

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



**EL EFECTO DE LA GARANTÍA DE RENTABILIDAD MÍNIMA SOBRE LA
SELECCIÓN DE PORTAFOLIO DE LAS AFP'S**

Tesis para optar el grado de Magíster en Economía con Especialización en
Finanzas y Mercado de Capitales que presenta

RODOLFO GÁLVEZ QUISPE

Dirigido por

JULIO ALBERTO VILLAVICENCIO VÁSQUEZ

San Miguel, 2017

Agradecimientos

Agradezco a Dios y a mis padres por todos los pasos que permitan la consecución de mis objetivos y más altas esperanzas. En particular, para la realización del presente documento, le agradezco a mi asesor de tesis, Julio Villavicencio, por su apoyo, guía y motivación; así como también, a mis lectores, José Gallardo y Augusto Rodríguez, por sus enormemente útiles comentarios y sugerencias.



Resumen

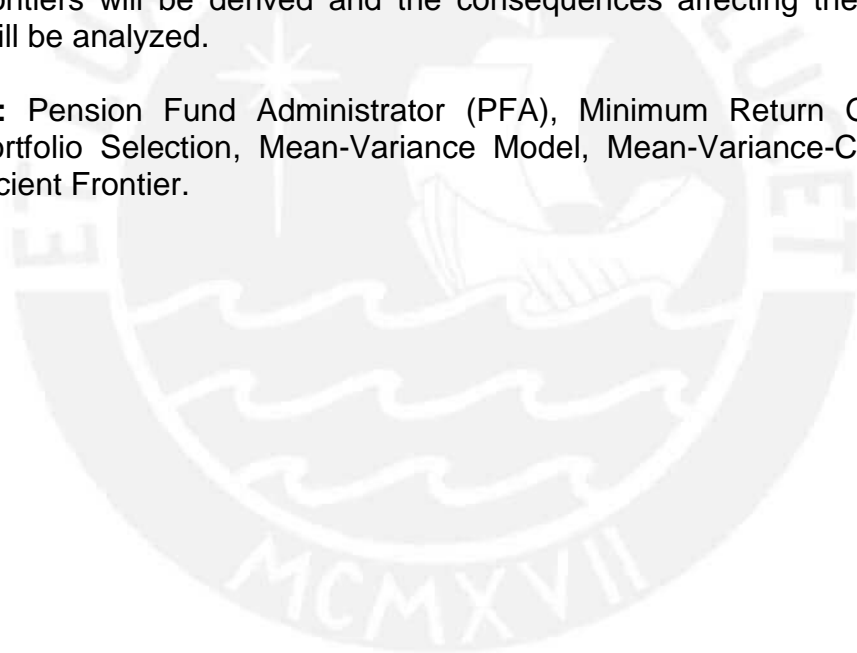
El documento explorará como una parte de la regulación, la Garantía de Rentabilidad Mínima (GRM), penaliza la diferenciación de portafolio, influye sobre la distribución de activos e induce efectos manada en este. La incompatibilidad de incentivos generada por la GRM estaría provocando que los Administradores de Fondo de Pensiones (AFP's) lleven a cabo una selección de portafolio ineficiente desde el enfoque clásico Media-Varianza. Los afiliados esperarían que las AFP's maximicen el retorno y minimicen el riesgo; sin embargo, el costo de la GRM estaría provocando, que además de estos dos objetivos, las AFP's estén maximizando la correlación entre su portafolio y el portafolio benchmark. Primero, conforme a Pennacchi (1999), se valorará el costo de la GRM como una opción put exótica; luego, dada la función del costo obtenida, se buscará la asignación de portafolio óptimo más adecuada, tomándose el enfoque Media-Varianza-Covarianza de Wagner (2001); y por último, conforme a esta asignación, se determinará las fronteras eficientes para las AFP's en el Perú.

Palabras-clave: Administradora de Fondo de Pensiones (AFP), Garantía de Rentabilidad Mínima (GRM), Selección de Portafolio, Enfoque Media-Varianza, Enfoque Media-Varianza-Covarianza, Frontera Eficiente.

Abstract

This paper will explore how a part of the Peruvian regulation, the Minimum Return Guarantee (MRG), will cause the Pension Fund Administrators (PFA's) to minimize variance and maximize covariance, affecting their portfolio selection process. The incentive incompatibility caused by the MRG could be inducing the Portfolio Managers to carry out an inefficient portfolio selection. The PFA's would be expected to maximize return and minimize risk; however, in addition to these two objectives, the MRG could be causing the PFA's to maximize the correlation between their portfolio and the portfolio benchmark. First, the MRG will be valued as an exotic put option; then, given the cost function, the most adequate portfolio allocation problem will be presented; finally, according to Wagner (2001), the efficient frontiers will be derived and the consequences affecting the optimum outcome will be analyzed.

Keywords: Pension Fund Administrator (PFA), Minimum Return Guarantee (MRG), Portfolio Selection, Mean-Variance Model, Mean-Variance-Covariance Model, Efficient Frontier.



Índice general

Listado de Abreviaturas	VII
Listado de Símbolos	VIII
Índice de Figuras	IX
Índice de Cuadros	X
1. Introducción	01
1.1 Consideraciones preliminares	01
▪ El cambio del paradigma pensionario	
▪ El modelo chileno	
▪ La adopción del modelo chileno en el Perú	
1.2 Ineficiencia y Efecto Manada	02
1.3 La GRM	02
▪ Las GRM en general	
▪ GRM en el Perú	
1.4 Objetivos del trabajo	03
1.5 Organización del trabajo	03
2. Relevancia del tema	04
2.1 Por el lado del Enfoque y la Metodología	04
▪ Rivas-Llosa y Camargo (2002)	
▪ Pereda (2005)	
▪ Céspedes (2005)	
▪ Sánchez (2007)	
▪ Escudero (2009)	
▪ Ortiz, Chirinos y Hurtado (2010)	
▪ Mendoza, R. (2014)	
2.2 Por el lado de la Evidencia Empírica	05
• Pesos por clase	
• Rentabilidades históricas	
• Correlaciones	
• Cointegración	
2.3 Por el lado Normativo	06
3. Marco Regulatorio	08
3.1 La GRM	08
3.2 Los Límites de Inversión	08

4. Marco Teórico	10
• Markowitz (1952)	
• Roll (1992)	
• Clarke et al (1994)	
• Chow (1995)	
• Wang (1999)	
• Jorion (2001)	
• Wagner (2001)	
5. Hipótesis	18
6. Modelo de Selección de Portafolio para las AFP's	19
7. Datos	23
8. Contrastación	24
8.1 Valuación de la GRM	24
8.2 El efecto del costo de la GRM sobre la distribución de portafolio de las AFP's	28
8.3 Efectos de la GRM sobre la eficiencia de portafolio	31
9. Conclusiones y Recomendaciones	35
9.1 Conclusiones	35
9.2 Recomendaciones	36
Bibliografía	37
Apéndices	40
Apéndice A	40
Apéndice B	41
Apéndice C	45
Apéndice D	46
Apéndice E	48
Apéndice F	50
Apéndice G	51
Apéndice H	52
Apéndice I	53
Apéndice J	55

Listado de abreviaturas

AFP	Administradora de Fondo de Pensiones
CIC	Cuenta Individual de Capitalización
GRM	Garantía de Rentabilidad Mínima
SBD	Sistema de Beneficio Definido
SBS	Superintendencia de Banca, Seguros y AFP
SCD	Sistema de Contribución Definida
SCI	Sistema de Capitalización Individual
SNP	Sistema Nacional de Pensiones
SAFP	Superintendencia de Administradoras de Fondos de Pensiones
SP	Superintendencia de Pensiones
SPP	Sistema Privado de Pensiones
MTEV	Mean Tracking Error Volatility
MVTE	Mean Variance Tracking Error
MVTEV	Mean Variance Tracking Error Volatility
MV	Mean Variance
MVC	Media Varianza Covarianza
PM	Portfolio Manager
TE	Tracking Error
TEV	Tracking Error Volatility

Listado de Símbolos

R_{min}	Rentabilidad mínima
R_a	Rentabilidad promedio
α	Factor regulatorio alfa
β	Factor regulatorio beta
r_s	Vector columna de retornos estocásticos
p	Vector columna de pesos del portafolio objetivo P
b	Vector columna de pesos del portafolio benchmark B
x	Vector columna con diferencia entre los pesos de los portafolio P y B
μ	Vector columna de retornos esperados
V	Matriz de varianzas-covarianzas
λ	Ratio de factores de riesgo
S	Conjunto factible
ω	Tasa de comisión por saldo que cobra la AFP
φ	Porcentaje que la AFP invierte en el fondo como encaje
S_0	Valor inicial del fondo
$C(\sigma_s, \rho)$	Costo de la GRM que depende de la desviación estándar y la correlación
$C(\sigma_s^2, \sigma_{s,a})$	Costo de la GRM que depende de la varianza y la covarianza
σ_s	Desviación estándar del portafolio propio
σ_a	Desviación estándar del portafolio promedio del sistema
ρ	Correlación entre el retorno del portafolio propio y el retorno promedio
W_P	Riqueza al final del periodo generada por el portafolio propio P
W_B	Riqueza al final del periodo generada por el portafolio benchmark B
$\gamma_p = p' \mu$	Retorno del portafolio objetivo P
$\gamma_b = b' \mu$	Retorno del portafolio benchmark B

Índice de Figuras

Figura 4.1: Enfoque de Markowitz - MV

Figura 4.2: Enfoque de Roll - TETEV

Figura 4.3: Enfoque de Chow - MVTE

Figura 4.4: Enfoque de Wang - MTEV

Figura 4.5: Enfoque de Wagner – MVC

Figura 6.1: Diferencia entre el enfoque clásico y el enfoque MVC

Figura 8.1.1: La GRM como Opción Put

Figura 8.1.2: Precio Put vs correlación vs stdv – FT1, FT2, FT3

Figura 8.1.3: Precio Put vs correlación – FT1, FT2, FT3

Figura 8.3.1: Índices representativos para la Selección de Portafolio

Figura 8.3.2: Frontera Eficiente FT2: MV vs MVC para $\lambda=0$

Figura 8.3.3: FT2 - Frontera Eficiente FT2: MV vs MVC para $\lambda=0$ y $b=MVP$

Figura 8.3.4: Frontera Eficiente FT2: MV vs MVC para $\lambda=0$ y $\lambda=0.8$

Figura 8.3.5: Frontera Eficiente FT2: MV vs MVC para $\lambda=0$, $\lambda=0.8$, $\lambda=1.6$

Figura 8.3.6: Frontera Eficiente FT2: MV vs MVC en 2D, $\lambda \in [0,3.8]$

Figura 8.3.7: Frontera Eficiente FT2: MV vs MVC en 3D, $\lambda \in [0,3.8]$

Figura B.1: Distribución de portafolio por clase de activo en el periodo 2012-2016

Figura B.2: Histórico de rentabilidades por tipo de fondo y AFP

Figura F.1: Precio Put vs Correlación vs stdv – FT1, FT2, FT3

Figura F.2: Precio Put vs Correlación vs stdv – FT1, FT2, FT3

Figura G: Precio Put vs. Correlación – FT1, FT2, FT3

Figura I.1: Fitting FT1

Figura I.2: Fitting FT2

Figura I.3: Fitting FT3

Figura J.1: Frontera Eficiente FT1 - MV vs MVC en 2D

Figura J.2: Frontera Eficiente FT1 - MV vs MVC en 3D

Figura J.3: Frontera Eficiente FT2 - MV vs MVC en 2D

Figura J.4: Frontera Eficiente FT2 - MV vs MVC en 3D

Figura J.5: Frontera Eficiente FT3 - MV vs MVC en 2D

Figura J.6: Frontera Eficiente FT3 - MV vs MVC en 3D

Índice de Cuadros

- Cuadro 3.1: Restricciones y límites por categoría de instrumento
- Cuadro 8.2.1: Valores de Parámetros del Costo de la GRM
- Cuadro 8.2.2: Valores empíricos reales para Lambda en la actualidad
- Cuadro A: Garantías de Rentabilidad Mínima Relativas en el Mundo
- Cuadro B.3: Estadísticos de las series históricas de los retornos
- Cuadro B.4.1: Pruebas de Cointegración de Johansen - Fondo Tipo 1
- Cuadro B.4.2: Pruebas de Cointegración de Johansen - Fondo Tipo 2
- Cuadro B.4.3: Pruebas de Cointegración de Johansen - Fondo Tipo 3
- Cuadro C: Ratio Encaje / Patrimonio Total – Dic 15
- Cuadro D.1.1: Desviaciones estándar anualizadas - FT1
- Cuadro D.1.2: Desviaciones estándar anualizadas - FT2
- Cuadro D.1.3: Desviaciones estándar anualizadas - FT3
- Cuadro D.1.4: Matriz de correlaciones anualizada - FT1
- Cuadro D.1.5: Matriz de correlaciones anualizada - FT2
- Cuadro D.1.6: Matriz de correlaciones anualizada - FT3
- Cuadro D.2.1: Listado de Activos de Referencia
- Cuadro D.2.2: Retornos anuales
- Cuadro D.2.3: Matriz de Varianzas Covarianzas anual
- Cuadro D.2.4: Pesos del portafolio benchmark para FT1, FT2, FT3

Capítulo 1

Introducción

1.1 Consideraciones preliminares

Asegurar la disponibilidad de ingresos económicos para la población adulto mayor, por sus implicancias sobre el bienestar social, se ha constituido como uno de los principales deberes de los estados modernos. Actualmente, en el mundo coexisten dos paradigmas pensionarios, el Sistema de Beneficio Definido (SBD) y el Sistema de Contribución Definida (SCD), siendo este último, el de más reciente creación y el más preferido por los estados. Por un lado, el SBD se basa en un esquema de reparto, en el cual, los aportes de los trabajadores activos se depositan en un fondo común, que sirve para financiar las pensiones de los trabajadores jubilados. Por otro lado, el SCD se basa en un esquema autofinanciado, en el cual, los aportes de los trabajadores se depositan en cuentas individuales que servirán para financiar sus pensiones en el momento de jubilación. La necesidad de los estados de implementar el SCD, en paralelo o en remplazo del SBD, se debe a la modificación de la estructura demográfica que se ha experimentado en casi todos los países durante el siglo pasado. El SBD se implementó por primera vez en Prusia, en siglo XIX, siendo luego emulado por otros países, extendiéndose durante el siglo XX prácticamente por todo el mundo. El éxito del SBD era posible debido a la estructura de la pirámide poblacional, las altas tasas de natalidad y la baja esperanza de vida. Sin embargo, en la década de los 90's, dado que la pirámide poblacional se comenzaba a invertir, las tasas de natalidad disminuían y la esperanza de vida aumentaba, la carga fiscal del sistema se hizo insostenible. Ante este escenario, los estados buscaron nuevos esquemas pensionarios, creándose así, el SCD.

En este entorno de cambios, el modelo chileno destacó por haber sido pionero en la transición al SCD, y además, por haber servido como referencia a otros países en la realización de dicha transición. El modelo chileno se basa en la creación de la Cuenta individual de Capitalización (CIC). Los afiliados depositarían mensualmente un porcentaje de sus salarios en dichas cuentas; los fondos serían administrados por empresas privadas denominadas Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP's); y estas serían supervisadas por un ente regulador denominado la Superintendencia de Pensiones (SP). Asimismo, para proteger a los afiliados, se diseñaron diversos mecanismos que prevenían a las AFP's de tomar riesgos excesivos, entre los que destacan, los Límites de Inversión y la Garantía de Rentabilidad Mínima (GRM). Pese al aparente éxito del sistema, cabe recordar, que como lo explica la misma Superintendencia de Pensiones Chilena, aun cuando el SCD tiene fortalezas en comparación con los esquemas de reparto, este no resuelve el financiamiento de la vejez en poblaciones con excesiva desigualdad en su distribución de ingresos¹. A lo largo de su existencia, con el fin de mejorar el sistema, el modelo atravesó varias reformas, entre las más importantes tenemos la creación del esquema Multifondos y la implementación de los pilares pensionarios (Pilar de Prevención de Pobreza, Pilar Contributivo Obligatorio y Pilar Voluntario). Tomando como referencia la regulación chilena, numerosos países, especialmente en Latinoamérica y Europa Oriental, optaron por el cambio de SBD a SCD. En la región, como se describe en Olivares (2008),

¹ Superintendencia de Pensiones (2010), "El Sistema Chileno de Pensiones", Séptima Edición, Santiago - Chile

los países que siguieron el modelo chileno fueron Perú (1992), Argentina y Colombia (1993), Uruguay (1995), México, Bolivia y El Salvador (1995) y Nicaragua y República Dominicana (2001)².

En el Perú, en 1992, ante la insostenibilidad del Sistema Nacional de Pensiones (SNP), se creó el Sistema Privado de Pensiones (SPP). Conforme al modelo chileno, el esquema contemplaba la creación de Cuentas Individuales de Capitalización (CIC), en las que los afiliados realizarían aportes mensuales; además, los fondos serían administrados por las AFP's y estas serían supervisadas por la Superintendencia de Administradoras de Fondos de Pensiones (SAFP) que luego paso a ser parte de la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS). Además, el nuevo esquema regulatorio adoptado también consideró dentro de su regulación, la existencia de Límites de Inversión y Garantías de Rentabilidad Mínima (GRM). Desde agosto de 1993 hasta octubre de 2005 el sistema estuvo basado en la existencia de un único fondo; luego, a finales de 2005, se implementó el esquema de Fondos Múltiples o Multifondos³. Actualmente, el esquema de Multifondos contempla la existencia de cuatro tipos de fondos: el Fondo Tipo 0 de protección de capital; el Fondo Tipo 1 de preservación de capital; el Fondo Tipo 2 de crecimiento moderado; y el Fondo Tipo 3 de apreciación de capital.

1.2 Ineficiencia y Efecto Manada

El modelo chileno y sus característica regulatorias típicas, pese a su considerable éxito, estaría produciendo ineficiencia y efecto manada entre los portafolios de las AFP's. No obstante que, en general, la Ineficiencia y Efecto Manada pueden ser causa individual y/o conjunta de los límites de inversión, la GRM, los esquemas de remuneración y los sesgos emocionales⁴, el presente documento se centrará en la GRM, dado que no ha sido estudiada a profundidad. La GRM estaría afectando de manera importante el proceso de selección de portafolio. Diversos autores⁵ han señalado específicamente a la GRM como uno de los principales responsables de las ineficiencias en la distribución de portafolio y de los efectos manada.

1.3 La Garantía de Rentabilidad Mínima

Las GRM's, en general, actúan como un seguro de rentabilidad para el afiliado y una obligación compulsoria para el garante designado por ley. El garante puede ser el Estado, las AFP's o una combinación de estos. Además, las GRM's pueden clasificarse como nominales o reales, al retiro o permanentes, y absolutas o relativas. Las garantías nominales no toman en cuenta la inflación, mientras que las reales sí lo hacen; las garantías validas al retiro solo pueden ejecutarse en caso de jubilación o traspaso, mientras que las permanentes se calculan y ejecutan periódicamente; las garantías absolutas consideran un valor fijo, mientras que las relativas utilizan un benchmark. En particular, los países de

² La lista de países fue tomada de Olivares (2008).

³ La información concerniente al desarrollo histórico del SPP fue tomada de Pereda (2005).

⁴ Entre los principales sesgos emocionales podemos mencionar a la aversión a pérdidas, la confianza excesiva y el sentimiento de arrepentimiento.

⁵ Jara (2006), Olivares (2008), Escudero (2009), Kominek (2006), Castañeda & Rudolph (2010), Grande y Visco (2010), Baldovino, Mariño & Reyes (2011), Raddatz & Schmukler (2013) y Bravo & Ruiz (2015)

Latinoamérica y Europa Oriental, ya que están basados en el modelo chileno, presentan esquemas bastante similares, teniendo como características comunes ser reales, permanentes y relativos. En el Apéndice A se presenta un cuadro resumen con algunos esquemas de GRM.

En el Perú, la GRM está determinada por una fórmula regulatoria y corresponde al mínimo entre dos rentabilidades referenciales determinadas por el retorno promedio del sistema y dos parámetros regulatorios (la fórmula exacta se detallará más adelante). Como características principales, la GRM peruana resulta ser real, permanente y relativa. Si la AFP no cumple con rentabilidad mínima, los accionistas cubrirán la diferencia con su patrimonio y si este no fuera suficiente, se liquidaría la empresa. La GRM peruana fue introducida con tres objetivos principales, primero, reducir el riesgo de mercado en que incurren las AFP's; segundo, mejorar la percepción y confianza en el Sistema; y tercero, reducir el problema de agencia entre las AFP's y los afiliados. Sin embargo, pese a estas loables intenciones, la GRM estaría produciendo efectos perversos, afectando negativamente la eficiencia y la diferenciación (efecto manada).

1.4 Objetivos del trabajo

El presente trabajo busca aportar al esclarecimiento de los efectos de una parte de la regulación poco estudiada en el Perú, la GRM, que como se detallará más adelante, podría estar obstaculizando la alineación total de intereses. Se intuye que la incompatibilidad de incentivos generada por la GRM estaría provocando que las AFP's lleven a cabo una selección de portafolio ineficiente desde el enfoque clásico Media-Varianza. Los afiliados esperarían que las AFP's maximicen el retorno y minimicen el riesgo; sin embargo, el costo de la GRM estaría provocando que, además de estos dos objetivos, las AFP's maximicen la correlación entre su portafolio y el portafolio benchmark. En particular, el presente documento pretende mostrar que no existe diferenciación entre los portafolios de las AFP's; que la GRM penaliza la diferenciación entre las AFP's; que la GRM induce el efecto manada a través de la selección de portafolio; y que la introducción de la GRM reduce la eficiencia de los portafolios óptimos.

1.5 Organización del trabajo

El resto del documento se organiza de la siguiente forma. En el capítulo 2 se fundamentará la relevancia del tema desde los enfoques normativo, metodológico y empírico; seguidamente, conforme a los indicios encontrados, en el capítulo 3 se plantearán las hipótesis a demostrar. En los capítulos 4 y 5 se presentan el marco regulatorio y el marco teórico. Luego, en el capítulo 6, se presenta el modelo de selección de portafolio más adecuado para los incentivos y restricciones que afrontan las AFP's. En seguida, sobre la base teórica de Pennacchi (1999) y Wagner (2001), se halla el costo de la GRM y se deriva las fronteras eficientes Media-Varianza-Covarianza, en el capítulo 7 se presentan los datos y en el capítulo 8 se realiza la contrastación. Finalmente, en el capítulo 9 se plantean las conclusiones y recomendaciones derivadas del trabajo.

Capítulo 2

Relevancia del tema

Los motivos que justifican la exploración de la GRM y su relación con el efecto manada, a través de la selección de portafolio, son los siguientes:

2.1 Por el lado del enfoque y la metodología

En primer lugar, por el lado del enfoque y la metodología, los trabajos que abordan el tema del SPP tienen la tendencia de no tomar en cuenta la importancia de la GRM. En el Perú se han realizado numerosos estudios sobre la eficiencia y los límites, concluyéndose que los portafolios administrados por las AFP's no son óptimos; sin embargo, el efecto manada y la GRM no han sido abordados a profundidad, siendo los enfoques más intuitivos que cuantitativos⁶. Más aún, la literatura nacional que analiza la eficiencia de cartera en las AFP's no ha tomado en cuenta la exigencia de la rentabilidad mínima en la derivación del portafolio óptimo. La presencia de esta exigencia sería fundamental para explicar el comportamiento manada y la escasa diferenciación entre los portafolios.

En el Perú, la mayoría de los estudios que analizan la eficiencia de las AFP se centran en los límites de inversión y no toman en cuenta las implicancias de la GRM. Por un lado existen trabajos que analizan la eficiencia del portafolio óptimo y el efecto de los límites, como por ejemplo, Rivas-Llosa & Camargo (2002), Pereda (2005), Sánchez (2007), Ortiz, Chirinos & Hurtado (2010), Moloche (2012) y Mendoza (2014). Por otro lado, existen estudios que modelan y/o analizan el mercado pensionario y la interacción entre las AFP's, como Galarza & Olivera (2001), Paz & Ugaz (2003), Céspedes (2005) y Berdejo, Galarza & Nagamine (2006). Además, existen muchos trabajos que analizan de manera descriptiva el SPP, uno de estos trabajos, Escudero (2009), se enfoca exclusivamente en la GRM. La mayoría de los estudios listados mencionan el papel de la GRM sobre la diferenciación de portafolio; sin embargo, la explicación de los canales de transmisión resulta ser intuitiva. A continuación, detallaremos las principales características de los estudios que tienen más relevancia en relación al tema abordado en el presente documento.

Rivas-Llosa & Camargo (2002) estudian la eficiencia financiera de los límites de inversión en el SPP para el periodo abril-setiembre del 2002. Utilizando el enfoque Markowitz-Sharpe, a partir del punto óptimo sin restricciones, los autores miden el desplazamiento generado por cada límite, entendiéndose que un límite será financieramente más eficiente cuanto menor sea el desplazamiento generado. Los autores encuentran que el Ratio de Sharpe podría incrementarse substancialmente si se flexibilizaran o eliminara algunas restricciones.

Pereda (2005) estudia la eficiencia de los límites de inversión en el SPP para el periodo 1995-2004. Utilizando el enfoque Markowitz, los autores estiman la frontera eficiente y evalúan el impacto de los límites en el largo plazo. El estudio

⁶ La mayoría de estudios que tratan los temas de GRM y herding analizan estadísticas y no ahondan en los efectos de la regulación. En el Perú, el estudio más completo sobre las GRM corresponde a Escudero (2009).

concluye que los límites redujeron los niveles de exposición al riesgo pero generaron una menor rentabilidad potencial promedio.

Céspedes (2005) estudia el comportamiento de las AFP utilizando teoría de juegos y teoría de colusión. El modelo considera que el producto (servicio de administración de los fondos) tiene una demanda unitaria y es homogéneo para todas las AFP's. La homogeneidad de producto es demostrada empíricamente y luego es explicada intuitivamente, considerándose como posibles causas, a los límites de inversión, a la GRM y a la iliquidez del mercado de valores peruano. El resultado del juego planteado por el autor se describe como no competitivo pero racional y óptimo desde el punto de vista de las AFP's.

Sánchez (2007) estudia la eficiencia financiera del SPP entre enero del 2000 y diciembre del 2005. Utilizando el enfoque Markowitz-Sharpe, los autores evalúan la gestión de portafolio de las AFP's. El estudio concluye que los portafolios de inversión de las AFP's no alcanzaron niveles óptimos.

Escudero (2009), realizando un estudio descriptivo, señala que el efecto manada es exacerbado cuando existen restricciones a la inversión. El autor resalta la importancia de que la GRM no perjudique el proceso de optimización de portafolio, indicando que dicha garantía debería ser endógena al proceso de optimización de las AFP's y no exógena o relativa al promedio del sistema, como está estipulado en la regulación. El autor, reconociendo el perfeccionamiento continuo del sistema, aboga por la flexibilización de la normativa en cuanto a la GRM.

Ortiz, Chirinos & Hurtado (2010) estudian la eficiencia de los límites de inversión considerando la posibilidad de posiciones cortas para el periodo 1995-2004, el mismo periodo analizado por Pereda (2005). Utilizando el enfoque Markowitz-Sharpe, los autores estiman la frontera eficiente, concluyendo que los límites de inversión validaron las preferencias por riesgo de las AFP's.

Moloche (2012) evalúa la gestión de los portafolios de las AFP's, encontrando que estos no son intertemporalmente óptimos. El autor indica que en el SPP peruano existen regulaciones que dificultan la alineación de intereses entre las AFP's y los afiliados. Más aún, el documento señala que la GRM estaría produciendo fuertes incentivos para que los administradores de portafolio adopten estrategias de comportamiento manada en la selección de portafolio.

Mendoza, R. (2014) estudia la eficiencia financiera en los portafolios de inversión de las AFP's durante el periodo 2006-2011. El autor estima la eficiencia financiera con el ratio de Sharpe, realizando una optimización robusta por medio del enfoque Encogimiento No Paramétrico, considerando límites de inversión y restricciones de liquidez. El estudio concluye que ninguno de los tres tipos de fondos satisface los criterios de eficiencia financiera establecidos. La GRM se menciona como posible explicación de la ineficiencia encontrada.

2.2 Por el lado de la evidencia empírica

En segundo lugar, por el lado de la evidencia empírica, existen fuertes indicios de que en el Perú se estaría produciendo un efecto manada en la selección de portafolio. Para todas las AFP's y todos los fondos, se observa que las

distribuciones de portafolio por clase de activo son muy similares; la correlación entre los retornos históricos en niveles es cercana a uno; y que existiría cointegración entre dichos retornos. Como se observa en el Apéndice B.1, realizando cortes temporales a las distribuciones de portafolio de las AFP's, encontramos que los pesos por clase de activo mantienen porcentajes muy similares en todos los periodos analizados; del mismo modo, como se muestra en el Apéndice B.2, el gráfico histórico de rentabilidades nos indicaría que, para cada tipo de fondo, el comportamiento de los retornos de todas las AFP's es casi idéntico; por último, como se muestra en el Apéndice B.3, al observar los estadísticos de las series históricas de los retornos, comprobamos un alto grado de correlación entre todas las AFP's. Asimismo, para complementar el análisis anterior, comprobar la falta de diferenciación evidenciada por la correlación y para descartar que esta sea espuria, realizamos un análisis de cointegración; usando datos mensuales de los retornos reales, durante el periodo ene07 –dic15, realizamos test de Raíz Unitaria para cada AFP y cada tipo de fondo, para luego aplicar el test de Johansen; los resultados del Apéndice B.4 muestran que los retornos de las AFP's para los Fondo Tipo 1, 2 y 3 estarían cointegrados. Con base en los resultados obtenidos de la evidencia empírica podemos declarar que no existiría diferenciación entre los portafolios de las AFP's, esto nos servirá para la confirmación de una de las hipótesis que plantearemos más adelante.

2.3 Por el lado normativo

En Tercer lugar, por el lado normativo, existe una apremiante necesidad de identificar posibles incompatibilidades entre los incentivos de los agentes y explorar los canales de transmisión de dichos incentivos.

Los Portafolio Manager de las AFP's tienen una tarea complicada, teniendo que hacer frente a mandatos de (1) maximización de retorno, (2) control de riesgo, (3) cumplimiento de límites y (4) penalidades por rentabilidad mínima. Lo anterior no es una tarea sencilla de realizar, ya que los objetivos anteriormente mencionados no siempre se condicen, por lo que se pueden producir desalineamientos entre los intereses de las AFP's y los afiliados. En este sentido, el presente trabajo pretende clarificar los efectos de la GRM y comprender el actuar de las AFP's. Como ya se ha mencionado, la SBS, a través de la reforma de 2013 (comisión por saldo), pretendió alinear los incentivos de las AFP's con los de los afiliados, de este modo, al obtener mayores comisiones mientras mayor sea el saldo del fondo, las AFP's buscarían incrementar sus retornos y diferenciarían sus portafolios. Sin embargo, pese a que se ha resuelto parte del problema de desalineación de incentivos mediante esta reforma, parecería que no se ha logrado el cometido de promover la competencia y la diversificación entre las AFP's. En este contexto, es que la reciente reforma de 2013, mediante la introducción de la comisión por saldo, ha buscado alinear los intereses entre afiliados y AFP's, estando todavía por confirmarse los efectos de dicha reforma. Pese a que la comisión por saldo resolvería parte del problema de desalineamiento, todavía existiría otra parte de la regulación que impediría el buen funcionamiento del sistema.

Actualmente, en el Perú, el SPP afronta fuertes cuestionamientos, estando en peligro su misma consonancia y sostenibilidad. En general, existe una percepción

negativa sobre el esquema de comisiones y sobre el mismo trabajo de las AFP; la gente siente que no se le está prestando un servicio significativo, y pese a ello, se le está cobrando una comisión. El servicio sería considerado como no significativo debido a las aparentes ineficiencias en la distribución de los portafolios administrados y a la falta de diferenciación entre ellos; estos problemas, tendrían su origen en el desalineamiento de intereses e incentivos entre las AFP's y los afiliados. Ante este escenario, la Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (SBS) ha venido implementando medidas que pretenden dinamizar el mercado y generar mayor competencia; sin embargo, todavía no se logra el mecanismo adecuado que logre dicho cometido.

En resumen el presente trabajo es relevante porque: (1) es un trabajo urgente explorar la GRM ya que la mayoría de la literatura nacional no la toma en cuenta al momento de evaluar la eficiencia; (2) es necesario determinar si la GRM es relevante en el Perú ya que existen fuertes indicios de efecto manada; y (3) es una necesidad entender el entorno regulatorio e identificar posibles incompatibilidades, ya que estos problemas representan un peligro real para el sistema.



Capítulo 3

Marco Regulatorio

En el Perú, además del mandato de debida diligencia, es decir, buscar la gestión eficiente, flexible y oportuna de los fondos de los afiliados, la ley impone a las AFP's el cumplimiento de límites de inversión en el manejo de su portafolio y establece castigos por no alcanzar una rentabilidad mínima relativa. A continuación se detallará la normativa en relación a cada una de estas exigencias.

3.1 Límites de Inversión

La SBS delimita la política de diversificación de inversiones a través de límites por categoría de instrumento y plaza (nacional o extranjero); además, también establece la imposibilidad de incurrir en posiciones cortas. Los límites por categoría de instrumento consideran restricciones por Deuda de Corto Plazo (Renta Fija CP), Deuda de Largo Plazo (Renta Fija LP), Participación Patrimonial (Renta Variable), Instrumentos Derivados para Cobertura e Instrumentos Alternativos; asimismo, los límites por plaza establecen un porcentaje máximo de inversiones en el extranjero. En el siguiente cuadro se muestra un resumen con los límites para cada tipo de fondo.

Cuadro 3.1 Restricciones y límites por categoría de instrumento

Restricciones	Límite Máximo por Tipo de Fondo			
	FT0	FT1	FT2	FT3
Deuda de Corto Plazo o Activos en Efectivo	100%	40%	30%	30%
Deuda de Largo Plazo	75%	100%	75%	70%
Participación Patrimonial o Títulos Accionarios	0%	10%	45%	80%
Instrumentos Derivados para Cobertura	0%	10%	10%	20%
Instrumentos Alternativos	0%	0%	15%	20%
Ventas en Corto	0%	0%	0%	0%
Límite de Inversión en el Exterior (operativo)	42%			

Fuente: SBS, Artículo 18-A – TUO

En cuanto a las inversiones en el exterior, cabe precisar que el límite operativo de 42% es un límite discrecional. El Límite de Inversión en el Exterior se aplica sobre el total de inversiones administradas por cada AFP y no sobre cada tipo de fondo, por lo que el distribuir los porcentajes de inversión en el extranjero para cada tipo de fondo queda a discrecionalidad de cada administrador de portafolio. Actualmente, el Fondo Tipo 1 típico distribuye aproximadamente 15% de sus inversiones en el extranjero; el Fondo Tipo 2 típico, cerca de 40%; y el Fondo Tipo 3 típico, alrededor de 60%.

3.2 La Garantía de Rentabilidad Mínima

En el Perú, la rentabilidad mínima corresponde al mínimo entre dos rentabilidades referenciales, las cuales se calculan en función al retorno promedio del sistema y a las ponderaciones dadas por la regulación para cada tipo de fondo. La primera rentabilidad referencial se calcula multiplicando un factor beta (β) por el retorno promedio del sistema (R_a), y la segunda, restando un factor alfa (α) al retorno promedio del sistema (R_a). Lo anterior puede ser expresado como:

$$R_{min} = \min\{\beta R_a ; R_a - \alpha\}$$

Para el Fondo Tipo 1, la rentabilidad mínima viene dada por el 50% de la rentabilidad real anualizada promedio del sistema de los últimos 36 meses para este tipo de fondo, o a dicha rentabilidad menos dos puntos porcentuales. Lo anterior implica que, dependiendo de si la rentabilidad promedio es mayor o menor al 4%, se aplicará una u otra valla.

$$R_{min} = \min\{0.5R_a; R_a - 0.02\}$$

$$Si R_a < 4\% \rightarrow R_{min} = R_a - 0.02$$

$$Si R_a > 4\% \rightarrow R_{min} = 0.5R_a$$

Para el Fondo Tipo 2, la rentabilidad mínima corresponde al 35% de la rentabilidad real anualizada promedio del sistema de los últimos 36 meses para este tipo de fondo; o a dicha rentabilidad real anualizada menos tres puntos porcentuales. Lo que implica que, dependiendo si la rentabilidad promedio es mayor o menor al 4.61%, se aplicará una u otra valla.

$$R_{min} = \min\{0.35 R_a; R_a - 0.03\}$$

$$Si R_a < 4.615384\% \rightarrow R_{min} = R_a - 0.03$$

$$Si R_a > 4.615384\% \rightarrow R_{min} = 0.35R_a$$

Para el Fondo Tipo 3, la rentabilidad mínima corresponde al 25% de la rentabilidad real anualizada promedio del sistema de los últimos 36 meses para este tipo de fondo; o a dicha rentabilidad real anualizada menos cuatro puntos porcentuales. Lo que implica que, dependiendo si la rentabilidad promedio es mayor o menor al 5.33%, se aplicará una u otra valla.

$$R_{min} = \min\{0.25 R_a; R_a - 0.04\}$$

$$Si R_a < 5.333333\% \rightarrow R_{min} = R_a - 0.04$$

$$Si R_a > 5.333333\% \rightarrow R_{min} = 0.25R_a$$

En caso no se alcanzara la Rentabilidad Mínima, la AFP tendría que asumir la diferencia entre la rentabilidad obtenida y la rentabilidad mínima con el dinero de su encaje, en primera instancia, y con patrimonio adicional, si el encaje no fuera suficiente. El encaje es la parte del patrimonio de las AFP's que se invierte directamente en las cuotas de los fondos administrados. Según normativa, el uno por ciento (1%) del valor de mercado total de cada fondo deberá corresponder al encaje. El encaje representa, como se indica en el Apéndice C, entre el 30% y el 60% del patrimonio de una AFP. Además, la normativa establece que, de no ser suficiente el encaje, la AFP deberá aportar recursos propios de acuerdo a los plazos que fije la SBS. Cabe destacar también, que a diferencia de otros países, nuestra regulación no contempla ninguna clase de garantía gubernamental, por lo que el costo de la GRM debería ser asumido íntegramente por las AFP's.

A pesar de que la GRM no ha sido aplicada nunca en el país y que la probabilidad de que una AFP incurra en ella, dadas las estructuras de portafolio actuales, sea mínima, consideramos que tiene enorme relevancia en cuanto a incentivos y que sus efectos deben ser estudiados con mayor profundidad.

Capítulo 4

Marco Teórico

El presente marco teórico revisará el desarrollo de modelos de selección de portafolio alternativos al enfoque clásico media-varianza. El objetivo de esta exploración es encontrar enfoques que puedan reflejar de manera más fiel el entorno y los incentivos que afrontan los administradores de fondo que hacen frente a un benchmark. Para este propósito, revisaremos los modelos e interpretaciones planteadas por autores como Markowitz (1952), Roll (1992), Clarke et al (1994), Chow (1995), Wang (1999), Jorion (2001), Wagner (2001) y Van Hest & De Waegenare (2007).

La revisión de los modelos de selección de portafolio se realizará desde el enfoque de criterios múltiples, es decir, consideraremos que pueden existir diferentes enfoques de optimización distintos al clásico. Como lo explican Steuer et al (2008), la teoría estándar considera que el único criterio para la selección de portafolio es la maximización de retorno, del que se deriva el enfoque clásico media-varianza; sin embargo, la selección de portafolio, también puede ser comprendida como un problema de criterios múltiples, así por ejemplo, el inversionista podría tener como criterios adicionales el superar a un determinado benchmark o incrementar su poder de mercado. Para estos autores, el uso del enfoque media-varianza sería inadecuado en caso el inversionista tuviera que hacer frente a entornos distintos al convencional.

A continuación, a partir de la exposición del modelo clásico de Markowitz, realizaremos una revisión de los enfoques de asignación de portafolio que consideran la existencia de un benchmark. Para la presentación de los modelos utilizaremos la presentación esquemática para problemas de selección de portafolio que Steuer et al (2008) desarrollaron basados en el esquema jerárquico planteado por Saaty (1999). Los modelos serán caracterizados mediante la formulación del problema estocástico inicial, el problema determinístico indeterminado y el problema determinado. El problema estocástico inicial viene representado por la maximización de las variables estocásticas; el problema determinístico indeterminado corresponde a la maximización del esperado de una utilidad genérica y problema determinístico equivalente determinado corresponde a la maximización del esperado de una utilidad específica.

Primero analizaremos el esquema para la selección de portafolio bajo el criterio de maximización de retorno y luego plantearemos esquemas similares para los enfoques alternativos que consideran un benchmark.

En principio, debemos reconocer que la selección de portafolio bajo el criterio de maximización de retorno es un problema de naturaleza estocástica, ya que los retornos de los activos de mercado son estocásticos. Asumiendo que los retornos estocásticos vienen dados por el vector $r_{Nx1,s}$ y que los pesos del portafolio objetivo P vienen dados por el vector p_{Nx1} , el problema estocástico estaría representado por:

$$\text{Max} \{r', p\}, p \in S \quad (1)$$

Dado que la solución del problema estocástico no está bien definida, el procedimiento estándar consiste en transformarlo en un problema determinístico. Para realizar este cometido, la teoría financiera se sirve de la teoría de juegos desarrollada por Von Neumann & Morgenstern (1953) y asume que los individuos maximizan el valor esperado de funciones de utilidad cóncavas y crecientes. Teniendo esto en consideración, remplazamos el problema estocástico por un problema determinístico genérico equivalente:

$$\text{Max } E[U(r'_s p)] , p \in S \quad (2)$$

Para poder derivar una solución analítica y encontrar el problema determinístico equivalente determinado necesitamos una función de utilidad y hacer presunciones razonables acerca de los estadísticos de la variable estocástica r_s . Es precisamente en este sentido, que el gran aporte de Markowitz fue la caracterización de la función de utilidad más adecuada para el problema estándar del inversionista.

Markowitz (1952), a partir de un agudo análisis sobre la conducta racional de los agentes, desarrolla su revolucionaria teoría de portafolio. El autor, entendiendo que el proceso de inversión tiene dos etapas, formación de expectativas del futuro y selección de la cartera optima, plantea un modelo de selección de portafolio que asemeje dicha proceso. Markowitz postula que el inversionista convencional primero determina el riesgo que desea asumir y luego distribuye su portafolio conforme a dicho riesgo, por lo que existiría un trade-off entre riesgo y retorno. Conforme a esta teoría, los inversionistas solo tendrían que fijarse en estas dos variables al momento de realizar su selección de portafolio.

A continuación, definiremos las variables y parámetros más importantes para la presentación del modelo. El vector de retornos de los activos de mercado viene dado por r_{Nx1} , con retornos esperados μ_{Nx1} y matriz de varianzas-covarianzas, simétrica y definida positiva, V_{Nx1} ; además, los pesos del portafolio objetivo P vienen dados por el vector p_{Nx1} y el conjunto factible de este vector está determinado por S . El esperado de la función de utilidad a maximizar es el siguiente:

$$\text{Max } \{p' \mu - \lambda p' V p\} \quad (3)$$

$$p \in S$$

Maximizar esta función objetivo es semejante a minimizar la varianza con el retorno objetivo constante, por lo que el problema se podría reformular de la siguiente manera:

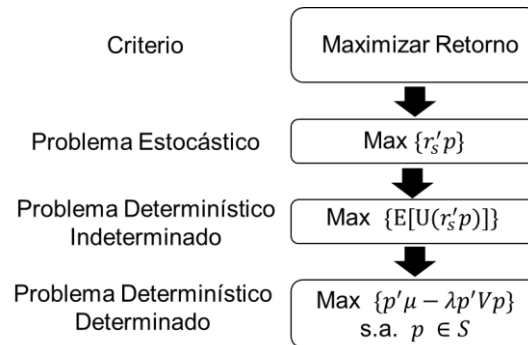
$$\text{Min } p' V p \quad (4)$$

$$\text{s.a. } \mu' p = \gamma$$

$$p \in S$$

La representación esquemática de la solución a la Markowitz sería la siguiente:

Figura 4.1 Enfoque de Markowitz - MV



A partir de Markowitz, la teoría de portafolio se extendió de manera impresionante en la literatura, planteándose diversas modificaciones de acuerdo a las necesidades de los inversionistas. Una de las líneas de investigación, inicialmente planteada por Roll (1992), fue la selección de portafolio en la presencia de un benchmark. Como se revisará posteriormente, estos enfoques forzosamente, además de considerar el criterio de maximización de retorno, consideran la existencia de un criterio adicional, la maximización de retorno con respecto a un benchmark.

Roll (1992) reconociendo que es práctica común de la industria medir el desempeño de los administradores de portafolio respecto a un benchmark, plantea que el objetivo de la selección de portafolio sería obtener un retorno con respecto a este. Como lo indica el autor, un Portafolio Manager será útil solo si en promedio su performance o Tracking Error es positivo; sin embargo, ya que los retornos son muy ruidosos, por lo general el énfasis se centra en el Tracking Error Volatility. Idealmente, un administrador de portafolio debería tener un desempeño superior al del benchmark de manera continua, por lo que se debería maximizar el Tracking Error (TE) y minimizar el Tracking Error Volatility (TEV). Los resultados del enfoque de Roll se pueden entender como semejantes al de Markowitz pero respecto a las desviaciones del benchmark, este enfoque se denominaría Tracking Error - Tracking Error Volatility (TETEV). El autor concluye que generalmente el portafolio seleccionado no será el de media-varianza eficiente y tendrá un beta mayor a 1.0.

A continuación, definiremos las variables y parámetros más importantes para la presentación del modelo. El vector de los retornos de los activos de mercado viene dado por r_{Nx1} , con retornos esperados μ_{Nx1} y matriz de varianzas-covarianzas, simétrica y definida positiva, V_{Nx1} ; además, los pesos del portafolio objetivo P vienen dados por el vector p_{Nx1} , el conjunto factible de este vector está determinado por S , los pesos del portafolio benchmark B vienen dados por el vector b_{Nx1} y la diferencia entre los pesos de los portafolio P y B viene dada por el vector x_{Nx1} ($x = p - b$). La función objetivo a maximizar o el problema determinístico equivalente determinado sería:

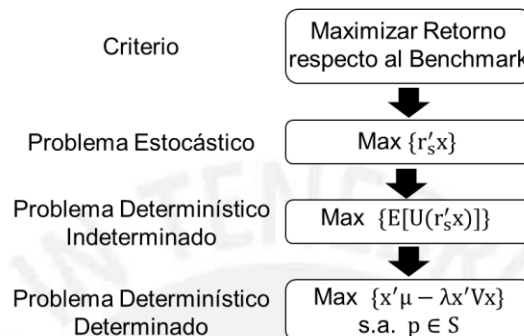
$$\begin{aligned} & \text{Max } \{x'\mu - \lambda x'Vx\} & (5) \\ & \text{s.a. } p \in S \end{aligned}$$

La maximización anterior se podría reformular como minimizar la Volatilidad del Tracking Error condicionado a un nivel de Tracking Error constante, por lo que el problema se podría replantear como:

$$\begin{aligned} & \text{Min } x'Vx && (6) \\ & \text{s.a. } x'\mu = \gamma \\ & && p \in S \end{aligned}$$

La representación esquemática del modelo de Roll es la siguiente:

Figura 4.2 Enfoque de Roll - TETEV



Clarke et al (1994) explican que la diferencia entre los portafolios óptimos de Markowitz y Roll es resultado de la existencia de criterios distintos. Markowitz minimiza la varianza y maximiza el retorno; mientras que Roll minimiza el TEV y maximiza el TE. Los autores consideran que el énfasis de Roll en el benchmark es justificado y que este reflejaría de manera más exacta el comportamiento de los administradores de portafolio. Para fundamentar la preeminencia de este enfoque los autores hacen uso de la teoría del arrepentimiento (Regret Theory), exponiendo que existiría una desutilidad ex-ante derivada del descubrimiento ex-post de que alejarse del benchmark fue una mala decisión. En este sentido, los autores explican que el benchmark expone a los inversionistas al riesgo de mercado pero no al riesgo de regret (riesgo de benchmark), por lo que estos serían reticentes a alejarse mucho del portafolio de referencia, ya que, como parafrasean los autores, las ganancias y pérdidas producidas por el benchmark tienen causas divinas y son justificables (resultados adversos son atribuidos al mercado), pero las ganancias y pérdidas por desviarse del benchmark tienen causas humanas (resultados adversos son responsabilidad directa del administrador de portafolio).

Chow (1995) reconociendo que en muchos casos, los administradores de portafolio rechazan la solución óptima propuesta por Markowitz y escogen un portafolio alternativo, plantea que en el caso que los administradores de portafolio sean evaluados con respecto a un benchmark el enfoque media varianza sería inadecuado. El autor propone incluir al TE en la función de utilidad para considerar la desutilidad producida por desviarse del benchmark.

A continuación, definiremos las variables y parámetros más importantes para la presentación del modelo. El vector de los retornos de los activos de mercado viene dado por r_{Nx1} , con retornos esperados μ_{Nx1} y matriz de varianzas-covarianzas, simétrica y definida positiva, V_{Nx1} ; además, los pesos del portafolio objetivo P vienen dados por el vector p_{Nx1} , el conjunto factible de este vector está

determinado por S , los pesos del portafolio benchmark B vienen dados por el vector b_{Nx1} y la diferencia entre los pesos del portafolio P y B viene dada por el vector x_{Nx1} . La función objetivo a maximizar o el problema determinístico equivalente determinado sería:

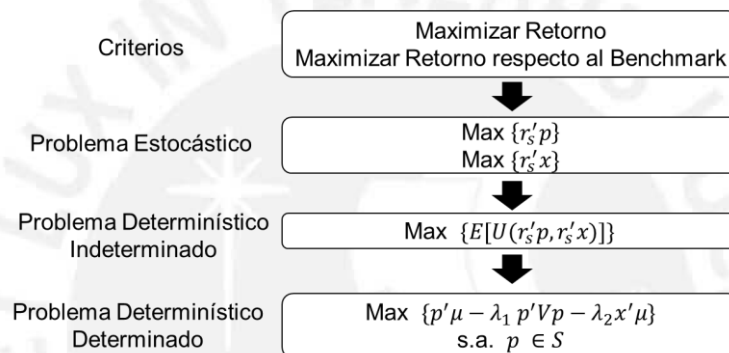
$$\begin{aligned} \text{Max } \{p'\mu - \lambda_1 p'Vp - \lambda_2 x'\mu\} \\ \text{s.a. } p \in S \end{aligned} \quad (7)$$

La maximización anterior se podría reformular como minimizar la suma de la varianza y el Tracking Error condicionado a un nivel de retorno constante. Este enfoque se denominaría Media-Varianza-Tracking Error (MVTE).

$$\begin{aligned} \text{Min } p'Vp + \lambda x'\mu \\ \text{s.a. } p'\mu = \gamma \\ p \in S \end{aligned} \quad (8)$$

La representación esquemática del modelo de Chow es la siguiente:

Figura 4.3 Enfoque de Chow - MVTE



Wang (1999) considerando que es práctica común de la industria tener como referencia uno o más benchmarks, plantea que la maximización de portafolio debería considerar las volatilidades de las desviaciones con respecto a dichos benchmarks.

A continuación, definiremos las variables y parámetros más importantes para la presentación del modelo. El vector de los retornos de los activos de mercado viene dado por r_{Nx1} , con retornos esperados μ_{Nx1} y matriz de varianzas-covarianzas, simétrica y definida positiva, V_{Nx1} ; además, los pesos del portafolio objetivo P vienen dados por el vector p_{Nx1} , el conjunto factible de este vector está determinado por S , los pesos del portafolio benchmark B vienen dados por el vector b_{Nx1} y la diferencia entre los pesos del portafolio P y B viene dada por el vector x_{Nx1} . El problema determinístico equivalente determinado sería:

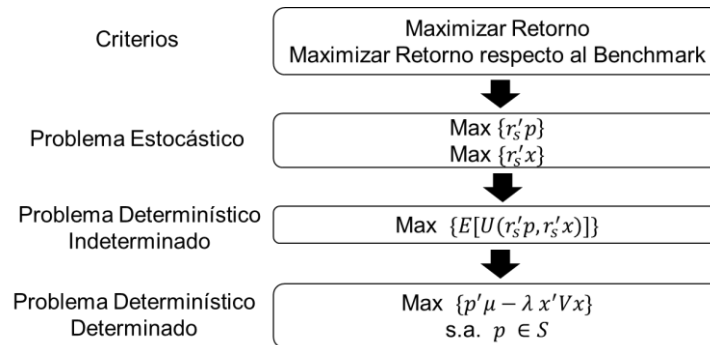
$$\begin{aligned} \text{Max } \{p'\mu - \lambda x'Vx\} \\ \text{s.a. } p \in S \end{aligned} \quad (9)$$

El Enfoque Media-Tracking Error Variance (MTEV).

$$\begin{aligned} \text{Min } x'Vx \\ \text{s.a. } p'\mu = \gamma \\ p \in S \end{aligned} \quad (10)$$

La representación esquemática del modelo de Wang es la siguiente:

Figura 4.4 Enfoque de Wang - MTEV



Jorion (2001), dado el objetivo de “beating the benchmark”, describe la relación riesgo-retorno de la optimización de portafolio sujeta a restricciones en el Tracking Error Volatility. El autor sostiene que la práctica comúnmente difundida de imponer restricciones al Tracking Error Volatility para controlar el riesgo en que incurren los administradores de portafolios es ineficiente. Cuando los administradores se centran en el retorno en exceso se ignora el incremento en el riesgo total del portafolio, lo que provoca que dicha optimización resulte necesariamente en un portafolio con un riesgo total mayor al del Benchmark. La primera recomendación del autor es dejar de usar la optimización TEV; sin embargo, dado su amplia difusión, se recomienda imponer restricciones adicionales a la optimización TEV que limiten el riesgo total del portafolio.

Wagner (2001) propone un modelo de selección de portafolio que combina la selección racional de portafolio a la Markowitz con una penalidad por alejarse del benchmark. El autor, reconociendo que en vez de implementar el enfoque media-varianza, los administradores de portafolio tienden a tener como objetivo replicar o superar los retornos de un portafolio benchmark, plantea un modelo de comportamiento para la selección de portafolio que combina los enfoques TEV y MV, el cual sería un llamado Media Varianza Covarianza (MVC). La metodología usa una función de utilidad basada en la teoría del arrepentimiento.

A continuación, definiremos las variables y parámetros más importantes para la presentación del modelo. Los retornos de los activos son dados por el vector r_{Nx1} , los retornos esperados por μ_{Nx1} y la matriz de varianzas covarianzas, simétrica y definida positiva, por V_{Nx1} . Además, se definen dos portafolios, el portafolio objetivo P y el portafolio benchmark B ; y la riqueza inicial por W .

Los pesos del portafolio P vienen dados por el vector p_{Nx1} , y la riqueza al final del periodo por W_p .

$$W_p = W(1 + r_p) \quad r_p = p'r \quad p'1 = 1 \quad (11)$$

Los pesos del portafolio B vienen dados por el vector b_{Nx1} , y la riqueza al final del periodo por W_B .

$$W_B = W(1 + r_B) \quad r_b = b'r \quad b'1 = 1 \quad (12)$$

Se define la función de utilidad cuadrática $U(W_P, W_B)$ con las siguientes características:

$$R = -\frac{\partial U(W_P, W_B)}{\partial W_B} \geq 0 \quad \frac{\partial R}{\partial W_P} = -\frac{\partial^2 U(W_P, W_B)}{\partial W_P \partial W_B} \leq 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial U(W_P, W_B)}{\partial W_P} > 0 \quad \frac{\partial^2 U(W_P, W_B)}{\partial^2 W_P} < 0$$

Realizando una aproximación de Taylor a la función de utilidad alrededor de los valores esperados de W_P y W_B tenemos que

$$E[U(W_P, W_B)] = U(E[W_P], E[W_B]) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(W_P, W_B)}{\partial^2 W_P} |_{E[W_P], E[W_B]} * Var(W_P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(W_P, W_B)}{\partial^2 W_B} |_{E[W_P], E[W_B]} * Var(W_B) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(W_P, W_B)}{\partial W_P \partial W_B} |_{E[W_P], E[W_B]} * Cov(W_P, W_B) \quad (14)$$

La función objetivo a maximizar o el problema determinístico determinado equivalente sería:

$$\text{Max } \{p'\mu - \frac{1}{2} \lambda_1 p'Vp + \frac{1}{2} \lambda_2 p'Vb\} \quad (15)$$

s.a. $p'\mu = \gamma \quad p \in S$

Por lo que, considerando que el conjunto factible del vector $p_{N \times 1}$ está determinado por S el problema se podría reformular como minimizar la varianza y la covarianza.

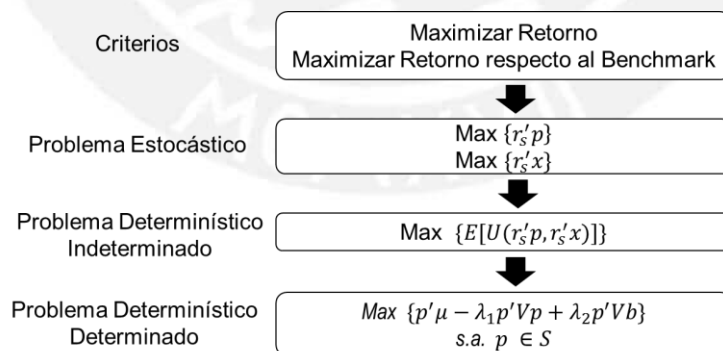
$$\text{Min } \{p'V'p - \lambda p'Vb\} \quad (16)$$

s.a. $p'\mu = \gamma_p \quad p \in S \quad \lambda = \lambda_2/\lambda_1$

De modo que si $\lambda = 0$, el problema se reduce a la optimización MV de Markowitz y si $\lambda = 1$ el problema es equivalente a la optimización MTEV.

La representación esquemática del modelo de Wagner, Media Varianza Covarianza, es la siguiente:

Figura 4.5 Enfoque de Wagner - MVC



Para la resolución del problema, Wagner plantea el lagrangiano siguiente:

$$L(p, \delta_1, \delta_2) = 0.5 p'Vp + \lambda p'Vb - \delta_1(p'1 - 1) - \delta_2(p'\mu - \gamma) \quad (17)$$

Por lo que derivando este lagrangiano llegamos a la siguiente restricción:

$$Vp - \lambda Vb - \delta_1 1 - \delta_2 \mu = 0 \quad (18)$$

A partir de esta restricción, se despeja p , por lo que despejando, tenemos que:

$$p = V^{-1}(\lambda Vb + \delta_1 \mathbf{1} + \delta_2 \mu) \quad (19)$$

Además, añadiendo las restricciones, tenemos que:

$$c_1 = \mathbf{1}'V^{-1}\mathbf{1} \quad (20)$$

$$c_2 = \mathbf{1}'V^{-1}\mu \quad (21)$$

$$c_3 = \mathbf{1}'V^{-1}\mathbf{1} \quad (22)$$

$$d = c_1 c_3 - c_2^2 \quad (23)$$

Entonces, reformulando, y tomando en cuenta que $\gamma_p = p'\mu$, y que, $\gamma_b = b'\mu$, tenemos que:

$$p^* = b\lambda + \left(\frac{1}{d}\right)(c_3 V^{-1}\mathbf{1} - c_2 V^{-1}\mu)(1 - \lambda) + \left(\frac{1}{d}\right)(c_1 V^{-1}\mu - c_2 V^{-1}\mathbf{1})(\gamma_p - \lambda \gamma_b) \quad (24)$$

$$p^* = b\lambda + g(1 - \lambda) + h(\gamma_p - \lambda \gamma_b) \quad (25)$$

Por lo que el portafolio óptimo sería el siguiente:

$$p^* = g + h\gamma_p + \lambda[b - (g + h\gamma_b)] \quad (26)$$

Simplificando términos, tenemos que:

$$p^* = q'_p + \lambda[b - (q'_b)] \quad (27)$$

Asimismo, las fórmulas para la varianza y la covarianza serían las siguientes:

$$p'Vp = q'_p V q_p + \lambda q'_p V b - \lambda q'_p V q_b + \lambda b' V q_p + \lambda^2 b' V b - \lambda^2 b' V q_b - \lambda q'_b V q_p - \lambda^2 q'_b V b + \lambda^2 q'_b V q_b \quad (28)$$

$$p'Vb = q'_p V b + \lambda b' V b - \lambda q'_b V b \quad (29)$$

Van Hest & De Waegenare (2007), dada una estrategia de seguimiento de Benchmark, derivan la porción óptima en cada categoría de activos (Renta Variable, Renta Fija, Real Estate) que debe ser usada para manejo activo en desviaciones del Benchmark. La metodología fue usar un enfoque media varianza para determinar, con un alto grado de robustez y consistencia, el porcentaje óptimo para desviaciones del Benchmark que debe usar cada administrador de portafolio dentro de su categoría de activos. La investigación concluye que requerir un alto grado de robustez con respecto a los parámetros reales es lo mismo que elevar la aversión al riesgo ya que se deben tener en cuenta los costos derivados de alejarse del benchmark, por lo que en el óptimo, los porcentajes destinados a una administración activa serán considerablemente menores.

En resumen, podemos decir que los enfoques de optimización de portafolio que consideren la existencia de un benchmark, a pesar de ser eficientes desde el punto de vista de los administradores de portafolio, siempre serán ineficientes desde el enfoque clásico media varianza. Lo anterior es especialmente relevante en entornos regulados como el de las AFP's, donde los administradores de fondo tienen un benchmark implícito dentro de la regulación de GRM. En las siguientes secciones veremos como la GRM compele a los Administradores de Fondo a incluir el benchmark regulatorio dentro de su modelo de selección de activos.

Capítulo 5

Hipótesis de la Investigación

- No existe diferenciación entre los portafolios de las AFP's
- La GRM penaliza la diferenciación entre las AFP's.
- La penalización por diferenciación induce el efecto manada a través de la selección de portafolio.
- La introducción de la GRM reduce la eficiencia de los portafolios óptimos.



Capítulo 6

EL Modelo de Selección de Portafolio de las AFP's

La teoría estándar considera que el único criterio u objetivo para la selección de portafolio es la maximización de retorno; sin embargo, como se explicó en el marco teórico, la selección de portafolio puede ser comprendida también como un problema de criterios múltiples. Los criterios adicionales al clásico pueden ser muy variados y tendrán mayor o menor validez de acuerdo a los objetivos particulares y al entorno en que se desenvuelvan los administradores de portafolio. Los criterios u objetivos múltiples ya han sido, de manera implícita y soslayada, ampliamente desarrollados en la literatura, especialmente para el caso de que el objetivo adicional sea maximizar el retorno con respecto al benchmark. La importancia de incorporar criterios adicionales es aún más imperiosa en entornos regulados como el del SPP, ya que las AFP's no solamente estarían considerando el criterio de maximización de retorno, del cual se deriva el enfoque media varianza, sino que también, debido a la regulación, tendrían como criterio adicional la maximización de retorno con respecto a un benchmark.

Para determinar el problema de selección de portafolio primero tenemos que identificar el problema de maximización de resultados que afrontan las AFP's. El problema de maximización de resultados depende de los flujos de ingresos, los cuales están normados por la regulación. En general, los ingresos de las AFP's dependerán del Encaje Legal, la Comisión por Saldo y la GRM. El Encaje Legal, que es parte del patrimonio de las AFP's y que representa el uno por ciento de las inversiones de cada fondo, induciría a las AFP's a realizar una Maximización de Retorno Clásica, ya que, mientras más crezca su encaje, mayores serán sus resultados. La Comisión por Saldo induciría a las AFP's a realizar una Maximización de Retorno Clásica, ya que mientras más crezca el portafolio, mayores comisiones podrán cobrar. La GRM induciría a las AFP's a realizar una Maximización de Retorno con respecto un benchmark, ya que si una AFP en particular permite que su rentabilidad se aleje del promedio del sistema, aumentará la probabilidad de que incurra en castigo por GRM.

Las AFP's estarían realizando la siguiente optimización de resultados, incurriendo en ganancias por comisiones, ganancias o pérdidas por encaje y posibles pérdidas por GRM.

$$\text{Max}\{\text{Resultados}\} = \text{Max}\left\{\underbrace{\omega[S_0(r'_s p)]}_{\text{Ganancias por Comisiones dependen de saldo}} + \underbrace{\varphi[S_0(r'_s p - 1)]}_{\text{Ganancias o perdida por Rentabilidad de Encaje}} - \underbrace{\text{Castigo}(S_0, r'_s p, r'_s x)}_{\text{Posibles perdidas por GRM}}\right\} \quad (30)$$

ω : Tasa de comisión por saldo que cobra la AFP

φ : Porcentaje que la AFP invierte en el fondo como encaje

S_0 : Valor inicial del fondo

$r'_s p$: Rentabilidad Estocástica del Fondo

$r'_s x$: Tracking Error Estocástico del Fondo

Como se revisó en el marco teórico, el problema de la selección de portafolio es un problema de naturaleza estocástica, el cual estará determinado por los criterios de selección de portafolio ($Max \{...\}$) y el conjunto factible (S). El problema de las AFP's se puede plantear genéricamente de la siguiente manera:

$$Max \{...\}, p \in S \quad (31)$$

Para establecer el problema de la selección de portafolio, debemos diferenciar entre los incentivos y las restricciones que impone el sistema. Los incentivos son aquellos que determinan el Criterio de Selección de Portafolio; mientras que, las restricciones son aquellas que determinan conjunto factible en la selección de portafolio. El problema de maximización de portafolio corresponderá a los incentivos y restricciones reales que enfrentan las AFP's en su problema de maximización de resultados. Por un lado, analizando los incentivos de las AFP's, tenemos que coexisten dos clases de incentivos. Por un lado, tenemos los incentivos para realizar una Maximización de Retorno Clásica (optimización independiente de la diferenciación), siendo los más importantes la rentabilidad del Encaje Legal y la Comisión por Saldo. Por otro lado, tenemos los incentivos para realizar una Maximización de Retorno con respecto a un benchmark (optimización dependiente de diferenciación), siendo la más importante, la GRM. Por otro lado, analizando las restricciones de las AFP's, tenemos que el sistema considera límites por categoría de instrumento, límites de inversión en el exterior y restricciones a las posiciones cortas.

En base a este análisis, podemos intuir que el modelo de selección de portafolio para las AFP's tendrá dos objetivos, maximización de retorno y maximización con respecto al benchmark.

$$Max \{r'_s p, r'_s x\}, p \in S \quad (32)$$

El sustento para proponer que la selección de portafolio que utilizan las AFP's se basa en dos objetivos viene dado por el entorno que tienen que afrontar estos. La relevancia del criterio adicional de maximización con respecto a un benchmark no solo viene por el lado reputacional, ampliamente advertido por la literatura, sino que se fundamenta en la existencia de un costo económico directamente dependiente de la selección de la cartera. Es decir para el caso de las AFP's no solo existe un benchmark reputacional, sino un benchmark regulatorio, lo que implica necesariamente la adición de una penalización por alejarse del benchmark en el esperado de la función de utilidad.

La penalización por alejarse del benchmark debe parecerse a las características de la GRM. Con la finalidad de explorar los efectos negativos de la GRM, y resumir todas las características que pueda tener esta, necesitamos una medida que pueda expresar dicha desutilidad; en este sentido, el costo de mercado de dicha regulación es una buena medida para aproximar efecto negativo de la GRM. El costo de mercado de la garantía, como lo sugieren Antolín et al (2011), dependerá directamente de las características de la GRM, teniendo que, mientras menor sea la frecuencia de evaluación de la garantía, más alta la valla de rentabilidad y más riesgosa la estrategia de inversión, más costosa será la GRM.

El costo de la GRM dependerá de la varianza, mientras más riesgo tome el administrador de portafolio, más probable será que ocurran pérdidas que alejen la rentabilidad de la AFP del promedio; asimismo, el costo también dependerá de la covarianza o correlación entre los retornos, mientras menor sean estos valores más probable será que la AFP obtenga rentabilidades distintas a las del promedio. Tomando en cuenta estas consideraciones, el problema de optimización de resultados puede ser planteado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Max } \{p'\mu - \lambda_1 p'Vp - \lambda_2 C(\sigma_s, \sigma_{s,a})\} \\ \text{s.a. } p \in S \end{aligned} \quad (33)$$

Dado que la varianza del portafolio objetivo y la covarianza entre dicho portafolio y el portafolio benchmark se determinarán conjuntamente al momento de realizar la distribución de portafolio, los parámetros resultantes de la ecuación del costo serán determinantes para entender el efecto de la GRM sobre el proceso de selección de portafolio.

Representando el costo como una función con dos variables, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Max } \{p'\mu - \lambda_1 p'Vp - \lambda_2 (\eta * p'Vp + \theta * p'Vb)\} \\ \text{s.a. } p \in S \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{Max } \{p'\mu - (\lambda_1 + \lambda_2 * \eta)p'Vp - (\lambda_2 \theta)p'Vb\} \\ \text{s.a. } p \in S \end{aligned} \quad (35)$$

Por lo que el problema se podría reformular como minimizar la varianza y maximizar la covarianza.

$$\begin{aligned} \text{Min } \{(\lambda_1 + \lambda_2 * \eta)p'Vp + (\lambda_2 * \theta)p'Vb\} \\ \text{s.a. } p'\mu = \gamma \quad p \in S \end{aligned} \quad (36)$$

El problema se podría reformular como uno similar al planteado en la ecuación (16) por Wagner (2001).

$$\begin{aligned} \text{Min } \{p'Vp - \lambda p'Vb\} \\ \text{s.a. } p'\mu = \gamma \quad p \in S \quad \lambda = -\frac{(\lambda_2 * \theta)}{(\lambda_1 - \lambda_2 * \eta)} \end{aligned} \quad (37)$$

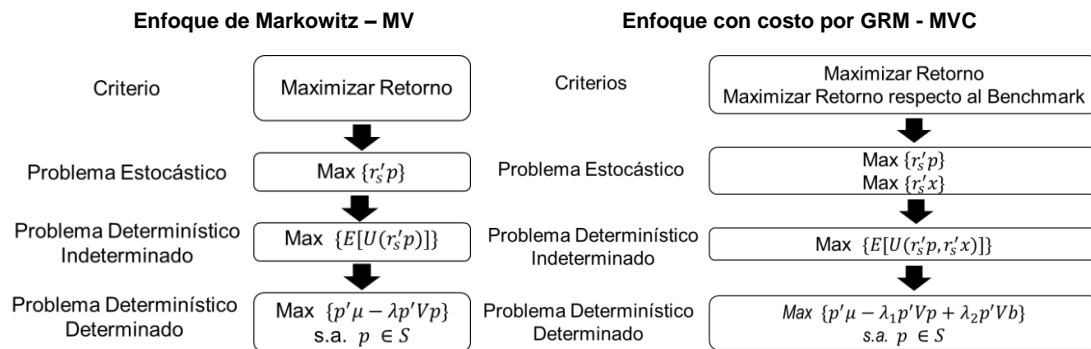
Tenemos entonces que minimizar el costo de la GRM sería equivalente a maximizar el retorno respecto al benchmark y sería consistente con el enfoque Media-Varianza-Covarianza. Por lo que, para nuestro caso, de acuerdo a la ecuación de Wagner (26), el portafolio óptimo sería el siguiente:

$$p^* = g + h\gamma_p - \frac{(\lambda_2 * \theta)}{(\lambda_1 + \lambda_2 * \eta)} [b - (g + h\gamma_b)] \quad (38)$$

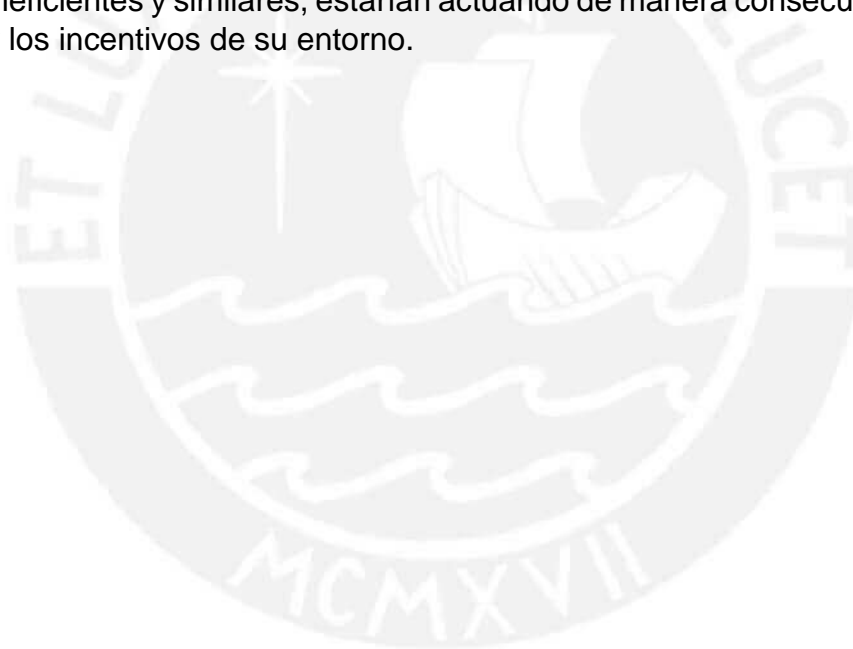
$$p^* = g + h\gamma_p + \lambda [b - (g + h\gamma_b)] \quad , \quad \lambda = -\frac{(\lambda_2 * \theta)}{(\lambda_1 - \lambda_2 * \eta)} \quad (39)$$

Siguiendo el mismo esquema gráfico usado anteriormente, explicaremos la diferencia entre el enfoque clásico y el enfoque MVC, que resulta ser el enfoque consistente con el entorno regulatorio.

Figura 6.1 Diferencia entre el enfoque clásico y el enfoque MVC



A diferencia del enfoque media-varianza, en la maximización Media-Varianza-Covarianza, la aversión al riesgo de volatilidad (λ_1) y la aversión al riesgo de benchmark (λ_2) si juegan un rol importante en la optimización. Se tiene entonces que cuando más grande sea el termino negativo θ , mayor será la porción del portafolio que se destine al portafolio benchmark (b). La GRM induce el efecto manada a través de la selección de portafolio. Es así que, las AFP's, al mantener portafolio ineficientes y similares, estarían actuando de manera consecuente a sus intereses y los incentivos de su entorno.



Capítulo 7

Datos

Los parámetros usados para el cálculo del costo de la GRM se determinarán usando la información pública de los valores cuota diarios de la SBS para el periodo ene.10-dic.15. Para cada tipo de fondo (FT1, FT2 y FT3) y cada AFP (Integra, Prima y Profuturo), a partir de los valores cuota diarios, se obtendrá la desviación estándar (σ_s), las correlaciones anualizadas (ρ) y la desviación estándar anualizada promedio (σ_a) por tipo de fondo. Utilizando estos parámetros se determinará el valor de la GRM. En el Apéndice D.1 se presenta los retornos promedio, la desviación estándar anualizada promedio y la matriz de correlación anualizada.

Por otro lado, la optimización del portafolio se realizará utilizando data diaria, correspondiente al periodo ene.13-dic.15, de siete índices bursátiles de referencia. A partir de los retornos diarios de estos índices se obtendrán los retornos anuales, las desviaciones estándar anuales y la matriz de varianzas-covarianzas anual, las cuales serán los inputs del modelo de selección de portafolio Media-Varianza-Covarianza. En el Apéndice D.2 se presenta el listado de los índices bursátiles a ser utilizados; asimismo, también se presentan los inputs necesarios para la optimización, retornos promedio, matriz de varianzas-covarianzas y pesos del portafolio benchmark.

Todos los cálculos serán realizados usando el programa Matlab.

Capítulo 8

Contrastación

Basados en la revisión literaria que señala a la GRM como el principal causante del efecto manada, y dado que el costo de mercado representa una buena medida para aproximar efecto negativo de esta garantía, se determinará el costo real de la GRM mediante el modelo de Pennacchi (1999); luego, mediante el modelo planteado en la sección anterior, que es semejante al de Wagner (2001), se explicará cómo este costo afectaría la distribución de portafolio de las AFP's; y por último, se analizarán los efectos sobre la eficiencia de portafolio.

8.1 Aplicación del Modelo de valuación de GRM

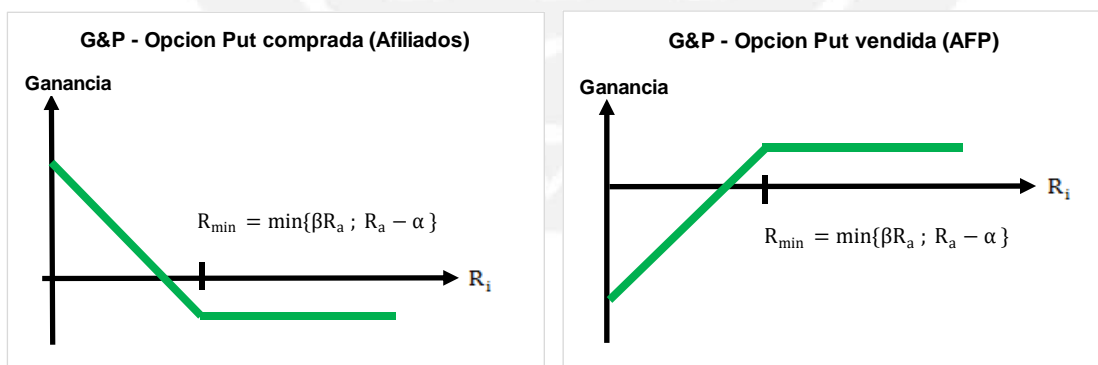
Esta parte del documento se basará en la literatura que aborda la valuación de los seguros de rentabilidad en los sistemas pensionarios. Como lo explica Cornell (2010), la GRM puede entenderse como como una opción put comprada para el afiliado y como una opción put vendida para la AFP. El afiliado ejecutaría la opción cuando la rentabilidad reportada por la AFP sea inferior a la rentabilidad mínima. En línea con esta literatura, procederemos a replicar las características de la GRM mediante una opción put exótica, de modo que se cumpla que, si el retorno de la AFP es menor al retorno mínimo, la opción put se activará y el vendedor de la put abonará la diferencia de rentabilidades; de lo contrario la opción desaparecerá sin activarse. Es decir:

$$\text{Si } R_i < R_{\min} \rightarrow \text{obligacion} = R_i - R_{\min}$$

$$\text{Si } R_i > R_{\min} \rightarrow \text{obligacion} = 0$$

Gráficamente, la put a modelar sería la siguiente:

Figura 8.1.1 La GRM como Opción Put



Para modelar la put descrita y valorar la GRM, utilizaremos una adaptación de una opción exótica. La opción exótica que emplearemos se denomina “opción sobre el máximo de dos activos riesgosos”, la fórmula de dicha opción fue derivada por Stulz (1982) y sobre la base de esta, Pennacchi (1999) realizó una aplicación para garantías de rentabilidad mínima. En el Apéndice E se detalla la derivación de la opción.

Conforme al modelo desarrollado por Pennacchi (1999), el precio de la opción (costo de la GRM) estará dado por la siguiente fórmula:

$$C(\sigma_s, \rho) = S \left[e^{-q_x \tau} N \left(\frac{-q_x}{\sigma_1 \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma_1 \sqrt{\tau}; \frac{q_x - q_v}{\sigma \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma \sqrt{\tau}; \frac{\rho_{12} \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma} \right) + e^{-q_v \tau} N \left(\frac{-q_v}{\sigma_2 \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma_2 \sqrt{\tau}; \frac{q_v - q_x}{\sigma \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma \sqrt{\tau}; \frac{\rho_{12} \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right) - N \left(\frac{-q_x}{\sigma_1 \sqrt{\tau}} - 0.5 \sigma_1 \sqrt{\tau}; \frac{-q_v}{\sigma_2 \sqrt{\tau}} - 0.5 \sigma_2 \sqrt{\tau}; \rho_{12} \right) \right] \quad (40)$$

Donde $N(;;)$: función bivariada acumulativa estándar.

La fórmula representa el costo de la GRM como función de dos parámetros fundamentales, la desviación estándar (σ_s) y la correlación (ρ). El modelo supone que ambos son, en primer lugar, valores futuros, y segundo, determinados por el mercado; ambos supuestos, para nuestro caso particular, no se cumplen. En cuanto al problema de temporalidad, ya que no podemos usar volatilidades implícitas de transacciones pasadas, calculamos la desviación estándar y la correlación a partir de las series históricas; y con respecto al problema de la no determinación total de los parámetros vía mercado, ya que las AFP's pueden influir en sus valores, supondremos que se fijarán lineamientos de comportamiento al momento de crear la put. Dadas estas aclaraciones, la valuación de la put representaría de manera correcta el costo de mercado de la GRM.

Empleando parámetros reales en la fórmula $C(\sigma_s, \rho)$ y considerando como parámetros comunes para todos los tipos de fondo, un valor inicial del portafolio de 100 ($S = 100$), un plazo de un año ($\tau = 1$) y una tasa libre de riesgo de 4% ($r = 0.04$), obtendremos el valor de la GRM para una AFP representativa en cada tipo de fondo.

A continuación, para cada tipo de fondo, se calculará el costo de la GRM, para lo cual se especificarán los valores particulares de la desviación estándar promedio del sistema (σ_a); la desviación estándar de una AFP representativa (σ_s); y la correlación entre los retornos de una AFP y todo el sistema (ρ).

Para el FT1, con $\sigma_a = 0.024019$; $\sigma_s = 1.08 * \sigma_a$; y $\rho = 0.968690$, el valor de la put sería $C(\sigma_s, \rho) = 0.0001527$. Lo que para un portafolio típico de S/. 6,988 MM sería de tan solo S/. 10,671.

Para el FT2, con $\sigma_a = 0.045448$; $\sigma_s = 1.08 * \sigma_a$; y $\rho = 0.987231$, el valor de la put sería $C(\sigma_s, \rho) = 0.0002872$. Lo que para un portafolio típico de S/. 34,808MM representaría tan solo S/. 99,970.

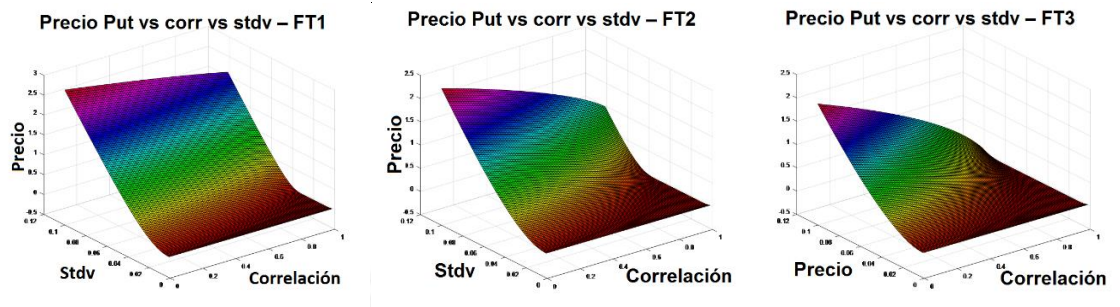
Para el FT3, con $\sigma_a = 0.073581$; $\sigma_s = 1.08 * \sigma_a$; y $\rho = 0.986937$, el valor de la put sería $C(\sigma_s, \rho) = 0.0006234$. Lo que para un portafolio típico de S/. 7,882 MM sería de tan solo S/. 49,141.

Si bien es cierto que el costo de la GRM valuada a mercado es cuasi-nulo, se debe tener en cuenta que esto ocurre como consecuencia de que las correlaciones entre cada AFP y el promedio son cercanas a uno; y a que las desviaciones estándar individuales se alejan del promedio como máximo un 8%.

Si analizamos el valor de las opciones put para diferentes valores de correlación y desviación estándar, nos daremos cuenta que el aumento en costo comienza a ser importante a partir de correlaciones inferiores a 0.96 y 0.98, dependiendo del tipo de fondo.

A continuación, para cada tipo de fondo, se muestran las superficies correspondientes al costo de la GRM, $C(\sigma_s, \rho)$, el cual depende de la combinación de desviación estándar y correlación elegida.

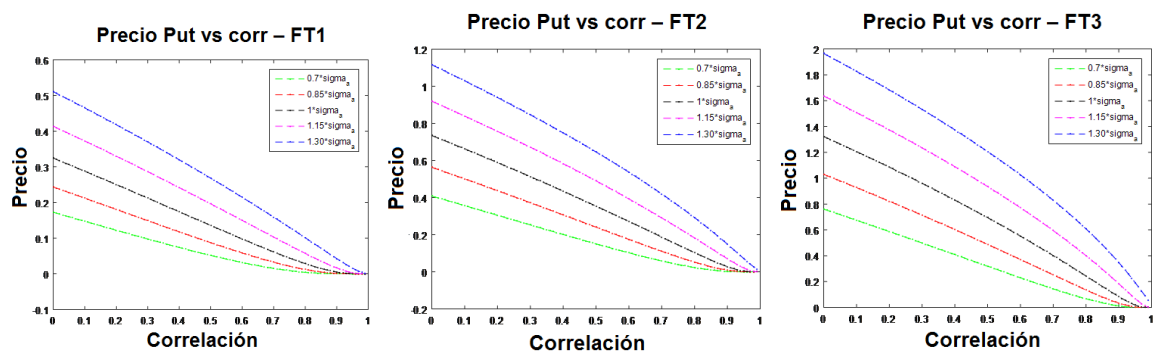
Figura 8.1.2 Precio Put vs correlación vs stdv – FT1, FT2, FT3



En general, se podría decir que el costo de la GRM es mayor para el fondo tipo 1 y menor para el fondo tipo 3; sin embargo, dado que cada fondo tiene un perfil de riesgo preestablecido, la superficie solo es factible en un rango determinado de desviaciones estándar. Como se aprecia en el Apéndice F, para un rango real de desviaciones estándar, la relación es inversa, es decir, el costo de la GRM es menor para el fondo tipo 1 y mayor para el fondo tipo 3.

Dado que nuestro interés se centra en el efecto manada, realizando cortes transversales a la superficie anterior, presentaremos la curva precio-correlación para diferentes valores de desviación estándar. Analizando las curvas precio-correlación, vemos que el costo de la put disminuye a medida que se incrementa la correlación; asimismo, también podemos observar que la pendiente de las curvas precio-correlación es más empinada a medida que el tipo de fondo tiene más riesgo. Los valores cuasi nulos para la GRM, hallados anteriormente, corresponden a correlaciones de 0.96 a 0.99, es decir al extremo derecho de la línea negra central en cada uno de los gráficos siguientes. Conforme a lo explicado anteriormente, observamos que el costo de la GRM aumenta con el perfil de riesgo del fondo.

Figura 8.1.3 Precio Put vs correlación – FT1, FT2, FT3



Como se dijo en un principio, el costo de la GRM es una buena aproximación de los efectos de la GRM; sin embargo, el escenario real no contempla la existencia contractual de ningún seguro u opción put, por lo que es necesario entender como actuarían las AFP's al no poder contar con dicho seguro. Si estuviéramos en un entorno de mercado, las AFP's tendrían dos opciones para manejar el riesgo que implica la obligación compulsoria de ofrecer una GRM; primero, coberturarse mediante terceros, comprando la put contraria sobre el mismo subyacente; o segundo, coberturarse a sí mismo, mediante un portafolio sintético que replique la put contraria. Dado que ninguna de las dos posibilidades de cobertura es factible, y teniendo en cuenta que la AFP's controlan parcialmente la desviación estándar y correlación, lo que revelarían las altas correlaciones que ocurren en la realidad, sería que las AFP's están tomando como estrategia óptima reducir el valor de la put a cero y así no generarse costos por dicha garantía.

Para cada tipo de fondo, la pendiente crece con mayor rapidez conforme la correlación disminuye, por lo que el rango de correlaciones para las que el valor de la GRM es cuasi-nulo será menor conforme aumenta el riesgo del fondo. Como se observa en el Apéndice G, existe un punto en el cual el valor de la put deja de ser cero y comienza a aumentar conforme la correlación disminuye, es precisamente este punto donde las AFP's tienden a colocar su correlación. Para el Fondo Tipo 1 este punto ocurre cuando la correlación es $\rho = 0.96$; para el Fondo Tipo 2, cuando la correlación es $\rho = 0.98$; y para el Fondo Tipo 3, cuando la correlación es $\rho = 0.99$. Es así que, el costo de la GRM explicaría el hecho estilizado contraintuitivo presentado anteriormente de que las correlaciones promedio aumentan conforme aumenta el perfil de riesgo del fondo.

Por otro lado, como se observa en el Apéndice H, realizando un ejercicio de flexibilización de los parámetros regulatorios de alfa (α) y beta (β), encontramos que estos pueden efectivamente modificar la forma de la curva precio-correlación, disminuyendo el costo de la garantía. Sin embargo, la flexibilización solo tendría efectos de reducción de costo para el Fondo Tipo 1, mas no para los Fondo Tipo 2 y 3. La razón para que no sea efectiva la flexibilización es que no hay espacio para relajar más los parámetros y a que dichas flexibilizaciones no modifican la pendiente de manera significativa.

Para resumir, dado que los costos de la GRM se incrementan con la disminución de la correlación, quedaría explícita entonces la veracidad de nuestra segunda hipótesis, la regulación efectivamente está penalizando la diferenciación de las AFP.

$$\uparrow \rho \rightarrow C(\sigma_s, \rho) \downarrow$$

8.2 El efecto del costo sobre la distribución de portafolio de las AFP's y la Optimización Media-Varianza-Covarianza

A continuación, con el objetivo de realizar manejos algebraicos posteriores, replantearemos la ecuación del costo derivada anteriormente, reemplazando la correlación (ρ) por la covarianza ($\sigma_{s,a}$) y la desviación estándar (σ_s) por la varianza (σ_s^2). A partir de la superficie del costo de la GRM modificada $C(\sigma_s^2, \sigma_{s,a})$ realizamos una aproximación polinómica para poder incluir el costo en la función objetivo de los administradores de portafolio. En el Apéndice I, se muestran las superficies del costo modificadas, sus correspondientes aproximaciones polinómicas, sus estadísticos de bondad de ajuste y un cuadro con los parámetros resultantes. A continuación presentamos la ecuación resultante de la aproximación polinómica.

$$C(\sigma_s, \sigma_{s,a}) = p_{00} + p_{10} * \sigma_{s,a} + p_{01} * \sigma_s^2 + p_{20} * \sigma_{s,a}^2 + p_{11} * \sigma_{s,a} * \sigma_s^2 \quad (41)$$

Para cada tipo de fondo, conforme a lo previsto en el modelo, los parámetros hallados para la aproximación polinómica, indican que el costo de la GRM dependerá negativamente de la covarianza entre nuestro portafolio con el portafolio benchmark y positivamente de la varianza.

$$C(Var, Cov) = p_{00} + \underbrace{p_{10}}_{-} * Cov + \underbrace{p_{01}}_{+} * Var + \underbrace{p_{20}}_{-} * Cov^2 + \underbrace{p_{11}}_{-} * Cov * Var \quad (42)$$

El tercer parámetro, la influencia de la varianza (p_{01}), es el único parámetro positivo, e indica que mientras más aumente la varianza más aumentará el costo de la GRM; lo anterior es coherente con la lógica de cualquier tipo de seguro, si aumenta el riesgo, también aumentaría la prima por riesgo. Analizando los demás parámetros, tenemos que todos son negativos, esto se debe al efecto de la covarianza. El segundo parámetro, la influencia de la covarianza (p_{10}), es negativo, indicando que a mayor covarianza, menor será el costo de la GRM; lo anterior resulta natural, ya que si las rentabilidades son muy similares, la probabilidad de incurrir en castigo será mínima. Por otro lado, reflejando la misma lógica anterior, el cuarto y quinto parámetro, la influencia del cuadrado de la covarianza (p_{20}) y la influencia conjunta de covarianza y varianza (p_{11}), resultan ser negativos por la influencia de la covarianza.

Conforme a lo planteado en el modelo, se minimiza la varianza y se minimiza el costo de la GRM, la función objetivo a maximizar sería:

$$\begin{aligned} \text{Max } \{p' \mu - \lambda_1 p' V p - \lambda_2 C(Var, Cov)\} \\ \text{s.a. } p \in S \end{aligned} \quad (43)$$

Para que la anterior maximización cumpla con los axiomas de racionalidad se debería asegurar la concavidad de la función de costo, lo cual no es factible por el quinto término de la aproximación polinómica del costo, por lo que solo usaremos los tres primeros términos de dicha aproximación.

$$\begin{aligned} \text{Max } \{p' \mu - \lambda_1 p' V p - \lambda_2 (p_{00} + p_{10} * \sigma_{s,a} + p_{01} * \sigma_s^2)\} \\ \text{s.a. } p \in S \end{aligned} \quad (44)$$

El problema se podría reformular como la siguiente maximización, que implica minimizar la varianza y maximizar la covarianza.

$$\begin{aligned} \text{Max } \{ & \mathbf{p}'\boldsymbol{\mu} - (\lambda_1 + \lambda_2 * \mathbf{p}_{01})\mathbf{p}'\mathbf{V}\mathbf{p} - (\lambda_2 * \mathbf{p}_{10})\mathbf{p}'\mathbf{V}\mathbf{b} - \lambda_2 * \mathbf{p}_{00} \} \\ \text{s.a. } & \mathbf{p} \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (45)$$

La función objetivo a minimizar o el problema determinístico determinado equivalente sería:

$$\begin{aligned} \text{Min } & (\lambda_1 + \lambda_2 * \mathbf{p}_{01})\mathbf{p}'\mathbf{V}\mathbf{p} + (\lambda_2 * \mathbf{p}_{10})\mathbf{p}'\mathbf{V}\mathbf{b} \\ \text{s.a. } & \mathbf{p}'\boldsymbol{\mu} = \gamma \quad \mathbf{p} \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (46)$$

El problema se podría reformular como uno similar al planteado por Wagner (2001).

$$\begin{aligned} \text{Min } & \mathbf{p}'\mathbf{V}\mathbf{p} - \lambda \mathbf{p}'\mathbf{V}\mathbf{b} \\ \text{s.a. } & \mathbf{p}'\boldsymbol{\mu} = \gamma \quad \mathbf{p} \in \mathcal{S} \quad \lambda = -\frac{(\lambda_2 * \mathbf{p}_{10})}{(\lambda_1 + \lambda_2 * \mathbf{p}_{01})} \end{aligned} \quad (47)$$

Tenemos entonces que minimizar el costo de la GRM sería equivalente a maximizar el retorno respecto al Benchmark y sería consistente con un enfoque Media-Varianza-Covarianza.

Por lo que para nuestro caso, el portafolio óptimo sería el siguiente:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{g} + \mathbf{h}\boldsymbol{\gamma}_p - \frac{(\lambda_2 * \mathbf{p}_{10})}{(\lambda_1 + \lambda_2 * \mathbf{p}_{01})} [\mathbf{b} - (\mathbf{g} + \mathbf{h}\boldsymbol{\gamma}_b)] \quad (48)$$

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{g} + \mathbf{h}\boldsymbol{\gamma}_p + \lambda [\mathbf{b} - (\mathbf{g} + \mathbf{h}\boldsymbol{\gamma}_b)] \quad , \quad \lambda = -\frac{(\lambda_2 * \mathbf{p}_{10})}{(\lambda_1 + \lambda_2 * \mathbf{p}_{01})} \quad (49)$$

El termino lambda (λ) puede ser entendido como un ratio de aversiones al riesgo. Lambda resulta de dividir la aversión al riesgo de covarianza sobre la aversión al riesgo de varianza. La aversión al riesgo de covarianza es de signo negativo ($\lambda_2 * \mathbf{p}_{10}$) y representa la utilidad que producen los incrementos de la covarianza; mientras que, la aversión al riesgo de varianza es de signo positivo ($\lambda_1 + \lambda_2 * \mathbf{p}_{01}$) y representa la desutilidad que producen los incrementos de la varianza. Por un lado, la aversión total al riesgo de covarianza ($\lambda_2 * \mathbf{p}_{10}$) dependerá de la aversión al costo de la GRM (λ_2) y de la influencia de la covarianza sobre el costo de la GRM (\mathbf{p}_{10}). Por otro lado, La aversión total al riesgo de varianza ($\lambda_1 + \lambda_2 * \mathbf{p}_{01}$) dependerá de la aversión al costo de la GRM (λ_2), de la aversión al riesgo de varianza inicial (λ_1), y de la influencia de la varianza sobre el costo de la GRM (\mathbf{p}_{01}). Cabe mencionar que cuando el valor de lambda se hace nulo, el óptimo MVC se reduciría al óptimo MV.

El término negativo \mathbf{p}_{10} representa la influencia de la covarianza sobre el costo de la GRM; mientras que el término positivo \mathbf{p}_{01} representa la influencia de la varianza sobre el costo de la GRM. De los valores hallados para dichos parámetros, tenemos que el término λ será siempre positivo y que tendrá mayor valor cuanto mayor sea la influencia de \mathbf{p}_{10} y menor la de \mathbf{p}_{01} .

A diferencia del enfoque media-varianza, en la maximización Media-Varianza-Covarianza, la aversión al riesgo de varianza (λ_1) y la aversión al costo de la GRM (λ_2), ambos términos positivos, si juegan un rol importante en la optimización. Se intuye que la aversión al riesgo de varianza (λ_1) y la aversión al costo de la GRM (λ_2) aumentan con el perfil del tipo de fondo, de modo que serían menores para el FT1 y mayores para el FT3. Además, cuando más grande sea el término negativo

p_{10} (influencia de la covarianza) y menor sea el termino positivo p_{01} (influencia de la varianza), mayor será el valor del termino lambda (λ).

A continuación, para cada tipo de fondo, se muestran los valores de los parámetros del costo de la GRM y los valores reales del término lambda (λ).

Cuadro 8.2.1 Valores de Parámetros del Costo de la GRM

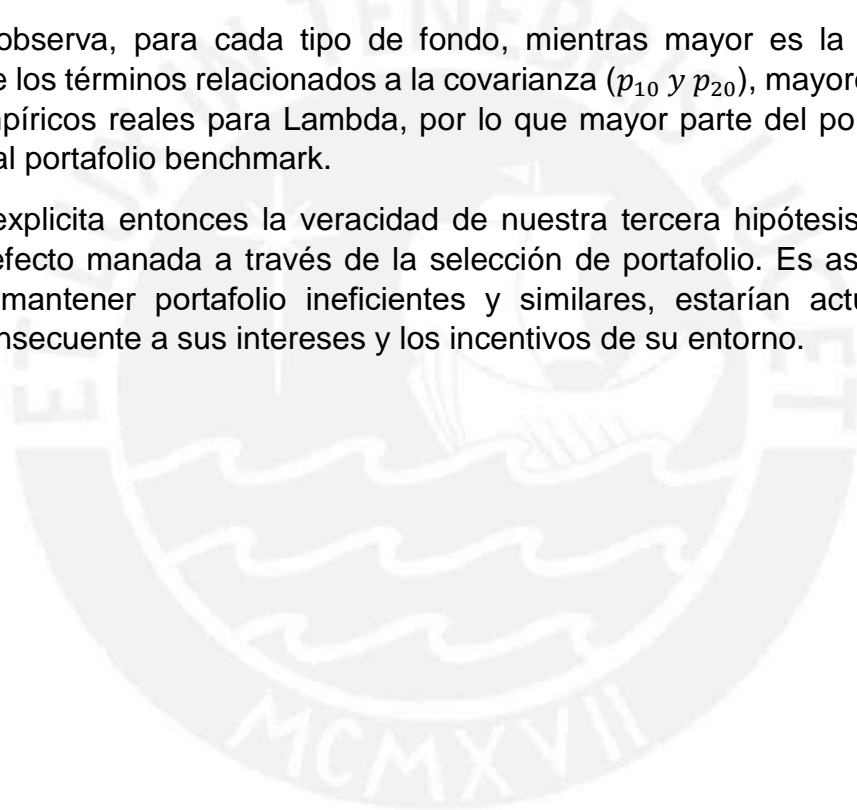
	P_{00}	P_{10}	P_{01}	P_{20}	P_{11}
FT1	0.00	-1.02	2.99	-192.60	-269.80
FT2	0.00	-0.26	2.59	-88.34	-329.80
FT3	0.00	-0.16	2.24	-12.09	-273.30

Cuadro 8.2.2 Valores empíricos reales para lambda (λ) en la actualidad

	Corr	Cov	lambda
FT1	0.96	0.0023	2.8
FT2	0.98	0.0044	1.6
FT3	0.98	0.0072	1

Como se observa, para cada tipo de fondo, mientras mayor es la influencia negativa de los términos relacionados a la covarianza (p_{10} y p_{20}), mayores son los valores empíricos reales para Lambda, por lo que mayor parte del portafolio se destinaria al portafolio benchmark.

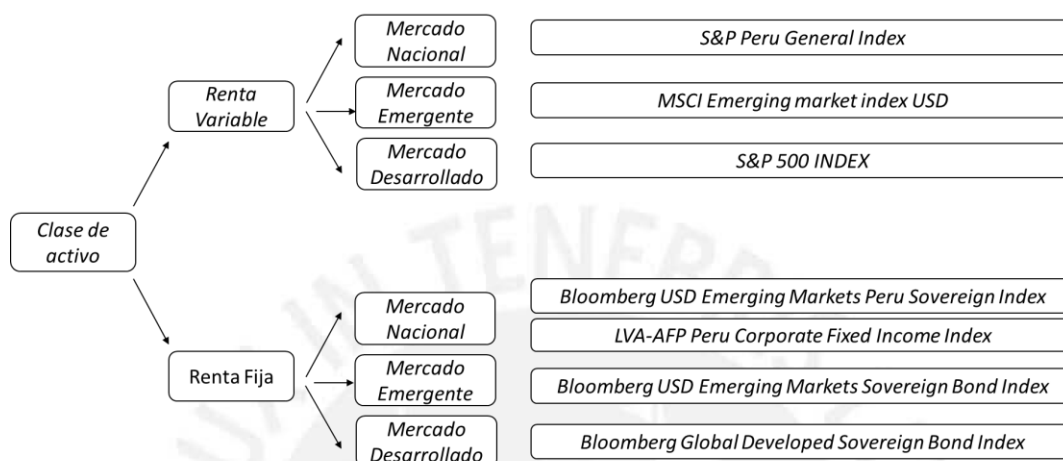
Quedaría explicita entonces la veracidad de nuestra tercera hipótesis, la GRM induce el efecto manada a través de la selección de portafolio. Es así que, las AFP's, al mantener portafolio ineficientes y similares, estarían actuando de manera consecuente a sus intereses y los incentivos de su entorno.



8.3 Efectos del costo sobre la eficiencia de Portafolio

En esta sección se determinará la frontera eficiente mediante el enfoque Media-Varianza y el enfoque Media-Varianza-Covarianza, cabe aclarar que no se toman en cuenta los límites de inversión. Para la realización de la selección de portafolio se han escogido siete índices representativos, todos en dólares o transformado a dólares, los cuales se resumen en el siguiente esquema:

Figura 8.3.1 Índices representativos para la Selección de Portafolio



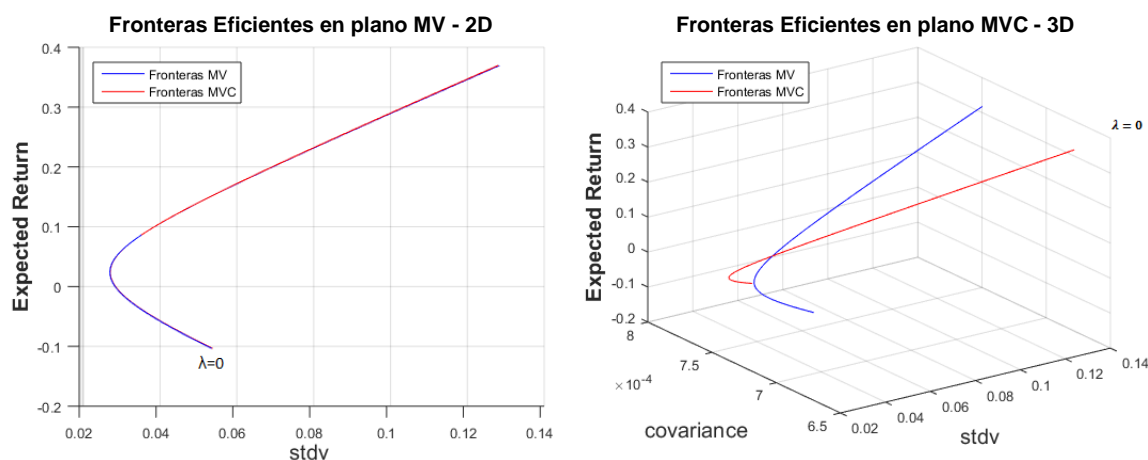
A continuación se presentarán las fronteras eficientes para los portafolios de las AFP's. Las líneas azules representan la frontera eficiente resultante de la optimización Media-Varianza y las rojas las fronteras eficientes de la optimización Media-Varianza-Covarianza. Como se pueda observar, las fronteras eficientes derivadas de la optimización MVC serán dominadas por la optimización regular MV, ya que esta última no considera el papel de la covarianza en la selección de portafolio. A medida que el ratio de aversiones al riesgo, λ , descrito en la sección anterior, sea mayor, más se alejará la frontera eficiente MVC de la frontera MV.

Con motivos ilustrativos, se detallará las características de la frontera eficiente para el FT2 de acuerdo al enfoque Media-Varianza y al enfoque Media-Varianza-Covarianza para un rango de λ que va de 0 hasta 3.8 (20 valores). En el Apéndice J, se presentan las fronteras eficientes correspondientes al FT1, FT2 y FT3.

Primero, para permitir el entendimiento del gráfico final con los veinte valores de λ y explorar las características de los casos más significativos, derivaremos las fronteras para los casos en que λ toma los valores de 0, 0.8 y 1.6, y luego, presentaremos el gráfico total con los valores del rango mencionado.

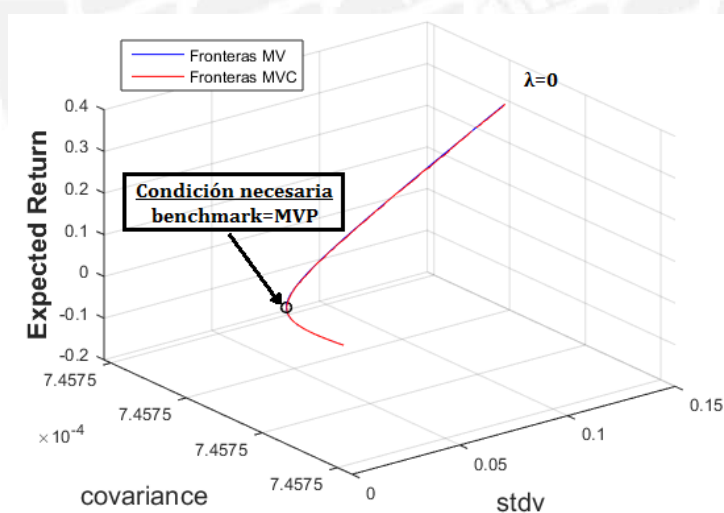
Para un valor de $\lambda=0$, tenemos que la ecuación para el portafolio óptimo MVC se reduce al óptimo MV. En el gráfico de la izquierda, se muestra como bajo ambos enfoques, las fronteras serán semejantes en el plano Media-Varianza; sin embargo, como se observa en el gráfico de la derecha, dado que el enfoque MVC considera la existencia de una covarianza óptima, los enfoques ofrecerán fronteras distintas en el plano Media-Varianza-Covarianza.

Figura 8.3.2: FT2 - Enfoque Media-Varianza vs Enfoque Media-Varianza-Covarianza (Para $\lambda = 0$)



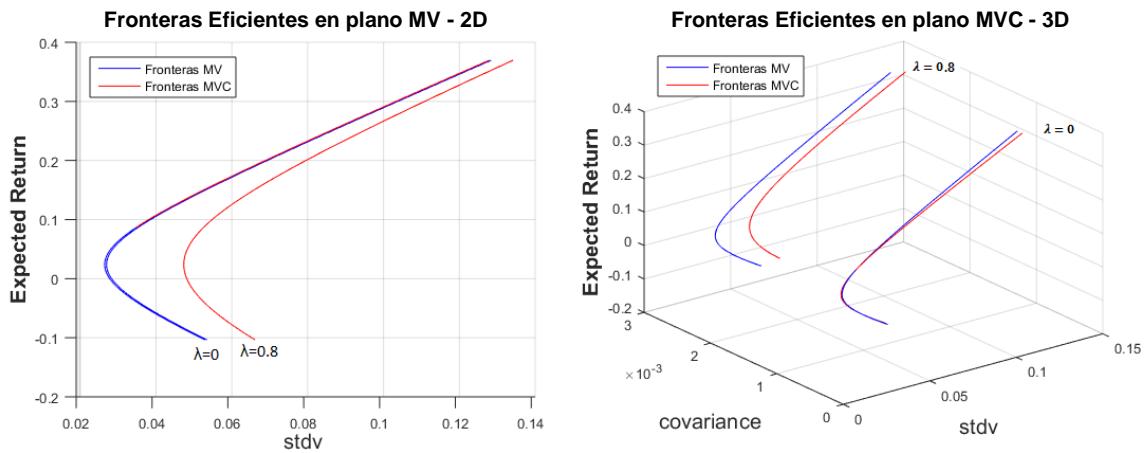
Con el objetivo de encontrar el punto en que ambos enfoques sean exactamente iguales, tanto en el plano MV, como en el plano MVC, a continuación estableceremos la condición necesaria y mostraremos el gráfico correspondiente. La condición necesaria para que ambos enfoques sean totalmente iguales ocurre cuando $\lambda=0$ y el portafolio benchmark utilizado en el enfoque MVC es el portafolio óptimo de mínima varianza global de Markowitz. En el gráfico siguiente se observa que ambas fronteras se intersectan perfectamente, por lo que los colores rojo y azul se entremezclan en una aparente única curva.

Figura 8.3.3: FT2 - Enfoque Media-Varianza vs Enfoque Media-Varianza-Covarianza (Para $\lambda = 0$ y Benchmark=MVP) Fronteras Eficientes en plano MVC - 3D



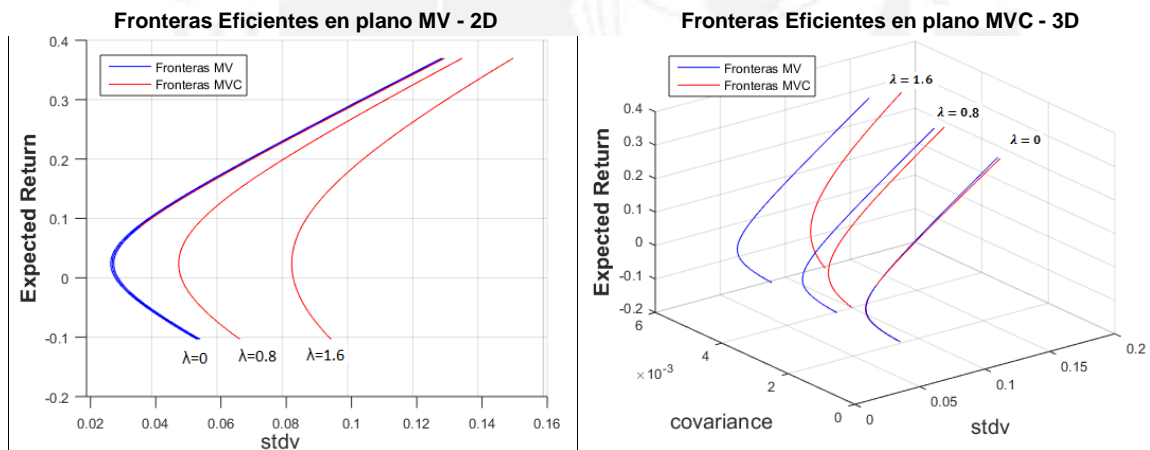
Continuando con el análisis de distintos valores de lambda, para un valor de $\lambda=0.8$, el cual es arbitrario y solo se presenta con el objetivo de entender el movimiento de la curva, tenemos que la ecuación para el óptimo MVC se aleja del óptimo MV. En este caso, bajo ambos enfoques, las fronteras serán distintas, tanto en el plano Media-Varianza como en el plano Media-Varianza-Covarianza. En el gráfico de la izquierda presentamos las fronteras MV y MVC para valores de lambda (λ) de 0 y 0.8 en el plano MV de dos dimensiones. En el gráfico de la derecha presentamos las mismas fronteras, pero esta vez, en el plano MVC de tres dimensiones.

Figura 8.3.4: FT2 - Enfoque Media-Varianza vs Enfoque Media-Varianza-Covarianza (Para $\lambda = 0$ y $\lambda = 0.8$)



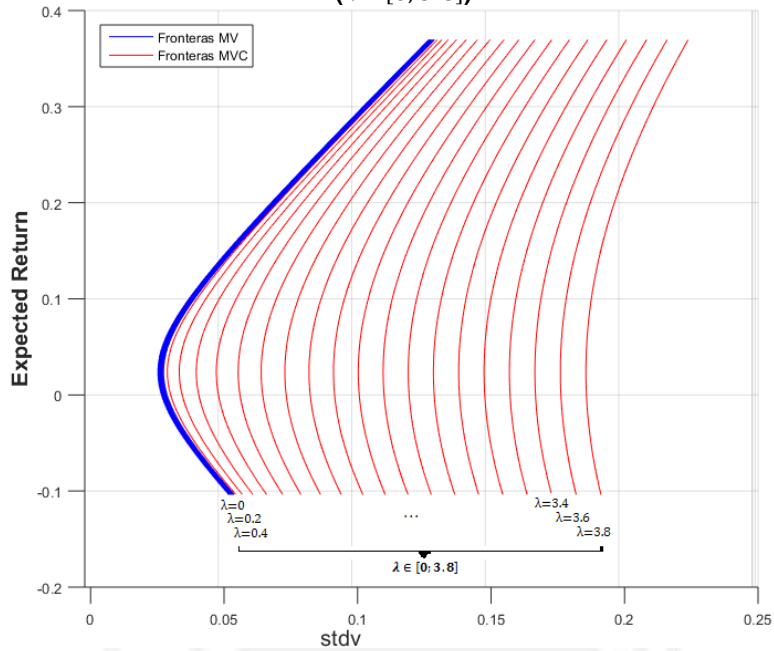
Para un valor de $\lambda=1.6$, caso que corresponde a la situación real del portafolio típico del FT2, que presenta una correlación entre los retornos de aproximadamente 0.98 o una covarianza de 0.0044, tenemos que la frontera para el portafolio óptimo MVC se aleja aún más del óptimo MV. En el gráfico de la izquierda presentamos las fronteras MV y MVC para valores de lambda (λ) de 0, 0.8 y 1.6 en el plano MV de dos dimensiones. En el gráfico de la derecha presentamos las mismas fronteras, pero esta vez, en el plano MVC de tres dimensiones.

Figura 8.3.5: FT2 - Enfoque Media-Varianza vs Enfoque Media-Varianza-Covarianza (Para $\lambda = 0$, $\lambda = 0.8$ y $\lambda = 1.6$)



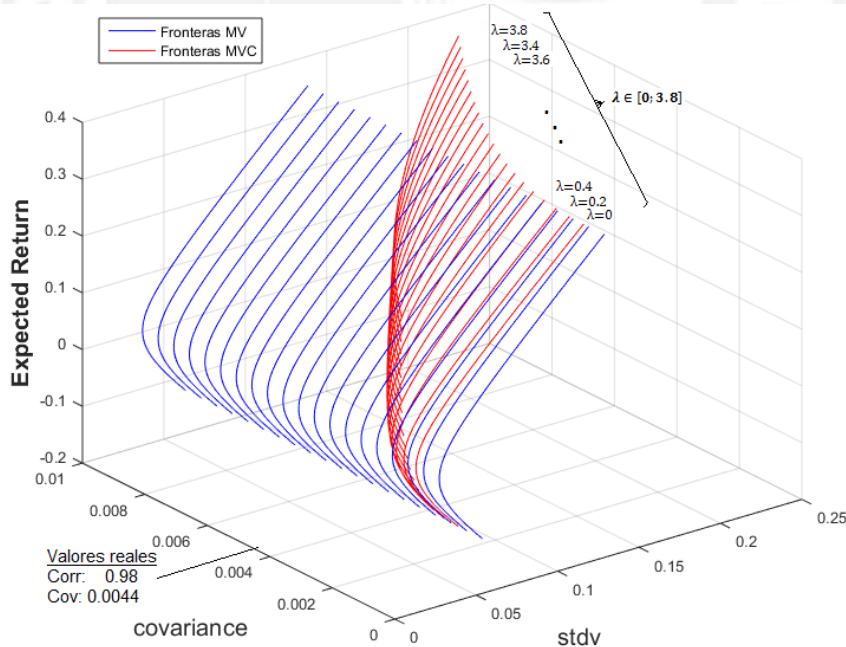
Dado que se ha mostrado que las fronteras MVC se alejan más del óptimo MV cuanto mayor sea el valor de lambda, se procederá a presentar el gráfico correspondientes a los veinte valores de λ , rango de 0 hasta 3.8. La aversión al riesgo estaría disminuyendo la eficiencia MV de los administradores de portafolio, reduciendo sus posibilidades de inversión. Como se observa, a medida que lambda aumenta, la verticalidad de las fronteras crece, lo cual restringiría las posibilidades de inversión de los administradores de portafolio. En un caso extremo las fronteras degenerarían en portafolio de solución de esquina. El gráfico siguiente muestra las fronteras MVC correspondientes a los 20 valores mencionados, en el plano Media-Varianza.

Figura 8.3.6: Frontera Eficiente FT2 Media-Varianza vs Media-Varianza-Covarianza en plano MV - 2D
 $(\lambda \in [0; 3.8])$



El gráfico siguiente muestra las fronteras MVC correspondientes a los 20 valores mencionados, en el plano Media-Varianza-Covarianza. Como se puede observar para valores reales de la correlación en el FT2, la frontera eficiente relevante estaría bastante alejada del óptimo MV.

Figura 8.3.7: Frontera Eficiente FT2 Media-Varianza vs Media-Varianza-Covarianza en plano MVC - 3D
 $(\lambda \in [0; 3.8])$



Como se ha podido comprobar la influencia de la covarianza, derivada del costo de la GRM, afecta la aversión al riesgo de los administradores de portafolio. Quedaría explícita entonces la veracidad de nuestra cuarta hipótesis, la introducción de la GRM reduce la eficiencia de los portafolios óptimos.

Capítulo 9

Conclusiones y Recomendaciones

9.1 Conclusiones

- Como lo demuestran los análisis de correlación, análisis de cointegración y los pesos destinados a los diferentes activos, existe una escasa diferenciación entre los portafolios de las AFP's.
- Para una AFP individual, los costos de la GRM están determinados por la varianza de su portafolio y por la correlación entre su portafolio con el portafolio promedio del sistema. Incrementos en la correlación disminuirán los costos de la GRM; mientras que incrementos en la varianza los aumentarán. De la relación inversa entre costo y correlación podemos concluir que la regulación efectivamente penaliza la diferenciación de las AFP's a través del costo.
- Del modelo MVC descrito, se deriva que cuando más grande sea la influencia de la covarianza en el costo de la GRM, mayor será la porción del portafolio que se destine al portafolio benchmark, por lo que la GRM induciría el efecto manada a través de la selección de portafolio.
- Las fronteras eficientes derivadas de la optimización MVC serán dominadas por la frontera eficiente de la optimización regular MV, ya que esta última no considera el papel de la covarianza en la selección de portafolio. De este resultado se demuestra que la introducción de la GRM, para cualquier nivel de aversión al riesgo, reduce la eficiencia de los portafolios óptimos.
- La flexibilización de los parámetros regulatorios alfa (α) y beta (β) puede modificar la curva precio-correlación, disminuyendo el costo de la garantía; sin embargo, dicha flexibilización solo sería efectiva reduciendo el efecto manada para el Fondo Tipo 1, mas no para los Fondo Tipo 2 y 3.
- Mantener índices de correlación elevados sería la estrategia de inversión inducida, por lo que todas las AFP's presentarían distribuciones de portafolio muy similares.

9.2 Recomendaciones

- Considerando los incentivos generados por la GRM y la imposibilidad de relajar sus parámetros, la recomendación de política sería cambiar el benchmark sobre el que se calcula la GRM relativa.

- Se sugieren como posibles líneas futuras de investigación:
 - (i) Determinar el aporte individual de la GRM y de los Límites de Inversión sobre el efecto manada.
 - (ii) Incorporar restricciones por límites de inversión en la asignación de portafolio.
 - (iii) Realizar una comparación internacional de los efectos de distintos tipos de GRM sobre las asignaciones de portafolio.



Bibliografía

Antolin, P. (2009). "Private pensions and the financial crisis: How to ensure adequate retirement income from DC pension plans", *OECD Journal: Financial Market Trends*.

Antolín, P., Payet, S., Whitehouse, E. & Yermo J. (2011), "The role of guarantees in defined contribution pensions", *OECD Working Papers on Finance, Insurance and Private Pensions*.

Baldovino, V., Mariño, N. & Reyes, J.M. (2011). "Portafolio benchmark y diferenciación en el sistema de AFAP en Uruguay". *XXVI Jornadas de Economía del Banco Central de Uruguay (BCU)*.

Berdejo, M.A. Galarza, B. & Nagamine, J. (2006). "Mecanismos para incentivar la competencia en los Sistemas de Pensiones basados en Capitalización Individual". *SBS Documentos de Trabajo*.

Biggs, A., C. Burdick & K. Smetters (2009). "Pricing personal account benefit guarantees: A simplified approach". *Social security policy in a changing environment, University of Chicago*.

Bravo, F. & Ruiz, J.L. (2015). "Herding Behavior and Default in Funded Pension Schemes: The Chilean Case". *Finance and Trade: a journal of the Society for the Study of Emerging Markets*, 50.

Castañeda, P. & Rudolph H. (2010). "Portfolio Choice, Minimum Return Guarantees, and Competition in DC Pension Systems" In: Hinz, R., Rudolph, H., Antolin, P., and J. Yermo. *Evaluating the Financial Performance of Pension Funds. The World Bank, 2010*.

Cannon, E. and I. Tonks (2013). "The Value and Risk of Defined Contribution Pension Schemes: International Evidence." *Journal of Risk and Insurance*, 80(1): 95-119.

Céspedes (2005). "Un enfoque de Teoría de Juegos del Sistema Privado de Pensiones Peruano". *Industrial Organization, EconWPA*.

Clarke R., Krase S. & Statman M. (1994). "Tracking errors, regret, and tactical asset allocation," *The Journal of Portfolio Management*, vol. 20, no. 3, pp. 16–24.

CIEDESS (2013). "Garantía de rentabilidad mínima de las AFP: Origen, función y aplicación mínima del encaje" *Unidad de Estudios Cuantitativos, Área de Investigación y Estudios*.

Cornell, B. (2010). "Warren Buffett, Black–Scholes, and the Valuation of Long-Dated Options". *Journal of Portfolio Management*, 36(4): 107-111.

Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (2015), "Diagnóstico del Sistema de Pensiones", México.

Cruz-Saco, M., Zegarra, M., Seminario, L., Moreno, K. & Mendoza, J. (2014). "El Sistema Previsional del Perú: diagnóstico 1996-2013, proyecciones 2014-2050 y reforma", *Documento de Discusión, Universidad del Pacífico*.

Escudero, M. (2009), "Garantías de rentabilidad", en el libro "El futuro de las pensiones: desarrollo de los programas de capitalización individual".

Galarza, B. & Olivera J. (2001), "La Industria del La industria del Sistema Privado de Pensiones en el Perú", *Documento de Trabajo N° 04-2001, Superintendencia de Banca y Seguros*.

Jara, D. (2006). "Modelo de la Regulación de las AFP en Colombia y su Impacto en el Portafolio de los Fondos de Pensiones". *Banco de la Republica de Colombia*.

Jorion, P. (2003). "Portfolio Optimization with Tracking-Error Constraints" *Financial Analysts Journal*, Vol. 59, No. 5, pp. 70-82.

Kominek (2006) "Regulatory Induced Herding? Evidence from Polish Pension Funds", *European Bank for Reconstruction and Development (EBRD)*.

Olivares, J. (2008). "Rear-view-mirror driving in defined contribution systems: the strange formula of the Chilean pension funds". *Applied Economics - Vol. 40, N° 15, Pp 2009 – 2019*.

Margrabe, W. (1978). *The Value of an Option to Exchange One Asset for Another*. *Journal of Finance*, 33:177–186, 1978.

Markowitz, H. (1952). "Portfolio selection", *The Journal of Finance* 7, no.1, 77–91.

McCarthy, D. (2011). "Are investment guarantees a cost-effective way to management retirement investment risk?" *Imperial College*.

Mendoza, R. (2014). "Eficiencia financiera en los portafolios de inversión de las AFP en el Perú: Un enfoque robusto de Multifondos", *Documentos de Trabajo, Banco Central de Reserva del Perú*.

Moloché, G. (2012). "Política óptima de inversiones de las AFPs: Implicancias del marco regulatorio y los esquemas de comisiones" *Concurso CIES – IDRC – Fundación M.J. Bustamante 2012*.

Munnell, A. H., A. Golub-Sass, R. W. Kopcke and A. Webb (2009). "What does it cost to guarantee returns." *Center for Retirement Research at Boston College*(9-4): 1-14.

Neumann, J & Morgenstern, O. (1953). "Theory of Games and Economic Behavior". Princeton, NJ. Princeton University Press

OECD (2012). "The Role of Guarantees in Retirement Savings Plans". *OECD Pensions Outlook 2012*.

Ortiz, D., Chirinos, M. y Hurtado, Y. (2010). "La frontera eficiente y los límites de inversión para las AFP: una nueva mirada", *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 15(29), 95-118.

Paz, J. & Ugaz R. (2003), "El Sistema Privado de Pensiones: Un enfoque de costos hundidos endógenos". *Economía y Sociedad* 50, CIES.

Pennacchi, G. (1999). "The value of guarantees on pension fund returns." *Journal of Risk and Insurance*: 219-237.

Pennacchi, G. (2009). "Pricing Personal Account Benefit Guarantees: A Simplified Approach". *Social Security Policy in a Changing Environment, University of Chicago*.

Pereda, J. (2005), "Estimación de la Frontera Eficiente para las AFP en el Perú y el Impacto de los Límites de Inversión: 1995-2004", *Documento de Trabajo N° 2007:09, Banco Central de Reserva del Perú*.

Raddatz, C. & Schmukler, S. (2013) "Deconstructing Herding: Evidence from Pension Fund Investment Behavior".

Rivas-Llosa, R. & Camargo, G. (2002). "Eficiencia financiera de los límites de inversión para las AFP: una aplicación al caso peruano".

Roll, R. (1992). "A Mean/Variance Analysis of Tracking Error", *Journal of Portfolio Management*, 13-22.

Rudolph, H. & Rezende, R. "Competition and Performance in the Polish Second Pillar", *World Bank Publications, 2007 - Business & Economics*.

Sánchez, D. (2007). "Portafolio de inversiones y desempeño del sistema privado de pensiones peruano: 2000 – 2005". *Tesis San Marcos*.

Scheuenstuhl, G., S. Blome, D. Karim, M. Moch & S. Brandt (2011). "Assessing the Nature of Investment Guarantees in Defined Contribution Pension Plans". *Financial Study. Munich, Risklab*.

Superintendencia de Pensiones (2010), "El Sistema Chileno de Pensiones", Séptima Edición, Santiago de Chile.

Stulz, R. (1982), "Options on the Minimum or Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications". *Journal of Financial Economics* 10,161-185.

Wagner, N. (2002), "On a model of portfolio selection with benchmark". *Journal of Asset Management*, vol. 3, no. 1, pp. 55–65.

Wang, M. (1999). "Multiple-benchmark and multiple-portfolio optimization". *Financial Analysts Journal*, vol. 55, no. 1, pp. 63–72.

World Bank. (2005). "Guarantees - counting the cost of guaranteeing defined contribution pensions". *World Bank pension reform primer series*. Washington, DC: World Bank.



Apéndices

Apéndice A

Cuadro A: Garantías de Rentabilidad Mínima Relativas en el Mundo

Tipo	Sub-tipo	País	Regulación
GRM absolutas		República Checa	GRM de 0% en terminos nominales.
		Eslovaquia	GRM de 0% en terminos nominales.
GRM Relativas	GRM relativa a Retorno de Portafolio de Referencia	Colombia	GRM determinada por un ponderado de la Rentabilidad Promedio del Sistema y la Rentabilidad nominal anual del IGBC, el S&P y un portafolio de referencia.
		Hungría	GRM determinada por una canasta de bonos del gobierno de largo plazo.
		Eslovenia	GRM no debe ser menor al 40% de la tasa de interés promedio de los bonos soberanos.
		Chile	Esquema multifondos, Fondos Tipo A, B, C, D y E. Para los fondos A y B, la GRM es el mínimo entre el 50% de la Rentabilidad Promedio del Sistema o el 4% debajo de dicho promedio, mínimo { 50%RPS; RPS-4%}; mientras que para los fondos C, D y E, la GRM es el mínimo entre el 50% de la Rentabilidad Promedio del Sistema o el 2% debajo de dicho promedio, mínimo { 50%RPS; RPS-2%}. Garantía Real con período de cálculo de 36 meses y verificación mensual.
	GRM relativa a Rentabilidad Promedio del Sistema (RPS)	Perú	Esquema multifondos, Fondos Tipo 0, 1, 2 y 3. Para el fondo 1, la GRM es el mínimo entre el 50% de la Rentabilidad Promedio del Sistema o el 2% debajo de dicho promedio, mínimo { 50%RPS; RPS-2%}; para el fondo 2, la GRM es el mínimo entre el 35% de la Rentabilidad Promedio del Sistema o el 3% debajo de dicho promedio, mínimo { 35%RPS; RPS-3%}; y para el fondo 3, la GRM es el mínimo entre el 25% de la Rentabilidad Promedio del Sistema o el 4% debajo de dicho promedio, mínimo { 25%RPS; RPS-4%}. Garantía Real con período de cálculo de 36 meses y verificación mensual.
		Uruguay	Esquema multifondos, Subfondo de Acumulación y Subfondo de Retiro. Para el Subfondo de Acumulación, la GRM es el mínimo entre una rentabilidad de 2% o la Rentabilidad Promedio del Sistema menos 2%, mínimo { 2%; RPS-2%}. Garantía Real con período de cálculo de 36 meses y verificación mensual.
		República Dominicana	Esquema con Unico Fondo. La GRM es la Rentabilidad Promedio del Sistema menos el 2%. Garantía Real con período de cálculo de 12 meses y verificación mensual.
		Polonia	Mínimo entre el 50% de la Rentabilidad Promedio del Sistema o el 4% debajo de dicho promedio, mínimo { 50%RPS; RPS-4%}. Garantía Nominal con período de cálculo de 36 meses y verificación semestral.
		Bulgaria	Mínimo entre el 60% de la Rentabilidad Promedio del Sistema o el 3% debajo de dicho promedio, mínimo { 60%RPS; RPS-3%}. Garantía Nominal con período de cálculo de 24 meses y verificación trimestral

RPS: Retorno Promedio del Sistema

Fuente: CIEDESS (2013); Rudolph & Rezende (2010) y World Bank (2005)

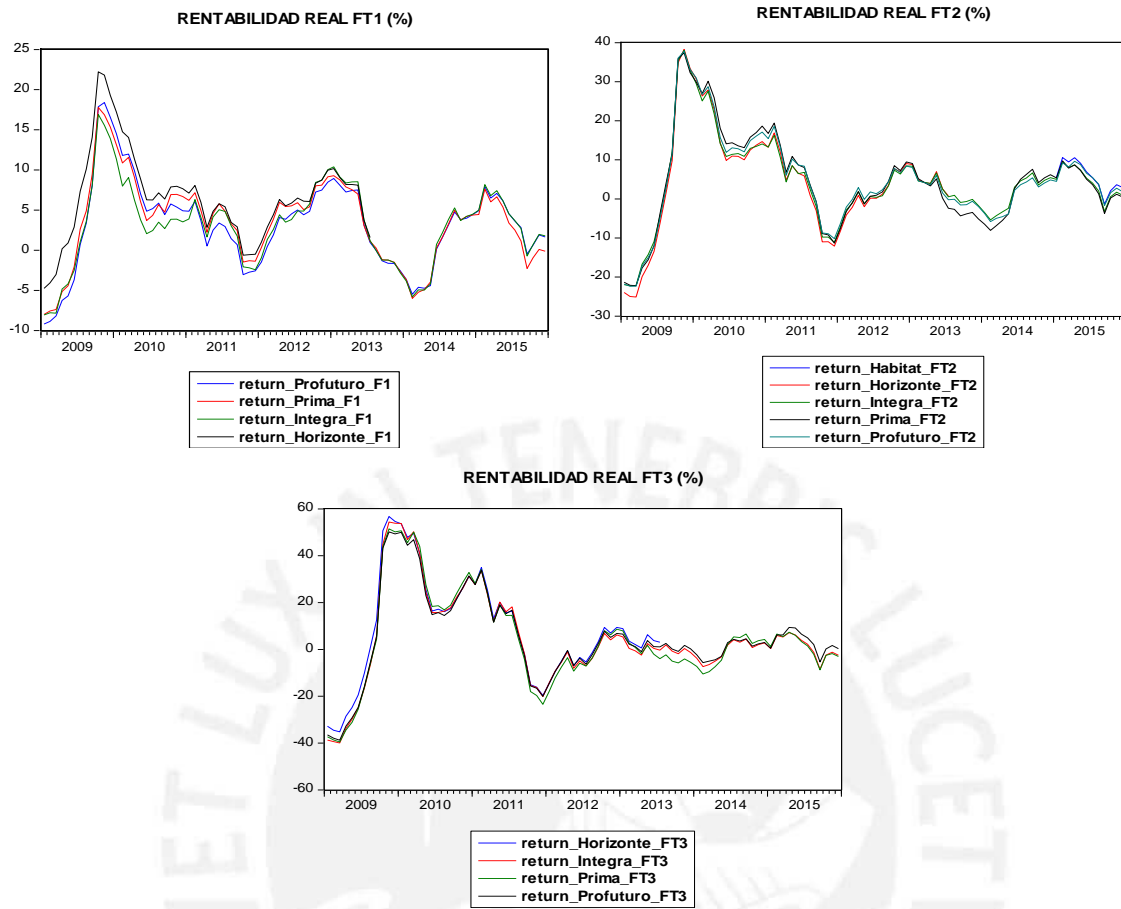
Apéndice B.1

Figura B.1: Distribución de portafolio por clase de activo en el periodo 2012-2016



Apéndice B.2

Figura B.2: Histórico de rentabilidades por tipo de fondo y AFP



Apéndice B.3

Cuadro B.3: Estadísticos de las series históricas de los retornos

Covariance Analysis: Ordinary Sample: 2009M01 2015M12 Included observations: 84				Covariance Analysis: Ordinary Sample: 2009M01 2015M12 Included observations: 84			
FONDO TIPO 1				FONDO TIPO 2			
Covariance	R_INTEGRA	R_PRIMA	R_PROFUTURO	Covariance	R_INTEGRA	R_PRIMA	R_PROFUTURO
Correlation				Correlation			
R_INTEGRA	25.034530			R_INTEGRA	125.910400		
	1.000000				1.000000		
R_PRIMA	25.619300	27.698510		R_PRIMA	134.247300	145.931200	
	0.972902	1.000000			0.990377	1.000000	
R_PROFUTURO	26.764040	28.382590	30.249540	R_PROFUTURO	129.906700	139.615300	135.061300
	0.972574	0.980538	1.000000		0.996174	0.994474	1.000000

Covariance Analysis: Ordinary Sample: 2009M01 2015M12 Included observations: 84			
FONDO TIPO 3			
Covariance	R_INTEGRA	R_PRIMA	R_PROFUTURO
Correlation			
R_INTEGRA	388.544700		
	1.000000		
R_PRIMA	392.453700	400.619600	
	0.994722	1.000000	
R_PROFUTURO	368.122200	372.366100	350.144200
	0.998040	0.984216	1.000000

Apéndice B.4

El Diagnostico del VAR y la Prueba de Residuos, evidencian que el VAR debería de tener 6 retardos y que los residuos cumplen con los supuestos de Gauss Markov, ausencia de autocorrelación, normalidad y homocedasticidad en errores. A continuación se presentan las pruebas de Cointegración de Johansen

Cuadro B.4.1: Pruebas de Cointegración de Johansen - Fondo Tipo 1

Sample (adjusted): 2007M08 2015M12 - Included observations: 101 after adjustments
Trend assumption: No deterministic trend (restricted constant)
Series: RETURN_PROFUTURO_F1 RETURN_PRIMA_F1 RETURN_INTEGRA_F1
Lags interval (in first differences): 1 to 6
Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.312749	51.03568	35.19275	0.0005
At most 1	0.110391	13.15509	20.26184	0.3516
At most 2	0.013188	1.340802	9.164546	0.9009

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.312749	37.88060	22.29962	0.0002
At most 1	0.110391	11.81428	15.89210	0.1970
At most 2	0.013188	1.340802	9.164546	0.9009

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

Cuadro B.4.2: Pruebas de Cointegración de Johansen - Fondo Tipo 2

Sample (adjusted): 2007M08 2015M12 - Included observations: 101 after adjustments
Trend assumption: No deterministic trend (restricted constant)
Series: RETURN_PRIMA_FT2 RETURN_PROFUTURO_FT2 RETURN_INTEGRA_FT2
Lags interval (in first differences): 1 to 6
Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.215500	42.17960	35.19275	0.0075
At most 1	0.118373	17.66599	20.26184	0.1096
At most 2	0.047747	4.941425	9.164546	0.2899

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.215500	24.51361	22.29962	0.0241
At most 1	0.118373	12.72456	15.89210	0.1477
At most 2	0.047747	4.941425	9.164546	0.2899

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

Cuadro B.4.3: Pruebas de Cointegración de Johansen - Fondo Tipo 3

Sample (adjusted): 2007M05 2015M12- Included observations: 104 after adjustments

Trend assumption: No deterministic trend (restricted constant)

Series: RETURN_INTEGRA_FT3 RETURN_PRIMA_FT3 RETURN_PROFUTURO_FT3

Lags interval (in first differences): 1 to 3

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.319682	65.45192	35.19275	0.0000
At most 1 *	0.150107	25.39159	20.26184	0.0090
At most 2	0.078272	8.476510	9.164546	0.0674

Trace test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

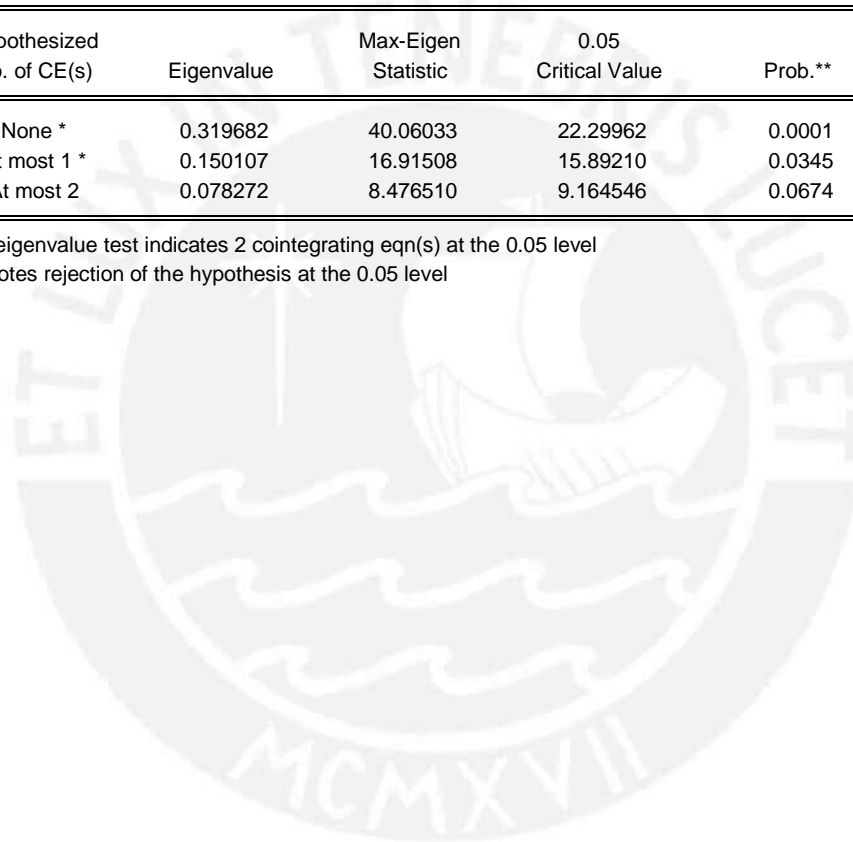
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.319682	40.06033	22.29962	0.0001
At most 1 *	0.150107	16.91508	15.89210	0.0345
At most 2	0.078272	8.476510	9.164546	0.0674

Max-eigenvalue test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level



Apéndice C

Cuadro C: Ratio Encaje / Patrimonio Total – Dic 15

	Habitat	Integra	Prima	Profuturo
Fondos de Pensiones (S/. miles)	1,479,854	49,679,722	39,009,061	32,837,406
FT 1	80,376	6,988,445	5,086,606	4,177,012
FT 2	1,207,605	34,808,504	26,532,918	23,124,805
FT 3	191,874	7,882,772	7,389,536	5,535,589
Encaje Legal (S/. miles)	12,017	450,740	335,763	288,407
Encaje Legal FT 1	624	57,355	35,309	28,716
Encaje Legal FT 2	9,722	316,686	216,678	198,735
Encaje Legal FT 3	1,672	76,699	83,775	60,955
Patrimonio Total	30,675	1,164,525	577,792	937,429
Encaje / Patrimonio Total	39.2%	38.7%	58.1%	30.8%

Fuente: SBS



Apéndice D.1

Cuadro D.1.1: Desviaciones estándar anualizadas - FT1

sd_Habitat	sd_Horizonte	sd_Integra	sd_Prima	sd_Profuturo	sd_Promedio
0.02608	0.03805	0.02530	0.02537	0.02521	0.02404

Cuadro D.1.2: Desviaciones estándar anualizadas - FT2

sd_Habitat	sd_Horizonte	sd_Integra	sd_Prima	sd_Profuturo	sd_Promedio
0.04388	0.05918	0.04669	0.04566	0.04928	0.04545

Cuadro D.1.3: Desviaciones estándar anualizadas - FT3

sd_Habitat	sd_Horizonte	sd_Integra	sd_Prima	sd_Profuturo	sd_Promedio
0.07306	0.07696	0.07462	0.07214	0.07959	0.07358

Cuadro D.1.4: Matriz de correlaciones anualizada - FT1

	r_Integra	r_Prima	r_Profuturo	r_Promedio
r_Integra	1.000000			
r_Prima	0.936901	1.000000		
r_Profuturo	0.955835	0.923238	1.000000	
r_Promedio	0.968691	0.960169	0.966147	1.000000

Cuadro D.1.5: Matriz de correlaciones anualizada - FT2

	r_Integra	r_Prima	r_Profuturo	r_Promedio
r_Integra	1.000000			
r_Prima	0.968839	1.000000		
r_Profuturo	0.969578	0.951463	1.000000	
r_Promedio	0.987231	0.981038	0.984265	1.000000

Cuadro D.1.6: Matriz de correlaciones anualizada - FT3

	r_Integra	r_Prima	r_Profuturo	r_Promedio
r_Integra	1.000000			
r_Prima	0.974690	1.000000		
r_Profuturo	0.973910	0.957875	1.000000	
r_Promedio	0.990258	0.981809	0.986937	1.000000

Apéndice D.2

Cuadro D.2.1: Listado de Activos de Referencia

Clase de Activo	Mercado	Activo de Referencia	Identificador Bloomberg
Renta Variable	Local	S&P Peru General Index	SPBVL INDEX
	Internacional	MSCI Emerging Market Index USD	MXEF INDEX
		S&P 500 INDEX	SPX INDEX
Renta Fija	Local	Bloomberg USD Emerging Markets Peru Sovereign Bond Index	BEMSPE INDEX
		LVA-AFP Peru Corporate Fixed Income Index - USD	LKPCBMO INDEX
	Internacional	Bloomberg Global Developed Sovereign Bond Index	BGSV EQUITY
		Bloomberg USD Emerging Markets Sovereign Bond Index	BEMS INDEX

Cuadro D.2.2: Retornos anuales

	ar_spbvl	ar_mxef	ar_spx	ar_bemspe	ar_lkpcbmo	ar_bgsv	ar_bems
r anual	0.369576894	0.100979962	-0.103601901	0.01140431	0.046864973	0.024260734	-0.007804839

Cuadro D.2.3: Matriz de Varianzas Covarianzas anual

	spbvl	mxef	spx	bemspe	lkpcbmo	bgsv	bems
spbvl	0.03068309	0.00168544	0.00059390	0.00086198	-0.00010339	0.00036344	0.00054641
mxef	0.00168544	0.01843897	-0.00071196	0.00350597	0.00010469	-0.00078479	0.00375483
spx	0.00059390	-0.00071196	0.01626220	0.00057573	0.00012841	-0.00001469	0.00023431
bemspe	0.00086198	0.00350597	0.00057573	0.00492917	0.00014536	0.00113442	0.00290339
lkpcbmo	-0.00010339	0.00010469	0.00012841	0.00014536	0.00159432	-0.00005755	0.00010472
bgsv	0.00036344	-0.00078479	-0.00001469	0.00113442	-0.00005755	0.00323696	0.00054268
bems	0.00054641	0.00375483	0.00023431	0.00290339	0.00010472	0.00054268	0.00249583

Cuadro D.2.4: Pesos del portafolio benchmark para FT1, FT2, FT3

b	ar_spbvl	ar_mxef	ar_spx	ar_bemspe	ar_lkpcbmo	ar_bgsv	ar_bems
ft1	0.030853863	0.032413007	0.126788016	0.231820803	0.575051339	0.003072972	0
ft2	0.110308899	0.026413956	0.364539981	0.202031543	0.296330334	0.000375286	0
ft3	0.197678432	0.020133881	0.628742909	0.036952107	0.115768739	0.000723932	0

Apéndice E

Modelo de Valuación de la GRM

A continuación se presenta la derivación de la fórmula para el costo de la GRM desde el punto de vista de la AFP como garante total, se realizarán ligeras modificaciones a la fórmula presentada en Pennacchi (1999), que considera que las AFP's y el estado comparten el costo de dicha garantía.

Como se describe en Pennacchi (1999), se plantea la existencia de cuatro activos riesgosos (cuatro portafolios riesgosos); el primero, S , representa el portafolio de una AFP en particular; el segundo, S_a , el portafolio del sistema; el tercero, X , un portafolio igual al promedio, pero con una tasa de crecimiento menor en alfa (α); y por último, un portafolio V , igual al promedio, pero con una tasa de crecimiento beta (β) veces la del promedio.

Los retornos reales instantáneos, tanto de cada AFP en particular, como para el promedio del sistema siguen un proceso estocástico dado por:

$$\frac{dS}{S} = \alpha_s dt + \sigma_s dz_s$$
$$\frac{dS_a}{S_a} = \alpha_a dt + \sigma_a dz_a$$

Siendo α_s y α_a , las tasas esperadas de retorno; σ_s y σ_a , las desviaciones estándar de los retornos; y por último, dz_s y dz_a , procesos Wiener estándar. Las tasas esperadas y desviaciones estándar de los retornos pueden cambiar estocásticamente. Además, ρ es la correlación instantánea entre los retornos de una AFP particular y todo el sistema promedio, la cual está dado por $dz_s dz_a = \rho dt$.

Por otro lado, los retornos reales instantáneos para los portafolios de referencia X y V están dados por:

$$\frac{dX}{X} = (\alpha_a - \alpha)dt + \sigma_a dz_a = (\alpha_a - q_x)dt + \sigma_a dz_a$$
$$\frac{dV}{V} = \beta \alpha_a dt + \beta \sigma_a dz_a = (\alpha_v - q_v)dt + \beta \sigma_a dz_a$$
$$\alpha_v = \alpha_a - (1 - \beta)\varphi\sigma_a$$
$$q_v = (1 - \beta)(\alpha_a - \varphi\sigma_a) = (1 - \beta)r(t)$$

Siendo α_v y q_v simplificaciones de la fórmulas iniciales; φ es el precio por riesgo del proceso dz_a y $r(t)$ es la tasa libre de riesgo que en lo sucesivo la consideraremos constante.

Normalizando los portafolios de referencia, siguiendo a Margrabe (1978), tendríamos que $x = X/S$ y $v = V/S$; además, aplicando el lema de Ito tenemos que:

$$\frac{dx}{x} = (\alpha_a - q_x - \alpha_s + \sigma_s^2 - \sigma_a\sigma_s\rho)dt + \sigma_a dz_a - \sigma_s dz_s = (\alpha_1 - q_x)dt + \sigma_1 dz_1$$
$$\alpha_1 = \alpha_a - \alpha_s + \sigma_s^2 - \sigma_a\sigma_s\rho$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_a^2 + \sigma_s^2 - 2\sigma_a\sigma_s\rho$$

$$\frac{dv}{v} = (\alpha_v - q_v - \alpha_s + \sigma_s^2 - \beta\sigma_a\sigma_s\rho)dt + \beta\sigma_a dz_a - \sigma_s dz_s = (\alpha_2 - q_v)dt + \sigma_2 dz_2$$

$$\alpha_2 = \alpha_v - \alpha_s + \sigma_s^2 - \beta\sigma_a\sigma_s\rho$$

$$\sigma_2^2 = \beta^2\sigma_a^2 + \sigma_s^2 - 2\beta\sigma_a\sigma_s\rho$$

Asimismo la correlación instantánea viene dada por:

$$dz_1 dz_2 = \rho_{12}dt$$

$$\rho_{12} = \frac{\beta\sigma_a^2 + \sigma_s^2 - (1+\beta)\sigma_a\sigma_s\rho}{\sigma_1\sigma_2}$$

La lógica para las derivaciones anteriores es obtener una ecuación para el precio de una opción que, si no se alcanzara la rentabilidad mínima (el menor entre βR_a y $R_a - \alpha$), intercambie el portafolio $S(T)$ por el menor entre los portafolios $X(T)$ o $V(T)$. La opción así descrita, que comienza en 0 y termina en T , tendría el siguiente esquema:

$$\text{Si } R_i > \min\{\beta R_a; R_a - \alpha\} \rightarrow S(T) = S(T)$$

$$\text{Si } R_i < \min\{\beta R_a; R_a - \alpha\} \rightarrow S(T) = \min\{X(T), V(T)\}$$

Dado lo anterior, el precio de la opción (costo de la GRM) estaría dado por la siguiente fórmula:

$$C(\sigma_s, \rho) = S \left[e^{-q_x \tau} N \left(\frac{-q_x}{\sigma_1 \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma_1 \sqrt{\tau}; \frac{q_x - q_v}{\sigma \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma \sqrt{\tau}; \frac{\rho_{12} \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma} \right) + e^{-q_v \tau} N \left(\frac{-q_v}{\sigma_2 \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma_2 \sqrt{\tau}; \frac{q_v - q_x}{\sigma \sqrt{\tau}} + 0.5 \sigma \sqrt{\tau}; \frac{\rho_{12} \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma} \right) - N \left(\frac{-q_x}{\sigma_1 \sqrt{\tau}} - 0.5 \sigma_1 \sqrt{\tau}; \frac{-q_v}{\sigma_2 \sqrt{\tau}} - 0.5 \sigma_2 \sqrt{\tau}; \rho_{12} \right) \right]$$

Donde $N(;;)$: función bivariada acumulativa estándar.

Apéndice F

Figura F.1: Precio Put vs Correlación vs stdv – FT1, FT2, FT3

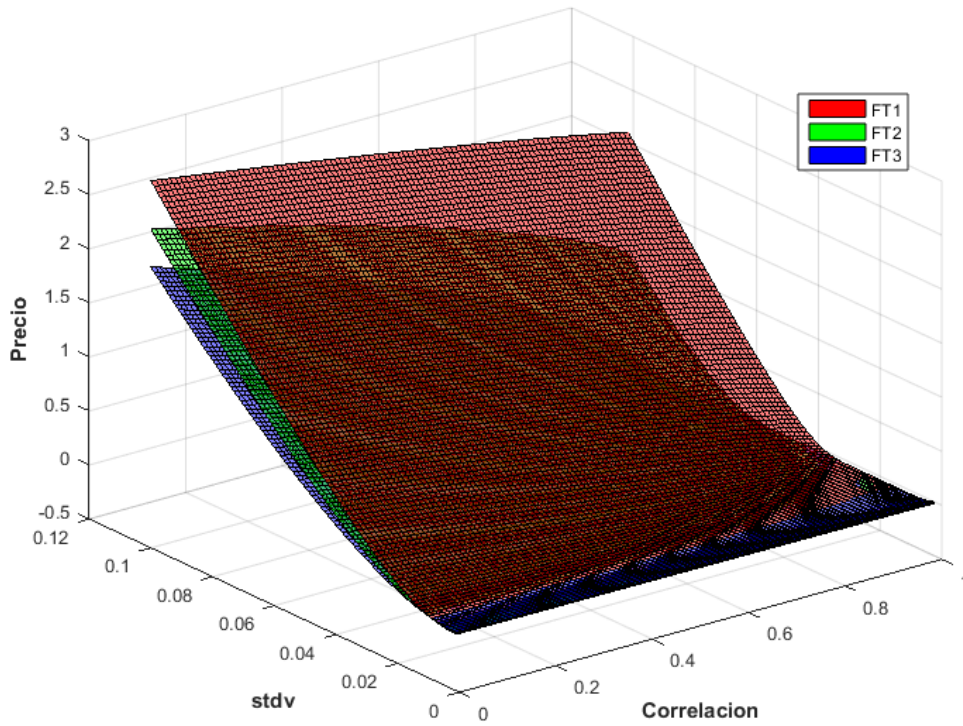
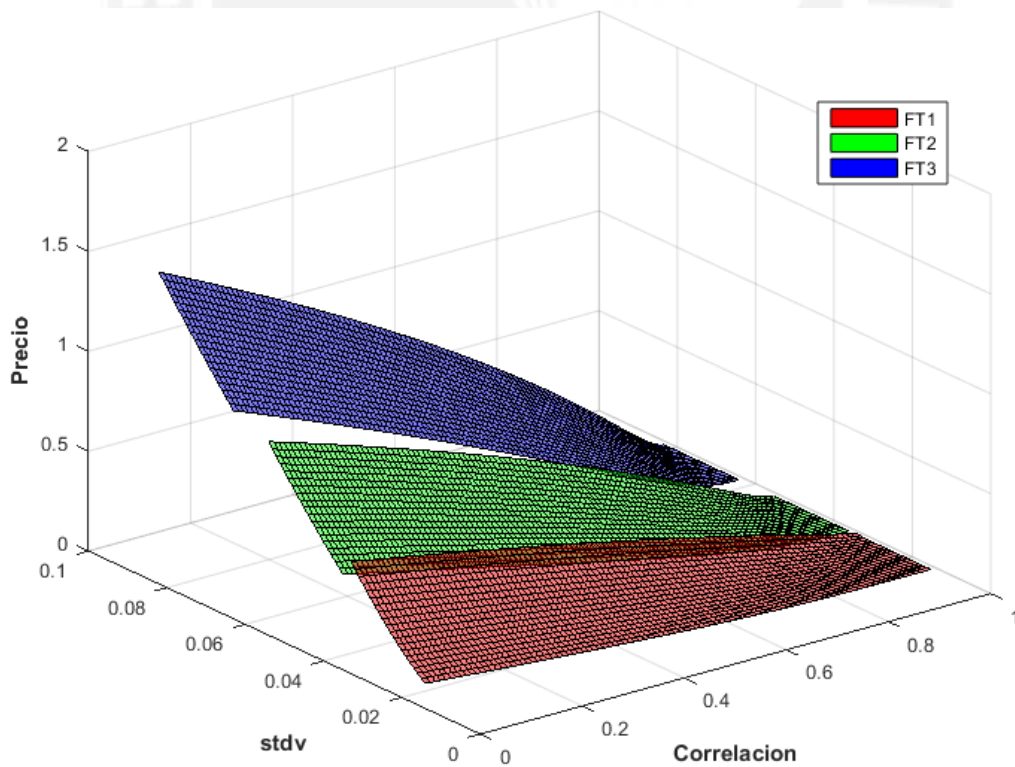
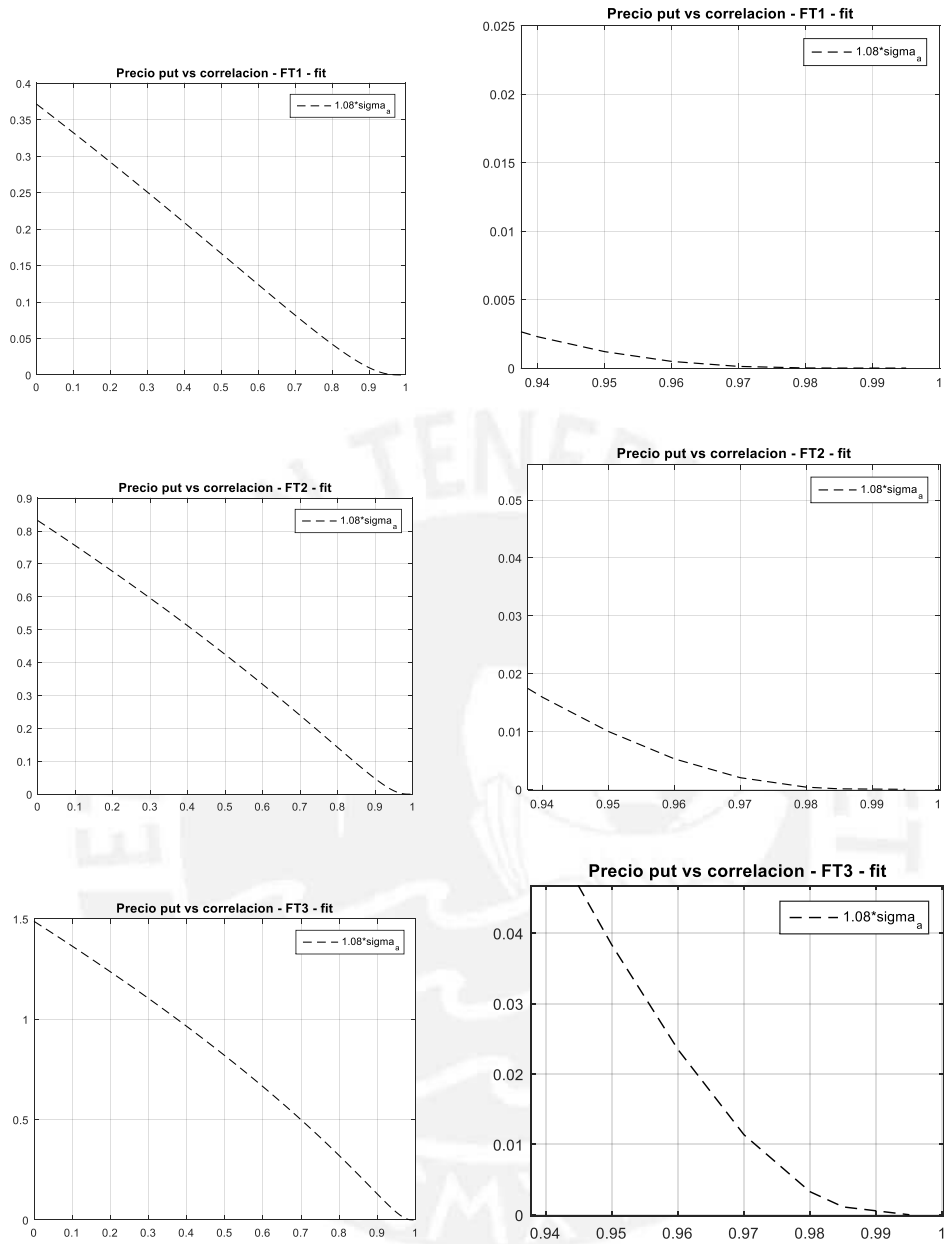


Figura F.2: Precio Put vs Correlación vs stdv – FT1, FT2, FT3



Apéndice G

Figura G: Precio Put vs. Correlación – FT1, FT2, FT3



Apéndice H

Ejercicio de variación de parámetros regulatorios alfa y beta – FT1, FT2, FT3

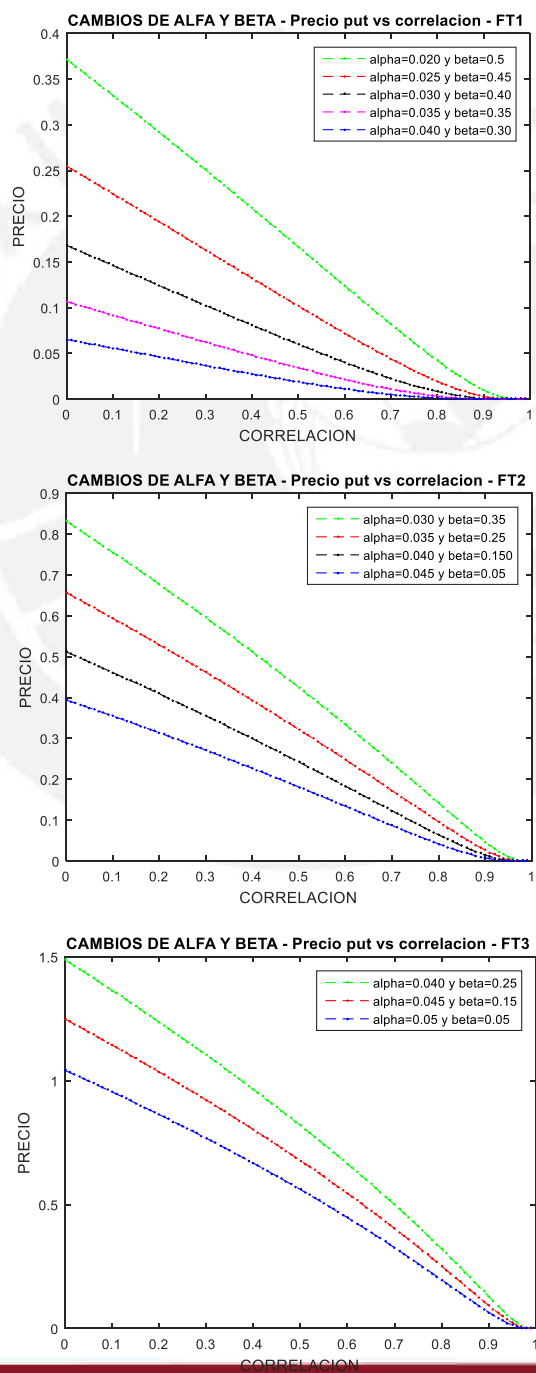
Formula

$$R_{min} = \min\{\beta R_a ; R_a - \alpha\}$$

Simulación de valores de alfa y beta

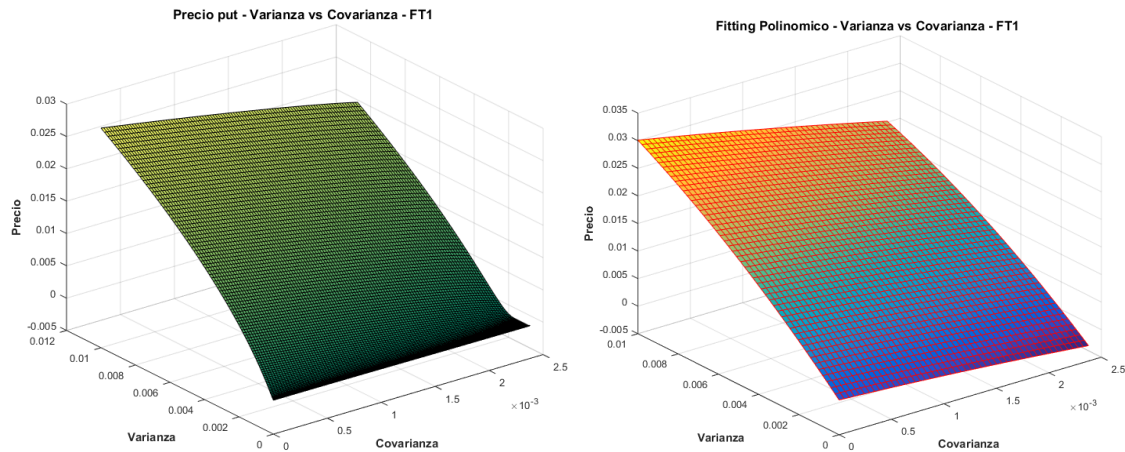
FT1		FT2		FT3	
alfa	beta	alfa	beta	alfa	beta
0.02	0.5	0.03	0.35	0.04	0.25
0.025	0.4	0.035	0.25	0.045	0.15
0.03	0.3	0.04	0.15	0.05	0.05
0.035	0.2	0.045	0.05	0.055	-0.05
0.04	0.1	0.05	-0.05	0.06	-0.15

Figura H.1: Precio Put vs. Correlación



Apéndice I

Figura I.1: Fitting FT1



Fitting Linear model Poly22:

$$f(x,y) = p00 + p10*x + p01*y + p20*x^2 + p11*x*y + p02*y^2$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$p00 = 0.001293 (0.001252, 0.001335)$$

$$p10 = -1.018 (-1.082, -0.9543)$$

$$p01 = 3.673 (3.659, 3.687)$$

$$p20 = -192.6 (-217.7, -167.5)$$

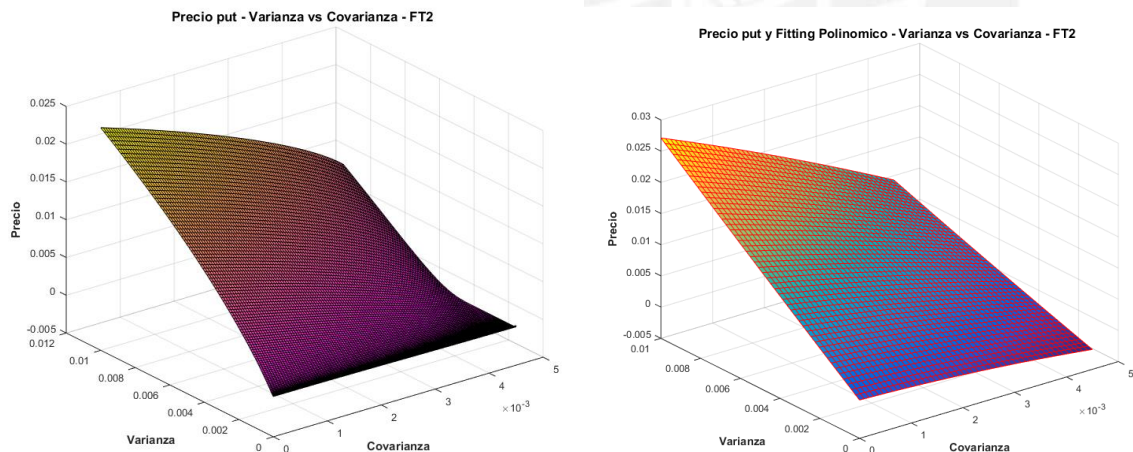
$$p11 = -269.8 (-274.9, -264.6)$$

$$p02 = -79.16 (-80.55, -77.77)$$

Goodness of fit:

SSE: 0.003029, R-square: 0.9956, Adjusted R-square: 0.9956, RMSE: 0.0005505

Figura I.2: Fitting FT2



Fitting Linear model Poly22:

$$f(x,y) = p00 + p10*x + p01*y + p20*x^2 + p11*x*y + p02*y^2$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$p00 = 0.001136 (0.001088, 0.001184)$$

$$p10 = -0.2595 (-0.2986, -0.2205)$$

$$p01 = 2.535 (2.519, 2.552)$$

$$p20 = -88.34 (-96.43, -80.25)$$

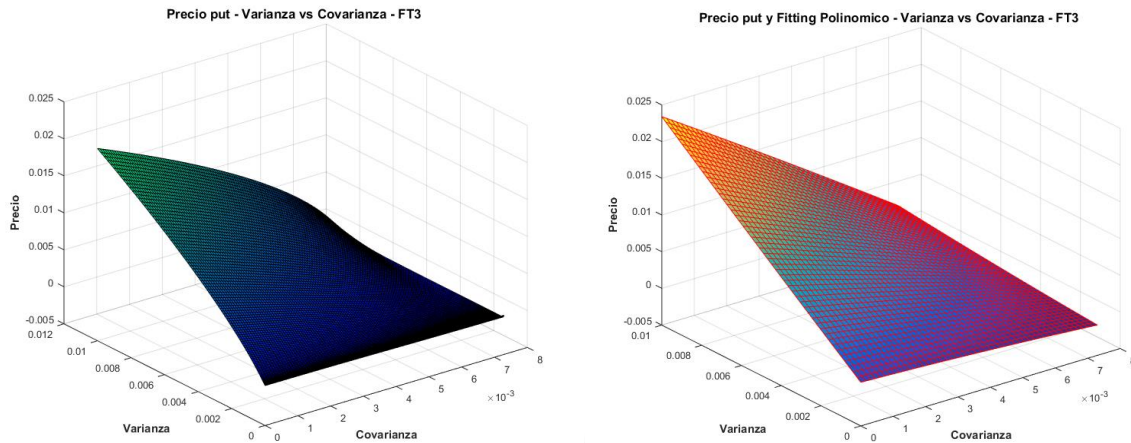
$$p11 = -329.8 (-333, -326.7)$$

$$p02 = 6.28 (4.677, 7.883)$$

Goodness of fit:

SSE: 0.004031, R-square: 0.9895, Adjusted R-square: 0.9895, RMSE: 0.0006351

Figura I.3: Fitting FT3



Linear model Poly22:

$$f(x,y) = p_{00} + p_{10} * x + p_{01} * y + p_{20} * x^2 + p_{11} * x * y + p_{02} * y^2$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$p_{00} = 0.0009358 \quad (0.000903, 0.0009687)$$

$$p_{10} = -0.1598 \quad (-0.1763, -0.1433)$$

$$p_{01} = 2.19 \quad (2.179, 2.201)$$

$$p_{20} = -12.09 \quad (-14.2, -9.984)$$

$$p_{11} = -273.3 \quad (-274.7, -272)$$

$$p_{02} = 5.717 \quad (4.621, 6.813)$$

Goodness of fit:

SSE: 0.001883, R-square: 0.992, Adjusted R-square: 0.992, RMSE: 0.0004341

Aproximación polinomial

$$C(Var, Cov) = p_{00} + p_{10} * Cov + p_{01} * Var + p_{20} * Cov^2 + p_{11} * Cov * Var$$

Valores de Parámetros del Costo de la GRM

	p_{00}	p_{10}	p_{01}	p_{20}	p_{11}
FT1	0.00	-1.02	2.99	-192.60	-269.80
FT2	0.00	-0.26	2.59	-88.34	-329.80
FT3	0.00	-0.16	2.24	-12.09	-273.30

Apéndice J

Figura J.1: Frontera Eficiente FT1 - Media-Varianza Vs Media-Varianza-Covarianza en 2D

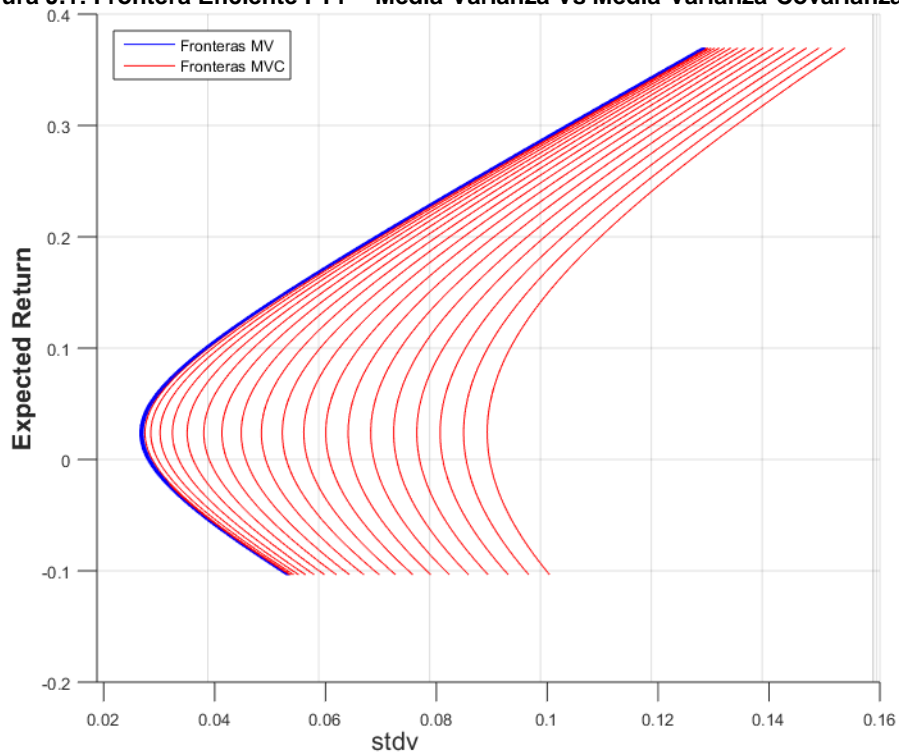


Figura J.2: Frontera Eficiente FT1 - Media-Varianza Vs Media-Varianza-Covarianza en 3D

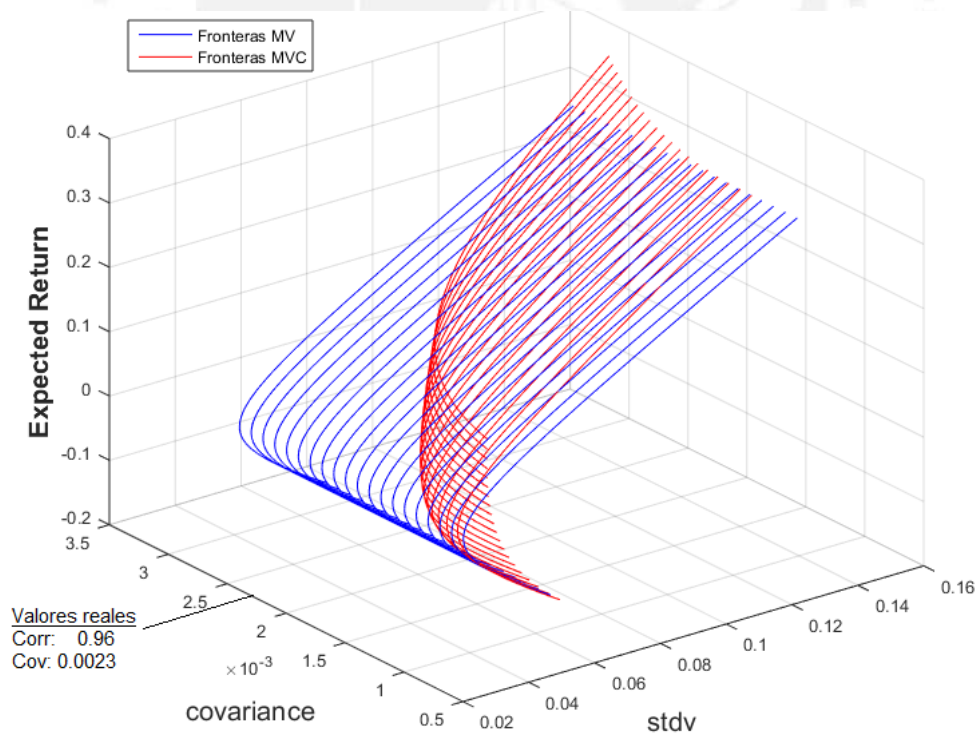


Figura J.3: Frontera Eficiente FT2 - Media-Varianza Vs Media-Varianza-Covarianza en 2D

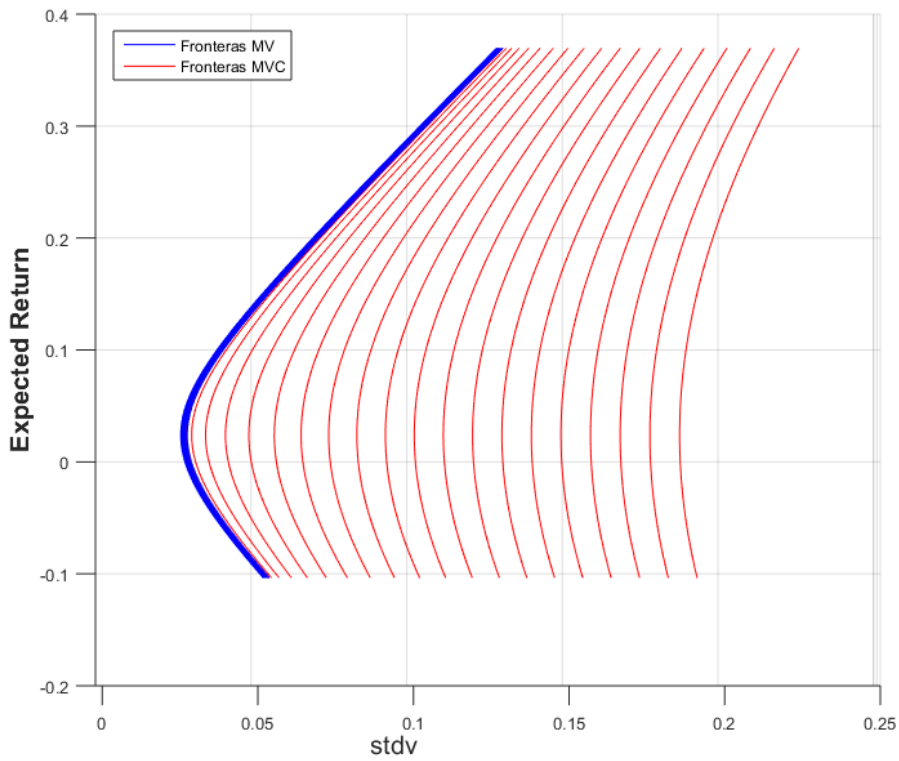


Figura J.4: Frontera Eficiente FT2 - Media-Varianza Vs Media-Varianza-Covarianza en 3D

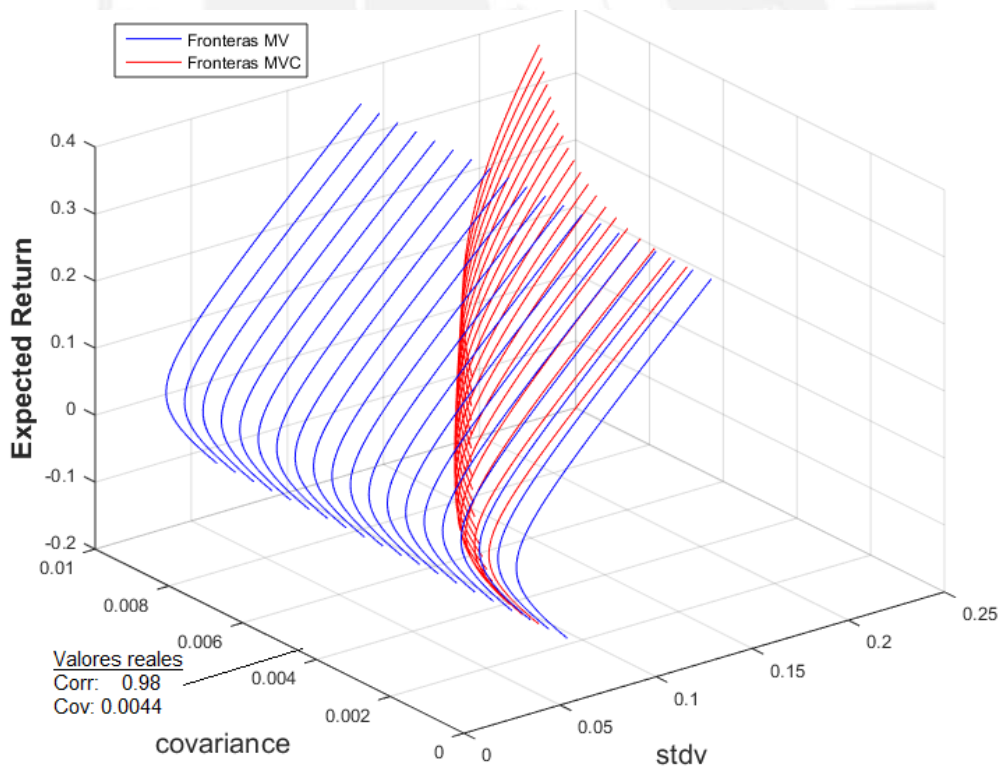


Figura J.5: Frontera Eficiente FT3 - Media-Varianza Vs Media-Varianza-Covarianza en 2D

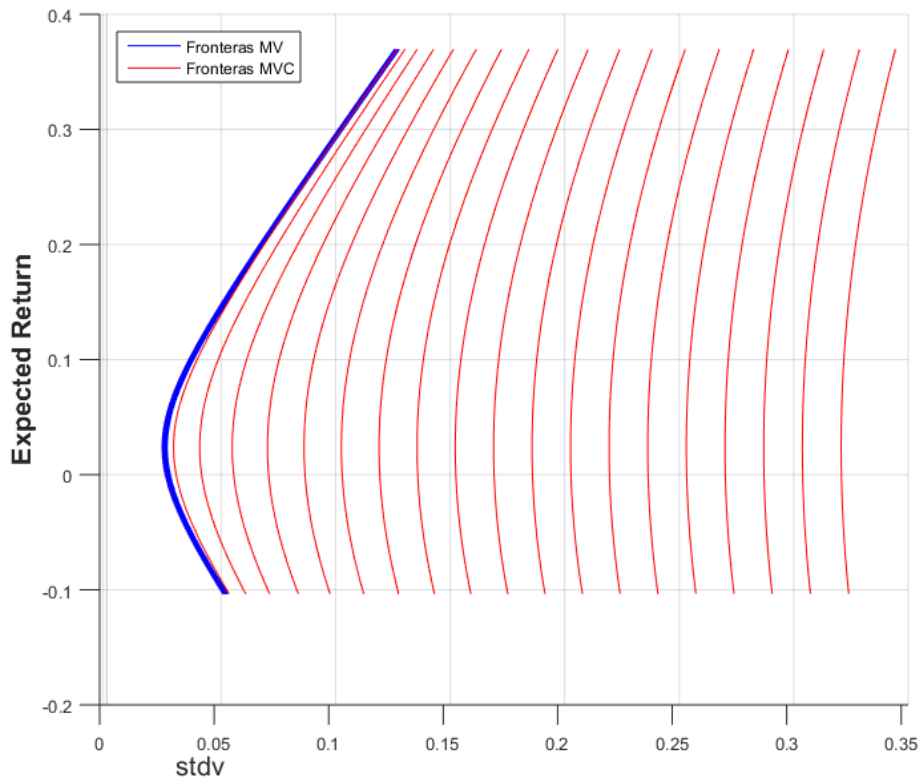


Figura J.6: Frontera Eficiente FT3 - Media-Varianza Vs Media-Varianza-Covarianza en 3D

