Las tareas que movilizan al fenómeno operador usan cantidades continuas y deben basarse en el conocimiento de que el operador $\frac{a}{b}$ genera una reducción cuando a < b y una ampliación cuando a > b.

Además, por analogía y por conocimiento de los números naturales, la multiplicación de fracciones puede ser abordada por expresiones del tipo "dos veces cinco" y puede ser representada como 2x5, de modo tal que la expresión "dos veces un quinto" sería representada bajo la forma $2 \times \frac{1}{5}$ con la ayuda de los otros fenómenos, como parte todo o medida puede ser entendida como $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

**2° Tipo de la fracción operador: transformar cantidades por la acción de dos operadores fraccionarios**

En la tarea 1, les piden que determine la mitad de un quinto del segmento dado, como se muestra en la figura 36.

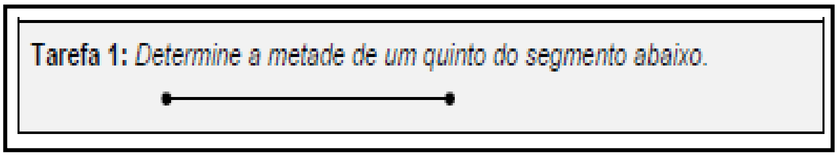



**Figura 36.** Determinación de una medida a partir de un segmento

**Fuente:** Da Silva (2005, p.126)

En este caso la acción de un operador fraccionario se utiliza con el fenómeno parte todo de las fracciones. Para resolver la tarea 1, es necesario asociar el fenómeno parte todo a la medida, para así dividir un segmento en cinco partes iguales. Al seguir dividiendo, una de esas partes es dos y se puede concluir que la parte pintada corresponde a $\frac{1}{10}$. Para solucionar este problema, se lo puede asociar con la operación de la multiplicación, registrada por $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

En la tarea 3, les pide pintar una parte de la fracción que esta sombreada, como muestra en la figura 37.

**Tarefa 3:** *Pinte 1/6 da seção pintada do disco, que fração do disco você pintou?*

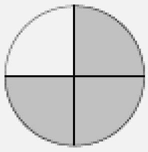


**Figura 37**. Disco cuya sexta parte será pintado

**Fuente:** Da Silva (2005, p.136)

En este caso se usa el fenómeno parte todo para dividir la parte del disco que está pintada en seis partes y, de esta manera, cada parte que fue pintada representará 1/8 de disco. Esto se representa con la operación $\frac{1}{6}$ x $\frac{3}{4}$ $= \frac{1}{8}$ .

**3° Tipo de la fracción operador: determinar el operador que realiza una cierta transformación**

En esta tarea, trata de una receta que le dan, donde la persona tiene una taza de leche, pero le piden 3, como lo muestra en la figura 38.

**Tarefa:** *Tenho 1 copo de leite, mas minha receita pede 3. Por quanto devo reduzir os outros ingredientes da receita para poder usar 1 copo em vez de 3 de leite?*

**Figura 38.** Situación de recomendación médica.

**Fuente:** Da Silva (2005, p.137)

Usando cantidades continuas, la tarea solicita movilizar la técnica que consiste en comparar las cantidades a recibir, ya que, si tenemos una copa y la receta requiere de tres, los otros ingredientes deben ser reducidos usando el operador 1/3.

**4° Tipo de la fracción operador: comparar operadores**

La tarea puede consistir en dejar celdas de la tabla en blanco para ser llenadas por los alumnos. En la figura 39, se usa el fenómeno operador, específicamente la equivalencia entre operadores para, así, reconocer infinitos tipos de operadores que producen el mismo resultado final al aplicársele a un mismo valor inicial.

| Estado Inicial | Operador | Estado Final |
|---|---|---|
| 12 | $\frac{2}{3}$ | 8 |
| 12 | $\frac{4}{6}$ | 8 |
| 12 | $\frac{8}{12}$ | 8 |

**Figura 39.** Cuadro de operadores equivalentes

**Fuente:** Da Silva (2005, p. 138)

**5° Tipo de la fracción operador: comparar estados iniciales y finales**

La tarea descrita en la figura 40, muestra el concepto de equivalencia cuando se aplica un operador a valores iniciales diferentes, y se produce una transformación y resultados finales también diferentes.

| Estado inicial | Operador | Estado final |
|---|---|---|
| 12 | $\frac{2}{3}$ | 8 |
| 15 | $\frac{2}{3}$ | 10 |
| 24 | $\frac{2}{3}$ | 16 |

**Figura 40.** Cuadro de equivalencia de estados

**Fuente:** Da Silva (2005, p. 139)

En el cuadro se muestra que el operador $\frac{2}{3}$ actúa sobre los valores iniciales: 12, 15 y 24, y produce valores finales: 8, 10 y 16 respectivamente, lo que nos permite comprobar el valor de la equivalencia:

$\frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ , como ocurre con el operador $\frac{2}{3}$ .

**6° Tipo de la fracción operador: determinar un operador que sea el inverso de otro**

Existe un operador llamado operador inverso respecto de otro que realiza la acción de obtener un número y luego volver al valor inicial como se muestra en la figura 41.

**Operador inverso.**

| Estado Inicial | Operador | Estado Final/Inicial | Operador | Estado Final |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 2/3 | 8 | 3/2 | 12 |

**Figura 41.** Operador inverso.

**Fuente:** Da Silva (2005, p. 139)

En la figura 41, se muestra la acción del operador 2/3 sobre el valor inicial 12 y se obtiene 8. Después, al valor 8 se le aplica el operador inverso 3/2 y se obtiene el valor 12.

Se puede generalizar enunciado que un operador $\frac{a}{b}$ provoca un determinado efecto a un valor inicial; mientras que el operador $\frac{b}{a}$, aplicado a este estado final, permite el retorno al valor inicial.

**7° Tipo de la fracción operador: determinar un operador que no modifica el valor inicial**

Los valores iniciales y finales no cambian si se usan los operadores fraccionarios 2/2, 3/3, etc., porque estos valores son equivalentes al valor 1 que es el elemento neutro de la multiplicación.

**8° Tipo de la fracción operador: determinar un operador que sustituya a varios operadores**

Se pueden elaborar tareas en los que, al usar el fenómeno operador se pueda reemplazar dos operadores y se obtenga el mismo valor final a partir de un valor inicial. En la figura 42, se muestra la composición de dos operadores que permitirán obtener un valor final.

| Estado Inicial | Operador | Estado Final/Inicial | Operador | Estado Final/Inicial |
|---|---|---|---|---|
| 54 | 2/3 | 36 | 1/2 | 18 |

**Figura 42.** Composición de operadores.

**Fuente:** Da Silva (2005, p. 140)

En la figura 42, se muestra la composición de operadores que se relaciona con la multiplicación de fracciones, es decir, en vez de tener dos operadores $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$, estos se pueden reemplazar por el operador $\frac{1}{3}$ que tiene el mismo efecto que los otros dos.

### 3.2 La fracción aplicada a la educación matemática realista

Iniciaremos esta sección con la descripción del trabajo de Streefland (1991), además relacionaremos este trabajo con los estudios dados inicialmente por Kieren en 1976, quien inicialmente relacionó las operaciones elementales suma, multiplicación y división con los fenómenos de la fracción, aunque Streefland (1991) presenta el tema por medio del uso de cálculos con las cuatro operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división), como se muestra a continuación:

- Sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
- Restar $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$
- Multiplicar $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$
- Dividir $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$

Para solucionar estas operaciones, toma como referencia una barra de chocolate que tiene seis divisiones. La primera operación que se debe realizar es la suma de fracciones $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, de modo que se requiere sumar fracciones con denominadores diferentes. Este problema fue resuelto recurriendo al fenómeno fracción parte todo, y se representó una barra de chocolate dividida en seis partes iguales, aunque el autor no lo menciona explícitamente, se evidencia que utilizó el MCM (máximo común múltiplo) con los denominadores de la fracciones para obtener la cantidad que se requería partir a fin de que esta pueda proporcionar las particiones exactas para representar cada una de las fracciones, con esto explica que, para un medio, tomará la mitad de la barra de chocolate, y, para un tercio, tomará la tercera parte de la barra de chocolate. Aunque en el artículo no muestran la representación gráfica empleada para resolver el problema, se puede deducir la representación de la fracción mediante una gráfica como se muestra en la figura 43.

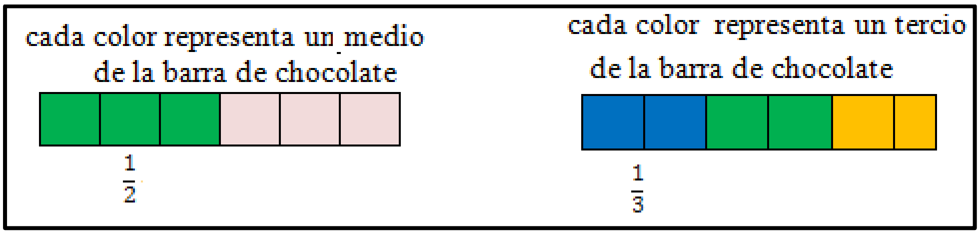



**Figura 43**. Representaciones gráficas de las divisiones de una barra de chocolate en $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente.

Para realizar la operación suma, según Streefland (1991), $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, se coge una barra de chocolate que contiene seis partes iguales, media barra es igual a tres partes y dos partes son iguales a un tercio. Si, se combina o se cuenta cada cuadrado sombreado (dos partes y tres partes), esto sería $\frac{5}{6}$, dicho de otro modo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. Podemos deducir la representación de la fracción mediante una gráfica, tal como se muestra en la figura 44.

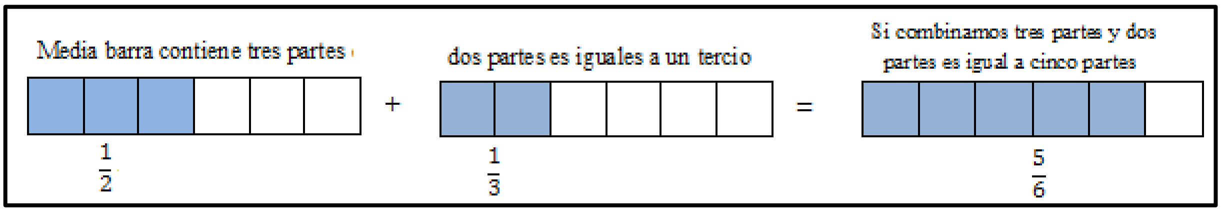



**Figura 44.** Operación suma que está asociado al fenómeno medida en la fracción

Para realizar la operación resta $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, la diferencia entre un medio y un tercio de una barra puede ser determinada comparando tres partes con dos partes, lo que conduce a $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, tal como se muestra en la figura 45.

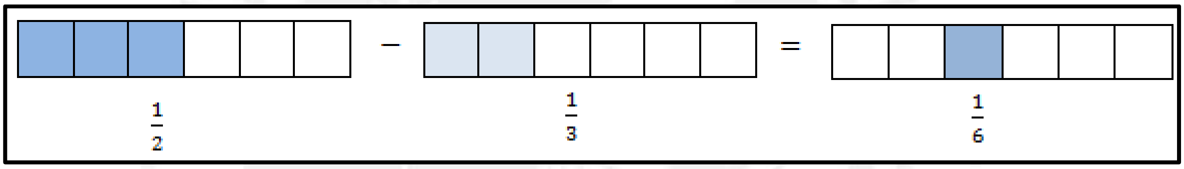



**Figura 45.** Operación resta en la fracción

Para la multiplicación $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, la partición se realiza en etapas. De las dos partes que representan un tercio de una barra, se debe sacar un medio de una de las partes, lo que significa que $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, tal como se muestra en la figura 46.

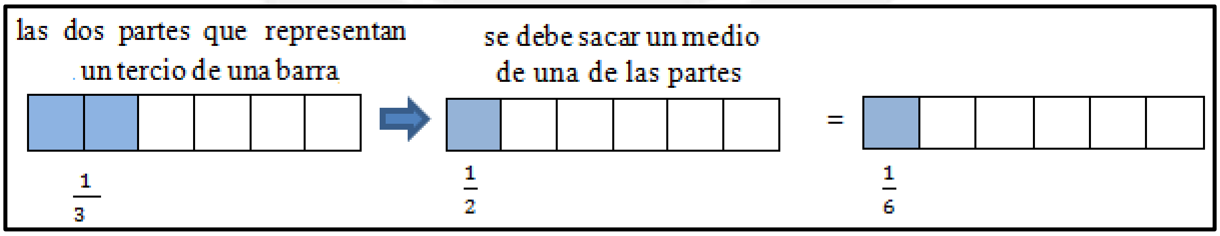



**Figura 46.** Operación multiplicación que está asociado al fenómeno operador de la fracción

Para la división, $\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$, se puede deducir el resultado de la comparación de tres partes con las dos partes. Esto muestra que el último cuadrado pintado de color azul entra una vez y media en el primero. Por lo tanto:

$\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$, tal como se muestra en la figura 47.

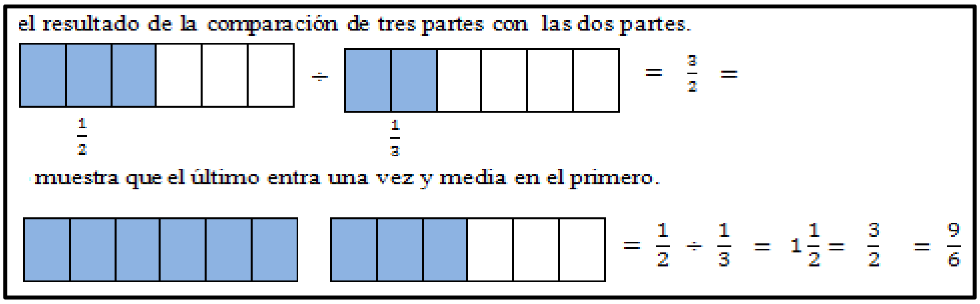



**Figura 47.** Operación división que está asociado al fenómeno cociente de la fracción

En esta actividad aparecen los fenómenos parte todo, medida, operador y cociente según se señala en el artículo de Charalambous y Pitta-Patazzi (2005), los que argumentaron que en 1982, Behr, Lesh, Post y Silver mostraron un diagrama que asociaba las operaciones elementales tales como la suma, vinculada con el fenómeno medida; la multiplicación, asociada con el fenómeno operador; y la división, asociada con el fenómeno cociente. Si al resolverse, se llega al resultado en su forma equivalente, se asocia al fenómeno razón, como por ejemplo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, como muestra en la figura 48.

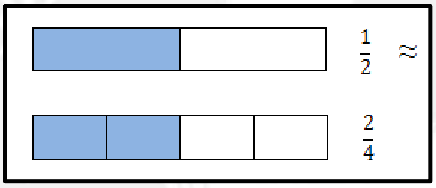



**Figura 48.** Equivalencia de una fracción que está asociada al fenómeno razón en la fracción

Por lo tanto, para realizar esta actividad, el investigador usó para todas las operaciones elementales el fenómeno parte todo.

Otro ejemplo que describe Streefland (1991) es una situación de la vida cotidiana: en un restaurante donde tiene que repartir a cuatro niño, tres pizzas de forma equitativa, notamos que en esta situación según la teoría de la EMR, está presente el principio de actividad.

Observamos en la figura 49 en el ítem 1, un circulo que representa a la pizza y esta, a su vez, es dividida en cuatro partes iguales; la figura sombreada de color negro representa un cuarto de cada pizza, pues el investigador reparte un cuarto de cada pizza a cada niño de uno en uno, lo mismo hará con las demás pizzas, pues como se puede observar el investigador representa cada tajada como $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ lo que es lo mismo representar 3 x $\frac{1}{4}$ ò $\frac{3}{4}$ . Nos podemos percatar, aunque no lo menciona explícitamente, de que está presente el fenómeno medida pues está relacionado con la suma y el fenómeno operador por estar relacionado a la multiplicación. En el ítem 2, primero dos y luego uno, el investigador hace notar otra forma de repartir las pizzas: repartirá media pizza a cada niño y de la pizza entera que sobra les repartirá un cuarto a cada uno. Como en el ítem uno nos percatamos, aunque no lo menciona explícitamente, de que está presente el fenómeno medida, pues está relacionado con la suma y el fenómeno operador por estar relacionado a la multiplicación como se muestra a continuación.

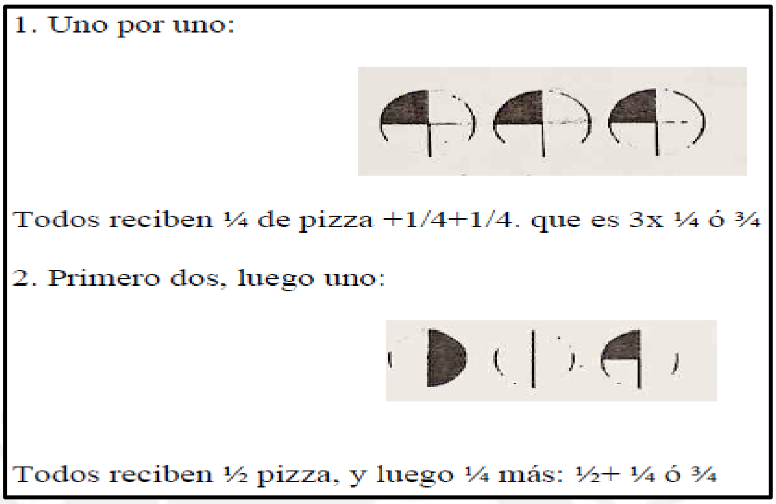



**Figura 49.** Expresiones equivalentes de suma y multiplicación

**Fuente:** Streefland (1991, p.2)

En la figura 50, a cada pizza se le quita un cuarto. Esta operación se podría realizar para la repartición a dos chicos. Para los otros dos chicos, una pizza entera se parte en dos y a cada uno se le agrega un cuarto. En este caso, aunque no lo dice explícitamente, encontramos el fenómeno medida al momento de sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ como se muestra a continuación.

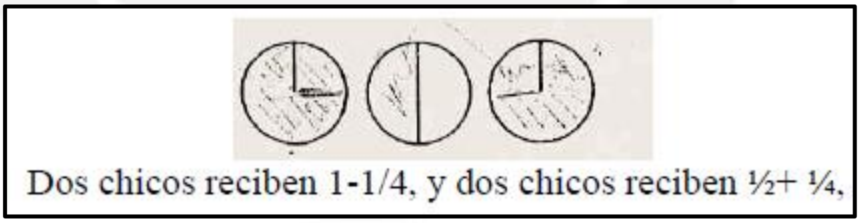



**Figura 50.** Expresiones equivalentes de restar y sumar

**Fuente:** Streefland (1991, p.2)

# CAPÍTULO IV: CONSTRUCCIÓN DE CRITERIOS PARA EL ANÁLISIS DEL TEXTO

A continuación, se procederá a definir los criterios que permitirán analizar el texto desde la perspectiva de la EMR.

En primer lugar, se considerarán los principios de la EMR declarados en Bressan, Zolkower y Gallego (2004). Estos son: principio de actividad, realidad, reinvención, nivel, iteración e interconexión. Estos principios se complementarán con el trabajo de Van den Heuvel (2000), en el que se explica, de modo resumido, cada uno de estos ellos. Posteriormente, se considerará el trabajo de Santamaría (2006), en el cual se analizaron seis textos holandeses con la intención de describir las características que poseen estos textos de tercer y cuarto grado de educación primaria, diseñados con el lineamiento de la EMR. Este trabajo resulta esencial para nuestra investigación puesto que la investigadora se basó en preguntas con lineamiento de la teoría de la EMR como: ¿qué contextos y situaciones aparecen con mayor frecuencia en los libros de texto?, ¿hay algún contexto o situaciones que aparecen con mayor prominencia?, ¿los contextos pertenecen al mundo real o fantasioso de los niños?, ¿son los mismos ricos y significativos en tanto que despiertan su interés y promueven el trabajo con ellos?, entre otras.

En nuestra investigación, siguiendo las ideas de Santamaría (2006), construiremos las preguntas según nuestras necesidades para cumplir con nuestros objetivos, pues este debe de estar involucrado con la teoría de la EMR y el objeto matemático, el cual está constituido por los fenómenos asociados a las fracciones en un texto de sexto grado de primaria. Los trabajos de Da Silva (2005) y Streefland (1991) definen los fenómenos asociados a la fracción, convirtiéndose en la principal referencia para analizar el texto didáctico seleccionado.

Para la definición de los criterios, de los seis principios existentes en la EMR se considerarán solo cuatro de ellos, puesto que los otros dos principios (actividad y reinvención) se trabajan con alumnos.

Criterios definidos en base a los principios de la EMR para analizar el texto de sexto grado de educación primaria que es distribuido gratuitamente por el Ministerio de educación del Perú.

**Tabla 1.Principios de la EMR**

| PRINCIPIOS | CRITERIOS ASOCIADOS A LOS PRINCIPIOS | INDICADORES |
|---|---|---|
| **REALIDAD**<br><br>Se conecta al mundo real o existente o imaginable. | 1. En el texto, se consideran situaciones realistas, en las que el alumno encuentra sentido a los procedimientos que realiza. Esto implica la aplicación a situaciones para las que la noción de fracción es necesaria.<br>. | 1.a. Aparecen enunciados de situaciones asociadas a fenómenos de parte todo, medida, cociente, razón y operador.<br><br>1.b. La solución que propone el texto recurre al fenómeno más adecuado para la situación presentada.<br><br>En particular, para la multiplicación se recurre a situaciones asociadas al fenómeno de operador. Para la división se requiere el fenómeno cociente. |
| **INTERACCIÓN**<br><br>La matemática se considera como una actividad social. | 2. En el texto, se presentan actividades que deben abordarse en grupo. | 2.a. En el texto, se presentan tareas que requieren de trabajo grupal. |
| **INTERCONEXIÓN (estructuración)**<br><br>Los distintos temas se conectan unos con otros. | 3. En el texto se identifican otros conceptos matemáticos que se relacionan con la noción de fracción. | 3.a. Están presentes situaciones que requieren emplear la resta.<br><br>3.b. Están presentes situaciones que requieren ordenar datos, lo que implica considerar la noción de relación de orden. |

| | | |
|---|---|---|
| | | 3.c. Están presentes situaciones que requieren emplear la división, multiplicación, adición y resta y, en general, operaciones combinadas de fracciones.<br><br>3.d. Están presentes situaciones que requieren emplear la noción de sucesión.<br><br>3.e. Están presentes situaciones que requieren emplear fracciones heterogéneas.<br><br>Están presentes situaciones que requieren expresar representaciones decimales como fracción. |
| **NIVEL**<br><br>Se debe comenzar a matematizar un contenido o tema de la realidad para, luego, cambiar a analizar su propia actividad matemática.<br><br>**Matematización horizontal**: consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático.<br><br>**Matematización vertical**: dentro de la matemática misma, conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba y rigorización. | 4. En el texto se contemplan actividades que permiten el tránsito entre los distintos niveles de matematización vertical. | 4. a. El texto presenta tareas que exigen convertir un problema contextual en un problema matemático.<br><br>4. b. En el texto, se recurre al empleo de modelos, esquemas, descripciones para situaciones similares, pero siempre referidas a una situación particular.<br><br>4. c. En el texto, se presentan espacios en los que se reflexiona sobre los aspectos en común de diferentes situaciones con intención de generalizar.<br><br>4. d. En el texto, no se propicia el |

| | | |
|---|---|---|
| En el proceso de matematización progresiva la EMR admite pasar por distintos niveles de comprensión<br><br>**Nivel situacional**: el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizadas en el contexto de la situación misma.<br><br>**Nivel referencial:** es este aparecen los modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.<br><br>**Nivel general:** se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización<br><br>**Nivel formal:** se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales. | | empleo de notaciones formales para el tema de estudio. |

## CAPÍTULO V: ANÁLISIS DEL TEXTO

A continuación, se procederá a realizar el análisis del texto del MINEDU, considerando los criterios construidos en la tabla 1 y las definiciones de los fenómenos asociados a la fracción, descritas en Da Silva (2005) y Streefland (1993). Comenzamos a analizar las fracciones desde la teoría de la EMR.

**Criterio 1: Consideración de fenómenos como los desencadenantes de la actividad matemática sobre fracciones**

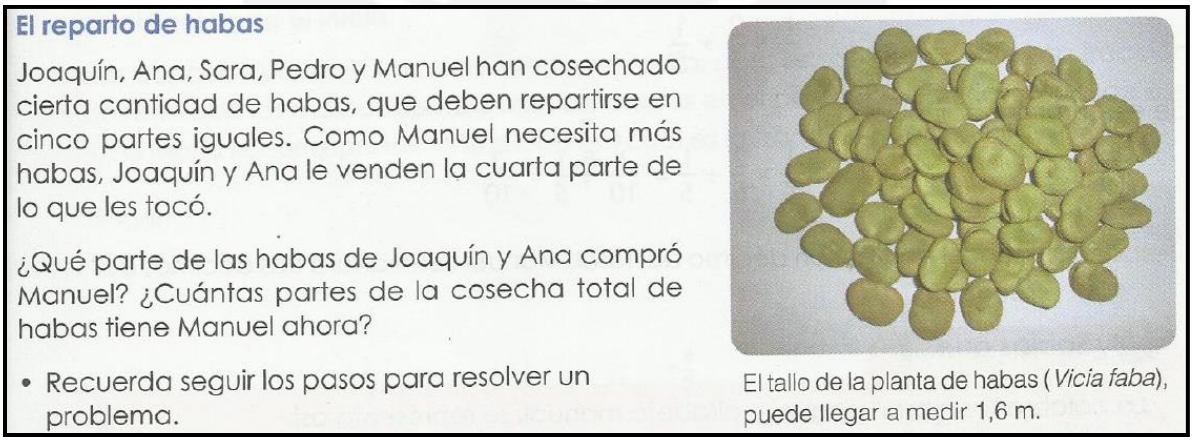
**Principio de realidad**

*1.a. Aparecen enunciados de situaciones asociadas a fenómenos de parte todo, medida, cociente, razón y operador.*

Revisando el texto, se han encontrado evidencias de situaciones de la vida cotidiana (en el campo, en la ciudad o en el colegio), tales como el reparto de habas, el reparto de una torta, la cosecha de papa, la repartición de un terreno, la venta de popelina y los ahorros de Alfredo, entre otros.

Situación 1

En esta situación, se presenta una faena en el campo, donde cinco personas han cosechado habas, quieren repartirse las habas de forma equitativa y finalmente uno de ellos necesita más habas. Por ello, dos personas deciden venderle la cuarta parte de la que les ha correspondido como se muestra en la figura 51.


El reparto de habas

Joaquín, Ana, Sara, Pedro y Manuel han cosechado cierta cantidad de habas, que deben repartirse en cinco partes iguales. Como Manuel necesita más habas, Joaquín y Ana le venden la cuarta parte de lo que les tocó.

¿Qué parte de las habas de Joaquín y Ana compró Manuel? ¿Cuántas partes de la cosecha total de habas tiene Manuel ahora?

- Recuerda seguir los pasos para resolver un problema.

El tallo de la planta de habas (*Vicia faba*), puede llegar a medir 1,6 m.

**Figura 51.** Situación del reparto de habas

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.51)

En la situación mostrada en la figura 51, se plantea repartir una cantidad de habas entre Joaquín, Ana, Sara Pedro y Manuel, y se requiere representar la parte que le corresponde a cada uno de ellos. Esta situación se asemeja a la tarea 1a) del 1° tipo del fenómeno cociente, pues se tendrá que distribuir la cosecha de habas en cinco partes iguales, como se observa en la figura 52.

| Joaquin | Ana | Sara | Pedro | Manuel |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

**Figura 52**. Reparto de las habas.

En la figura 53, se expresa de forma literal la representación de lo que recibe cada uno, como se muestra a continuación.

- Cada uno recibió un quinto. Luego, entre Joaquín y su esposa tenían dos quintos del total.

**Figura 53.** Reparto de las habas

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.52)

En la figura 53, el texto menciona directamente la cantidad que le corresponde al juntar las partes que les toca del total de la cosecha de habas a Joaquín y Ana. Se piensa que debió sumarse $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, como lo muestra la tarea1 del ítem d) de 1° tipo, dentro del fenómeno parte todo.

En la figura 54, se indica el planteamiento para multiplicar dos fracciones.

- Si vendieron la cuarta parte, vendieron un cuarto de dos quintos del total.

**Figura 54.** Reparto de las habas

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.52)

Y, en la figura 55, se expresa matemáticamente, asemejándose así a la tarea 1 de 2° tipo del fenómeno operador. Para ello, sugiere en el ejemplo asociar el fenómeno parte todo y la división. Así, la representación $\frac{2}{5}$ del total que les corresponde a Joaquín y Ana, pero al venderla a Manuel, solo le vendieron la cuarta parte de lo que les tocó y, al expresarlo como en la figura 55, este se asemeja a la tarea 3 de 2° tipo dentro del fenómeno operador. Para resolver este, lo asocia con el fenómeno parte todo siguiendo los pasos. Se pintaría $\frac{2}{5}$; en seguida, se divide en cuatro partes la parte que se ha sombreado Así, esto le correspondería a $\frac{1}{10}$ .


**Figura 55.** Reparto de las habas

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.52)

En la figura 56, se muestra la expresión matemática de la cantidad que le corresponde a Manuel y la cantidad que compra.

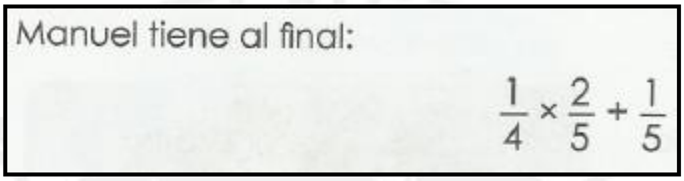



**Figura 56.** Reparto de las habas

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.52)

En la figura 57, se muestra el proceso por seguir para saber el total que tendría Manuel y toma el resultado de la figura 55 sumando la cantidad que le tocó de la repartición de las habas, que fue $\frac{1}{5}$. Al sumar $\frac{1}{10} + \frac{1}{5}$ , se asocia la tarea1 del ítem d) de 1° tipo l, sugiriendo que se debe llevar a una equivalencia. Dicho de otro modo, se debe homogeneizar para hacer la suma y el denominador para ambas fracciones será 10. Finalmente, sumamos la parte que le corresponde a Manuel más la parte que Manuel compra de Joaquín y Ana, que representamos $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$.

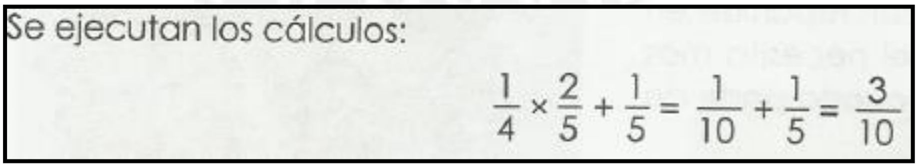
,



**Figura 57.** Reparto de las habas.

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.52)

Para efectuar la suma de fracciones en este caso, se recurre al mismo proceso que hace Streefland (1991) para sumar como lo muestra en la actividad que resuelve de la suma de dos fracciones (esto se puede verificar en la figura 44).

Por lo tanto, en este ejercicio, se ha podido percibir el fenómeno parte todo, cociente y operador. En cuanto a la teoría de la EMR, es una situación real que se produce en las faenas del campo.

Situación 2

Esta situación trata de un terreno que tiene la señora Franciscana en forma de un hexágono y que quiere repartir a sus cuatro hijos de forma equitativa. A su vez, uno de sus hijos quiere repartir su parte a sus tres hijos de forma equitativa, por lo que la pregunta consiste en qué parte le toca a cada uno de los tres nietos de la señora Francisca, como se muestra en la figura 58.

Francisca reparte equitativamente un terreno hexagonal entre sus cuatro hijos. Raúl, uno de ellos, quiere, a su vez, repartir su parte entre sus tres hijos.

¿Qué parte del terreno le toca a cada hijo de Raúl?

**Figura 58.** Situaciones del reparto de un terreno hexagonal

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.45)

Representación gráfica de un hexágono que le corresponde a cada hijo de Francisca, como se muestra en la figura 59.

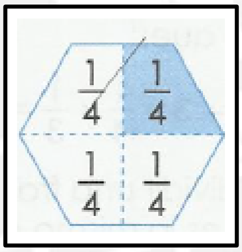



**Figura 59**. Reparto de un terreno hexagonal

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.45)

Para el desarrollo del terreno hexagonal, cuando tiene que repartir entre sus cuatro hijos, la situación se asemeja a la tarea 1 del 1° tipo del fenómeno cociente que, a su vez, se relaciona con el parte todo, pues tendrá que distribuir un terreno en cuatro partes iguales, por lo que le tocará a cada hijo la cuarta parte.

En la figura 60, muestra su expresión literal de lo que le corresponde a cada hijo.

A cada hijo de Francisca le toca un cuarto del terreno.

**Figura 60.** Situaciones del reparto de un terreno hexagonal

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.45)

En la figura 60, Raúl quiere repartir el terreno que les toca a sus hijos mencionando en el texto que hay que dividir un cuarto entre tres. Según la descripción, para dividir este tipo de tareas, que es de dividir dos fracciones, no se ha podido encontrar un caso similar en el texto descrito por Da Silva (2005) y Streefland (1991).

En la figura 61, se explica de forma literal de lo que se debe hacer después.

Para saber cuánto le toca a cada hijo de Raúl, hay que dividir un cuarto entre tres.

**Figura 61.** Situación del reparto de un terreno hexagonal

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.45)

A continuación, muestra el proceso para su expresión matemática de dividir una fracción entre un valor entero como se muestra en la figura 62.

Si dividimos $\frac{1}{4}$ entre 3, se obtiene $\frac{1}{12}$ o $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$

**Figura 62. Situación del reparto de un terreno hexagonal**

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.45)

Los fenómenos encontrados para este ejercicio son el fenómeno cociente y el fenómeno parte todo, aunque no se ha encontrado una tarea que se asemeje al dividir una fracción entre un número entero.

Situación 3

En la situación presentada en la figura 63, se puede notar la presencia de la desigualdad, puesto que se tiene que comparar la distancia recorrida por cada hermano desde su casa hasta el colegio.

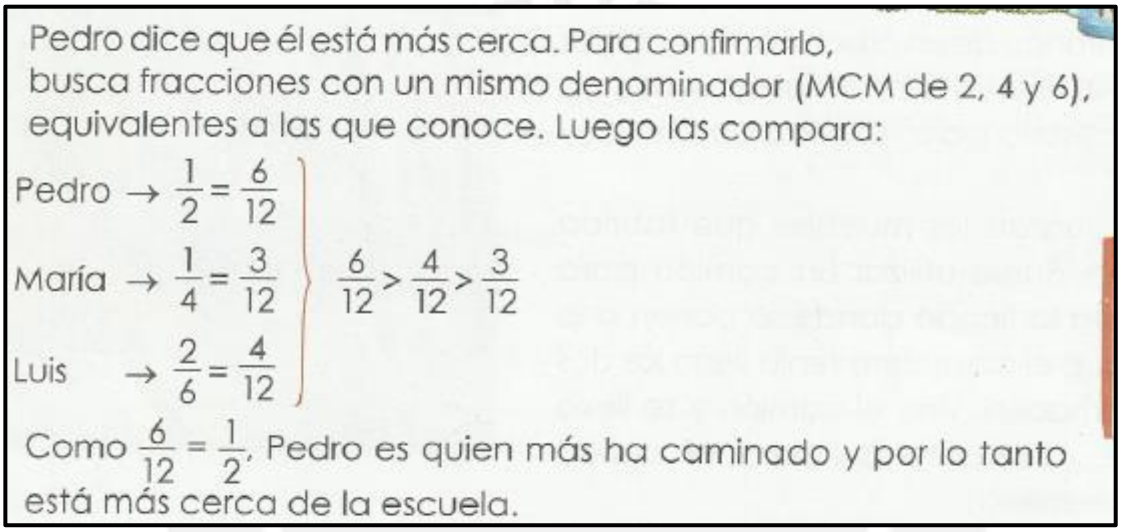
Pedro, María y Luis son tres hermanos que viven en Tarapoto. Ellos van a la misma escuela. Lo hacen a pie y siguen el mismo camino.

Si Pedro ha recorrido $\frac{1}{2}$ del camino, María $\frac{1}{4}$ y Luis $\frac{2}{6}$, ¿cuál de los tres está más cerca de la escuela?

**Figura 63.** Distancia de casa al colegio.

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

Esta situación requiere la relación de orden para poder saber así cuál de los hermanos está más cerca de la escuela. En la solución del texto, como muestra en la figura 64, se evidencia la presencia del fenómeno razón, pues cuando lleva cada valor a su forma equivalente este se asocia a la tarea del 3° de este tipo de fenómeno razón. Asimismo, para hacer la comparación de estos dos números y saber quién está más cerca de la escuela, usaremos razones equivalentes. Dicho de otro modo, para llevar estas fracciones al mismo denominador y para ordenar el recorrido de cada uno de los hermanos se recurre al fenómeno medida como se da en la tarea 1 y 2 de 2° tipo, aunque no se muestra necesariamente dentro de un segmento, como se muestra a continuación.


Pedro dice que él está más cerca. Para confirmarlo, busca fracciones con un mismo denominador (MCM de 2, 4 y 6), equivalentes a las que conoce. Luego las compara:

Pedro $\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$

María $\rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ $\quad \frac{6}{12} > \frac{4}{12} > \frac{3}{12}$

Luis $\rightarrow \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$

Como $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, Pedro es quien más ha caminado y por lo tanto está más cerca de la escuela.

Figura 64. Solución de Pedro

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

.

Cabe añadir que el proceso que hace María en el texto, como en la figura 65. No aparece en ninguno de las investigaciones que tomamos como referencia para definir las fracciones; sin embargo, al representar el recorrido que cada uno hace hacia el colegio de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{6}$ consideramos que es un proceso de comparación de una cantidad que tiene mayor área sombreada. Para su desarrollo, se considera el fenómeno cociente, pues se debe dividir cada representación del recorrido, como se hace en la tarea 1 de 1° tipo. Asimismo, para ordenar, se recurre al fenómeno medida como se observa en la tarea 1 y 2 de 2° tipo, como se muestra a continuación.

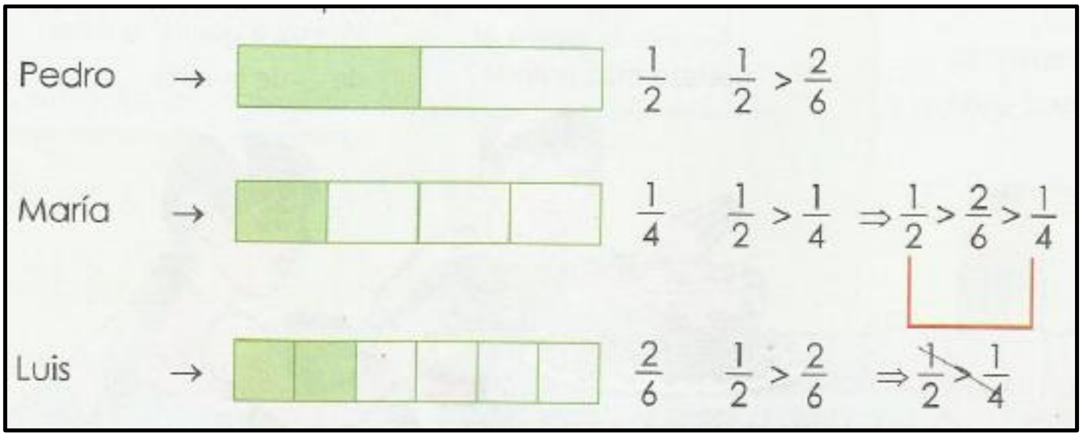
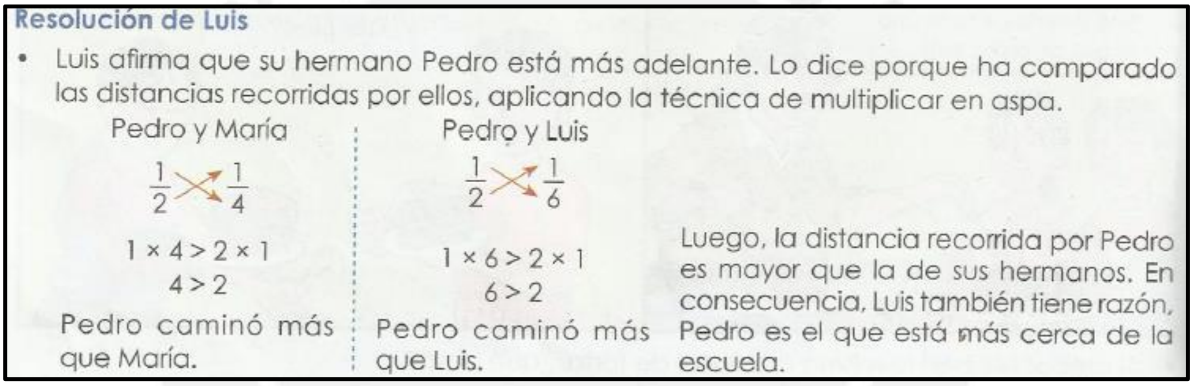



**Figura 65.** Solución de María

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

La solución que realiza Luis no se asemeja a ninguna de las que presentan los investigadores como se evidencia en la figura 66.



**Resolución de Luis**

- Luis afirma que su hermano Pedro está más adelante. Lo dice porque ha comparado las distancias recorridas por ellos, aplicando la técnica de multiplicar en aspa.

Pedro y María

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

$1 \times 4 > 2 \times 1$

$4 > 2$

Pedro caminó más que María.

Pedro y Luis

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$

$1 \times 6 > 2 \times 1$

$6 > 2$

Pedro caminó más que Luis.

Luego, la distancia recorrida por Pedro es mayor que la de sus hermanos. En consecuencia, Luis también tiene razón, Pedro es el que está más cerca de la escuela.

**Figura 66.** Solución de Luis.

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 42)

Podemos concluir que en esta situación se han encontrado los fenómenos razón, medida y parte todo

Situación 4

Esta situación trata del almacenamiento de tres sacos de la cosecha de papa; sin embargo, se llega a consumir la mitad de cada saco. Lo que se quiere saber es qué parte de la cosecha de papa se ha consumido, como se muestra en la figura 67.

MULTIPLICAMOS DOS FRACCIONES

Remigio guardó su cosecha de papa en tres sacos de la misma capacidad. Un mes después, ya había consumido la mitad de uno de los sacos. ¿Qué parte de la cosecha fue la que consumió?

**Figura 67.** Situación del almacenamiento de la cosecha de papa

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.44).

Para multiplicar dos fracciones, el texto del libro analizado recurre a lo descrito por la tarea 3 de 2° tipo del fenómeno operador; además, menciona que este proceso se debe asociar al fenómeno parte todo, dividiéndose primero a entre $\frac{1}{3}$ , como lo hace la tarea 1, de 1° tipo del fenómeno cociente, posteriormente sombrear $\frac{1}{3}$ , para luego dividirla en dos partes, de manera que se pueda percibir $\frac{1}{6}$ , como lo describe la tarea 3 de 2° tipo del fenómeno operador.

En el primer mes consumió la mitad de un tercio, lo que equivale a un sexto de la cosecha.
Simbólicamente: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{6}$

**Figura 68.** Representación Literal y matemática de la solución de la situación

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 69, se expresa matemáticamente el proceso directo de la solución como se muestra a continuación.

Se puede expresar así: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

**Figura 69.** Expresión matemática de la situación

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 70, se piensa representar la multiplicación de las fracciones en un hexágono, como se menciona a continuación.

Observa la representación de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ en el hexágono:

**Figura 70.** Con miras hacia la representación gráfica

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 71, se puede observar como parte del procedimiento una gráfica que le permite darse una idea de la representación de sacos de papa; además, se puede percibir la representación de los tres sacos como la cantidad total de la cosecha de papa en hexágono, pero que, a simple vista, podría parecer un cubo. Este hexágono ha sido dividido en tres partes iguales, por lo que cada división representa un saco de papa, como se observa a continuación.

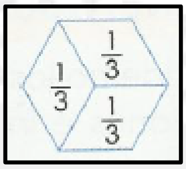



**Figura 71.** Cada división representa a un saco de papa

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 72, se muestra al hexágono, después de haberse dividido en tres partes: Cada una de estas se divide en dos, representando así cada uno de ellos como $\frac{1}{6}$ , como se observa a continuación.

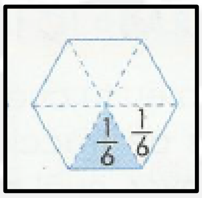



**Figura 72.** Representación del consumo de papa

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En la figura 73, se muestra con mayor claridad la representación de cada saco de papa y la división del consumo de cada papa, como se observa a continuación.

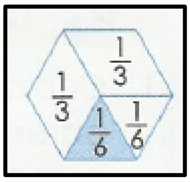



**Figura 73.** Representación de cada consumo de papa

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p.44).

En esta situación notamos la presencia del fenómeno parte todo, operador y cociente. Aunque consideramos que la representación de cada saco de papa, que fue representado por el hexágono, consideramos que no es el más indicado para la situación y, en especial, para niños de alrededor de 11 años, porque para ellos se les haría difícil la repartición equitativa de cada saco.

*1.b) La solución que propone el texto recurre al fenómeno más adecuado para la situación presentada.*

Según lo analizado en el texto, cuando aborda el tema de multiplicación y división de fracciones, este recurre al mismo proceso que hace Da Silva (2005), mientras que Streefland (1991) recurre a fracciones homogéneas para recién operar.

**Principio de interacción**

*2.a) En el texto, se presentan tareas que requieren del trabajo grupal.*

El texto presenta tareas grupales del tipo algorítmicas, como se muestra en la figura 74, en la que el alumno tendrá que realizar las operaciones como se muestra a continuación.

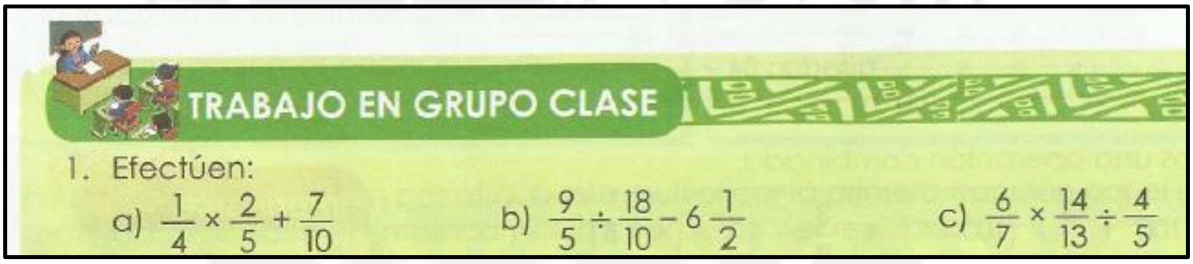



**Figura 74.** Trabajos grupales

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 48)

En la figura 74, se muestra un ejercicio de un trabajo grupal, aunque del tipo algorítmico en el cual no se requiere que los alumnos trabajen en grupos.

En la figura 75, se les da trabajos grupales que aparecen en situaciones cotidianas, como el pago que recibe el señor Héctor de dos tercios de saco de papa y este, a su vez, le regala los dos quintos a su mamá, como se muestra a continuación.

Por un trabajo que realizó, Héctor recibió dos tercios de un saco de 30 kg de papas. Él, a su vez, le regaló dos quintos de su parte a su mamá. ¿Qué fracción del saco de papas recibió su mamá? ¿Cuántos kilos de papa regaló Héctor a su mamá?

**Figura 75.** Trabajos grupales

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 55)

Ahora bien, en esta situación, sí se requiere trabajar en grupo, puesto que podría haber diferentes formas de interpretar su planteamiento y, en cuanto a la pregunta, podría entenderse de diferentes formas.

**Principio de interconexión**

*3.a.) Están presentes situaciones que requieren emplear la resta.*

En la figura 76, se muestran las operaciones combinadas, como suma, multiplicación, resta y división. Además, se indica las operaciones que primero se deben realizar para resolver, como se puede observar a continuación.

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{4}{3} + \frac{3 \times 2}{5 \times 3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$$

**Figura 76.** Operaciones combinadas. Indicaciones de los que se deberían de resolver primero

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 50)

En la figura 77, se muestra el resultado que se hizo en la multiplicación y en la división, como se muestra a continuación.

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}$$

**Figura 77.** Resultado de cada uno del proceso de la operación que realiza

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 50)

En la figura 78, se muestra el resultado directo de la operación suma y multiplicación, como se muestra a continuación.

$$= \frac{49}{30}$$

**Figura 78.** Resultado final

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 50)

Por lo tanto, en este ejercicio de las operaciones combinadas, la resta no la resuelve como lo sugiere Streefland (1991), y en la investigación de Da Silva (2005), no presenta ningún ejercicio para operar la resta en fracciones.

La figura 79 es una situación de la venta de popelina para hacer camisas. En una parte de la situación, se va a requerir restar como mostramos a continuación.

**5 OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES**

Felipe vende popelina para hacer camisas. De un fardo de 100 m, el primer día vende $\frac{4}{25}$ del total, el segundo día vende $\frac{3}{7}$ de lo que le quedó y el tercer día $\frac{3}{8}$ del resto. ¿Cuánto vendió en los tres días? ¿Cuántos metros de popelina le quedaron?

**Figura 79.** Situación de la venta de popelina

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 80, se muestra el planteamiento de la venta que hace cada día, aunque para el desarrollo a partir del segundo día, se debió restar lo que vendió con lo que tiene. Es decir, si tiene $100m - 16m = 84m$, lo mismo para el tercer día y al final en la parte de lo que dice "queda", se puede observar que tiene que usar la resta con los valores que tiene hasta ese momento con lo que se vendió. No obstante, en esta situación no se estaría empleando la resta para fracciones, como se puede verificar a continuación.

| A | B | C | |
|---|---|---|---|
| **1.° día** | **2.° día** | **3.° día** | **Queda:** |
| $\frac{4}{25} \times 100 = 16$ | $\frac{3}{7} \times 84 = 36$ | $\frac{3}{8} \times 48 = 18$ | $48 - 18 = 30$ |
| Vende 16 m. | Vende 36 m. | Vende 18 m. | Quedan 30 m. |

quedan 48

quedan 84

100 m

**Figura 80.** Planteamiento de la venta de popelina

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

Aunque la situación desarrollada de la figura 80 del texto es una de las soluciones, también se muestra otra solución, como veremos en el criterio 3c).

Por lo tanto, se ha encontrado la presencia de la resta en fracciones de las operaciones combinadas, pero no se encuentra ninguna situación que use la operación resta entre fracciones.

*3.b). Están presentes situaciones que requieren ordenar datos, lo que implica considerar la noción de relación de orden.*

Como se muestra en la situación presentada en la figura 63, se puede notar la presencia de la desigualdad, puesto que se tiene que comparar la distancia recorrida por cada hermano desde su casa hasta el colegio. En esta situación, se requiere la relación de orden para poder saber así cuál de los hermanos está más cerca de la escuela.

*3.c). Están presentes situaciones que requieren emplear la división, multiplicación, adición y resta, y, en general, las operaciones combinadas.*

La situación de la figura 79 muestra una situación acerca de la venta de popelina para hacer camisas. Requiere realizar operaciones combinadas con fracciones, como se plantea en la figura 81. Aquí se observa el planteamiento que se desarrolla en el libro y se muestra, para el segundo, el uso de variable como A, que representa lo que vendió el primer día y, para el tercer día, las variables A y B. La suma de ambos representa lo que se vendió el primer y segundo día, como se puede verificar a continuación.

$$V = \frac{4}{25} \times 100 + \frac{3}{7} \times (100 - A) + \frac{3}{8} \times 100 - (A + B)$$

**Figura 81**. Planteamiento de la venta de popelina con uso de variables

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 82, solo se resuelve la venta del primer día y esta la reemplaza la variable A del planteamiento del segundo día, como se verifica a continuación.

$$V = 16 + \frac{3}{7} \times (100 - 16) + \frac{3}{8} \times 100 - (A + B)$$

**Figura 82.** Desarrollo de la venta del primer día y el reemplazo la variable A

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 83, solo se resuelve la venta del segundo día y esta la reemplazan las variables A y B del planteamiento del tercer día, como se verifica a continuación.

$$V = 16 + 36 + \frac{3}{8} \times \ 100 - (16 + 36)$$

**Figura 83.** Desarrollo de la venta del segundo día y reemplazo de la variable A y B

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 84, solo se resuelve la venta del segundo día y esta la reemplazan las variables A y B del planteamiento del tercer día, como se verifica a continuación.

$$V = 16 + 36 + \frac{3}{8} \times \ 100 - 52 = \ 16 + 36 + \frac{3}{8} \times 48$$

**Figura 84.** Desarrollo de lo que vendió hasta el segundo día

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 85, solo se resuelve la venta del tercer día y, posteriormente, se suma la venta hasta el tercer día, como se constata a continuación.

$$V = \ 16 + 36 + 18 = 70$$

**Figura 85.** Desarrollo de la cantidad que se vendió, hasta el tercer día

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

En la figura 86, solo se resuelve la venta del segundo día y esta la reemplazan las variables A y B del planteamiento del tercer día, como se observa a continuación.

Respuesta: Vendió 70 m y le quedan 30 m de tela.

**Figura 86.** Planteamiento de la venta de popelina

**Fuente**: Montagnoli, et al. (2012, p. 47)

Por lo tanto, como se ha podido observar, se ha usado la multiplicación con las fracciones, aunque aparecen las operaciones suma y resta, pero no se realiza la operación puesto que se simplifica y estos se convierten en números naturales.

*3.d). Están presentes situaciones que requieren emplear la noción de sucesión.*

No se encuentran situaciones con respecto a las sucesiones, pero se menciona el proceso que se debe seguir, como se muestra en la figura 87 a continuación.

Comenzamos con tres, luego multiplicamos por un medio para sumar tres cuartos. ¿En qué fracción estaremos luego de cuatro pasos sucesivos? Podemos utilizar nuevamente el esquema para ver globalmente la situación.

**Figura 87.** Ejercicio de sucesiones presentadas como algoritmos

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 57)

La figura 89 muestra el desarrollo que se les pide que se haga, como darles el primer número; luego, multiplicarlo por una fracción; y, posteriormente, sumarle la fracción que les da. Este proceso se debe volver a hacer, de modo que sean cuatro pasos o, dicho de otro modo, volver a hacer todo el mismo proceso una vez más, como se muestra a continuación.

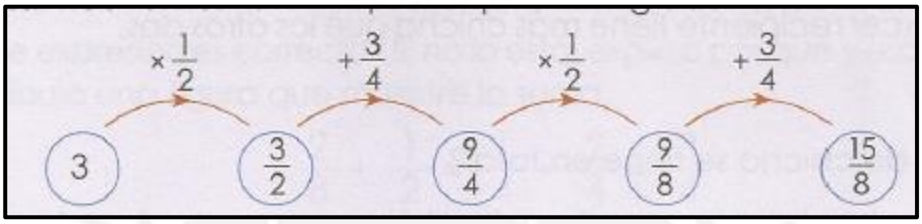



**Figura 88.** Ejercicio de sucesiones presentadas como algoritmos

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 57)

*3.e). Están presentes situaciones que requieren emplear fracciones heterogéneas.*
*Están presentes situaciones que requieren expresar representaciones decimales como fracción.*

Sí están presentes situaciones que requieren emplear fracciones heterogéneas como se muestra en la figura 63, que trata de la distancia que encuentran tres hermanos de su casa al colegio. Se ha mencionado que cada uno de ellos ha recorrido diferentes distancias, dadas en fracciones. Cada una de estas tiene diferente denominador, a lo que se suele llamar fracciones heterogéneas. Una situación similar también la encontramos en la situación del reparto de habas, como se muestra en la figura 53, entre otros.

No se han encontrado situaciones con decimales, que requieran representación en fracciones, pero sí se ha encontrado la necesidad de identificar el número decimal con opciones que representen a la fracción, como se muestra en la figura 89.

| | | | |
|---|---|---|---|
| f) 0,03 se expresa como: | $\frac{3}{9}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{100}$ |

**Figura 89.**Escoger la representación de un decimal a una fracción

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 40)

En la figura 90, se les pide escoger cuál es el decimal de la fracción $\frac{8}{10}$, como se muestra a continuación.

| | | | |
|---|---|---|---|
| g) $\frac{8}{10}$, como decimal, se escribe: | 8,10 | 0,8 | 0,08 |

**Figura 90**. Escoger la representación de una fracción a un decimal

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 40)

Por lo tanto, en el texto analizado, no hay situaciones en que se requiera hacer uso de decimales, pero hay ejercicios en que se les pide que identifiquen su forma de fracción o de fracción a decimal.

**Principio de Nivel**

*4.a). El texto presenta tareas que exigen convertir un problema contextual en un problema matemático.*

En el texto se presentan problemas contextuales o situacionales, como se muestra en las figuras 51, 63, 67, 75, 79, 87, 91 entre otros, pues, según lo analizado, las situaciones presentadas en el texto son adecuadas. Son situaciones que un niño de sexto grado podría imaginarse en el contexto, a excepción de cuando se plantea una situación de un terreno hexagonal, pues no es una figura muy comentada en la vida cotidiana, ya que en primaria no llevan cursos de Geometría como lo hacen en el colegio.

*4.b). En el texto, se recurre al empleo de modelos, esquemas, descripciones para situaciones similares, pero siempre referidas a una situación particular.*

Si se recurre a modelos y esquemas porque se usan figuras geométricas, tales como rectángulos en la figura 65 y 80, y hexágonos, como se muestra en la figura 59, 71, 72 y 73 .Por medio de estas figuras geométricas, se explican las operaciones de multiplicación y división de fracciones.

La situación de la figura 71 y 73 de un hexágono que está dividido en tres partes iguales, representa cada uno, como un saco de papa, aunque a simple vista la representación parece un cubo.

*4. c). En el texto, se presentan espacios en los que se reflexiona sobre los aspectos en común de diferentes situaciones con intención de generalizar.*

Se han encontrado evidencias en el ejemplo de la figura 91, puesto que, en este ejercicio, se habla de diferentes situaciones desde el punto de la EMR, como pelotas y zapatillas, así tal cual se muestra en la siguiente situación.

**Los ahorros de Alfredo**

Alfredo gastó la mitad de sus ahorros en un par de zapatillas y un tercio de lo que le quedaba en una pelota de fútbol. Si aún le quedan S/. 80, ¿cuánto tenía ahorrado?

**Figura 91.** Los ahorros de Alfredo

**Fuente:** Montagnoli, et al. (2012, p. 54)

*4.d). En el texto, no se propicia el empleo de notaciones formales para el tema de estudio.*

En el texto, no se ha encontrado evidencia de formalización, es decir, no hay demostraciones que sustenten el tema de fracciones y los fenómenos asociados a ellos.

En general, según los niveles se ha podido percibir que el texto analizado, están presentes los niveles situacional, referencial, general y el nivel formal no logra desarrollar el texto. También en la investigación que hizo Da Silva (2005) no formaliza matemáticamente, puesto que en cada fenómeno asociada a la fracción, lo explica mediante tareas.

## CONCLUSIONES

Con relación al primer objetivo específico, arribamos a las siguientes conclusiones:

En cuanto al marco teórico:

Con respecto a la investigación de Da Silva (2005),

- Se sugiere que debería haber más tareas que permitan identificar cada caso o generalizar cada fenómeno, de modo que se pueda hacer un análisis adecuado.
- Según las ideas iniciales dadas por Kieren en 1976, en asociar los fenómenos con las operaciones como suma, multiplicación y división, hemos encontrado el fenómeno medida según Kieren en 1976 lo asocia con la suma mientras que la tarea que resuelve la investigadora, lo relaciona con el fenómeno parte todo.

Con respecto a la investigación de Streefland (1991)

- Se sugiere relacionar cada fenómeno de las fracciones con las operaciones elementales.
- Se asume que usa el máximo común múltiplo, para resolver problemas que involucran las operaciones elementales en fracciones heterogéneas, pero, no detalla los procedimientos que va a llevar a cabo para resolverla.
- Respecto al desarrollo de la división, no es tan claro en su desarrollo.

Con respecto a la EMR

- Según las fuentes de esta teoría que fueron investigadas en nuestro trabajo, se ha tenido las ideas necesarias para analizar texto.

Por lo tanto, los trabajos revisados de las investigaciones nos han permitido relacionar el término fenomenología asociada a la fracción. Además, consideramos que asociar los fenómenos con las operaciones como lo propuso Kieren en 1976, no coincide con lo que está escrito en Da Silva (2005).

Con relación al segundo objetivo específico, arribamos a las siguientes conclusiones:

- Los criterios proporcionados en la tabla1 fueron elaborados sobre la base del trabajo de Santamaría (2013), permitiéndonos analizar el tratamiento que brinda el texto a las fracciones, desde la perspectiva de la EMR.

Con relación al tercer objetivo específico, se presentan las siguientes conclusiones:

- En el texto, se evidencia la presencia de todos los fenómenos de la fracción. Sin embargo, se requieren más tareas asociadas a cada caso, según los considerados en Da Silva (2005), además de organizar las actividades en torno a los fenómenos.
- En el texto, se evidencian situaciones de la vida cotidiana que se desarrollan en el campo, la ciudad o en el colegio, como se muestra en cada ejemplo analizado.
- Se ha encontrado que en el texto que analizamos, la suma de fracciones heterogéneas coincide con las sugerencias que proponen los investigadores Streefland (1991).
- El texto analizado, no muestra el uso de la resta como lo desarrolla Streefland (1991) de homogenizar primero para después resolverlo.
- En el texto analizado, la operación multiplicación coincide con lo propuesto por Da Silva (2005) y diferente como lo desarrolla Streefland (1991).
- En el texto analizado, para la división, el texto no necesariamente coincide con lo propuesto por Da Silva (2005), puesto que la investigadora da por tipo, pero, en un sentido particular, es decir presentando tareas como dividir una fracción entre un número natural y un número natural entre una fracción no se encuentra presente para este tipo.
- Según la relación de las operaciones suma, multiplicación y división que asocia a los fenómenos de fracción, según los estudios dados por Kieren en 1976, la suma está relacionado con el fenómeno medida, sin embargo en la investigación de Da Silva (2005) lo relaciona con el fenómeno parte todo.
- No se ha encontrado situaciones que aplique la operación resta entre fracciones.

**Recomendaciones para el texto**

- Se sugiere implementar situaciones en las que se empleen la resta de fracciones.
- Se sugiere presentar y formalizar la suma de fracciones.
- Se sugiere utilizar figuras que sean sencillas para poder realizar una repartición equitativa, no como se presenta con el hexágono y cubo que, solo funcionan bien para algunos casos particulares, pero resultan complejos al realizar ejercicios de repartición equitativa.

**Se deja como temas abiertos para futuras investigaciones el identificar los siguientes fenómenos:**

- Los fenómenos asociados a la noción de porcentaje y su relación con los de la fracción, así como un análisis de textos didácticos adaptando los criterios definidos en este trabajo.
- Identificar los fenómenos asociados a otros sistemas numéricos, tales como los números racionales.

## REFERENCIAS


Bass J. (2013). *Fraction proficiency and thenumberline*. Tesis de maestría de la Universidad Louisiana State University. Recuperado de http://etd.lsu.edu/docs/available/etd-07022013-090004/unrestricted/bassthesisETD.pdf)

Bressan A. y Gallego M. (2011). La Educación Matemática Realista bases teóricas. *Grupo Patagónico en Didáctica de la matemática*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm

Bressan A y Yaksich A. (2001).La Enseñanza de las Fracciones en el Segundo Ciclo de la EGB.

Bressan A., Zolkower B. y Gallego M. (2004). I Parte: La educación matemática realista. *Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm

Carrillo M. (2012). *Análisis de la Organización Matemática Relacionada a las Concepciones de Fracción que se Presenta en el Texto Escolar Matemática Quinto Grado de Educación Primaria.* Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1547/CARRILLO_YALAN_MILAGROS_ORGANIZACION_MATEMATICA.pdf?sequence=1

Castaño N. (2014). *Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria*. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales Colombia. Recuperado de http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/861/1/Tesis%20N%C3%A9stor%20Mario%20Casta%C3%B1o.pdf

Castro E.(2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros*. (Tesis de doctorado, Universidad de Granada). Recuperado de file:///D:/Users/GIS/Downloads/Tesis_Elena%20Castro%20(2).pdf

Charalambous Y. y Pitta-Pantazi D. (2005). Revisiting a Theoretical Model on Fractions: Implications for Teaching and research. *Melbourne: PME, (2), pp. 233*- 240. Recuperado de http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2CharalambousEtAl.pdf

Cid E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Departamento de Matemáticas Universidad de Zaragoza*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Da Silva M. (2005). *Investigando saberes de profesores do ensino fundamental com enfoque en números fraccionarios para a quinta serie*. Tesis de doctorado en Educación Matemática. PUC/SP São Paulo, Brasil.

De León H. y Fuenlabrada I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa v (1), pp. 268-282.* Recuperado de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/1998/76347_2.pdf

Educación. Provincia de Buenos Aires (2001). *Módulo 2 Serie Aportes al Proyecto Curricular Institucional*. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/

Elguero C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario Sociocultural del trabajo*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/elguero_2009.pdf

Encinas J. (2009). *Un ensayo de la escuela nueva*. 2ª ed. Facultada de ciencias de la educación.

Flores R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela de secundaria*. (Tesis de maestría, Instituto politécnico Nacional México D.F). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/flores_2010.pdf

Fredenthal H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Mexico Cinvestav.*

Godino J. (2004). Didáctica de las Matemáticas para Maestros. [GAMI,]. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gravemeijer K. y Teruel J. (2000). Hans Freudenthal, un matemático en Didáctica y teoría curricular (Trad. Saggesse N., Gallego F. y Bressan A.). *J. Currículo Studies.(32), Nº. 6, 777- 796.* Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/hansfreudenthal.pdf

Guillén G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática.16(3), 103-125. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40516306.pdf

H. Wu (2014). Teaching Fractions According to the Common Core Standards. Recuperado de https://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions_1.pdf

López J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fracción en el grado séptimo considerando la relación parte todo*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/5922/1/8410009.2012.pdf.

Luelmo M. (2004). Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con la Fracción como Razón y como Operador Multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle,(6), pp. 83-102*. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/342/34202206.pdf

Machado A. y Rico L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX: Fenomenología y representaciones. Electronic Journal of Research in Educational Psychology. ISSN. 1696-2095. No 17, Vol 7 (1) 2009, pp: 537-554. Recuperado de http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/new/ContadorArticulo.php?298

Matute K. (2010). *Concepciones Matemáticas en los estudiantes de séptimo grado de la escuela normal mixta "Pedro Nufio" acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones*. Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Recuperado de http://www.google.com.pe/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CCEQFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.cervantesvirtual.com%2Fobra%2Fconcepciones-matematicas-en-los-estudiantes-de-septimo-grado-de-la-escuela-normal-mixta-pedro-nufio-acerca-de-las-fracciones-y-sus-diferentes-interpretaciones%2Fd62813ac-b3e1-11e1-b1fb-00163ebf5e63.pdf&ei=6DGPVdvRPImrgwSlhJ-oBA&usg=AFQjCNFjXYOCQjMT1MevSS82QacOSnE5yw&bvm=bv.96783405,d.eXY

Montagnoli I, Sullca E. y Val E. (2012). Matemática 6. Lima – Perú. El Nocedal S.A.C.

OCDE (2012). Resultados de PISA 2012 en Foco Lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf

Peña P. (2011). *Significación del Algoritmo para Operar Aditivamente con Fracciones en un Contexto Escolar*. Tesis de maestría Instituto Politécnico Nacional centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, México -DF.

Perera P. y Valdemoros M. (2008). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Cielo, Educación matemática 21(1).* Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000100003

Perú (2014). Mapa de Progreso de la competencia actúa y Piensa Matemáticamente en Situaciones de Cantidad. Lima.

Perú (2015a). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular.* Lima. Recuperado de http://lasrutasdelaprendizaje.blogspot.pe/2015/04/diseno-curricular-nacional-2015-dcn-2015.html

Perú (2015b). *Rutas de aprendizaje.* Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

Puig L. (1997). Análisis fenomenológico. *Barcelona: Horsori / ICE. ISB 84-85840-65-8*. (pp.61 – 94). Recuperado de http://www.uv.es/puigl/fd.pdf

Quispe (2011). *La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima- Perú. Recuperado de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/Tesis-Wenceslao.pdf

Ruiz C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED.* Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf

Santamaría F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda.* Tesis de maestría, Universidad Nacional del Comahue. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/

Schoenfeld A. (2000). Propósito y método de investigación en educación matemática. *Purposes methods of research in mathematics education. 47(6).*

Sepúlveda O. (2013). La fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas, de Hans Freudenthal. *Congreso de Investigación y Pedagogía. N02 - ISSN 2256*. Recuperado de http://tics.uptc.edu.co/eventos/index.php/cong_inv_pedagogia/con_inv_pedag/paper/viewFile/297/295

Serrado A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal, 4(2), 59-81*. Recuperado de http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ4(2)_serrado_etal.pdf

Streefland L. (1991). Las fracciones: un enfoque realista. *Grupo Patagónico de la Didáctica de la Matemática (Trad. Da Valle N.).* Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones.htm

Valdemoros E. y Ruiz F. (2007). El caso de Luciana para el estudio de las fracciones en la escuela de adulto. *Latinoamericana de la Investigación Matemática Educativa11 (1): 127- 15*

Van den Heuvel, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands.* Recuperado de http://dme.colorado.edu/fius/rme4proc.htm

Van den Heuvel, M. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: an Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. *Kluwer Academic Publishers*, 54, 9–35. Recuperado de http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2003_heuvel_panhuizen_model.pdf