PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA ASOCIADO A LAS SUCESIONES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR DEL PERÚ

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

Elvis Bustamante Ramos

Dirigida por

Dr. Francisco Ugarte Guerra

San Miguel, 2017

DEDICATORIA

A Dios, por haberme dado salud y sabiduría para alcanzar mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mis padres, por apoyarme en cada decisión y enseñarme con su ejemplo que con mucho esfuerzo se consigue todo en esta vida, pero más que nada, por su amor.

A mi esposa, Magaly Campos, por su apoyo, por sus ánimos a seguir superándome y por enseñarme a mirar la vida con entusiasmo.

AGRADECIMIENTO

A mi asesor el Dr. Francisco Ugarte Guerra, por su confianza, infinita paciencia y por sus aportes que fueron importante para culminar nuestra investigación.

A la Dra. Cecilia Gaita, por sus sugerencias sobre el trabajo, información pertinente y por brindarme su experiencia investigadora.

A la Dra. Jesús Flores, por brindarme conocimiento, amistad y ayuda para hacer posible este proyecto.

Finalmente agradezco a los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP por la contribución en mi formación; en especial a la Dra. Katia Vigo Ingar.

RESUMEN

Presentamos el siguiente trabajo, el cual utiliza como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El objetivo es propone un modelo epistemológico de referencia asociado a las sucesiones como instrumento de modelización matemática en la educación básica regular de nuestro país, a partir de un proceso de modelización; en particular, la propuesta en esta investigación se realizará por medio de una modelización algebraica. Esta propuesta surge por el interés de articular las organizaciones matemáticas que se encuentran asociadas a la sucesión presentes durante la educación básica regular.

Palabras clave: Transposición didáctica, modelo epistemológico de referencia, modelización algebraica, sucesión.

ABSTRACT

We present the following work, which uses as theoretical framework the Anthropological Theory of the Didactic (TAD). The objective is to propose a reference epistemological model associated with successions as an instrument of mathematical modeling in the regular basic education of our country, from a modeling process; in particular, the one proposed in this research will be carried out by means of an algebraic modeling. This proposal arises from the interest of articulating the mathematical organizations that are associated with the succession present during regular basic education.

Key words: Didactic transposition, epistemological reference model, algebraic modeling, succession.

TABLA DE FIGURAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la revisión de los textos oficiales de la Educación Básica Regular, observamos una desarticulación de los conocimientos relacionado a las sucesiones, es por ello que surge el interés de identificar un modelo que articule esos conocimientos relacionados al objeto matemático sucesión durante la Educación Básica Regular del Perú.

Esta investigación utiliza algunos aspectos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), pues nos ofrece herramientas para describir y estructurar el conocimiento matemático que la Educación Básica Regular lo interpreta como sucesión. Además, existe un interés en hacer explícito los Modelos Epistemológicos de Referencias (MER) en relación a la concepción de un conocimiento como instrumento de modelización, desde el ámbito de la TAD.

También, la TAD como método nos ofrece dos aspectos: el análisis ecológico y praxeológico, además, la TAD brindará pasos para la construcción del MER asociado a las sucesiones como un instrumento de modelización en la EBR, cuya construcción es el objetivo de la presente tesis.

En el primer capítulo se presenta la problemática de nuestra investigación, el cual plantea la construcción de un MER, además por medio de las investigaciones realizadas en la Didáctica de la Matemática relacionadas a la modelización algebraicas o proceso de modelización ponen en manifiesto la necesidad y la importancia de la construcción de MER. Además, en este primer capítulo se presentan los objetivos que se pretenden alcanzar al finalizar la presente investigación.

El segundo capítulo muestra la base teórica, que será de utilidad para explicar el proceso de modelización e identificar una organización matemática algebrizada. Además de ello, se presenta el método que se va utilizar en nuestra investigación para alcanzar el objetivo principal, el cual es la construcción de un MER, desde el ámbito de la TAD.

En el tercer capítulo, se realiza un recorrido por la historia para explorar los problemas que presenta la noción de sucesión para establecer la evolución de los saberes asociados a la sucesión a lo largo de los siglos. Además, se realiza un estudio del sentido atribuido a la palabra sucesión en la EBR, por medio de los documentos oficiales como el DCN (2009) y los libros de textos oficiales del 2012.

En el cuarto capítulo se muestra una construcción racional de la Organización Matemática asociada a la sucesión, es decir, se hace explícito la propuesta de un Modelo Epistemológico de Referencia asociado a las sucesiones como instrumento de modelización en la EBR de nuestro país.

En el último capítulo se presenta algunas consideraciones finales, así como algunas recomendaciones para futuras investigaciones en torno a las sucesiones en la EBR, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este primer capítulo, se presenta el problema de investigación abordado en este trabajo, así como los antecedentes que evidencian la relevancia y pertinencia del presente trabajo de investigación para la didáctica de la matemática. Además, en este parte, se formula la pregunta de investigación a resolver, así como lo objetivos general y específicos que la investigación pretende alcanzar.

1.1 Presentación de la problemática

Esta investigación plantea la construcción de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) asociado a las sucesiones, el cual debe entenderse como un proceso de modelización matemática asociado a las sucesiones. La elaboración de este MER se basa en el análisis epistemológico y praxeológico que se hizo al Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) y a algunos textos de Educación Básica Regular (EBR), todos ellos reconocidos como documentos oficiales del Ministerio de Educación de nuestro país.

A continuación, se presentarán los antecedentes del Modelo Epistemológico de Referencia (MER) asociado a las sucesiones.

1.2 Antecedentes

En la investigación de Gascón (2011), se describen las tres características fundamentales que presentan los problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas cuando son enunciados o propuestos en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Según el autor, estas se corresponden con determinadas dimensiones de un problema didáctico; es, por ello, que en su trabajo las llama "las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico", las cuales son la epistemológica, la económica y la ecológica.

Asimismo, el autor menciona que la dimensión base o fundamental de un problema didáctico es la epistemológica, ya que condiciona a las demás características. Según Gascón, "[la] *dimensión epistemológica* de un problema didáctico es una dimensión nuclear, puesto que, como veremos, impregna y condiciona fuertemente al resto de las dimensiones" (Gascón, 2011, p. 210). Es en esta dimensión, la epistemológica, que se realiza el esfuerzo por explicitar el MER, es decir, en definir una organización de las praxeologías asociada a un conocimiento matemático. Es así que, en esta dimensión, aparecen preguntas relacionadas a la forma de describir e interpretar los conocimientos matemáticos, como "¿Qué es el conocimiento matemático? […] ¿Cómo se interpreta y cómo se describe el conocimiento matemático? ¿Cuáles son sus componentes y cómo se estructuran?" (Gascón, 2011, p. 210).

Siguiendo la misma idea, Barquero, Bosch y Gascón (2013) realizan un trabajo sobre la base de la investigación de Gascón (2011) aplicado en los problemas didácticos de la modelización matemática, los cuales son un caso particular de los problemas de investigación en la Didáctica de las Matemáticas. Los autores muestran preguntas relacionadas a la forma de describir e interpretar los conocimientos matemáticos, pero enfocadas al caso particular del problema de la Modelización Matemática (MM), como se indica en esta cita: "¿Cómo puede describirse la MM mediante un *modelo epistemológico de referencia* (MER) compatible con el modelo epistemológico general de la actividad matemática que propone la TAD?" (Barquero, Bosch y Gascón, 2013, p. 6).

Estas dos investigaciones han permitido que esta tesis se ubique como un problema de investigación dentro de la Didáctica de las Matemáticas y acredite la importancia de la dimensión epistemológica de describir e interpretar sucesiones por medio de un MER asociado a la sucesión. Las preguntas que aparecen en esta dimensión están relacionadas a la forma de describir e interpretar los conocimientos matemáticos, como, por ejemplo, "¿Qué es el conocimiento matemático? Esto es, ¿cómo se interpreta y cómo se describe el conocimiento matemático? ¿Cuáles son sus componentes y cómo se estructuran?" (Gascón, 2011, p. 210).

Otra investigación importante es la de Chevallard (1994), quien presenta un análisis estructurado de lo qué es el conocimiento matemático, así como una exposición de los sentidos que ha adquirido la palabra álgebra por parte de los docentes y los programas oficiales en Francia. Además, su trabajo plantea una diferencia importante entre lo aritmético y lo algebraico, la cual apunta al manejo de la ecuación en esta última, como lo señala en la siguiente cita:

> […] diferencia impactante: en el método aritmético, no se "manipula" la ecuación, no se la toca (no es necesario escribirla: el enunciado del problema otorga en general un hilo conductor claro de los cálculos numéricos). Contrariamente, en el método algebraico, la

manipulación pertinente (y matemáticamente válida) de la ecuación es la clave de la solución del problema (p. 187, traducción propia).

Esta manera de emplear la palabra "álgebra" ha traído consecuencias didácticas, como, por ejemplo, el "perder de vista el hecho que, […], el álgebra elemental es, matemáticamente, un auténtico *instrumento de creación de conceptos*" (p. 203, traducción propia).

Este estudio de Chevallard (1994) servirá como guía de análisis para este trabajo en el que se realizará un breve estudio de la sucesión en el currículo del Perú, así como para identificar el origen, el estatus y la razón de ser de las sucesiones. Por ello, en esta investigación, se plantea un panorama acotado de la evolución de la sucesión como *saber a enseñar* a *saber enseñado* en la educación peruana.

Asimismo, existen otros trabajos significativos cuyo foco de investigación están en la descripción e identificación de un conocimiento matemático específico, como es el álgebra. Uno de estos trabajos es el de Gascón (1994), el cual plantea, desde la TAD, al álgebra como aritmética generalizada, la cual se identifica por medio del simbolismo algebraico que amplía y generaliza el lenguaje aritmético. En ese mismo trabajo, el autor señala que existe un modelo epistemológico dominante en la institución escolar, el cual identifica el álgebra como una obra que prolonga y generaliza unilateralmente la aritmética a través de una aritmética generalizada, como señala en la siguiente cita:

> Su característica principal es la *identificación del álgebra elemental a un modelo aritmético generalizado* que se centra en la "simbología algebraica" y se opone a un supuesto "lenguaje aritmético" que el primero se supone que lo amplia y lo generaliza. Cabe señalar, además, que muchas investigaciones tanto en la historia del álgebra[3] como en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental[4] en gran medida supone, más o menos explícita, esta característica del álgebra elemental. (p. 3, traducción propia).

Este modelo de álgebra escolar, como aritmética generalizada, también se menciona en Bolea (2002), quien realizó un estudio para identificar como se concebía el álgebra escolar en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España.[1] Luego que el autor revisara el currículo y los textos oficiales del país ibérico, concluyó que el modelo predominante del álgebra escolar en España era el de la aritmética generalizada. Además, en su investigación, resalta

---

[1] Ya antes Chevallard (1994) había llevado un análisis de la concepción del Álgebra Escolar en el sistema educativo francés.

algunas características del Álgebra Escolar, como aquella que se construye en un contexto numérico, y se presenta aislada y vinculada a la aritmética.

Es así que estos dos trabajos, el de Gascón (1994) y el de Bolea (2002), serán de utilidad para esta investigación en cuanto a plantear las características que identifican a la sucesión en la EBR, ya que los trabajos mencionados señalan una serie de características del álgebra como aritmética generalizada y como un instrumento de modelización.

En cuanto al MER, un aporte importante es el de Sierra (2006), quien señala que para poder construir el MER se puede realizar en forma de una sucesión de praxeologías, en donde cada praxeología surge como una ampliación de la praxeología previa ante la necesidad de dar respuesta a las cuestiones que se plantean. Además, el autor indica que para realizar dicho proceso se tomará en cuenta un sistema que puede ser intramatemático o extramatemático, el cual será asociado a una organización matemática que, luego, llevará a cabo la modelización algebraica y se obtendrá una organización matemática algebrizada. Esta última, en el sentido de Bolea, se entiende no solo como una nueva praxeología, más amplia y completa, sino, además, como un nuevo modelo matemático de esta. Es por ello, la importancia del trabajo de Sierra (2006) para esta investigación, ya que proporciona un ejemplo de realización de un MER asociado al sistema de numeración.

En esta misma línea, Gascón (2011) indica que es indispensable la elaboración de un Modelo Epistemológico Referencial (MER) entendido el álgebra como actividad de modelización para que sea la base del análisis de los fenómenos didácticos.

Estos fenómenos didácticos han sido trabajados en el texto de Ruiz Munzón, Bosch y Gascón (2010), quienes indicaron que una de las consecuencias del álgebra escolar como aritmética generalizada es la ausencia del álgebra como instrumento de modelización en las matemáticas de la enseñanza secundaria. Asimismo, los autores muestran conexiones entre el fenómeno de la incompletitud y el fenómeno de la desarticulación de las de las praxeologías en la matemática escolar.

En consecuencia, se plantea una necesidad de elaborar un MER para analizar o describir un conocimiento matemático y los fenómenos didácticos relativos a la enseñanza de ese conocimiento matemático, como lo realizaron Chevallard (1994) y Bolea (2002) para el caso del álgebra. Por este motivo, se tomará como base, para esta investigación, estos dos trabajos mencionados anteriormente con el objetivo de hacer una propuesta de un MER relacionado a la sucesión en el contexto de la EBR, desde la perspectiva de la TAD, que concibe a la sucesión como un instrumento de la actividad matemática.

A continuación, se presentan los argumentos necesarios para la realización de la investigación.

1.3 Justificación

En esta sección, se describirán los motivos por los cuales es importante realizar un estudio sobre un MER asociado a sucesiones, además de una caracterización de dicho modelo. Para ello, se toma en cuenta las pesquisas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas que exponen la importancia de un MER, el Diseño Curricular Nacional del Perú (2009) y los textos oficiales en la EBR del Perú.

En primer lugar, la construcción de un MER para identificar un conocimiento matemático es un instrumento sumamente importante. Por ejemplo, para identificar cómo se entiende un objeto matemático en una institución, lo que se denomina el Modelo Epistemológico Dominante, el cual es necesario explicitarlo y usarlo como un modelo de referencia para el análisis de otros modelos, es realmente importante la elaboración de un MER, como lo manifiesta Gascón (2011), y Barquero, Bosch y Gascón (2013) en sus textos, respectivamente:

> Como dice Çhevallard, el estudio de la transposición didáctica, y añadimos, el análisis de los MER que este estudio requiere y permite construir, son los instrumentos que han permitido a la Didáctica de las Matemáticas romper con la didáctica clásica y construir su propio objeto de estudio, integrando definitivamente al saber matemático. (Gascón, 2011, p. 212).
>
> El MER es asimismo imprescindible para estudiar el saber matemático antes de que se transforme para ser enseñado. Sólo así podremos dar cuenta no sólo de la forma de interpretar el álgebra, los sistemas de numeración, la proporcionalidad, la geometría, los límites de funciones, la topología, los números reales o la MM dentro del sistema de enseñanza, sino también del porqué es posible encontrar en dicho sistema unos objetos matemáticos y no otros. En cualquier caso, es importante que el MER que se utiliza en una investigación didáctica sea explícito (Barquero, Bosch y Gascón, 2013, p. 5).

Además, Gascón (2014) manifiesta que el Modelo Epistemológico de Referencia es un instrumento de emancipación de la didáctica de las matemáticas respecto a los otros modelos epistemológicos que puedan existir en la institución, ya que permite discutir la manera como la institución interpreta el saber matemático.

Siguiendo con esta idea, Ruíz Munzón, Bosch y Gascón (2015) indican que el Modelo Epistemológico de Referencia que se construye a partir de las etapas del proceso de transposición didáctica es un instrumento importante para poder así independizarse de las ideas que tienen las instituciones que forman parte del objeto de estudio, es decir, el MER que se construye a partir de las etapas del proceso de transposición didáctica, las cuales permiten un punto de observación exterior respecto a las praxeologías que se encuentran en la institución. Además, esta modelización resulta ser un instrumento necesario para el estudio de un gran campo de los problemas descubiertos a partir del modelo de la aritmética generalizada, como indica Gascón (1994). Este mismo autor indica que el objetivo principal de desarrollar el modelo específico es proporcionar una explicación más completa a algunos fenómenos educativos. A esto se le puede agregar lo dicho por García y Sierra (2015), quienes señalan que la importancia de la construcción de un MER radica en la posibilidad de identificar fenómenos:

> El uso del MER construido, nos ha permitido identificar cómo se realiza una introducción temprana, directa y acrítica de la aplicación medida (el conteo) que (1) impide a los niños de Educación Infantil la construcción de la magnitud discreta y (2) les oculta una de las razones de ser del número, al prescindir de las situaciones de comunicación (tipo π_3) y convertir las tareas de medida de conjuntos en un fin en sí mismo. (García y Sierra, 2015, p. 306).

Por ello, el Modelo Epistemológico de Referencia representa un instrumento importante para analizar las organizaciones matemáticas y didácticas, además de proponer una organización alternativa o referencial, como lo señala Navarro (2007).

Además, el MER es pertinente a los objetos analizados, ya que cuando se revisa el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú (2009), se encuentra el tema de sucesiones tanto en primaria, desde el primer año hasta el sexto año, como en secundaria, desde el primer año hasta el cuarto año.

Asimismo, en el Diseño Curricular Nacional 2009, se observa que las sucesiones han sido ubicadas dentro del componente: número, relaciones y funciones, el cual plantea que los estudiantes utilicen varias formas de representar patrones, como se muestra en la siguiente cita: “Es necesario que los estudiantes internalicen, comprendan y utilicen varias formas de representar patrones, relaciones y funciones, de manera real” (DCN, 2009, p. 317). De lo dicho, se desprende la importancia que tiene la sucesión en EBR en lo que se refiere a encontrar representaciones del patrón, que es la sucesión.

Además, en la revisión de los textos oficiales del Perú, se encuentra la sucesión en todos los textos oficiales de la educación Primaria y un texto oficial de la educación Secundaria. Esto evidencia la importancia que se le da a la enseñanza de la sucesión en las aulas, ya que los textos forman una de las bases sobre las cuales se apoya la acción docente a cualquier nivel de la educación, y con frecuencia se convierte en una referencia exclusiva del saber científico, según Villela (2001) (citado en Vivas, 2010). Además, como lo indica Ortiz de Haro (1999), los libros son el segundo nivel de transposición didáctica (citado en Cobo Merino y Batanero, 2004, p. 6).

Adicionalmente, realizar una revisión de texto es importante para el estudio de los procesos de enseñanza, por ejemplo, identificar un significado sesgado, el cual puede llegar a transmitirse a los alumnos en una forma equivocada, como indica Vivas (2010). Además, Villela (2001) indica “el libro de texto ejerce diferentes roles: puede ser mirado como un objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como una recopilación de ejercicios y problemas por resolver” (p. 168).

Por ello, la importancia de la construcción de un MER asociado a la sucesión se justifica en la existencia de investigaciones actuales que mencionan la importancia de la construcción de un MER y los documentos curriculares oficiales (Diseño Curricular Nacional 2009 y de los textos oficiales) que refleja la presencia de la sucesión en la EBR del Perú. Además, para que la propuesta de nuestro modelo sea coherente al aspecto didáctico que se presenta en el aula, es decir, la acción docente, se tendrá presente la revisión de los textos oficiales.

Por los motivos expuestos anteriormente, se considera pertinente elaborar una propuesta de un modelo que organice praxeologías asociadas a sucesiones y presentar sus características de dicho modelo.

1.4 Objetivos de la investigación

El objetivo general:

Construir un Modelo Epistemológico de Referencia asociado a las sucesiones en la EBR por medio de un proceso de modelización.

Los objetivos específicos:

- Analizar los lineamientos curriculares propuestos en el Diseño Curricular Nacional del Perú (2009) respecto al tratamiento de la sucesión.
- Identificar las praxeologías u organizaciones matemáticas asociadas a la sucesión en los libros de textos oficiales.
- Analizar si el MER propuesto cumple los rasgos de algebrización que debe tener una organización matemática para ser considerada una organización matemática algebrizada.

1.5 Pregunta de investigación

¿Qué características debería tener un Modelo Epistemológico de Referencia asociadas a sucesiones en la Educación Básica Regular del Perú?

CAPÍTULO II: ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se presenta la base teórica que subyace en nuestro análisis, así como la metodología y el método a utilizar en nuestra investigación. Entre ellas, se destaca la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (1999), pues sentará las bases del marco teórico y el método de investigación que será llevado a cabo en nuestro trabajo de investigación.

Esta investigación busca fundamentalmente la construcción de un MER mediante un proceso de modelización matemática y, luego, identificar las características del MER asociado a la sucesión de la Educación Básica Regular de nuestro país.

Se utilizará la TAD, pues esta provee las herramientas necesarias para la elaboración del MER. Además, en el ámbito de la TAD, existen investigaciones acerca de la caracterización de un modelo; por ejemplo, el trabajo de Bolea (2002); asimismo, proporciona herramientas para estudiar el objeto matemático sucesiones en los libros de texto oficiales, como se puede observar en el trabajo de Chevallard (1999).

Además de ello, se elaborará un Modelo Epistemológico de Referencia y a través de este modelo, el didacta se pone en un punto de referencia para poder así, examinar las etapas de la transposición didáctica, lo cual es uno de los problemas básicos o centrales de la TAD, como lo manifiestan Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006):

> Dos problemas básicos pueden ser considerados como el origen de la TAD: Por una parte, la necesidad del investigador de emanciparse de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares; y por otro lado, el cuestionamiento de las condiciones y restricciones que afectan a todo proceso de difusión del conocimiento matemático en la escuela (p. 38).

A continuación, se presentarán algunas reflexiones teóricas sobre la TAD necesarias para la investigación.

Teoría antropológica de lo didáctico

La Teoría de la Transposición Didáctica, propuesta por Chevallard, sienta las bases para la Teoría Antropológico de lo Didáctico, como lo manifiestan Bosch et al. (2006): “La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) aparece con las primeras formulaciones de la Teoría de la Transposición Didáctica” (p. 38), donde “el conjunto de las transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada se denomina transposición didáctica de la obra en cuestión.” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 136). Además, Chevallard (1998) reconoce tres saberes: el saber sabio, son los saberes relacionadas a los investigadores y productores de conocimientos; saber a enseñar, son los contenidos de saberes designados como aquellos a enseñar; y saber enseñado, son los contenidos trabajado en el aula por el profesor.

Por otro lado, Chevallard (1999) indica que la TAD “sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio de las matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales” (p.1), y, por eso, es que se habla de teoría “antropológica”.

2.1 Algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La idea base de la TAD es que por medio de la praxeología se puede describir toda actividad humana, si es realizada de forma regular, como indica Chevallard (1999): “se admite en efecto que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único*, que se resume aquí con la palabra de *praxeología”* (Chevallard, 1999, p. 2).

Siguiendo la misma idea, Bosch et al. (2006) indican que la praxeología puede modelar toda actividad humana, que constituye una herramienta importante para modelizar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más, en el ámbito de la TAD.

Asimismo, la noción de praxeología, está en función a la praxis y logos, lo cual se entiende como:

- el bloque de la praxis o del “saber hacer” $\left[T / \tau\right]$, conformado por un tipo de problemas y técnicas para resolverlos.
- el bloque logos o del “saber” $[\theta / \Theta]$ en donde se ubica el discurso racional que describe, explica y justifica las técnicas del bloque de la praxis, llamado tecnología. Además, en el “saber”, se postula la tecnología de la tecnología, llamada teoría.

Tipos de tareas (T)

Una tarea es una acción sobre un objeto específico realizado por alguien, definidas por un verbo, llamado género de la tarea. Además, el tipo de tareas es la acción que agrupa tareas. En este sentido, Chevallard (1999) sostiene que:

> La noción de tarea o, mejor, de tipo de tareas, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo. (Chevallard, 1999, p. 2).

Considerando lo anterior, por ejemplo, “halle” es un género de tarea, “halle el término siguiente”, es un tipo de tarea (T) y la tarea es: “halle el término siguiente de la sucesión 2, 12, 22, 32”.

Técnica (τ)

Una técnica es el modo en resolver una tarea específica. El bloque practico-técnico de una praxeología engloba la tarea con la técnica. Como lo indica Chevallard (1999):

> Sea pues T un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a T requiere (en principio) una manera de realizar las tareas $t \in T$: a una determinada manera de hacer, τ, se le da aquí el nombre de técnica […]. Una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene pues, en principio, una técnica τ relativa a T. (Chevallard, 1999, p. 3).

Además, Chevallard (1999) aclara que no necesariamente una técnica τ resuelve todas las tareas t del un tipo de tareas T, o exista otra técnica que resuelva en mayor medida las tareas del tipo de tarea**s** T**,** entonces se dirá que una técnica tiene mayor alcance que otra.

Tecnología (θ)

La tecnología es un discurso racional, cuya primera función es justificar la técnica τ en forma racional, para la realización de un tipo de tareas T. Una segunda función de la tecnología es la de explicar la técnica para que sea inteligible. La última función de la tecnología es la producción de técnicas nuevas que sean más eficientes y adaptadas para la resolución de una tarea específica, como lo indica Chevallard (1999), en la siguiente cita:

> Se entiende por *tecnología*, y se indica generalmente por θ, un *discurso racional* –el *logos*- sobre la técnica -la *tekhnê*- τ, discurso cuyo primer objetivo es *justificar* “racionalmente” la técnica τ, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo *T*, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución. (p. 4).

Teoría (Θ)

Es el discurso racional sobre la tecnología, o sea, aquella que justifica y explica las afirmaciones de la tecnología. Es decir, la teoría respecto a la tecnología tiene el mismo papel que tiene la tecnología con la técnica. Chevallard (1999), al respecto, señala que:

> El discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación producción, el de la teoría, Θ, que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica. (Chevallard, 1999, p. 5).

En este trabajo, se usará estas herramientas que ofrece la TAD para la revisión de los documentos curriculares. Aún cuando en ellos, no estén presentes de manera explícita todas las componentes de los bloques praxis $\left[T / \tau\right]$ o logos $[\theta/\Theta]$, se considerará que existe una organización matemática o praxeología, como indica Chevallard (1999): "Una organización praxeológica, incluso puntual, no resulta en general completamente conforme a los cánones" (p.6).

En nuestra investigación se indicará que si en una organización matemática no aparecen algunos componentes de los bloques praxis o logos de la OM en forma clara, se indicará que esa OM no está bien delimitada. Este término de *no bien limitada* es usado por Bolea (2002) como se muestra en las siguientes citas:

- "El *álgebra escolar no* aparece explícitamente en la ESO, ni como una organización matemática bien delimitada" (Bolea, 2002, p. 108)
- "El *álgebra escolar* no aparece en la Enseñanza Secundaria ni como una praxeología matemática bien delimitada y estructurada con todos sus componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías)" (Bolea, 2002, p. 240).

Esto se apreciará en esta investigación cuando se realice la revisión de los textos oficiales para identificar la praxeología u organizaciones matemáticas asociados a la sucesión, donde no siempre se encuentra todos los componentes de la praxeología en forma explícita.

En esta misma línea de discusión, se puede apreciar una reconstrucción de OM cuando los componentes no están explícitos en un análisis de los textos (Gonzales(2014), Quentasi (2015) y Bolea (2002)), pero cuando se realiza un Modelo Epistemológico de Referencia se considera una construcción de una OM, pues, por ejemplo, se debe construir técnicas que no necesariamente estén presentes en la institución, como muestra en las siguientes citas de Bolea (2002): "cuando se decide no rechazar la problematización de la *tarea* y estudiar el problema con el objetivo de construir la *técnica* necesaria" (Bolea, 2002, p. 49) y "para construir organizaciones matemáticas regionales, que engloban, articulándolas entre sí, distintas organizaciones matemáticas locales y puntuales" (Bolea, 2002, p. 246).

Clases de praxeologías

Chevallard (1999) distingue diferentes tipos de praxeologías u organizaciones matemáticas según el grado de complejidad de sus componentes, las cuales las indicaremos a continuación en forma escueta:

- ***Una organización matemática puntual* (OMP):** es la praxeología relativa a un único tipo de tareas en la institución y lo denotaremos por $\left[T/\tau/\theta/\Theta\right]$.
- ***Una organización matemática local* (OML):** se obtiene por la integración de diversas organizaciones puntuales alrededor a una tecnología en la institución y lo denotaremos por $\left[T_i/\tau_i/\theta/\Theta\right]$.

  Los problemas que no se podían plantearse con propiedad en la OML se pueden plantear y resolver en una OML. Por tanto, estos nuevos problemas resulta ser la "razón de ser" que dan sentido a la OML.
- **Una organización matemática regional (OMR):** se obtienen por la integración de OML, formadas alrededor de una teoría Θ, denotada por $\left[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta\right]$.
- **Una organización matemática global (OMG)**: se obtiene por la integración de OMR a partir de la integración de diferentes teorías, se denotará como $\left[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k\right]$.

Estos diferentes tipos de organizaciones matemáticas nos ayudan para hacer referencia a la complejidad creciente en el proceso de construcción y articulación de nuestro Modelo Epistemológico de Referencia.

Por otro lado, Chevallard (1999) indica, que en general en una institución, rara veces las organizaciones matemáticas (OM) reconstruidas y estudiadas asociadas a un conocimiento no coinciden con la OM reconstruida en el aula; y esta, a su vez, raramente coincide con la OM aprendida. Por este motivo, la construcción de una OM de referencia nos ayuda para ubicanos desde un punto de vista exterior para el análisis de las diferentes praxeologías que se proponen, reconstruyen y aprenden.

Modelización Matemática

Es el proceso de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas cada vez más complejas que surge en el cuestionamiento de los problemas que se plantean y que son las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se desean reconstruir y articular, como indica Barquero (2009):

> La propuesta provisional de la TAD es la de *describir los procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente* (puntuales, locales, regionales) que necesariamente tienen que partir de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y para las que esta comunidad requiere respuestas. En realidad, estas cuestiones constituyen la "*razón de ser*" de la construcción de las organizaciones matemáticas que va ser necesario (re)construir. (p. 68).

Además, la culminación de este proceso que construye y articula organizaciones matemáticas o praxeologías, se considera como el Modelo Epistemológico de Referencia, como indica Sierra (2006):

> El MER puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías que corresponden a la elaboración de *respuestas parciales* a una cuestión problemática inicial. Cada praxeología de la sucesión surge como ampliación o desarrollo de la praxeología anterior, ante las limitaciones de ésta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean. (p. 47).

La modelización matemática se desarrolla, siguiendo a Chevallard y Gascón, en cuatro etapas o estadios fundamentales (Bolea, 2002):

- ***Problemática inicial***, formada por la situación problemática a analizar y las interrogantes iniciales que se plantean en el sistema.
- ***Construcción del modelo***, consiste en identificar y definir las variables vinculadas al problema inicial y sus relaciones entre ellas.
- ***Trabajo del modelo***, se fundamenta en el manejo de las relaciones, buscar e interpretar las nuevas relaciones para dar respuesta a alguna de las interrogantes planteadas inicialmente.
- ***Producción de problemas nuevos***, en base de la modelización del sistema inicial, se plantean nuevos problemas que antes no hubiese sido posible sin el modelo establecido.

Es importante considerar previamente un MER para restablecer lo que se entiende de *"estudiar sucesión"* en la EBR y para hacer visible los fenómenos didácticos relativos a la institución a lo que Bolea (2002) lo denomina *"proceso de algebrización"*, pues, en la didáctica de las matemáticas, no es suficiente con describir y caracterizar el modelo dominante en la EBR, es decir, no basta describir las tareas o las técnicas existentes en la institución sino, es necesario ponernos en un punto de observación para explicar o analizar el modelo dominante. Además, un caso particular de la modelización matemática es la modelización algebraica.

Organización Matemática Algebrizada

Desde la TAD, el álgebra escolar debe ser considerada como un instrumento de estudio de organizaciones previamente constituidas (OM inicial) que culmina en la modelización algebraica (OM modelo). El álgebra, más que una obra, es un *instrumento de reconstrucción de obras*. Se hablará, por ello, del *proceso de algebrización* de una obra o una praxología.

Así, daremos definiciones para una organización matemática algebrizada y para modelización algebraica:

Definición (1): Diremos que *una organización matemática está algebrizada* en la medida en que pueda ser considerada como un *modelo algebraico* de otra organización matemática que juega el papel de *sistema a modelizar*. (Bolea, 2002, p.84)

Entonces, la organización matemática es algebrizada si:

- El sistema de partida es una organización matemática, donde

> se considera que un *sistema modelizable matemáticamente* es cualquier ámbito de la realidad, sin ningún tipo de restricción, siempre que pueda ser aislado del resto – aunque sólo sea hipotéticamente. En esta noción de "sistema" se incluyen muy especialmente los *sistemas (intra)matemáticos*. (Baquero, 2009, p. 63)

- Se realiza una *modelización algebraica*, donde

  Definición (2): Diremos que una modelización matemática, de una obra matemática que juega el papel de sistema, es una *modelización algebraica* en la medida en que *modeliza íntegramente todos los componentes* del sistema y, en particular, en la

> medida en que *modeliza materialmente las técnicas* matemáticas de dicha obra matemática. (Bolea, 2002, p.85)

En consecuencia, el estudio para saber que una OM es algebrizada se traslada a la caracterización de las modelizaciones algebraicas, las cuales permiten modelizar todos los componentes de una obra, en particular las técnicas. Bolea (2002) señala dos rasgos característicos de las modelizaciones algebraicas:

> RMA1. *Modelizan explícita y materialmente las técnicas matemáticas* que forman parte de la organización matemática que juega el papel de *sistema* a modelizar. Esta condición comporta que, una vez modelizadas algebraicamente, *las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos*, lo que posibilita y hasta provoca el rápido desarrollo de las mismas.
>
> RMA2. *Modelizan íntegramente todos los componentes de la organización matemática* que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichos componentes. Veremos que esta modelización global permite, en muchos casos, considerar que el *modelo algebraico*, como nueva organización matemática, *constituye una extensión de la organización-sistema* inicial (Bolea, 2002, p. 86).

En nuestro trabajo, se usará estos rasgos para identificar una modelización algebraica, pues el objetivo del trabajo es construir un MER asociado a la sucesión mediante un proceso de modelización en el sentido de Bolea (2002).

2.2 Metodología y Método de Investigación

Metodología

En toda investigación la metodología se entiende como el camino que permite alcanzar los objetivos propuestos; es, así, como lo indica Martínez (2006), "la metodología es, por definición, el camino a seguir para alcanzar conocimientos seguros y confiables" (p. 13).

En esta investigación, se considerará a la definición dada por Hernández, Fernández y Baptista (2010) como la definición y características que más se adaptan con este trabajo, donde se indica que la metodología cualitativa "Utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación." (p. 7).

En tal sentido, se señala que esta investigación es cualitativa, en cuanto esta utiliza los documentos curriculares oficiales de donde se recolecta las tareas, que no son datos numéricos, para la propuesta del MER, es decir, de una praxeología asociada a la sucesión en la EBR.

Además, los autores señalan características de la metodología cualitativa, las cuales son:

- El proceso de indagación cualitativa es flexible y se mueve entre los eventos y su interpretación, entre las respuestas y el desarrollo de la teoría. Su propósito consiste en "reconstruir" la realidad tal y como la observan los actores de un sistema social previamente definido. A menudo se llama "holístico", porque se precia de considerar el "todo", sin reducirlo al estudio de sus partes.
- Las indagaciones cualitativas no pretenden generalizar de manera probabilística los resultados a poblaciones más amplias. (p. 20).

Entonces, esta investigación es cualitativa por dos razones:

- Se considera la unidad de análisis: las praxeologías asociadas a sucesión en los documentos curriculares oficiales de la EBR del Perú, obtendremos conclusiones que no se puede generalizar a otro contexto.
- Se trata del estudio de un todo integrado que forma o constituye una unidad de análisis; en nuestro trabajo el todo integrado se refiere al análisis de la presencia de las sucesiones en la historia y documentos curriculares oficiales de la EBR de nuestro país.

Además, la unidad de análisis es, según Hernández, Fernández y Baptista (2010): "quiénes se van a recolectar los datos, lo cual corresponde a precisar la unidad de análisis" (p. xxxix), por esa razón, se está considerando como unidad de análisis las praxeologías asociadas a la sucesión identificadas en los documentos curriculares oficiales de la EBR del Perú.

Sin embargo, se puede encontrar otros autores como Taylor, S. y Bogdan, R. (1987) que se refieren a la investigación cualitativa como aquella que produce datos descriptivos y en la que una es la palabra escrita; en este trabajo, serían los textos oficiales de la EBR. Además, los autores presentan características de esta metodología. Algunas de ellas son:

- **La metodología cualitativa es inductiva.** Los investigadores cualitativos desarrollan conceptos y comprensiones partiendo de los datos y no los recogen para evaluar modelos, hipótesis o teorías preconcebidas. Este trabajo es inductivo, pues no se va a realizar la recolección de problemas y de ejercicios de los libros de textos oficiales para evaluar el tipo de tarea o la técnica, sino que, partiendo de la identificación de las tareas, técnicas, tecnología y teoría de la unidad de análisis (las praxeologías asociada a sucesiones que se encuentran en los documentos curriculares oficiales de EBR del Perú), se comprenderá la propuesta de un MER asociada a sucesiones.

- **La metodología cualitativa tiene una perspectiva holística.** Los investigadores cualitativos ven a las personas, los escenarios o los grupos como un todo y no como la suma de ellos; es decir, la investigación cualitativa estudia a las personas en el contexto de su pasado y de las situaciones en las que se hallan. Este trabajo tiene una perspectiva holística, pues se considera el aspecto epistemológico de las sucesiones además, el aspecto praxeológico que se realizará por medio de la revisión de los documentos curriculares oficiales del Perú, es decir, como se encuentran actualmente las sucesiones en la EBR.

- **Para la metodología cualitativa es esencial experimentar la realidad tal como otros la experimentan**. Los investigadores cualitativos se identifican con las personas que estudian para poder comprender como ven las cosas. En este trabajo, nos situamos en la posición del alumno, pues se revisa la manera como se resuelve los problemas, es decir, se identifica las técnicas utilizadas para cada tipo de tarea y desde la posición del docente, pues se revisará la argumentación de las técnicas por medio de la tecnología.

- El investigador cualitativo **suspende o aparta sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones.** En el trabajo, no se tomará por sobreentendido ningún modelo predominante ni el estado de las praxeologias existentes en la EBR.

- Para el investigador cualitativo, **todas las perspectivas son valiosas.** Tiene en cuenta las perspectivas de todas las personas. En este trabajo, se tomará todas las perspectivas para diseñar técnicas que no se encuentren presentes en los libros de textos oficiales que se revisará.

Igualmente, Hernández, Fernández y Baptista (2010) coinciden en que los siguientes puntos caracterizan la metodología cualitativa:

- El enfoque se basa en métodos de recolección de los datos no estandarizados. No se efectúa una medición numérica, por tanto, el análisis no es estadístico. La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes.
- El proceso de indagación cualitativa es flexible y se mueve entre los eventos y su interpretación, entre las respuestas y el desarrollo de la teoría. Su propósito consiste en "reconstruir" la realidad tal y como la observan los actores de un sistema social previamente definido. A menudo se llama "holístico", porque se precia de considerar el "todo", sin reducirlo al estudio de sus partes.
- Las indagaciones cualitativas no pretenden generalizar de manera probabilística los resultados a poblaciones más amplias. (p. 20).

Método

El mismo marco teórico, la TAD, se considera como el método para nuestra investigación, es decir, la TAD como método de investigación de textos. El método nos ofrece dos aspectos: el análisis ecológico y praxeológico, además brindará pasos para la elaboración del MER. Dichos aspectos darán las orientaciones para la propuesta del MER.

El primer aspecto consiste en tratar de responder a las siguientes cuestiones:

> El objeto del saber, ¿es parte de las recomendaciones del plan de estudios para la educación básica? ¿Está presente en los libros de texto? ¿Cómo se muestra y con qué propósito? ¿Este objeto de saber es trabajado efectivamente en la escuela? Si es así, ¿en qué condiciones? Si no es así, ¿cuáles son las razones de ser pasado por alto?
>
> Las respuestas a estas preguntas permiten identificar la razón de ser de ese objeto de saber en la institución escolar. (Traducción nuestra, Almouloud, 2015, p. 15)

El segundo aspecto consiste en identificar los elementos de las praxeologías que están asociados al objeto a estudiar: "La implementación de este enfoque para el análisis de libros didácticos, como estos están actualmente estructurados" (Almouloud, 2015, p. 16).

Procedimientos

En esta investigación, se entiende como procedimientos al conjunto de pasos que se deben seguir durante el desarrollo de una investigación. Desde la TAD, como método, se indica los pasos a seguir para cada tipo de análisis.

Análisis Ecológico: Este análisis se estructura en función del hábitat y el nicho. Respecto a este análisis, Almouloud (2015) manifiesta:

> El análisis ecológico de un objeto de conocimiento se organiza en torno a dos conceptos: hábitat que significa el lugar donde vive el objeto y el entorno conceptual este objeto de conocimiento, y el nicho que se refiere a la función del objeto en el sistema de objetos con los que interactúa. (p. 8).

Además, el autor indica que el análisis ecológico:

> Trata este tipo de análisis en responder a las siguientes preguntas: ¿el objeto de conocimiento es parte de las recomendaciones del plan de estudio para la educación básica? ¿Está presente en los libros de texto? ¿Cómo se muestra y con qué propósito? ¿Este objeto de conocimiento está trabajando efectivamente en la escuela? Si es así, ¿en qué condiciones? Si no es así, ¿cuáles son los motivos para ser pasado por alto? (traducción nuestra, Almouloud, 2015, p. 8).

En este trabajo no se presentará a profundidad este análisis ecológico, porque el foco de la investigación está en la elaboración del MER, aunque por medio de las respuestas a estas preguntas, se podrá identificar la razón de la sucesión en la EBR.

Análisis praxeológico: En cuanto al análisis praxeológico, Almouloud (2015) manifiesta que:

> Lo que falta es el desarrollo de un método de análisis de las prácticas institucional, lo que permite la descripción y el estudio de las condiciones escénicas. Los últimos avances en la teoría vienen a llenar este vacío. El concepto clave parece que es la organización praxeológica o praxeología. (Bosch y Chevallard 1999, citado en Almouloud, 2015, p. 8).

La ejecución de este enfoque para la revisión de los textos es definir la estructura del objeto de estudio, que a menudo se organiza de la siguiente manera:

La identificación de los tipos de tareas: En esta fase, se analiza las actividades propuestas en diferentes partes del texto y por medio de ejemplos y actividades del texto el investigador agrupa tareas en tipos de tareas, así permite reconocer los tipos de tareas importantes para la institución y con ello, identificaremos el conjunto de todos los tipos de tareas, como Artaud (2005, citado en Chaachoua 2014, p.7) indica: "la noción del tipo de tareas que tiene el papel principal en el análisis permiten grupos consideradas tareas suficientemente similares, el tamaño de la grupos depende de la realidad modelada, la institución en el juego y el trabajo se desea desarrollar”.

Evaluar los tipos de tareas (T), Chevallard (1999) propone los siguientes criterios:

- **criterios de identificación:** se examina si los tipos de tareas se presenta en forma clara y bien identificada como indica el autor que “los tipos de tareas *T*, ¿están claramente *despejados* y bien identificados?”(p. 28).
- **criterios de las razones de ser:** examinar si las razones de ser de los tipos tareas son explícitas o no, y si aparecen sin razones válidas como el autor manifiesta que este criterio verifica “las *razones de ser* de los tipos de tareas T_i , ¿están explicitadas? ¿O al contrario, estos tipos de tareas aparecen desmotivados?” (p. 28).
- **criterios de pertinencia:** examinar si los tipos de tareas consideradas son representativos de situaciones matemáticas, si son relevantes a la vista de las necesidades estudiantes de matemáticas como el autor indica que este criterio verifica si “los tipos de tareas considerados ¿proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas? ¿Son pertinentes en la visión de las necesidades matemáticas de los alumnos, para hoy en día? ¿Para mañana? ¿O al contrario aparecen como “aisladas” sin relación verdadera -o explícita- con el resto de la actividad (matemática y extramatemática) de los alumnos?” (p.28).

Identificación de técnicas: después de identificar los tipos de tareas, continua la caracterización de las técnicas que realizan estas tareas apoyándose en los ejercicios resueltos y / o análisis matemático de situaciones propuestas.

Además, Chevallard (1999) indica que la evaluación de las técnicas se basa en los mismos criterios discutidos y en responder a las siguientes preguntas: “¿se elaboran efectivamente, o solamente se bosquejan? ¿Son fáciles de utilizar? ¿Su *alcance* es satisfactorio? ¿Su *fiabilidad* es aceptable dadas unas condiciones de empleo? ¿Son suficientemente inteligibles? ¿Tienen futuro y pueden evolucionar de manera conveniente?” (p. 28).

Identificación de tecnologías: se puede hacer observaciones similares en el bloque tecnológico-teórico.

Además, Chevallard (1999) indica que en esta parte se debe responder a las siguientes preguntas: "¿se *plantea* únicamente el problema de su justificación? ¿O bien se considera tácitamente este enunciado como evidente, natural, o incluso bien conocido ("folclórico")? Las formas de justificación utilizadas, ¿son parecidas a las formas canónicas en matemáticas? ¿Se adaptan a sus condiciones de utilización? ¿Se favorecen las justificaciones *explicativas*? ¿Se explotan efectivamente y de forma óptima los resultados tecnológicos disponibles?" (p. 30).

Por otro lado, el aspecto ecológico y praxeológico estarán inmersos en el estudio de la sucesión que se va realizar en el siguiente capítulo, y será de utilidad para la propuesta del MER.

Por último, para la elaboración del MER por medio de la modelización matemática, la TAD, indica que se realiza por modelizaciones sucesivas cada vez más complejas, como se muestra en la siguiente cita:

> El MER puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías que corresponden a la elaboración de *respuestas parciales* a una cuestión problemática inicial. Cada praxeología de la sucesión surge como ampliación o desarrollo de la praxeología anterior, ante las limitaciones de ésta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean. (Sierra, 2006, p. 47).

Además, cada una de las modelizaciones matemática se desarrolla por medio de cuatro etapas, cuyas etapas se describió en la sección 2.1 de este capítulo. En la Figura 1, se muestra el desarrollo de las cuatro etapas en una modelización realizada en el trabajo de Bolea (2002).

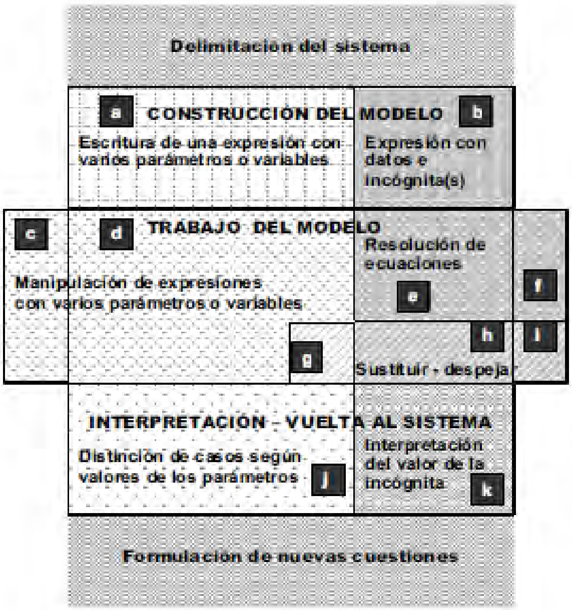


Figura 1. Etapas del proceso de modelización.
Fuente: Bolea (2002, p.124)

En el siguiente capítulo realizaremos un análisis de la transición y evolución de los saberes asociados a la sucesión.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DE LAS SUCESIONES

En este capítulo, se realizará un análisis de la transición y evolución de los saberes asociados a la sucesión, es decir, un estudio epistemológico y un análisis del sentido atribuido a la palabra sucesión en la EBR, como indica García y Sierra (2015):

> Todo análisis de un proceso de transposición didáctica implica un cuestionamiento serio y profundo de la epistemología de los saberes puestos en juego. […]
> Este punto de vista externo a las instituciones escolares objeto de análisis, que el didacta debe de construir como parte de su investigación, es el que denominamos *modelo epistemológico de referencia* (MER), entendido como modelo teórico básico para el investigador a la hora de analizar la transición y evolución de los saberes entre diferentes instituciones (p. 300).

Para realizar el estudio epistemológico, se hará un recorrido por la historia de la sucesión y se analizará los problemas que se presentaron en la historia. Luego, se realizará un estudio del sentido atribuido a la palabra sucesión en la EBR, para lo cual se usará los documentos oficiales como el DCN (2009) y los libros de textos oficiales del 2012, usados hasta el 2016, que el Ministerio de Educación entregó a los estudiantes del Perú. Además, el trabajo de Chevallard (1994) muestra un estudio para el caso del álgebra: "Examinaremos aquí el sentido atribuido a la palabra álgebra por los actores del sistema de enseñanza, en el marco de los colegas franceses, siendo la parte del curso que se enseña, la que subsumen con dicho nombre." (Chevallard, 1994, p. 7).

3.1 Aspecto Epistemológico: Evolución del saber sabio

Los efectos provocados por las restricciones transpositivas nos ayudarán a explicar varios de los cambios que se observan en los documentos curriculares. Se empezará por escribir los cambios que se han producido históricamente en el propio saber y que han ido constituyendo a lo que se denomina "sucesión".

Las progresiones aritméticas y geométricas son los primeros tipos de sucesiones, que por su cercanía a los problemas de la vida cotidiana son los más utilizados desde la antigüedad, ya que sirven como herramienta para la resolución de ciertos problemas matemáticos.

Además, se conservan algunos documentos que atestiguan la presencia de progresiones varios siglos antes de nuestra era, por lo que no se podría atribuir su "paternidad" a ningún matemático concreto. Veamos su desarrollo en algunas civilizaciones:

La Civilización Mesopotámica

Illana (2008) indica que se han encontrado tablillas con ejemplos de problemas de préstamos, interés y repartos proporcionales usados en los repartos de herencias entre varios herederos. Estos problemas son muestras de un tipo de sucesión: progresiones geométricas. Igualmente, Ortega (2012) indica que el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuestos, conocidas por la civilización de mesopotámica, son las progresiones geométricas como hoy conocemos. Por ejemplo, un problema que en la actualidad se puede plantear de la siguiente forma: "*Dada una tasa de interés de 1/60 por mes, calcular el tiempo doble*".

Además, Illana (2008) supone que estas sucesiones son utilizadas en la formación de los numerosos escribas que precisaba la administración y la sociedad babilónica para sus transacciones comerciales. Esto hace pensar que la técnica usada para estos problemas era la aplicación de la fórmula del interés compuesto, pues el autor indica que la civilización mesopotámica tenía el conocimiento de la división; que se realizaba como una multiplicación por el inverso del número que actuaba de divisor y para el valor de ese inverso se usaba una tabla.

La Civilización Egipcia

Uno de los más importantes papiros egipcios con contenido matemático es el papiro de Rhind. Este papiro fue comprado por un anticuario escocés, Henry Rhind (por ese motivo el nombre del papiro), en 1858 en la ciudad Luxor. A este texto se le conoce como el papiro de Ahmes, en honor del escriba que lo copió hacia 1650 a.C. Este escriba indica que los 87 problemas resueltos de matemáticas elementales para los aspirantes a escribas se derivan de un prototipo del Imperio Medio de entre los años 2000 y 1800 a.C., y es posible que parte de estos conocimientos provengan en realidad de Imhotep, el legendario arquitecto y médico del faraón Zoser. Por ese motivo, en el papiro aparecen algunos errores, que pueden deberse a que es una copia de varios textos anteriores.

Aunque en la resolución de los problemas aparecen métodos de cálculo basados en prueba y error, sin formulación, en realidad, se puede considerar este papiro como un tratado de aritmética o como una especie de "Manual del calculista", pues a pesar que tiene partes teóricas, en particular sobre las progresiones, no da ningún método para resolver los problemas sino que se encuentran sus soluciones y estas se realizan por medio de tablas o recetas para resolverlos como lo menciona Ortega (2012) y Gutiérrez (2009). Un ejemplo de un problema de progresión aritmética que se encuentra en el papiro de Rhind es el siguiente:

> **Problema 64:** *Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea 1/8 de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre?*

Además, en el papiro de Rhind se encuentra el único problema sobre progresiones geométricas conocido en el antiguo Egipto, además del primer ejemplo de matemática recreativa del que se tiene información. Se trata de una sucesión en la que el primer término es 7 y la razón también 7 donde el enunciado se presenta de forma extraña pues no aparece la pregunta del problema en forma explícita. El problema dice:

> **Problema 79:** *7 casas, 49 gatos, 343 ratones, 2401 espigas de trigo, 16807 medidas de grano*.

Podemos suponer que Ahmes se refería a un problema, posiblemente ya conocido, en el que en cada casa hay 7 gatos, cada gato come 7 ratones, cada ratón se ha comido 7 espigas de grano, cada una de las cuales había producido 7 hekat de grano. Cuya respuesta a este problema, Ahmes no tan solo da la cantidad de hekat de grano ahorrado, sino que además da la suma del número de casas más gatos más ratones más espigas más hekat. Verdaderamente es difícil interpretar el objetivo del escriba con este problema, pues la suma de todos los términos no es un objetivo lógico. Además, Miller, Heeren y Hornsby (2004) indican que este problema es la base de la canción infantil:

Cuando iba a St. Ives,
encontré a un hombre con 7 esposas.
Cada esposa tenía 7 sacos,
cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos
Gatitos, gatos, sacos y esposas.
¿Cuántos iban a St. Ives?

También en Egipto utilizaban una serie de reglas que se acercan a la noción de sucesión para poder acotar la raíz cuadrada de un número cualquiera a: $b_1^2 = a^2/a_1^2$, y los cálculos se realizaban con ayuda de tablas de descomposición de $2/n$ en suma de fracciones unitarias, y otra tablas de las descomposiciones de las fracciones de la forma $n/10$.

La Civilización China

A finales del periodo de la dinastía Qín, algunos sabios empezaron a abstrae lo que veían en el mundo físico y surgió la lógica. Estos pensadores escribieron frases, algunas eran absurdas por ejemplo "*un pollo tiene tres patas*" y otras frases con un significado matemático, como indican Algarra, Borges, García Hernández y Hernández (2004):

> *Un palo de un pie de largo, le quitamos la mitad cada día y no se terminará en diez mil generaciones.*

Lo que se hace referencia a una serie infinita:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\rightarrow 1$$

Además, en el manual matemático de Zhang Qiujiàn, se muestra el manejo de fórmulas para determinar la razón de una sucesión y la suma de los términos de la sucesión: progresión aritmética, que si se usa la notación del álgebra moderna, las fórmulas serían las siguientes:

1. Conociendo que la sucesión tiene *n* términos, sabiendo el primer y el último término de la sucesión, a y l, respectivamente, la suma de los *n* términos de la progresión aritmética es:

$$s=\frac{1}{2}(a+l)n\ .$$

2. Dados *a*, *n* y *s*, encontrar la razón *r*:

$$r=\left(\frac{2s}{n}-2a\right)\Big/(n-1).$$

También, Algarra, Borges, García Hernández y Hernández (2004) nos mencionan que en el periodo de las dinastías Song y Yuan (960 – 1368 d. C) se realizaron investigaciones en sucesiones finitas con una razón constante fueron realizadas por Shen Kuò, Yáng Hui y Zhu Shìjié, principalmente, los cuales obtuvieron resultados importantes en las sucesiones de órdenes superiores, el cual se entiende como el número de veces que se deben realizar las diferencias entre los términos de la sucesión hasta que las diferencias sean un mismo término.

Por ejemplo, si se tiene la sucesión de los cuadrados, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,. . . se hace las diferencias y se tiene que la sucesión es de orden dos, como se muestra en la figura:

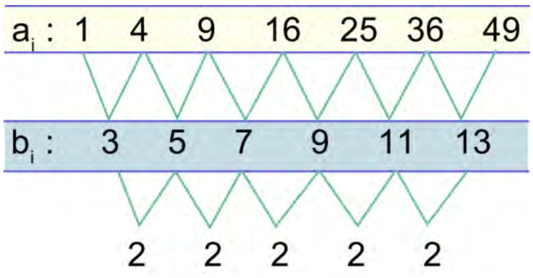


Figura 2. Sucesión

Algarra, Borges, García Hernández y Hernández (2004) indica que las primeras investigaciones en este ámbito fueron realizadas por Shen Kuò con su "teoría de los pequeños incrementos", que se fundamentaba en problemas de amontonar pilas, los cuales se usaba el "método de la plataforma rectangular" para su resolución. Los autores explican que este método consiste en contar cosas que estaban amontonadas a partir de pilas de base rectangular donde hubiera n capas. Si calculamos el volumen de la pila rectangular se obtiene la fórmula:

$$S = ab + (a+1)(b+1) + ... + cd = \frac{n}{6}\left[(2b+d)a + (2d+b)c\right] + \frac{n}{b}(c-a)$$

Donde el primer rectángulo de lo alto sería de ancho a y de largo b y el rectángulo de abajo sería de ancho c y largo d.

Este procedimiento para resolver estos problemas se encuentra en la sección de técnicas del trabajo: *Ensayos sobre un conjunto de sueños* de Shen Kuò. Otros tipos de problemas de amontonar pilas que se basan de amontonar pilas que se basan en el *método de la plataforma rectangular* de Shen Kuò son:

Pila de frutas o pirámide de base cuadrada

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Pila triangular o tetraedro

$$S = 1 + 3 + 6 + ... + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{6}(n+1)(n+2).$$

La Civilización Hindú

Ortega (2012) manifiesta que la obra de Pingala (aproximadamente de los siglos III al I a. C) expone ideas básicas sobre los números de Fibonacci, llamados mātrāmeru. Por otro lado, el autor indica que los matemáticos iniciaron las investigaciones de las matemáticas para el exclusivo objetivo de las matemáticas, entre el 400 a. C. y el 200 a. C, desarrollando las sucesiones, en particular las progresiones. Además, el Manuscrito Bakhshali, escrito entre el 200 a. C. y el 200 d. C, incluía soluciones de progresiones aritméticas y geométricas y de series compuestas entre otras cosas.

Además, Albendea (2011) menciona que El Lilavati, obra de Bhâskara importante matemático del siglo XII, se plantean gran cantidad de problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas:

> **Problema:** *Si el interés en 100 debido a un mes es cinco, dime ¿cuál es el interés en 16 cuando el año ha pasado? Dime también, matemático, el tiempo del principal y del interés, y la cantidad principal cuando el tiempo y el resultado son conocidos.*
>
> **Problema:** *Un caballero ofrece, como caridad, 4 drammas a un brahmán el primer día. Durante quince días continúa con su ofrenda, incrementando cada día 5 drammas su aportación respecto al día anterior. Encuentra el valor total de su ofrenda.*
>
> **Problema:** *Un donante da 3 drammas a un brahmán el primer día. Continúa incrementando su donación en 2 drammas cada día. Si el total de su aportación ha sido de 360 drammas, ¿cuántos días duró su caridad?*

También, Albendea (2011) indica que la obra Brahmasphuta Siddhanta, cuyo autor es Brahmagupta, se encuentra un problema de progresión geométrica relacionado con el interés:

> **Problema:** *"Se prestaron 500 drammas con una proporción desconocida de interés; se prestó el interés en el dinero durante 4 meses a otro a la misma proporción de interés y se sumó en diez meses a 78 drammas. ¿Puede decirnos la proporción de interés?"*

La antigua Grecia

Ortiz (2005) indica que después de las culturas Egipcias y Babilónicas se dio paso a un nuevo pueblo, los Griegos, este pueblo evolucionó extraordinariamente y formaron una civilización entre los siglos XII, VII, VI antes de Cristo; esta civilización se dedicó a abordar problemas asociados a las sucesiones.

Por ejemplo, Ortiz (2005) indica que los pitagóricos encontraron la curiosa relación entre los números y la geometría, es decir, la representación geométrica de los números. De un modo general, construyeron los números poligonales mediante un patrón. El autor indica que la representación geométrica parte con los números triangulares.

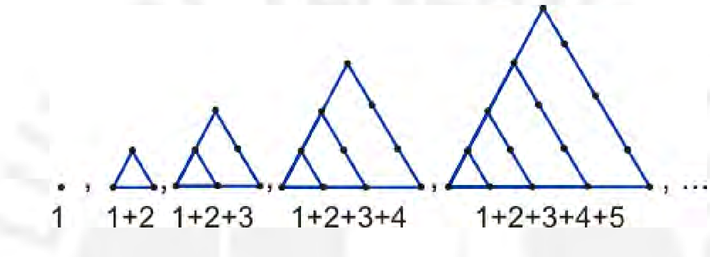


Figura 3. Números triangulares.

Fuente: Ortiz (2005, p.61)

Estos números triangulares forman precisamente triángulos y representan geométricamente la suma de los números naturales y, algebraicamente, como indica Ortiz (2005), es decir:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Luego, se tiene a los números cuadrados,

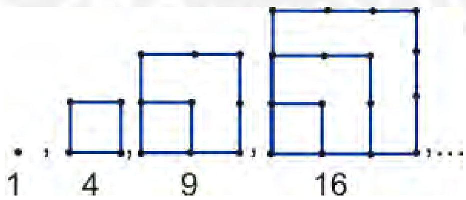


Figura 4. Números cuadrados.

Fuente: Ortiz (2005, p.61)

En este caso, el autor indica que estos números cuadrados forman un cuadrado y representan geométricamente la suma de los números naturales impares, y algebraicamente se tiene:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 .$$

También, a los números pentagonales,

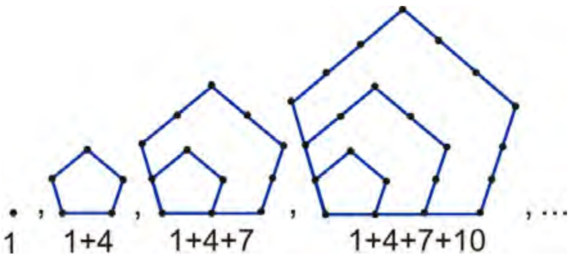


Figura 5. Números pentagonales.

Fuente: Ortiz (2005, p.61)

Es decir, en general se obtienen los números poligonales, que Nicómaco sabia de su existencia, los cuales representan geométricamente progresiones aritméticas donde su primer término es uno y la razón es un número arbitrario.

El motivo del uso de los números figúrales por los griegos es por las limitaciones del sistema de numeración de la época según como lo manifiesta Ortega (2012). Así, mediante un patrón geométrico, representaban mejor las cantidades como se muestra en la figura.

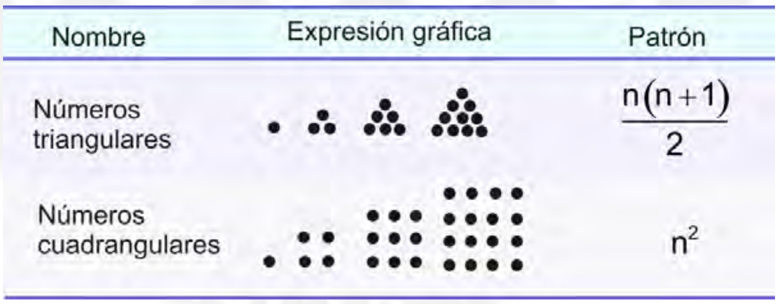


Figura 6. Números.

Además, la sucesión se empleo en la teoría de números, como lo muestra Ortiz (2005) cuando menciona que la Escuela Pitagórica presenta algunos aspectos de la teoría de números por medio de las sucesiones y la geometría. Por ejemplo, mediante el siguiente resultado atribución a los pitagóricos, relacionado a los números perfectos que son números naturales que son iguales a la suma de sus divisores propios positivos:

Si la suma $1+2+2^2+...+2^n=p$ *es un número primo, entonces* $2^n p$ *es un número perfecto.*

También, Ortega (2012) indica que las sucesiones se emplearon para la aproximación de valores numéricos, como lo realizó el matemático griego, Arquímedes (287 a.C–212 a.C), el cual trabajó durante su vida con algunas sucesiones y series de gran importancia. Un trabajo que podemos destacar: el valor de π mediante la aproximación de una sucesión del perímetro de polígonos circunscritos en la circunferencia.

Figura 7. Aproximación.
Fuente: Ortega (2012, p. 79)

En resumen, podemos indicar que los problemas centrales que se ha encontrado en la historia es la resolución de problemas aritméticos, generalización de fórmulas y sumas para la aproximación de números.

En este apartado, se ha mostrado de manera breve algunos saberes conocidos a través de la historia antes del cálculo infinitesimal como parte del aspecto epistemológico, y también para que sirvan de ayuda para construir un MER en torno a sucesión, lo cual es el objetivo de la investigación, y así visualizar la propuesta de nuestro MER.

3.2 Características de la sucesión como saber enseñado

En el anterior apartado se ha visto la evolución de la sucesión a través de la historia y su introducción se realiza mediante problemas de interés y la suma de números o figuras, luego hacia la aproximación de números, y culmina en los problemas de progresión numérica para el uso en el área del análisis infinitesimal.

En esta investigación, para saber qué se entiende por sucesión en la EBR, se utilizará algunos documentos curriculares que son los siguientes:

- Libros de textos oficiales del 2012.
- El Diseño Curricular Nacional (DCN) del 2009.

Además, documentos similares fueron usados por Bolea (2002) en su trabajo, y destaca los siguientes documentos curriculares:

- Diseño Curricular Base (DCB) de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).
- Introducciones y Guías didácticas de libros de texto aprobados por las autoridades educativas.
- Revistas y libros dirigidos principalmente al profesorado.

Por eso, se realizará un rápido examen de los libros de texto oficiales del 2012 de la EBR y el DCN (2009).

El Diseño Curricular Nacional

En Perú, con la Resolución Ministerial Nº 0440-2008-ED, se aprueban el "Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular" conforme con el Decreto Ley Nº 25762, modificado por la Ley Nº 26510, y el Decreto Supremo Nº 006-2006-ED; donde el Diseño Curricular Nacional (DCN) propone una distribución de los contenidos matemáticos que deben abordarse en la etapa 0-17 años, donde la educación primaria corresponde a los ciclos: III a V y la educación secundaria corresponde a los ciclos: VI a VII. Además, el DCN divide el área de Matemática en los siguientes bloques:

- Números, relaciones y operaciones.
- Geometría y medición.
- Estadística.

Es importante señalar que en el bloque de Números, relaciones y operaciones se hace referencia en forma explícita al patrón y sucesión; y aparece en forma permanente en todos los grados de primaria; además, en secundaria, aparece en primer grado y cuarto grado de secundaria. También, aparece patrón y sucesión en el bloque de Geometría y medición, pero en forma puntual.

En el ciclo III, primer y segundo grado de primaria, se inicia el aprendizaje del patrón y sucesión, aunque en el caso de sucesión aparece con el nombre de secuencia, como se muestra en la figura 9.

Además, entre las técnicas que el estudiante debe conocer, según el DCN (2009), son las siguientes:

- Identifica números ordinales con la posición de objetos en una secuencia. […]
- Interpreta secuencias numéricas y graficas. (DCN, 2009, p. 190 y 191).

Luego, el DCN (2009) puntualiza que la técnica que el alumno debe conocer para segundo grado de primaria es:

- Identifica el antecesor y sucesor de un número natural de hasta dos cifras […]
- Identifica e interpreta patrones aditivos […]
- Interpreta y fórmula secuencias finitas de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10, con números de hasta dos cifras. (DCN, 2009, p. 193).

Por otro lado, el DCN (2009) menciona que la actitud que debe tener el estudiante para realizar estas técnicas, para el ciclo III, es la curiosidad por la búsqueda de patrones, como se muestra en las Figura 9 y 10.

En el ciclo IV, tercer y cuarto grado de primaria, se introduce la palabra de sucesión en vez de secuencia y se maneja un patrón en particular: razón aritmética. También, en este ciclo, se mantiene la técnica del ciclo anterior, solo con una ampliación a los números naturales:

- Interpreta y formula sucesiones de razón aritmética con números naturales. (DCN, 2009, p. 195).

En el ciclo V, quinto y sexto grado de primaria, se continúa con tareas de sucesiones con razón aritmética, pero aparece la palabra secuencia en vez de sucesión como se observo en el ciclo III. Además, en quinto grado, no se menciona una técnica, pero en sexto grado de primaria se indica la siguiente técnica:

- Fórmula secuencias con números naturales y decimales exactos. (DCN, 2009, p. 200).

Se observa que se amplió el campo a los decimales exacto y no tan solo a los números naturales.

PRIMER GRADO

NÚMERO, RELACIONES Y OPERACIONES

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Identifica números ordinales con la posición de objetos en una secuencia. Interpreta secuencias numéricas y gráficas.	Secuencias gráficas y numéricas. Patrones adictivos.
ACTITUDES	
Muestra curiosidad por buscar patrones.	

Figura 8. Número, Relaciones y Operaciones
Fuente: adaptado de DCN (DCN, 2009, p. 190-191)

SEGUNDO GRADO

NÚMERO, RELACIONES Y OPERACIONES

CAPACIDADES	CONOCIMIENTOS
Identifica el antecesor y sucesor de un número natural de hasta dos cifras. Identifica e interpreta patrones aditivos con números naturales de hasta dos cifras.	Antecesor y sucesor de un número de hasta dos cifras. Patrones aditivos con números naturales de hasta dos cifras.
ACTITUDES	
Muestra curiosidad por buscar patrones y regularidades.	

Figura 9. Número, Relaciones y Operaciones - Segundo Grado
Fuente: adaptado de DCN (DCN, 2009, p. 193)

En el ciclo VI, primero y segundo grado de secundaria, en el bloque de Número, Relaciones y Funciones aparecen las sucesiones como patrones numéricos en la sección de Álgebra. Además, no se menciona técnica alguna.

En el ciclo VII, tercer, cuarto y quinto grado de secundaria, solo en cuarto grado se retoma el tema de sucesiones mediante un caso particular: progresiones aritméticas y geométricas. Además, se menciona una aplicación para las progresiones en los modelos financieros.

En este recorrido del Diseño Curricular Nacional (2009), se ha mostrado la presencia de la sucesión en la EBR de nuestro país.

En la siguiente sección, se verá una descripción de los textos oficiales en relación a la sucesión.

Descripción de los libros de textos del 2012

En este estudio exploratorio de la actividad matemática de sucesión que se realiza en la EBR, por medio de los textos oficiales, consideraremos la organización matemática presente en los textos como el producto final de un proceso de transposición didáctica.

Por ese motivo, se toma como material de observación los textos oficiales publicados el 2012 correspondientes a las editoriales Norma y Santillana de toda la Educación Básica Regular. En la tabla 1, se muestran los textos y las páginas donde se encuentran tareas de sucesión.

Tabla 1: ***Lista de textos oficiales de EBR***

Texto	Título	Editorial	Año	Página
1	Matemática 1 Primaria	Norma	2012	40, 41, 46, 50
2	Matemática 2 Primaria	Norma	2012	36, 37, 40, 48, 50, 59, 139, 140, 148
3	Matemática 3 Primaria	Norma	2012	47, 57, 83, 138, 139, 144, 170
4	Matemática 4 Primaria	Norma	2012	25, 35, 44, 50, 60, 61, 69, 71, 94, 101, 121, 145, 167, 169, 180, 185, 193
5	Matemática 5 Primaria	Norma	2012	11, 16, 17, 29, 102
6	Matemática 6 Primaria	Norma	2012	56, 57, 60
7	Matemática 1 Secundaria	Norma	2012	

8	Matemática 2 Secundaria	Norma	2012	
9	Matemática 3 Secundaria	Norma	2012	
10	4 Matemática Secundaria	Santillana	2012	56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67
11	5 Matemática Secundaria	Santillana	2012	

El texto 1, el libro de título "Matemática 1 Primaria", se presenta dividido en 8 unidades de las cuales la sucesión se encuentra presente en la unidad 2, y lo aborda en la sección de nombre *Descubrimos el patrón de una secuencia* en las páginas 40 y 41, también, en forma de repaso se encuentran problemas de sucesión en las páginas 46 y 50 del texto 1.

En este primer texto oficial de EBR, se han encontrado problemas de sucesión que empieza con la noción de **secuencia** como se muestra en la siguiente cita: "**Secuencia:** Se forma cuando ordenan objetos siguiendo un patrón."(Matemática a, 2012, p. 40).

De la cita anterior, se observa que la noción de secuencia queda definida en función de patrón, aunque en el texto 1 no muestra ninguna definición o actividad que de vista de lo que es patrón, lo cual es necesario para entender la definición de secuencia que se considera en el texto. También, se utilizan las palabras secuencia y patrón para indicar una sola acción, por ende, el patrón queda asociado a la palabra secuencia. Además, se aprecia una desconexión con los demás temas de las unidades que trabaja el texto 1.

El texto 2, el libro de título "Matemática 2 Primaria", presenta dividido en 8 unidades donde el objeto de estudio se encuentra presente en las unidades 2, 3 y 7, y lo aborda en la sección de nombre *Completa secuencias, Descubrimos y creamos patrones y Creamos secuencias*.

En las unidades, se observa que continúa con el uso de la palabra secuencia, la cual se centra en el conteo numérico. También, en este texto en la unidad 7 nos da la definición de patrón como muestra en la siguiente cita: "es la cantidad fija que aumenta o disminuye los números para formar una secuencia" (Matemática b, 2012, p. 156).

De la cita anterior, se presenta lo que es patrón, pero en función de secuencia; no obstante, esa definición puede causar confusión, pues como se mencionó en el texto 1, la definición de secuencia está en función de patrón, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 10. Secuencia y Patrón.
Fuente: adaptado de Matemática a (2012) y Matemática b (2012)

Con la incorporación de la definición de patrón, se amplía las tareas a los números naturales de dos cifras, pero se deja a un lado las figuras y se reduce a lo numérico. Además, en la Unidad 2, sección *Completa secuencias*, muestra tareas de sucesiones con la técnica de contar para generar el siguiente término. También, en las otras unidades se nota el manejo de la idea de secuencia, descrita en el texto 1, pues se usa el último elemento y el patrón asociado al conteo numérico para generar el siguiente elemento de la secuencia.

El texto 3, el libro de título "Matemática 3 Primaria", dividido en 8 unidades y aparece la palabra sucesión en la unidad 6, y lo aborda solamente en la sección de nombre *Completamos sucesiones*.

En este texto, se puede encontrar tareas relacionada a secuencia semejante al texto 1 y 2, aunque en la unidad 6 se cambia la palabra secuencia por sucesión, sin ninguna definición o actividad para introducir las sucesiones.

Además, se puede inferir que en el texto 3, se usa las palabras sucesión y secuencia como sinónimos, pues se presentan tareas del mismo tipo con el rótulo de sucesión y secuencia en partes diferente del texto, como se muestra en la siguiente figura:

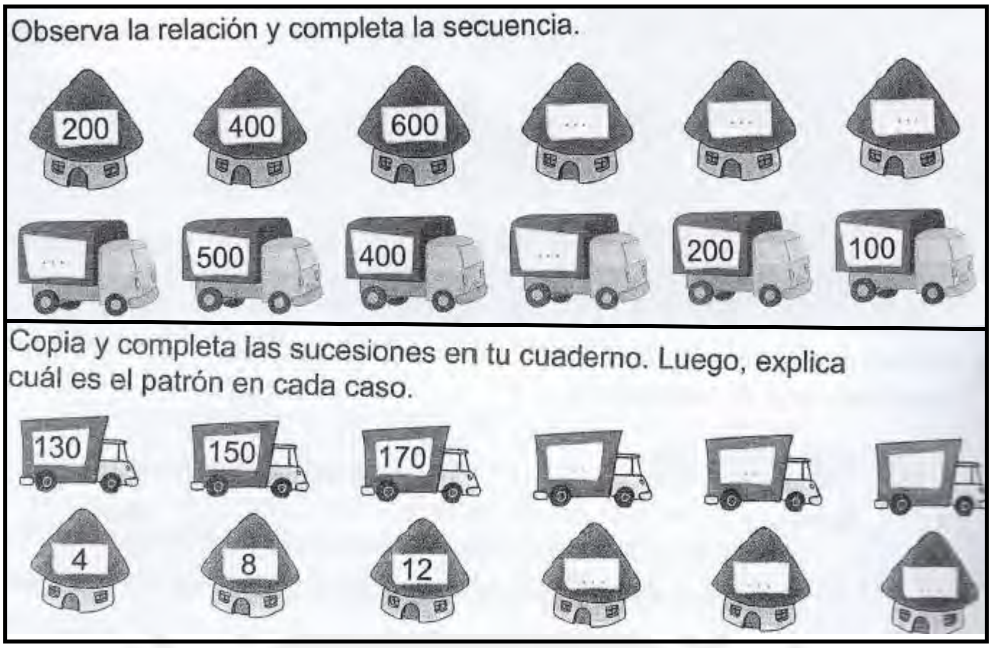


Figura 11. Secuencia y sucesión.
Fuente: Matemática c (2012, p.7-p.144)

Hay que indicar que el texto no aclara o establece el uso de la palabra sucesión y secuencia en ninguna parte del texto para este tipo de tareas; además, se infiere que el texto lo usa para lo numérico, como se interpreta en la siguiente cita: “una sucesión puede ser creciente o decreciente si los números aumentan o disminuyen en una cantidad fija. A esto se llama patrón.” (Matemática c, 2012, p. 138). Además, se observa que continúa el uso del término de patrón en el mismo sentido del texto 2.

El texto 4, cuyo título es “Matemática 4 Primaria”, presenta su contenido dividido en 8 unidades, pero en ninguna de las secciones de las unidades está dedicado a la sucesión exclusivamente, aunque se puede encontrar tareas presentes en todas las unidades del texto. Por este motivo, se puede decir que la sucesión está relacionada con todos los temas (por ejemplo, suma y resta de fracciones) que abarca el texto 4.

Además, en el texto, se utilizan las palabras sucesión y secuencia en las diferentes tareas con ninguna distinción, y así se reafirma el uso de estas palabras como sinónimos, como se observa en la siguiente figura:

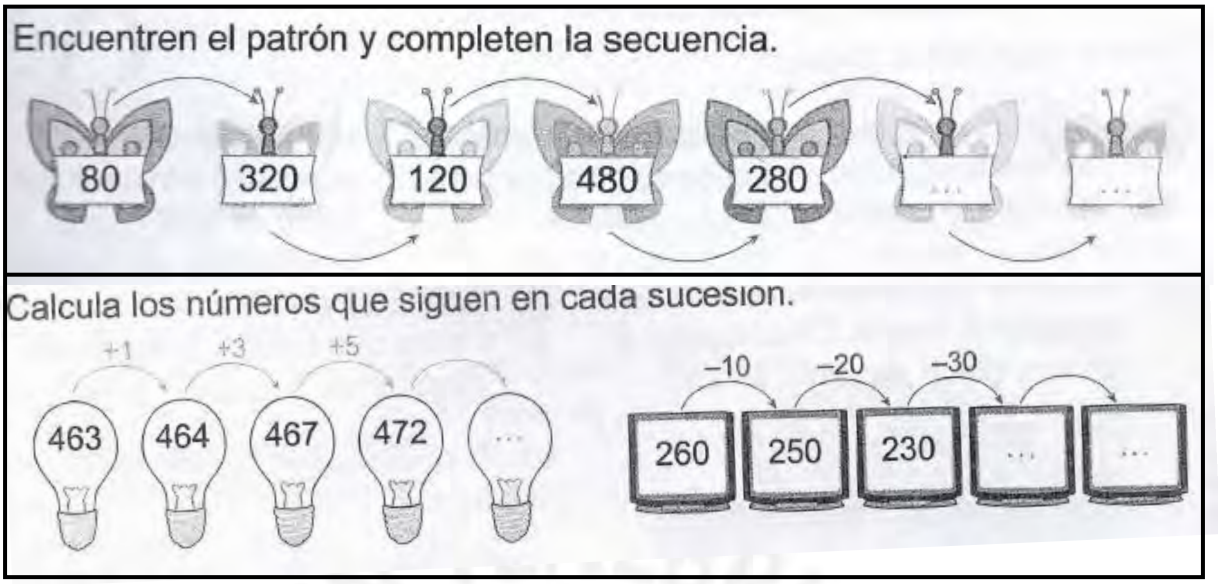


Figura 12. Secuencia y sucesión.
Fuente: Matemática d (2012, p.7 – p.44)

También, todas las tareas de secuencia, sucesión o patrón están enfocadas en el cálculo numérico dejando de lado lo figural, es decir, la figura no juega un papel importante para encontrar el patrón o completar la sucesión. Además, las tareas de construcción de una sucesión por medio de un patrón dado predominan en los textos.

En el texto 5, se limita el campo de aplicación de las sucesiones, como se indica en la siguiente cita: "Sucesión: Una sucesión de números naturales está formada por números ordenados según una determinada ley de formación o patrón numérico." (Matemática e, 2012, p. 16).

En el texto 6, se define la sucesión en función de secuencia, como se muestra en la siguiente cita: "Una sucesión de números es un conjunto de números secuenciados, de manera que cada uno de ellos se puede encontrar a partir de los anteriores, siguiendo una ley de formación o patrón." (Matemática f, 2012, p.56). Entonces, se infiere una diferencia entre estos dos objetos, aunque en su aplicación no se muestra. Además, en el texto 6 no indica una técnica explícita, pero se puede apreciar que utilizan las técnicas del texto 5 y del texto 4.

De los textos de secundaria, solo en el texto oficial de cuarto grado de secundaria se han encontrado tareas con el rótulo de sucesión. En este texto, se muestra un caso particular de sucesión: progresión aritmética y geométrica, además, de su aplicación en la matemática

financiera. También, se puede definir una técnica para este tipo de tareas que se basa en un listado de fórmulas, por lo cual podemos decir que se ha identificado una praxeología aislada.
Como un comentario importante, se observa que existe una desconexión entre la DCN (2009) con los textos oficiales correspondiente a la sucesión, pues a pesar que en el DCN (2009) declara la sucesión como un tema a desarrollar en primer grado de secundaria, no se ha encontrado en los textos oficiales tareas explicitas de sucesión.
En resumen, en los textos oficiales se presentan varias definiciones de sucesión o secuencia y patrón, pero no en forma clara, lo cual puede causar confusión en los estudiantes. Además, el cambio de la palabra de secuencia a sucesión en los textos oficiales refleja la limitación del campo de trabajo de las tareas, que pasan de lo general a lo particular, es decir, inician con tareas relacionadas a objetos que pueden ser números, figuras, letras, etc. en el ciclo III de la educación primaria y en el resto de los ciclos de la educación primaria y secundaria pasan a tareas relacionadas al uso de números. Por lo mencionado, podemos indicar que existe una desarticulación de las praxeologías existentes en la EBR, además, hemos identificado la existencia de praxeologías aisladas.

Por otro lado, la revisión de la evolución de los saberes relacionados a la sucesión y la revisión de los textos oficiales nos ubica en un punto externo que nos ayuda como insumo para la construcción de un MER asociado a la sucesión como lo dice García (2015): “Este punto de vista externo a las instituciones escolares objeto de análisis, que el didacta debe de construir como parte de su investigación, es el que denominamos *modelo epistemológico de referencia* (MER)” (p. 300). Debemos indicar que las praxeologías identificadas en la EBR no son una imagen simplificada de las matemáticas “sabias” aunque tampoco son independientes a las matemáticas “sabias”; sino son como una organización de referencia; como se puede apreciar en las siguientes citas:

> De hecho, la “desviación” o “distancia” entre las matemáticas enseñadas y el saber de referencia que las legitima puede ser interpretada, en parte, como una consecuencia de que la algebrización de las matemáticas escolares no es una imagen simplificada de la algebrización de las matemáticas “sabias”. Esto no significa que los respectivos procesos de algebrización sean completamente independientes. Por el contrario, postulamos que en el análisis de la transposición didáctica de cualquier organización matemática, […], deben tomarse como

organizaciones de referencia las que han ido apareciendo a lo largo del proceso de algebrización de la organización matemática “sabia” de la que ésta proviene. (Bolea, Bosch y Gascón, 2001,p. 291).

A lo largo de la historia podemos encontrar múltiples formas de organizar la enseñanza escolar de las matemáticas. Todas ellas se apoyan, en cierta medida, en una manera particular de interpretar las matemáticas – lo que denominamos un *modelo epistemológico*- y en una conceptualización concreta de lo que se entiende por “enseñar y aprender” matemáticas en cada momento histórico, en cada tradición cultural y en cada institución – lo que podemos considerar un *modelo didáctico*. (Barquero, 2009, p. 75).

Es decir, para nuestra propuesta no necesariamente tomaremos todos saberes a lo largo de la historia ni todas las praxeologías identificadas en la EBR en nuestra organización sino las praxeologías asociadas a la sucesión que se puedan articular. Por ejemplo, en nuestra propuesta tomaremos los tipos de tareas relacionadas a un caso particular de una sucesión: progresiones aritméticas y geométricas; pues lo identificamos en los textos oficiales y en los problemas de tasa de interés en la civilización de Mesopotamia e hindú. Además, los tipos de tareas relacionadas a la suma de términos de una sucesión y los números poligonales que están relacionados a figuras como se trabajó en la civilización china y griega.

Lo que no se tomará en cuenta son tareas relacionadas a aproximaciones mediante series y series infinitas, como por ejemplo, la aproximación de π; el cual fue trabajado en la civilización griega. Esto debido a que el conocimiento de series infinitas no se considera en los documentos curriculares de la EBR pero si en el nivel universitario.

En el siguiente capítulo presentaremos nuestra propuesta de un MER asociado a las sucesiones en relación a los conocimientos discutidos en este capítulo.

CAPÍTULO IV: PROPUESTA DE UN MODELO EPISTEMOLÓGICO EN TORNO A SUCESIÓN

En este capítulo, se mostrará una posible reconstrucción racional de la Organización Matemática (OM) en torno a la sucesión, es decir, se hace explicito una propuesta de un Modelo Epistemológico de Referencia asociado a la sucesión, cuya construcción de estos modelos son importantes, pues mediante ellos podemos describir, analizar y comparar con otros modelos, por ejemplo, en los trabajos presentados por Bolea (2002), García (2005) y Ruiz Munzón (2010) se realizan construcciones de MERs para analizar cómo un objeto matemático es entendido en una institución y así identificar el Modelo Dominante. Además, se validará que la OM propuesta en este capítulo es una *organización algebrizada* pues cumple con los rasgos característicos de una modelización algebraica, en el sentido de Bolea.

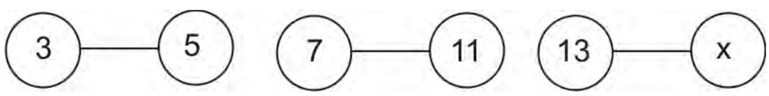
Por otro lado, antes de presentar el proceso de modelización se requiere una definición de patrón que sea funcional para la propuesta de una organización matemática; ya que la sucesión se encuentra definida en función del patrón. En la revisión de los textos oficiales encontramos una definición de patrón en el campo numérico y si buscamos en el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2014), indica que el patrón es un “modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual” (REA, 2014), en base de estos significados se tomará la siguiente definición:

Patrón.- Regla o reglas que siguen una o varios objetos (números, figuras, letras, etc.) para generar otro objeto del mismo tipo.

Además, se debe realizar algunas observaciones relacionadas con la definición de patrón para así limitar a las situaciones problemas que presentaremos.

Primero, podemos indicar que no necesariamente existe un único patrón para un conjunto de elementos, por ejemplo, en la siguiente tarea:

Problema: *Halle el valor de x.*

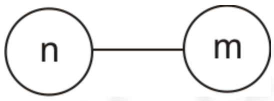


Para esta tarea, existen más de un patrón y en consecuencia existirá más de un posible elemento del conjunto.

El *primer patrón* que podemos hallar es:

Los números que se muestran son números primos en forma ordenada, entonces el valor de *x* es el primo que continua, es decir, 17, aunque este patrón no toma en cuenta las figuras (círculos y líneas) que asocia dos a dos los números.

El *segundo patrón* para el problema tiene la siguiente regla de formación de los elementos:

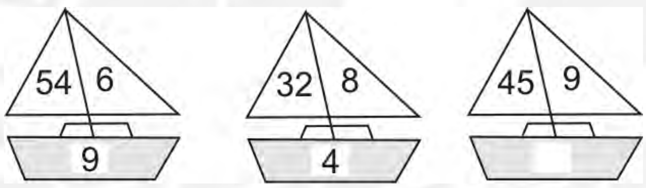


$$m = \frac{3n+1}{2}.$$

Entonces, este patrón indica que el siguiente elemento de la sucesión es 20, el cual es diferente al resultado anterior.

Este caso lo podemos encontrar en los textos oficiales, por ejemplo el siguiente problema:

Problema: *Identifiquen las relaciones y completen en su cuaderno.*

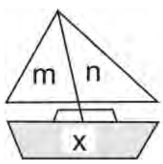


(Perú, 2012d, p. 101).

El *primer patrón* que podemos hallar es:

Los números ubicados en la vela del barco se dividen y el resultado es el número ubicado en la base del barco. Entonces el espacio en blanco se ubicaría el número *5*, según este primer patrón.

El *segundo patrón* podemos considerar la siguiente regla de formación de los elementos:



$$x = -\left[9(m-32)(n-8)+4(m-54)(n-6)\right]/44$$

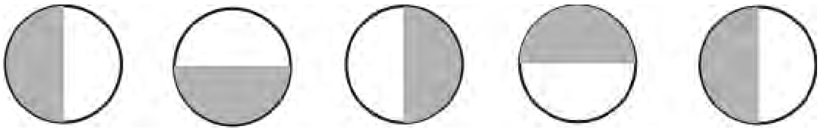
Entonces, según este patrón obtenemos

$$x = -\left[9(45-32)(9-8)+4(45-54)(9-6)\right]/44$$
$$x = -9/44.$$

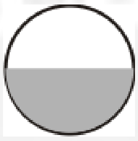
Este valor es diferente al obtenido con el primer patrón.

También, se puede considerar el caso contrario, es decir, se encuentran dos patrones aparentemente diferentes, pero generan los mismos elementos del conjunto S. Por ejemplo, obsérvese el siguiente problema:

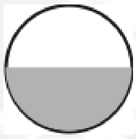
Problema: ¿Cuál es la figura que sigue?



El *primer patrón* que se observa es la rotación de la figura en un ángulo de 90º en sentido anti horario, entonces la figura que sigue es:



El *segundo patrón* que se considera es simplemente que la mancha negra se encuentra: izquierda, abajo, derecha**,** arriba y luego se repite. Entonces la figura que sigue es la mancha izquierda:



Para estos casos, se indicará que los patrones son equivalentes, es decir, patrones diferentes que generan el mismo conjunto de elementos del conjunto S.

Por otro lado, se observa que en la definición de Patrón no indica que exista un orden específico de los elementos del conjunto S, es decir, no es necesario un orden de los objetos para generar el siguiente. En la siguiente figura se muestra dos conjuntos de puntos, en los cuales el primero muestra un patrón que no existe un orden especifico para generar a los demás, pero en el segundo existe un orden para generar los demás puntos.

Figura 13. Patrones.

Fuente: Elaboración propia

En este trabajo, se considerará un *patrón en particular*, aquellos que generan los objetos con un orden. Este tipo de patrón servirá para dar la siguiente definición de sucesión:

> **Sucesión.-** Es un conjunto cuyos elementos son generados por un patrón y tienen un orden.

A los elementos de la sucesión se le llamará "término de la sucesión", además, como los términos tienen un orden, entonces se puede asociar una posición en el conjunto. Por lo tanto, se indicará a un elemento del conjunto S en la posición *n* como el término enésimo y se denota como a_n.

Es así que se ha definido patrón y sucesión para la investigación, los cuales pretenden elaborar un MER asociado a la sucesión y desde la TAD:

> El MER puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías que corresponden a la elaboración de *respuestas parciales* a una cuestión problemática inicial. Cada praxeología de la sucesión, surge como ampliación o desarrollo de la praxeología anterior, ante las limitaciones de esta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean. (Sierra, 2006, p. 47).

Y se entiende de sistema de partida o sistema a modelizar como:

> Se considera que un *sistema modelizable matemáticamente* es cualquier ámbito de la realidad, sin ningún tipo de restricción, siempre que pueda ser aislado del resto – aunque sólo sea hipotéticamente. En esta noción de "sistema" se incluyen muy especialmente los *sistemas (intra)matemáticos*. (Baquero, 2009, p. 63).

Considerando lo anterior, vamos a partir de un sistema inicial que definiremos más adelante como Problemas de Sucesión Aritmético – Figural, este sistema actuará como el sistema a modelizar.

4.1 Proceso de Modelización Matemática

En esta sección, se realizará una descripción de las organizaciones matemáticas de las diferentes etapas del proceso de modelización matemática asociada a la sucesión, la cual toma como esquema el trabajo realizado por Ruiz Munzón (2010, p. 71-82) y analiza el paso de una OM a otra OM cada vez más amplia.

Además, Ruiz Munzón (2010), en su investigación, considera como sistema inicial una OM en torno a los problemas aritméticos, los cuales son "aquellos problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (sumas, restas, productos, divisiones, etc.) ejecutable a partir de los datos del problema, datos que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes (discretas o continuas)" (Ruiz Munzón, 2010, p. 66). También, el autor añade la condición que cada uno de los resultados "intermedios" de la cadena de operaciones pueda interpretarse en el contexto del enunciado del problema. El autor, denomina a la técnica de esta OM como programa de cálculo aritmético (PCA), la cual se materializan en discursos verbales que, partiendo de los datos y mediante una cadena de operaciones aritméticas, permiten calcular la cantidad incógnita.

Continuando con esta idea, en nuestra investigación partiremos de un caso particular de los problemas aritméticos, en los cuales la cadena de operaciones es una regla de formación y en el cual se conoce el primer dato. Además, añadiremos los problemas que pueden resolverse mediante un "*movimiento*" de una figura inicial (traslación o rotación); a estos problemas lo denominaremos "*problemas de sucesión aritmético - figural*".

Organización Matemática de Partida: S

En esta investigación, se considera la praxeologías en torno de los problemas de sucesión aritmético-figural, es decir, las tareas problemáticas de partida.

La *técnica* de esta OM se presenta en discursos verbales que, partiendo de los términos conocidos y mediante el patrón, que está formada por operaciones aritméticas de una cantidad fija o "movimientos" de una figura, permiten calcular el término desconocido. Siguiendo la idea de Ruiz Munzón (2010), a dicha técnica o proceso de resolución lo denominaremos *programa de sucesión aritmético y figural* (en adelante, PAF).

Además, en esta OM de partida se puede considerar el bloque *tecnológico–teórico* simplemente las propiedades físicas que se puedan medir, es decir, las magnitudes (longitud, ángulo plano, etc.), y las propiedades de los diferentes sistemas de números a utilizar (enteros, reales, etc.).

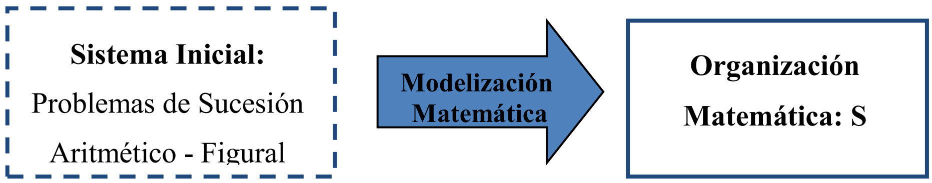


Figura 14. Organización Matemática: S

Para ejemplificar, la modelización del sistema inicial: problemas aritmético-figural, y la aplicación de la técnica, se considera en el ámbito de las mismas sucesiones con el siguiente tipo de tareas:

S0: Halle el término que sigue de la sucesión.

En este ámbito, la técnica tiene los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Con los primeros términos de la sucesión, encontrar el patrón, es decir, las operaciones aritméticas de la cantidad fija que los relaciona o el movimiento de la figura; luego verificar con los otros términos.

Paso 2: Al último término de la sucesión aplicar el patrón.

Una tarea representativa de este tipo de tareas sería la siguiente:

***s0**: Completa la secuencia.*

0	100	200			500

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012b, p. 40)

<u>Solución</u>:

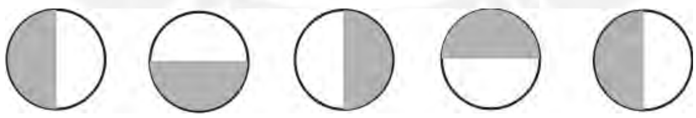
La resolución aritmética (verbal) de este problema sería:

De 0 a 100, la diferencia es 100 y de 100 a 200 también es 100, entonces el patrón es sumar 100.

Entonces los elementos que siguen de la sucesión son: 300 y 400.

Otra tarea representativa de este tipo de tareas sería la siguiente:

q0: ¿Cuál es la figura que sigue?

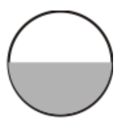


<u>Solución</u>:

La resolución figural (verbal) de este problema sería:

El patrón que observamos es la rotación de la figura en un ángulo de 90º en sentido anti horario.

Entonces de la última figura rotamos 90º y obtenemos:



Observamos que es necesario conocer la operatividad dentro del sistema que se quiere modelizar (A5).

Otro ámbito del sistema de partida y el uso del modelo es el ámbito de la matemática financiera donde podemos indicar el siguiente tipo de tareas:

B0: Halle el monto obtenido de un capital con una tasa de interés simple o compuesto en tiempo determinado.

En este ámbito la técnica tiene los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Establecer el capital inicial y el interés por la unidad de tiempo.

Paso 2: Al capital inicial sumarle el interés.

Una tarea representativa de este tipo de tareas sería la siguiente:

b0: *María deposita S/ 1200 en un banco a una tasa de interés del 10% anual. ¿Cuánto dinero tendrá en 2 años?*

Solución:

La resolución aritmética (verbal) de este problema sería:

El capital inicial es S/ 1200 y el interés es 10% de 1200 por año, es decir, sumar S/ 120 por año.

Entonces, en dos años, se obtiene S/ 1200 + S/120 +S/120=S/1440.

Por lo tanto, el monto final en dos años es S/ 1440.

Otro ámbito para ejemplificar la aplicación del modelo es de conteo de figuras donde podemos indicar el siguiente tipo de tareas:

C0: Halle el número de objetos.

En este ámbito, la técnica tiene los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Establecer en cada figura el número de objetos.

Paso 2: Realizar la suma de todos los objetos.

Una tarea representativa de este tipo de tareas sería la siguiente:

c0: *¿Cuántas bolitas hay en total?*

Solución:

La resolución aritmética (verbal) de este problema sería:

El número de bolitas en cada figura son 1, 2, 3 y 4.

Entonces, el número total de bolitas es: 1+ 2 + 3 + 4 =10.

Por lo tanto, hay 10 bolitas en total.

Como observamos, la sucesión es un instrumento para resolver problemas relacionados a los sistemas intra-matemáticos o extra-matemáticos (A1).

Además, los problemas anteriores son ejemplos de las tareas que constituyen la OM que se obtuvo del sistema inicial y que denominaremos **S**:

S= OM en torno a problemas de sucesión aritméticos-figural + aplicación de PAF (forma retórica).

En resumen, S es la culminación de esta primera modelización matemática del sistema inicial, como se observa en la Figura 15.

S= OM en torno a problemas de sucesión aritméticos-figural + aplicación de PAF

Sistema Inicial:

Problemas de Sucesión Aritmético - Figural

Figura 15. Sistema Inicial – OM: S

Ahora, partiendo de la organización matemática **S** y para las sucesivas organizaciones matemáticas, surgirán cuestiones de naturaleza tecnológica, como el alcance de las técnicas que resuelve los tipos de problemas, lo cual causará la necesidad de ampliar el sistema inicial mediante modelizaciones sucesivas que se indicará en cada etapa del proceso.

Primera etapa del proceso de modelización: M1

Para mostrar la limitación del alcance de la técnica de la organización matemática S asociada a los problemas sucesión aritméticos-figural, podemos observar la siguiente tarea:

s1: *Halle el valor de que se ubica en el último rectángulo, de la siguiente sucesión.*

$$\underbrace{\boxed{2}\quad\boxed{7}\quad\boxed{12}\quad\boxed{}\quad\cdots\quad\boxed{}}_{\text{30 rectángulos}}$$

Si usamos el modelo anterior, entonces la solución aplicando PAF sería:

PAF(2,7, 12, al último término sumar 5):=12+5=17

PAF(2,7,12, 17, al último término sumar 5):=17+5=22

.

.

.

PAF(2,7,12,…,145, al último término sumar 100):=145+2=147.

Se nota que el valor buscado se puede hallar a través de la aplicación del modelo en forma continua hasta llegar al término buscado. Pero se observa que el modelo no es eficaz para hallar el valor buscado; además, si consideramos, por ejemplo, el siguiente problema inverso:

s'1: *De la siguiente sucesión, halle el número de rectángulo que se encuentra el término de valor 72.*

$$\boxed{2}\quad\boxed{7}\quad\boxed{12}\quad\boxed{17}\quad....\quad\boxed{72}$$

Aparece una cuestión tecnológica: "¿Cómo justificar que el término de la posición 15 tiene el valor de 72?" se observa que con las técnicas aritméticas de la organización matemática inicial S no se puede responder sencillamente. Entonces aparece la necesidad de un modelo más eficiente para estos tipos de problemas.

Por ese motivo, se ampliará la noción de PAF. Considérese el PAF como un todo y pásese de una formulación retórica a una formulación escrita como un término cualquiera de la sucesión; para ello, se debe encontrar el patrón de la sucesión.

Una característica de este modelo es que tiene una etapa importante, el cual es encontrar el patrón de la sucesión de sistemas matemáticos o extra-matemáticos (A7). Además, otra característica importante es comprobar las reglas del patrón por medio de los términos conocidos de la sucesión para la construcción de la sucesión (A8).

También, para realizar la formulación escrita, se usará una expresión algebraica, además, de usar el cálculo algebraico para su manipulación.

En el ámbito de las sucesiones, la técnica tiene los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Con los primeros términos de la sucesión, encontrar el patrón de la sucesión, es decir, la operación aritmética con la cantidad fija o el movimiento de la figura; y verificar con los otros términos.

Paso 2: Expresar el término de posición *n* de la sucesión en función de *n* y la operación aritmética encontrado en el paso 1.

Paso 3: Evaluar el valor de *n* en la expresión del paso 2 o plantear la ecuación obtenida por la expresión del paso 2 con el valor del término de posición *n*; y luego resolver la ecuación.

Para ejemplificar el uso del modelo, veamos la solución de los problemas anteriores.

s1: *Halle el valor ubicado en el último rectángulo, de la siguiente sucesión:*

$$\underbrace{\boxed{2}\quad \boxed{7}\quad \boxed{12}\quad \boxed{}\quad \cdots\quad \boxed{}}_{\text{30 rectángulos}}$$

<u>Solución</u>:

Los primeros términos muestran que el patrón de la sucesión es +5.

PAF(2,7,12, sumar 5,n):= $2+5(n-1)$

Así, el término de la sucesión en posición *n* es $2+5(n-1)$ y como *n* es 30 entonces reemplazamos en la expresión y obtenemos que 147.

s'1: *De la siguiente sucesión, halle el número de rectángulo que se encuentra el término de valor 72.*

$$\boxed{2}\quad \boxed{7}\quad \boxed{12}\quad \boxed{17}\quad \ldots\quad \boxed{72}$$

<u>Solución</u>:

Los primeros términos muestran que el patrón de la sucesión es +5.

PAF (2,7,12, sumar 5,n):= $2+5(n-1)$.

Así, el término de la sucesión en posición n es $2+5(n-1)$ y el término tiene valor 72 entonces igualamos:

$$2+5(n-1)=72$$

y manipulamos la expresión para obtener el valor de *n*, que es 15.

Por lo tanto, la posición buscada del término de valor 72 es 15.

Este modelo se materializa por medio de:

$$\boxed{\mathrm{PAF}(a_1,n)=a_n}$$

donde a_1 : es el primer término de la sucesión

a_n : es el término de la posición n de la sucesión

n: indica la posición de un término en la sucesión.

De las tareas anteriores, se puede indicar que una característica del modelo es su uso como una herramienta para generalizar y justificar procedimientos de los sistemas estudiados (A2). Además, otra característica es que en este modelo es necesario diferenciar las magnitudes involucradas en las tareas según el sistema o el contexto, por ejemplo, en la tarea anterior se muestra la siguiente sucesión:

$$\boxed{2}\quad \boxed{7}\quad \boxed{12}\quad \boxed{17}\quad \ldots\ \boxed{72}$$

Observamos que las figuras (rectángulos) se pueden relacionar con la ubicación de un término de la sucesión; por tal motivo, se trabajará con los números naturales, pero el valor que está en la figura puede ser un número real e incluso un número complejo (A6).

En esta segunda modelización, se necesita trabajar en una nueva organización matemática que se denominará **M1** y se puede considerarse como un *primer modelo* de la organización matemática **S**. Las tareas ubicadas en **M1** son aquellas que su resolución aritmética puede ser planteada por medio de una igualdad del tipo PAF donde PAF es una incógnita o parámetro. Por ejemplo, en ***s1*** el PAF es una incógnita, pero en ***s'1*** es un parámetro, entonces en este modelo el PAF tiene la siguiente forma:

$$\boxed{\mathrm{PAF}(a_1,n)=a_n}$$

Se observa que la resolución de una tarea ubicada en la segunda modelización no se limita a un resultado numérico, sino que el resultado puede ser una relación entre los argumentos del PAF, por ejemplo, entre el primer término y el número de términos de la sucesión.

Además, en **M1**, se pueden resolver tareas semejantes a S**0**, pero también existen tareas en **M1** que no se pueden resolver en **S**, a partir de pequeños cambios en la selección de los argumentos como “datos” o “variables”, por ejemplo, ***s1.***

Por lo tanto, la OM que se ha denominado **M1** constituye una *ampliación* de la organización matemática **S** que afecta a todos sus componentes. En la siguiente figura, se resume esta ampliación:

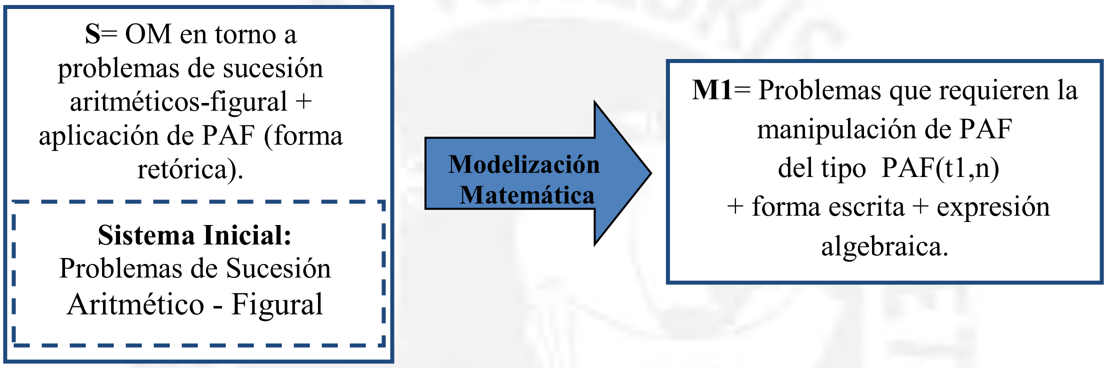


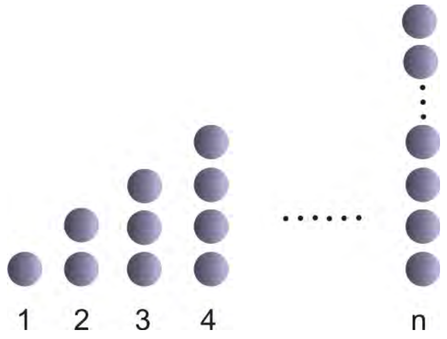
Figura 16. Organización Matemática: M1.

Entonces, estas dos modelizaciones matemáticas sucesivas corresponden a un proceso de modelización del sistema inicial.

Segunda etapa del proceso de modelización

En el modelo de la organización matemática S, se amplió la noción de PAF para tener una técnica para el tipo de tares **S0**, pero también podemos ampliar el tipo de problemas **C0**, por ejemplo, con el siguiente problema:

c1: *¿Cuántas bolitas hay en la figura?*



Si se aplica la técnica de la organización matemática M1 para este problema, se fracasaría, pues la técnica para este tipo de tareas consiste simplemente en sumar todas las figuras, es decir, 1+2+3+4…, pero esto no es eficaz; además, se observa la necesidad de expresar PAF en función de "*n*".

Entonces, se tiene la necesidad de ampliar la noción de PAF y, por ende, de realizar una tercera modelización, la cual se necesita ocuparse una nueva organización matemática que denominamos **M2** que puede entenderse como un *segundo modelo* de la organización matemática **S** o el *tercer modelo* del sistema inicial.

La *técnica* para este nuevo modelo, consiste en transformar el PAF como una expresión algebraica e igualar a un polinomio de variable "*n*", luego aplicar operaciones con polinomios, es decir, el PAF se presenta de la siguiente forma:

$\boxed{\mathrm{PAF}(a_1,n) = P(n)}$ donde P es un polinomio

El polinomio P tiene la siguiente forma: $P(n) = F(n) - F(n-1) + G(n) + k$ donde F, G son polinomios y k una constante. Se puede mencionar que en esta técnica, el polinomio P tiene esa forma para poder eliminar expresiones en el momento de realizar la sumatoria.

Por lo tanto, esta tercera modelización, conlleva a la aparición de un nuevo objeto matemático, polinomios, además, de un nuevo discurso *tecnológico-teórico* como el algebra de polinomios, que nos justifica las operaciones aplicadas a P cuando se realiza la suma de los PAF.

Además, en **M2**, se pueden resolver las tareas de **M1**, pues en **M1**, el resultado de aplicar PAF puede tomarse como incógnita o parámetro; y en **M2** esa posibilidad se amplia, es decir, el resultado de aplicar el PAF es incógnita o parámetro o polinomio.

Por consiguiente, la OM a la cual hemos denominado **M2** sería una *ampliación* de la organización matemática **M1**, que afecta a todos sus componentes. En la siguiente figura resumimos esta ampliación:

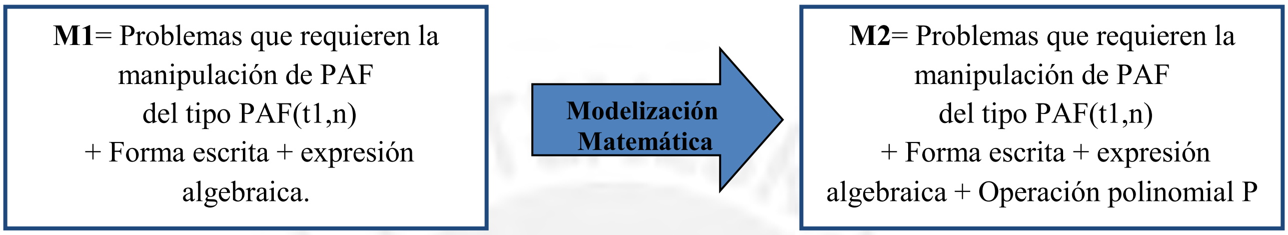


Figura 17. Organización Matemática: M2

Recálquese que en esta etapa del proceso de modelización el bloque tecnológico-teóricos se extiende y cambia el significado de algunos ostensivos (signo +, =, etc.) para justificar las operaciones de expresiones algebraicas y polinomiales, a causa de que, las propiedades de las operaciones entre cantidades de magnitudes y las relaciones entre ellas no son suficientes para justificar la nueva practica matemática.

En el ámbito de sistema numérico, la técnica tiene los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Hallar la componente de la sumatoria de la posición "*n*".

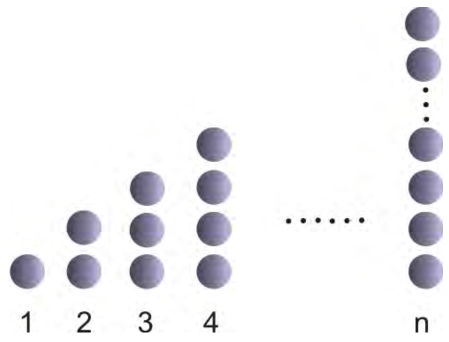
Paso 2: Expresar la componente de posición "*n*" de la sumatoria como un polinomio de la forma: $F(n)-F(n-1)+G(x)+k$, donde F y G son polinomios y k es una constante.

Paso 3: Realizar la suma continua para hallar la sumatoria.

Como se menciono antes, el polinomio P toma esa forma para la eliminación de expresiones algebraicas al momento de la sumatoria.

Vamos aplicar la técnica en ***c1***:

***c1*: ¿Cuántas bolitas hay en la figura?**



<u>Solución</u>:

La componente de la sumatoria en posición "*n*" es PAF(1, n):=n.

Además, PAF(1, n):=n se puede expresarse de la siguiente forma:

$$PAF(1,n) = n = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Entonces, $F(n) = \frac{n^2}{2}$, $G(n) = 0$ y $k = -\frac{1}{2}$, así, obtenemos

$$PAF(1,n) = F(n+1) - F(n) - \frac{1}{2}$$

$$PAF(1,n-1) = F(n) - F(n-1) - \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$PAF(1,2) = F(3) - F(2) - \frac{1}{2}$$

$$PAF(1,1) = F(2) - F(1) - \frac{1}{2}$$

$$PAF(1,1) + \cdots + PAF(1,n) = F(n+1) - F(1) - \frac{n}{2}$$

$$1 + \cdots + n = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$$

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Obsérvese que en este nuevo modelo se obtiene la suma de los "*n"* primeros términos de la sucesión, por ejemplo, del problema ***c1*:**

$$PAF(1,1)+\cdots+PAF(1,n)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Además, con la aplicación del modelo, se genera fórmulas para una manipulación más eficiente del modelo mismo, para una aplicación posterior. Por ejemplo, la aplicación del modelo para ***c1*** genera una fórmula que podemos enunciar de la siguiente forma:

Suma de los "n" primeros enteros positivos: $\boxed{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$

Se puede mencionar que existen otras técnicas para resolver las tareas del mismo tipo de ***c1***, por ejemplo: poner un término de la sumatoria uno debajo del otro de la misma sumatoria para formar una cantidad fija:

$$\begin{array}{l} S=1+\ 2\ +\ 3\ +\ldots+n \\ S=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1 \\ \hline 2S=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1) \\ S=\dfrac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

Como observamos esta técnica es más sencilla en comparación con la técnica de ***M2***, pero tiene limitaciones en relación al alcance de la técnica como indica Bolea, Bosch y Gascón (2001):

> El sistema intramatemático que queremos estudiar, presenta otras carencias (además de las ausencias tecnológicas citadas) si lo consideramos como una organización matemática. Así, por ejemplo, tiene limitaciones técnicas a la hora de sumar series no aritméticas como por ejemplo:
>
> $$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=?$$
> $$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=?$$
> $$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=?$$
>
> (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 259).

Es decir, la técnica de ***M2*** tiene un mayor alcance, pues resuelve tareas de series no aritméticas, por ejemplo, la siguiente tarea:

c2: *Halle la siguiente suma:* $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$

<u>Solución</u>:

La componente de la sumatoria en posición "*n*" es PAF$\left(1^2;n\right):=n^2$.

Además, PAF$\left(1^2;n\right):=n^2$ se puede expresarse de la siguiente forma:

$$\mathrm{PAF}(1,\mathrm{n})=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n^3}{3}+(-n)+\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Entonces, $F(n)=\frac{n^3}{3}$, $G(x)=-n$ y $k=-\frac{1}{2}$, así, obtenemos

$$\mathrm{PAF}(1^2,n)=F(n+1)-F(n)+G(n)-\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{PAF}(1^2,n-1)=F(n)-F(n-1)+G(n-1)-\frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{PAF}(1^2,2)=F(3)-F(2)-G(2)-\frac{1}{3}$$

$$\underline{\mathrm{PAF}(1^2,1)=F(2)-F(1)+G(1)-\frac{1}{3}}$$

$$\mathrm{PAF}(1^2,1)+\cdots+\mathrm{PAF}(1^2,n)=F(n+1)-F(1)-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-\frac{n}{3}$$

$$1^2+\ 2^2+\ 3^2+\ldots+n^2=\frac{(n+1)^2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}$$

$$\boxed{1^2+\ 2^2+\ 3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Obsérvese que una parte importante en la aplicación de la técnica es la utilización de la fórmula de la suma de los "*n*" primeros enteros positivos, es decir, el uso del modelo como fórmula. Entonces, una característica de modelo es la manipulación del modelo como fórmula y su posterior interpretación en términos del sistema estudiado, el cual es una parte importante del trabajo del modelo (A9).

En la siguiente figura, se muestra el proceso de modelización de **S - M1** a **M2**.

PROCESO DE MODELIZACIÓN

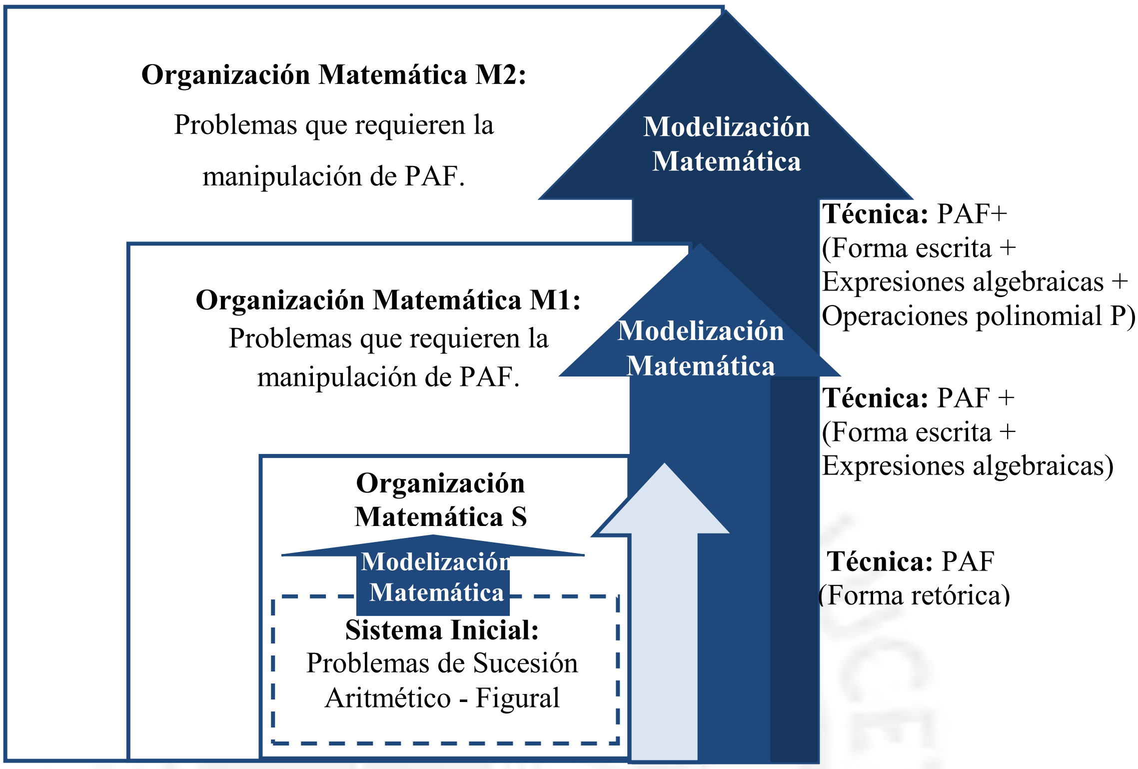


Figura 18. Proceso de Modelización

Tercera etapa del proceso de modelización

En el modelo de la organización matemática M2, se amplió la noción de PAF para tener una técnica para las tareas de tipo **C0**, pero existen tareas donde el PAF no se puede expresar de forma eficiente o simplemente no se puede expresarlo de la forma: $\mathrm{PAF}(a_1,n)=P(n)$, donde $P(n)=F(n)-F(n-1)+G(n)+k$; por ende, la técnica de M2 no sería eficiente o fracasaría. Un ejemplo de este tipo tareas seria el siguiente problema:

s2: *¿Cuál es el término de la posición "n" de la siguiente sucesión?*

1, 6, 13, 22,…

Si se aplica la técnica de la organización matemática M2 para este problema, debemos expresar el PAF de la siguiente forma: $\mathrm{PAF}(a_1,n)=P(n)$, donde P es un polinomio.

Supongamos que P es un polinomio de grado 1, entonces $P(n)=an+b$.

Por los datos, tenemos $P(1)=a(1)+b=1$ y $P(2)=a(2)+b=6$, así obtenemos

$$a+b=1$$
$$2a+b=6$$

Entonces $P(n)=5n-4$. Pero no cumple para *n=3*, pues $P(3)=11\neq 13=PAF(1,3)$.

Entonces debemos que suponer ahora que P es un polinomio de grado 2, es decir, $P(n)=an^2+bn+c$.

Por los datos, tenemos

$P(1)=a(1)^2+b(1)+c=1$, $P(2)=a(2)^2+b(2)+c=6$ y $P(3)=a(3)^2+b(3)+c=13$.

Así, obtenemos

$$a+b+c=1$$
$$4a+2b+c=6$$
$$9a+3b+c=13$$

Entonces si deseamos resolver el problema nos topamos con un nuevo objeto matemático, sistema de ecuaciones lineales, el cual requiere de una técnica nueva, por ende, la técnica deja de ser eficaz para este tipo de tareas.

Por el fracaso de la técnica, tenemos la necesidad de realizar una nueva modelización matemática que amplie a M2 para dar respuesta a los problemas como ***s2***. Entonces para ampliar la organización matemática **M2** de tal forma que se articule con una nueva organización matemática más compleja, consideremos la organización matemática **M3**.

La *técnica* para este nuevo modelo consiste en expresar a PAF en función de PAF de un término anterior y de un polinomio P, es decir, PAF se presenta de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathrm{PAF}(a_1,n)=\mathrm{PAF}(a_1,n-1)+\mathrm{P}(n)} \quad \text{donde } \mathrm{P}(n)\text{: polinomio}$$

Además, el discurso tecnológico-teórico de **M3** se mantiene en relación de **M2**, es decir, el algebra de polinomios y propiedades de expresiones algebraicas.

Además, en **M3** se pueden resolver problemas similares a **M2**, pues en **M2** se dio respuestas a sumas de n elementos; pero podemos considerar una sucesión cuyos términos son sumas acumuladas, es decir, el término de posición n seria la suma requerida en **M2**.

Por lo tanto, la organización matemática que se ha denominado **M3** constituye una *ampliación* de la organización matemática **M2**, que afecta a todos sus componentes. En la siguiente figura, se resume esta ampliación:

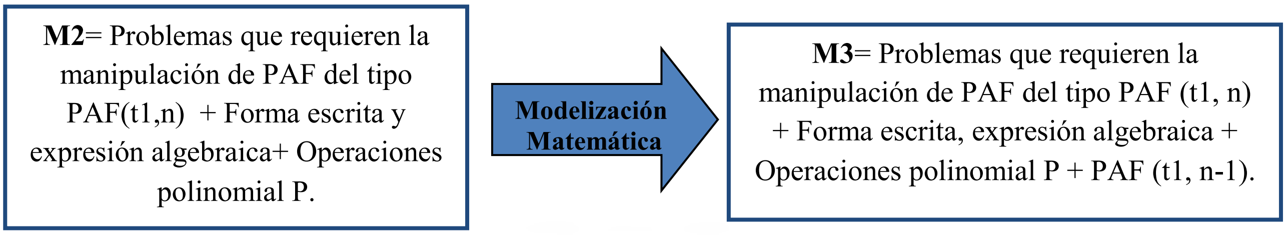


Figura 19. Organización Matemática: M3

En el ámbito de las sucesiones, la técnica tiene los siguientes pasos:

Técnica:

Paso 1: Definir una sucesión donde los términos son de la forma: $b_n = a_{n+1} - a_n$ y halla la razón de esta sucesión.

Paso 2: Considerar $PAF(a_1,i) = PAF(a_1,i-1) + b_{i-1}$

Paso 3: Realizar la suma de los "n" resultados de $PAF(a_1,i)$.

Paso 4: Hallar el resultado $PAF(a_1,n)$ en función de "n".

Vamos aplicar la técnica en ***s2***.

s2: *¿Cuál es el término en la posición "n" de la siguiente sucesión?*

1, 6, 13, 22,…

<u>Solución</u>:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
PAF(1,i) = a_i : & 1 & & 6 & & 13 & & 22 & \cdots & a_{n-1} & & a_n \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & & & \vee & \\
PAF(5,i) = b_i : & & 5 & & 7 & & 9 & \cdots & b_{n-2} & & b_{n-1} & \\
 & & & \vee & & \vee & & & & \vee & & \\
 & & & 2 & & 2 & & \cdots & & 2 & &
\end{array}
$$

Entonces $b_{n-1} = PAF(5,n-1) = 5 + 2(n-2) = 2n+1$. Además, $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$.

Entonces $a_n = a_{n-1} + 2n + 1,\ n > 1$, es decir,

$$PAF(1,n) = PAF(1,n-1) + P(n),\ \text{donde } P(n) = 2n+1,\ n > 1.$$

Aplicando la suma de los términos:

$$
\begin{array}{l}
a_n \;\; = a_{n-1} + 2n \qquad\;\; +1 \\
a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) + 1 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_2 \;\; = a_1 \;\; + 2(2) \qquad +1 \\
\hline
a_n \;\; = a_1 + \;\; 2(2+3+\ldots+n) + (n-1)
\end{array}
$$

Usando $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, obtenemos

$$a_n = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + n$$

$$\Rightarrow PAF(1,n) = a_n = n(n+2) - 2.$$

Entonces el término en la posición "*n*" es de la forma $a_n = n(n+2) - 2$.

La organización matemática **M3** es la culminación de este proceso de modelización, en consecuencia, **M3** es el MER asociado a sucesión que se está proponiendo y del cual se observa dos rasgos:

- Modeliza explícita y materializa las técnicas matemáticas de la organización matemática S, la cual actúa como sistema de partida o sistema a modelizar, pues una vez modelizada, la técnica pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos, y provoca el rápido desarrollo de las mismas, por ejemplo, el uso de $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ en ***s2*** para que la técnica sea más eficaz en su aplicación.
- Modelizan todas las componentes de la praxeología inicial M1, que actúa como sistema de partida. Es decir, se amplía no tan solo la técnica PAF sino también el tipo de tareas y el discurso racional de la praxeología M1. Además, M3 es una nueva praxeología, la cual es una extensión del sistema inicial M1 y no tan solo se trata de incorporar tareas o técnicas a M1.

Por el comentario anterior, se puede indicar que nuestra OM cumple con los rasgos característicos de una modelización algebraica, según Bolea (2002). Por lo tanto, podemos decir que la modelización matemática propuesta es una *modelización algebraica*, entonces la organización matemática **M3** es una *organización algebrizada*.

En la siguiente figura se muestra en forma resumida el proceso de modelización algebraica para la elaboración del MER asociado a la sucesión propuesto para este trabajo.

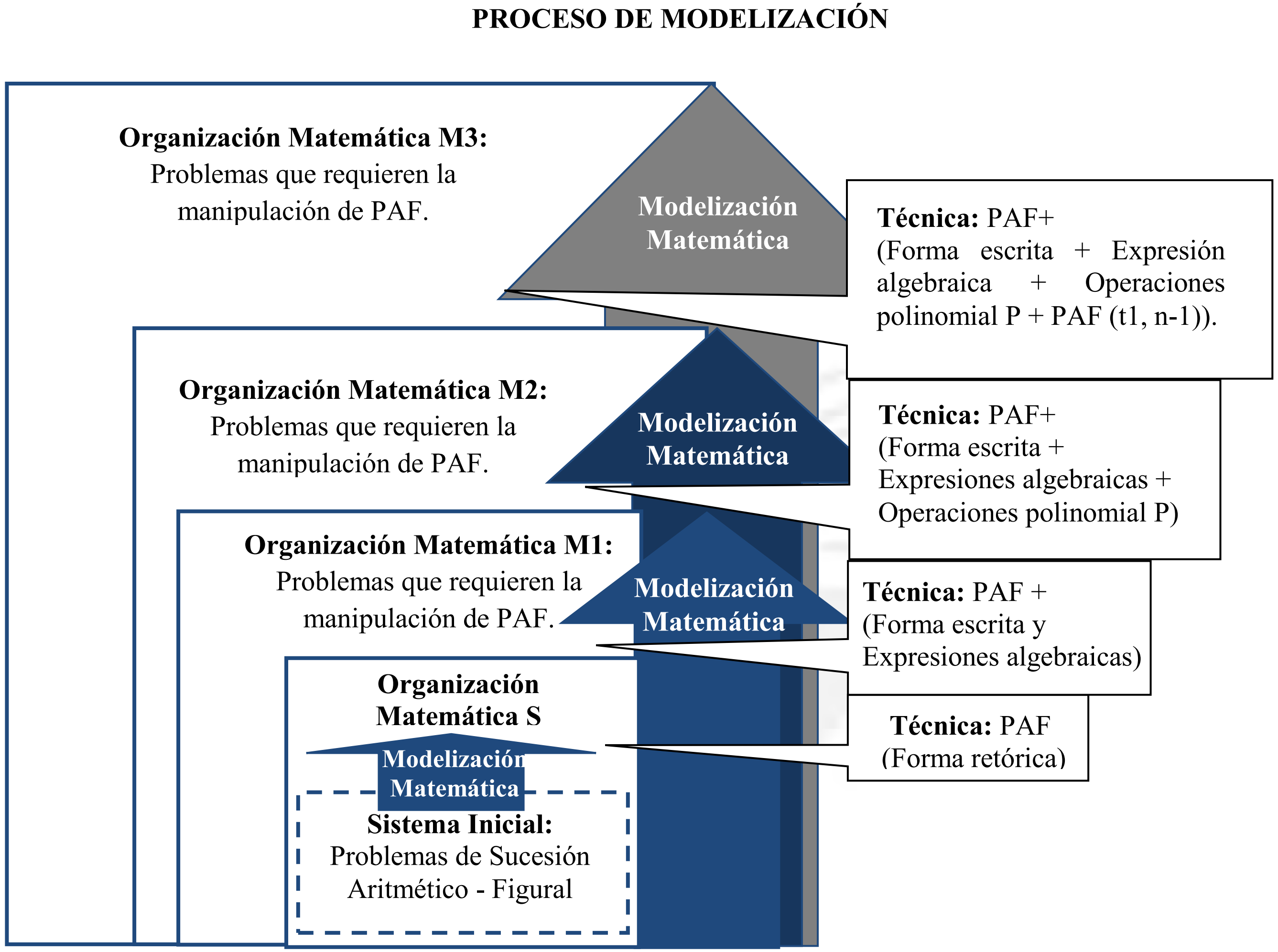


Figura 20. Modelo Epistemológico de Referencia

4.2 Características de sucesión considerada como instrumento de modelización matemática

En el proceso de modelización algebraica, se ha encontrado algunas características de la sucesión como instrumento de modelización, que se indicará a continuación en cuatro aspectos, las cuales son basadas en el trabajo de investigación de Bolea (2002, p.88-90):

(a) La construcción o emergencia de sucesión, es decir, sus razones de ser.

A1: La sucesión es una herramienta para resolver problemas intra-matemáticos o extra-matemáticos, por ejemplo, en el ámbito aritmético, comercial o de la vida cotidiana.

A2: La sucesión como proceso de modelización es una herramienta que sirve para generalizar y justificar los diversos métodos en los ámbitos en donde se aplique dicho modelo.

A3: La sucesión puede presentarse en todos los bloques temáticos de la organización matemática escolar.

(b) Los conocimientos previos en los cuales se basa la construcción de la sucesión.

A4: Las situaciones que son adecuadas para poder introducir la sucesión son los "problemas de generalización", esto es, problemas en los que la incógnita se necesita una forma generalizada y se resuelve mediante técnicas de operación.

A5: Es necesario conocer la operatividad dentro del sistema que se quiere modelizar, es decir, el manejo de las técnicas relacionadas a las operaciones del sistema, viene a ser el conocimiento previo necesario.

A6: Dado que la modelización sucesión utiliza diferentes tipos de magnitudes en un mismo sistema es necesario diferenciar las diferentes magnitudes en el mismo sistema.

(c) Los elementos más significativos de las actividades asociadas a la sucesión.

A7: Una primera etapa importante del trabajo de la sucesión consiste en determinar las reglas del patrón en relación a la construcción del modelo en el sistema inicial.

A8: Los modelos asociados a la sucesión se construyen generalmente con la comprobación de las reglas por medio de los elementos conocidos de la sucesión.

A9: Un estadio importante del proceso de modelización es el trabajo del modelo en sí, el cual es la manipulación del modelo como fórmula y luego su interpretación en relación al sistema inicial.

A10: En el último estadio del proceso de modelización se presentan nuevos problemas que con la técnica existente en el sistema inicial no se podían plantear antes de proponer el nuevo modelo que se realizo en nuestra investigación.

(d) Las dificultades que se presentaron en la realización del modelo sucesión

A11: Una dificultad de sucesión es la limitada variedad de problemas abiertos de modelización en el currículo.

A12: Otra dificultad de sucesión es la ausencia institucional de cuestionamientos tecnológicos en el uso de los modelos.

En este capítulo hemos descrito el proceso de modelización algebraica y caracterizado un Modelo Epistemológico de Referencia asociado a la sucesión que hemos propuesto, en el cual se considera la sucesión como un instrumento de modelización matemática.

CAPÍTULO V: CONSIDERACIONES FINALES Y RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

En este capítulo mencionaremos las conclusiones obtenidas en el desarrollo del trabajo en relación a los objetivos planteados de la investigación. Adicionalmente, indicaremos algunas recomendaciones que quedarán como problemas abiertos para futuras investigaciones relacionadas a la sucesión o para construcción de un MER como un instrumento de modelización, desde la TAD.

En la investigación necesitamos describir el tratamiento que se da a la sucesión en la EBR y desde el ámbito de la TAD, nos ofrece una herramienta para describir o modelar; pues un principio base de esta teoría es que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse o modelarse mediante praxeologías. Es por medio de las praxeologías que podemos indicar que los saberes relacionados a la sucesión no están bien delimitados o no. En nuestra investigación identificamos, durante la revisión de los textos oficiales, las praxeologías existentes en la EBR, las cuales no están bien delimitadas. También, en la teoría distingue diferentes tipos de praxeologías u organizaciones matemáticas de acuerdo al grado de complejidad de sus componentes: puntual, local, regional y global; por medio de estos grados nos permite identificar como crece la complejidad de la organización usada en la investigación.

En la búsqueda de una organización matemática que articule todas las praxeologías identificadas en la EBR; la TAD nos ofrece una herramienta muy importante que es el Modelo Epistemológico de Referencia (MER), el cual se realiza por medio de un proceso de modelización y la culminación de este proceso que construye y articula las praxeologías, se considera como el Modelo Epistemológico de Referencia.

Un caso particular de la modelización matemática es la modelización algebraica, donde la TAD, nos indica dos rasgos característicos para reconocer una modelización algebraica, las cuales permiten modelizar todos los componentes de una obra. En nuestro trabajo, hemos usado estos rasgos para indicar que se realizo una modelización algebraica, pues el objetivo del trabajo es construir un MER asociado a la sucesión mediante un proceso de modelización en el sentido de Bolea.

El mismo marco teórico, la TAD, se considera como el método para nuestra investigación, el cual nos ofrece dos aspectos: el análisis ecológico y praxeológico, además brindará pasos para la elaboración del MER.

En el capítulo III, se realizo el análisis ecológico pues se responden preguntas como: ¿es parte de las recomendaciones del plan de estudios para la educación básica?, ¿está presente en los libros de texto? y ¿cómo se muestra y con qué propósito?; estas peguntas nos permiten identificar la razón de ser de la sucesión en la EBR.

El segundo aspecto consiste en identificar los elementos de las praxeologías que están asociados al objeto a estudiar, es decir, como estos están actualmente estructurados. En este aspecto el concepto clave es la organización praxeológica o praxeología. La ejecución de este aspecto es cuando se realizo la revisión de los textos y para definir la estructura del objeto de estudio, es decir, identificar los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías asociadas a la sucesión.

Por último, para la elaboración del MER por medio de la modelización matemática, la TAD, indica que se realiza por modelizaciones sucesivas cada vez más complejas. Y nos provee de cuatro pasos para realizar dicha modelización, además, nos guía en la construcción y la articulación de organizaciones matemáticas por medio de cuestionamiento de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se desea reconstruir y articular.

En relación al primer objetivo específico

"Analizar los lineamientos curriculares propuestos en el Diseño Curricular Nacional del Perú (2009) respecto al tratamiento de la sucesión"

Se utilizó el análisis praxeológico que nos brinda la TAD para realizar un recorrido del Diseño Curricular Nacional (2009) y los textos oficiales, para así conocer el tratamiento de la sucesión en la EBR de nuestro País. Primero se ha mostrado la presencia de la sucesión en la EBR de nuestro país en todo nivel primario y algunos grados de secundaria. En la exploración de los documentos curriculares en relación a la sucesión, se observa que existe una desconexión entre la DCN (2009) y con los textos oficiales correspondiente a la sucesión, pues a pesar que en el DCN (2009) declara la sucesión como un tema a desarrollar en primer grado de secundaria, no se ha encontrado en los textos oficiales tareas explicitas de sucesión. Además, los textos oficiales se presentan varias definiciones de sucesión o secuencia y patrón, pero no en forma clara, lo cual puede causar confusión en los estudiantes. Además, en los documentos curriculares refleja una limitación respecto al campo de trabajo de las tareas asociadas a sucesión, que se enfocan a lo numérico y dejan a un lado las figuras.

Respecto al segundo objetivo específico:

"Identificar las praxeologías u organizaciones matemáticas asociadas a la sucesión en los libros de textos oficiales"

Se ha encontrado praxeologías aisladas en los textos oficiales; es decir, existe una desarticulación de las praxeologías asociado a sucesión en todos los textos oficiales de primaria y secundaria. Además, en las praxeologías identificadas en los documentos oficiales de nuestro país existen términos no definidos en forma adecuada, por ende la dificultad de hacer explicito las praxeologías que existen en la EBR asociada a la sucesión; es decir, aparece un significado sesgado, el cual puede llegar a transmitirse a los alumnos de manera equivocada o confusa cuando se establece el bloque logos.

Respecto al tercer objetivo específico:

"Construir un Modelo Epistemológico de Referencia asociado a las sucesiones en la EBR por medio de un proceso de modelización"

Mediante el proceso de modelización, en nuestra investigación, se ha encontrado características de un Modelo Epistemológico de Referencia asociadas a sucesiones en la Educación Básica Regular del Perú para caracterizar o comparar con otros MER asociados a sucesión. Por medio del MER, se ha elaborado, para esta investigación, una muestra que la sucesión en la EBR puede ser estructurada en una praxeología matemática bien delimitada con todos sus componentes (tareas, técnicas, tecnología y teoría). Además, esta praxeología, se construyó mediante una modelización algebraica, es decir, partiendo de una actividad matemática que puede interpretarse como una actividad modelización.

Cuestiones para futuras investigaciones

En una siguiente investigación se podría contrastar los últimos textos oficiales elaborados por las editoriales Norma y Santillana, las cuales son de mayor difusión que los textos oficiales, con la organización elaborada en esta investigación para identificar el alcance de la técnica respecto a las tareas que se pueden encontrar en dichos textos.

Además, nuestro MER elaborado sería de utilidad para la comparación con otros modelos asociados a la sucesión para así analizar dichos modelos y encontrar características propias de cada modelo. En particular, se puede realizar un análisis profundo de los textos didácticos oficiales de la EBR, para poder describir y comparar con el modelo epistemológico dominante en la EBR asociada a la sucesión.

De otro lado, en este trabajo, se ha analizado el DCN y los textos oficiales, pero estos no son los únicos indicadores de la actividad matemática para saber que se "piensa" y "hace" en la institución escolar respecto a la enseñanza y aprendizaje de la sucesión. Por ese motivo, se sugiere un indicador más, como son los sujetos de la institución, los alumnos de EBR y los docentes, aunque no son determinante en la práctica matemática, pero sí son actores principales de la actividad matemática como señala Bolea (2002), no es determinante, pero sí es esencial. Por ende, esta investigación puede ampliarse en forma empírica a las prácticas didácticas de los profesores y alumnos de la EBR actual, es decir, a la manera cómo los profesores y los alumnos interpretan, construyen, practican y usan las sucesiones.

Por último, examinar la posibilidad de realizar una ampliación al MER propuesto en esta investigación para la articulación con la enseñanza tradicional universitaria.

REFERENCIAS

Albendea, P. (2011). La historia del álgebra en las aulas de secundaria. Universidad de Cantabria.

Algarra, M., Borges C., García I., Hernández V. y Hernández B. (2004). Las Matemáticas Chinas. Recuperado: *paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf*

Almouloud, S. (2015). Teoria Antropológica do Didáctico: metodologia de análise de materiais didáticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. UNIÓN*. 42, 09-34.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq*, 15(1),1-28, Sao Pablo.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). La Transposición Didáctica de Organizaciones Matemática en Proceso de Algebrización: El caso de la Proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

Bolea, P. (2002). *El Proceso de Algebrización de Organizaciones Matemáticas Escolares* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, España.

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática.* 18(2), 37-74. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40518203.pdf

Chaachoua, H. (2014). Le role de l'analyse des manuels dans la theorie anthropologique du didactique. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01519339

Cobo Merino, B. y Batanero, C. Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 22(1), 5-18, Barcelona.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algebre et transposition didactique. *IREM d' Aix - Marseille, 52*(2), 175-234.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Andalucía, España.

García, F. & Sierra, T. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. *Investigación en Educación Matemática XIX.* 299-307.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modele de l'algebre elementaire comme alternative à l' «arithmétique généralisée». *Petit 10*(37), 43-63.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 99-123.

Godino, J. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* (Tesis de Maestría). , Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225

Gutiérrez, N. (2009). *Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior* (Tesis de Maestro). Instituto Politécnico Nacional, México

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación- Quinta edición. México: Interamericana Editores S.A. Recuperado de: https://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sampieri

Illana, J. (2008). Matemáticas y astronomía en Mesopotamia. *Suma*, 2008, n. 58, pp. 49-61

Pino-Fan, L. Assis, A. & Castro, W. (2015) .Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education.* 11(6), 1429-1456

Marconi, M. y Lakatos, E. (2003). *Fundamentos de metodología científica*. São Paulo: atlas. Recuperado de http://es.slideshare.net/praetece/lakatos-marconi-fundamentos-demetodologia-cientifica

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI*, 9, 123-146.

Miller, C., Heeren, V. & Hornsby, J. (2004). *Matemática; Razonamiento y Aplicaciones*. Pearson Educación México.

Navarro, P. C. (2007). *Un Estudio sobre la Desarticulación entre la Semejanza y la Trigonometría en el Bachillerato.* (Tesis de Maestría). Universidad de Sonora, México.

Ortega M. (2012). Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas.

Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática. Volumen 1*. Pontificia Universidad Católica del Perú

Perú, Ministerio de Educación (2009a). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular.* Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Matemática 1 Primaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012c). *Matemática 2 Primaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012d). *Matemática 3 Primaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012e). *Matemática 4 Primaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012f). *Matemática 5 Primaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012g). *Matemática 6 Primaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012g). *Matemática 1 Secundaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012h). *Matemática 2 Secundaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012i). *Matemática 3 Secundaria.* Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012j). *Matemática 4 Secundaria.* Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2012k). *Matemática 5 Secundaria.* Lima: Santillana.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwârizmî restaurado. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En Castro, E.; Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L. y Vallecillos, A., (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Quentasi, E. (2015). *Análisis de una organización matemática de la función y la proporcionalidad directa en un libro de texto de matemáticas de educación secundaria.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española*. Vigésima tercera edición. Madrid: Espasa Libros.

Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Ruíz Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. *Investigación en Educación Matemática, 14,* 545-556.

Ruíz Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT, 4*(2)*,* 106-131.

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Vivas, D. (2010). *La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina*. Tesis de Maestría. Universidad de Concepción de Uruguay.

ANEXO

Tabla 2

Tareas presentes en los textos oficiales de la EBR en primaria

Primaria 1	**Página**
A Jorge le faltan semillas para terminar su pulsera (foto). ¿Qué semillas debe poner para seguir con la secuencia?	40
Nora hizo secuencias con sus útiles escolares (foto). ¿Qué patrón siguió en cada caso?	41
¿Qué útiles debo colocar en cada secuencia para continuarla? (foto)	41
Observa la recta numérica (foto). ¿Qué patrón siguen los números?	46
¿Qué figura sigue? (foto)	50
Primaria 2	
Completa la cantidad de huairuros de Raúl. Usa tarjetas de números. ¿De cuánto en cuánto conto Raúl?	36
¿Cuál es la medida de las otras marcas?	37
¿Hemos realizado una secuencia? ¿Por qué? ¿Cuál es el patrón?	37
Según la secuencia, ¿Qué números faltan? Los escribimos en tarjetas. Luego, completamos	37
Completa las secuencias (foto)	40
¿Qué numero sigue en la secuencia? 167, 169, 171	48

¿Cuál es el patrón de esta secuencia? 105, 110, 115	48
¿Qué número es el sucesor de 9D, 9 U?	48
¿Qué número es el antecesor de 200?	48
Hay que conocer el patrón de formación	50
Rosa y Max escribieron los números en el Tablero Cien, pero algunos se borraron. ¿Qué números están borrados? ¿Cómo lo sabes? ¿Cuánto avanza cada número hacia la derecha o hacia abajo?	58
¿Qué ocurre con las ventas de Ramón? ¿Aumentan lo mismo cada día? ¿Puedes saber cuánto venderá el domingo?	139
(Foto) a. ¿Qué número tiene la piedrita que acaba de dejar la rana? b. ¿Qué ocurre con la cantidad de pelota? ¿Cuál será el patrón de la secuencia?	140
María lee 10 páginas de un libro cada día. Si empieza a leer en la pagina 78 y lee durante 10 días, ¿en qué página estará el 10. º día? Jugamos a crear secuencias a. Formamos grupos de 5 integrantes y nos ponemos en fila b. Quien inicia dice los tres primeros números de la secuencia. Cada compañero dice el número que continúa la secuencia. El último de la fila, luego de decir su número, pasa adelante e inicia una nueva secuencia.	140
Se fabricaron chullos y ponchos cada día. Representamos las situaciones con semillas o dibujitos y completamos la tabla.	148

Martina vende 8 animalitos cada día. ¿Cuántos venderá en tres días?	
Primaria 3	
Todos los días Delia ordeña a sus dos vacas, reparte la leche y recoge leña para cocinar. • Si parte del kilómetro 10 y se detiene cada 2 kilómetros para dejar leche a sus clientes, ¿en qué kilómetro se detiene? • Si de regreso comienza en el kilometro 30 y se detiene cada 3 kilómetro para recolectar leña, ¿en qué kilómetro se detiene? Una sucesión puede ser creciente o decreciente si los números aumentan o disminuye en una cantidad fija. A esto se le llama patrón.	138
Completa las sucesiones en tu cuaderno. Luego, explica cual es el patrón en cada caso.	144
Escribe en tu cuaderno las fracciones que faltan.	170
Primaria 4	
Identifiquen los números que faltan.	25
Copien y completen esta tabla en sus cuadernos.	35
Calcule los números que siguen en cada sucesión.	44
Copia y completa la tabla en tu cuaderno. Sigue el patrón.	50
Mónica vende objetos hechos en filigranas de plata. Calcula y completa la tabla en tu cuaderno.	60
Identifiquen el patrón y completen la secuencia.	61

Aplica los patrones y escribe tres elementos más en cada secuencia.	69
Encuentre el patrón y completen la secuencia.	71
Analiza, completa la tabla de proporcionalidad y responde la pregunta planteada. • ¿Cuánto cuestan 7 vasijas?	82
Identifica el patrón y continúa la sucesión en tu cuaderno.	94
Construyan la secuencia según el patrón dado.	101
Completen las sucesiones. Trabajen en sus cuadernos.	121
Descubran el patrón y completen las secuencias en sus cuadernos.	145
Encuentren el patrón y completen la secuencia en sus cuadernos.	167
Apliquen el patrón y completen la secuencia en sus cuadernos.	169
Encuentra el patrón y completa la secuencia.	180
Encuentre el patrón y completen la secuencia en sus cuadernos.	185
Calcula y escribe en tu cuaderno los tres términos siguientes de cada sucesión.	193
Primaria 5	
Utilizando chapas o piedritas del mismo tipo, podemos construir la siguiente secuencia.	11
El profesor José planteo un desafío: en un campo de futbol, tomando como punto de referencia una de sus esquinas, seis estudiantes deben colocarse en fila, así: Teresa a 10 m, María a 12	16

m, Juana a 16 m, Víctor a 22 m, Luis a 30 m y Carlos a 40 m. ¿A qué distancia de la esquina debe colocarse un séptimo estudiante?	
Halle el número que continua en cada una de las siguientes sucesiones: a. 1, 5, 4, 10, 7, 15, 10, 20,… b. 8, 12, 21, 35, 54, 78,… c. 8, 50, 18, 47, 28, 44, 38, 41,… d. 9, 7, 15, 7, 21, 7, 27, 7, 33	17
Construye una sucesión cuyo primer término sea 10 y cuyos términos siguientes siempre aumenten en 4 unidades.	17
Construye una sucesión cuyo primer término sea 8 y que cuente con dos leyes de formación alternadas: los términos en posición impar siempre aumentan en 5 unidades y los términos en posición para siempre aumentan 8 unidades.	17
Escribe en secuencia 1,4,7,10,13,16,19,…	29
Usando los cuadrados, continúa con este friso: (foto)	102
Usando el triángulo equilátero y el cuadrado continúa el friso (foto).	102
Inventa otros frisos como estos y preparen una explicación con ellos.	102
Primaria 6	
María encontró en un periódico el siguiente problema: Completar los números que siguen: 1, 2, 3, , , ,	56

¿Cuál es la ley que se siguió para formar esta sucesión?	
Observa esta sucesión: 1, 2, 3, 5, 8,….,….. ¿Cuál es el patrón? Explica.	56
Comenzamos con 5. Sumamos $\frac{1}{3}$ y restamos $\frac{1}{2}$ en forma sucesiva. ¿Se puede llegar a cero?	57
Comenzamos con tres, luego multiplicamos por un medio para sumar tres cuartos. ¿En qué fracción estaremos luego de cuatro pasos sucesivos?	57
Completamos los tres números que siguen. $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, ...$	57
Encuentre la ley de formación y completen los números que faltan: a. 7, 8, 10, 17,…..,……,…… b. 15, 16, 12, 13, 9,….,….,…. c. $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}$,….,….,….	57
Completen los cuatro números que siguen: a. $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$ ¿Se podrá llegar a cero alguna vez? ¿Por qué?	57
b. $\frac{13}{5}, \frac{21}{10}, \frac{8}{5}$ ¿Pueden encontrar un cuarto número? ¿Por qué?	57
c. 1, 2, 3, 6, 7, 14, 15,...	57

¿Pueden hallar los números faltantes?	
¿Qué fracción será representada en la decima línea, si se continua el dibujo siguiendo la misma lógica?	60
Encuentre el número con el que se comenzó.	60

TÉCNICAS ASOCIADAS A LOS TIPOS DE TAREAS.

En el texto 1, Matemática 1 Primaria, se menciona "cuando se ordenan objetos siguiendo un patrón, se está formado una secuencia" (Perú a, 2012, p. 40). Además, la técnica no está en forma explícita, pero se observa que proponen una técnica con los siguientes pasos:

Paso1: Observar los objetos (figuras) y encontrar un patrón.

Paso2: Completar la secuencia en base del patrón hallado.

Pero, como se mencionó antes, no hay una sección para que el alumno o alumna pueda construir una idea de patrón previamente.

Además, se observa en el texto 1 que las tareas no se limitan a las secuencias con objetos numéricos sino también figuras.

En el texto 2, se mencionó que hay que conocer el patrón de formación para encontrar la secuencia, es la misma técnica usada en el texto1, además, se menciona que para completar una secuencia se debe considerar estos pasos:

Paso 1: Observar si la secuencia aumenta o disminuye.

Paso 2: Definir el patrón, es decir, cuanto aumenta o disminuye.

Esta técnica es semejante en el texto 1 solamente que en el texto 2, la secuencia está enfocado en objetos numéricos relacionados con la suma y resta de los números naturales. Por ese motivo, en el paso 1 del texto 2 se indica que hay que observar si la secuencia aumenta o disminuye, pues se considera como único posible patrón si aumenta o disminuye en forma constante.

En el texto 3, a diferencia de los otros textos, se observa que la secuencia, sucesión y patrón aparece solamente en dos páginas y no está conectado con los demás temas del libro.

En el texto 3 no menciona ninguna técnica, pero si es el primer texto que menciona la sucesión que puede ser creciente o decreciente, aunque no lo define. Se puede inferir que el texto toma la sucesión como una secuencia numérica pues en el texto se enfatiza en lo numérico.

En el texto 4 no se declara ninguna técnica en forma explícita, pero observamos por las tareas una técnica semejante como en el texto 2, con los siguientes pasos:

Paso 1: Observar si la secuencia aumenta o disminuye o multiplica o divide números naturales o fracciones.

Paso 2: Definir el patrón.

En el texto 5 nos menciona "Una sucesión de números naturales está formada por números naturales ordenados según una determinada ley de formación o patrón numérico" (Perú d, 2012, p. 16). Además, se utiliza la palabra ley de formación para referirse a patrón numérico.

Para estos tipos de sucesiones de números naturales el texto da una técnica, llamada "técnica de diferencias sucesivas". La técnica consiste en

Paso 1: Identificar si restamos a un término el anterior, la diferencia es constante. Es decir: el siguiente término se obtiene aumentando un valor constante al anterior.

Paso 2: Si en paso 1 no da una constante, entonces formar una nueva sucesión como términos las diferencias de los términos y se repite el paso 1.

Paso 3: Según la ley de formación hallada, completar la sucesión.

Un ejemplo del uso de esta técnica lo observamos en la siguiente tarea:

- El profesor José planteó un desafío: en un campo de fútbol, tomando como punto de referencia una de sus esquinas, seis estudiantes deben colocarse en fila, así: Teresa a 10 m, María a 12 m, Juana a 16 m, Víctor a 22 m, Luis a 30 m y Carlos a 40 m. ¿A qué distancia de la esquina debe colocarse un séptimo estudiante?