

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

FACULTAD DE EDUCACIÓN



La Educación Matemática Realista en la enseñanza de la adición y sustracción en primer grado de Educación Primaria

Tesis para obtener el título profesional de Licenciada en Educación con especialidad en Educación para el Desarrollo que presenta:

Carmen Esperanza Trigoso Sanchez de Zevallos

Asesora:

Elizabeth Milagro Advincula Clemente

Lima, 2022

Informe de Similitud

Yo, Elizabeth Milagro Advíncula Clemente, docente de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor(a) de la tesis/el trabajo de investigación titulado

La Educación Matemática Realista en la enseñanza de la adición y sustracción en primer grado de Educación Primaria,


del/de la autor(a)/ de los(as) autores(as)

Carmen Esperanza Trigoso Sanchez de Zevallos,

dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 26 %. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el DD/MM/AAAA.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 7 de diciembre de 2022

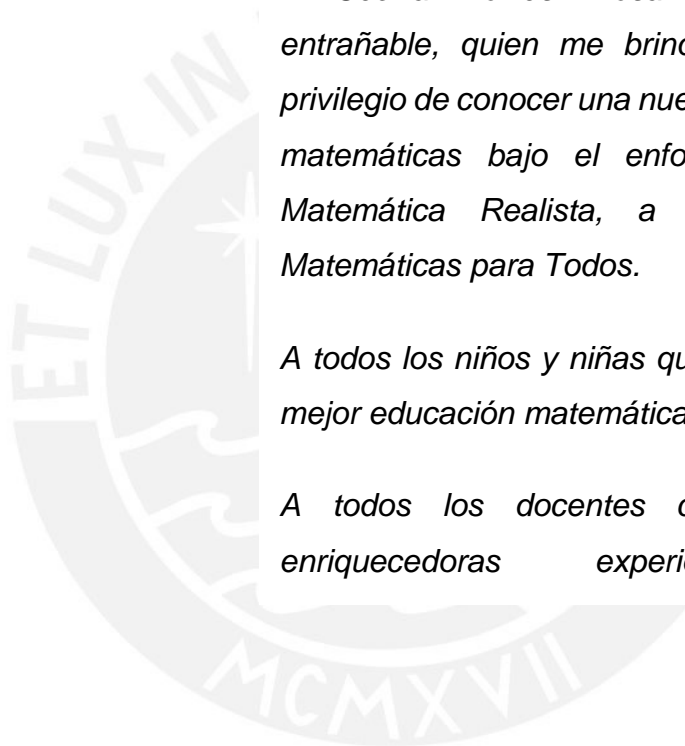
Apellidos y nombres del asesor / de la asesora: <u>Advíncula Clemente, Elizabeth Milagro</u>	
DNI: 09849904	Firma 
ORCID: 0000-0003-3941-3139	

Dedicatoria

A Cecilia Torres Llosa Villacorta (†), amiga entrañable, quien me brindó la oportunidad y el privilegio de conocer una nueva forma de enseñar las matemáticas bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista, a través del Programa Matemáticas para Todos.

A todos los niños y niñas que tienen derecho a una mejor educación matemática.

A todos los docentes con quienes compartí enriquecedoras experiencias enseñando

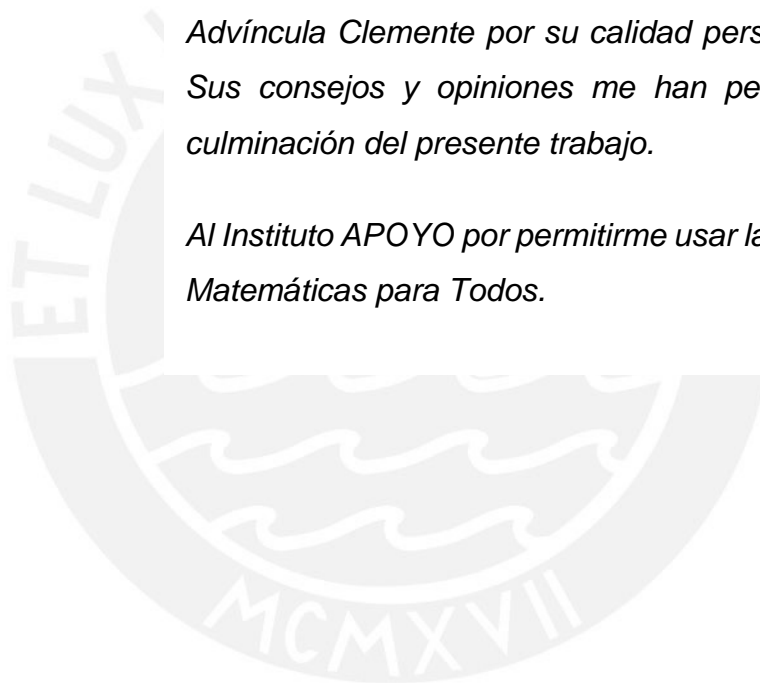


Agradecimientos

A mi esposo Andrés y mis hijos Nicolas y Carlos por brindarme su constante apoyo y estímulo para el logro de mis objetivos académicos.

Un sincero agradecimiento a mi asesora Elizabeth Milagro Advíncula Clemente por su calidad personal y profesional. Sus consejos y opiniones me han permitido llegar a la culminación del presente trabajo.

Al Instituto APOYO por permitirme usar la colección Mimate, Matemáticas para Todos.



RESUMEN

El interés de este trabajo surge ante los resultados de las evaluaciones nacionales en el área de matemáticas, aplicadas por el Ministerio de Educación del Perú a los estudiantes de Educación Primaria hasta el 2019. Los datos evidencian que un 17% de estudiantes del 2do grado alcanza el nivel esperado en el área. Lo que hace necesario proponer un enfoque de enseñanza de las matemáticas para el nivel primario, que favorezca el logro de los aprendizajes esperados. Por ello, el objetivo de este estudio es describir los principios de la Educación Matemática Realista y su aplicación en la enseñanza de la adición y sustracción con niños de 6 años que cursan primer grado de educación primaria. La metodología del estudio es de carácter cualitativo, con un método documental mediante la búsqueda de información acerca de la Educación Matemática Realista y su aplicación en la enseñanza de la adición y sustracción en primer grado de primaria. La importancia del estudio radica en mostrar un enfoque de enseñanza de las matemáticas con sustento teórico, como es el caso de la Educación Matemática Realista, que es una de las fuentes que nutre el enfoque centrado en la resolución de problemas del área de matemática de los documentos normativos del Ministerio de Educación del Perú, como el Currículo Nacional y el Programa Curricular de Educación Primaria. Las principales conclusiones enfatizan los seis principios de la Educación Matemática Realista que sustentan y organizan el proceso de enseñanza de las matemáticas y constituye un soporte teórico que sistematiza la práctica docente.

Palabras clave: matemáticas, enseñanza, Educación Matemática Realista, educación primaria, práctica docente.

ABSTRACT

The interest of this work arises from the results of the national evaluations in the area of mathematics, applied by the Ministry of Education of Peru to students of Primary Education until 2019. The data shows that only 17% of 2nd grade students reach the expected level in the area. This makes it necessary to propose an approach to teaching mathematics for the primary level, which favors the achievement of the expected learning. Therefore, the objective of this study is to describe the principles of Realistic Mathematics Education and its application in the teaching of addition and subtraction with 6-year-old children in the first grade of primary education. The methodology of the study is qualitative, with a documentary method through the search for information about Realistic Mathematical Education and its application in the teaching of addition and subtraction in the first grade of primary school. The importance of the study lies in showing an approach to teaching mathematics with theoretical support, as is the case of Realistic Mathematical Education, which is one of the sources that nourishes the focus on solving problems in the area of mathematics of the normative documents of the Ministry of Education of Peru, such as the National Curriculum and the Primary Education Curriculum Program. The main conclusions emphasize the six principles of Realistic Mathematics Education that support and organize the process of teaching mathematics and constitute a theoretical support that systematizes teaching practice.

Keywords: mathematics, teaching, Realistic Mathematics Education, primary education, teaching practice.

ÍNDICE

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
INTRODUCCIÓN	4
1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA	10
1.1 CARACTERÍSTICAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA	10
1.2 LA MATEMATIZACIÓN	12
1.2.1 Matematización Horizontal	13
1.2.2 Matematización Vertical.....	13
1.2.3 La Matematización En La Educación Matemática Realista	15
1.3 PRINCIPIOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA	15
1.3.1 Principio De Actividad.....	16
1.3.2 Principio De Realidad	18
1.3.3 Principio De Niveles.....	19
1.3.4 Principio De Reinvención Guiada	23
1.3.5 Principio De Interconexión.....	25
1.3.6 Principio De Interacción.....	26
2. LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA BASADA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA	29
2.1. ESTUDIOS NACIONALES E INTERNACIONALES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA.....	30
2.2 LA ENSEÑANZA DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES EN EL PRIMER GRADO DE PRIMARIA.....	33
2.2.1 Noción De Número	33
2.2.2 Descomposición de Números Naturales hasta 10 en Primer Grado de Primaria	36
2.2.3 Adición y Sustracción de Números Naturales hasta 20 en Primer Grado de Primaria	39
CONCLUSIONES	48
REFERENCIAS	50

INTRODUCCIÓN

En el año 2019 se llevó a cabo la 40° Conferencia General de la Organización de Naciones Unidas para la Educación, Ciencia y Cultura (UNESCO), la que tuvo en agenda los principales problemas que aquejan, especialmente, a las naciones más pobres y con escaso desarrollo. En este marco se declaró el día 14 de marzo como el Día Internacional de las Matemáticas, con la finalidad de promover el análisis, la reflexión y la toma de conciencia acerca de la importancia que tienen las matemáticas para impulsar el desarrollo y el logro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Cabe resaltar que todos los avances científicos y tecnológicos que inciden en el desarrollo están relacionados con las ciencias matemáticas. Es allí, donde reside su importancia y se fundamenta la necesidad de trabajar para hacer realidad el 4° Objetivo para el Desarrollo Sostenible: Educación de calidad.

La preocupación por la situación de la educación es un tema de agenda de las políticas públicas, en especial de aquellos países que aún hoy, en el siglo XXI siguen evidenciando carencias, inequidad, falta de accesibilidad, entre otras deficiencias. Dos áreas, en las que inciden las evaluaciones estandarizadas que realizan organismos internacionales y nacionales especializados son: comprensión lectora y matemáticas, ya que se considera que estas dos áreas son la base para el subsecuente aprendizaje de los demás conocimientos y a futuro para el pleno ejercicio de la ciudadanía.

El rendimiento de los estudiantes peruanos muestra un bajo nivel de logro en las evaluaciones aplicadas, en relación con las dos áreas mencionadas, y por tal amerita tomar conciencia al respecto y reflexionar en la búsqueda de las reales causas, a fin de proponer alternativas concretas y viables para superar esta situación.

En relación con los resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) y la Evaluación Muestral (EM) realizadas por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) en los años 2016, 2018 y 2019, con respecto al rendimiento en el área de matemáticas de los estudiantes del 2do grado de Educación Primaria, los hallazgos ponen en evidencia un déficit importante. Los estudiantes del 2do grado que lograron los aprendizajes esperados en el área de matemáticas representaron el 34 % (ECE 2016), el 14,7% (EM 2018) y el 17,0% (EM 2019), (MINEDU-UMC, 2019).

Cabe resaltar que los resultados de las pruebas ECE y EM realizadas por el MINEDU son de carácter cuantitativo y expresan solo los índices de logro de aprendizajes. En este sentido, consideramos que sería importante realizar un análisis de los errores frecuentes que presentan los estudiantes, para implementar estrategias en el aula que permitan superar los déficits que reflejan los resultados de las evaluaciones realizadas por el MINEDU.

El déficit en el logro de los aprendizajes de las matemáticas evidenciado en las evaluaciones de los estudiantes del 2do grado de primaria, llevan a considerar que los aprendizajes previos que debieron desarrollarse en el primer grado de Primaria no fueron lo suficientemente sólidos.

En el Perú, el Consejo Nacional de Educación (CNE), órgano especializado que forma parte de la estructura orgánica del sector Educación, tiene como objetivo principal contribuir a la formulación y seguimiento de un Proyecto Educativo Nacional que trace una ruta estratégica, coherente, pertinente, consistente y sostenible para orientar la política educativa del país. En esa línea, resulta importante actualizar el Proyecto Educativo Nacional para que se redefina un nuevo enfoque en el sector educación y el país se enrumbe hacia un desarrollo sostenible de equidad, inclusión y calidad educativa (Ley N° 28044).

El Proyecto Educativo Nacional (PEN) al 2021 proponía entre otros aspectos del objetivo estratégico 2, la necesidad de que los estudiantes desarrollen aprendizajes pertinentes y de calidad. En este objetivo se hacía énfasis en el aprendizaje de las matemáticas, entre otras áreas del conocimiento. Además, planteaba la importancia de considerar que los aprendizajes debían integrar el conocimiento de asignaturas vinculadas a disciplinas que promuevan el desarrollo del pensamiento lógico y abstracto (PEN, 2006). En el año 2020, el CNE actualiza el Proyecto Educativo Nacional al 2036 con la participación de amplios sectores de la sociedad involucrados de una u otra forma con la educación. En la actualización del proyecto se menciona que la educación debe estar orientada, entre otras finalidades, el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, abstracto, crítico y complejo. Asimismo, se plantea la necesidad de que el estudiante logre la capacidad para la formulación, interpretación y resolución de problemas vinculados a la vida real. Dentro de estas capacidades ha de promoverse la indagación, investigación y argumentación

para la creación de nuevos conocimientos (PEN, 2020). De este modo, se resalta, nuevamente, la importancia del aprendizaje de las matemáticas.

En relación con los documentos curriculares de nuestro país, en el mes de junio de 2016, el Ministerio de Educación aprobó el Currículo Nacional de la Educación Básica, documento oficial que orienta los aprendizajes que se deben garantizar en los estudiantes de las instituciones públicas y privadas. Este documento presenta también el perfil de egreso de los estudiantes, el mismo que menciona la importancia del desarrollo del pensamiento reflexivo, pensamiento estratégico, trabajo en equipo, entre otros. Además, propone que los estudiantes sean capaces de tomar decisiones basadas en la interpretación de la realidad a partir de los conocimientos matemáticos (MINEDU, 2016).

En diciembre del año 2016, el MINEDU aprobó el Programa Curricular de Educación Primaria que brinda orientaciones específicas para la concreción del Currículo Nacional en el nivel de Educación Primaria. En este programa se presenta el sustento teórico y metodológico para el desarrollo de las competencias de cada una de las áreas curriculares. El área de matemáticas está centrada en el enfoque de la Resolución de Problemas, en el que confluyen tres posturas teóricas: la Teoría de Situaciones didácticas, la Educación Matemática Realista, y el enfoque de Resolución de Problemas. (MINEDU, 2016, p. 231); sin embargo, no se brinda información detallada de las características de la Educación Matemática Realista ni se describen los principios, ni su aplicación en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica.

Cabe mencionar que, en marzo del 2020, con la llegada de la pandemia por la Covid 19 y la declaración oficial de la emergencia sanitaria y el aislamiento social, las actividades de las instituciones educativas se suspendieron de manera total y luego fueron retomadas exclusivamente de manera virtual. Ante esta situación tanto el MINEDU como las instituciones educativas públicas y privadas tuvieron que adaptarse a la enseñanza virtual de manera obligatoria y enfatizaron sus esfuerzos en el diseño de sesiones de aprendizaje virtuales para cubrir las necesidades formativas de los estudiantes. El diseño de sesiones en formato virtual transmitido vía televisión o internet retrasó el inicio del año escolar porque hubo que transitar de emergencia del formato presencial al virtual.

La postergación del inicio del año académico, la virtualidad, las dificultades de acceso a Internet en muchas zonas del país, la falta de capacitación en el uso de plataformas virtuales de aprendizaje de parte de los docentes y de los estudiantes, trajo consigo mayores dificultades para el logro de los aprendizajes esperados y declarados en los documentos oficiales del MINEDU (2016).

En ese sentido, es necesario realizar estudios que permitan determinar si el índice de logro en el rendimiento matemático estudiante ha sufrido un deterioro, a fin de proponer acciones de mejora consistentes y pertinentes que ayuden a revertir dicha situación.

Ante la ausencia de información específica y detallada respecto a la aplicación de la Educación Matemática Realista (EMR) en la enseñanza de las matemáticas, en la Educación Básica, el presente estudio considera importante difundir el enfoque de la Educación Matemática Realista como alternativa para contribuir a la mejora de la enseñanza de la aritmética en la Educación Básica, específicamente en la educación primaria. Así surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se aplican los principios de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de la adición y la sustracción de números naturales en primer grado de Educación Primaria?

La presente investigación se centra en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria, vinculada con la competencia Resuelve problemas de cantidad en primer grado de Educación Primaria. En la competencia y grado mencionados, los estudiantes adquieren y consolidan la noción de número, del sistema de numeración decimal, y resuelven problemas relacionados con la cantidad y las operaciones de adición y sustracción. Asimismo, inician el desarrollo del pensamiento abstracto, establecen relaciones matemáticas basados en la interacción con el medio a través de la manipulación y vivencias de su contexto (MINEDU, 2016).

Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, nos proponemos los siguientes objetivos de investigación: describir los principios de la Educación Matemática Realista y explicar cómo se aplican en la enseñanza de la adición y sustracción de números naturales en primer grado de Educación Primaria.

La investigación realizada es de carácter cualitativo, con un método documental que permitió recabar información sobre el tema de investigación que haya sido producida en otros contextos. En el caso de la presente investigación se realizó la búsqueda de información en fuentes bibliográficas sobre la Educación Matemática Realista a nivel internacional y nacional (Revilla, 2020, p. 9).

La revisión documental se realizó en distintas bases de datos, disponibles a través de la biblioteca de la Universidad, como por ejemplo EBSCO HOST, Pro Quest, Springer Link, Research Gate, Dialnet; así como también en repositorios de tesis internacionales y repositorios nacionales de trabajos de investigación de la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria (RENATI SUNEDU).

La búsqueda, revisión, análisis y sistematización bibliográfica permitieron recabar información relevante para presentar el enfoque de la Educación Matemática Realista. Se revisaron trabajos académicos publicados en los últimos años sobre la Educación Matemática Realista y su aplicación en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en diferentes regiones y países. La información recogida se organizó en matrices de identificación de las fuentes escritas, análisis individual de fuentes y matrices de análisis temático. Finalmente, se sistematizó la aplicación de los principios de la Educación Matemática Realista para la enseñanza de la adición y sustracción de números naturales en primer grado de Educación Primaria.

El presente trabajo de investigación está estructurado en dos capítulos. En el primer capítulo se describen las principales características de la Educación Matemática Realista; además, se presentan los conceptos de matematización, matematización horizontal y vertical y la matematización en la Educación Matemática Realista; y finalmente, se describen los seis principios que sustentan la Educación Matemática Realista.

En el segundo capítulo se presentan informes de estudios internacionales y nacionales relacionados con la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria, así como experiencias de la aplicación de los principios de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de la adición y la sustracción de números naturales en primer grado de Educación Primaria. Cabe resaltar que este trabajo se

centra en el sistema de numeración decimal, la adición y la sustracción con números naturales hasta 20.

Finalmente, en las conclusiones de la investigación, se resalta la importancia de que los docentes conozcan los fundamentos, principios y aplicaciones de la Educación Matemática Realista para la enseñanza de la adición y sustracción en la Educación Primaria, de modo que adquieran estrategias pedagógicas que aporten a la mejora de su desempeño en la enseñanza de las matemáticas con niños de 6 años para que se logre la consolidación de los aprendizajes previos de la noción de número, del sistema de numeración decimal y de las nociones de adición y sustracción; conocimientos necesarios para el cálculo en ámbitos numéricos mayores y para el logro de las demás competencias matemáticas a lo largo de la escolaridad.



Capítulo 1

La Educación Matemática Realista

Ante la preocupante situación que presenta en nuestro medio la enseñanza de las matemáticas y sus resultados de aprendizaje, en este capítulo, se describe la Educación Matemática Realista como enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica.

Tal como expresa Van Den Heuvel-Panhuizen (2003), la Educación Matemática Realista parte de la idea fundamental de cómo se deben enseñar las matemáticas y cuál es el objetivo de enseñarlas; adicionalmente, es importante tener claro cómo aprende el estudiante. Este último elemento le agrega valor didáctico a los principios de la Educación Matemática Realista, dado que el propósito de esta investigación es brindar a los docentes estrategias pedagógicas que aporten al desarrollo de un mejor desempeño en la enseñanza de las matemáticas y al efecto que puede tener en el aprendizaje de los estudiantes.

1.1 Características De La Educación Matemática Realista

En esta investigación se presentan las características de la Educación Matemática Realista que orientan la práctica docente para la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, es importante tener presente que este enfoque no solo considera la actividad del docente, quien enseña, sino también la actividad del estudiante como aprendiz, tal como explica Freudenthal (1991), al referirse a la práctica docente en el aula, haciendo notar que consiste en un trabajo donde el docente y los estudiantes interactúan en el proceso de enseñanza aprendizaje. Es decir, la Educación Matemática Realista va más allá de un conjunto de teorías, propósitos y significados, contenidos y métodos fijos preestablecidos (Freudenthal, 1991, citado por Gravemeijer, 2000).

Se debe mencionar como una de las características centrales de la Educación Matemática Realista es que se trata de un enfoque en el que se utilizan situaciones de la vida cotidiana o contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. Otro rasgo característico es el proceso de matematización, que se realiza de manera progresiva a través de las situaciones, utilizando modelos, que intervienen entre lo

abstracto y lo real para ir generando niveles de formalización y estructuras (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Para Freudenthal (1991), el aprendizaje de las matemáticas constituye una actividad humana, a la que se denomina matematización, es decir aquella actividad de apropiarse de la realidad circundante que promueva la necesidad de organizar matemáticamente la información. Por otro lado, propone que las matemáticas deben ser inclusivas, considerando que el aprendizaje debe pasar por varios niveles que tomen en consideración la heterogeneidad cognitiva de los estudiantes y los estilos de aprendizaje. El papel del docente es fundamental en esta práctica, porque es él quien organiza y orienta el proceso de adquisición del conocimiento matemático en una interacción bien organizada y con clara intención pedagógica (citado por Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

Una interrogante que surge alrededor de la importancia de enseñar y aprender matemáticas genera una reflexión con respecto a la necesidad de distinguir entre la finalidad de enseñar matemáticas en la educación básica, frente a la que se brinda en el nivel superior. De allí que Duval (2012), conduce a una discusión, cuando se pregunta si el contenido del curso de matemáticas, así como el diseño de las situaciones de aprendizaje necesitan ser abordados desde la perspectiva de la matemática o debe tomarse en cuenta también el punto de vista cognitivo. Otra pregunta que surge de este dilema es qué significa “comprender” desde el punto de vista matemático. El criterio con respecto a lo que se entiende por comprensión, no es el mismo desde los puntos de vista matemático, cognitivo o pedagógico. De allí que Duval (2012) propone realizar el análisis tomando en cuenta exclusivamente consideraciones matemáticas para lograr evaluar qué es lo que comprenden los escolares.

De allí que esta investigación se centra en presentar a la Educación Matemática Realista como una alternativa que aporta a la enseñanza de la aritmética, específicamente al abordar la noción del sistema de numeración decimal y la adición y sustracción en el conjunto de los números naturales, con niños de 6 años; teniendo en cuenta que estas operaciones son el soporte para el aprendizaje de estructuras matemáticas más complejas y el desarrollo del pensamiento lógico.

Dado que el aprendizaje de las matemáticas, desde el enfoque de la Educación Matemática Realista, es una actividad humana que promueve la interacción y comunicación entre los estudiantes y el docente para la resolución de problemas de la vida cotidiana o del mundo de la fantasía e imaginación, organizando la información recogida de estos contextos con modelos matemáticos, mediante el proceso de matematización, se concibe la Educación Matemática Realista como un enfoque didáctico que promueve tanto el componente pedagógico como cognitivo para la adquisición del conocimiento de las nociones y estructuras matemáticas. En este proceso, es fundamental el rol del docente, en tanto es quien organiza las actividades y orienta la interacción entre los estudiantes para que pongan en juego sus propias estrategias de solución y las compartan y discutan con sus compañeros. Por tanto, propone oportunidades para que el grupo pueda interactuar, discutir, argumentar, tomar decisiones, discrepar, consensuar y aprender del error (Alsina, 2009).

1.2 La Matematización

Freudenthal (1991) considera que la matematización es una actividad humana y constituye una forma de recoger e interpretar la información de la realidad, y mediante la actividad mental se traslada a un sistema estructurado y organizado (Gravemeijer y Terwel, 2000). Es decir, organiza la información con fines útiles como la resolución de problemas.

Krauthausen y Scherer (2008) expresan que la matematización, entendida como la interpretación matemática de situaciones concretas, es uno de los objetivos principales de aprendizaje y la consideran como un requisito fundamental de la enseñanza de las matemáticas que busca promover la vinculación de los estudiantes con nociones y conceptos matemáticos a través de experiencias directas con situaciones de la realidad. Asimismo, insisten en que esta característica de la enseñanza de las matemáticas debe darse en dos escenarios. Por un lado, se deben utilizar situaciones de la vida cotidiana para representar conceptos matemáticos. Por otro lado, a través de la matematización, se desarrollan nuevos conocimientos sobre la realidad.

Al respecto, Freudenthal recoge los aportes de Treffers quien postula que existen dos tipos de matematización: horizontal y vertical (Parra, 2013), los cuales serán desarrollados a continuación.

1.2.1 Matematización Horizontal

La matematización horizontal es aquella actividad mediante la cual los aprendices organizan y resuelven problemas de la vida cotidiana. Lo que significa partir del mundo real e ir al mundo de los símbolos (Freudenthal, 1991, citado por Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Esta actividad consiste en interpretar con símbolos matemáticos una situación real del entorno o imágenes en una lámina, un cuento o un video de tal manera que se comprenda o interprete lo que ocurre. La situación representada debería tener características apropiadas para que se pueda interpretar matemáticamente y podría corresponder a una adición, sustracción, clasificación o reconocimiento de cantidades, etc.

La presente investigación está orientada describir las características de la Educación Matemática Realista y su aplicación en la enseñanza de la adición y sustracción en el primer grado de educación primaria, en este nivel los escolares aún no disponen de conceptos o nociones matemáticas que les permitan resolver de manera deductiva la situación problemática. Ellos recién están en la etapa de adquisición de nociones matemáticas básicas y resuelven problemas de adición y sustracción aplicando intuitivamente sus conocimientos matemáticos. Por ello, la actividad de matematización que deben realizar debe estar basada en situaciones que representa contextos familiares. En este nivel escolar, los niños y niñas tienden a resolver las adiciones y sustracciones mediante el conteo y el uso de sus dedos para realizar el cálculo. También suelen hacer uso de la representación de las cantidades mediante el dibujo de palotes, puntos u otros elementos que los ayuden a contar y determinar las cantidades que usan para el cálculo.

1.2.2 Matematización Vertical

La matematización vertical consiste en la reorganización de la información matematizada horizontalmente. Esta actividad de matematización se refiere a que la situación interpretada se representa a través de modelos más complejos y con mayor

grado de abstracción. En este tipo de matematización se representa la realidad a través de estructuras de mayor complejidad o algoritmos, dependiendo del nivel de estudios, que permiten luego una generalización y posterior formalización del concepto matemático. Los estudiantes pasan por diferentes niveles de representación con el uso de modelos cada vez más complejos, basados en aprendizajes previos y los resultados de éxito que hubieran logrado con ellos. La actividad de reflexión y debate de toda la clase con respecto a qué métodos utilizar para la solución favorece la posibilidad de encontrar diferentes posibilidades de solución en diferentes niveles (Gravemeijer & Teruel, 2000).

Así, en la matematización vertical la comprensión que se ha obtenido de manera intuitiva por parte del escolar se convierte en una estructura de mayor nivel de abstracción que servirá como andamiaje para la resolución de problemas de manera deductiva.

Desde el paradigma constructivista del aprendizaje se dice que el conocimiento se construye activamente por parte del aprendiz, pero debe tenerse en cuenta que, dado que el aprendizaje es una actividad social, es fundamental para la adquisición del conocimiento la socialización y la comunicación (Krauthausen/Scherer, 2008).

En la matematización horizontal, los estudiantes utilizan intuitivamente modelos matemáticos para organizar y resolver una situación problemática real o realizable. La matematización vertical es el proceso de reorganización de la información dentro de la propia estructura de las matemáticas. Así, la matematización horizontal implica pasar del mundo de la vida al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos (Leal, 2017, citado por Lara, 2019).

Las actividades de matematización horizontal y matematización vertical no son categorías aisladas. Cuando se alcanza cierto nivel de matematización vertical para un concepto, la actividad se retroalimenta con información de la matematización horizontal para alcanzar mayor nivel de complejidad. Cada una de ellas se desarrolla de manera progresiva, permitiendo finalmente la formalización de conceptos matemáticos (Freudenthal, 1991, citado por Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Es importante destacar que en el proceso de la actividad de matematización los estudiantes construyen un modelo matemático en el que no deben ser considerados como receptores pasivos sino como sujetos activos que tienen una oportunidad para desarrollar sus propias estrategias de solución a partir de sus conocimientos básico de matemáticas, (Lara, 2019).

1.2.3 La Matematización En La Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista se organiza alrededor de varias ideas centrales. La primera es concebir a las matemáticas como una actividad humana (*matematización*) donde los estudiantes deben tener la oportunidad de realizar la actividad de matematización como punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas. En esta actividad los estudiantes socializan, se comunican, reflexionan, exponen sus ideas, es decir, se reproducen situaciones de la vida real.

Otra idea primordial en la Educación Matemática Realista es tener la claridad de que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un rol importante y que ese desarrollo se lleva a cabo durante el proceso de enseñanza en un ambiente de heterogeneidad cognitiva, con escenarios de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

Asimismo, es fundamental considerar que las matemáticas deben aprenderse interconectando las diversas áreas que la componen y no estudiarlas de manera aislada como suele ocurrir en el ámbito escolar que estructura los planes de estudio de tal manera que separa la aritmética del álgebra o de la geometría, entre otras áreas.

1.3 Principios De La Educación Matemática Realista

Para la concreción de aplicación de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de las matemáticas, Freudenthal (1991) propone seis principios que brindan el sustento teórico para la actividad pedagógica del docente en la enseñanza de las matemáticas y orientan el proceso de enseñanza e involucran también el aprendizaje; por ello, tanto el docente como el estudiante juegan un rol importante en el proceso de matematización y en la adquisición y desarrollo de la competencia matemática.

Es importante hacer énfasis en que la Educación Matemática Realista parte de situaciones de la realidad, por ello, es fundamental tener presente que toda actividad de enseñanza debe ser precedida por actividades que involucren el movimiento, el uso de los cinco sentidos, la manipulación, la verbalización, la interacción, la reflexión, etc. En estas actividades, los estudiantes deben vivenciar situaciones problemáticas que les permitan organizar, de manera intuitiva, la información con modelos matemáticos simples. Posteriormente, a través de láminas, videos, libros de texto u otros recursos gráficos pueden matematizar la información con otros modelos que los apoyen en la organización de la información.

Es importante tener en presente que los principios de la Educación Matemática Realista no se dan de manera aislada, pero tampoco en una secuencia fija. Estos forman parte de una estructura dinámica que promueve la adquisición de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, pero se describen por separado para explicar y ejemplificar con claridad el significado de cada uno de ellos.

1.3.1 Principio De Actividad

Partiendo de la concepción de las matemáticas como actividad humana propuesta por Freudenthal (1991), todos podemos realizarla y aprenderla a partir de la acción. Desde este principio, se considera fundamental abordar los problemas de la vida real de manera sistemática y organizada, a través de procedimientos que permitan una actitud crítica y reflexiva con respecto a la realidad. Por ello, la actividad como principio didáctico, va más allá de la acción concreta y manipulativa que el estudiante realiza de manera espontánea con la finalidad de la “construcción del conocimiento por descubrimiento”.

El principio de actividad propuesto por la Educación Matemática Realista hace referencia a la actividad mental reflexiva que realiza el estudiante al entrar en contacto con la vivencia real e interactuar con la situación problemática tratando de comprenderla. La actividad mental consiste en la reflexión de realiza el aprendiz y que debe verbalizar en interacción con otro aprendiz o con el docente, comunicando sus ideas con respecto a la acción realizada. En este diálogo se emiten juicios, ideas o suposiciones, se argumenta, se justifica, se debate, se utiliza tanto lenguaje común como también expresiones matemáticas que los estudiantes ya podrían conocer. Esta

actividad es enriquecedora y se convierte en un círculo virtuoso de acción – comunicación – reflexión, en el cual los estudiantes enriquecen su experiencia, (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

La actividad mental que realiza el estudiante, la acción concreta, la reflexión y la verbalización de lo que cada uno observa, piensa, supone o interpreta le permite al docente “escuchar” cómo piensa cada estudiante, cómo organiza sus ideas, en qué nivel de desarrollo cognitivo se encuentra, si está logrando los aprendizajes esperados y a partir de esta información, oriente la organización del pensamiento hacia los objetivos pedagógicos de la sesión de clase. Esta es la oportunidad para que se corrijan errores, se refuercen aciertos y se fomente la argumentación por parte de los estudiantes. El docente monitorea el avance del estudiante y va corrigiendo o reorientando el proceso de enseñanza. En esta situación de interacción entre el estudiante y el docente, y entre los propios estudiantes, es cuando se reciben refuerzos y orientación, lo que genera una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas, y favorece a la pérdida de temor al error para convertir el momento en una situación de aprendizaje.

En síntesis, en el principio de actividad se ponen en juego tres elementos: la acción, la reflexión y la comunicación. La acción lleva a la reflexión, producto de la actividad mental; y, las ideas, producto de la reflexión, son socializadas a través de la comunicación, tal como se muestra en la Figura 1.

Figura 1

Relación entre los elementos involucrados en el principio de actividad



Este proceso se repite las veces que sean necesarias hasta que se logre la comprensión de la situación y el consenso entre los que participan de la experiencia. A su vez, este procedimiento genera en el estudiante estructuras de pensamiento que van a servir de soporte para el aprendizaje.

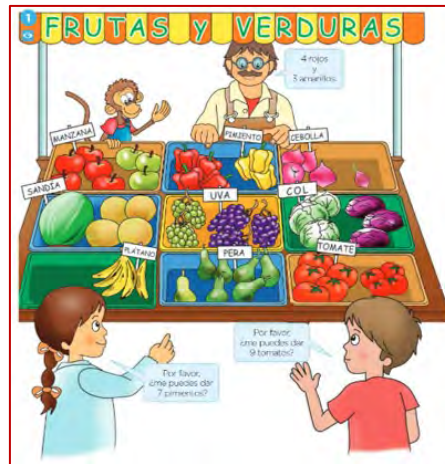
1.3.2 Principio De Realidad

Al considerar que el aprendizaje de las matemáticas pasa por el proceso de matematización, entendido como organización de la realidad, es lógico que se parta de hechos reales. Sin embargo, es preciso reconocer que el enfoque de la Educación Matemática Realista, creado por Hans Freudenthal, fue redactado originalmente en holandés; por ello cuando utiliza el término *zich realiseren*, se refiere a “lo realizable”, “lo imaginable” o “lo razonable”. Por ello, se utilizan situaciones que puedan ser imaginadas, visualizadas o representadas. En ese sentido, la fantasía de los cuentos son escenarios propicios, en los que se pueden encontrar elementos que pueden ser matematizados para lograr el aprendizaje de las matemáticas (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

Cabe resaltar que la necesidad de seleccionar situaciones de la vida real o imaginaria deben generar interés en los estudiantes y motivarlos a involucrarse activamente en la solución. Así, las situaciones reales, desde el enfoque de la Educación Matemática Realista, deben estar vinculadas con actividades que los estudiantes han experimentado directamente u observado, aunque también aquellas situaciones vinculadas con la fantasía deberán ser pertinentes con respecto a la edad de los estudiantes, cuentos, historias, hechos de películas, etc. Es decir, las situaciones reales o fantásticas deben reunir características que generen interés y motivación en los estudiantes. En el caso de estudiantes de grados superiores, se elegirán ilustraciones que también estén vinculadas con actividades reales propias de la edad de los estudiantes, así como situaciones imaginarias de interés para ellos. Por ejemplo, en la Figura 2 se puede observar una situación cotidiana que los estudiantes pueden realizar o ven realizar a otros.

Figura 2

Situación cotidiana real



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos (2022, p.21)

Por tanto, en la Educación Matemática Realista, el término realidad tiene un papel fundamental, entendiéndose que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas; con lo cual es lógico que las situaciones estén vinculadas con la vida real o imaginaria de los estudiantes. Esta característica es central en el enfoque porque permite que los estudiantes se involucren con interés en el aprendizaje de las matemáticas. Poco a poco, de manera progresiva los estudiantes se irán alejando de estos contextos, en la medida que logren desarrollar niveles que permitan resolver las situaciones problemáticas con el uso de modelos matemáticos de mayor nivel de generalización.

1.3.3 Principio De Niveles

El proceso de matematización progresivo transita de la matematización horizontal hacia la matematización vertical, pasando por diferentes niveles: *situacional*, *referencial*, *de generalización* y *de formalización*, que corresponden al uso de estrategias, modelos y lenguajes de nivel cognitivo diferente, sin tener un orden fijo (Bressan, 2016).

El *nivel situacional* corresponde al reconocimiento de la situación, objetos y elementos reales. Se trata de vivenciar o representar situaciones cotidianas que pueden ser reconocidas por los estudiantes. Ellos observan la escena, describen la situación, crean historias en base a sus vivencias previas. Luego, matematizan

horizontalmente, es decir, organizan la información de manera intuitiva y verbalizan todas las posibles interpretaciones de lo que vivencian u observan en una ilustración. La interpretación que den depende de las experiencias previas de los estudiantes con situaciones similares. La imagen de la Figura 3 representa un evento cotidiano o conocido para los estudiantes. Observan manzanas y naranjas, reconocen que son frutas. Pueden contar sus experiencias con las frutas, determinar la cantidad de cada una, comparar donde hay más o menos y el total de frutas que hay. Además, también pueden expresar sus gustos por determinadas frutas, entre otras posibilidades de crear historias alrededor de la imagen.

Figura 3

Nivel situacional



Esta experiencia de les permite a los estudiantes matematizar la información que recogen de la imagen o de la vivencia, si esta es directa, y proponer diferente organización de la información.

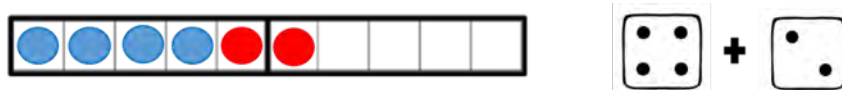
El nivel *referencial* corresponde al uso de modelos y/o representaciones que hacen referencia a la situación real, y la reemplazan. Los estudiantes comentan sus impresiones sobre las actividades que han vivenciado u observado en las ilustraciones, explican sus razones, experiencias similares, argumentan, llegan a conclusiones, toman decisiones, etc. En este nivel los estudiantes representan la situación con otros elementos, siguiendo las orientaciones del docente y en interacción con sus pares.

Como se observa en la Figura 4, las fichas azules reemplazan a las manzanas, mientras que las fichas rojas reemplazan a las naranjas. El modelo del tablero de 10

casilleros y fichas se convierten en una referencia, representan la situación. También podrían ser dados, palotes, rayas, piedritas, etc.

Figura 4

Nivel referencial

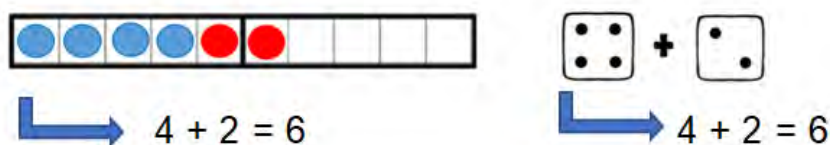


Con estos elementos referenciales los estudiantes representan lo que observaron e interpretaron previamente en el nivel situacional.

El nivel *general* se logra por la exploración, la reflexión y la generalización de lo observado en el nivel referencial, y lo reemplaza. En la Figura 5 se reemplazan los elementos de la situación problemática y se representan con números, por ejemplo, $4 + 2 = 6$. La misma adición se representa a nivel referencial con las fichas en el tablero y los puntos de los dados.

Figura 5

Nivel general



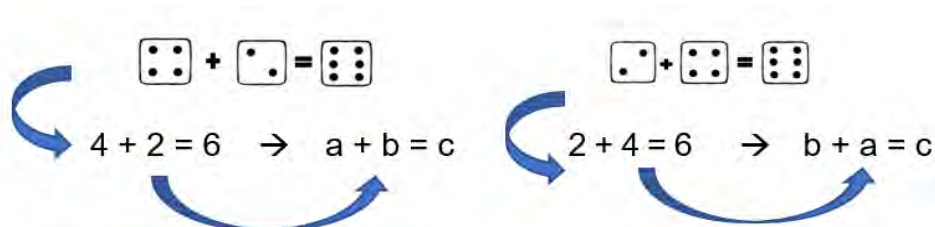
De esta manera, se alcanza un nivel de generalización donde los números constituyen un modelo de representación de la situación real y se podrá generalizar la representación de otra circunstancia, donde los elementos son distintos a la situación original, pero se dan en las mismas cantidades.

En el nivel *formal* se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales. Por ejemplo, con letras $a + b = c$, modelo de mayor complejidad o abstracción. El modelo de representación mediante ecuaciones constituye un nivel formal, donde el algoritmo representa en lo abstracto la adición. Las letras reemplazan

cualquier cantidad de objetos, se convierten en los términos de la adición, los sumandos, que dan como resultado la suma como se puede apreciar en la Figura 6.

Figura 6

Nivel formal



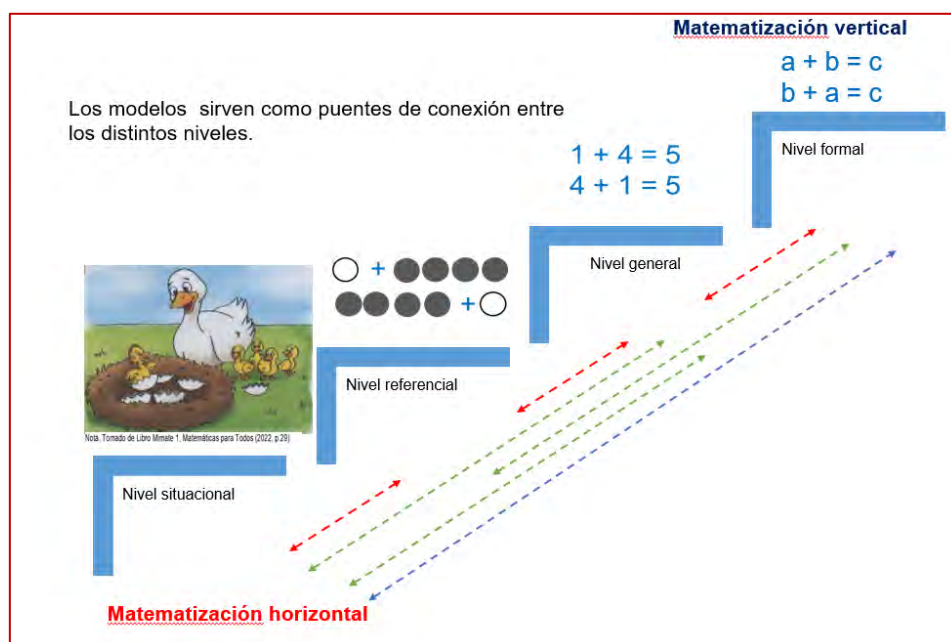
Cualquiera sea la cantidad que “a” y “b” representen, el resultado será “c”, a través de la manipulación de las cantidades en los diferentes niveles de matematización. De esta manera, los estudiantes logran generalizar las propiedades de la suma.

El proceso es dinámico y cada estudiante puede lograr actuar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. El principio de niveles tiene utilidad pedagógica en la medida que le sirve al docente para determinar el progreso del estudiante y decidir en qué aspectos del proceso de enseñanza debe hacer énfasis, y especialmente para considerar la heterogeneidad cognitiva de los estudiantes y sus estilos de aprendizaje. De esta manera, se toman en consideración y respeto las propuestas de los estudiantes con respecto a sus estrategias para resolver las situaciones (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

En la Figura 7, se puede observar, en resumen, la transición desde la matematización horizontal hacia la vertical mediante el uso de diferentes modelos que le permiten al estudiante alcanzar diferentes niveles de representación según su desarrollo cognitivo y nivel de comprensión alcanzado. Las flechas representan la dinámica del principio de niveles en el proceso de matematización. Como se puede ver, van en ambas direcciones y abarcan dos o más niveles, lo que representa los diferentes logros que pueden alcanzar los estudiantes dado que se trata de un proceso dinámico.

Figura 7

Principio de niveles



Los estudiantes han pasado del nivel situacional, es decir de la observación e interpretación de la situación, para luego utilizar un modelo de nivel referencial que reemplaza a los elementos reales. En el siguiente nivel han reemplazado las fichas por los números, generalizando de esta manera la situación de cálculo, para finalmente alcanzar el nivel formal donde las letras representan las cantidades sin hacer ya referencia a un objeto en particular, e incluso a reforzar la noción de las propiedades de la adición.

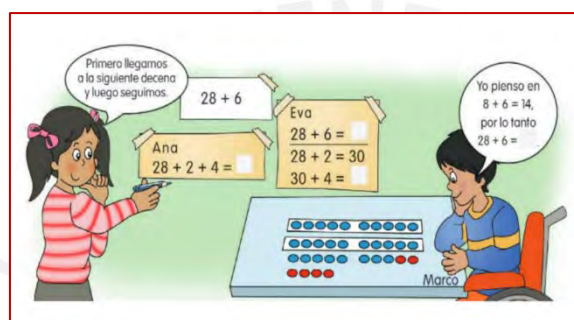
1.3.4 Principio De Reinención Guiada

Este principio orienta la labor docente para que brinde a los estudiantes la oportunidad de presentar sus propias estrategias en función a lo aprendido. También es la oportunidad para que discutan entre ellos sus procedimientos y los del docente. Es el momento en el que los actores del proceso de enseñanza aprendizaje, docente y estudiantes, ponen en juego sus conocimientos previos, dan nuevas propuestas de solución y realizan un trabajo productivo como resultado del intercambio de opiniones, estrategias, puntos de vista y reflexiones. Este proceso de aprendizaje permite que los estudiantes reconstruyan el conocimiento matemático formal (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

Este principio constituye un elemento fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. Los estudiantes hacen uso de aprendizajes previos que le sirven de soporte para asimilar nuevos conceptos matemáticos o cálculos de mayor complejidad. En la Figura 8, se observa que los estudiantes recurren a modelos de representación o a cálculos similares para hallar la solución a problemas o situaciones nuevas en base a analogías. Es decir, se “reinventan” conceptos ya asimilados para utilizarlos en nuevas situaciones.

Figura 8

Principio de reinvención guiada



Nota. Tomado de Mimate 1, Matemáticas para Todos, Manual del docente (2022, p.15)

Para calcular el resultado de $28 + 6$, una estudiante recurre a una estrategia que conoce previamente. Ella descompone el segundo sumando para completar 30 y luego le suma la segunda cantidad de la descomposición. Esta estrategia de cálculo mental está basada en un aprendizaje previo, cuando aprendió a realizar cálculos pasando la decena. Además, se lee en un cartel el cálculo que hace otra estudiante, el cual es similar, aunque más largo, porque se escribe, paso a paso, la estrategia. Otro estudiante suma por separado las unidades, luego hace una analogía entre la suma $8 + 6 = 14$, concluyendo que $28 + 6 = 34$.

Mientras una estudiante desarrolla la tarea a nivel general recurriendo al cálculo mental, la otra se apoya también en el nivel general, pero con cálculos parciales que va anotando y el estudiante lo hace apoyándose en el nivel referencial, haciendo uso de un tablero y fichas que representan la adición. Se observa, en este ejemplo, cómo cada estudiante hace uso de diferentes recursos para resolver la adición, reinventando estructuras de cálculo ya aprendidas que les sirven de soporte para realizar cálculos en otro ámbito numérico o con mayor nivel de dificultad.

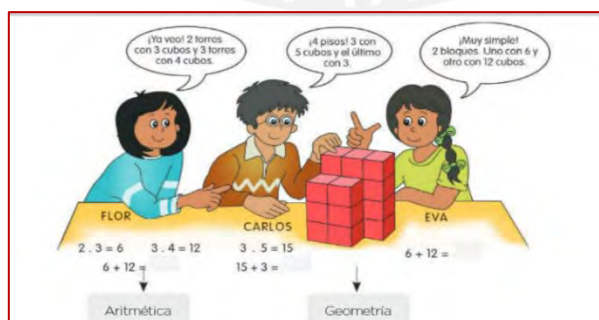
1.3.5 Principio De Interconexión

La Educación Matemática Realista propone que las situaciones problemáticas, además de ser reales, deben presentar contenidos matemáticos interrelacionados. Esto quiere decir que se deben presentar situaciones con el uso de diversos modelos que brinden coherencia a los contenidos curriculares.

Se considera que la aritmética, la geometría, el álgebra, entre otras áreas de las Matemáticas, no deben ser aprendidos de manera aislada. Por ello, es necesario que el estudiante encuentre las relaciones operativas entre los diferentes contenidos que le dan estructura a las matemáticas y que a su vez pueden servir de puentes entre un nivel y el otro (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004). El principio de interconexión consiste en hacer uso de contenidos de diferentes áreas de las matemáticas para el aprendizaje de nuevos conceptos. En la Figura 9 se observa que los estudiantes usan cubos con los que construyen torres y mediante construcciones representan la adición y la multiplicación, en simultáneo. En las ilustraciones también se ve cómo las situaciones de cálculo aritmético se pueden introducir con otras actividades vinculadas a la geometría como la construcción y la reflexión. De esta manera se promueve que los escolares encuentren las relaciones operativas entre las operaciones matemáticas y comprendan las matemáticas como un lenguaje integrado de organización y sistematización de la información.

Figura 9

Conexión entre Geometría y Aritmética



Nota. Tomado de Mimate 1, Matemáticas para Todos, Manual del docente (2022, p.16)

En esta imagen se puede observar cómo la actividad de construcción, propia de la geometría, les permite a los estudiantes realizar una actividad concreta, manipulativa donde pueden observar la adición e incluso la multiplicación. Además de

realizar la acción, verbalizan lo que observan, lo que hacen e interpretan la situación haciendo conjeturas.

Con relación al mismo principio de interconexión, la Figura 10 muestra una actividad de reflexión que contribuye a la comprensión de la noción de doble y mitad mediante una actividad real.

Figura 10

Reflexión sobre doble y mitad



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p.55)

La experiencia de reflejarse en el espejo permite a los estudiantes vivenciar como se duplican los elementos de una imagen. Asimismo, los tableros con fichas frente a un espejo facilitan la comprensión en diferentes niveles de la noción de doble y mitad, que será posteriormente un aprendizaje previo que sirva como soporte para nuevos aprendizajes, por ejemplo, la multiplicación por 2 o la división entre 2. Este constituye otro ejemplo para el principio de reinención guiada.

1.3.6 Principio De Interacción

En el principio de actividad se explicó la importancia de la comunicación entre los estudiantes y el docente. Además, es fundamental tener en cuenta que las matemáticas son una actividad humana y por ende una actividad social. Las matemáticas también constituyen un lenguaje mediante el cual se expresan ideas, situaciones, procedimientos, etc. Por ello, la interacción entre los estudiantes, y entre ellos y los docentes tienen la función de promover la reflexión de los aportes de los demás y de los propios para alcanzar niveles de comprensión mayores.

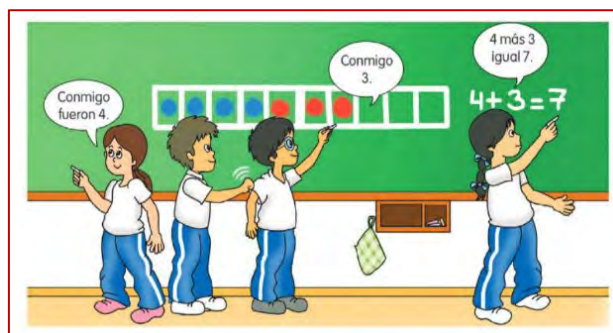
Para Ortiz (2017) el lenguaje constituye un sistema social que sirve de medio de organización de la comunicación entre las personas y se utiliza en la interacción cuando hablamos entre nosotros y con otros.

Cisternas y Droguett (2014) refieren que la importancia del lenguaje consiste en que tiene la capacidad para constituirse en un mecanismo que contribuye a que el pensamiento se haga más abstracto, flexible e independiente de los estímulos inmediatos. Además, según uno de los principios básicos de Vygotsky el lenguaje tiene un papel central en el desarrollo mental, por ser una herramienta que permite pensar con lógica y aprender nuevas conductas. Es fundamental, en el ámbito educativo, considerar, en base a los aportes de Vygotsky, que el lenguaje influye en el desarrollo incluso más que el contenido que se transmite en el aula.

El principio de interacción fomenta que los estudiantes expliquen, justifiquen, debatan, estén de acuerdo o en desacuerdo, argumenten, etc. (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004). En la Figura 11 se observa un grupo de estudiantes que están trabajando en equipo para resolver una situación de cálculo. Ellos intercambian información, la niña que refiere “Conmigo fueron 4”, hace alusión a que su compañero le tocó cuatro veces el hombro y colocó por ello 4 fichas azules en la pizarra como referencia de lo percibido a través del tacto. A continuación, el otro niño toca tres veces el hombro de su compañero y este dice “Conmigo 3”, colocando tres fichas rojas como representación de lo que sintió. Finalmente, la última niña escribe en la pizarra la expresión aditiva $4 + 3 = 7$.

Figura 11

Principio de interacción



Nota. Tomado de Mimate 1, Matemáticas para Todos, Manual del docente (2022, p.16)

Es este ejemplo se evidencian los diferentes niveles de matematización, desde el situacional donde intervienen los sentidos, el referencial con las fichas y el nivel general con la escritura de la expresión aditiva con números. El principio de interacción, la socialización de la actividad, la verbalización y la reflexión organizan la actividad.

La descripción de los seis principios de la Educación Matemática Realista y las figuras presentadas como ejemplo tienen la finalidad, en este estudio, de explicar, de manera didáctica y comprensible, las características de este enfoque y brindarle al docente un sustento consistente para organizar su práctica pedagógica para la enseñanza de las matemáticas.



Capítulo 2

La Enseñanza De La Aritmética Basada En La Educación Matemática Realista En La Educación Primaria

En este capítulo se presentan algunos estudios sobre la enseñanza de la adición y sustracción en la Educación Primaria, así como la aplicación de los principios de la Educación Matemática Realista para la enseñanza de la adición y sustracción de números naturales hasta 20 en el primer grado de Educación Básica.

Para explicar la aplicación de los principios de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de la adición y sustracción, se hará uso de la colección de libros *Mimate* del programa *Matemáticas para Todos* del Instituto APOYO, programa basado en el enfoque de la Educación Matemática Realista. Asimismo, se han tomado como referencia imágenes de los libros del primer grado de Primaria, edición 2022, que forman parte de la colección de libros del programa Matemáticas para Todos para la Educación Básica; y están alineados a la propuesta vigente del Currículo Nacional de Educación Básica y del Programa Curricular para la Educación Primaria (MINEDU, 2016).

Estos materiales son producto de la traducción y adaptación de la colección Nussknacker de la editorial alemana Klett Verlag, realizada por los especialistas del Instituto APOYO y están actualizados según las últimas ediciones de la versión original. Los textos vienen acompañados de un manual que le brinda al docente las orientaciones didácticas pertinentes para la implementación de los principios de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de las matemáticas; y cuentan con un cuaderno de ejercicios de refuerzo por grado. Cabe resaltar que la editorial alemana Ernst Klett Verlag es una institución de prestigio en la producción de materiales de enseñanza de alta calidad e innovación, que se sustentan en investigaciones y buscan fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.

2.1. Estudios Nacionales e Internacionales sobre la Enseñanza de la Adición y Sustracción en la Educación Primaria

La Didáctica de la Matemática es de interés en muchos países y por ello se vienen realizando estudios que brindan importantes reflexiones.

Con relación a las investigaciones de carácter internacional, se considera relevante el estudio documental realizado por Castro y Gómez (2021), cuyo objetivo fue caracterizar la evolución de la Educación Matemática en los países de habla hispana entre los años 1958 y 2018. Entre los resultados que mencionan estos autores, creemos necesario destacar que los niveles educativos con más estudios abordados corresponden a Educación Secundaria, Bachillerato y Educación Superior. Es importante conocer este aspecto dado que el presente estudio se enfoca en el nivel Primario, el cual requiere de una mayor atención.

Asimismo, Araya y Martínez (2019) realizaron un estudio sobre el desarrollo del pensamiento matemático creativo y concluyeron que el trabajo en el aula basado en el involucramiento activo de los estudiantes favorece el desarrollo de su capacidad creativa vinculada con las ideas matemáticas estudiadas. Estos autores consideran que la comunicación entre los estudiantes y el docente, así como la retroalimentación dada por el docente a las ideas o preguntas de los estudiantes promueven la participación del estudiante en la construcción de las nociones matemáticas.

Ellemor-Collins & Wright de la Universidad Southern Cross de Australia, publicaron en el 2009 un artículo titulado “Estructurando los números del 1 al 20: desarrollando la adición y sustracción fácil”. Este estudio se basó en los aportes de la Educación Matemática realista para la enseñanza de la estructuración de números del 1 al 20 en escolares del 3er y 4to grado de primaria que presentaban ciertas dificultades para el cálculo en este ámbito numérico. Los autores del estudio llegaron a la conclusión que la capacidad de estructurar números involucra desarrollar las propiedades de los números, así como sus relaciones operativas. Los escolares aprendieron a recurrir a la relación de doble y mitad, o a tomar como referencia el número 5 y la decena, tal como proponen las estrategias de cálculo basadas en los principios de la Educación Matemática Realista al considerar que los escolares deben crear sus propios modelos en el proceso de matematización para lograr asimilar la

estructura de los números y dejar de lado el conteo para resolver los cálculos en el ámbito del 1 al 20.

Wahyudi, Joharman & Ngatman (2017) en un estudio titulado El desarrollo de la Educación Matemática Realista para profesores de primaria en formación, tuvo como objetivo analizar la efectividad de la implementación de la Educación Matemática Realista en el aprendizaje de las matemáticas, así como considerar qué limitaciones o soluciones existían al respecto. El estudio fue realizado en la escuela de educación de la Universidad de Sebelas Maret de Indonesia, ante la necesidad de establecer las necesidades de mejora en la formación de los futuros docentes, dada la diferencia en el rendimiento matemático de este país en relación a otros de la región. Este estudio llega a conclusiones interesantes entre las que podríamos considerar más importantes están: el conocimiento de los principios de la Educación Matemática Realista puede contribuir en la mejora del aprendizaje de la enseñanza de las matemáticas en los estudiantes de educación, futuros docentes de primaria. Además, se concluye que los estudiantes no llegan a conocer en profundidad y no dominan los diversos enfoques para la enseñanza de matemáticas. Por otro lado, durante su formación no reciben una adecuada orientación de cómo organizar las sesiones de aprendizaje de matemáticas en la escuela primaria. El estudio propone como solución mejorar el conocimiento y elaboración de los materiales didácticos y los conceptos matemáticos apropiados en la escuela primaria. También resaltan la importancia de vincular la enseñanza de las matemáticas con situaciones de la vida cotidiana. Finalmente, pero no menos importante concluyen que es de suma importancia el dominio de los enfoques teóricos del aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria.

Con respecto a investigaciones de carácter nacional, revisamos el trabajo de Vásquez (2010) quien indagó sobre el efecto del programa *Matemática para Todos* en el logro de aprendizajes en matemática de alumnos de Educación Primaria, en una institución educativa en Lima. Cabe resaltar que este estudio brinda información sobre la aplicación del programa y sobre las orientaciones didácticas que propone el *Manual del docente*; sin embargo, al igual que en los estudios internacionales, no describe la aplicación del enfoque de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de las matemáticas escolares en la Educación Primaria.

Una conclusión a la que se llega en ese estudio es que existe evidencia estadística suficiente para concluir que, si hay diferencia significativa en el grupo experimental, respecto al grupo de control, después de la aplicación del programa *Matemática para Todos*, con relación a la capacidad de aplicación de algoritmos en los alumnos del segundo grado de educación primaria de la Institución Educativa Fe y Alegría 43 del distrito de Ventanilla, durante el año 2009.

Con respecto del estudio presentado por Huamán, Ledesma y Martínez (2018) sí encontramos información detallada sobre el enfoque de la Educación Matemática Realista, como sus principios y la aplicación de estos para mejorar el aprendizaje de la resolución de problemas geométricos. Entre las conclusiones del estudio, los autores afirman que la aplicación de los principios de la Educación Matemática Realista permitió mejorar el aprendizaje en los estudiantes del tercer grado. Además, mencionan que la aplicación de los principios de actividad y realidad en las líneas poligonales ayudaron a los estudiantes a comprender que la actividad de matematización es una actividad humana que le permite hallar la solución de cualquier situación problemática. También, señalan que los estudiantes realizaron actividades vinculadas a su entorno físico logrando matematizar y llegar a un nivel superior de aprendizaje, ya que estas forman parte de su vida cotidiana.

Por otro lado, Huamán, Ledesma y Martínez (2018) concluyeron que los principios de reinención guiada y de niveles también favorecieron el aprendizaje de problemas geométricos relacionados a los polígonos, dado que el principio de reinención guiada permite que los estudiantes aprenden mejor cuando docente orientador y aprendizajes previos que sirven de soporte para reinventar los conceptos matemáticos. Además, mencionaron que el principio de niveles permite que el estudiante, a través de un proceso, transite de la matematización horizontal (realidad) a la matematización vertical (abstracta); es decir, convierta la realidad en una representación mucho más formal. Finalmente, expresan que aplicar los principios de interacción e interconexión permite la resolución de problemas geométricos relacionados a los perímetros de polígonos, ya que la interacción y socialización en equipos de trabajo favorece la motivación por el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo, convirtiendo el aprendizaje de las matemáticas en una actividad humana.

2.2 La Enseñanza de la Adición y Sustracción de Números Naturales en el Primer Grado de Primaria

La Didáctica de la Aritmética constituye un tema de suma importancia para el logro del desarrollo de la competencia matemática, que va más allá de realizar cálculos con éxito y manejar conceptos abstractos. Las matemáticas acompañan a la humanidad en todas las actividades de la vida cotidiana si las concebimos como la capacidad de resolver problemas, el desarrollo de un pensamiento reflexivo y crítico, la capacidad de argumentación, organización, sistematización, toma de decisiones y otras características propias de una ciudadanía productiva y responsable, que se adelante a los hechos, haga pronósticos y responda a los objetivos de desarrollo de la sociedad.

Las razones expuestas sustentan la importancia de implementar el enfoque de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de las matemáticas desde los primeros grados de Educación Primaria, justamente porque dicho enfoque se sustenta en partir de la realidad circundante para interpretarla, y en dicho proceso alcanzar niveles de abstracción que logren el desarrollo del pensamiento y la capacidad de comunicar de manera organizada las ideas y los argumentos.

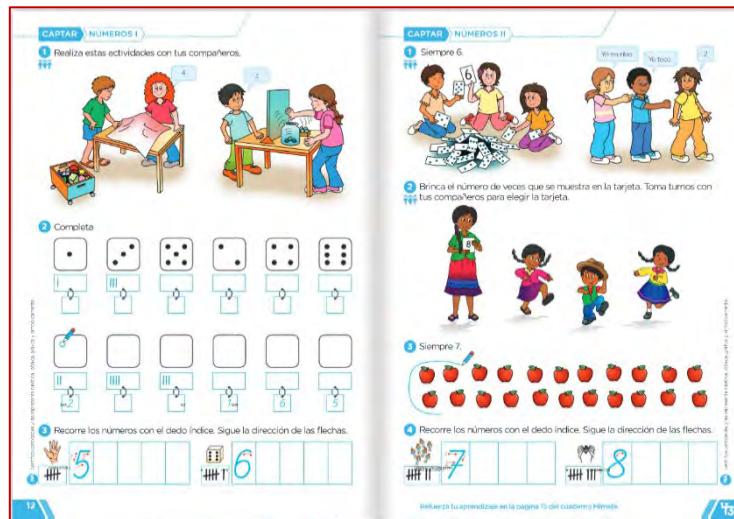
A continuación, se va a describir y explicar cómo se desarrollan, según los principios de la Educación Matemática Realista, la noción de número, la descomposición de números naturales hasta 10, así como la adición y sustracción de números naturales hasta 20 en el primer grado de educación primaria.

2.1.1 Noción De Número

Para iniciar el cálculo es necesario que el estudiante adquiera la noción de número (Padberg y Benz, 2011). Para ello, desde el enfoque de la Educación Matemática Realista se parte del principio de actividad. En la Figura 12 se ven actividades que involucran los sentidos para captar a través de ellos las cantidades hasta 10.

Figura 12

Actividades que involucran los sentidos



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p.12-13)

Estas actividades van acompañadas de verbalización, reflexión y toma de decisiones. Son actividades realizables, se utilizan modelos para la representación, hay interacción entre los estudiantes y se hace uso de modelos de representación. Además, en la retroalimentación que se dan entre los niños y niñas se brinda soporte para reinventar los conocimientos previos. Cabe mencionar que además del principio de actividad, se evidencian: el principio de realidad, de niveles, de interrelación e interacción.

Un aspecto importante en la preparación de los estudiantes para el desarrollo de la competencia matemática del cálculo es que los escolares logren la captación simultánea de cantidades sin necesidad de recurrir al conteo que es una fase inicial del conocimiento de los números; sin embargo, es necesario lograr que se inicie la capacidad para el cálculo mental a través de actividades de subitización.

Para Dehaene (1997) la subitización, es una habilidad matemática básica que surge a temprana edad y permite posteriormente el desarrollo de habilidades más complejas. Esta habilidad consiste en identificar de manera simultánea y rápida cantidades pequeñas que pueden ser presentadas de manera estructurada como el juego de naipes o dados; o, no estructuradas como el juego de yaxes.

En este sentido, Padberg y Benz (2011) señalan que los niños desde el nivel de Educación Inicial, quienes tienen aproximadamente 5 años, logran la habilidad de reconocer, de manera rápida y simultánea, pequeñas cantidades de objetos.

Sobre esta habilidad se desarrolla una serie de actividades basadas en el número 5, la cantidad mayor que es posible ser captada simultáneamente. Estas actividades recogen las experiencias previas de conteo que realizan los niños, haciendo uso de los dedos. Recurren a esta estrategia debido a la organización natural de los dedos en dos agrupaciones de cinco dedos. La captación de las cantidades a partir de 5, permite, posteriormente, representarla con el uso de modelos como el tablero del 10 que está estructurado en dos sectores con 5 casilleros cada uno, como se muestra en la Figura 13. De esta manera, los niños van logrando la elaboración de representaciones mentales de las cantidades hasta 10 partiendo del 5 y se van alejando del conteo para el reconocimiento de cantidades pequeñas.

Figura 13

Actividad a partir del 5

CONTAR A PARTIR DEL 5

1

2 ¿Cuántos dedos ves?

3 Representa las cantidades con tus fichas y luego dibújalas.

6

7

8

9

10

Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 20-21)

2.2.2 Descomposición de Números Naturales hasta 10 en Primer Grado de Primaria

En el primer grado se desarrollan actividades hasta el número 10 y después de haber asimilado la noción de descomposición en este ámbito, se amplía hasta el 20. Posteriormente, el ámbito numérico de los números naturales se va ampliando progresivamente en los grados posteriores, hasta llegar al millón en cuarto grado de Primaria, sin constituir un límite obligatorio. En los primeros grados es fundamental lograr una comprensión sólida del sistema de numeración decimal, así como su sistematización. El contexto matemático de nuestra cultura se basa en la representación decimal del número, por ello es necesario que los escolares interioricen desde el inicio de la escolaridad el significado del sistema de numeración decimal para la futura comprensión de ámbitos numéricos mayores (Krauthausen/Scherer, 2013).

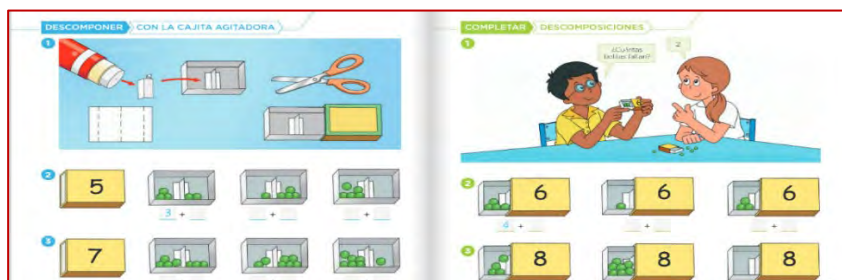
La descomposición de números naturales hasta 10, constituye un soporte fundamental para el cálculo mental pasando la decena como se verá más adelante y para utilizarlo en cálculos más complejos en un ámbito numérico mayor.

La Figura 14 muestra la descomposición numérica con el uso de la *cajita agitadora*. Su nombre hace referencia a la actividad que se realiza agitando la cajita para visualizar las diferentes descomposiciones de los números naturales hasta 10.

Los estudiantes agitan la cajita, descubren cómo se descomponen los números y durante la actividad dialogan, manifiestan sus ideas, se hacen interrogantes, responden, etc. Finalmente, anotan la expresión aditiva correspondiente.

Figura 14

Actividad de descomposición hasta 10



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, pp. 24-25)

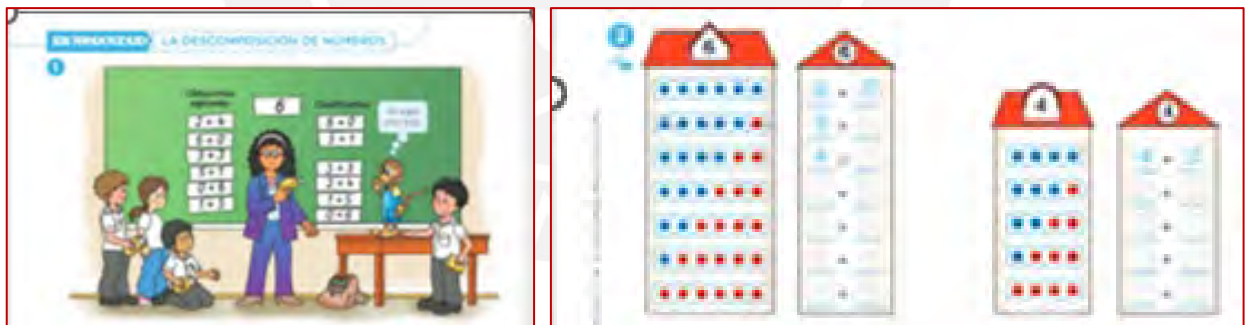
Esta actividad permite que se desarrolle la noción de la relación “parte – todo” que sirve de soporte para que los estudiantes se inicien en la adición y sustracción. También se puede tratar el tema de la propiedad conmutativa de la adición y la relación inversa de la adición y sustracción. La descomposición de números hasta 10 se realiza con actividades concretas, representaciones a nivel referencial y la notación de expresiones aditivas (Padberg y Benz, 2011)

Después de esta actividad se debe organizar la información recogida mediante la sistematización que se realiza transitando los diferentes niveles de matematización con el uso de diferentes modelos de representación.

En la Figura 15 se observa cómo se sistematiza la descomposición. Guiados por la docente, los estudiantes ordenan los cartelitos con las diferentes descomposiciones, luego se anotan los resultados a nivel referencial en la casita de las descomposiciones con fichas de dos colores y posteriormente se anotan las expresiones aditivas a nivel general con números.

Figura 15

Actividad de sistematización de la descomposición



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 26)

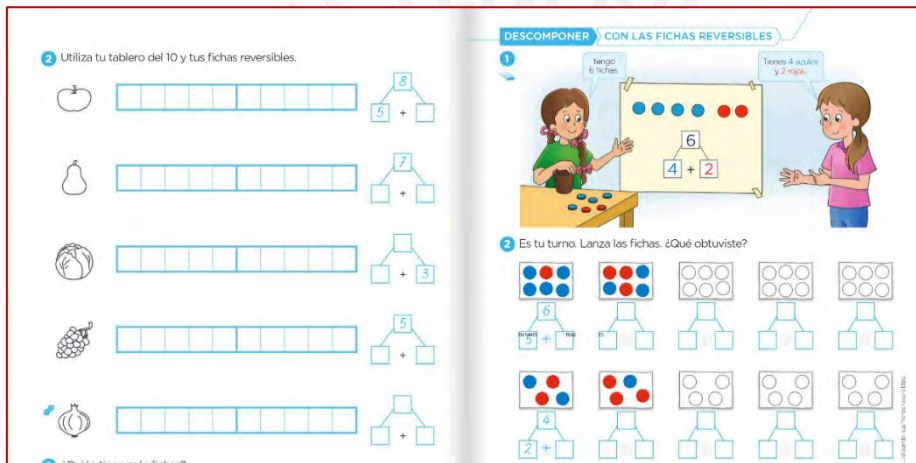
La forma como se realiza la representación referencial pone en evidencia que conforme crece el primer sumando, el segundo decrece. Visualmente los estudiantes logran una representación mental de las cantidades ascendentes y descendentes. Practicar la descomposición de números también es posible realizarla con fichas reversibles de dos colores. Se lanza al aire una cantidad de fichas y se anota la cantidad de cada color cuando estas caen en la superficie donde se realiza la

actividad. De esta forma, los estudiantes observan en otro modelo representacional la descomposición.

En la Figura 16 se muestra esta actividad que sirve también como ampliación a la experiencia con la *cajita agitadora* y refuerzo de la representación mental de las diversas descomposiciones en otro nivel. Además, se visualizan las descomposiciones en diversas agrupaciones, favoreciendo también la habilidad de subitización.

Figura 16

Descomposición con fichas



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 23)

La descomposición de números mediante la actividad concreta, la representación icónica, la representación mental y la notación simbólica (números), favorece la capacidad de reconocer la estructura operativa de los números naturales hasta el 10. El objetivo de esta actividad es lograr que el estudiante automatice la descomposición a través de múltiples repeticiones de las posibles descomposiciones. La finalidad consiste en que el cálculo por conteo vaya desapareciendo y este se realice a nivel de representaciones mentales (Padberg y Benz, 2011).

Otra actividad importante en la adquisición de la noción de número como preparación para iniciarse en la habilidad del cálculo de la adición y sustracción de números naturales, es el conocimiento de los números *vecinos*, como se le llaman en los libros Mimate a los números anterior y posterior. La Figura 17 muestra una actividad para introducir al estudiante en esta noción.

Figura 17

Números vecinos



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 35)

De esta manera, se irán consolidando los conocimientos previos necesarios para alcanzar la habilidad de reconocer las relaciones operativas existentes entre las operaciones de adición y sustracción.

En las ilustraciones se observa a los estudiantes realizando una actividad que recoge una experiencia real, están en interacción, buscan soluciones intercambian ideas, etc. Es decir, se ponen en juego todos los principios de la Educación Matemática Realista que ya han sido explicados en el presente estudio.

2.2.3 Adición y Sustracción de Números Naturales hasta 20 en Primer Grado de Primaria

La noción de adición y sustracción se desarrolla en el 1er grado a partir de la consolidación de la noción de la orientación en el ámbito numérico del 10 previamente trabajado (Scherer, 2005, Wittmann y Müller, 1990, citado por Krauthausen y Scherer, 2008).

Asimismo, Padberg y Benz (2011) sostienen que, para consolidar de la representación de la adición, los estudiantes deben poder interpretar las situaciones aditivas concretas en un nivel simbólico de combinación, cambio, igualación o comparación. Además, precisan que la combinación y el cambio son fundamentales para el desarrollo de la noción de adición por su estrecha vinculación con la vida cotidiana de los niños. Resulta, por ello, importante que los estudiantes comprendan

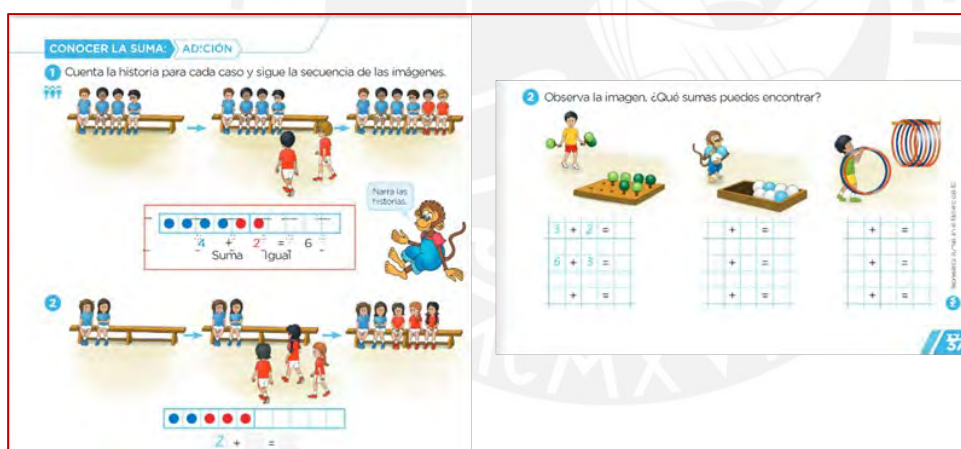
la amplitud semántica del significado de la adición, porque de esa manera serán capaces de aplicar la adición en las situaciones que lo ameriten.

En la Figura 18, se observan diferentes situaciones que representan una adición. Se evidencian también los diferentes principios y niveles de matematización. Si bien es posible que los estudiantes aún recurran al conteo, la finalidad del uso de modelos como el tablero del 10, es que se refuerce la captación simultánea de las cantidades y por reinvención guiada se recurra a las imágenes mentales de la descomposición de números.

En la ilustración se muestra cómo se representa la adición en el nivel referencial con fichas de dos colores, tal como se hizo en la descomposición. El primer sumando se coloca en el tablero del 10 con fichas azules y se completa la adición con fichas rojas. Luego se trabaja en el nivel general con la notación con dígitos.

Figura 18

Adición en el nivel referencial



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p.36-37)

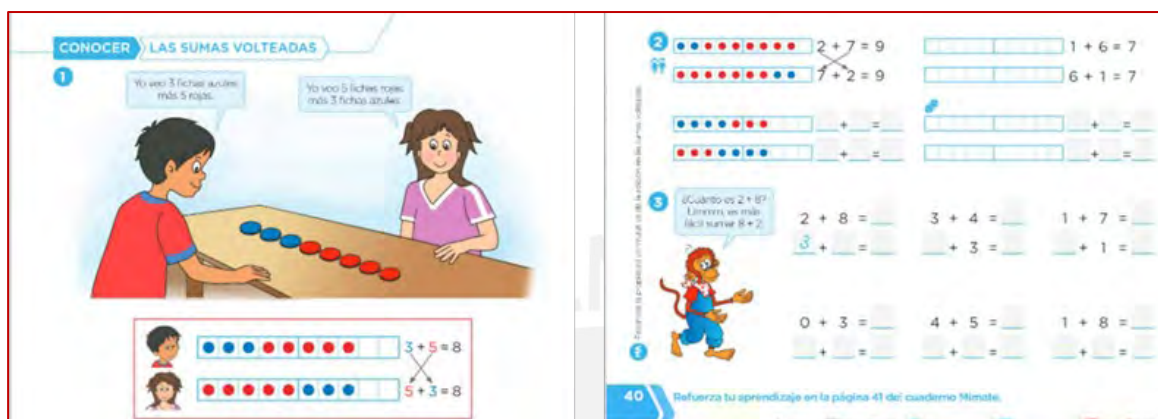
Una vez trabajada la noción de la adición, se procede a introducir la propiedad conmutativa a partir de situaciones reales o imaginarias. En la siguiente ilustración se muestra una actividad en la que los escolares reconocen esta propiedad de la adición.

La actividad consiste en observar desde dos perspectivas la misma adición, primero en el nivel situacional, pasar al referencial y finalmente al nivel general, como se muestra en la figura 19. El nivel situacional y referencial sirven para reforzar la

propiedad conmutativa. Los estudiantes se dan cuenta que el resultado es el mismo sin importar el orden de los sumandos.

Figura 19

Propiedad conmutativa en la adición



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, pp.40)

Con el mismo criterio utilizado para la enseñanza de la adición, se trabaja el desarrollo de la noción de sustracción. El significado de la sustracción debe entenderse con acciones como: irse, retirar, quitar, comprar, disminuir, romper, esconder y otras cuyo significado se relacione con la sustracción. Sin embargo, a diferencia de la adición, que podía ser representada de dos maneras ($3 + 4 = 7 / 4 + 3 = 7$), aunque hicieran referencia a dos o más situaciones diferentes, la sustracción solo puede representarse simbólicamente de una sola forma ($7 - 3 = 4$) sea lo que fuere que se está representando como sustracción. Este es un aspecto de la sustracción que causa dificultades de comprensión en los estudiantes, por ello es necesario practicar mucho en el nivel situacional y referencial para consolidar esta noción (Padberg y Benz, 2011).

La figura 20 muestra diferentes situaciones vinculadas con la sustracción. Asimismo, esta se representa a nivel referencial colocando el minuendo con fichas azules y luego tachando o retirando (si es con material concreto) el sustraendo. Finalmente, a nivel general se procede a usar la notación simbólica de los números.

Figura 20

Situaciones de sustracción



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 44-45)

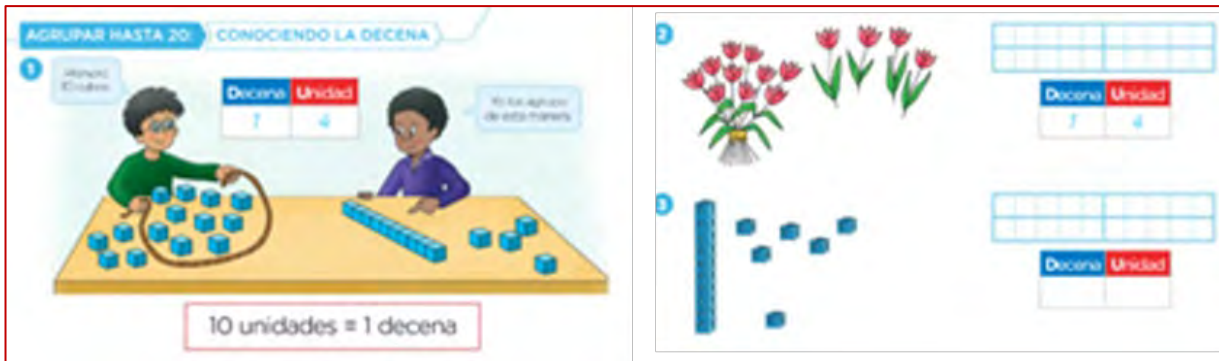
Es fundamental trabajar el nivel situacional para el desarrollo de la noción de la adición y sustracción y sus propiedades. Los estudiantes deben estar en condiciones de interpretar la adición o sustracción a partir de situaciones contextuales como sustento para el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas.

Una dificultad que se presenta regularmente en los estudiantes es decidir si usan la adición o sustracción para resolver un problema. Esto se debe justamente a que el aprendizaje de estas operaciones no se ha desarrollado partiendo de la realidad, matematizándola y llevándola nuevamente a la realidad para aplicarla a una situación problemática diferente.

El siguiente paso es ampliar el ámbito numérico en el que se aplica la adición y sustracción. Hasta este momento se ha trabajado en la primera decena. Ahora se ampliará el ámbito y se trabajará hasta el 20. En este ámbito se reconocerá la decena y las unidades. Se realizarán actividades que conlleven a agrupar en 10 para tener una decena y construir números que representen 1 decena (D) más unidades (U), como se muestra en la figura 21. Los estudiantes reconocen a través de la actividad concreta que 10 U conforman 1 D cuando están agrupadas. Mientras están sueltas siguen siendo 10 unidades.

Figura 21

Actividad para construir la decena



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 63)

El principio de reinención guiada se pone en evidencia en las siguientes actividades. Retomando el significado de este principio, es decir, recurrir a conocimientos previos ya consolidados y a la guía del docente, el estudiante recurre a realizar cálculos en el ámbito del 20 estableciendo analogías con cálculos similares en el ámbito del 10.

Vemos en la ilustración de la Figura 22 que el cálculo $5 + 4 = ___$ sirve de analogía para el cálculo de $15 + 4 = ___$. De la misma manera, el cálculo $7 - 3 = ___$ sirve de analogía para el cálculo de $17 - 3 = ___$. Se evidencia en esta lámina, los diferentes niveles desde el situacional hasta el general. Asimismo, se utilizan diversos modelos de representación para transitar a través de los niveles.

Figura 22

Situación con diversos modelos de representación

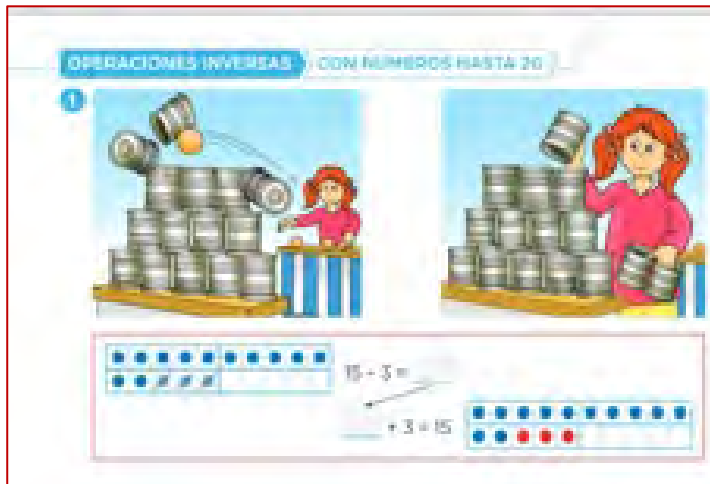


Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 64-65)

De manera similar a las actividades realizadas para desarrollar la noción de la relación inversa de la adición y sustracción, se vivencian situaciones representativas en el ámbito del 20.

Figura 23

Situación representativa



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 70)

En el procedimiento de la adición y sustracción pasando la decena también se evidencian con claridad los principios de la Educación Matemática Realista y se manifiestan los diversos niveles de matematización.

Los cálculos de la adición pasando la decena se soportan en la descomposición de números hasta 10, como se muestra en la Figura 24. La actividad, la reflexión y la comunicación se ponen de manifiesto durante el procedimiento. El primer paso es reconocer las cantidades que se van a sumar. Luego, se determina cuánto le falta al primer sumando para llegar a 10. Con este dato, el estudiante resuelve descomponer el segundo sumando en dos cantidades parciales. Una que le permita completar la decena y luego, suma a la decena la segunda cantidad parcial. Durante el procedimiento se verbaliza lo que se va realizando e interactuando con un compañero o el docente cómo se resuelve el cálculo.

Figura 24

Adición basada en la descomposición



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 74)

En el caso de la sustracción, el procedimiento es similar, como se muestra en la Figura 25. El estudiante determina el minuendo y cuánto debe retirar para llegar a 10. Descompone el sustraendo de tal manera que retirando la primera cantidad parcial, llega a la decena. Luego, resta de la decena la segunda cantidad parcial de la descomposición.

Los aprendizajes previos de descomposición, completar la decena y restar de la decena son soporte para la reinención guiada. Nuevamente la actividad, reflexión comunicación, así como la transición por los diferentes niveles de matematización le permiten al estudiante construir el aprendizaje de calcular pasando la decena.

Figura 25

Sustracción basada en la descomposición

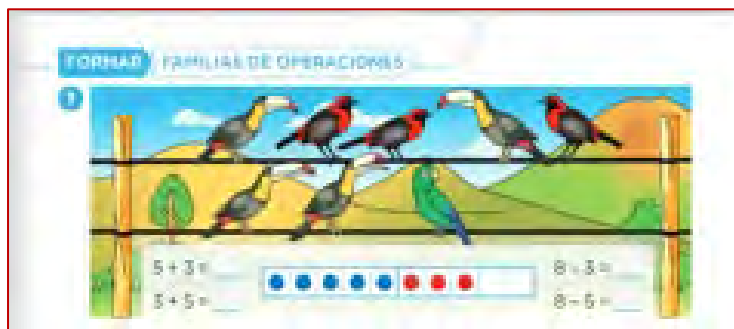


Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 79)

Un tema importante en el aprendizaje de las operaciones de adición y sustracción bajo del enfoque de la Educación Matemática Realista es comprender sus propiedades y relaciones operativas. Se ha revisado la propiedad conmutativa de la adición, así como la relación inversa entre adición y sustracción. Se hace necesario ahora, afianzar las relaciones operativas entre ambas. Para ello se realiza la siguiente actividad que sustenta lo que se denomina *Familia de operaciones*.

Figura 26

Familia de operaciones



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 97)

En la figura 26 se observa una agrupación de aves que permiten realizar diferentes cálculos. Por un lado, una adición con su respectiva propiedad conmutativa: $5 + 3 = \underline{\quad}$ / $3 + 5 = \underline{\quad}$; así como una sustracción desde dos perspectivas: $8 - 3 = \underline{\quad}$ / $8 - 5 = \underline{\quad}$. La práctica de resolver familias de operaciones afianza la habilidad de cálculo e incluso introduce la noción de ecuación sutilmente como se ve en la Figura 27. Esta actividad se practica en las casas de las familias de operaciones.

Figura 27

Introducción de la noción de ecuación



Nota. Tomado del Libro Mimate 1, Matemáticas para Todos, (2022, p. 97)

Finalmente, cabe mencionar que se han presentado actividades esenciales para la enseñanza de la adición y la sustracción en el 1er grado de Educación Primaria bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista, el cual abarca todo el ámbito de la enseñanza de las matemáticas basadas en la resolución de problemas realistas.

El presente estudio ha descrito las características que distinguen una propuesta de enseñanza basada en el enfoque de la Educación Matemática Realista y le dan valor diferencial frente a una enseñanza no sustentada en un enfoque teórico. Consideramos que los seis principios de la Educación Matemática Realista constituyen la base de una propuesta integral que brinda al docente de matemáticas un soporte teórico consistente para su práctica pedagógica.

En el presente estudio se describe detalladamente la aplicación de los principios de la Educación Matemática Realista para la enseñanza de la adición y sustracción de números naturales hasta 20 en el primer grado de Educación Primaria. Se considera que este trabajo constituye un aporte importante para el aprendizaje de las matemáticas en la etapa primaria, a la cual los estudiantes llegan con conocimientos matemáticos informales del nivel preescolar y deberán seguir asimilando nociones y conceptos de mayor complejidad a lo largo de su escolaridad; pues, los principios de la Educación Matemática Realista se consolidan como guía que orientan la enseñanza de las matemáticas, desde una mirada más cercana a los estudiantes.

CONCLUSIONES

Los docentes al conocer los fundamentos, principios y aplicaciones de la Educación Matemática Realista para la enseñanza de la adición y la sustracción en Educación Primaria, específicamente en primer grado, adquieren estrategias pedagógicas que aportan a la enseñanza de las matemáticas y al desarrollo de la competencia Resuelve problemas de cantidad en primer grado de Educación Primaria.

Con respecto al primer objetivo, *describir los principios de la Educación Matemática Realista*, este se logró a partir de la revisión de la literatura especializada de los fundamentos de la Educación Matemática Realista y los principios que la sustentan.

Respecto a los principios de la Educación Matemática Realista, este trabajo nos permite evidenciar sus aportes a la enseñanza de la matemática. Los principios de actividad y realidad son fundamentales para la adquisición de las nociones básicas de las matemáticas, dado que vinculan el conocimiento con área de interés de los escolares mediante actividades que involucran el movimiento, la comunicación y la reflexión. Asimismo, el principio de reinención guiada, el cual permite que los estudiantes aprendan mejor con un docente orientador y cuenten con aprendizajes previos que sirvan de soporte para reinventar los conceptos matemáticos. Importante es destacar el principio de niveles que propone que el estudiante, a través de un proceso gradual, transite de la matematización horizontal (realidad) a la matematización vertical (abstracta); es decir, convierta la realidad en una representación mucho más formal. El principio de interconexión permite lograr que el escolar perciba las matemáticas como un todo y no como un conjunto de temas aislados. Finalmente, pero no menos importante es el principio de interacción que le da la característica actividad humana a las matemáticas al estructurarse en base a la comunicación y socialización del conocimiento.

Los principios de la Educación Matemática Realista permiten evidenciar el tránsito que realizan los estudiantes en la adquisición de las nociones básicas de la matemática. También, le permiten al docente determinar cómo aprenden los estudiantes y en qué aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje debe hacer énfasis, respetando la individualidad y ritmos de aprendizaje de cada estudiante.

En relación con el segundo objetivo, se logró describir una propuesta metodológica del trabajo en el aula, según los textos revisados, la cual está basada en el involucramiento activo de los estudiantes, lo cual favorece el desarrollo de la capacidad creativa de los estudiantes, a partir de las ideas matemáticas que pueden ser trabajadas en las clases. También, se enfatiza en la comunicación entre los estudiantes y el docente, así como la retroalimentación dada por el docente a las ideas o preguntas de los estudiantes con el propósito de promover la participación del estudiante en la construcción de las nociones matemáticas.

La explicación de cómo se aplican los principios de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de la adición sustracción de números naturales en primer grado de Educación Primaria le permitirá al docente organizar su actividad pedagógica orientada hacia el logro de aprendizajes consistentes y perdurables como base para futuros conocimientos del área de matemáticas.

Finalmente, la aplicación de los principios de la Educación Matemática Realista en la enseñanza de las matemáticas en el Primer Grado de Primaria favorece la adquisición de las nociones básicas necesarias para construir nociones y conceptos matemáticos de mayor complejidad en grados de estudio posteriores de la escolaridad básica.

REFERENCIAS

- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.
- Araya, P., Giaconi, V. y Martínez, M. (2019). Pensamiento matemático creativo en aulas de enseñanza primaria: entornos didácticos que posibilitan su desarrollo. *Calidad en la Educación*, 50, 319-356. <https://doi.org/10.31619/caledu.n50.717>
- Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta*. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Editorial Libros del Zorzal.
- Castro, P. y Gómez, P. (2021). Educación Matemática en países hispanohablantes: evolución de su documentación de acceso abierto. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 15, 69-92. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.16155>
- Cisternas, C. y Droguett, Z. (2014). *La relación entre lenguaje, desarrollo y aprendizaje desde la teoría sociohistórica de Vygotsky*. Trabajo de investigación. <https://www.aacademica.org/ccisternascasabonne/3.pdf>
- Consejo Nacional de Educación (2006). Proyecto Educativo Nacional al 2021: La educación que queremos para el Perú. <https://siteal.iiep.unesco.org/bdnp/3876/proyecto-educativo-nacional-al-2021-educacion-queremos-peru>
- Consejo Nacional de Educación (2020). Proyecto Educativo Nacional - PEN 2036. El reto de la ciudadanía plena. <https://www.gob.pe/institucion/cne/informes-publicaciones/1942002-proyecto-educativo-nacional-al-2036>
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press <https://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://cognitionandculture.net/wp-content/uploads/the-number-sense-how-the-mind-creates-mathematics.pdf>
- Duval, R. (13-15 de febrero de 2012). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. [Discurso principal]. Conferencia en VI Coloquio Internacional Enseñanza de

- las Matemáticas. Didáctica de las matemáticas: Avances y desafíos actuales, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. https://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2017/05/Resumen_coloquio_2012-VI-Coloquio-Internacional-Ense%C3%B1anza-de-las-Matem%C3%A1ticas.pdf
- Ellemor-Collins, D., & Wright, R. (2009). Structuring numbers 1 to 20: developing facile addition and subtraction. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 50–75. <https://doi.org/10.1007/BF03217545>
- Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal, un matemático en didáctica y teoría curricular. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796.
- Huamán, H., Ledesma, S. y Martínez, C. (2018). *Aplicación de los principios de la matemática realista para mejorar el aprendizaje de la resolución de problemas geométricos en los estudiantes del tercer grado "E" de la I.E. "2060 Virgen de Guadalupe" IV zona de Collique*. [Tesis de licenciatura, Universidad de Ciencias y Humanidades].
<http://hdl.handle.net/20.500.12872/201>
<https://dx.doi.org/10.22258/uch.thesis/201>
- Krauthausen, G./Scherer, P. (2008). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Spektrum Akademischer Verlag
- Lara, M. L., Lara, M. A., Pacheco, M. A., & Barrazueta, S. G. (2019). La Matematización y su influencia en el aprendizaje de la Matemática. *Ciencia Digital*, 3(3.3), 196-209. <https://doi.org/10.33262/cienciadigital.v3i3.3.795>
- Ley General de Educación N° 28044. Decreto Supremo que modifica el Reglamento de la Ley N° 28044, Ley General de Educación, aprobado por Decreto Supremo N° 011-2012-ED. <https://busquedas.elperuano.pe/download/url/decreto-supremo-que-modifica-el-reglamento-de-la-ley-n-2804-decreto-supremo-n-007-2021-minedu-1951686-1>
- Lippmann, F., Maier, P.H., Peters, A., Posmann, D., Warlich, L., Schoy, M., Häring, G./ Neissl, U. (2022). *Mimate 1 Matemáticas para Todos, Manual*. De la versión actualizada, adaptada y editada: Instituto Apoyo.
- Maier, P.H., Häring, G., Lippmann, F./ Neissl, U. (2022). *Mimate 1 Matemáticas para Todos, Primaria*. De la versión original: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH. De la versión actualizada, adaptada y editada Instituto Apoyo.

- Ministerio de Educación del Perú MINEDU (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú (MINEDU). (2016). *Programa curricular de Educación Primaria*. <https://mineduperu.org/programa-curricular-de-educacion-primaria/>
- Ministerio de Educación del Perú (MINEDU). (2019). *¿Qué aprendizajes logran nuestros estudiantes?* <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2020/06/Reporte-Nacional-2019.pdf>
- Ortiz, P. (2017) *Psicobiología social Tomo III*, UCH Fondo Editorial
- Padberg, F./Benz, C. (2011) *Didaktik der Arithmetik für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung* Spektrum Akademischer Verlag.
- Parra, S.H. (2013). Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente. *Omnia*, 19 (3), 74-85. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73730059007>
- Revilla, D. (2020). El método de investigación documental. En A. Sánchez (coord.), D. Revilla, M. Alayza, L. Sime, L. Mendivil y R. Tafur. *Los métodos de investigación para la elaboración de las tesis de maestría en educación* (pp. 7- 22). Maestría Educación. Escuela de Posgrado PUCP. <http://blog.pucp.edu.pe/blog/maestriaeducacion/2020/07/23/los-metodos-de-investigacion-para-la-elaboracion-de-las-tesis-de-maestria-en-educacion/>
- UNESCO (2019). *Proclamación de un día internacional de las matemáticas*. [Conferencia UNESCO. Conferencia General, 40th, 2019] https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000370304_spa?posInSet=1&queryId=N-EXPLORE-49df258a-dc1f-4a02-8866-e1d66dee153d
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9–35 https://scholar.google.nl/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=hy0lz2QAAAAJ&citation_for_view=hy0lz2QAAAAJ:u5HHmVD_uO8C
- Vásquez, M. (2010) Efecto del programa -Matemática para Todos- en el logro de aprendizajes en matemática de alumnos de primaria - Ventanilla [Tesis Maestría en Educación en la Mención Problemas de Aprendizaje, Universidad San

Ignacio de Loyola] <https://repositorio.usil.edu.pe/items/07f5630d-163a-4623-991f-6d39dee4673a>

Wahyudi, Mr & Joharman, Mr & Ngatman, Mr. (2017). The Development of Realistic Mathematics Education (RME) for Primary Schools' Prospective Teachers. 10.2991/iccte-17.2017.83. <https://dx.doi.org/10.2991/iccte-17.2017.83>

