P \delta^2 \pi^2}{16L} \quad (6.119)$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{E_2 I_2 E_1 I_1 \pi^3}{4L} / (E_2 I_2 (L - L_2) \pi + E_1 I_1 L_2 \pi + (-E_1 I_1 L + E I L) \sin \frac{L_2 \pi}{L}) \quad (6.120)$$

### 6.1.7.3 Columna compuesta móvil-articulado

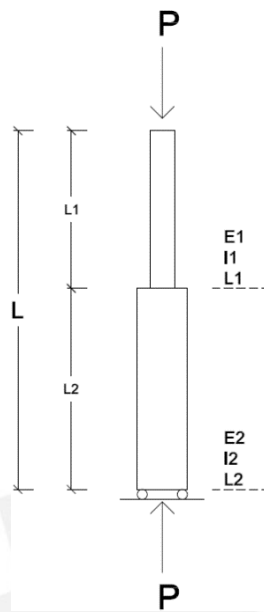


Figura 6.22. Columna de sección compuesta. Apoyos móvil-articulado.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (6.121)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.122)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (y')^2 dx}{2EI}$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{L_2 P^2 (\delta (\cos \frac{\pi x}{2L}))^2 dx}{2E_1 I_1} + \int_{L_2}^L \frac{L P^2 (\delta (\cos \frac{\pi x}{2L}))^2 dx}{2E_2 I_2} \quad (6.123)$$

$$\Delta U = \frac{P_2 \delta_2 (L_2 \pi + L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}])}{4E_2 I_2 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (L - L_2 - \frac{L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}]}{\pi})}{4E_1 I_1}$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L d\left(\delta \left(\cos \frac{\pi x}{2L}\right)\right) dx \quad (6.124)$$

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{16L}$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.125)$$

$$\frac{P^2 \delta^2 (L_2 \pi + L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}])}{4E_2 I_2 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (L - L_2 - \frac{L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}]}{\pi})}{4E_1 I_1} = \frac{P \delta^2 \pi^2}{16L}$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{E_2 I_2 E_1 I_1 \pi^3}{4L} / (E_2 I_2 (L - L_2) \pi + E_1 I_1 L_2 \pi + (E_1 I_1 - E_1 I_1 \frac{L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}]}{\pi})) \quad (6.126)$$



### 6.1.7.4 Columna compuesta móvil-móvil

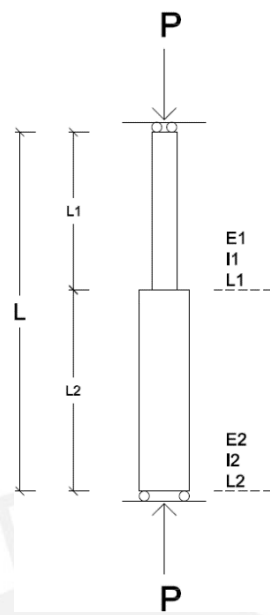


Figura 6.23. Columna de sección compuesta. Apoyos móvil-móvil.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( \cos \frac{\pi x}{L} \right) \quad (6.127)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.128)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (y)^2 dx}{2EI}$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{P^2 (\delta (\cos \frac{\pi x}{L}))^2 dx}{2E_1 I_1} + \int_{L_2}^L \frac{P^2 (\delta (\cos \frac{\pi x}{L}))^2 dx}{2E_2 I_2} \quad (6.129)$$

$$\Delta U = \frac{P^2 \delta^2 (2L - 2L_2 - \frac{L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}]}{\pi})}{8E_1 I_1} + \frac{P^2 \delta^2 (2L_2 + \frac{L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}]}{\pi})}{8E_2 I_2}$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L d\left(\delta \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) dx \quad (6.130)$$

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{4L}$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.131)$$

$$\frac{P^2 \delta^2 (2L - 2L_2 - \frac{L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}]}{\pi})}{8E_1 I_1} + \frac{P^2 \delta^2 (2L_2 + \frac{L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}]}{\pi})}{8E_2 I_2} = \frac{P \delta^2 \pi^2}{4L}$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{2E_2 I_2 E_1 I_1 \pi^3}{L} / (2(E_2 I_2 (L - L_2) + E_1 I_1 L_2) \pi + (E_1 I_1 - E_2 I_2) L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}]) \quad (6.132)$$

### 6.1.7.5 Columna compuesta empotrada-libre

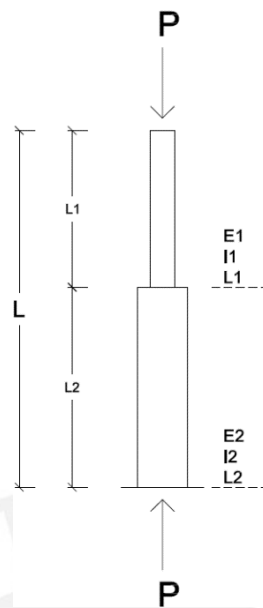


Figura 6.24. Columna de sección compuesta. Apoyos empotrada-libre.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (6.133)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.134)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (\delta - y)^2 dx}{2EI}$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{L_2 P^2 (\delta - \delta (1 - \cos \frac{\pi x}{2L}))^2 dx}{2E_1 I_1} + \int_{L_2}^L \frac{L P^2 (\delta - \delta (1 - \cos \frac{\pi x}{2L}))^2 dx}{2E_2 I_2} \quad (6.135)$$

$$\Delta U = \frac{P^2 \delta^2 (E_2 I_2 (L - L_2) \pi + E_1 I_1 L_2 \pi + (E_1 I_1 - E_2 I_2) L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}])}{4 E_2 I_2 E_1 I_1 \pi}$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L d \left( \frac{\delta (1 - \cos \frac{\pi x}{2L})}{dx} \right)^2 dx \quad (6.136)$$

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{16L}$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.137)$$

$$\frac{P^2 \delta^2 (E_2 I_2 (L - L_2) \pi + E_1 I_1 L_2 \pi + (E_1 I_1 - E_2 I_2) L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}])}{4 E_2 I_2 E_1 I_1 \pi} = \frac{P \delta^2 \pi^2}{16L}$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{E_2 I_2 E_1 I_1 \pi^3}{4L (E_2 I_2 (L - L_2) \pi + E_1 I_1 L_2 \pi + (E_1 I_1 - E_2 I_2) L \sin[\frac{L_2 \pi}{L}])} \quad (6.138)$$

### 6.1.7.6 Columna compuesta empotrada-articulada

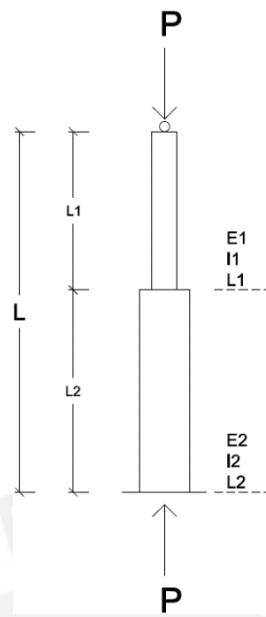


Figura 6.25. Columna de sección compuesta. Apoyos empotrado-articulado.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right) \quad (6.139)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.140)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (y)^2 dx}{2EI}$$

$$\Delta T = 2.046 \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{P^2 \left( \delta \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right) \right)^2 dx}{2E_1 I_1} + \int_{L_2}^L \frac{P^2 \left( \delta \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right) \right)^2 dx}{2E_2 I_2} \quad (6.141)$$

$$\Delta U = \frac{P^2 \delta^2 (2L_2 \pi - L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}])}{8E_2 I_2 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (2(L - L_2) \pi + L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}])}{8E_1 I_1 \pi}$$

Luego:

$$\Delta T = 2.046 \frac{P}{2} \int_0^L d\left(\delta \left(\sin \frac{\pi x}{L}\right)\right) dx \quad (6.142)$$

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{2L}$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.143)$$

$$\frac{P^2 \delta^2 (2L_2 \pi - L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}])}{8E_2 I_2 \pi} + \frac{P^2 \delta^2 (2(L - L_2) \pi + L \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}])}{8E_1 I_1 \pi} = \frac{P \delta^2 \pi^2}{2L}$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{4.092 E_2 I_2 E_1 I_1 \pi^3}{L} / (2(E_2 I_2 (L - L_2) + E_1 I_1 L_2) \pi + (-E_1 I_1 L + E_1 I_1 L) \sin[\frac{2L_2 \pi}{L}]) \quad (6.144)$$

### 6.1.7.7 Columna compuesta empotrada-móvil

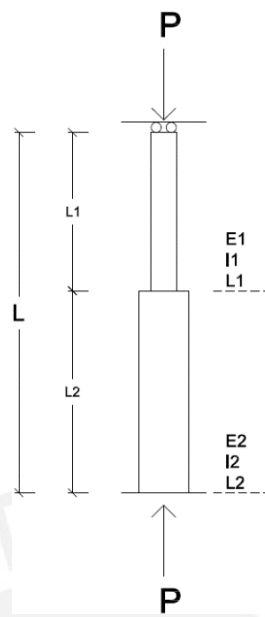


Figura 6.26. Columna de sección compuesta. Apoyos empotrado-móvil.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right) \quad (6.145)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.146)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (\delta - y)^2 dx}{2EI}$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{L_2 P^2 (\delta - \delta (1 - \cos \frac{\pi x}{L}))^2 dx}{2E_1 I_1} + \int_{L_2}^L \frac{L P^2 (\delta - \delta (1 - \cos \frac{\pi x}{L}))^2 dx}{2E_2 I_2} \quad (6.147)$$

$$\Delta U = \frac{P\delta^2 (2(E_2I_2(L - L_2) + E_1I_1L_2)\pi + (E_1I_1 - E_2I_2)L\sin[\frac{2L_2\pi}{L}])}{8E_2I_2E_1I_1\pi}$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L d\left(\frac{\delta(1 - \cos \frac{\pi x}{L})}{dx}\right) dx \quad (6.148)$$

$$\Delta T = \frac{P\delta^2\pi^2}{4L}$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.149)$$

$$\frac{P^2\delta^2(2(E_1I_1(L - L_2) + E_2I_2L_2)\pi + (E_2I_2 - E_1I_1)L\sin[\frac{2L_2\pi}{L}])}{8E_2I_2E_1I_1\pi} = \frac{P\delta^2\pi^2}{4L}$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{2E_2I_2E_1I_1\pi^3}{L(2(E_2I_2(L - L_2) + E_1I_1L_2)\pi + (E_1I_1 - E_2I_2)L\sin[\frac{2L_2\pi}{L}])} \quad (6.150)$$



### 6.1.7.8 Columna compuesta empotrada-empotrada

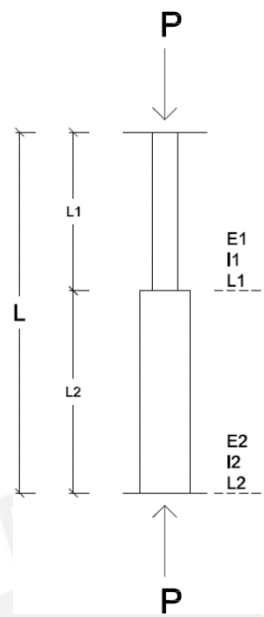


Figura 6.27. Columna de sección compuesta. Apoyos empotrado-empotrado.

Ecuación de la deformada:

$$y = \delta \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (6.151)$$

Por el método de energía:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.152)$$

$$\Delta U = \int_0^L \frac{P^2 (\delta - y)^2 dx}{2EI}$$

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Se tiene:

$$\Delta U = \int_0^{L_2} \frac{L_2 P^2 (\delta - \delta (1 - \cos \frac{2\pi x}{L}))^2 dx}{2E_1 I_1} \quad (6.153)$$

$$+ \int_{L_2}^L \frac{L P^2 (\delta - \delta (1 - \cos \frac{2\pi x}{L}))^2 dx}{2E_2 I_2}$$

$$\Delta U = \frac{P^2 \delta^2 (4(E_2 I_2 (L - L_2) + E_1 I_1 L_2) \pi + (E_1 I_1 - E_2 I_2) L \sin[\frac{4L_2 \pi}{L}])}{16 E_2 I_2 E_1 I_1 \pi}$$

Luego:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L d \left( \frac{\delta (1 - \cos \frac{2\pi x}{L})^2}{dx} \right) dx \quad (6.154)$$

$$\Delta T = \frac{P \delta^2 \pi^2}{L}$$

Siendo:

$$\Delta U = \Delta T \quad (6.155)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P^2 \delta^2 (4(E_2 I_2 (L - L_2) + E_1 I_1 L_2) \pi + (E_1 I_1 - E_2 I_2) L \sin[\frac{4L_2 \pi}{L}])}{16 E_2 I_2 E_1 I_1 \pi} \\ &= \frac{P \delta^2 \pi^2}{L} \end{aligned}$$

Se despeja el valor de  $P_{cr}$ :

$$P_{cr} = \frac{16 E_2 I_2 E_1 I_1 \pi^3}{L (4(E_2 I_2 (L - L_2) + E_1 I_1 L_2) \pi + (E_1 I_1 - E_2 I_2) L \sin[\frac{4L_2 \pi}{L}])} \quad (6.156)$$

Se presenta a continuación la carga crítica de pandeo para diferentes condiciones de borde.

Condiciones de borde	Carga Crítica (Pcr)
<i>Articulado – Articulado</i>	$P_{\sigma} = \frac{2E_2I_2E_1I_1\pi^3}{L} / (2(E_2I_2(L - L_2) + E_1I_1L_2)\pi + (-E_1I_1L + E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{2L_2\pi}{L}])$
<i>Móvil – Libre</i>	$P_{\sigma} = \frac{E_2I_2E_1I_1\pi^3}{4L} / (E_2I_2(L - L_2)\pi + E_1I_1L_2\pi + (-E_1I_1L + E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{L_2\pi}{L}])$
<i>Móvil – Articulado</i>	$P_{\sigma} = \frac{E_2I_2E_1I_1\pi^3}{4L} / (E_2I_2(L - L_2)\pi + E_1I_1L_2\pi + (E_1I_1 - E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{L_2\pi}{L}])$
<i>Móvil – Móvil</i>	$P_{\sigma} = \frac{2E_2I_2E_1I_1\pi^3}{L} / (2(E_2I_2(L - L_2) + E_1I_1L_2)\pi + (E_1I_1 - E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{2L_2\pi}{L}])$
<i>Empotrado – Libre</i>	$P_{\sigma} = \frac{E_2I_2E_1I_1\pi^3}{4L(E_2I_2(L - L_2)\pi + E_1I_1L_2\pi + (E_1I_1 - E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{L_2\pi}{L}])}$
<i>Empotrado – Articulado</i>	$P_{\sigma} = \frac{4.092E_2I_2E_1I_1\pi^3}{L} / (2(E_2I_2(L - L_2) + E_1I_1L_2)\pi + (-E_1I_1L + E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{2L_2\pi}{L}])$
<i>Empotrado – Móvil</i>	$P_{\sigma} = \frac{2E_2I_2E_1I_1\pi^3}{L(2(E_2I_2(L - L_2) + E_1I_1L_2)\pi + (E_1I_1 - E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{2L_2\pi}{L}])}$
<i>Empotrado – Empotrado</i>	$P_{\sigma} = \frac{16E_2I_2E_1I_1\pi^3}{L(4(E_2I_2(L - L_2) + E_1I_1L_2)\pi + (E_1I_1 - E_2I_2L)\text{Sin}[\frac{4L_2\pi}{L}])}$

## 6.2 APLICACIONES EN MATLAB

Esta aplicación calcula la carga crítica, de elementos esbeltos de sección constante, variable y compuesta sometidos a cargas axiales. Además, para elementos de sección constante grafica el modo principal de deformación.

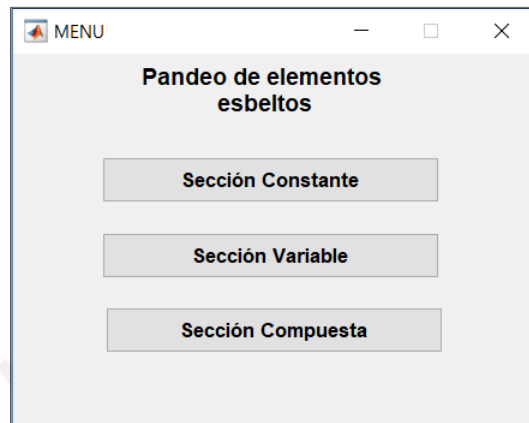


Figura 6.28. Ingreso de datos.

### 6.2.1 Sección constante.

Al ejecutar la aplicación se despliega el menú principal del programa para luego abrirse la ventana de ingreso de datos (*Figura 6.29*).

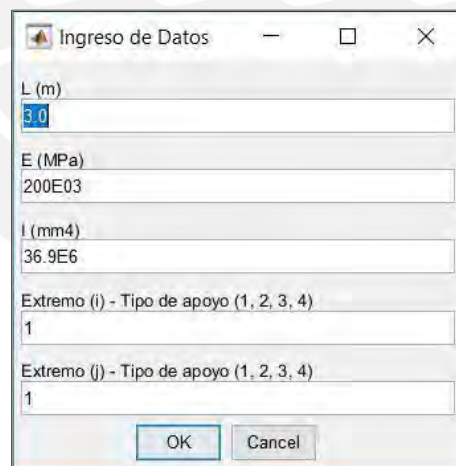


Figura 6.29. Ingreso de datos.

Donde.

$L$  = Longitud de la columna.

$E$  = Módulo de elasticidad

$I$  = Inercia de la sección

Condición del borde  $i$  = Libre, articulado, móvil o empotrado.

Condición del borde  $j$  = Libre, articulado, móvil o empotrado.

Se obtiene:

- a) Grafica de la forma modal de pandeo, correspondiente a las condiciones de borde.

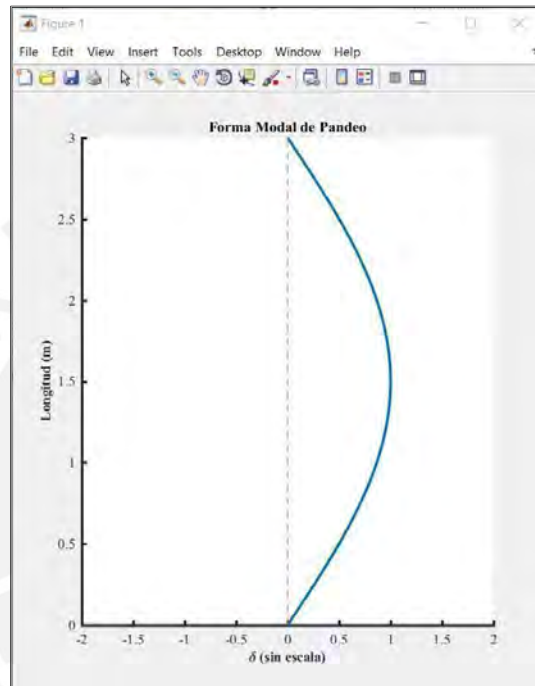


Figura 6.30. Forma del modo de pandeo.

- b) La carga crítica de pandeo y la longitud efectiva, correspondiente a las condiciones de borde.

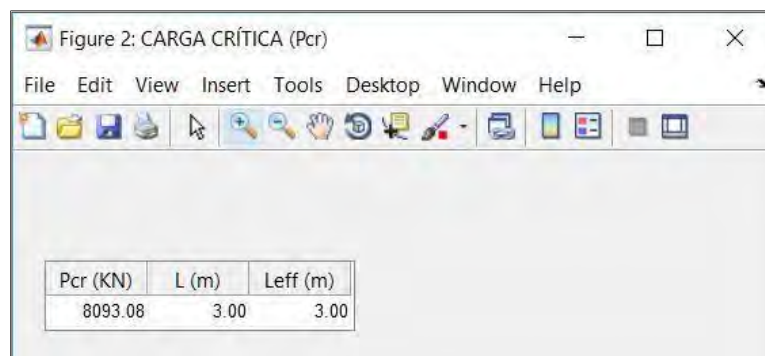
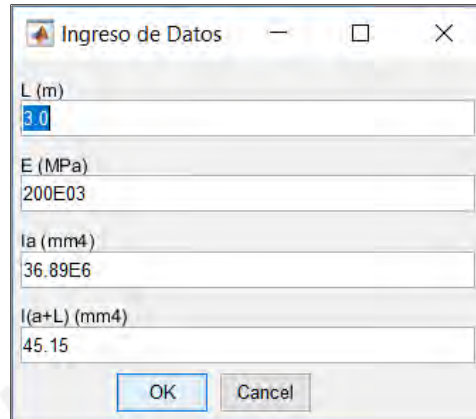


Figura 6.31. Carga crítica de pandeo.

### 6.2.2 Sección variable.

Al ejecutar la aplicación se despliega el menú principal del programa para luego abrirse la ventana de ingreso de datos (*Figura 6.32*).



L (m)	3.0
E (MPa)	200E03
Ia (mm4)	36.89E6
I(a+L) (mm4)	45.15

Figura 6.32. Ingreso de datos.

Donde.

$L$  = Longitud de la columna.

$E$  = Módulo de elasticidad

$I$  = Inercia de la sección ( $a$ ,  $a + L$ )

Se obtiene:

a) La carga crítica de pandeo, correspondiente a las condiciones de borde.

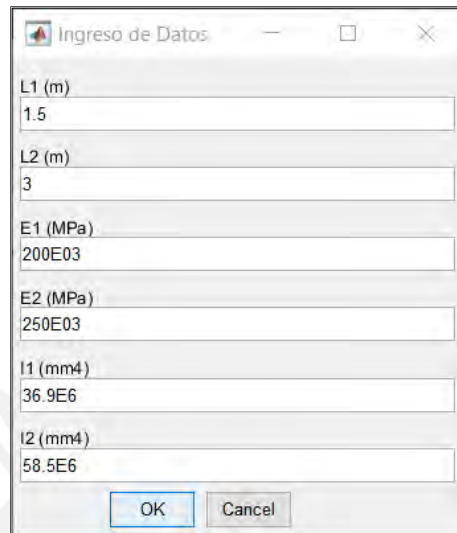


	Pcr (KN)
Articulado - Articulado	378.74
Empotrado - Libre	324.06
Libre - Empotrado	-60.02
Empotrado - Empotrado	901.47
Empotrado - Móvil	378.74
Empotrado - Articulado	563.25
Articulado - Empotrado	563.25

Figura 6.33. Carga crítica de pandeo.

### 6.2.3 Sección Compuesta.

Al ejecutar la aplicación se despliega el menú principal del programa para luego abrirse la ventana de ingreso de datos (*Figura 6.34*).



L1 (m)	1.5
L2 (m)	3
E1 (MPa)	200E03
E2 (MPa)	250E03
I1 (mm4)	36.9E6
I2 (mm4)	58.5E6

Figura 6.34. Ingreso de datos.

Donde:

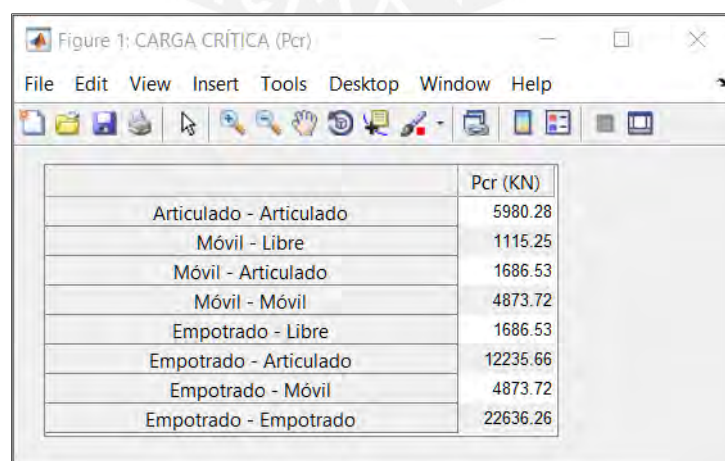
$L1, L2$  = Longitudes de la columna.

$E1, E2$  = Módulos de elasticidad.

$I1, I2$  = Inercia de la secciones.

Se obtiene:

a) La carga crítica de pandeo, correspondiente a las condiciones de borde.



	Pcr (KN)
Articulado - Articulado	5980.28
Móvil - Libre	1115.25
Móvil - Articulado	1686.53
Móvil - Móvil	4873.72
Empotrado - Libre	1686.53
Empotrado - Articulado	12235.66
Empotrado - Móvil	4873.72
Empotrado - Empotrado	22636.26

Figura 6.35. Carga crítica de pandeo.

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 7.1 CONCLUSIONES

El usar el método de energía para analizar elementos esbeltos de sección variable y sección compuesta, la precisión de los resultados obtenidos depende de la ecuación de la deformada que se utiliza para cada caso.

Los resultados obtenidos al analizar una sección variable linealmente, con inercias ( $I_w$ ,  $I_{(a+L)}$ ) coincide con los resultados obtenidos de analizar un elemento similar de sección constante.

Al analizar el pandeo de elementos esbeltos con carga excéntrica, se demuestra que la carga crítica es independiente de la excentricidad.

En las gráficas obtenidas de los criterios de falla, se observa que el criterio de la densidad de energía de deformación (Criterio de Beltrami) es el más conservador para un estado plano de esfuerzos, mientras que el criterio del máximo esfuerzo normal (Criterio de Rankine) es el más conservador para fallas por tracción o compresión.

En los criterios de falla para materiales dúctiles, el criterio de máximo esfuerzo cortante (Tresca) es más conservador que el Criterio de Densidad de energía distorsionante (Von Mises), pues la superficie del segundo queda circunscrita en el primero.

Las gráficas tridimensionales obtenidas de las teorías de falla, al ser proyectadas sobre el plano  $(x, y)$ , coincide con los empleados en un estado plano de esfuerzos.

Al analizar una viga apoyada sobre una superficie elástica sometida a cargas, se puede evaluar el valor obtenido del esfuerzo máximo ( $\sigma_{máx}$ ) con alguno de los criterios de falla para obtener el factor de seguridad del elemento.

En una viga apoyada sobre una superficie elástica se puede usar el principio de superposición cuando hay varias cargas aplicadas, del mismo modo se puede



discretizar una carga distribuida en varias cargas puntuales aplicadas a una distancia  $z_i$ .

En MATLAB se puede desarrollar herramientas didácticas y de fácil uso, obteniendo resultados numéricos y gráficos que facilitan la conceptualización de los temas desarrollados.

La compilación de las aplicaciones en archivos ejecutables (.exe) permite al usuario utilizarlas sin necesidad de instalar MATLAB. Esto representa una gran ayuda, pues facilita el acceso a los programas del público en general.

## **7.2 RECOMENDACIONES**

Los programas al haber sido escritos en MATLAB pueden ser editados y modificados, por lo que se sugiere ampliar el alcance de los mismos en un futuro trabajo de tesis.

En el capítulo “Teoría de esfuerzos y deformaciones” se sugiere abarcar también los esfuerzos octaédricos, cálculo numérico y gráfico.

En el capítulo “Ley de Hooke generalizada con aplicaciones de temperatura” se sugiere ampliar el alcance de la aplicación para materiales ortotrópicos y anisotrópicos.

En el capítulo “Criterios de falla para materiales frágiles y dúctiles” se debe abarcar también los criterios de falla de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager y el criterio de Hill para materiales ortotrópicos.

En el capítulo “Vigas con cimentaciones elásticas y cargas variables” se recomienda desarrollar una interfaz gráfica que permita observar cómo varía la deformación de la viga al modificar las cargas.

En el capítulo “pandeo, enfoque clásico para varias condiciones de apoyo” se ha calculado la carga crítica y la forma modal de pandeo para el primer modo, se debe ampliar el alcance del programa para los demás modos.

En el análisis del pandeo de elementos esbeltos de sección compuesta, por la

complejidad de las ecuaciones se ha considerado solo dos secciones, debe ampliarse el código de análisis para “n” secciones.

En el análisis de pandeo debe ampliarse el análisis para condiciones de apoyo elástico, para secciones compuestas y variables.



## **BIBLIOGRAFÍA**

1. Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. (1998). *Mecánica de materiales*. México: International Thomson Editores.
2. Beer, F. P., Johnston, E. R., Dewolf, J. T., Mazurek, D. F., & Murrieta, M. J. E. (2013). *Mecánica de materiales*. México, D.F: McGraw-Hill Interamericana.
3. Boresi, A. P., & Smith, R. J. (2003). *Advanced mechanics of materials*. New York: Wiley.
4. Feodosiev, V. I. (1972). *Resistencia de materiales*. Moscú: Mir.
5. Guzmán Barrón, L. D.; Quiun, D. R. y Acero, J. A. (2010). *Apuntes de clase del Curso Mecánica Estructural (1a Edición)*. Lima: PUCP.
6. Popov, E. P. (1990). *Engineering mechanics of solids*. Englewood Cliffs (New Jersey: Prentice-Hall.
7. Timoshenko, S. (1983). *History of strength of materials: With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. New York: Dover.
8. Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (1936). *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill Book
9. Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity*. New York: McGraw-Hill Book.