

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DEL PERÚ**

**Escuela de Posgrado**



Uniformización de subconjuntos hiperbólicos del plano

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Matemáticas  
que presenta:

José Luis Enrique Castillo Ayaque

**Asesor:**

Alfredo Bernardo Poirier Schmitz

Lima, 2024

## Informe de Similitud

Yo, Alfredo POIRIER Schmitz, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor del trabajo de tesis titulado

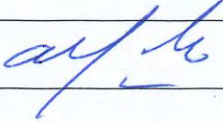
### UNIFORMIZACION DE SUBCONJUNTOS HIPERBOLICOS DEL PLANO

del autor Jose Luis Enrique CASTILLO Ayaque

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 6%, con ninguna referencia individual que supere el 1%, excepto por la carátula. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 18/04/2024.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 18 de abril del 2024

Apellidos y nombres del asesor: POIRIER SCHMITZ, Alfredo Bernardo	
DNI: 10803756	Firma 
ORCID: 0000-0003-2789-3630	

# Resumen

UNIFORMIZACIÓN DE SUBCONJUNTOS HIPERBÓLICOS DEL PLANO

José Luis Enrique Castillo Ayaque

Asesor: Alfredo Poirier Schmitz

Título obtenido: Maestro en Matemáticas

---

En el presente trabajo se estudia la construcción de los recubrimientos universales de subconjuntos hiperbólicos del plano (es decir, de subconjuntos abiertos y conexos que omiten al menos tres puntos de la esfera de Riemann).

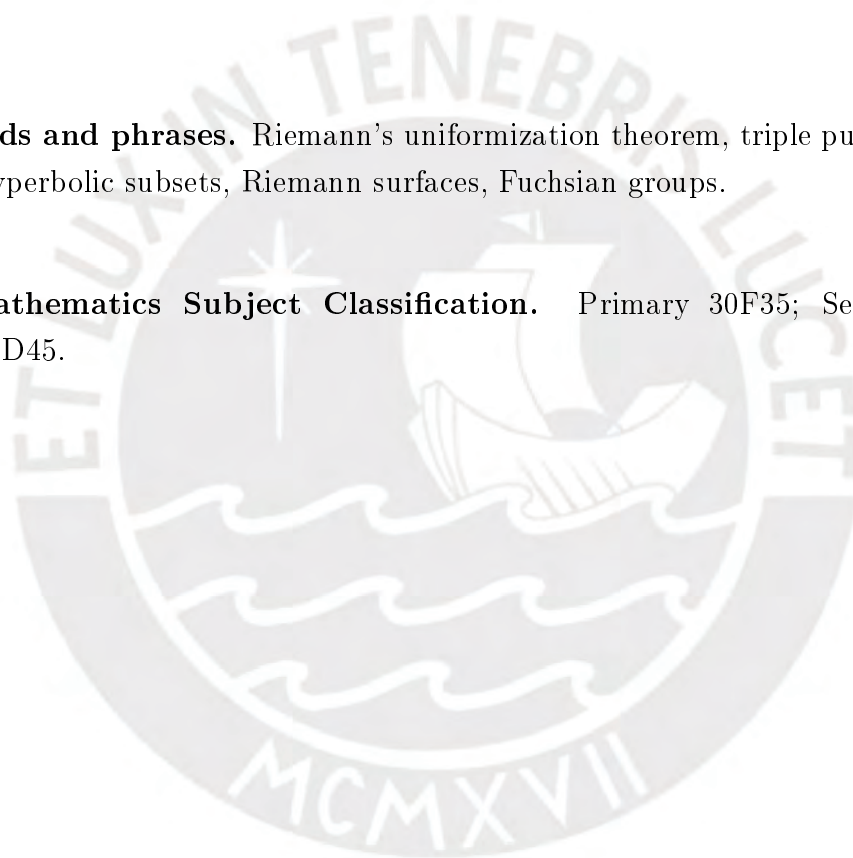
**Palabras clave:** Teorema de uniformización de Riemann, esfera triplemente agujereada, conjuntos hiperbólicos, superficie de Riemann, grupos fuchsianos.

# Abstract

In this thesis we study the universal covering spaces of hyperbolic subsets of the plane.

**Key words and phrases.** Riemann's uniformization theorem, triple punctured sphere, hyperbolic subsets, Riemann surfaces, Fuchsian groups.

**2020 Mathematics Subject Classification.** Primary 30F35; Secondary 30C25, 30D45.





Dedicado a mi madre, Clemencia  
y mi padre, Manuel. Ma — pá.

# Agradecimiento

Agradezco infinitamente a mis padres, Clemencia Ayaque Quio y Manuel Elias Castillo Castro, por ser los cimientos de todo lo que lograré.

A mis hermanos Manuel, Raúl, Jesús y Milagros, por su apoyo.

A mi asesor, el Dr. Alfredo Poirier, por sus grandes enseñanzas, sus muestras de dedicación a la Matemática y ser guía de este trabajo.

A los profesores Carlos Chirre y Rudy Rosas por sus sugerencias y recomendaciones para este trabajo; también a los profesores de la maestría que compartieron gratamente sus enseñanzas.

A Mayra, quién dentro de todas las personas que quiero y estimo, fue la del puntapié final para iniciar la maestría.

A mis familiares de Piura y Arequipa, por el apoyo en los dos últimos ciclos. En especial a mi tío Martín Castillo y mi prima Yzamar Ayaque.

A todos los compañeros del posgrado y de trabajo, por la fraternidad dentro y fuera de las aulas.

Por último, a Panzas y Bobi, piezas fundamentales en las largas noches de estudio.

# Índice general

Introducción	8
1 Cuestiones básicas del análisis complejo	1
2 Teoría de recubrimientos	5
3 Reflexión de Schwarz vía conjugación	14
4 Funciones armónicas en el plano	18
5 Reflexión a través de arcos analíticos	27
6 Teorema de Montel para familias equiacotadas	33
7 Subconjuntos simplemente conexos del disco	36
8 Uniformización de subconjuntos conexos del disco	39
9 El grupo fuchsiano generado por $z \mapsto z + 4$ y $z \mapsto \frac{2z-1}{z}$	41
10 Un preámbulo a la uniformización	47
11 La función a reflejar	48
12 Identificación de $\mathbb{H}/\Gamma$ con la esfera triplemente agujereada	53
13 Uniformización de subconjuntos hiperbólicos	56
Bibliografía	58

# Introducción

Un subconjunto hiperbólico del plano es un subconjunto abierto y conexo que omite al menos dos puntos del plano (o tres de la esfera de Riemann).

El objetivo de esta tesis es probar que tales regiones admiten como recubrimiento universal el disco unitario o, lo que es lo mismo, el semiplano superior, llamado también plano hiperbólico. Como veremos en su momento, el caso delicado es cuando la región de interés es la esfera triplemente agujereada (es decir, el plano complejo con dos puntos menos). Una vez logrado esto resulta relativamente sencillo uniformizar todos los subconjuntos hiperbólicos.

La idea general de nuestro método es extender una función que tenga como dominio un subconjunto del plano hiperbólico y como rango un subconjunto de la esfera triplemente agujereada. El modo es a través de la reflexión de ciertas regiones a lo largo de sus fronteras. Pavimentar el plano hiperbólico nos lleva a pensar en algún polígono, por ende a recurrir a la teoría de grupos fuchsianos; obtener por reflexiones la esfera triplemente agujereada resulta algo más simple como veremos.

El desarrollo de este trabajo se divide en cinco partes.

La primera parte concierne a los tres primeros capítulos y es de índole introductoria. Establecemos notación, y enunciamos lemas y teoremas clásicos del análisis complejo; vemos lo necesario de la teoría de recubrimientos y modos de extender una función analítica. Lo más destacado del primer capítulo es el lema de Schwarz; asimismo veremos una aplicación útil de éste e introduciremos de contrabando algo de reflexiones mediante conjugación. En el segundo capítulo explicamos un poco de la teoría de recubrimientos prestando énfasis en mostrar que en nuestro contexto analítico los recubrimientos universales siempre existen. En el tercer capítulo mostramos un tipo de extensión analítica vía reflexión, al cual más adelante manipularemos y debilitaremos lo necesario para nuestros fines.

La segunda parte encapsula los siguientes dos capítulos. Relajaremos el tipo



de extensión analítica previamente visto para establecer el principio de reflexión de Schwarz, luego adaptaremos esta herramienta al contexto más general posible, a los arcos analíticos. En el capítulo 4 hacemos uso de las funciones armónicas y una propiedad que las caracteriza, la propiedad del valor medio, para lograr la extensión de una función sin tener que depender tanto de la definición en su frontera (real), sino más bien de hacia donde tiende tal función cuando la parte imaginaria de los puntos que se evalúan tiende a 0; ello establece el principio de reflexión de Schwarz. En el capítulo 5 introducimos los arcos analíticos y las reflexiones a través de ellos. Presentamos algunos ejemplos que a la larga serán utilizados de manera práctica. Llevamos el principio de reflexión de Schwarz al contexto de los arcos analíticos.

La tercera parte consta de los capítulos 6, 7 y 8 que tratan sobre familias normales y la uniformización de subconjuntos del disco unitario. En el capítulo 6 presentamos el teorema de Montel en su versión más simple, para funciones equiacotadas, y otros resultados de convergencia de sucesiones de funciones. En los siguientes capítulos uniformizamos subconjuntos del disco. En el capítulo 7 los simplemente conexos abiertos y en el siguiente, los conexos abiertos arbitrarios. Al final de esta parte mostramos una pincelada de lo que será la uniformización de los subconjuntos hiperbólicos en general.

La cuarta parte es preparatoria y consta exclusivamente del capítulo 9. Acá motivados por un cuadrilátero hiperbólico, introducimos un grupo fuchsiano de fundamental importancia. Como para todo grupo fuchsiano, acá la acción del grupo permite rellenar el plano hiperbólico con réplicas del polígono aludido arriba, dando lugar a un espacio de órbitas (de manera natural una superficie de Riemann) que admite como recubrimiento universal al plano hipérbolico.

Como explicamos en el capítulo 10, el resto del trabajo se limita a mostrar que la superficie de Riemann introducida en la cuarta parte es equivalente a la esfera triplemente agujereada, y a extraer consecuencias de este hecho. En el capítulo 11 construimos una aplicación que habremos de extender a través de reflexiones. En el capítulo 12 mostramos cómo identificar el espacio de órbitas introducido en el capítulo 9. En el capítulo 13 hacemos uso de técnicas estandar de levantamientos y recubrimientos para obtener el recubrimiento universal de los subconjuntos hiperbólicos.

José Luis Enrique Castillo Ayaque  
Lima, Perú 2024

# Capítulo 1

## Cuestiones básicas del análisis complejo

Nosotros usaremos  $\mathbb{C}$  para referirnos al plano complejo. Para su compactificación, llamada también **esfera de Riemann**, utilizaremos  $\hat{\mathbb{C}}$ . Otros subconjuntos de uso recurrente serán

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

el **disco unitario**, y

$$\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \text{im } w > 0\},$$

el **plano (o semiplano) hiperbólico**.

**Nota 1.1.** A través de la función racional

$$z = \Phi(w) = \frac{w - i}{w + i},$$

con inversa

$$w = \psi(z) = i \frac{1 + z}{1 - z}$$

se tiene un isomorfismo analítico entre  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{D}$ . Esto es un ejemplo de lo que en su momento será llamado una equivalencia.

En general cuando se presente una función analítica  $f : U \rightarrow V$ , se sobreentenderá que  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos.

A continuación unos resultados sueltos que justifican ciertos argumentos del capítulo.

**Teorema 1.2.** *Si  $f : U \rightarrow V$  es una función analítica inyectiva, entonces se cumple  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in U$ . Además, si  $f$  es también sobreyectiva, su inversa es también analítica, por lo tanto tenemos un isomorfismo analítico.*

*Demostración.* Ver [1, teorema 6.4, página 82]. □

**Teorema 1.3.** *Sea  $U$  un conjunto abierto y conexo.*

(i) *Si  $f$  es analítica en  $U$  y no constante, entonces el conjunto de ceros de  $f$  en  $U$  es discreto.*

(ii) *Sean  $f, g$  analíticas en  $U$  y sea  $X$  un subconjunto de  $U$  que acepta punto de acumulación interno. Entonces  $f(z) = g(z)$  para todo  $z \in X$  implica  $f = g$  en  $U$ .*

*Demostración.* Ver [1, teorema 1.2, página 90]. □

Los isomorfismos analíticos entre un mismo espacio son llamados **automorfismos**. Veamos cómo lucen ellos en nuestros conjuntos de uso corriente.

**Teorema 1.4.** *Los automorfismos de  $\hat{\mathbb{C}}$  son las transformaciones de Möbius*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

*Demostración.* Ver [4, teorema 1, página 26]. □

Si la transformación de Möbius se restringe en dominio y rango al plano complejo hay que descartar los automorfismos con denominador  $cz + d$ , donde  $c \neq 0$ . Solo quedan del lote los polinomios lineales, y uno podría preguntarse si hay otro tipo de automorfismos del plano; la respuesta es negativa.

**Teorema 1.5.** *Los automorfismos de  $\mathbb{C}$  son los polinomios lineales.*

*Demostración.* Ver [4, teorema 2, página 27]. □

Una simpática propiedad que gozan las transformaciones de Möbius, los automorfismos de la esfera de Riemann, es tener al menos un punto fijo (es conocido que solo la identidad admite tres o más). Sin embargo, las translaciones lineales, tipo  $T_h(z) = z + h$ , no tienen punto fijo si los vemos como automorfismos del plano, ello debido a que  $\infty$  fue removido del espacio.

Respecto al plano hiperbólico  $\mathbb{H}$ , las cuestiones sobre sus automorfismos y puntos fijos son más delicadas y a la vez más interesantes. Además, gracias al cambio de variables  $z = \Phi(w) = (w - i)/(w + i)$  cada automorfismo  $\gamma$  de  $\mathbb{H}$  se corresponde con uno de  $\mathbb{D}$  a través de la conjugación  $\varphi = \Phi \circ \gamma \circ \Phi^{-1}$ .

Para buscar los automorfismos de  $\mathbb{H}$  podríamos restringirnos a automorfismos de  $\hat{\mathbb{C}}$  que dejan invariante  $\mathbb{H}$ . Lo cual, por cuestiones de continuidad, lleva a buscar automorfismos de  $\hat{\mathbb{C}}$  con la recta real extendida invariante. Estas ideas están detrás del siguiente resultado.

**Teorema 1.6.** *Los automorfismos de  $\mathbb{H}$  son las transformaciones*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Ver [4, teorema 1, página 271]. □

Como las ideas geométricas de  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{D}$  van de ida y vuelta gracias a la equivalencia analítica existente, los comentarios sobre los puntos fijos de los automorfismos lo podemos hacer en uno o en otro; tomemos  $\mathbb{D}$ .

El resultado clave para entender el análisis complejo que se desarrolla en el disco unitario viene a continuación.

**Teorema 1.7** (Lema de Schwarz). *Para toda función analítica  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  sujeta a  $f(0) = 0$  se cumple lo siguiente.*

- (i) *Tenemos  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ .*
- (ii) *Si para algún  $z_0 \neq 0$  se cumple  $|f(z_0)| = |z_0|$ , entonces existe un número complejo  $\lambda$  de norma 1 con el cual se tiene*

$$f(z) = \lambda z.$$

*Demostración.* Ver [1, teorema 1.1, página 210] o [4, lema de Schwarz, página 264]. □

Aunque no podemos asegurar la existencia de puntos fijos internos, de haber uno en  $\mathbb{H}$ , sus automorfismos auguran una simetría respecto al eje real, la misma que llevada a  $\mathbb{D}$  permite enunciar un importante resultado.

**Teorema 1.8.** *Dos automorfismos de  $\mathbb{D}$  que coinciden en dos puntos son iguales. En consecuencia, todo automorfismo de  $\mathbb{D}$  con dos puntos fijos es la identidad.*

*Demostración.* Ver [4, teorema 1, página 277]. □

Es muy importante, si la ocasión lo amerita, interpretar los automorfismos como los únicos cambios de coordenadas intrínsecos permitidos.

La siguiente observación permite extrapolar estas ideas al caso cuando las bolas en el dominio y en el rango no son las mismas.

**Lema 1.9.** Sea  $f : B_r(0) \rightarrow B_s(0)$  analítica. Entonces  $f(0) = 0$  implica  $|f'(0)| \leq s/r$ .

*Demostración.* Como tenemos una función analítica que fija 0, consideremos el siguiente diagrama que incorpora el disco  $\mathbb{D}$  a la discusión:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{F} & \mathbb{D} \\ \downarrow z \mapsto rz & & \uparrow z \mapsto z/s \\ B_r(0) & \xrightarrow{f} & B_s(0). \end{array}$$

Al cumplirse  $F(0) = 0$ , podemos usar el lema de Schwarz (1.7) y obtener

$$|F'(0)| \leq 1.$$

Finalmente, mediante la regla de la cadena se logra  $F'(0) = rf'(0)/s$ , de donde el resultado se desprende automáticamente.  $\square$

**Lema 1.10.** Si  $f$  es holomorfa en una vecindad de  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces  $g$  definida mediante  $g(w) = \overline{f(\bar{w})}$  es holomorfa en una vecindad de  $\bar{z}_0$ . Las derivadas —de todos los órdenes— de  $f$  y  $g$  en  $z_0$  y  $\bar{z}_0$ , respectivamente, son conjugadas, es decir, se cumple

$$g^{(n)}(\bar{z}_0) = \overline{f^{(n)}(z_0)}$$

*Demostración.* Si la expansión local de  $f$  en una vecindad de  $z_0$  es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

entonces, cuando  $w$  está en una vecindad de  $\bar{z}_0$  podemos reemplazar  $z$  por  $\bar{w}$  en la fórmula desplegada para obtener

$$g(w) = \overline{f(\bar{w})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\bar{w} - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} (w - \bar{z}_0)^n.$$

El valor de las derivadas se lee de los correspondientes desarrollos.  $\square$

# Capítulo 2

## Teoría de recubrimientos

La teoría de recubrimientos es una herramienta que permite relacionar propiedades algebraicas y topológicas de un conjunto  $B$ , llamado *base*, con otro  $E$ , en principio más sencillo, el llamado *recubrimiento*. Para mayores detalles invitamos al lector interesado a revisar fuentes más detalladas como Lima [2], Munkres [3], Poirier [5] o Spanier [8].

Una de las grandes virtudes de las técnicas relacionadas con recubrimientos es que permite conciliar la noción de inversa local con la de global. *Grosso modo* esto funciona así. Consideremos una función continua  $\psi : E \rightarrow B$  cuya mayor utilidad sea que es posible cerca de cada  $y \in B$  conseguir localmente una inversa. Si bien esto suena muy familiar, esconde exigencias que pueden pasar desapercibidas. En primer lugar obsérvese que esta función debe ser sobreyectiva. Superada esta valla, para cada  $x \in E$  con  $\psi(x) = y$ , debemos ser capaces de encontrar vecindades  $U = U_x$  y  $V = V_y$ , de  $x$  e  $y$ , respectivamente, de modo que tal  $\psi : U \rightarrow V$  sea un homeomorfismo con inversa  $g = (\psi|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ , en la práctica conocida como una *rama* de  $\psi^{-1}$ . Un problema bastante recurrente en matemáticas a todo nivel es determinar si  $g$  puede extenderse más allá de  $V$ . Como se sabe (y explicaremos luego) este problema está íntimamente relacionado con el problema de *levantamiento de caminos*: dada una curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ , nos preguntamos qué podemos concluir si “subimos la mirada” hacia el recubrimiento y encontramos un camino  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow E$  que “proyete” sobre  $\alpha$ , en el sentido que cumpla  $\psi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ .

Pasemos entonces a definir formalmente los conceptos de interés, para eso consideremos dos espacios topológicos  $E$  y  $B$ . Una aplicación continua y sobreyectiva  $p : E \rightarrow B$  será una aplicación de **recubrimiento** (o simplemente

un *recubrimiento*) si para cada  $x \in B$  existe un abierto  $V \subset B$  tal que  $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  es una reunión de abiertos  $U_{\alpha}$  de  $E$  disjuntos dos a dos cada uno de los cuales es homeomorfo a  $V$  gracias a  $p$ . Cada  $V$  es llamado **vecindad distinguida respecto a la proyección  $p$** . El espacio  $E$  se llama **espacio de recubrimiento de  $B$**  y, para cada  $x \in B$  el conjunto  $p^{-1}(x)$  es la **fibra** sobre  $x$ . El conjunto  $B$  es la **base** del recubrimiento.

**Ejemplo 2.1.** La exponencial  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , definida por  $\exp(x) = e^{2\pi ix}$ , determina un recubrimiento. Debido a la periodicidad de  $\exp(\cdot)$ , la recta  $\mathbb{R}$  puede visualizarse como un resorte infinito que proyecta su sombra al círculo. Las vecindades distinguidas son pequeños arcos en torno a cada punto de la circunferencia. Ver figura 2.1.

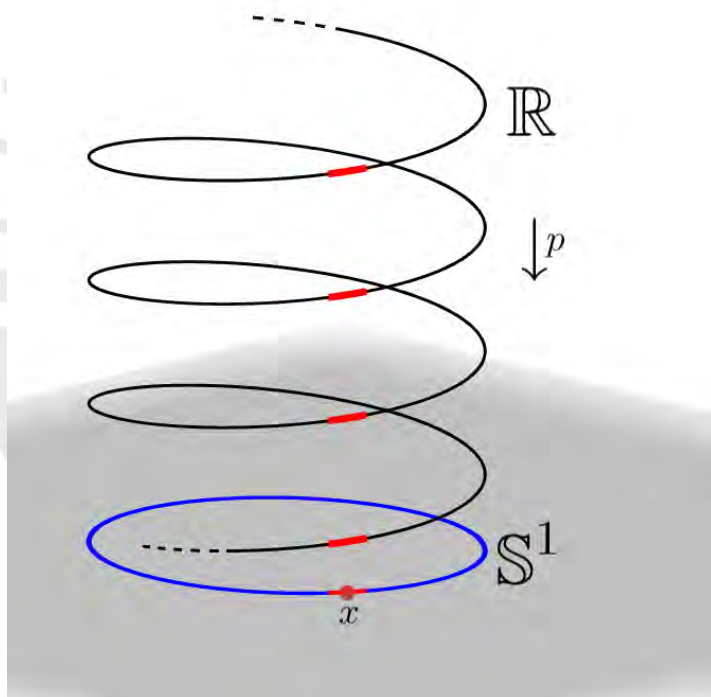


Figura 2.1: La recta como revestimiento del círculo.

**Ejemplo 2.2.** La exponencial compleja  $e^z$  determina un recubrimiento del plano complejo sobre el plano agujereado en el origen por base. Debido a la sobreyectividad y periodicidad, cada  $z \in \mathbb{C}^*$  tiene a todas sus preimágenes contenidas en una recta vertical de parte real constante. Además, como la exponencial transforma bandas verticales en anillos, podemos recortar la banda



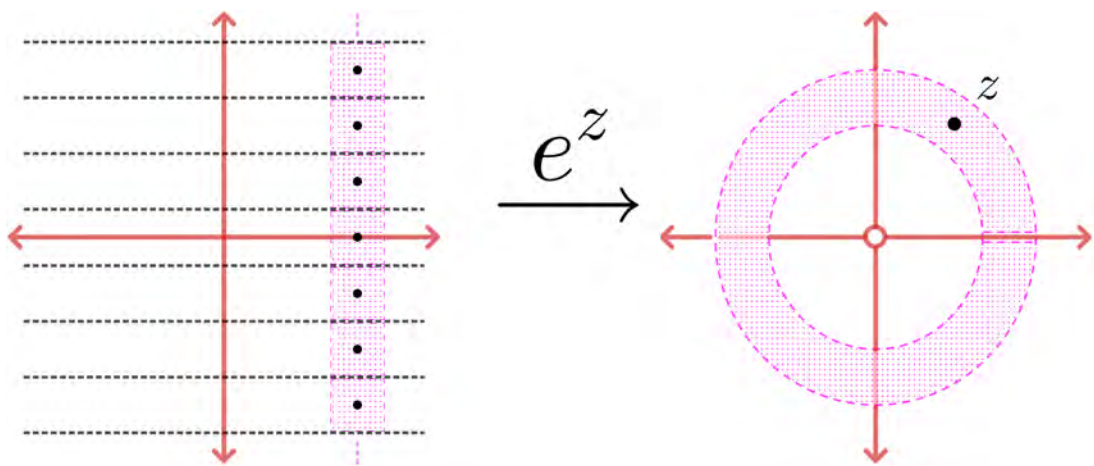


Figura 2.2:  $\mathbb{C}$  como revestimiento de  $\mathbb{C}^*$ .

en pequeños rectángulos abiertos que al aplicársele  $e^z$  se curvan y se cierran; ver por ejemplo la figura 2.2. El lector puede verificar que estos abiertos son las vecindades distinguidas.

**Ejemplo 2.3.** Un isomorfismo entre dos regiones (conjuntos abiertos y conexos) es un recubrimiento uno a uno. La vecindad distinguida de todo punto es la región completa. Por ejemplo, de manera trivial la identidad de cualquier región es un autorrecubrimiento.

El espacio recubridor y el recubierto pueden aparecer en distintos contextos con la proyección cambiada.

**Ejemplo 2.4.** Las asignaciones  $z \mapsto z^n$ , con  $n > 0$ , son autorrecubrimientos  $n$  a uno de  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ . Tratarlas como recubrimientos sirve a la postre para formalizar la noción de extracción de raíces  $n$ -ésimas. Ver [5, página 60].

Empecemos a justificar de a pocos el uso de la frase “permite ver de manera resumida las propiedades topológicas de la base en el recubrimiento”. Al respecto, enunciaremos algunas propiedades elementales.

**Lema 2.5.** *Todo recubrimiento es una función abierta.*

*Demostración.* Ver [3, página 382]. □

**Lema 2.6.** *Si la base  $B$  de un recubrimiento  $p: E \rightarrow B$  es conexa, entonces todas las fibras  $p^{-1}(x)$ , para  $x \in B$ , poseen el mismo cardinal, llamado el **número de hojas** del recubrimiento.*



*Demostración.* Ver [2, proposición 4.4, página 100].  $\square$

**Proposición 2.7.** *Sea  $E$  un espacio de Hausdorff,  $B$  conexo y  $f : E \rightarrow B$  un homeomorfismo local. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$f$  es sobreyectiva y propia (la preimagen de todo compacto no vacío es compacto).*
- *$f$  es una aplicación de recubrimiento y sus fibras  $f^{-1}(y)$  son conjuntos finitos.*

*Demostración.* Ver [2, proposición 4.5, página 101].  $\square$

**Ejemplo 2.8.** Convirtamos  $P(z) = 2z^3 - 6z$  en un recubrimiento, tres a uno por supuesto. Como los recubrimientos son localmente inyectivos, la derivada igualada a 0 nos dice que  $z = \pm 1$  no pueden participar en el dominio. Si los eliminamos, sus imágenes  $P(1) = -4$  y  $P(-1) = 4$  se quedan con menos preimágenes que sus congéneres, lo cual no es posible en un recubrimiento (ver lema 2.6). En consecuencia los borramos del mapa. Pero ahora las otras preimágenes de  $\pm 4$  no tienen a donde llegar, por lo que eliminamos también  $-2$  y  $2$  del dominio. Así

$$P : \mathbb{C} - \{\pm 1, \pm 2\} \rightarrow \mathbb{C} - \{\pm 4\}$$

es en efecto un recubrimiento tres a uno.

Esta técnica para construir recubrimientos con fibras finitas no se limita a polinomios. El siguiente es probablemente junto con el estudio del logaritmo y las raíces enésimas uno de los ejemplos más importantes de recubrimiento en el análisis complejo.

**Ejemplo 2.9.** Sea  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función racional de grado  $d \geq 1$  y denotemos por  $V$  el conjunto de valores críticos de  $R$ . Entonces, si remedamos el ejemplo anterior, la restricción  $R : \mathbb{C} - R^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{C} - V$  es un recubrimiento con  $d$  hojas (u orden  $d$ ).

Para asignar una vecindad distinguida a  $w \in \mathbb{C} - V$ , notamos que cerca de cada punto en  $R^{-1}(w) = \{z_1, z_2, \dots, z_d\}$  la función es localmente inyectiva, (ya que son valores regulares no críticos). Por lo tanto, existe una vecindad  $U_i$  de cada  $z_i$  que resulta ser homeomorfa a su imagen vía  $R$ . Estas vecindades pueden reducirse y ser asumidas disjuntas e incluidas en  $\mathbb{C} - R^{-1}(V)$ . De este modo podemos tomar la componente conexa de  $\bigcap_{i=1}^d R(U_i)$  que contenga a  $w$  como vecindad distinguida, pues resulta ser homeomorfa en cada  $U_i$  a abiertos más pequeños.

## Levantamientos

Las bondades de esta teoría se hacen patentes cuando, además del recubrimiento, la base hace de conjunto de llegada de una función  $f : X \rightarrow B$ . Ello abre las puertas a que exista (o no) un diagrama conmutativo entre los conjuntos involucrados como se muestra a continuación

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

La existencia (o no) de la función  $\tilde{f}$ , llamada *levantamiento*, así como su continuidad dependen de la función  $f$  y de las propiedades topológicas de  $p : E \rightarrow B$  y de  $X$ .

Por fortuna, los conjuntos que vamos a utilizar gozan de buenas propiedades, por ejemplo, ser de Hausdorff, conexos, simplemente conexos, conexos por caminos, etcétera. De igual manera, las funciones que nos interesan serán diferenciables en el sentido complejo, por lo que *la existencia del levantamiento*, al menos de manera local, en muchos casos estará asegurada (por el teorema de la función inversa, por ejemplo). Debido a esto vamos a presentar el marco teórico necesario para asegurar existencia de levantamientos.

En la práctica, al no depender la cardinalidad de la fibra del punto  $x \in B$  escogido, de existir un levantamiento, aparecen otros en paralelo pues hay una pila de abiertos todos homeomorfos a la vecindad distinguida. Para evitar confundir un levantamiento con otro conviene fijar como referencia un punto de la base de la mano con una de sus preimágenes. Toda esta información puede ser recopilada en el diagrama de trabajo. Sea  $x_0 \in X$  con imagen  $f(x_0) = b_0$ . Por la sobreyectividad de  $p$  podemos escoger un  $e_0 \in E$  sujeto a  $p(e_0) = b_0$ ; así tenemos

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0), \end{array}$$

y el problema del levantamiento exige que se cumpla  $\tilde{f}(x_0) = e_0$  además. Esto garantiza la unicidad de un levantamiento continuo, más no su existencia.

**Proposición 2.10.** *Sean todos los espacios involucrados en el diagrama de*

levantamiento

$$\begin{array}{ccc}
 & & (E, e_0) \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (B, b_0),
 \end{array}$$

espacios de Hausdorff, con  $X$  además conexo. Si el problema de levantamiento admite solución, entonces esta es única.

*Demostración.* Ver [5, teorema 2.29, página 50].  $\square$

**Corolario 2.11.** Si dos levantamientos de una misma función continua coinciden en un punto, entonces son idénticos.  $\square$

No obstante, cuando  $X$  es simplemente conexo, la existencia del levantamiento también queda garantizada.

**Proposición 2.12.** Sea  $B$  conexo por caminos y  $X$  simplemente conexo y localmente conexo por caminos. Entonces toda aplicación continua  $f : (X, x_0) \rightarrow (B, b_0)$  admite un levantamiento continuo  $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (E, e_0)$ , con  $e_0 \in p(b_0)$  escogido libremente.

*Demostración.* Ver [2, corolario 5.4.1, página 128] o [3, lema 79.1, página 540].  $\square$

Asegurada la existencia, de estar involucrada la categoría analítica se obtiene un extra.

**Teorema 2.13.** Sea  $M \subset \mathbb{C}$  abierto, conexo y simplemente conexo y  $f : (M, m_0) \rightarrow (B, b_0)$  y  $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  funciones analíticas, con  $p$  recubrimiento. Entonces el problema de levantamiento con  $\tilde{f}(m_0) = e_0$  siempre acepta solución. Esta solución no solo es única, sino también es analítica. Lo mismo vale en la categoría diferenciable.

*Demostración.* Ver [5, teorema 2.32, página 50].  $\square$

**Ejemplo 2.14.** Regresemos al estudio de la exponencial compleja  $e^z$ . Como bien sabemos, resulta peligroso hablar de un logaritmo en abstracto, por lo que ciertas precauciones deben ser tomadas. Por ejemplo, podemos suprimir del análisis preliminar la semirrecta  $\mathbb{R}_{\leq 0}$  y considerar la inclusión  $\text{inc} : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , junto a valores referenciales  $m_0 = b_0 = 1, e_0 = 0$  en el diagrama de levantamiento. Al ser la relación a cumplirse  $e^{\widetilde{\text{inc}}(z)} = \text{inc}(z) = z$ , este levantamiento no es otra

cosa que *la rama principal del logaritmo complejo*, una función con dominio los números complejos de argumento  $(-\pi, \pi)$  y rango la banda horizontal de parte imaginaria  $(-\pi, \pi)$ .

Si consideramos  $M = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $m_0 = b_0 = -1, e_0 = \pi i$ , el levantamiento obtenido es otra rama del logaritmo, pero ahora el dominio y rango tienen a  $(0, 2\pi)$  en su argumento y su parte imaginaria, respectivamente. Comparándola con el logaritmo complejo usual, en el dominio ambas coinciden en el semiplano superior por lo que resulta natural pegarlas a través de este semiplano; los semiplanos sobrantes (inferiores) de estas dos ramas pueden ser pegadas a otras ramas que vayamos adicionando, en este caso con argumentos  $(-2\pi, 0)$  y  $(\pi, 3\pi)$ . En el rango solo estamos solapando bandas horizontales.

Este procedimiento de ir pegando ramas con argumento  $(\pi k, \pi k + 2\pi)$ , para todo  $k$  entero, en los semiplanos que coincidan, permite construir una superficie conocida como *superficie de Riemann asociada al logaritmo*, que acá denotamos por  $S$ . Un punto en  $S$ , por construcción, puede verse como un par  $(z, \theta)$ , con  $\theta$  un argumento de  $z$ . Las ramas pegadas dan lugar así a una función bien definida  $\log_S : S \mapsto \mathbb{C}$  dada por  $(z, \theta) \mapsto \ln|z| + i\theta$ .

Asegurada la existencia de levantamientos, más aún, al haber estas heredado algunas de las propiedades de la función que se está levantando, nada impide que un recubrimiento  $\pi$  pueda ser levantado respecto a otro recubrimiento  $p$ . Estamos sugiriendo un diagrama de la forma

$$\begin{array}{ccc} (M, m_0) & \overset{\tilde{\pi}}{\dashrightarrow} & (E, e_0) \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & (B, b_0) & \end{array}$$

Como tales levantamientos resultan ser recubrimientos, surge la noción de una jerarquía entre ellos.

**Proposición 2.15.** *Sean  $p : E \rightarrow B$  y  $\pi : M \rightarrow B$  recubrimientos entre espacios conexos por caminos. Si  $\pi$  acepta un levantamiento  $\tilde{\pi} : M \rightarrow E$ , entonces este necesariamente es un recubrimiento; en particular  $\tilde{\pi}$  es sobreyectiva.*

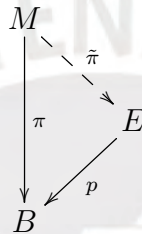
*Demostración.* Ver [2, proposición 5.7, página 133] o [5, teorema 2.34, página 51].  $\square$

Sean  $M$  y  $B$  conjuntos conexos. Un recubrimiento  $\pi : M \rightarrow B$  (que puede ser una función analítica o diferenciable) es **recubrimiento universal de  $B$**  si el espacio  $M$  es simplemente conexo.

**Ejemplo 2.16.** Debido a los dos primeros ejemplos, la recta real, al ser simplemente conexa y recubrimiento de  $S^1$ , resulta ser su recubrimiento universal. De manera análoga,  $\mathbb{C}$  resulta ser recubrimiento universal del plano agujereado  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ .

La afirmación de que existe un recubrimiento de mayor jerarquía, el universal, así como su *unicidad y existencia* son dejados en limpio a continuación.

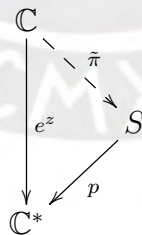
**Teorema 2.17.** Sea  $\pi : M \rightarrow B$  recubrimiento universal (es decir, con  $M$  simplemente conexo). Para todo recubrimiento  $p : E \rightarrow B$ , con  $E$  conexo, existe un recubrimiento  $\tilde{\pi} : M \rightarrow E$  tal que  $p \circ \tilde{\pi} = \pi$ . Gráficamente tenemos el esquema



*Demostración.* Ver [2, corolario 5.8.1, página 134], [5, teorema 2.37, página 52] o [3, teorema 80.3, página 548].  $\square$

**Ejemplo 2.18.** La superficie  $S$  del ejemplo 2.14 tiene una aplicación proyección hacia  $\mathbb{C}^*$  dada por  $(z, \theta) \mapsto z$ ; el lector puede comprobar que esto es un recubrimiento.

Conocemos dos recubrimientos de  $\mathbb{C}^*$ , uno comprobadamente universal, por lo que podemos jerarquizarlos. Además, por el resultado anterior, podemos garantizar un recubrimiento de  $S$  por parte de  $\mathbb{C}$ :



En ruta hemos omitido dos hechos de fácil comprobación. Primero, la superficie  $S$  es simplemente conexa. Segundo, que  $\mathbb{C}$  y  $S$  son *biholomorfos*, esto último también puede verse como consecuencia de lo primero y del siguiente corolario.

**Corolario 2.19.** Dos recubrimientos simplemente conexos de un espacio localmente conexo por caminos son isomorfos.

*Demostración.* Ver [2, corolario 5.8.2, página 135].  $\square$

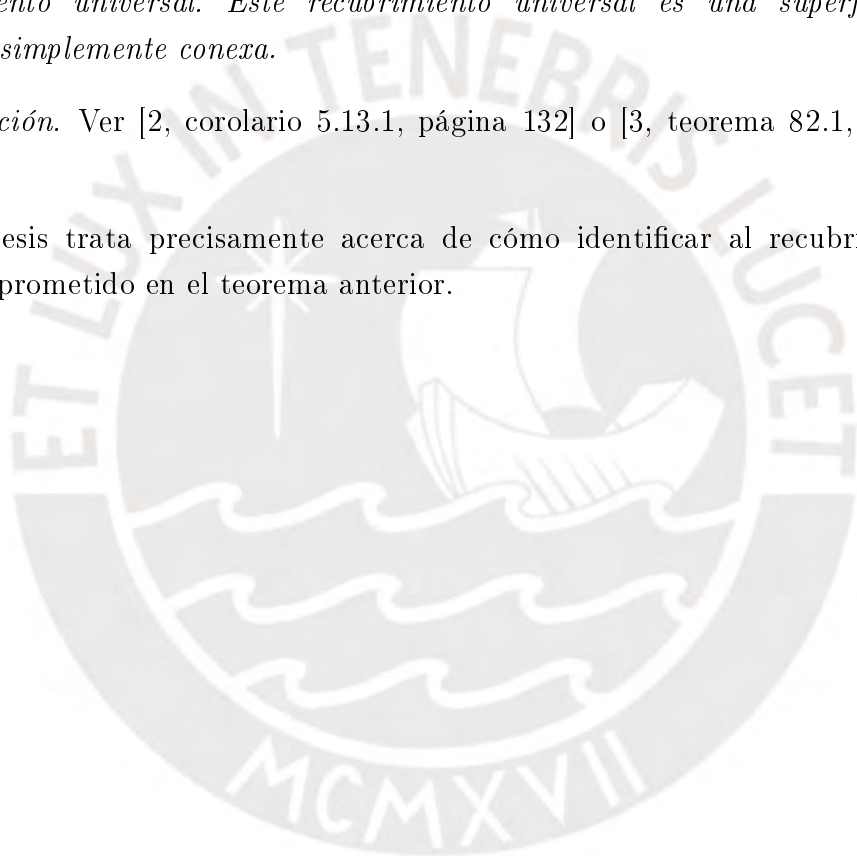
Debido a este hecho, la esfera de Riemann, el plano complejo, el disco unitario, entre otros, no admiten recubrimientos que no sean equivalentes a ellos mismos (y esto a través de una equivalencia analítica). Un ejemplo clásico es el isomorfismo ya hecho explícito entre  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{H}$ .

Cerramos este capítulo enunciando la existencia del recubrimiento universal en el contexto de nuestro estudio.

**Teorema 2.20.** *Todo subconjunto abierto y conexo del plano complejo admite recubrimiento universal. Este recubrimiento universal es una superficie de Riemann simplemente conexa.*

*Demostración.* Ver [2, corolario 5.13.1, página 132] o [3, teorema 82.1, página 559].  $\square$

Esta tesis trata precisamente acerca de cómo identificar al recubrimiento universal prometido en el teorema anterior.



## Capítulo 3

# Reflexión de Schwarz vía conjugación

Sea  $f : U \rightarrow V$  una función analítica. Presentamos un criterio bien conocido para poder extender  $f$  a una función analítica en un dominio más grande  $\tilde{U}$ , proceso llamado **extensión analítica**.

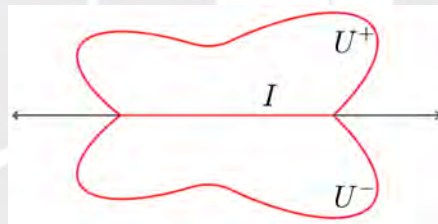


Figura 3.1: Un conjunto simétrico por reflexión.

Si los conjuntos involucrados son conexos y tienen en común un conjunto infinito con punto de acumulación en su intersección, entonces la extensión analítica de  $f$  a  $\tilde{U}$  está únicamente determinada.

De hecho, si existiese una  $g$  analítica en  $\tilde{U}$  sujeta a  $g = f$  en una vecindad que contiene el punto de acumulación, entonces  $g$  es la única extensión posible, ello por el teorema 1.3.

El caso particular que nos interesa mirar de cerca es el siguiente. Sea  $U^+ \subset \mathbb{H}$  un conjunto abierto y conexo tal que su frontera  $\partial U^+$  contiene un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Tomamos  $U^-$  como la reflexión de  $U^+$  a través del eje real, y definimos  $U = U^+ \cup I \cup U^-$ , un abierto conexo pero esta vez en el plano complejo. Ver figura 3.1.



Más adelante haremos un uso más general de las reflexiones, por el momento la reflexión vía conjugación (a lo largo de la recta real) nos basta.

**Lema 3.1.** Sean  $U^+, U^-, I, U$  como arriba.

(i) Si  $f$  es una función en  $U$  que es analítica en  $U^+$  y  $U^-$  y continua en  $I$ , entonces  $f$  es analítica en todo  $U$ .

(ii) Sea  $f$ , definida en  $U^+ \cup I$ , analítica en  $U^+$  y continua en  $I$ . Si  $f$  toma valores reales en  $I$ , entonces  $f$  admite extensión analítica  $F$  en  $U$ . En efecto  $F$  está dada por

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

*Demostración.* Para (i), notemos que apenas falta mostrar la analiticidad de  $f$  para puntos  $z_0 \in I$ . Tales valores caen dentro de un rectángulo como en la figura 3.2a. Estos rectángulos tienen frontera  $C = C^+ + C^-$ , orientados como se muestra a la izquierda.



Figura 3.2

Definamos

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

para  $z$  dentro de uno de los rectángulos, función analítica por construcción. Entonces para  $z$  fuera de  $I$  se tiene

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



Escribamos  $C_\epsilon^+$  para un rectángulo como en la figura 3.2b. Para  $z$  dentro de  $C_\epsilon^+$ , por la fórmula de Cauchy se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Un argumento simple de continuidad muestra que al tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para  $z$  dentro de  $C_\epsilon^+$ , y por lo tanto dentro de  $C^+$ . Por otro lado, un argumento similar combinado con el teorema de Cauchy conduce a

$$\int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

En resumidas cuentas, se logra  $g(z) = f(z)$  si  $z$  está en  $U^+$  cerca de  $I$ . Por continuidad, también se obtiene  $g(z) = f(z)$  si  $z$  está en  $I$ . Por simetría, los mismos argumentos muestran  $g(z) = f(z)$  si  $z$  está en  $U^-$  cerca de  $I$ . Dado que  $g$  es analítica y  $f$  es continua obtenemos  $g(z) = f(z)$  también en  $I$ , de aquí  $g$  sea la extensión analítica de  $f$  en  $U$ .

Para (ii), podemos reducir el enunciado a (i) al definir  $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . En este caso por hipótesis  $f$  es real en  $I$ , conque  $F$  así definido es continua en  $I$ , y ergo en todo  $U$ .  $\square$

En algunos casos la función resultante ha de ser un isomorfismo, aunque no lo parezca a simple vista. Denotemos el semiplano superior por  $\mathbb{H}^+$  y el semiplano inferior por  $\mathbb{H}^-$ .

**Proposición 3.2.** *Sea  $f$  una función analítica en  $U$ , con valores reales en  $I$ . Asumamos que  $f$  restrinja a un isomorfismo de  $U^+$  con  $f(U^+) \subset \mathbb{H}^+$  y a un isomorfismo de  $U^-$  con  $f(U^-) \subset \mathbb{H}^-$ . Entonces  $f$  es un isomorfismo de  $U$  con  $f(U)$ .*

*Demostración.* Realmente solo falta mostrar que  $f$  es inyectiva cuando se le restringe al segmento real.

Supongamos primero que  $f$  es un isomorfismo local cerca de cada punto de  $I$ . Si tuvieramos  $f(z_1) = f(z_2)$  con  $z_1 \neq z_2$  en  $I$ , usando inversas locales para  $w \in \mathbb{H}^+$  (suficientemente) cercano a  $f(z_1) = f(z_2)$  podríamos encontrar  $\hat{z}_1 \neq \hat{z}_2 \in U$  sujetos a  $f(\hat{z}_1) = f(\hat{z}_2) = w$ . Ver figura 3.3. Como por hipótesis se ha de tener

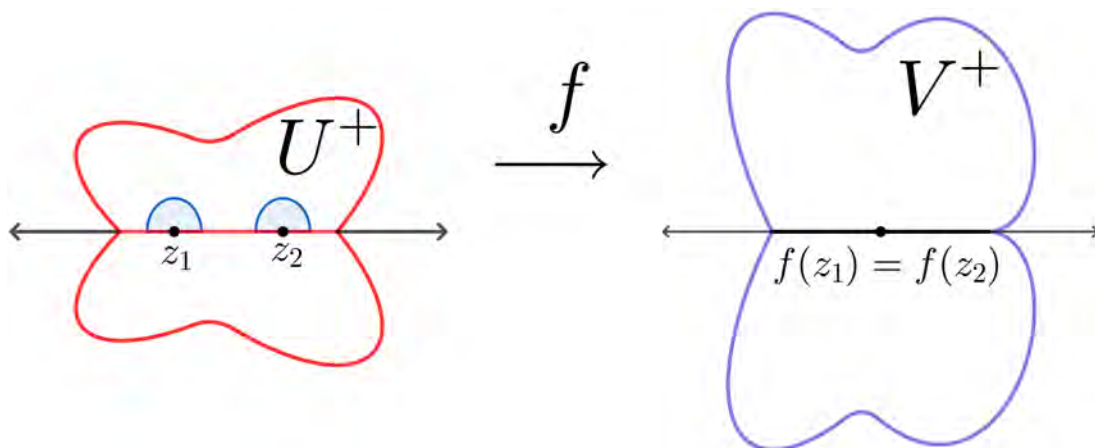


Figura 3.3

$\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in U^+$ , resulta entonces que  $f$  restringido a  $U^+$  no es un isomorfismo sobre su imagen. Concluimos que  $f$  es inyectiva.

Resta probar que  $f$  es un isomorfismo local en cada punto de  $I$ . Después de hacer traslaciones, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el punto de  $I$  en estudio es 0, además sujeto a  $f(0) = 0$ . Sea entonces

$$f(z) = cz^m + \text{términos superiores}, \quad \text{con } c \neq 0, m \geq 1$$

su expansión en serie de potencias. Al tenerse  $f(I) \subset \mathbb{R}$ , las derivadas de todos los órdenes son reales y se concluye que  $c$  es un número real. Más aún, debe ser positivo ya que si evaluamos valores  $z = re^{i\theta}$  con  $r > 0$  y  $\theta$  pequeños, un  $c < 0$  nos llevaría a  $\mathbb{H}^-$ , contradiciéndose con  $f(U^+) \subset \mathbb{H}^+$ . También podemos concluir que se tiene  $m = 1$ , pues de lo contrario al tomar  $re^{i\theta}$ , con  $0 < \pi/m < \theta < 2\pi/m \leq \pi$ , tendríamos  $\pi < \arg(f(z)) < 2\pi$ , nuevamente en conflicto con la hipótesis. Al tenerse entonces  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in I$  resulta  $f$  isomorfismo local en cada punto de  $I$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Funciones armónicas en el plano

Como siempre, sea  $U$  un subconjunto abierto y conexo del plano. Una función  $u$  de clase  $C^2(U; \mathbb{R})$  es llamada **armónica** si cumple

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

**Ejemplo 4.1.** Si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es holomorfa, entonces  $u, v$  son ambas de clase  $C^2(U; \mathbb{R})$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x.$$

Gracias a ello, si derivamos la primera igualdad respecto a  $x$  y la segunda respecto a  $y$ , logramos

$$u_{xx} = v_{yx} \qquad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Al sumar obtenemos

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

donde la última igualdad es consecuencia de que  $v$  es de clase  $C^2(U; \mathbb{R})$ . Es decir, la parte real de una función holomorfa es armónica. Como  $v$  es la parte real de  $-if$ , por lo mismo resulta también armónica.

Para nuestro desarrollo resulta crucial el hecho de que la composición de una función holomorfa con una armónica sea armónica.

**Teorema 4.2.** *Sea  $f : W \rightarrow V$  holomorfa. Si  $u \in C^2(V; \mathbb{R})$  es armónica, entonces  $u \circ f$  también lo es.*

*Demostración.* La demostración de este hecho, fácil de enunciar, resulta un poco laboriosa por los detalles técnicos. Es importante tener clara la notación.

Escribamos  $(x, y)$  para las coordenadas en  $W$ , mientras  $(t, w)$  lo serán en  $V$ . De esta manera

$$f(x, y) = t(x, y) + iw(x, y)$$

será holomorfa, mientras la armonicidad de  $u$  equivale a

$$u_{tt} + u_{ww} = 0.$$

Nuestra meta es probar que

$$U(x, y) = u(f(x, y)) = u(t(x, y), w(x, y))$$

es armónica con respecto a las coordenadas  $(x, y)$ .

Lo primero que notamos es que la representación matricial de la derivada real de  $f$  es

$$Df = \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix},$$

donde ha de cumplirse  $t_x = w_y$  y  $t_y = -w_x$  por las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

De este modo tendremos por la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} U_x & U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t & u_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}.$$

Con esto es posible desplegar

$$U_x = u_t t_x + u_w w_x$$

$$U_y = u_t t_y + u_w w_y.$$

Tomamos las derivadas parciales de interés y logramos

$$U_{xx} = u_{tx} t_x + u_t t_{xx} + u_{wx} w_x + u_w w_{xx}$$

$$U_{yy} = u_{ty} t_y + u_t t_{yy} + u_{wy} w_y + u_w w_{yy}.$$

Si sumamos y aprovechamos que  $t(x, y)$  y  $w(x, y)$  son armónicas nos quedamos con

$$U_{xx} + U_{yy} = u_{tx} t_x + u_{ty} t_y + u_{wx} w_x + u_{wy} w_y.$$

Para el cálculo de las segundas derivadas involucradas arriba haremos uso del siguiente arreglo matricial, que es el resultado de tomar las derivadas parciales de  $u_t$  y  $u_w$  respecto a  $x$  e  $y$  haciendo uso de la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} u_{tx} & u_{ty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{tt} & u_{tw} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{wx} & u_{wy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{wt} & u_{ww} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix};$$

específicamente de

$$\begin{aligned} u_{tx}t_x &= u_{tt}t_x^2 + u_{tw}t_xw_x \\ u_{ty}t_y &= u_{tt}t_y^2 + u_{tw}t_yw_y \\ u_{wx}w_x &= u_{wt}t_xw_x + u_{ww}w_x^2 \\ u_{wy}w_y &= u_{wt}t_yw_y + u_{ww}w_y^2. \end{aligned}$$

Puesto que, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se cumple  $t_x^2 + t_y^2 = w_x^2 + w_y^2$ , al momento de sumar obtenemos

$$(t_x^2 + t_y^2)(u_{tt} + u_{ww}) + 2(t_xw_x + t_yw_y)u_{tw}.$$

El primer sumando desaparece debido a que  $u$  es armónica, el segundo al tenerse  $t_xw_x + t_yw_y = t_xw_x + (-w_x)t_x = 0$ .

Esto prueba que se cumple  $U_{xx} + U_{yy} = 0$  y por tanto que  $U = u \circ f$  es armónica.  $\square$

Una de las virtudes de las funciones armónicas es que satisfacen la **propiedad del valor medio**.

**Teorema 4.3.** *Sea  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica. Entonces para cada bola  $B(z_0, r)$  con clausura en  $U$  se cumple*

$$u(z_0) = \int_0^1 u(z_0 + re^{2\pi i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} u(z) \frac{dz}{z};$$

acá la frontera  $\partial B$  es tomada contra el reloj. En otras palabras  $u(z_0)$  es el promedio de los valores que asume  $u$  en la frontera de dicho disco.

*Demostración.* Ver [1, teorema 3.3, página 261].  $\square$

Lo curioso es que el resultado anterior tiene una recíproca que resulta un criterio extremadamente útil para determinar si una función continua es armónica.

**Teorema 4.4.** *Sea  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si para cada  $z_0 \in U$  existe  $R_0$  de modo que se tiene*

$$u(z_0) = \int_0^1 u(z_0 + re^{2\pi i\theta}) d\theta$$

para todo  $r < R_0$ , entonces  $u$  es armónica en  $U$ . En particular, obsérvese que  $u$  resulta ser de clase  $C^2$ .

*Demostración.* Ver [6, teorema 11.16, página 230] o [1, teorema 5.5, página 282].  $\square$

Si  $u$  es una función armónica en una vecindad de la clausura del disco unitario  $\mathbb{D}$ , por la propiedad de valor medio tendremos

$$u(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} u(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Por su parte, dado  $z_0 \in \mathbb{D}$  la transformación de Möbius (en efecto un automorfismo del disco)

$$\varphi(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$$

lleva una vecindad de  $\bar{\mathbb{D}}$  en cierta (otra) vecindad de  $\bar{\mathbb{D}}$ . De esta manera, de acuerdo con el teorema 4.2 se tiene que  $h = u \circ \varphi$  también es armónica. Por la propiedad del valor medio tendremos de esta manera

$$u(z_0) = h(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} h(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Al reemplazar  $h(\lambda)$  por  $u(\varphi(\lambda))$  obtenemos entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} u\left(\frac{\lambda + z_0}{1 + \lambda \bar{z}_0}\right) \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^1 u\left(\frac{e^{2\pi i\theta} + z_0}{1 + e^{2\pi i\theta} \bar{z}_0}\right) d\theta,$$

es decir,  $u(z_0)$  también resulta un promedio —ponderado esta vez— de valores frontera. (Como  $\varphi$  es un automorfismo del disco unitario, obsérvese que  $|\lambda| = 1$  implica  $\left|\frac{\lambda + z_0}{1 + \lambda \bar{z}_0}\right| = 1$ .)

Si bien esto es interesante, más lo es si hacemos que la variable de integración se mueva al compás del parámetro. Ponemos entonces  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$  y  $\eta = e^{2\pi it}$ , lo que nos lleva a

$$d\lambda = 2\pi i e^{2\pi i\theta} d\theta, \quad d\eta = 2\pi i e^{2\pi it} dt$$

o, alternativamente, a

$$d\theta = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad dt = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Para continuar ponemos

$$\eta = \frac{\lambda + z_0}{1 + \lambda \bar{z}_0} = \varphi(\lambda).$$

y despejamos

$$\lambda = \varphi^{-1}(\eta) = \frac{\eta - z_0}{1 - \eta\bar{z}_0}.$$

Al tomar diferenciales obtenemos

$$d\lambda = \frac{1 - \eta\bar{z}_0 - (\eta - z_0)(-\bar{z}_0)}{(1 - \eta\bar{z}_0)^2} d\eta = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \eta\bar{z}_0)^2} d\eta.$$

Esto nos conduce a

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \eta\bar{z}_0)^2} \frac{\eta}{\lambda} \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1 - |z_0|^2}{1 - \eta\bar{z}_0} \frac{\eta}{\eta - z_0} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Acá el detalle que no debe pasar desapercibido es que se tiene  $|\eta| = 1$  en la zona de integración, lo que permite deducir la igualdad

$$\frac{\eta}{\eta - z_0} = \frac{1}{1 - \bar{\eta}z_0},$$

de donde pasamos de inmediato a

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \eta\bar{z}_0|^2} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Esta expresión puede ser simplificada vía

$$\begin{aligned} \operatorname{re} \left( \frac{\eta + z_0}{\eta - z_0} \right) &= \operatorname{re} \left( \frac{\eta + z_0}{\eta - z_0} \cdot \frac{\bar{\eta} - \bar{z}_0}{\bar{\eta} - \bar{z}_0} \right) \\ &= \operatorname{re} \left( \frac{1 - \eta\bar{z}_0 + \bar{\eta}z_0 - |z_0|^2}{|\bar{\eta} - \bar{z}_0|^2} \right) \\ &= \frac{1 - |z_0|^2}{|\bar{\eta} - \bar{z}_0|^2} \\ &= \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \eta\bar{z}_0|^2} \end{aligned}$$

(la última igualdad debido a  $|\eta| = 1$ ). Cuando reemplazamos en la fórmula del valor medio obtenemos un expresión de lo más vistosa.

**Teorema 4.5** (Fórmula del núcleo de Poisson). *Sea  $u$  armónica en una vecindad del disco unitario  $\mathbb{D}$ . Entonces para  $z \in \mathbb{D}$  se tiene la siguiente representación integral*

$$u(z) = \operatorname{re} \left( \int_0^1 \frac{e^{2\pi it} + z}{e^{2\pi it} - z} u(e^{2\pi it}) dt \right) = \int_0^1 \operatorname{re} \left( \frac{e^{2\pi it} + z}{e^{2\pi it} - z} u(e^{2\pi it}) \right) dt.$$



*Demostración.* Basta reemplazar nuestro análisis previo en la fórmula modificada.  $\square$

No obstante, es un fácil ejercicio notar que

$$z \mapsto \int_0^1 \frac{e^{2\pi it} + z}{e^{2\pi it} - z} u(e^{2\pi it}) dt$$

es diferenciable en todo  $\mathbb{D}$  y que por ende define una función holomorfa.

**Proposición 4.6.** *Toda función armónica definida en una vecindad del disco unitario cuando es restringida al disco es la parte real de una función holomorfa. Tal función holomorfa es única módulo la adición de un número imaginario.*

*Demostración.* Toda función armónica  $u$  como en el enunciado es la parte real de

$$z \mapsto \int_0^1 \frac{e^{2\pi it} + z}{e^{2\pi it} - z} u(e^{2\pi it}) dt$$

Si  $f, \tilde{f}$  tienen la misma parte real (digamos  $u$ ), entonces su diferencia  $f(z) - \tilde{f}(z)$  toma exclusivamente valores imaginarios. Por el teorema de la función abierta, esta diferencia debe ser constante; en efecto, un imaginario puro.  $\square$

Finalmente levantamos la restricción concerniente a que el dominio sea al menos la clausura del disco unitario.

**Teorema 4.7.** *Toda  $u \in C^2(U, \mathbb{R})$  armónica es localmente la parte real de una función holomorfa. Para ser preciso, de tenerse  $B(z_0, r) \subset U$  existirá  $f$  holomorfa en  $B(z_0, r)$  con  $u = \operatorname{re} f$ . Tal  $f$  es única módulo la adición de un número imaginario.*

*Demostración.* Para adaptarnos a la hipótesis (y hay dos detalles por calibrar) tomamos  $R$  sujeto a  $0 < R < r$ . Primero trabajamos con la dilatación  $\Delta_R : B(0, r/R) \rightarrow B(z_0, r)$  dada por

$$\Delta_R(w) = z_0 + Rw.$$

Puesto que se tiene  $\overline{\mathbb{D}} \subset B(0, r/R)$ , las hipótesis de la proposición anterior aplican para  $u_R(w) = u(\Delta_R(w))$ . De este modo al tomar

$$F_R(w) = \int_0^1 \frac{e^{2\pi it} + w}{e^{2\pi it} - w} u(\Delta_R(e^{2\pi it})) dt$$



se tendrá  $\operatorname{re} F_R(w) = u(\Delta_R(w))$ . Anotamos en este momento al margen la igualdad

$$F_R(0) = \int_0^1 u(\Delta_R(e^{2\pi it})) dt = u(\Delta_R(0)) = u(z_0)$$

(fruto de la propiedad del valor medio).

De revertir a la coordenada  $z = \Delta_R(w) = z_0 + R w \in B(z_0, r)$  obtendremos

$$\operatorname{re} F_R \left( \frac{z - z_0}{R} \right) = u(z),$$

lo que muestra que al menos en  $B(z_0, R)$  nuestra  $u$  es la parte real de una función holomorfa.

Ahora, si comparamos el proceso con bolas de distinto tamaño, digamos con  $0 < R < R' < r$  tendremos que  $F_R \left( \frac{z - z_0}{R} \right)$  y  $F_{R'} \left( \frac{z - z_0}{R'} \right)$  ambas están definidas en  $B(z_0, R)$ , en donde, además, tienen la misma parte real. Concluimos que difieren por un imaginario puro. Para determinar esta diferencia basta evaluar en un punto, conque se tiene

$$F_R \left( \frac{z_0 - z_0}{R} \right) - F_{R'} \left( \frac{z_0 - z_0}{R'} \right) = F_R(0) - F_{R'}(0) = 0.$$

Concluimos que ambas funciones coinciden. Esto implica que

$$F(z) = F_R \left( \frac{z - z_0}{R} \right)$$

representa una función holomorfa en  $B(z_0, r)$ . Por supuesto, su parte real es  $u$ .

Probada la existencia, la unicidad módulo una constante imaginaria pura es inmediata.  $\square$

**Corolario 4.8.** *Toda  $v \in C^2(U, \mathbb{R})$  armónica es localmente la parte imaginaria de una función holomorfa. Para ser precisos, de tenerse  $B(z_0, r) \subset U$  existirá  $f$  holomorfa en  $B(z_0, r)$  con  $v = \operatorname{im} f$ . Tal  $f$  es única módulo la adición de un número real.*

*Demostración.* Por el resultado anterior, si  $F$  tiene parte real  $v$ , entonces  $f = i F$  tiene parte imaginaria  $v$ .  $\square$

Si una función holomorfa cumple

$$F(z) = u(z) + iv(z),$$

con  $u, v$  armónicas, se dirá que  $u$  es un **conjugado armónico de  $v$** . Estos, por supuesto, son únicos módulo la adición de un número real.

Lo curioso es que existe un principio de reflexión a lo largo de segmentos muy parecido al principio de reflexión de Schwarz. Para ello nos prestamos los conjuntos  $U^\pm, I$  y  $U = U^+ \cup I \cup U^-$  del capítulo 3.

**Teorema 4.9.** *Sea  $v$  una función continua en  $U^+ \cup I$ , armónica en  $U^+$ , e igual a 0 en  $I$ . Entonces  $v$  se extiende a una función armónica en  $U^+ \cup I \cup U^-$  por la fórmula  $v(\bar{z}) = -v(z)$  cuando  $\text{im}(z) \leq 0$ .*

*Demostración.* Con esta definición  $v$  resulta armónica en  $U^-$  en virtud del teorema 4.2. Como se cumple  $v = 0$  en  $I$ , su continuidad queda garantizada en todo  $U$ .

Mostraremos que  $v$  satisface la propiedad del valor medio en puntos de  $I$ . Para ello tomamos  $x_1 \in I$  y  $D(x_1, r_1) \subset U$  un pequeño disco centrado en  $x_1$ . Al tenerse  $v(\bar{z}) = -v(z)$ , el promedio a lo largo del borde del pequeño disco resulta cero. Como este número es igual a  $v(x_1)$ , se sigue que  $v$  satisface la propiedad del valor medio en  $x_1$ .

Como además  $v$  es armónica en  $U^+$  y  $U^-$ , se satisface la propiedad del valor medio también en puntos de  $U^+$  y  $U^-$ . Por el teorema 4.4 se concluye que  $v$  es armónica en todo  $U$ . Esto prueba el teorema.  $\square$

La introducción de funciones armónicas a la discusión es de suma utilidad pues podemos conseguir una mejora sustancial al principio de reflexión de Schwarz al relajar las hipótesis.

Para ello consideremos una región conexa  $U$  que sea invariante por reflexión en el eje real, y que se interseque con este en un intervalo  $I$ . A la parte superior, por encima de la recta real, contenida en  $\mathbb{H}$ , la denominamos  $U^+$  como de costumbre.

**Teorema 4.10** (Principio de reflexión de Schwarz). *Sea  $f$  función analítica en  $U^+$ . Si  $\lim_{\text{im } z \rightarrow 0} f(z) = 0$ , entonces  $f$  puede ser extendida a todo  $U$ . Tal extensión satisface*

$$f(I) \subset \mathbb{R} \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

*Demostración.* La hipótesis en el límite ha de interpretarse como si  $z_n \in U$  converge a  $z \in I$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{im } f(z_n) = 0$ . Si ponemos  $f(z) = u(z) + iv(z)$  como descomposición en parte real y parte imaginaria, esto significa que  $v$  se extiende a  $I$  como una función continua que vale 0 en  $I$ . Así, de acuerdo con el

teorema 4.9, la función  $v$  puede extenderse por reflexión a una función armónica en todo  $U$ .

Por el corolario 4.8,  $v$  es localmente la parte imaginaria de una función holomorfa  $F$  en  $U$ , única salvo la adición de un número real. Considerado  $z_0 \in I$ , podemos evaluar por  $f$  algún  $z$  en  $U^+$  cercano a  $z_0$  y escoger la constante real adecuada para empalmar  $f$  y  $F$  en los  $z_0$ . Tenemos las hipótesis listas para aplicar el lema 3.1 y extender  $f$ .  $\square$



## Capítulo 5

# Reflexión a través de arcos analíticos

Vamos a utilizar el principio de reflexión de Schwarz en un contexto más amplio: en vez de reflejar una función a través de segmentos de recta, lo haremos a lo largo de arcos analíticos. En efecto, gran parte del trabajo de esta tesis recaerá en nuestra habilidad de extender funciones vía reflexiones. Lo visto hasta ahora, no obstante, impone condiciones muy limitantes y urge la necesidad de ir levantando de a pocos las restricciones.

Sea  $U$  una vecindad simétrica por reflexión del segmento real  $I = (0, 1)$  que no contenga puntos reales más allá de los de  $I$ . Si  $\varphi : U \rightarrow S$  es una función analítica inyectiva, a la restricción  $\gamma = \varphi|_{(0,1)}$  la llamaremos **arco analítico**. Obsérvese que el arco analítico es un objeto (ligeramente) más elaborado que su mera imagen. Sin embargo, para muchos fines será suficiente acordar que  $\gamma$  es el arco analítico.

Sea  $U$  una vecindad simétrica por conjugación cuya intersección con el eje real sea precisamente  $I = (0, 1)$ , podemos tomar  $U^+$  la parte por encima del eje real y  $U^-$  su reflejo y conseguir una descomposición

$$U = U^+ \cup I \cup U^-.$$

De este modo se puede hablar de  $\varphi(U^+)$  (respectivamente de  $\varphi(U^-)$ ) como del **lado izquierdo** (respectivamente **lado derecho**) del arco analítico.

**Nota 5.1.** Que  $U$  sea una vecindad simétrica o no no debería ser motivo de alarma. Basta que  $V$  sea una vecindad del intervalo estándar  $I = (0, 1)$  para que

$$U = V \cap \text{conj}(V),$$

con conj conjugación compleja, sea una vecindad simétrica. Si de este abierto eliminamos  $\mathbb{R} - I$  estaremos satisfaciendo todas las hipótesis. Por abuso de lenguaje seguiremos utilizando  $\gamma$  si achicamos o agrandamos la vecindad simétrica de  $I$ .

**Nota 5.2.** Lo de lado izquierdo o derecho de un arco analítico tampoco nos la debemos tomar tan a pecho. Si  $U$  es una vecindad como en la definición, la involución  $z \mapsto 1 - z$  troca los extremos de  $I$  e intercambia las posiciones relativas al eje real. Respecto a  $\gamma(1 - z)$  la antigua parte a la izquierda estará ahora a la derecha y viceversa.

**Ejemplo 5.3.** Si  $\psi : V \rightarrow S$  es inyectiva, cualquier segmento lineal dirigido  $(a, b) \subset V$  determina un arco analítico por restricción de  $\psi$ . En efecto, basta vía un automorfismo lineal llevar el par  $a, b$  en  $0, 1$ .

**Ejemplo 5.4.** De manera más general cuando  $\gamma \subset V$  es un arco analítico y  $f : V \rightarrow S$ , analítica también, es inyectiva en una vecindad de  $\gamma$ , entonces  $f \circ \gamma$  puede pensarse como un arco analítico. Si bien esto es relativamente trivial, es bueno repasar la rutina. Sea entonces  $U$  una vecindad simétrica conexa de  $I$  (con el surplus de puntos reales eliminados) y  $\varphi : U \rightarrow R$ , con  $V \subset R$ , de modo que se tenga  $\varphi(I) = \gamma(I) \subset V$ . Definamos  $W$  como una vecindad de  $I$  que sea simétrica respecto al eje real y esté contenida en  $U \cap \gamma^{-1}(V)$  (ver nota 5.1). Entonces  $f \circ \varphi : W \rightarrow S$  determina un arco analítico que resulta para todo fin igual a  $f \circ \gamma$ . En todo rigor el dominio de definición de  $f \circ \gamma$  es  $I$ , pero en un sentido más laxo es  $\gamma(I)$ . Para redondear la idea observemos que su dominio “simétrico” resulta ser  $f(W)$ . Queda claro que hay una parte a cada lado de  $\gamma$ ; cuál es la izquierda y cuál la derecha, depende de la orientación que se le brinde a  $\gamma$ .

**Ejemplo 5.5.** La semirrecta real positiva  $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$  es un arco analítico por efecto de la transformación de Möbius

$$\varphi(z) = -\frac{z}{z-1}.$$

Sabido ello una simple traslación torna  $(a, \infty)$  en un arco.

**Ejemplo 5.6.** Para confirmar que la recta  $\mathbb{R}$  es un arco analítico usamos la expansión analítica de la tangente para equipararlo con el segmento  $(-\pi, \pi)$ .

Yendo al contexto general donde nos olvidamos de segmentos reales y ahora nuestro dominio y rango contienen arcos analíticos, vamos a adoptar la notación

$U$  para una vecindad alrededor de un arco analítico. Así, es importante anotar que hagamos lo que hagamos, cuando hablemos de un arco analítico, el objeto estará rodeado de una vecindad  $U$  para la cual se tendrá

$$U \setminus \gamma = U^+ \cup U^-$$

como reunión disjunta de sus dos “costados”. Es más, por su misma construcción hay escondida una *reflexión* antiholomorfa que a cada  $z \in U^\pm$  le hace corresponder un único punto  $\text{ref}(z) \in U^\mp$ . Esta reflexión debe ser la identidad en  $\gamma$  y ha de satisfacer  $\text{ref} \circ \text{ref}(z) = \text{ref}^{\circ 2}(z) = z$ .

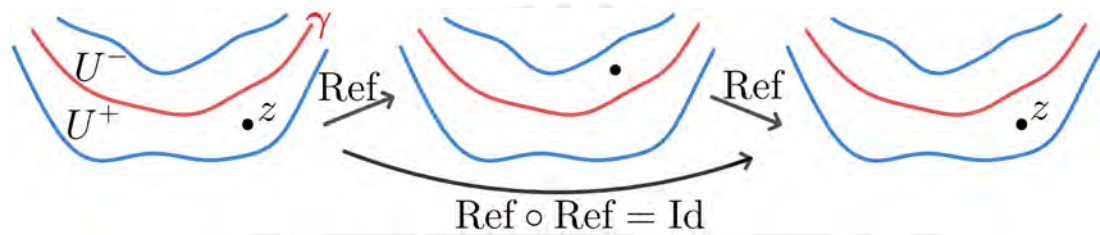


Figura 5.1

En resumen, dado un arco analítico  $\ell$ , rodeada de su vecindad  $U$ , la reflexión queda caracterizada por la concurrencia de dos condiciones:

1.  $r_\ell(z) = z$  para  $z \in \ell$ .
2.  $z \mapsto \overline{r_\ell(z)}$  es holomorfa, para  $z \in U$ .

**Ejemplo 5.7.** Consideremos el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : \text{re}(z) < -1\}$  cuya frontera contiene el arco analítico  $A = \text{re}(z) = -1$ . Por lo anterior, para reflexión debe utilizarse como guía la función  $z \mapsto r_A(z) = -2 - \bar{z}$ , pues esta es antiholomorfa y fija precisamente la recta en mención.

Similarmente es fácil constatar que la reflexión a lo largo de  $\text{re}(z) = 3$  está dada por  $z \mapsto 6 - \bar{z}$ .

**Ejemplo 5.8.** La reflexión a lo largo de cualquier subconjunto de la circunferencia unitaria debe recurrir a  $z \mapsto r_V(z) = 1/\bar{z}$ , pues esta tiene como puntos fijos a la circunferencia unitaria y es además antiholomorfa.

En el mismo tenor, la reflexión  $W$  a lo largo del círculo  $|z - 2| = 1$  deberá satisfacer

$$W(z) - 2 = \frac{1}{z - 2}.$$

**Proposición 5.9.** Sean  $\gamma$  y  $\eta$  arcos analíticos con lados izquierdo y derecho  $U^\pm$  y  $V^\pm$ , respectivamente. Consideremos una función analítica  $f : U^+ \rightarrow V^+$  que satisface  $f(\gamma) \subset \eta$ ; esto último en el sentido que  $z_n \rightarrow \gamma$  implica que  $f(z_n)$  se acumula en  $\eta$ . Entonces  $f$  puede extenderse analíticamente de modo que se tiene

$$f : U = U^+ \cup \gamma \cup U^- \rightarrow V = V^+ \cup \eta \cup V^-.$$

Puesto que se cumple  $f(U^-) \subset V^-$ , diremos que  $f$  es una **extensión por reflexión a lo largo de los arcos  $\gamma$  y  $\eta$** .

*Demostración.* Obsérvese como nota preliminar que el arco analítico  $\gamma$  proviene de la imagen de  $I$  de una función  $\varphi : W_1 \rightarrow U$ , lo mismo para  $\eta$ , esta vez con  $\psi : W_2 \rightarrow V$ . Aclarado esto, notamos que  $z_n \rightarrow \gamma$ , con  $z_n \in U^+$ , equivale a  $w_n = \varphi^{-1}(z_n) \rightarrow I$  por sobre el eje real, mientras para  $f(z_n)$  acumularse en  $\eta$  es lo mismo que para  $\psi(f(z_n)) \in \mathbb{H}$  acumularse en  $I$ . En pocas palabras, si definimos  $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  —ver figura 5.2—, el comportamiento de  $z_n$  se traduce en que  $w_n \rightarrow 0$  implica  $\text{im } g(w_n) \rightarrow 0$ . Por el principio de reflexión de Schwarz (ver teorema 4.10) la función analítica  $g$  puede ser extendida a todo  $W_1$ ; para  $f$  esto implica la existencia de una extensión a todo  $U$ .

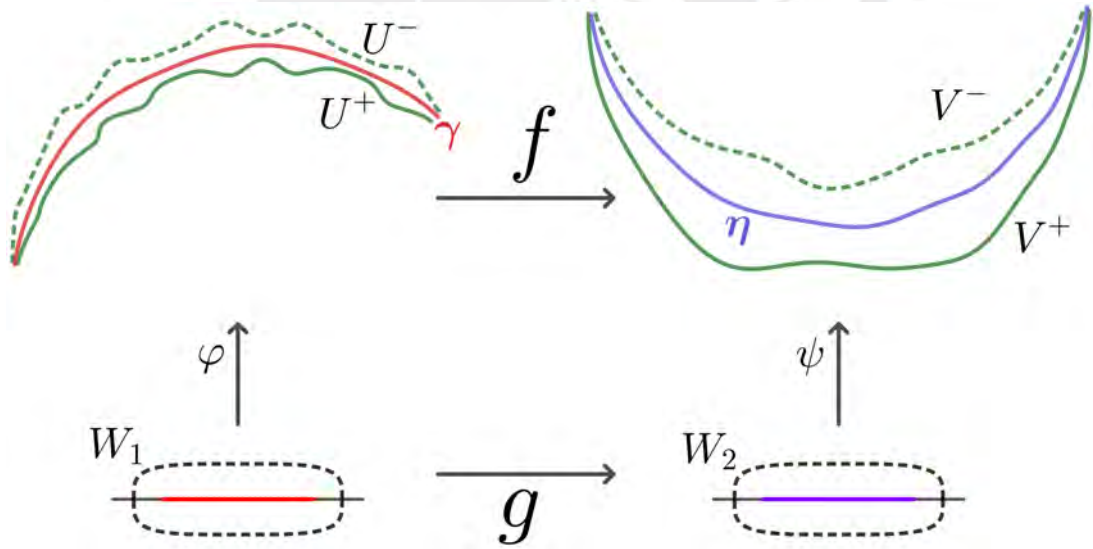


Figura 5.2

Como comentario adicional, la propiedad  $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$  del principio de reflexión de Schwarz repercute en  $U^-$  y  $V^-$  en la forma cómo se refleja la imagen de  $V^+$ .  $\square$



**Ejemplo 5.10.** Consideremos el semiplano superior  $\mathbb{H}^+$  con frontera los reales. Si extraemos la raíz cuadrada estándar  $\sqrt{z}$ , el semiplano se convierte en el primer cuadrante y recta real se dobla (en el origen) hacia arriba. Como la raíz cuadrada de un real positivo es un real positivo, vemos en  $(0, \infty)$  (con imagen  $(0, \infty)$ ) un par de arcos analíticos para aplicar el principio de reflexión: para extraer la raíz cuadrada de un número de parte imaginaria negativa empleamos las fórmula

$$\sqrt{\bar{z}} = \overline{\sqrt{z}},$$

proveniente de una aplicación directa del principio de reflexión en su forma original sobre el eje real positivo en dominio y rango.

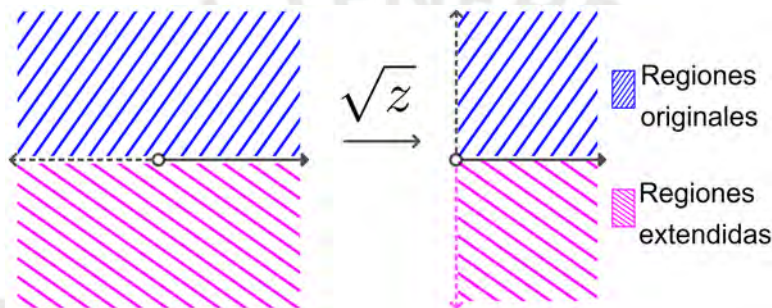


Figura 5.3

Continuando con la misma función, vemos también que la extracción de raíz cuadrada de reales negativos nos lleva a imaginarios (positivos) puros. Si queremos aplicar reflexión a lo largo de estos arcos, también lo podremos hacer, pero de seguro obtendremos algo distinto. (En efecto, para números de parte imaginaria negativa, la raíz cuadrada acá obtenida es  $-\sqrt{z}$ , la antípoda, léase la negativa, de la obtenida en el párrafo anterior.)

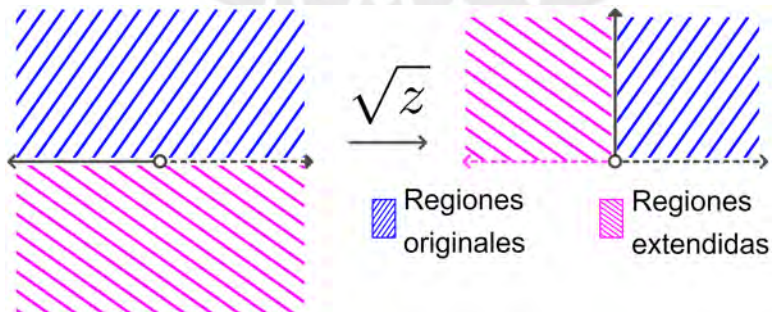


Figura 5.4



Algunas observaciones de carácter general acerca de funciones obtenidas por reflexión vienen al caso.

Primero, la reflexión no puede dar origen a puntos críticos en vecindades donde previo a su reflexión en el dominio no los había. De la prueba del último teorema tenemos

$$g(\bar{z}) = \overline{g(z)},$$

lo cual a su vez implica

$$f(z) = \psi \left( \overline{\psi^{-1}(f(\bar{z}))} \right),$$

para  $z \in U^-$ . Al ser  $\psi$  inyectiva, del lema 1.10 (ver especialmente su prueba), se concluye que el hecho de que la derivada de  $f$  en el punto reflejado se anule o no depende de si previamente lo hacía.

Es importante anotar que la condición  $U \cap W^- \neq \emptyset$  no se puede relajar pues de tenerse  $z \in U \cap W^-$  hay un potencial conflicto en la definición de  $f(z)$ . No obstante  $f(U) \cap W^{-1} \neq \emptyset$  no es objeción: el único problema que se puede suscitar es que si antes  $f$  era inyectiva globalmente, podría dejar de serlo en la extensión. Por ilustrar esta posibilidad, consideremos la banda horizontal  $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{im}(z) < 1\}$  y la función exponencial  $e^z$ , una función inyectiva con imagen el plano agujereado. Acá claramente podemos extender por reflexión a lo largo de  $\mathbb{R}$  y  $(0, \infty)$  (en dominio y rango, respectivamente) a fin de obtener una función bien definida pero no inyectiva.

**Ejemplo 5.11.** Sea  $\ell$  un arco analítico en el círculo unitario  $|z| = 1$  y  $U \subset \mathbb{D}$  un conjunto abierto con parte de frontera incluida en  $\ell$ . Si  $f$  es analítica en  $U$ , lleva  $U$  al semiplano superior, es continua en  $\ell$  donde toma valores reales, entonces  $f$  puede ser extendida más allá de  $\ell$  vía la relación

$$f(z) = \overline{f(1/\bar{z})}.$$

## Capítulo 6

# Teorema de Montel para familias equiacotadas

Bien es sabido que el límite uniforme de una sucesión de funciones analíticas es también analítica. En análisis complejo es común referirnos a este tipo de convergencia como **convergencia normal**. El siguiente es un teorema clásico que de vez en vez aporta la cuota técnica indispensable para redondear argumentos.

**Teorema 6.1** (Teorema de Weierstrass). *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente en compactos de  $U$  a una función  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $U$ . Es más, la sucesión de derivadas  $\{f_n^{(k)}\}$  también converge uniformemente en compactos de  $U$  a  $f^{(k)}$ , esto para todo  $k \geq 1$ .*

*Demostración.* Esto es una simple aplicación de la fórmula de Cauchy (ver por ejemplo [4, proposición 1, página 411] o [7, Weierstrass Theorem, página 9]).  $\square$

Si bien este teorema es útil cuando sabemos que una sucesión converge, no nos dice cuándo lo hace. En efecto, para resolver un problema determinado, muchas veces nos basta poder escoger aproximaciones dentro de una familia de funciones predeterminadas. En ese sentido la experiencia enseña a tener en mente el siguiente concepto.

Sean  $S, R$  superficies de Riemann (conexas, no está demás recordarlo). Una familia  $\mathcal{F}$  constituida por funciones analíticas con dominio de partida  $S$  y rango de llegada  $R$  se dice **normal** si de toda sucesión  $f_n \in \mathcal{F}$  se puede extraer un refinamiento (subsucesión) convergente (en la topología de convergencia en compactos).

En buen castellano, una familia de funciones analíticas será normal si es precompacta en la topología de convergencia uniforme. Una advertencia es de rigor: el límite, si bien una función analítica  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ , puede o no participar en la familia original  $\mathcal{F}$ .

En la primera parte de nuestro desarrollo, necesitaremos de la “parte fácil” de un importante resultado. Su demostración no es difícil (pues es en esencia la misma que la del teorema de Arzelà-Ascoli) y representa nuestro punto de partida.

Una familia de funciones  $\mathcal{F}$  entre  $S$  y  $\mathbb{C}$  se dice **equiacotada** (o **uniformemente acotada**) si existe una constante  $M$  de modo que se cumple

$$|f(z)| \leq M$$

para todo  $z \in S$  y  $f \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 6.2** (Teorema de Montel para funciones equiacotadas). *Toda familia de funciones equiacotadas es normal.*

*Demostración.* Ver [4, teorema 4, página 418]. □

Como nota al margen hacemos hincapié en que cualquier función límite  $f$  deberá también estar acotada por este mismo  $M$ .

**Ejemplo 6.3.** La familia  $\mathcal{F} = \{z \mapsto \lambda z : z \in \mathbb{D}, \text{ con } 0 < |\lambda| \leq 1\}$  es normal. En efecto, dada una sucesión  $f_n(z) = \lambda_n z$ , es posible encontrar una subsucesión convergente  $\lambda_{n_k} \rightarrow \lambda$  para así obtener en el límite  $f(z) = \lambda z$ . Cabe la posibilidad de que  $f$  sea nula, no perteneciente a  $\mathcal{F}$ , específicamente cuando  $\lambda = 0$ .

Enunciaremos sin prueba algunos resultados importantes concernientes a lo que se puede o no esperar de ciertos límites de familias convergentes (o normales).

**Lema 6.4.** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones analíticas inyectivas en un abierto conexo  $U$ . Supongamos que la sucesión  $f_n$  converge uniformemente en compactos de  $U$  a una función analítica no constante  $f$ . Entonces  $f$  es inyectiva en  $U$ .*

*Demostración.* Ver [7, Corolario 1.4.1, página 10]. □

Similarmente se tienen ciertos criterios que ayudan a tratar sobreyectividad, no obstante, no nos explayaremos en ello pues el siguiente resultado es suficiente para nuestros fines.

**Lema 6.5.** *Supongamos que  $f_n : S \rightarrow U \subset R$  converja a una función analítica  $f : S \rightarrow R$ . Si existe  $z_0 \in S$  sujeta a  $f(z_0) \notin U$ , entonces  $f$  es constante.*

*Demostración.* Ver [5, lema 3.11, página 66]. □

**Ejemplo 6.6.** Es claro que la familia  $\text{aut}(\mathbb{D})$  es normal, por lo que de toda sucesión de funciones

$$\varphi_n(w) = \lambda_n \frac{w - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha_n} w},$$

con  $|\lambda_n| = 1$  y  $|\alpha_n| < 1$ , podemos encontrar una subsucesión convergente.

Y es que, como  $\lambda_n \in \partial\mathbb{D}$  y  $\alpha_n \in \overline{\mathbb{D}}$ , podemos afirmar que existen subsucesiones  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  y  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ . Obsérvese que cuando  $|\alpha| = 1$ , se tiene

$$\varphi_n(w) \rightarrow \varphi(w) = \lambda \frac{w - \alpha}{1 - \overline{\alpha} w} = \lambda \frac{\alpha(\overline{\alpha} w - 1)}{1 - \overline{\alpha} w} = -\alpha \lambda.$$

**Lema 6.7.** *Si las  $f_n$  son todas localmente inyectivas, entonces el límite es localmente inyectivo o constante.*

*Demostración.* Si se tiene  $f_n \rightarrow f$  y  $f$  no es localmente inyectiva, digamos en  $z_0$ , existe una pequeña vecindad de  $z_0$  y coordenadas de modo que los  $f_n : U \rightarrow R$  convergen a  $f$ . Por el teorema de Weierstrass se tiene también  $f'_n \rightarrow f'$  en  $U$ . No obstante, acá se tiene  $f'_n(z) \neq 0$  en  $U$ , pero  $f'(z_0) = 0$ , conque  $f'$ , por el lema 6.5, es constante, es decir nula, en  $U$ . Esto implica que  $f$  es constante en  $U$ , y por lo tanto es constante en todo  $S$ . □

La normalidad es un concepto local-global. Ir de lo global a lo local es trivial. Para lo recíproco, el argumento para construir la función límite se apoya en un proceso diagonal.

## Capítulo 7

# Subconjuntos simplemente conexos del disco

En este capítulo probaremos el teorema de uniformización de Riemann para subconjuntos simplemente conexos y acotados del plano. Para tal fin requerimos antes un lema técnico.

**Lema 7.1.** *Sea  $U \subset \mathbb{D}$  un conjunto abierto y simplemente conexo que contiene a  $0$ . Entonces el conjunto de las derivadas en  $0$  de las funciones analíticas  $f : U \rightarrow \mathbb{D}$  que fijan  $0$  es acotado.*

*Demostración.* Como  $0$  pertenece al interior de  $U$ , existe una bola de radio  $r$  contenida en  $U$ . De este modo podemos utilizar el lema 1.9 con  $s = 1$ . Así sea cual fuera  $f : U \rightarrow \mathbb{D}$  que lleve  $0$  en  $0$  tendrá derivada acotada en norma por  $1/r$ .  $\square$

Si  $U$  es un subconjunto simplemente conexo y acotado en el plano, este es obviamente equivalente a un subconjunto simplemente conexo del disco  $\mathbb{D}$  que contiene al origen. (Esto puede hacerse, por ejemplo, con una traslación seguida de un reescalamiento.)

**Proposición 7.2.** *Sea  $U \subset \mathbb{C}$  simplemente conexo, no vacío y acotado. Entonces  $U$  es equivalente a  $\mathbb{D}$ , es decir existe un biholomorfismo  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Como se indicó arriba, sin pérdida de generalidad se puede asumir  $0 \in U \subset \mathbb{D}$ . Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{D} \text{ analítica e inyectiva sujeta a } f(0) = 0 \text{ y } f'(0) > 0\},$$

la cual es no vacía pues contiene a la identidad. El lema 7.1 indica que  $A = \sup\{f'(0) : f \in \mathcal{F}\}$  es finito. Gracias a esto, existe una sucesión  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$  para la cual se tiene  $f'_n(0) \rightarrow A$ .

Por el teorema de Montel para funciones equiacotadas, de  $\{f_n\}$  podemos extraer una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  convergente en compactos a cierta  $f$  que satisface  $|f(z)| \leq 1$  en  $U$  y  $f(0) = 0$ . Además por el teorema de Weierstrass la función  $f$  resulta analítica y no constante pues satisface  $f'_{n_k}(0) \rightarrow f'(0) = A > 0$ . Gracias a ello resulta inyectiva por el lema 6.4. Se tiene entonces  $f \in \mathcal{F}$ . Para probar que  $f$  es una equivalencia, es suficiente entonces probar su sobreyectividad.

Si por el contrario  $f$  no fuese sobreyectiva, escogemos  $\beta \in \mathbb{D} - f(U)$ . Inmediatamente vía  $\varphi_\beta(z) = (z - \beta)/(1 - \bar{\beta}z)$  trasladamos  $\beta$  al origen. Por su parte el 0 es desplazado a  $\varphi_\beta(0) = -\beta$ . Así  $(\varphi_\beta \circ f)(U)$ , conjunto simplemente conexo, contiene a  $-\beta$  pero no a 0. Ello permite aprovechar el autorrecubrimiento  $z \mapsto z^2$  de  $\mathbb{C}^*$  para extraer raíz cuadrada a  $\varphi_\beta \circ f$  (su levantamiento).

Si ahora reubicamos  $\sqrt{-\beta} = \zeta$  en 0 vía una  $\varphi_\zeta$  estándar, el periplo de 0 lo lleva de regreso a 0. La composición de estos cuatro procesos (primero  $f$ , luego  $\varphi_\beta$ , luego  $\sqrt{\quad}$  y finalmente  $\varphi_\zeta$ ) resulta ser una función inyectiva de  $U$  en  $\mathbb{D}$  que lleva 0 en 0, tras una rotación  $\rho$  incluso toma derivada positiva (no puede ser nula pues en todo momento hemos trabajado con funciones inyectivas) y por tanto pertenece a la familia  $\mathcal{F}$ , llamémosla  $F$ . Tenemos el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccc} (U, 0) & \xrightarrow{f} & (A_1 = f(U), 0) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & (A_2 = \varphi_\beta(A_1), -\beta) \\ \downarrow F \in \mathcal{F} & & & & \downarrow \sqrt{\quad} \\ (\rho(A_4), 0) & \xleftarrow{\rho} & (A_4 = \varphi_\zeta(A_3), 0) & \xleftarrow{\varphi_\zeta} & (A_3 = \sqrt{A_2}, \zeta). \end{array}$$

De esta manera, la derivada en valor absoluto de  $F$  deberá ser menor o igual a  $A = f'(0)$ .

Esto, sin embargo, no es cierto. Tenemos

$$|F'(0)| = |f'(0)| \cdot |\varphi'_\beta(0)| \cdot |\sqrt{\quad}'(-\beta)| \cdot |\varphi'_\zeta(\zeta)|.$$

Como se satisface

$$\left( \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right)' = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2},$$

obtenemos

$$|\varphi'_\beta(0)| = 1 - |\beta|^2$$

y

$$|\varphi'_\zeta(\zeta)| = \frac{1 - |\zeta|^2}{(1 - |\zeta|^2)^2} = \frac{1}{1 - |\zeta|^2} = \frac{1}{1 - |\beta|},$$

esto último debido a  $\zeta = \sqrt{-\beta}$ . También se tiene

$$|\sqrt{\prime}(-\beta)| = \frac{1}{2\sqrt{|\beta|}}.$$

Como se cumple  $0 < |\beta| < 1$ , tenemos  $(1 - \sqrt{|\beta|})^2 > 0$ , lo que se traduce en  $1 + |\beta| > 2\sqrt{|\beta|}$ . De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} |F'(0)| &= |f'(0)| \cdot (1 - |\beta|^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{|\beta|}} \cdot \frac{1}{1 - |\beta|} \\ &= |f'(0)| \cdot \frac{1 + |\beta|}{2\sqrt{|\beta|}} > |f'(0)|; \end{aligned}$$

una tremenda contradicción. □

Al traducir esto al lenguaje de los recubrimientos, concluimos que  $U$  tiene como recubrimiento universal al disco unitario, y en este caso en particular la vecindad privilegiada es todo  $U$ , pues estamos ante una equivalencia.



## Capítulo 8

# Uniformización de subconjuntos conexos del disco

Sea  $U \subset \mathbb{D}$  un subconjunto abierto y conexo del disco que contiene a  $0$ , el origen. Consideremos  $\pi : (\tilde{U}, \tilde{0}) \rightarrow (U, 0)$  un recubrimiento universal. Para mostrar que  $\tilde{U}$  es equivalente a  $\mathbb{D}$  bastará probar que también lo recubre. Para ello consideremos el siguiente artificio. Como  $\tilde{U}$  es una superficie de Riemann, cerca a  $\tilde{0}$  podemos tomar una vecindad  $V$  equivalente a un pequeño disco. Con ella, dada una función analítica  $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$  podemos hablar de la derivada  $f'(\tilde{0})$  como el valor que toma la derivada en  $\tilde{0}$  al utilizar un representante local predeterminado. Con este tecnicismo a mano estamos ya listos para probar un resultado crucial en la uniformización de subconjuntos del plano.

**Proposición 8.1.** *Si  $U \subset \mathbb{D}$  es abierto y conexo entonces su recubrimiento universal es  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Nuevamente supondremos que se tiene  $0 \in U$ . Dado  $\pi : (\tilde{U}, \tilde{0}) \rightarrow (U, 0)$  un recubrimiento universal de  $U$ , consideremos la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{D} : f \text{ analítica y localmente inyectiva con } f(\tilde{0}) = 0 \text{ y } f'(\tilde{0}) > 0\}.$$

El hecho de que  $U$  sea subconjunto de  $\mathbb{D}$  garantiza que esta es una familia no vacía: en efecto,  $\pi$  seguida de cierta rotación pertenece a  $\mathcal{F}$ . Como las derivadas en  $\tilde{0}$  están acotadas, consideramos una sucesión  $f_n \in \mathcal{F}$  con  $f'_n(\tilde{0}) \rightarrow \sup\{f'(\tilde{0}) : f \in \mathcal{F}\}$ .

Puesto que  $\mathcal{F}$  es una familia normal, podemos asumir directamente que tal sucesión converge a cierta  $f$  y que esta satisface  $f'(\tilde{0}) = A$ . Además, puesto

que  $f$  no es constante deberá ser localmente inyectiva. La sobreyectividad se sigue de las ideas presentadas en la prueba del capítulo anterior. Así, por la proposición 2.7, esta  $f$  resulta un recubrimiento de  $\mathbb{D}$ . Como  $\tilde{U}$  es simplemente conexa, se concluye que  $\tilde{U}$  es isomorfa a  $\mathbb{D}$ .  $\square$

Queda claro entonces la importancia de que el recubrimiento universal de la esfera triplemente agujereada sea  $\mathbb{D}$ . En este caso si  $U$  es un conjunto que omite tres puntos, levantamos primero este conjunto al disco, y recién ahí lo uniformizamos. Como el levantamiento de un recubrimiento universal es un recubrimiento, habremos exhibido a  $\mathbb{D}$  como el recubrimiento universal de estos conjuntos. El resto de este trabajo será precisamente la construcción de este recubrimiento.



## Capítulo 9

### El grupo fuchsiano generado por

$$z \mapsto z + 4 \text{ y } z \mapsto \frac{2z-1}{z}$$

Consideremos el cuadrilátero hiperbólico ideal de vértices  $\infty, -1, 1, 3$  dado por

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{H} : -1 \leq \operatorname{re} z \leq 3, 1 \leq |z|, 1 \leq |z - 2|\};$$

ver figura 9.1. Este polígono aparecerá de manera natural en capítulos posteriores. En el presente, vamos a estudiar un grupo de automorfismos de  $\mathbb{H}$  íntimamente relacionado con  $\mathcal{C}$ .

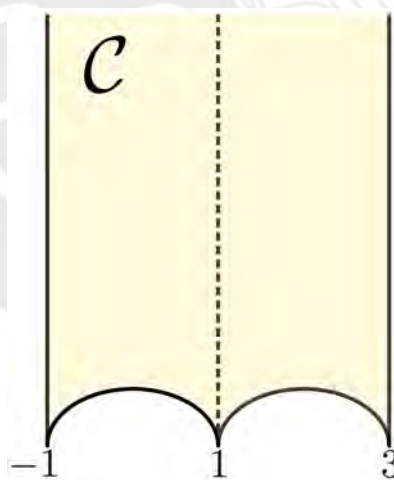


Figura 9.1

Motivados en esta figura, podemos empatar los lados verticales del polígono  $\mathcal{C}$  vía el automorfismo  $z \mapsto z + 4$  y los lados semicirculares por  $z \mapsto \frac{2z-1}{z}$ .

Hagamos un poco de heurística.

Tal cuadrilátero posee cuatro vértices, el último en  $\infty$ . No obstante, debido a las identificaciones aludidas, algunos vértices se corresponden. Así, en realidad, solo tenemos tres paquetes  $\{-1, 3\}, \{1\}, \{\infty\}$ . Más adelante veremos que en efecto, tras las identificaciones, el cociente se corresponde con  $\hat{\mathcal{C}}$  con los 3 vértices removidos. Mejor aún, los lados que delimitan la frontera (incluso la vertical punteada) se corresponderán con los tres segmentos reales que dividen el plano complejo en dos.

En segundo lugar, el grupo  $\Gamma$  generado por los automorfismos  $z \mapsto z + 4, z \mapsto (2z - 1)/z$  es fuchsiano al ser un subgrupo del grupo modular  $PSL_2(\mathbb{Z})$ . Más aún, y acá es donde entra la heurística, al comparar las áreas de la región modular (la región de Ford de  $PSL_2(\mathbb{Z})$ ) y la de  $\mathcal{C}$ , vemos que esta última sextuplica a la anterior. Ver figura 9.2.

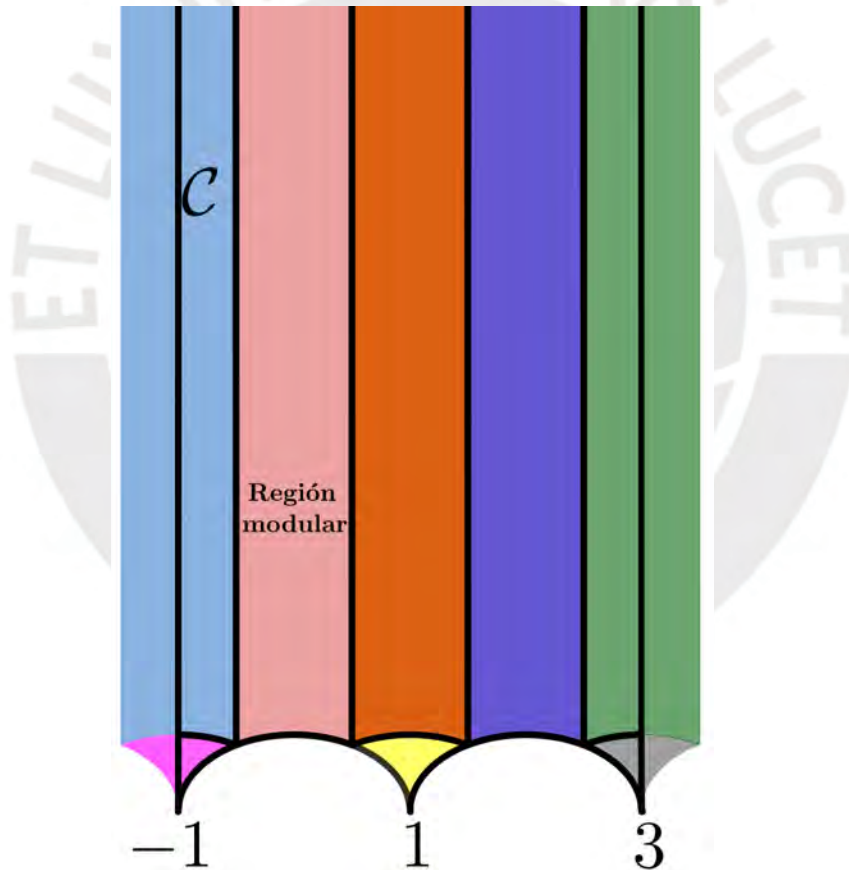


Figura 9.2:  $\mathcal{C}$  está contenida en 8 regiones modulares, pero tiene el área de 6.

Esto nos lleva a intuir con justa razón que el índice de  $\Gamma$  en  $PSL_2(\mathbb{Z})$  es 6.

Para comprobar rigurosamente que el índice no puede superar 6 jugaremos con dos propiedades de fácil constatación.

**Lema 9.1.** *La región modular*

$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{H} : -1/2 \leq \operatorname{re} z \leq 1/2, 1 \leq |z|\}$$

es dominio fundamental del grupo fuchsiano  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .

*Demostración.* Ver [4, teorema 2, página 368]. □

**Lema 9.2.** *El cuadrilátero ideal  $\mathcal{C}$ , definido arriba, contiene un dominio fundamental del grupo  $\Gamma$  en estudio.*

*Demostración.* En efecto  $\mathcal{C}$  se construye con algunas de las intersecciones de conjuntos tipo

$$F_\gamma(z_0) = \{z \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(z, z_0) \leq d_{\mathbb{H}}(z, \gamma(z_0))\},$$

donde  $d_{\mathbb{H}}$  es la distancia hiperbólica,  $\gamma \in \Gamma \subset \operatorname{aut}(\mathbb{H})$  con  $\gamma(z_0) \neq z_0$ , que definen una región de Ford para  $\Gamma$  si tomamos como centro de referencia cualquier punto  $z_0$  con parte real igual a 1.

La construcción de la región de Ford en general se puede encontrar en [4], capítulo 29. □

A nosotros nos interesa una consecuencia de cada uno de estos hechos.

**Lema 9.3.** *Sea  $z_0$  un punto interior a la región modular. Si  $\varphi \in PSL_2(\mathbb{Z})$  es tal que  $\varphi(z_0) \in \mathcal{M}$ , entonces  $\varphi = \operatorname{id}$ .*

*Demostración.* Los puntos interiores a un dominio fundamental solo son equivalentes a sí mismos y no aceptan torsión. □

**Lema 9.4.** *Dado  $z_0 \in \mathbb{H}$ , existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(z_0) \in \mathcal{C}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$  un dominio fundamental de  $\Gamma$  tal como fue prometido en el lema 9.4. Por definición de dominio fundamental existe  $\gamma \in \Gamma$  con el cual se tiene  $\gamma(z_0) \in \mathcal{R}$ . Este  $\gamma$  es el buscado. □

La región  $\mathcal{C}$  está contenida en una unión de 8 copias de la región modular: concretamente la unión de sus imágenes por las transformaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que todo  $\varphi \in PSL_2(\mathbb{Z})$  es  $\Gamma$ -equivalente a la inversa de uno de ellos. Para ello elijamos de una vez por todas un  $z_0$  al interior de la región modular. Por el lema 9.4 existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que se cumple  $\gamma(\varphi^{-1}(z_0)) \in \mathcal{C}$ . Por lo explicado antes, para una de los ocho transformaciones listadas se tendrá

$$\psi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi^{-1}(z_0) \in \mathcal{M}.$$

Por lema 9.3 se cumplirá entonces

$$\psi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi^{-1} = id,$$

o lo que es lo mismo

$$\varphi \in \psi^{-1}\Gamma. \quad (9.1)$$

Es decir, a lo más hay ocho clases.

No obstante la inversa de la primera y de la quinta pertenecen a la misma clase lateral; lo mismo con las inversas de la sexta y la octava. En efecto, la afirmación se sigue al tomar inversas a las identidades

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos cálculos reducen las cuentas a lo mucho seis clases laterales.

**Proposición 9.5.** *El índice  $[\Gamma : PSL_2(\mathbb{Z})]$  es menor o igual a 6.* □

Para corroborar que tiene que haber por lo menos seis clases distintas trabajaremos con las entradas enteras módulo 4 en los representantes. Consideremos entonces el epimorfismo  $\varphi : PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z}_4)$ .

En primera instancia notamos que el grupo  $\Gamma$  proyecta sobre el subgrupo generado por

$$\begin{aligned} \varphi(z \mapsto z + 4) &= \varphi \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id, \\ \varphi \left( z \mapsto \frac{2z-1}{z} \right) &= \varphi \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

el mismo que explícitamente está dado por

$$\bar{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

un grupo cíclico de orden 4.

De las 256 matrices  $2 \times 2$  con entradas en  $\mathbb{Z}_4$ , exactamente 96 son invertibles. Invertible significa en este contexto determinante  $\pm 1$ , y notamos así igual número de matrices con determinante 1 y  $-1$  (basta cambiar de signo a una de las filas o columnas para intercambiar el signo del determinante). Como en los grupos proyectivos  $PSL$  identificamos una matriz con su negativa, concluimos entonces que hay exactamente 24 elementos en  $PSL_2(\mathbb{Z}_4)$ . El índice es entonces 6. Las clases laterales están dadas explícitamente por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\Gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \bar{\Gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\Gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\Gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \bar{\Gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \bar{\Gamma} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

que hemos ordenado en atención a las (inversas de las) seis transformaciones que permitían comparar  $\mathcal{C}$  con la región modular. Así el índice de  $\bar{\Gamma}$  en  $PSL_2(\mathbb{Z}_4)$  es 6, por lo que  $\Gamma$  tiene índice en  $PSL_2(\mathbb{Z})$  un múltiplo de 6. Recordemos que por la relación (9.1), estos representantes son las inversas.

**Teorema 9.6.** *El grupo  $\Gamma$  es un subgrupo de índice 6 en  $PSL_2(\mathbb{Z})$ . Las clases laterales están representadas por las transformaciones asociadas a las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Un elemento de  $PSL_2(\mathbb{Z})$  pertenece a  $\Gamma$  si y solo si su proyección módulo 4 pertenece al subgrupo  $\bar{\Gamma}$ . La región  $\mathcal{C}$  es un dominio fundamental para la acción de este grupo en  $\mathbb{H}$ . En efecto, al ser  $\mathcal{C}$  una región de Ford para el grupo, y al no tener esquinas, la acción es libre de punto fijo.  $\square$*



Es sabido que todo elemento modular que acepta torsión es conjugado a una de las siguientes transformaciones

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(o a sus negativos). En particular tiene traza igual a  $-1, 0, 1$ . Como la traza de la proyección es igual a la clase módulo 4 de la traza original, vemos que ningún elemento con torsión puede tener traza reducida igual a 2. Como todos los elementos de  $\bar{\Gamma}$  tienen traza igual a 2, se concluye por otros medios que ningún elemento de  $\Gamma$  acepta torsión.

**Teorema 9.7.** *El grupo  $\Gamma$  actúa sin punto fijo sobre  $\mathbb{H}$ , en consecuencia es el recubrimiento universal de su espacio de órbitas  $\mathbb{H}/\Gamma$ .*

*Demostración.* En efecto, por construcción una región invariante de un grupo fuchsiano es recubrimiento de su proyección al espacio de órbitas. Como  $\mathbb{H}$  es simplemente conexo, resulta ser recubrimiento universal.  $\square$

De esta manera hemos reducido el problema de fondo a mostrar que el espacio de órbitas de este grupo fuchsiano es analíticamente equivalente a la esfera con tres puntos removidos.

# Capítulo 10

## Un preámbulo a la uniformización

La meta final es probar que el espacio de órbitas de  $\Gamma$ , del capítulo anterior, es analíticamente equivalente a la esfera triplemente agujereada. La manera de aproximarnos al objetivo es hacer las identificaciones en el dominio fundamental (el cuadrilátero  $\mathcal{C}$  del capítulo anterior) y construir una función que lleve dicho conjunto a la esfera triplemente agujereada. Este proceder atraviesa tres etapas.

Primero, debemos proponer una función analítica que vaya del interior del dominio fundamental a un subconjunto de la esfera triplemente agujereada. Segundo, debemos asegurar que esta función pueda ser extendida a su clausura de modo que asuma valores idénticos en puntos identificables. Tercero, no debemos olvidarnos de la sobreyectividad.

La construcción de esta función, si bien un tanto abstracta, no es difícil. Como tanto  $\mathcal{C}$  como  $\mathbb{C} - (-\infty, 1]$  son regiones simplemente conexas, podemos aceptar por un momento que son equivalentes al disco unitario, y por tanto equivalentes entre sí. Puesto que ambos conjuntos tienen una semirrecta como eje de simetría, incluso podemos hacer que la semirrecta  $\operatorname{re} z = 1$  se corresponda con el arco analítico  $(1, \infty)$ . Si somos cuidadosos, incluso podemos hacer corresponder las fronteras verticales con  $(-\infty, -1)$  y los arcos semicirculares con  $(-1, 1)$ . De lograrse este objetivo, todo recaería en nuestra habilidad de combinar el principio de reflexión con la unicidad de la uniformización para confirmar la compatibilidad de esta construcción con las identificaciones exigidas por el grupo.

# Capítulo 11

## La función a reflejar

Con la discusión previa en mente, aprovechemos el eje de simetría del cuadrilátero  $\mathcal{C}$  y partámoslo por la mitad a fin de crear el triángulo hiperbólico ideal  $\mathcal{R} \subset \mathbb{H}$  de vértices  $-1, 1, \infty$ . De entrada lo trabajado en el capítulo de uniformización proporciona una equivalencia  $\varphi$  entre el disco unitario  $\mathbb{D}$  y  $\mathcal{R}$ .



Figura 11.1

Mejor aún, la unicidad de esta equivalencia (fijadas ciertas condiciones) permite comparar las simetrías del triángulo con las del disco  $\mathbb{D}$ .

Por ejemplo, dado que nuestro triángulo es equilátero, una rotación de 120 grados en  $\mathbb{D}$  deberá traducirse en una permutación cíclica de los lados del triángulo. En efecto,  $\rho(z) = -\frac{z+3}{z-1}$  permuta cíclicamente los vértices y hace de  $\sqrt{3}i$  —el punto fijo de la transformación— un centro de simetría.

Para continuar adelante, convengamos entonces que  $\varphi$  lleva  $0$  en  $\sqrt{3}i$  con

derivada  $\varphi'(0) = bi$  imaginario puro con  $b > 0$  positivo (para lo cual apenas hay que componer —precomponer realmente— con una rotación adecuada). Es importante notar que el lema de Schwarz garantiza que bajo estos dos supuestos  $\varphi$  está totalmente determinada.

Nuestro triángulo  $\mathcal{R}$  es invariante por reflexión sobre el eje imaginario. Para ser precisos, obsérvese que se tiene  $w \in \mathcal{R}$  si y solo si  $-\bar{w} \in \mathcal{R}$ . De este modo la función

$$\psi(z) = \overline{\varphi^{-1}(-\overline{\varphi(z)})}$$

resulta un automorfismo (holomorfo, claro está) de  $\mathbb{D}$ .

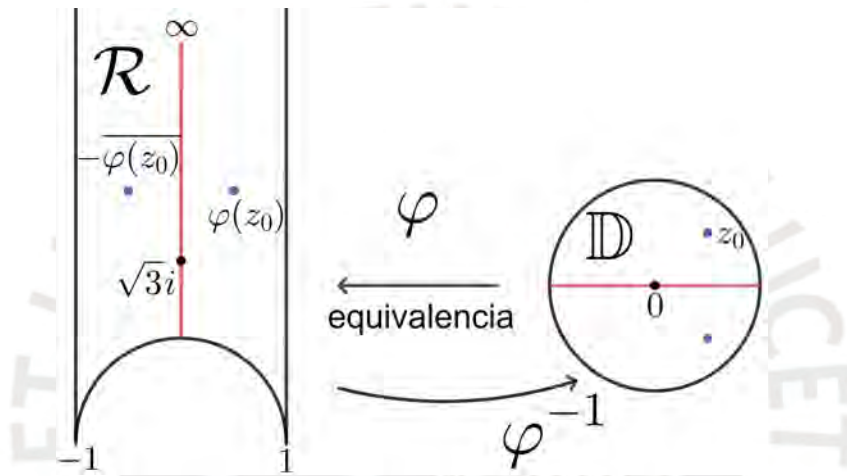


Figura 11.2

De seguirle la pista a 0 observamos que cumple  $\psi(0) = 0$ . Por hipótesis la derivada analítica de  $\varphi$  en el origen es imaginaria pura, de modo que para las derivadas de variable real se tiene

$$D\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad D\varphi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

merced a las ecuaciones de Cauchy-Riemann y al teorema de la función inversa. (El ligero cambio de estructura se debe a que  $\varphi^{-1}(0)$  tiene derivada en  $\sqrt{3}i$  igual a  $1/(bi) = -i/b$ ). Vía la regla de la cadena obtenemos entonces

$$D\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b^{-1} \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto, por supuesto, implica que se tiene  $\psi'(0) = 1$ . Por el lema de Schwarz, entonces,  $\psi$  ha de ser la identidad.

Esto implica por ejemplo que la región tiene un eje de simetría tan importante como lo es la porción del eje real en el disco. Incluso podemos aventurarnos a decir más: a medida que hacemos tender  $z_n = x_n$  a 1 tendremos que  $\varphi(x_n)$  tiende a  $i\infty$  a lo largo del eje imaginario.

Con estas mismas ideas justificaremos ahora la simetría cúbica insinuada líneas atrás. Recuérdese la  $\rho$  introducida arriba. Si ponemos esta vez

$$\psi(z) = e^{-2\pi i/3} \varphi^{-1}(\rho(\varphi(z))),$$

tenemos nuevamente un automorfismo de  $\mathbb{D}$  que lleva 0 en 0 y cuya derivada en el origen es

$$\psi'(0) = e^{-2\pi i/3} (\varphi^{-1})'(\sqrt{3}i) \rho'(\sqrt{3}i) \varphi'(0) = e^{-2\pi i/3} (-i/b) e^{2\pi i/3} ib = 1$$

Como esto implica que  $\psi$  es la identidad, obtenemos

$$\varphi(e^{2\pi i/3} z) = \rho(\varphi(z)).$$

La figura 11.3 habla entonces por sí sola.

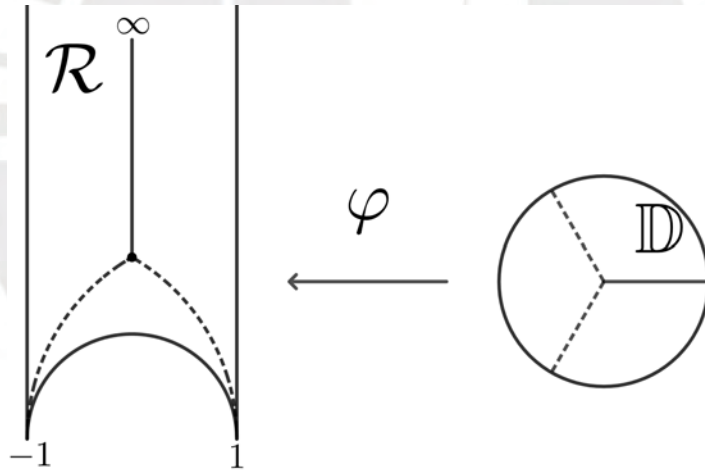


Figura 11.3

Precisamente debido a la presencia de  $\sqrt{3}i$  ajustamos la equivalencia usual entre  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{H}$ , reescalándola, y consideramos en su reemplazo

$$\psi(z) = \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \sqrt{3}i.$$

Si junto a ello revertimos la flecha de  $\varphi$ , obtenemos la configuración indicada en la figura a continuación.

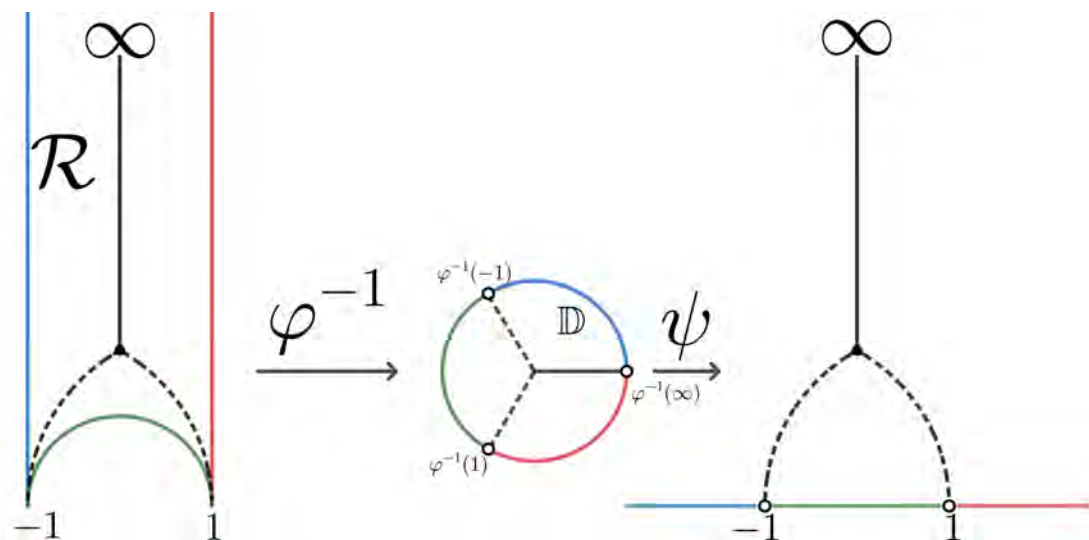


Figura 11.4

La composición  $\psi \circ \varphi^{-1}$ , en adelante  $f$ , proporciona hasta tres oportunidades para aplicar el principio de reflexión de Schwarz: a medida que nos acercamos al arco rojo en el dominio, las imágenes se acercan al arco rojo en el rango; lo mismo con los arcos verde y azul. Centrándonos en el arco rojo, vemos que el reflejo de  $\mathcal{R}$  a lo largo de la semirrecta  $\operatorname{Re} z = 1$  reconstruye la región  $\mathcal{C}$  del capítulo 9, mientras el reflejo en el rango a lo largo del segmento rojo arroja el “plano con un tajo”  $\mathbb{C} - (-\infty, 1]$ . Ver figura 11.5.

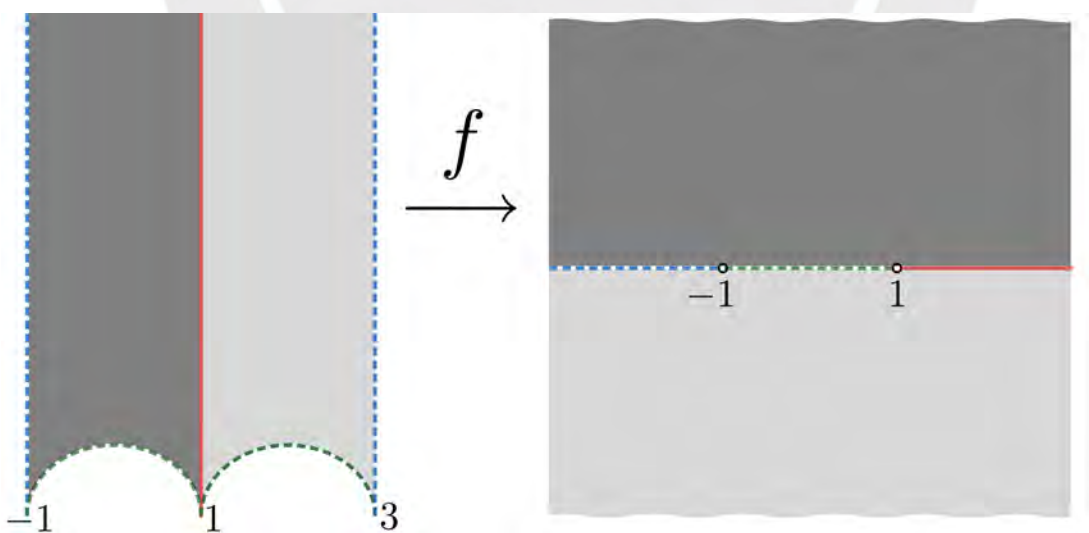


Figura 11.5

**Lema 11.1.** *La función  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C} - (-\infty, 1]$  es una equivalencia analítica.*

*Demostración.* De acuerdo con la proposición 3.2, la función  $f$  establece una equivalencia entre  $\mathcal{C}$ , el dominio, y  $f(\mathcal{C}) \subset \mathbb{C} - (-\infty, 1]$ , su imagen. Falta, por tanto, probar exclusivamente que la función es sobreyectiva. Esto, sin embargo es relativamente sencillo: la inversa  $f^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{R}$  puede ser reflejada también a lo largo de los arcos rojos. La sobreyectividad se sigue de inmediato.  $\square$

**Nota 11.2.** Para uso posterior, brindamos una fórmula semiexplícita para la extensión como sigue. La reflexión a lo largo de la semirrecta  $\operatorname{re} z = 1$  está dada por  $R(z) = 2 - \bar{z}$ . De esta manera, tenemos que se cumple para los puntos reflejados, y por consiguiente para todos, la identidad

$$f(z) = \overline{f(R(z))} = \overline{f(2 - \bar{z})}.$$

Por supuesto, nada impide realizar el mismo trabajo y reflejar desde el arco azul o el verde. Tenemos entonces, sin necesidad de ser repetitivos en la prueba, los siguientes dos resultados.

**Lema 11.3.** *La función  $f$ , originalmente definida en  $\mathcal{R}$  puede ser extendida a*

$$f : \{z \in \mathbb{H} : -3 < \operatorname{re} z < 1, |z + 2| > 1, |z| > 1\} \longrightarrow \mathbb{C} - [-1, \infty)$$

*de modo que sea analítica y sobreyectiva. Es más, en tal región se satisface*

$$f(z) = \overline{f(-2 - \bar{z})}.$$

*Demostración.* La reflexión a lo largo de la recta  $\operatorname{re} z = -1$  es  $z \mapsto -2 - \bar{z}$ , mientras que la reflexión en el segmento  $(-\infty, -1)$  es conjugación compleja.  $\square$

**Lema 11.4.** *La función  $f$ , originalmente definida en  $\mathcal{R}$ , puede ser extendida a*

$$f : \{z \in \mathbb{H} : -1 < \operatorname{re} z < 1, |z \pm 1/2| > 1/4\} \longrightarrow \mathbb{H}^+ \cup (-1, 1) \cup \mathbb{H}^-$$

*de modo que sea analítica y sobreyectiva. Es más, en tal región se satisface*

$$f(z) = \overline{f(1/\bar{z})}.$$

*Demostración.* La reflexión a lo largo del subarco de  $|z| = 1$  es  $z \mapsto 1/\bar{z}$ , mientras que a través del segmento  $(-1, 1)$  es nuevamente conjugación compleja.  $\square$



## Capítulo 12

# Identificación de $\mathbb{H}/\Gamma$ con la esfera triplemente agujereada

Para demostrar que  $f$  es una función que desciende al cociente por la acción de  $\Gamma$  queda por demostrar que puntos correspondientes en la frontera del dominio fundamental asumen el mismo valor bajo  $f$ .

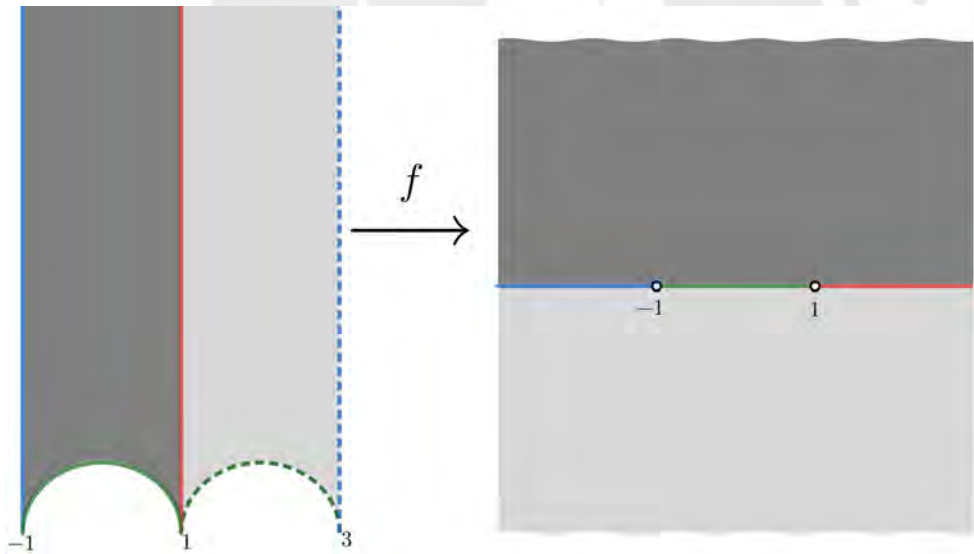


Figura 12.1: Si los lados del mismo color se corresponden,  $f$  es uno a uno.

Siguiendo las mismas técnicas, podemos reflejar a lo largo de la semirrecta  $\text{Re}(z) = 3$ , con lo cual queda claro que  $f$  está bien definida también a la derecha del dominio fundamental. Lo mismo ocurre si reflejamos los valores de  $f$  en  $\{z \in \mathbb{H} : 1 < \text{Re}(z) < 3\}$  por el semicírculo  $|z - 2| = 1$ ; la función  $f$  resulta

analítica también en una vecindad de este arco circular. Lo que interesa probar es que se cumple

$$f(z) = f(z + 4),$$

cuando  $z$  tiene parte real igual a  $-1$  y

$$f(z) = f\left(\frac{2z-1}{z}\right),$$

cuando  $|z| = 1$ . Hecho ello, podremos definir  $\varphi([z]) = f(z)$  al escoger un representante adecuado. De este modo habremos identificado el espacio de órbitas del grupo fuchsiano  $\Gamma$  con la esfera triplemente agujereada. Como una región invariante es recubrimiento de su espacio de órbitas y  $\mathbb{H}$  es simplemente conexo, habremos identificado el recubrimiento universal de la esfera triplemente agujereada, nuestro objetivo.

Para empezar, recordemos que cuando reflejamos una región triangular nos movemos a una región análoga y adyacente, pero que en el rango (de llegada) cada movida se corresponde a conjugación compleja: un salto ida y vuelta entre el semiplano superior y el inferior; en particular, dos movidas sucesivas nos regresan al lugar de partida.

Procedamos. Tomemos entonces  $z_1$  cercano al lado  $\operatorname{re} z = -1$ . Al aplicar reflexión respecto a esa vertical,  $z \mapsto -2 - \bar{z}$ , obtenemos un  $z_2 = -2 - \bar{z}_1$  aún cercano a  $\operatorname{re} z = -1$ . Por construcción las correspondientes imágenes se relacionan mediante la fórmula  $f(z_2) = \overline{f(z_1)}$ . Si ahora reflejamos  $z_2$  a lo largo de  $\operatorname{re} z = 1$  (vía  $z \mapsto 2 - \bar{z}$ ), obtenemos el punto

$$z_3 = 2 - \bar{z}_2 = 2 - \overline{(-2 - \bar{z}_1)} = z_1 + 4,$$

cercano ahora a  $\operatorname{re} z = 3$ ; con correspondiente imagen

$$f(z_1 + 4) = f(z_3) = \overline{f(z_2)} = f(z_1).$$

Por continuidad tendremos entonces

$$f(z) = f(z + 4)$$

cuando  $z$  en  $\mathbb{H}$  tenga parte real igual a  $-1$ .

Para los arcos circulares utilizamos las reflexiones  $z \mapsto 1/\bar{z}$  y  $z \mapsto 2 - \bar{z}$  en  $|z| = 1$  y  $\operatorname{re} z = 1$ , respectivamente. Empezando con un  $z_1$  cercano al semicírculo  $|z| = 1$ , digamos por abajo, en dos pasos terminamos cerca de  $|z - 2| = 1$  con

$$z_3 = 2 - \bar{z}_2 = 2 - \overline{1/\bar{z}_1} = \frac{2z_1 - 1}{z_1},$$

para el cual se tiene

$$f\left(\frac{2z_1 - 1}{z_1}\right) = f(z_3) = \overline{f(z_2)} = f(z_1),$$

es decir, nuevamente por continuidad, se cumple

$$f(z) = f\left(\frac{2z - 1}{z}\right),$$

cuando  $z$  en  $\mathbb{H}$  satisface  $|z| = 1$ .

Acabamos de terminar con la demostración del siguiente teorema fundamental.

**Teorema 12.1** (Uniformización de la esfera de Riemann triplemente agujereada).  
*Sea  $\phi(z) \in \bar{\mathcal{C}}$  la proyección de  $z \in \mathbb{H}$  vía su  $\Gamma$ -órbita. La aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\longrightarrow \hat{\mathcal{C}} - \{\infty, -1, 1\} \\ z &\longmapsto \varphi(z) = f(\phi(z)) \end{aligned}$$

*donde  $\phi(z)$  es un representante en  $\bar{\mathcal{C}}$ , es recubrimiento universal.*

*Demostración.* Esto está bien definido, pues hemos mostrado su compatibilidad. Y define una función analítica desde el espacio de órbitas de  $\Gamma$  puesto que  $\mathcal{C}$  es dominio fundamental.  $\square$

# Capítulo 13

## Uniformización de subconjuntos hiperbólicos

Ya estamos listos para redondear el trabajo y mostrar que todo subconjunto hiperbólico de la esfera de Riemann es uniformizado por el disco unitario (y por lo tanto también por el plano hiperbólico).

**Teorema 13.1.** *Sea  $B \subset \hat{\mathbb{C}} - \{-1, 1, \infty\}$  un subconjunto abierto y conexo, este admite recubrimiento universal al disco unitario.*

*Demostración.* Primero consideremos el recubrimiento  $\varphi$  del disco unitario a la esfera triplemente agujereada del capítulo anterior. Como  $B$  cae en la imagen de esta función, al restringirnos a  $\varphi^{-1}(B)$ , tenemos un recubrimiento de  $B$ . Si  $U \subset \mathbb{H}$  es cualquier componente de  $\varphi^{-1}(B)$ , resulta que

$$\varphi : U \rightarrow B$$

es un recubrimiento.

Ahora, si  $\psi : M \rightarrow B$  es recubrimiento universal de  $B$  (y todo subconjunto localmente euclideo tiene uno), al ser  $M$  simplemente conexo, esta función levanta a  $\tilde{\psi} : M \rightarrow U$  en el esquema

$$\begin{array}{ccc} M & & U \\ & \searrow \psi & \downarrow \varphi \\ & & B \end{array}$$

Pero todo levantamiento de un recubrimiento es un recubrimiento, con lo que  $\tilde{\psi}$  resulta recubrimiento universal de  $U$ . Como el recubrimiento universal de  $U$  es único, y este ya fue identificado en el capítulo 8 como  $\mathbb{D}$ , concluimos que el recubrimiento universal de  $B$  también es  $\mathbb{D}$ .  $\square$



# Bibliografía

- [1] LANG, S. *Complex Analysis*. Fourth Edition, Springer, 1999.
- [2] LIMA, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Quinta edición, IMPA 2018.
- [3] MUNKRES, J. *Topología*. Massachusetts Institute of Tecnology, 2002.
- [4] POIRIER, A. *Aspectos geométricos del análisis complejo*. Fondo Editorial PUCP, 2005.
- [5] POIRIER, A. *Iteración de polinomios y funciones racionales*. Fondo Editorial PUCP, 2016.
- [6] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.
- [7] SCHIFF, J. *Normal Families*. Springer-Verlag. 1993.
- [8] SPANIER, E. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag. 1989.