

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



**EL APRENDIZAJE DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES EN
ESTUDIANTES DE PRIMER GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA BASADO
EN LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS**


Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas
que presenta

SOLEDAD VICTORIA ANGLÉS MEJÍA

Dirigido por

KATIA VIGO INGAR

San Miguel, 2015



A la memoria de Stalmina Angles Mejía, mi querida madre, por sus ejemplos de perseverancia y constancia que la caracterizaron y que me ha infundido siempre, por el valor mostrado para salir adelante, por su apoyo incondicional, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido llegar a este lugar pero sobre todo por su amor.

A Julino y Gloria, mis hermanos, porque siempre he contado con ellos para todo, gracias a la confianza que siempre me han tenido, por el apoyo y el amor que me han brindado.

Carmela, Ovidio y Rebeca, mis tíos, gracias por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTO

- A Dios, por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos.
- Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, me permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominado “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.
- A mi Asesora Dra. Katia Vigo Ingar, al Dr. Uldarico Malaspina; a la Directora de la Maestría Jesús Flores; gracias por su gran apoyo, dedicación, paciencia y motivación para el desarrollo de esta investigación.
- A los miembros del jurado, Dra. Maria José Ferreira da Silva, Dr. Francisco Ugarte por todo el apoyo brindado y sus valiosas orientaciones para la culminación de esta investigación.
- A la Pontificia Universidad Católica del Perú y en especial a los docentes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por las experiencias y sabiduría que me transmitieron en el desarrollo de mi formación Profesional; gracias por enseñarme el verdadero papel de un educador matemático.
- Finalmente, a los estudiantes de la Institución Educativa Ricardo Palma – Totorani que participaron en esta experiencia educativa, por su colaboración al desarrollar las Situaciones Didácticas.

RESUMEN

Esta tesis tiene como objetivo analizar el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en los estudiantes de Primer Grado de Educación Secundaria de la Institución “Ricardo Palma” del Centro Poblado de Totorani, distrito de Acora, región Puno; al trabajar situaciones didácticas, que les permita adquirir las nociones de adición y sustracción de fracciones; a partir de nuestra investigación nos planteamos responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los estudiantes de primer grado de educación secundaria aprenden la adición y sustracción de fracciones por medio de una secuencia de problemas basada en la Teoría de Situaciones Didácticas?. Para esta investigación elegimos como referencial teórico aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) el cual nos permitió diseñar dos situaciones y una actividad de cierre; analizar las acciones, formulaciones y validaciones, y estudiar como los estudiantes transitaban por estas dialécticas. La metodología de investigación es el estudio de casos de Ponte (2006). Nuestra investigación nos permite afirmar que el proceso de validación para los estudiantes no es inmediato, asimismo observamos que a pesar que la interacción del estudiante con el medio se dio en todo momento, algunos estudiantes no lograron movilizar los conceptos de adición y sustracción de fracciones.

Palabras clave: Fracciones, Teoría de Situaciones Didácticas, Estudio de Casos.

ABSTRACT

This thesis has the objective to analyze the learning process of addition and subtraction of fractions in the first grade High School students from the Institution "Ricardo Palma" located in Totorani, Acora district, Region of Puno; didactic situations at work, enabling them to acquire the notions of addition and subtraction of fractions; from our research we plan to answer the research question: How do students first grade secondary education learn addition and subtraction of fractions by means of a sequence of problems based on the Theory of Didactic Situations ?. For this research we choose as a theoretical framework aspects of the Theory of Didactic Situations Brousseau (2007) which allowed us to design two situations and a closing activity; analyze stocks, formulations and validations, and studying how students passed through these dialectical. The research methodology is the Study of Cases of Ponte (2006). Our research allows us to state that the validation process for students is not immediate, we also note that although student interaction with the medium is given at all times, some students failed to mobilize the concept of addition and subtraction of fractions.

Keywords: Fractions, Theory of Didactic Situations, Study of Cases

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Fragmento del papiro Rhind	22
Figura 2. Representaciones de algunas fracciones	22
Figura 3. Representaciones de fracciones	22
Figura 4. Fracciones formadas con el ojo de cobra	23
Figura 5. Un treintaicuatroavo en notación jónica	25
Figura 6. Fracción en notación Griega	26
Figura 7. Fracciones	28
Figura 8. Fracciones equivalentes	29
Figura 9. Actividad 1	29
Figura 10. Adición y Sustracción de Fracciones	30
Figura 11. Actividad 3	31
Figura 12. Situación 1 - Problema A	51
Figura 13. Situación 1 - Problema A	52
Figura 14. Situación 1 - Problema A	53
Figura 15. Situación 1 - Problema B	55
Figura 16. Situación 1 - Problema B	56
Figura 17. Situación 1 - Problema B	57
Figura 18. Situación 1 – Problema B.....	57
Figura 19. Situación 1 - Problema B	58
Figura 20. Situación 1 - Problema C	60
Figura 21. Situación 1 – Problema C.....	61
Figura 22. Situación 1 – Problema C.....	61
Figura 23. Situación 1 – Problema C.....	62
Figura 24. Situación 1 – Problema C.....	62
Figura 25. Situación 1 – Problema C.....	63

Figura 26. Situación 1 – Problema C.....	63
Figura 27. Situación 1 – Problema C.....	64
Figura 28. Situación 1 – Problema C.....	64
Figura 29. Situación 2 – problema A.....	67
Figura 30. Situación 2 – problema A – ítem 1	68
Figura 31. Situación 2 – problema A – ítem B.....	68
Figura 32. Situación 2 – problema A.....	69
Figura 33. Situación 2 – problema A – ítem 1	69
Figura 34. Situación 2 – problema A – ítem 1	70
Figura 35. Situación 2 - problema A	70
Figura 36. Situación 2 - problema A	71
Figura 37. Situación 2 – problema A – ítem 1	71
Figura 38. Situación 2– problema A – ítem 2	72
Figura 39. Representación de problema B – Situación 2	73
Figura 40. Representación de problema B – Situación 2.....	74
Figura 41. Situación 2– problema B.....	74
Figura 42. Situación 2 – problema B.....	76
Figura 43. Situación 2 – problema B – ítem 1	76
Figura 44. Situación 2 – problema B – ítem 2.....	77
Figura 45. Situación 2 – problema B.....	78
Figura 46. Situación 2 – problema B – ítem 1	78
Figura 47. Situación 2 – problema B – ítem 2.....	79
Figura 48. Situación 2 – problema B.....	80
Figura 49. Situación 2 – problema B – ítem 1	80
Figura 50. Situación 2 – problema B – ítem 2.....	81
Figura 51. ítem (a) - Actividad de cierre	84

Figura 52. Ítem (a) - Actividad de cierre	84
Figura 53. Ítem (a) de la Actividad de cierre	85
Figura 54. Ítem (b) - Actividad de cierre	85
Figura 55. Ítem (b) - Actividad de cierre	86
Figura 56. Ítem (c) - Actividad de cierre	87
Figura 57. Ítem (c) - Actividad de cierre	88
Figura 58. Ítem (c) - Actividad de cierre	89
Figura 59. Ítem (d) - Actividad de cierre	89
Figura 60. Ítem (d) - Actividad de cierre	90
Figura 61. Ítem <i>b</i>) de la Actividad de cierre	91
Figura 62. Problema de la Actividad de cierre	91
Figura 63. Problema - Actividad de cierre	92
Figura 64. Problema de la Actividad de cierre	92

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Simbolismo Egipcio para fracciones simples.....	23
Tabla 2. La tabla 2n del papiro de Rhind, forma moderna.....	24
Tabla 3. Símbolos matemáticos babilónicos	25
Tabla 4. Variable didáctica y valores	37



ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	6
LISTA DE TABLAS	9
CONSIDERACIONES INICIALES	12
CAPÍTULO 1- PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN	14
1.1 Antecedentes	14
1.2 Justificación	17
1.3 Problema de investigación	19
1.4 Objetivos de investigación	20
CAPÍTULO 2 – ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO	21
2.1 Una visión histórica del objeto matemático fracciones	21
2.2 Estudio didáctico del objeto matemático fracciones.....	26
2.3 Estudio matemático de las fracciones	31
CAPÍTULO 3 - MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO	34
3.1 Aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas.....	34
3.2 Situación Didáctica, Situación adidáctica.....	35
3.3 Dialécticas de la Situaciones Didácticas.....	37
3.4 Metodología.....	40
CAPÍTULO 4 - EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS	46
4.1 Caracterización de los sujetos de la investigación	46
4.2 Descripción de las Situaciones Didácticas.....	46
4.3 Procedimiento de aplicación de las Situaciones Didácticas	48
4.4 Análisis de las Situaciones Didácticas	49
CONSIDERACIONES FINALES	94
REFERENCIAS	96
ANEXOS	98

SITUACIÓN 1.....	98
SITUACIÓN 2.....	99
ACTIVIDAD DE CIERRE	100
AUTORIZACIONES DE LOS PADRES	101



CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación abordará el estudio de los procesos de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en los estudiantes de Primer Grado de Educación Secundaria por medio de una secuencia de problemas basados en aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Esta investigación quiere comprobar que el estudiante puede construir su propio conocimiento por medio de situaciones de aprendizaje, planeadas, diseñadas, elaboradas por el docente, y lograr que el estudiante se apropie de las mismas, por medio de la interacción con el medio, y que un aprendizaje incorrecto sobre la adición y sustracción de fracciones puede crear problemas en el aprendizaje de otros objetos matemáticos que necesite del uso de fracciones.

A continuación presentamos nuestro trabajo compuesto de cuatro capítulos:

En el primer capítulo, describimos algunas investigaciones previas a la nuestra, relacionadas con el aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones. Luego continuamos con las características e importancia de nuestra investigación. Finalmente, presentamos el problema de investigación, para luego presentar al objetivo general y los objetivos específicos.

En el segundo capítulo, presentamos un breve estudio histórico de las fracciones, para esto, estudiamos a través del tiempo, las siguientes culturas: Egipcia, Babilónica y Griega; porque es necesario saber cómo surgen las concepciones relacionadas con las fracciones, que es el objeto matemático de nuestra investigación. Además, consideramos el estudio didáctico y matemático de nuestro objeto de estudio, adición y sustracción de fracciones, porque consideramos importante cómo es que se presenta desde el punto de vista de la matemática formal y cómo se presenta en el libro de texto para primero de secundaria. Dichos estudios nos apoyan en la elaboración y organización de nuestras Situaciones Didácticas, así como para el estudio didáctico del objeto matemático.

En el tercer capítulo, señalamos porqué elegimos como marco teórico de nuestra investigación aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), teoría que propone un modelo de interacción entre estudiantes, profesor y medio en el cual se debe desarrollar el aprendizaje. Y como metodología el Estudio de Casos, siendo nuestro caso el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones, así como nos permite hacer una validación interna, porque analizamos los datos que se obtuvieron considerando las Situaciones Didácticas propuestas del proceso de aprendizaje de adición y sustracción de fracciones en estudiantes de primer grado de secundaria con el apoyo en las dialécticas de la Teoría de Situaciones

Didácticas; además no estamos preocupados solamente por los resultados sino también por el proceso de construcción del conocimiento.

En el último capítulo, presentamos la caracterización de los sujetos de investigación, describimos las Situaciones Didácticas, explicamos el procedimiento y desarrollo del experimento, los comportamientos esperados y efectuamos el análisis de nuestras Situaciones Didácticas según las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas, en estudiantes de primer grado de educación secundaria de la Institución “Ricardo Palma” ubicado en el Centro Poblado de Totorani, distrito de Acora, provincia de Puno, región Puno.



CAPÍTULO 1- PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN

En este Capítulo, describimos algunas investigaciones previas a la nuestra, como son: Silva (2005), Ríos (2007), Almouloud & Silva (2008), Carrillo (2012), Hurtado (2012), Ruiz (2013); relacionadas con el aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones. Luego continuamos con las características e importancia de nuestra investigación. Finalmente, presentamos el problema de investigación, para luego presentar al objetivo general y los objetivos específicos.

1.1 Antecedentes

Se han realizado diversas investigaciones respecto a las fracciones; algunas sobre sus diferentes significados y otras sobre las dificultades que se presentan cuando se enseña y aprende fracciones.

Almouloud & Silva (2008) sugieren que actividades con las cuatro operaciones de fracciones movilizándolo el concepto parte - todo ayudaría en la práctica docente; sin embargo, en el momento de la solución, se utilizan otras concepciones de fracción como es de medida. Se aprecia la representación geométrica y simbólica en contexto continuo y discreto; para las fracciones impropias, se utiliza la recta numérica para dar significado a las fracciones. Estas actividades fueron desarrolladas en la formación de maestros en Brasil y nosotros adaptamos para trabajar con estudiantes de primer grado de secundaria; es relevante para nuestro trabajo de investigación porque es el objeto matemático de nuestra investigación, además, es de mucha importancia porque adaptamos las actividades referidas, adición y sustracción de fracciones, en nuestras situaciones 1 y 2.

En esta misma línea tenemos a Silva (2005), quien nos da a conocer los diferentes significados de fracción como parte - todo, cociente, razón, operador, medida. Además, hace referencia a que la mayor dificultad en los docentes capacitados de educación primaria del Brasil se presentó en los contenidos sobre fracciones y la mayor parte eran conscientes de la debilidad de su conocimiento. A partir de ello, se muestra la necesidad de una formación en los conceptos de fracción, debido a que la formación inicial de los maestros no los prepara para desarrollar contenidos matemáticos básicos o para desarrollar con autonomía suficiente la profundización de este conocimiento; la formación de maestros podría ayudar a enseñar mejor. La autora afirma que un cambio en la práctica docente en ejercicio, se puede lograr con las actividades de capacitación previstas para los profesores, no sólo en la parte práctica docente sino también en el conocimiento del contenido. Sobre esto, Schulmann 1987 (citado

en Silva, 2005) afirma, el profesor debe entender completamente el tema que enseña porque es muy importante para la comprensión del estudiante. Es relevante para nuestra investigación porque si el docente no comprende el significado de fracción, objeto matemático de nuestra investigación, es probable que se esté enseñando de forma incorrecta a los estudiantes.

Carrillo (2012), analiza la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presentan en el libro de texto “Matemática quinto grado de Educación Primaria” de Perú, Ministerio de Educación (2009). Como resultado, se encuentra que se enfatiza en la concepción de parte - todo, utilizando principalmente la técnica del doble conteo de las partes. Además, se utilizan las concepciones de fracción como operador, cociente y razón; no se usa la concepción como medida; la autora advierte que la técnica del doble conteo de las partes puede constituir un obstáculo didáctico para construir otras técnicas. Así, por ejemplo, cuando se pretenda representar gráficamente a la fracción impropia $\frac{7}{6}$ sería ilógico pretender que el alumno entienda que se puede tomar 7 partes de un todo dividido en 6 partes. Lo que debería hacerse, aunque de manera forzada, es representar dos unidades con las mismas medidas y divididas en seis partes de un todo ($\frac{6}{6}$) y de la otra unidad, $\frac{1}{6}$. La suma de ambas fracciones sería $\frac{7}{6}$. Esta es la representación hecha en Quiroz y Salgado 2009 (citado en Carrillo 2012). Por otro lado, se observa que en el texto no se presentan interpretaciones gráficas a la adición y sustracción de fracciones; en el mejor de los casos, se utilizan las fracciones equivalentes, pero sin justificar porque se usan. Esta investigación es relevante para nuestro trabajo porque nos permite conocer la forma en que es presentado en el libro de texto nuestro objeto matemático, los mismos que son utilizados como libro de consulta por docentes y estudiantes.

Continuando con esta línea, tenemos la investigación de Ruiz (2013), donde presenta una Propuesta Didáctica en Educación Básica, en sexto grado de primaria (Bogotá) para la enseñanza de las fracciones, abordada desde dos puntos de vista, como relación parte - todo y como cociente. La fracción como relación parte - todo, trabaja primero el contexto continuo (unidades relacionadas con el concepto de área o de longitud que corresponden a magnitudes cuya medida está asociada con los números reales) y luego el discreto (se refiere a conjuntos con elementos que puedan separarse, asociado con elementos del conjunto de los Números Naturales). Por otra parte, cuando se mencionan contextos discretos, en la interpretación de la fracción como cociente, se estudia primero el contexto discreto y luego el continuo. En esta Propuesta Didáctica, se construyó una Secuencia de Enseñanza que facilita la comprensión de

la fracción en las formas de relación parte - todo y como cociente, apuntando a mejorar los desempeños en las evaluaciones de la educación colombiana. Las actividades se organizan en cinco partes: preconceptos, objetivos, conceptos a trabajar, metodología y guía de clase. Esta propuesta consta de 12 actividades en total, 9 de estas se refieren a guías de clase y 3 a actividades lúdicas. Este trabajo es relevante para nuestra investigación porque nos permite conocer estrategias de aprendizaje llevadas a cabo en educación primaria y con nuestro objeto matemático fracciones. Además, para nuestro trabajo de investigación necesitamos planear, diseñar una situación de aprendizaje adecuada para estudiantes de primer grado de secundaria.

Ríos (2007), afirma que las dificultades en el aprendizaje del concepto fracción se debe, en parte, a las diversas representaciones que tiene este concepto (parte - todo, cociente, razón, operador, medida), y que a la hora de enseñarlo no son considerados, en algunos casos, si se trabajan algunas representaciones no se establecen relaciones entre ellas; lo cual lleva a que se produzcan dificultades para aprender y errores en el aprendizaje de conceptos relacionados con las fracciones. Por las dificultades observadas, Ríos (2007) diseñó una propuesta que mejora este proceso, teniendo como objetivo la efectividad de la aplicación de una secuencia de actividades sobre las fracciones, en alumnos del primer semestre de Licenciatura en educación en Venezuela, usando como metodología ingeniería didáctica y como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1986). Son grandes las dificultades que se presentan al sumar y restar fracciones y varios investigadores concluye que muchos estudiantes poseen poca habilidad para operar entre fracciones y reducida comprensión conceptual. Esto lo aseguran Lankford, Hart, Suydam, Carpenter y N.A.E.P., citados en Dickson y col. (1991), posteriormente citado en Ríos (2007), sostienen que en la suma de fracciones el error más común en secundaria es el de sumar numeradores y denominadores entre sí; por la experiencia en aula, nosotros estamos de acuerdo con estos autores. También existen errores como consecuencia de concebir cada término de la fracción (numerador y denominador) como dos números aislados y sin relación alguna entre ellos. Al respecto, Maza 1999 (citado en Ríos 2007) afirma, fracción es una pareja de números enteros y que, por tal razón, históricamente se le denominó número roto o quebrado, pero seguía siendo un número, no dos. Este trabajo es relevante para nuestra investigación porque nos muestra la eficiencia de una propuesta didáctica sobre fracciones con base teórica aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas, el mismo que tomamos en cuenta el momento de elaborar nuestras situaciones de aprendizaje.

Hurtado (2012), asegura que los estudiantes del sexto grado presentan errores en la interpretación de textos que involucran las fracciones y en la solución de problemas que requieren de los conocimientos básicos de fracción, debido a que sus experiencias y conocimientos sobre las fracciones han sido adquiridas a través de la aplicación mecánica de algoritmos, sin la construcción de significados; frente a esto, el autor plantea la implementación de una propuesta didáctica diseñada con base a la resolución de problemas; donde se pretendió desarrollar las capacidades de los niños para comprender textos, proponer soluciones en diferentes contextos, resolver problemas y valorar e interpretar los resultados; sus resultados en la investigación son el incremento del número de estudiantes que acertaron en la solución de los problemas propuestos; en el estudio exploratorio se observó que alrededor del 17% de los estudiantes lograron responder correctamente; al aplicar talleres diseñados con base en solución de problemas, este porcentaje se incrementó aproximadamente al 80%. Se verifica entonces que los estudiantes responden mejor ante situaciones problemáticas. Es relevante para nuestro trabajo, porque consideramos este trabajo para el diseño de nuestra situación, considerando problemas en cada una de nuestras situaciones.

De esta forma, poniendo énfasis en las condiciones didácticas y cognitivas que una situación didáctica debe contener, se analizará el aprendizaje del objeto matemático en cuestión.

A partir de las investigaciones revisadas y nuestra posición al respecto, nosotros como profesores debemos buscar alternativas didácticas que ayuden a los estudiantes a apropiarse de los conocimientos matemáticos, Situaciones Didácticas diseñadas, planificadas por el profesor para que el estudiante construya su conocimiento partiendo de sus conocimientos previos. En esta investigación tenemos el propósito de elaborar dos Situaciones basada en aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) como medio para el aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones.

1.2 Justificación

Vivimos en un mundo competitivo y marcado por el avance científico y tecnológico, que exige con mayor razón la calidad educativa. Pero nuestra realidad nos muestra estudiantes con dificultades en temas básicos y fundamentales de la matemática, como la adición y sustracción de fracciones. Esta situación podría empeorar si no se logra Situaciones Didácticas que faciliten el aprendizaje de los estudiantes en todos los niveles y modalidades del sistema educativo actual.

Investigar sobre las mejores formas de lograr aprendizajes sobre fracciones como las investigaciones en Enseñanza de la Matemática de Almouloud & Silva (2008), Silva (2005), Ríos (2007), Carrillo (2013), Hurtado (2012), investigaciones que consideramos para el diseño y elaboración de nuestras situaciones didácticas. Además nuestro objeto matemático fracciones, se encuentra en el contexto educativo peruano, dentro los planes de estudio del área de matemática como en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (DCN) Perú, Ministerio de Educación (2009). Además, es un tema que se estudia en los niveles de primaria y secundaria. No sólo se estudia en aritmética, sino también aparece en otros temas de estudio como álgebra, geometría, trigonometría, ciencias; como vemos, es un tema que se toca en todo momento de nuestra formación.

Según el DCN Perú, Ministerio de Educación (2009), entre las capacidades que se propone trabajar en el sétimo ciclo, se encuentran el razonamiento y la demostración. Según esto, el estudiante debe comparar y ordenar los números naturales, enteros y racionales. En la capacidad comunicación matemática, el estudiante debe interpretar el significado de números naturales, enteros y racionales en diversas situaciones y contextos. Además se menciona la capacidad de resolución de problemas según la cual el estudiante debe resolver problemas que implican cálculos en expresiones numéricas con números naturales, enteros o racionales. En la parte de conocimientos, se menciona los sistemas numéricos, orden y operaciones con números racionales, tanto en su representación con fracciones como en su representación decimal.

Los resultados de las pruebas de la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004, Perú, Ministerio de Educación (2005), aplicadas a tercero y quinto de secundaria, nos muestran que los estudiantes presentan limitaciones al enfrentarse a tareas sencillas que ya deberían poder resolver desde grados anteriores y para las cuales han sido instruidos. No comprenden el significado de los números racionales y sus representaciones (fraccionaria y decimal). No son capaces de calcular operaciones aritméticas combinadas con números racionales, sin signos de agrupación o con ellos.

En nuestra práctica docente en Educación Secundaria, los estudiantes presentan dificultades cuando se trabaja fracciones, creemos que resulta beneficioso para el aprendizaje del estudiante que trabaje un problema contextualizado partiendo de sus conocimientos previos, por lo que, pretendemos construir una propuesta basada en aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, que permita al estudiante construir su propio conocimiento, es decir el

saber que se pretende enseñar sea construido por él, y lo lleven a adquirir el nuevo saber. Por nuestra parte brindarle todas las herramientas y condiciones necesarias para que pueda desenvolverse apropiadamente en este proceso; y en dicho proceso desarrolle habilidades para argumentar y justificar sus procedimientos, suposiciones y resultados. La Teoría de Situaciones Didácticas es la que nos brinda una manera de enseñar, basada en Situaciones Didácticas, donde se le da al estudiante la responsabilidad de construir su propio aprendizaje a partir de ciertas interacciones con un medio propuesto y monitoreado por el profesor.

La utilidad de las fracciones en la vida diaria se observa en todo momento. Al adquirir productos en el mercado: medio litro de leche ($\frac{1}{2}$); un cuarto de kilo de café ($\frac{1}{4}$); artículos embolsados en tres cuartos de kilo de arroz, azúcar, fideos ($\frac{3}{4}$); cuando dividimos una torta, un queso, una pizza, etc. en ocho partes ($\frac{1}{8}$); medio litro de jugo ($\frac{1}{2}$); en las recetas de cocina, cuando tenemos una receta para cuatro personas y lo que necesitamos preparar es para un número menor o mayor de personas tendremos que aplicar la adición o sustracción de fracciones según sea el caso. En las tiendas comerciales; en las ofertas a menudo escuchamos “lleve tres pague dos” o “dos por uno”. En la medicina; media pastilla ($\frac{1}{2}$), en los laboratorios de salud; en las ferreterías, los tamaños de los clavos, tornillos, fierros de construcción, brocas, tuercas, tubos de agua, tubos de desagüe. Como podemos ver, vivimos rodeados de situaciones en las que se usan las fracciones.

Así, en nuestras observaciones y en las investigaciones revisadas, encontramos razones que justifican diseñar una secuencia de aprendizaje basada en la teoría de situaciones didácticas para la enseñanza de la adición y sustracción de fracciones en alumnos de primer grado de educación secundaria.

1.3 Problema de investigación

Por nuestra experiencia docente y por las investigaciones revisadas, existen dificultades en los estudiantes del primer grado de educación secundaria para efectuar comprensivamente las operaciones de adición y sustracción de fracciones homogéneas y heterogéneas.

Sostenemos que esto es un problema y pensamos que una manera de lograr tal aprendizaje es por medio de situaciones problema; considerando que en nuestro trabajo de investigación la componente didáctica tiene una importancia especial. Encontramos pertinente tomar como soporte teórico aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007); siendo

esta una teoría con una sólida fundamentación científica que nos permitirá interpretar las actitudes, procedimientos y relaciones que se lleva a cabo en una situación didáctica.

Esta investigación tendrá como referente las investigaciones hechas por Silva (2005), Almoloud & Silva (2008), Ríos (2007), Carrillo (2012), Hurtado (2012), investigaciones que consideramos para planificar y diseñar nuestras Situaciones Didácticas. Así, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo los estudiantes de primer grado de educación secundaria aprenden la adición y sustracción de fracciones por medio de una secuencia de problemas basado en aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas?

1.4 Objetivos de investigación

Objetivo general

Analizar el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en los estudiantes de Primer Grado de Educación Secundaria por medio de una secuencia de problemas basado en aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

- ✓ Identificar las dialécticas de la teoría de situaciones didácticas en la secuencia de problemas.
- ✓ Estudiar las acciones, formulaciones y validaciones que realizan los estudiantes al desarrollar la secuencia de problemas.

CAPÍTULO 2 – ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En esta parte de la investigación presentamos un breve estudio histórico de las fracciones; para esto, estudiamos a través del tiempo, las siguientes culturas: Egipcia, Babilónica y Griega. Además, consideramos el estudio didáctico y matemático de nuestro objeto de estudio, adición y sustracción de fracciones. Dichos estudios nos apoyan en la elaboración y organización de nuestras Situaciones Didácticas, así como para el estudio didáctico del objeto matemático.

2.1 Una visión histórica del objeto matemático fracciones

Para ello utilizaremos la investigación de Ruiz (2013), quien se guía de diferentes autores como: Fandiño, Bell, O'Connor & Robertson, Stewart, Collete, Cajori, Gardner, Rey & Babini, Stewart y nos permite conocer los documentos más antiguos que hablan sobre la presencia de este concepto en Egipto, Babilonia y Grecia; juntamente con las primeras notaciones de fracciones.

Los egipcios

El papiro Moscú y el papiro Rhind, son los documentos más importantes del Egipto Antiguo. El papiro Moscú fue escrito en escritura hierática aproximadamente en 1890 A.C., se desconoce el objetivo con el que fue escrito. Hay dos problemas sobresalientes, uno del volumen de una pirámide truncada y otro del área de una especie de “cesto”.

El papiro Moscú, maneja métodos de resolución que son casi los mismos que se usan en el papiro Rhind. El problema 14 indica que los egipcios conocieron la fórmula matemática correcta para calcular el volumen del tronco de una pirámide de base cuadrada.

El papiro de Rhind, lo obtuvo Alexander Rhind en Luxor, en 1858; al parecer fue un “Manual práctico de Matemáticas egipcias”, que fue compuesto por el escriba Ahmés (Acmés), quien afirma que el texto fue copiado de un escrito antiguo.

El autor afirma que encontraron una descripción de un fragmento del papiro Rhind (figura 1), de los aproximadamente 85 problemas, donde se manejan fracciones, soluciones, ecuaciones simples, progresiones, áreas (triángulos, trapezoides, círculos y rectángulos) y volúmenes (cilindros y prismas). Sobre las fracciones, afirma que sólo operaban con fracciones de la unidad (numerador uno), las demás debían ser reducidas a suma de fracciones con numerador uno. Sobre el problema 48 del papiro Rhind, afirma, tiene que ver con una fracción, y se

refiere al cálculo de un área que da una aproximación del número $(\frac{16}{9})^2$ como una aproximación del número π .



Figura 1. Fragmento del papiro Rhind
Fuente: Ruíz (2013, p.21)

Sistema Jeroglífico

Encontramos en la investigación de Ruiz (2013), fracciones de numerador uno y algunas fracciones representadas por signos especiales (figuras 2).

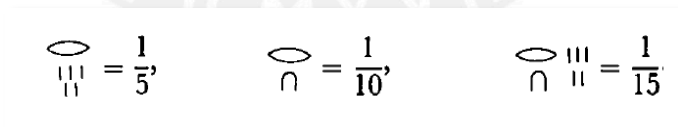


Figura 2. Representaciones de algunas fracciones
Fuente: Ruiz (2013, p. 23)

También encontramos en la investigación del autor, fracciones de numerador diferente al uno (figuras 3).

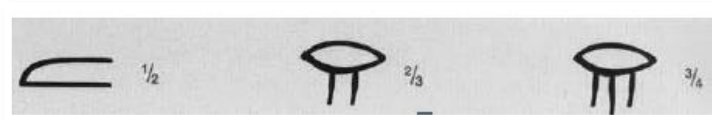


Figura 3. Representaciones de fracciones
Fuente: Ruiz (2013, p. 23)

Además nos presenta a las fracciones formadas con el ojo de cobra; que significa “ojo humano” u “ojo de halcón” y en la literatura se menciona como “ojo de Horus” u “ojo de cobra” (figura 4).

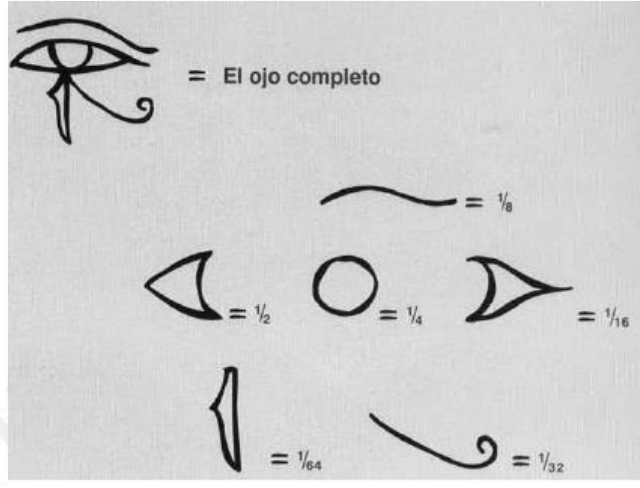


Figura 4. Fracciones formadas con el ojo de cobra
Fuente: Ruiz (2013, p. 23)

Sistema Hierático

Esta ilustración es reproducida de la tabla preparada por Kurt Sethe, mencionada en la investigación de Ruiz (2013), donde se observa que el símbolo antiguo para $\frac{1}{4}$ era la cruz, además se observa otras fracciones simples (tabla 1).

Tabla 1. Simbolismo Egipto para fracciones simples

	Altaegyptische Bruchzeichen						Arabische Bruchzeichen				
$\frac{1}{2}$	☩	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	2, 2	/	⌌	⌌	
$\frac{1}{3}$	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	3, 3	⌌	⌌		⌌
$\frac{2}{3}$	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	1, 1	⌌	⌌		
$\frac{1}{4}$	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	4, 4	⌌	/	>	
$\frac{3}{4}$	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	1, 1, 1	⌌	⌌	⌌	⌌
$\frac{1}{6}$	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	6, 6		⌌		
$\frac{1}{8}$	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	8, 8		⌌		
$\frac{1}{10}$	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	⌌	10, 10		⌌		

Fuente: Ruiz (2013, p.25)

Tabla $\frac{2}{n}$

Ruiz (2013) nos dice que para los egipcios, las operaciones con fracciones les ocasionaban problemas serios, debido a que acostumbraban manipular fracciones que tenían únicamente como numerador la unidad. La tabla $\frac{2}{n}$ del papiro Rhind es sobre fracciones y ocupa la tercera parte del documento (tabla 4). No fue trivial, para los historiadores, descifrar el código de construcción de esta tabla.

Tabla 2. La tabla $\frac{2}{n}$ del papiro de Rhind, forma moderna

$2/3 = 1/2 + 1/6$	$2/5 = 1/3 + 1/15$	$2/7 = 1/4 + 1/28$
$2/9 = 1/6 + 1/18$	$2/11 = 1/6 + 1/66$	$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$
$2/15 = 1/10 + 1/30$	$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$	$2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$
$2/21 = 1/14 + 1/42$	$2/23 = 1/12 + 1/276$	$2/25 = 1/15 + 1/75$
$2/27 = 1/18 + 1/54$	$2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$	$2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$
$2/33 = 1/22 + 1/66$	$2/35 = 1/30 + 1/42$	$2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$
$2/39 = 1/26 + 1/78$	$2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$	$2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301$
$2/45 = 1/30 + 1/90$	$2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$	$2/49 = 1/28 + 1/196$
$2/51 = 1/34 + 1/102$	$2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795$	$2/55 = 1/30 + 1/330$
$2/57 = 1/38 + 1/114$	$2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$	$2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610$
$2/63 = 1/42 + 1/126$	$2/65 = 1/39 + 1/195$	$2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536$
$2/69 = 1/46 + 1/138$	$2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710$	$2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365$
$2/75 = 1/50 + 1/150$	$2/77 = 1/44 + 1/308$	$2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790$
$2/81 = 1/54 + 1/162$	$2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498$	$2/85 = 1/51 + 1/255$
$2/87 = 1/58 + 1/174$	$2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$	$2/91 = 1/70 + 1/130$
$2/93 = 1/62 + 1/166$	$2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$	$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$
$2/99 = 1/66 + 1/198$	$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$	

Fuente: Ruiz (2013, p.27)

Los babilonios

La investigación de Carrillo (2012), se encuentra la investigación sobre los babilonios, ellos usaron el sistema de numeración posicional de base 60. En sus escritos cuneiformes, crearon un sistema posicional ambiguo para representar a los números fraccionarios. Esto hace creer que los babilonios utilizaron los números fraccionarios de manera frecuente, porque aparece varias veces en los Códigos de Hamurabi (1694 A. C). Acerca de lo mismo la investigación Ruiz (2013) se encuentra que en el reinado de Sargón, alrededor del 2750 A. C. se encuentran registros de eclipses, lo que indica que el sistema de numeración debía ser avanzado en aquella época. Sistema que todavía está en nuestras divisiones de horas, minutos y segundos. Es probable que se haya escogido el 60 porque tiene varios divisores y, por tanto, el trabajo con sus partes fraccionarias era más sencillo que con otro número que tuvieran menos

divisores. Y que los babilonios no tenían un símbolo para el cero pero indicaban una posición vacía mediante un símbolo de dos cuñas (tabla 3).

Tabla 3. Símbolos matemáticos babilónicos

1	𐎶	11	𐎶𐎵	21	𐎶𐎵𐎶	31	𐎶𐎵𐎶𐎵	41	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶	51	𐎶𐎵𐎶𐎵𐎶𐎵
2	𐎶𐎶	12	𐎶𐎵𐎶𐎶	22	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶	32	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	42	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	52	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
3	𐎶𐎶𐎶	13	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶	23	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	33	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	43	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	53	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
4	𐎶𐎶𐎶𐎶	14	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	24	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	34	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	44	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	54	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	15	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	25	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	35	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	45	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	55	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	16	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	26	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	36	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	46	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	56	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	17	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	27	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	37	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	47	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	57	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	18	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	28	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	38	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	48	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	58	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	19	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	29	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	39	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	49	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	59	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
10	𐎶𐎶𐎶	20	𐎶𐎵𐎶𐎶	30	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶	40	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶	50	𐎶𐎵𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶		

Fuente: Ruiz (2013, p. 29)

Los griegos

La investigación del autor afirma que los griegos no tenían dificultades con las notaciones de los números enteros, pero eran débiles en las notaciones con fracciones, utilizaron fracciones unitarias al igual que los egipcios. Su notación habitual para un submúltiplo de un entero consistía en escribir, el entero con un acento. Entre los matemáticos de la escuela de Alejandría se emplearon fracciones ordinarias y fracciones sexagesimales en Astronomía y Trigonometría (figura 5).

$$\lambda\delta' = \frac{1}{34}$$

Figura 5. Un treintaicuatroavo en notación jónica

Fuente: Ruiz (2013, p. 40)

Los griegos escribieron las fracciones de diversas formas. Una de ellas consistía en escribir el numerador, seguido por una prima, y luego el denominador, seguido por una doble prima. Otras veces el denominador se escribía dos veces. Algunos astrónomos griegos, empleaban el

sistema sexagesimal babilónico por precisión, aunque también utilizaron símbolos griegos para los “dígitos” componentes (figura 6).

$$\frac{21}{47} = \kappa\alpha' \mu\zeta'' \mu\zeta'''$$

Donde: $\kappa\alpha = 21$ y $\mu\zeta = 47$

Figura 6. Fracción en notación Griega

Fuente: Ruiz (2013, p. 40)

De esta forma hemos visto las fracciones a través del tiempo y diferentes culturas en el mundo. Ahora veremos el estudio del objeto matemático a investigar desde un estudio didáctico y desde la matemática formal, la misma que es necesaria para planificar, organizar y diseñar nuestras Situaciones Didácticas para nuestra investigación. A partir de lo que nosotros presentaremos lo que consideraremos como fracción en nuestra experimentación con los estudiantes de primero de secundaria de la Institución Educativa “Ricardo Palma”.

2.2 Estudio didáctico del objeto matemático fracciones.

En cuanto a los aspectos didácticos tomamos la investigación de Silva (2005), quien menciona a diferentes autores como: Davis y Hersch (1985), D’Augustine (1976), Alphonse (1995), Ciscar y García (1998), Caraca (1984) y Rouche (1998); sobre el uso de los términos de fracción y números racionales, manifestando lo siguiente:

Davis y Hersch (1985), identifican a la fracción racional cuando define a los números racionales como cualquier número que sea la razón de dos enteros.

D’Augustine (1976), define a los números fraccionarios como cociente de dos números naturales con el divisor diferente de cero, esto es, un número fraccionario es cualquier número que puede ser escrito en forma de $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales, y $b \neq 0$. Una fracción puede ser definida como un símbolo o un nombre para designar un número fraccionario.

Alphonse (1995), afirma que las fracciones no son números, aunque, en contextos, son operaciones de medida. Asocia la fracción a un operador de fraccionamiento.

Ciscar y García (1998), da una posible interpretación de fracción a situaciones en que está implicada la relación parte todo. Asimismo, también podemos representar, mediante una fracción, situaciones en que está implícita una relación parte - parte o todo - todo que nos lleva a la interpretación de fracción como razón.

Caraca (1984), quien afirma los enteros son racionales pero no son números fraccionarios, aunque se presenten éstos en el estudio de los números racionales escritos de la forma $\frac{a}{b}$.



Rouche (1998), quien afirma que el término fracción es una representación simbólica, un número encima y un número debajo.

Por otro lado esta Hébert (1980, citado en Carrillo 2012), hace una comparación entre lo que es fracción y número racional; describe a la fracción como un símbolo de la forma $\frac{a}{b}$, donde a, b son números naturales, siendo $b \neq 0$. Además afirma que toda fracción por ejemplo $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \dots$. Esta clase de fracciones todas iguales entre sí, es lo que se llama número racional y para representar tal número se escoge cualquiera de las fracciones de la clase (fracciones iguales) que la define, por ejemplo, la fracción que es irreductible. Así $\frac{3}{5}$ es una fracción; pero se podrá considerar a $\frac{3}{5}$ como representante del número racional definido por la clase de fracciones iguales: $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{-15}{-25}, \frac{-12}{-20}$. Toda operación en la que figure un número racional, aparecerá bajo la forma de la expresión correspondiente de las fracciones que le representen. Si entre las fracciones iguales de una clase que define un número racional, se encuentra una (que será necesariamente la irreductible) cuyo denominador sea 1, se identifica el número racional con el entero natural igual al numerador de la fracción cuyo denominador es 1. Por ejemplo, el número racional definido por la clase $\frac{5}{1}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3}, \frac{20}{4}, \dots$ se identifica con el entero natural 5, o el número racional 5. El número racional definido por la clase $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \dots$ se identifica con el número racional 0. Los enteros naturales forman así parte del conjunto de los números racionales.

Además tenemos a Maza (1999, citado en Ríos 2007) afirma fracción es una pareja de números enteros, por tal razón se le había denominado número roto o quebrado, pero seguía siendo un número, no dos. Sin embargo existen casos en que entienden la fracción como dos números enteros sin ninguna relación, esto se manifestó cuando dos alumnos realizaron las siguientes operaciones: uno operó de la siguiente manera: $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$ y el otro resolvió de la siguiente manera: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{0}{1}$. Al preguntarles cuál procedimiento habían aplicado, expresaron que habían sumado numerador con numerador y denominador con denominador. Hay que aclarar que esta investigación fue hecha a estudiantes de pre grado, que se están formando para ser educadores en el área de matemática.

Por otro lado, tenemos la manera en que se presenta los números racionales y las operaciones de adición y sustracción de fracciones en el libro de texto de primero de secundaria, los mismos que se reparten a todos los estudiantes de Instituciones Educativas Secundarias Públicas; Perú, Ministerio de Educación (2012), no pretendemos hacer un análisis de libro de textos, porque no es nuestra investigación, solo queremos presentar el libro de texto que nuestros estudiantes utilizan como libro de consulta.

Podemos ver que el desarrollo de las estrategias que presenta el libro de texto parte de un problema, luego presenta la definición de fracción (figura 7).

Fracciones


Doña Vilma prepara un rico pastel y lo divide en partes iguales, de las cuales una es para su hijo Miguel, otra para su hija Andrea, otra para su hijo Paolo, otra para su esposo, otra para su amiga Rosa y la última para ella. ¿En cuántas partes dividió el pastel doña Vilma? ¿Qué parte del pastel recibieron sus hijos?

Si contamos las partes, doña Vilma tuvo que dividir el pastel en 6 partes, y cada una de estas partes representa la sexta parte del pastel. Observa:

Luego, si los hijos de doña Vilma recibieron tres de las partes,

recibieron $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Como podemos observar, una unidad (o un conjunto) puede dividirse en varias partes iguales y a cada una de esas partes se le denomina fracción.



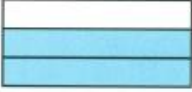
Una **fracción** es una división indicada de un número entero entre otro diferente de cero. Así, para $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, se tiene la fracción a/b o $\frac{a}{b}$.

Figura 7. Fracciones
Fuente: Perú (2012, p. 107)


Luego en la misma página, el libro de texto utiliza representaciones de parte - todo en fracciones equivalentes e irreducibles acompañadas de una figura y notas destacadas de fracción irreducible (figura 8).

Fracciones equivalentes

Ana dibuja un rectángulo y en él representa la fracción $\frac{2}{3}$. Observa:



Sobre el mismo rectángulo traza 5 líneas verticales, de tal modo que queda dividido en 18 partes iguales. Observa:



Ana cuenta las partes coloreadas y escribe la fracción correspondiente, y esta es $\frac{12}{18}$.

Luego, $\frac{2}{3}$ y $\frac{12}{18}$ representan la misma fracción del rectángulo.

A las fracciones que representan la misma cantidad de una unidad o un conjunto se les denomina **fracciones equivalentes**.


Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones equivalentes se cumple:

$$(a)(d) = (b)(c)$$

En la situación anterior:

$$(2)(18) = (3)(12) \Rightarrow 36 = 36$$

ANOTA



Al representar una fracción con palabras, se nombra el numerador seguido del denominador como un adjetivo. Observa:

- Dos tercios: $\frac{2}{3}$
- Dos quinceavos: $\frac{2}{15}$

Una **fracción es irreducible** si el numerador y el denominador son primos entre sí. Observa:

$\frac{2}{3}$ es una fracción irreducible, pues 2 y 3 son primos entre sí.

Figura 8. Fracciones equivalentes


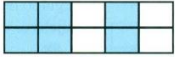
Fuente: Perú (2012, p. 107)



En la siguiente página el libro de texto propone una actividad con varios ejercicios de la concepción parte todo, pide representar las fracciones en las figuras y viceversa, así como hallar fracciones equivalentes, fracciones irreducibles y además un problema donde tienen que ordenar las fracciones (figura 9).

Actividad 1 Individual Copia los ejercicios en tu cuaderno y resuelve.


Aplica tus conocimientos. Recuerda, puedes pedir ayuda a tu profesor o profesora si lo necesitas.


- Representa gráficamente las siguientes fracciones:
 a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{14}{8}$ e) $\frac{5}{6}$
- Escribe la fracción del total que representa la parte coloreada.

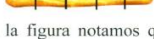





- Encuentra el valor de la incógnita para que las fracciones sean equivalentes.
 a) $\frac{7}{4} = \frac{x}{8}$ b) $\frac{1}{12} = \frac{y}{60}$ c) $\frac{3}{m} = \frac{12}{20}$
- Halla la fracción irreducible equivalente para cada caso.
 a) $\frac{45}{81}$ b) $\frac{12}{18}$ c) $\frac{54}{32}$ d) $\frac{15}{225}$
- Escribe 4 fracciones equivalentes a las siguientes fracciones:
 a) $-\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{14}$ c) $-\frac{5}{8}$ d) $\frac{4}{9}$

Señalamos las partes en cada pan *baguette*.

Jorge: 

María: 

Juan: 

Observando la figura notamos que:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

$4(1) = 4$
 $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

$2(1) = 2$
 $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

$5(1) = 5$
 $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

$4(1) = 4$
 $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

Juan, María y Jorge compran cada uno un pan *baguette*. Si Juan come la quinta parte de su pan; María, la cuarta parte; y Jorge, la mitad, ¿quién de los tres comió mayor cantidad de su pan?, ¿y quién la menor cantidad? Para responder a las preguntas formuladas, podemos proceder como en el margen, dibujando o aplicando los productos cruzados. Observa:

Figura 9. Actividad 1

Fuente: Perú (2012, p. 108)

En esta parte el libro de texto presenta la adición y sustracción en Q (conjunto de números racionales) inicia con un problema que requieren emplear las concepciones parte todo acompañada de un foto de pizza, además presenta adición y sustracción de fracciones resueltos donde transforma las fracciones en otras fracciones con el mismo denominador, y en un recuadro resaltado presenta la definición de adición y sustracción de fracciones (figura 10).

Tema 2 Operaciones con racionales

Adición y sustracción en Q







Para celebrar el cumpleaños de Ana, su mamá compró una torta y dos pizzas cortadas en 8 porciones iguales cada una.

A la fiesta asistieron 9 amigos del colegio y a cada uno le sirvió una porción de pizza, pero hizo una excepción con Alfredo. A él, además, le sirvió la mitad de otra porción de pizza. ¿Qué fracción de una de las pizzas consumió Alfredo?

Si partimos cada una de las 8 porciones de pizza en la mitad y las contamos, obtenemos 16 nuevas porciones.

Alfredo consumió: $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

Es decir, consumió $\frac{3}{16}$ de una de las pizzas.



Si Ana también consumió una porción de pizza, ¿qué parte de la pizza comprada no se consumió?

Son 2 pizzas, lo cual equivale a $\frac{16}{8} = \frac{32}{16}$. Alfredo consumió $\frac{3}{16}$ de la pizza. Cada uno de los demás amigos, incluyendo a Ana, consumió $\frac{1}{8} = \frac{2}{16}$ de la pizza, y en total $9\left(\frac{2}{16}\right) = \frac{18}{16}$ entre todos. Luego, $\frac{32}{16} - \left(\frac{18}{16} + \frac{3}{16}\right) = \frac{32}{16} - \frac{21}{16} = \frac{11}{16}$. Por lo tanto, no se consumió $\frac{11}{16}$ de la pizza.

Para la **adición y sustracción** de fracciones con mismo denominador, se coloca el mismo denominador y se operan los numeradores. Si las fracciones tienen denominadores diferentes, se obtienen fracciones equivalentes de igual denominador (homogeneizar) y se operan los numeradores.

ANOTA



Para sumar dos fracciones con diferente denominador se puede usar la regla de los productos cruzados:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Observa un ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{10 + 3}{15} = \frac{13}{15}$$

a) $-\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{-3+1}{5} = -\frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{6} + \frac{2}{5}$

Homogeneizamos

$$\frac{5}{30} + \frac{12}{30}$$

Operamos

$$\frac{5+12}{30} = \frac{17}{30}$$

c) Restar $\frac{3}{5}$ de $\frac{7}{5} = \frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7-3}{5} = \frac{4}{5}$

d) Restar $\left(-\frac{1}{2}\right)$ de $\frac{2}{5}$

Homogeneizamos y operamos

$$\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$$

Figura 10. Adición y Sustracción de Fracciones
Fuente: Perú (2012, p. 112)

Para concluir este tema se observa un problema, y para la actividad 3, propone ejercicios y dos problemas (figura 11).

e) Andrea le dice a Miguel: “Si a la mitad del número de chocolates que tengo le resto la cuarta parte más la quinta parte del total, me queda 1. ¿Cuántos chocolates tengo?”.

$$\text{Sea } x \text{ el total de chocolates, entonces: } \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{5}\right) = 1$$

Hallamos fracciones equivalentes de igual denominador y operamos lo que se encuentra entre los paréntesis.

$$\frac{10x}{20} - \left(\frac{5x}{20} + \frac{4x}{20}\right) = 1 \Rightarrow \frac{10x}{20} - \frac{9x}{20} = 1 \Rightarrow \frac{x}{20} = 1 \Rightarrow x = 20$$

Por lo tanto, Andrea tiene 20 chocolates.

CUIDADO



Si tenemos operaciones con números mixtos, primero se convierten a fracciones:

$$2\frac{3}{5} = \frac{(5 \times 2) + 3}{5} = \frac{13}{5}$$

Actividad 3 Individual Copia los ejercicios en tu cuaderno y resuelve.

Aplica tus conocimientos. Recuerda, puedes pedir ayuda a tu profesor o profesora si lo necesitas.

1. Efectúa las siguientes operaciones:

- a) $\frac{16}{5} + \left(-\frac{6}{5}\right)$
- b) $2\frac{2}{3} - \frac{13}{5} - 1\frac{3}{4}$
- c) De $\frac{7}{8}$ restar $\frac{1}{5}$
- d) Restar $\frac{1}{4}$ de $\frac{7}{10}$
- e) $-1\frac{5}{8} + \left(-2\frac{3}{4}\right)$
- f) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{8}{5}$
- g) $\frac{5}{8} - \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8}$
- h) $\frac{1}{14} - \left[-\frac{5}{7} + \left(-\frac{4}{7} + \frac{1}{7}\right)\right]$

- 2. Los ingresos de una familia cubren las siguientes necesidades: $\frac{5}{12}$ en alimentación, $\frac{1}{3}$ en educación, $\frac{1}{6}$ en vivienda. Si lo restante lo ahorra, ¿qué parte del ingreso inicial es esta?
- 3. En un salón de clases se hace una votación para elegir al delegado. Paola recibió $\frac{2}{7}$ de los votos, Manuel recibió $\frac{1}{8}$ de los votos, y el resto de los votos fueron para Armando. ¿Qué fracción de los votos recibió Armando?

En una expresión como *un tercio de un medio*, la palabra *de* significa multiplicar.



Figura 11. Actividad 3
Fuente: Perú (2012, p. 113)

2.3 Estudio matemático de las fracciones

Este estudio es importante para conocer nuestro objeto matemático desde el punto de vista de la matemática formal, para ello tomaremos el libro de texto Carranza (1965) quien enfoca el sistema de números; empieza con el sistema de números naturales mediante un sistema de axiomas, generalizando el estudio de los números naturales al estudio de las estructuras algebraicas. Introduce el sistema de los números enteros, tomando como base, el concepto de par ordenado de los números naturales. Para pasar al sistema de números racionales en forma análoga a la de los números enteros. Dado como definición de número racional a cada una de las clases de pares ordenados (con segunda componente positiva) equivalente de números enteros, definiendo la equivalencia por:

$$(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2) \leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1$$

Así por ejemplo serán números racionales las clases:

$$[(1,2), (2,4), (3,6), \dots], [(-1,3), (-2,6), (-3,9), \dots], \text{ etc.}$$

De la definición resulta que a cada número racional le corresponde infinitos pares equivalentes entre sí y que a cada par le corresponde un único número racional que es la clase a la cual pertenece el par considerado. Denotaremos (Q) al conjunto de todos los números racionales y a sus elementos los denotaremos así:

$$a = [(a_1, a_2), (a'_1, a'_2), (a''_1, a''_2), \dots],$$

$$b = [(b_1, b_2), (b'_1, b'_2), (b''_1, b''_2), \dots], \text{ etc.}$$

$$O \text{ simplemente } a = [(a_1, a_2)], b = [(b_1, b_2)], \dots \text{ etc.}$$

En consecuencia el sistema de los números racionales (Q) es el conjunto cociente de $T = Z \times Z^+$ por la relación de equivalencia definida. Presenta diversas definiciones, lemas y teoremas, basadas en las definiciones y propiedades de los números enteros, las mismas que permiten construir la teoría de los números racionales.

Define a la suma de los números racionales si $a = [(a_1, a_2)]$ y $b = [(b_1, b_2)]$, se denota por $a + b$ al número racional determinado por la clase $[(a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2)]$

$$\text{Es decir: } [(a_1, a_2)] + [(b_1, b_2)] = [(a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2)]$$

De lo que se concluye que la suma de dos números racionales siempre existe, puesto que la suma de dos números enteros siempre existe.

Demuestra que la suma $a + b$ es independiente de los pares que se consideran para definirla.

Es decir, si $(a'_1, a'_2) \in a$ y $(b'_1, b'_2) \in b$ entonces $(a_1b_2 + a_2b_1, a_2b_2) \in a + b$.

La adición de números racionales goza de las siguientes propiedades:

$$(a + b) + c = a + (b + c); \forall a, b, c \in Q$$

$$a + b = b + a; \forall a, b \in Q$$

Existe un único número racional llamado cero ó elemento neutro, tal que

$$a + 0 = a; \forall a \in Q$$

Para cada número racional a , existe un único número racional llamado opuesto de a , denotado con $-a$, tal que $a + (-a) = 0; \forall a \in Q$

$$a + c = b + c \text{ implica } a = b; \forall a, b, c \in Q$$

Luego de presentar los diferentes puntos de vista de los diferentes autores desde el aspecto didáctico y matemático, y para efectos de nuestra investigación, consideraremos fracción

como la representación de un cociente de números enteros no negativos, siendo el divisor diferente de cero. Así, una fracción será una expresión de la forma:

$$\frac{a}{b} \quad a, b \in \mathbb{Z}^+; b \neq 0;$$

a será llamado numerador.

b será llamado denominador.

Para las operaciones de adición y sustracción de fracciones consideremos las operaciones dadas para números racionales en términos de pares ordenados de las correspondientes clases de equivalencia.

Así: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ corresponde a $[(a; b)] \pm [(c; d)]$; que a su vez está dado por $[(ad \pm bc; bd)]$; lo cual resumimos en $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Este estudio de las fracciones desde el punto de vista matemático y didáctico, así como la representación de fracción que nosotros consideraremos en nuestra investigación, nos permitirá organizar y diseñar nuestras Situaciones Didácticas. En el siguiente capítulo presentamos el marco teórico y la metodología elegida para nuestra investigación.

CAPÍTULO 3 - MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo, presentamos como marco teórico de nuestra investigación aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), teoría que busca crear un modelo de interacción entre estudiantes, profesor y medio en el cual se debe desarrollar el aprendizaje. Y como metodología de investigación el estudio de casos.

3.1 Aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas

Desde los años 70, se le reconoce a Brousseau como uno de los principales investigadores de la didáctica de la matemática; siendo su contribución teórica a este campo la Teoría de Situaciones Didácticas.

La TSD está fuertemente influenciada por la epistemología piagetiana; “los dispositivos Piagetianos mostraron que los niños podían adaptarse desarrollando conocimientos matemáticos que no habían sido enseñados” Brousseau (2007, p. 15).

Por su parte Almoloud (2007) asegura, la Teoría de Situaciones Didácticas se apoya en tres hipótesis: la primera, en que el estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de dificultades, de contradicciones y desequilibrios, en segundo lugar, ese medio no provisto de intenciones didácticas es insuficiente para permitir la adquisición de conocimientos matemáticos, es decir el estudiante puede sentir que no tiene herramientas para resolver la situación y en tercer lugar, el autor afirma que ese medio y esas situaciones deben relacionar los saberes matemáticos desarrollados en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para Brousseau (2007, p.12 - 13) “la enseñanza es concebida como las relaciones entre el sistema educativo y el alumno, vinculadas a la transmisión de un saber dado, y de este modo, la relación didáctica se interpreta como una comunicación de informaciones”. También conocida como triángulo didáctico a la interacción entre el estudiante, el profesor y el saber.

En este mismo sentido Brousseau 1975 (citado en Almoloud, 2007), afirma que la teoría de situaciones didácticas fue desarrollada con el propósito de modelar el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos. Dicho proceso de aprendizaje puede ser caracterizado de modo general por un conjunto de situaciones identificables y reproducibles lo que conlleva a una modificación de un determinado conjunto de comportamientos por parte de los estudiantes.

Además, el autor afirma que lo importante en esta teoría no es el sujeto cognitivo, sino la Situación Didáctica, puesto que identificamos las interacciones entre estudiante, profesor y saber.

3.2 Situación Didáctica, Situación adidáctica

Para Brousseau (2007, p.16) una situación es “un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable”.

Esto es reforzado por Brousseau (1978, citada en Almouldud 2007), el objeto central de la Teoría de Situaciones Didácticas es una situación didáctica definida como un conjunto de relaciones establecidas explícita e implícita entre un estudiante o un grupo de estudiantes, un cierto medio (instrumentos u objetos) y un sistema educativo representado por el docente, para que ese estudiante adquiera un saber constituido o en vías de constitución.

Almouldud (2007), afirma que una situación adidáctica, como parte fundamental de la situación didáctica, es una situación en la cual no se revela la intención de enseñar al estudiante, esto se debe a que es un momento de aprendizaje y no de enseñanza, donde la situación que se le presenta al estudiante es imaginada, planeada y construida por el profesor para proporcionarle al estudiante todas las condiciones de tal manera, que sea favorable al aprendizaje del nuevo saber que se desea enseñar; según Brousseau (1986, citado en Almouldud 2007), esta situación tiene las siguientes características:

1. Un problema matemático es elegido para que el estudiante pueda hablar, reflexionar y evolucionar por propia iniciativa.
2. Un problema es elegido para que el estudiante adquiera nuevos conocimientos que sean completamente justificados por la lógica interna de la situación y se puede construir sin apelar a razones didácticas.
3. El docente asume el papel de mediador, crea condiciones para que sea el estudiante el principal representante de la construcción de sus conocimientos a partir de actividades propuestas.

Según Almouldud (2007), cada conocimiento puede ser caracterizado por, al menos, una situación adidáctica que preserva su sentido y que es llamada situación fundamental. Ella determina el conocimiento enseñado en un determinado momento o el significado particular que ese conocimiento tomará considerando el cambio de variables didácticas y sus

restricciones y formulaciones sufridas en su proceso de organización y reorganización. El investigador afirma además, que un estudiante no diferencia de inmediato, una situación, si es de origen adidáctico o de origen didáctico.

En este sentido Brousseau 1986 (citado en Almouloud, 2007), afirma que un concepto moderno de la enseñanza se da cuando el profesor estimule al estudiante hacer las adaptaciones necesarias a la Situación Didáctica, si fuera necesario hacer un cambio correcto a los problemas que propone; los mismos que deben ser elegidos para que el estudiante reflexione, evolucione en su solución, por sí mismo. Es el momento en que el estudiante acepta la situación problema como suya y es donde produce su respuesta, el profesor no interviene explicando los conocimientos que quiere ver aparecer. El estudiante es consciente de que un problema fue elegido para que adquiriera un nuevo conocimiento, el mismo que es justificado por la lógica interna de la situación que se desea construir sin tener en cuenta las razones didácticas.

Este proceso de enseñanza aprendizaje se apoya en la devolución, es el acto por el cual el profesor le da al estudiante la responsabilidad de asumir su aprendizaje y acepta el mismo las consecuencias de esta transferencia; la situación adidáctica es consecuencia de esta transferencia. En esta fase los estudiantes deben encontrar por sí mismos las relaciones entre sus preferencias y los resultados que logran.

Además, Brousseau (2007), afirma sobre el contrato didáctico, es donde se aprecian las obligaciones recíprocas entre los estudiantes, sociedad y profesores. La consigna establecida entre profesor y estudiante sobre los comportamientos que cada uno espera del otro respecto del saber.

El profesor no puede decir explícitamente de antemano lo que el alumno tendrá que hacer frente a un problema, sin quitarle, al hacerlo, la posibilidad de manifestar o adquirir el conocimiento correspondiente. El profesor no puede comprometerse a “hacer comprender” un conocimiento y menos aún a hacer que se produzca: nadie sabe como “se hacen” matemáticas nuevas y menos aún como se puede “hacer hacerlas” de manera certera.

[...] cada uno el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa y esta idea crea las posibilidades de intervención, de *devolución* de la parte didáctica de las situaciones y de la *institucionalización* (p.70).

En nuestra investigación el contrato didáctico se da antes de iniciar las Situaciones Didácticas; donde se les indica a los estudiantes que cualquier duda respecto al español, y sólo la

intervención del profesor será respecto a aclarar dudas en relación al texto escrito en la situación, este es el momento en que se produce la devolución de la situación al estudiante.

Variable didáctica

Brousseau (2007), afirma “las variantes de una situación relativa a un mismo saber matemático pueden presentar grandes diferencias de complejidad y en consecuencia conducir a estrategias óptimas diferentes y también maneras diferentes de conocer un mismo saber” (p. 41).

“[...] El aprendizaje por adaptación supone que se elijan las variables de modo tal que el conocimiento que se quiere “hacer descubrir” sea más ventajoso que cualquier otro” (p. 42).

Asimismo en relación a las variables didácticas, nos apoyamos en lo que afirma Almouloud (2007), una Situación Didáctica es representada por el medio, a su vez este es organizado a partir de la elección de variables didácticas y sus valores, los cambios de valores elegidos logran modificar estrategias óptimas, y si estos cambios son significativos ocasionan un salto informacional, esto puede llevar a un cambio cualitativo de estrategias pertinentes para resolver un problema. Las variables son elegidas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes; por esta razón son puntos importantes para la elaboración de la situación. Un primer cambio de variables sirve para la devolución del problema o encaminarlo al estudiante para lograr una estrategia básica, cambios que son necesarios para el buen desenvolvimiento de la situación adidáctica que se pretende lograr.

A continuación mencionaremos las variables didácticas y sus respectivos valores considerados en nuestra investigación.

Tabla 4. Variable didáctica y valores

Variables didácticas	Valores
Divisiones de las figuras	Regiones congruentes; regiones no congruentes

3.3 Dialécticas de la Situaciones Didácticas

Brousseau (2007), afirma que para analizar un proceso de aprendizaje, en la teoría de situaciones se observa y descompone este proceso en cuatro dialécticas diferentes.

Situación acción

Brousseau (2007, p. 24), afirma “Para un sujeto, "actuar" consiste en elegir directamente los estados del *medio* antagonista en función de sus propias motivaciones”.

Almoloud (2007), refuerza esta idea cuando afirma que en esta dialéctica se coloca al estudiante la situación problema para que él elija la mejor solución, centrada en la toma de decisiones sobre el medio; asimismo puede mejorar y abandonar el anterior para crear otro modelo; en esta situación se da un aprendizaje por adaptación; puede haber intercambio de información si los estudiantes trabajan en grupo.

En nuestra investigación corresponde a una situación de acción, por ejemplo, cuando el estudiante comienza a leer el enunciado de la situación problema; es donde toma contacto con la situación problema y comienza a representar la sección pintada de la bandera por medio de una fracción.

De esta manera el estudiante interactúa con el medio didáctico y así llega a la solución de la situación problema y la adquisición de conocimientos.

Situaciones de formulación

Brousseau (2007, p. 24), afirma “la formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El *medio* que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información”.

Sobre lo mismo Almoloud (2007), afirma que es el momento en que los estudiantes intercambian información entre compañeros, serán los emisores y receptores, intercambian mensajes orales y escritos acerca de la estrategia que les servirá para resolver la situación problema de manera adecuada. Estos mensajes pueden darse en lenguaje natural o matemático, según cada emisor. Esta etapa permitirá crear un modelo explícito que puede ser formulado como una regla.

Para Brousseau 1998 (citado en Almoloud 2007), la formulación consiste en proporcionar a los estudiantes condiciones para que construyan progresivamente, en un lenguaje comprensible para todos, que considere objetos y relaciones matemáticos envueltas en esta situación.

En nuestra investigación, el momento de formulación, por ejemplo, se presenta cuando los estudiantes expresan de manera oral, con sus propias palabras para resolver nuestra Situación Didáctica.

Situaciones de validación

Brousseau (2007), afirma “los esquemas de la acción y formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales, para asegurar la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los conocimientos movilizados” (p. 26). En la modelización de esta situación se aprecia una nueva forma de formular; el emisor se convierte en proponente y el receptor en oponente, se piensa que ambos manejan la misma información para tratar la situación problema.

El estudiante no sólo debe comunicar una información si no también debe demostrar que lo que afirmar y sostiene, es verdad. Es decir cooperan en la búsqueda de esta verdad, “en vincular de forma segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando hay dudas. Se ocupan juntos de las relaciones formuladas entre un medio y un conocimiento relativo a ese medio” Brousseau (2007, p.27).

Almoloud (2007), refuerza esta idea cuando afirma que el estudiante debe mostrar la validez del modelo creado para dar solución a la situación; es decir el emisor o proponente debe justificar o argumento con pertinencia su nuevo modelo creado y por su parte el receptor puede pedir más explicaciones y refutar con lo que no entiende o que no está de acuerdo, justificando sus respuestas.

En nuestra investigación por ejemplo, es cuando los estudiantes discuten, refutan y demuestran bajo argumentos pertinentes la validez de su argumento, es el momento en que los estudiantes se convencen de que la adición y sustracción de fracciones propuesta para la situación didáctica es la correcta para su solución.

Institucionalización

Según Brousseau (2007), luego del momento de aprendizaje, es decir las situaciones de acción, formulación y validación, es necesario que el docente presente a los estudiantes los conocimientos a partir de lo producido por ellos, se debe recapitular, sistematizar, ordenar, organizar, relacionar, dar cuenta de lo que produjo los estudiantes vinculado con el

conocimiento en cuestión, con el fin de establecer una relación de las producciones del estudiante y el saber cultural.

En nuestra investigación esta dialéctica tiene la finalidad de establecer y dar un status oficial al conocimiento sobre adición y sustracción de fracciones, actividad que se realiza dentro del aula y cuya responsabilidad estará a nuestro cargo. El estudiante por sí mismo no identifica que ha adquirido un nuevo conocimiento, es el docente quien tiene que organizar y sistematizar la información, siempre partiendo de lo producido por los estudiantes.

3.4 Metodología

La metodología elegida para nuestra investigación es cualitativa, porque busca entender el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en estudiantes de primer grado de secundaria; no estamos sólo preocupados por los resultados sino también por el proceso de construcción del conocimiento; el investigador es parte de la escena investigada; aún cuando este tipo de investigación está en creciente popularidad, existen dudas sobre lo que realmente caracteriza a una investigación cualitativa, cuándo es realmente adecuado utilizarla y cuál es el rigor científico para este tipo de investigación; Bogdan e Biklen (1982 citado en Borba, 2004) cita cinco características para este estudio;:

- i. Los datos se recogen de fuente directa en su ambiente natural, y el investigador como su instrumento principal, existe un contacto directo y prolongado entre el investigador, el ambiente y la situación investigada.
- ii. Una investigación cualitativa es descriptiva.
- iii. Los investigadores cualitativos se interesan más en el proceso, que simplemente en los resultados de su producto.
- iv. Los investigadores cualitativos tienden a analizar los datos de manera inductiva.
- v. El significado e importancia, foco de atención, que aborda es cualitativa.

Estamos interesados en investigar los procedimientos e identificar los esquemas utilizados y movilizados por los sujetos durante la solución de las situaciones problemas. Del cual obtendremos los datos para poder realizar el análisis del proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en estudiantes de primer grado de secundaria, según las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas.

Por todas estas razones nuestra investigación es cualitativa y como metodología de investigación usaremos estudio de casos.

Estudio de casos

Dentro de la investigación cualitativa existen varias opciones, nosotros trabajaremos con estudio de casos; sobre sus propósitos básicos Yin (1984) afirma; los estudios de casos pueden tener múltiples propósitos.

Los propósitos básicos son tres, sin embargo en nuestra investigación sólo consideraremos dos de estos propósitos, como son:

1. Exploratorio: Es la información preliminar del tema a investigar; para nuestra investigación será los antecedentes en relación a la adición y sustracción de fracciones, resultados que pueden ser usados como base para la pregunta de investigación.
2. Descriptivo: Tiene el propósito esencial de describir, es decir "cómo" es el caso en estudio. En particular en nuestra investigación está centrandose en describir cómo sucede en el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en los estudiantes de primer grado de educación secundaria, por medio de una secuencia de actividades basada en la teoría de situaciones didácticas.
3. Analítico: busca problematizar su objeto de estudio, construir una nueva teoría y confrontarla con una teoría ya existente. Por esta razón, podemos decir que nuestra investigación no es de tipo analítico.

Caracterización de la investigación

Según Yin (1984) afirma, un estudio de caso es una investigación empírica y no experimental. La primera se basa en la observación y la experimentación, y la segunda es cuando el investigador no pretende modificar una situación, sino comprenderla tal como la situación es. Para nuestra investigación consideraremos un trabajo basado en las observaciones, en situaciones didácticas y fichas de trabajo desarrolladas por los estudiantes.

Se observará y luego se analizará a tres duplas de estudiantes de primer grado de educación secundaria durante dos situaciones didácticas y una actividad de cierre, donde se aborda: adición y sustracción de fracciones.

Procedimientos de investigación de un estudio de casos

Para construir los procedimientos de nuestra investigación, nosotros tomaremos a Stake (1998), quien afirma que por sus características, el estudio de casos es difícil de organizar con

unos pasos delimitados, pero la propuesta de Montero y León (2002) desarrollan este método en cinco fases.

Selección del caso

Se grabarán las sesiones correspondientes a las dos situaciones problema de adición y sustracción de fracciones y la actividad de cierre. Utilizaremos este material con el fin de estudiar el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones. Es así como pretendemos identificar los componentes del conocimiento matemático del proceso de aprendizaje de adición y sustracción de fracciones que ponen de manifiesto las tres duplas de estudiantes en su aprendizaje a través de las dialécticas de la TSD.

Elaboración de la actividad

Se diseñó dos Situaciones Didácticas y una actividad de cierre adaptadas de las actividades de Almoloud & Silva (2008), siguiendo las dialécticas de la TSD con la finalidad de que el estudiante construya por sí mismo un conocimiento nuevo, adición y sustracción de fracciones.

Nuestro trabajo de investigación se centrará en el desarrollo de estas dialécticas ya que buscamos que los estudiantes de primer grado de secundaria transiten por ellas.

Localización de fuente de datos

Recopilación de la información del proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en los estudiantes de primer grado de secundaria que ayude a responder a la pregunta planteada en la investigación.

Se obtiene los datos observando, preguntando. En esta parte se selecciona las estrategias para la obtención de los datos, las filmaciones de audio y video, el estudio de las Situaciones Didácticas (hoja de papel) y la observación.

Las técnicas que vamos a utilizar para recoger información para nuestra investigación son:

1. Aplicación de la Situación Didáctica

Para la aplicación de las Situación Didáctica se tuvo en cuenta el acceso a los sujetos de nuestra investigación y a la institución donde hemos aplicado, la misma que nos ha prestado las condiciones necesarias para poder llevar a cabo nuestra investigación.

2. Observación

Se observó las acciones, formulaciones y validaciones de acuerdo a las dialécticas de la TSD de Brousseau (2007) de los estudiantes frente al desarrollo de las Situación Didáctica.

La observación que hemos realizado para la obtención de la información ha sido del tipo participante, ya que hemos participado como profesor investigador durante la secuencia de actividades didácticas, es decir hemos ido observando todo lo que ocurrió durante la aplicación de la investigación. También contamos con el apoyo de dos auxiliares y la profesora del curso de la institución “Ricardo Palma” - Totorani.

El análisis e interpretación

El análisis de los resultados obtenidos de las dos Situación Didáctica y la actividad de cierre se hicieron de acuerdo con las dialécticas de la TSD; esta etapa tiene la finalidad de depurar, categorizar la información recogida durante la investigación. En el momento de realizar los análisis se debe usar el mejor juicio para determinar la categoría que se le asignara a cada segmento de información; proceso que se puede dar usando tablas u hojas de cálculo, además, dedicar un espacio a las observaciones y comentarios.

En nuestra investigación es el momento en que vamos a describir la aplicación de las Situaciones Didácticas para luego en base a los resultados obtenidos realizar un análisis, todo ello referente a las acciones, formulaciones y validaciones observadas en la fase adidáctica para la construcción de su propio conocimiento de la adición y sustracción de fracciones de la fracciones homogéneas y heterogéneas.

Elaboración del informe

Redacción del informe, significa llevar sus resultados y hallazgos a un cierre; en nuestro caso será la redacción de nuestro trabajo de investigación, el mismo que se debe tomar en cuenta al público al cual va dirigido.

Para llegar a esta fase nosotras vamos a contrastar el diseño de las situaciones problema con la información que hemos obtenido al describir la aplicación de las Situación Didáctica y el análisis de la información teniendo en cuenta nuestro marco teórico.

Validación de un estudio de casos

Sobre cómo validar un estudio de caso Ponte (2006), afirma, una validación del Estudio de Casos es necesaria, porque no todos los Estudio de Casos tienen el mismo valor, el mismo efecto y las mismas implicaciones, para poder distinguir cuál es la investigación adecuada y que no se vea afectado el estudio de casos en la misma manera que afecta a cualquier otro tipo

de investigación. La existencia de normas de calidad es necesaria por razones de orden interno para la comunidad de investigadores y por razones de orden externo para que los investigadores puedan tener confianza en la pertinencia y valor de la investigación, tanto para continuar y profundizar su trabajo como para convencer a todos aquellos que puedan estar interesados en sus preguntas, los resultados y los argumentos tienen que estar seguros de la base teórica y metodológica de su actividad. Además Goetz e LeCompte (1984, citado en Ponte 2006), sugiere cinco criterios de calidad para la validación de un Estudio de Casos de tipo interpretativo, estos criterios son: adecuación, claridad, carácter completo, credibilidad y significado; adicionales a estos criterios el autor presenta creatividad y carácter único que se utilizarán para el Estudio de Casos de naturaleza excepcionales. Estos siete criterios son componentes fundamentales de la investigación, el problema y los objetivos de estudio, la base teórica, el modelo general de la investigación, la selección de los participantes, lugares y circunstancias, la experiencia y los roles del investigador, las estrategias de recolección de datos, las técnicas de análisis de datos y presentación, interpretación y aplicación de las conclusiones. Criterios que son aplicados no solo al estudio de casos sino a toda investigación cualitativa. La claridad tiene que ver con la forma en cómo se reporta el estudio. El significado, la idoneidad y la integridad dicen sobre la formulación del problema y el modelo general del estudio. Por último, la credibilidad se desarrolla en dos criterios: validez y fiabilidad. Por lo tanto, criterios tradicionales de la credibilidad de la investigación son la validez conceptual, la validez interna, la validez externa y fiabilidad. La validez se refiere a la exactitud de los resultados, la validez conceptual se refiere a la caracterización de sus conceptos clave y criterios operativos para clasificar datos, la validez es interna si las conclusiones presentadas corresponden a alguna realidad reconocida por los propios participantes y no son producto de la imaginación del investigador. La validez es externa cuando los resultados que se obtuvieron se comparan con otras investigaciones. Por último fiabilidad se refiere a si la recopilación de datos y análisis podría repetirse para producir resultados similares. Sustancialmente se refiere a los instrumentos utilizados y cómo se analizan los datos, pero hay que considerar que toda investigación es multifacética y está en constante evolución.

En nuestra investigación, la validación será interna porque analizamos los datos considerando las situaciones problemas propuestas, el proceso de aprendizaje de adición y sustracción de fracciones con el respaldo en las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas, los mismos que corresponden a la realidad y no son producto de la imaginación del investigador.



CAPÍTULO 4 - EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En este capítulo, presentamos la caracterización de los sujetos de investigación, describimos los aspectos de su selección, explicamos el desarrollo del experimento, las respuestas esperadas y efectuamos el análisis de nuestras Situaciones Didáctica según las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas, en estudiantes de primer grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Ricardo Palma” ubicado en el Centro Poblado de Totorani, distrito de Acora, provincia de Puno, región Puno.

4.1 Caracterización de los sujetos de la investigación

Los estudiantes son de zona rural, ubicada en la zona alta de Puno, su lengua materna es el aimara, su actividad económica se basa en la agricultura y ganadería, siendo este su principal fuente de ingreso económico, las escuelas en las que estudiaron el nivel primaria son de categoría unidocente multigrado y polidocente multigrado. Participan seis estudiantes de 11 a 12 años de edad, de primer grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Ricardo Palma” Totorani, distrito de Acora, departamento de Puno, organizados en tres grupos de dos estudiantes, a estos grupos los denominamos como grupo 1, grupo 2 y grupo 3.

Los estudiantes de estos grupos participarán en dos encuentros, por el factor tiempo, el primer encuentro permitirá movilizar en los estudiantes conocimientos de adición y sustracción de fracciones homogéneas y el segundo encuentro, adición y sustracción de fracciones heterogéneas.

Los estudiantes participantes se presentaron de forma voluntaria, luego de una conversación explicándoles en qué consistía la investigación en el aula de primero de secundaria de la Institución “Ricardo Palma” del Centro Poblado de Totorani.

Se informó a los estudiantes de la importancia de las Situaciones Didácticas consideradas en nuestra investigación para su aprendizaje en el área de matemática.

4.2 Descripción de las Situaciones Didácticas

Las Situaciones Didácticas están diseñadas para estudiantes de primero de secundaria de acuerdo a experiencias cotidianas y conocimientos previos de los estudiantes. Además consideramos investigaciones previas a la nuestra basadas en las actividades de adición y sustracción de fracciones de Almouloud & Silva (2008), Silva (2005), Ríos (2007), Carrillo (2012), Hurtado (2012), Ruiz (2013).

Para una mejor ilustración, presentamos el siguiente esquema con la secuencia de aprendizaje para esta investigación; distribuidas de la siguiente manera:

SITUACIONES DIDÁCTICAS	OBJETIVO	CONTENIDOS
SITUACIÓN 1 PROBLEMA A, B y C	<ul style="list-style-type: none"> ○ Sumar y restar fracciones homogéneas. 	<ul style="list-style-type: none"> ○ Adición y sustracción de fracciones homogéneas.
SITUACIÓN 2 PROBLEMA A y B	<ul style="list-style-type: none"> ○ Sumar y restar fracciones heterogéneas. 	<ul style="list-style-type: none"> ○ Adición y sustracción de fracciones heterogéneas. ○ Fracciones equivalentes.

Esta investigación además de las dos Situaciones Didácticas presenta una actividad de cierre. Tanto las Situaciones Didácticas como la actividad de cierre se desarrollan en tres grupos de dos estudiantes.

La primera Situación Didáctica tiene tres problemas a los que llamaremos problema A, problema B y problema C; además este último problema presenta dos ítems; se resuelve por adición y sustracción de fracciones homogéneas.

La segunda Situación Didáctica tiene dos problemas acompañados de una figura a los que llamaremos problema A y problema B, cada uno con dos ítems; se resuelve por adición y sustracción de fracciones heterogéneas.

La actividad de cierre, comprende cuatro adiciones y sustracciones de fracciones que se resuelve por algoritmos de adición y sustracción de fracciones.

Es probable que estos contenidos no se hayan visto en nivel primario, pero si vieron el tema de fracciones solo lo trataron como representación de fracciones; por ejemplo como parte todo, medida; más no así las operaciones con fracciones. La situación 1 y el problema A de la situación 2 son diseñadas para que los estudiantes ayudándose en la figura logren transformar en otras fracciones con el mismo denominador para así resolver adición y sustracción de fracciones, en el problema B de la situación 2 les exige a los estudiantes que movilicen conceptos y todo lo aprendido para así lograr que se apropien de un nuevo conocimiento, adición y sustracción de fracciones.

Estos problemas permitirán a los estudiantes movilizar la concepción de parte todo. También podrían ser movilizadas durante la solución otras concepciones por ejemplo medida, cociente,

razón, operador, porcentaje, pero nosotros de acuerdo con Almouloud & Silva (2008), Silva (2005), Ríos (2007), Carrillo (2012), Hurtado (2012), Ruiz (2013) nos restringiremos a la concepción de parte todo, porque es la más utilizada, tanto en libros didácticos como por docentes.

Las variables didácticas que elegimos para ambas situaciones es la siguiente: Divisiones de las figuras, con sus valores regiones congruentes y/o regiones no congruentes.

4.3 Procedimiento de aplicación de las Situaciones Didácticas

En esta secuencia hemos organizado dos Situaciones Didácticas y una actividad de cierre; la primera de una hora pedagógica, la segunda de dos horas y la actividad de cierre de una hora. Con la finalidad de recoger información relevante de la interacción de los estudiantes con las situaciones planteadas, se filmó cada una de las situaciones. Para el buen desarrollo de las actividades se contó con la colaboración de la profesora del curso Hermelinda Machaca, el auxiliar de educación Sr. Justino Peralta y auxiliar de laboratorio Sr. Rosendo Mullaya de la Institución Educativa “Ricardo Palma” - Totorani. Colaboración que permitió observar y filmar las imágenes de las situaciones; desarrolladas en dos encuentros de dos horas.

Llevamos a cabo la experimentación en el ambiente del laboratorio de la Institución Educativa “Ricardo Palma” - Totorani, la misma que cuenta con una pizarra, sillas, mesas de trabajo.

Antes de iniciar con las filmaciones se les envió a los estudiantes una autorización por escrito para que firmen sus padres o apoderados donde autorizan la participación de sus menores hijos en la investigación. Luego de tener en nuestras manos la autorización firmada por los padres de familia se procedió con la experimentación de nuestro trabajo.

Luego de tener como información las filmaciones de cada una de las Situaciones Didácticas y la actividad de cierre, así como las soluciones obtenidas por los estudiantes, a continuación se presentan el análisis de los resultados conseguidos.

4.4 Análisis de las Situaciones Didácticas

Situación 1

Objetivo de la Situación 1: Sumar y restar fracciones homogéneas.

Problema A

La figura representa la bandera del Perú. Representa como suma de fracciones la parte roja de la bandera.



Problema B

El terreno de Luis tiene la forma de la figura; en el extremo izquierdo sembró papa y en el extremo derecho quinua. Representa como suma de fracciones la parte que Luis sembró papa y quinua respectivamente, en el terreno.



Problema C

Ana compró un terreno y heredó a cada uno de sus tres hijos de la forma que está en la figura; al primogénito le tocó el doble de terreno del hijo menor; al segundo hijo el resto de terreno.

1. Representa como suma de fracciones la parte del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana.
2. Representa como sustracción de fracciones la parte del terreno que recibió el segundo hijo de Ana, con respecto a todo el terreno.



Variable Didáctica

Divisiones de las figuras, con los siguientes valores: Regiones congruentes y/o regiones no congruentes.


A continuación detallaremos el tipo de interacción del estudiante con el medio cada Situación Didáctica y las respuestas esperadas por parte de los estudiantes en relación al objeto de estudio.

Problema A

Está acompañado de una figura dividida en tres regiones congruentes que representa a la bandera del Perú, la variable que consideramos es división de las figuras con su valor regiones congruentes, estas variables permitirán un primer contacto entre el estudiante y la Situación Didáctica, las mismas que favorecerán la interacción entre los mismos; así como permitirán resolver en forma comprensiva la adición de fracciones, porque el entero está dividido en

Problema A

La figura representa la bandera del Perú. Representa como suma de fracciones la parte roja de la bandera.



partes congruentes, de las cuales dos están consideradas como la suma de la parte roja de la bandera.

Respuestas esperadas

Esperamos que los estudiantes, luego de leer cuidadosamente en parejas el problema A, recurran a sus conocimientos previos sobre la noción de parte todo; dentro de las acciones posibles, cada estudiante del grupo podría comenzar a subrayar cada palabra para después expresar el problema en el papel de manera numérica, representando la fracción correspondiente a cada región sombreada de color rojo en la bandera. Asimismo, esperamos que los estudiantes formulen de manera oral y/o escrita que cada parte roja de la figura representa $\frac{1}{3}$ de la bandera. Finalmente, a partir de sus acciones y formulaciones, esperamos

que según Brousseau (2007), validen sus resultados por medio de la suma de fracciones homogéneas, es decir, la región sombreada de color rojo de la bandera del Perú representa los $\frac{2}{3}$ de la bandera.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Grupo 1

Como parte de sus acciones para la construcción de su propio conocimiento, el grupo 1 inicia la actividad al leer el problema; los estudiantes se demoran en interpretar el problema, no saben qué hacer, hasta que, luego de algunos minutos, observan la figura y señalan con su dedo la parte roja de la bandera. Uno de los integrantes del grupo expresa en forma oral que la figura está dividida en tres partes. Luego, formulan en forma oral y escrita que la parte roja representa $\frac{1}{3}$ de la bandera; al momento de formular, uno de los integrantes del grupo formula en forma oral y escrita que la parte roja de la bandera es $\frac{2}{6}$; en el momento de justificar su respuesta, el estudiante formula $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, sumando numeradores y denominadores entre sí, tal como se observa en la figura 12.

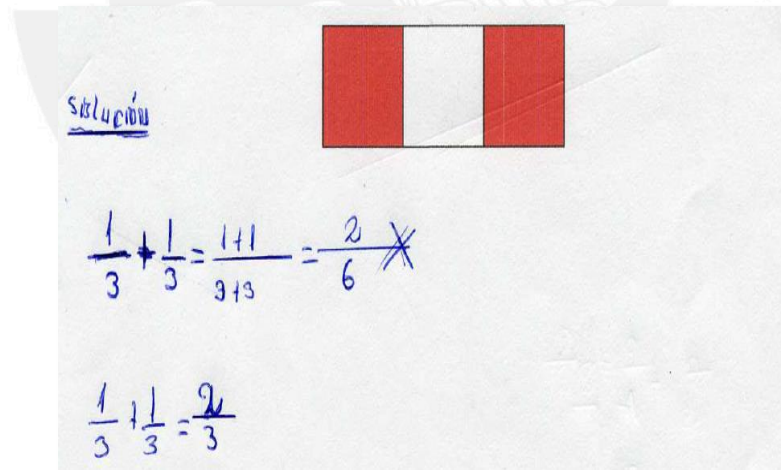


Figura 12. Situación 1 - Problema A

En seguida, cuando tienen un intercambio de opiniones, uno de los estudiantes formula en forma oral: “los números son iguales (señalando los denominadores), la respuesta también es igual (refiriéndose al denominador)”, argumento con el que convence a su compañero. Es en este momento que se produce la validación; debido a que argumenta su afirmación y convence a su compañero, luego tachan la respuesta anterior de $\frac{2}{6}$. Finalmente, a partir de sus

acciones, formulan y validan sus resultados en la hoja de papel en forma escrita $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; pero no vuelve al contexto del problema al dar su respuesta, presumimos que es porque no logran relacionar la figura con el contexto del problema. Podemos decir que se ha logrado cumplir con lo esperado, ya que los estudiantes movilizaron sus acciones, formulaciones y validaciones para dar solución al problema.

Grupo 2

Como parte de sus acciones que toma el grupo 2, es leer el problema A; demoraron en entender el problema, no sabían qué hacer, luego de algunos minutos, uno de los integrantes señala con la regla la parte roja de la bandera, en seguida utilizan la regla graduada en centímetros para medir las regiones de la figura y expresan de forma oral que la bandera tiene tres divisiones iguales, luego formula en forma oral y escrita $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ como la parte que representa al color rojo de la bandera del Perú; tal como podemos observar en la figura 13.

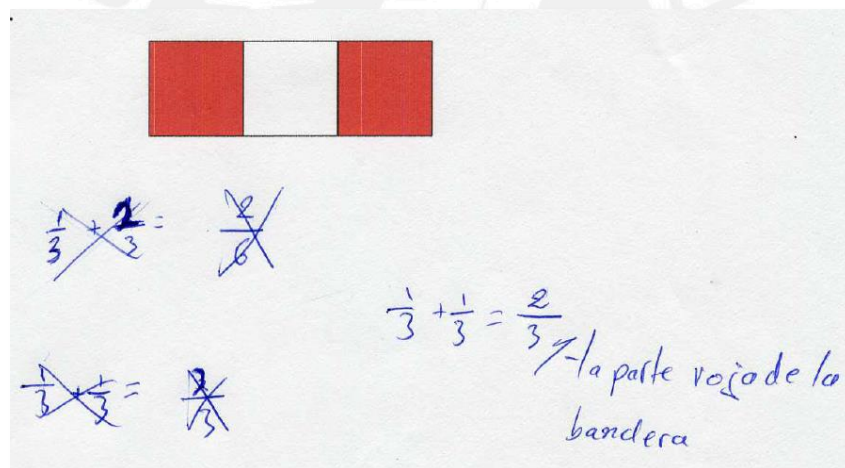


Figura 13. Situación 1 - Problema A

En seguida el otro estudiante expresa de forma oral es $\frac{2}{3}$; al no estar de acuerdo ambos integrantes en la respuesta del problema, se genera una discusión entre ellos, intentando convencer a su compañero es este el momento de la formulación; luego vuelven a sus acciones cuando señalan la figura en la hoja de papel y formulan en forma oral “la bandera está dividido en tres partes y el color rojo representa las dos partes de la bandera” convence con su argumento a su compañero y éste, tacha lo escrito al principio, en este momento se observa la validación porque está argumentando su afirmación. Finalmente al ponerse de acuerdo formulan como suma de fracciones la representación de cada una de las regiones de color rojo; llegan así a validar sus afirmaciones $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; además retornan al contexto del

problema para responder, formulan en forma oral y escrita “ $\frac{2}{3}$ es lo que representa la parte roja de la bandera”. Logrando así, cumplir con lo que esperábamos en el problema A.

Grupo 3

Como parte de las acciones que toma el grupo 3, está primero leer el problema en voz alta; señalan cada una de las regiones de la bandera, utilizan la regla graduada en centímetros para medir las regiones de la figura y confirman que la figura está dividida en tres partes iguales, así lo expresaron en forma oral y escrita; como podemos apreciar en la figura 14.

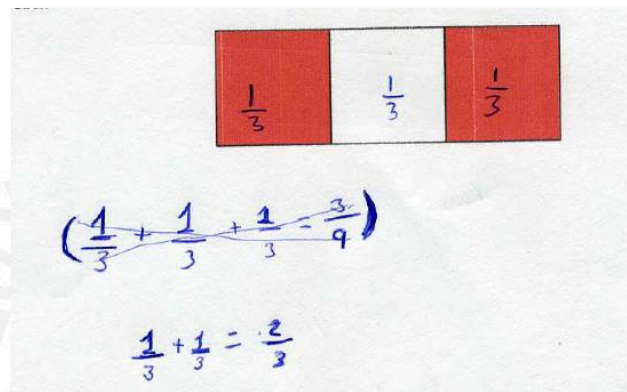


Figura 14. Situación 1 - Problema A

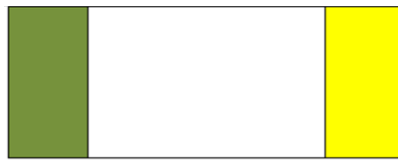
Luego escriben $\frac{1}{3}$ dentro de cada una de las regiones de la figura, así como suma de fracciones $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$, sumando las tres regiones de la bandera, además presumimos la presencia de errores algebraicos, de lo que podemos decir que la adición de fracciones lo están operando como si se tratase de dos números diferentes (sumar numeradores y denominadores entre sí); mientras el otro estudiante expresó de forma oral, “lee el problema, es $\frac{2}{3}$ ”, al no estar de acuerdo en la respuesta del problema uno de los integrantes del grupo, se genera una discusión entre ellos, es en este momento en que están formulando; intentando convencer a su compañero le dice “hay que sumar solo lo que está pintado de rojo, lee el problema, la tercera parte más la tercera parte de la figura”. Luego representa la parte roja de la bandera en forma escrita, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ es en este momento en que se produce la validación. Sin embargo no retornan al contexto del problema al dar la respuesta, presumimos que es porque, si bien es cierto, se apoyan en la figura en la solución del problema, no logran relacionar la figura con el contexto del problema. Por lo observado nos permitimos afirmar que se logró lo que esperábamos.

Problema B

Las variable que consideramos es división de las figuras con su valor regiones no congruentes, este cambio de valores de dividir en tres partes no congruentes con líneas paralelas, será necesario utilizar una regla graduada en centímetros para medir y darse cuenta que el interior de la figura está dividida en cinco partes congruentes, y así representar el terreno donde Luis sembró papa y quinua, representación que permitirá movilizar en los estudiantes la noción de adición de fracciones.

Problema B

El terreno de Luis tiene la forma de la figura; en el extremo izquierdo sembró papa y en el extremo derecho quinua. Representa como suma de fracciones la parte que Luis sembró papa y quinua respectivamente, en el terreno.



Respuestas esperadas:

Esperamos que los estudiantes luego de leer cuidadosamente el problema B; en grupos de dos, recurran a sus conocimientos previos sobre la noción de parte todo; podrían dentro de las acciones, cada estudiante del grupo comenzar a subrayar cada palabra para después expresarlo en el papel de manera numérica, medir la figura plana para poder darse cuenta en cuantas partes congruentes se encuentra dividida la figura plana y representar la fracción correspondiente a cada región, y que responda a la pregunta de la situación problema. Asimismo, podrían comenzar cada uno de los integrantes del grupo a formular, proponiendo la forma de hallar la región sombreada, es decir la parte donde se sembró papa y quinua en el terreno que representa el área sombreada. Además, pensamos que los estudiantes podrían formular, expresar sus propias ideas de forma oral o escrita. Finalmente a partir de sus acciones, formulen y validen sus resultados por medio de la suma de fracciones homogéneas, es decir la región del terreno que se sembró papa y quinua representa los $\frac{2}{5}$ del terreno; justificando sus procedimientos lleguen a la solución correcta.

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$; es el área de terreno que Luis sembró papa y quinua.

Grupo 1

Entre las acciones que tomaron los estudiantes es leer el problema B, uno de los integrantes del grupo expresa en forma oral, “la figura está dividida en tres partes”, mientras el otro estudiante expresa, “no es así”, generándose una discusión, en este momento se encuentran entre sus acciones y formulaciones. En seguida el argumento que utiliza uno de los integrantes del grupo es “la figura no es igual al problema de arriba (refiriéndose al problema A), no está dividido en partes iguales, mide el rectángulo (figura)”; en seguida sus acciones son medir y dividir la figura en cinco regiones congruentes. Podemos afirmar que su argumento convenció a su compañero.

A continuación formulan de forma oral y escrita “ $\frac{1}{5}$ es la región que corresponde a la parte que Luis sembró papa y del mismo tamaño es la parte que sembró quinua”, como se muestra en la figura 15, no supieron que más hacer. Por lo que el profesor investigador decide intervenir para preguntar ¿qué les pide el problema?, los estudiantes vuelven a leer el problema y ver la figura; observamos que los estudiantes se apoyan en todo momento en la figura para la solución del problema. Responde uno de los integrantes del grupo, “la parte que Luis sembró papa y quinua es $\frac{2}{5}$ ” con solo mirar la figura, sin embargo demoraron unos minutos para formular de forma escrita $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, la validación no fue rápida, llevó tiempo, pero finalmente uno de los estudiantes convence a su compañero a través de su argumento de lo correcto de la solución del problema.

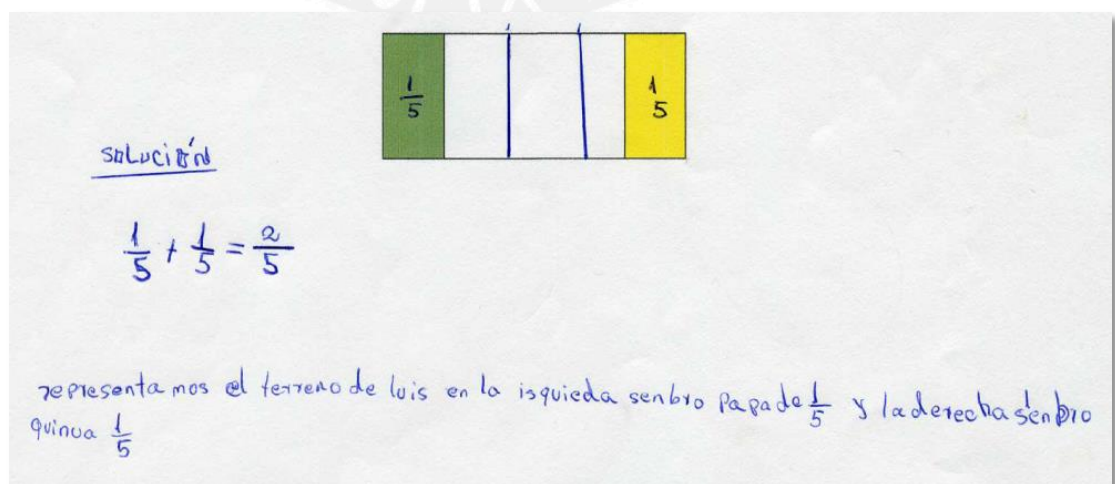


Figura 15. Situación 1 - Problema B

Por último expresan de forma escrita “representamos el terreno de Luis en la izquierda sembró papa de $\frac{1}{5}$ y a la derecha sembró quinua $\frac{1}{5}$ ”. Es decir partiendo de sus acciones y formulaciones llegan a validar el problema ambos integrantes del grupo, los estudiantes transitaron por las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007). Esto nos permite afirmar que se cumplió con lo que esperábamos.

Grupo 2

Entre las acciones que tomaron los estudiantes es leer el problema B, miden con su regla la parte que representa la parte sombreada de verde, amarillo, además la región que no está sombreada; tal como se aprecia en la figura 16.



Figura 16. Situación 1 - Problema B

En seguida continuando con sus acciones y formulaciones uno de los integrantes (emisor) del grupo expresa en forma oral, “la figura está dividida en tres partes”, entonces “la parte que Luis sembró papa es la tercera parte”, ambos integrantes se quedan pensativos, no muy convencidos de lo que acaba de decir uno de los integrantes del grupo; sin embargo lo expresan en forma escrita en ese sentido en la hoja de papel, entonces el otro integrante del grupo (receptor) interviene, indicando “regresa al problema A y fíjate (refiriéndose a la solución y el enunciado del problema A)”. Luego de algunos minutos de discutir entre ambos integrantes del grupo (emisor-receptor), dividen la figura en cinco partes congruentes, podemos decir que en este momento están en la fase de formulación. Continuando con la actividad, entre ellos se preguntan, ¿qué hay que hacer?, responden leyendo la hoja de papel, la parte que Luis sembró papa y quinua; y vuelven a preguntar, ¿Cuánto es?, responden en forma oral $\frac{2}{5}$, observando la figura dividida en cinco partes congruentes; pero no saben cómo expresarlo en forma de suma, conversan ambos integrantes del grupo y convencidos de que la

figura está dividida en cinco partes iguales, en seguida formulan $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. De ese modo logran validar en el momento de expresar sus argumentos sobre la solución al problema, recurriendo a sus conocimientos previos de fracciones, justifica de forma comprensiva esta solución retornando al contexto del problema y expresan en forma escrita “ $\frac{2}{5}$ es lo que utilizó para sembrar”; como se aprecia en la figura 17; lo que nos permite afirmar que los estudiantes transitaron por todas las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas para la solución del problema B, cumplen con lo que esperamos.

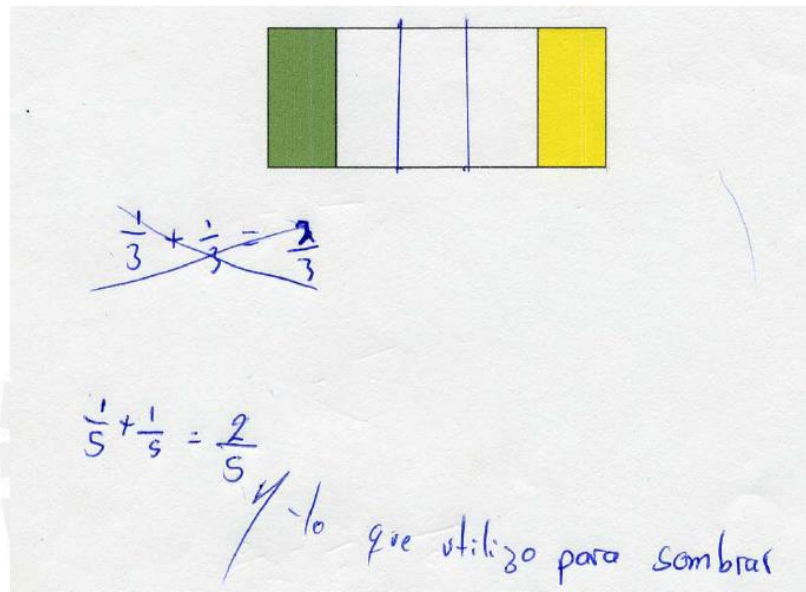


Figura 17. Situación 1 - Problema B

Grupo 3

Entre las acciones que toman los estudiantes es leer el problema varias veces, miden con su regla la región que representa lo que Luis sembró papa y quinua, así como la región no sombreada, tal como se aprecia en la figura 18.



Figura 18. Situación 1 – Problema B

Se observa que en un principio no logran ponerse de acuerdo en el número de divisiones de la figura, uno de los integrantes del grupo expresa en forma oral, en un primer momento “tiene tres partes” refiriéndose al número de divisiones de la figura, luego, en un segundo momento “tiene dos partes iguales” refiriéndose a la región sombreada, luego miden toda la figura, se aprecia que no están convencidos de lo expresado. Vuelven a leer el problema anterior (problema A), ambos expresaron “no es igual”, refiriéndose a que la figura no es igual al problema A. En seguida vuelven a leer el problema, miden y dividen la figura en cinco partes iguales, cada una de las partes del tamaño de la región sombreada, luego escriben $\frac{1}{5}$ en cada una de las regiones en que se dividió la figura.

Al parecer no pueden continuar, es por eso que interviene el profesor investigador, pregunta a los estudiantes ¿qué les pide el problema?, en ese momento leen la hoja de papel y responden “la parte que Luis sembró papa y quinua”; luego expresan en forma verbal $\frac{2}{5}$, podemos decir que en este momento se encuentran entre las dialécticas de acción y formulación. Finalmente expresan en forma oral y escrita $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, sin embargo no vuelve al contexto del problema para dar la respuesta, presumimos que es porque el grupo continua apoyándose en la figura y no están acostumbrados a regresar al contexto del problema para dar una respuesta. De lo observado, podemos afirmar que tienen mucha dificultad para validar el problema, la formulación verbal es lo que primero y con mayor facilidad hace el grupo, les cuesta mucho formular en forma escrita. Pero al final logran lo que esperábamos del problema. Como se aprecia en la figura 19.

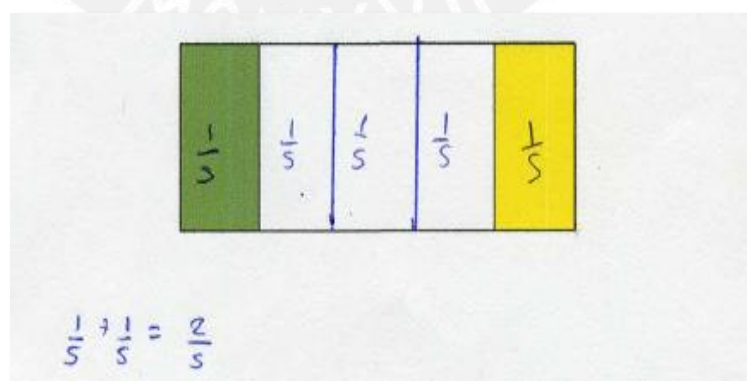


Figura 19. Situación 1 - Problema B

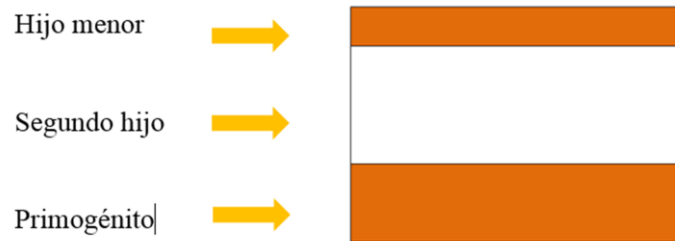
Problema C

La variable que consideramos es división de las figuras con su valor regiones no congruentes, está dividido en tres partes no congruentes, será necesario utilizar una regla graduada en

centímetros para medir y percibir que el interior de la figura está dividida en seis partes congruentes, que representa al terreno que Ana heredó a sus tres hijos; el primer ítem permitirá que los estudiantes movilicen la adición de fracciones homogéneas; el segundo ítem permitirá movilizar en los estudiantes la sustracción de fracciones homogéneas.

Ana compró un terreno y heredó a cada uno de sus tres hijos de la forma que está en la figura; al primogénito le tocó el doble de terreno del hijo menor; al segundo hijo el resto de terreno.

1. Representa como suma de fracciones la parte del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana.
2. Representa como sustracción de fracciones la parte del terreno que recibió el segundo hijo de Ana, con respecto a todo el terreno.



Respuestas esperadas

Esperamos que los estudiantes luego de leer cuidadosamente el problema; en grupos de dos, recurran a sus conocimientos previos sobre fracciones; podrían dentro de las acciones, cada estudiante del grupo comenzar a subrayar cada palabra para después expresarlo en el papel de manera numérica, representando la fracción de la región sombreada correspondiente al terreno que recibió cada uno de los hijos de Ana; al mismo tiempo respondan a las dos preguntas de la situación problema. Asimismo, se espera que los estudiantes comiencen a formular proponiendo cada uno de los integrantes del grupo la forma de hallar la región sombreada correspondiente al terreno que heredaron el hijo mayor y el hijo menor de Ana y parte del terreno que recibió el segundo hijo; en este proceso sólo utiliza la noción parte - todo de fracciones conocidas para el estudiante y apoyándose en la figura sombreada que representa al terreno que Ana hereda a sus tres hijos. A seguir, pensamos que los estudiantes podrían formular, expresar sus propias ideas de forma escrita u oral; finalmente a partir de sus acciones, formulen y validen sus resultados por medio de la adición y sustracción de fracciones homogéneas, es decir la región del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana representa los $\frac{3}{6}$ del terreno y la parte que recibió el segundo hijo de Ana

representa también los $\frac{3}{6}$ del terreno; justificando sus procedimientos lleguen a la solución correcta.

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}; \text{ parte del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana.}$$

$$\frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}; \text{ parte del terreno que recibió el segundo hijo de Ana.}$$

Grupo 1

Entre las acciones que tomaron los integrantes del grupo está, leer el problema, medir y dividir con su regla en dos partes iguales la región del terreno que representa al hijo mayor de Ana; luego de algunos minutos dividen toda la figura en seis regiones congruentes y escribe en cada una de estas regiones la fracción $\frac{1}{6}$; como se observa en la figura 20.

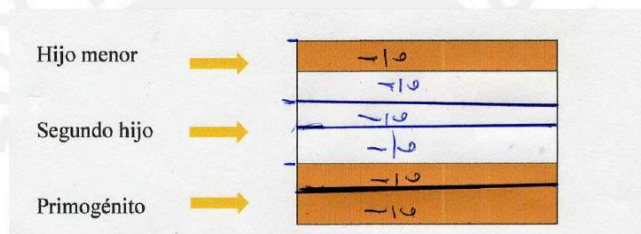
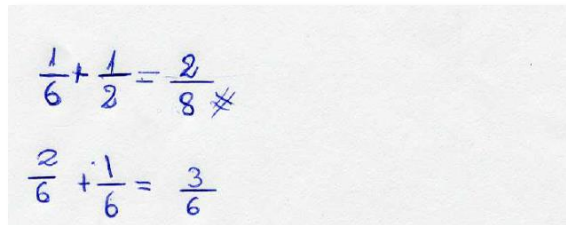


Figura 20. Situación 1 - Problema C

Al momento de responder lo que pide el primer ítem del problema, representa como suma de fracciones la parte del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana, se observa que tienen dificultad en expresar en forma escrita, formula uno de los integrantes del grupo como $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{8}$, persisten en error, ya que operan como si se tratase de dos números diferentes, numerador y denominador, sumando numeradores y denominadores entre sí. Además presumimos que no comprenden lo que pide el ítem, luego de formular y operar de esta forma la suma, uno de los integrantes no muy convencido de lo que formula su compañero de grupo, afirma “no es así”, en seguida vuelven a formular, cuando discuten los integrantes del grupo sobre sus estrategias para expresar en la hoja de papel como suma de fracciones, se observa que tienen dificultad en expresar en forma escrita, sin embargo se apoyan en la figura para expresar en forma oral lo que se pide, luego de conversar entre ellos el argumento que usa el otro integrante del grupo es “si la figura hemos dividido en seis partes, entonces lo que recibe el hijo menor es $\frac{1}{6}$ ”, señalando con su dedo la figura “el hijo mayor recibe el doble del menor, eso sería $\frac{2}{6}$ ”, podemos afirmar que es el momento en que validan el primer ítem del problema C, es decir un integrante del grupo (emisor) convence con

su argumento al otro compañero (receptor); finalmente expresan en forma escrita $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$, “el hijo mayor y el hijo menor recibe $\frac{3}{6}$ ”, como se observa en la figura 21; resuelve la adición de fracciones homogéneas tal como lo esperábamos, es decir llegan a transitar por cada una de las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas (acción, formulación y validación).

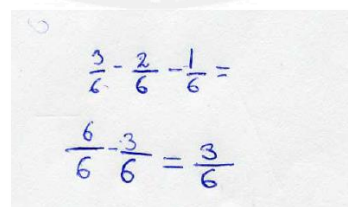


$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{8} \neq$$

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Figura 21. Situación 1 – Problema C

Y para el segundo ítem representa como sustracción de fracciones la parte del terreno que recibió el segundo hijo de Ana, con respecto a todo el terreno, no sabían que hacer por algunos minutos, protagonizan una discusión, debido a que uno de los integrantes formula, $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} =$ no pudo formular el “todo” como fracción y tampoco al parecer entienden lo que pide el ítem. Se observa que cuentan cada una de las regiones un sexto, dos sextos, tres sextos, cuatro sextos cinco sextos, seis sextos señalando la figura con el dedo; partir de sus acciones, formulan y validan la sustracción de fracciones como, $\frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$. Podemos afirmar que validan al momento de aceptar el argumento que propone el compañero para plantear y resolver la sustracción de fracciones, “el segundo hijo recibió $\frac{3}{6}$ ”, tal como se aprecia en la figura 22. Afirmamos que se llegan a transitar por todas las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas y se llega a cumplir con lo que esperábamos.



$$\frac{3}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} =$$

$$\frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$$

Figura 22. Situación 1 – Problema C

Grupo 2

Entre las acciones que toma el grupo es leer el problema, mide con su regla la región más pequeña y divide de ese mismo tamaño toda la figura en partes congruentes, obteniendo seis regiones congruentes, como se observa en la figura 23.

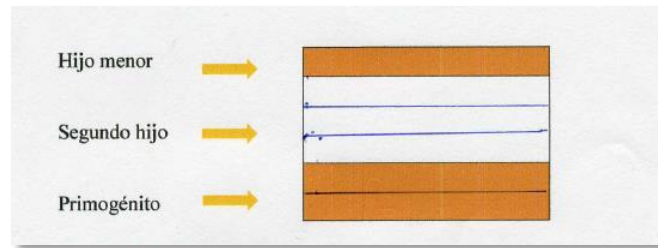


Figura 23. Situación 1 – Problema C

Para responder el primer ítem del problema C, formulan en forma oral sin mayor dificultad, “la respuesta es $\frac{3}{6}$ ”, lo que no pueden es formular de forma escrita en la hoja de papel, es decir tiene el resultado correcto pero no sabe cómo formular con suma de fracciones la parte del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana. Después de discutir entre los integrantes del grupo, formulan $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$, indicando con flechas que el hijo mayor recibe $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{6}$ el hijo menor, esto se puede apreciar en la figura 24. Presumimos que el grupo consigue construir el concepto de adición de fracciones y no sólo desarrolla la técnica de resolución.

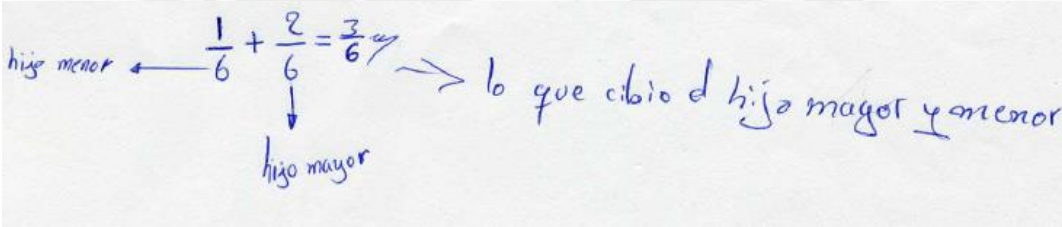


Figura 24. Situación 1 – Problema C

Continuando con el segundo ítem, los integrantes del grupo presentan mayor dificultad en este ítem, ya que les cuesta representar como sustracción de fracciones la parte del terreno que recibió el segundo hijo de Ana, con respecto a todo el terreno, formulan la operación de la sustracción $\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$; presumimos que formularon sin entender el problema, si no mecánicamente debido a que escribe la respuesta del ítem anterior y suma $\frac{1}{6}$ que es una de las regiones sombreadas. Pero el otro miembro del grupo le pide a su compañero volver a leer el enunciado, luego de discutir entre ellos, uno de los integrantes del grupo afirma “toda la figura sumaba seis sextos y de lo que tienen que restar tres sextos” formulan de manera comprensiva y formulan $\frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$, lo que recibió el segundo hijo es $\frac{3}{6}$; validan cuando tachan el procedimiento anterior y se convencen del argumento del nuevo planteamiento. Como observamos en la figura 25, vuelven al contexto de la situación problema para justificar su respuesta a los dos ítems, “ $\frac{3}{6}$ es lo que recibió el segundo hijo”. Es lo que esperábamos los

estudiantes transitan por todas las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas y finalmente ambos integrantes del grupo validan sus respuestas.

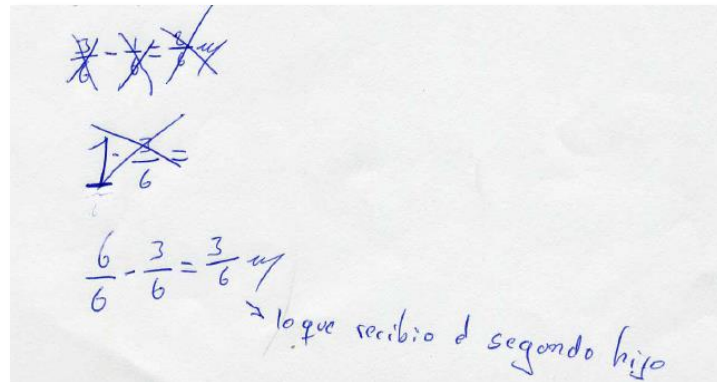


Figura 25. Situación 1 – Problema C

Grupo 3

Entre las acciones que toman es leer el problema, uno de los integrantes comentó “esto es más fácil que los problemas anteriores” (refiriéndose a los problemas A y B); luego continúan con medir y dividir en seis partes congruentes la figura. A continuación escriben en cada una de estas regiones de la figura $\frac{1}{6}$; esto lo podemos apreciar en la figura 26.

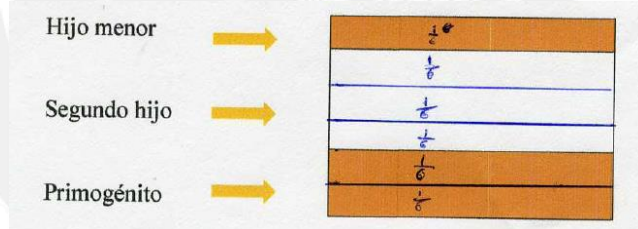
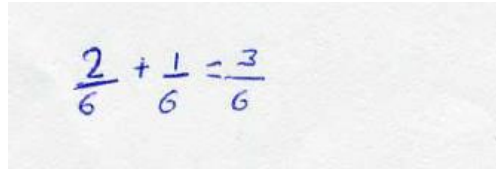


Figura 26. Situación 1 – Problema C

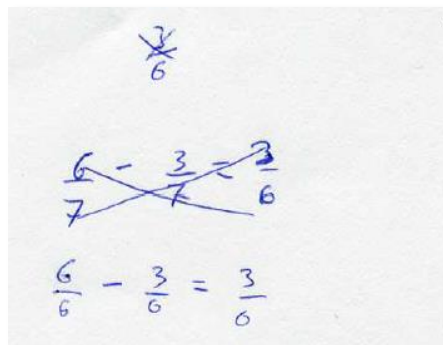
Al observar la figura y una vez que entre las acciones que toman esta colocar la fracción que representa cada región, le resulta fácil expresar de forma oral la respuesta a la primer ítem del problema, “ $\frac{3}{6}$ es la fracción que reciben los hijos de Ana”; sin embargo no les resulto tan fácil formular en forma escrita la suma de fracciones, es decir la parte del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana, manifestando en forma oral que, “al menor le corresponde $\frac{1}{6}$ de todo el terreno y el otro el doble de $\frac{1}{6}$ ”, al ver que no escribían el profesor investigador interviene al indicar que escriban lo que afirman, luego de algunos minutos llegan a formular de la siguiente manera $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$; tal como apreciamos en la figura 27, de esta forma da respuesta al primer ítem, pero sin volver al contexto del problema, presumimos esto porque no están acostumbrados a regresar al contexto del problema para dar una respuesta.



$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Figura 27. Situación 1 – Problema C

El segundo ítem del problema, pide que representen como sustracción de fracciones la parte del terreno que recibió el segundo hijo de Ana, con respecto a todo el terreno, sucede algo parecido al primer ítem; saben expresar la respuesta en forma oral $\frac{3}{6}$ con solo mirar la figura, pero tienen problemas para formular la operación como sustracción de fracciones, demoran algunos minutos más que en el primer caso, tanto que el profesor investigador decide intervenir, “lo que afirman tienen que plantear en la hoja de papel”. Discuten entre ellos, vuelven a leer el problema y expresan “todo el terreno menos lo que heredaron los hijos mayor y menor”, podemos decir que sabían lo que el problema pide pero no podían expresar; todo el terreno en forma de fracción en la hoja de papel, uno de los integrantes afirma que todo es “uno”, comentan entre ellos “¿cómo escribimos esto en fracción?”, uno de los integrantes del grupo, sugiere contar las regiones divididas de la siguiente manera: $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots, \frac{6}{6}$ “¡ah! $\frac{6}{6}$ es uno (refiriéndose al entero)”. Finalmente llegan a formular primero $\frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{6}$ como se aprecia en la figura 28. Al parecer se confundieron al escribir, ya que de forma inmediata lo tachan y formulan $\frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$; pero no vuelven al contexto del problema para dar la respuesta, presumimos que es porque no están acostumbrados a regresar al contexto del problema para dar una respuesta. El problema se validó en el momento en que argumenta su afirmación y convence a su compañero del procedimiento utilizado para la operación de sustracción de fracciones; sin darse cuenta los integrantes llegan a homogenizar con ayuda de la figura. Podemos afirmar que es lo que se esperaba del problema.



$$\frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$$

Figura 28. Situación 1 – Problema C

Presumimos que para los estudiantes no es sencillo plantear la sustracción de fracciones y además en un principio los tres grupos cometen errores, porque hay que obligar al estudiante en la devolución pensar en forma conceptual. Pero al mismo tiempo podemos ver que los estudiantes movilizaron sus acciones, formulaciones y validaciones para la solución de la situación, siguiendo los lineamientos de Brousseau (2007); en relación al objetivo de nuestra situación 1, podemos decir que se cumplió con lo esperado en los tres grupos, pero no fue trivial llegar a validar para los estudiantes.

Situación 2

Objetivo de la Situación 2: Sumar y restar fracciones heterogéneas.

Situación 2

Problema A:

Juan y sus dos hermanos heredaron en partes iguales un terreno de la forma que se aprecia en la figura; a su vez Juan heredará a sus cuatro hijos en partes iguales el terreno que heredó. Se desea conocer:

1. ¿Qué parte de todo el terreno heredará, tres de los hijos de Juan y uno de sus hermanos? Represente como suma de fracciones.
2. ¿Qué parte del terreno heredará el resto de miembros de la familia, con respecto a todo el terreno? Represente como una sustracción de fracciones.

Problema B:

La siguiente figura representa el terreno de nuestro colegio de Totorani; $\frac{2}{5}$ del terreno será destinado para la construcción del estadio y $\frac{1}{3}$ para la construcción de nuevas aulas. Represente en la figura, además, represente como una adición o sustracción de fracciones según se requiera en cada uno de los casos.

1. El terreno destinado para la construcción de las aulas y el estadio.
2. El resto del terreno del colegio que no fue utilizado para esos fines.

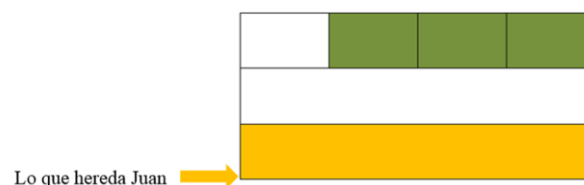
Problema A

Las variables que consideramos son división de las figuras con su valor regiones congruentes y/o regiones no congruentes, y orientación de los segmentos con su valor líneas verticales y líneas horizontales; está acompañado de una figura dividida en tres regiones congruentes y una de estas regiones está sombreado de amarillo que representa al terreno que hereda Juan; a su vez una de estas regiones está dividida en cuatro partes congruentes, de las cuales tres regiones están sombreadas de verde, cada una de estas regiones representa al terreno que Juan hereda a cada uno de sus hijos; representación que ayudara a entender, la adición y sustracción de fracciones heterogéneas. Para resolver el problema será necesario homogenizar las fracciones con denominadores diferentes. Además, presentamos dos ítems; el primer ítem se resolverá por adición de fracciones heterogéneas y el segundo ítem por sustracción de fracciones heterogéneas; homogenizando fracciones.

Problema A:

Juan y sus dos hermanos heredaron en partes iguales un terreno de la forma que se aprecia en la figura; a su vez Juan heredará a sus cuatro hijos en partes iguales el terreno que heredó. Se desea conocer:

1. ¿Qué parte de todo el terreno heredará, tres de los hijos de Juan y uno de sus hermanos? Represente como suma de fracciones.
2. ¿Qué parte del terreno heredará el resto de miembros de la familia, con respecto a todo el terreno? Represente como una sustracción de fracciones.



Respuestas esperadas

Esperamos que los estudiantes luego de leer cuidadosamente el problema A de la situación 2; en grupos de dos, recurran a sus conocimientos previos sobre la noción de parte todo; podrían dentro de sus acciones, cada estudiante del grupo comenzar a subrayar cada palabra para después expresarlo en el papel de manera numérica, representar la fracción correspondiente a cada región sombreada de color verde que representa el terreno que hereda cada uno de los hijos de Juan y la región sombreada de color amarillo que representa al terreno que hereda Juan, (igual al terreno que hereda cada uno de los hermanos de Juan); al mismo tiempo respondan a los ítems del problema A de la situación 2. Asimismo, se espera que los

estudiantes comiencen a formular proponiendo cada uno de los integrantes del grupo la forma de hallar la parte del terreno que heredará tres de los hijos de Juan y uno de sus hermanos, luego, la parte del terreno que heredará el resto de miembros de la familia. En este proceso solo utiliza la concepción parte-todo, conocidas para él y apoyándose en la figura que representa al terreno que hereda la familia de Juan. A seguir, pensamos que los estudiantes podrían formular, expresar sus propias ideas de forma escrita u oral; finalmente a partir de sus acciones, esperamos que formulen y validen por medio de sus argumentaciones al momento de sumar o restar las fracciones. La solución entonces sería $\frac{3}{12} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$; para la región que representa a la parte del terreno que heredará, tres de los hijos de Juan y uno de sus hermanos. Y $1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$; para la región que representa a la parte del terreno que heredará el resto de miembros de la familia.

Grupo 1

Entre las acciones que toma el grupo está leer el problema A de la situación 2 hasta comprender lo que se pide en el problema, conversan entre ambos miembros del grupo, luego miden con sus reglas y dividen la figura en 12 partes congruentes; además formulan de forma escrita en cada una de las regiones $\frac{1}{12}$, como apreciamos en la figura 29.

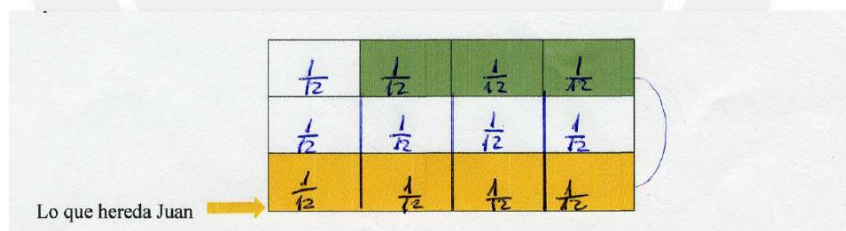
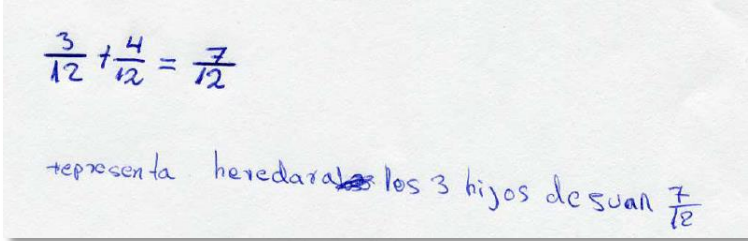


Figura 29. Situación 2 – problema A

Al ver que no podían formular la primera pregunta en forma escrita, el profesor investigador interviene con la pregunta ¿Qué les pide el problema? vuelven a leer el enunciado del problema, en seguida señalan la región sombreada de amarillo y manifestando de forma oral son cuatro doceavo.

Se les recuerda “escribir en la hoja de papel todo lo que expresaban de forma oral” (devolución) es decir que lean lo que les pide el problema y respondan explicando el procedimiento para su solución. Entre ellos se preguntan; ¿Cuál es la parte del terreno que heredan los tres hijos de Juan?, “responde tres doceavos, contando cada una de las regiones sombreadas de color verde, señalando la figura”. Podemos afirmar que en este momento se

encuentran entre las acciones y formulaciones según las dialécticas de Brousseau, a partir de ello expresan en forma escrita la solución al primer ítem del problema $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$, de esta forma validan su solución, tal como podemos observar en la figura 30. Es como lo esperábamos.

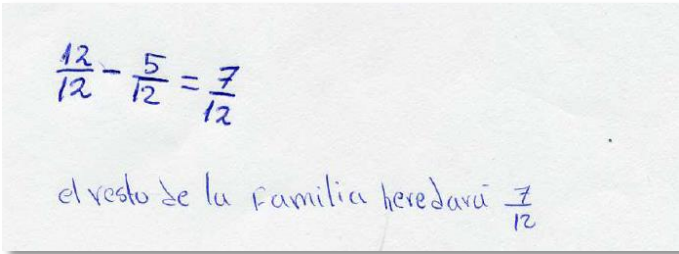


$$\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

representa heredar a los 3 hijos de suan $\frac{7}{12}$

Figura 30. Situación 2 – problema A – ítem 1

Otra vez se quedan sin saber como formular lo que le pide el segundo ítem, el profesor investigador pregunta, ¿Qué les pide la segunda pregunta? Responden, leyendo su hoja de papel, “que se indique como sustracción el resto de terreno que heredaran los demás miembros de la familia respecto a todo el terreno”, luego de unos minutos llegan a formular de la siguiente forma; $\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ escribiendo que el resto de la familia heredará $\frac{7}{12}$. En un inicio la respuesta que expresaron en forma oral al segundo ítem del problema fue cinco doceavos, pero al momento de formular en la hoja de papel formulan como se muestra en la figura 31, presumimos que se confundieron al pasar a la hoja de papel porque observando la figura llegan a expresar correctamente en forma oral. Sin embargo cometen el error al formular en lenguaje escrito. No es lo que esperábamos porque no llegan a validar, sólo llegaron a transitar por sus acciones y formulaciones según las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas.



$$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

el resto de la familia heredará $\frac{7}{12}$

Figura 31. Situación 2 – problema A – ítem B

Grupo 2

Las acciones que toman los integrantes del grupo fue leer el problema varias veces, hasta comprender lo que le pide el problema, conversan entre los miembros del grupo para poder tomar las acciones adecuadas en este problema; en seguida miden con sus reglas y dividen la

figura en 12 regiones congruentes, cuentan y formulan en cada una de las regiones $\frac{1}{12}$. A su vez, la figura está ayudando a los estudiantes a transformar en otras fracciones del mismo denominador, y así identificar cada una de las regiones de la figura como $\frac{1}{12}$; tal como se aprecia en la figura 32, fue como lo esperábamos.

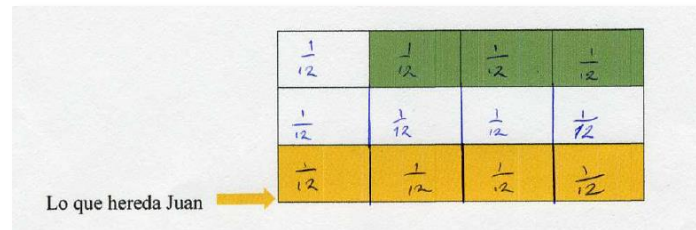
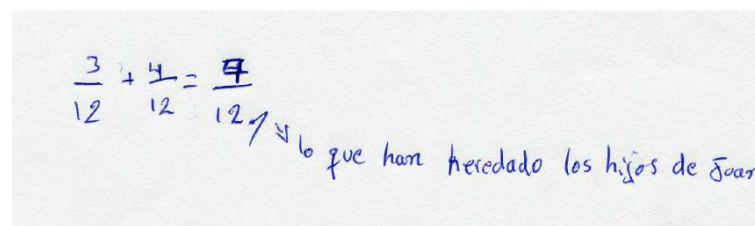


Figura 32. Situación 2 – problema A

Al ver que al parecer no podían responder la primera pregunta, les pedimos volver a leer en voz alta, es cuando uno de los integrantes del grupo, señala la figura de la hoja, pregunta a su compañero ¿cuál es el terreno que hereda el hermano de Juan? Responde “la parte sombreada de amarillo”. Vuelve a preguntar ¿cómo debemos escribir esto en fracciones? Responde, señalando y contando cada una de las regiones sombreadas de amarillo “es cuatro doceavos” podemos decir que es parte de sus acciones y formulaciones; se dan cuenta que lo que le pide el ítem es la parte del terreno que heredan tres hijos de Juan y uno de sus hermanos, esto corresponde a la región sombreada de la figura, y el otro integrante del grupo expresa ¿cuál es el terreno que hereda tres de los hijos de Juan? Responde observando la figura y sumando las regiones sombreadas de verde “tres doceavos”. El profesor investigador hace la devolución cuando indica que escriban en la hoja de papel lo que están expresando en forma oral; es en este momento que validan la primera pregunta del problema, porque argumenta y convence a su compañero de la validez de su respuesta. Finalmente formulan $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$ “es lo que han heredado los hijos de Juan”, falta escribir, “y uno de sus hermanos”, podría ser por la premura del tiempo no lograron escribir completo la respuesta del ítem o por falta de costumbre de volver al contexto para dar la respuesta; esto lo apreciamos en la figura 33. Tal como lo esperábamos.

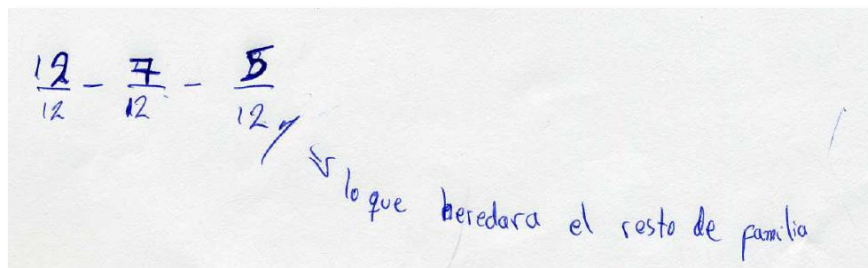


$$\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

lo que han heredado los hijos de Juan

Figura 33. Situación 2 – problema A – ítem 1

Continuando con la actividad entre ambos integrantes se preguntan ¿Qué pide la segunda pregunta?, responden leyendo la hoja de papel que se indique como sustracción el resto de terreno que heredarán los demás miembros de la familia respecto a todo el terreno, al observar la figura se dan cuenta que es la parte no sombreada; entonces los integrantes del grupo cuentan cada una de estas regiones no sombreadas; luego de unos minutos formulan $\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$, llegan a validar cuando aceptan como verdad este argumento y finalmente expresan en forma escrita “lo que heredará el resto de la familia”, tal como se observa en la figura 34. Es lo que esperábamos ya que lograron validar el segundo ítem del problema.



$$\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

↘ lo que heredara el resto de familia

Figura 34. Situación 2 – problema A – ítem 1

Grupo 3

Parte de sus acciones es leer hasta comprender lo que pide el problema, conversan sobre las estrategias a tomar, miden con sus reglas y dividen la figura en 12 partes congruentes, como se observa en la figura 35.



Figura 35. Situación 2 - problema A

Al ver que no escribían nada más por algunos minutos el profesor investigador pide que lean el problema; discuten entre ambos integrantes del grupo y preguntan ¿qué fracción representa cada cuadradito?, se quedan en silencio por un momento, uno de los integrantes sugiere a su compañero, “cuenta”, refiriéndose a las regiones que se formaron al dividir la figura. Después

de contar señalan la figura y responden $\frac{1}{12}$ y colocan en cada una de las regiones $\frac{1}{12}$, la figura ayuda a los estudiantes a transformar en otras fracciones de un mismo denominador, tal como se observa en la figura 36.

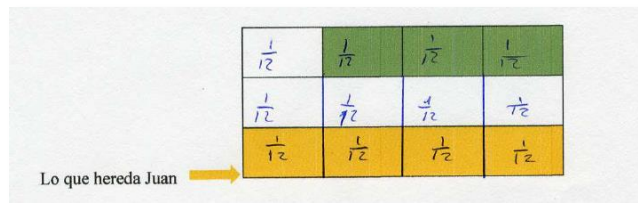


Figura 36. Situación 2 - problema A

Entre ellos comentan que este problema está más fácil. Sin embargo se demoran en responder el primer ítem, ambos integrantes del grupo leen la hoja de papel, señalan la figura de la hoja y preguntan ¿cuál es el terreno que hereda Juan?, observan por un momento la figura y luego se dan cuenta de que es la parte sombreada de amarillo, vuelven a preguntar ¿cómo se representa en fracciones? Responden en forma oral “cuatro doceavos”, contando en la figura la región sombreadas. Preguntan de nuevo ¿qué pide el problema?, responden, “la parte del terreno que heredan tres hijos de Juan y uno de sus hermanos”, leyendo la hoja formulan, $\frac{12}{12} + \frac{12}{12} = \frac{24}{12}$, pero lo tachan. Uno de los integrantes se da cuenta del error, se vuelve a apreciar que en forma oral ayudándose en la figura transforman en fracciones con el mismo denominador y expresan en forma oral la respuesta, pero cuando se trata de representar lo mismo como suma de fracciones en forma escrita, se quedan sin saber que hacer. Por lo que profesor investigador interviene al expresar “todo lo que hablan escriban en la hoja de papel”. Y finalmente uno de los integrantes del grupo señala con su dedo la figura, explica a su compañero y argumenta su razonamiento, el color amarillo es $\frac{4}{12}$ y el color verde es $\frac{3}{12}$, “esto hay que juntar” indica el estudiante, de esa forma vuelven a formular $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$ (figura 37). Llegan a validar el primer ítem del problema A cuando aceptan como correcto el argumento que da uno de los integrantes del grupo. Tal como lo esperábamos.

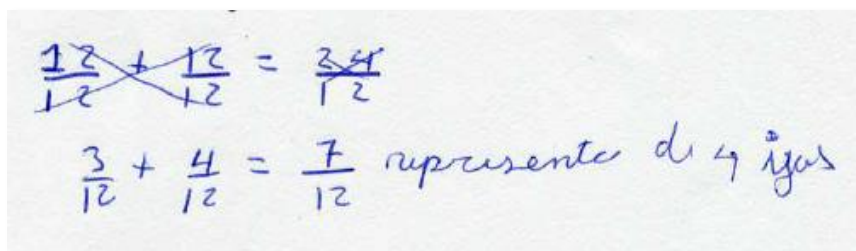
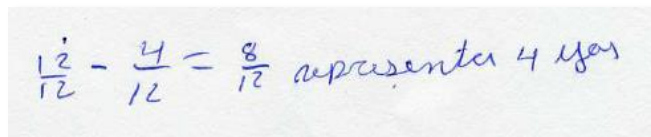


Figura 37. Situación 2 – problema A – ítem 1

Continuando con la actividad el otro integrante del grupo pregunta ¿Qué pide la segunda pregunta?, los integrantes del grupo responden leyendo la hoja de papel, que se indique como sustracción el resto de terreno que heredan los demás miembros de la familia respecto a todo el terreno, luego formulan $\frac{12}{12} - \frac{4}{12} = \frac{8}{12}$ y vuelven al contexto del problema pero no en forma correcta, formulan en la respuesta “representa 4 hijos”. Además cometan otro error al plantear como sustrayendo $\frac{4}{12}$, cuando debía ser $\frac{7}{12}$; pero sin embargo el desarrollo numérico de las fracciones formuladas resuelven de forma correcta. No es lo que esperamos porque no llegaron a validar el segundo ítem. Así se observa en la figura 38.



$$\frac{12}{12} - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} \text{ representa 4 hijos}$$

Figura 38. Situación 2– problema A – ítem 2

Problema B

Comprende dos ítems; para el problema B de la Situación 2 sólo se muestra un rectángulo en papel blanco que representa el terreno del colegio de Totorani; $\frac{2}{5}$ para la construcción del estadio y $\frac{1}{3}$ para la construcción de nuevas aulas; los integrantes del grupo son quienes tienen que graficar su representación, y considerar la variable, división de las figuras con su valor regiones congruentes y/o regiones no congruentes. El primer y el segundo ítem permitirán movilizar los conocimientos de adición de fracciones heterogéneas.

Problema B

La siguiente figura representa el terreno de nuestro colegio de Totorani; $\frac{2}{5}$ del terreno será destinado para la construcción del estadio y $\frac{1}{3}$ para la construcción de nuevas aulas. Represente en la figura, además, represente como una adición o sustracción de fracciones según se requiera en cada uno de los casos.

1. El terreno destinado para la construcción de las aulas y el estadio.
2. El resto del terreno del colegio que no fue utilizado para esos fines.



Respuestas esperadas

Esperamos que los estudiantes luego de leer cuidadosamente el problema B; en grupos de dos, recurran a sus conocimientos previos sobre la concepción parte todo de fracciones; podrían dentro de sus acciones, cada estudiante del grupo comenzar a subrayar cada palabra para después expresarlo en la hoja de papel de manera numérica, representar las dos fracciones, $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$ en el rectángulo que se presenta en el problema B, basándose en lo ya visto en la situación anterior; al mismo tiempo respondan a los dos ítems del problema B de la Situación 2. Asimismo, se espera que los estudiantes comiencen a formular proponiendo cada uno de los integrantes del grupo la forma de hallar la parte del terreno destinado para la construcción del estadio dividiendo el terreno en cinco partes congruentes y para la construcción de aulas en tres partes congruentes, de diferentes formas, una de ellas podría ser como se aprecia en la figura 39.

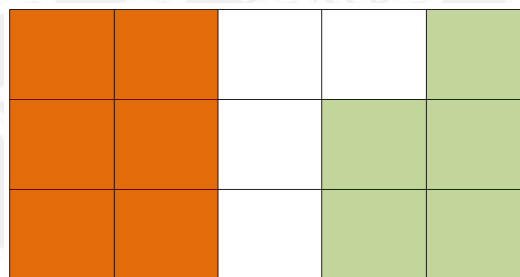


Figura 39. Representación de problema B – Situación 2

Además, reconocer el resto del terreno que no fue utilizado para esos fines; en este proceso sólo utiliza la noción parte todo de fracciones conocidas para él y ayudándose en la figura que representan los integrantes del grupo para transformar en otras fracciones con el mismo denominador. A seguir, pensamos que los estudiantes podrían formular, expresar sus propias ideas de forma escrita u oral; finalmente a partir de sus acciones y formulaciones validen sus resultados por medio de la adición y sustracción de fracciones heterogéneas respectivamente.

Por otro lado, la división de las figura podría ser como se aprecia en la figura 44; esperamos que dividan en total en quince regiones congruentes. Luego esperamos que sombreen $\frac{1}{3}$ de toda la figura lo que representa a la construcción de nuevas aulas del colegio, formado por su

equivalente que son cinco rectángulos y $\frac{2}{5}$ de la figura que represente a la construcción del estadio, formado por su equivalente que son seis rectángulos. Finalmente que reconozcan la parte que no se utilizó para esos fines que son los rectángulos que no están sombreados, en este caso son cuatro y representa a los $\frac{4}{15}$ de todo el terreno.

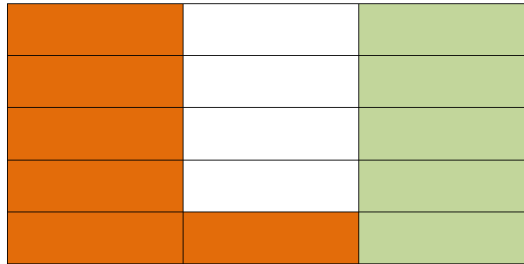


Figura 40. Representación de problema B – Situación 2

Esperamos que los integrantes del grupo expresen en forma oral y escrita la adición y sustracción de fracciones, según sea el caso, a partir de sus acciones y formulaciones se espera que validen homogenizando las fracciones. El terreno destinado para la construcción de las aulas y el estadio $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ y el resto del terreno del colegio que no fue utilizado para esos fines es $1 - \frac{11}{15} = \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$

Grupo 1

Entre las acciones de los estudiantes están primero leer el problema en voz alta; luego de algunos minutos de conversar entre ellos sobre sus estrategias para dar solución al problema planteado, uno de los integrantes del grupo expresa en forma oral “hay que dividir en cinco partes”. Luego de unos minutos miden y dividen la figura en cinco partes congruentes, con lados paralelos al rectángulo, como se observa en la figura 41.



Figura 41. Situación 2– problema B

Intentan realizar la representación de $\frac{1}{3}$ para la construcción de nuevas aulas, por algunos minutos se quedan sin poder que hacer; y en vista que no podían continuar con la división en tres partes de la figura, vuelven a leer el problema y terminan por darse cuenta que tienen que graficar en la figura rectangular que representa al terreno, $\frac{1}{3}$ del terreno que será destinado para la construcción de aulas, sabían que debían hacer pero no sabían cómo. Al ver que tienen dificultades para graficar, el profesor investigador interviene y expresa “recuerden los problemas anteriores acompañadas de una figura y si necesitan vuelvan a ver sus soluciones de los problemas anteriores, ahora vuelvan a leer el problema ¿qué es lo que tienen que hacer?” Entonces todos los integrantes señalan algunas ideas y de ellos sale decir en el número de partes que tienen que dividir la figura “hay que dividir en tres partes”, como la figura ya estaba dividida en cinco partes les cuesta mucho dividir la misma figura en tres partes. Finalmente logran dividir pero cambian la forma de las paralelas del rectángulo en la figura. Luego de dividir la figura en tres partes, en el momento de sombrear $\frac{1}{3}$ de la figura, otra vez se quedan pensativos, quieren sombrear la región que ya está sombreada. Por lo que el profesor investigador decide preguntar ¿se puede construir sobre lo que ya está construido? para que puedan darse cuenta que no es posible sombrear sobre lo que ya está sombreado y tienen que tomar otra región equivalente; de este modo, somborean tres regiones, como ya está sombreada las otras dos regiones, se quedan pensativos y lo que hacen entre los dos integrantes del grupo es trasladar las dos regiones que falta sombrear a la parte posterior para así completar con el sombreado de un tercio de la figura. Es así que la figura queda dividida en 15 partes iguales, seis regiones sombreadas con lapicero azul equivalente a $\frac{2}{5}$ y cinco con lapicero rojo equivalente a $\frac{1}{3}$, las cifras le inducen a buscar fracciones con el mismo denominador, la figura está ayudando a los estudiantes a transformar en otras fracciones con el mismo denominador; y finalmente a través de sus acciones, formulan y validan $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ para la construcción del estadio, además formulan representan con $\frac{1}{3}$ la construcción de nuevas aulas. Es lo que apreciamos en la figura 42 y lo que esperábamos.

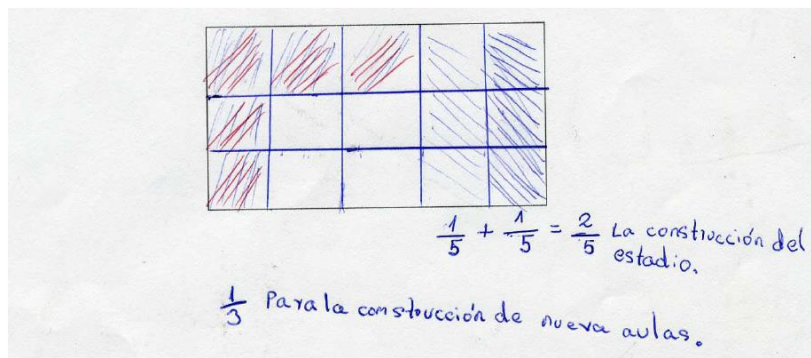
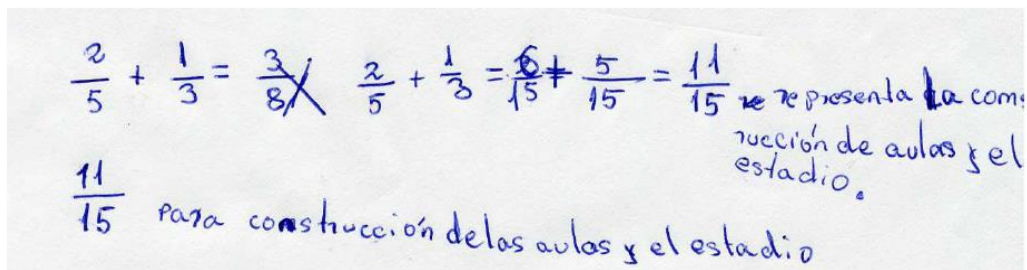


Figura 42. Situación 2 – problema B

Para responder al primer ítem del problema los integrantes del grupo, se ayudan de la figura que sombreamos, formulan la fracción que corresponde a la construcción del estadio $\frac{2}{5}$ y de las aulas $\frac{1}{3}$ como suma $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$ hasta ahora no entienden la adición de fracciones. Uno de los integrantes tacha la respuesta e indica, “no está bien”, tacha la solución y argumenta indicando “ $\frac{2}{5}$ es $\frac{6}{15}$ ” señala la figura y cuenta con su dedo cada una de las regiones sombreadas de color azul; y vuelve a afirmar “ $\frac{1}{3}$ es $\frac{5}{15}$ ” con el mismo procedimiento, es el momento donde apreciamos la fase de la validación, ya que está argumentando su afirmación. Finalmente a través de sus acciones llega a formular y validar, como suma de fracciones $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ vuelve al contexto del problema al momento de dar la respuesta, “ $\frac{11}{15}$ representa la construcción de las aulas y el estadio”. Para dar solución a la situación ayudándose de la figura transforman en otras fracciones del mismo denominador, hallan sus fracciones equivalentes, en el momento que formulan $\frac{2}{5}$ igual $\frac{6}{15}$ y $\frac{1}{3}$ igual $\frac{5}{15}$; tal como se aprecia en la figura 43.

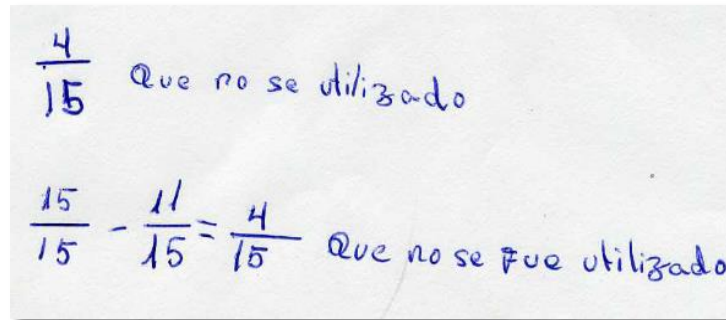


$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$ ~~$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$~~ $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ $\frac{11}{15}$ $\frac{11}{15}$ para construcción de las aulas y el estadio.

Figura 43. Situación 2 – problema B – ítem 1

Luego para responder el segundo ítem, afirman que la respuesta es $\frac{4}{15}$ al sólo ver la figura sin necesidad de plantearlo como sustracción de fracciones, lo que observamos es que formulan la respuesta sin mayor dificultad en forma oral, para lo que suman las regiones no

sombreadas, el profesor investigador pregunta ¿cómo encontró la respuesta?, ellos señalan la figura la parte que no fue sombreada, validan al formular las fracciones con ayuda de la figura para transformar en otras fracciones con el mismo denominador, se dan cuenta que $\frac{15}{15}$ es equivalente a la unidad, representado por toda la figura. Finalmente formulan $\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ “que no se fue utilizado”. Como podemos observar en la figura 44. Es lo que esperábamos.



$$\frac{4}{15} \text{ Que no se utilizado}$$

$$\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15} \text{ Que no se fue utilizado}$$

Figura 44. Situación 2 – problema B – ítem 2

Grupo 2

Entre las acciones que toman los estudiantes es leer en voz alta la hoja de papel, uno de los integrantes del grupo pregunta ¿de qué manera es posible dividir la figura? su compañero de grupo responde después de unos minutos, “en tres partes”, luego miden y dividen la figura en tres partes congruentes, a continuación somborean con lapicero azul la tercera parte de la figura, que representa al terreno destinado para la construcción de las aulas, formula en ese sentido, en $\frac{1}{3}$ de la región sombreada, señalan con una flecha “nuevas aulas”; y con líneas horizontales dividen en cinco partes congruentes para representar $\frac{2}{5}$ del terreno que será destinado para la construcción del estadio; finalmente la figura queda dividida en 15 partes congruentes, además coloca $\frac{1}{15}$ en una de las regiones de la figura, al igual que en el problema anterior se ayudan de la figura para transformar en otras fracciones con el mismo denominador; se observa que tienen dificultad cuando tienen que sombrear $\frac{2}{5}$, señalan la parte que ya está sombreada. Como tenían problemas para representar y sombrear esta región, el profesor investigador decide intervenir y preguntar, ¿se puede construir sobre el terreno que ya está construido?, para que puedan darse cuenta que no es posible volver a sombrear la misma área y tienen que tomar otra área o región rectangular, por lo que, entre sus acciones está contar las regiones que representa a dos quintos de la figura. Luego de contar el número

de rectángulos que representa a $\frac{2}{5}$ sombrea con lapicero color negro indicando con una flecha que es para la construcción del estadio; como se observa en la figura 45, es lo que esperamos.

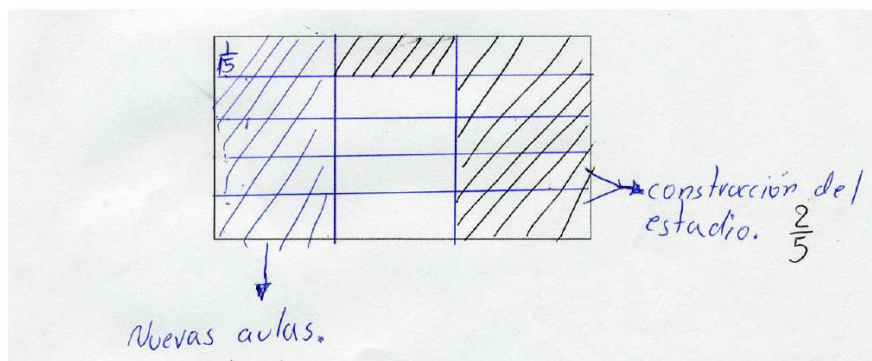


Figura 45. Situación 2 – problema B

Para responder el primer ítem entre sus acciones esta contar las regiones rectangulares que representan a $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$, es decir sus fracciones equivalentes guiándose de las regiones sombreadas de color negro y azul de la figura; es en este sentido es que finalmente formulan como suma de fracciones $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$ formulan “es lo que está utilizado”. Continúan apoyándose en la figura para transformar en otras fracciones con el mismo denominador, esto se observa en el momento que formulan en forma oral y escrita $\frac{2}{5}$ igual $\frac{6}{15}$ y $\frac{1}{3}$ igual $\frac{5}{15}$, contando con sus dedos cada una de las regiones que representa la construcción del estadio así como la construcción de nuevas aulas, como se observa en la figura 46.

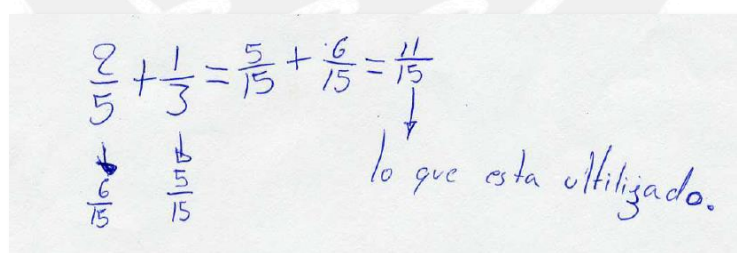
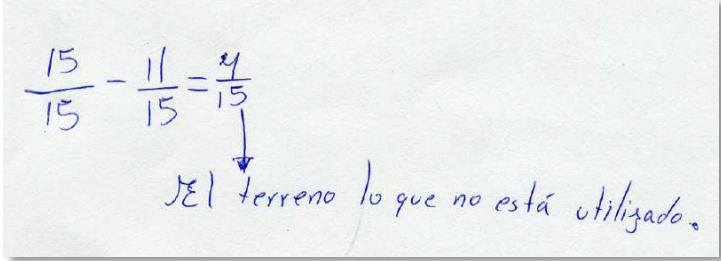


Figura 46. Situación 2 – problema B – ítem 1

Por último para responder el segundo ítem del problema, afirman en forma verbal la respuesta es $\frac{4}{15}$ con sólo ver la figura sin necesidad de plantearlo como sustracción, solo cuentan las regiones no sombreadas de la figura plana. El profesor investigador decide intervenir recordando al grupo escribir la forma en que hallaron la respuesta, ellos expresan en forma oral, “la respuesta es la parte de la figura que no fue sombreada”, luego por medio de sus acciones, formulan y validan la situación, podemos afirmar que esto sucede cuando argumentan de la siguiente manera: señalan y cuentan las regiones no sombreadas, y logran

expresar lo dicho en forma de sustracción de fracciones $\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ señalan con una flecha $\frac{4}{15}$ “el terreno que no está utilizado”; tal como se observa en la figura 47. Es lo que esperábamos.



$$\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

El terreno lo que no está utilizado.

Figura 47. Situación 2 – problema B – ítem 2

Grupo 3

De las acciones que toman los estudiantes podemos decir que son leer en voz alta la hoja de papel, dividen la figura en cinco partes iguales con paralelas al rectángulo y dividen en tres partes iguales para representar $\frac{1}{3}$ del terreno que será destinado para la construcción de aulas, la figura queda dividida en 15 partes iguales. Al momento de sombrear cada una de las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ no entienden y no logran reconocer en la figura el área que representa a la construcción de las nuevas aulas; sin embargo formulan en forma correcta $\frac{2}{5}$ de la figura en la región no sombreada como la construcción del estadio, por otro lado llegan a sombrear $\frac{3}{5}$ de la figura, y formulan $\frac{1}{5}$ en cada una de las tres regiones de la figura que no corresponde; como observamos en la figura 48. A pesar de que el docente investigador decide intervenir con preguntas que generen una discusión en los tres grupos y así movilizar los conocimientos previos de los estudiantes que si lograron transformar las fracciones en otras con el mismo denominador, no consiguen validar el problema. No es lo que esperábamos.

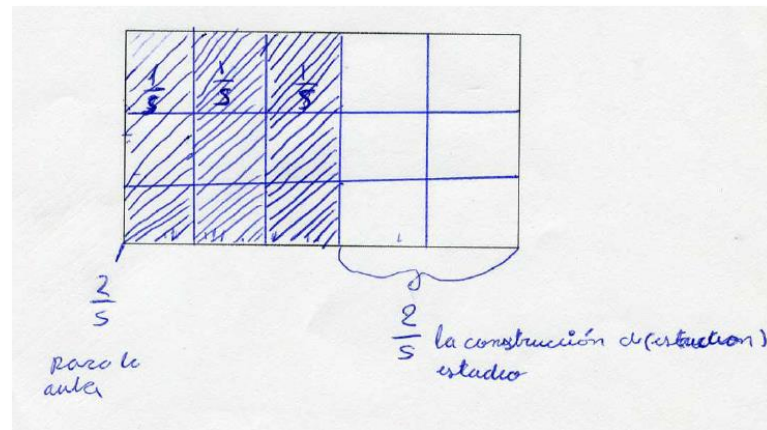
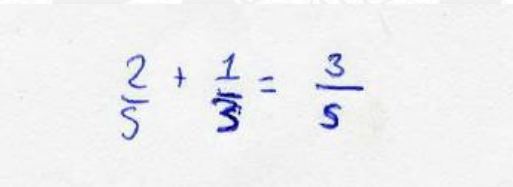


Figura 48. Situación 2 – problema B

Para dar respuesta al primer ítem del problema, formulan $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$, como observamos en la figura 49, el profesor investigador en todo momento actúa como mediador del aprendizaje en base a preguntas como mencionamos en el párrafo anterior, no se insiste para no caer en el efecto Topacio. Presumimos que no logran validar la adición ni la sustracción de fracciones, porque no logran sombrear correctamente la figura ya que todavía no desarrollaron la técnica necesitan de la figura para ayudarse y transformar en otras fracciones con el mismo denominador. No era lo que esperábamos.

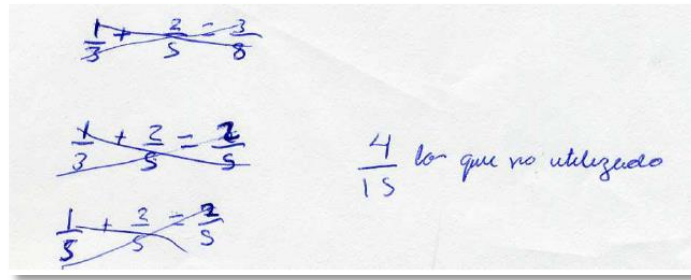


$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

Figura 49. Situación 2 – problema B – ítem 1

En el momento de responder el segundo ítem, hacen varios intentos por formular pero en los tres ejercicios planteados lo tachan, y en una de estas formulaciones vuelven a sumar numeradores y denominadores entre sí, la hora de clase término, así que se quedó hasta donde lograron avanzar. Lo podemos observar en la figura 50 no es lo que esperábamos.

Los integrantes transitan entre sus acciones y formulaciones y no llegan a validar la situación según las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007).



$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$
 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$
 $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$\frac{4}{15}$ con que no utilizado

Figura 50. Situación 2 – problema B – ítem 2

Institucionalización

A seguir, hicimos una socialización, preguntamos a los grupos que es lo que habían aprendido en la clase, los integrantes de los tres grupos formulan en forma oral y escrita en la pizarra. A partir de esto se recogen sus ideas y nos lleva a una institucionalización de las Situaciones Didácticas presentadas, con la finalidad de establecer y dar un status oficial a nuestro objeto matemático adición y sustracción de fracciones. Además, se considera el estudio desde el punto de vista matemático y didáctico de nuestro objeto matemático. El profesor investigador hace la institucionalización en la pizarra de la siguiente manera:

FRACCIÓN: Es la representación de un cociente de números enteros no negativos, siendo el divisor diferente de cero. Así, una fracción será una expresión de a forma:

$$\frac{a}{b} \quad a, b \in \mathbb{Z}^+; b \neq 0;$$

a será llamado numerador.

b será llamado denominador.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Se llaman fracciones homogéneas cuando tienen el mismo denominador, se coloca el mismo denominador y se operan los numeradores. Si las fracciones tienen denominadores diferentes, se obtienen fracciones equivalentes de igual denominador, es decir se homogenizan las fracciones y luego se operan como fracciones homogéneas.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{d} \pm \frac{c}{d} \times \frac{b}{b} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Luego de la formalización del conocimiento sobre adición y sustracción de fracciones a cargo del profesor investigador con la participación de los estudiantes, se les entregó una hoja de papel con la actividad de cierre para desarrollar el nuevo conocimiento aprendido por el estudiante, este fue el objetivo de la actividad de cierre.

Actividad de Cierre

Comprende cuatro fracciones de adición y sustracción de fracciones en un primer ítem y en un segundo ítem un problema que para su solución se necesita movilizar los conocimientos de adición y sustracción de fracciones.

ACTIVIDAD DE CIERRE

Adición y Sustracción de Fracciones

1. Suma y resta las siguientes fracciones. Justifica brevemente tu procedimiento:

a) $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} =$

b) $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} =$

c) $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} =$

d) $\frac{5}{12} + \frac{1}{3} =$

2. Resuelve el siguiente problema y explica brevemente tu procedimiento:

- a) Los ingresos de una familia cubren las siguientes necesidades: $\frac{5}{12}$ en alimentación, $\frac{1}{3}$ en educación. Si lo restante lo ahorra, ¿Qué parte del ingreso inicial es esta?

Objetivo de la Actividad de cierre: Sumar y restar fracciones.

Respuestas esperadas

Esperamos que movilicen sus nuevos conocimientos aprendidos, que apliquen todo lo aprendido en la institucionalización, para que así validen argumentando con la definición y la matemática formal; también esperamos que los estudiantes luego de leer cuidadosamente la actividad realicen la operaciones de adición y sustracción utilizando el algoritmo, que transformen en fracciones equivalentes de un mismo denominador y esperamos que comenten el procedimiento utilizado en su solución; para poder observar el razonamiento de los estudiantes.

Por ser fracciones homogéneas, esperamos que sumen o resten los numeradores y coloque el mismo denominador, según sea el caso.

$$\text{a) } \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

En este caso son fracciones heterogéneas, esperamos que transformen en fracciones equivalentes de un mismo denominador, luego procedan como el caso anterior.

$$\text{c) } \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\text{d) } \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12}$$

En este caso se trata de un problema basado en el libro de texto del Ministerio de educación de primer año de secundaria, Perú, Ministerio de Educación (2012) el mismo que utilizan los estudiantes, donde se tiene que resolver por fracciones heterogéneas, esperamos que transformen en fracciones equivalentes de un mismo denominador para dar solución al problema.

$$\text{a) } \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12}$$

Ahora presentamos el análisis de la actividad de cierre.

Ítem (a)

Grupo 1

Entre las acciones que toma el grupo es leer el ejercicio, luego con su regla dibujan el rectángulo, uno de los integrantes formula afirmando “tenemos que dividir en doce partes”, en seguida con su regla graduada hacen la división de la figura en doce partes congruentes, y representa como suma de fracciones, sombreando $\frac{1}{12}$ y $\frac{5}{12}$, en ese orden; y finalmente valida el ítem (a), dando como solución $\frac{6}{12}$. Tal como se observa en la figura 51, suponemos que hacen la representación rectangular para apoyarse en la figura para la solución del ítem (a). Lo que esperábamos era la solución numérica.

$$\text{a) } \frac{1}{12} + \frac{5}{12} =$$

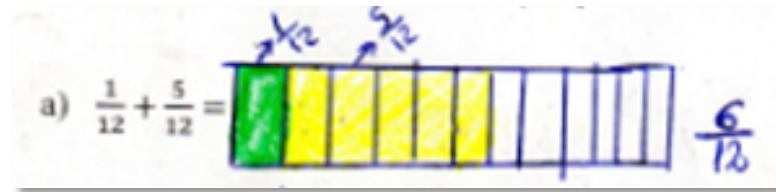


Figura 51. Ítem (a) - Actividad de cierre

Grupo 2

Entre sus acciones y formulaciones que tomó el grupo para dar solución al ítem (a) esta conversar entre ambos miembros del grupo sobre la forma de resolver y deciden representar la fracción con un gráfico de forma rectangular, con su regla miden y dividen el rectángulo en 12 doce partes congruentes y representa como suma de fracciones, sombreando $\frac{1}{12}$ y $\frac{5}{12}$, en ese orden, y finalmente validan el ejercicio dando como solución $\frac{6}{12}$; tal como se observa en la figura 52, llegan a la solución numérica que esperábamos.

$$a) \frac{1}{12} + \frac{5}{12} =$$

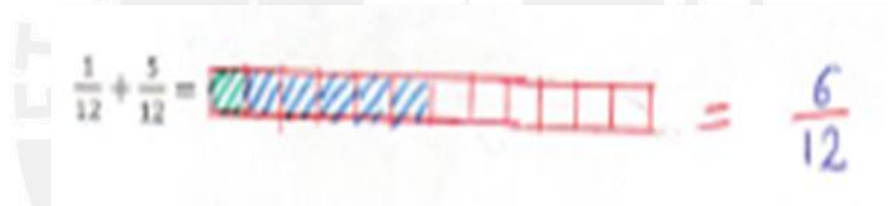


Figura 52. Ítem (a) - Actividad de cierre

Grupo 3

Para el ítem (a) el grupo inicio sus acciones al medir con su regla y dibujar el rectángulo, uno de los integrantes formula afirmando “ es $\frac{6}{12}$ ” mientras que su compañero prefiere representar las fracciones en el rectángulo para lo que afirma en forma oral “tenemos que dividir en doce partes” (figura 53), en seguida con su regla graduada hacen la división de la figura en doce partes, y representa como suma de fracciones, sombreando $\frac{1}{12}$ y $\frac{5}{12}$ de diferentes colores, y finalmente validan la adición de fracciones dando como solución $\frac{6}{12}$. La solución numérica es lo que esperábamos, lo que se observa es que este grupo no necesitó hacer la representación para hallar la solución, sin embargo prefirieron representar la solución en la figura.

$$a) \frac{1}{12} + \frac{5}{12} =$$



Figura 53. Ítem (a) de la Actividad de cierre

Ítem (b)

Grupo 1

Entre las acciones que toma el grupo para dar solución al ítem (b) de la actividad de cierre, estuvo dibujar el rectángulo, en seguida dividen la figura en siete partes congruentes, y representan como sustracción de fracciones somborean $\frac{4}{7}$ y $\frac{1}{7}$ de diferentes colores, entre sus acciones y formulaciones suman $\frac{4}{7} + \frac{1}{7}$; finalmente formulan en forma oral y escrita, suman las regiones no sombreadas, dando como solución $\frac{2}{7}$, no llegan a validar; cuando el profesor investigador pregunta “cómo han llegado a esa solución”, los integrantes del grupo formulan lo explicado líneas arriba, y las “regiones restantes son $\frac{2}{7}$ ”. Es decir lo que hicieron fue sumar $\frac{4}{7} + \frac{1}{7}$ y para la respuesta suman la región no sombreada, como se aprecia en la figura 54, no se logró lo que esperábamos, a pesar de que el profesor en todo momento actuó como mediador en el aprendizaje en base a preguntas que movilizaran sus conocimientos previos, evitando en todo momento caer en el efecto Topacio. Lo que los estudiantes hacen entre sus acciones y formulaciones es sumar las regiones no sombreadas.

$$b) \frac{4}{7} - \frac{1}{7} =$$

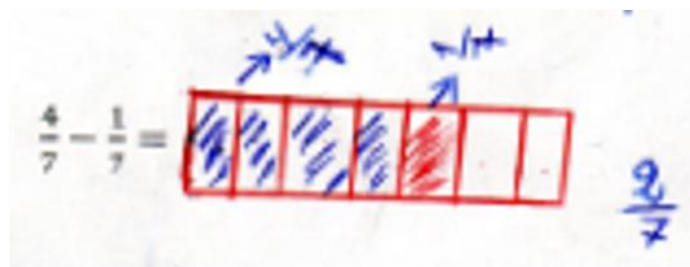


Figura 54. Ítem (b) - Actividad de cierre

Grupo 2

Entre las acciones que toma el grupo para dar solución al ítem (b) de la actividad de cierre, está leer el ejercicio, luego con su regla miden y grafican un rectángulo, en seguida formulan en forma oral “hay que dividir el rectángulo en siete partes iguales porque el denominador es siete” y con su regla graduada dividen la figura en siete partes congruentes y representan las fracciones (figura 55) sombreando con lapicero azul $\frac{4}{7}$ y con lapicero de color rojo $\frac{1}{5}$, una de las regiones sobreponen el sombreado encima del lapicero azul con rojo y finalmente formularon como solución $\frac{3}{7}$, llegando a validar la sustracción de fracciones. Cuando el profesor investigador pregunta cómo habían llegado a esa solución, los integrantes del grupo formulan que de la fracción que sombrearon con lapicero azul le quitaron una región, entonces la región restante es la parte que esta sombreado de azul $\frac{3}{7}$; es decir lo que hicieron fue restar de $\frac{4}{7}$ restaron $\frac{1}{7}$.

$$\text{b) } \frac{4}{7} - \frac{1}{7} =$$



Figura 55. Ítem (b) - Actividad de cierre

Grupo 3

En el ítem (b), el grupo inició sus acciones en el momento de observar y expresar en forma oral el ejercicio, luego con su regla miden y dibujan un rectángulo, en seguida formulan “es $\frac{3}{7}$ ” y prefieren formular la operación en la figura, uno de los integrantes afirma, “hay que dividir el rectángulo en siete partes iguales” (figura 56) y con su regla graduada dividieron la figura en siete partes congruentes y representa las fracciones, sombreando con lapicero rojo $\frac{3}{7}$ que corresponde a la solución del ejercicio. Se logró lo que esperábamos.

$$\text{b) } \frac{4}{7} - \frac{1}{7} =$$



Figura 56. Ítem (b) - Actividad de cierre

Ítem (c)

Grupo 1

Entre las acciones tomadas por los estudiantes del grupo, para el ítem (c), estuvo con ayuda de la regla graduada dibujar un rectángulo; luego dividen la figura, llegando a formar 54 regiones de los cuales tachan cuatro y quedan cincuenta regiones, somborean dos regiones con lapicero azul y tres regiones con lapicero rojo, finalmente formulan como resultado de la sustracción $\frac{45}{50}$; como podemos observar en la figura 57; no se logró lo que esperábamos a pesar de los intentos del profesor investigador por movilizar sus conocimientos previos, en base a preguntas a los tres grupos, para que los que lograron transformar las fracciones en igual denominador.

$$c) \frac{2}{5} - \frac{3}{10} =$$



Figura 57. Ítem (c) - Actividad de cierre

Grupo 2

Para el ítem (c), entre sus acciones del grupo está con ayuda de la regla graduada graficar un rectángulo; luego formulan en forma oral “primero hay que dividir la figura en diez partes iguales porque el denominador de la fracción es diez”; y luego “en cinco regiones congruentes toda la figura porque el denominador de la otra fracción es cinco” (figura 58). Tal como lo planificado, las acciones que toman es dividir la figura en 50 regiones; somborean $\frac{2}{5}$ con lapicero azul y $\frac{3}{10}$ lo somborean con lapicero rojo, finalmente formulan como resultado de la sustracción $\frac{5}{50}$. Cuando el profesor investigador pregunta cómo hallaron la solución, ellos

logran explicar que las seis regiones que solo están pintadas de rojo se pasa sobre las regiones sombreadas de azul, y solo quedan cinco regiones que quedaron sombreadas (lapicero azul). Se logró lo que esperábamos, la figura ayuda a los integrantes del grupo a transformar en otras fracciones con igual denominador.

$$c) \frac{2}{5} - \frac{3}{10} =$$

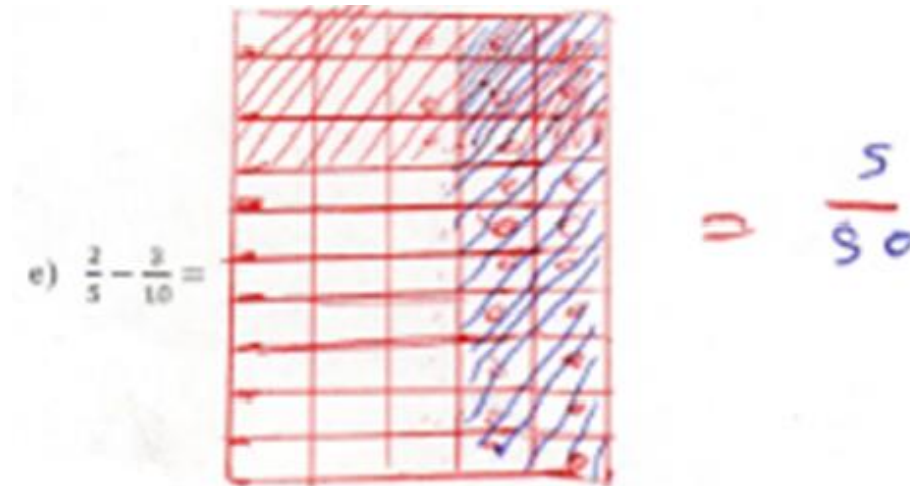


Figura 58. Ítem (c) - Actividad de cierre

Grupo 3

Para el ítem (c), entre las acciones tomadas por los estudiantes del grupo estuvo leer el ejercicio, con ayuda de la regla graduada dibujar un rectángulo; luego dividen la figura y llegan a formar 48 regiones congruentes (figura 59) y otras dos regiones aproximadamente con el doble de área de las otras regiones, haciendo un total de 50 regiones; de los cuales sombrearon una región de color amarillo, el mismo que obtienen restando los numeradores entre sí. Finalmente formulan como resultado de la sustracción $\frac{1}{50}$. No se logró lo que esperábamos, a pesar de los esfuerzos del profesor investigador en base a preguntas a los tres grupos, para que movilicen sus conocimientos sobre adición de fracciones para lograr que transformen las fracciones en otras con igual denominador y así dar solución ya sea por medio del algoritmo o con ayuda de la figura.

$$c) \frac{2}{5} - \frac{3}{10} =$$

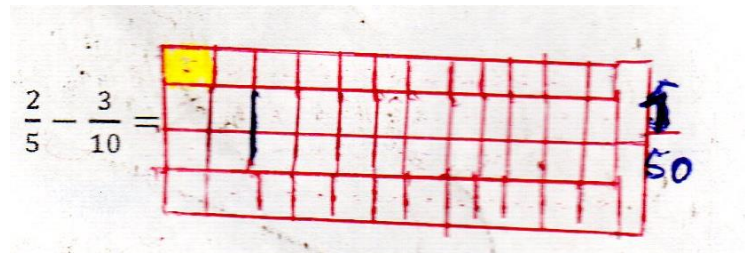


Figura 59. Ítem (c) - Actividad de cierre

Ítem (d)

Grupo 1

Para el ítem (d), entre las acciones tomadas por los estudiantes del grupo estuvo leer el ejercicio, dibujar con ayuda de la regla graduada un rectángulo; luego dividen la figura, llegan a formar 36 regiones, de los cuales sombrearon cinco regiones con lapicero azul, al igual que el numerador de la primera fracción; y además sombrean una región con lapicero rojo, al igual que el numerador de la segunda fracción, finalmente formulan como resultado la suma de las regiones no sombreadas de la sustracción $\frac{30}{36}$, que viene a ser la suma de las regiones no sombreadas; como se observa en la figura 60; al ver que no se está logrando el objetivo el profesor investigador decide hacer la devolución en base a preguntas que le induzcan a buscar fracciones con el mismo denominador; aun así no es posible lograr lo que esperábamos.

$$d) \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = .$$



Figura 60. Ítem (d) - Actividad de cierre

Grupo 2

Luego de observar entre sus acciones del grupo, estuvieron, expresar en forma oral lo que se pedía en la hoja de papel, planificar una estrategia de solución entre ambos integrantes del grupo, luego con ayuda de la regla graduada dibujaron un rectángulo; a continuación formularon en forma oral “primero debemos dividir el rectángulo en doce partes iguales porque el denominador de la fracción es doce”. Tal como lo planificaron, las acciones que tomaron fue dividir la figura, llegando a formar 12 regiones congruentes; sombrearon $\frac{5}{12}$ con

lapicero rojo y $\frac{1}{3}$ transformaron en otra fracción con el mismo denominador que la primera $\frac{4}{12}$ lo que sombrearon con lápiz, finalmente formulan como resultado de la sustracción $\frac{9}{12}$. Cuando el profesor investigador preguntó cómo hallaron la solución, ellos manifiestan que “se apoyaron en la figura para la solución” (figura 61); se logró lo que esperábamos.

a) $\frac{5}{12} + \frac{1}{3} =$



Figura 61. Ítem (d) - Actividad de cierre

Grupo 3

Entre las acciones del grupo, observamos que expresan en forma oral lo que pide el ejercicio, planifican una estrategia de solución entre ambos integrantes del grupo, luego con ayuda de la regla graduada trazan un rectángulo; a continuación formulan en forma oral “primero debemos dividir el rectángulo en 36 partes iguales porque el denominador de la fracción es doce de la primera fracción y 3 de la segunda fracción”. Tal como lo planificaron, las acciones que toman es dividir la figura en 36 regiones congruentes; de los cuales sombrean 5 regiones con lapicero azul y 1 región sombrean con lapicero rojo; la razón que los estudiantes dan en sus discusiones grupales es “porque así lo indica el numerador de cada una de las fracciones” el profesor investigador hace la devolución en base a preguntas orientadas a que transformen las fracciones en otras fracciones con igual denominador, aun así no logran movilizar los conocimientos de adición de fracciones en los estudiantes. Finalmente formulan como resultado de la sustracción $\frac{30}{36}$; entre sus acciones y formulaciones que realizan los estudiantes se observa que cuentan las regiones no sombreadas. No es lo que esperábamos (figura 62).

a) $\frac{5}{12} + \frac{1}{3} =$

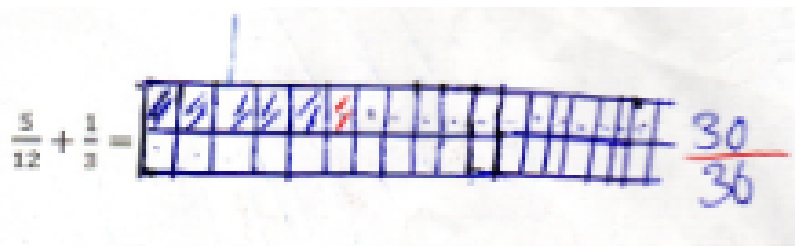


Figura 62. Ítem *b)* de la Actividad de cierre

Problema

Grupo 1

De las acciones que tomó el grupo es entender el problema propuesto en la actividad de cierre, coger la regla graduada para dibujar un rectángulo y dividirlo en 12 partes congruentes, sombreando cinco regiones con lápiz que representa a $\frac{5}{12}$ y cuatro regiones que representa $\frac{1}{3}$ de toda la figura; además entre sus formulaciones reconocen las representaciones de la figura que representa a las necesidades de alimentación y educación de la familia y así lo escriben en la hoja de papel; finalmente validan el problema con el resultado de $\frac{9}{12}$. Cuando el profesor investigador pregunta por las razones del resultado, los integrantes del grupo afirman que contaron las regiones sombreadas, las mismas que son 5 regiones para alimentación y 4 regiones para educación, y 12 regiones es el número de divisiones que hicieron a toda la figura que representa al entero (unidad). Como podemos observar en la figura 63; los integrantes del grupo logran lo que esperábamos cuando las fracciones están dentro del contexto extramatemático, resuelven ayudándose con la figura que les permite transformar a las fracciones en un mismo denominador. Sin embargo en el ítem (d) que pedía sumar con las mismas fracciones no se logran lo que esperábamos.

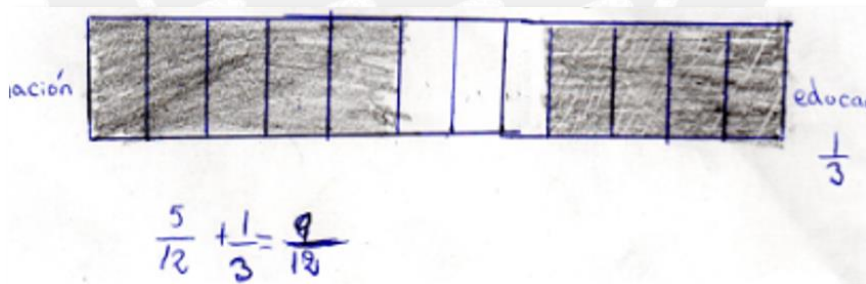


Figura 63. Problema de la Actividad de cierre

Grupo 2

Las acciones que tomó el grupo fue leer el problema propuesto en la hoja de papel, intercambiar opiniones acerca de la forma de plantear y resolver el problema, a continuación con ayuda de la regla graduada miden y dibujan un rectángulo, para luego dividirlo en 12 partes congruentes (figura 64) sombreando cinco regiones que representa a $\frac{5}{12}$ para alimentación y cuatro regiones equivalente a $\frac{1}{3}$ de toda la figura que representa para educación de la familia. Claramente está señalada la división de la figura en tres partes congruentes

dividido con lapicero azul. De esta forma los integrantes del grupo logran validar el problema transformando la fracción $\frac{1}{3}$ en otra equivalente con denominador $\frac{4}{12}$ siempre ayudándose con la figura para su solución.

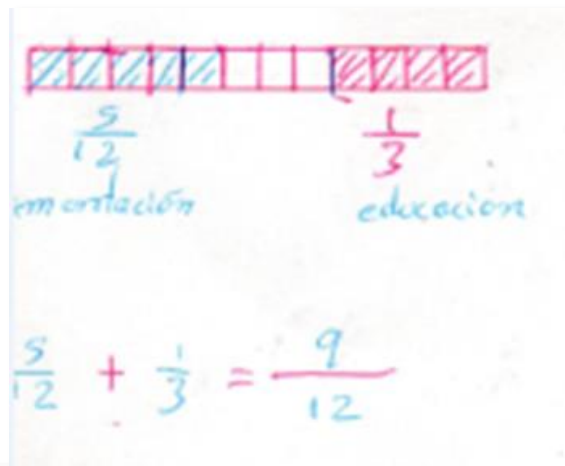


Figura 64. Problema - Actividad de cierre

Además vuelven al contexto, representan a las necesidades de alimentación y educación de la familia y así lo señalan en forma oral y escrita.

Grupo 3

Para el problema el grupo inicia sus acciones observando y expresando en forma oral el ejercicio, en seguida formula uno de los integrantes del grupo “tenemos que dibujar el rectángulo y dividirlo en 12 partes iguales porque su denominador es doce”, luego las acciones que realizan es coger la regla graduada para dibujar un rectángulo y dividirlo en 12 partes congruentes (figura 65), sombreando cinco regiones con lápiz negro y cuatro regiones que representa $\frac{1}{3}$ de toda la figura; además entre sus formulaciones que hicieron fue reconocer y expresar en forma oral “la figura hay que dividir en tres porque, dice que gasta $\frac{1}{3}$ en educación”, finalmente formulan sus afirmaciones en la hoja de papel.

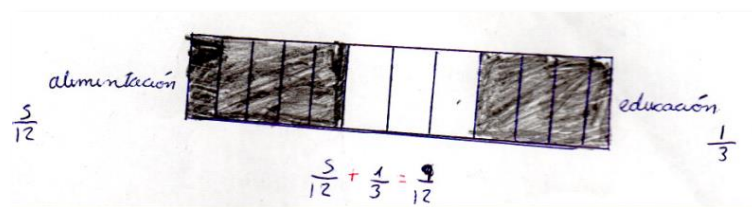


Figura 65. Problema de la Actividad de cierre

Es así que validan el problema con el resultado de $\frac{9}{12}$, cuando el profesor investigador pregunta por las razones del resultado, los integrantes del grupo afirman que contaron las

regiones sombreadas con lápiz, las mismas que son 9, y dividen en 12 regiones por el denominador de la fracción, lo que están haciendo es transformar una de las fracciones $\frac{1}{3}$ en otra equivalente $\frac{4}{12}$ con ayuda de la figura; se logró lo que esperábamos.

Podemos ver que los estudiantes que logran validar cada uno de los ítems, traen lo que aprendieron en las situaciones 1 y 2, movilizan lo aprendido y se ayudan con la figura para transformar las fracciones en otras con igual denominador y hallar la solución de la adición y sustracción de fracciones. Sin embargo podemos afirmar grupo 2 logran transitar por las dialécticas de la Teoría de Situaciones Didácticas (acción, formulación y validación), pero los grupos 1 y 3 no logran validar nuestra actividad de cierre por lo que no se cumplió con lo que esperábamos. Sin embargo en el problema logran validar los tres grupos, que es lo que esperábamos.

De los análisis presentados podemos afirmar que son pocas las Situaciones Didácticas para asegurar el aprendizaje. Además presumimos que la institucionalización no fue significativa para los estudiantes y por lo tanto no se convirtió en conocimiento.



CONSIDERACIONES FINALES

A partir de nuestro trabajo de investigación, presentamos las siguientes consideraciones:

- Por nuestra experiencia docente, al ver que los estudiantes presentan de manera frecuente dificultades al sumar y restar fracciones y el deficiente conocimiento de nuestro objeto matemático que presentan nuestros estudiantes, más aún en el medio rural, fue la principal motivación para realizar este trabajo de investigación en la enseñanza de la matemática.
- A partir de la revisión bibliográfica de los trabajos que antecedieron a éste, podemos ver los errores mencionados por investigadores como Lankford, Hart, Suydam, Carpenter y N.A.E.P., citados en Dickson y col. (1991), posteriormente citado en Ríos (2007), quienes sostienen que en la suma de fracciones es el error más común en secundaria es el de sumar numeradores y denominadores entre sí; nosotros corroboramos esto, porque estos también son los errores cometidos por nuestros estudiantes en este trabajo de investigación. Además hemos revisado diversas investigaciones respecto a las fracciones; algunas sobre sus diferentes significados y otras sobre las dificultades que se presentan cuando se enseña y aprende fracciones. Entre los que tenemos Silva (2005), Almouloud & Silva (2008), Hurtado (2012), Carrillo (2012), Ruiz (2013).
- Con relación a los datos obtenidos para nuestro trabajo de investigación, fueron recolectados de las Situaciones Didácticas y la actividad de cierre presentadas a los estudiantes.

Fundamentación Teórica y Metodológica

- Consideramos que la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) fue importante para nuestro estudio, ya que por medio de ella pudimos analizar las acciones, formulaciones y validaciones de nuestros estudiantes investigados, esta teoría nos ofrece los subsidios que necesitamos para analizar una Situación Didáctica. Además nos permite ser mediadores en el aprendizaje por medio de la devolución para que el estudiante aprenda, siendo este el objetivo de la TSD.
- Por otro lado utilizamos el enfoque de la investigación cualitativa, debido a que, nosotras no solo estamos interesadas en los resultados, si no también estamos interesadas en entender el proceso de construcción del conocimiento de la adición y sustracción de fracciones en los estudiantes de primero de secundaria de la Institución Educativa “Ricardo Palma” Totorani, distrito de Acora, provincia de Puno, región Puno.

Principales Resultados

Por tanto, a partir de los resultados obtenidos de la experimentación de la Situación 1, Situación 2, y la actividad de cierre, los resultados a los que se arribó en el trabajo de investigación son los siguientes:

- Luego de desarrollar la Situación Didáctica, concluimos que el objetivo general de nuestra investigación, que era analizar el proceso de aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en los estudiantes de Primer Grado de Educación Secundaria por medio de Situaciones Didácticas basados en aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas.
- Podemos afirmar que se validó la situación 1, se observa que no fue trivial llegar a validar, incluso en una primera formulación los tres grupos cometen errores numéricos, como es el de sumar numeradores y denominadores entre sí, sin embargo a raíz de la devolución logran advertir el error y rectificarlo.
- En cuanto a la situación 2 y la actividad de cierre, podemos afirmar que sólo llegó a validar el grupo 2, a pesar de que el profesor investigador hace la devolución.
- En ningún caso los estudiantes utilizan la técnica, siempre se apoyaron en las figuras para transformar en otras fracciones de un mismo denominador y el único intento de llegar a algún algoritmo estaba en la institucionalización, sin embargo esto no ocurre.
- Concluimos que el trabajo en duplas y la variable (división de figuras, con sus valores, regiones congruentes y/o regiones no congruentes) elegida por el docente investigador, nos ayudó a realizar el análisis según las dialécticas de la TSD; además observamos que su interrelación entre el estudiante y el medio facilitó el trabajo y la interpretación de los resultados.

Perspectivas futuras

- Consideramos que en investigaciones futuras deben considerarse más Situaciones Didácticas para asegurar el aprendizaje. Así también creemos necesario la institucionalización local, permitiendo así una eficaz institucionalización global. Además presumimos que la institucionalización no fue significativa para algunos estudiantes por esta razón y por lo tanto no se convirtió en conocimiento.

REFERENCIAS:

- Almouloud S. (2007). *Fundamentos da Educação Matemática*. Universidade Federal do Panamá.
- Almouloud S. y Silva M. (2008). *As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo*, *Bolema Boletim de Educação Matemática* 21 (31) pp. 55 – 78. Bolema: Rio Claro (SP). Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/233334640_As_Operaes_com_Nmeros_Racionais_e_seus_Significados_a_partir_da_Concepcao_Parte-todo
- Brousseau G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros de zorzal.
- Borba M. (2004). *Pesquisa Qualitativa em Educacao Matemática*. Belo Horizonte: Auténtica.
- Carranza, C. (1965). *Algebra*. Lima: IPEM.
- Carrillo, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria*. (Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de <http://www.repositorio.pucp.edu.pe/index/>
- Hurtado M. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto*. (Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las ciencias exactas). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf>
- Ponte, J. (2006). *Estudios de Caso em Educação Matemática*. Boletim de Educação Matemática, v. 19 (25).
- Perú, Ministerio de Educación (2005). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004*. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf
- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional Básica Regular*. Lima. Recuperado de <http://ebr.minedu.gob.pe/pdfs/dcn2009final.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 1*. Lima.
- Ríos, Y. (2007). *Ingeniería Didáctica sobre fracciones*. Universidad de Zulia, Maracaibo. Venezuela. Revista Redalyc, 13(2), pp.120-157. Recuperado de <http://www.redalyc.org>
- Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno La invención de problemas y sus ámbitos de investigación*. (Tesis para obtener el grado de máster en Didáctica de la Matemática). Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado de
- Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte - todo y como cociente: Propuesta didáctica para el colegio Los Alpes IED*. (Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las ciencias exactas). Universidad Nacional de Colombia. Bogota, Colombia. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf>
- Silva, M. (2005). *Investigando saberes de profesores do ensino fundamental com enfoque em números*

fracionários para a quinta série doutorado em educação matemática. (Tesis para obtener el grado de doctor en Educación matemática). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. Sao Paulo, Brasil.

Stake, R.E. (1998) Investigar con estudios de caso. Madrid: Morata.

Yin, R. (1984). Case study research: Design and methods. Newbury Park, CA: Sage.

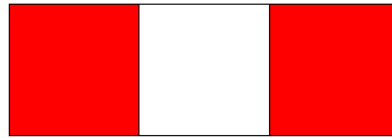


ANEXOS

SITUACIÓN 1:

Fracciones con el mismo denominador

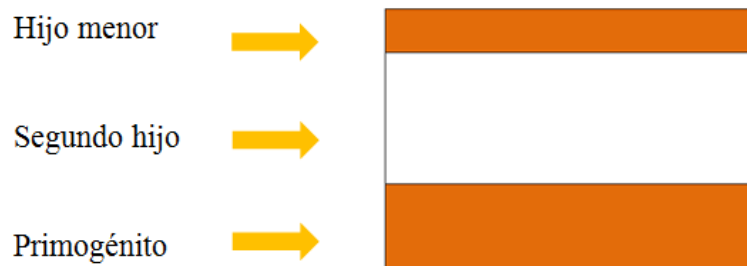
- a) La figura representa la bandera del Perú. Representa como suma de fracciones la parte roja de la bandera.



- b) El terreno de Luis tiene la forma de la figura; en el extremo izquierdo sembró papa y en el extremo derecho quinua. Representa como suma de fracciones la parte que Luis sembró papa y quinua respectivamente, en el terreno.



- c) Ana compró un terreno y heredó a cada uno de sus tres hijos de la forma que está en la figura; al primogénito le tocó el doble de terreno del hijo menor; al segundo hijo el resto de terreno.
1. Representa como suma de fracciones la parte del terreno que recibió el hijo mayor y el hijo menor de Ana.
 2. Representa como sustracción de fracciones la parte del terreno que recibió el segundo hijo de Ana, con respecto a todo el terreno.



SITUACIÓN 2

Fracciones con denominador diferente

PROBLEMA A:

Juan y sus dos hermanos heredaron en partes iguales un terreno de la forma que se aprecia en la figura; a su vez Juan heredará a sus cuatro hijos en partes iguales el terreno que heredó. Se desea conocer:

1. ¿Qué parte de todo el terreno heredará, tres de los hijos de Juan y uno de sus hermanos? Represente como suma de fracciones.
2. ¿Qué parte del terreno heredará el resto de miembros de la familia, con respecto a todo el terreno? Represente como una sustracción de fracciones.



PROBLEMA B:

La siguiente figura representa el terreno de nuestro colegio de Totorani; $\frac{2}{5}$ del terreno será destinado para la construcción del estadio y $\frac{1}{3}$ para la construcción de nuevas aulas. Represente en la figura, además, represente como una adición o sustracción de fracciones según se requiera en cada uno de los casos.

1. El terreno destinado para la construcción de las aulas y el estadio.
2. El resto del terreno del colegio que no fue utilizado para esos fines.



ACTIVIDAD DE CIERRE**Adición y Sustracción de Fracciones**

1. Resuelve los siguientes ejercicios y explica brevemente tu procedimiento:

b) $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} =$

c) $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} =$

d) $\frac{2}{5} - \frac{3}{10} =$

e) $\frac{5}{12} + \frac{1}{3} =$

2. Resuelve el siguiente problema y explica brevemente tu procedimiento:

Los ingresos de una familia cubren las siguientes necesidades: $\frac{5}{12}$ en alimentación, $\frac{1}{3}$ en educación. Si lo restante lo ahorra, ¿Qué parte del ingreso inicial es esta?

AUTORIZACIONES DE LOS PADRES

Comité de ética para la investigación con seres humanos y animales – CEI(sha)
Vicerrectorado de Investigación – PUCP

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES¹

El propósito de este protocolo es brindar a los y las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por Soledad Victoria Angles Mejía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La meta de este estudio es realizar una secuencia didáctica para la enseñanza de la adición y sustracción de fracciones en alumnos de primer grado de educación secundaria.

Si usted accede a que su menor hijo(a) participe en este estudio, se le pedirá responder actividades con situaciones problema y una entrevista a su menor hijo, lo que le tomará 45 minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que su menor hijo(a) haya expresado. Una vez finalizado el estudio las grabaciones serán destruidas.

La participación de su menor hijo(a) será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por su menor hijo(a) serán anónimas, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar la participación de su menor hijo(a) en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted o su menor hijo(a). Si se sintiera incómoda o incómodo su menor hijo(a), frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, Victor Aycachi Gomez doy mi consentimiento para la participación de mi menor hijo(a) en el estudio y soy consciente de que la participación de mi menor hijo(a) es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta. He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que los datos personales de mi menor hijo(a), incluyendo datos relacionados a salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, podrían ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que está participando mi menor hijo(a).

Entiendo que puede finalizar su participación mi menor hijo(a) en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mi menor hijo(a).

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con Soledad Victoria Angles Mejía al correo soledadangles@gmail.com o al teléfono 950891446.

Victor Aycachi Gomez Urcub 30-07-15
Nombre completo del padre de familia (de la) Firma Fecha
participante

SOLEDAD VICTORIA ANGLÉS MEJÍA [Firma] 30-07-15
Nombre del Investigador responsable Firma Fecha

¹ Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

Comité de ética para la investigación con seres humanos y animales – CEI(sha)
Vicerrectorado de Investigación – PUCP

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES¹

El propósito de este protocolo es brindar a los y las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por Soledad Victoria Angles Mejía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La meta de este estudio es realizar una secuencia didáctica para la enseñanza de la adición y sustracción de fracciones en alumnos de primer grado de educación secundaria.

Si usted accede a que su menor hijo(a) participe en este estudio, se le pedirá responder actividades con situaciones problema y una entrevista a su menor hijo, lo que le tomará 45 minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que su menor hijo(a) haya expresado. Una vez finalizado el estudio las grabaciones serán destruidas.

La participación de su menor hijo(a) será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por su menor hijo(a) serán anónimas, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar la participación de su menor hijo(a) en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted o su menor hijo(a). Si se sintiera incómoda o incómodo su menor hijo(a), frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.



Yo, Rufino Incaocota Condori doy mi consentimiento para la participación de mi menor hijo(a) en el estudio y soy consciente de que la participación de mi menor hijo(a) es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta. He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que los datos personales de mi menor hijo(a), incluyendo datos relacionados a salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, podrían ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que está participando mi menor hijo(a).

Entiendo que puede finalizar su participación mi menor hijo(a) en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mi menor hijo(a).

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con Soledad Victoria Angles Mejía al correo soledadangles@gmail.com o al teléfono 950891446.

Nombre completo del padre de familia (de la) participante	 Firma	31-07-15 Fecha
SOLEDAD VICTORIA ANGLES MEJIA Nombre del Investigador responsable	 Firma	30-07-15 Fecha

¹ Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

Comité de ética para la investigación con seres humanos y animales – CEI(sha)
Vicerrectorado de Investigación – PUCP

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES¹

El propósito de este protocolo es brindar a los y las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por Soledad Victoria Angles Mejía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La meta de este estudio es realizar una secuencia didáctica para la enseñanza de la adición y sustracción de fracciones en alumnos de primer grado de educación secundaria.

Si usted accede a que su menor hijo(a) participe en este estudio, se le pedirá responder actividades con situaciones problema y una entrevista a su menor hijo, lo que le tomará 45 minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que su menor hijo(a) haya expresado. Una vez finalizado el estudio las grabaciones serán destruidas.

La participación de su menor hijo(a) será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por su menor hijo(a) serán anónimas, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar la participación de su menor hijo(a) en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted o su menor hijo(a). Si se sintiera incómoda o incómodo su menor hijo(a), frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, Ernesto Cutipa Cutipa doy mi consentimiento para la participación de mi menor hijo(a) en el estudio y soy consciente de que la participación de mi menor hijo(a) es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta. He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que los datos personales de mi menor hijo(a), incluyendo datos relacionados a salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, podrían ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que está participando mi menor hijo(a).

Entiendo que puede finalizar su participación mi menor hijo(a) en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mi menor hijo(a).

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con Soledad Victoria Angles Mejía al correo soledadangles@gmail.com o al teléfono 950891446.

<u>Ernesto Cutipa Cutipa</u>	<u>[Firma]</u>	<u>31-07-15</u>
Nombre completo del padre de familia (de la) participante	Firma	Fecha
<u>SOLEDAD VICTORIA ANGLÉS MEJÍA</u>	<u>[Firma]</u>	<u>30-07-15</u>
Nombre del Investigador responsable	Firma	Fecha

¹ Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

Comité de ética para la investigación con seres humanos y animales – CEI(sha)
Vicerrectorado de Investigación – PUCP

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES¹

El propósito de este protocolo es brindar a los y las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por Soledad Victoria Angles Mejía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La meta de este estudio es realizar una secuencia didáctica para la enseñanza de la adición y sustracción de fracciones en alumnos de primer grado de educación secundaria.

Si usted accede a que su menor hijo(a) participe en este estudio, se le pedirá responder actividades con situaciones problema y una entrevista a su menor hijo, lo que le tomará 45 minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que su menor hijo(a) haya expresado. Una vez finalizado el estudio las grabaciones serán destruidas.

La participación de su menor hijo(a) será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por su menor hijo(a) serán anónimas, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar la participación de su menor hijo(a) en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted o su menor hijo(a). Si se sintiera incómoda o incómodo su menor hijo(a), frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Elena L. Catacora Catacora

Yo, _____ doy mi consentimiento para la participación de mi menor hijo(a) en el estudio y soy consciente de que la participación de mi menor hijo(a) es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta. He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que los datos personales de mi menor hijo(a), incluyendo datos relacionados a salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, podrían ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que está participando mi menor hijo(a).

Entiendo que puede finalizar su participación mi menor hijo(a) en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mi menor hijo(a).

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con Soledad Victoria Angles Mejía al correo soledadangles@gmail.com o al teléfono 950891446.

Elena L. Catacora Catacora - 996024469 [Firma] 31-07-15
Nombre completo del padre de familia (de la) Firma Fecha
participante

SOLEDAD VICTORIA ANGLES MEJIA [Firma] 30-07-15
Nombre del Investigador responsable Firma Fecha

¹ Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.

Comité de ética para la investigación con seres humanos y animales – CEI(sha)
Vicerrectorado de Investigación – PUCP

PROTOCOLO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPANTES¹

El propósito de este protocolo es brindar a los y las participantes en esta investigación, una explicación clara de la naturaleza de la misma, así como del rol que tienen en ella.

La presente investigación es conducida por Soledad Victoria Angles Mejía de la Pontificia Universidad Católica del Perú. La meta de este estudio es realizar una secuencia didáctica para la enseñanza de la adición y sustracción de fracciones en alumnos de primer grado de educación secundaria.

Si usted accede a que su menor hijo(a) participe en este estudio, se le pedirá responder actividades con situaciones problema y una entrevista a su menor hijo, lo que le tomará 45 minutos de su tiempo. La conversación será grabada, así el investigador o investigadora podrá transcribir las ideas que su menor hijo(a) haya expresado. Una vez finalizado el estudio las grabaciones serán destruidas.

La participación de su menor hijo(a) será voluntaria. La información que se recoja será estrictamente confidencial y no se podrá utilizar para ningún otro propósito que no esté contemplado en esta investigación.

En principio, las entrevistas o encuestas resueltas por su menor hijo(a) serán anónimas, por ello serán codificadas utilizando un número de identificación. Si la naturaleza del estudio requiriera su identificación, ello solo será posible si es que usted da su consentimiento expreso para proceder de esa manera.

Si tuviera alguna duda con relación al desarrollo del proyecto, usted es libre de formular las preguntas que considere pertinentes. Además puede finalizar la participación de su menor hijo(a) en cualquier momento del estudio sin que esto represente algún perjuicio para usted o su menor hijo(a). Si se sintiera incómoda o incómodo su menor hijo(a), frente a alguna de las preguntas, puede ponerlo en conocimiento de la persona a cargo de la investigación y abstenerse de responder.

Muchas gracias por su participación.

Yo, _____ doy mi consentimiento para la participación de mi menor hijo(a) en el estudio y soy consciente de que la participación de mi menor hijo(a) es enteramente voluntaria.

He recibido información en forma verbal sobre el estudio mencionado anteriormente y he leído la información escrita adjunta. He tenido la oportunidad de discutir sobre el estudio y hacer preguntas.

Al firmar este protocolo estoy de acuerdo con que los datos personales de mi menor hijo(a), incluyendo datos relacionados a salud física y mental o condición, y raza u origen étnico, podrían ser usados según lo descrito en la hoja de información que detalla la investigación en la que está participando mi menor hijo(a).

Entiendo que puede finalizar su participación mi menor hijo(a) en el estudio en cualquier momento, sin que esto represente algún perjuicio para mi menor hijo(a).

Entiendo que recibiré una copia de este formulario de consentimiento e información del estudio y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo comunicarme con Soledad Victoria Angles Mejía al correo soledadangles@gmail.com o al teléfono 950891446.

Rosalia Huanca chipana		30-07-2015
Nombre completo del padre de familia (de la) participante	Firma	Fecha
SOLEDAD VICTORIA ANGLÉS MEJÍA		30-07-15
Nombre del Investigador responsable	Firma	Fecha

¹ Para la elaboración de este protocolo se ha tenido en cuenta el formulario de C.I. del Comité de Ética del Departamento de Psicología de la PUCP.