PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

TRANSFORMACIONES LINEALES CON GEOGEBRA, UNA PROPUESTA PARA PROFESORES EN FORMACIÓN CONTINUA

Tesis para optar el grado de

Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Que presenta

Palomino Hernández José Alonso

Dirigida por

Mg. Gonzaga Ramírez Miguel

San Miguel, 2017

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Agradecimiento

En primer lugar agradezco a Dios por sus increíbles bendiciones, a mis padres y hermanos por el apoyo y la oportunidad de hacer mis estudios de maestría.

Un profundo agradecimiento al Mg. Miguel Gonzaga Ramírez, mi asesor de tesis, por su valioso tiempo, dedicación y consejos en la realización de esta investigación y brindarme horas de su curso para la realización de mis actividades.

A la Dra. Jesús Flores Salazar por despertarme el interés en esta línea de investigación Ingeniería Didáctica y por su manera tan interesante de enseñar.

A mi jurado, Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre y Mg. Nélida Medina García por brindarme de su tiempo y consejos en mejora de esta tesis.

A todos mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú y a mis profesores de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Finalmente, agradecer a todos mis amigos que siempre me animaron a seguir hasta el final.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Dedicado a Dios,

mis padres Nelson e Irene

y mis hermanos

Sabiduría ante todo; adquiere sabiduría; y sobre todas tus posesiones adquiere inteligencia.

Prov 4: 7

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Resumen

En este trabajo de investigación detallamos la elaboración, experimentación y análisis de los resultados de dos actividades dirigidas a la experimentación que tienen los alumnos de maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, estos alumnos son profesores en formación continua, al enfrentar el formalismo con el que suelen enseñarse las transformaciones lineales, al estudiar su definición, propiedades, algunos problemas que contienen este objeto matemático como pueden ser la matriz de una transformación lineal, relativa a una base, a la imagen y núcleo de una transformación lineal.

Las actividades fueron diseñadas teniendo como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica, de modo que estas debían exigir cambios de registros de representación (del algebraico al leguaje natural, del gráfico al algebraico, etc) y tratamientos en el mismo registro para que los docentes en formación continua logren las conversiones y tratamientos, y finalmente respondan lo pedido en cada pregunta de las actividades.

Como proceso metodológico utilizamos la Ingeniería Didáctica, que se ubica en el registro de estudio de casos, y sirvió para la creación, aplicación, observación y análisis de las actividades, al confrontar los resultados esperados en la experimentación con los resultados obtenidos de las actividades. El GeoGebra fue la herramienta de suma importancia para la creación de las actividades y los alumnos la usaron de manera directa para el desarrollo de las mismas, el cual les ayudó en promover específicamente el registro gráfico. La investigación muestra que los alumnos han logrado realizar conversiones del registro gráfico al algebraico, del registro algebraico al de lenguaje natural, del registro algebraico al matricial y del registro algebraico al gráfico.

Palabras claves: Transformación lineal, conversión, tratamiento, teoría de registros de representación semiótica, ingeniería didáctica.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Introducción

En el presente trabajo de investigación presentamos actividades con el uso del software matemático GeoGebra, con la finalidad de reforzar el aprendizaje y la comprensión de las Transformaciones Lineales, y a la vez superar la dificultad que tienen los profesores en formación continua, con respecto al formalismo de este objeto matemático. Esta inquietud surgió a partir de la experiencia como alumno de la maestría en el curso Álgebra Lineal, observar trabajos de investigación que señalan en común las mismas dificultades del aprendizaje y enseñanza de las transformaciones lineales y observar que la enseñanza de este contenido matemático se reduce principalmente a tratamientos sólo en el registro algebraico, enfoque que puede presentar en los alumnos dificultades para reconocer distintos registros de representación, dificultades para distinguir entre transformaciones lineales y no lineales, obteniendo por parte de ellos aprendizajes y técnicas de manera mecánica que en cierto tiempo pueden llegar a ser olvidadas.

Investigadores como los que mencionaremos en los antecedentes, refuerzan esta inquietud del formalismo en el momento de enseñar, centrándose en un sólo registro (registro algebraico), sin tener en cuenta la importancia del cambio de registros, donde el alumno pueda interactuar a través de un software, por ejemplo el GeoGebra, en los diferentes registros.

En consecuencia a todo lo dicho anteriormente, se formuló como objetivo principal de esta investigación, analizar el efecto que tiene en los alumnos de maestría en Enseñanza de las Matemáticas, el uso del software GeoGebra para su aprendizaje y enseñanza del contenido matemático. Para conseguir este objetivo se usó dos actividades y el software GeoGebra, siguiendo los procesos que indica la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Este trabajo de investigación está distribuido en cinco capítulos de la siguiente manera: En los capítulos 1, 2 y 3 se desarrollan los aspectos teóricos de la investigación, donde presentamos: La justificación, el problema de investigación, antecedentes y objetivos; el marco teórico fundamentado en la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) y finalmente los principales conceptos de la Ingeniería Didáctica como nuestra metodología de investigación.

En el capítulo 4, se presenta la propuesta constituida por el análisis de restricciones, el diseño de actividades y el análisis a priori, donde definimos los comportamientos esperados y las dos actividades diseñadas.

En el capítulo 5, se presenta la fase experimental formada por la experimentación, el análisis a posteriori y la validación, donde se analiza la comparación de los resultados esperados y los resultados obtenidos.

Finalizamos la investigación con las conclusiones obtenidas en función a los objetivos planteados y se proponen algunas recomendaciones para emprender otras investigaciones relacionadas al tema.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

Índice general

Resumen

Introducción

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CAPÍTULO 1

Introducción

En esta primera parte describiremos los antecedentes y la justificación de nuestra investigación, sustentando nuestra presentación en la revisión de investigaciones relacionadas con el concepto Transformaciones Lineales, delimitando nuestro trabajo con la pregunta y objetivos de nuestra investigación, los cuales mencionaremos más adelante.

1.1. La Problemática

Observamos que en el nivel de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontifica Universidad Católica del Perú, los profesores en formación continua que participaron de nuestra investigación tienen estudio de pre grado, en su mayoría en las carreras de educación o alguna ingeniería y son muy pocos en ciencias matemáticas en el momento que se realizó la investigación. En la maestría se llevan cursos de matemática de nivel superior, los cuales entre sus objetivos buscan ampliar y profundizar los distintos conceptos matemáticos, objetivos que permitan comprender, explicar y justificar resultados durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. A través de las experiencias en este proceso, y la revisión de textos observamos un manejo tradicional de los conceptos matemáticos, con un esquema fijo. Éste se caracteriza por establecer, en primer lugar las definiciones y propiedades de cierto objeto matemático y luego mostrar ejemplos y ejercicios prácticos (aplicación de propiedades directas) con procedimientos algorítmicos donde no se enfatiza con amplitud sobre los diferentes registros de representación (Duval,1999), relacionados con el tratamiento de determinado concepto matemático. Esperamos que la realización de este trabajo de investigación sustentado en la Teoría de Registros de Representación Semiótica ayude a mejorar

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

el tránsito por los diferentes registros de representación del objeto matemático que en nuestro caso será la transformación lineal.

Es posible, que la forma tradicional de enseñar y aprender haga que los estudiantes no transiten por los diferentes registros de representación que señala la teoría de Duval (conversión), es posible que tampoco permita trabajar dentro de un mismo registro de representación (tratamiento) en forma correcta y no permita a los estudiantes articular las diferentes representaciones que se pueden realizar con el objeto matemático transformación lineal.

A continuación presentaremos los antecedentes que respaldan nuestro trabajo y posteriormente desarrollaremos la justificación de nuestra problemática.

1.2. Antecedentes

Los estudios que apoyan y relacionan a nuestra investigación son los siguientes:

La investigación realizada por Rodríguez (2011), explica que una de las dificultades a tener en cuenta es la falta de interés de los estudiantes en el aprendizaje, como también el formalismo en cada definición que se les presenta. Tiene por objetivo de su investigación, realizar un diagnóstico sobre el curso Álgebra Lineal desarrollado por la Universidad de los Andes, y a partir de este diagnóstico determinar cuáles eran las principales dificultades que se presentaban en el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho curso. El estudio que realizó fue mixto, donde su investigación se desarrolló en dos partes, una cuantitativa y otra cualitativa, las cuales desarrolla con la participación de profesores y alumnos que formaban parte del curso Álgebra Lineal. Su investigación se inició con una entrevista diagnóstico del curso a los docentes y alumnos, para luego proponerles desarrollar sólo a los alumnos un taller con el uso del software Cabri. El autor, en sus conclusiones afirma que los estudiantes tienen dificultades de tipos conceptuales; entre otras razones, el alto nivel del formalismo empleado por el profesor. El uso del software Cabri ayudó a disminuir los errores conceptuales de los estudiantes, en este caso, proporcionándoles un mejor aprendizaje de las transformaciones lineales.

Una segunda investigación consultada por Ulicab y Oktac (2006), tiene por objetivo principal observar las conexiones que los estudiantes desarrollan entre conceptos y

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

su naturaleza, tomando como base observaciones empíricas. En su trabajo los investigadores tratan de explicar por qué los estudiantes no tienen éxito en la resolución de problemas de extensión lineal (que consiste en determinar una transformación lineal por medio de las imágenes de los vectores de una base), basándose en la experiencia y observación de los resultados que obtenían. Aquí, los investigadores utilizan como marcos teóricos de referencia: El pensamiento teórico versus el pensamiento práctico, definido por Sierpinska y el obstáculo del formalismo según Dorier y otros. El desarrollo de su investigación contempló tres etapas: En primer lugar, el desarrollo del curso Álgebra Lineal usando el ambiente tecnológico Cabri-Géometre II, con ocho estudiantes de primer semestre inscritos en la maestría del Departamento de Matemática Educativa. En segundo lugar, se aplicó un cuestionario diagnóstico, comprendido en seis secciones, cuyo contenido estuvo relacionado con las transformaciones lineales. Y finalmente se llevó a cabo una entrevista, conformada por tres actividades, donde intervino el problema de extensión lineal. Los Investigadores concluyen que cuando se recurre a aspectos intuitivos y analíticos de conceptos se tiene que buscar un equilibrio entre ambos, para que los estudiantes se apropien adecuadamente de los significados que involucran dichos conceptos. También, enfatizan la importancia de considerar problemas novedosos que permitan a los estudiantes poner en práctica sus conocimientos adquiridos, donde conceptos diferentes deberían articularse para solucionar los problemas que se les plantee.

Una tercera investigación consultada por Romero (2010), presenta como uno de sus objetivos el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de las transformaciones lineales. Usa como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica según Duval, donde resalta la importancia en las conversiones y tratamientos. Su metodología desarrollada es a través de una prueba piloto previa y posteriormente cuatro actividades didácticas usando el software GeoGebra, sobre transformaciones lineales, con 20 alumnos inscritos en el curso de Álgebra Lineal. En estas actividades el docente pudo intervenir cuando se detectaban dudas conceptuales, operacionales o relacionadas con el uso del software GeoGebra y además se encargó de institucionalizar algunos conceptos y propiedades al término de cada actividad, formalizando resultados de las exploraciones de los estudiantes. Una de sus primeras conclusiones afirma que el

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático afecta el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener de él; también afirma que la secuencia que diseñaron facilitó la creación de significados gráficos y algebraicos de las transformaciones lineales y sus propiedades, lo cual favorece la realización de conversiones entre ambos registros y redujo dificultades de aprendizaje relacionadas a las transformaciones lineales. Esta investigación, tomaremos en cuenta para el diseño de nuestras actividades.

Finalmente, la investigación realizada por Molina y Oktac (2007), tiene por objetivo identificar modelos intuitivos (en el sentido de Fischbein), que los estudiantes pudieran tener acerca de las transformaciones lineales en contexto geométrico. El interés de los investigadores en este trabajo es observar de qué manera la existencia de los modelos geométricos influye en el aprendizaje del concepto transformación lineal. Para esta investigación usan como marco teórico el trabajo de Fischbein acerca de la intuición y los modelos intuitivos. Su metodología consistió en diseñar una entrevista con base en sus consideraciones teóricas y objetivos de su investigación, luego realizar un análisis a-priori, aplicar la entrevista y finalmente realizar un análisis a-posteriori. La aplicación de la entrevista fue a un grupo de 5 estudiantes que terminaron su licenciatura en Enseñanza de la Matemática y tomaban un curso que involucraba el uso del software Cabri como recurso para la enseñanza del Álgebra Lineal, en la maestría de Matemática Educativa. Dicha entrevista fue dividida en dos grupos de preguntas: Las primeras usualmente discutidas en los libros de texto o en el desarrollo de los cursos de Álgebra Lineal y las otras preguntas más abiertas, debido a que no se pedía algo formal acerca de transformaciones lineales. Estas preguntas se diseñaron de modo que sean contestadas según sus términos de lo que entendían, mostrando las nociones intuitivas que ellos asociaban a la definición. Concluyen que los estudiantes relacionan el término transformación lineal con líneas rectas y a éstas con el grado de las expresiones algebraicas.

Tomamos como guía dichos artículos y tesis de investigación ya que por un lado nos brindan un alcance muy cercano de lo que suponemos en nuestra problemática, y por otro lado nos muestran la dificultad que tienen los alumnos en el tema de transformación lineal, sobre todo con el formalismo que hay en cada definición y

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

propiedad. Estas investigaciones también apoyan la iniciativa de desarrollar dicho tema en un ambiente tecnológico de geometría dinámica, de nuestro interés con el software GeoGebra.

1.3. Justificación

Este trabajo surge luego de observar las dificultades que tienen los alumnos de pre grado y posgrado como señalan nuestros antecedentes, en el aprendizaje de las definiciones, propiedades y la representación gráfica de estas, dadas de manera abstracta y formal en el área del álgebra lineal, específicamente en las Transformaciones Lineales (TL). Después de los espacios vectoriales, el estudio de las TL es un tema fundamental para el álgebra lineal ya que permite estudiar algunas características importantes entre dos espacios vectoriales y generar nuevos conceptos en el álgebra lineal como son núcleo e imagen de una TL, valores y vectores propios, etc. Es por ello que en esta investigación se trabajará teniendo como objeto matemático a las TL visto en el nivel superior de estudios, con profesores de formación continua del semestre 2015-2 de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas, del curso de Álgebra Lineal.

No hemos encontrado ningún trabajo de investigación en nuestro país acerca de la enseñanza y aprendizaje de las TL, pero sí encontramos investigaciones en otros países como mencionamos en los antecedentes. Utilizaremos el software GeoGebra porque facilitará la interpretación geométrica y porque además este software está al alcance de toda institución educativa ya que es un software libre y relativamente fácil de usar, pues no usa un lenguaje de programación y sus herramientas son directas. En el caso que el alumno desee saber más de este software, dejaremos en las referencias el manual web oficial.

El contenido matemático inicia enseñándose en la educación básica regular (DCN del 2016) desde los niveles de cuarto, quinto y sexto grado de primaria como también en primero de secundaria, centrándose en la resolución de problemas de forma: movimiento y localización en el área de Geometría y Medida, para que los estudiantes de ese nivel obtengan la capacidad de modelar objetos con formas geométricas y sus transformaciones, es decir, las transformaciones de figuras en el plano como la simetría, traslación, rotación, ampliación, composición de

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

reflexiones y composición de transformaciones. Observamos la importancia e influencia del contenido matemático desde la representación gráfica en los inicios de su enseñanza.

Las Transformaciones Lineales, tiene aplicaciones intra y extra matemáticas. Por ejemplo: En los negocios, permite la comparación de varios tipos de productos y determina el tipo que produce el mayor beneficio. Para esto se introducen como columnas las cantidades sobre el tipo de piezas que se necesitan, para hacer cada producto. Cada columna representa un vector que se puede introducir en un programa de transformación lineal. La Transformación Lineal determina el costo por pieza y obtiene el costo más bajo posible para sus productos. En la computación, los diseñadores gráficos miran a las TL como una manipulación de píxeles en la pantalla de una computadora. Cada vector o matriz columna representa un píxel de una imagen; esto permite al diseñador utilizar una transformación lineal para agrandar, ampliar o girar los píxeles, uno por uno, hasta que toda la imagen sea afectada por la transformación, representada en este caso como un vector o matriz columna. Los programadores usan las transformaciones lineales para hacer muchas de las imágenes tridimensionales y de computadora. Estos ejemplos, muestran la importancia del aprendizaje de las TL, no solo en alumnos que van a carreras de ciencias o ingenierías sino a otras áreas del conocimiento.

Aunque no hay una estructura curricular fija a nivel de estudios superiores, porque cada universidad a nivel nacional desarrolla sus propios sílabos según las carreras profesionales, observamos que este contenido matemático es también relevante para otras carreras como Comercio y Negocios, Computación o en Medicina. Creemos que esta investigación es importante, a nivel de la maestría porque aclarará a los profesores si el modo de enseñar y explicar, con apoyo del software GeoGebra, mejora o no en el desarrollo del aprendizaje y enseñanza. Por otro lado, es importante porque los estudiantes de la maestría ejercitan su capacidad de pensar en forma intuitiva, gráfica y formal, conceptos abstractos como el de las TL, mencionado por Molina, J y Oktac, A (2007).

En nuestro país (Perú) no se encuentra desarrollada ninguna propuesta de las TL mediante el software de representación dinámica GeoGebra. Esto nos motiva a

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

realizar este trabajo de investigación con el interés que más adelante algún investigador pueda mejorar y experimentar las actividades, para obtener sus propias conclusiones sobre la forma en que ayudó o no dichas actividades realizadas con el software, en el aprendizaje de este concepto matemático.

1.4. Problema de investigación

Por lo expuesto anteriormente, formulamos la pregunta: ¿Cómo influyen las actividades preparadas con el software GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje del objeto Transformación Lineal con docentes en formación continua del curso Álgebra Lineal de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas?

1.5. Objetivos de la investigación

Objetivo general: Analizar el efecto que tiene el uso de actividades preparadas con el software GeoGebra en el aprendizaje de conceptos y propiedades básicas sobre transformaciones lineales en docentes en formación continua del curso Álgebra Lineal de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

Objetivos específicos:

- Identificar los procesos seguidos por los estudiantes, cuando se les formula preguntas acerca de la definición y propiedades de transformación lineal.

- Reconocer, a partir de actividades preparadas con el software GeoGebra, las distintas representaciones que realizan los estudiantes al abordar tareas sobre transformaciones lineales.

- Analizar si se produce la coordinación de al menos dos registros de representación y reconocer el papel que juega el software GeoGebra en este proceso.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

En este capítulo desarrollamos el marco teórico seleccionado, el cual resulta apropiado para cumplir con el objetivo de investigación propuesto. Dicho marco corresponde a la Teoría de Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Raymond Duval. Justificaremos por qué optamos por esta teoría, resaltando su forma estructurada; mencionando los tipos de registros que frecuentemente se emplean al abordar el tema de transformación lineal. A continuación, justificaremos y desarrollaremos nuestro marco teórico.

2.1 Teoría de registros de representación semiótica

En esta parte justificamos y desarrollamos nuestro marco teórico fundamentado en la Teoría de Registro de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1999).
La TRRS nos servirá de base para el desarrollo de actividades que mostraremos más adelante para la mejor asimilación de conceptos y propiedades de las transformaciones lineales, en las que trabajaremos con tratamientos y conversiones definidos según Duval. Trabajamos con esta teoría, ya que parte de nuestro trabajo consiste en proponer actividades cuyo desarrollo requieren el empleo del software de representación dinámica GeoGebra, para poder ofrecer una mejor perspectiva cognitiva y asimilación de conceptos de los alumnos acerca del objeto matemático TL, para observar y analizar los cambios de registros de representación, que serán el algebraico, geométrico, gráfico y matricial con ayuda del software GeoGebra. El supuesto de la TRRS nos dice que a diferencia de lo que ocurre en otros campos del conocimiento, los objetos matemáticos

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

no son directamente accesibles a la percepción; por esta razón es necesario representarlos para desarrollar el pensamiento matemático.

Por otro lado, Duval en el artículo de 1998 destaca el cuidado que se debe tener para no confundir los objetos matemáticos con las representaciones que se hacen de ellos. Las diversas representaciones semióticas de un objeto matemático son necesarias para el aprendizaje y dichos objetos matemáticos no son claramente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata.

Finalmente, dado que el concepto Transformación Lineal admite varios registros de representación, la mejor comprensión de este concepto quedará reflejada en la coordinación de sus diferentes registros.

Según Duval (2012), las **representaciones semióticas** son producciones constituidas por el empleo de signos pertenecientes a un sistema de representación que tiene inconvenientes propios de significado y de funcionamiento. Por ejemplo: Una figura geométrica, un enunciado en lenguaje natural, una fórmula algebraica y un gráfico son representaciones semióticas que exhiben sistemas semióticos diferentes.

Las representaciones no son únicamente necesarias para fines de comunicación, ellas son igualmente esenciales a la actividad cognitiva del pensamiento. De hecho juegan un papel importante en el desenvolvimiento de la representaciones mentales, en la realización de diferentes funciones cognitivas y en la producción del conocimiento.

Señala Duval (2012), para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación semiótica, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
2. El ***tratamiento*** de una representación, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
3. La ***conversión*** de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento. No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Cada representación no se encuentra completa con respecto al objeto que representa, pues en el registro en el que se presenta también limita determinadas propiedades de dicho objeto, es decir que su contenido depende del registro de representación que del objeto representado; por ello es necesaria la interacción entre los diferentes registros de representación del objeto matemático que se desea estudiar.

Algunos diferentes tipos de registros de representación, según Duval son:

- Registro de lenguaje natural: El registro de la lengua natural permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones.
- Registro gráfico: El registro gráfico posibilita inferir, con un simple vistazo, el comportamiento que va seguir determinado objeto matemático.
- Registro algebraico: Permiten realizar generalizaciones, modelizaciones y señalar características particulares del objeto que representa.
- Registro numérico: Las representaciones de tipo numérico permite apreciar algunas de las características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia.

La siguiente figura fue obtenida de la primera actividad desarrollada sobre la definición de TL, donde podemos reconocer que en el trabajo matemático se emplean diferentes registros de representación semiótica.

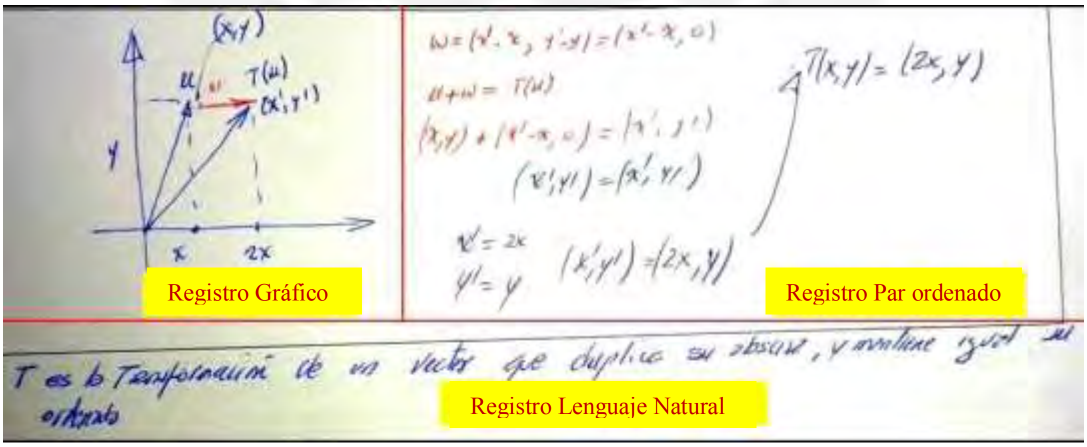


Figura 2.1: Algunos registros de una TL de un participante de la investigación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

Podemos reconocer en la figura 2.1 que el participante de la investigación hace correctas conversiones entre los registros gráfico, par ordenado y lenguaje natural, y desarrolla operaciones internas en su mismo registro llamados tratamientos.

Por otro lado, según Ramírez, Romero y Oktac (2013), también admitiremos como registro de representación el ***registro matricial***, que permite representar en forma de matriz una gran diversidad de objetos del Álgebra Lineal. La naturaleza de las matrices como arreglos de otros objetos provoca que en cierta forma se "hereden" algunas características de estos y de sus representaciones. En el tratamiento de las matrices observamos que están bien definidas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación por un número real, etc. Mientras que en la conversión puede representar un par ordenado, un vector, una base de un espacio vectorial, una transformación lineal.

La imagen que mostramos a continuación (figura 2.2), presenta un ejemplo de los dos procesos cognitivos que menciona Duval en esta teoría: La conversión y el tratamiento; observando también dos diferentes tipos de registros para un problema matemático, el registro de lenguaje natural y el registro algebraico, los que a la vez respetan sus propias estructuras internas.

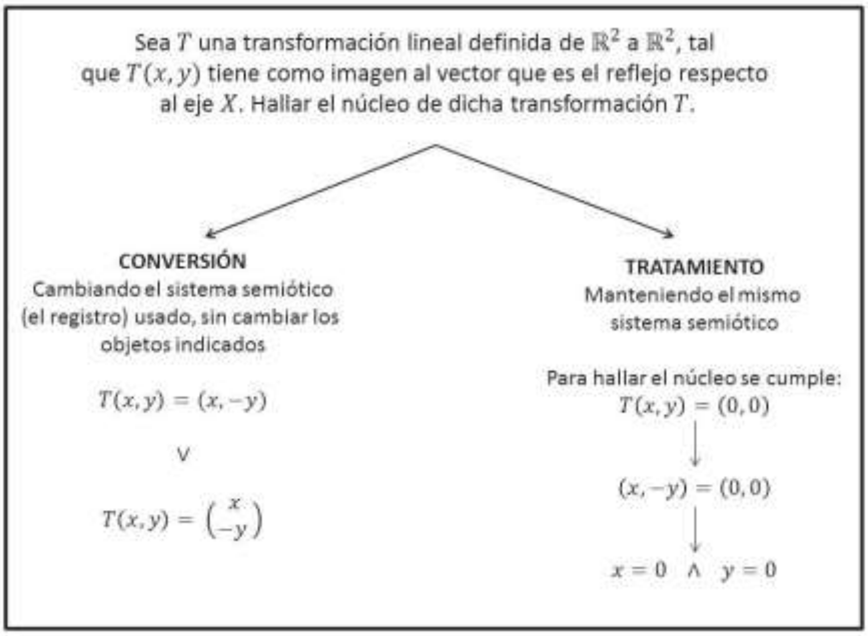


Figura 2.2: Dos procesos cognitivos fundamentales del pensamiento.
Fuente: Idea tomada de Duval, R (2006)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2.1.1. Registro de representación semiótica del objeto transformación lineal

En esta sección mostraremos los diferentes tipos de registros que se pueden emplear al desarrollar la actividad matemática que involucra a la transformación lineal. Para ello nos basamos en el trabajo de Romero (2010) y consideramos además el registro de lenguaje natural, que en nuestro caso es el castellano (o español). En este último registro la forma que tienen las representaciones son enunciados u oraciones que respetan la gramática y ortografía; y entre los tratamientos que pueden ocurrir en este registro, están las explicaciones (justificaciones), descripciones, razonamiento, etc.

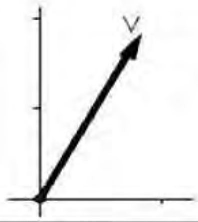
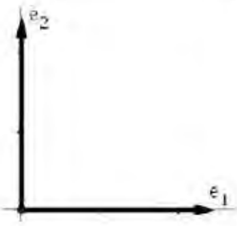
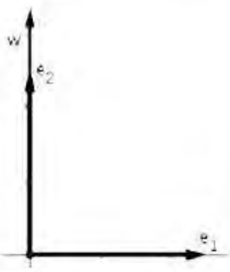
Objeto que puede ser representado	Representaciones	
	Registro gráfico	Registro matricial
Vector o elemento de un espacio vectorial		$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$
Base		$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
Vector colineal a un vector de la base escogida		$\begin{pmatrix}0\\1.3\end{pmatrix}$

Figura 2.3: Ejemplo de representaciones asociados al objeto TL.

Fuente: Romero (2010, p.11)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Los tratamientos que se puedan realizar dentro de un mismo registro, dependerán del tipo de registro en el cual se está trabajando, por ejemplo, desarrollando el proceso matemático y encontrando solución a una situación problemática planteada. A continuación mostraremos otro cuadro con tratamientos particulares de cada registro, considerando en los ejemplos a los registros gráfico y matricial.

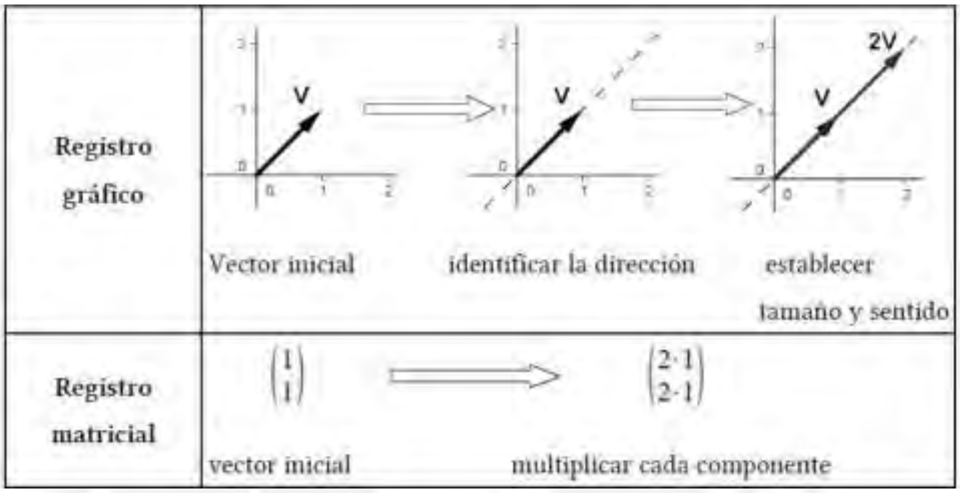


Figura 2.4: Tratamiento de multiplicación por un escalar en el registro gráfico y matricial.
Fuente: Romero (2010, p.12)

Un ejemplo en contexto donde podamos observar los diferentes registros de representación de las transformaciones es el siguiente:

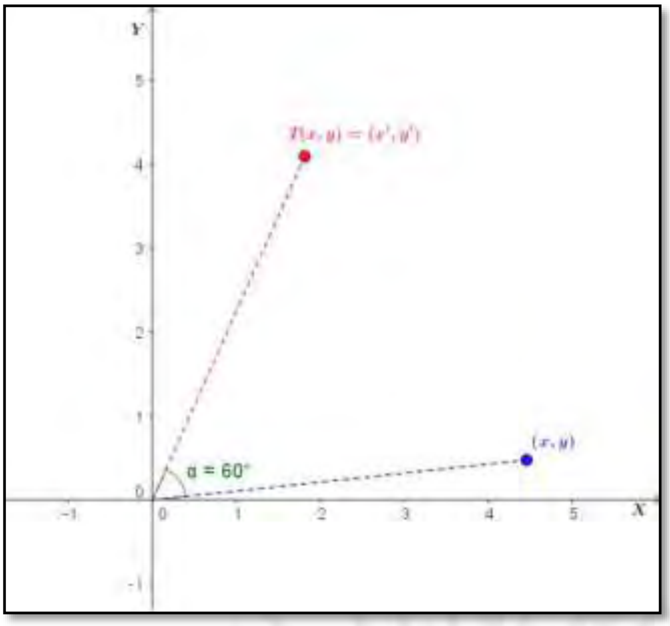
Registro Lenguaje Natural

Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que a cada vector le hace corresponder el vector obtenido por la rotación del primero, un ángulo de 60° en sentido anti horario.

a) Gráficamente la transformación lineal es

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP



Registro Gráfico

b) La regla de correspondencia que define explícitamente la transformación lineal es

$$T(x,y) = (x.\cos(60^{\circ}) - y.sen(60^{\circ})\,;\ x.sen(60^{\circ}) + y.\cos(60^{\circ})) = (x', y')$$

$$T(x,y) = \left(x.\frac{1}{2} - y.\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ x.\frac{\sqrt{3}}{2} - y.\frac{1}{2}\right)$$

Registro Par Ordenado

c) La matriz de T relativa a la base canónica se halla:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(60^{\circ}) & -sen(60^{\circ}) \\ sen(60^{\circ}) & \cos(60^{\circ}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Registro Matricial

Luego su matriz de T relativa a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Este es un ejemplo particular de transformación lineal llamada rotación con 60°en sentido anti horario. Se puede desarrollar similarmente para un ángulo α .

En esta investigación se considerarán actividades que demanden usar el registro gráfico debido a que podrán ser abordadas con el software GeoGebra, que se caracteriza por ser un software de representación dinámica y principalmente geométrica. Consideramos que para una mejor comprensión y una mejor construcción de conocimientos asociados a TL, se debe partir del registro gráfico. Se debe buscar el uso de conceptos que puedan interiorizarse a través del trabajo con el registro gráfico. Manejar el concepto en un registro involucra manejar e interpretar conceptos y propiedades relacionados a éste, lo que en definitiva redunda en una mejor calidad de aprendizaje.

2.2 Transformación lineal desde la TRRS

El concepto Transformación Lineal (TL) es un tema importante en el Álgebra Lineal, debido a que mediante este concepto se relacionan dos espacios vectoriales, mediante funciones que preservan propiedades de aditividad y linealidad y que bajo ciertas condiciones permitirá identificar algunos espacios vectoriales con otros más conocidos. El objeto matemático TL fue tratado de manera independiente por Jacobi en 1830, Weierstrass, en la década de 1860 y Kronecker, en la década de 1950. A continuación presentamos a las TL desde el punto de vista actual, donde reconoceremos los diferentes tipos de registros de representación:

2.2.1. Transformación lineal desde el punto de vista actual

Todo este estudio de TL revisado en algunos textos del área Álgebra Lineal, nos ayuda en la creación de nuestras actividades que se aplicarán a los profesores en formación continua, como también contribuye a entender la complejidad en el manejo de este concepto.

Las siguientes definiciones, ejemplos y propiedades de TL son obtenidos de Lima (1998) y Grossman (2008), y es el esquema que actualmente se sigue en el desarrollo de los cursos de nivel superior, en específico dentro del curso Álgebra Lineal de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En el desarrollo de este trabajo asumimos conocida la definición de espacio vectorial, ya que es un contenido matemático enseñado previamente a transformaciones lineales en el curso de Álgebra Lineal. Así, podemos afirmar que $\mathbb{R}^2$ es espacio vectorial y será este el espacio con el que trabajaremos en nuestras actividades.

Definición 2.1: *Sean E y F espacios vectoriales. Una* ***Transformación Lineal*** *A de E en F, representada por $A: E \to F$ es una correspondencia que a cada vector $v \in E$ le asigna un vector $A(v) \in F$, tal que para cualesquiera $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen las relaciones:*

$$A(u+v) = A(u) + A(v)$$
$$A(\alpha u) = \alpha A(u)$$

El vector $A(u)$ se llama imagen de u mediante la transformación lineal A.

De esta definición surgen las siguientes propiedades inmediatas:

1. Si $A: E \to F$ es una transformación lineal entonces $A(0) = 0$.
2. Dados $u, v \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene $A(\alpha u + \beta v) = A(\alpha u) + A(\beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$. En particular: $A(-v) = -A(v)$ y $A(u - v) = A(u) - A(v)$, para $u, v \in E$.
   Más generalmente dados $v_1, \ldots, v_m \in E$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, se cumple $A(v_1\alpha_1 + \ldots + v_m\alpha_m) = \alpha_1 A(v_1) + \ldots + \alpha_m A(v_m)$.

Las transformaciones lineales $A: E \to F$, del espacio vectorial E en sí mismo se llaman *operadores lineales* en E. A su vez, las transformaciones lineales $\varphi: E \to \mathbb{R}$, con valores numéricos, son llamados *funcionales lineales*.

Un operador lineal especial es el operador *identidad* $I: E \to E$, definido por $I(v) = v$, para todo $v \in E$.

Por otro lado, introduciremos algunas definiciones de objetos matemáticos que necesitamos, tales como:

Definición 2.2: *Sea E un espacio vectorial. Un* ***subespacio vectorial*** *o simplemente un subespacio de E es un subconjunto $F \subset E$, donde F cumple las siguientes propiedades:*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

1. $0 \in F$.

2. *Si* $u, v \in F$ *entonces* $u + v \in F$.

3. *Si* $v \in F$ *entonces, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

De esto se sigue que si u y v pertenecen al subespacio F y α, β son números reales, entonces $\alpha u + \beta v \in F$.

Luego, a toda transformación lineal $A: E \to F$ están asociados dos subespacios vectoriales indispensables para estudiar el comportamiento de A: *el núcleo* de A, que es un subespacio de E, y *la imagen* de A, que es un subespacio de F, las cuales definiremos a continuación:

Definición 2.3: *La* ***imagen*** *de A es el subconjunto $Im(A) \subset F$, formado por todos los vectores $w = A(v) \in F$ que son imágenes de elementos de E por la transformación A.*

La noción de imagen tiene sentido para toda función $A: E \to F$, lineal o no. Si A es lineal, entonces $Im(A)$ es un subespacio vectorial de F. Si $Im(A) = F$, se dice que la transformación A es *sobreyectiva*. Esto significa que para cualquier $w \in F$ dado, existe $v \in E$ tales que $A(v) = w$.

Definición 2.4: *El* ***núcleo*** *de la transformación lineal $A: E \to F$, es el conjunto formado por todos los vectores $v \in E$ tal que $A(v) = 0$.*

El núcleo de A, $Nu(A)$ es un subespacio vectorial de E.
Si $Nu(A) = \{0\}$, se dice que la transformación A es *inyectiva*, que significa que dos elementos distintos del dominio no deben tener una misma imagen. El recíproco también es cierto, es decir, si la transformación A es inyectiva entonces $Nu(A) = \{0\}$.

Observamos que las definiciones dadas hasta aquí muestran el estrico formalismo y no se observa cambios de registros, con los cuales las definiciones sean fáciles de comprender.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Presentamos un ejemplo donde podamos observar estos dos últimos conceptos, Imagen y Núcleo de una TL en los siguientes registros:

Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que a cada vector del domino se le hace corresponder el vector obtenido por la diferencia del doble de su abscisa y su ordenada, en cada componente.

Registro Lenguaje Natural

Regla de correspondencia de la transformación lineal:

$$\boxed{T(x, y) = (2x - y, 2x - y)}$$

Registro Par Ordenado

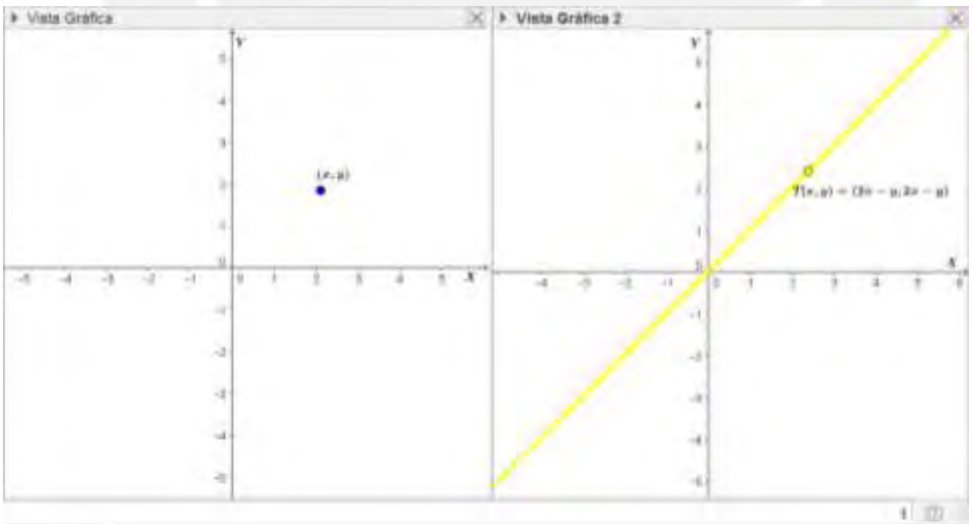
Para llegar a este registro par ordenado, implícitamente se tuvo que hacer la conversión, donde en el registro lenguaje natural se debió tener mucho cuidado con los signos de puntuación e interpretación para llegar a este nuevo registro.

La imagen de T está dada por:

$$\boxed{Im(T) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' = y' = 2x - y; x, y \in \mathbb{R}\}}$$

Registro Algebraico

Obtenemos este registro algebraico luego de usar de manera correcta la definición de imagen de T, donde implícitamente se hizo tratamientos en el registro par ordenado y así obtener la *Im(T)*.



Registro Gráfico

Figura 2.5: Gráfica de $Im(T) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' = y'\}$ (lado derecho: recta amarilla)

Registro Algebraico

El núcleo de T está dado por:

$$\boxed{Nu(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0,0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Registro Gráfico

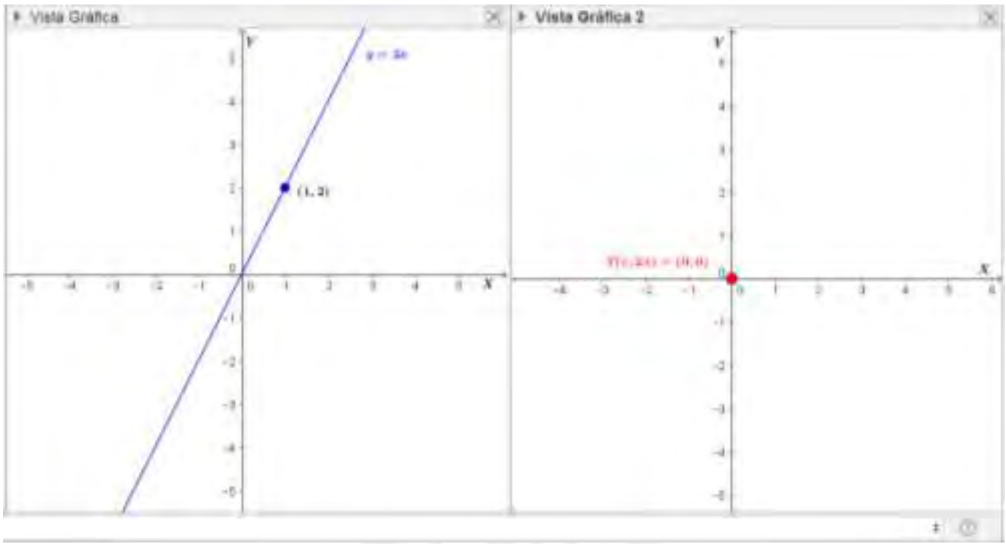


Figura 2.6: Gráfica de $Nu(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ (lado izquierdo: recta azul)

Observando que es posible hallar de manera inmediata usando el software GeoGebra tanto la imagen como el núcleo de una transformación lineal, teniendo en cuenta que hacer la conversión del registro algebraico hacia el registro gráfico es un proceso trivial, sin embargo la conversión inversa no es tan inmediato pues previamente es necesario hacer tratamientos y usar algunas propiedades geométricas. Por lo cual solicitaremos en nuestras actividades a los profesores en formación continua esta última conversión para ser analizada.

Definición 2.5: *Sea E un espacio vectorial, X es un subconjunto de E es **linealmente independiente** (L.I) si ningún vector $v \in X$ es combinación lineal de otros vectores de X.*

Definición 2.6: *Una **base** de un espacio vectorial E es un conjunto $\mathcal{B} \subset E$ linealmente independiente que genera E, es decir que todo vector $v \in E$ se expresa de modo único como combinación lineal de elementos de la base.*

Si el espacio vectorial E tiene una base con un numero finito de elementos, entonces la ***dimensión*** de E es el número de vectores en todas las bases y E se denomina espacio vectorial de ***dimensión finita***. Si $E = \{0\}$, entonces se dice que E tiene dimensión cero.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Se dice que una base es llamada base canónica de $\mathbb{R}^2$ si sus elementos de la base son $\vec{\imath} = (1,0)$ y $\vec{\jmath} = (0,1)$.

EJEMPLO: Encontrar una base para el siguiente sub espacio vectorial E de $\mathbb{R}^3$, definido por:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x - y + 3z = 0\}$$

Se observa que si tomamos x y z arbitrariamente, entonces $y = 2x + 3z$. Así, los vectores en E tienen la forma

$$(x, 2x + 3z, z) = (x, 2x, 0) + (0,3z, z) = x(1,2,0) + z(0,3,1)$$

Lo cual muestra que los vectores $(1,2,0)$ y $(0,3,1)$ generan E. También se puede observar que los vectores son linealmente independientes ya que no son múltiplos entre sí. Por lo tanto, forman una base para E.

A continuación presentaremos ejemplos básicos sobre transformaciones lineales:

Ejemplo 2.1. La ***transformación cero:*** Sean E y F espacios vectoriales. Definimos $T: E \to F$ por $T(v) = 0$ para todo $v \in E$.

Tiene por núcleo: $Nu(T) = \{v \in E: T(v) = 0\} = E$

Y por imagen: $Im(T) = \{w \in F: T(v) = w\,, \forall v \in E\} = \{0\}$

Ejemplo 2.2. La ***transformación identidad:*** Sea E un espacio vectorial. Definimos $I: E \to E$ por $I(v) = v$ para todo $v \in E$.

Su núcleo es: $Nu(I) = \{v \in E: I(v) = 0\} = \{0\}$

E imagen es: $Im(I) = \{v \in E: I(v) = v\,, \forall v \in E\} = E$

Ejemplo 2.3. La ***transformación reflexión respecto al eje Y:*** Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Justificamos que T es transformación lineal:

- Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) &= (-x_1 - x_2, y_1 + y_2) \\ &= (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) \\ &= T(x_1, y_1) + T\,(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

- Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T((\alpha x, \alpha y)) &= (-\alpha x, \alpha y) \\ &= \alpha(-x, y) \\ &= \alpha T(x, y) \end{aligned}$$

Tiene por núcleo:

$$Nu(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0,0)\} = \{(0,0)\}$$

Y por imagen:

$$Im(T) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (-x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

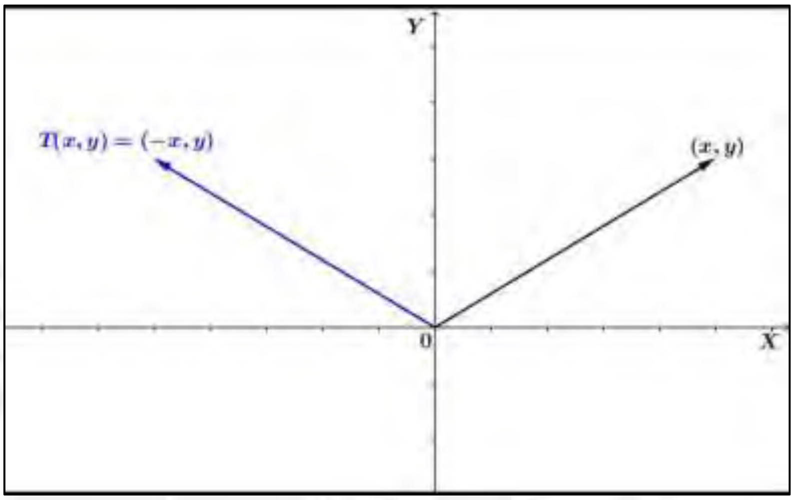


Figura 2.7: Reflexión respecto al eje *Y*.

Ejemplo 2.4. Operador proyección ortogonal sobre una recta: Sea la recta con ecuación $y = x$. Esta recta es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Consideremos el operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que a cada vector $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se le asigna el vector $T(u) = (x', x')$, cuyo extremo es el pie de la perpendicular bajada desde u sobre la recta $y = x$. Este operador está definido:

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\quad \to \quad \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\quad \to \quad T(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

Tiene por núcleo:

$$Nu(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0,0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Y por imagen:

$$Im(T) = \left\{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$Im(T) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : \ y' = x'\}$$

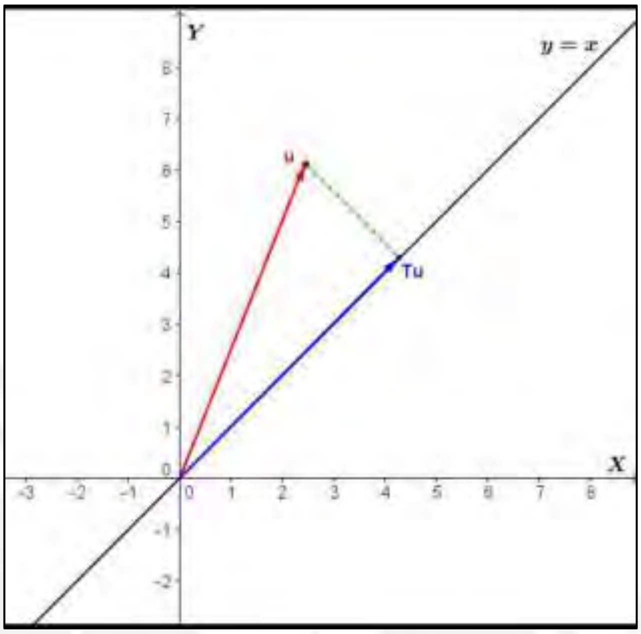


Figura 2.8: Proyección ortogonal sobre la recta *y*=*x*.

Ejemplo 2.5: ***Operador proyección:*** Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido $T_1(x, y, z) = (x, y, 0)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces T_1 es el operador proyección que toma un vector en el espacio de tres dimensiones y lo proyecta sobre el plano XY. De manera similar, $T_2(x, y, z) = (x, 0, z)$ proyecta un vector en el espacio sobre el plano XZ.

Tiene por núcleo:

$$Nu(T_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0,0,0)\}$$

$$Nu(T_1) = \{(0,0, z)\} = Eje\ Z$$

Y por imagen:

$$Im(T_1) = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (x, y, 0)\ , \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$Im(T_1) = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : \ x' = x \ \wedge \ y' = y \ \wedge \ z' = 0\} = Plano\ XY$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

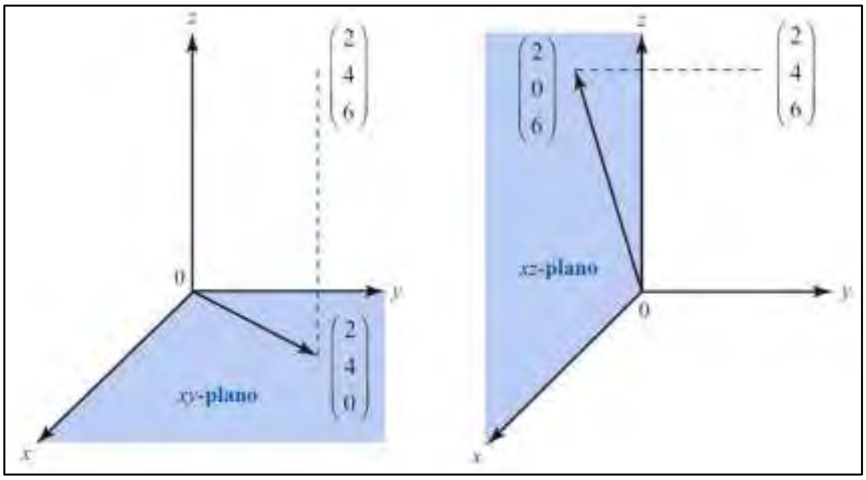


Figura 2.9: Proyección sobre el plano XY y XZ

Fuente: Grossman,S (2008,p.462)

La ausencia del registro gráfico en el tema transformación lineal en los libros de álgebra lineal es notoria, lo cual nos induce a enfocarnos más en el uso de este registro en nuestra investigación y a través de nuestras actividades por medio del software GeoGebra. Pero también nos enfocaremos en el uso principal de los registros algebraico, par ordenado, matricial y lenguaje natural. Presentaremos en el software GeoGebra vectores en el dominio y su imagen paralelamente, donde el alumno pueda manipular a través de mouse dichos vectores del dominio y así poder responder las preguntas de las actividades que se les entrega de manera física en hojas. Dichas preguntas están fundamentadas bajo la teoría desarrollada en esta parte.

Un teorema importante dentro de las transformaciones lineales es el *teorema 2.1*, obtenido de Lima (1998), el cual usaremos en nuestra investigación aplicado en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.1: *Sean E, F espacios vectoriales y B una base de E. A cada vector $u \in B$ asignémosle (arbitrariamente) un vector $u' \in F$. Entonces existe una única transformación lineal $A: E \to F$, de modo que $A(u) = u'$, para todo $u \in B$.*

Demostración: todo vector $v \in E$ se expresa, de modo único, como combinación lineal $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$ de elementos de $u_1, \ldots, u_m$ de la base B.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Definimos $A: E \to F$ poniendo

$$A(v) = \alpha_1 u'_1 + \cdots + \alpha_m u'_m$$

Dados $v, w \in E$ tenemos

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$$

Y

$$w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m$$

Entonces:

$$v + w = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) u_i$$

Luego

$$A(v + w) = \sum (\alpha_i + \beta_i) u'_i = \sum \alpha_i u'_i + \beta_i u'_i = A(v) + A(w)$$

Análogamente se ve que $A(\alpha v) = \alpha A(v)$.

Por consiguiente $A: E \to F$, así definida, es una transformación lineal tal que $A(u) = u'$ para todo $u \in B$. En cuanto a la unicidad: Sea $B: E \to F$ cualquier otra transformación lineal tal que $B(u) = u'$, para todo $u \in B$; entonces, para cada $v = \sum \alpha_i u_i$ se tiene

$$B(v) = B\left(\sum \alpha_i u_i\right) = \sum \alpha_i . B(u_i) = \sum \alpha_i u'_i = A(v)$$

Por lo tanto $B = A$.

Notamos el continuo uso del registro algebraico y sus tratamientos en este teorema para ser demostrado, a la vez va de la mano con el formalismo lo cual es usual y hace que sea complicada su comprensión.

Para mejorar la comprensión de este teorema, mostramos a continuación el siguiente ejemplo:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función, y $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$T(e_1) = (1,1)\ ;\ T(e_2) = (-1,1)\ ;\ T(e_3) = (0,0).$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Por el teorema anterior, T se extiende de forma única como una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, es más, mostramos a continuación la regla de correspondencia de T:

Para todo $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, luego

$$\begin{aligned} T(v) &= \quad xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) \\ T(v) &= \quad x(1,1) + y(-1,1) + z(0,0) \end{aligned}$$

Es decir $T(x, y, z) = (x - y, x + y)$.

■

En virtud al *teorema 2.1* anterior, ahora se verá que para toda transformación lineal $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existe una matriz $\boldsymbol{a}$ $m \times n$ tal que $A(x) = \boldsymbol{a}x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para definir una transformación lineal $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ basta seleccionar, para cada $j = 1, \ldots, n$ un vector $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ y decir que $v_j = A(e_j)$ es la imagen del j-ésimo vector de la base canónica, $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ por la transformación lineal A. Así queda determinada la imagen $A(v)$ de cualquier vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En efecto, se tiene $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, entonces

$$A(v) = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}x_j\,, a_{2j}x_j\,, \ldots, a_{mj}x_j)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\ , \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\ , \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right),$$

o sea que

$$A(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

Donde

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Una transformación lineal $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ queda completamente determinada por una matriz $\boldsymbol{a} = [a_{ij}] \in M(m \times n)$. Los vectores columna de dicha matriz son las imágenes $A(e_j)$ de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. La imagen $A(v)$ de un vector arbitrario $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector $w = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, cuyas coordenadas son dadas por las ecuaciones $(*)$ anteriores, en las que intervienen los vectores fila de la matriz $\boldsymbol{a}$**.**

Se dice que $\boldsymbol{a}$ es la matriz de la transformación A relativa a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Se tiene

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, e_i \qquad ; \quad (j = 1, \dots, n)$$

Donde los e_j están en $\mathbb{R}^n$ y los e_i en $\mathbb{R}^m$.

En esta sección hemos presentado conceptos y propiedades que estarán presentes en nuestras actividades. Se pone atención a los tratamientos y conversiones implícitas pero que no son tan directas, que se realizan con algunos conceptos asociados a la TL. En algunas ocasiones nos facilitan ideas para desarrollar conversiones entre los registros gráfico, par ordenado, lenguaje natural y matricial.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CAPÍTULO 3

Metodología de la investigación

En este capítulo presentaremos las características del método empleado para el desarrollo de nuestra investigación, el cual toma algunos elementos de la ingeniería didáctica, pues permite analizar los componentes que intervienen en los procesos de construcción y comunicación de los saberes matemáticos en la clase.

3.1 Tipo de estudio

Nuestra investigación será de tipo cualitativa experimental. Este tipo de estudio se remonta entre finales del siglo XIX e inicios del siglo XX. En los años 1940 y 1950 decayó la importancia del enfoque cualitativo debido al posicionamiento del enfoque cuantitativo; pero en la década de 1960, este enfoque recobra vitalidad e importancia, la etnometodología (es el estudio de cómo las "prácticas" o los "métodos" son usados por las personas en circunstancias particulares y concretas, para crear y sustentar el orden social) surge con vigor destacando aportes como el de Peter L. Berger y Thomas Luckmann en 1966, quienes presentan modelos de construcción de la realidad usando el enfoque cualitativo, y en esos tiempos fortalecen la importancia de este enfoque en una investigación que tiene como uno de sus objetivos, destacar la comprensión del fenómeno social, desde la perspectiva de los actores, como lo menciona Eisner,1981. Los investigadores tratan de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas. En nuestra investigación, la comprensión del fenómeno social se efectuará en el aula de clases y será descriptiva y explicativa.

El término "cualitativo", se usa bajo dos acepciones, una como cualidad y otra más comprehensiva, como calidad. A partir de estas consideraciones podemos afirmar que nuestra investigación es de tipo cualitativa.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Es experimental, debido a que en nuestro caso desarrollaremos dos actividades con los alumnos del curso Álgebra Lineal. La fuente directa de datos es el ambiente natural y el principal instrumento de recolección es el investigador, en nuestro caso, el ambiente natural será el aula de clase con los alumnos del curso y seremos nosotros (los investigadores) quienes recolectemos los resultados de las actividades realizados por los alumnos mediante las dos actividades aplicadas para nuestra investigación.

3.2 La ingeniería didáctica

El método de investigación que usaremos en nuestra investigación tomará en cuenta elementos de la ingeniería didáctica, la cual surge a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero (Artigue, Douady y Moreno, 1995).

Artigue menciona que la ingeniería didáctica es una metodología que se encuentra ubicada en los registros de los estudios de casos y la validación que desarrolla es interna, fundamentada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

> ... la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.... se caracteriza también por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. Artigue(1995,p.36-37)

Luego, el proceso de desarrollo de esta metodología es delimitada por las siguientes cuatro fases:

Primera fase: Análisis preliminares.

Segunda fase: Concepción y análisis a priori.

Tercera fase: Experimentación.

Cuarta fase: Análisis a posteriori y validación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

3.2.1. Los análisis preliminares

En toda investigación donde se aplique la ingeniería didáctica, estos análisis se realizan teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación. Servirán de base para la siguiente fase. Estos análisis preliminares según Artigue (1995) son:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos en el aprendizaje.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

3.2.2. La concepción y análisis a priori

En esta fase se analizan los comportamientos matemáticos y cognitivos que se espera de los estudiantes, además se analizan las estrategias que utilizarán, así como las dificultades y errores que puedan cometer.

3.2.3. La experimentación

El desarrollo de la investigación se centra en esta fase, con la participación principal de los alumnos, acompañados por el investigador quien tendrá como tarea asesorar y ayudar a resolver algunas dificultades de los alumnos. En esta etapa el alumno desarrolla en forma individual las actividades elaboradas por el investigador.

3.2.4. El análisis a posteriori y la validación

El análisis a posteriori se centra en el conjunto de datos recogidos durante la experimentación, las observaciones realizadas y las producciones de los estudiantes durante las actividades y fuera de ellas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

En la validación se describen los comportamientos matemáticos y cognitivos esperados que fomentó la secuencia didáctica. Se confrontan las hipótesis elaboradas en el análisis a priori y el análisis de los resultados de la fase experimental o análisis a posteriori.

3.3 La ingeniería didáctica en la investigación

En esta sección desarrollamos la primera fase de la ingeniería didáctica. Esta fase se centra exclusivamente en el objeto matemático, que en nuestro caso serán las Transformaciones Lineales.

Las cuatro fases de la ingeniería didáctica estarán presentes en nuestra investigación por la manera en que la planteamos, el de confrontar los supuestos establecidos en el análisis a priori con los resultados del análisis a posteriori, para poder validar o afirmar si el uso del software GeoGebra ayudó o no en el aprendizaje del objeto matemático Transformación Lineal.

3.3.1. Análisis preliminar

En esta primera fase se desarrolla un enfoque sistémico de las Transformaciones Lineales, haciendo un análisis desde los puntos de vista epistemológico, cognitivo y didáctico, para explicar cómo surge, cómo se presenta en el aula y cómo se desarrolla en los libros el objeto matemático Transformación Lineal, y así tener mayor información para la siguiente fase, el análisis a priori.

- Desde el **punto de vista epistemológico**, se hará nuevamente una breve reseña histórica de las transformaciones lineales y los conceptos asociados a éstas. Hemos encontrado poca información de la reseña histórica donde se mencione únicamente a las transformaciones lineales, sin embargo mencionaremos brevemente la influencia histórica de otros conceptos matemáticos que se relacionan con ellas. Comentamos la forma en que estos conceptos matemáticos influenciaron en la evolución de las transformaciones lineales, para esto tomaremos los datos mencionados por Luzardo, D y Peña, A (2006).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Dentro de los conceptos elementales del álgebra lineal encontramos a las ecuaciones lineales, matrices, determinantes, transformaciones lineales, dimensiones, formas bilineales, formas cuadráticas y espacios vectoriales; estos conceptos con frecuencia están interconectados.

Gaus, en su libro Disquisitiones, introdujo de manera implícita y significativa, a las matrices, como abreviaturas de transformaciones lineales.

Las transformaciones lineales han estado representadas como arreglos rectangulares de números, aunque Gauss no lo usó explícitamente, utilizó la terminología de la matriz. También consideró implícitamente el producto de matrices de orden 2×2 y 3×3; las que tuvo en cuenta en la composición de las correspondientes transformaciones lineales.

Por otro lado, Cayley en 1858, publicó su Memoir on the theory of matrices, la cual contiene la primera definición abstracta de matriz y donde mostró que los arreglos de coeficientes estudiados para las transformaciones lineales y formas cuadráticas, son casos especiales de este concepto general de matriz. Cayley utilizo matrices en otro papel para resolver un problema importante, el llamado problema de Cayley-Hermite, que estudia la determinación de todas las transformaciones lineales dejando una forma cuadrática en n variables invariantes.

Las transformaciones lineales de coordenadas

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \ (1 \leq j \leq m)$$

Apareció en un lugar destacado de la geometría analítica de los siglos $XVII$ y $XVIII$ (sobre todo para $m = n \leq 3$). Esto condujo naturalmente a cálculos realizados sobre arreglos rectangulares de números. También aparecieron en la geometría proyectiva, fundada en el siglo $XVII$ y se describe analíticamente a principios del XIX.

Se debe destacar la influencia de Frobenius sobre el desarrollo de la noción de transformación lineal, la cual venía evolucionando desde el siglo XVIII con los trabajos de Cauchy, Weierstrass y Kronecker, entre otros, y que

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

adoptó su forma actual en 1918 de la mano del matemático alemán Hermann Weyl (1885-1955).

Actualmente, las matrices, como los polinomios o las series de potencias, bien pueden considerarse como arreglos de datos de algún tipo según James Joseph Sylvester (1814-1897), donde el Álgebra que se establezca sobre éstas, determina la manera en que estos datos pueden combinarse para generar nueva información (según Cayley). La formulación de un problema concreto en términos del álgebra lineal ha sido, y sin duda lo seguirá siendo, uno de los métodos más efectivos para hallar su solución. Herramientas tales como el determinante y las transformaciones lineales, entre otras, contribuyen decisivamente a facilitar esta labor hasta el día de hoy.

- Desde el **punto de vista cognitivo** como ya hemos mostrado en los antecedentes del capítulo 1, las diferentes investigaciones han desarrollado análisis que involucra indirecta o directamente el objeto matemático Transformación Lineal relacionado a la Teoría de Registros de Representación Semiótica u otros marcos teóricos.

  De esta forma, Uicab y Oktac (2006) comentan que distintas investigaciones de tipo diagnóstico mostraron que las dificultades de los estudiantes en álgebra lineal revelan un mismo obstáculo, al cual llaman obstáculo de formalismo, que se produce cuando el estudiante manipula las representaciones formales simbólicas, pero no tiene las suficientes aptitudes para comprenderlas, lo cual da pie a que trabajen en el nivel de manipular las expresiones, pero ignoran los significados o las reglas de las matemáticas.

  De igual manera Rodríguez (2011) señala que los elementos que generan dificultades durante el proceso de aprendizaje y enseñanza del Álgebra Lineal (en particular de las Transformaciones Lineales) son el uso del formalismo (por la fuerte cantidad de abstracción), agobio ante nuevas definiciones y la falta de conexión por parte de los alumnos con lo que ellos ya saben de matemáticas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Nosotros en las actividades plantearemos preguntas que nos permitan constatar si estas dificultades están presentes en nuestros profesores en formación continua.

- Desde el **punto de vista didáctico** mostraremos un análisis sencillo de los libros que se usan como referencia en el curso de Álgebra Lineal de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas tales como: Álgebra Lineal de Lima, Linear Algebra de Hoffman y Álgebra Lineal de Grossman; y el sílabo del mismo curso. Sabemos que el concepto TL es importante en el Álgebra Lineal pues permite vincular dos espacios vectoriales y a la vez estudiar características importantes de estos espacios vectoriales. También permite generar nuevos conceptos en el Álgebra Lineal como son el de núcleo, imagen, valores y vectores propios, etc. La importancia del concepto transformación lineal en el curso se justifica por el número de horas invertidas en este tema (20 horas de clase aproximadamente, el 34% del total de horas del curso). El aprendizaje del concepto TL es uno de los objetivos del curso en el que se dicta, como señala el sílabo.

  El curso Álgebra Lineal de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas es dividido en cuatro capítulos: Conceptos previos, Espacios Vectoriales, Transformaciones Lineales y Sistemas de Ecuaciones y Matrices. De esta forma los alumnos abordan las Transformaciones Lineales en el capítulo 3 según el sílabo del curso de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, donde se desarrolla la definición, ejemplos y propiedades de las Transformaciones Lineales, rango y núcleo de una transformación lineal, representación matricial de una transformación lineal e isomorfismos de espacios vectoriales. En nuestras actividades nos concentramos en algunos conceptos fundamentales, por ejemplo, definición de TL, núcleo e imagen de una TL, representación matricial de una TL. El curso se desarrolla de forma tradicional con horas de teoría y laboratorio, donde no se trabaja con asistentes o apoyos en clase y el profesor del curso es el único que acompaña y guía al alumno hacia el aprendizaje y asimilación de cada concepto.

  Por otro lado, se considera que para lograr un mejor aprendizaje de los diferentes objetos matemáticos enseñados en clase, en especial las

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Transformaciones Lineales, para los alumnos no sólo debe ser suficiente habilidades técnicas o algorítmicas, es necesario que realicen distintas representaciones semióticas, dando importancia al tratamiento en cada tipo de representación: verbal, gráfica, algebraica y matricial; por lo que es una condición necesaria para el aprendizaje del objeto matemático que ellos hagan un correcto uso de las conversiones y tratamientos.

Lima (1998) es un libro introductorio al Álgebra Lineal, que va dirigido a estudiantes de ciencias, sobresaliendo el buen contenido matemático en todo el libro y en particular en el tema de Transformaciones Lineales como se muestra en el capítulo 4 del texto. Elon Lima muestra en forma directa el concepto de nuestro objeto matemático e inmediatamente muestra algunos casos particulares de Transformaciones Lineales, propiedades y teoremas con sus respectivas justificaciones (demostración) formales (abstracta). También presenta ejemplos con uso de la teoría previa, los cuales son ejemplos intra-matemáticos (netamente matemáticos, no aplicados a otras áreas o alguna situación en la vida real), y tienen niveles de dificultad graduados que van desde el menor hasta el mayor y finaliza el capítulo con una lista de ejercicios que exigirán al lector usar la teoría del capítulo y de este modo reforzar los conceptos del capítulo. Desde el punto de vista didáctico, el concepto TL es presentado en forma verbal y analítica, excepto en algunos ejemplos que se presentan al final del capítulo en forma gráfica. En sus ejercicios propuestos retoman la forma verbal y analítica. Desde nuestro punto de vista es necesario un mayor nivel de preparación académica, ya que es un libro con mayor profundidad de análisis. Aunque el autor mencione que no son necesarios conocimientos previos para abordar este libro, sí recomienda que sea llevado después de un curso de Geometría Analítica en dos y tres dimensiones para que el estudiante esté familiarizado a nivel básico con la representación algebraica de ideas geométricas y viceversa.

De forma similar, Hoffman (1971) aborda en el capítulo 3 de su libro el concepto TL de forma muy parecida al libro de Lima.

Hoffman presenta en forma precisa el concepto TL, ejemplos de dicho objeto matemático dentro de la misma área del Álgebra Lineal (no

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

aplicados a otras ciencias o áreas) para luego seguir con teoremas, demostraciones analíticas y terminar con ejercicios de mayor dificultad. Dichos conceptos, teoremas, ejemplos y ejercicios son presentados sólo en los registros verbal y analítico o algebraico, presentación que puede resultar incompleta para el aprendizaje del concepto TL.

Po otro lado, Grossman (2008) inicia el desarrollo del tema TL en forma diferente y un tanto dinámica, sin perder su formalismo. Muestra inicialmente dos ejemplos introductorios que se presentan en los registros algebraico, verbal, gráfico y matricial (definido así por Romero, 2010) pero sin separarlos detalladamente, como mostramos a continuación:

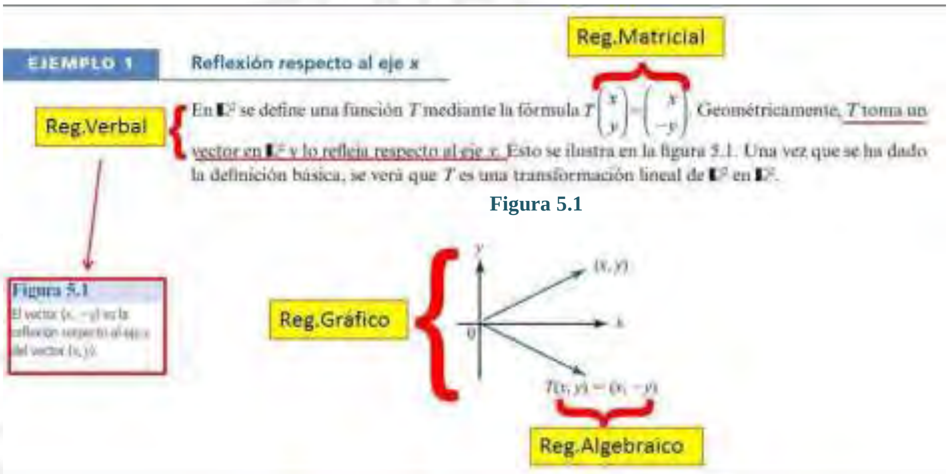


Figura 3.1: Formas de representación en una Transformación Lineal
Fuente: Grossman (2008, p.458)

En la figura 3.1 señalamos cuatro registros de representación de la transformación lineal, pero Grossman no señala y mucho menos muestra los procesos externos entre estos registros (conversiones) en su ejemplo. Probablemente dando a entender el autor que estas conversiones son directas o triviales, pero podemos decir que previamente a estas conversiones es necesario hacer tratamientos en sus respectivos registros para facilitar el cambio de registro, como es el caso la conversión del registro gráfico al registro algebraico o del registro leguaje natural hacia el registro gráfico.

Se formaliza el concepto TL para luego ilustrar con más ejemplos, finalizando el capítulo con dos listas de ejercicios, una en el modo tradicional, y otra lista de ejercicios con ayuda de un software matemático.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En esta sección hemos presentado las características y procesos de la ingeniería didáctica como método de investigación, centrándonos en el análisis preliminar desde los diferentes puntos de vista según Artigue.

Posteriormente, como parte del desarrollo de nuestra investigación se mostrará resultados obtenidos por un instrumento, que nos permite reconocer las características del grupo de estudio para saber a qué profesionales estamos aplicando la secuencia de actividades.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CAPÍTULO 4

La Propuesta

En este capítulo desarrollaremos la segunda parte de la ingeniería didáctica. Aquí tendremos en cuenta las limitaciones y/o restricciones donde realizaremos nuestras actividades y el grupo de personas (profesores en formación continua) con los que trabajaremos, los objetivos trazados y principalmente el análisis a-priori.

4.1. Análisis de Restricciones

Para este análisis, hemos aplicado un instrumento que permite recoger información del grupo de docentes en formación continua con el que se llevará a cabo el estudio. Este instrumento para recoger información fue aplicado a 7 de un total de 10 docentes en formación continua que llevaron el curso del segundo ciclo universitario de la maestría en el semestre 2015-2; dicho instrumento solicita la siguiente información:

1. Tipo de educación superior realizada.

2. Carrera superior realizada (en pre grado).

3. Tiempo de dedicación al curso (fuera del aula semanalmente por horas).

4. Nivel de conocimiento previo del tema Transformación Lineal.

5. Número de veces que lleva el curso Álgebra Lineal en la maestría.

A continuación presentaremos los resultados del instrumento:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

1. Tipo de educación superior realizada: El 71% de los profesores en formación continua proviene de una universidad pública (equivalente a cinco profesores) y el 29% de una universidad privada o particular (equivalente a dos profesores).

2. Estudio superior (pre grado): Es importante detallar que en porcentaje de otros está considerado por los pertenecientes a las carreras de Administración, Ingeniería eléctrica y Matemática; mientras que los de Educación se refiere a Educación en Matemática, los cuales son un poco más de la mitad. Hay tres profesores en formación continua que conforman Otros, donde un profesor está en cada especialidad anteriormente mencionada; y cuatro profesores son de educación.

3. Tiempo de estudio del curso: Existe tres grupos con un porcentaje del 28;8% cada uno (dos profesores en formación continua en cada grupo) que dedica entre 4, 5 y 6 horas de estudio semanal al curso respectivamente. Y hay un porcentaje del 13;6% (un profesor) que solo dedica 2 horas semanales a dicho curso. A partir de esta información, podemos decir que la mayoría de profesores en formación continua, dedica un adecuado número de horas semanales, en repasar y estudiar el curso.

4. Conocimiento previo del tema de estudio: La mayoría de los profesores en formación continua, mencionó que no tenía conocimientos previos del tema de Transformación Lineal, lo que nos hace suponer que quizás no lo recuerdan. Cabe destacar que cuatro de los siete profesores no tienen algún conocimiento previo del objeto matemático y tres profesores si lo tienen.

5. Número de veces que llevan el curso: El 57%de los profesores en formación continua (equivalente a cuatro profesores) llevan por primera vez el curso Álgebra Lineal y un 43% (tres profesores) lleva por segunda vez.

Observamos que de acuerdo a los datos recogidos, nuestra muestra de alumnos mayormente proviene de universidades públicas (nacionales), las cuales generalmente ofrecen una menor preparación profesional (menos horas de clases, menor capacitación de sus docentes, pobre infraestructura, laboratorios no bien equipados, etc). La mayoría de profesores en formación continua proviene de hacer estudios universitarios de pre

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

grado en educación matemática y observamos que en las otras carreras profesionales hay solo un profesor en cada especialidad. Por otro lado, también notamos que la mayoría de los profesores invierten su tiempo en promedio entre 4 a 6 horas semanales repasando el curso Álgebra Lineal lo cual es bueno. Finalmente, como ya lo habíamos comentado hay un grupo de profesores que no tienen o recuerden algún conocimiento previo con respecto al objeto TL.

Esta información es importante y necesaria en nuestra investigación, para saber algunas características de los profesores en formación continua con los que se está trabajando, proporcionándonos información sobre los prerrequisitos que traen sobre el curso y de este modo hacer un análisis más objetivo en las actividades que se les propondrá.

4.2. Diseño de Actividades

En el diseño de actividades presentadas a los profesores en formación continua elegimos utilizar la representación gráfica en el planteamiento de las preguntas, fundamentando en que esta representación involucra manejar e interpretar el concepto y propiedades relacionadas a TL.

La representación gráfica promueve la intuición del docente en formación continua para lograr significados abstractos y manipulables, en consecuencia lograr las conversiones (del registro gráfico a otros registros) y tratamientos en estos registros. Es así como planteamos estas actividades, pues facilita hacer los tratamientos en el registro gráfico por ser visual y manipulable a través del software GeoGebra.

La idea de la construcción de nuestras actividades fue tomada de la investigación desarrollada por Romero, 2010. Teniendo en cuenta las sugerencias de su investigación para superar las dificultades relacionadas con el software GeoGebra y las posibles modificaciones en el diseño.

Las actividades buscan promover en términos del conocimiento matemático que los profesores en formación continua logren superar la dificultad del formalismo y tener claro la definición y propiedades relacionadas al contenido matemático, es decir, interiorizar las condiciones que definen a una TL, sus propiedades y también los conceptos nuevos relacionados a TL, como son núcleo, imagen y matriz de una TL .

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Por otro lado, las actividades también buscan que los profesores en formación continua hagan cambios de registros y sus tratamientos de manera correcta, ya que es muy posible una mayor dificultad en la conversión del registro gráfico al registro algebraico, pues tradicionalmente se presentan los contenidos matemáticos del registro algebraico hacia el registro gráfico y no es usual hacer la conversión inversa entre estos registros.

4.3. Análisis a priori

Las actividades 1 y 2 permitirán que los profesores en formación continua realicen diferentes registros de representación. En concordancia con la teoría de Duval, se insistirá en que el alumno efectúe al menos dos cambios de registros de representación para llegar a obtener el aprendizaje del objeto matemático.

A continuación describiremos los comportamientos matemáticos deseados en cada actividad aplicada a los profesores en formación continua:

ACTIVIDAD 1

Esperamos que los profesores en formación continua puedan interpretar las gráficas de las funciones que se les presenta, respondiendo las preguntas planteadas en cada gráfica. Para ello los profesores en formación continua deberían realizar las correspondientes conversiones de registros, para cada pregunta.

En particular, esperamos que los profesores en formación continua noten y describan las relaciones entre vectores del dominio y vectores de su imagen, afirmen si existe o no alguna relación entre los vectores de la imagen $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$ sabiendo que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, señalen explícitamente como está definida la función $T(x;y)$ y finalmente justifiquen si T es una transformación lineal y en caso afirmativo señalen la matriz de T relativa a la base canónica.

La actividad 1 está conformada por tres gráficas de funciones diferentes, donde los profesores en formación continua tendrán que responder preguntas correspondientes a cada gráfica.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Gráfica 1

En esta primera gráfica se espera que los profesores en formación continua lleguen a concluir con la definición de la función $T(x;y) = (-2x;-2y)$. Para esto, en primer lugar hallarán $T(x;y)$ para cada $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, para luego concluir que es una transformación lineal.

Para la *pregunta (1)* se espera que los profesores en formación continua identifiquen la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$. Para llegar a la relación pedida los profesores pueden iniciar señalando puntos específicos de vectores del dominio y observando sus respectivas imágenes, por ejemplo:

$$T(1;0) = (-2;0) = -2(1;0) \qquad T(-1;0) = (2;0) = -2(-1;0)$$

$$T(0;1) = (0;-2) = -2(0;1) \qquad T(0;-1) = (0;2) = -2(0;-1)$$

$$T(-1;1) = (2;-2) = -2(-1;1) \qquad T(1;-1) = (-2;2) = -2(1;-1)$$

Se observa que la relación entre un vector $\vec{u}$ del dominio y un vector $T(\vec{u})$ de su imagen, es que $\vec{u}$ está siendo multiplicado por -2 para obtener $T(\vec{u})$.

Finalmente, los profesores en formación continua también pueden llegar a manipular un sólo vector y alargándolo en diferentes proporciones, o manipular diferentes vectores colineales de diferente tamaño o magnitud(tratamientos en el registro gráfico), como mostramos en nuestra figura siguiente, y poder llegar a notar que la imagen de dos vectores colineales son también vectores colineales y la proporción entre los tamaños o magnitudes de dos vectores colineales es la misma que la de sus imágenes, esto lo podemos notar con el siguiente ejemplo:

Sean $\vec{u} = (1;1)$, $\vec{v} = (2;2)$ y $\vec{w} = (3;3)$, notamos que $\vec{v} = 2\vec{u}$ y $\vec{w} = 3\vec{u}$, luego observando sus imágenes $T(\vec{u}) = (-2;-2)$, $T(\vec{v}) = (-4;-4)$ y $T(\vec{w}) = (-6;-6)$, y haciendo algunos tratamientos en el registro algebraico tenemos:

$$T(2\vec{u}) = T(\vec{v}) \qquad T(3\vec{u}) = T(\vec{w})$$

$$T(2\vec{u}) = (-4;-4) \qquad T(3\vec{u}) = (-6;-6)$$

$$T(2\vec{u}) = 2(-2;-2) \qquad T(3\vec{u}) = 3(-2;-2)$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$$T(2\vec{u}) \;=\; 2T(u) \qquad\qquad T(3\vec{u}) = \; 3T(u)$$

y podemos llegar a concluir una propiedad de linealidad

$$T(\alpha\vec{u}) \;= \alpha\, T(\vec{u})\;;$$

donde $\alpha \in \; \mathbb{R}\, y\, \vec{u} \in \; \mathbb{R}^2$.

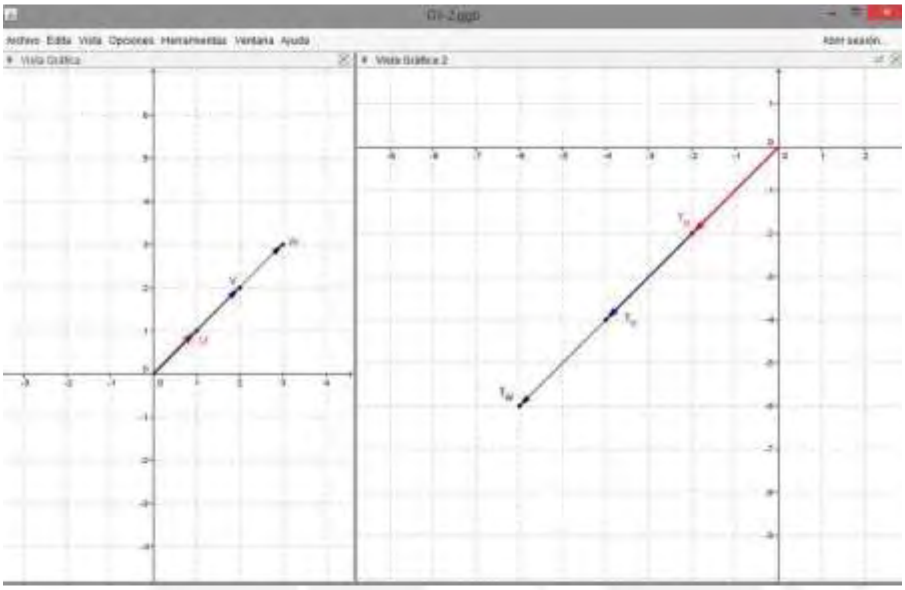


Figura 4.1: Propiedad de linealidad $T(\alpha\; \vec{u}) = \alpha\; T(\vec{u})$.

Para el desarrollo de esta primera pregunta, los profesores en formación continua deben manipular y observar (tratamientos) los vectores del dominio y sus respectivas imágenes para lograr posteriormente el cambio de registros, del grafico al par ordenado, luego pasar por ciertos tratamientos (cálculos algebraicos) para obtener la relación pedida. Finalmente, deben efectuar la conversión del registro par ordenado al registro verbal y para ello es necesario describir la relación obtenida usando las palabras correctas y signos de puntuación.

En la *pregunta (2)* se espera que los profesores en formación continua vayan preparándose para identificar la definición de Transformación Lineal que se desarrolla con los vectores de la imagen $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$, teniendo en cuenta que $\vec{w} \;= \vec{u} + \vec{v}$ son elementos de su dominio. Una forma de encontrar la relación puede ser a través de:

$$\vec{w} \quad = \quad \vec{u} \;\; + \;\; \vec{v}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$

$$T(1,1) = (-2,-2)$$

$$T(1,1) = (-2,0) + (0,-2)$$

$$T(1,1) = T(1,0) + T(0,1)$$

$$T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Por otro lado, usando la respuesta de la pregunta anterior podemos hacer lo siguiente, de un modo formal donde:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$(w_1; w_2) = (u_1; u_2) + (v_1; v_2)$$

$$(w_1; w_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

luego por la relación encontrada en la pregunta 1, tenemos:

$$T(u_1; u_2) = -2(u_1; u_2)$$

$$T(v_1; v_2) = -2(v_1; v_2)$$

$$T(w_1; w_2) = -2(w_1; w_2)$$

reemplazando $(w_1; w_2) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$

$$T(w_1; w_2) = -2(u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

$$T(w_1; w_2) = -2(u_1; u_2) + -2(v_1; v_2)$$

$$T(w_1; w_2) = T(u_1; u_2) + T(v_1; v_2)$$

$$T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Por lo tanto, la relación pedida es que $T(\vec{w})$ es igual a la suma de los vectores

$T(\vec{u})$ y $T(\vec{v})$. Similarmente a la pregunta 1, debemos tener cuidado en manipular y observar los vectores del dominio y sus imágenes para hacer un correcto tratamiento en el registro gráfico. Luego realizar operaciones algebraicas (tratamientos) en el registro par ordenado para responder lo solicitado.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

En la *pregunta (3)* se espera que los profesores en formación continua teniendo claro las respuestas de las preguntas anteriores (1) y (2) puedan llegar a definir dicha función T.

Luego, siendo $\vec{u} = (x; y)$:

$$\mathrm{T}(\vec{u}) = T(x; y) = -2(x; y) = -2u$$

lo podemos observar en las siguientes gráficas:

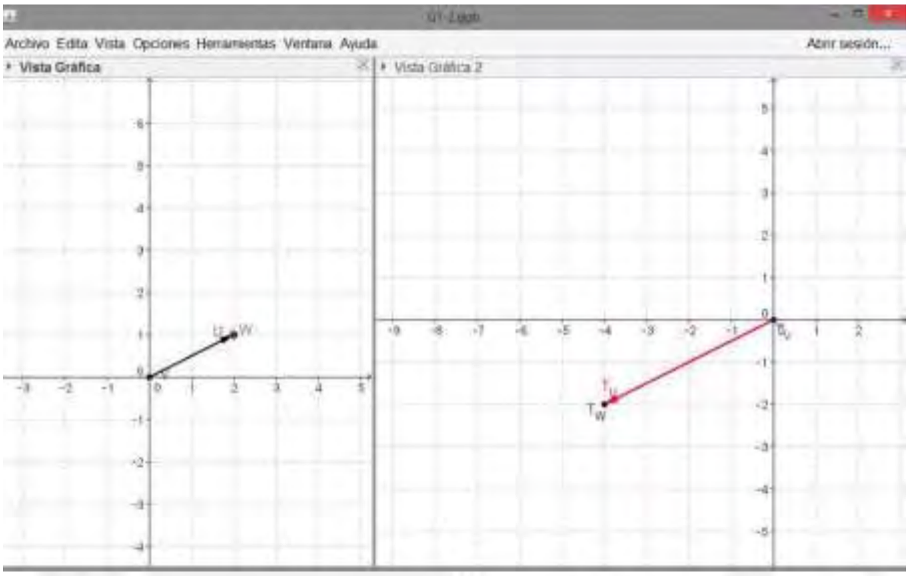


Figura 4.2: Vector $\vec{u} = (2,1)$ y su imagen $T(\vec{u}) = (-4, -2) = -2(2, 1)$.

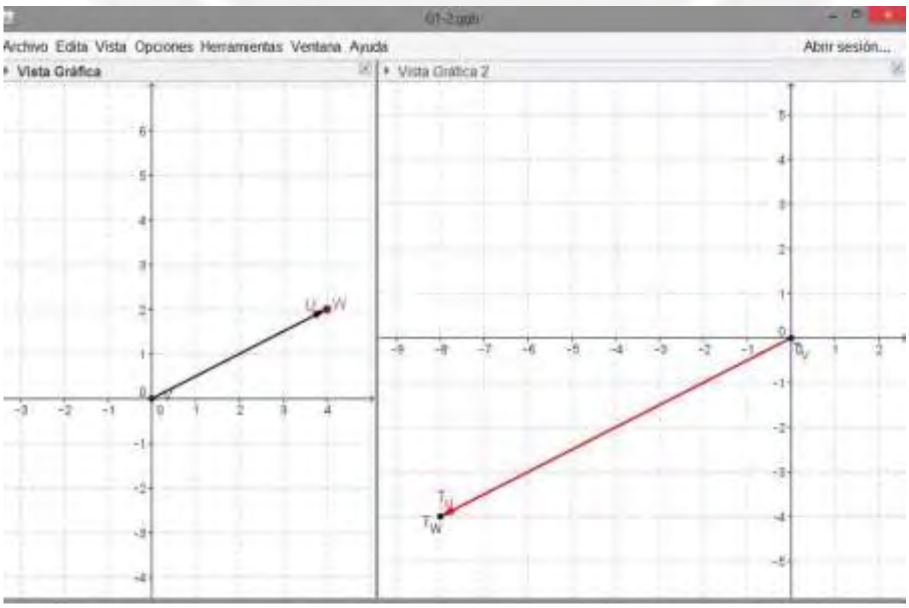


Figura 4.3: Vector $\vec{u} = (4,2)$ y su imagen $T(\vec{u}) = (-8, -4) = -2(4, 2)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Haciendo las conversiones correctas de la pregunta 1 y 2 y otros tratamientos en el registro gráfico con vectores, se puede obtener la respuesta correcta.

En la *pregunta (4)* se espera por parte de los profesores en formación continua que justifiquen formalmente la afirmación de que la función $T(x; y)$, definida anteriormente, es una transformación lineal. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ elementos del dominio, y a un número real:

$$\begin{aligned} T(\vec{u}+\vec{v}) &= -2(\vec{u}+\vec{v}) \\ &= -2\vec{u} + -2\vec{v} \\ T(\vec{u}+\vec{v}) &= T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} T(\alpha\,\vec{u}) &= -2(\alpha\,\vec{u}) \\ &= \alpha\,(-2\vec{u}) \\ T(\alpha\,\vec{u}) &= \alpha T(\vec{u}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función T es una transformación lineal. Luego dicha transformación lineal se puede representar de forma matricial de la siguiente manera:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde, la matriz relativa a la base canónica está formada en sus columnas, por las imágenes de los vectores canónicos del dominio

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dejando de lado el registro gráfico en esta pregunta, es necesario que el profesor en formación continua concluya que T es transformación lineal, para que con los tratamientos en el registro matricial se logre obtener la matriz relativa a la base canónica.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Gráfica 2

En esta grafica la función está definida por $T(x; y) = (x + 1; y)$ y se espera que los profesores en formación continua obtengan tal función, y observando, por ejemplo, que $T(0; 0)$ es diferente de $(0; 0)$, concluyan que T no es una transformación lineal.

En la *pregunta (1)* se espera que los profesores en formación continua noten la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$. Para llegar a esta relación de forma práctica, los profesores deben señalar vectores específicos del dominio y observar el resultado de sus correspondientes imágenes, luego notar el comportamiento de la función y llegar a concluir con la relación pedida. Por ejemplo:

$$T(1; 0) = (2; 0) = (1 + 1; 0) \qquad T(-1; 0) = (0; 0) = (-1 + 1; 0)$$
$$T(0; 1) = (1; 1) = (0 + 1; 1) \qquad T(0; -1) = (1; -1) = (0 + 1; -1)$$
$$T(1; 1) = (2; 1) = (1 + 1; 1) \qquad T(2; -3) = (3; -3) = (2 + 1; -3)$$

Estas observaciones permiten concluir que la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$ se establece del siguiente modo: La abscisa del vector $\vec{u}$ es incrementada en 1, manteniendo constante su ordenada.

De igual manera que en la gráfica anterior, aquí los profesores en formación continua hacen el cambio de registro, del gráfico al numérico (para tomar los vectores específicos del dominio y su respectivas imágenes), luego pasan por el tratamiento en este registro para llegar a notar las características comunes que tienen cada vector del dominio y su respectiva imagen, para que finalmente los profesores en formación continua hagan la conversión al registro verbal y comenten cuál es la relación solicitada.

Por otro lado, los profesores en formación continua también pueden llegar a manipular un sólo vector, alargándolo en diferentes proporciones, o también pueden manipular diferentes vectores colineales de diferente tamaño, como mostramos en la siguiente figura, y de esta manera llegar a notar que la imagen de dos vectores colineales no son vectores colineales y tampoco se mantiene la proporción entre los tamaños de dos vectores colineales con sus imágenes respectivas, esto sólo ocurre en transformaciones lineales. Podemos ilustrar con el siguiente ejemplo:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Sean $\vec{u} = (1;-1)$, $\vec{v} = (2;-2)$ y $w = (3;-3)$, notamos que $\vec{v} = 2\vec{u}$ y $\vec{w} = 3\vec{u}$, luego observando sus imágenes $T(\vec{u}) = (2;-1)$, $T(\vec{v}) = (3;-2)$ y $T(w) = (4;-3)$, y haciendo algunos tratamientos en el registro algebraico tenemos:

$$2T(\vec{u}) = 2(2;-1) \qquad 3T(\vec{u}) = 3(2;-1)$$

$$2T(\vec{u}) = (4;-2) \qquad 3T(\vec{u}) = (6;-2)$$

$$T(2\vec{u}) = T(\vec{v}) \qquad T(3\vec{u}) = T(\vec{w})$$

$$T(2\vec{u}) = (3;-2) \qquad T(3\vec{u}) = (4;-3)$$

Luego:

$$T(2\vec{u}) \neq 2T(\vec{u}) \qquad T(3\vec{u}) \neq 3T(\vec{u})$$

Podemos afirmar que no cumple la propiedad de linealidad $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$, por lo tanto

$$T(\alpha\vec{u}) \neq \alpha T(\vec{u})$$

También se observa esta propiedad de linealidad de una TL de manera inmediata a través de tratamientos en el registro gráfico.

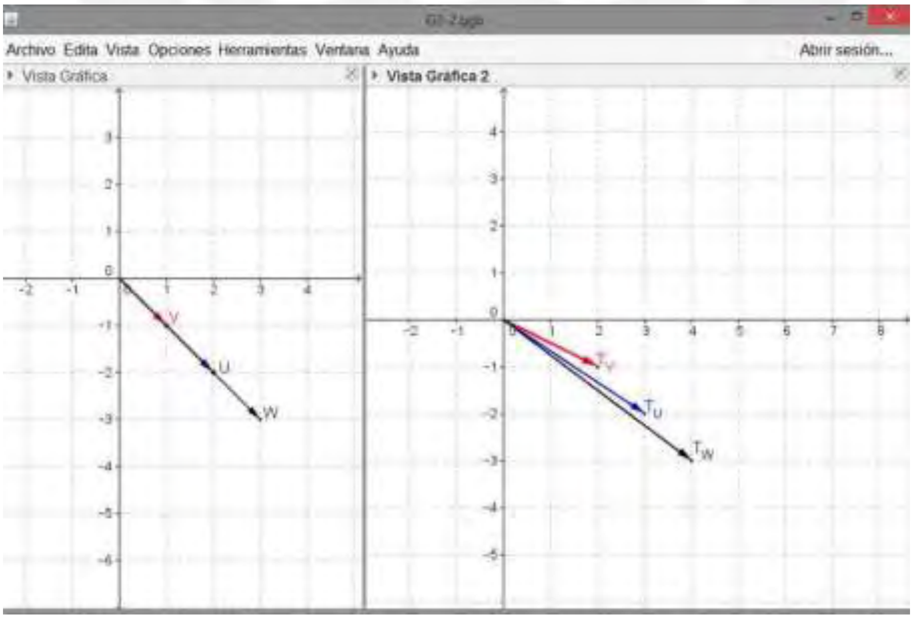


Figura 4.4: No cumple propiedad de linealidad $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En la *pregunta (2)* esperamos que los profesores en formación continua vayan anticipando a identificar que para este caso no se cumplirá parte de la definición de transformación lineal. Aquí los vectores de la imagen $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$ no llegarán a cumplir la relación

$$T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

Esta conclusión se puede obtener usando la primera pregunta y también después de observar lo siguiente:

- Sean $\vec{u} = (2;1), \vec{v} = (1;0)$ y $\vec{w} = (3;1)$ tales que: $(3;1) = (2;1) + (1;0)$

  y tenemos que:

  $$T(3;1) = (4;1)\ ;\ T(2;1) = (3;1)\ ;\ T(1;0) = (2;0)$$

  luego:

  $$\begin{array}{ccc} T(3;1) & \neq & T(2;1) + T(1;0) \\ (4;1) & \neq & (3;1) + (2;1) \\ (4;1) & \neq & (5;1) \end{array}$$

- Sean $\vec{u} = (-2;1), \vec{v} = (-1;2)$ y $\vec{w} = (-3;3)$ tales que:

  $$(-3;3) = (-2;1) + (-1;2)$$

  y tenemos que:

  $$T(-3;3) = (-2;3)\ ;\ T(-2;1) = (-1;1)\ ;\ T(-1;2) = (0;2)$$

  luego:

  $$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}(-3;3) & \neq & \mathrm{T}(-2;1) + \mathrm{T}(-1;2) \\ (-2;3) & \neq & (-1;1) + (0;2) \\ (-2;3) & \neq & (-1;3) \end{array}$$

  Por lo tanto no se cumple la relación $T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{w})$, para $\vec{u}$; $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en el dominio de T tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

  Aquí también los profesores en formación continua deben hacer el cambio, del registro gráfico al registro numérico, para luego efectuar el respectivo tratamiento en este último registro y concluir finalmente que no existe relación entre los vectores de la imagen.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

En la *pregunta (3)* esperamos que los profesores en formación continua después de observar los resultados en las preguntas anteriores lleguen a notar el comportamiento de dicha función, para que finalmente muestren la definición explícita de T como sigue:

$$T(x;y) = (x+1;y)$$

En la *pregunta (4)*, los profesores en formación continua después de tener la definición explícita de la función en el desarrollo anterior, verán el comportamiento de la función a través del software y harán tratamientos en los registros gráfico y numérico, y llegarán a la conclusión que la función $T(x;y) = (x+1;y)$ no es transformación lineal. Luego justificamos de esta forma:

Sean $u = (u_1;u_2)$ y $v = (v_1;v_2)$ tal que $u+v = (u_1+v_1;u_2+v_2)$:

$$T(u+v) = T(u_1+v_1;u_2+v_2) = (u_1+v_1+1;u_2+v_2)$$

mientras que:

$$\begin{aligned} T(u_1;u_2)+T(v_1;v_2) &= (u_1+1;u_2)+(v_1+1;v_2) \\ &= (u_1+v_1+2;u_2+v_2) \end{aligned}$$

de donde se observa que:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}(\mathrm{u}_1+\mathrm{v}_1;\mathrm{u}_2+\mathrm{v}_2) & \neq & T(u_1,u_2)+T(v_1;v_2) \\ \mathrm{T}(\vec{\mathrm{u}}+\vec{\mathrm{v}}) & \neq & T(\vec{u})+T(\vec{v}) \end{array}$$

Por lo tanto, T no es transformación lineal, o como ya lo comentamos previamente, sería suficiente hacer tratamientos en el registro gráfico, en particular observar que $\vec{u} = (0;0)$ no tienen como imagen al vector $(0;0)$, sino al vector $T(\vec{u}) = (1;0) \neq (0;0)$.

GRÁFICA 3

Esta gráfica representa a la función proyección ortogonal, la cual está definida para el caso en que la recta donde se proyecta tiene por ecuación $y = x$, y se define por:

$$T(x;y) = \left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

donde al final los profesores en formación continua deberían llegar a afirmar que esta función es una transformación lineal.

En la *pregunta (1)* se espera que los profesores en formación continua identifiquen la relación entre $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$, iniciando su desarrollo con casos simples, por ejemplo, cuando la recta donde se proyectan los vectores es el eje X o el eje Y.

$$\begin{array}{cc} y = 0 \ \text{(eje } X) & x = 0 \ \text{(eje } Y) \\ T(2;1) = (2;0) & T(5;3) = (0;3) \\ T(1;0) = (0;0) & T(0;1) = (0;0) \\ T(5;6) = (5;0) & T(3;3) = (0;3) \end{array}$$

para finalizar que dicha función es la proyección.

También, los profesores en formación continua pueden hacer tratamientos en el registro gráfico, es decir, manipular un sólo vector alargándolo en diferentes proporciones, o también manipular diferentes vectores colineales de diferente tamaño, como mostramos en la figura siguiente, y llegar a notar nuevamente que la imagen de dos vectores colineales son también vectores colineales y la proporción entre los tamaños de dos vectores colineales es la misma que la de sus imágenes, esto lo podemos observar con el siguiente ejemplo:

Sean $\vec{u} = (3;1)$, $\vec{v} = (6;2)$ y $\vec{w} = (9;3)$, notamos que $\vec{v} = 2u$ y $\vec{w} = 3u$, luego observando sus imágenes $T(\vec{u}) = (2;2)$, $T(\vec{v}) = (4;4)$ y $T(\vec{w}) = (6;6)$, y haciendo algunos tratamientos en el registro algebraico tenemos:

$$\begin{array}{cc} T(2\vec{u}) = T(\vec{v}) & T(3\vec{u}) = T(\vec{w}) \\ T(2\vec{u}) = (4;4) & T(3\vec{u}) = (6;6) \\ T(2\vec{u}) = 2(2;2) & T(3\vec{u}) = 3(2;2) \\ T(2\vec{u}) = 2T(\vec{u}) & T(3\vec{u}) = 3T(\vec{u}) \end{array}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

y podemos llegar a concluir la propiedad de linealidad $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

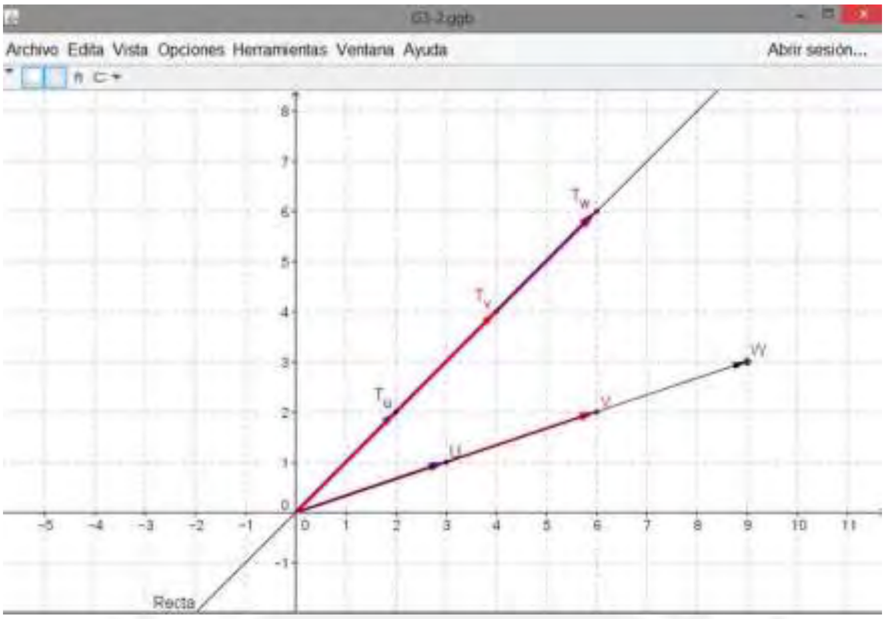


Figura 4.5: Propiedad de linealidad $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

Desde el punto de vista de la teoría de registros de representación semiótica, los profesores en formación continua harán el tratamiento con el software, manipulando con el mouse los vectores y la recta sobre la cual se proyectan éstos, luego harán la conversión, registrando los datos que obtienen al manipular los vectores y la recta, para casos sencillos como se muestran en la parte anterior y observando la propiedad o características que tiene la función.

En la *pregunta (2)*, aunque no es tan inmediato observar, se espera que los profesores en formación continua lleguen a concluir que $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. En esta parte esperamos que los profesores en formación continua inicialmente realicen tratamientos similares en el registro gráfico como en la pregunta anterior, es decir, primero muevan a la recta donde se proyectan los vectores, sobre el eje X, el eje Y o sobre $y = x$ (casos simples) y observen como actúa la función sobre los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, sabiendo que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Para el caso en que la recta sea $y = 0$ (eje X). Sean $\vec{u} = (5; 3)$, $\vec{v} = (-2; 2)$ y $\vec{w} = (3; 5)$. Tenemos:$T(\vec{u}) = (5; 0)$; $T(\vec{v}) = (-2; 0)$; $T(\vec{w}) = (3; 0)$; donde observamos que se cumple $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

Para el caso en que la recta sea $x = 0$ (eje Y). Sean $\vec{u} = (3; -1)$, $\vec{v} = (-1; 6)$ y $\vec{w} = (2; 5)$. Tenemos:

$T(\vec{u}) = (0; -1)$; $T(\vec{v}) = (0; 6)$; $T(\vec{w}) = (0; 5)$ donde observamos que se cumple $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

Y finalmente, para el caso en que la recta sea $y = x$ (recta identidad). Sean $\vec{u} = (5; 1)$, $\vec{v} = (-4; 2)$ y $\vec{w} = (1; 3)$. Tenemos: $T(\vec{u}) = (3; 3)$; $T(\vec{v}) = (-1; -1)$; $T(\vec{w}) = (2; 2)$ donde también observamos que se cumple $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

Es así, que de forma sencilla, luego de realizar los tratamientos algebraicos los profesores en formación continua pueden llegar a observar que la relación entre estos vectores $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$ es:

$$T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

En la *pregunta (3)*, esperamos que los profesores en formación continua puedan llegar a definir para cada caso particular la función, es decir, según la recta sobre la cual se proyectan los vectores del dominio. En esta situación los profesores en formación continua deben hacer manipulación de la recta a través del software (tratamientos del registro gráfico) para obtener los casos solicitados y luego de hacer la conversión (cambiando del registro gráfico al registro algebraico) y tratamientos (haciendo operaciones dentro de este último registro mencionado) puedan llegar a concluir con las definiciones explicitas para cada caso.

- <u>Primer caso</u>: Cuando la recta sea $y = 0$ (eje X)

$$T(8; 4) = (8; 0)$$

$$T(2; -4) = (2; 0)$$

$$T(-4; 7) = (-4; 0)$$

$$T(-3; -5) = (-3; 0)$$

Observamos que el comportamiento de la función para cualquier vector es que su primera componente se mantiene constante (es fija), mientras que la segunda componente se vuelve siempre cero, para cualquier valor. De esto se concluye que:

$$T(x; y) = (x; 0)$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- Segundo caso: Cuando la recta sea x = 0 (eje Y)

$$T(7;4) = (0;4)$$

$$T(-4;3) = (0;3)$$

$$T(3;-2) = (0;-2)$$

$$T(-1;-6) = (0;-6)$$

Observamos en este caso que el comportamiento de la función para cualquier vector es que su primera componente se vuelve cero, mientras que la segunda componente se mantiene para cualquier valor. En este caso se concluye que:

$$T(x;y) = (0;y)$$

- Tercer caso: Cuando la recta sea $y = x$.

$$T(4;8) = (6;6)$$

$$T(-4;2) = (-1;-1)$$

$$T(5;-5) = (0;0)$$

$$T(-2;-6) = (-4;-4)$$

Observamos que cuando la función se aplica a cualquier vector del dominio, el resultado es un nuevo vector cuyas componentes son iguales a la semisuma de las componentes del vector del dominio, es decir

$$T(x;y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

En la *pregunta (4)*, esperamos que los profesores en formación continua puedan llegar a justificar para cada caso particular que la función es una transformación lineal. A través de tratamientos establecidos a partir de las definiciones halladas en la pregunta anterior esperamos que puedan concluir que la función cumple con las dos condiciones que definen a una transformación lineal. Veamos:

- Primer caso: La recta donde se proyecta es $x = 0$ (eje Y)

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(u_1 + v_1;\ u_2 + v_2)$$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = (0; u_2 + v_2)$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = (0; u_2) + (0; v_2)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T((\vec{u})$$

y

$$T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha\vec{u}_1; \alpha\vec{u}_2)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = (0; \alpha\vec{u}_2)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \alpha(0; \vec{u}_2)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$$

Por lo tanto, observamos que la función es una transformación lineal pues cumple las dos condiciones de la definición.

- <u>Segundo caso</u>: La recta donde se proyecta es $y = 0$ (eje X)

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = (u_1 + v_1; 0)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = (u_1; 0) + (v_1; 0)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T((\vec{v})$$

y

$$T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha u_1; \alpha u_2)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = (\alpha u_1; 0)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \alpha(u_1; 0)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$$

En este caso también se llega a concluir que la función cumple con las condiciones de transformación lineal.

- <u>Tercer caso</u>: Cuando la recta donde se proyecta es $y = x$.

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = \left(\frac{u_1 + v_1 + u_2 + v_2}{2}, \frac{u_1 + v_1 + u_2 + v_2}{2}\right)$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = \left(\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}+\frac{v_1+v_2}{2}\right)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = \left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right) + \left(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = \left(\frac{u_1}{2}, \frac{u_2}{2}\right) + \left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)$$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

y

$$T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha u_1; \alpha u_2)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \left(\frac{\alpha u_1+\alpha u_2}{2}, \frac{\alpha u_1+\alpha u_2}{2}\right)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \alpha\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right)$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$$

Por lo tanto para este caso también la función es una transformación lineal. Finalmente luego de hacer los tratamientos correspondientes, afirmamos que la función proyección ortogonal es una transformación lineal.

ACTIVIDAD 2

Se espera que los profesores en formación continua interpreten las gráficas, haciendo manipulaciones y observaciones (tratamientos) en el registro gráfico. Para luego hacer las conversiones necesarias entre los diferentes registros y lograr responder las preguntas correctamente.

Esperamos que los profesores en formación continua hallen las imágenes de los vectores canónicos ($e_1 = (1;0)$ y $e_2 = (0;1)$) y describan lo hallado para que finalmente muestren la matriz relativa a la base canónica, señalen explícitamente como está definida la transformación lineal $T(x;y)$ y verifiquen si cumple la igualdad $T(x;y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde A representa a la matriz relativa a la base canónica hallada anteriormente.

También esperamos que los profesores en formación continua determinen los subespacios, imagen y núcleo de T, muestren como ejemplo un elemento de cada

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

subespacio; y finalmente hagan nuevamente la conversión al registro gráfico de los subespacios que incluyan el elemento indicado que señaló.

La actividad 2 está compuesta por dos gráficas de transformaciones lineales, donde los profesores en formación continua deben de responder las preguntas relacionadas a cada gráfica.

Gráfica 1

En esta primera gráfica esperamos que el profesor en formación continua que luego de algunos tratamientos en el registro gráfico, concluya con la definición de la transformación lineal $T(x;y) = (5x + y; x + 5y)$, luego calcule la matriz asociada a dicha transformación y finalmente refuerce la noción de imagen y núcleo. Para lograr lo cometido, el profesor en formación continua tiene que hacer correctamente las conversiones y tratamientos en los registros: gráfico, de lenguaje natural, algebraico y matricial.

Para la *pregunta (1)*, se espera que los profesores en formación continua hagan la conversión, del registro gráfico al registro algebraico, para calcular los valores de las imágenes en los vectores canónicos:

$$T(1;0) = (5;1) \quad \text{y} \quad T(0;1) = (1;5)$$

Luego de observar estos resultados esperamos que comenten alguna relación o característica que se esté cumpliendo entre ellos, para que finalmente formen con los resultados obtenidos de las imágenes de los vectores canónicos, la matriz A de T como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que implícitamente se está realizando una conversión hacia el registro matricial.

Para la *pregunta (2)*, se espera que los profesores en formación continua puedan hacer los tratamientos correctos para poder lograr lo solicitado. La forma de hallar la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

definición explícita de la transformación lineal T, es colocar el par $(x; y)$ como combinación lineal de los vectores canónicos:

$$(x; y) = x(1; 0) + y(0; 1)$$

para luego aplicar la transformación T de la siguiente manera:

$$T(x; y) = T(x(1; 0) + y(0; 1))$$

$$T(x; y) = T(x(1; 0)) + T(y(0; 1))$$

$$T(x; y) = x\,T(1; 0) + y\,T(0; 1)$$

y usando los resultados de la pregunta anterior, tenemos:

$$T(x; y) = x\,T(1; 0) + y\,T(0; 1)$$

$$T(x; y) = x\,(5; 1) + y\,(1; 5)$$

$$T(x; y) = (5x; x) + (y; 5y)$$

$$T(x; y) = (5x + y; x + 5y)$$

Podemos concluir que después de hacer estos tratamientos, la transformación lineal es $T(x; y) = (5x + y;\ x + 5y)$. Luego para analizar si cumple la igualdad mencionada, haremos los tratamientos correspondientes del registro matricial. De la primera pregunta se halló la matriz relativa a la base canónica, la cual es $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, entonces:

$$T(x; y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(x; y) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(x; y) = \begin{pmatrix} 5x + y \\ x + 5y \end{pmatrix}$$

donde la notación de la matriz columna de 2×1 es equivalente al par ordenado (esto es una conversión, del registro matricial al registro algebraico), es decir:

$$\begin{pmatrix} 5x + y \\ x + 5y \end{pmatrix} \equiv (5x + y, x + 5y)$$

por lo tanto podemos concluir que sí es cierto la igualdad sugerida $T(x; y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En la *pregunta (3)*, se espera que los profesores en formación continua recuerden las definiciones de núcleo e imagen, luego a través de tratamientos en el registro algebraico, hallen como están formados los sub espacios, núcleo e imagen, para esta transformación lineal. En caso contrario no recuerden las definiciones será notorio para que el profesor en formación continua cometa errores en esta pregunta como en la siguiente.

Primero hallamos el *núcleo* de T, definido por:

$$Nu(T) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \, T(x; y) = (0; 0)\}$$

hacemos los tratamientos en el registro par ordenado para calcular el núcleo.

$$T(x; y) = (0; 0)$$

$$(5x + y; x + 5y) = (0; 0)$$

Luego

$$\begin{cases} 5 + y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \wedge \ y = 0$$

por lo tanto el núcleo de T es $Nu(T) = \{(0; 0)\}$.

Ahora hallamos la imagen de T, la cual está definida por:

$$Im(T) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \, / T(x; y) = (x'; y') \wedge (x; y) \in Dom(T)\}$$

hacemos los tratamientos en el registro par ordenado para calcular la imagen.

$$T(x; y) = (x'; y')$$

$$(5x + y; x + 5y) = (x'; y')$$

$$(5x; x) + (y; 5y) = (x'; y')$$

$$x\,(5; 1) + y\,(1; 5) = (x'; y')$$

luego, concluimos que:

$$Im(T) = \{(x'; y') = x\,(5; 1) + y\,(1; 5) / x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Finalmente, un elemento del núcleo y la imagen son $(0; 0)$ y $(6; 6)$ respectivamente.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En la *pregunta (4)*, se espera que los profesores en formación continua hagan de manera correcta la conversión, del registro algebraico al registro gráfico, con los resultados hallados en la pregunta anterior.

Observamos que el núcleo de T está formado por el único elemento $(0;0)$, y la imagen de T está formado por la combinación lineal de los vectores $\{(5;1)\,;\,(1;5)\}$. Teniendo en cuenta que, en la gráfica del GeoGebra el dominio donde está definida la transformación $T(x;y) = (5x + y;\ x + 5y)$ es la frontera de un cuadrado de lado 1, en el primer cuadrante, presentamos las gráficas del núcleo y la imagen de T.

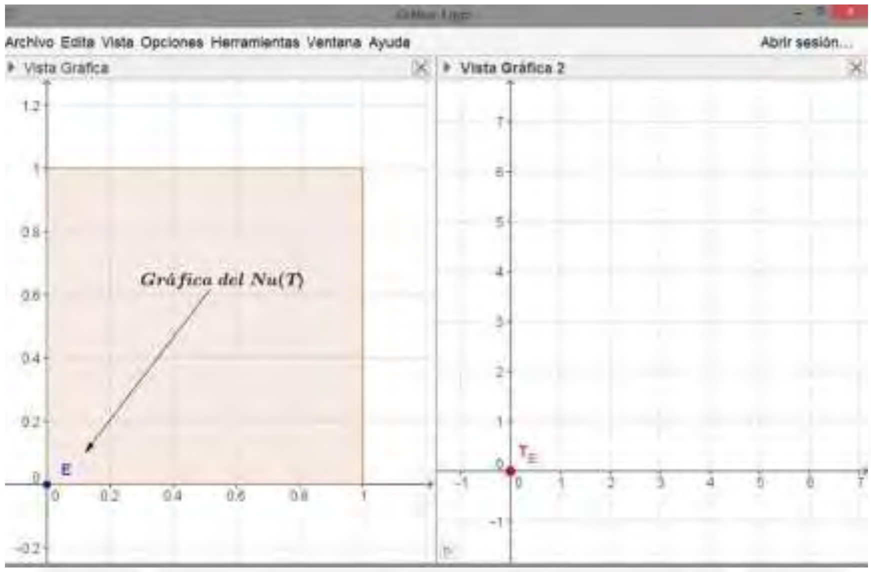
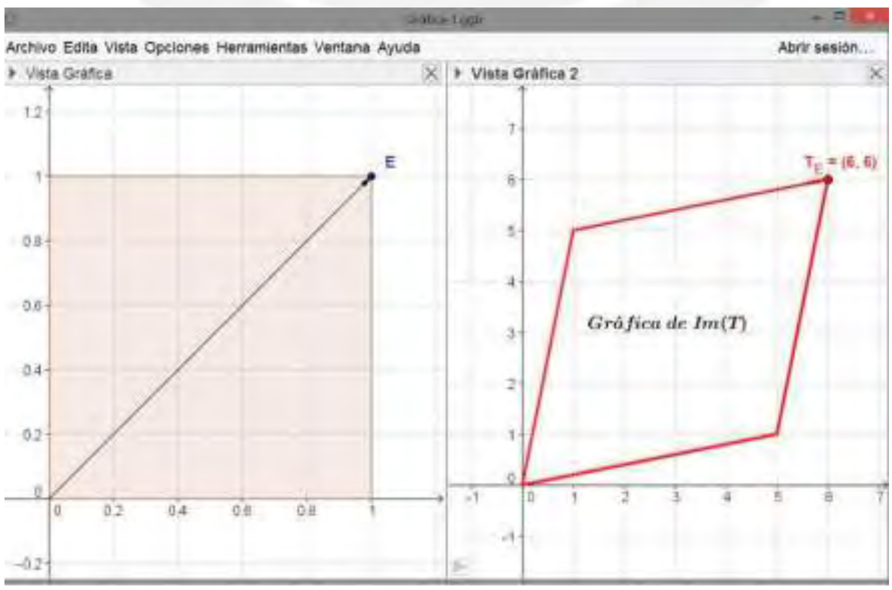


Figura 4.6: Gráfica del núcleo de $T(x;y) = (5x + y;\ x + 5y)$



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Figura 4.7: Gráfica de la imagen de $T(x; y) = (5x + y;\ x + 5y)$

En esta última gráfica, el lado derecho fue construido activando la aplicación rastro sobre el punto T_E, para poder observar a través del software la imagen a partir de la frontera del cuadrado. La transformación lineal T restringido a la frontera del cuadrado de lado una unidad, tiene como imagen un rombo y su elemento graficado es el punto $(6; 6)$.

Gráfica 2

Para la segunda gráfica, esperamos que el profesor en formación continua luego de algunos tratamientos en el registro gráfico logre concluir con la definición de la transformación lineal $T(x; y) = (2x - y;\ 2x - y)$, luego calcule la matriz asociada a dicha transformación y finalmente refuerce la noción de imagen y núcleo, tanto algebraica como geométricamente. Para lograr lo esperado, el alumno tiene que hacer correctamente las conversiones y tratamientos en los registros: gráfico, de lenguaje natural, algebraico y matricial.

Para la *pregunta (1)*, esperamos que los profesores en formación continua hagan el cambio de registro, del gráfico al algebraico, para hallar los valores de las imágenes de los vectores $\vec{u}_1 = (1;\ 0)$, $\vec{u}_2 = (0;\ 1)$, $\vec{u}_3 = (0;\ 0)$ y $\vec{u}_4 = (0.5;\ 1)$:

$$T(\vec{u}_1\ ) = (2;\ 2)\ ;\ T(\vec{u}_2) = (-1;\ -1)\ ;\ T(\vec{u}_3) = (0;\ 0)\ ;\ T(\vec{u}_4) = (0;\ 0)$$

Luego de observar estos resultados esperamos que comenten alguna relación o característica que se esté cumpliendo entre ellos, para que finalmente con los resultados obtenidos con las imágenes de los vectores canónicos, construyan la matriz A de T como mostramos a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que para llegar a esta matriz, el profesor en formación continua debió hacer una correcta conversión del registro gráfico al registro matricial.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En la *pregunta (2)*, se espera que los profesores en formación continua hagan los tratamientos correctos para poder lograr lo pedido. Para hallar en forma explícita la transformación lineal T, expresar el vector $(x; y)$ como combinación lineal de los vectores canónicos, luego aplicar T a cada lado y finalmente usar las respuestas de la pregunta anterior:

$$(x; y) = x(1; 0) + y(0; 1)$$

Para luego aplicar la transformación T de la siguiente manera:

$$T(x; y) = T(x(1; 0) + y(0; 1))$$

$$T(x; y) = T(x(1; 0)) + T(y(0; 1))$$

$$T(x; y) = x\,T(1; 0) + y\,T(0; 1)$$

y usando los resultados de la pregunta anterior, tenemos:

$$T(x; y) = x\,T(1; 0) + y\,T(0; 1)$$

$$T(x; y) = x\,(2;\ 2) + y\,(-1; -1)$$

$$T(x; y) = (2x;\ 2x) + (-y;\ -y)$$

$$T(x; y) = (2x - y;\ 2x - y)$$

Finalmente, luego de hacer los tratamientos previos, concluimos que la transformación lineal es $T(x; y) = (2x - y;\ 2x - y)$. Para analizar si cumple la igualdad mencionada en la presente pregunta, haremos los tratamientos correspondientes del registro matricial. De la primera pregunta se halló la matriz relativa a la base canónica, la cual es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$T(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

donde la notación de la matriz columna de 2×1 es equivalente al par ordenado (esto es una conversión, del registro matricial al registro par ordenado), es decir:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$$\begin{pmatrix} 2x - y \\ 2x - y \end{pmatrix} \equiv (2x - y, 2x - y)$$

Por lo tanto podemos concluir que la igualdad sugerida es cierta

$$T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En la *pregunta (3)*, esperamos que los profesores en formación continua recuerden las definiciones de núcleo e imagen, luego usando tratamientos en el registro algebraico, hallen como están formados los sub espacios, núcleo e imagen, para la transformación lineal. En caso contrario no recuerden las definiciones será notorio para que el profesor en formación continua cometa errores en esta pregunta como en la siguiente.

Iniciamos hallando el núcleo de T, definido por:

$$Nu(T) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / T(x; y) = (0; 0)\}$$

hacemos los tratamientos en el registro par ordenado para hallar el núcleo.

$$T(x; y) = (0; 0)$$

$$(2x - y; 2x - y) = (0; 0)$$

Luego

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x = y$$

Por lo tanto el núcleo de T es $Nu(T) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ y = 2x\}$.

Luego hallamos la imagen de T, la cual está definida por:

$$Im(T) = \{(x'; y') \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ T(x; y) = (x'; y') \ \wedge \ (x; y) \in \ Dom(T)\}$$

hacemos los tratamientos en el registro par ordenado para calcular la imagen.

$$T(x; y) \ = \ (x'; y')$$

$$(2x - y; 2x - y) \ = \ (x'; y')$$

$$(2x - y)(1; 1) \ = \ (x'; y')$$

luego, como $(2x - y) \in \mathbb{R}$ concluimos que:

$Im(T) = \{(x'; y') = \alpha(1; 1) \ / \ \ \alpha = 2x - y \ \ \wedge \ x; y \in \mathbb{R}\}$, es decir:

$$Im(T) = \{(x'; y') = \alpha(1; 1) \ / \ \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x'; y') \in \mathbb{R}^2 \colon y' = x'\} = \mathrm{L_I}$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

Finalmente, un elemento del núcleo y la imagen son (0.5;1) y (2;2) respectivamente.

En la *pregunta (4)*, esperamos que los profesores en formación continua usen de manera correcta el cambio de registros, del algebraico al gráfico, y con los resultados hallados en la pregunta anterior grafiquen correctamente. Observamos que el núcleo de T es la recta $y = 2x$, y la imagen de T está formado por múltiplos del vector dirección $\{(1;1)\}$, es decir es la recta identidad $y = x$. Teniendo en cuenta que, en la gráfica del GeoGebra el dominio donde está definida la transformación $T(x;y) = (2x - y;\ 2x - y)$ es la frontera de un cuadrado de lado 1, en el primer cuadrante, a continuación presentaremos las gráficas del núcleo y la imagen de T.

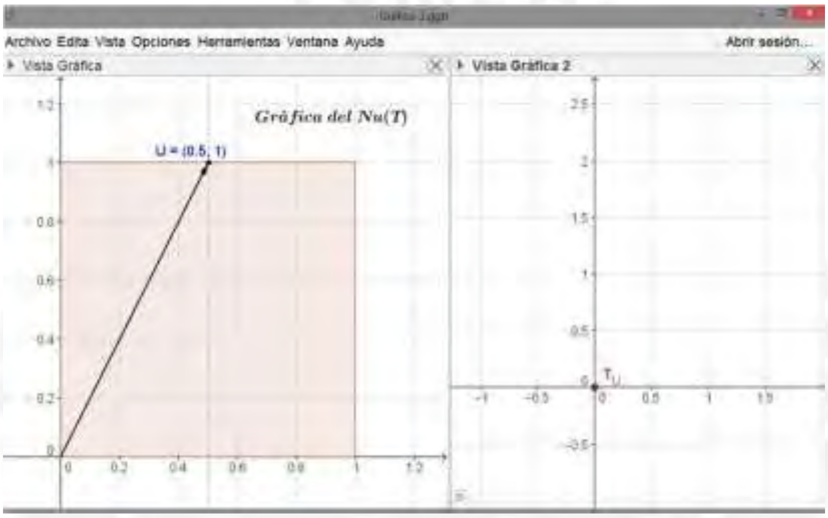


Figura 4.8: Gráfica del núcleo de $T(x;y) = (2x - y;\ 2x - y)$

Como el dominio donde estamos definiendo la transformación es sólo la frontera del cuadrado de lado 1, el núcleo de T serán todos los puntos que cumplan la ecuación $y = 2x$ los cuales son $Nu(T) = \{(0,0)\ ;\ (0.5,1)\}$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

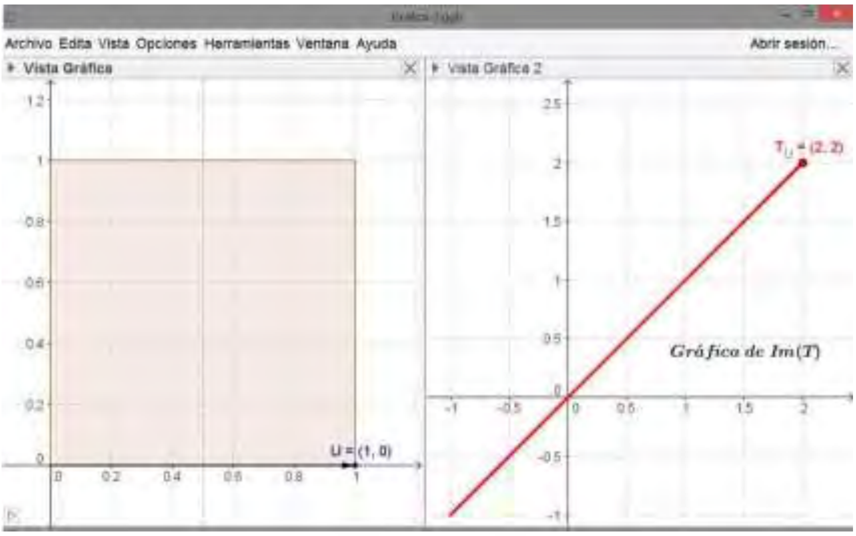


Figura 4.9: Gráfica de la imagen de $T(x; y) = (2x - y;\ 2x - y)$

En esta última gráfica, el lado derecho fue construido activando la aplicación rastro sobre el punto T_U, para poder observar a través del GeoGebra la imagen a partir de la frontera del cuadrado. La transformación lineal T restringido su dominio a la frontera del cuadrado de lado una unidad, tiene como imagen el segmento de recta $y = x$ para $x \in [-1;\ 2]$ y su elemento graficado es el punto $(2; 2)$.

A continuación, presentamos nuestro último capítulo donde mostramos el análisis a posteriori y la validación de nuestra investigación a partir de ellos mismos.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CAPÍTULO 5

Fase experimental y Análisis A posteriori

En esta capitulo describiremos la fase experimental desarrollada con los profesores en formación continua y los pro y contra que pudieron aparecer durante el desarrollo de las actividades. También se hará la presentación de los resultados de algunos de los alumnos, el análisis a posteriori de sus respuestas y finalmente se mostrará la validación de los mismos.

5.1 Experimentación

Esta parte, también es importante en nuestro trabajo de investigación y se caracteriza por la participación de los profesores en formación continua, resolviendo y encontrando solución a diversas situaciones planteadas por el investigador, en cada actividad y también se describe el contexto en el que se desarrolla el estudio. La experimentación fue aplicada en el curso Álgebra Lineal con profesores en formación continua de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas del semestre 2014-2. La aplicación de la experimentación (aplicación de las actividades) fue en los meses de Noviembre - Diciembre del 2014, debido a que el tema Transformación Lineal es el tercer capítulo que se desarrolla en dicho curso.

Las actividades fueron elaboradas por el investigador, revisadas por el profesor del curso Álgebra Lineal, con la finalidad de verificar que las preguntas estén bien formuladas y para poder estimar el tiempo a emplear en el desarrollo de cada actividad. El tiempo de aplicación de cada actividad fue de 60 minutos y en ellas se indicó a los profesores en formación continua que estas actividades forman parte de nuestro trabajo de investigación, que lo aconsejable es desarrollar voluntariamente, pero con la seriedad del caso, todas las preguntas elaboradas en la correspondiente actividad.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Las actividades presentadas a los profesores en formación continua en cada sesión fueron las siguientes:

ACTIVIDAD 1: Esta primera actividad fue aplicada a nueve profesores en formación continua de la maestría de Enseñanza de las Matemáticas, del curso Álgebra Lineal. Esta actividad consta de 3 gráficas que mostraremos después de presentar nuestros objetivos de esta primera actividad. Con esta actividad esperamos que los alumnos lleguen a:

- Usar el software para efectuar con el mouse el movimiento dinámico de los vectores del dominio ($\vec{u}$ y $\vec{v}$).
- Identificar a las Transformaciones Lineales teniendo en cuenta las relaciones que debe cumplir cada función que se les presenta.
- Desarrollar en cada pregunta formulada, los respectivos tratamientos y conversiones asociados a la definición de transformación lineal.

Donde los profesores en formación continua deben responder las preguntas siguientes a la gráfica que presentamos a continuación.

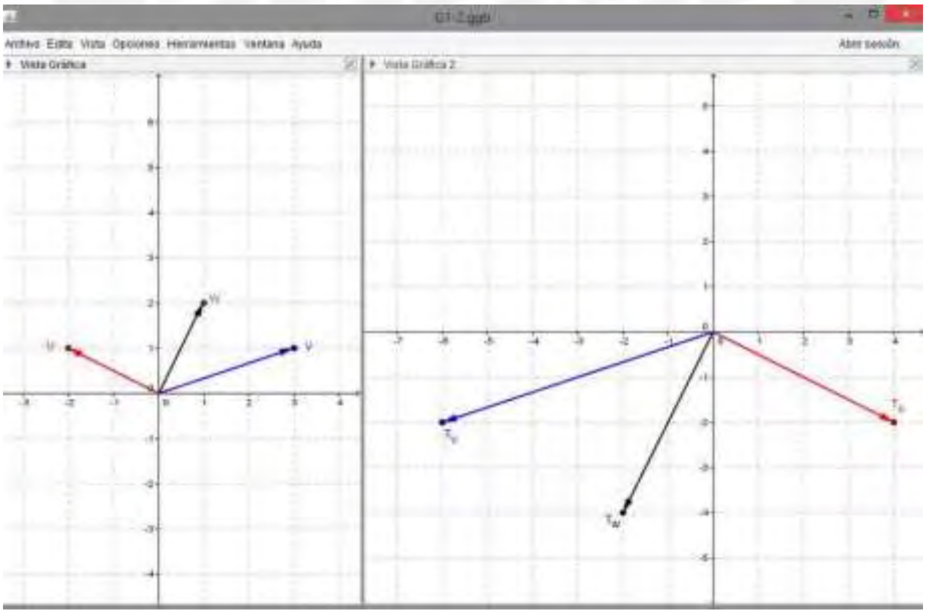


Figura 5.1: transformación lineal $T(x, y) = -2(x, y)$.

Las preguntas de esta primera actividad son:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

1. ¿Qué relación puede describir entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$?

2. Dado los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en el dominio de T, tales que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. ¿Qué relación existe entre los vectores $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$?

3. Muestra cómo está definida explícitamente la función T. Es decir, si $\vec{u} = (x, y)$; halla $T(x, y)$.

4. ¿Será T una transformación lineal? (justifique su respuesta). En caso afirmativo, muestra la matriz A de T relativa a su base canónica.

El software GeoGebra ayuda, al profesor en formación continua, en esta actividad ya que con el mouse se pueden efectuar cambios en los vectores del dominio (lado izquierdo), simultáneamente aparecerán en el lado derecho, las imágenes correspondientes de tales vectores. Se espera finalmente que después de estas observaciones, los estudiantes obtengan la regla de correspondencia de la transformación lineal y justifique su resultado.

Gráfica 1:

En esta primera actividad se muestra al alumno a través del software GeoGebra, la representación gráfica de los vectores asociados a una transformación lineal mostrada anteriormente.

Nuestra actividad inicia, mostrando a los alumnos en el GeoGebra, dos vistas simultaneas (derecha e izquierda), en la vista izquierda se dan tres vectores, donde dos de ellos se pueden hacer variar o mover con el mouse ($\vec{u}$ y $\vec{v}$) de manera que el vector $\vec{w}$ sea dado por $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Simultáneamente aparecen en la vista derecha los vectores $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$, los cuales son las imágenes de los vectores de la izquierda, con estos vectores de la derecha los alumnos deben también hallar una relación entre estas imágenes $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

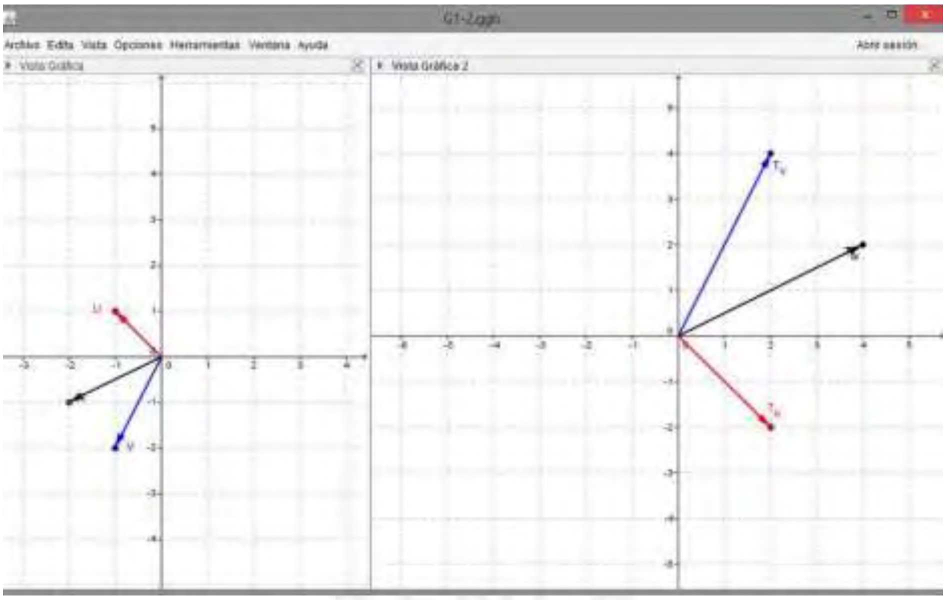


Figura 5.2: Variación de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con sus respectivas imágenes.

El profesor en formación continua, a partir de los datos que pueda obtener de la gráfica mostrada a través del GeoGebra, tiene que responder las preguntas señaladas anteriormente.

Con esta primera gráfica, esperamos que el profesor en formación continua aprenda y/o refuerce la definición de transformación lineal, establezca alguna relación entre un vector del dominio y el respectivo vector de su imagen, establezca la relación entre los vectores de la imagen y muestre su matriz relativa a la base canónica, tomando en cuenta que el profesor en formación continua debe comentar, hacer sus respectivos cambios de registros (conversión) y operaciones en un mismo registro (tratamiento) para llegar a la respuesta correcta.

Grafica 2:

La representación gráfica de los vectores, para esta segunda función que se les muestra a los alumnos a través del software GeoGebra es:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

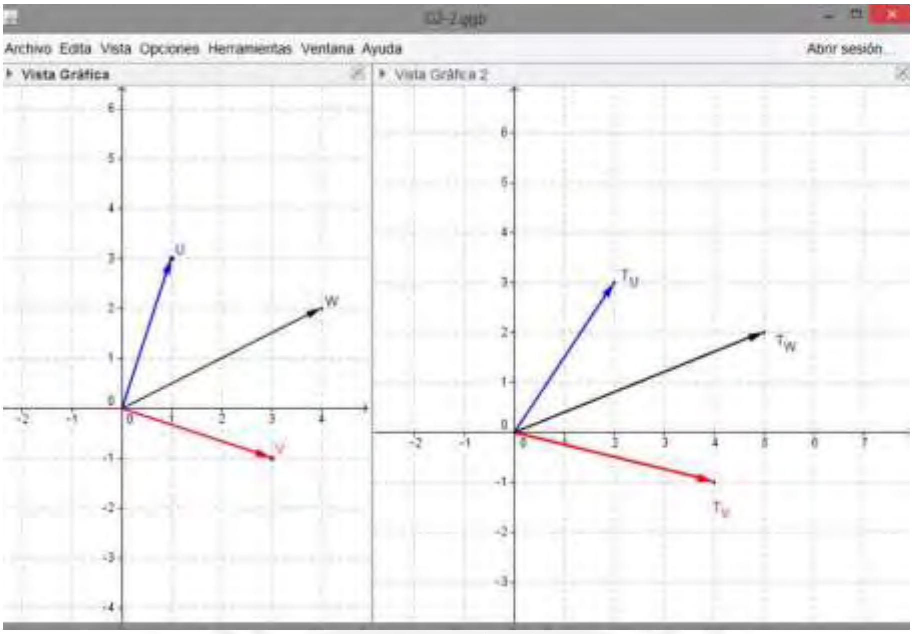


Figura 5.3: Función $T(x, y) = (x + 1\,, y)$

Similarmente, como en la gráfica anterior hemos construido este app que consiste de dos vistas gráficas (derecha e izquierda), donde los vectores de la izquierda son elementos del dominio ($\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$) y de manera simultánea en la vista derecha, se muestra las imágenes de los vectores mediante cierta función.

Con esta gráfica, esperamos que el profesor en formación continua llegue a señalar su regla de correspondencia, establezca la relación entre un vector del dominio y el respectivo vector de su imagen, establezca la relación entre los vectores de la imagen. Teniendo en cuenta que el profesor en formación continua debe comentar, hacer sus respectivos cambios de registros (conversión)y operaciones en un mismo registro (tratamiento) para llegar a la respuesta correcta, afirmando que no es una transformación lineal.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

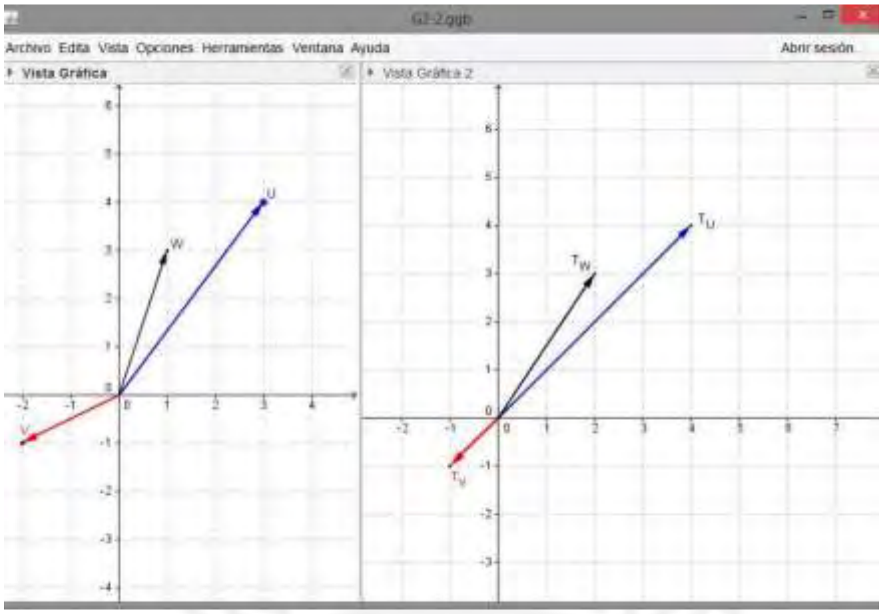


Figura 5.4: Variación de los vectores del dominio y sus imágenes

Como en el gráfico 1, el software GeoGebra ayuda a los estudiantes a deslizar en distintas direcciones los vectores del dominio (lado izquierdo), simultáneamente aparecerán en el lado derecho, las imágenes correspondientes de estos vectores.

Se espera que el profesor en formación continua considere como uno de los vectores del dominio al $(0;0)$ y que al ver su correspondiente imagen concluya que esta función no es una transformación lineal. También se espera que después de varias observaciones, el estudiante obtenga finalmente la regla de correspondencia de la función.

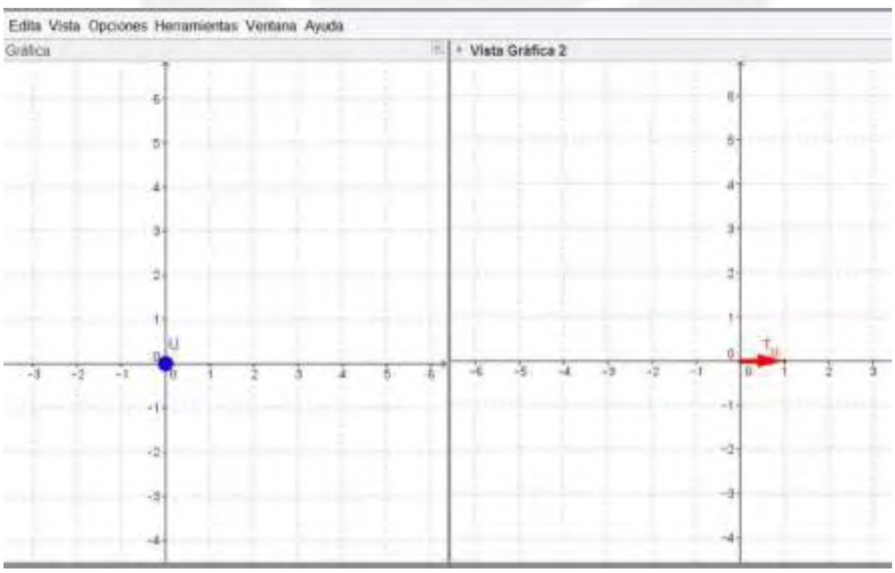


Figura 5.5: Vector $\vec{u} = (0,0)$ y su imagen $T(\vec{u}) = (1,0)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Gráfica 3:

En esta tercera gráfica, que se les muestra en el GeoGebra a los profesores en formación continua, a diferencia de las dos graficas anteriores optamos por usar solo una vista gráfica de esta tercera función:

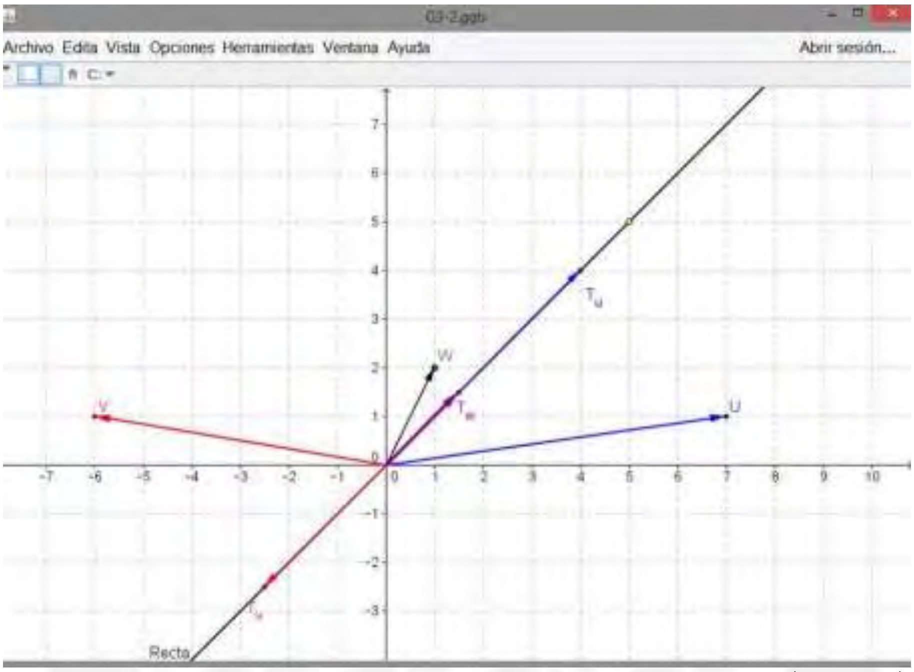


Figura 5.6: proyección ortogonal sobre la recta $y = x$: $T(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$

En esta gráfica también insertamos una recta, de modo que los vectores del dominio $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son proyectados ortogonalmente sobre esta recta. Para el desarrollo de esta parte, correspondiente a la primera actividad, consideramos los casos más simples de proyección, estos son, proyección sobre la recta $y = x$, proyección sobre la recta $y = 0$ (el eje X) y proyección sobre la recta $x = 0$ (el eje Y). Aquí también los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y la recta pueden moverse con el mouse.

Con esta tercera gráfica, esperamos que el alumno llegue a señalar la definición de la transformación lineal para el caso señalado, la relación entre un vector del dominio y su imagen, la relación entre los vectores de la imagen y mostrar su matriz relativa a la base canónica, teniendo en cuenta que el alumno debe comentar, hacer sus respectivos cambios de registros (conversión)y operaciones en un mismo registro (tratamiento) para llegar a la respuesta correcta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

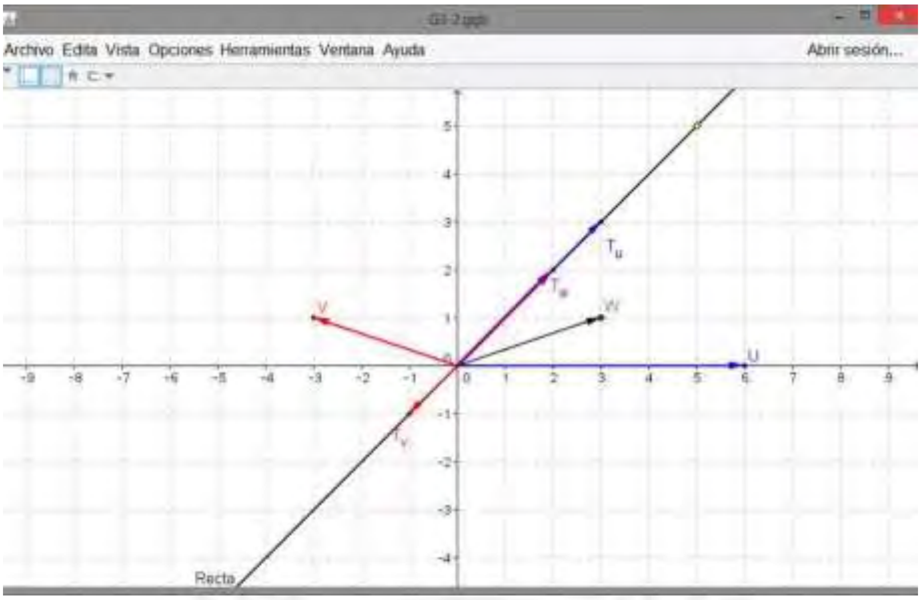


Figura 5.7: Vectores movibles o libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

ACTIVIDAD 2: Esta segunda actividad fue aplicada a siete alumnos de la maestría de Enseñanza de las Matemáticas del curso Álgebra Lineal. Con esta segunda actividad esperamos que los alumnos lleguen a:

- Desarrollar tratamientos y conversiones dentro de la definición de TL, y del concepto de núcleo e imagen de una TL, de acuerdo a lo formulado en cada pregunta.
- Complementar la comprensión de las transformaciones lineales con ayuda del GeoGebra.

Donde los profesores en formación continua deben responder las siguientes preguntas que son parte de la segunda actividad:

1. ¿Qué valores toma $T(\vec{u})$ cuando $\vec{u}$ son los vectores canónicos? ¿Qué relación hay entre $\vec{u}$ y su respectivo $T(\vec{u})$ para cada vector canónico? (COMENTE). Y muestre la matriz A de T relativa a la base canónica.
2. Escriba el par $(x; y)$ como combinación lineal de los vectores canónicos y luego señale cómo está definida explícitamente la transformación lineal $T(x; y)$. Analice si es cierto que $T(x; y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

3. Usando las respectivas definiciones, determine la imagen y núcleo de T. De un elemento de la imagen y un elemento del núcleo respectivamente.
4. Grafique (sombree) la imagen y núcleo de T, y los elementos de la pregunta anterior.

El GeoGebra ayudará a responder cada pregunta y/o confirmar los resultados que los profesores en formación continua obtengan en su registro algebraico, teniendo la facilidad de manipular al vector del dominio $\vec{u}$ situado al lado izquierdo y al mismo tiempo apareciendo su imagen $T(\vec{u}\,)$ al lado derecho, esperando que luego de las observaciones hechas por los profesores en formación continua respondan lo solicitado en cada gráfica.

Teniendo en cuenta que el dominio donde estamos definiendo a cada transformación lineal, según las gráficas, sólo es la frontera de un cuadrado de lado igual a 1 unidad.

Gráfica 1:

La gráfica de esta primera transformación lineal que se les muestra a los alumnos a través del GeoGebra es:

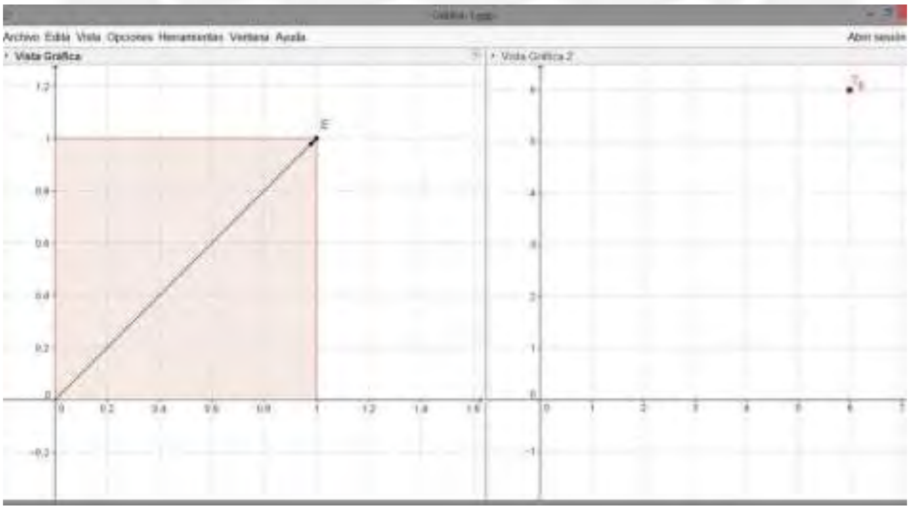


Figura 5.8: Transformación lineal $T(x, y) = (5x + y, 5x + y)$.

Con esta primera gráfica, esperamos que los profesores en formación continua aprendan o refuercen, la representación de una TL mediante su matriz relativa a la base canónica

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

y los conceptos de los sub espacios imagen y núcleo de una transformación lineal; y esto lo logre a partir de señalar la definición de dicha transformación lineal, la relación entre un vector del dominio y un vector de su imagen, mostrar su matriz relativa a la base canónica de dicha transformación lineal y finalmente graficar la imagen y núcleo de dicha transformación lineal. Teniendo en cuenta que el profesor en formación continua debe comentar, hacer sus respectivos cambios de registros (conversión)y operaciones en un mismo registro (tratamiento) para llegar a la respuesta correcta.

Grafica 2:

La gráfica de esta segunda transformación lineal que se les muestra a los profesores en formación continua a través del GeoGebra es:

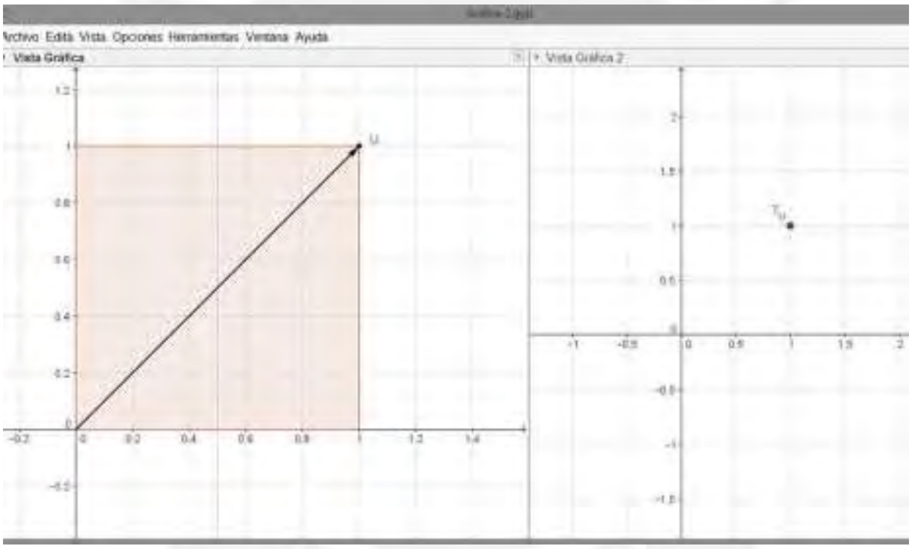


Figura 5.9: Transformación lineal $T(x, y) = (2x - y, 2x - y)$.

Con esta segunda gráfica, esperamos que el alumno llegue a señalar la definición de la transformación lineal para el caso indicado, la relación entre un vector del dominio y un vector de su imagen, mostrar su matriz relativa a la base canónica de dicha transformación lineal y finalmente graficar la imagen y núcleo de dicha transformación lineal, teniendo en cuenta que el alumno debe comentar, hacer sus respectivos cambios de registros (conversión) y operaciones en un mismo registro (tratamiento) para llegar a la respuesta correcta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

5.2 Análisis a posteriori

En esta parte se hará la presentación de los resultados de los profesores en formación continua y el análisis de las respuestas desarrolladas por ellos en las actividades 1 y 2, estos resultados fueron recogidos por el investigador. Para desarrollar el análisis de los resultados de los profesores en formación continua, el investigador debe hacer la comparación entre lo obtenido con la propuesta del análisis a priori, aquí es donde se observarán los errores comunes que pueden cometer los profesores en formación continua y también observar las formas comunes o distintas que pueden exhibir al contestar las preguntas planteadas en las actividades.

Para hacer este análisis, se consideró una muestra de tres de los alumnos que desarrollaron las dos actividades y luego, en forma anónima, se analizó y se mostró su desarrollo. También se presenta un informe general por cada situación planteada en las actividades, clasificando las respuestas de todos los profesores en formación continua en: correctas, incorrectas y abstenciones. Esta clasificación se forma a partir de la teoría desarrollada en clases y parte de ella presentada en el capítulo 2 de esta investigación, definidas como respuesta correcta cuando está conforme a la teoría del objeto matemático, es una respuesta incorrecta cuando no es conforme a la teoría del objeto matemático, y es considerada como respuesta abstención el momento en que el alumno no ha respondido dicha pregunta, ya que el desarrollo de todas las preguntas de las actividades son desarrolladas en forma voluntaria.

A continuación presentaremos el análisis de cada actividad y mostraremos el desarrollo de tres profesores en formación continua, los cuales llamaremos: Alumno 1, Alumno 2 Alumno 3.

5.2.1. Análisis de la Actividad 1

Para el análisis de esta primera actividad detallaremos las respuestas de los alumnos para cada gráfica, enfrentando las preguntas que conforman esta actividad 1. Al finalizar el análisis de cada gráfica presentaremos un cuadro, que resume los resultados de los alumnos en esta primera actividad.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

GRÁFICA 1

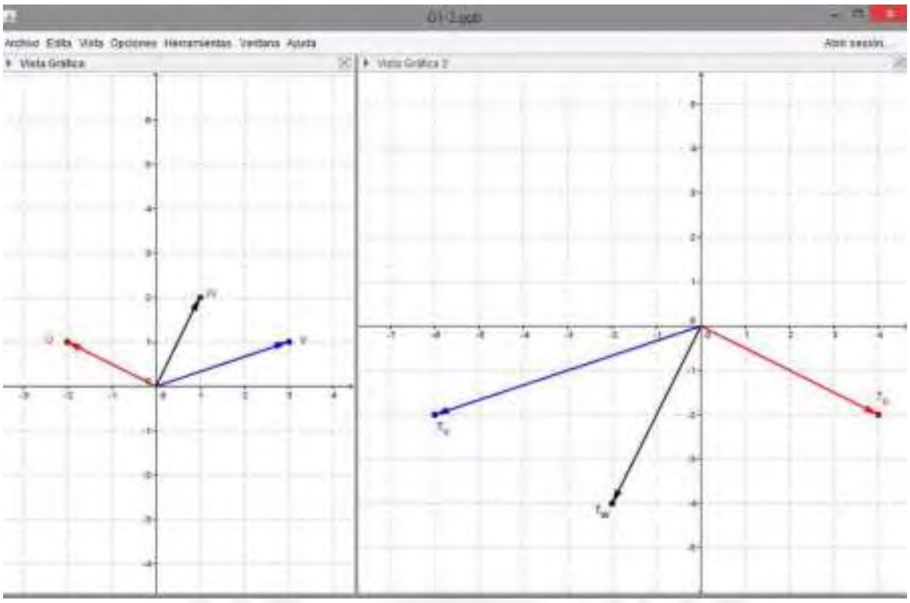


Figura 5..10: Función $T(x;y) = -2(x;y)$

1. A los profesores en formación continua se les hace sencillo hallar la relación existente de manera algebraica entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$, pues es casi inmediato notar dicha relación en el registro gráfico, manipulando a través del software GeoGebra el vector del dominio y observando su imagen. Algunos añaden una descripción en el registro de lenguaje natural pero no todos lo hacen correctamente, equivocándose al no mencionar el cambio de orientación del vector imagen. En términos de la teoría de registros se puede decir que los cambios de registros (las conversiones), del registro gráfico al registro algebraico y luego al registro de lenguaje natural, mostrado por la mayoría de los profesores en formación continua son correctos. Aunque ningún profesor en formación continua describe o comenta acerca de la propiedad de la linealidad como mostramos en el análisis a priori $T(\alpha\,\vec{u}) = \alpha\,T(\vec{u})$.

   El 78%de los profesores en formación continua (7de ellos) respondieron en forma correcta, afirmaron y/o mostraron que la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$ es la mitad o de 1 a 2, lo cual es correcto y 5 profesores en formación continua de este grupo añadieron una descripción (registro en lenguaje natural) acerca de esta relación, la más resaltante es la siguiente.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

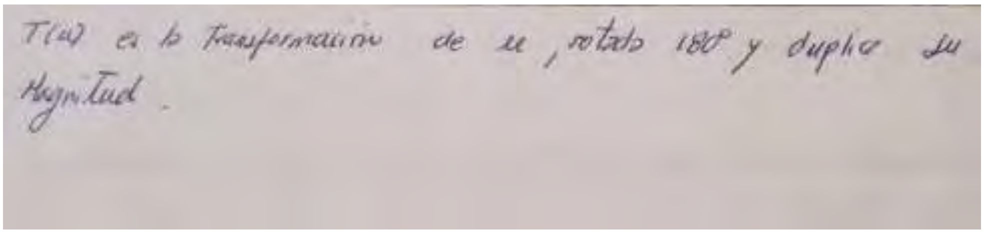


Figura 5.11: Descripción de un participante, para la función $T(x; y) = -2(x; y)$

Señalamos como resaltante, debido a la forma inusual o particular de describir la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$. Al otro 22% de los profesores en formación continua les faltó señalar que la orientación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$ es opuesta, éstos respondieron en forma equivocada.

2. Esta pregunta 2, se les hace algo más complicado a los profesores en formación continua en comparación con la pregunta 1. Se está solicitando la relación entre los tres vectores de la imagen, los cuales están dependiendo de los tres vectores del dominio, teniendo en cuenta la relación entre estos $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Observamos que en su mayoría los profesores en formación continua realizan la conversión del registro gráfico al registro par ordenado de algunos vectores para que usando tratamientos, concluir la relación existente.

   Para la segunda pregunta el 78% de los profesores en formación continua (7 de ellos) respondieron en forma correcta, llegando a señalar que la relación entre los vectores $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$ es $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. De este grupo de profesores en formación continua, 4 de ellos escribieron en forma directa el resultado, mientras que los otros 3, llegaron a concluir la relación solicitada a partir de la conversión del registro gráfico al algebraico, escogiendo vectores específicos y luego de hacer algunos tratamientos en el registro algebraico llegan a concluir con la relación señalada anteriormente.

   El otro 22% de los alumnos, es decir, los otros 2 alumnos comentan características que observan entre los vectores del dominio y su respectiva imagen, pero no llegan a señalar algo cercano a la relación correcta. Mostraremos uno de estos casos erróneos a continuación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

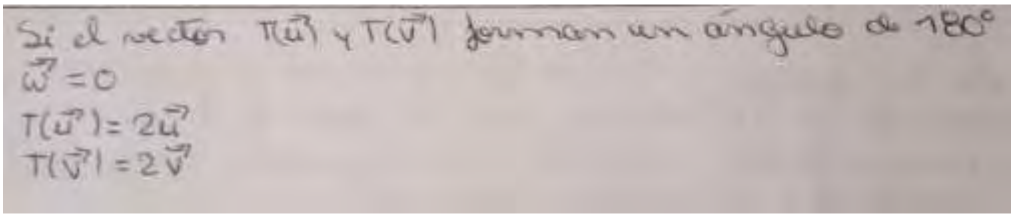


Figura 5.12: Respuesta equivocada de un alumno.

Se observa que arrastra el error de la pregunta 1, la falta del signo negativo (orientación opuesta al vector inicial), y no llega a concluir nada con respecto a lo pedido a esta pregunta 2.

3. Luego de pasar por las preguntas 1 y 2 y responder correctamente, los profesores en formación continua definen explícitamente la función T. Por otro lado, algunos arrastran el error de las preguntas anteriores o se les hace complicado responder esta pregunta a los profesores en formación continua que no logran hacer las conversiones y tratamientos de manera correcta. Desde el punto de vista de la teoría de registros, podemos decir que las conversiones de los registros gráfico, algebraico y leguaje natural; y sobre todo los tratamientos en los registros gráfico y algebraico ayudó a los profesores en formación continua a concluir la definición de la función $T(x; y) = -2(x; y)$.

   En la tercera pregunta el 78% de los profesores en formación continua (7 de ellos) llega a formalizar algebraicamente la regla de correspondencia de la transformación lineal, consecuencia de haber desarrollado la pregunta 1, lo cual suponemos que, a los profesores en formación continua les ayudó a concluir en forma inmediata y segura. El otro 22% de los profesores en formación continua siguen arrastrando el error de la pregunta 1, éstos sólo escriben $T(x; y) = 2(x; y)$, observándose que no hacen bien el cambio del registro gráfico al registro algebraico.

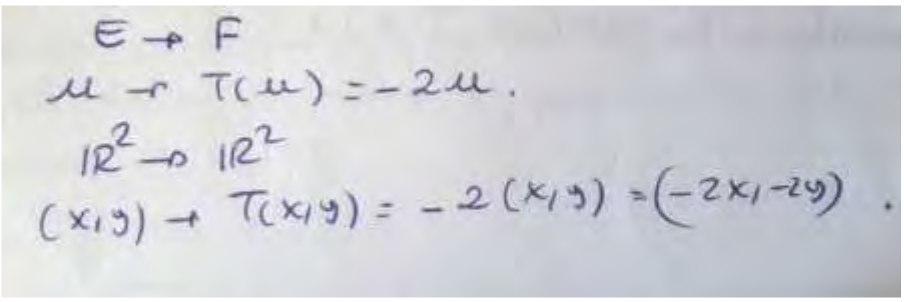


Figura 5.13: Respuesta correcta de un participante de la investigación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

4. En esta pregunta final, algunos profesores en formación continua luego de hallar la función T en la pregunta 3, tiene dificultad en hallar la matriz relativa a la base canónica por falta de conocimiento o no hacen el cambio de registro correcto. Sólo el 78% de los profesores en formación continua responden en forma correcta la pregunta, justificando su respuesta, pero de este grupo no todos muestran la matriz A de T relativa a la base canónica. Llama la atención la respuesta de un profesor en formación continua, al mostrar como la matriz relativa a la base canónica, la matriz columna

$$T = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Cuyo análisis detallaremos más adelante. Por otro lado, hay dos profesores en formación continua (11% del total), en los que por un lado, uno de ellos se abstiene en su respuesta y el otro desarrolla algo parecido a combinaciones lineales pero no llega a nada correcto sobre lo que se le pedía en esta pregunta.

Cuadro resumen de resultados de los profesores en formación continua con la gráfica 1, en esta primera actividad, sobre un total de 9 profesores en formación continua se obtuvieron los siguientes resultados.

Pregunta	% Correctas	% Incorrectas	% Abstenciones	% TOTAL
1	78	22	0	100
2	78	22	0	100
3	78	22	0	100
4	78	11	11	100

Ahora, presentaremos el desarrollo de 3 profesores en formación continua que confirmen nuestro primer análisis general, los cuales los llamaremos Alumno 1, Alumno 2 y Alumno 3 .

- Alumno 1

Para la **primera pregunta**, el profesor en formación continua a quien se le llamará alumno 1 hizo el desarrollo que mostramos a continuación:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

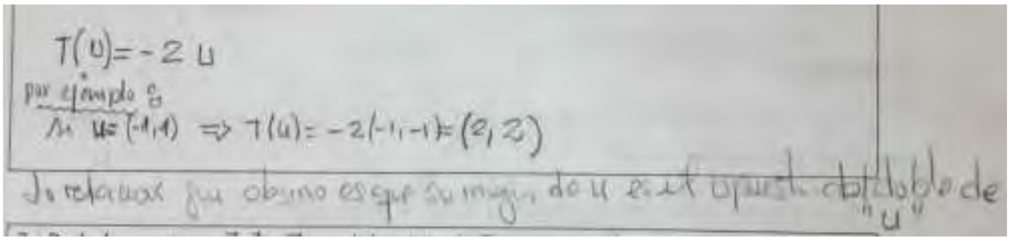


Figura 5.14: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 1.

Donde observamos, que en forma directa muestra la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$, suponiendo que ha observado claramente esta relación después de hacer tratamientos en el registro gráfico a través del GeoGebra. Luego con un ejemplo muestra dicha relación, tomando el vector $\vec{u} = (-1; -1)$ para que concluya que $T(\vec{u}) = (2; 2)$ y finalmente haga la conversión, del registro algebraico al registro de lenguaje natural, para describir la relación, diciendo: *La relación que observo es que su imagen de $\vec{u}$ es el opuesto del doble de $\vec{u}$.*

En la **segunda pregunta** el alumno 1 respondió de la siguiente forma:

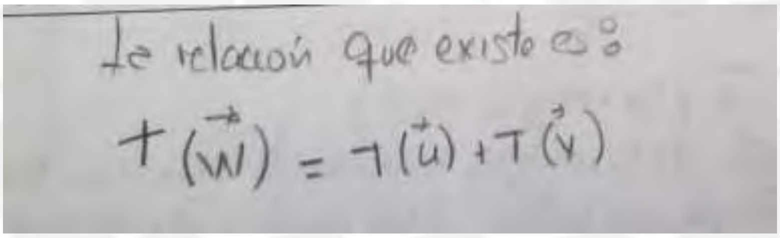


Figura 5.15: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 1.

Donde su forma directa de responder, sin mostrar ningún tratamiento previo, se debe a que hace los tratamientos en la computadora a través del GeoGebra, con lo que llega a la respuesta correcta. El software ayuda en el desarrollo intuitivo del Alumno 1. Muestra el buen manejo de los tratamientos en el registro gráfico, a través del software, para que concluya haciendo el cambio de registro al algebraico y mostrarnos la relación entre los vectores $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$, la cual es: $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$; donde $w = u + v$ y $u; v \in \mathbb{R}^2$. Aunque también se deja de lado al usar el software otras propiedades más abstractas o generales que tiene las TL.

Para la **tercera pregunta** el alumno 1 respondió de la siguiente manera:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

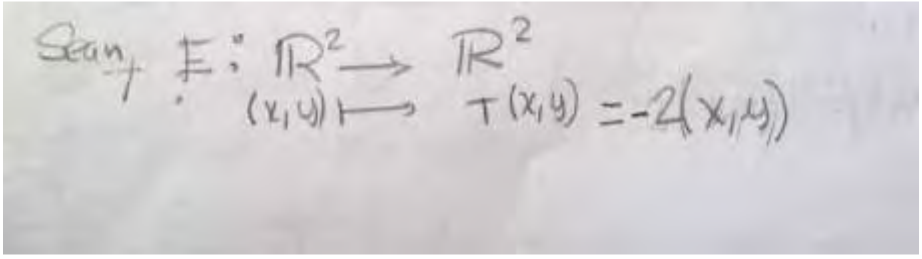


Figura 5.16: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 1.

Responde en forma inmediata esta pregunta, debido a que está directamente relacionada con las dos preguntas anteriores y también porque puede observar luego de hacer tratamientos en el GeoGebra y llegar a inducir dicha definición, la cual está correctamente escrita, pues detalla desde donde parte y hacia donde llega la función ($\mathbb{R}^2$).

Finalmente en la **cuarta pregunta** el alumno 1 respondió:

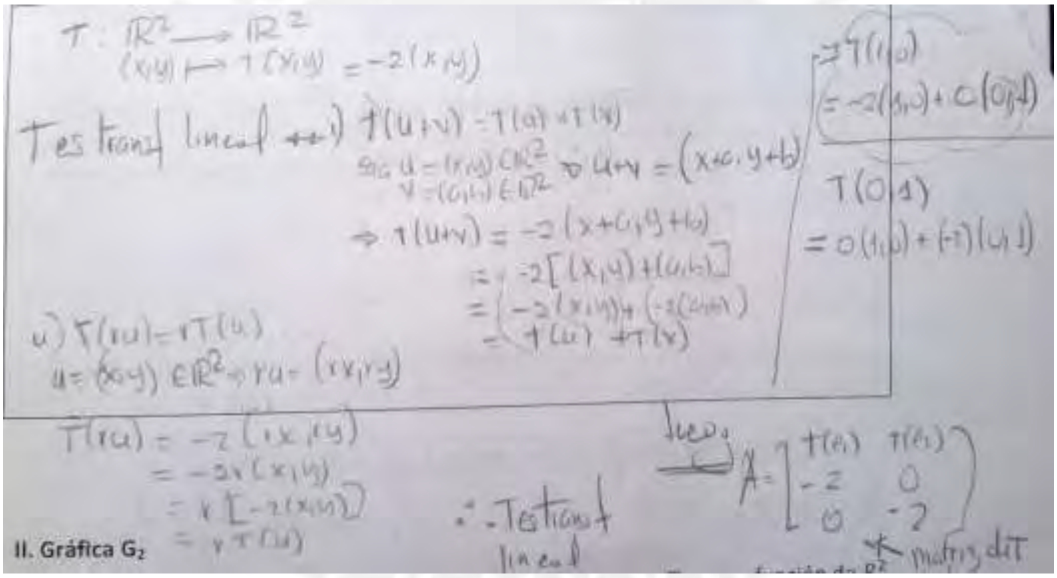


Figura 5.17: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 1.

El alumno hace bien la justificación formal de transformación lineal, desarrollando tratamientos coherentes dentro del registro algebraico respetando las propiedades algebraicas, para que concluya que $T(x;y) = -2(x;y)$ es una transformación lineal y luego de una conversión implícita muestre la matriz A relativa a la base canónica de la transformación T. Observando que tiene claro como hallar la matriz, puesto que escribe en la parte superior de sus columnas a la transformación aplicada a los vectores canónicos $T(e_1)$ y $T(e_2)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- Alumno 2

Para la **primera pregunta**, el alumno 2 hizo el desarrollo siguiente:

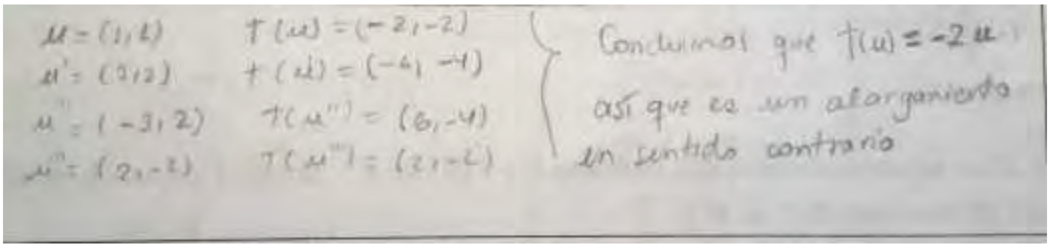


Figura 5.18: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 2.

A diferencia del alumno 1, el alumno 2 inicia tomando vectores específicos con sus respectivas imágenes (aunque en la imagen del último vector escribe lo mismo que el vector de su dominio), para que a partir de estos casos particulares concluya en forma correcta que $T(\vec{u}) = -2\vec{u}$. Luego describa la relación hallada, así: *Es un alargamiento en sentido contrario*, donde no dice con exactitud de que proporción es el alargamiento, pero sí tiene en cuenta el signo describiéndolo como *sentido contrario*. Sobre el desarrollo del alumno 2 podemos decir que, hace bien las conversiones o cambios de registros, del geométrico al algebraico y luego del registro algebraico al registro de lenguaje natural. Observando que no tiene dificultad para esta primera pregunta.

En la **segunda pregunta** el alumno 2 respondió:

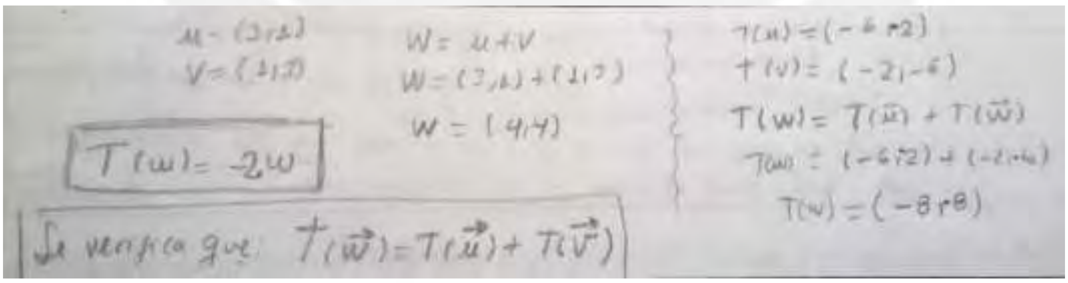


Figura 5.19: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 2.

Donde se observa que el alumno 2 toma vectores particulares $\vec{u} = (3;1)$ y $\vec{v} = (1;3)$ para luego usar el dato $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ y también usar el software GeoGebra para hallar las imágenes de dichos vectores, y concluir en forma acertada $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Esto muestra, la manipulación correcta que hace el alumno en los tratamientos del registro

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

algebraico y conversiones entre los registros gráfico y algebraico. Notando que el proceso de solución que realiza es similar al de la pregunta anterior.

En la **tercera pregunta** el alumno 2 respondió de la siguiente manera:

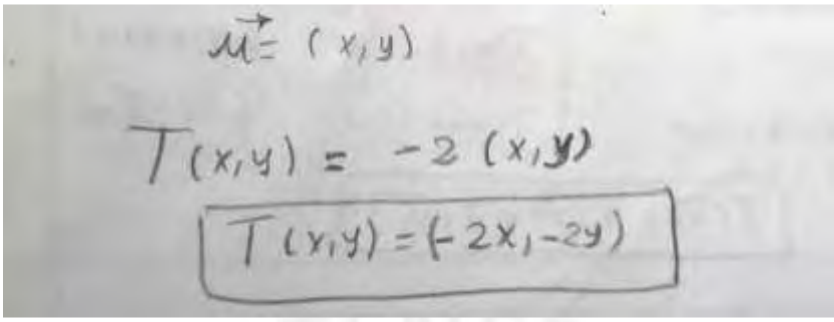


Figura 5.20: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 2.

Respondió de manera directa dicha pregunta, consecuencia de estar directamente relacionada con las dos preguntas anteriores y también ya que el alumno puede hacer tratamientos en el registro gráfico a través del GeoGebra y llegar a deducir dicha definición, la cual está escrita en forma correcta, aunque no detalla específicamente el dominio y rango, como el alumno 1.

Para finalizar, en la **cuarta pregunta** el alumno 2 hizo el desarrollo siguiente:

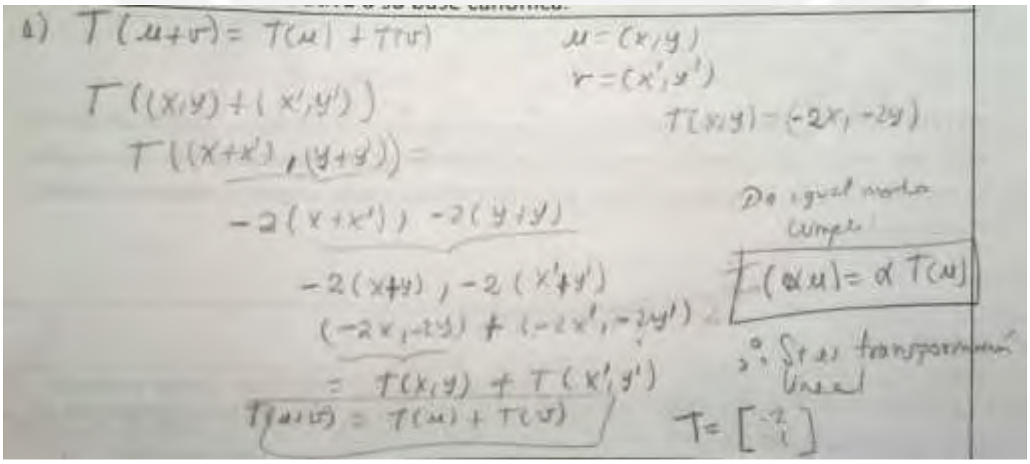


Figura 5.21: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 2.

El alumno hace bien la primera parte $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, correspondiente a la justificación de transformación lineal, pero la segunda parte sólo lo menciona diciendo que es de igual modo. En la primera parte hace tratamientos coherentes dentro del

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

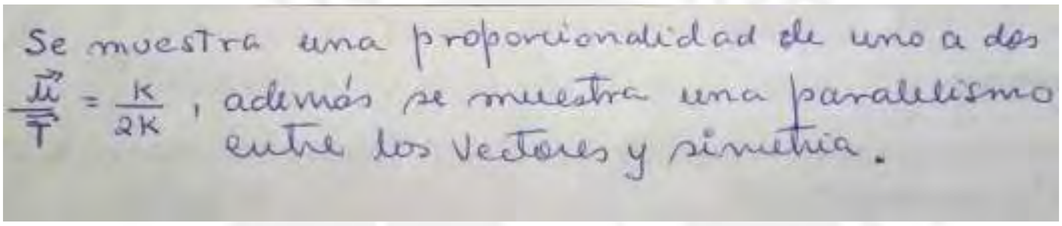
registro algebraico respetando las propiedades algebraicas en $\mathbb{R}^2$, y luego concluye que T es una transformación lineal. Finalmente, muestra en forma equivocada la matriz relativa a la base canónica de la transformación T, observando que no tiene claro como hallar la matriz o hace una mala conversión, puesto que escribe una matriz columna

$$T = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

y no detalla cómo lo halla, suponiendo que lo halla al aplicar la transformación al vector $\vec{u} = (1; 1)$ y colocar su imagen como vector columna.

- Alumno 3

  Para la **primera pregunta**, el alumno 3 desarrolló:



Se muestra una proporcionalidad de uno a dos
$\frac{\vec{u}}{\vec{T}} = \frac{K}{2K}$, además se muestra una paralelismo
entre los vectores y simetria.

Figura 5.22: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 3.

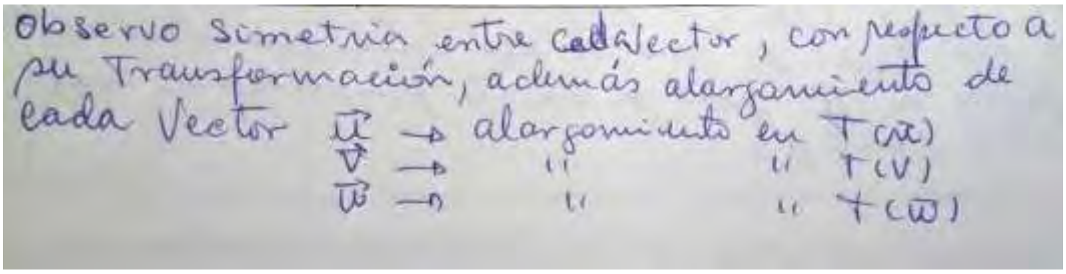
Donde observamos en forma inmediata el uso principal del registro en lenguaje natural con un mínimo uso del registro algebraico dado por:

$$\frac{\vec{u}}{\vec{T}} = \frac{k}{2k}$$

Teniendo en cuenta que señala el paralelismo que existe entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$, cuya idea es correcta aunque formalmente es incorrecto puesto que no existe la división entre vectores. Pero no se cumple la simetría contradiciéndose el mismo alumno, ya que previamente señaló la proporción de 1 a 2. Por otro lado, no llega a decir nada con respecto al sentido opuesto, o que es lo mismo, le faltó el signo negativo en la representación algebraica, notando que tiene dificultad en representar la relación de orientación entre $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$. Esto nos muestra que el cambio de registro, del gráfico al de lenguaje natural, no lo hace de manera totalmente satisfactoria, pero si se acerca mucho al resultado correcto.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En la **segunda pregunta** el alumno 3 respondió de la siguiente forma:

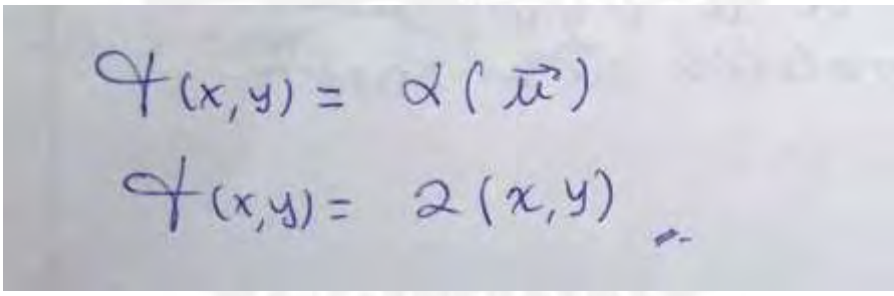


Observo simetria entre cada vector, con respecto a su Transformación, además alargamiento de cada Vector $\vec{u} \rightarrow$ alargamiento en $T(\vec{u})$
$\vec{v} \rightarrow$ " " $T(v)$
$\vec{w} \rightarrow$ " " $T(\vec{w})$

Figura 5.23: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 3.

El alumno sigue usando el registro de lenguaje natural de manera considerable, en el desarrollo de esta pregunta. Notamos que sigue arrastrando el error al mencionar que observa simetría entre el vector y su imagen. Menciona alargamiento en los vectores de las imágenes, pero este significado no era el buscado en esta pregunta. Suponemos que el alumno 3 no llegó a entender la pregunta o evidentemente tiene problemas al hacer la conversión del registro gráfico a otro registro. El uso del registro de lenguaje natural lo hace en forma eficiente, pero sus respuestas están más relacionadas a la pregunta anterior.

Para la **tercera pregunta** el alumno 3 respondió de la siguiente manera:



$T(x,y) = \alpha(\vec{u})$
$T(x,y) = 2(x,y)$

Figura 5.24: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 3.

Observamos que responde esta pregunta sin escribir ningún tratamiento algebraico previo a la respuesta que escribe, esto puede ser debido a que está relacionada de manera directa con las preguntas anteriores y también porque puede notarlo al hacer tratamientos a través del software GeoGebra y llegar a deducir la definición solicitada, en la cual sigue arrastrando el error de la falta de signo negativo.

Finalmente en la **cuarta pregunta** el alumno 3 respondió de la siguiente manera:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

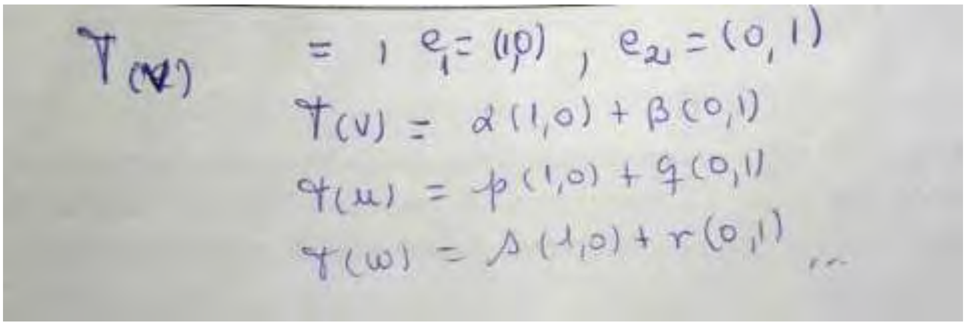


Figura 5.25: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 3.

Al observar este desarrollo, podemos decir que el alumno no logra apropiarse de la definición Transformación Lineal en forma clara, esto puede ser consecuencia del mal desarrollo de las preguntas previas a esta pregunta, debido a la mala coordinación que realizó entre registros.

Estos tres alumnos, son los diferentes casos que hemos analizado en la primera actividad, aplicada a la primera gráfica.

GRÁFICA 2

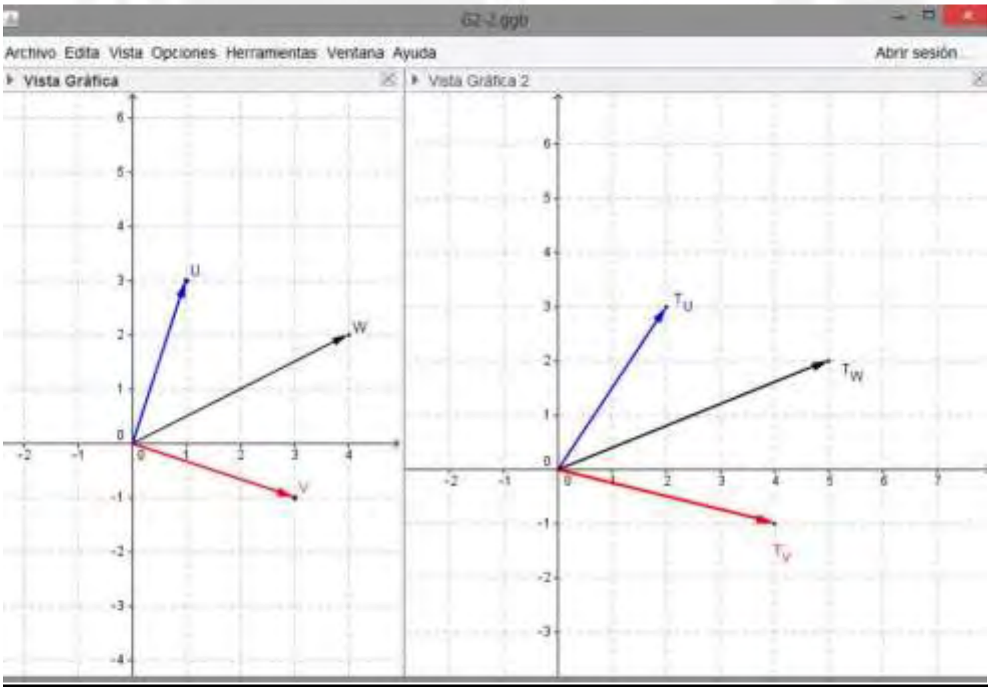


Figura 5.26: Gráfica de la función $T(x; y) = (x + 1; y)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

1. Esta gráfica es más complicada para que los profesores en formación continua obtengan las conversiones de manera correcta, debido a que la función que se define en esta gráfica 2 no es TL. En su mayoría, los profesores en formación continua tienen dificultad de llevar el registro gráfico al registro de lenguaje natural o registro par ordenado. Al usar casos particulares, no logran obtener una relación entre $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$ o no hacen una descripción correcta de ésta.

   El 44% de los profesores en formación continua (4 de ellos) respondieron en forma correcta, señalando la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$, tanto en el registro algebraico y el registro de lenguaje natural, mostrando inicialmente casos particulares (ejemplos), obtenidos mediante manipulación del mouse en el apps creado en el GeoGebra. El otro 56% de los profesores en formación continua (5 de ellos) responden en forma incorrecta, por ejemplo, uno de ellos muestra algebraicamente un caso particular y no describe o no concluye alguna relación, y otro alumno hace una descripción en registro de lenguaje natural pero de manera equivocada.

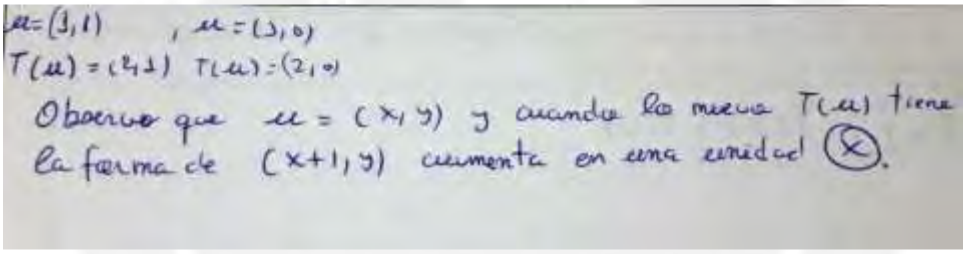


Figura 5.27: Respuesta correcta de un alumno

   Observamos que este alumno hace un buen cambio de registro, del geométrico al algebraico, para obtener los dos casos particulares que señala y posteriormente hace una correcta conversión, del registro algebraico al registro de lenguaje natural.

2. La dificultad para los profesores en formación continua se centra en señalar si existe o no alguna relación entre los vectores de la imagen. Algunos profesores en formación continua de manera inmediata la relación $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, debido a la mala observación en el registro gráfico. Otros responden sin coherencia a la pregunta planteada. Aquí, nuevamente el 44% de los profesores en formación continua (4 de ellos) señalan que no existe relación entre los vectores $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$, lo cual es correcto y algunos alumnos señalaron que $T(\vec{w}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Un profesor en formación continua de este grupo no respondió en forma correcta la primera pregunta. Por otro lado, el 34% de los profesores en formación continua (3 de ellos) concluye de manera incorrecta que la relación entre estos vectores es $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, de los cuales uno de estos profesores respondió correctamente la pregunta 1. Finalmente, el 22% equivalente a dos profesores en formación continua, dan respuestas que no tienen relación con esta pregunta.

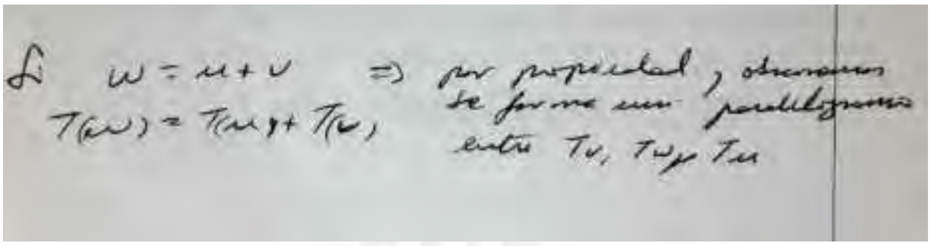


Figura 5.28: Respuesta incorrecta de un alumno

3. Los profesores en formación continua al señalarles que $\vec{u} = (x, y)$ es un par ordenado y al tomar casos particulares para $\vec{u}$, ellos concluyen en el registro par ordenado y algunos hasta en el registro de lenguaje natural como está definida la función T. Para esta tercera pregunta, el 67% de los profesores en formación continua (6 de ellos) hacen un correcto cambio de registro, usando como respuesta base la pregunta 1 y también deducen con sus propios casos particulares, la definición de la función mostrada mediante el GeoGebra $T(\vec{u}) = T(x; y) = (x + 1; y)$. El otro 33% de los profesores en formación continua (3 de ellos) no llegan a mostrar explícitamente como está definida la función T, debido a que arrastran su error de la pregunta 1.

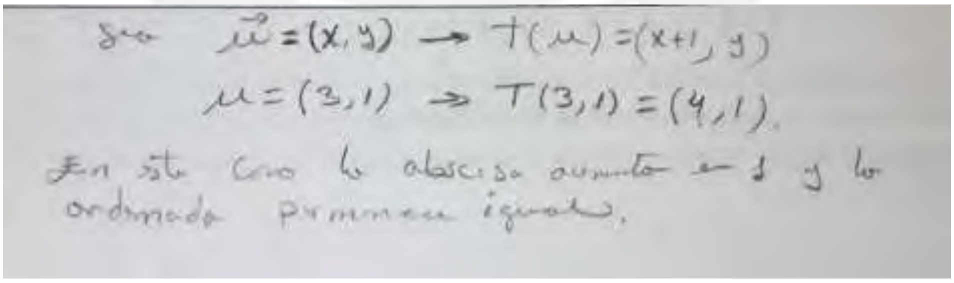
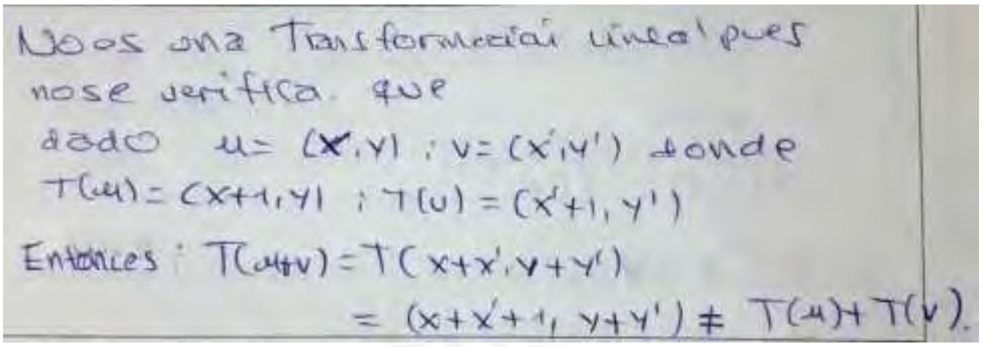


Figura 5.29: Respuesta correcta de un alumno

4. Finalmente para esta pregunta, algunos de los profesores en formación continua ya tienen claro las condiciones de TL, por ello es que justifican de manera correcta que dicha función $T(x; y) = (x + 1; y)$ definida en la gráfica 2, no es TL. El 22% de los profesores en formación continua (2 de ellos) no respondió esta última pregunta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Otro 33% de los profesores en formación continua respondieron incorrectamente debido a los errores que cometen en las preguntas anteriores y finalmente el 45% de los profesores (4 de ellos) hacen un buen cambio de registro, del gráfico al algebraico, y tratamientos para justificar que T no es una transformación lineal.



No es una Transformación lineal pues
no se verifica que
dado $u = (x, y)$; $v = (x', y')$ donde
$T(u) = (x+1, y)$; $T(v) = (x'+1, y')$
Entonces: $T(u+v) = T(x+x', y+y')$
$= (x+x'+1, y+y') \neq T(u)+T(v)$.

Figura 5.30: Respuesta correcta de un alumno

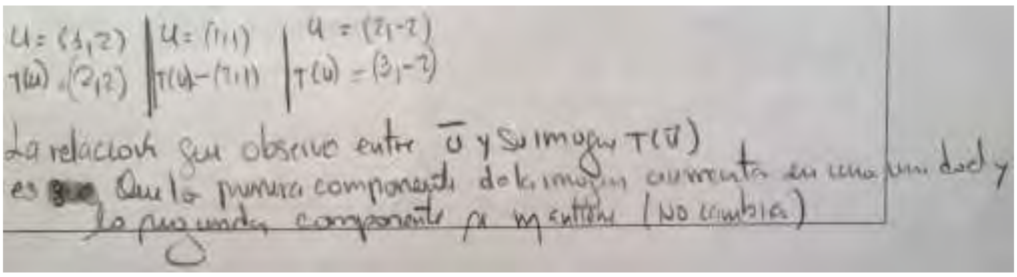
Cuadro resumen de resultados de los alumnos con la gráfica 2.

Pregunta	% Correctas	% Incorrectas	% Abstenciones	% TOTAL
1	44	56	0	100
2	44	56	0	100
3	67	33	0	100
4	44	33	23	100

Ahora, presentaremos el desarrollo de 3 alumnos que confirmen nuestro primer análisis general de la gráfica 2.

- Alumno 1

Para la **primera pregunta**, el alumno 1 desarrolló como se muestra a continuación:



$u = (1,2)$ | $u = (1,1)$ | $u = (2,-2)$
$T(u) = (2,2)$ | $T(u) = (2,1)$ | $T(u) = (3,-2)$

La relación que observo entre $\bar{u}$ y su imagen $T(\bar{u})$ es Que la primera componente de la imagen aumenta en una unidad y la segunda componente se mantiene (No cambia)

Figura 5.31: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

El alumno 1 inicia haciendo la conversión, del registro grafico al registro par ordenado, dando tres vectores en particular con sus respectivas imágenes, y luego haciendo la conversión, del registro algebraico al registro de lenguaje natural, describe: *La relación que observo entre $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$ es que la primera componente de la imagen aumenta en una unidad y la segunda componente se mantiene (No cambia)*. Las conversiones mostradas están bien realizadas y concluimos que el alumno llega a la respuesta correcta luego de inducir estos resultados de casos particulares desde el registro gráfico.

Para la **segunda pregunta**, el alumno 1 escribió lo siguiente:

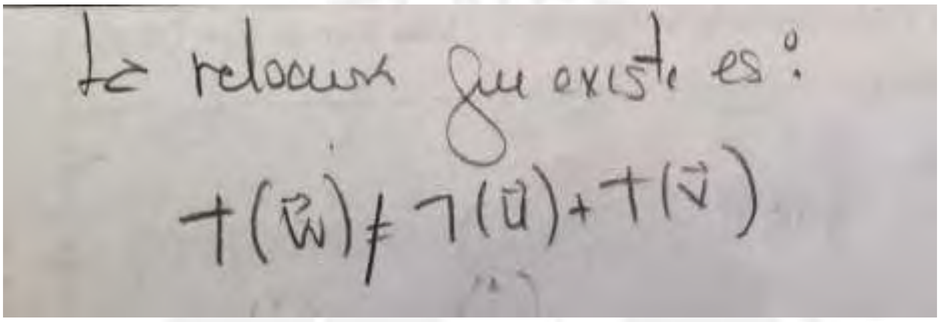


Figura 5.32: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 1

Donde podemos observar que en lugar de escribir que no existe alguna relación, menciona que existe la relación: $T(w) \neq T(u) + T(v)$, suponemos que esto es debido a que su respuesta está guiada a su desarrollo de la misma pregunta, en la gráfica 1. El alumno para llegar a esta conclusión, ha hecho tratamientos en el registro grafico usando el GeoGebra, es decir manipulando mediante el mouse los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para observar las imágenes de estos vectores y también el vector $T(\vec{w})$, sabiendo que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ y concluir que no existe relación alguna entre estas imágenes.

Para la **tercera pregunta**, el alumno 1 escribió lo siguiente:

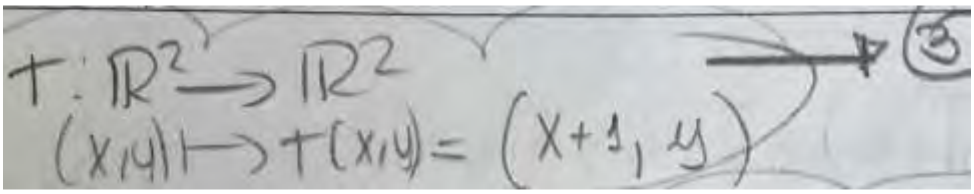


Figura 5.33: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Respondió de manera directa esta pregunta, debido a que está directamente relacionada con la pregunta 1 y porque también puede observar luego de hacer tratamientos en el GeoGebra y llegar a concluir dicha definición, la cual está correctamente escrita, pues detalla desde donde parte y hacia donde llega la función (R^2). Concluyendo que hace una buena coordinación de registros.

Para la **cuarta pregunta**, el alumno 1 hizo su desarrollo como se muestra a continuación:

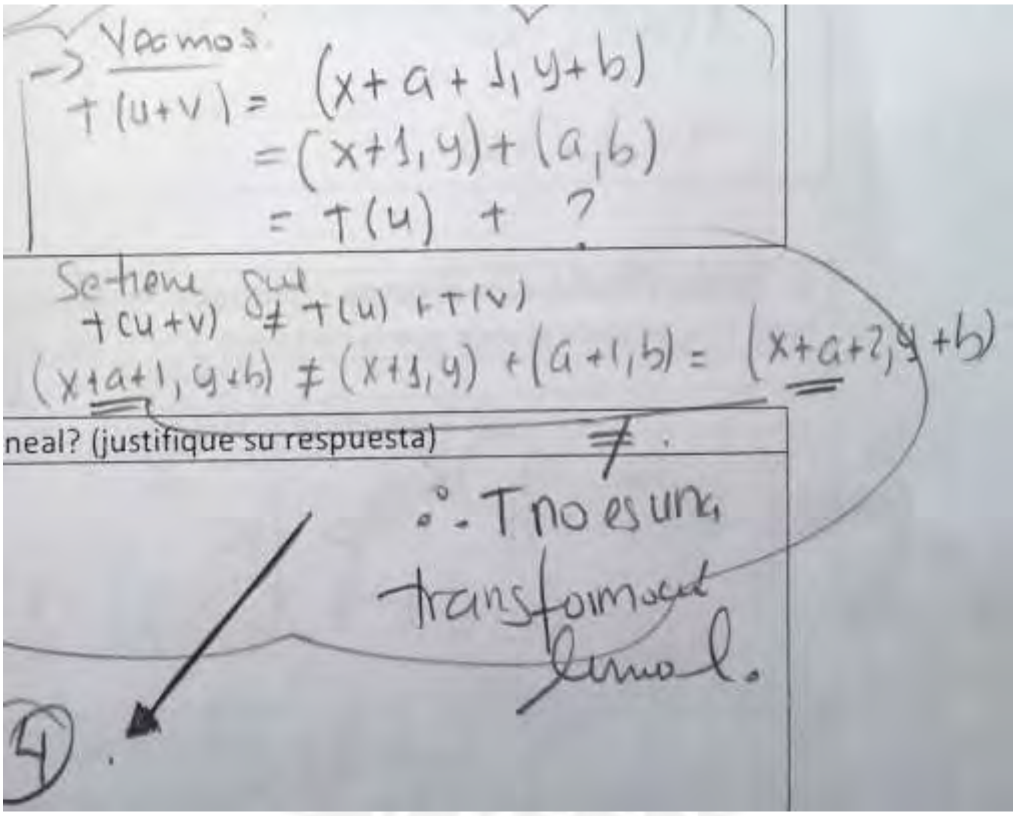


Figura 5.34: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 1

El alumno llega a justificar correctamente, haciendo el tratamiento correspondiente en el registro algebraico y concluye que $T(x;y) = (x+1;y)$ no es una transformación lineal. Esta conclusión, resulta de justificar que

$$T(\vec{w}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

siendo suficiente que no cumpla la igualdad (como señaló en la pregunta 2), ya no es necesario mostrar $T(\alpha.\vec{u}) = \alpha.T(\vec{u})$. Finalmente podemos decir que este alumno se apropió del concepto TL.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- Alumno 2

  Para la **primera pregunta**, el alumno 2 respondió lo siguiente:

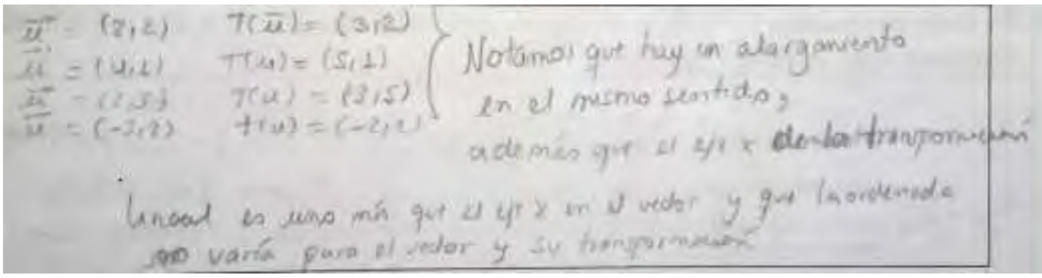


Figura 5.35: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 2

Notamos que el alumno inicia tomando vectores particulares con sus respectivas imágenes, haciendo un buen cambio de registros del gráfico al par ordenado. Luego nuevamente hace el cambio de registros del algebraico al lenguaje natural, en esta parte menciona la frase: *Hay alargamiento en el mismo sentido*, lo cual no es muy fácil de entender a lo que se refiere, pero después describe de manera detallada, diciendo: *El eje X de la transformación lineal es una más que el eje X en el vector, y que la ordenada no varía para el vector y su transformación*. Muestra que la descripción de la relación pedida en la pregunta 1, del gráfico 2 es correcta.

Para la **segunda pregunta** el alumno 2 hizo el desarrollo siguiente:

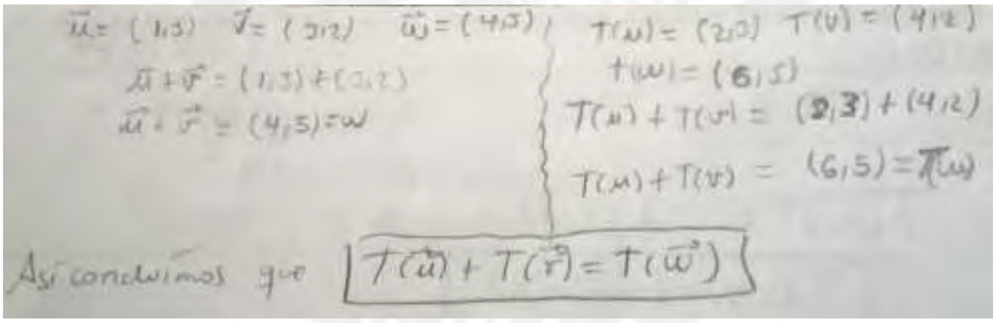


Figura 5.36:: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 2

Podemos ver que el alumno comienza tomando vectores específicos tales como $\vec{u} = (1;3)$, $\vec{v} = (3;2)$ y $\vec{w} = (4;5) = \vec{u} + \vec{v}$, para luego hallar sus imágenes respectivamente, pero en el caso de la imagen de $\vec{w}$ se observa que el alumno 2 hace una corrección en su primera componente y escribe $T(\vec{w}) = (6;5)$ lo cual es incorrecto, pues en el software GeoGebra es inmediato observar que $T(\vec{w}) = (5;5)$. Esto lleva a que el alumno concluya de manera equivocada que $T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{w})$, pues esto no

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

se cumple. Desde el punto de vista de la teoría de registros, el alumno inicia haciendo un correcto cambio de registros, hasta que deja de hacerlo para $T(\vec{w})$ y lo reemplaza por el tratamiento en el registro algebraico asumiendo que $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, con lo que concluye afirmando incorrectamente la igualdad y no llega a comprobar en el registro gráfico.

Para la **tercera pregunta** el alumno 2 escribió su respuesta como sigue:

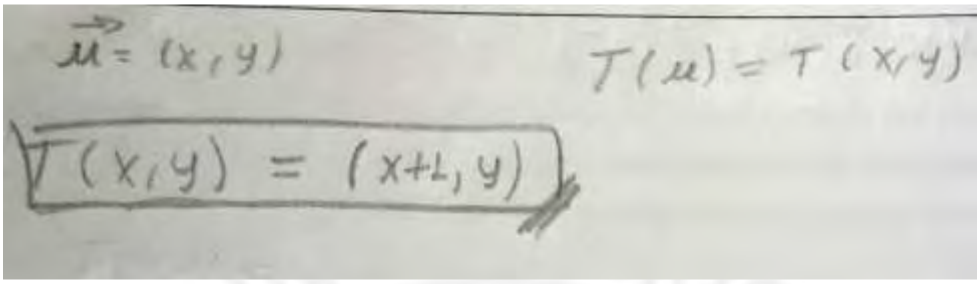


Figura 5.37: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 2

Da una respuesta directa, esto debido a que hizo cambios de registros correctos, del gráfico al algebraico y luego al lenguaje natural, en la pregunta 1, concluyendo de manera correcta la definición en el registro algebraico $T(x; y) = (x + 1; y)$.

Para la **cuarta pregunta** el alumno 2 escribió su desarrollo como sigue:

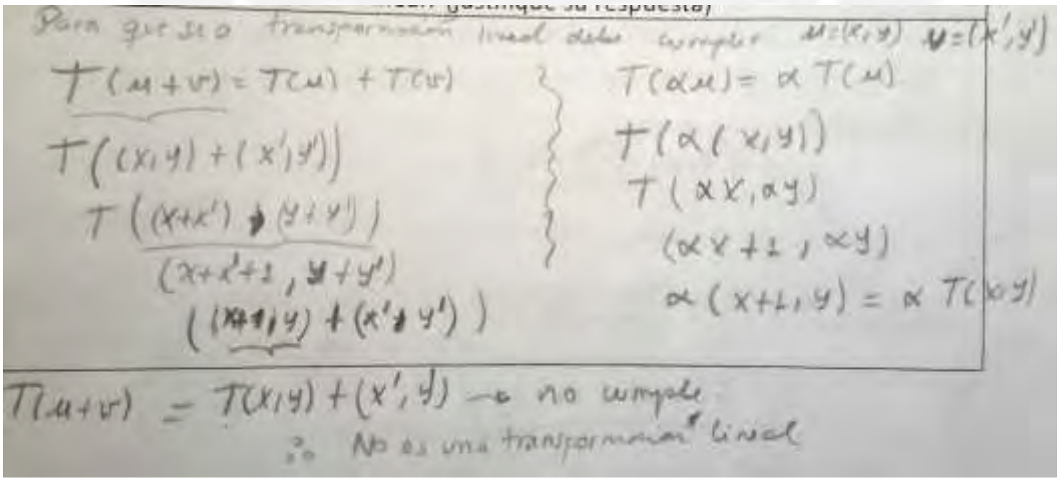


Figura 5.38: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 2

El alumno hace los tratamientos correctos en el registro algebraico al momento de mostrar que no se cumple $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, sin embargo, comete error de tratamiento en la parte $T(\alpha.\vec{u}) = \alpha.T(\vec{u})$ pues afirma que

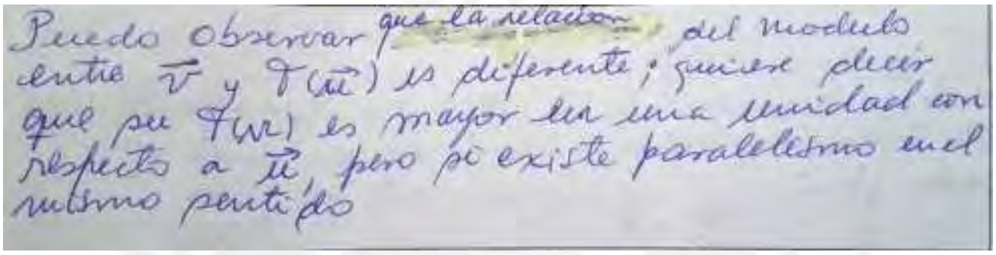
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII
PUCP

$$(\alpha x + 1; \alpha y) \;=\; \alpha(x + 1; y)$$

y concluye de manera incorrecta que cumple la igualdad $T(\alpha.\vec{u}) = \alpha.T(\vec{u})$, lo cual no es cierto. Finalmente, concluye que la función $T(x; y) = (x + 1; y)$ no es transformación lineal debido a su primera condición que no cumple.

- Alumno 3

  Para la **primera pregunta**, el alumno 3 respondió en el registro de lenguaje natural como demuestra a continuación:

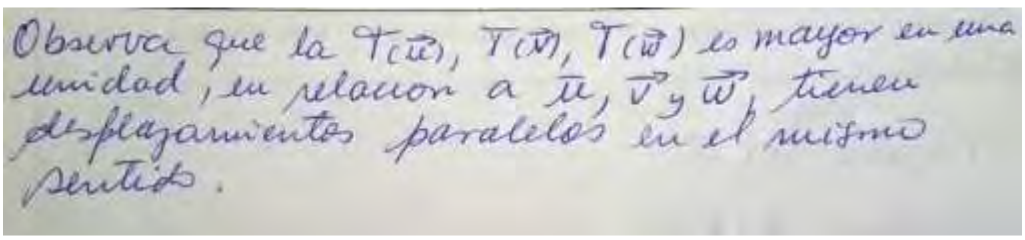


Puedo observar que la relación del modulo entre $\vec{v}$ y $T(\vec{u})$ es diferente; quiere decir que su $T(\vec{u})$ es mayor en una unidad con respecto a $\vec{u}$, pero si existe paralelismo en el mismo sentido

Figura 5.39: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 3

El alumno usa el término *módulo* (refiriéndose a tamaño o longitud del vector), diciendo que el módulo de los vectores $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ es diferente, lo cual es correcto, pero no es cierto que $T(\vec{u})$ es una unidad mayor que el vector $\vec{u}$, cometiendo error de coordinación de registros y concluye que *existe paralelismo en el mismo sentido* (refiriéndose al paralelismo con la misma orientación o igual dirección de los vectores). Concluimos que el alumno 3 no hace una buena conversión, del registro gráfico al registro de lenguaje natural, cometiendo el error de describir equivocadamente la relación entre las coordenadas de las abscisas entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$, mencionando como el crecimiento en una unidad del módulo del vector imagen.

Para la **segunda pregunta** el alumno 3 respondió :



Observa que la $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$, $T(\vec{w})$ es mayor en una unidad, en relación a $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, tienen desplazamientos paralelos en el mismo sentido.

Figura 5.40: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 3

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

El alumno optó una vez más por el uso del registro en lenguaje natural, pero observamos que continúa con deficiencias en el cambio de registros, del gráfico al lenguaje natural, pues sigue mencionando que los vectores del dominio $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son una unidad menor que sus imágenes $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$ respectivamente. Luego observamos que menciona la frase *desplazamientos paralelos en el mismo sentido*, teniendo la misma idea según lo señalado en la pregunta 1 (al paralelismo con la misma orientación o igual dirección de los vectores). Concluimos que el alumno 3 no hace tratamientos correctos en el registro gráfico y en consecuencia no hace una buena conversión, del registro gráfico al registro de lenguaje natural, cometiendo el error de describir la relación entre los vectores del dominio y la imagen, lo cual no se solicitó en esta pregunta sino la relación entre los vectores $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$, si existiera, lo cual no ocurre.

Para la **tercera pregunta** el alumno 3 intentó responder como mostramos:

Figura 5.41: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 3

Deja de lado el registro de lenguaje natural, ya que la pregunta explícitamente sugiere ser respondida en forma algebraica. En lo que el alumno 3 escribe, observamos que no llega a responder en forma correcta esta pregunta, mostrándose en esta parte los errores que el alumno llegó a cometer haciendo las conversiones en las preguntas 1 y 2. El alumno muestra que

$$T(\vec{u}) = u + a \rightarrow\ (x; y) + (a; a) = (x + a; y + a);$$

donde podemos concluir de lo observado, que $\alpha \in \mathbb{R}^2$ y sería finalmente

$$T(\vec{u}) = (x + a; y + a),$$

lo cual es incorrecto. La definición correcta de esta función es $T(u) = T(x; y) = (x + 1; y)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

Para la **cuarta pregunta** el alumno 3 desarrolló como mostramos a continuación:

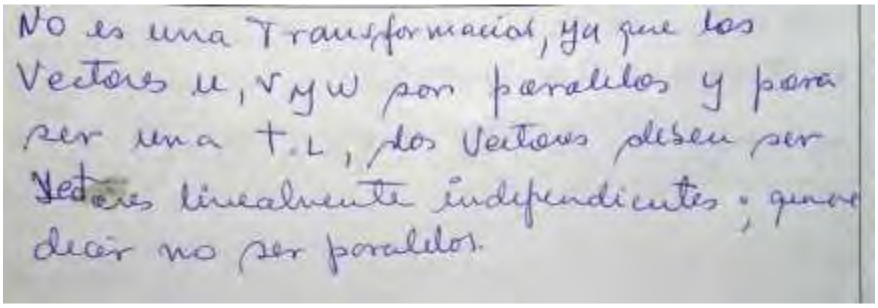


Figura 5.42: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 3

El alumno usa el registro en lenguaje natural para justificar su respuesta, diciendo: *Los vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *son paralelos y para ser una T.L, dos vectores deben ser vectores linealmente independientes; quiero decir no ser paralelos*, esto nos lleva a darnos cuenta que el alumno 3 puede estar confundiendo la definición de transformación lineal con la definición de base de un espacio vectorial. Finalmente podemos decir que el alumno tuvo problemas haciendo el cambio de registros, del gráfico al lenguaje natural en forma directa, el cual no siempre es fácil y directo hacer esta conversión entre estos registros.

GRÁFICA 3

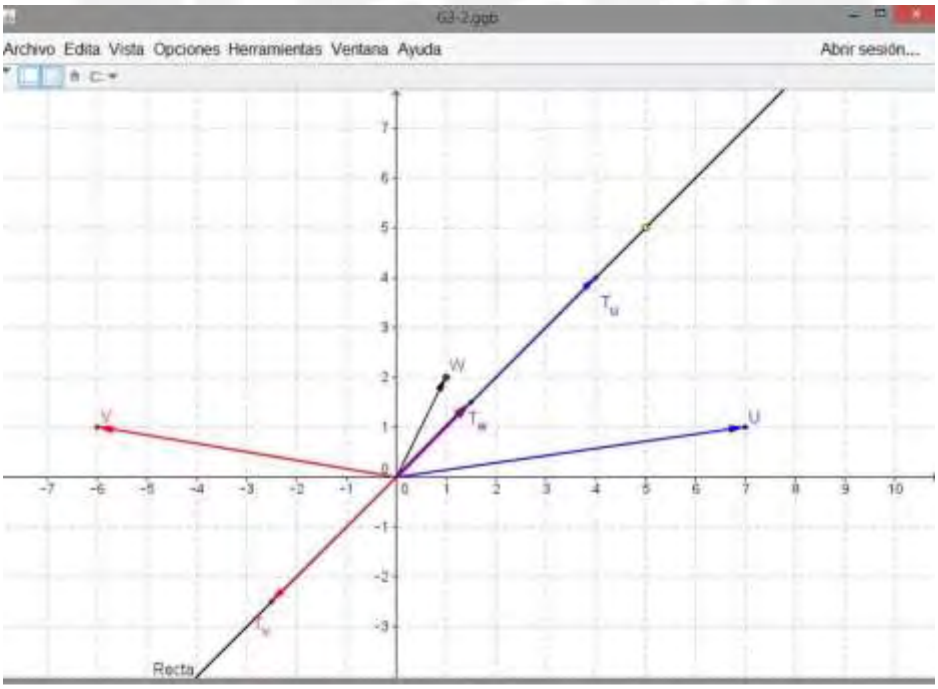


Figura 5.43: Gráfica de la función $T(x;y) = (\frac{x+y}{2};\frac{x+y}{2})$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

1. Para esta gráfica no es tan obvio observar la relación al manipular con el mouse sólo el vector $\vec{u}$, también es necesario manipular a la recta que aparece y así hallar a través de situaciones simples la relación entre $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$. Fue necesario que los profesores en formación continua hagan tratamientos en el registro gráfico de forma obligatoria. Es la gráfica de mayor dificultad dentro de esta primera actividad, pues no sólo depende de los vectores sino también de la recta para hallar la TL. En esta pregunta el 67%de los profesores en formación continua (6 de ellos) respondieron de manera correcta, hicieron buen cambio de registros, del gráfico al de lenguaje natural, y sólo dos de estos seis profesores en formación continua mencionaron exactamente la relación que se les presentó entre $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$, llegando a dar algún caso particular de esta relación entre ellos. El 11% de los profesores en formación continua (1 de ellos) prefirió abstenerse de responder y el restante 22% (2 de ellos) no muestran la relación solicitada de manera correcta, presentando respuestas de casos particulares que no se relacionan de ninguna forma con la función dada en este caso.

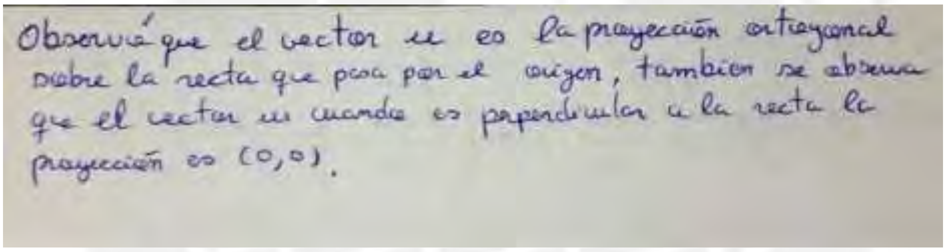

Observé que el vector u es la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por el origen, también se observa que el vector u cuando es perpendicular a la recta la proyección es (0,0).

Figura 5.44: Respuesta correcta de un alumno

2. El grado de dificultad es aún mayor que la pregunta anterior, pues aquí intervienen tres vectores ($\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{v}$) y la recta para poder hallar la relación entre las imágenes de los tres vectores mencionados. Los tratamientos en el registro gráfico hecho por los profesores en formación continua tienen su grado de dificultad, en consecuencia esta dificultad es transmitida para hacer las conversiones que parte de este registro gráfico. Para la segunda pregunta, sólo el 33% de los profesores en formación continua (3 profesores) llegaron a obtener la relación correcta entre los vectores $T(\vec{u})$, $T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$, aunque sin detallar como obtuvieron la respuesta; mientras que el 56% de profesores en formación continua (5 profesores) señalan que no tienen relación alguna o escriben alguna relación incorrecta. El 11% de profesores en formación continua (1 profesor) borra lo que inicialmente escribió y prefiere

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

abstenerse a responder. Es notorio que para esta función, el cambio de registros, del gráfico al algebraico o lenguaje natural, no es tan inmediato.

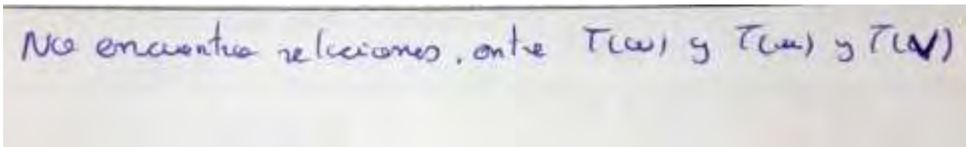


Figura 5.45: Respuesta incorrecta de un alumno

3. Con las instrucciones dadas en esta pregunta con respecto a los casos particulares de la recta, más de la mitad de profesores en formación continua logran responder de manera correcta. El software ayudó a que los propios profesores en formación continua puedan interactuar en las diferentes situaciones planteadas sobre la recta, e inducir como está definida la función en cada caso.

   Para esta tercera pregunta, como son tres casos para la recta sobre la cual se proyecta, se contará como respuesta correcta cuando se responda bien mayor o igual a 2 casos; se contará como incorrecta cuando se responda bien menor o igual a 1 caso y será abstención cuando no responda nada. Así el 56%de profesores en formación continua (5 de ellos) responde bien sólo dos casos y ningún alumno responde correctamente los tres planteados en esta pregunta. De estos cinco alumnos, cuatro de ellos responde los casos particulares $x = 0$ y $y = 0$. El 33% de profesores en formación continua (3 de ellos) responde incorrectamente, de los cuales sólo un alumno responde un caso y es cuando $y = x$. Finalmente, el 11% de profesores en formación continua (1 profesor) no responden nada. Los casos particulares para la recta donde se proyecta, hacen que el cambio de registro, del gráfico al algebraico sea inmediato, debido a que los tratamientos en el registro gráfico son menos complicados.

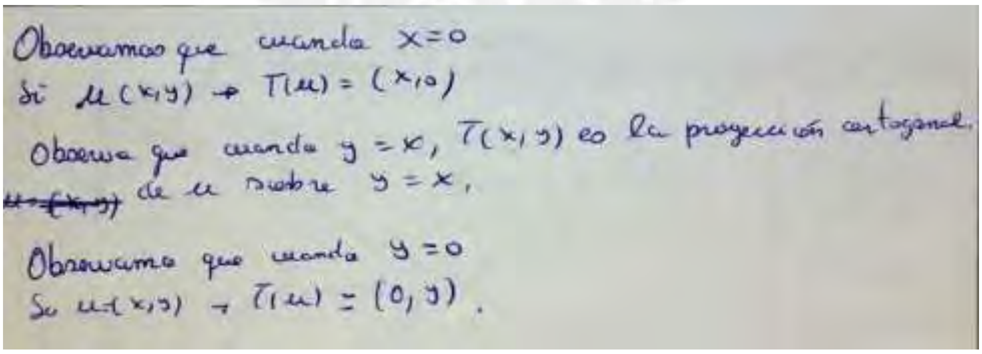


Figura 5.46: Respuesta incorrecta de un alumno

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

4. En esta pregunta los profesores en formación continua se centran en el registro par ordenado, dejando de lado otros registros. Son muy pocos los que justifican su respuesta por la dificultad en la definición de esta TL o por los tratamientos en este registro. Para esta cuarta pregunta el 67% de los profesores en formación continua (6 profesores) llega a responder de manera correcta, pero sólo dos profesores justifican su resultado. El 11% de los profesores en formación continua (1 de ellos) responde de manera incoherente para la pregunta propuesta. Y el 22% de los profesores en formación continua (2 de ellos) no responden. Cabe recordar que la pregunta es para los casos en que la recta donde se proyecta es $x = 0$, $y = 0$ y $y = x$. Por otro lado, la falta de justificación pudo ser porque fue la última pregunta y la actividad finalizaba, sin embargo un alumno justificó de manera general.

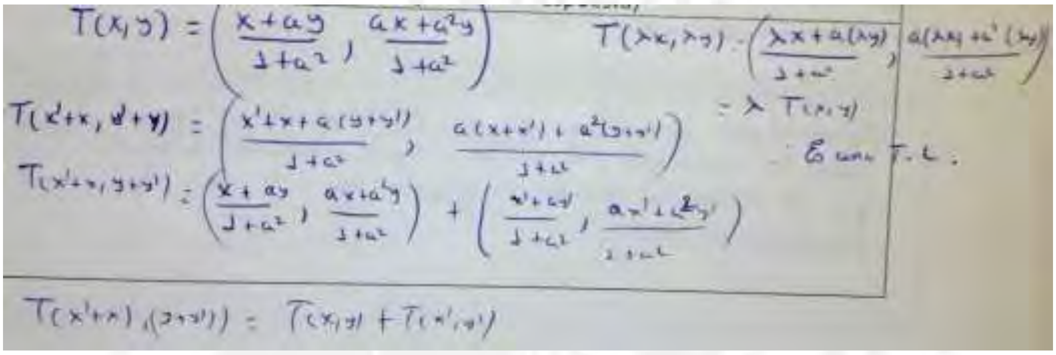


Figura 5.47: Respuesta correcta de un alumno

Cuadro resumen de resultados de los alumnos enfrentando la gráfica 3, en esta primera actividad.

Pregunta	% Correctas	% Incorrectas	% Abstenciones	% TOTAL
1	67	22	11	100
2	33	56	11	100
3	56	33	11	100
4	67	11	22	100

Ahora, presentaremos el desarrollo de 3 alumnos de los que analizaremos detalladamente sus respuestas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- Alumno 1

  Para la **primera pregunta**, el alumno 1 hizo el desarrollo que mostramos a continuación:

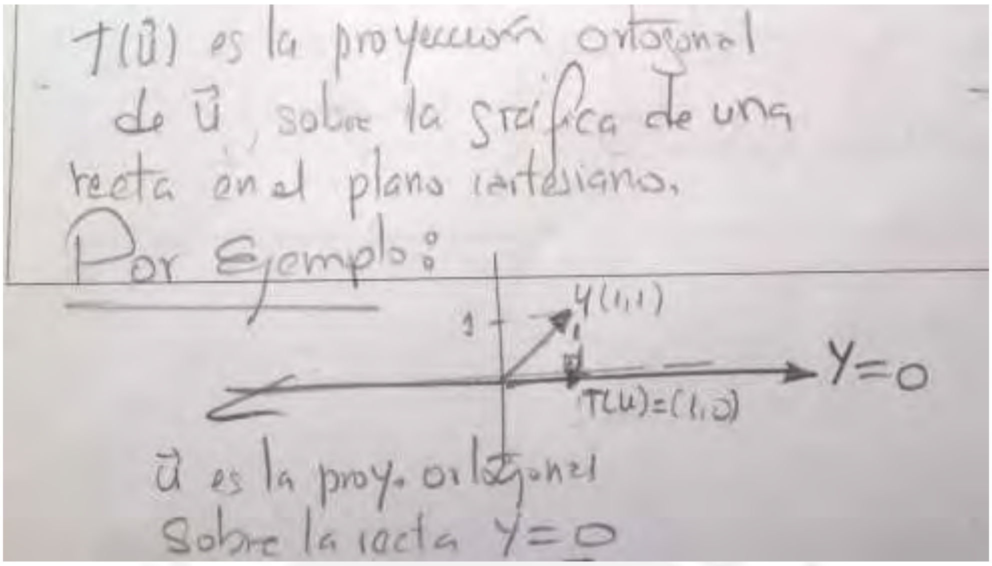


Figura 5.48: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 1

El alumno afirma que $T(\vec{u})$ es la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre una recta en el plano cartesiano, lo cual es correcto y ofrece un ejemplo particular para mostrar su afirmación. Desde el punto de vista de la teoría de registros, podemos decir que el alumno 1 hace tratamientos en el registro gráfico a través del GeoGebra, para que concluya que T es la transformación proyección ortogonal. Por otro lado, también observamos que el alumno hace una buena conversión, del registro gráfico al registro algebraico, para mostrar el ejemplo de manera correcta.

Para la **segunda pregunta**, el alumno 1 responde lo siguiente:

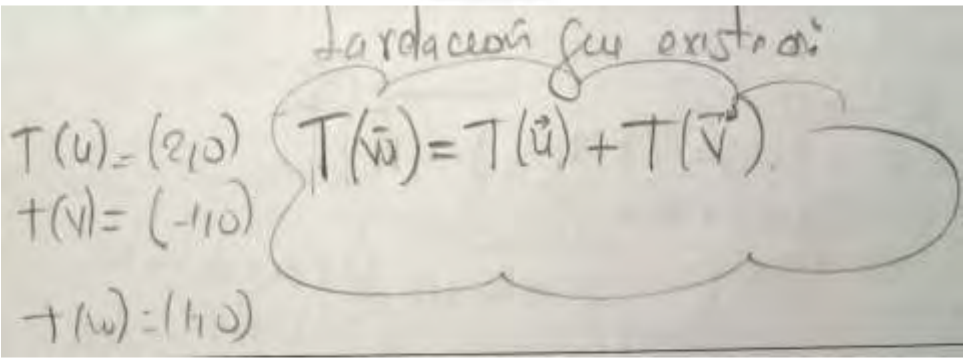


Figura 5.49: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Escribe su respuesta $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ la cual es correcta, y notamos que el alumno ha empleado el caso particular $T(\vec{u}) = (2;0)$, $T(\vec{v}) = (-1;0)$ y $T(\vec{w}) = (1;0)$ (proyección sobre el eje X). Podemos decir que el alumno hace bien el cambio de registros, del gráfico al algebraico, para los vectores mencionados anteriormente, y también posibles tratamientos en el registro gráfico a través del software GeoGebra. Concluimos que los tratamientos en el registro gráfico inducen al alumno 1 a hallar la relación buscada.

Para la **tercera pregunta**, el alumno 1 muestra de manera directa sus respuestas:

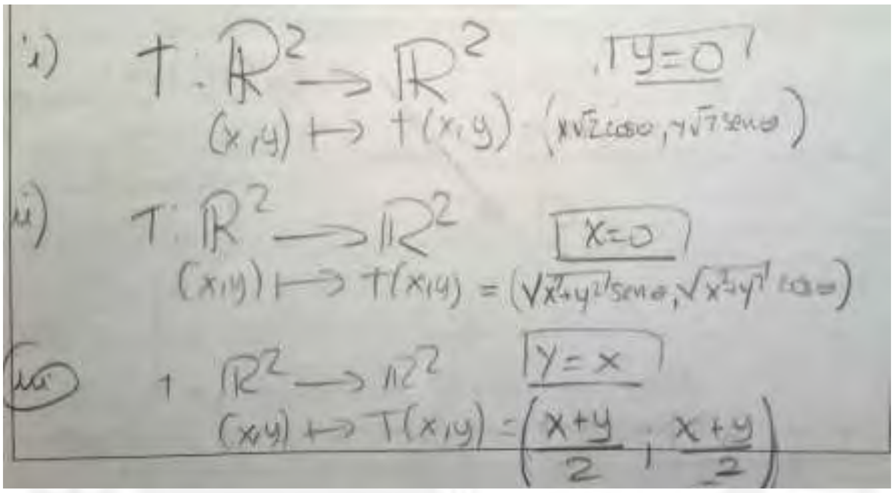


Figura 5.50: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 1

El único caso en que la función está bien definida es para la recta $y = x$. Por otro lado, notamos que el alumno realiza de manera incorrecta cambio de registros (conversiones), del registro gráfico al registro algebraico, para cada caso en que se pide definir la función T cuando la recta es $x = 0$ y $y = 0$, esto puede ser debido a que no hace los tratamientos correctos en el registro gráfico.

Para la **cuarta pregunta**, el alumno 1 escribió su respuesta de la siguiente forma:

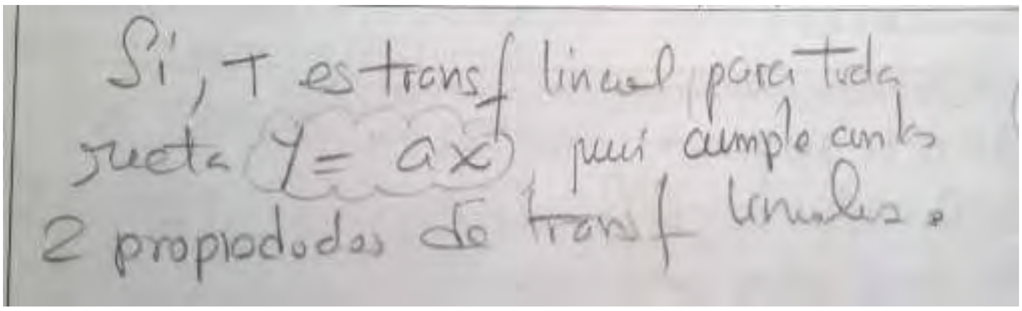


Figura 5.51: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Afirmando de manera directa y en forma general que *T si es una transformación lineal para toda recta* $y = \alpha . x$, aunque no justifica nada, es correcto. Suponiendo que le es complicado demostrar esto, cuando la recta es $y = 0$ y cuando la recta es $x = 0$, debido a la manera equivocada que halló la función T en la pregunta 3, concluimos que el alumno 2 no hace bien las conversiones y tratamientos necesarios para justificar que T es transformación lineal, para los tres casos de la recta donde se proyecta.

- Alumno 2

Para la **primera pregunta**, el alumno 2 desarrolló como se muestra a continuación:

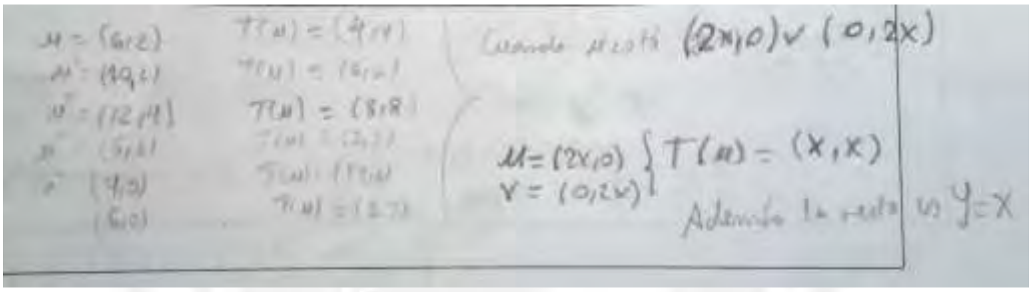


Figura 5.52: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 2

El alumno hace varias conversiones para cada vector con su respectiva imagen, las que escribe al lado izquierdo de su desarrollo. Luego al querer generalizar supone que para $\vec{u} = (2x; 0)$ o $(0; 2x)$, concluye que $T(\vec{u}) = (x; x)$ cuando la recta donde se proyecta es y = x, lo cual es cierto, pero sólo cuando los vectores son de la forma $\vec{u} = (2x; 0)$ o $(0; 2x)$. Podemos decir que el alumno hace bien el cambio de registros, del gráfico al algebraico, pero sólo en el caso que él señala como deben ser los vectores $\vec{u}$ del dominio. Por otro lado, el alumno 2 no hace bien los tratamientos en el registro gráfico para deducir la relación solicitada entre los vectores $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$.

Para la **segunda pregunta**, el alumno 2 inicialmente empieza intentando escribir la respuesta, pero luego se desanima y prefiere abstenerse de escribir algo que no está seguro posiblemente.

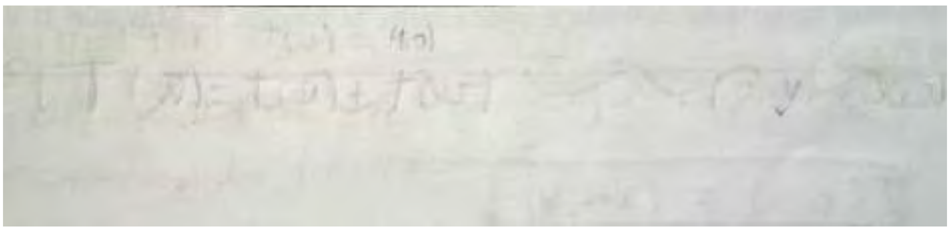


Figura 5.53: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 2

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Podemos decir que el alumno no puede hacer las conversiones, del registro gráfico al registro algebraico, y los tratamientos en estos registros.

Para la **tercera pregunta**, el alumno 2 hizo el siguiente desarrollo:

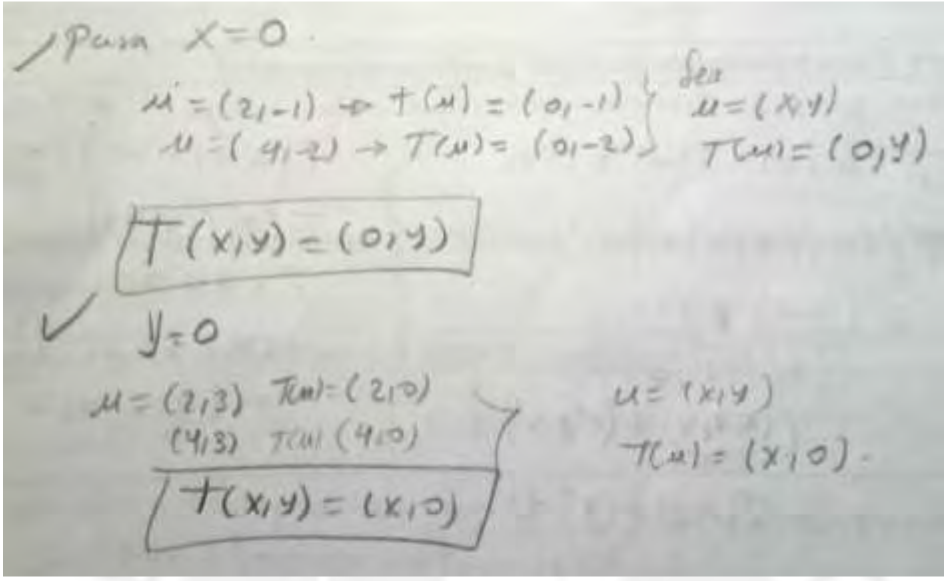


Figura 5.54: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 2

Donde podemos ver que inicialmente hace conversiones, del registro gráfico al registro algebraico, en dos casos particulares, para luego inducir hacia la definición para el caso en que la recta sobre la cual se proyecta es $x = 0$, de igual manera hace el desarrollo para el caso en que la recta sea $y = 0$, los cuales son resultados correctos. Según la teoría de registros, el alumno 2 hace bien los cambios de registros y los tratamientos, tanto en el registro gráfico como en el registro algebraico, aunque faltó el desarrollo para el caso en que la recta sea $y = x$, el cual es más complicado.

Para la **cuarta pregunta**, el alumno 2 respondió de la siguiente forma:

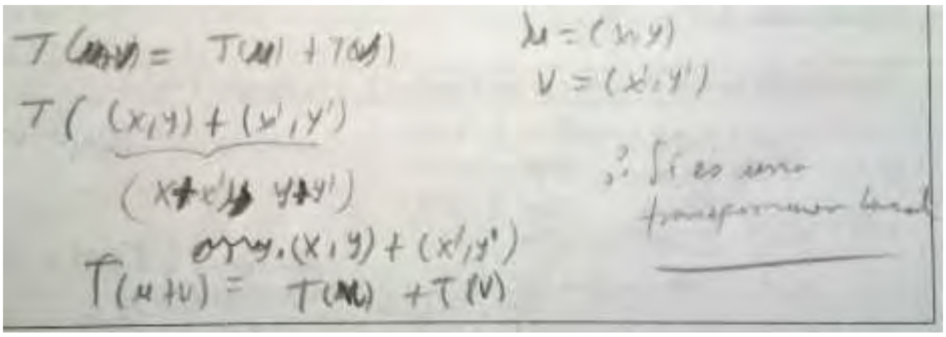


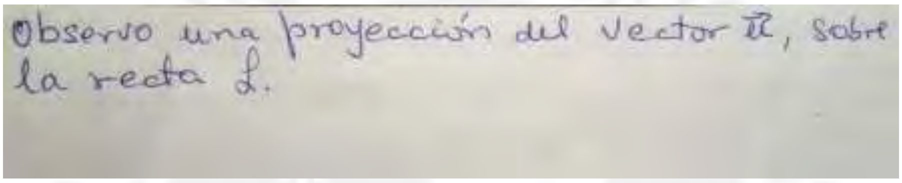
Figura 5.55: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 2

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

El alumno quiere hacer la justificación $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u})+T(\vec{v})$ pero sin usar alguna definición específica y tampoco las definiciones que halló en la pregunta anterior, con lo cual hace tratamientos incorrectos. Sin embargo, llega a concluir de manera fortuita que T es una transformación lineal, lo cual es correcto. Finalmente, decimos que el alumno 2 no hace los tratamientos correctos en el registro algebraico, para que con las definiciones de la pregunta anterior pueda justificar satisfactoriamente su respuesta.

- Alumno 3

Para la **primera pregunta**, el alumno 3 hizo el desarrollo que mostramos a continuación:

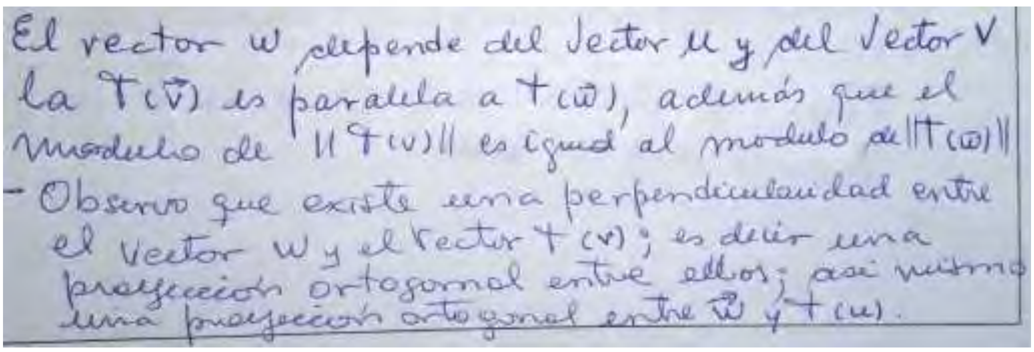


Observo una proyección del vector $\vec{u}$, sobre la recta $\mathcal{L}$.

Figura 5.56: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 3

Hace una buena conversión, entre el registro gráfico y el lenguaje natural, describiendo bien la relación entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$, aunque no señala con exactitud a que se refiere con *una proyección*. Según la teoría de registros se diría que el alumno 3 hace una conversión correcta y para llegar a esto suponemos que hizo varios tratamientos en el registro gráfico usando el software GeoGebra.

Para la **segunda pregunta**, el alumno 3 usó el registro de lenguaje natural, con lo que debió describir la relación pedida. Su respuesta se muestra a continuación:



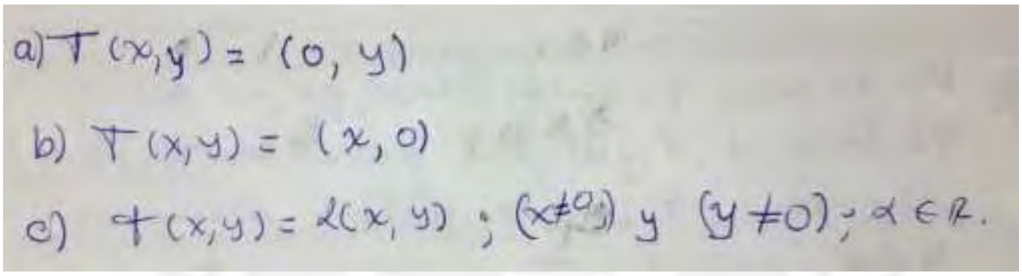
El vector w depende del vector u y del vector v
la $T(\vec{v})$ es paralela a $T(\vec{w})$, además que el
modulo de $\|T(v)\|$ es igual al modulo de $\|T(\vec{w})\|$
- Observo que existe una perpendicularidad entre
el vector w y el vector $T(v)$; es decir una
proyección ortogonal entre ellos; así mismo
una proyección ortogonal entre $\vec{w}$ y $T(u)$.

Figura 5.57: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 3

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

El alumno usa en forma adecuada el registro de lenguaje natural, pero comete errores, por ejemplo: *el módulo de* $T(\vec{v})$ *es igual al módulo de* $T(\vec{w})$ y toda su descripción no ayuda a obtener la relación solicitada en esta pregunta. Concluimos que no hace tratamientos correctos en el registro gráfico, para luego hacer la conversión al registro algebraico o lenguaje natural, y mostrar que la relación existente entre los vectores de las imágenes es $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, cuya respuesta está más ligada a la pregunta 1.

Para la **tercera pregunta**, el alumno 3 escribió de manera directa lo siguiente:


a) $T(x,y) = (0, y)$

b) $T(x,y) = (x, 0)$

c) $T(x,y) = \alpha(x, y)$; $(x \neq 0)$ y $(y \neq 0)$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Figura 5.58: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 3

Vemos que las respuestas de los dos primeros casos $T(x;y) = (0;y)$ y $T(x;y) = (x;0)$ son las correctas, pero falta detallar a que caso pertenece, porque puede ocurrir el mismo error que mostramos en la imagen 5.38. Para el último caso, cuando la recta donde se proyecta es y = x, el alumno responde en forma incorrecta definiendo a la función como $T(x;y) = \alpha(x;y)$ donde $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Podemos decir que el alumno 3 hace bien los tratamientos en el registro gráfico para los dos primeros casos, luego a través de la conversión, del registro gráfico al registro par ordenado, define a la función correctamente.

Para la **cuarta pregunta**, el alumno 3 respondió de la siguiente manera:

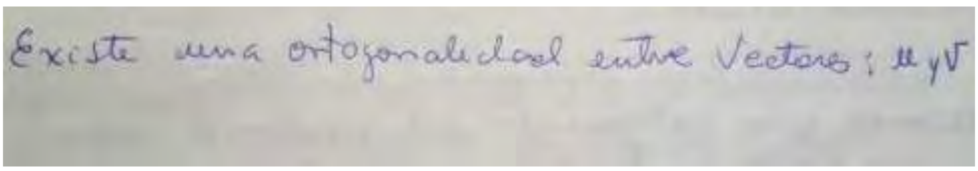

Existe una ortogonalidad entre Vectores : u y V

Figura 5.59: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 3

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Observamos que su respuesta no tiene ninguna relación con lo que se le pide responder en esta pregunta. Concluimos que el alumno 3 no realiza correctamente los tratamientos y conversiones necesarias para cada caso, es decir, no hay una buena coordinación entre registros y así poder justificar que T es una transformación lineal.

5.2.2. Análisis de la Actividad 2

Para esta segunda actividad, analizaremos las soluciones de los profesores en formación continua para cada gráfica, enfrentando las preguntas que constituyen esta actividad.

Al final del análisis de cada gráfica, presentaremos un cuadro que resuma los resultados de los profesores en formación continua en esta actividad, recordando que fueron 7 profesores en formación continua los que realizaron esta segunda actividad.

GRÁFICA 1

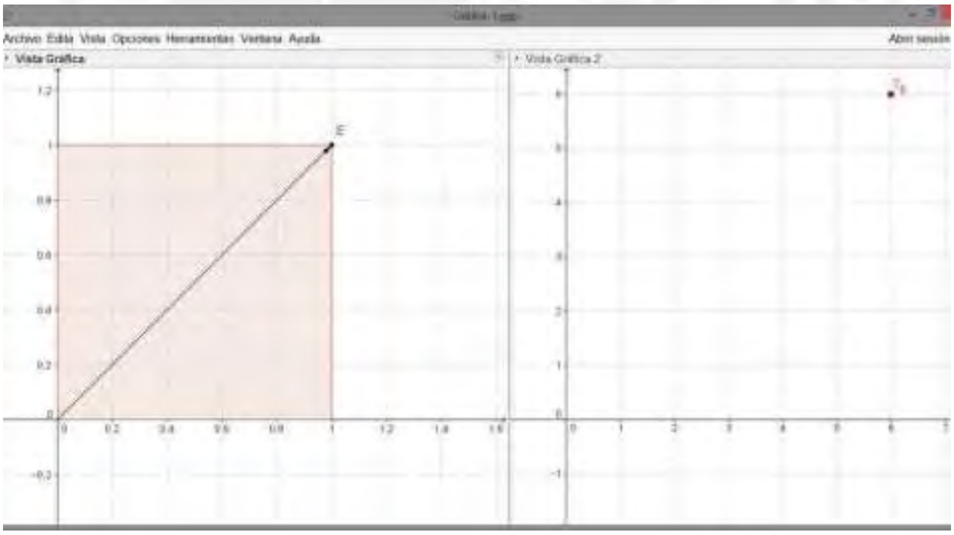


Figura 5.60: Gráfica de la transformación $T(x;y) = (5x + y;\ x + 5y)$

1. En esta actividad se señaló previamente que T es una TL, por ello fue más simple para los profesores en formación continua responder. Para la primera parte, los profesores en formación continua mostraron las respuestas explícitamente llegando a usar en forma correcta el software, es decir que efectúan bien la conversión de registros, del gráfico al algebraico, y para la última parte todos desarrollan

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

correctamente la conversión de registros, del algebraico al matricial. La segunda parte, sólo cuatro alumnos comentan su respuesta, mientras que los otros tres alumnos no describen nada. Para esta primera pregunta, observamos que el 100% de los profesores en formación continua (7 profesores) respondieron en forma correcta la primera y tercera parte, es decir, la primera y última pregunta que conforma este primer ítem.

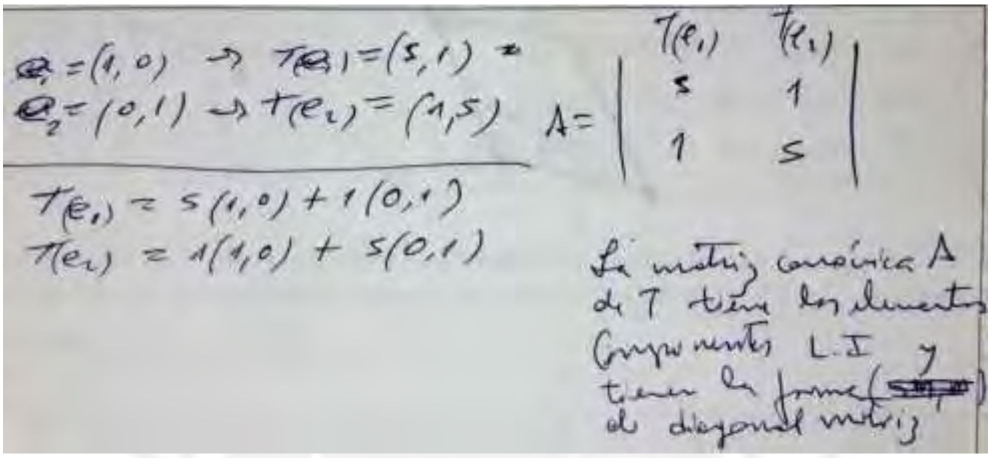


Figura 5.61: Respuesta correcta de un alumno

2. Esta pregunta indujo a los profesores en formación continua a hacer necesariamente conversiones entre los registros par ordenado y matricial, y a la vez desarrollar los tratamientos en cada registro, aunque no todos lo lograron. Para esta pregunta el 71% de los profesores en formación continua (5 profesores) respondieron de manera correcta, llegando a hacer un buen tratamiento en el registro matricial y algebraico, mostrando en primer lugar la definición de la transformación lineal $T(x; y) = (5x + y;\ x + 5y)$ y luego a través de la conversión entre estos registros puedan decir que es correcta la igualdad presentada en esta pregunta. El otro 29% hizo su desarrollo en forma incorrecta.

   A continuación presentamos la respuesta de un profesor en formación continua, el cual pasa desapercibido la conversión del registro matricial al algebraico y concluye afirmando que la igualdad

$$T(x, y) = A\binom{x}{y}$$

   es correcta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

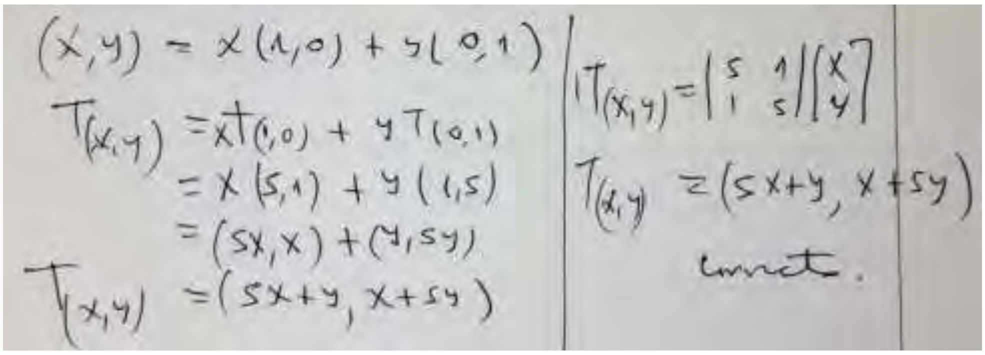


Figura 5.62: Respuesta correcta de un alumno

3. Una de las primeras dificultades en esta pregunta para los profesores en formación continua es tener claro la definición de núcleo e imagen de la TL. Fue crucial para ellos responder correctamente la pregunta anterior para lograr la respuesta de esta pregunta y fue necesario hacer bien los tratamientos del registro par ordenado.

   Para esta tercera pregunta, el 57% de profesores en formación continua (4de ellos) llegan a desarrollar correctamente lo pedido, desarrollando un buen tratamiento en el registro algebraico, observando que estos alumnos manipulan bien las definiciones que se les solicitó. Mientras que el 43% de profesores en formación continua restante, también recuerda la definición de imagen y núcleo de una transformación lineal, pero no hacen uso correcto de tratamientos en el registro algebraico, lo cual les impide llegar a la respuesta correcta.

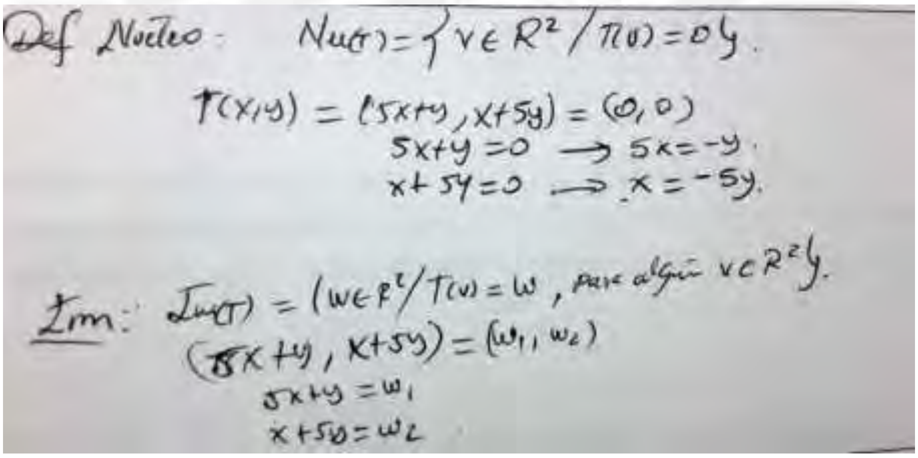


Figura 5.63: Respuesta incorrecta o incompleta de un alumno

4. Aquí ocurrió cierta confusión en la mayoría de los profesores en formación continua al olvidar que el dominio de la TL estaba gráficamente restringido a la frontera del cuadrado de una unidad de lado. Aquí el software ayudó de manera significativa para realizar las gráficas pedidas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Para esta cuarta pregunta, el 57% de profesores en formación continua (4 de ellos) desarrollan correctamente el cambio de registros, del algebraico al gráfico, y grafica en forma correcta la imagen y núcleo de la transformación. Suponemos que estos alumnos efectuaron su desarrollo después de observar en el GeoGebra el movimiento tanto del dominio como de la imagen, concluyendo que hacen bien los tratamientos en este registro. El 29% de los profesores en formación continua (2 profesores) sólo llegó a graficar apenas los elementos que les pedían y un 14% de profesores en formación continua (1 profesor) se abstiene de hacer sus gráficas.

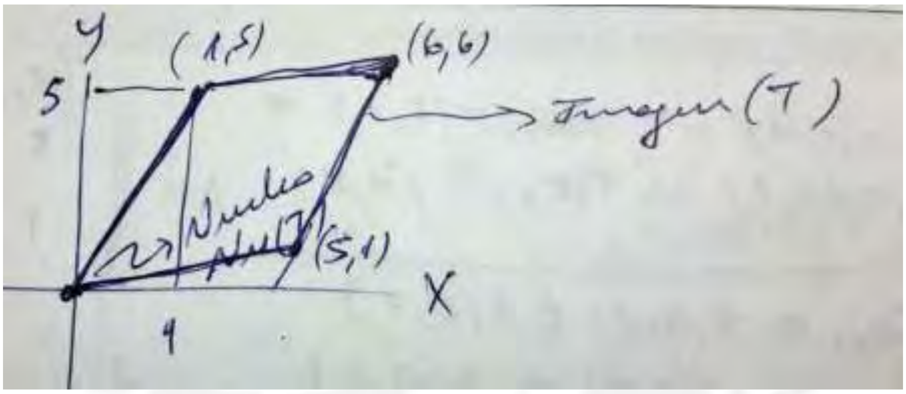


Figura 5.64: Gráfica correcta de un alumno

A continuación presentamos el cuadro resumen de resultados de los alumnos en la gráfica 1. En esta segunda actividad asistieron sólo 7 alumnos.

Pregunta	% Correctas	% Incorrectas	% Abstenciones	% TOTAL
1	100	0	0	100
2	71	29	0	100
3	57	43	0	100
4	57	29	14	100

Ahora presentaremos el desarrollo de 3 alumnos que confirmen nuestro primer análisis general de la gráfica 1.

- Alumno 1

  Para la **primera pregunta**, notamos que el alumno 1 hizo lo siguiente:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

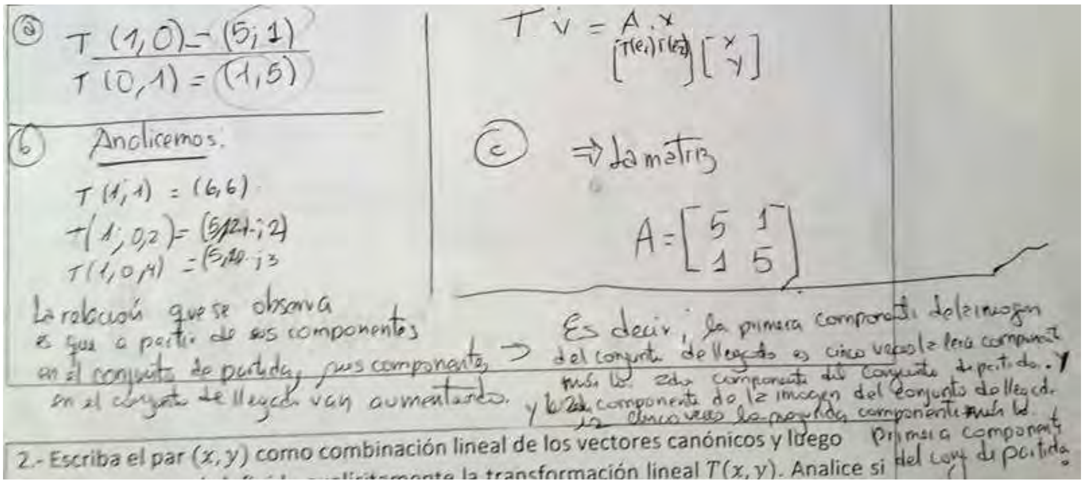


Figura 5.65: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 1

Logró hacer bien el cambio de registro, del gráfico al algebraico, para poder hallar las imágenes de los vectores canónicos.

Luego usa el registro de lenguaje natural para describir la definición de la transformación: *la primera componente de la imagen es cinco veces la primera componente más la segunda componente del conjunto de partida*, análogamente lo hace para la segunda componente de la imagen y lo hace bien. Tiene claro cómo está formada la matriz A de T relativa a la base canónica y para ello usa la conversión del registro algebraico hacia el registro matricial, pues usa las imágenes de los vectores canónicos.

Para la **segunda pregunta** el alumno 1 hace los tratamientos correctos y necesarios dentro del registro matricial y par ordeando, para que luego pueda comparar sus resultados y confirmar lo señalado por la igualdad final.

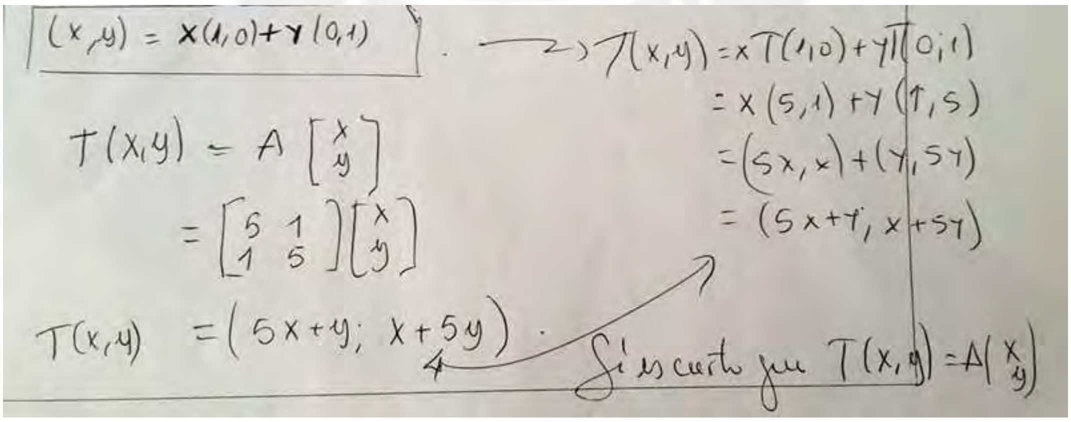


Figura 5.66: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Para la **tercera pregunta** el alumno 1 tuvo claro la definición de imagen y núcleo:

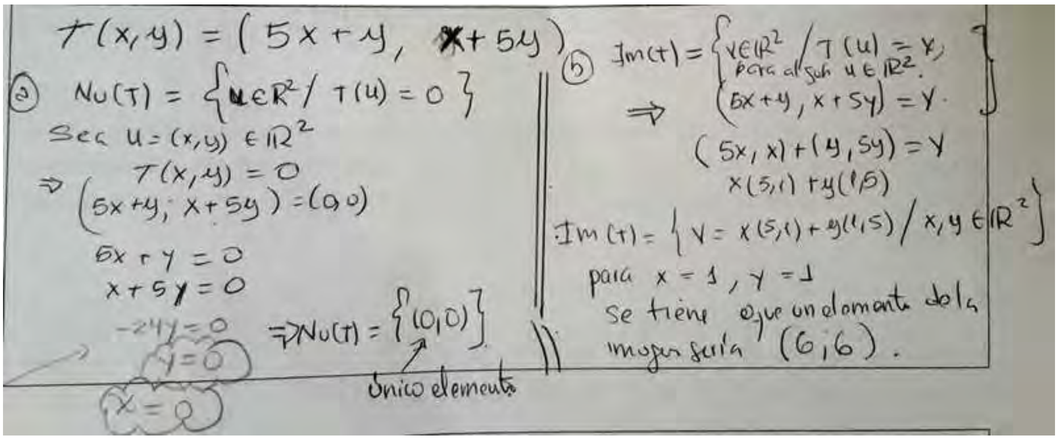


Figura 5.67: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 1

Hace tratamientos correctos en el registro algebraico para ambas definiciones, finalmente llega a obtener las respuestas correctas y presenta un elemento de cada sub espacio como se había pedido. Aquí los profesores en formación continua excluyen el uso del software GeoGebra, pero pudieron usarlo para comprobar sus resultados.

Para la **cuarta pregunta** el alumno 1 tuvo que hacer el cambio de registros, del algebraico al gráfico para poder conseguir lo solicitado y también hizo tratamientos en el registro gráfico, a través del GeoGebra para tener con mayor facilidad la gráfica de la imagen.

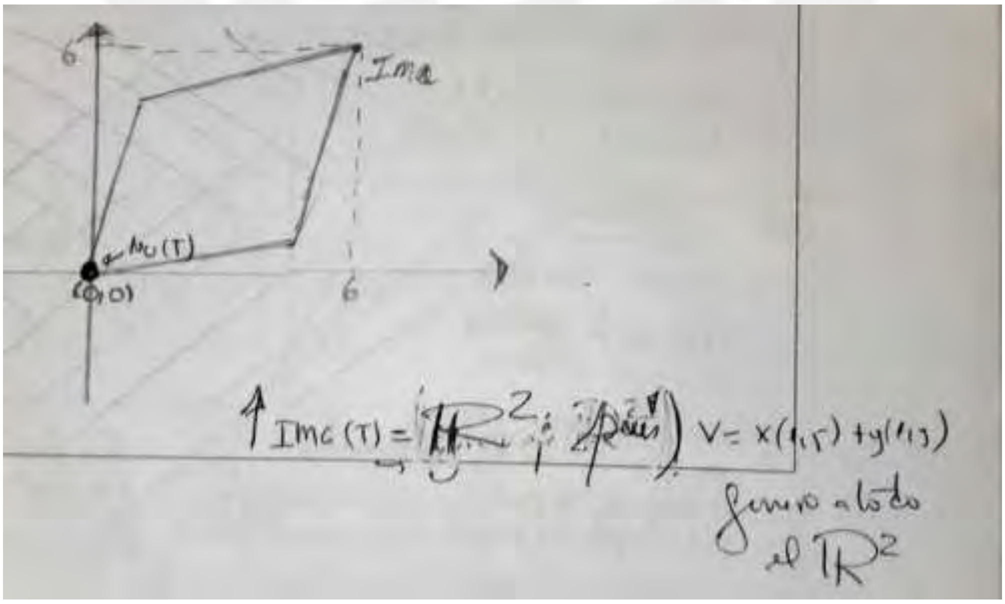


Figura 5.68: Respuesta de la pregunta 4 del alumno 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Observando bien la imagen, podemos notar que el alumno 1 se da cuenta que la imagen de T forma todo el plano $\mathbb{R}^2$, pero como nuestro dominio está restringido a la frontera del cuadrado de longitud una unidad, este forma el rombo, como muestra la gráfica del alumno. Aquí una vez más el software GeoGebra le permitió al alumno 1 visualizar que un cuadrado puede ser transformado en un paralelogramo mediante la transformación T. Pero a la vez tomando sólo el subconjunto del dominio en esta gráfica, la visualización de la imagen de toda la TL está siendo limitada por el software, siendo ésta todo $\mathbb{R}^2$el cual debe ser complementado con un desarrollo analítico.

- Alumno 2

  Para la **primera pregunta** el alumno 2 escribió lo siguiente:

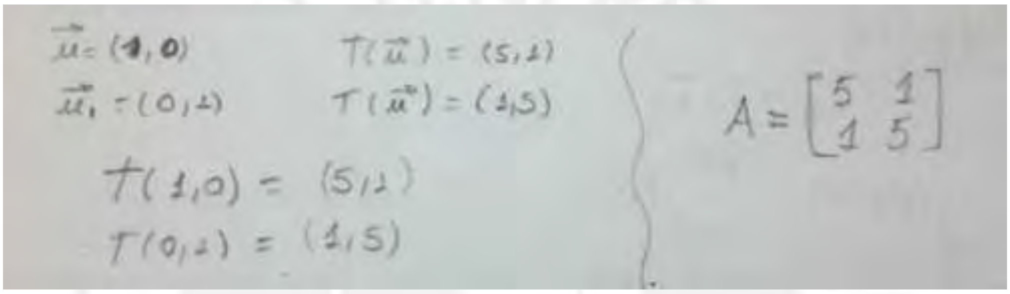


Figura 5.69: Respuesta de la pregunta 1 del alumno 2

El alumno 2 hace la conversión, del registro gráfico al registro algebraico de manera correcta y observamos que sabe cómo está formada la matriz relativa a la base canónica, y es entonces que realiza la conversión del registro par ordenado al registro matricial, en el momento que usa los pares ordenados como vectores columna para la matriz A de T relativa a la base canónica.

Para la **segunda pregunta** el alumno 2 hace bien los tratamientos en el registro matricial, para obtener la igualdad solicitada. Posteriormente halla la transformación en su registro par ordenado, para luego comparar con lo obtenido en registro matricial. Podemos decir que implícitamente se hace la conversión de los registros par ordenado y matricial, para hacer dicha comparación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

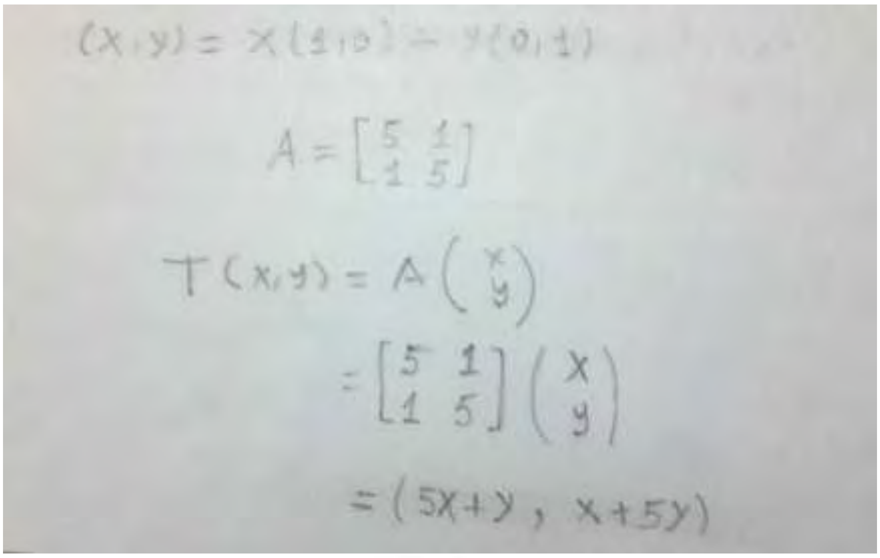


Figura 5.70: Respuesta de la pregunta 2 del alumno 2

Para la **tercera pregunta** el alumno 2 hizo lo siguiente:

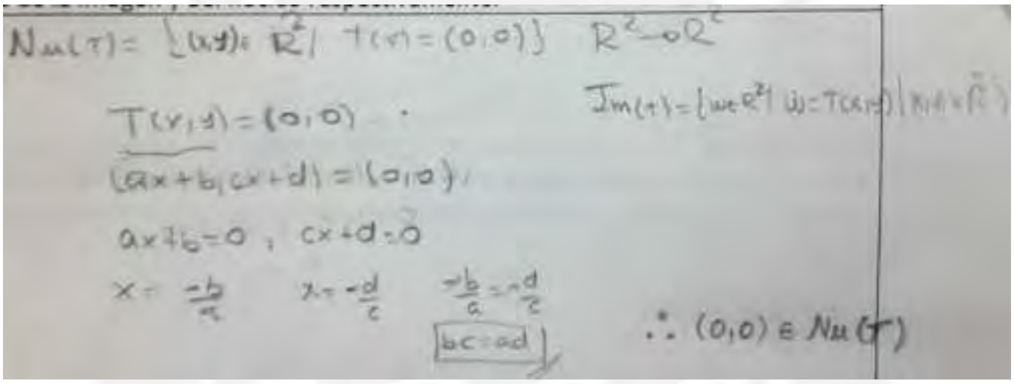


Figura 5.71: Respuesta de la pregunta 3 del alumno 2

Este alumno, recuerda las definiciones de núcleo e imagen, pero no realiza los tratamientos adecuados dentro del registro algebraico y no llega a obtener conclusiones para obtener explícitamente el núcleo e imagen de T. Finalmente sólo llega a dar un elemento del núcleo el $(0;0)$, observando la complejidad que produjo para este alumno 2 las definiciones de núcleo e imagen de T.

Para la **cuarta pregunta**, el alumno 2 sólo llega a graficar lo siguiente:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

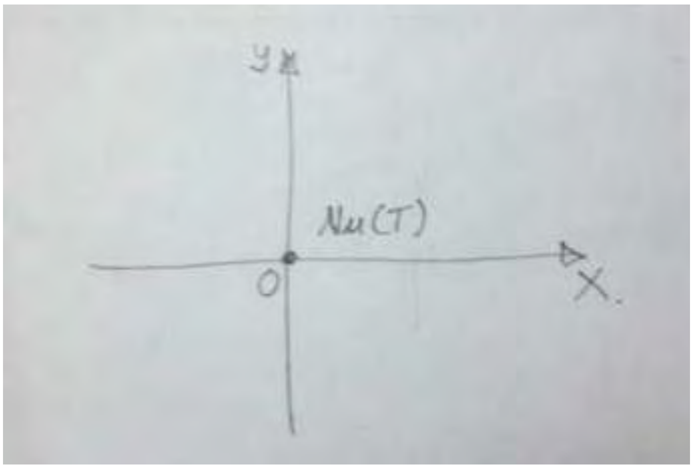
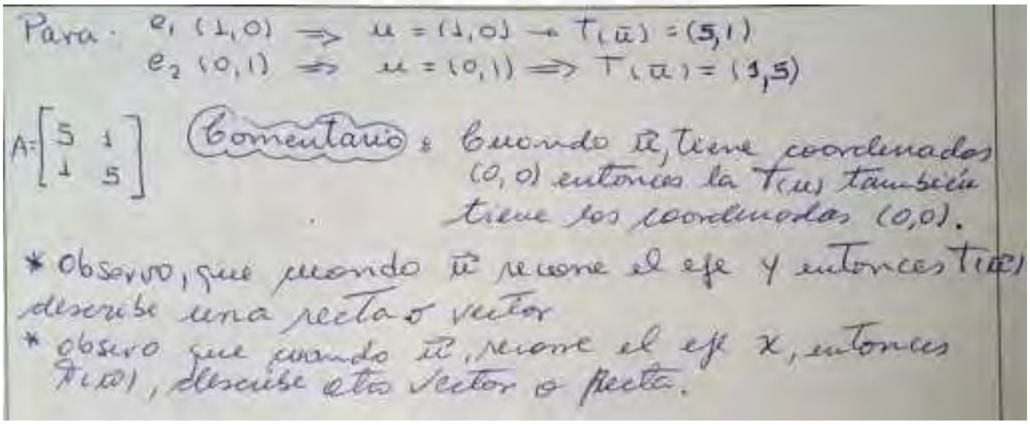


Figura 5.72: Gráfica de la pregunta 4 del alumno 2

Donde observamos que al no obtener solución en la pregunta anterior, el alumno 2 no puede hacer la conversión, del registro algebraico al registro gráfico. Sólo grafica el punto $(0;0)$, el cual es el único elemento del núcleo. Aquí el alumno no aprovecha el software como herramienta para que le ayude a graficar la imagen de T.

- Alumno 3

  Para la **primera pregunta**, el alumno 3 inicia desarrollando correctamente la conversión del registro gráfico al registro par ordenado y luego halla las imágenes de los vectores canónicos. Usa el registro de lenguaje natural para describir características que observa entre algún elemento del dominio y su imagen. Finalmente, presenta la matriz A de T sin mencionar o mostrar algún tratamiento o conversión entre registros. Mostraremos a continuación su desarrollo:



Para · e_1 (1,0) ⇒ $u = (1,0) \rightarrow T(\bar{u}) = (5,1)$
e_2 (0,1) ⇒ $u = (0,1) \Rightarrow T(\bar{u}) = (1,5)$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Comentario: Cuando $\bar{u}$, tiene coordenadas (0,0) entonces la T(u) también tiene las coordenadas (0,0).

* observo, que cuando $\bar{u}$ recorre el eje y entonces $T(\bar{u})$ describe una recta o vector

* observo que cuando $\bar{u}$, recorre el eje x, entonces $T(\bar{u})$, describe otro vector o recta.

Figura 5.73: Grafica de la pregunta 1 del alumno 3

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Para la **segunda pregunta**, el alumno 3 hizo lo siguiente:

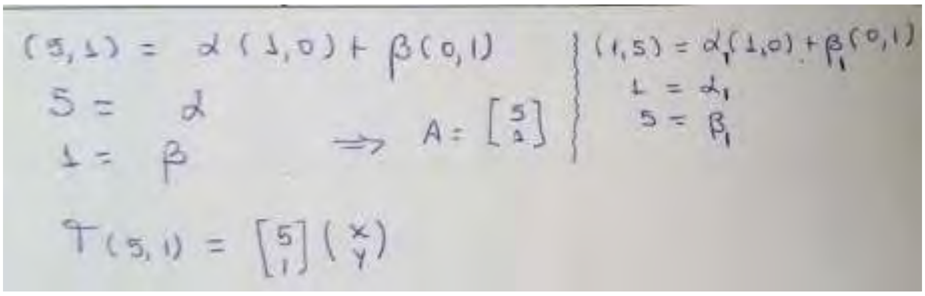

$(5,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$
$5 = \alpha$
$1 = \beta$ $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
$(1,5) = \alpha_1(1,0) + \beta_1(0,1)$
$1 = \alpha_1$
$5 = \beta_1$
$T(5,1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Figura 5.74: Gráfica de la pregunta 2 del alumno 3

Todo el desarrollo que hace es incorrecto. El alumno desarrolla tratamientos para mostrar las imágenes de los vectores canónicos como combinación lineal de vectores canónicos, redefiniendo a la matriz A como una matriz columna, lo cual no es correcto. No llega a definir explícitamente la TL y tampoco halla la matriz relativa a la base canónica.

Para la **tercera pregunta**, el alumno 3 desarrolló:

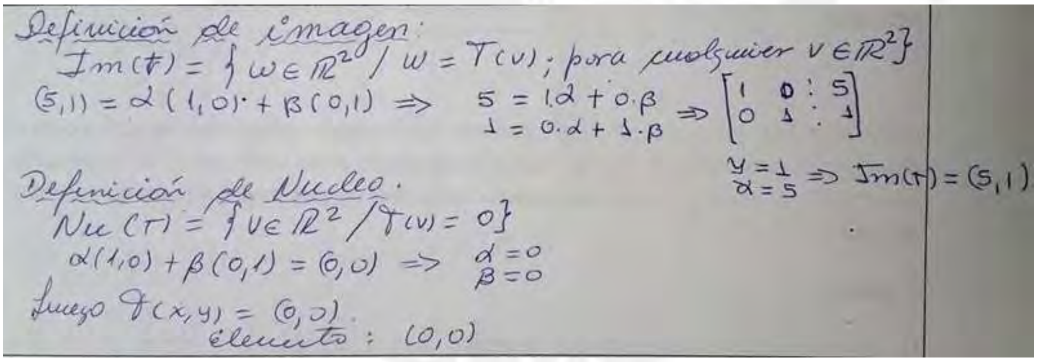

Definición de imagen:
$Im(T) = \{ w \in \mathbb{R}^2 / w = T(v) ; \text{ para cualquier } v \in \mathbb{R}^2 \}$
$(5,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \begin{matrix} 5 = 1\alpha + 0\beta \\ 1 = 0\alpha + 1\beta \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}\right]$
$\begin{matrix} y = 1 \\ \alpha = 5 \end{matrix} \Rightarrow Im(T) = (5,1)$
Definición de Nucleo.
$Nu(T) = \{ v \in \mathbb{R}^2 / T(v) = 0 \}$
$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}$
Luego $T(x,y) = (0,0)$.
elemento: $(0,0)$

Figura 5.75: Gráfica de la pregunta 3 del alumno 3

Notamos que recuerda el concepto de núcleo e imagen, pero claramente se observa que no sabe cómo determinarlos, pues parte de igualdades sin sentido para esta parte de la actividad. Concluimos que no hace los tratamientos adecuados y no es posible analizar conversiones en este caso, suponiendo que este alumno 3 no interiorizo o se apropió de estas definiciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

Para la **cuarta pregunta**, el alumno 3 arrastra los errores cometidos de la pregunta anterior y sólo se limita a hacer la conversión, del registro algebraico al registro gráfico, de los elementos hallados:

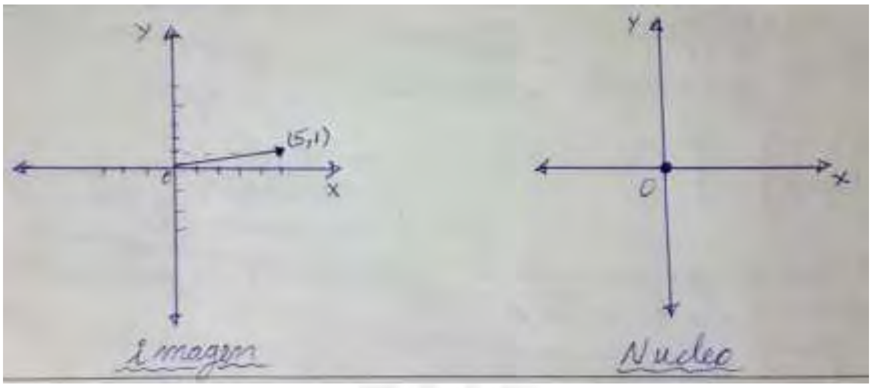


Figura 5.76: Gráfica de la pregunta 4 del alumno 3

GRÁFICA 2

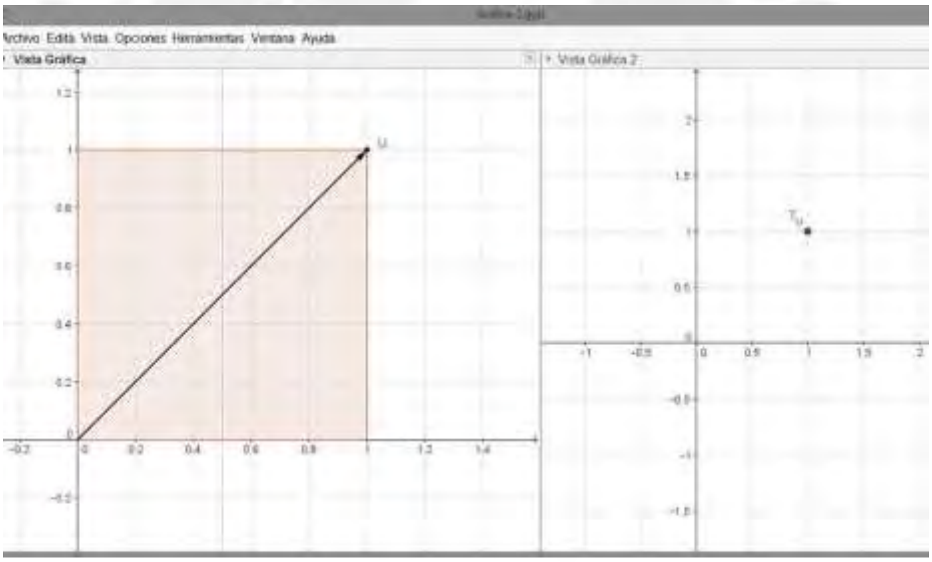


Figura 5.77: Gráfica de la transformación $T(x; y) = (2x - y;\ 2x - y)$

1. En esta primera pregunta todos los profesores en formación continua responden, aunque para algunos de ellos fue complicado hallar la relación entre $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ para poder comentarlo. Los profesores en formación continua llegan a desarrollar bien lo pedido, haciendo una buena conversión entre los registros gráfico y par ordenado, para que en el registro de lenguaje natural algunos comenten algunas características que observan o del comportamiento geométrico que observan mediante la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

manipulación del vector con el software. También mencionamos que todos los alumnos llegan a mostrar la matriz A relativa a la base canónica.

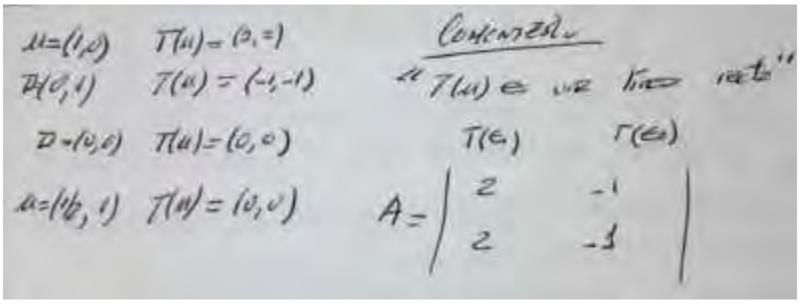


Figura 5.78: Respuesta correcta de un alumno

2. Los profesores en formación continua hacen el análisis pedido, usando tratamientos dentro del registro algebraico y el registro matricial. Los alumnos mostraron la definición de la transformación lineal $T(x; y) = (2x - y;\ 2x - y)$, luego a través de la conversión entre el registro algebraico y gráfico, concluyen que la igualdad es correcta. Para esta segunda pregunta, el 71% de los profesores en formación continua (5 profesores) respondieron de manera correcta. El 29% restante (2 profesores) hizo su desarrollo incorrecto, debido a tratamientos incoherentes.

3. Hay profesores en formación continua que no recuerdan los conceptos de imagen y núcleo de una TL, es por ello que se les complicó toda esta pregunta ya que es lo primero que necesitan para hacer cualquier tratamiento necesario. Aquí el 57% de los profesores en formación continua (4 profesores) responde de manera satisfactoria, haciendo uso de tratamientos en el registro algebraico con el que trabajan, observando que ellos tienen un buen manejo de la definición, esto les facilita hallar lo pedido y dar un ejemplo de lo que obtienen. El 43% de los profesores en formación continua que quedan o no tienen clara la definición de imagen y núcleo o no hacen los tratamientos correctos, como mostramos a continuación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

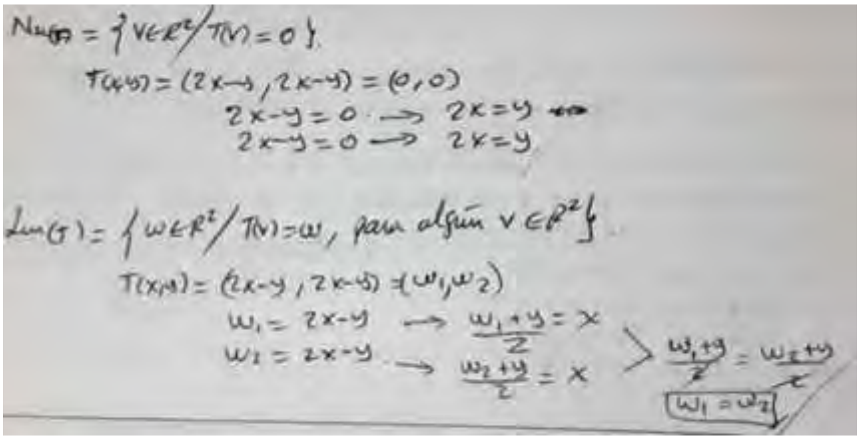


Figura 5.79: Respuesta incompleta de un alumno

4. Se observó la dificultad que tienen algunos profesores en formación continua en hacer la conversión hacia el registro gráfico. El software debió cumplir un papel importante para la finalidad de esta pregunta, ayudando a graficar lo solicitado.

   Para esta cuarta pregunta, el 43% de los profesores en formación continua, es decir, 3 profesores de los 4 que respondieron bien la pregunta anterior, llegan a realizar un correcto cambio de registros, del algebraico al gráfico, observando que hacen una buena interpretación de los resultados que obtuvieron anteriormente. El otro 57% de los profesores en formación continua (4 profesores) no hacen una conversión correcta y algunos sólo grafican algún elemento de la imagen y del núcleo.

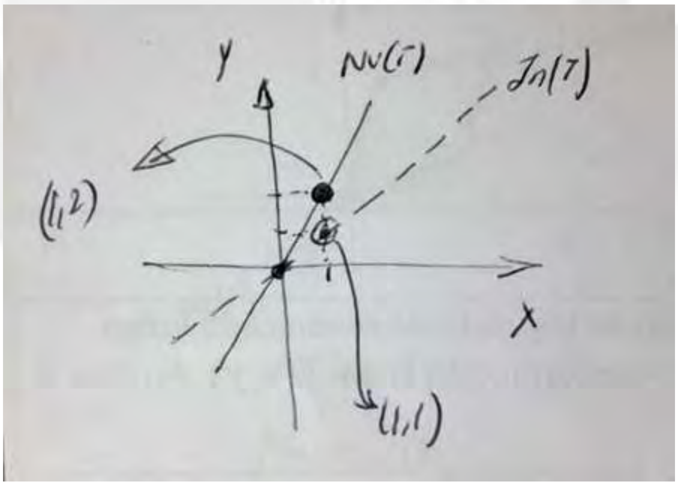


Figura 5.80: Respuesta correcta de un alumno

A continuación presentamos el cuadro resumen de resultados de los profesores en formación continua con la gráfica 2. En esta segunda actividad se contó con sólo 7 profesores en formación continua.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Pregunta	% Correctas	% Incorrectas	% Abstenciones	% TOTAL
1	100	0	0	100
2	71	29	0	100
3	57	43	0	100
4	43	57	0	100

Ahora presentaremos el desarrollo de 3 profesores en formación continua, etiquetados como Alumno 1, Alumno 2 y Alumno 3, que confirmen nuestro primer análisis general de la gráfica 2.

- Alumno 1

  Para la **primera pregunta** el alumno 1 hizo el siguiente desarrollo:

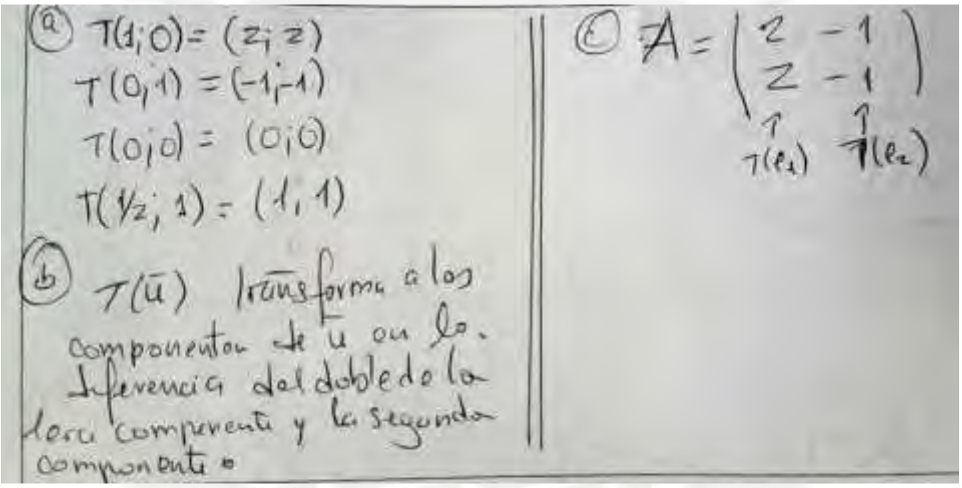


Figura 5.81: Gráfica de la pregunta 1 del alumno 1

Comete el error al calcular $T(0.5;\ 1)$, pues su valor es $(0;0)$, luego para el resto de puntos hace bien la conversión del registro gráfico al algebraico. Usa el registro de lenguaje natural para describir la definición de la transformación: *Las componentes de* $T(\vec{u})$ *son la diferencia del doble de la primera componente y la segunda componente*, lo cual es correcto. Y finalmente, muestra la matriz A de T relativa a la base canónica en forma correcta, señalando que las imágenes de los vectores canónicos son las columnas de la matriz, mostrando que realiza un correcto cambio de registros del par ordenado al matricial.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Para la **segunda pregunta** el alumno 1 desarrolló de la siguiente manera:

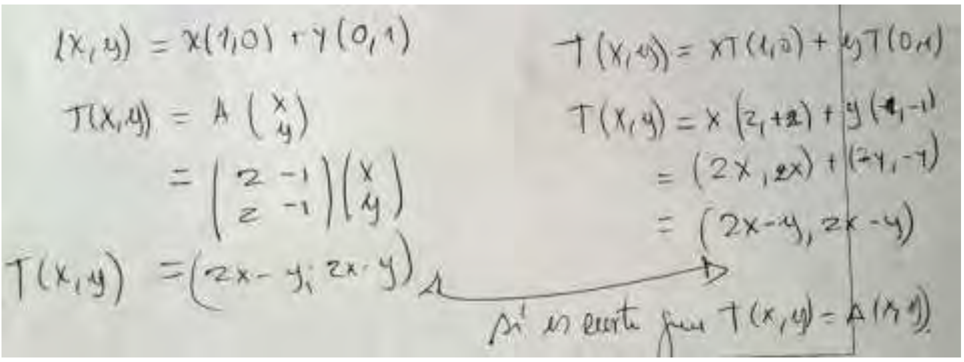


Figura 5.82: Gráfica de la pregunta 2 del alumno 1

Notamos que todos los tratamientos que realiza son correctos en el registro algebraico y matricial, luego compara sus resultados afirmando que es cierta la igualdad. Podemos señalar que implícitamente hay una conversión entre el registro matricial y el algebraico, para poder comparar la igualdad.

Para la **tercera pregunta** el alumno 1 recordó las definiciones de ambos sub espacios (imagen y núcleo de T). Su desarrollo se muestra a continuación:

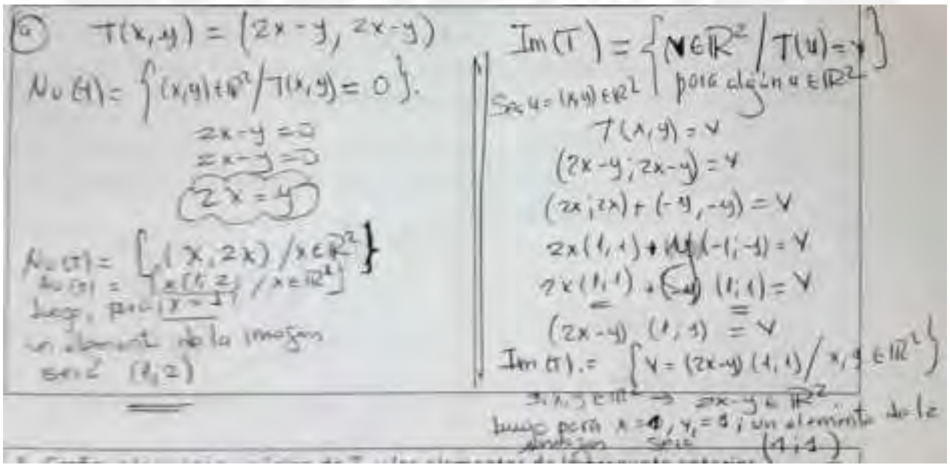


Figura 5.83: Gráfica de la pregunta 3 del alumno 1

Podemos decir que efectúa correctamente todos los tratamientos en el registro algebraico en cada definición y finalmente muestra un elemento de la imagen y uno del núcleo como piden en la pregunta. Omitiendo temporalmente en esta pregunta el uso del software GeoGebra para hallar el elementos del núcleo e imagen.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

Para la **cuarta pregunta** el alumno 1 hace la conversión, del registro algebraico al registro gráfico, y grafica las rectas que forman el núcleo e imagen en todo el plano $\mathbb{R}^2$ y señala los elementos de cada sub espacio. Sin embargo, no toma en cuenta la restricción del dominio (frontera del cuadrado de lado 1) donde está definida T según la gráfica 2 dada, seria para la imagen sólo un segmento de recta desde -1 hasta 2 y para el núcleo sólo los puntos $\{(0;0)\ ;\ (0.5;1)\}$

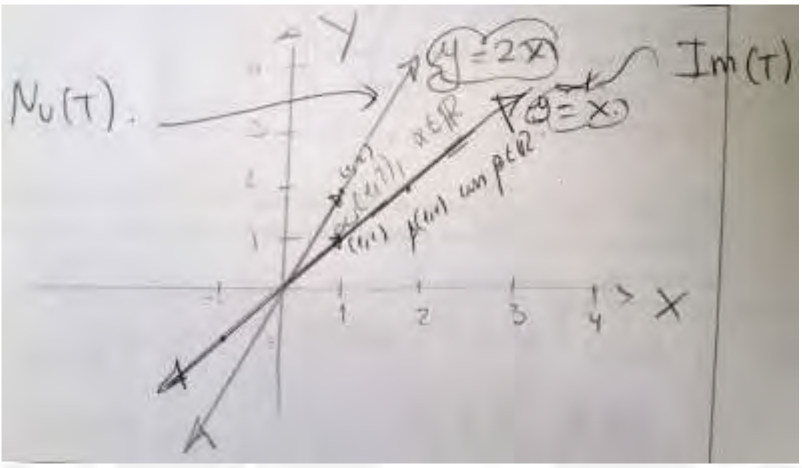


Figura 5.84: Gráfica de la pregunta 3 del alumno 1

- Alumno 2

  Para la **primera pregunta** el alumno 2 muestra su siguiente desarrollo:

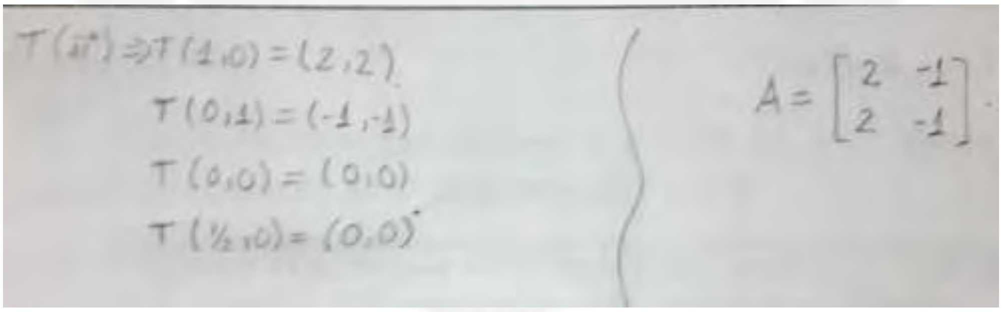


Figura 5.85: Gráfica de la pregunta 1 del alumno 2

Donde observamos que hace una correcta conversión, del registro gráfico al registro algebraico, para hallar las imágenes de los puntos que nos piden, de manera directa muestra la matriz A de T relativa a la base canónica, y no llega comentar alguna relación o característica que haya observado entre los vectores del dominio y su imagen. Concluyendo que para este alumno 2 no es fácil de observar esta relación de forma directa.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Para la **segunda pregunta** el alumno 2 hace los tratamientos convenientes en el registro matricial, aunque cabe mencionar que pasa por alto la conversión, del registro matricial al registro algebraico, donde pueda decir que son iguales o equivalentes

$$\begin{pmatrix} 2x-y \\ 2x-y \end{pmatrix} = (2x-y, 2x-y)$$

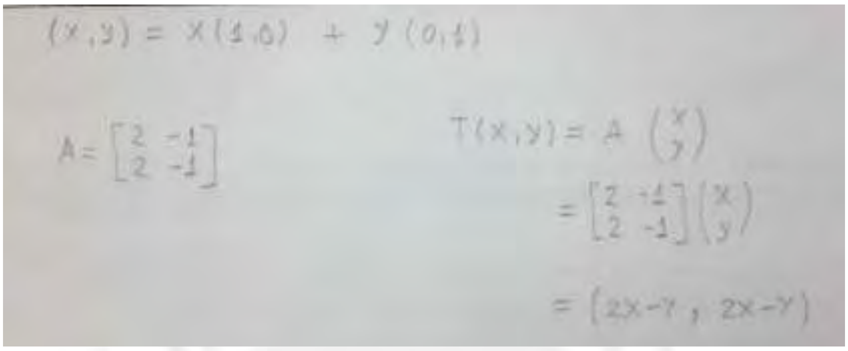


Figura 5.86: Gráfica de la pregunta 2 del alumno 2

Para la **tercera pregunta** el alumno 2 sólo llega a desarrollar lo siguiente:

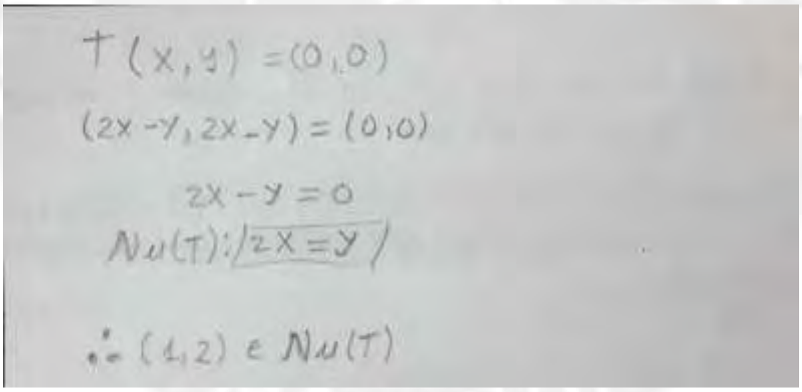


Figura 5.87: Gráfica de la pregunta 3 del alumno 2

Al parecer no recuerda exactamente la definición de núcleo y de imagen de manera formal, por otro lado desarrolla bien el tratamiento en el registro algebraico para la definición de núcleo y señala un elemento que si le pertenece.

Para la **cuarta pregunta**, era de suponer que el alumno 2 sólo hizo la gráfica del núcleo de T en forma correcta, es decir, hace un buen cambio de registros, del algebraico al gráfico y señala el elemento que dio en la pregunta anterior.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

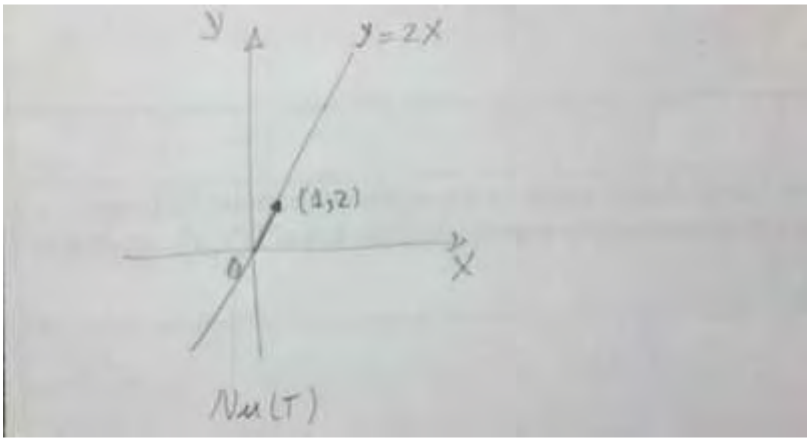


Figura 5.88: Gráfica de la pregunta 4 del alumno 2

Arrastra el problema de la pregunta anterior, al no recordar su definición, aunque también o pudo obtener de usar el software.

- Alumno 3

Para la **primera pregunta** el alumno 3 hace su desarrollo de la siguiente manera:

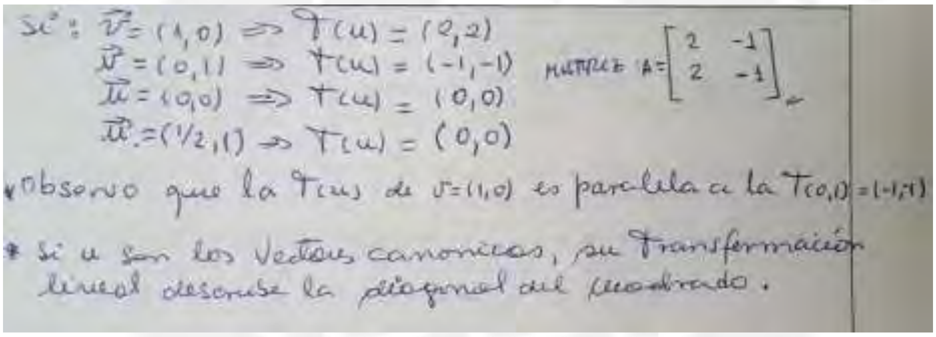
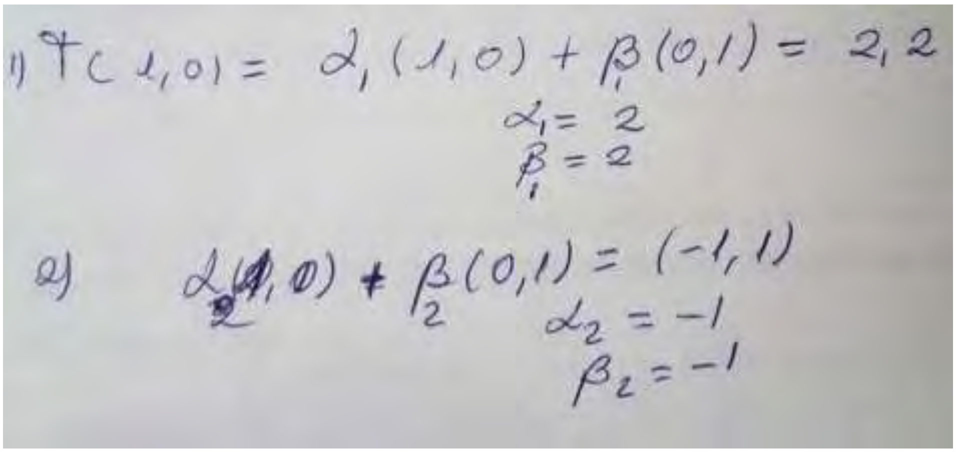


Figura 5.89: Gráfica de la pregunta 1 del alumno 3

Desarrolla correctamente los tratamientos en el registro gráfico para luego realizar la conversión del registro gráfico al registro par ordenado, para hallar los valores de las imágenes de los vectores dados, usa el registro de lenguaje natural para comentar algunas relaciones que llega a observar y finalmente muestra de manera correcta la matriz relativa a la base canónica A.

Para la **segunda pregunta**, el alumno 3 logró hacer lo siguiente:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis



1) $T(1,0) = \alpha_1(1,0) + \beta_1(0,1) = 2,2$

$\alpha_1 = 2$

$\beta_1 = 2$

2) $\alpha_2(1,0) + \beta_2(0,1) = (-1,1)$

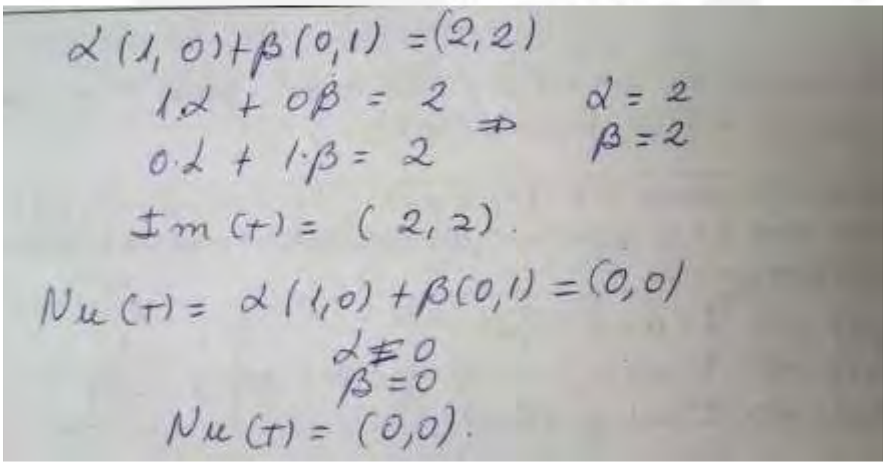
$\alpha_2 = -1$

$\beta_2 = -1$

Figura 5.90: Gráfica de la pregunta 2 del alumno 3

Donde notamos que el alumno hace tratamientos incoherentes, con respecto a lo solicitado en la pregunta. Nuevamente intenta colocar las imágenes de los vectores canónicos como combinación lineal de vectores canónicos. Finalmente, no hace los tratamientos en el registro algebraico y matricial correspondientes, observando que no tiene claro lo pedido en esta pregunta.

Para la **tercera pregunta** el alumno 3 desarrolla lo siguiente:



$\alpha(1,0)+\beta(0,1) = (2,2)$

$1\alpha + 0\beta = 2$

$0\cdot\alpha + 1\cdot\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 2, \ \beta = 2$

$Im(T) = (2,2).$

$Nu(T) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0)$

$\alpha \equiv 0$

$\beta = 0$

$Nu(T) = (0,0).$

Figura 5.91: Gráfica de la pregunta 3 del alumno 3

Notamos que no tiene claro la definición de imagen, pues iguala una combinación lineal de los vectores canónicos con la imagen de uno de ellos y concluye señalando como un elemento de la imagen de los mismos vectores canónicos. Efectúa este mismo

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

procedimiento con la diferencia que iguala al vector $(0; 0)$ para hallar un elemento del núcleo. Los tratamientos que realiza en ambas situaciones son los correctos.

Para la **cuarta pregunta**, observamos que el alumno 3 hace bien las conversiones, del registro algebraico al gráfico, sólo que realiza las gráficas de los dos elementos hallados en la pregunta anterior, y no grafica ni la imagen ni el núcleo, pero tampoco hace los tratamientos necesarios para hallarlos a través del software.

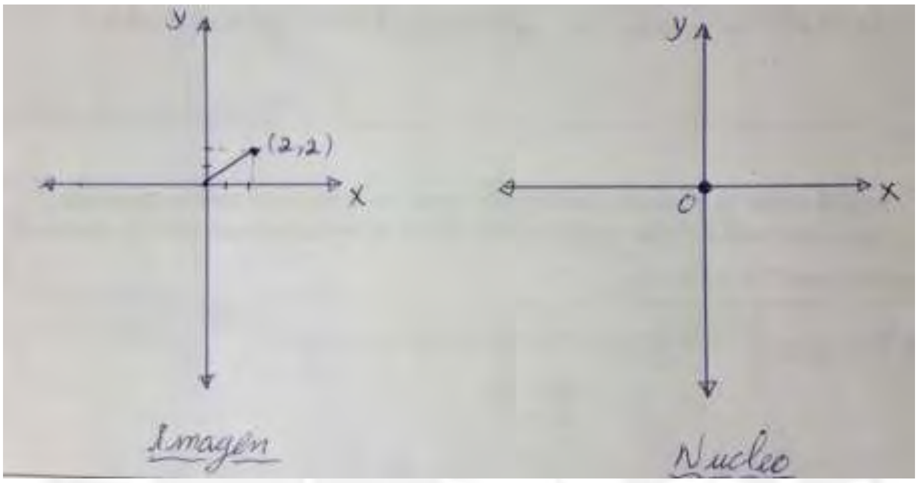


Figura 5.92: Gráfica de la pregunta 4 del alumno 3

5.3. Validación

En esta sección se validarán todos los resultados, teniendo en cuenta las consideraciones o comportamientos cognitivos y matemáticos que se promovió en cada situación planteada dentro de cada actividad, las estrategias que pudieron utilizar los alumnos y señalando también las dificultades que pudieron tener durante el desarrollo.

- Los resultados de la gráfica 1, de la primera actividad, son buenos, debido a que los docentes en formación continua consiguen lo esperado en cada pregunta. En su mayoría hacen bien los cambios de registros como lo esperamos, observando que los tratamientos realizados por ellos de manera libre a través del software ayudó a que

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

los docentes en formación continua tengan independencia en su desarrollo, es decir, algunos docentes dieron las respuestas de manera directa en el registro algebraico, mientras que otros hicieron conversiones para diferentes casos y a partir de ahí lograron generalizar para dar su respuesta en el registro algebraico, lenguaje natural o ambos. Podemos decir que se consiguió lo esperado en esta primera gráfica.

- En la gráfica 2, de la primera actividad, los docentes en formación continua tienen problemas al enfrentar el registro gráfico de una función que no es TL, no consiguiendo los resultados correctos en su mayoría. Los profesores no realizan una conversión adecuada, del registro gráfico al algebraico, pues no llegaron a hallar la relación entre $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ o afirman de manera equivocada que $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Ningún alumno notó que $T(0,0) \neq (0,0)$ para que concluyan que la función T no es transformación lineal, como lo mencionamos en el análisis a priori y a la mayoría se le complica justificar esta afirmación como es el caso del Alumno 3.
- Para la gráfica 3, la cual tenía un alto nivel de complejidad, como lo suponíamos, para la pregunta 2, los profesores en formación continua respondieron que no encuentran alguna relación entre las imágenes $T(\vec{w})$, $T(\vec{u})$ y $T(\vec{v})$, lo que nos confirma la dificultad del desarrollo al no hacer los tratamientos adecuados en el registro gráfico. Es probable que no manipularon la recta para llegar a deducir la respuesta, como lo suponíamos en nuestro análisis a priori. Cabe resaltar que sólo un profesor en formación continua logró definir la TL cuando la recta era $y = x$, confirmando la complejidad de esta gráfica en esta primera actividad y el mal tratamiento del registro gráfico que ellos realizaron en este caso.
- Podemos observar que los comportamientos esperados por los docentes en formación continua fueron previstos en esta primera actividad, haciendo que ellos sin tener dificultad en el uso del GeoGebra efectuaran los tratamientos necesarios. Para que los docentes en formación continua noten qué gráficas de las funciones presentadas son transformaciones lineales, debían pasar por al menos dos registros de representación, siendo el más usado el registro algebraico, también se trató de que manejen el lenguaje natural describiendo o comentando los resultados de las relaciones que se les pedía y con menor intensidad que usen la representación en el registro matricial para señalar su matriz relativa a la transformación lineal si esta lo fuera.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

- La gráfica 1 de la segunda actividad, refleja la comprensión y aprendizaje ocurrido tras la primera actividad, teniendo muy buenos resultados entre las dos primeras preguntas relacionadas: Hallar la transformación lineal T y la matriz relativa a T. Teniendo como resultados que todos los docentes en formación continua responden la primera pregunta en forma correcta y en su mayoría lo mismo ocurrió con la segunda pregunta. Observamos que los docentes mejoraron con respecto a la primera actividad en el manejo del cambio de registros, del gráfico al algebraico y lenguaje natural, y los tratamientos en estos registros, ayudando a hallar la definición de transformación lineal y la comprensión de que toda transformación lineal puede ser representada de manera única por una matriz. Por otro lado, hubo algo de dificultad en los tratamientos para hallar la imagen y núcleo, y esto se observó en la gráfica del alumno 2y 3, como se observó este error en el análisis a priori.
- Para la gráfica 2 de la segunda actividad, los docentes en formación continua hacen en su mayoría el desarrollo de las dos primeras preguntas de manera correcta, también confirmando una vez más el reforzamiento del aprendizaje del concepto transformación lineal y la representación matricial de esta, consecuencia de las correctas conversiones y tratamientos en los diferentes registros, como lo esperábamos. Pero en las últimas dos preguntas, tuvieron problemas en los tratamientos lo cual arrastraron a la construcción de la gráfica, esto nos muestra que el formalismo de estas definiciones impiden la comprensión de ellas mismas, haciendo que los alumnos se equivoquen al hacer los tratamientos y conversiones, similarmente a la pregunta 1 de esta segunda actividad.
- En general, desde el punto de vista de la teoría de registros los resultados muestran que los docentes en formación continua pueden realizar las conversiones, del registro gráfico al registro algebraico, del registro algebraico al registro de lenguaje natural, del registro gráfico al registro de lenguaje actual (con algo de dificultad) y del registro algebraico al registro gráfico. Cuando los docentes en formación continua hacen los tratamientos en el registro gráfico no presentan dificultad, sin embargo en el momento de justificar o describir algebraicamente o en lenguaje natural tienen cierta dificultad por el formalismo que estas mismas requieren.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CONCLUSIONES

- Los docentes en formación continua han mostrado que tienen la capacidad de manipular el cambio de registros (conversiones), del gráfico al algebraico y del algebraico al lenguaje natural, cuando inicialmente se les presenta en el software la transformación lineal de manera gráfica.

- Los docentes en formación continua presentan cierta dificultad de aprendizaje al enfrentar de manera directa el formalismo en las definiciones, como se afirmaba en las investigaciones de nuestros antecedentes. Hay dificultad para formar expresiones con sentido, como podemos observar en las últimas dos preguntas de cada gráfica de la segunda actividad.

- Algunos profesores en formación continua no identificaron las propiedades algebraicas del concepto del objeto matemático en el registro gráfico, se equivocaron en la gráfica 2 de la primera actividad, pues esta no es transformación lineal.

- La representación más usada por los docentes en formación continua en el concepto transformación lineal es la algebraica, por ello consideramos que es necesaria la articulación entre diversos registros a partir de actividades mediante el uso del software. Esto ayudará, como ya lo mostramos, a reforzar el aprendizaje de este objeto matemático, ya que estos cambios de registros no son actividades triviales para los profesores en formación continua.

- El marco teórico elegido fue muy importante para la creación de las actividades y el análisis de los procesos que realizan los profesores en formación continua en su desarrollo de estas actividades. Nos ayudó a observar si los profesores se apropian del contenido matemático al ver que logran una buena coordinación

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

entre los diferentes registros de representación y realizan tratamientos correctos dentro de estos registros.

- La Ingeniería Didáctica como metodología elegida fue apropiada por su estructura para planificar los procesos de nuestra investigación y el análisis de las componentes que intervienen en los procesos de construcción y comunicación del contenido matemático TL que desarrollamos en el salón de clases.

- Los resultados muestran que el uso de actividades preparadas con el software GeoGebra ayudó significativamente a los docentes en formación continua, con el aprendizaje de la definición y propiedades de las transformaciones lineales, a causa de los tratamientos y conversiones de al menos dos registros.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Sugerencias Para Futuros Trabajos

Los objetivos logrados en la investigación y el desarrollo de todo el proceso seguido para alcanzarlos, pueden servir como guías de referencia para futuras investigaciones que mejorarían este trabajo de investigación. Estas pueden ser:

- Repetir la experimentación con otros alumnos, para observar si los resultados y dificultades registradas en este trabajo se repiten o cambian. Esta nueva experimentación daría mayores elementos para afinar el rediseño de nuestras actividades, ya sea en el mismo software o en las preguntas formuladas.

- En la enseñanza de este objeto matemático se debe enfatizar en el cambio de cualquier registro al registro gráfico, matricial o lenguaje natural y el tratamiento en estos mismos registros, pues así los alumnos aprenderán a discernir cuando una función es transformación lineal o no, y también permitirá manipular los diferentes registros de representación del objeto matemático.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ET LUX IN TENEBRIS LUCET MCMXVII PUCP

Referencias

- Artigue, M., Douady R., Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de los Andes. Colombia.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. [Traducción] Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Colombia.

- Duval, R (2006) *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* La gaceta de la RSME 9(1) 143-168. Recuperado: http://skat.ihmc.us/rid=1JM80DWCV-2BL5619-23T/La%20habilidad%20 para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf

- Duval, R (2012) *Registro de representao semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. Revemat 7(2)266–297. Recuperado:https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/19811322.2012v7n2p266/23465

- GeoGebra. (s.f). *Manual de GeoGebra 5.0*. Recuperado: https://wiki.geogebra.org/es/Manual

- Grossman,S.(2008). *Álgebra Lineal*. Universidad Iberoamericana. McGraw-Hill. Sexta edición.

- Hoffman, K y Kunze, R (1971). *Linear Algebra*. Prentice Hall Inc. Segunda edición.

- Lima, E.(1998). *Algebra Lineal*. Instituto de Matemática y Ciencias Afines. Universidad Nacional de Ingeniería.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

- Luzardo, D y Peña, A. (2006). *Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX*. Divulgaciones Matemáticas. 14. 2 153-170. Universidad del Zulia. Venezuela. Recuperado: http://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf

- Molina, J y Oktac, A. (2007). *Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico*. Relime. 2. 3. 241-273. Recuperado: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500204

- Ramírez, O., Romero, C. , & Oktaç, A. (2013). *Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano.* En A. Ramírez. & Y. Morales (Eds.), Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (pp. 537-547). República Dominicana.

- Rodríguez, C. (2011). *Diagnósticos de las dificultades de la enseñanza aprendizaje en un curso de álgebra Lineal*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperado: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/2359/public /2359-9595-1-PB.pdf

- Romero, C. (2010). *Una introducción gráfica al concepto de transformación lineal usando GeoGebra*. Universidad de Sonora, México. Recuperado:http://es.scribd.com/doc/40383546/2/TEORIA-DEREPRESENTACIONES-SEMIOTICAS

- Uicab, R y Oktac, A.(2006). *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica*. Relime.9.3.459-490. Recuperado: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33590307

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

ANEXO

Presentamos las hojas de atividades usadas en nuestra investigación:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ACTIVIDAD 1

NOMBRE: ____

***INSTRUCCIONES**: No es necesario tener un conocimiento previo del software GeoGebra para el desarrollo de esta actividad. Sólo se usará la manipulación de movimientos con el mouse sobre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, teniendo en cuenta que a los vectores puedes ampliar o reducir el tamaño (o norma).*

I. Gráfica G_1

La gráfica adjunta muestra dos vectores $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ en R^2 , donde T es una función de R^2 en R^2 (El dominio de T es R^2)

1.- ¿Qué relación puede describir entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$?

2.- Dado los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en el dominio de T, tales que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ¿Qué relación existe entre los vectores $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$?

3.- Muestra cómo está definida explícitamente la función T. Más aún si $\vec{u} = (x, y)$, halla $T(x, y)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

4.- ¿Será T una transformación lineal? (justifique su respuesta). En caso afirmativo, muestra la matriz de T relativa a su base canónica.

II. Gráfica G_2

La gráfica adjunta muestra dos vectores $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ en R^2 , donde T es una función de R^2 en R^2 (El dominio de T es R^2)

1.- ¿Qué relación puede describir entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2.- Dado los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en el dominio de T, tales que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ¿Qué relación existe entre los vectores $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$?

3.- Muestra cómo está definida explícitamente la función T. Más aún si $\vec{u} = (x, y)$, halla $T(x, y)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PUCP

4.- ¿Será T una transformación lineal? (justifique su respuesta)

III. Gráfica G$_3$

La gráfica adjunta muestra dos vectores $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ en R^2 , donde T es una función de R^2 en R^2 (El dominio de T es R^2)

1.- ¿Qué relación puede describir entre el vector $\vec{u}$ y su imagen $T(\vec{u})$?

2.- Dado los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en el dominio de T, tales que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ¿Qué relación existe entre los vectores $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ y $T(\vec{w})$?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

3.- Muestra cómo está definida explícitamente la función T. Más aún si $\vec{u} = (x, y)$, halla $T(x, y)$ para el caso que la recta sea: $y = 0$ (eje X), $x = 0$ (eje Y) y $y = x$.

4.- ¿Será T una transformación lineal? (justifica su respuesta)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

ACTIVIDAD 2

NOMBRE: ____

INSTRUCCIONES*: No es necesario tener un conocimiento previo del software GeoGebra para el desarrollo de esta actividad. Sólo se usará la manipulación de movimientos con el mouse sobre el vector* $\vec{u}$ *, teniendo en cuenta que al vector solo puede ser movido por el borde del cuadrado de lado 1.*

I. Gráfica 1

La gráfica adjunta muestra dos vectores $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ en R^2 , donde T es una transformación lineal de R^2 en R^2 (El dominio de T es R^2)

1.- ¿Qué valores toma $T(\vec{u})$ cuando $\vec{u}$ son los vectores canónicos? ¿Qué relación hay entre $\vec{u}$ y su respectivo $T(\vec{u})$ para cada vector canónico? (**COMENTE**) Y muestre la matriz A de T relativa a la base canónica.

2.- Escriba el par (x, y) como combinación lineal de los vectores canónicos y luego señale cómo está definida explícitamente la transformación lineal $T(x, y)$. Analice si es cierto que $T(x, y) = A\binom{x}{y}$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis
PUCP

3.- Usando las respectivas definiciones, determine la imagen y núcleo de T. De un elemento de la imagen y del núcleo respectivamente.

4.- Grafique (sombree) la imagen y núcleo de T, y los elementos de la pregunta anterior.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

II. Gráfica 2

La gráfica adjunta muestra dos vectores $\vec{u}$ y $T(\vec{u})$ en R^2 , donde T es una transformación lineal de R^2 en R^2 (El dominio de T es R^2).

1.- ¿Qué valores toma $T(\vec{u})$, cuando: $\vec{u} = (1,0)$; $\vec{u} = (0,1)$; $\vec{u} = (0,0)$ y $\vec{u} = (1/2, 1)$? ¿Qué relación hay entre $\vec{u}$ y su respectivo $T(\vec{u})$? (**COMENTE**). Y muestre la matriz A de T relativa a la base canónica.

2.- Escriba el par (x, y) como combinación lineal de los vectores canónicos y luego señale cómo está definida explícitamente la transformación lineal $T(x, y)$. Analice si es cierto que $T(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

3.- Usando las respectivas definiciones, determine la imagen y núcleo de T. De un elemento de la imagen y del núcleo respectivamente.

4.- Grafique la imagen y núcleo de T, y los elementos de la pregunta anterior.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis