PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO

Extensiones del concepto de función co-radiante

Tesis presentada para optar el grado académico de Doctor en Matemáticas

Autor: **Abelardo Jordán Liza**

Asesor de Tesis : Dr. **Juan Enrique Martínez Legaz**

Miembros del jurado:

Alejandro Felipe Lugon Ceruti
Juan Enrique Martínez Legaz
Yboon Victoria García Ramos
Eladio Teófilo Ocaña Anaya
Orestes Martín Bueno Tangoa

Octubre , 2017

Resumen

En la presente tesis se han introducido y estudiado nuevas nociones de función co-radiante de valor real extendido y de valor conjunto, definidas en un cono de un espacio euclídeo. El estudio exhaustivo que se hace de ellas ha permitido hacer contribuciones en el análisis multivaluado no convexo, así como disponer de herramientas matemáticas adecuadas para analizar con un nivel de generalidad superior, las tradicionales funciones de producción que en la teoría económica se las denomina funciones de rendimientos decrecientes a escala. Se proponen las funciones alfa-co-radiantes que incluyen funciones como las de Cobb-Douglas de grado alfa y las de elasticidad de sustitución constante. Asimismo, se presentan representaciones convexas de las funciones alfa co-radiantes y se hacen algunos aportes para las funciones cóncavas y homogéneas de grado alfa. Los resultados de mayor relevancia en esta tesis se basan en las nociones originales de aplicación multivaluada co-radiante, así como en la de aplicación multivaluada inversa co-radiante. Las aplicaciones multivaluadas co-radiantes de valor no convexo son importantes para el moderno tratamiento matemático de las tecnologías de producción. Se presenta un análisis minucioso de estas aplicaciones desde el punto de vista de la convexidad abstracta. Esto último posee un conjunto de técnicas para problemas no convexos, usando ideas provenientes del análisis convexo. Los principales resultados son las representaciones externas para aplicaciones multivaluadas co-radiantes y para aplicaciones multivaluadas inversas co-radiantes, valiéndonos de aplicaciones multivaluadas denominadas elementales o generadoras. Asimismo, se define la función coste asociada a una aplicación multivaluada de producción y se hace un análisis de esta función en el esquema de la convexidad abstracta. Finalmente, se establecen condiciones que permiten recuperar una aplicación multivaluada primitiva a partir de la función coste. Cabe mencionar, que la convexidad abstracta tiene importantes aportes en áreas como la Optimización Global y la Teoría del Transporte Óptimo; por consiguiente la tesis se enmarca en un área de investigación de gran interés en la actualidad, que va más allá del esquema económico que motivó la presente investigación.

Palabras claves: Conjunto normal, convexidad abstracta, aplicación de valor conjunto(avc), función alfa co-radiante, aplicación co-radiante, representación externa, avc de producción, función coste.

Abstract

In this thesis have been introduced and studied new notions of co-radiant function of extended real and set value, defined in a cone of a Euclidean space. The comprehensive study that is made of them has allowed contributions in non-convex multivalued analysis, as well as the availability of proper mathematical tools to analyze with a level of greater generality, the traditional functions of production which in theory economic are known as diminishing returns to scale functions. Alpha-co-radiant functions that include alpha grade Cobb-Douglas and constant elasticity of substitution functions are presented. Also, convex representations of alpha co-radiant functions are presented and some contributions to the concave and homogeneous functions of alpha grade are made. The results of greater relevance in this thesis are based on the original notions of co-radiant multivalued map, as well as on inverse co-radiant multivalued map. The co-radiant multivalued maps of non convex value are important to the modern mathematical treatment of the production technologies. A thorough analysis of these maps is presented from the point of view of abstract convexity. This last has a set of techniques for not convex problems, using ideas from the convex analysis. The main results are the external representations for co-radiant multivalued maps and inverse co-radiant multivalued maps through multivalued maps called elemental or generating maps. Also, the cost function associated with a multivalued map of production is defined and an analysis of this function in the scheme of abstract convexity is made. Finally, conditions are established in order to recover a primitive multivalued map from the cost function. It is worth mentioning, that the abstract convexity has significant contributions in areas such as Global Optimization and the Theory of the Optimal Transportation; therefore the thesis is part of an area of research of great interest today, which goes far beyond the economic scheme that gave rise to the present investigation.

Key words:Normal set, Abstract convexity, Map of set value, Alpha co-radiant function, Co-radiant map, Extern representation, Production map, Cost function.

Agradecimiento

Tengo la bendición de contar con personas que sin ellas no hubiera sido posible concretar este trabajo, con las que estaré siempre en deuda. En primer lugar agradezco a mi director de tesis Juan Enrique Martínez Legaz quien siempre tuvo la confianza que la barca que habíamos abordado llegaría a buen puerto; sus consejos y su amistad han sido fuentes de fortaleza en esta travesía. Mi agradecimiento al Departamento Académico de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú por el apoyo concedido cuando he tocado sus puertas. Del mismo modo para el Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines(IMCA) dado que en sus ambientes pude comprometerme con la temática que ahora me ocupa y contactar con las personas relacionadas a ella. Finalmente, al Departamento de Economía e Historia Económica de la Universidad Autónoma de Barcelona, por hacer posible que me sintiera como en casa, durante las dos ocasiones que me acogió para desarrollar la tesis que presento.

Dedicatoria

A mi esposa Rosa y a mis hijos Abelardo, Mariano José y Alejandro Manuel.
A mis padres José Mercedes y María Marcela.
A mis hermanos Elvira, Agripina, Melania, Hilario, Rogelio, María Elizabeth y Tomasa.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo presentamos un desarrollo de las que denominamos aplicaciones co-radiantes, éstas se definen en un cono de un espacio finito dimensional como $\mathbb{R}^n$, que toman multivalores en un cono también de un espacio finito dimensional como $\mathbb{R}^m$. Esta extensión tiene como punto de partida los resultados de Martínez-Legaz et al. en [22], quienes desarrollaron aspectos de las funciones co-radiantes crecientes de valor real no negativo extendido, fundamentalmente en temas de representación mediante funciones elementales en el esquema de la convexidad abstracta y también resultados de dualidad. Éstas funciones también aparecen apropiadamente en la teoría económica dado que modelizan a las funciones de producción uniproducto de rendimientos a escala decreciente.
Nuestro enfoque toma especial interés en aplicaciones de valor conjunto definidas en $\mathbb{R}^n_+$ con valores normales en el conjunto potencia de $\mathbb{R}^m_+$ condiciones que permiten explotar resultados fundamentales de representación de funciones de valor real extendido, en el contexto de la teoría de la convexidad abstracta.
La extensión a aplicaciones multivaluadas es interesante debido a la mayor adaptabilidad que ofrece para modelizar matemáticamente tecnologías de producción acordes con la realidad. Desde el punto de vista matemático, los resultados obtenidos constituyen extensiones no triviales de los resultados existentes para funciones univaluadas. La investigación propuesta independiente de la motivación en el aspecto de la teoría económica, constituye una aportación interesante en el campo de la convexidad abstracta, principalmente por los aportes de representación mediante las que denominamos aplicaciones de valor conjunto elementales. Tradicionalmente la teoría de la producción económica con carácter conjuntista, ha mantenido el requerimiento de la convexidad clásica ([7], [5], y sus referencias), mientras que nuestro desarrollo tiene la característica de no tener la convexidad en tal sentido como herramienta principal, si no las herramientas que ofrece la convexidad abstracta, la cual tiene como base las estructuras cónicas y los conjuntos normales en espacios finito dimensional. Por otro lado, en este trabajo se propone sentar las bases teóricas para futuros enfoques como puede ser desarrollados en espacios vectoriales reales topológicos, dado que en estos espacios recientemente se han hecho importantes aportes en el análisis de funciones monotónicas de valor puntual, en el marco de la convexidad abstracta como se presenta en [9].
Es de resaltar que manteniendo el carácter de la convexidad abstracta para funciones de valor puntual, en este trabajo ha sido posible representar aplicaciones co-radiantes mediante aplicaciones de valor conjunto “elementales”que gozan de buenas propiedades.
Cabe señalar que si bien es cierto la motivación surge de las funciones co-radiantes de valor escalar y su injerencia en la teoría económica, nuestro trabajo tiene otro aporte en cuanto a las aplicaciones de valor conjunto, pues marcan su diferencia respecto a los denominados procesos convexos (como en [10]) que tienen la limitación de exigir que éstos tengan gráfica convexa y mas aún valores convexos.
Adicionalmente, hacemos algunos aportes presentando las denominadas funciones $\alpha-$co-radiantes explotando fundamentalmente los resultados de [22] , haciendo de estos últimos casos particulares. A lo dicho agregamos que las funciones α co-radiantes de valor vectorial tienen aplicaciones en la teoría de operadores monótonos como se muestra en [4] y también en teoría dinámica como se puede ver en [19], lo que podría generar futuras investigaciones en este rubro.
La estructura del presente documento se basa en tres capítulos. En el primer Capítulo se

proporcionan los definiciones y resultados que serán fundamentales para nuestros aportes. La temática se centra principalmente en temas de Convexidad Abstracta y Análisis de Aplicaciones de valor conjunto. En el segundo Capítulo, implementamos las funciones $\alpha - co - radiantes$ y las funciones $\alpha - inversa\ co - radiantes$ y resultados adyacentes que generalizan algunos resultados de [21]. El Capítulo 3 está dedicado a lo que hemos denominado "Aplicaciones co-radiantes de valor conjunto" así como a las aplicaciones de valor conjunto " Inversa co-radiantes", nuestros aportes principales yacen en la representación de las mismas. Se agregan diversos resultados dedicados a las aplicaciones mencionadas. El Capítulo 3 termina con la función Coste asocida a una aplicación de valor conjunto(avc) F y la reconstrucción de F a partir de la función Coste. Los principales resultados hacen un fuerte uso de representaciones cóncavas o convexas de funciones de valor puntual en el entorno de la convexidad abstracta, así como de la estructura de los conjuntos normales.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Convexidad Abstracta

El término "Convexidad abstracta" en algunas referencias se atribuye a lo que se denomina " Convexidad sin linealidad" siguiendo a una fuente cronológicamente importante y fundamental como lo es Ellis [12]: Concretamente la convexidad abstracta pone en el escenario tres objetos: Un conjunto no vacío C, un elemento x de un conjunto universal X que contiene a C y una función definida en X que separa x de C y esta función no necesariamente es lineal dado que X no necesariamente tiene estructura de espacio vectorial. Ellis impone lo que denomina la $\phi-$separación prevaleciendo la noción de orden más que una estructura topológica. En estos tiempos una referencia obligada es el texto de Alexander Rubinov "Abstract Convexity and Global Optimization"[32]. La noción de separación antes mencionada, da lugar a la noción de suprema generación o infima generación de funciones por medio de funciones elementales que serán las que sustituyan a las funciones lineales afines definidas en un espacio vectorial, las que generan funciones como las convexas. Las notaciones y definiciones principales siguen fundamentalmente a [32] y [22].

1.1.1. Notación y definiciones básicas

Frecuentemente haremos uso de los conjuntos $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n\}$ y $\mathbb{R}^n_{++} := \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, \cdots, n\}$, así como de los conjuntos $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. y $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Considerando el orden natural en $\overline{R}$ vale decir $-\infty < x < +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Cada segmento arbitrario no vacío V de $\overline{R}$, tiene supremo e ínfimo. Especialmente cuando se considere el conjunto vacío $\emptyset$ como subconjunto de un intervalo específico V en un contexto dado, se asume $\inf \emptyset = \sup V$ y $\sup \emptyset = \inf V$. Además, denotaremos por $\overline{V}$ al conjunto $V \cup \{\inf V, \sup V\}$.

Definición 1.1.1 *Sean V un intervalo de $\overline{\mathbb{R}}$, X un conjunto arbitrario, ambos no vacíos, y H un conjunto de funciones $h : X \to V$.*

(i) Una función $f : X \to \overline{V}$ se llama **convexa abstracta** *con respecto a H o simplemente $H-$convexa, si existe un subconjunto $U \subset H$ tal que*

$$f(x) = \sup_{h \in U} h(x) , \qquad \forall x \in X. \tag{1.1}$$

En tal caso, se dice que f es la cubierta superior de U.

(ii) Una función $f : X \to \overline{V}$ se llama **cóncava abstracta** *con respecto a H o simplemente $H-$cóncava, si existe un subconjunto $U \subset H$ tal que*

$$f(x) = \inf_{h \in U} h(x) , \qquad \forall x \in X. \tag{1.2}$$

En tal caso, se dice que f es la cubierta inferior de U.

El conjunto H se denomina un conjunto de funciones elementales.

Un caso muy familiar es la clásica suprema representación para una función convexa y semicontinua inferior(sci). Para X un espacio de Banach y $f : X \to$. Particularmente, siguiendo a [26], si X es un espacio de Banach y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ convexa, propia y sci, entonces f es la cubierta superior del conjunto de las funciones afines y continuas definidas por sus subdiferenciales, es decir, para cada $x \in dom(f)$:

$$f(x) = \sup\{\langle y^*, x - y\rangle + f(y) \ : \ y^* \in \partial f(y) \text{ para algún } y \in dom(\partial f)\}$$

En este caso, podemos considerar H como el conjunto de funciones lineales afines $h : X \to \mathbb{R}$. Esto justamente marca la importancia de las funciones afines continuas en el análisis convexo clásico.
Respecto a funciones cuasiconvexas, Martinez-Legaz en la Proposición 5.14 de [20] presenta un resultado de convexidad abstracta para funciones cuasiconvexas lipschitzianas definidas en un espacio normado. Concretamente, toda función cuasicónvexa lipschitziana en un espacio normado con valores reales, es un supremo de funciones cuasi-afines diferenciables.
En [33] podemos encontar varios ejemplos y en diferentes contextos, de funciones representadas como suprema o ínfimas de otras funciones, vale decir convexas abstractas como cóncavas abstractas.
Para nuestros requerimientos, a continuación presentamos algunas funciones $H-$convexas o $H-$ cóncavas específicas. Para tal fin, empezamos con algunas definiciones.

Definición 1.1.2 *En general dado un espacio vectorial real X y P un cono convexo de X, se establece un orden $\geq$ en X inducido por P mediante: $x, y \in X$, entonces $x \geq y$ si $x - y \in P$, consecuentemente $x \geq 0$ si y solo si $x \in P$. En el caso $X = \mathbb{R}^n$ con $P = \mathbb{R}^n_+$ el orden $\geq$ es el canónico $x \geq y$, si y solo si, $x_i \geq y_i$ para $i = 1, \cdots , n$ con $x = (x_1, \cdots , x_n)$ y $y = (y_1, \cdots , y_n)$.*

(i) Dado un subconjunto no vacío C de X y $f : C \to V$ una función. Se dice que f es creciente, si $x, y \in C, x \geq y$ entonces $f(x) \geq f(y)$.

(ii) Dado un cono no vacío C de X , V un cono de $\overline{\mathbb{R}}$ y $f : C \to V$ una función. Se dice que f es positivamente homogénea, si

$$x \in C, t > 0 \Rightarrow f(tx) = tf(y)$$

Se dirá que una función es creciente y positivamente homogénea, si es creciente y positivamente homogénea (CPH).

1.1.2. Funciones crecientes y positivamente homogéneas

Atención especial han recibido las funciones CPH en los casos $C = \mathbb{R}^n_{++}$ y $C = \mathbb{R}^n_+$ con $V = [0, +\infty[$ o $V = [0, +\infty]$, una buena referencia al respecto es [32]. Precisamente encontramos en [32] una representación convexa para funciones CPH definidas en $\mathbb{R}^n_{++}$ con valores en $\mathbb{R}_{+\infty}$, tomando como base el conjunto $H = \{\langle \ell, . \rangle \,:\, \ell \in \mathbb{R}^n_{++}\}$ de funciones elementales, donde $\langle \ell, \rangle(x) := \langle \ell, x \rangle := \min\limits_{i=1,\cdots,n} \ell_i x_i$ para $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n)$ y $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Paralelamente si para $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n), x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, se define

$$\langle \ell, x \rangle = \begin{cases} \min\limits_{i \in I_+(\ell)} \ell_i x_i, & \text{si } \ell \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ell = 0. \end{cases}$$

entonces las funciones CPH $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{+\infty}$ son $L-$convexas para L el conjunto de funciones $\ell : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ definidas por $\ell(x) := \langle \ell, x \rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$.
Las funciones CPH definidas en $\mathbb{R}^n$ han sido tratadas en [21], por su parte Dutta et al. en [10] desarrolla las funciones CPH definidas en conos de un espacio vectorial topológico, mientras que la convexidad abstracta de las funciones CPH definidas en un espacio vectorial topológico han sido abordadas en [24].

1.1.3. Funciones radiantes , funciones co-radiantes y funciones inversa co-radiantes

Las funciones radiantes y co-radiantes serán fundamentales en el desarrollo de los aportes que se realizan en este trabajo, y las funciones CPH han permitido obtener representaciones cóncava abstracta así como convexa-abstracta para éstas.

Definición 1.1.3 *Sea X un espacio vectorial real. Entonces*

(i) $C \subset X$ se denomina **radiante**, *si $x \in C, t \in (0, 1]$ implica $tx \in C$.*

(ii) $C \subset X$ se denomina **co − radiante**, *si $x \in C, t \geq 1$ implica $tx \in C$.*

Se verifican las siguientes propiedades:

(i) Si $C \subset \mathbb{R}^n_+$ es radiante(co-radiante), entonces $\overline{C}$ es radiante(co-radiante).

(ii) Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos radiantes(co-radiantes,) de $\mathbb{R}^n_+$, entonces $\cup_{i\in I}C_i$ es también un subconjunto radiante(co-radiante) de $\mathbb{R}^n_+$. Lo mismo para $\cap_{i\in I}C_i$

Información importante sobre los conjuntos radiantes cerrados y co-radiantes cerrados y sus conexiones con sus respectivas funciones calificadoras(gauge), se encuentra en [34], enfatizándose la relación directa entre los conjuntos radiantes cerrados no vacíos y las funciones positivamente homogéneas y sci $f : \mathbb{R}^n_+ \to [0, +\infty]$ con f(0) = 0. Realmente f resulta ser la función calificadora de U, es decir $f = \mu_U$.
Las funciones radiantes y co-radiantes, paulatinamente han venido siendo abordadas con variantes en el conjunto dónde éstas se definen. Rubinov en [32], así como en [31], las presenta definidas en conos de $\mathbb{R}^n$ (a las primeras también las denomina estrelladas con respecto al cero, mientras que a las segundas las llama estrelladas con respecto al infinito), fundamentalmente en $\mathbb{R}^n_+$.

Definición 1.1.4 *Sea* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{R}_{+\infty}$.

(i) f *es* **radiante**, *si*

$$f(tx) \leq tf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0,1] \tag{1.3}$$

(ii) f *es* **co − radiante**, *si*

$$f(tx) \geq tf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0,1] \tag{1.4}$$

(iii) f *es* **inversa co − radiante**, *si*

$$f(tx) \leq \frac{f(x)}{t}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0,1]. \tag{1.5}$$

Directamente se prueba que $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{R}_{+\infty}$ es radiante, si y solo si, $f(tx) \geq tf(x), \forall x \in \mathbb{R}^n_+, t \geq 1$, a la vez que f es co-radiante, si y solo si, $f(tx) \leq tf(x), \forall x \in \mathbb{R}^n_+, t \geq 1$. También resulta que f es radiante (co-radiante), si y solo si, $epi(f) := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ : f(x) \leq \alpha\}$ es un subconjunto radiante(co-radiante) de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$.
De estas funciones, las que han tenido mayor atención han sido las funciones co-radiantes crecientes(CRC). Rubinov et al en [31] se ocupa de estas funciones hasta enfocar aspectos de optimización.

1.2. Análisis en valor conjunto

En general, dados dos conjuntos no vacíos cualesquiera X y Y, una aplicación que asigna a cada elemento $x \in X$ un único subconjunto de Y, se denomina una **aplicación de valor conjunto** (avc) de X en Y; también se denomina una *función multivaluada* de X en Y, así como una **correspondencia** de X en Y(aunque en algunos textos, esta última denominación está reservada para aplicaciones de valores no vacíos). Si F denota una de tales aplicaciones, se emplea la notación $F : X \rightrightarrows Y$ de modo que para cada

$x \in X$, $F(x)$ es el subconjunto de Y que se le asocia a x. La notación involucrada en esta sección y las definiciones subyacentes, fundamentalmente siguen las líneas de [2].
Como se muestra en [2] hay razones más que suficientes para sostener que el "Análisis de aplicaciones de valor conjunto" toma un lugar preponderante en las matemáticas sobre todo en las matemáticas aplicadas, producto de lo cual en estos tiempos hay un importante desarrollo en lo que se denominado "Optimización en valor-conjunto", y para ello existen buenas referencias como [18].
La denominación "análisis de valor conjunto" arriba mencionada, está justificada pues en contextos apropiados, se han desarrollado aspectos como convergencia de conjuntos, derivadas de aplicaciones de valor conjunto, integrales de aplicaciones de valor conjunto, y así por el estilo.

Definición 1.2.1 *Sean X, Y conjuntos no vacíos y $F : X \rightrightarrows Y$ una avc. Se definen:*

(i) La gráfica de F como el conjunto denotado por $graf(F)$ dado por

$$graf(F) := \{(x, y) \in X \times Y \ : \ x \in X, y \in F(x)\}$$

(ii) El dominio de F es el subconjunto de elementos $x \in X$ tales que $F(x)$ es no vacío. Este conjunto se denota por $dom(F)$.

(iii) El rango o imagen de F denotado por $rang(F)$ es el subconjunto de Y definido por

$$rang(F) := \{y \in Y \ : \exists x \in X \ con \ y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

(iv) La imagen de un subconjunto $S \subset X$ respecto a F, se denota por $F(S)$ y se define por

$$F(S) = \bigcup_{x \in S} F(x)$$

(v) La inversa de F, denotada por F^{-1} es la avc $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ definida por

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

Note que $rang(F^{-1}) = dom(F)$ y $rang(F) = dom(F^{-1})$. Un aspecto importante es que la avc F está caracterizada por su gráfica $graf(F)$. Denominaciones se asignan a las avc si sus respectivas gráficas satisfacen algún requisito, o si sus valores tienen alguna característica común, para ello los conjuntos X y Y requieren de alguna estructura, como de espacio vectorial real, de espacio métrico, o espacio topológico, entre otras.

Definición 1.2.2 *Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una avc.*

(i) Si X y Y son espacios topológicos, se dice que F es cerrada, si $graf(F)$ es un subconjunto cerrado del espacio topológico $X \times Y$.

(ii) *Si X y Y son espacios topológicos, se dice que F es de valor cerrado, si $F(x)$ es cerrado en Y para cada $x \in X$.*

(iii) *Si X y Y son espacios vectoriales, se dice que F es convexa, si $graf(F)$ es un subconjunto convexo del espacio lineal $X \times Y$.*

(iv) *Si X y Y son espacios vectoriales, se dice que F tiene valores convexos, si $F(x)$ es un subconjunto convexo de Y para cada $x \in X$.*

Para nuestros propósitos, principalmente vamos a trabajar con avc definidas en $\mathbb{R}^n_+$ con valores en $\mathbb{R}^m_+$, donde se explotarán las estructuras vectorial y topológica de los respectivos espacios ambiente. Dadas unas avc, de éstas se derivan otras que tienen relación directa con la estructura de los conjuntos X y Y. Antes de presentar algunas avc derivadas, requerimos de algunas operaciones entre conjuntos de $\mathbb{R}^n$.

1.2.1. Suma de conjuntos y múltiplo de un conjunto

Las operaciones Minkowski de suma y multiplicación por escalar de conjuntos, se definen en espacios vectoriales reales en general, pero nos centramos en $\mathbb{R}^n$.
Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se definen los conjuntos

$$\begin{aligned} A \pm B &:= \{a \pm b : a \in A, b \in B\} \\ z + B &:= \{z + b : b \in B\} \\ \alpha A &:= \{\alpha a : a \in A\} \end{aligned}$$

con el convenio que si alguno de los conjuntos A ó B es vacío, entonces los conjuntos del lado derecho son vacíos.
De manera especial serán de utilidad las siguientes propiedades:
Sean $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha(A \pm B) &= \alpha A \pm \alpha B \\ (\alpha + \beta)A &\subset \alpha A + \beta A \\ (A - \mathbb{R}^n_+) + (B - \mathbb{R}^n_+) &= (A + B) - \mathbb{R}^n_+ \\ \alpha(A - \mathbb{R}^n_+) &= \alpha A - \mathbb{R}^n_+, \text{ si } \alpha > 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Si α y β son positivos y A convexo, entonces la inclusión anterior, se torna en una igualdad.
Otras definiciones que atienden a nuestros requerimientos, son:

Definición 1.2.3 *Sean $F_1, F_2 : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ dos avc y $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*
Se definen las avc αF_1; $F_1 + F_2$; $F_1 \cap F_2$; $F_1 \cup F_2$; $\overline{F_1}$; $co(F_1)$ y $\overline{co}(F_1)$ de $\mathbb{R}^n_+$ en $\mathbb{R}^m_+$, mediante:

$$\alpha F_1(x) := \alpha(F_1(x)) \ , \ (F_1 + F_2)(x) := F_1(x) + F_2(x)$$

$$(F_1 \cap F_2)(x) := F_1(x) \cap F_2(x) \ , \ (F_1 \cup F_2)(x) := F_1(x) \cup F_2(x)$$

$$\overline{F_1}(x) := \overline{F_1(x)} \ , \ co(F_1)(x) := co(F_1(x)) \ \ y \ \ \overline{co}(F_1)(x) := \overline{co}(F_1(x))$$

respectivamente, para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$.

En las líneas previas, $\overline{A}$, $co(B)$ y $\overline{co}(C)$ como es usual, denotan la clausura de A, la cápsula convexa de B y el conjunto convexo y cerrado más pequeño(con relación a la inclusión) que contiene a C, respectivamente.
Adicionamos la composición de avc, sean $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ y $G : \mathbb{R}^m_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^p_+$ avc. Se define la avc $G \circ F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^p$ mediante

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{u \in F(x)} G(u) \tag{1.7}$$

esta avc se denomina composición de las avc G y F.

1.2.2. Continuidad de una avc

En general, sean X y Y espacios métricos y $F : X \rightrightarrows Y$ una avc. Se dice que

Definición 1.2.4

(i) F semicontinua superior en $x \in dom(F)$ si para todo abierto V de $F(x)$ en Y, tal que $F(x) \subset V$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x' \in B_\delta(x) \Rightarrow F(x') \subset V.$$

(ii) F es semicontinua inferior en $x \in dom(F)$ si para todo abierto W en Y con $W \cap F(x) \neq \emptyset$, existe una vecindad U de x en X tal que

$$x' \in U \Rightarrow W \cap F(x') \neq \emptyset.$$

(iii) F es continua en $x \in dom(F)$ si lo es superior e inferiormente continua en x.

(iv) F es cerrada en $x \in dom(F)$ si $x_n \to x$, $y_n \in F(x_n)$ con $y_n \to y$, entonces $y \in F(x)$.

La avc F es semicontinua inferior (semicontinua superior, continua) si es semicontinua inferior (semicontinua superior, continua) en cada elemento $x \in dom(F)$. Además, F es cerrada si es cerrada en cada punto $x \in dom(F)$ y esto equivale a que $graf(F)$ sea un conjunto cerrado.
Algunos resultados de interés se exponen a continuación, entre lo que resalta el hecho las definiciones previas se pueden manejar por sucesiones puntuales y adicionando el requerimiento de compacidad de los valores de la avc.

Proposición 1.2.5 *Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una avc entre espacios métricos.*

(i) Supongamos que $x \in dom(F)$ y $F(x)$ es compacto, entonces F es semicontinua superior en x, si y solo si, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $x' \in B_\delta(x) \Rightarrow F(x') \subset B(F(x), \epsilon)$.

(ii) Si F es semicontinua superior con dom(F) cerrado y con valores cerrados, entonces F es cerrada.

La prueba de (ii) se encuentra en [2], y en [1] en un contexto más general. Para propósitos prácticos, es conveniente hacer uso de lo que se denomina la caracterización secuencial de las semicontinuidades, lo cual se enuncia en la proposición siguiente.

Proposición 1.2.6

(i) Supongamos que F toma valores compactos, entonces F es semicontinua superior en $x \in dom(F)$, si y solo si,

$$\forall \{x_n\} \subset X \ \textit{tal que}\ x_n \to x, \forall \{y_n\} \ \textit{tal que}\ y_n \in F(x_n) \ \textit{para cada}\ n \in \mathbb{N}, \ \textit{existe} \tag{1.8}$$

$$\textit{una subsucesión de}\ \{y_n\}, \ \textit{cuyo límite pertenece a}\ F(x).$$

(ii) F es semicontinua inferior en $x \in dom(F)$, si y solo si,

$$\textit{Para cada}\ y \in F(x) \ \textit{y cualquier sucesión}\ \{x_n\} \ \textit{en}\ dom(F) \ \textit{tal que}\ x_n \to x$$

$$\textit{existe una sucesión}\ y_n \in F(x_n) \ \textit{tal que}\ y_n \to y.$$

La prueba de esta proposición puede encontarse en [14]. Agregamos que la condición (1.8) equivale a

$$\forall \{x_n\} \subset X \ \text{tal que}\ x_n \to x, \forall \{y_n\} \ \text{tal que}\ y_n \in F(x_n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} d(y_n, F(x)) = 0.$$

1.2.3. Convergencia de conjuntos

En primer término vamos a referirnos a la convergencia de una sucesión de subconjuntos en un espacio métrico en el sentido Painlevé-Kuratowski, no sin antes recordar que si d es la métrica en X y $x \in X, A \subset X$, entonces $d(x, A)$ es $\inf_{a \in A} d(x, a)$.

Definición 1.2.7 *Sea $\{C_k\}$ una sucesión de subconjuntos del espacio métrico X, entonces el conjunto*

$$Limsup_{k \to +\infty} C_k := \{x \in X \ : \ \liminf_{k \to +\infty} d(x, C_k) = 0\}$$

se denomina **límite superior** *de la sucesión $\{C_k\}$. Mientras que el conjunto*

$$Liminf_{k \to +\infty} C_k := \{x \in X \ : \ \lim_{k \to +\infty} d(x, C_k) = 0\}$$

se llama **límite inferior** *de la sucesión $\{C_k\}$.*

Propiedades inmediatas que se desprenden de la definición, son:

(i) $Liminf_{k \to +\infty} C_k$ y $Limsup_{k \to +\infty} C_k$ son conjuntos cerrados.

(ii) $Limsup_{k \to +\infty} C_k = Limsup_{k \to +\infty} \overline{C}_k$ (lo mismo para Liminf.)

(iii) $Liminf_{k\to+\infty}C_k \subset Limsup_{k\to+\infty}C_k$.

Se dice que la sucesión $\{C_k\}$ es convergente a un conjunto C si

$$C = Liminf_{n\to+\infty}C_k = Limsup_{k\to+\infty}C_k$$

En tal caso, se dice que C es el límite de la sucesión $\{C_k\}$ y se escribe $\lim\limits_{k\to+\infty} C_k = C$.
Se presenta una caracterización en términos de sucesiones extraídas de los conjuntos C_k (ver [2] y [29]).

Proposición 1.2.8 *Sea $\{C_k\}$ una sucesión de conjuntos no vacíos de X, entonces*

(i) $\mathrm{Liminf}_{k\to+\infty}C_k = \{x \in X : x \textit{ es límite de una sucesión } \{x_k\} \textit{con } x_k \in C_k \textit{ para cada } k\}$

(ii) $\mathrm{Limsup}_{k\to+\infty}C_k = \{x \in X : x \textit{ es límite de una subsucesión de una sucesión } \{x_k\}$ $\textit{con } x_k \in C_k \textit{ para cada } k\}$

También se dan representaciones para los conjuntos Liminf y Limsup, en los términos siguientes:

Proposición 1.2.9 *Para una sucesión $\{C_k\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X:*

$$\mathrm{Limsup}_{k\to+\infty}C_k = \bigcap_{N\in\mathbb{N}^+} \overline{\bigcup_{k\geq N} C_k}\,, \qquad y$$

$$\mathrm{Liminf}_{k\to+\infty}C_k = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{[\bigcup_{N\in\mathbb{N}^+} \bigcap_{k\geq N} \overline{B}_\epsilon(C_k)]}$$

Se precisa que la métrica considerada en $\mathbb{R}^n$ será la generada por la norma $\|\ \|$ definida por $\|x\| := \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$ para cada $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Particularmente $\mathbb{R}^n_+$ toma la topología relativa como subconjunto de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$. La bola cerrada unitaria y la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n_+$ están dadas respectivamente por

$$\mathbb{B}_1^+ := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \|x\| \leq 1\}, \qquad \mathbb{S}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \|x\| = 1\}$$

1.2.4. Conjuntos normales

Se otorga una parte de este documento para ocuparnos con especial atención de los **conjuntos normales**, justificado por el papel que desempeñan en el presente trabajo. Mientras que en la convexidad clásica la separación de un punto de un conjunto convexo cerrado mediante un hiperplano, es el punto crucial para importantes aportes, en el esquema de la convexidad abstracta se implementan “nuevos conjuntos convexos ” y también “nuevos hiperplanos”. Un conjunto normal es uno de estos nuevos conjuntos convexos. Por otro lado, todo conjunto convexo cerrado no vacío tienen un infimal representación en el sentido de ser expresado como intersección de semiespacios cerrados que lo contienen, análogamente los conjuntos normales cerrados tienen una representación infimal como intersección de “apropiados semiespacios cerrados”. Esto último es crucial para nuestros resultados. Algunas definiciones y propiedades que a continuación se exponen tienen como referencia a [40], [32] y [35]. Por el contexto de nuestro trabajo, presentamos los conjuntos normales en $\mathbb{R}^n_+$, no obstante se pueden desarrollar en otros ambientes como se muestra en [41].

Definición 1.2.10

(a) Un subconjunto C de $\mathbb{R}^n_+$ se denomina **normal** *si satisface*

$$x \in C,\ 0 \leq y \leq x \Rightarrow y \in C.$$

(b) Un subconjunto D de $\mathbb{R}^n_+$ se denomina **co − normal** *si satisface*

$$x \in D,\ x \leq x' \Rightarrow x' \in D.$$

Son conjuntos normales $\mathbb{R}^n_+$ y $\emptyset$. Dado $y \in \mathbb{R}^n_+$, el conjunto $[0, y] := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \leq y\}$ es un conjunto normal. Algunas propiedades fundamentales de los conjuntos normales, son:

(i) Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de conjuntos normales en $\mathbb{R}^n_+$, entonces $\cup_{i\in I}C_i$ y $\cap_{i\in I}C_i$ son conjuntos normales.

(ii) Si C es un conjunto normal, entonces $\overline{C}$ es también normal.

(iii) Si C es normal, entonces : $C \cap \mathbb{R}^n_{++} \neq \emptyset \Leftrightarrow int(C) \neq \emptyset$.

Para cualquier conjunto $C \subset \mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+$ es un conjunto normal que contiene a C, por las propiedades anteriores se sigue que la intersección de todos los conjuntos normales que contienen a C resulta ser un conjunto normal que contiene a C. Este conjunto se denomina la cápsula normal de C y se denotará por $No(C)$.
Para $x \in \mathbb{R}^n_+$ no nulo, sean $I_0(x) := \{i \in \{1, \cdots, n\} : x_i = 0\}$ y $K_x := \{y \in \mathbb{R}^n_+ : y_i > x_i, \forall i \notin I_0(x)\}$, de este modo $\overline{K_x} = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : y \geq x\}$.

Definición 1.2.11 *Dado un conjunto normal C, se dice que $y \in \mathbb{R}^n_+$ es un* **punto frontera superior de** *C, si $[0, y] \subset \overline{C}$ y $K_y \subset \mathbb{R}^n_+ \setminus C$. La frontera superior de C denotada por ∂^+C es el conjunto de los puntos frontera superior de C. Mientras que si $D \subset \mathbb{R}^n_+$ es un conjunto compacto, entonces $v \in D$ se llama punto Pareto de D, si $x \in D, x \geq v \Rightarrow x = v$. El conjunto de los puntos Pareto de D se denota por $Pa(D)$.*

Proposición 1.2.12

(i) Para todo $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n_+ : No(C) = (C - \mathbb{R}^n_+) \cap \mathbb{R}^n_+$.

(ii) Si $C \subset \mathbb{R}^n_+$ es cerrado, entonces $No(C)$ es un conjunto normal cerrado.

(iii) Si $C \subset \mathbb{R}^n_+$ es compacto, entonces $No(C)$ es compacto.

(iv) Si C es compacto y normal, entonces $Pa(C) \subset \partial^+(C)$ y $C = No(\partial^+(C)) = No(Pa(C))$.

Observación 1.2.13 *Sea $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n_+$ un subconjunto convexo normalmente convexo (evenly convex , en inglés) tal que su cono de recesión D^∞ es $\mathbb{R}^n_+$, entonces el conjunto $C := \mathbb{R}^n_+ \setminus D$ resulta ser normal, y es sabido que existe una familia $\{H_i\}_{i \in J}$ de semiespacios abiertos en $\mathbb{R}^n$ tales que $D = \cap_{i\in J} H_i$ y haciendo $H_i^+ := H_i \cap \mathbb{R}^n_+$, entonces podemos expresar $C = \cup_{i \in J} L_i$ donde cada L_i es cerrado en $\mathbb{R}^n_+$. El asunto natural es expresar un conjunto normal como intersección(o unión) de los correspondientes sustitutos de los semiespacios cerrados en $\mathbb{R}^n_+$ independientemente de los hiperplanos clásicos.*

Manteniendo la notación usual en convexidad abstracta, para $\ell \in \mathbb{R}^n_+$ se define la función $\langle \ell, \ \rangle : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ por

$$\langle \ell, x\rangle = \begin{cases} \min\limits_{i \in I_+(\ell)} \ell_i x_i, & \text{si } \ell \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ell = 0. \end{cases}$$

Las funciones de esta forma se denominan del *tipo* mín o **min − funciones**. Para cada $\ell \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle\langle \ell, x\rangle\rangle = 1\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle \ell, x\rangle \leq 1\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle \ell, x\rangle \geq 1\}$, se denominan min-hiperplano cerrado, y min-semiespacios cerrados, respectivamente. Particularmente los semiespacios cerrados $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle \ell, x\rangle \leq \alpha\}$ para $\alpha > 0$ son conjuntos normales. Por su parte, $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle \ell, x\rangle < 1\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle \ell, x\rangle > 1\}$, se llaman min-semiespacios abiertos en $\mathbb{R}^n_+$. La siguiente proposición (ver [35]) expone que un conjunto normal cerrado es una intersección de min-semiespacios cerrados normales.

Proposición 1.2.14 *Para un subconjunto no vacío C de $\mathbb{R}^n_+$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) C es normal y cerrado.

(ii) Para cada $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus C$, existe $\ell \in \mathbb{R}^n_+$ tal que

$$\langle \ell, g\rangle \leq 1 < \langle \ell, x\rangle, \quad \forall g \in C.$$

Capítulo 2

Funciones $\alpha-$co-radiantes

2.1. Introducción

En la teoría económica se han desarrollado extensivamente las funciones de producción del tipo homogéneas de primer grado, específicamente en el aspecto de las funciones de producción de retornos constantes, y la vez este tipo de homogeneidad se ha transportado a las funciones de valor vectorial y de valor conjunto. En el contexto de la convexidad abstracta, se han hecho aportes mediante funciones de valor real extendido que simulan a las funciones de producción de retornos crecientes así como de retornos decrecientes, estas últimos a través de las funciones co-radiantes definidas en un cono que representa el conjunto de las canastas de los inputs.
En el presente capítulo, nos ocupamos de las funciones $\alpha-$coradiantes que se presentan como una generalización de las funciones homogéneas de grado α, con herramientas de la convexidad abstracta y fundamentalmente en base a resultados obtenidos para las funciones denominadas co-radiantes.
Para $\alpha > 0$ se tiene de inmediato como ejemplo a las funciones homogéneas de Cobb-Douglas de grado α, así como las funciones denominadas CES(Constant Elasticity of Substitution Production Functions).

2.2. Funciones $\alpha-$co-radiantes

Definición 2.2.1 *Dados $\alpha > 0$ y una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Se dice que f es $\alpha-$co-radiante, si satisface*

$$f(tx) \geq t^\alpha f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \forall t \in (0,1] \tag{2.1}$$

Equivalentemente, f es $\alpha-$coradiante, si y solo si

$$f(tx) \leq t^\alpha f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \forall t \geq 1 \tag{2.2}$$

Denotaremos por $\mathbb{U}^\alpha$ al conjunto de funciones $\alpha-$coradiantes. Naturalmente las funciones $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que son positivamente homogéneas de grado α, son funciones $\alpha-$coradiantes, del mismo modo toda función constante $c \in [0, +\infty]$ está siempre en $\mathbb{U}^\alpha$. A las funciones $1-$co-radiantes las llamaremos simplemente co-radiantes siguiendo a [32] y [22]. El conjunto $\mathbb{U}^\alpha$ estará dotado por la relación de orden generada por el orden puntual entre funciones, es decir

$$f, g \in \mathbb{U}^\alpha, f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

Proposición 2.2.2 *Para $\alpha > 0$, $\mathbb{U}^\alpha$ goza de las siguientes propiedades*

1) *$\mathbb{U}^\alpha$ es un cono convexo, es decir para $f_1, f_2 \in \mathbb{U}^\alpha, c > 0$ se cumple $cf_1 + f_2 \in \mathbb{U}^\alpha$.*

2) *Si τ es un conjunto no vacío arbitrario de índices y $\{f_i\}_{i\in\tau}$ una familia de funciones en $\mathbb{U}^\alpha$, entonces las funciones f_- y f_+ definidas por*

$$f_-(x) := \inf_{i\in\tau} f_i(x), \qquad f_+(x) := \sup_{i\in\tau} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+$$

son elementos de $\mathbb{U}^\alpha$.

La justificación es inmediata.

Ejemplos 2.2.3

1) *Si $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ es $\alpha-$coradiante, $g : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es $\beta-$coradiante y creciente, entonces la función $F : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $F(x) = g(f(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, es $\alpha\beta-$coradiante.*

2) *Sea $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ una función cóncava y $\alpha > 0$, entonces la función u^α definida por $u^\alpha(x) := (u(x))^\alpha$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, es $\alpha-$coradiante. Más aun, según [30], para $\alpha > 0$, una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ se llama $\alpha-$cóncava si $f(tx + (1-t)y) \geq [t(f(x))^\alpha + (1-t)(g(x))^\alpha]^{1/\alpha}$, y si adicionamos la condición que f no toma valores negativos, entonces ésta resulta ser $1/\alpha-$co-radiante.*

3) *Sea $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ positivamente homogénea de grado $\theta > 0$, entonces f es $\alpha-$co-radiante para $\alpha \geq \theta$, pues esto se basa en el hecho que $t^{\frac{\theta}{\alpha}} \geq t, \forall t \in (0, 1]$.*

4) *En general, si $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ es $\alpha-$co-radiante y $\beta \geq \alpha$, entonces f es $\beta-$co-radiante.*

5) *Si f es $\alpha-$co-radiante, entonces $dom(f) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : f(x) < +\infty\}$ y $nu(f) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : f(x) = 0\}$ son conjuntos co-radiantes en $\mathbb{R}^n_+$.*

Observación 2.2.4 *Note que la función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = \sqrt{x + 1/4}$ para cada $x \in \mathbb{R}_+$ es $1/2-$co-radiante, mas no es $1/3-$co-radiante, pues no se cumple (2.1) para $\alpha = 1/3, x = 4, t = 1/8$. Surge naturalmente, una interrogante ¿Si f es $\alpha-$coradiante, existe un mínimo positivo $\overline{\alpha} > 0$ tal que f es $\overline{\alpha}-$co-radiante?*

Definición 2.2.5 *Dadas una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ y una constante $\alpha > 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$ se define la función $\Phi_x : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$ por*

$$\Phi_x(\lambda) := \frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha}, \qquad \forall \lambda > 0 \tag{2.3}$$

La demostración del siguiente lema toma las técnicas para el caso de las funciones coradiantes de [22, Proposición 1].

Lema 2.2.6 *Sea $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función, entonces f es $\alpha-$coradiante, si y solo si Φ_x es decreciente para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$.*

Demostración: Fijado $x \in \mathbb{R}^n_+$, sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, entonces

$$\Phi_x(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2^\alpha} f(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\lambda_1 x) \geq \frac{1}{\lambda_1^\alpha} f(\lambda_1 x) = \Phi_x(\lambda_1)$$

Recíprocamente, sea $x \in \mathbb{R}^n_+$ arbitrario y fijo, $t \in (0, 1]$, entonces $\Phi_x(t) \geq \Phi_x(1)$, y de este modo $f(tx) \geq t^\alpha f(x)$. $\square$

Para el próximo resultado se requiere de la derivada superior de Dini, particularmente para una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ con $x \in dom(f)$, la derivada superior de Dini de f en x según la dirección $y \in \mathbb{R}^n_+$ se define como

$$f^{\downarrow}(x, y) := \limsup_{t\downarrow 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}$$

. Si f es $\alpha-$coradiante y $x \in dom(f)$, entonces $f^{\downarrow}(x, x)$ está bien definida.
Para $x \in dom(f)$ fijo, se define la función $f_x : \mathbb{R}_{++} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ por $f_x(\lambda) = f(\lambda x)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$, de la cual su derivada superior derecha en $\lambda = 1$ está dada por $(f_x)'_+(1) = \limsup_{t\downarrow 0} \dfrac{f((1 + t)x) - f(x)}{t}$.
La proposición que sigue es una versión general y corregida de la Proposición 1 de [22], siguiendo fundamentalmente los mismos procedimientos en la demostración.

Proposición 2.2.7 *Si la función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ es $\alpha-$co-radiante, entonces*

$$f^{\downarrow}(x, x) \leq \alpha f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{2.4}$$

Si para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$ la función f_x es continua, entonces el recíproco también es valido.

Demostración: Fijando $x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
(\Phi_x)'_+(\lambda) &= \limsup_{t\downarrow 0} \frac{\dfrac{f((\lambda + t)x)}{(\lambda + t)^\lambda} - \dfrac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha}}{t} \\
&= \limsup_{t\downarrow 0} \left(\frac{1}{(\lambda + t)^\alpha} [\frac{f(\lambda x + tx) - f(\lambda x)}{t}] + \frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha} [\frac{\lambda^\alpha - (\lambda + t)^\alpha}{t(\lambda + t)^\alpha}] \right) \\
&= \frac{1}{\lambda^\alpha} f'(\lambda x, x) - \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}} f(\lambda x) \qquad (*)
\end{aligned}$$

En particular $(\Phi_x)^+(1) = f^{\downarrow}(x,x) - \alpha f(x)$ y por el lema previo $(\Phi_x)^+(1) \leq 0$ y de esto se concluye con (2.4).
Enseguida supongamos que se cumple (2.4), entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$ fijo y $\lambda > 0$, sea $y = \lambda x$, por lo que

$$\begin{aligned} f^{\downarrow}(\lambda x, x) &= \limsup_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[f(y + \frac{t}{\lambda}y) - f(y)] \\ &= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}(\frac{f((1+s)y) - f(y)}{s}) \\ &= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\frac{f((1+s)y)}{(1+s)^\alpha} - \frac{f(y)}{1^\alpha}}{s} + (\frac{(1+s)^\alpha - 1}{s(1+s)^\alpha})f((1+s)y)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}((\Phi_y)'_+(1) + \alpha f(y)) \end{aligned}$$

Note que en la penúltima línea de arriba, se hace uso de la continuidad de Φ_y. De (*) y los cálculos previos, se obtiene

$$(\Phi)'_+(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}(\Phi_y)'_+(1) \leq 0.$$

Finalmente por la continuidad de Φ_x, se concluye que Φ_x es decreciente. $\square$

Observación 2.2.8 *Note que el recíproco de la proposición última, requiere de la continuidad de cada Φ_x pues el solo hecho que $(\Phi_x)'_+(\lambda) \leq 0$ para cada $\lambda > 0$ no garantiza que Φ_x sea decreciente.*

Del mismo modo como las funciones co-radiantes vienen acompañadas de las funciones inversa co-radiantes, también presentamos las correspondientes funciones inversa $\alpha-$co-radiantes.

Definición 2.2.9 *Para $\alpha > 0$, una función $v : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se denomina inversa $\alpha-$coradiante, si*

$$v(tx) \leq \frac{v(x)}{t^\alpha} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \forall t \in (0,1] \tag{2.5}$$

Equivalentemente, v es inversa $\alpha-$co-radiante, si y solo si,

$$v(tx) \geq \frac{v(x)}{t^\alpha} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \forall t \geq 1.$$

Asumiendo $\frac{1}{0} = +\infty$ y $\frac{1}{+\infty} = 0$, resulta que la función u es $\alpha-$co-radiante, si y solo si, la función $v := \frac{1}{u}$ es inversa $\alpha-$co-radiante.
Mencionamos algunas propiedades básicas. Si denotamos por $\mathbb{V}^\alpha$ al conjunto de funciones $v : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que son inversa $\alpha-$co-radiantes,entonces

1) $\mathbb{V}^\alpha$ es un cono convexo.

2) Dada una familia $\{v_i\}_{i\in\tau}$ en $\mathbb{V}^\alpha$, las funciones $v_- : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y $v^+ : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$v_-(x) := \inf_{i\in\tau} v_i(x), \qquad y \qquad v^+(x) := \sup_{i\in\tau} v_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

son también elementos de $\mathbb{V}^\alpha$.

3) Si $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ entonces $\mathbb{V}^{\alpha_1} \subset \mathbb{V}^{\alpha_2}$

2.2.1. Funciones $\alpha-$co-radiantes crecientes

Un cono propio de $\mathbb{U}^\alpha$ de interés en el esquema de la convexidad abstracta, es el cono convexo $\mathbb{U}^\alpha_i := \{u \in \mathbb{U}^\alpha \setminus u \text{ es creciente }\}$.

Proposición 2.2.10 *Sea $u \in \mathbb{U}^\alpha_i$. Entonces*

1) Si existe $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ tal que $u(y) = 0$ entonces $u \equiv 0$.

2) Si existe $y \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $u(y) = +\infty$ entonces $u = +\infty$ en $\mathbb{R}^n_{++}$.

3) u es continua en $\mathbb{R}^n_{++}$

Demostración: Análogamente, se siguen los procedimientos de [22, Proposición 3] $\square$

Definición 2.2.11 *(Extensión Homogénea) Sean $f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función y $\alpha > 0$. La función $\widehat{f}$ definida en el subconjunto $\mathbb{R}^{n+1}_* := \{(x,\lambda) \setminus x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda > 0\} \cup \{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, mediante*

$$\widehat{f}(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda^\alpha f(\frac{x}{\lambda}), & si\ x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda > 0, \\ 0, & si\ x = 0, \lambda = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

se denomina "La extensión homogénea de grado α de f". Esta denominación se justifica por los siguientes puntos:

(i) $\widehat{f}(x,1) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$.

(ii) Si $x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda > 0$ entonces para cada $t > 0$ es fácil verificar que $\widehat{f}(tx, t\lambda) = t^\alpha \widehat{f}(x,\lambda)$, mientras que $\widehat{f}(t0, t0) = 0 = t^\alpha \widehat{f}(0,0)$.

Al conjunto $\mathbb{R}^{n+1}_*$ le dotamos del orden inducido por el orden de las componentes, que hereda como subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Proposición 2.2.12 *$f : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ pertenece a $\mathbb{U}^\alpha_i$, si y solo si, $\widehat{f}$ es positiva homogénea de grado α y creciente en ambas variables.*

Demostración: Sean $x \geq x'$ en $\mathbb{R}^n_+$ y $\lambda \geq \lambda' > 0$ y asumiendo que $f \in \mathbb{U}^\alpha_i$

$$\widehat{f}(x,\lambda) = \lambda^\alpha f(\frac{\lambda'}{\lambda}\frac{x}{\lambda'}) \geq (\lambda')^\alpha f(\frac{x'}{\lambda'})$$

y $\widehat{f}(x,\lambda) \geq 0 = \widehat{f}(0,0)$. Recíprocamente, sean $x \geq x'$ en $\mathbb{R}^n_+$, entonces $f(x) = \widehat{f}(x,1) \geq \widehat{f}(x',1) = f(x')$. Finalmente para $x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0,1]$, $t^\alpha f(x) = \widehat{f}(tx,t) \leq \widehat{f}(tx,1) = f(tx)$ □

Siguiendo la notación de [31], por $\widehat{L}^-$ denotaremos al conjunto de funciones $\widehat{\ell} \in \mathbb{R}^{n+1}_*$ (con $\widehat{\ell} = (\ell, c)$ tal que $\ell \in \mathbb{R}^n_+, c > 0$) definidas en $\mathbb{R}^{n+1}_+$ por $\widehat{\ell}(\widehat{x}) := \langle \ell, x\rangle$.
Por la Proposición previa, si $f \in \mathbb{U}^\alpha_i$, entonces $(\widehat{f})^{1/\alpha}$ es una función positivamente homogénea y creciente en $\mathbb{R}^{n+1}_*$ y considerando la Observación 5.1 de [31] se sigue que $(\widehat{f})^{1/\alpha}$ es convexa con respecto a $\widehat{L}^-$, en consecuencia existe un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_{++}$ tal que particularmente para los $\widehat{x}$ de la forma $(x,1)$ con $x \in \mathbb{R}^n_+$, podemos expresar

$$(\widehat{f}\,)^{1/\alpha}(x,1) = \sup\{\text{mín}\{\langle \ell, x\rangle, c\} \setminus (\ell,c) \in S\}$$

Lo últimamente expuesto da lugar al siguiente teorema, no sin antes para cada $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n_+$ y $\alpha > 0$ denotamos por ℓ^α al vector $(\ell_1^\alpha, \cdots, \ell_n^\alpha)$.

Teorema 2.2.13 *Sea $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, entonces $f \in \mathbb{U}^\alpha_i$ y es semicontinua inferior, si y solo si, existe un subconjunto no vacío $\widetilde{S}$ de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_{++}$ tal que*

$$f(x) = \sup\left\{\text{mín}\{\text{mín}\,\widetilde{\ell}_i x_i^\alpha, \widetilde{c}\} \setminus (\widetilde{\ell}, \widetilde{c}) \in \widetilde{S}\right\}$$

Demostración: Se ha mostrado que existe un subconjunto no vacío $\widetilde{S}$ de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_{++}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sup_{(\ell,c)\in S}\{\text{mín}\{\langle \ell, x\rangle, c\}\}\right)^\alpha \\ &= \sup_{(\ell,c)\in S}\{\text{mín}\{\langle \ell^\alpha, x^\alpha\rangle, c^\alpha\}\} \\ &= \sup_{(\widetilde{\ell},\widetilde{c})\in \widetilde{S}}\{\text{mín}\{\langle \widetilde{\ell}, x^\alpha\rangle, \widetilde{c}\}\} \end{aligned}$$

donde $\widetilde{S}$ está conformado por los pares (ℓ^α, c^α) con $(\ell, c) \in S$. □

2.2.2. Funciones casicóncavas $\alpha-$co-radiantes

Denotando por $\mathbb{U}^\alpha_{ic}$ al conjunto de funciones de $\mathbb{U}^\alpha_i$ que son cuasicóncavas, nos ocuparemos particularmente de estas funciones con valor en $\mathbb{R}_+$, donde $[x,y]$ denotará el producto interno canónico de los vectores x, y de $\mathbb{R}^n$.
Para $\alpha > 0, \ell \in \mathbb{R}^n_+, k \in \mathbb{R}_+$ dados, se definen las funciones $f_{\ell,k} : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ por

$$f_{\ell,k}(x) = \text{máx}\{[\ell, x^\alpha], k\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

estas funciones resultan ser $\alpha-$coradiantes, crecientes y continuas. Denotamos por $\mathcal{H}^\alpha_+$ al conjunto de estas funciones.

Observación 2.2.14 *En [22] el enunciado del Teorema 8 hace referencia a una función $u : \mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ y a un conjunto no vacío S, note que si existe $x' \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $u(x') = +\infty$, entonces es imposible tener una representación de $u(x')$ como se manifiesta en dicho teorema, por lo que es necesario considerar u tomando solamente valores en $\mathbb{R}_+$. Líneas siguientes haremos uso de este teorema con la enmienda descrita.*

Se mostrará que toda función $\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ $\alpha-$co-radiante, creciente, scs y casicóncava, es $\mathcal{H}^\alpha_+-$cóncava.

Proposición 2.2.15 *$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ es $\alpha-$co-radiante, creciente, cuasicóncava y scs, si y solo si, existe un subconjunto no vacío $\widetilde{S} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que*

$$f(x) = \inf_{(x^*,k^*)\widetilde{S}} \widetilde{f}_{x^*,k^*}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

donde cada $\widetilde{f}_{x^*,k^*}$ es elemento de $\mathcal{H}^\alpha_+$.

Demostración: Por ser $g(t) = t^{1/\alpha}, t > 0$ una función creciente y continua, entonces $f^{1/\alpha} : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ es co-radiante, casicóncava y scs. Por [22, Teorema 8], existe un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que

$$(f(x))^{1/\alpha} = \inf_{(x^*,k)\in S} (\max\{[x^*, x], k\})$$

de donde $f(x) = \inf_{(x^*,k)\in S} (\max\{[x^*, x^\alpha], k^\alpha\}) = \inf_{(x^*,k^*)\in \widetilde{S}} (\max\{[x^*, x^\alpha], k^*\})$ con $f_{x^*,k^*} \in \mathcal{H}^\alpha_+$.

$\square$

2.3. Funciones Homogéneas Cóncavas

Teniendo nuevamente como punto de partida la Identidad de Eüler para funciones homogéneas, en esta parte damos algunos resultados al respecto, no sin antes establecer que $\partial^s f(\overline{x})$ denotará el superdiferencial de una función cóncava f en $\overline{x}$.

Proposición 2.3.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n_+ \to R_+$ cóncava y continua. Entonces, f es positiva homogénea si y solo si, para cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_{++}, \langle x^*, \overline{x}\rangle = f(\overline{x}), \forall x^* \in \partial^s f(\overline{x})$.*

Demostración: La primera parte se sigue de [42]. Procedemos con la segunda. Sea $\overline{x}$ y $\lambda \in (0, 1)$,entonces

$$f(\lambda\overline{x}) = f(\lambda\overline{x} + (1-\lambda)f(0)) \geq \lambda f(\overline{x}) = \lambda\langle x^*, \overline{x}\rangle$$

para cada $x^* \in \partial^s f(\overline{x})$, y

$$f(\lambda\overline{x}) \leq f(\overline{x}) + \langle x^*, \lambda\overline{x} - \overline{x}\rangle = \lambda\langle x^*, \overline{x}\rangle$$

resultando $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_{++}, \lambda \in (0,1)$.
Mientras que para $\lambda > 1$, $f(\overline{x}) = f(\frac{1}{\lambda}\lambda\overline{x}) = \frac{1}{\lambda}f(\lambda\overline{x})$. En consecuencia, $f(\lambda x) = \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n_{++}, \lambda > 0$. La conclusión se sigue por la continuidad de f. $\square$

Para los Corolarios que siguen se tiene en cuenta la concavidad de la función $g : \mathbb{R}_+ \to R_+$ definida por $g(x) = x^p, \forall x \geq 0$, donde $p \in (0,1]$.

Corolario 2.3.2 *Sean $p \in (0,1]$ y $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ cóncava continua tal que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n_{++}$. Entonces la función $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $F(x) = (f(x))^p, \forall x \in \mathbb{R}^n_+$ es homogénea positiva, si y solo si para cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$*

$$\langle z, \overline{x}\rangle = pF(\overline{x}), \qquad \forall z \in \partial^s F(\overline{x}).$$

Demostración: Se sigue directamente del hecho que F es cóncava y continua en $\mathbb{R}^n_+$ y para cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ se tiene $\partial^s(F)(\overline{x}) = \{p(f(\overline{x}))^{p-1}x^* : x^* \in \partial^s(f(\overline{x}))\}$. $\square$

Corolario 2.3.3 *Sean $f^1, \cdots f^m$ m funciones $\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ cóncavas, continuas y $g : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$ cóncava, continua y creciente(en el sentido: $x \leq y$ en $\mathbb{R}^m \Rightarrow g(x) \leq g(y)$) . Sea $F : R^n_+ \to \mathbb{R}^m_+$ definida por $F(x) = (f^1(x), \cdots, f^m(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, entonces $g \circ F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ es homogénea, si y solo si para cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle z^i, \overline{x}\rangle = g(F(\overline{x})), \qquad \forall(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \partial^s g(F(\overline{x})), z^i \in \partial^s f^i(\overline{x}), i = 1, \cdots, m.$$

Demostración: Este resultado se deduce de la identidad

$$\partial^s(g \circ F)(\overline{x}) = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z^i \; : \; (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \partial^s g(F(\overline{x})); z^i \in \partial^s f^i(\overline{x}), i = 1, \cdots, m.\} \quad (2.7)$$

La versión de la identidad (2.7) para el caso convexo puede encontrarse en[15, Pag 186,]
$\square$

Observación 2.3.4 *Considerando una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ cóncava y homogénea de grado $\alpha > 0$, se deduce que $\alpha \leq 1$. Pues supongamos lo contrario, $\alpha = 1 + \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ se verifica*

$$\langle x^*, x\rangle = (1 + \epsilon)f(x), \qquad \forall x^* \in \partial^s f(x)$$

Se garantiza que existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ tal que $f(\overline{x}) > 0$ que verifica

$$\begin{aligned} 2^{1+\epsilon} f(\overline{x}) &= f(2\overline{x}) \leq f(\overline{x}) + \langle x^*, \overline{x}\rangle \\ &= (2 + \epsilon)f(\overline{x}) \end{aligned}$$

deduciéndose $2^{1+\epsilon} \leq 2 + \epsilon$, lo cual es una contradicción.

Corolario 2.3.5 *Sean $\alpha \in (0,1]$ y $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ cóncava y continua. Dadas las afirmaciones:*

(i) f *es homogénea de grado* α

(ii) *Para cada* $x \in \mathbb{R}^n_{++}$:

$$\langle x^*, x\rangle = \alpha f(x), \qquad \forall x^* \in \partial^s f(x)$$

(iii) *Para cada* $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, *existe* $x^* \in \partial^s f(x)$ *tal que*

$$\langle x^*, x\rangle = \alpha f(x).$$

Entonces, $(i) \Rightarrow (ii), (ii) \Rightarrow (iii)$ *y* $(iii) \Rightarrow (i)$.

Demostración: La primera parte (i) se sigue de [42], mientras que la segunda parte es directa. Para la última implicancia, fijado $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ arbitrario, sea $x^* \in \partial^s f(x)$, entonces para las funciones g_1 y g_2 definidas en $(0, +\infty)$ mediante

$$g_1(tx) := t^\alpha f(x), \qquad g_2(t) := f(tx), \qquad \forall t > 0$$

Estas funciones son cóncavas. Si $f(x) = 0$ entonces $f(tx) = 0$ para cada $t > 0$, pues caso contrario generaría una contradicción con la concavidad de f. En tal caso, g_1 y g_2 coinciden. Ahora supongamos que $f(x) > 0$, esto permite definir las funciones

$$G_1(t) := \ln(g_1(t)) = \alpha \ln(t) + \ln(f(x)), \qquad G_2(t) := \ln(g_2(t)) = \ln(f(tx)), \qquad \forall t > 0$$

ambas cóncavas, G_1 derivable con $G'(t) = \dfrac{\alpha}{t}$ y

$$\begin{aligned} \partial^s G_2(t) &= \{\frac{\langle x, x^*\rangle}{f(tx)} : x^* \in \partial^s f(tx)\} \\ &= \frac{1}{t}\{\frac{\langle tx, x^*\rangle}{f(tx)} : x^* \in \partial^s f(tx)\} \\ &= \frac{1}{t}\{\frac{\alpha f(tx)}{f(tx)}\} \\ &= \{\frac{\alpha}{t}\}, \qquad \forall t > 0. \end{aligned}$$

además G_1 y G_2 coinciden en $t = 1$, y esto hace que en general $G_1(t) = G_2(t)$ para todo $t > 0$ y lo mismo para g_1 y g_2. $\square$

2.4. Indice co-radiante

En la Observación (2.2.4) se ha planteado la interrogante ¿si $f \in \mathbb{U}^\alpha$, existe $\overline{\alpha}$ mínimo positivo tal que $f \in \mathbb{U}^{\overline{\alpha}}$?

En el contexto económico, es de interés analizar el comportamiento de una función de producción $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ que son positivas en $\mathbb{R}^n_{++}$ como ocurre frecuentemente en las funciones canónicas de producción. Denotaremos por $\mathcal{C}_i$ al conjunto de las funciones $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ crecientes y continuas, que son diferenciables y positivas en $\mathbb{R}^n_{++}$. Resulta que $\mathcal{C}_i$ es un cono.

Definición 2.4.1 *Sea $f \in \mathcal{C}_i$, se define el* **índice co − radiante** *de f por*

$$Cor(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n_{++}} \frac{[\nabla f(x), x]}{f(x)} \tag{2.8}$$

Note que Cor definida en $\mathcal{C}_i$ toma valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Ejemplo 2.4.2

En [8] podemos encontrar el uso de funciones del tipo $g(x) = C + b\dfrac{x^2}{1+x^2}$ definidas para $x \geq 0$ (denominadas convexas-cóncavas en teoría de producción), donde C y b son constantes positivas. Se verifica que $g \in \mathcal{C}_i$ y $Cor(g) = 2$. En general, para $p > 0$ las funciones del tipo $g(x) = C + b\dfrac{x^p}{1+x^p}$ definidas en $[0, +\infty)$, pertenecen a $\mathcal{C}_i$ y $Cor(g) = p$.

(a) **Proposición 2.4.3** *Se enuncian algunas propiedades de Cor.*

(i) *Si $f \in \mathcal{C}_i$ es constante(positiva), entonces $Cor(f) = 0$.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{C}_i$ y α una constante positiva, entonces $Cor(\alpha f) = Cor(f)$.*

(iii) *Si f es homogénea de grado $\alpha > 0$, entonces $Cor(f) = \alpha$.*

(iv) *Sea $f \in \mathcal{C}_i$ y $\beta > 0$, entonces $Cor(f^\beta) = \beta Cor(f)$.*

(v) *Si $\alpha > 0$ y $f \in \mathcal{C}_i$ es $\alpha-$co-radiante, entonces $Cor(f) \leq \alpha$. Si f no es constante entonces $Cor(f) > 0$ y f es $Cor(f)-$ coradiante.*

Demostración: La prueba se sigue directamente de (2.8). □

El punto (v) nos dice que si existe $Cor(f) \in \mathbb{R}_+$, entonces es el mínimo número no negativo α que hace que f sea $\alpha-$co-radiante.

Capítulo 3

Aplicaciones co-radiantes de valor conjunto

3.1. Introducción

Uno de los temas cruciales en el desarrollo de la convexidad abstracta es la representación de ciertos tipos de funciones definidas en un cono de un espacio vectorial ordenado, como el supremo o el ínfimo de un conjunto de funciones denominadas elementales. Se han logrado importantes aportes al respecto, directa e indirectamente sobre todo en las aplicaciones. En [32], [20],[33] entre otras referencias podemos encontrar suficiente información respecto a lo que se conceptualiza como representación de funciones. Lo manifestado se ha desarrollado para funciones de valor puntual, con valores en $V = \overline{\mathbb{R}}_+$ o $V = \mathbb{R}_+$ así como en $V = \mathbb{R}$.
Dado que el dominio de las funciones antes referidas, es un cono, las características que se han capturado han sido sobre el comportamiento de las funciones a lo largo de semirayos del cono. El supremo o el ínfimo es tomado sobre un conjunto de valores en V generado por las funciones elementales.
En cuanto al desarrollo de funciones abstractas convexas de valor conjunto, solamente se ha reportado la aparición de las funciones crecientes a lo largo de rayos en [16] y posteriormente las funciones de valor conjunto decrecientes a lo largo de rayos en [5], ambos en el contexto de la optimización de aplicaciones de valor conjunto, sin focalizar temas de representación de estas aplicaciones.
En el presente capítulo, implementamos aplicaciones de valor conjunto que guardan cierta relación con las funciones co-radiantes de valor puntual, y dado que los valores conjunto tendrán una estructura especial como es el caso de los denominados conjuntos normales, el tema de representación será fundamentalmente abordado, para ello se requerirá de aplicaciones de valor conjunto que las llamaremos "elementales" y que generarán en algún sentido a las aplicaciones de valor conjunto materia de estudio. Presentamos definiciones para aplicaciones co-radiantes de valor conjunto, funciones inversa co-radiantes de valor conjunto, y se hace un análisis de éstas y fundamentalmente se logra sus representaciones por aplicaciones elementales. Los conjuntos normales desempeñarán un papel importante para esto último.
Material presentado en el primer capítulo, será útil para nuestro desarrollo, por lo que

ocasionalmente nos referiremos al primer capítulo.

Para $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se define

$$x \geq y \text{ si y solo si } x_i \geq y_i \text{ para cada } i = 1, \cdots, n.$$

del mismo modo $x \gg y$ si y solo si $x_i > y_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Adicionalmente se definen las "cajas "de extremos x y y, por

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R}^n : x \leq z \leq y\} \qquad ; \qquad]x, y[:= \{z \in \mathbb{R}^n : x \ll z \ll y\}.$$

Para $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n_+$ denotamos por $I_+(\ell)$ al conjunto $\{i \in \{1, \cdots, n\} : \ell_i > 0\}$.
Dado $\ell \in \mathbb{R}^n_+$, se definen en $\mathbb{R}^n_+$ las funciones no negativas de valor real $\langle \ell, \cdot \rangle^-$ y $\langle \ell, \cdot \rangle^+$ por

$$\langle \ell, x \rangle^- := \begin{cases} \min\limits_{i \in I_+(\ell)} \ell_i x_i, & \text{si } \ell \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

y

$$\langle \ell, x \rangle^+ := \begin{cases} \max \ell_i x_i, & \text{si } \ell \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

respectivamente. Si no hay lugar a confusión, para seguir con la nomenclatura de algunas referencias a $\langle \ell, x \rangle^-$ lo denotaremos simplemente por $\langle \ell, x \rangle$.
Denotaremos por L al conjunto de las funciones $\langle \ell, ; . \rangle^-$ o $\langle \ell, ; . \rangle$ (denominadas "del tipo min"). Este conjunto es un cono convexo y cada elemento de L es una función positivamente homogénea, creciente y semicontinua inferior(sci). Para mayores detalles sobre estas funciones ver el capítulo 2 de [32].

Una función $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{+\infty}$ se denomina $L-$convexa, si existe un subconjunto no vacío U de L tal que

$$f(x) = \sup_{\ell \in U} \langle \ell, x \rangle, \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{3.1}$$

En [32] se muestra que toda función $p : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ es creciente y positivamente homogénea (IPH), si y solo si, es $L-$convexa. Adicionalmente, se verifica que el supremo en (3.1) se convierte en "max".

3.1.1. Función soporte de un conjunto normal

Implementamos de manera natural la función soporte para un subconjunto normal de $\mathbb{R}^n_+$, análogamente como en el caso del análisis convexo clásico. En esta ocasión, las funciones del tipo min reemplazan a las funciones lineales. Paralelamente para cubrir algunos requerimientos, mostramos propiedades adicionales para los conjuntos normales.

Definición 3.1.1 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n_+$,* **la función soporte de** *C denotada por σ_C es una función definida en $\mathbb{R}^n_+$ con valores en $\overline{R}_+$, mediante*

$$\sigma_C(\ell) := \sup\{\langle \ell, x \rangle \ : \ x \in C\} \quad , \quad \ell \in \mathbb{R}^n_+ \tag{3.2}$$

Se establece que $\sup \emptyset = 0$. Enseguida se presentan algunas propiedades básicas de σ_C.

Proposición 3.1.2 *Sea C un conjunto de $\mathbb{R}^n_+$, entonces:*

(i) $\sigma_C(0) = 0$.

(ii) Para todo $\alpha > 0, \ell \in \mathbb{R}^n_+ : \sigma_C(\alpha\ell) = \alpha\sigma_C(\ell)$.

(iii) Si C es normal, entonces $\sigma_C = \sigma_{\overline{C}}$.

(iv) El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle \ell, x\rangle \leq \sigma_C(\ell)\ ,\ \forall \ell \in \mathbb{R}^n_+\}$ es normal y cerrado.

(v) Sea B un conjunto normal cerrado de $\mathbb{R}^n_+$, entonces

$$A \subset B \Leftrightarrow \sigma_A(\ell) \leq \sigma_B(\ell)\ ,\ \forall \ell \in \mathbb{R}^n_+.$$

(vi) Si A y B son subconjuntos normales no vacíos de $\mathbb{R}^n_+$, entonces

$$\sigma_A(\ell) + \sigma_B(\ell) \leq \sigma_{A+B}(\ell),\ \forall \ell \in \mathbb{R}^n_+.$$

(vii) Si $\mathbf{B}_1^+$ es la bola unitaria en $\mathbb{R}^n_+$ entonces $\forall \ell \in \mathbb{R}^n_+$ se cumple $\sigma_{\mathbf{B}_1^+}(\ell) = \langle \ell, \mathbf{e}\rangle$ donde $\mathbf{e}$ es el vector cuyas componentes son uno.

Demostración:
Tanto(i) como (ii) se siguen inmediatamente de la definición de función soporte.
(iii)Obviamente $\sigma_C(\ell) \leq \sigma_{\overline{C}}(\ell)$ para todo $\ell \in \mathbb{R}^n_+$. Si para $\ell \in \mathbb{R}^n_+$ $\sigma_C(\ell) = +\infty$ este valor también lo toma $\sigma_{\overline{C}}(\ell)$. Supongamos que existe $\widetilde{\ell} \in dom(\sigma_C)$ tal que $\sigma_C(\widetilde{\ell}) < \sigma_{\overline{C}}(\widetilde{\ell})$ entonces se garantiza que existe $a^* \in \overline{C}$ tal que

$$\alpha := \sigma_C(\widetilde{\ell}) < \frac{\alpha + \langle \widetilde{\ell}, a^*\rangle}{2} < \langle \widetilde{\ell}, a^*\rangle$$

y a la vez se garantiza que existe una sucesión $\{a_n\}$ en C tal que $a_n \leq a^*$, $a_n \to a^*$ y satisface

$$\langle \widetilde{\ell}, a^*\rangle < \langle \widetilde{\ell}, a_n\rangle + \frac{1}{n}\ , \qquad \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

Lo anterior da lugar a

$$\alpha < \frac{\alpha + \langle \widetilde{\ell}, a^*\rangle}{2} \leq \alpha + \frac{1}{n}$$

para n suficientemente grande, y así se tiene una contradicción.
(iv)El conjunto que se describe, es intersección de conjuntos normales y es a la vez intersección de conjuntos cerrados.
(v)Si $A \subset B$ es inmediato que $\sigma_A(\ell) \leq \sigma_B(\ell)\ ,\ \forall \ell \in \mathbb{R}^n_+$. Recíprocamente, supongamos que existe $a' \in A$ tal que $a' \notin B$, entonces por la Proposición (1.2.14) se garantiza que existe $\ell' \in \mathbb{R}^n_+$ tal que

$$\langle \ell', b\rangle \leq 1 < \langle \ell', a'\rangle\ , \quad \forall b \in B$$

entonces $\sigma_B(\ell') < \langle \ell', a'\rangle \ \leq \sigma_A(\ell')$ lo que genera una contradicción.
(vi)Dado $\ell \in \mathbb{R}^n_+$, si $\sigma_A(\ell)$ ó $\sigma_B(\ell)$ es $+\infty$ se conclusión es inmediata dado que $\sigma_{A+B}(\ell)$

resultaría también $+\infty$. Ahora suponiendo que $\sigma_A(\ell)$ y $\sigma_B(\ell)$ son finitos, entonces $\forall a \in A, b \in B$:

$$\sigma_{A+B}(\ell) \geq \langle \ell, a+b \rangle \geq \langle \ell, a \rangle + \langle \ell, b \rangle$$

y fijando $b \in B$, se tiene $\sigma_{A+B}(\ell) - \langle \ell, b \rangle \geq \langle \ell, a \rangle$ para todo $a \in A$, de donde $\sigma_{A+B}(\ell) - \langle \ell, b \rangle \geq \sigma_A(\ell)$. Enseguida, de

$$\sigma_{A+B}(\ell) - \sigma_A(\ell) \geq \langle \ell, b \rangle \qquad \forall b \in B$$

se obtiene la conclusión de (vi).
(vii)Si $\ell \neq 0$, obviamente se cumple $\sigma_{\mathbf{B}_1^+}(\ell) \leq \min_{i \in I(\ell)} \ell_i = \langle \ell, \mathbf{e} \rangle$ y $\mathbf{e}$ es un elemento de $\mathbf{B}_1^+$. $\square$

Cabe observar que en el esquema del análisis convexo clásico, la función soporte de una suma de conjuntos convexos es la suma de las funciones soporte de éstos, mientras tanto esto no se garantiza para la función soporte asociado a los conjuntos normales, por ejemplo considere en $\mathbb{R}_+^2$, los conjuntos $A = No\{(1,0)\}$ y $B = No\{(0,1)\}$ y $\ell = (1,2)$, en tal caso $\sigma_A(\ell) = 0$, $\sigma_B(\ell) = 0$ y $\sigma_{A+B}(\ell) = 1$.

Corolario 3.1.3 *Sean A y B conjuntos normales y cerrados, entonces*

$$A = B \Leftrightarrow \sigma_A = \sigma_B.$$

Esto se obtiene de (iv) de la proposición previa.
La siguiente proposición, se refiere a la representación de los conjuntos normales cerrados mediante su función soporte.

Proposición 3.1.4 *Si C es un conjunto normal y cerrado, entonces*

$$C = \{\, x \in \mathbb{R}_+^n \,:\, \langle \ell, x \rangle \leq \sigma_C(\ell), \quad \forall \ell \in \mathbb{R}_+^n \,\} \tag{3.3}$$

Demostración: Sea $D := \{\, x \in \mathbb{R}_+^n \,:\, \langle \ell, x \rangle \leq \sigma_C(\ell), \quad \forall \ell \in \mathbb{R}_+^n \,\}$. Es inmediato sostener que $C \subset D$ y por la forma de D se sigue que $\sigma_D \leq \sigma_C$, y por (iii) de la proposición previa, se concluye $D \subset C$. $\square$

3.1.2. Procesos convexos

En esta parte hacemos referencia de algunos resultados relevantes sobre las avc denominadas “Procesos Convexos” con el fin de hacer algunas comparaciones frente a las avc que vamos a implementar. Los procesos convexos han sido ampliamente desarrollados en el esquema del análisis convexo clásico, mostrándose la natural versión valor conjunto de las aplicaciones positivamente homogéneas y convexas de valor puntual, esto da lugar a que se diga que un proceso es una avc positivamente homogénea. Lo que se expone al respecto ha sido tomado de [2].

Definición 3.1.5 *Sean X, Y espacios normados, y $F : X \rightrightarrows Y$ una avc. Se dice que F es convexa (cerrada, un proceso) si $Graf(F)$ es un conjunto convexo (respectivamente , conjunto cerrado, un cono) en $X \times Y$.*

Un resultado inmediato se expone en el siguiente lema ([2], pag 57):

Lema 3.1.6 *Sea $F : X \rightrightarrows Y$ una a.v.c., entonces*

(i) F es convexa, si y solamente si,

$$\forall x_1, x_2 \in dom(F), \forall \lambda \in [0,1] : \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \quad (3.4)$$

(ii) F es un proceso si, y solamente si,

$$\forall x \in X, \lambda > 0, \lambda F(x) = F(\lambda x), \ y\ 0 \in F(0). \quad (3.5)$$

(iii) F es un proceso convexo si, y solamente si, es un proceso tal que

$$\forall x_1, x_2 \in X, \ F(x_1) + F(x_2) \subset F(x_1 + x_2) \quad (3.6)$$

Si F es un proceso convexo, de (3.5) y (3.6) se deduce que $dom(F)$ es un cono convexo, del mismo modo para $rang(F)$.
Note que si F es un proceso, entonces $Gr(F)$ es un cono en $X \times Y$, del mismo modo $Gr(F^{-1})$ es un cono en $Y \times X$. Análogamente, si $Gr(F)$ es un conjunto convexo en $X \times Y$ entonces $Gr(F^{-1})$ es convexo en $Y \times X$.
El siguiente resultado se encuentra en [2].

Proposición 3.1.7 *Sean $F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$ procesos convexos, entonces:*

(i) $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ es un proceso convexo.

(ii) Para $\lambda > 0$, la a.v.c. $\lambda F_1 : X \rightrightarrows Y$ es un proceso convexo.

(iii) $F_1 + F_2 : X \rightrightarrows Y$ es un proceso convexo.

Definición 3.1.8 *Una a.v.c. $F : X \rightrightarrows Y$ se denomina Lipschitz, si existe ℓ una constante positiva, tal que*

$$x_1, x_2 \in dom(F) \Rightarrow F(x_1) \subset F(x_2) + \ell \|x_1 - x_2\| B_Y \quad (3.7)$$

donde B_Y es la bola unitaria cerrada en Y.

Note que (3.7) equivale a : para todo $y_1 \in F(x_1)$, existe $y_2 \in F(x_2)$ tal que $\|y_1 - y_2\| \leq \ell \|x_1 - x_2\|$.

Teorema 3.1.9 *(Teorema de la Gráfica Cerrada) Todo proceso convexo cerrado $F : X \rightrightarrows Y$ de un espacio de Banach X a otro Y con $dom(F) = X$, es Lipschitz.*

La demostración se encuentra en [2](Teorema 2.2.6).

3.2. Monotonía de avc

En el tema de optimización valor conjunto se han implementado varias nociones de relación de orden en los conjuntos potencia, como podemos encontrar en [18]. En particular haremos mención de dos tipos de relaciones muy usadas en espacios vectoriales topológicos, sean Y un espacio vectorial topológico y $C \subset Y$ un cono convexo cerrado, propio y con punta. Sean A y B subconjuntos no vacíos de Y, entonces

(i) La relación $\preceq_C^{\ell}$ denominada relación de orden **menor inferior**, se define por

$$A \preceq_C^{\ell} B \Leftrightarrow A + C \supset B.$$

(ii) La relación $\preceq_C^{u}$ denominada relación de orden **menor superior**, se define por

$$A \preceq_C^{u} B \Leftrightarrow A \subset B - C.$$

Estas relaciones están conectadas por las siguientes propiedades:

$$A \preceq_C^{\ell} B \Leftrightarrow A + C \supset B \Leftrightarrow B \subset A - (-C) \Leftrightarrow B \preceq_{-C}^{u} A \Leftrightarrow (-B) \preceq_C^{u} (-A).$$

Adicionalmente, se cumple $A \preceq_C^{u} B \Leftrightarrow A - C \subset B - C.$

Nuestro trabajo se centra sobre aplicaciones valor conjunto entre conos de espacios euclidianos, por lo que vamos a contemplar relaciones de orden en tal contexto. En la colección $\mathcal{P}$ de los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^m$, consideramos la relación inducida por el cono $\mathbb{R}_+^m$

$$A, B \in \mathcal{P},\ A \preceq_{\mathbb{R}_+^m}^{u} B \ \Leftrightarrow\ A \subset B - \mathbb{R}_+^m. \tag{3.8}$$

Siendo más precisos, requeriremos que A y B sean subconjuntos de $\mathbb{R}_+^m$ y consecuentemente bastará considerar $(B - \mathbb{R}_+^m) \cap \mathbb{R}_+^m$ en (3.8) en lugar de $B - \mathbb{R}_+^m$. Por cuestiones de comodidad mantendremos la notación en la expresión de (3.8).
Ahora estamos en condición de referirnos a la monotonía de avc cuyos valores son subconjuntos de $\mathbb{R}_+^m$.

Definición 3.2.1 *Una a.v.c. $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ de valores no vacíos, se denomina* ***creciente****, si*

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow F(x) \preceq_{\mathbb{R}_+^m}^{u} F(y)$$

o

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow F(x) \subset F(y) - \mathbb{R}_+^m. \tag{3.9}$$

lo que significa que para cada $u \in F(x)$, existe $v \in F(y)$ tal que $u \leq v$. En el contexto económico,nos dice que teniendo los vectores de factores de producción x y y donde $x \leq y$, entonces por cada posibilidad de producción z en $F(x)$ podemos encontrar otra posibilidad de producción en $F(y)$ que “no empeora”(en el sentido que las cantidades no disminuyen)

a z.
Si F toma valores normales, la implicación previa equivale a

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow F(x) \subset F(y).$$

Siguiendo a [2], tenemos:

Definición 3.2.2 *Dadas dos a.v.c. $F_1, F_2 : \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$, se dice que F_2 es una* ***extensión*** *de F_1, si*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^n : F_1(x) \subset F_2(x) - \mathbb{R}_+^m \tag{3.10}$$

Si F_2 toma valores normales, la inclusión previa equivale a $\forall x \in \mathbb{R}_+^n : F_1(x) \subset F_2(x)$.

Ejemplos 3.2.3

(i) Si $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^m$ es una función creciente en el sentido vectorial, entonces la avc $F : \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ definida por $F(x) = Nor\{f(x)\}$, es creciente y de valor normal.

(ii) Sea A una matriz constante de orden $m \times n$ y de elementos no negativos, la avc $F : \mathbb{R}_+^m \rightrightarrows \mathbb{R}_+^n$ definida por $F(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq y\}$ es creciente y de valor normal.

(iii) La avc $F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+^2$ definida por $F(\alpha) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 x_2 = \alpha\}$ es creciente pero de valores no normales.

3.3. Aplicaciones co-radiantes de valor conjunto

3.3.1. Procesos de valores normales

Las a.v.c. que se denominan procesos aparecen en [27] y en [2] con interesante exposición en el primero. Naturalmente, los procesos serán a.v.c. que merezcan nuestra atención dada la naturaleza cónica de su gráfica.

Definición 3.3.1 *Una a.v.c. $F : \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ se denomina*

(i) Un ***proceso*** *, si $0 \in F(0)$ y*

$$x \in \mathbb{R}_+^n, \alpha > 0 \Rightarrow F(\alpha x) = \alpha F(x) \tag{3.11}$$

(ii) Un proceso de valores normales, si es un proceso tal que para cada $x \in \mathbb{R}_+^n$, $F(x)$ es un subconjunto normal de $\mathbb{R}_+^m$.

Equivalentemente, F es un proceso, si $graf(F)$ es un cono en $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ y si adicionamos la condición

$$(x, y) \in graf(F), 0 \leq \overline{y} \leq y \Rightarrow (x, \overline{y}) \in graf(F),$$

entonces F es un proceso con valores normales. Son los procesos con estas características y crecientes, casos especiales de las a.v.c. que nos ocupan. Comparamos un proceso creciente con valores normales con lo que Rockafellar[27] denomina proceso monótono de tipo cóncavo, no sin antes hacer mención que en [11] se trabajan con procesos de valores normales para abordar temas de inclusiones en diferencias.
La siguiente definición se toma de [27].

Definición 3.3.2 *Una a.v.c.* $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ *se denomina un proceso monótono de tipo cóncavo, si*

(i) *Es positivamente homogénea.*

(ii) $F(x) \neq \emptyset, \forall x \in \mathbb{R}^n_+$.

(iii) $0 \leq x \leq \overline{x} \Rightarrow F(x) \subset F(\overline{x})$

(iv) $0 \leq y \leq \overline{y} \in F(x) \Rightarrow y \in F(x)$.

Contrastando con nuestras definiciones, el punto (iv) corresponde a que F tome valores normales y con esta condición el punto (*iii*) está referido a que F sea creciente. El punto (ii) será una condición útil para más adelante.

Ejemplo 3.3.3 *Dada un matriz* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ *de elementos positivos con* $a^1, \cdots, a^m$ *denotando sus filas, la aplicación* $A : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ *definida por* $A(x) = \{y \in \mathbb{R}^m_+ : y \leq Ax\}$*, donde* Ax *denota el vector cuya* $i-$*ésima componente es* $a^i x$ *(esto último es el producto interno usual en* $\mathbb{R}^n$*.) resulta ser un proceso creciente de valores normales. Por otro lado, si denotamos por* $\langle A, x\rangle$ *el vector cuya i-ésima componente es el producto tipo min* $\langle a^i, x\rangle$ *generamos la aplicación* $A^{\triangleleft} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ *dada por* $A^{\triangleleft}(x) = [0, \langle A, x\rangle]$ *que sigue siendo un proceso creciente, dado que cada función min* $\langle a^i, \cdot\rangle$ *es positivamente homogénea y creciente, además* $A^{\triangleleft}$ *es de valores normales.*

Sea C un subconjunto normal, compacto y no vacío de $\mathbb{R}^n_+$, se dice que $y \in C$ es un punto Pareto (en la terminología de [40] corresponde a un extremo superior), si

$$y' \in C, y' \geq y \Rightarrow y' = y.$$

Recuerde que si $Pa(C)$ es el conjunto de los puntos Pareto de C, según la proposición 1.2.12 $Pa(C) \neq \emptyset$ y $C = No(Pa(C))$.

Ejemplo 3.3.4 *Sea* $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ *un proceso con* $F(0) = \{0\}$ *y de valores normales, no vacíos y compactos. Para cada* $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$*, existe un único* e_x *elemento de* $\mathbf{S}^+_1 \subset \mathbb{R}^n_+$ *tal que* $x = \|x\|e_x$*. Si* α_x *es un elemento genérico de* $Pa(F(e_x))$ *entonces* $F(e_x) = \cup_{\alpha_x \in Pa(F(e_x))}[0, \alpha_x]$ *por ser* $F(e_x)$ *normal y compacto. En consecuencia, para cada* $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ *se tiene*

$$F(x) = F(\|x\|e_x) = \cup_{\alpha \in Pa(F(e_x))}[0, \|x\|\alpha].$$

En la sección que sigue se centran nuestros principales resultados, iniciándose con la extensión de funciones co-radiantes definidas en $\mathbb{R}^n_+$ de valor escalar para la versión de valor conjunto.

Definición 3.3.5 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una a.v.c. de valores no vacíos, se dice que*

(i) F es ***co-radiante*** *, si*

$$F(\lambda x) \subset \lambda F(x) - \mathbb{R}^m_+ \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 1 \tag{3.12}$$

(ii) F es ***fuertemente co-radiante*** *, si*

$$F(\lambda x) \subset \lambda F(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 1 \tag{3.13}$$

Note que si F toma valores normales, entonces (3.12) equivale a

$$F(\lambda x) \subset \lambda F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 1 \tag{3.14}$$

Concretamente, si F toma valores normales, entonces la condición de co-radiante coincide con la condición de fuertemente co-radiante.
En general, se verifica que $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ es una a.v.c. co-radiante, si y solo si

$$F(tx) - \mathbb{R}^m_+ \supset tF(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0, 1] \tag{3.15}$$

Observación 3.3.6 *La teoría de producción descrita por los conjuntos de tecnología de producción, hacen que estos últimos manifiesten las limitaciones tecnológicas que acotan el rango de los procesos productivos para la firma. Si $L = \{(y, x) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n_+ :$ y es producido por $x\}$ es el conjunto de tecnología, un requerimiento es "$(y, x) \in L, 0 \leq y' \leq y$ entonces $(y', x) \in L$", note que esto es compatible con la condición de normalidad impuesta en (3.14) cuando F se asocia al conjunto de vectores de producción generados por el vector de inputs x. Para mayores detalles para los conjuntos de tecnología, se puede consultar [25].*

Presentamos algunas propiedades básicas de las a.v.c. co-radiantes.
Sean $F_1, F_2 : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ a.v.c. co-radiantes , entonces :

(i) $F_1 + F_2$ definida por

$$(F_1 + F_2)(x) := F_1(x) + F_2(x) \ , \ \text{para} \quad \text{cada } x \in \mathbb{R}^n_+$$

es una aplicación co-radiante.

(ii) $F_1.F_2$ definida por

$$(F_1.F_2)(x) := F_1(x) \cap F_2(x) \ , \ \text{para} \quad \text{cada } x \in \mathbb{R}^n_+$$

es una aplicación co-radiante.

donde la suma $F_1(x) + F_2(x)$ es la suma Minkowsky. Si F_1 y F_2 son además de valores normales, entonces $F_1 + F_2$ y $F_1.F_2$ también son de valores normales.

Lema 3.3.7 *Sean $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una a.v.c. co-radiante, creciente y de valores normales, y $\alpha \in \mathbb{R}_{++}, A$ una matriz de permutación de orden m, entonces las a.v.c.*

$$\begin{array}{llcll} \alpha F: & \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+ & y & AF: & \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+ \\ & x \mapsto (\alpha F)(x) := \alpha F(x) & & & x \mapsto (AF)(x) := \{Ay : y \in F(x)\} \end{array}$$

son a.v.c. con las mismas características.

Proposición 3.3.8 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de valores normales, entonces la avc $H : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ definida por*

$$H(x) := \bigcup_{\lambda \geq 1} \frac{F(\lambda x)}{\lambda}, \qquad \textit{para cada } x \in \mathbb{R}^n_+$$

es la menor (en el sentido de la inclusión de conjuntos) extensión co-radiante de F y de valores normales.

Demostración: Siendo $H(x)$ unión de conjuntos normales, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, H es de valor normal. Por otro lado, para cada $\beta \geq 1$, $z \in H(\beta x)$, existe $\widetilde{\lambda} \geq 1$ tal que $z \in \dfrac{F(\widetilde{\lambda}\beta x)}{\widetilde{\lambda}}$ y así

$$\frac{z}{\beta} \in \frac{F(\widetilde{\lambda}\beta x)}{\beta\widetilde{\lambda}} \subset \bigcup_{\widetilde{\beta} \geq 1} \frac{F(\widetilde{\beta} x)}{\widetilde{\beta}} = H(x).$$

y en consecuencia $z \in \beta H(x)$. Si G es otra a.v.c. co-radiante y de valores normales, que es una extensión de F, entonces para cada $\lambda \geq 1, x \in \mathbb{R}^n_+$ se cumple $F(\lambda x) \subset G(\lambda x) \subset \lambda G(x)$ lo que permite afirmar que $H(x) \subset G(x)$. $\square$

En general se garantiza la extensión co-radiante según (3.12) para una avc $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de valores no vacíos (no necesariamente normales), considerando H de la siguiente manera

$$H(x) := \bigcup_{\lambda \geq 1} \left(\frac{F(\lambda x)}{\lambda} - \mathbb{R}^m_+ \right), \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Proposición 3.3.9 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$.*

(i) F es fuertemente co-radiante, si y solo si, $gr(F)$ es un conjunto radiante de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$.

(ii) Si F toma valores normales, entonces F es co-radiante si, y solo si, $gr(F)$ es un conjunto radiante de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$.

Demostración:
(i)Sean $(x, y) \in gr(F)$ y $t \in (0, 1]$ entonces $ty \in tF(x) \subset F(tx)$, por tanto $t(x, y) \in gr(F)$. Recíprocamente, sea $y \in F(x)$, entonces $(x, y) \in gr(F)$ y para $t \in (0, 1]$ resulta $(tx, ty) \in gr(F)$ y así $ty \in F(tx)$ lo que significa que $tF(x) \subset F(tx)$.
La segunda parte se sigue directamente de (i). $\square$

Ejemplo 3.3.10 *La avc $F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^2_+$ definida por*

$$F(x) = \{(x_1, x_2) \ : \ 0 \leq x_1 \leq x, \, x_2 \geq x^2\} \quad para \ \ cada \ x \in \mathbb{R}_+$$

es fuertemente co-radiante y sus valores no son conjuntos normales excepto $F(0)$.

Para nuestros propósitos, en lo que sigue prestamos interés en las aplicaciones co-radiantes, crecientes y con valores normales no vacíos.

3.3.2. Acotación y continuidad de las avc co-radiantes

Como ya hemos hecho referencia, los procesos convexos, cerrados y de valores no vacíos, entre espacios de Banach, son avc Lipschitzianas; mientras que en el contexto de las aplicaciones co-radiantes este resultado pierde vigencia, basta considerar la avc $F : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ definida por $F(x) = [0, \sqrt{x}]$ para cada $x \geq 0$. Sin embargo, podemos ofrecer resultados Lipschitz locales.

Definición 3.3.11 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc y K un subconjunto no vacío de $dom(F)$. Se dice que F es localmente Lipschitz en K si, existe una constante $M > 0$ tal que*

$$F(x) \subset M\|x - y\|\mathbf{B}^+_1 + F(y) \qquad \forall x, y \in K. \tag{3.16}$$

Proposición 3.3.12 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc de valores normales y compactos tal que $\mathbb{R}^n_{++} \subset dom(F)$. En cada caso:*

(i) Si además F es homogénea y creciente, entonces F es localmente Lipschitziana en todo subconjunto K compacto no vacío de $\mathbb{R}^n_{++}$.

(ii) Si además F es co-radiante y creciente, entonces F es localmente Lipschitziana en todo subconjunto K compacto no vacío de $\mathbb{R}^n_{++}$.

<u>Demostración:</u> (i)Para $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n_{++}$, se verifica

$$y \leq (\max_i y_i)\mathbf{e}, \ \text{ del mismo modo } \ x \leq \max_i (\frac{x_i}{y_i})y. \tag{3.17}$$

Además, para cada $j = 1, \cdots, n$, $x_j \leq \max_i |x_i - y_i| + y_j$. Por tanto

$$\frac{x_j}{y_j} \leq \frac{\max_i |x_i - y_i|}{y_j} + 1 \leq \frac{\max_i |x_i - y_i|}{\min_i y_i} + 1 = \frac{\|x - y\|}{\min_i y_i} + 1$$

Por la compacidad de $F(\mathbf{e})$ se garantiza que existe $L > 0$ tal que $F(\mathbf{e}) \subset L\mathbf{B}^+_1$. Retornando a (3.17)

$$\begin{aligned} F(x) & \subset \max_i (\frac{x_i}{y_i}) F(y) \\ & \subset \left(\frac{\|x - y\|}{\min_i y_i} + 1 \right) F(y) \\ & \subset \frac{\max_i y_i}{\min_i y_i} \|x - y\| L\mathbf{B}^+_1 + F(y) \end{aligned}$$

y así $F(x) \subset \max\{\frac{\max_i y_i}{\min_i y_i}, \frac{\max_i y_i}{\min_i y_i}\}\|x-y\|L\mathbf{B}_1^+ + F(y)$. Denotando por $M(x,y)$ a $L\max\{\frac{\max_i y_i}{\min_i y_i}, \frac{\max_i y_i}{\min_i y_i}\}$, por la acotación de K se garantiza que existe una constante positiva M tal que $M(x,y) \leq M$ para todo $x, y \in K$. Finalmente,

$$F(x) \subset M\|x-y\|\mathbf{B}_1^+ + F(y), \ \ \forall x, y \in K.$$

(ii)Sea $\mathbb{R}_*^{n+1} := \{(x,\lambda): \ x \in \mathbb{R}_+^n, \lambda > 0\} \cup \{(0,0)\}$ el cual es un cono de $\mathbb{R}^{n+1}$, se define $\widetilde{F}$ la canónica extensión homogénea de F en $\mathbb{R}_*^{n+1}$ con valores en $\mathbb{R}_+^m$ mediante

$$\widetilde{F}(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda F(\frac{x}{\lambda}), & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^n, \lambda > 0 \\ \{0\}, & \text{si } (x,\lambda) = (0,0). \end{cases}$$

$\widetilde{F}$ resulta ser homogénea, creciente de valores normales, compactos y no vacíos. Si K es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}_{++}^n$, aplicamos (i) para $\widetilde{F}$ y el conjunto acotado $\widetilde{K} := K \times \{1\}$, y teniendo en cuenta que $\widetilde{F}(x,1) = F(x)$, se obtiene la conclusión de (ii). $\square$

La proposición previa, se puede considerar una una generalización de la Proposición 4.2 de [37].
Sigue una proposición que generaliza resultados para funciones co-radiantes de valor puntual en [22].

Proposición 3.3.13 *Sea $F: \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ una a.v.c. co-radiante, creciente y de valores normales, entonces:*

(i) Si existe $y \in \mathbb{R}_{++}^n$ tal que $F(y)$ es acotado, entonces $F(x)$ es acotado para cada $x \in \mathbb{R}_+^n$. Particularmente, si $F(y) = \{0\}$ entonces $F(x) = \{0\}$ para cada $x \in \mathbb{R}_+^n$.

(ii) Si existe $y \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $F(y)$ no es acotado, entonces $F(x)$ no es acotado para todo $x \in \mathbb{R}_{++}^n$.

Demostración: (i)Dado $y \in \mathbb{R}_{++}^n$ para cada $x \in \mathbb{R}_+^n$ existe $\lambda \geq 1$ tal que $x \leq \lambda y$, por lo que $F(x) \subset F(\lambda y) \subset \lambda F(y)$, obteniéndose de inmediato la conclusión de (i).
(ii)Para tal $y \in \mathbb{R}_+^n$, para cada $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ existe $t \in (0,1]$ tal que $ty \leq x$, y en consecuencia $tF(y) \subset F(ty) \subset F(x)$ y de esto se obtiene la conclusión. $\square$

Proposición 3.3.14 *Sea $F: \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ una a.v.c. creciente y de valores normales, entonces:*

(i) Si $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ y $F(x)$ es acotado, entonces F es s.c.s. en x.

(ii) F es s.c.i. en cada $x \in R_{++}^n$.

Demostración: (i) Sean x^k una sucesión en $\mathbb{R}^n_+$ tal que $x^k \to x$ y y^k una sucesión arbitraria en $\mathbb{R}^m_+$ tal que $y^k \in F(x^k)$ para cada k. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario suficientemente pequeño tal que para k suficientemente grande, se obtiene

$$0 < x - \epsilon x \leq x^k \leq x + \epsilon x$$

particularmente $0 < x^k \leq (1+\epsilon)x$. Por ser F creciente y co-radiante, se tiene $F(x^k) \subset (1+\epsilon)F(x)$, en especial para los valores de k antes establecidos, se cumple $y^k \in (1+\epsilon)F(x)$. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\|y\| \leq \frac{1}{2}$ para todo $y \in F(x)$. Entonces,

$$d(y^k, F(x)) \leq d(y^k, \frac{1}{1+\epsilon}y^k) = \epsilon\|\frac{1}{1+\epsilon}y^k\| < \epsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{k\to+\infty} d(y^k, F(x)) = 0$.
(ii) Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y V un abierto en $\mathbb{R}^m_+$ tal que $V \cap F(\overline{x}) \neq \emptyset$. Si $F(\overline{x}) = \{0\}$ obviamente $0 \in V$ y así para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, $V \cap F(x) \neq \emptyset$, pues siempre $0 \in F(x)$. Por otro lado, si $F(\overline{x}) \neq \{0\}$, se garantiza que existe $y = (y_1, \cdots, y_m) \neq 0$ tal que $y \in V \cap F(\overline{x})$ y así existe $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ por decir $y_1 \neq 0$ y más aun podemos asumir $y_1 = 1$ (por el lema 3.3.7), por lo que se garantiza que existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que para $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$:

$$W := \{te_1 : t \in [1-\delta, 1]\} \subset F(\overline{x}) \quad \text{y} \quad W := \{te_1 : t \in [1-\delta, 1]\} \subset V$$

Tomando $\beta = \frac{\delta}{2}$ se sigue que $(1-\beta) \in [1-\delta, 1]$ y como $e_1 \in F(\overline{x})$, entonces $(1-\beta)e_1 \in (1-\beta)F(\overline{x})$ y del mismo modo $(1-\beta)e_1 \in W$. Por otro lado, si $U :=](1-\beta)\overline{x}, (1+\beta)\overline{x}[$, entonces para cada $x \in U, (1-\beta)F(\overline{x}) \subset F(x) \subset (1+\beta)F(\overline{x})$. Finalmente, dado que $W \cap (1-\beta)F(\overline{x}) \neq \emptyset$ entonces $W \cap F(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in U$, del mismo modo $V \cap F(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in U$. □

3.3.3. Límite de una sucesión de avc co-radiantes

Los límites de sucesiones de subconjuntos de $\mathbb{R}^n_+$ que se tratan en esta parte están referidos en el contexto Painlevé-Kuratowski.

Proposición 3.3.15 *Sean $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc fuertemente co-radiante, entonces las avc $\overline{F}$ y $\mathbf{B}_\epsilon(F)$ de $\mathbb{R}^n_+$ en $\mathbb{R}^m_+$ definidas respectivamente por*

$$\overline{F}(x) := \overline{F(x)}, \quad y \quad \mathbf{B}_\epsilon(F)(x) := \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, F(x)) \leq \epsilon\}, \quad para \;\; cada \; x \in \mathbb{R}^n_+.$$

son fuertemente co-radiantes.

Demostración:
Sean $y \in \overline{F}(x)$ y $t \in (0, 1]$, entonces existe una sucesión $\{y_k\}$ en $F(x)$ tal que $y_k \to y$ y $ty_k \in tF(x) \subset F(tx)$ y además $ty_k \to ty$. Por tanto $ty \in \overline{F}(tx)$, es decir $t\overline{F}(x) \subset \overline{F}(tx)$. Por otro lado, sea $y \in \mathbf{B}_\epsilon(F)(x)$ y $t \in (0, 1]$, entonces $d(y, F(x)) \leq \epsilon$ y por el hecho que F es fuertemente co-radiante se obtiene $d(ty, F(tx)) \leq d(ty, tF(x)) \leq t\epsilon \leq \epsilon$, en consecuencia $ty \in \mathbf{B}_\epsilon(F)(tx)$. □

Proposición 3.3.16 *Sea $\{F^i\}_{i\in\mathcal{I}}$ ($\mathcal{I}$ un conjunto arbitrario no vacío de índices) una familia de avc fuertemente co-radiantes, entonces las avc G y H de $\mathbb{R}^n_+$ en $\mathbb{R}^m_+$ definidas respectivamente por*

$$G(x) := \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F^i(x), \quad y \quad H(x) := \bigcup_{i\in\mathcal{I}} F^i(x), \qquad para \ \ cada \ x \in \mathbb{R}^n_+.$$

son fuertemente co-radiantes.

Demostración: Procedemos para G, sean $y \in G(x)$ y $t \in (0,1]$, entonces $ty \in tF^i(x) \subset F^i(tx)$ para cada $i \in \mathcal{I}$, de este modo $ty \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F^i(tx) = G(tx)$. $\square$

La siguiente definición ha sido tomada del Capítulo 5 de [29].

Definición 3.3.17 *Dada una sucesión de avc $\{F^k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ de $\mathbb{R}^n_+$ en $\mathbb{R}^m_+$. Se definen las avc de R^n_+ en $\mathbb{R}^m_+$,*

(i) **Límite inferior puntual** *de $\{F^k\}$ denotada por $\mathrm{Liminf}_k F^k$, mediante*

$$(p - \mathrm{Liminf}_k F^k)(x) := \mathrm{Liminf}_k F^k(x)$$

(ii) **Límite superior puntual** *de $\{F^k\}$ denotada por $\mathrm{Limsup}_k F^k$, mediante*

$$(p - \mathrm{Limsup}_k F^k)(x) := \mathrm{Limsup}_k F^k(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Si $(p - \mathrm{Liminf}_k F^k)(x) = (p - \mathrm{Limsup}_k F^k)(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, se dice que la sucesión $\{F^k\}$ tiene límite puntual y es la avc denotada por $p - \lim_k F^k$, en tal caso:

$$(p - \lim_k F^k)(x) := (p - \mathrm{Liminf}_k F^k)(x) = (p - \mathrm{Limsup}_k F^k)(x).$$

Si F representa a $p - \lim_k F^k$, entonces empleamos la notación $F^k \xrightarrow{p} F$ para decir que F^k converge puntualmente a F.

Proposición 3.3.18 *Sea $\{F^k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ una sucesión de avc de $\mathbb{R}^n_+$ en $\mathbb{R}^m_+$.*

(i) $p - \mathrm{Liminf}_k F^k$ *y* $p - \mathrm{Limsup}_k F^k$ *son avc de valor cerrado.*

(ii) Si cada F^k es de valor normal, entonces $p - \mathrm{Liminf}_k F^k$ y $p - \mathrm{Limsup}_k F^k$ son de valor normal.

(iii) Si cada F^k es fuertemente co-radiante, entonces $p - \mathrm{Liminf}_k F^k$ y $p - \mathrm{Limsup}_k F^k$ son fuertemente co-radiantes.

(iv) Si cada F^k es de valor normal y co-radiante, entonces $p-\mathrm{Liminf}_k F^k$ y $p-\mathrm{Limsup}_k F^k$ son co-radiantes y de valor normal.

(iv) Si cada F^k es creciente y de valor normal, entonces $p-\mathrm{Liminf}_k F^k$ y $p-\mathrm{Limsup}_k F^k$ son crecientes y de valor normal.

Demostración:
(i) Se sigue directamente de las corerespondientes definiciones.
(ii) Dado que las operaciones de unión, intersección y clausura de conjuntos normales, genera conjuntos normales, la justificación de (i) se sigue de la Proposición 1.2.9.
(iii)La conclusión se sigue de las Proposiciones 1.2.9 , 3.3.15 y 3.3.16. Mientras que (iv) se obtiene directamente de (i) y (ii). Finalmente, en (v) resta la monotonía de $p-\mathrm{Liminf}_k F^k$ y $p-\mathrm{Limsup}_k F^k$, pero esto nuevamente se sigue de la Proposición 1.2.9.
$\square$

3.3.4. Representación Externa y Representación Interna de una avc

En el mismo carácter de la convexidad abstracta, en la cual dados un conjunto arbitrario no vacío X, y una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas en X con valores en $\overline{R}$ o en algún subconjunto de éste, una tarea fundamental es la de representar una función $f : X \to C \subset \overline{R}$ en alguna de las formas

$$f(x) = \sup_{\alpha_i \in \mathcal{H}} \alpha_i(x)\,, \quad \text{ó} \quad f(x) = \inf_{i \in \mathcal{H}} \alpha_i(x),\ \forall x \in X.$$

donde $\mathcal{H}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{F}$ de modo que sus elementos comparten ciertas propiedades que las distinguen, naturalmente algunos requisitos debe cumplir f para este cometido. Es nuestro interés tener representaciones para las aplicaciones co-radiantes antes descritas, siendo las operaciones naturales las uniones y/o intersecciones de los valores de las aplicaciones miembros de una familia de avc. Para precisar presentamos las definiciones respectivas.

Definición 3.3.19 *Sean X, Y conjuntos no vacíos arbitrarios , $\mathcal{F}$ una familia de avc de X en Y y $F : X \rightrightarrows Y$ una avc. Se dice que*

(i) F tiene una representación "$\mathcal{F}-$externa" si

$$F(x) = \bigcap_{i \in I} G_i(x), \qquad \forall x \in dom(F).$$

donde $\{G_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{F}$.

(ii) F tiene una representación "$\mathcal{F}-$interna" si

$$F(x) = \bigcup_{i \in I} G_i(x), \qquad \forall x \in dom(F).$$

donde $\{G_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{F}$.

En cualquier caso, los elementos de $\{G_i\}_{i \in I}$ se denominan generadores de F.

Ejemplo 3.3.20 *Retomando $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un proceso con $F(0) = \{0\}$ y de valores normales compactos y no vacíos como en el Ejemplo 3.3.4. Para cada $s \in \mathbf{S}_1^+$, definimos la función $\mathcal{I}_{\{s\}} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ por*

$$\mathcal{I}_{\{s\}}(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq 0, s = e_x\,, \\ 0, & otro\ \ caso. \end{cases}$$

la cual satisface $\mathcal{I}_{\{s\}}(tx) = \mathcal{I}_{\{s\}}(x)$ para cada $t > 0$. Adicionalmente sea el conjunto

$$\mathfrak{F} := \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbf{S}_1^+ \ : \ \alpha \in Pa(F(s))\}$$

Para cada $(\alpha, s) \in \mathfrak{F}$, las avc $F_{(\alpha,s)} : \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ definidas por

$$F_{(\alpha,s)}(x) := \begin{cases} [0\,, \mathcal{I}_{\{s\}}(x)\|x\|\alpha], & si\ x \neq 0 \\ \{0\}, & si\ x = 0. \end{cases}$$

son procesos de valor normal, compacto y no vacío (tienen las mismas propiedades de F). Estas avc permiten expresar a F de la siguiente manera

$$F(x) = \bigcup_{(\alpha,s)\in\mathfrak{F}} [0\,, \mathcal{I}_{\{s\}}(x)\|x\|\alpha] = \bigcup_{(\alpha,s)\in\mathfrak{F}} F_{(\alpha,s)}(x), \qquad para\ cada\ x \in \mathbb{R}_+^n.$$

lo que significa que F tiene una representación $\mathfrak{F}-$ interna.

3.3.5. Una primera representación externa de una avc co-radiante

En esta parte establecemos condiciones sobre $F : \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ co-radiante, de modo que se garantice una representación externa de ésta y que las avc elementales tengan propiedades similares a las de F.

Lema 3.3.21 *Sea $F : \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ con valores normales no vacíos y $A := gr(F)$, entonces*

$$F\ \ es\ \ creciente\ \ \Leftrightarrow A + \mathbb{R}_+^n \times \{0\} = A \tag{3.18}$$

Demostración:
$\Rightarrow$)Obviamente $A \subset A + \mathbb{R}_+^n \times \{0\}$. Sea $w = (w^1, w^2) \in A + \mathbb{R}_+^n \times \{0\}$, entonces existen (x', y') con $y' \in F(x')$ y $p \in \mathbb{R}_+^n$ tales que $(w^1, w^2) = (x' + p, y')$ y siendo $w^2 = y' \in F(x') \subset F(x' + p) = F(w^1)$, se concluye que $w \in A$.
$\Leftarrow$)Sean $x \leq x'$ en $\mathbb{R}_+^n$ y $w \in F(x)$, entonces $(x, w) \in A$ y así $(x', w) = (x, w) + (x' - x, 0) \in A$, por tanto $w \in F(x')$. $\square$

Manteniendo la notación anterior, tenemos

Lema 3.3.22 *Sea $F : \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}_+^m$ y $A = gr(F)$, entonces*

$$F\ \ toma\ \ valores\ \ normales\ \ \Leftrightarrow A + \{0\} \times (-\mathbb{R}_+^m) = A \tag{3.19}$$

(entendiéndose en la ecuación de (3.19) que el primer miembro está restringido a $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$)

Demostración: Sean $(x, y) \in A$ y $p \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $y - p \in \mathbb{R}^m_+$, entonces por la normalidad de $F(x)$, se tiene $(x, y - p) \in A$. Recíprocamente, dado $x \in \mathbb{R}^n_+$, sean $0 \leq y \leq y' \in F(x)$ y siendo $(x, y) = (x, y') + (0, y - y')$ se concluye que $(x, y) \in A$. $\square$

Proposición 3.3.23 *Para una relación propia A de $\mathbb{R}^n_+$ en $\mathbb{R}^m_+$ con dom$(A) = \mathbb{R}^n_+$ y las siguientes condiciones:*

(i) $A + \mathbb{R}^n_+ \times \{0\} = A$.

(ii) *A es radiante y cerrado.*

(iii) $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^n_+ \cap (A + \{0\} \times (-\mathbb{R}^m_+)) = A$

Se concluye :

(a) Si A satisface (ii), entonces para cada $\overline{x} = \overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \setminus A$ existe un cono convexo abierto K en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ que contiene a $\overline{x}$ tal que

$$A \cap (\overline{x} + K) = \emptyset$$

(b) Si A satisface (ii) y (iii), entonces para cada $(\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \setminus A$ existe un cono convexo abierto K en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que

$$A \cap (\overline{x} + K + \{0\} \times \mathbb{R}^m_+) = \emptyset$$

(c) Si A satisface (i), (ii) y (iii), entonces para cada $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \setminus A$ existe un cono convexo abierto K en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que

$$A \cap (\overline{x} + K + (-\mathbb{R}^n_+) \times \mathbb{R}^m_+) = \emptyset$$

Demostración:

(a) Siguiendo la Proposición 3.4 de [43], se garantiza que para $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \setminus A$, existe un cono convexo K abierto(en $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$) que contiene a $\overline{x}$, y $0 < \beta < 1$ tales que

$$A \cap (\beta\overline{x} + K) = \emptyset$$

y por la naturaleza del conjunto ambiente $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$, podemos más aun garantizar que $A \cap (\overline{x} + K) = \emptyset$.

(b) Tomando K el cono garantizado en (a), afirmamos que la conclusión de (b) es válida, pues de lo contrario, existe $c = \overline{x} + k + (0, p) \in A$ con $k \in K, p \in \mathbb{R}^m_+$, y según (iii) $c + (0, -p) = \overline{x} + k \in A$ lo que genera una contradicción con (a).

(c) Nuevamente, se considera el cono K de (a) y (b). Supongamos que existe $c = \overline{x} + k + (-p, q) \in A$ con $p \in \mathbb{R}^n_+, q \in \mathbb{R}^m_+$, y por (i) se tiene $c + (p, 0) = \overline{x} + k + (0, q) \in A$ lo que contradice a (b).

$\square$

Consideremos $F:\mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de modo que $dom(F)=\mathbb{R}^n_+$ y $gr(F)\subsetneq \mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m_+$ es un conjunto cerrado y con las siguientes características adicionales:

$$(\spadesuit)\begin{cases} (i)\, F \text{ es co-radiante} \\ (ii)\, F \text{ toma valores normales y cerrados} \\ (iii)\, F \text{ es creciente} \end{cases}$$

Por ser $gr(F)$ un conjunto cerrado, entonces por la Proposición 3.3.23 para cada $(u,v)\in \mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m_+ \setminus gr(F)$, existe un cono convexo $K_{(u,v)}\subset \mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m_+$ abierto de modo que

$$gr(F)\bigcap\left((u,v)+K_{(u,v)}+(-\mathbb{R}^n_+)\times\mathbb{R}^m_+\right)=\emptyset \tag{3.20}$$

Cada conjunto $D_{(u,v)}:=(u,v)+K_{(u,v)}+(-\mathbb{R}^n_+)\times\mathbb{R}^m_+$ resulta ser abierto por ser unión de traslaciones de conjuntos abiertos.
El complemento de cada uno de estos conjuntos respecto a $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m_+$, resulta ser un conjunto cerrado que lo denotamos por $E_{(u,v)}$.

Proposición 3.3.24 *Sea $F:\mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ con $dom(F)=\mathbb{R}^n_+$ y $gr(F)\subsetneq\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m_+$ cerrado, que satisface $(\spadesuit)$. Si para cada $(u,v)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m_+\setminus gr(F)$, $F_{(u,v)}$ es la avc de $\mathbb{R}^n_+$ en $\mathbb{R}^m_+$ tal que $gr(F_{(u,v)})=E_{(u,v)}$, entonces:*

(i) *$dom(F_{(u,v)})=\mathbb{R}^n_+$ y $gr(F_{(u,v)})$ es cerrado.*

(ii) *$F_{(u,v)}$ tiene valores normales.*

(iii) *$F_{(u,v)}$ es co-radiante.*

(iv) *$F_{(u,v)}$ es creciente.*

<u>Demostración:</u>

(i) Supongamos que para un cierto $(u,v)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^m_+\setminus gr(F)$ se cumple $dom(F_{(u,v)})\subsetneq \mathbb{R}^n_+$, entonces existe $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n_+$ tal que $\forall y\in\mathbb{R}^m_+$, $(\widetilde{x},y)\notin E_{(u,v)}$, es decir $(\widetilde{x},y)\in (u,v)+K_{(u,v)}+(-\mathbb{R}^n_+)\times\mathbb{R}^m_+$ para todo $y\in\mathbb{R}^m_+$, puesto que $\widetilde{x}\in dom(F)$, se garantiza que existe $\widetilde{y}\in\mathbb{R}^m_+$ tal que $(\widetilde{x},\widetilde{y})\in gr(F)$, lo que genera una contradicción con (c) de la Proposición 3.3.23. Por definición de $F_{(u,v)}$ se sigue que $gr(F_{(u,v)})$ es un conjunto cerrado.

(ii) Sean $y\in F_{(u,v)}(x)$ y $0\le y'\le y$. Supongamos que $y'\notin F_{(u,v)}(x)$ es decir $(x,y')\notin E_{(u,v)}=gr(F_{(u,v)})$, en consecuencia $(x,y')\in D_{(u,v)}$ y así existen $k\in K_{(u,v)}$, $p\in\mathbb{R}^n_+, q\in\mathbb{R}^+m_+$ tales que $(x,y')=(u,v)+k+(-p,q)$, y

$$\begin{aligned}(x,y) &= (x,y')+(0,y-y')\\ &= (u,v)+k+(-p,q)+(0,y-y')\in(u,v)+K_{(u,v)}+(-\mathbb{R}^n_+)\times\mathbb{R}^m_+\end{aligned}$$

esto nos dice que $(x,y)\in D_{(u,v)}$, lo cual es una contradicción dado que $(x,y)\in gr(F_{(u,v)})$.

(iii) Por la Proposición 3.3.9, se requiere probar que $E_{(u,v)}$ es un conjunto radiante de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ y esto a la vez equivale probar que $D_{(u,v)}$ es un conjunto co-radiante de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$. Para esto último, sean $(a,b) \in D_{(u,v)}$ y $t > 1$, entonces existen $k \in K_{(u,v)}, p \in \mathbb{R}^n_+, q \in \mathbb{R}^m_+$ tales que

$$t(a,b) = (u,v) + (t-1)(u,v) + k + t(-p,q)$$

por el hecho que $(t-1)(u,v) + k \in K_{(u,v)}$ (ver Proposición 3.3.23, (a)) se sigue que $t(a,b) \in D_{(u,v)}$.

(iv) Haremos uso del Lema 3.3.21, por lo que se probará que $E_{(u,v)} + \mathbb{R}^n_+ \times \{0\} \subset E_{(u,v)}$. En efecto, sean $(a,b) \in E_{(u,v)}$ y $\overline{p} \in \mathbb{R}^n_+$, supongamos que $(a,b) + (\overline{p}, 0) \in D_{(u,v)}$, entonces existen $k \in K_{(u,v)}, p \in \mathbb{R}^n_+, q \in \mathbb{R}^m_+$ tales que $(a+\overline{p}, b) = (u,v) + k + (-p,q)$ y de esto

$$(a,b) = (u,v) + k + (-(p+\overline{p}), q) \in D_{(u,v)}$$

lo cual es una contradicción.

□

Denotemos por $\mathfrak{G}$ al conjunto de avc $G : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ con $dom(G) = \mathbb{R}^n_+$, co-radiante, de valor normal y creciente de modo que $gr(G) \subsetneq \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ sea de la forma

$$gr(G) = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \setminus \left((u,v) + K_{(u,v)} + (-\mathbb{R}^n_+) \times \mathbb{R}^m_+\right)$$

para ciertos $(u,v) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ y $K_{(u,v)}$ un cono convexo abierto en $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ que contiene a (u,v).

Teorema 3.3.25 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc con $dom(F) = \mathbb{R}^n_+$, $gr(F) \subsetneq \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ cerrado y las características (♠). Entonces , existe un subconjunto de $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{G}$ tal que*

$$gr(F) = \bigcap_{G \in \mathfrak{A}} gr(G) \tag{3.21}$$

Demostración: Siguiendo la notación y los resultados de la Proposición 3.3.24, cada elemento $F_{(u,v)}$ es un elemento de $\mathfrak{G}$ y se verifica que

$$gr(F) \subset gr(F_{(u,v)}) \ , \quad \text{para cada } (u,v) \in \mathrm{H} := \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \setminus gr(F)$$

de este modo $gr(F) \subset \bigcap_{(u,v)\in \mathbf{H}} gr(F_{(u,v)})$. Esta inclusión es realmente una igualdad. Supongamos lo contrario, entonces existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in \bigcap_{(u,v)\in \mathbf{H}} gr(F_{(u,v)})$ tal que $(\overline{x}, \overline{y}) \notin gr(F)$, más aun por ser $gr(F)$ radiante y cerrado, existe $\beta \in]0,1[$ tal que $\beta(\overline{x}, \overline{y}) \notin gr(F)$ y para tal $(\beta\overline{x}, \beta\overline{y})$ existe un cono convexo abierto $K_{(\beta\overline{x}, \beta\overline{y})}$ que contiene a $(\beta\overline{x}, \beta\overline{y})$ tal que

$$gr(F) \bigcap \underbrace{(\beta(\overline{x}, \overline{y}) + K_{(\beta\overline{x}, \beta\overline{y})} + (-\mathbb{R}^n_+) \times \mathbb{R}^m_+)}_{D_{(\beta\overline{x}, \beta\overline{y})}} = \emptyset$$

pero $(\overline{x}, \overline{y}) \in D_{(\beta\overline{x}, \beta\overline{y})}$, de este modo $(\overline{x}, \overline{y}) \notin gr(F_{(\beta\overline{x}, \beta\overline{y})})$ lo cual contradice a $(\overline{x}, \overline{y}) \in \bigcap_{(u,v)\in \mathbf{H}} gr(F_{(u,v)})$. □

3.3.6. Una segunda representación externa de una avc co-radiante

En esta parte consideremos $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de valores compactos no vacíos y normales. Además, F co-radiante, creciente y continua.
Para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, se define $\psi_\ell : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ por

$$\psi_\ell(x) := \sigma_{F(x)}(\ell), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

Las primeras características impuestas a F, garantizan la buena definición de ψ_ℓ.
En lo que sigue vamos a requerir de la siguiente versión del Teorema del Máximo (Ver [39], Teorema 9.14).

Lema 3.3.26 *Sean X, Y espacios métricos y $f : Y \times X \to \mathbb{R}$ continua en sus dos argumentos, $C : X \rightrightarrows Y$ una avc continua de valor compacto no vacío, entonces la función $f^* : X \to \mathbb{R}$ definida por $f^*(x) := \max\limits_{y \in C(x)} f(y, x)$, es continua.*

Proposición 3.3.27 *Sea F con las características dadas al inicio de esta sección, para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, ψ_ℓ es co-radiante, creciente y continua.*

Demostración: Para $x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda \geq 1$, se verifica $F(\lambda x) \subset \lambda F(x)$ y por tanto

$$\psi_\ell(\lambda x) = \sigma_{F(\lambda x)}(\ell) \leq \sigma_{\lambda F(x)}(\ell) = \max_{y \in \lambda F(x)} \langle \ell, y \rangle = \lambda \max_{z \in F(x)} \langle \ell, z \rangle = \lambda \psi_\ell(x)$$

lo que prueba que ψ_ℓ es co-radiante.
Por otro lado, sean $x, x' \in \mathbb{R}^n_+$ tales que $x \leq x'$, entonces $F(x) \subset F(x')$ y $\psi_\ell(x) = \sigma_{F(x)}(\ell) \leq \sigma_{F(x')}(\ell) = \psi_\ell(x')$.
Finalmente para cada $x \in \mathbb{R}^n_+, \psi_\ell(x) = \max\limits_{y \in F(x)} \min\limits_{i \in I_+(\ell)} \ell_i y_i$ y aplicando el lema previo con $Y = \mathbb{R}^m_+, X = \mathbb{R}^n_+, C \equiv F$ y $f(y, x) = \min\limits_{i \in I_+(\ell)} \ell_i y_i$, se concluye que ψ_ℓ es continua. $\square$

Proposición 3.3.28 *Sea F con las características previas, entonces para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, existe un conjunto no vacío $S_\ell \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\psi_\ell(x) = \inf_{(k,c) \in S_\ell} h^+_{k,c}(x)$$

donde $h^+_{k,c}(x) = \max\{\max\limits_{i \in I} k_i x_i,\ c\}$ y para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$ podemos expresar

$$F(x) = \bigcap_{\ell, (k,c) \in S_\ell} \{y \in \mathbb{R}^m_+ \ : \ \langle \ell, y \rangle \leq h^+_{k,c}(x)\} \tag{3.22}$$

Demostración: Para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+$ la Proposición 3.3.27 permite aplicar la parte 2) del Teorema 5 de [22], de modo que se garantiza la existencia de un conjunto no vacío $S_\ell \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ para representar a ψ_ℓ en la forma

$$\psi_\ell(x) = \inf_{(k,c) \in S_\ell} h^+_{k,c}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

donde $h^+_{k,c}(x) = \max\{\max_{i\in I} \ell_i x_i,\ c\}$. Por otro lado, basados en la caracterización de los conjuntos normales cerrados no vacíos a través de la Proposición 3.1.4, los conjuntos $F(x)$ pueden ser expresados como:

$$\begin{aligned} F(x) &= \{y \in \mathbb{R}^m_+ \ :\ \langle \ell, y\rangle \leq \sigma_{F(x)}(\ell),\ \forall \ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^m_+ \ :\ \langle \ell, y\rangle \leq \psi_\ell(x), \forall \ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}\} \\ &= \bigcap_{\ell \in \mathbb{R}^m_+} \{y \in \mathbb{R}^m_+ \ : \langle \ell, y\rangle \leq \psi_\ell(x)\} \end{aligned}$$

En consecuencia, para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, $F(x) = \displaystyle\bigcap_{\ell,(k,c)\in S_\ell} \{y \in \mathbb{R}^m_+ \ :\ \langle \ell, y\rangle \leq h^+_{k,c}(x)\}$ $\square$

Definición 3.3.29 *Para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+$ y $(k,c) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ se definen las avc $F_{\ell,k,c} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ mediante*

$$F_{\ell,k,c}(x) := \begin{cases} \{y \in \mathbb{R}^m_+ \ :\ \langle \ell, y\rangle \leq h^+_{k,c}(x)\}, & si\ \ (k,c) \in S_\ell \\ \mathbb{R}^m_+, & si\ \ (k,c) \notin S_\ell \end{cases} \tag{3.23}$$

Proposición 3.3.30 *Las avc $F_{\ell,k,c}$ tienen las siguientes propiedades:*

(i) Son de valor no vacío, cerrado y normal.

(ii) Son cerradas(su gráfica es cerrada).

(iii) Son crecientes.

(iv) Son co-radiantes

Demostración:
(i)Obviamente $0 \in F_{\ell,k,c}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$. Para cada terna (ℓ,k,c) tal que $(k,c) \in S_\ell$ el conjunto $F_{\ell,k,c}(x)$ es un conjunto de nivel inferior de la función $\langle \ell, \cdot\rangle$ y en consecuencia es cerrado. Directamente de (3.23) se obtiene que cada $F_{\ell,k,c}(x)$ es normal.
(ii)Sea $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ y supongamos que $(k,c) \in S_\ell$. Tomando la sucesión $(x^j, y^j) \in Gr(F_{\ell,k,c})$ tal que $(x^j, y^j) \to (\overline{x}, \overline{y})$. Entonces $\langle \ell, y^j\rangle \leq h^+_{k,c}(x^j), \forall j \in \mathbb{N}$, de este modo

$$\min_{i\in I_+(\ell)} \ell_i y^j_i \leq \max\{\max_{p\in I_+(k)} k_p x^j_p, c\}$$

Puesto que $y^j_i \to \overline{y}_i$ para cada $i \in I_+(\ell)$ entonces $\min_{i\in I_+(\ell)} \ell_i y^j_i \to \min_{i\in I_+(\ell)} \ell_i \overline{y}_i$ (entendiéndose por y^j_i la $i-$ésima componente de y^j.) Análogamente, $\max_{p\in I_+(k)} k_p x^j_p \to \max_{p\in I_+(k)} k_p \overline{x}_p$. Esto da lugar a $(\overline{x}, \overline{y}) \in Gr(F_{\ell,k,c})$.
(iii)Se sigue del hecho que $x' \leq x$ en $\mathbb{R}^n_+$ implica $h^+_{k,c}(x') \leq h^+_{k,c}(x)$.
(iv)Dados $x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0,1]$, sea $y \in F_{\ell,k,c}(x)$, entonces $\langle \ell, y\rangle \leq \max\{\max_i k_i x_i, c\}$, de donde

$$\langle \ell, ty\rangle \leq \max\{\max_i k_i t x_i, tc\} \leq \max\{\max_i k_i(tx_i), c\}$$

por lo que $ty \in F_{\ell,k,c}(tx)$, esto justifica (iv) por ser $F_{\ell,k,c}$ de valores normales. $\square$

Denotando por $\mathbf{e}$ al vector de $\mathbb{R}^m_+$ cuyas componentes son todas igual a uno, se definen la función $\alpha : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ por

$$\alpha(x) = \max_{y \in F(x)} \max_{i=1,\cdots,m} y_i$$

y la avc $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ mediante $\mathcal{C}(x) := \alpha(x)[0, \mathbf{e}]$.

Proposición 3.3.31 *Manteniendo las características de F:*

(i) α es una función de valor real, continua y co-radiante.

(ii) $\mathcal{C}$ es una aplicación continua tal que $F(x) \subset \mathcal{C}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n_+$.

(iii) $\mathcal{C}$ toma valores no vacíos, compactos y normales.

(iv) $\mathcal{C}$ es una avc co-radiante.

Demostración:

(i) Por argumentos de una versión del Teorema del Máximo de Berge se sigue que α es una función continua (la buena definición de α se da por la compacidad y la no vacuidad de cada $F(x)$). Por otro lado, para cada $x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0, 1]$ el hecho $F(tx) \supset tF(x)$ conduce a

$$\alpha(tx) = \max_{w \in F(tx)} \max_{i=1,\cdots,m} w_i \geq \max_{w \in tF(x)} \max_{i=1,\cdots,m} w_i = t \max_{w/t \in F(x)} \max_{i=1,\cdots,m} w_i/t = t\alpha(x)$$

(ii) La continuidad de $\mathcal{C}$ se obtiene de la continuidad de α, mientras que la construcción de ésta garantiza que $F(x) \subset \mathcal{C}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$.

(iii) Es inmediato de las definiciones de α y de $\mathcal{C}$.

(iv) De (i) se sigue que $C(tx) \supset tC(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0, 1]$ y junto con (iii) se concluye que C es co-radiante. $\square$

Proposición 3.3.32 *Sea F con las propiedades antes establecidas, para cada terna $(\ell, (k, c)) \in (\mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_{++})$, las aplicaciones $\widetilde{F}_{\ell,k,c} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ definidas por*

$$\widetilde{F}_{\ell,k,c}(x) := F_{\ell,k,c}(x) \cap \mathcal{C}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+.$$

tienen las siguientes propiedades:

(i) Sus valores son no vacíos, compactos y normales.

(ii) Son crecientes.

(iii) Son continuas

(iv) Son co-radiantes

Demostración:
(i)Para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, $F_{\ell,k,c}(x)$ es cerrado y $\mathcal{C}(x)$ es compacto, lo que permite establecer la compacidad de $\widetilde{F}_{\ell,k,c}(x)$. Por otro lado $\widetilde{F}_{\ell,k,c}$ es intersección de conjuntos normales.
(ii) Se deduce del hecho que $F_{\ell,k,c}$ y $\mathcal{C}$ tienen esta propiedad.
(iii) Dado que $F_{\ell,k,c}$ es cerrada y α es continua, entonces aplicando el Corolario 1.4.10 de [2], se concluye que $\widetilde{F}_{\ell,k,c}$ es continua.
(iv) Se sigue de las propiedades de aplicaciones co-radiantes. $\square$

Enseguida presentamos uno de nuestros principales resultados para la representación de avc co-radiantes. No sin antes observar que las avc $\widetilde{F}_{\ell,k,c}$ tienen una estructura simple, según la definición de las avc $F_{\ell,k,c}$ en (3.23) y de $\mathcal{C}$. Podemos denotar al conjunto de estas avc por $\mathcal{H}$.

Teorema 3.3.33 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc de valores no vacíos, compactos y normales. Además suponga que F es co-radiante, creciente y continua. Entonces F tiene una representación $\mathcal{H}-$externa con aplicaciones elementales que comparten las mismas propiedades de F.*

Demostración: De los resultados previos, para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, $F(x)$ tiene la siguiente representación

$$F(x) = \bigcap_{\ell,(k,c)\in S_\ell} \widetilde{F}_{\ell,k,c}(x)$$

donde cada $\widetilde{F}_{\ell,k,c}$ tiene las propiedades expuestas previamente, dado que

$$F(x) = F(x)\cap\mathcal{C}(x) = (\bigcap_{\ell,(k,c)\in S_\ell} F_{\ell,k,c}(x))\cap\mathcal{C}(x) = \bigcap_{\ell,(k,c)\in S_\ell} (F_{\ell,k,c}(x)\cap\mathcal{C}(x)) = \bigcap_{\ell,(k,c)\in S_\ell} \widetilde{F}_{\ell,k,c}(x).$$

$\square$

3.3.7. La aplicación inversa de una avc

Dada una avc $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$, se define su correspondiente avc inversa $F^{-1} : \mathbb{R}^m_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ por $F^{-1}(y) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \,:\, y \in F(x)\}$ para cada $y \in \mathbb{R}^m_+$.
Para un subconjunto B de R^m_+, se define $F^{-1}(B) := \bigcup\{F^{-1}(y) : \, y \in B\}$ el cual coincide con el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \; F(x) \cap B \neq \emptyset\}$.
Cuando F representa una avc de producción, se atribuye la siguiente interpretación: En un modelo con n factores de producción y m productos, cada $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ es un vector de factores donde x_i indica las unidades del factor i que conforma x, mientras que para $y \in \mathbb{R}^m_+$, el conjunto $F^{-1}(y)$ es el conjunto de vectores de factores en $\mathbb{R}^n_+$ que garantizan al menos un vector de producción y en $\mathbb{R}^m_+$. Ocasionalmente cuando F^{-1} se restringe a $Rang(F)$, F^{-1} es denotada por L, esto fundamentalmente aparece en las

referencias que tratan las tecnologías de producción como subconjuntos de un producto cartesiano que en nuestro contexto son los conjuntos $gr(F)$.

Proposición 3.3.34 *Para* $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$,

(i) *Si F toma valores normales, entonces :* $y \leq y'$ *en* $\mathbb{R}^m_+ \Rightarrow L(y') \subset L(y)$.

(ii) *Si F es co-radiante y de valores normales, entonces*

(a) *$Rang(F)$ es un conjunto radiante.*

(b) $L(ty) \supset tL(y)$ *para cada* $y \in \mathbb{R}^m_+, t \in (0, 1]$.

(iii) *Si F toma valores normales y es creciente, entonces $L(y)$ es co-radiante para cada* $y \in \mathbb{R}^m_+$.

Demostración:
(i) Sean $y \leq y'$ en $\mathbb{R}^m_+$, entonces cada $x \in L(y')$ es tal que $y' \in F(x)$, por la normalidad de $F(x)$ se sigue que $y \in F(x)$ y así $x \in L(y)$.
(ii-a)Sean $y \in Rang(F), t \in (0, 1]$, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $ty \in tF(x) \subset F(tx)$, de este modo $ty \in Rang(F)$.
(ii-b) Si $L(y) = \emptyset$ la conclusión es obvia. Sea $x \in L(y)$, entonces para cada $t \in (0, 1] : ty \in tF(x) \subset F(tx)$ y así $tx \in L(ty)$.
(iii)Se sigue directamente del hecho que para cada $z \in L(y)$ y $\lambda \geq 1$, se obtiene $y \in F(z) \subset F(\lambda z)$. $\square$

Una cuestión natural que surge es ¿Cómo generar una representación de L a partir de una representación de F ? Al respecto vamos a hacer uso del Teorema 3.3.33 con las respectivas notaciones, y a continuación exponemos algunos resultados que serán de utilidad.

Lema 3.3.35 *Sea* $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ *una avc de valores no vacíos, compactos y normales, que es co-radiante, creciente y continua. Entonces para cada* $y \in Rang(F)$*, se cumple la relación*

$$x \in L(y) \Leftrightarrow x \in F^{-1}_{\ell,k,c}(y) \cap \mathcal{C}^{-1}(y), \quad \text{para cada } (\ell, (k, c)) \text{ tal que } (k, c) \in S_\ell.$$

Demostración:
Puesto que para $(k, c) \notin S_\ell$ se ha definido $F_{\ell,k,c}(x) = \mathbb{R}^m_+$, basta representar F por $F(x) = \bigcap_{\ell:(k,c)\in S_\ell} (F_{\ell,k,c}(x)) \cap (\mathcal{C}(x)), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n_+$, en consecuencia para cada $y \in Rang(F)$:

$$\begin{aligned} x \in L(y) \quad &\Leftrightarrow y \in F_{\ell,k,c}(x) \cap \mathcal{C}(x), \quad \forall(\ell, (k, c)) : (k, c) \in S_\ell \\ &\Leftrightarrow x \in F^{-1}_{\ell,k,c}(y), \text{ y } x \in \mathcal{C}^{-1}(y), \quad \forall(\ell, (k, c)) : (k, c) \in S_\ell \end{aligned}$$

$\square$

Vamos a definir las avc $L_{\ell,k,c}$ en el conjunto radiante $Rang(F)$, mediante

$$L_{\ell,k,c}(y) := F^{-1}_{\ell,k,c}(y), \quad \forall y \in Rang(F)$$

La aplicación $\mathcal{C}^{-1}$ la aplicación inversa de $\mathcal{C}$ está definida de modo natural, aplicación que no toma valores compactos pues en particular $\mathcal{C}^{-1}(0) = \mathbb{R}^n_+$, no obstante rescatamos algunas propiedades.

Proposición 3.3.36 *(i) $y^1 \leq y^2$ en $Rang(F)$ entonces $\mathcal{C}^{-1}(y^2) \subset \mathcal{C}^{-1}(y^1)$.*

(ii) $\mathcal{C}^{-1}(y)$ es un conjunto co-radiante de $\mathbb{R}^n_+$ para cada $y \in Rang(F)$.

(iii) $\mathcal{C}^{-1}(y)$ es cerrado para cada $y \in Rang(F)$.

(iv) $\mathcal{C}^{-1}$ es una aplicación fuertemente co-radiante.

Demostración:
(i)Sea y^i_j la $j-$ésima componente de y^i. Si $x \in \mathcal{C}^{-1}(y^2)$ entonces $y^1_j \leq y^2_j \leq \alpha(x)$, $\forall j = 1, \cdots, m$ y así $x \in \mathcal{C}^{-1}(y^1)$.
(ii)Para $x \in \mathcal{C}^{-1}(y)$ y $\lambda \geq 1$, por la monotonía de α se tiene $y_j \leq \alpha(x) \leq \alpha(\lambda x)$ para cada $j = 1, \cdots, m$.
(iii) Sea $\{x^n\}$ una sucesión en $\mathcal{C}^{-1}(y)$ tal que $x^n \to x$. Entonces $y_j \leq \alpha(x^n)$ para cada $j = 1, \cdots, m$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, de la continuidad de α se concluye que $y \in C(x)$.
(iv) Por ser α una función co-radiante, entonces para $x \in \mathcal{C}(y)$ se obtiene $ty \in [0, \alpha(tx)\mathbf{e}]$ y así $ty \in \mathcal{C}^{-1}(tx)$. $\square$

Respecto a las funciones $L_{\ell,k,c}$, éstas satisfacen lo siguiente:

Proposición 3.3.37

(i) $L_{\ell,k,c}(y)$ es un conjunto co-radiante de $\mathbb{R}^n_+$.

(ii) Si $y' \leq y$ para $y, y' \in Rang(F)$ entonces $L_{\ell,k,c}(y) \subset L_{\ell,k,c}(y')$.

(iii) $L_{\ell,k,c}(y)$ es un conjunto cerrado.

(iv) $L_{\ell,k,c}$ es una aplicación cuasi co-radiante.

Demostración:
(i) y (ii) se siguen directamente de la definición de $L_{\ell,k,c}(y)$ y la Proposición 3.3.30.
(iii)Para $y \in Rang(F)$, sea $\{x^n\}$ una sucesión en $L_{\ell,k,c}(y)$ tal que $x^n \to \overline{x}$. Es claro que $\max\limits_i \ell_i x^n_i \to \max\limits_i \ell_i \overline{x}_i$ y a la vez $\max\{\max_i \ell_i x^n_i, c\} \to \max\{\max_i \ell_i \overline{x}_i, c\}$, es decir $h^+_{k,c}(x^n) \to h^+_{k,c}(\overline{x})$ lo cual conduce a $\langle \ell, y \rangle \leq h^+_{k,c}(\overline{x})$ y de este modo $\overline{x} \in L_{\ell,k,c}(y)$.
(iv) Se desprende del hecho que $F_{\ell,k,c}$ es co-radiante(ver Proposición 3.3.30). $\square$

A continuación damos una representación externa de L en términos de elementos que tienen como fuente las avc $\mathcal{H}-$elementales de F.

Teorema 3.3.38 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc de valores no vacíos, compactos y normales, y que es co-radiante, creciente y continua. Entonces su inversa $L : Rang(F) \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ tiene una representación externa, donde sus aplicaciones generadoras son de valor cerrado y co-radiante, además estas generadoras son fuertemente co-radiantes, y decrecientes cuando el conjunto potencia de $\mathbb{R}^n_+$ está dotado del orden de la inclusión usual de conjuntos.*

Demostración: Del lema anterior, para cada $y \in Rang(F)$, se verifica

$$L(y) = \bigcap_{\ell,(k,c)\in S_\ell} (L_{\ell,k,c}(y) \cap \mathcal{C}^{-1}(y))$$

Si definimos las aplicaciones $\widetilde{L}_{\ell,k,c}$ por

$$\widetilde{L}_{\ell,k,c}(y) := L_{\ell,k,c}(y) \cap \mathcal{C}^{-1}(y), \quad \forall y \in Rang(F)$$

éstas tienen las características requeridas siguiendo la proposición anterior. $\square$

3.3.8. Aplicación de valor conjunto inversa co-radiante

Así como en la Definición 1.1.4, a la par de la presentación de las funciones co-radiantes de valor puntual se han presentado las funciones inversa co-radiantes de valor puntual, en esta parte definimos las avc inversa co-radiante.

Definición 3.3.39 *Una a.v.c.* $G : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ *se denomina* ***inversa co-radiante****, si satisface*

$$x \in \mathbb{R}^n_+, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 1 \Rightarrow G(\lambda x) - \mathbb{R}^m_+ \supset \frac{1}{\lambda}G(x) \tag{3.24}$$

Equivalentemente, G *es inversa co-radiante, si*

$$x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0,1] \Rightarrow G(tx) \subset \frac{1}{t}G(x) - \mathbb{R}^m_+.$$

Algunas propiedades fundamentales se presentan:

Proposición 3.3.40 *Sean* $G_1, G_2 : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ *a.v.c. inversas co-radiantes y* $\alpha > 0$, *entonces*

(i) Las aplicaciones αG_1 *y* $G_1 + G_2$ *son inversas co-radiantes.*

(ii) Las aplicaciones $G_1.G_2$ *y* $G_1 \cup G_2$ *son inversas co-radiantes.*

La justificación se basa en la definición previa y las propiedades en (1.6).

3.3.9. Representación de un a.v.c. inversa co-radiante

Dada una a.v.c. inversa co-radiante, bajo ciertas condiciones vamos a obtener una representación externa de ésta. Recuerde que $G : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de valores normales, es inversa co-radiante si y solo si

$$G(tx) \subset \frac{1}{t}G(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+, \forall t \in (0,1]$$

Además, si $G(x)$ es cerrado para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, entonces cada uno de estos conjuntos puede expresarse como

$$G(x) = \{z \in \mathbb{R}^m_+ \,:\, \langle \ell, z\rangle \leq \sigma_{G(x)}(\ell), \quad \forall \ell \in \mathbb{R}^m_+\}$$

Lema 3.3.41 *Sea $G : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de valores normales, no vacíos y compactos. Para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, se define la función $\psi_\ell : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ por $\psi_\ell(x) := \sigma_{G(x)}(\ell)$ como se ha hecho en secciones anteriores.*

(i) Si G es scs entonces cada ψ_ℓ es scs.

(ii) Si G es decreciente entonces cada ψ_ℓ es decreciente.

(iii) Si G es inversa co-radiante entonces cada ψ_ℓ es inversa co-radiante.

Demostración:
(i)Dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^n_+$, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathbb{R}^n_+, x \in \mathbb{B}_\delta(\overline{x}) \Rightarrow G(x) \subset G(\overline{x}) + \frac{\epsilon}{\|\ell\|}\mathbb{B}_1$$

por lo que $\sigma_{G(x)}(\ell) \leq \sigma_{(G(\overline{x})+\frac{\epsilon}{\|\ell\|}\mathbb{B}_1)}(\ell)$ y así $\sigma_{G(x)}(\ell) \leq \sigma_{G(\overline{x})}(\ell) + \epsilon$

y de esta manera $\psi_\ell(x) \leq \psi_\ell(\overline{x}) + \epsilon$.
(ii)Si $x' \leq x$ en $\mathbb{R}^n_+$ entonces $G(x') \supset G(x)$, en consecuencia para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}, \psi_\ell(x') = \sigma_{G(x')}(\ell) \geq \sigma_{G(x)}(\ell) = \psi_\ell(x)$.
(iii) Si $0 < t \leq 1$, para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, $\psi_\ell(tx) = \sigma_{G(tx)}(\ell) \leq \sigma_{(\frac{1}{t}G(x))}(\ell) = \frac{1}{t}\sigma_{G(x)}(\ell) = \frac{1}{t}\psi_\ell(x)$.
$\square$

En las líneas que se presentan a continuación, se va a requerir de resultados de [22], y seguiremos la notación que esta referencia hace uso.

Proposición 3.3.42 *Sea $G : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ con las condiciones expuestas en el lema previo, para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, cada ψ_ℓ es $H_-^{-1}-$ cóncava.*

Demostración: Del lema anterior, cada ψ_ℓ es inversa co-radiante, decreciente y scs, entonces se aplican la Proposición 6 y el Teorema 7 de [22]. $\square$

Para ser más precisos, para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, se garantiza la existencia de un subconjunto no vacío T_ℓ de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que

$$\psi_\ell(x) = \inf_{(p,k)\in T_\ell} h_{p,k}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{3.25}$$

donde $h_{p,k}(x) = \max\{\max\limits_i \dfrac{p_i}{x_i}, k\}$, siendo $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y $p = (p_1, \cdots, p_n)$.

Definición 3.3.43 *Para cada $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$, se definen las avc $\Gamma_{\ell,p,k} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ por*

$$\Gamma_{\ell,p,k}(x) := \begin{cases} \{z \in \mathbb{R}^m_+ \,:\, \langle \ell, z\rangle \leq h_{p,k}(x)\}, & \text{si } (p,k) \in T_\ell \\ \mathbb{R}^m_+, & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{3.26}$$

Proposición 3.3.44 *Las avc $\Gamma_{\ell,p,k}$ son cerradas de valores normales y no vacíos, además son inversas co-radiantes.*

Demostración: Directamente de la definición se deduce que los valores de $\Gamma_{\ell,p,k}$ son no vacíos, normales y cerrados. Para la última parte, dado $\ell \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ y $(p,k) \in T_\ell$, sean $t \in (0,1]$ y $z \in \Gamma_{\ell,p,k}(tx)$ y, entonces

$$\begin{aligned}
\langle \ell, z\rangle &\leq h_{p,k}(tx)\\
&= \frac{1}{t}\,\text{máx}\{\text{máx}_i \frac{p_i}{x_i}, tk\}\\
&\leq \frac{1}{t}\,\text{máx}\{\text{máx}_i \frac{p_i}{x_i}, k\}\\
&= \tfrac{1}{t} h_{p,k}(x)
\end{aligned}$$

obteniéndose $\langle \ell, tz\rangle \leq h_{m,k}(x)$. De este modo $z \in \frac{1}{t}\Gamma_{\ell,m,k}(x)$. $\square$

Enunciamos el siguiente resultado(Una versión de Teorema del Máximo) tomado de [2, Teorema 1.4.16]

Lema 3.3.45 *Sean X, Y espacios métricos, $F : X \rightrightarrows Y$ una avc scs y de valores compactos, y una función $f : Graf(F) \to \mathbb{R}$ scs, entonces la función $\beta : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por*

$$\beta(x) = \sup_{z\in F(x)} f(x,z)$$

es scs.

Tomamos las definiciones de las funciones $\alpha : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ y $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ como en la Proposición 3.3.31. La función $\alpha : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\alpha(x) := \sup_{z\in G(x)} \max_{i=1,\cdots,m} z_i, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n_+$$

y la avc $\mathcal{C} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ definida por $\mathcal{C}(x) := \alpha(x)[0, \mathbf{e}]$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Proposición 3.3.46 *Manteniendo las condiciones sobre G.*

(i) α es una función de valor real, scs e inversa co-radiante.

(ii) $\mathcal{C}$ toma valores no vacíos, compactos y normales.

(iii) $\mathcal{C}$ es una avc scs tal que $G(x) \subset C(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$.

(iv) $\mathcal{C}$ es una avc inversa co-radiante.

Demostración:
(i) De la definición de α se deduce que esta función toma valores reales, y por el lema

anterior se obtiene su semicontinuidad superior, mientras que para $x \in \mathbb{R}^n_+, t \in (0,1]$ se sigue

$$\alpha(tx) = \max_{z\in G(tx)} \max_i z_i \leq \max_{z\in \frac{1}{t}G(x)} \max_i z_i = \frac{1}{t} \max_{tz\in G(x)} \max_i tz_i = \frac{1}{t}\alpha(x)$$

lo que muestra que α es una función inversa co-radiante.
(ii)Para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, $0 \in \mathcal{C}(x)$, y la compacidad y normalidad de $\mathcal{C}$ se sigue directamente de su definición.
(iii)Dado que $\mathcal{C}$ toma valores compactos, la scs de $\mathcal{C}$ se sigue inmediatamente de la scs de α y por la construcción de α, $G(x) \subset \mathcal{C}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$.
(iv)Por ser α inversa co-radiante según (i), se sigue que $\mathcal{C}$ es una avc inversa co-radiante.
□

Proposición 3.3.47 *Sea $G : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de valores normales, no vacíos y compactos. Además, scs, decreciente e inversa co-radiante. Para cada terna $(\ell, p, k) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+$, las avc $\widetilde{\Gamma}_{\ell,p,k} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ definidas por*

$$\widetilde{\Gamma}_{\ell,p,k}(x) := \Gamma_{\ell,p,k}(x) \cap \mathcal{C}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n_+$$

satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Son de valores no vacíos, compactos y normales.

(ii) Son decrecientes.

(iii) Son scs.

(iv) Son inversas co-radiantes

Demostración: Estas propiedades se siguen de las proposiciones 3.3.46 y 3.3.44. □

Denotando por $\mathcal{H}$ al conjunto de las avc $\widetilde{\Gamma}_{\ell,p,k} : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.3.48 *Sea $G : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ de valores normales, no vacíos y compactos. Además, scs, decreciente e inversa co-radiante. Entonces G tiene una representación $\mathcal{H}-$externa.*

Demostración: Se procede como en el Teorema 3.3.33. Para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$, podemos expresar

$$G(x) = \bigcap_{\ell,(p,k)\in T_\ell} \{z \in \mathbb{R}^m_+ : \langle \ell, z\rangle \leq h_{p,k}(x)\}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} G(x) = G(x) \cap \mathcal{C}(x) &= \bigcap_{\ell,(p,k)\in T_\ell} (\Gamma_{\ell,p,k}(x)) \cap \mathcal{C}(x) \\ &= \bigcap_{\ell,p,k} \widetilde{\Gamma}_{\ell,p,k}(x) \end{aligned}$$

□

3.3.10. Función coste

Dada una función de producción de un producto $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, se asocia a f una función denominada "Función Coste"que asigna el costo mínimo que genera alcanzar al menos un nivel de producción, dado un sistema de precios positivos para los inputs. Concretamente se define la función $e : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ por

$$\mathbf{e}(p, \alpha) = \inf\{p.x : f(x) \geq \alpha\}$$

En [22] se hace un estudio de esta función en los términos de la convexidad abstracta. Para nuestro enfoque también implementamos una función de coste asociada a una a.v.c.

Definición 3.3.49 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc de valores no vacíos. La función de coste $\boldsymbol{E}$ asociada a F se define en $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^m_+$ con valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ por*

$$\boldsymbol{E}(p, \alpha) = \inf\{p.x \ : \ F(x) \cap (\alpha + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset \ \} \quad p \in \mathbb{R}^n_+, \alpha \in \mathbb{R}^m_+ \tag{3.27}$$

Para $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, se define la función $\mathbf{E}_p : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ mediante $\mathbf{E}_p(\alpha) = \mathbf{E}(p, \alpha)$.

Propiedades básicas de $\mathbf{E}_p$:

Proposición 3.3.50

(i) Si F toma valores normales y no vacíos, entonces $\boldsymbol{E}_p$ es no decreciente.

(ii) Si F es co-radiante de valores normales y no vacíos, entonces $\boldsymbol{E}_p$ es radiante.

Demostración:
Para (i): Se sigue de inmediato del hecho que si $x \in \mathbb{R}^n_+$ es tal que $F(x) \cap (\beta + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset$ entonces $F(x) \cap (\alpha + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset$, esto último por ser $F(x)$ un conjunto normal.
Para (ii): Dados $t \in (0, 1]$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m_+$, sean $A := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : F(x) \cap (t\alpha + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset\}$ y $B := \{z \in \mathbb{R}^n_+ : F(z) \cap (\alpha + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset\}$. Para $z \in B$, se tiene $F(z) \cap (\alpha + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset$ y dado que $F(z) \subset \frac{1}{t} F(tz)$ se garantiza que $F(tz) \cap (t\alpha + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset$ lo que significa que $tz \in A$, esto da lugar a que $\mathbf{E}_p(t\alpha) \leq t\mathbf{E}_p(\alpha)$. $\square$

Vamos a requerir de una noción de casi-concavidad de una avc, para ello nos basamos en la definición de casi-convexidad presentada en [38] adaptada a nuestro esquema.

Definición 3.3.51 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$. Se dice que F es casi- cóncava si*

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_+, t \in [0, 1] \Rightarrow (F(x_1) - \mathbb{R}^m_+) \cap (F(x_2) - \mathbb{R}^m_+) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2) - \mathbb{R}^m_+$$

Si F toma valores normales, entonces la inclusión previa equivale a $F(x_1) \cap F(x_2) \subset F(tx_1 + (1-t)x_2)$. Recuerde que para $W \subset \mathbb{R}^m_+$, $F^{-1}(W) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ F(x) \cap W \neq \emptyset\}$.

Lema 3.3.52 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc de valores no vacíos.*

(i) *Si F es casi-concava y scs, entonces para cada $\alpha \in \mathbb{R}^m_+$ el conjunto $F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+)$ es convexo y cerrado.*

(ii) *Si F es de valores normales y creciente, entonces el conjunto $F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+)$ es co-normal.*

Demostración: (i) La convexidad se obtiene de la caracterización de casi-convexidad que se manifiesta en [38], mientras que la cerradura se sigue de la Proposición 9.5 de [39].
(ii)Sean $x \in F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+)$ y $x' \geq x$, entonces existe $p \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $\alpha + p \in F(x) \subset F(x')$, de este modo $x' \in F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+)$. $\square$

Teorema 3.3.53 *Sea $F : \mathbb{R}^n_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ una avc de valores normales y no vacíos, scs, casi-cóncava y creciente. Entonces*

$$F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ p.x \geq \boldsymbol{E}(p, \alpha) \ \ \forall p \in \mathbb{R}^n_{++}\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^m_+ \tag{3.28}$$

Demostración:
Para cada $p \in \mathbb{R}^n_{++}, \alpha \in \mathbb{R}^m_+$, podemos escribir $\mathbf{E}(p, \alpha) = \text{ínf}\{p.x \ : \ x \in F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+)\}$. Si $F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+) = \emptyset$ entonces $\mathbf{E}(p, \alpha) = +\infty$ y en consecuencia el conjunto del lado derecho en (3.28) resulta vacío.
Para el caso $F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+) \neq \emptyset$, denotemos por D al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ p.x \geq \mathbf{E}(p, \alpha) \ \ \forall p \in \mathbb{R}^n_{++}\}$. Supongamos que existe $\overline{x} \in D$ tal que $\overline{x} \notin F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+)$. Por la parte de (i) del Lema 3.3.52 se garantiza que existen $q \neq 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$q.\overline{x} < \beta \leq q.z \qquad \forall z \in F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+) \tag{3.29}$$

Por (ii) del Lema 3.3.52, se garantiza que $q \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, más aun se puede garantizar que $q \in \mathbb{R}^n_{++}$.Tomando ínfimo sobre z en (3.29), se obtiene $q.\overline{x} < \beta \leq E(q, \alpha)$ lo cual es una contradicción.
Recíprocamente, de la definición de $\mathbf{E}$ se obtiene que $F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+) \subset D$. $\square$

Note que la condición de valores normales para F, permite afirmar que $F^{-1}(\alpha + \mathbb{R}^m_+) = F^{-1}(\{\alpha\})$.

Bibliografía

[1] ALIPRANTIS, C.D., BORDER, K. Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide. 2006. Third Edition. Springer-Verlag

[2] AUBIN,J.P., H. FRANKOWSKA. Set-valued analysis. Birkhauser. Boston.Systems and Control. Foundations and Applications, 1990.

[3] CAMBINI,R.. Some New Classes of Generalized Concave Vector-valued Functions. Optimization. 36(1996),1, 11-24.

[4] CHEN, Y.-Z., The Existence of a Fixed Point for the Sum of two Monotone Operators. Positivity, 12(2008) 643-652.

[5] CHINAIE, M., ZAFARANI,J. Image Space Analysis and Scalarization of Multivalued Optimization. J. Optim. Theory Appl. 142(2009) 451-467.

[6] CORNES, R., Duality and Modern Economics. Cambridge University Press, 1992.

[7] DARYAEI, MH. , MOHEBI, H. Abstract Convexity of Extended Real-valued ICR Functions. Optimization. 62(2013), 6, 835-855.

[8] P. DASGUPTA, K-G MÄLER. The Economics of Non-onvex Ecosystems. The Economics of Non-Market Goods and Resources. P. Dasgupta, K-G. Mäler(Eds), Vol4(2004).

[9] DOAGOOEI,A.R. , MOHEBI, H. Monotonic Analysis over Ordered Topological Vector Spaces: IV. Journal of Global Optimization, 45(2009), 355-369.

[10] DUTTA, J. MARTÍNEZ-LEGAZ, JE,RUBINOV, AM. Monotonic Analysis over Cones: I. Optimization. 53(2004), 165-177.

[11] DZALILOV, Z., RUBINOV, A.M. Lyapunov Sequences and a Turnpike Theorem without Convexity. Set-Valued Analysis. 6(1998), 277-302.

[12] ELLIS, J.W. A General Set-separation. Duke Math. Journal. 19(1952), 417-421.

[13] FUJIMOTO, T., OSHIME, Y.. The Nonlinear Perron-Frobenius Problem for Set-valued Maps in a Closed Convex Cone in $\mathbb{R}^n$. Journal of Mathematical Economics, 1994, Vol. 23, No 5, 475-498.

[14] HILDEBRAND, W. Core and Equilibria. Princeton Uniersity Press. 1974.

[15] Hiriart-Urruty,J.-B.,Lemaréchal, C., Fundamentals of Convex Analysis. Springer,2001

[16] Hu, R., Fang, Y.P. Set Valued Increasing-along-ray Maps and Well-posed Star-shaped Optimization. J.Mathematical Analysis and Applications. 331(2007), 1371-1383.

[17] Jacobsen, S.E.. On Shepard's Duality Theory. Journal of Economy Theory, 4(1972), 458-464.

[18] Khan, A., Tammer, C., Zalinescu,C. Set-valued Optimization. An introduction with applications. Springer-Verlag. 2015.

[19] Lemmens, B. , Nussbaum, R.. Nonlinear Peron-Frobenius Theory. Cambridge University Press, 2012.

[20] Martinez-Legaz, J.E. Quasiconvex Duality Theory by Generalized Conjugation Methods. Optimization. 19(1988) 5, 603-652.

[21] Martinez-Legaz,J.E., Rubinov, A.M. Increasing Positively Homogéneous Functions on $\mathbb{R}^n$. Acta Mathematica Vietnamica, 26(2001), 3, 313-331.

[22] Martinez-Legaz, J.E., Rubinov,A.M. ,Shaible, S. Increasing Quasiconcave Co-radiant Functions with Applications in Mathematical Economics. Mathematical Methods of Operations Research, 61(2005),261-280.

[23] Mirzadeh, S. , Mohebi,H. Abstract Convexity of Increasing Co-radiant and Quasi-Concave Functions with Applications in Mathematical Economics. Journal of Optimization Theory and Applications.16(2016).

[24] Mohebi, H., Sadeghi, H. Monotone Analysis over Ordered Topological Vector Spaces: I. Optimization(2007). 56,3, 305-321.

[25] Nadiri, I.N., Handbook of Mathematical Economics. Cap. 10. (1982). Editores: K.J. Arrow y M.D. Intriligator. North-Holland Publishing Company.

[26] Phelps, R., Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, 2nd Ed. Lecture Notes in Mathematics; 1364. Springer Verlag.

[27] Rockafellar, R.T.. Monotone Processes of Convex and Concave Type. Memoirs of the American Mathematical Society, 1967

[28] Rockafellar, R.T.. Convex Analysis. University Press Princeton, 1970.

[29] Rockafellar, R.T., Wets, R. Variational Analysis. Springer. 1998.

[30] Rotem, L., Support Functions and Mean Width for $\alpha-$ Concave Functions. Advances in Mathematics. 243(2013), 168-186.

[31] Rubinov, A.M., Andramonov, M., Minimizing Increasing Star-shaped Functions Based on Abstract Convexity. Journal of Global Optimization. 15-1(1999), 19-39.

[32] Rubinov, A.M., Abstract Convexity and Global Optimization. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[33] Rubinov, A.M. Abstract convexity: Examples and Applications. Optimization. 47(2000), 1-33.

[34] Rubinov, A.M. Radiant Sets and their Gauges. Quasidifferentiability and Related Topics. V. Demyanov y A. Rubinov,Eds. 2000. Klumer Academic Publisher.

[35] Rubinov, A.M., Singer, I. Best Approximation by Normal and CoNormal Sets. JOurnal of Approximation Theory. 107(2000), 212-243.

[36] Rubinov,A.M., Monotonic Analysis: Convergence of Sequences of Monotone Functions. Optimization(2003), Vol23, No6, 673-692.

[37] Sharikov, E.V., Lipschitz Continuity and Interpolation Properties of Some Classes of Increasing Functions. Optimization 51:5(2000), 689-707.

[38] Smajdor, W., Set-valued Quasiconvex Functions and their Constant Selections. Functional Equations and Inequalities. Dordvecht: Kluwer Academic, 2000, 233-248.

[39] Sundaram, R., A First Course in Optimization Theory. Cambridge University Press. 1999.

[40] Tuy, H., Normal Sets, Polyblocks, and Monotonic Optimization. Vietnam Journal of Mathematics 27:4(1999), 277-300.

[41] Tuy, H., Minoux, M., Hoai-Phuong, N.T. Discrete Monotonic Optimization with Applications to a Discrete Location Problem. SIAM. Journal of Optimization. 17(2006),1, 78-97.

[42] Yang,F., Wei,Z., Generalized Euler Identity for Subdifferential of Homogeneous Functions and Applications. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 337(2008), 516-523.

[43] Zaffaroni, A., Is Every Radiant Function the Sum of Quasiconvex Functions? Mathematical Methods of Operations Research.Springer Verlag. 59(2004): 221-233