PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

IDENTIFICACIÓN DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS, EN LA FACETA EPISTÉMICA, DEL PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA, SOBRE FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Presentada por:

Phamela Stephany Escudero Acero

Dirigida por

DRA. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2017

DEDICATORIA

A mi hijo Santiago.

AGRADECIMIENTOS

De manera muy especial, a mi asesora, Dra. Cecilia Gaita, por su orientación y apoyo durante el desarrollo de la tesis, por sus valiosos aportes que ayudaron a culminar nuestra investigación.

A la directora de la maestría, Dra. Jesús Flores, por la generosidad que me mostró en todo momento, por sus valiosos consejos y enseñanzas en mi proceso de formación en investigación.

A mi madre, Lidia Acero, por el soporte brindado estos dos últimos años, por suplir mi presencia en casa dándome la confianza de que mi hijo se encuentra seguro en su compañía.

A mi esposo, John Cotrina, por su apoyo durante el desarrollo de la tesis, por motivarme constantemente para poder culminar mis estudios de posgrado.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de la Matemática, quienes me enseñaron pequeñas y grandes cosas, todas muy útiles e inspiradoras para desempeñar mi labor docente de la mejor manera.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú por brindarme la oportunidad de adquirir la beca Aristóteles que me ayudo a solventar mi último año de estudios.

RESUMEN

La labor que desempeña el profesor de matemática es una práctica compleja, lo que hace necesario reconocer el tipo de conocimientos que permitan mejorar su práctica docente. Para identificar algunos de tales conocimientos, empleamos el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) del profesor de matemática del enfoque ontosemiótico (EOS), que categoriza los conocimientos del profesor de matemática, así como del constructo del Razonamiento Algebraico elemental (RAE) propuesto por el EOS. Permitiendo esclarecer competencias del profesor necesarias para identificar, valorar y transformar situaciones, específicamente sobre funciones lineales y cuadráticas, que favorezcan el desarrollo del razonamiento algebraico en sus alumnos.

Nuestro estudio pretende contribuir a la formación de profesores, en el área de conocimientos del profesor de matemática, señalando de manera explícita algunos conocimientos del profesor de matemática, asociados a la dimensión epistémica del modelo de CDM del profesor. Conocimientos necesarios para el reconocimiento de objetos y procesos algebraicos puestos en juego al resolver tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas, así como de conocimientos que permitan el desarrollo del razonamiento algebraico de sus alumnos.

Se construye un *significado institucional de referencia* de las funciones lineales y cuadráticas, en la institución de educación secundaria. Como parte de este significado de referencia se presenta una tipología de situaciones, que involucran funciones lineales y cuadráticas. Finalmente se identifican conocimientos didáctico-matemáticos, asociados a los objetos primarios descritos en el significado, en relación al contenido algebraico sobre funciones lineales y cuadráticas.

Posteriormente, se presentan algunos conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, en relación al razonamiento algebraico puesto en juego al enfrentarse a tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas. Entre estas competencias atribuidas al profesor de matemática se señala la competencia para distinguir aquellas situaciones que desarrollan el razonamiento algebraico, así como de la competencia para enriquecer las situaciones a favor de propiciar tal razonamiento en los alumnos.

ABSTRACT

The work performed by the mathematics teacher is a complex practice, which makes it necessary to identify the type of knowledge that will raise their teaching practice. In order to identify some of this knowledge, we use the didactic-mathematical knowledge model (CDM) of the mathematics teacher of the ontosemiotic approach (EOS), which categorizes the knowledge of the mathematics teacher as well as the proposed elementary Algebraic Reasoning (RAE) By the EOS. Allowing to clarify teacher competences necessary to identify, value and transform situations, specifically on linear and quadratic functions, that favor the development of algebraic reasoning in their students.

Our study aims to contribute to the training of teachers in the area of knowledge of the mathematics teacher, pointing explicitly some knowledge of the mathematics teacher, associated with the epistemic dimension of the CDM model of the mathematics teacher. Necessary knowledge for the recognition of objects and algebraic processes put into play when solving tasks involving linear and quadratic functions, as well as knowledge that allow the development of the algebraic reasoning of its students.

A meaning institutional of reference of the linear and quadratic functions is constructed in the institution of secondary education. As part of this reference meaning we present a typology of situations, involving linear and quadratic functions. Finally, we identify didactic-mathematical knowledge, associated with the primary objects described in the meaning, in relation to the algebraic content on linear and quadratic functions.

Subsequently, some didactic-mathematical knowledge of the teacher is presented, in relation to the algebraic reasoning put into play when dealing with tasks involving linear and quadratic functions. Among these competences attributed to the mathematics teacher is the competence to distinguish those situations that develop the algebraic reasoning, as well as the competence to enrich the situations in favor of such reasoning in the students.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El álgebra está presente en gran parte de los contenidos de la educación escolar por lo que es un tema de interés para múltiples investigaciones desde diversas perspectivas. Asimismo, la comunidad en didáctica de la matemática ha puesto de manifiesto, en las últimas décadas, un gran interés en esclarecer el tipo de conocimiento didáctico-matemático que debe tener el profesor de matemática, en temas de contenido específico (Badillo, Azcárate y Font, 2011). Es así que, nuestro estudio pretende identificar algunos conocimientos, de la faceta epistémica del modelo de conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009) del profesor de matemática, que necesita el profesor de educación secundaria para lograr aprendizajes en sus alumnos, respecto al tema específico de *función lineal y cuadrática*.

Consideramos que, explicitar los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática respecto de funciones lineales y cuadráticas constituye un aporte de interés para las administraciones educativas. A fin de proporcionar herramientas para el diseño e implementación de un proceso formativo con profesores en ejercicio, que les brinde nuevas herramientas que enriquezcan su labor profesional para facilitar el aprendizaje de sus alumnos y alcanzar los estándares exigidos en los documentos curriculares, respecto a este tema en específico.

Nuestra investigación cuenta con cinco capítulos, además de las referencias empleadas.

En el primer capítulo se presentan antecedentes relacionados con nuestra investigación, investigaciones en torno a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar. Asimismo, se consideran investigaciones que explicitan conocimientos didáctico-matemáticos sobre funciones empleando otras herramientas teóricas. Finalmente se presenta la justificación de la investigación en nuestro contexto específico así como los objetivos pretendidos.

En el segundo capítulo se describen los aspectos teóricos empleados, principalmente la caracterización de las prácticas algebraicas y del respectivo razonamiento inherente en ellas, propuesta por el Enfoque Ontosemiótico. Además el modelo de conocimientos del profesor de matemática que categoriza el conocimiento didáctico-matemático por parte del profesor de matemática en torno a un tema específico, así como de la correspondiente integración de ambos constructos teóricos. Finalmente, se presentan los aspectos metodológicos de nuestra investigación.

En el tercer capítulo se presenta el significado referencial de las funciones en la institución de educación secundaria, como resultado del análisis de contenido de textos didácticos y de investigaciones en didáctica de la matemática que se ocupan de funciones lineales y cuadráticas.

Asimismo, se exhiben indicadores de conocimientos del profesor de matemática en relación al contenido algebraico.

En el cuarto capítulo realizamos un análisis sobre el tipo de situaciones encontradas en el significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas, lo que permite distinguir aquellas situaciones que propician el razonamiento algebraico. El reconocimiento de tales situaciones constituye una competencia, en relación al razonamiento algebraico, del profesor de matemática que favorece el aprendizaje de los alumnos. Asimismo, se señalan y ejemplifican algunos conocimientos didáctico-matemáticos.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan los resultados de nuestra investigación, limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

CAPITULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo presentamos la problemática de nuestra investigación, a partir de antecedentes que validan su relevancia ante la comunidad científica. Así mismo, se presentan argumentos para mostrar la pertinencia, en nuestro contexto, del tema específico en el que hemos centrado nuestra investigación; finalmente se plantean la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

Para identificar conocimientos del profesor de matemática sobre funciones lineales y cuadráticas emplearemos constructos teóricos presentes en investigaciones de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2012), Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), y Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015), sobre la caracterización del algebra y su gradación en niveles de algebrización bajo la perspectiva del enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). También consideramos la dimensión epistémica del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) propuesto por Godino (2009) y su aplicación en categorías de conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental (Godino, Fernandez, Lacasta, Neto, Wilhelmi, Contreras, Áke, Olivares y Estepa, 2015).

1.1 Antecedentes y justificación de la investigación

Nuestra investigación pretende identificar algunos conocimientos que el profesor de matemática debe tener para el logro de aprendizajes de sus alumnos, referente a un tema algebraico específico, es así que presentaremos a continuación antecedentes en torno a tres focos de interés, a saber, el razonamiento algebraico, funciones lineales, funciones cuadráticas y el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemática.

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra es un tema de gran interés para la comunidad de educación matemática. En la investigación realizada por Kieran (2006) se organizan diferentes trabajos de investigación sobre enseñanza y aprendizaje del álgebra, realizados en los últimos 30 años por los investigadores en Álgebra del “International Group of the Psychology of Mathematics Education” (PME). En dicho estudio se señalan los cambios en el foco de interés que se han producido alrededor de las investigaciones en álgebra, organizando la información en tres grandes grupos, como sigue:

- Un primer grupo de investigaciones centradas en el proceso de transición de la Aritmética al Álgebra, así como en reflexionar sobre los distintos usos e interpretaciones de las variables e incógnitas a nivel cognitivo, dificultades en el significado del signo igual de las ecuaciones, en la resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones, planteamiento y resolución de problemas verbales de álgebra.

- Un segundo grupo centrado sobre el uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje del álgebra, múltiples representaciones y procesos de generalización.
- Un tercer grupo centrado en el pensamiento algebraico de los estudiantes de la escuela elemental, la enseñanza-aprendizaje del Álgebra y la modelización dinámica de situaciones físicas y en entornos algebraicos.

En ese mismo trabajo se señala que en los últimos años se ha adoptado como supuesto que es posible desarrollar el *pensamiento algebraico* en la edad temprana de los niños; a dicha postura se le denomina *Early Álgebra*. Se postula que se deben propiciar prácticas algebraicas desde la educación primaria con el fin de fomentar el pensamiento algebraico, que incluye, entre otros, procesos de simbolización y generalización.

La misma investigación señala que el razonamiento algebraico en los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensamiento dentro de las actividades matemáticas en tareas relacionadas con: números, geometría, medición o con tratamiento de datos en la escuela elemental, para las que el álgebra simbólica puede ser utilizada como una herramienta para entrar en niveles superiores de conceptualización matemática.

Debemos precisar que la investigación de Kieran pretende mostrar el contexto sobre el que surge la problemática de caracterizar al álgebra escolar, inicialmente buscando introducir el álgebra en la escuela primaria mediante una algebrización del currículo. Las distintas posturas que surgen en torno a dicha problemática, dan origen a la propuesta integradora del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS). Desde la cual el álgebra escolar es atendida a partir de una perspectiva epistemológica como razonamiento algebraico.

Así, en la investigación presentada por Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) se identifican algunos rasgos característicos del razonamiento algebraico en las actividades matemáticas de alumnos frente a diferentes tipos de tareas. Para dicho propósito, se usan herramientas propias del EOS. En tal investigación se propone caracterizar el álgebra elemental en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática sobre el álgebra.

Además, dicha investigación desarrolla una primera tipología de objetos algebraicos, característicos de la actividad matemática escolar, tales como: relaciones binarias, operaciones entre números, funciones y estructuras algebraicas. Siguiendo la propuesta del EOS, la presencia de tales objetos algebraicos en las prácticas matemáticas se evidencian a través de configuraciones, las cuales se definen como las redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas y las relaciones entre los mismos (Godino, Batanero y Font, 2012). Dichos objetos se materializan a través del lenguaje alfanumérico, icónico y gráfico, empleado en la resolución a las tareas matemáticas. Tales configuraciones se consideran como *algebraicas en el sentido estricto*, pero pueden tener otros medios de expresión distintos a las representaciones alfanuméricas, obteniéndose configuraciones *"proto-algebraicas"*.

Asimismo, en esta investigación, se caracterizan las prácticas algebraicas y el respectivo pensamiento inherente a ellas, describiendo dualidades. En primer lugar, se señala que: la dualidad extensivo-intensivo es la que está presente en los procesos asociados a la generalización-particularización. Tales objetos intensivos pueden dar lugar a otros objetos intensivos de mayor generalidad. Además se considera la dualidad ostensivo-no ostensivo, donde los ostensivos se refieren a los medios de representación tales como palabras, símbolos y gestos, este último referido a evidenciar, mediante gestos con movimientos corporales, algún intento por construir argumentos o justificaciones de la actividad realizada (Radford, Edwards y Arzarello, 2009), y los no ostensivos, relativos a las representaciones mentales e ideales tales como proposiciones y conceptos.

A partir de la identificación de objetos, procesos y dualidades presentes en la actividad algebraica, se muestra una tipología de configuraciones algebraicas asociadas con distintos tipos de tareas tales como la intensional, cuando se evidencia un proceso de generalización; relacional, referido a la presencia de uso de objetos extensivos en relaciones de orden; operacional, referido al uso de letras para representar incógnitas y establecer operaciones aritméticas entre ellas; relacional-operacional, si se evidencia propiedades de relación de equivalencia y propiedades de operaciones aritméticas; funcional, referidos al uso de objetos ostensivos de funciones mediante el reconocimiento de la regla de correspondencia ;y estructural, referidos al reconocimiento y uso de propiedades sobre una estructura dada.

La caracterización descrita en el párrafo anterior muestra una manera de concebir el razonamiento algebraico, como resultado de una actividad algebraica determinada primordialmente por la presencia de procesos de generalización y particularización así como la participación de objetos algebraicos. En ese sentido, nuestro estudio pretende esclarecer algunos conocimientos del profesor de matemática, bajo esta concepción del álgebra escolar.

Asimismo, además de reconocer los rasgos característicos de la actividad algebraica, se atribuye un cierto grado de algebrización a dicha actividad, con el propósito de elaborar actividades pertinentes para tal grado a fin de desarrollar el razonamiento algebraico. En ese sentido, la investigación realizada por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2012) ayudará a enriquecer nuestra propuesta, pues presenta una postura teórica caracterizada por niveles de razonamiento algebraico, definidos como estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas enfocados en la relación del sujeto con la tarea, que se pueden identificar en la actividad matemática de carácter algebraico. En dicho trabajo se muestran ejemplos prototípicos de tareas en cada uno de estos niveles. Para ello, se recurre a la tipología de objetos y procesos, propuesto previamente desde el EOS. Si bien es cierto que los niveles de algebrización se definen para ser usados en el contexto de formación de profesores, nosotros ampliaremos ese uso pretendido y lo extenderemos para ser usado en el análisis de tareas que se presentan en textos que tales profesores usan en su práctica docente.

Godino et al. (2012) proponen los siguientes niveles de algebrización:

- El nivel de algebrización 0, aquel en el que intervienen objetos extensivos expresados mediante lenguaje natural, numérico, icónico o gestual por lo que no habrían rasgos propios del razonamiento algebraico.
- El nivel de algebrización 1, en el que intervienen objetos intensivos pero sin operar con dichos objetos.
- El nivel de algebrización 2, en el intervienen indeterminadas o variables pero sin operar tales variables, sin llegar a una correspondencia de forma canónica.
- El nivel de algebrización 3, en el intervienen y se crean objetos intensivos representados de forma simbólica realizando operaciones y tratamientos con ellos.

Así mismo, Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) y Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) profundizan su propuesta de niveles de algebrización y complementan los niveles, propuestos inicialmente, que pueden desarrollar los alumnos en su actividad algebraica; la primera investigación clarifica los 3 primeros niveles propuestos en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi(2012) y, los segundos, proponen los niveles 4, 5 y 6.

Según propone Godino et al. (2015):

- El cuarto nivel de algebrización, se relaciona con el uso de parámetros para expresar familias de ecuaciones y funciones, además relacionado con procesos de operar con la incógnita o con la variable.
- El quinto nivel de algebrización, se asocia con la realización de cálculos con cantidades paramétricas conjuntamente con variables, estableciendo relaciones entre ellos.
- El sexto nivel de algebrización hace referencia a objetos y procesos de mayor generalidad que los que se presentan en el quinto nivel.

Cabe destacar que en dicha propuesta los niveles de algebrización son considerados de acuerdo con la naturaleza de la actividad matemática implicada en la tarea, considerando aspectos conceptuales y cambiando la estructura respecto a la propuesta de los cuatro primeros niveles de algebrización presente en Godino et al. (2012) los que se emplearan en nuestro estudio.

En la propuesta de Godino et al. (2015) se señala que, el hecho que el profesor pueda establecer el nivel de algebrización en el que se encuentran los alumnos, le permitirá tomar acciones para incrementar en forma progresiva el nivel de algebrización de la actividad matemática en ellos. Cabe destacar que, teniendo en cuenta el diseño curricular y por el grado de complejidad de las tareas presentes en las actividades escolares que adoptamos en nuestro país, sólo consideraremos situaciones-problema sobre funciones, que contemplen hasta el cuarto nivel de algebrización.

Por otro lado, la investigación de Socas, Camacho, Palarea, y Hernández (1996, citado en Martínez, 2014) señala, como posibles dificultades de la enseñanza del álgebra, la falta de planeación de las actividades de aprendizaje, el desconocimiento del objeto matemático estudiado, la falta de conocimiento especializado, entre otras carencias didáctico-matemático de los profesores. Un primer paso para afrontar esta situación es explicitar cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos que debe poseer un profesor de educación secundaria para contribuir al aprendizaje de sus alumnos, a través del desarrollo en forma progresiva del “pensamiento algebraico” de los mismos.

Así mismo, debemos precisar, que en la literatura de la Didáctica de la matemática es muy común encontrar los términos: sentido algebraico, razonamiento algebraico y pensamiento algebraico, es relevante resaltar que desde el EOS se considera que los tres términos corresponden a perspectivas equivalentes del mismo objeto: “algebra escolar” desde un enfoque transdisciplinar como se muestra en la Figura 1.

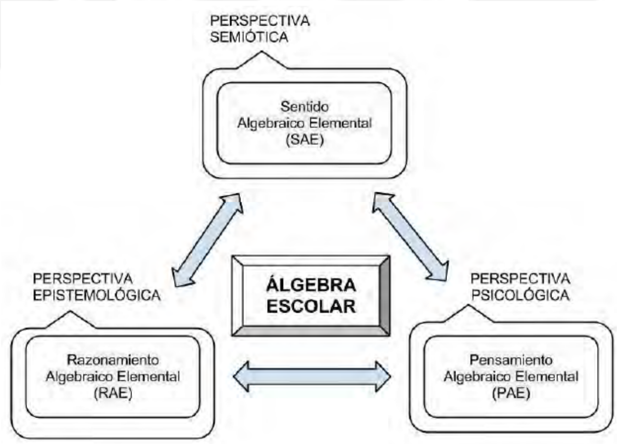


Figura 1. Enfoque transdisciplinar del álgebra escolar.

Fuente: Aké (2013, p.100)

Es así que, desde el EOS, se ha logrado una caracterización del razonamiento algebraico, el mismo que vamos a integrar a nuestra propuesta de conocimientos que debe poseer un profesor para llevar a cabo el proceso de aprendizaje respecto a funciones lineales y cuadráticas. Esta caracterización considera 3 categorías de objetos algebraicos, entre los que reconocemos a las funciones, es así que hemos hecho una revisión de algunos trabajos al respecto que mostramos a continuación.

Godino, Wilhelmi y Bencomo (2004) presentan de forma sintética el Holo-significado de la noción de función que se muestra en la Figura 2, entendiéndose como un significado *global* del que podemos extraer el significado de referencia para una institución en particular. De esta forma el Holo-significado representa el marco objetivo de los significados institucionales, sobre los cuales debería elaborarse todo proyecto de enseñanza.

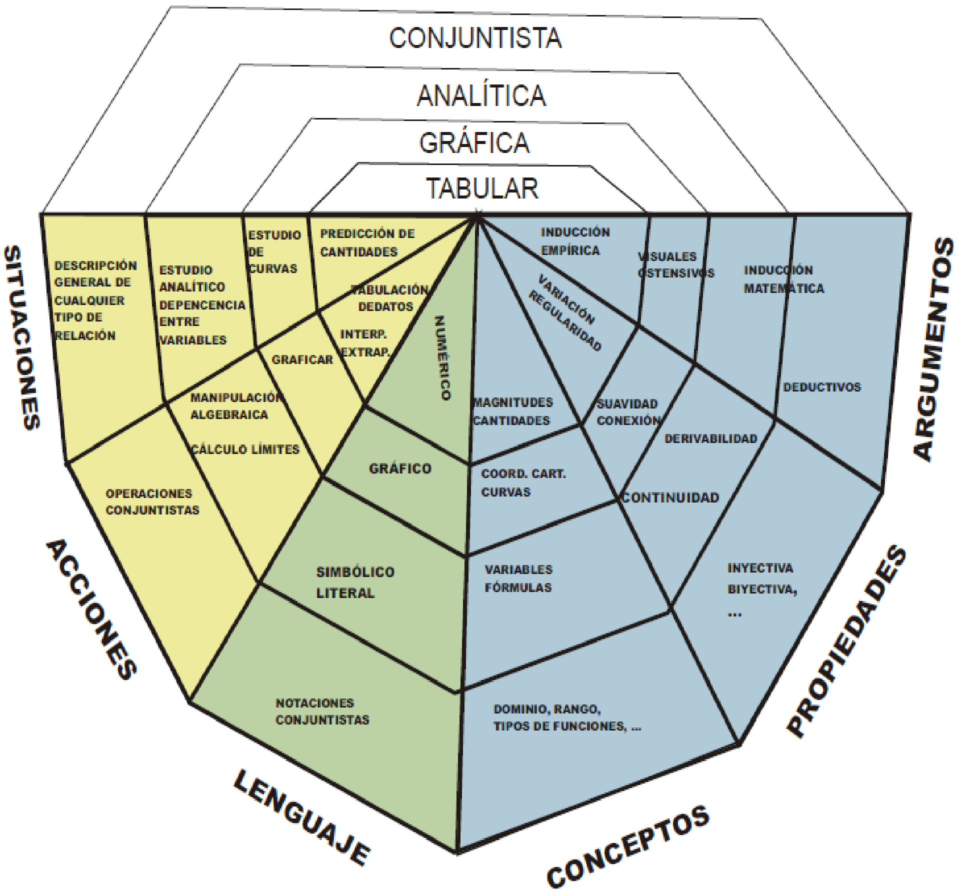


Figura 2. Holo-significado de la noción de función

Fuente: Godino, Wilhelmi, Bencomo (2004, p. 7)

El Holo-significado presenta cuatro tipos de configuraciones epistémicas de la noción de función, para cada una de ellas se caracterizan sus objetos primarios, este significado nos brindará una orientación para organizar el significado de referencia, en la institución de educación secundaria, de funciones lineales y cuadráticas, el que emplearemos para establecer nuestra propuesta de conocimientos didáctico-matemáticos, del profesor de matemática, en relación al contenido algebraico sobre funciones lineales y cuadráticas.

En cuanto a la investigación presentada en Whilhelmi, Godino y Lasa (2014), se reporta las dificultades, respecto al objeto función y a sus elementos, manifestadas por un grupo de estudiantes de profesorado de secundaria. En este estudio se muestra que el significado de función y el significado de ecuación interfieren entre sí; se muestra además la necesidad de hacer una distinción, en un proceso formativo con profesores, entre los significados de incógnita, variable, ecuación y función a fin de capacitarlos para una enseñanza idónea en tareas que aborden tales temas. Consideramos que es importante hacer una distinción entre estas tres nociones en nuestro significado de referencia, pues la existencia de conflictos entre estas nociones dificultaría el reconocimiento, por parte de los profesores, de la actividad algebraica puesta en juego ante una determinada tarea de sus alumnos.

Por otro lado, debemos señalar que existen investigaciones en didáctica de la matemática interesadas en describir categorías de conocimiento de los profesores que deben ponerse en juego para favorecer el aprendizaje de sus alumnos en un tema en específico, las que no se limitan al estudio del conocimiento del contenido, a saber Shulman (1987), Ball (2000), Ball, Lubienski y Mewborn, (2001) y Hill, Ball y Schilling (2008), citados por Godino (2009). Tales investigaciones centran su interés en formular modelos teóricos que describen los conocimientos próximos al proceso de enseñanza, para lograr un aprendizaje eficaz en los alumnos, teniendo presente la capacidad para organizar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, conocer cómo aprenden los alumnos así como sus afectos, dificultades y errores característicos.

En ese sentido, la investigación de Espinoza (2015) se centra en la identificación del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre funciones; esta categoría de conocimiento correspondiente al modelo “Mathematic teacher’s specialized knowledge” (MTSK) que refina el propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008), este modelo de conocimiento contempla dos grandes dominios, el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico (PCK), a su vez cada uno de ellos se divide en subdominios. En esta investigación se indagó sobre el subdominio del MK en funciones, correspondiente al conocimiento de los temas (KOT), referido al conocimiento, por parte del profesor, de los contenidos y sus significados de manera fundamentada, además él debe integrar dichos significados con los contenidos que se espera que los alumnos aprendan, el subdominio KOT posee como categorías a la fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos.

Espinoza (2015) establece indicadores para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas respecto a funciones. A partir del análisis de contenido que realizó a documentos oficiales de Chile, entre ellos, el documento curricular correspondiente al programa de estudio de octavo básico (correspondiente a niños de 13-14 años), en donde se contempla a las funciones, así como un texto didáctico y la guía para profesores del que disponen los profesores en Chile y de textos matemáticos de educación superior de cursos de cálculo, se identifican distintos significados asociados al concepto de función. Cada significado tiene asociado determinadas categorías como concepciones, conceptos, representaciones, fenomenología y procedimientos, que describimos a continuación en la Tabla 1.

Tabla 1. *Descripción de las componentes del análisis de contenido sobre las fuentes revisadas.*

<table>
<tr><th colspan="2">Concepciones respecto a funciones</th></tr>
<tr><td>• Función como correspondencia o vínculo entre elementos de dos conjuntos.
• Función como relación binaria o conjuntos de pares ordenados y subconjunto del producto cartesiano entre dos conjuntos, mostrando a la función como una relación que cumple con una condición.</td><td>• Función como un proceso de entrada-salida mediante un cambio del objeto de entrada por uno de otra naturaleza o como una transformación de él en otro de la misma especie.
• Función como una terna (f,X,Y) en el que se identifican el dominio, recorrido de la función, así como la expresión o ley que la define.
• Función a través de la asignación de un elemento de un conjunto con otro conjunto mediante una ley.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Conceptos encontrados respecto a funciones</th></tr>
<tr><td>• Ley o regla para la asignación.
• Dominio
• Relación binaria
• Conjuntos
• Producto cartesiano entre dos conjuntos
• Ecuación funcional
• Valor funcional
• Expresión algebraica</td><td>• Recorrido
• Pre-imagen
• Imagen
• Variable dependiente e independiente
• Par ordenado
• Punto en el plano
• Gráfico
• Proporcionalidad</td></tr>
</table>

Representaciones encontradas respecto a funciones	
• Tabla de valores • Lenguaje natural • Diagrama sagital • Software de procesador gráfico	• Lenguaje algebraico • Conjunto de pares ordenados • Conjunto de puntos en el plano con material concreto
Fenomenología encontrada respecto a funciones	
• Situaciones cotidianas de variación proporcional. • Relaciones numéricas cotidianas	• Ampliación o reducción de figuras geométricas mediante homotecias. • Situaciones de cambio lineal o situaciones de cambio afín.
Procedimientos encontrados respecto a funciones	
• Cálculo de imágenes y pre-imágenes mediante valorización de expresiones o resolución de ecuaciones. • Identificación del dominio y recorrido. • Ubicación de puntos en el plano.	• Cálculo de constantes de proporcionalidad. • Cálculo de pendiente de rectas. • Identificación de la posición de la recta respecto a los ejes.

Fuente: Espinoza (2015, p. 3)

En relación a las situaciones, estas han sido organizadas según un análisis fenomenológico, referido al reconocimiento de fenómenos en torno a la estructura de funciones que modelizan fenómenos sociales, naturales y matemáticos. Así, en este análisis se identifican las características de fenómenos relevantes y se relacionan con elementos y propiedades de funciones.

Asimismo, en el análisis de contenido realizado por Espinoza (2015) se identificaron y describieron estructuradamente los diversos significados de función en matemática escolar, teniendo en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos.

La descripción de las componentes anteriores constituye la forma en que los conceptos se relacionan para establecer la estructura conceptual del concepto función; tales elementos, identificados en el contexto escolar chileno, contribuirán en la construcción del significado institucional de referencia de funciones lineales y cuadráticas de nuestro estudio, de manera que constituyan una base para elaborar la propuesta de conocimientos del profesor de matemática.

Asimismo, Espinoza (2015) presenta indicadores de algunos descriptores de conocimiento especializado del profesor de matemática, la misma que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. *Indicadores para el KOT respecto a funciones*

Fenomenología	
• Conoce distintos contextos donde aparece la función como variación proporcional o cambio lineal. • Conoce los ámbitos numéricos donde es factible trabajar en el nivel en el que enseña.	• Conoce distintos significados de la función como correspondencia, como proceso de entrada-salida o de trasformación.
Propiedades y sus fundamentos	
• Conoce la propiedad de linealidad de una función. • Conoce la posición relativa de una recta en el plano con respecto a los ejes del sistema.	• Conoce el concepto de constante de proporcionalidad y cómo ella se utiliza en la determinación de la representación de la función.
Registros de representación	
• Conoce las representaciones de funciones en tablas de valores y su construcción. • Conoce el lenguaje natural como un enunciado. • Conoce el lenguaje algebraico como una expresión algebraica $y = f(x)$ o ecuación funcional. • Conoce la representación de funciones en diagrama sagital. • Conoce la representación de funciones con conjunto de pares ordenados.	• Representación en el plano cartesiano como conjunto de puntos. • Representación en material concreto como *geoplano* o como software educativo. • Conoce la representación más adecuada según la situación planteada. • Reconoce las diferencias entre las representaciones de una relación funcional de una no funcional

Definiciones y Procedimientos	
• Conoce la definición de función. • Establece criterios para determinar si un ejemplo o situación corresponde a una función. • Domina la ubicación de puntos en el plano.	• Domina la resolución de ecuaciones como herramienta para determinar imágenes y pre imágenes. • Domina la evaluación de expresiones algebraicas y operar con números racionales.

Fuente: Espinoza (2015, p. 4)

Espinoza (2015) señala que tales indicadores mostrados no son exhaustivos, con lo cual queda la posibilidad de seguir investigando sobre este subdominio del conocimiento del profesor de matemática en este tema específico. Nosotros pretendemos ampliar dicha investigación a funciones cuadráticas e incluir aspectos del razonamiento algebraico en los conocimientos del profesor de matemática para enseñar tal noción.

Por otro lado, Torres (2016) presenta los resultados de una experiencia de formación de profesores en ejercicio, enfocada en la creación de problemas sobre funciones cuadráticas, a través de una estrategia que integra la noción de creación de problemas y el análisis didáctico propuesto por el EOS.

Es así que, la investigación propone desarrollar competencias en los profesores para crear problemas *didácticamente buenos* entorno a funciones cuadráticas por lo que, a través de un estudio de casos con 16 profesores en ejercicio, se propone identificar los conocimientos matemáticos de los profesores sobre funciones cuadráticas. Para ello se emplearon indicadores propuestos en la taxonomía de MATH relacionados con las exigencias del currículo nacional de la educación básica regular y se elaboró un cuestionario diagnóstico.

Asimismo, la investigación reconoce cierta deficiencia en el conocimiento de los profesores, que participaron en el estudio, de la noción de función cuadrática, así como un escaso uso de argumentos para justificar procedimientos, además solo un número reducido de profesores mostró habilidades para conjeturar una solución, a partir de la información brindada. Para la investigación se elaboró un cuestionario en base a una matriz de especificaciones de la taxonomía de MATH asociadas a funciones cuadráticas, que se presenta a continuación en la Tabla 3; consideramos que dicha matriz será de utilidad en nuestro estudio pues también será un insumo para la construcción del significado de referencia de funciones lineales y cuadráticas.

Tabla 3. *Matriz de especificaciones de la Taxonomía de MATH asociadas a la función cuadrática.*

Dimensión	**Categorías**	**El profesor**
Reproducción	Conocimientos previos	Recuerda la definición de función cuadrática mediante su regla de correspondencia.
	Comprensión	Comprende la representación gráfica de la función cuadrática mediante su regla de correspondencia verificando los puntos en el plano correspondiente a dicha función.
	Uso frecuente de procedimientos	Resuelve problemas de funciones cuadráticas usando procedimientos correctos.
Conexión	Información	• Reconoce si el gráfico de una función en el plano de coordenadas rectangulares corresponde a una función cuadrática. • Transforma representaciones algebraicas de la función cuadrática en gráficos en el plano de coordenadas rectangulares. • Explica su procedimiento en la resolución de problemas sobre funciones cuadráticas con un orden lógico.
	Aplicación en nuevos contextos	Elabora representaciones algebraicas de la función cuadrática, utilizando una regla de correspondencia.
Razonamiento	Justificación e interpretación	Interpreta el resultado obtenido luego de la resolución de problemas que involucre funciones cuadráticas.
	Implicaciones, conjeturas y comparaciones	Justifica con rigor su procedimiento en la resolución de problemas que involucren funciones cuadráticas
	Evaluación	Valora el uso de la función cuadrática para la resolución de problemas de contexto matemático específico.

Fuente: Torres (2016, p. 120)

En ese mismo sentido, la formación propuesta en Torres (2016) introdujo aspectos teóricos desarrollados por el EOS para que los profesores elaboren configuraciones cognitivas de la soluciones de alumnos, con el objetivo de proporcionarles herramientas para identificar la matemática presente en las soluciones de los alumnos. De esa manera, se esperaría que los profesores puedan intervenir en forma pertinente para lograr aprendizajes.

Asimismo, presenta una distinción entre configuraciones epistémicas formalistas y realistas; las primeras existentes en su mayoría en el ámbito universitario en el que predominan las matemáticas modernas con una estructura deductiva rigurosa, este tipo de configuraciones se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. *Configuración epistémica formalista en secundaria*

<table>
<tr><th colspan="2">LENGUAJE</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representaciones verbales: Función, variable, conjunto de partida, conjunto de llegada, pares ordenados, componentes, relación, dominio, rango, aplicación, regla de correspondencia.

Representaciones simbólicas:
• Representaciones conjuntistas:
$f: A \to B, \mathbb{R}, \in, \forall, =, \to, \subset, (a,b), \wedge \ldots$
• Expresiones analíticas:
$y = f(x); f(x) = mx + b, f(x) = x,$
$f(x) = x^2$
Representaciones gráficas:
Gráficas cartesianas, Diagramas de Venn.</td></tr>
<tr><th>SITUACIONES PROBLEMAS</th><th>CONCEPTOS (DEFINICIONES)</th></tr>
<tr><td>Problemas de aplicación. Descontextualizados (especialmente de aplicación de procedimientos).
Ejemplos (ejemplifican las definiciones)</td><td>Conjunto, producto cartesiano, correspondencia, relaciones binarias, aplicaciones (sobreyectiva, inyectiva, biyectiva).
Función, dominio, rango, variables (dependiente e independiente), función lineal, función cuadrática, función constante, función identidad.</td></tr>
<tr><th>PROPOSICIONES</th><th>PROCEDIMIENTOS</th></tr>
<tr><td>Propiedades de las funciones básicas. Teoremas asociados a ecuaciones e inecuaciones algebraicas. Análisis de las funciones cuadráticas completando cuadrados.</td><td>Determinar si es función. Calcular el dominio.
Calcular el rango de una función. Determinar los elementos de la función lineal y cuadrática.
Representar funciones a partir de la fórmula.</td></tr>
</table>

ARGUMENTOS
Ejemplificación de la técnica a seguir (por ejemplo el cálculo del dominio y rango de una función, el cálculo de los elementos de la parábola asociada a una función). Deductivos a partir de las definiciones (en el caso de la definición de función como el conjunto de pares ordenados (x, y), la determinación del gráfico de la función cuadrática utilizando dominio y rango).

Fuente: Torres (2016, p. 73)

A diferencia de las configuraciones epistémicas, las configuraciones realistas suponen que las reglas matemáticas se pueden justificar por su relación con situaciones extra matemáticas y suelen vivir en las instituciones secundarias, este tipo de configuraciones se muestra en la Tabla 5. Las configuraciones epistémicas formalistas y realistas serán de utilidad en nuestra investigación para la construcción del significado de referencia de las funciones cuadráticas.

Asimismo, consideramos que ambas configuraciones deben ser identificadas por parte del profesor de matemática, puesto que forman parte de los diferentes significados que adquiere la función. Por ello los objetos primarios descritos en tales configuraciones deben también ser considerados entre los conocimientos, de la faceta epistémica, del profesor de matemática.

Tabla 5. *Configuración epistémica realista en secundaria*

LENGUAJE
Representaciones verbales: Función, variable, conjunto de partida, conjunto de llegada, componentes, relación, correspondencia entre conjuntos. Se presentan funciones mediante un enunciado simbólico. *Representaciones simbólicas*: • Representaciones conjuntistas: $f: x \to 4x - 3, =, \to, \ldots$ • Expresiones analíticas: $f(x) = 4x + 3$ *Representaciones gráficas:* Gráficas cartesianas, gráficas tabulares.

SITUACIONES PROBLEMAS	CONCEPTOS (DEFINICIONES)
Problemas de aplicación contextualizados en los que las variables son magnitudes. Ejemplos que suponen la construcción de la noción de función.	Magnitud, modelos de funciones básicas (proporcionalidad directa, afines, cuadráticas y de proporcionalidad inversa). Función. Rango y dominio. Variables. Crecimiento. Decrecimiento. Máximo y mínimo.
PROPOSICIONES	**ARGUMENTOS**
Propiedades de las relaciones (pocas). Propiedades de magnitudes directas e indirectamente proporcionales.	Ejemplificación de la técnica a seguir. Inducción a partir de situaciones problemáticas. Gráficos visuales.
PROCEDIMIENTOS	
Determinar si es función utilizando una regla de correspondencia. Calcular el dominio y rango de una función, utilizando tabla de valores mediante una regla de correspondencia. Traducir y convertir las funciones en diferentes registros. Determinar el máximo y el mínimo de una función.	

Fuente: Torres (2016, p. 78)

Por otro lado, también se han desarrollado investigaciones donde la caracterización del razonamiento algebraico se considera como parte del conocimiento que debe poseer un profesor de matemática. Para ello, se considera la investigación de Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi (2015) en donde se elabora un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) sobre razonamiento algebraico elemental (RAE) al que se denomina cuestionario CDM-RAE. Esta investigación toma en cuenta dos variables de contenido en la formulación del cuestionario, a saber, *variable de contenido algebraico*, en el cual se distingue estructuras, funciones y modelizaciones; y la *variable de contenido didáctico*, en el cual se consideran las facetas epistémica, cognitiva e instruccional del modelo del CDM propuesto por Godino (2009). Es así que para lograr evaluar los conocimientos del modelo CDM de los profesores en formación consideran tareas con apartados que indagan sobre el conocimiento matemático y el didáctico a través de las variables propuestas.

En ese mismo sentido, de acuerdo a Áké (2013) el profesor debe ser consciente de que el razonamiento algebraico implica establecer generalizaciones a través de una adecuada argumentación, reconocer objetos algebraicos involucrados en una tarea, simbolizar en forma progresiva hasta la formalidad. Señala también que mediante situaciones adecuadas se puede impulsar el desarrollo de capacidades de los alumnos para identificar regularidades, encontrar patrones, comprender el concepto de variables, así como el de igualdad, nociones de ecuaciones y funciones.

Las investigaciones presentadas muestran la pertinencia de los tres aspectos en los que estamos interesados, al igual que Espinoza (2015) pretendemos explicitar cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos en tareas que involucran a las funciones lineales. Además de esclarecer conocimientos entorno a las funciones cuadráticas como se hizo en Torres (2016), pero más allá de esclarecer los conocimientos asociados al contenido algebraico, también pretendemos explicitar los conocimientos asociados al desarrollo del razonamiento algebraico de los alumnos.

1.2 Contexto en el que se desarrolla la investigación

El programa de estudio del área de matemática del ministerio de educación, presenta entre sus contenidos a las funciones lineales y cuadráticas, como parte de la educación secundaria. Asimismo, propone un enfoque centrado en la resolución de problemas. Es así que, precisamos de un referente institucional del objeto algebraico *funciones lineales y cuadráticas*; el que comprenda la matemática, así como los procesos que se llevan a cabo en la resolución de tales situaciones problemas.

Estamos interesados en identificar los conocimientos que debe tener el profesor de matemática de educación secundaria para que pueda comprender la complejidad, en términos del grado de características algebraicas, presentes en las situaciones problemas de los textos escolares que dispone. A continuación describiremos el ámbito en el que el profesor de la educación secundaria peruana desempeña su labor docente.

La educación básica regular en el Perú se organiza en siete ciclos, siendo los ciclos sexto y séptimo los que corresponden a la educación secundaria, como se muestra en la Tabla 6. Se cuenta con un documento marco denominado Currículo Nacional organizado por áreas, entre las que se encuentra el área de Matemáticas.

Tabla 6. *Estructura de la educación secundaria peruana.*

	Ciclo	Edad	
Educación Básica Regular (Secundaria)	VI	[12-14] años	Primer grado de secundaria Segundo grado de secundaria
	VII	[14-16] Años	Tercero grado de secundaria Cuarto grado de secundaria Quinto grado de secundaria

Así mismo, de acuerdo con Perú, Ministerio de Educación (2016), se definen los aprendizajes en términos de competencias, entendiendo por competencia a la habilidad que tiene una persona de combinar distintas capacidades para lograr un propósito en una situación dada. Las competencias presentes en el área de matemática son:

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

A su vez, cada una de estas competencias está conformada por capacidades, correspondientes a recursos tales como conocimientos, habilidades y actitudes empleados por los alumnos ante una situación dada.

En la descripción del área de matemática se identifican objetos algebraicos, especialmente en la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, donde una de sus componentes se refiere al tema de función, como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. *Competencia y capacidades asociadas a función.*

Competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	**Capacidades**
Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para esto plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos.	• **Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas:** Referido a transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica que generalice la interacción entre estos. Implica también evaluar el resultado o la expresión formulada, con respecto a las condiciones de la situación; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión. • **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:** Es expresar su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones estableciendo relaciones entre estas; usando lenguaje algebraico y diversas representaciones • **Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales:** Seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas que le permitan resolver ecuaciones, determinar dominios y rangos, representar rectas, parábolas, y diversas funciones. • **Argumenta afirmaciones sobre relaciones** de cambio y equivalencia: Elaborar afirmaciones sobre variables, reglas algebraicas y propiedades algebraicas, razonando de manera inductiva para generalizar una regla y de manera deductiva probando y comprobando propiedades y nuevas relaciones.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 147)

En la descripción de la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio", se señala que se debe identificar patrones, encontrar y caracterizar generalidades, modelar fenómenos reales referidos a las relaciones cambiantes entre dos o más magnitudes, por medio de gráficos hasta expresiones simbólicas como las igualdades, desigualdades, equivalencias y funciones.

Es así que, resulta indispensable proporcionar a los profesores herramientas que puedan emplear en su labor docente, para desarrollar en sus alumnos las competencias establecidas en el currículo nacional.

En Perú, Ministerio de Educación (2016) se hace una descripción del nivel esperado de la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" correspondientes al final de los Ciclos VI y VII, donde se aborda el tema *función lineal y cuadrática*, como se muestra en la Tabla 8, es así que es pertinente el objeto matemático de nuestro estudio.

Tabla 8. *Descripción del nivel de la competencia contenidos asociados a funciones lineales y cuadráticas.*

Descripción de la competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio al final del ciclo		**Contenido**
VI	• Resuelve problemas referidos a interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones; traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos, progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín y relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. • Expresa su comprensión de la relación entre función lineal y proporcionalidad directa, las diferencias entre una ecuación y una inecuación lineal y sus propiedades, la variable como un valor que cambia, el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación, las usa para interpretar resultados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. • Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. • Plantea afirmaciones sobre propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones así como de una función lineal, lineal afín con base a sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas,	Proporciones directa e inversa Progresiones aritméticas Progresiones geométricas. Ecuaciones e inecuaciones lineales. Función lineal Función afín Dominio y rango de funciones lineal y afín Gráfica de función lineal y afín

	encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige.	
VII	• Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores, o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales, evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. • Expresa su comprensión de las regla de formación de las sucesiones y progresiones geométricas,, la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones, la diferencia entre función lineal, cuadrática y exponencial, y sus parámetros, usándolas para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráfico. • Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, soluciones ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas, evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. • Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplan entre expresiones algebraicas, así como predecir el comportamiento de variables, comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas.	Progresiones geométricas. Ecuaciones cuadráticas. Dominio y rango de funciones cuadráticas. Gráfica de funciones cuadráticas. Modelación de fenómenos del mundo real con funciones, interpretando y explicando en el contexto de la situación. Análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados. Gráficas de las funciones cuadráticas, interpretando su comportamiento.

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2016, p. 148)

Asimismo, consideramos que es necesario brindarle al profesor herramientas que faciliten el desarrollo de las competencias que se pretenden en el currículo nacional, necesarias para reconocer en la actividad escolar rasgos algebraicos así como de herramientas para la identificación, transformación y diseño de tareas adecuadas para fomentar el desarrollo del razonamiento algebraico. Tales tareas podrían ser mejoras de las que disponen en los textos didácticos de educación secundaria, puesto que, según señala Gaita (2009), estos son, la mayoría de las veces, el referente de los profesores para elaborar sus sesiones de clase.

Dada la importancia que presenta el tema de *funciones* en la educación escolar, a partir de su estudio, como lo indica el constructo elaborado por EOS, se puede desarrollar el razonamiento algebraico en forma progresiva, por este motivo es relevante el poder explicitar conocimientos didáctico-matemáticos en este tema específico de la matemática, como un primer paso para posteriormente elaborar un plan formativo con profesores interesados en mejorar su práctica, como se señala en el proyecto educativo nacional al 2021, donde se presenta como objetivo estratégico la mejora del sistema integral de la formación inicial y continua de los profesores.

Por otro lado, el Ministerio de Educación, con el propósito de brindar orientaciones pedagógicas y didácticas, proporciona a los profesores el documento Perú, Ministerio de Educación (2015) como complemento de los estándares de aprendizaje de las competencias pretendidas para cada ciclo de la educación básica regular, donde se proponen "indicadores de desempeño" para cada una de las capacidades presentes en una competencia en un determinado ciclo. Este documento señala como competencia, relacionada a nuestro objeto de interés, "Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio". Algunos de los indicadores de desempeño a los que se hace mención en dicho documento son los siguientes:

- Reconoce relaciones en situaciones de regularidad, expresándolos en un patrón que combina transformaciones geométricas.
- Plantea relaciones de posición empleando un patrón de repetición de variadas transformaciones geométricas.
- Reconoce relaciones no explícitas entre datos numéricos en situaciones de regularidad, que permitan expresar la regla de formación de una progresión aritmética.
- Asocia reglas de formación de una progresión aritmética con situaciones afines.

Tales indicadores muestran rasgos propios del razonamiento algebraico asociado a tareas funcionales señalados por el EOS, es así que se hace pertinente la adquisición, por parte de los profesores, de competencias necesarias para percibir si efectivamente se están alcanzando los niveles esperados de aprendizaje por parte de los alumnos, correspondientes a un determinado ciclo. Así, de ser necesario, el profesor deberá reorientar su accionar para alcanzar tales niveles (Perú, 2015). Sin embargo, este documento brinda un número limitado de ejemplos para que los profesores puedan comprender el nivel de progreso en el que se encuentran sus alumnos, por lo que consideramos que tales orientaciones son insuficientes. Se hace necesaria una propuesta que explicite el conocimiento didáctico-matemático por parte del profesor, que comprenda un conocimiento especializado, el que le permita reconocer los objetos y procesos que se ponen en juego en la práctica matemática que desarrollan sus alumnos.

Como bien se señala en los documentos oficiales que brinda el Ministerio de Educación, el álgebra puede ser considerada como un instrumento de modelización matemática que es producto de un proceso gradual. Sin embargo, el desarrollo del razonamiento algebraico no es una tarea sencilla, tal como se indica en Cai y Knuth (2011), no es suficiente la propuesta curricular donde se señalan aspectos generales acerca de la actividad algebraica, se hace necesario que los profesores participen de esta visión ampliada del álgebra. A fin de ser competentes para reconocer objetos y procesos algebraicos puestos en juego, por sus alumnos, ante tareas matemáticas escolares, para valorar las tareas de los libros didácticos con el propósito de acrecentarlas hacia el logro de niveles progresivos de algebrización. Es así que se torna pertinente la identificación de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de educación secundaria, para el desarrollo del razonamiento algebraico en sus alumnos, ante tareas que involucren a las funciones lineales y cuadráticas.

1.3 Pregunta y objetivos de la investigación

En base a los argumentos teóricos propuestos en Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) el que presenta rasgos característicos del razonamiento algebraico mediante la atribución de niveles de algebrización, nos servirá como directriz para identificar tareas funcionales apropiadas del significado de referencia de funciones lineales y cuadráticas, en la educación secundaria. Asimismo el modelo teórico de CDM de un profesor de matemáticas presentado por Godino (2009) muestra diversas facetas a partir de las nociones teóricas propuestas por el EOS, proporcionándonos herramientas teóricas para analizar los conocimientos requeridos en la práctica educativa de los profesores para promover el razonamiento algebraico de los alumnos, asociado a tareas que involucren funciones lineales y cuadráticas.

Por otro lado, la investigación presentada por Aké (2013) determina que los profesores en formación de México no son conscientes de los procesos presentes en el desarrollo de ideas algebraicas, así mismo dicho estudio revela las necesidades formativas requeridas para identificar las relaciones y propiedades que están presentes en una determinada actividad algebraica, tal investigación realiza un estudio general abarcando distintos objetos algebraicos, por lo que creemos necesario hacer un estudio, más exhaustivo, que señale conocimientos didáctico-matemáticos que debe poseer un profesor en referencia al tema *funciones lineales y cuadráticas*.

En ese mismo sentido el estudio de Aké (2013) señala que, es necesario hacer un estudio para identificar una tipología de tareas que de acuerdo a investigaciones en didáctica de la matemática promuevan el razonamiento algebraico sobre un tema específico, en un determinado nivel educativo, a partir de la caracterización del razonamiento algebraico proporcionada por el EOS. Señala también la importancia de diseñar acciones formativas que aborden las facetas de los conocimientos didáctico-matemáticos propuestos por Godino (2009). Por lo que nuestra investigación propone explicitar tal conocimiento didáctico-matemático, presente en la faceta epistémica, necesario para resolver tareas que involucren funciones lineales y cuadráticas, a partir de la identificación de tareas que desarrollen el razonamiento algebraico en los alumnos.

Es así que, proponemos la siguiente pregunta de investigación que orientará nuestro estudio:

¿Cuál es el CDM de la faceta epistémica que debe poseer un profesor de educación secundaria del Perú, para desarrollar el razonamiento algebraico en sus alumnos, en relación a tareas que involucren funciones lineales y cuadráticas*?*

Para poder responder a la pregunta de investigación, se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo General

Identificar conocimientos didáctico-matemáticos de la faceta epistémica del profesor, de educación secundaria del Perú, necesarios para desarrollar el razonamiento algebraico en sus alumnos en referencia a tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas

Objetivos específicos:

- Identificar conocimientos didáctico-matemáticos en relación al contenido algebraico, que debe tener el profesor de educación secundaria, respecto a las funciones lineales y cuadráticas.
- Identificar conocimientos didáctico-matemáticos en relación al razonamiento algebraico, que debe tener el profesor de educación secundaria, para el reconocimiento de objetos y procesos algebraicos en la resolución de tareas matemáticas, que involucran funciones lineales y cuadráticas.

CAPITULO II: ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En nuestra investigación empleamos aspectos teóricos que proporciona el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática, puesto que estamos interesados en proponer un modelo de conocimientos didáctico-matemáticos de la faceta epistémica necesarios para que el profesor de educación secundaria desarrolle el razonamiento algebraico en sus alumnos, por lo que la perspectiva del EOS brinda herramientas de análisis que permiten distinguir que objetos matemáticos tienen naturaleza algebraica y conocer en qué medida los profesores deben estar familiarizados con los procesos, que favorecen el desarrollo de ideas algebraicas, necesarios para el aprendizaje de sus alumnos.

Debemos precisar que en nuestro estudio emplearemos la noción de conocimiento desde el enfoque Ontosemiótico, en el sentido ampliado incluyendo tanto comprensión como competencia sobre los temas abordados: se considera que un sujeto comprende un determinado concepto cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (Godino, Wilhelmi, Neto, Blanco, Contreras, Batanero, Estepa, Laza, 2015). Así mismo, presentamos la metodología adoptada en nuestra investigación.

A continuación presentaremos los aspectos del enfoque en el que basamos nuestra investigación, el enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemática (EOS), a fin de identificar conocimientos didáctico-matemáticos (Godino, 2009) de un profesor de educación secundaria, involucrado en tareas funcionales.

2.1. Aspectos teóricos considerados del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción matemática (EOS) es un marco teórico que articula e integra distintas posturas de la Didáctica de las Matemáticas, a fin que se tenga una perspectiva global (Godino, 2011), por la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje este modelo propone herramientas de análisis y reflexión para tales procesos (Godino, Batanero y Font, 2007). Las nociones teóricas que propone el EOS pueden ser usadas por los profesores para examinar su propia práctica (Godino, 2009).

El punto de partida del EOS es la formulación de los objetos matemáticos a partir de su ontología tomando en consideración el triple aspecto de la matemática: como una actividad de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado (Godino, Batanero y Font, 2007). En Godino et al. (2007) se presenta una síntesis de las nociones teóricas que constituyen el EOS, las cuales se componen en cinco grupos permitiendo un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas particulares de la matemática:

a. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas.
b. Configuración de objetos y procesos matemáticos.
c. Configuración didáctica.
d. Dimensión normativa.
e. Idoneidad didáctica.

A continuación pasaremos a precisar los aspectos del EOS que utilizaremos en nuestra investigación.

Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Considera como *práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar su solución, validarla o generalizarla a otros contextos. Las prácticas pueden ser propias de una persona o de una institución, formada por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemas (Godino y Batanero, 2007).

Una institución está conformada por las personas involucradas en un mismo tipo de situaciones problemáticas, el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a efectuar prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica en particular ante un problema en concreto, lo que interesa es un sistema de prácticas (operativas y discursivas) puestas en juego por los sujetos ante tipos de situaciones problemáticas. Los objetos matemáticos emergen de los sistemas de prácticas matemáticas ya sean personales (relativa al significado personal de un objeto matemático) o compartidas en el seno de una institución (relativa al significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas.

Los significados personales propuestos son:

- Global, correspondiente a la totalidad del sistema de prácticas personales que manifiesta, relativas al objeto matemático, potencialmente el sujeto.
- Declarado, corresponde a las prácticas efectivas a propósito de las evaluaciones propuestas, las que incluyen las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- Logrado, corresponde a las prácticas exhibidas acorde con lo que la institución establece, en el análisis del cambio de los significados personales que sucede en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales y emergentes de los alumnos.

Los significados institucionales propuestos son:

- Referencial, sistema de prácticas referencial usado para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza en particular este significado de referencia será una parte del significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) del objeto matemático. De acuerdo a Wilhelmi, Bencomo y Godino (2004) cuando se planifica un proceso de estudio se empieza por delimitar lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didáctica, por lo que se acude a textos matemáticos correspondientes, orientaciones curriculares y por lo general a lo que los *expertos* consideran que son las prácticas operativas y discursivas relativo al objeto, que se fija como propósito de instrucción. Con todo ello construirá un sistema de prácticas que denomina como significado institucional de referencia del objeto.
- Pretendido, es el sistema de prácticas planificado por la institución para el proceso de estudio.
- Implementado, es el sistema de prácticas empleado por el profesor en un proceso de estudio.
- Evaluado, el subsistema de prácticas empleado por el profesor para evaluar los aprendizajes.

Configuración de Objetos y Procesos Matemáticos

El EOS considera que los objetos matemáticos se derivan de las prácticas matemáticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación considera como mínimo dos niveles, en el primer nivel consideramos las entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc), en un segundo nivel tenemos a la tipología de objetos que emergen de operar sobre los objetos del nivel anterior, tales como objetos personales-institucionales, ostensivos-no ostensivos, unitarios-sistémicos, etc.

a. **Primer nivel: configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas,** cuando un agente activa un conglomerado formado por situaciones problemáticas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la Figura 3.

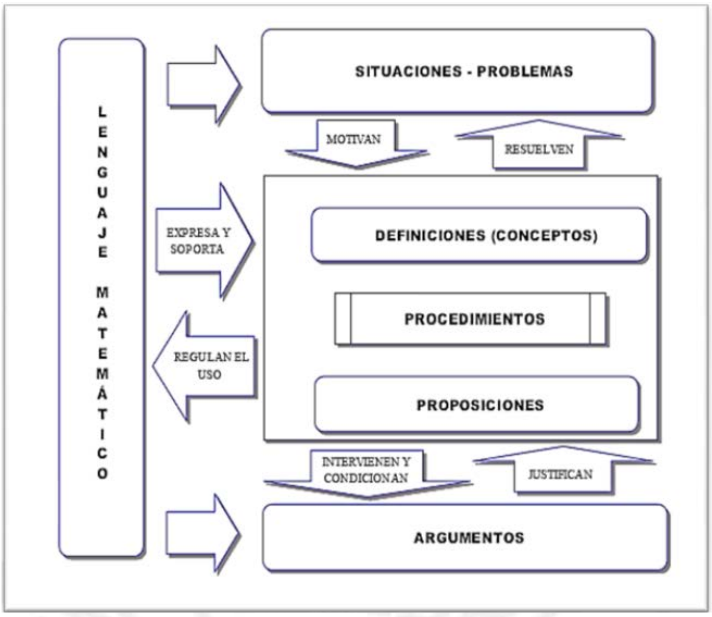


Figura 3. Configuración de Objetos matemáticos primarios

Fuente: Godino, et al. (2007, p. 6)

Es así que se propone la tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos, términos y expresiones matemáticas, símbolos, representaciones gráficas. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en la actividad matemática puede estar dado en cualquier otro registro.
- Situaciones-problemas, aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, referidas a tareas que inducen la actividad matemática.
- Conceptos-definición, entidades matemáticas para las que se puede proponer una definición.
- Proposiciones, enunciados o proposiciones sobre conceptos, es decir atributos de los objetos matemáticos.
- Argumentos, enunciados para validar proposiciones y procedimientos.

Estos objetos primarios amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales que se consideran insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática.

b. Segundo nivel: Atributos contextuales

Los objetos primarios se complementan y enriquecen considerando cinco facetas o dimensiones duales, según las circunstancias contextuales y del juego del lenguaje en el que intervengan, tales facetas son:

- Personal-institucional, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales” si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, mientras que si estos sistemas de prácticas son de un sujeto en particular se consideran “objetos personales”.
- Ostensivo-no ostensivo, se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público por lo que se puede mostrar a otro. Los objetos personales e institucionales tienen una naturaleza no ostensiva (no son perceptibles por sí mismos), pero cualquiera de estos objetos se usan en las prácticas públicas por intervención de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es una práctica relativa al juego de lenguaje en que participan.
- Expresión-contenido, la actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos, se caracterizan por ser relacionales, los objetos no deben considerarse como entidades aisladas sino en relación con otros tal relación establecida mediante *función semiótica* entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) de acuerdo a un código de correspondencia establecido por un individuo o por una institución.
- Extensivo-intensivo (ejemplar-tipo), un objeto que participa en un juego de lenguaje como caso particular y una clase más general. Esta dualidad es requerida para caracterizar la actividad matemática de generalización que indudablemente es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.
- Unitario-sistémico, en algunas ocasiones los objetos matemáticos participan como entidades unitarias, mientras que en otras aparecen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

c. Procesos

La emergencia de los objetos primarios tiene lugar mediante los siguientes procesos, indicados en la Figura 4.

- Institucionalización-personalización
- Generalización-particularización
- Análisis (descomposición)-síntesis(reificación)
- Materialización (concreción)-idealización(abstracción)

- Expresión (representación)-significación

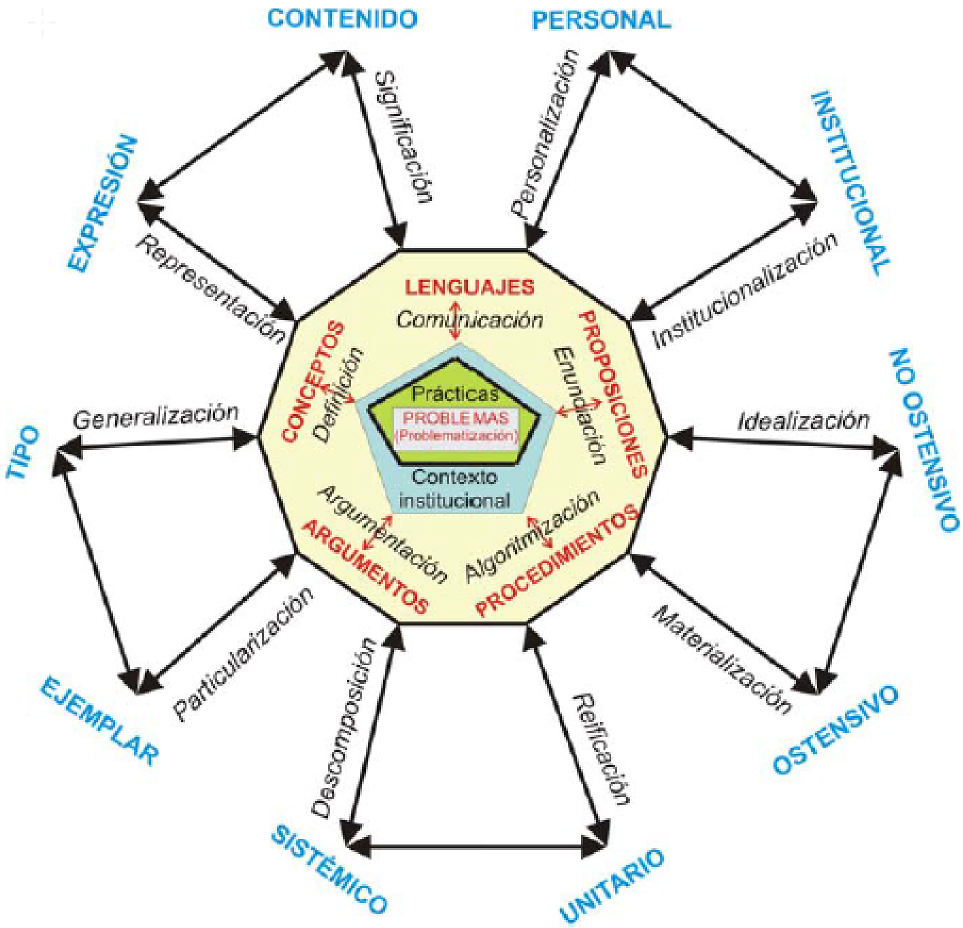


Figura 4. Configuración de Objetos y procesos

Fuente: Godino, Batanero y Font (2007, p. 10)

A continuación presentamos el último nivel de análisis, construido para valorar un proceso de estudio, creemos pertinente comentar este aspecto teórico puesto que como lo indica Godino (2009) se emplea para caracterizar el modelo de conocimientos didáctico-matemático del profesor.

Idoneidad didáctica.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes (ver Figura 5)

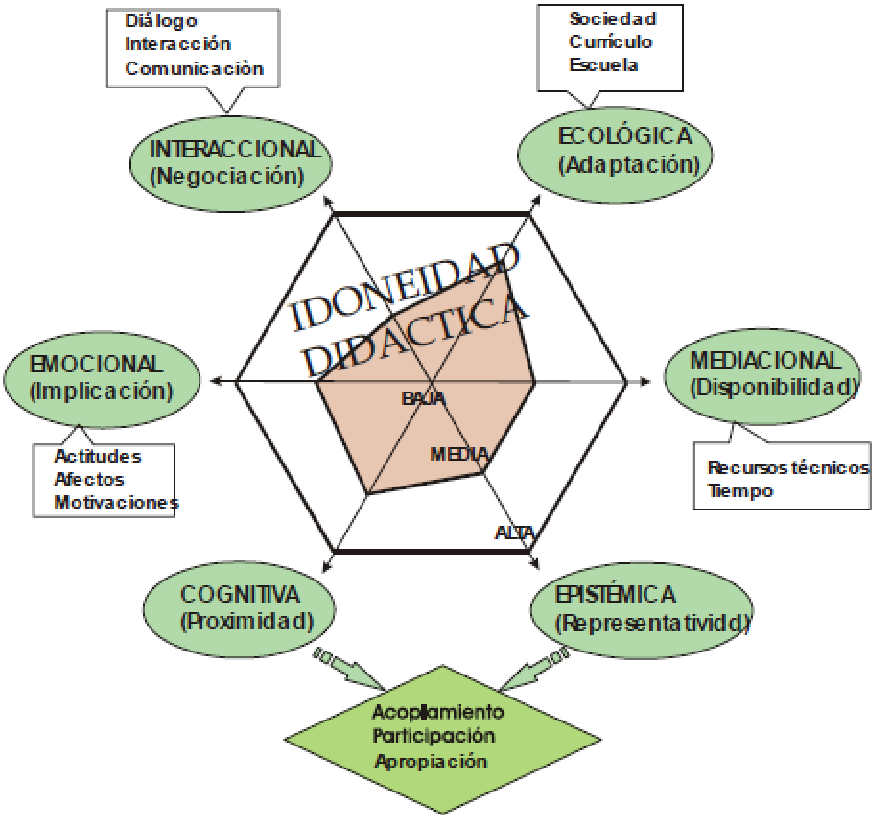


Figura 5. Componentes de la idoneidad didáctica

Fuente: Godino, Batanero y Font (2007, p. 16)

- **Idoneidad epistémica** es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- **Idoneidad cognitiva** expresa el grado de proximidad de los significados personales logrados con respecto a los significados pretendidos.
- **Idoneidad interaccional** referida al proceso de enseñanza-aprendizaje, diremos que tendrá mayor idoneidad interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales y además permitan resolver los conflictos durante el proceso de instrucción.
- **Idoneidad mediacional** es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- **Idoneidad emocional** es el grado de implicación (interés, motivación, etc) del alumnado por el proceso de instrucción.
- **Idoneidad ecológica** es el grado en el que el proceso de estudio se ciñe al proyecto educativo y a la sociedad y a los condicionamientos del entorno donde se desarrolla.

La integración de tales idoneidades y consideración de interacciones entre las mismas, constituye la *idoneidad didáctica* en referencia al criterio sistémico de adecuación respecto al proyecto educativo global.

En la siguiente sección mostramos el modelo de conocimientos que emplearemos para construir nuestra propuesta de conocimientos que debe tener el profesor para propiciar el razonamiento algebraico de sus alumnos respecto a tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas. Dicho modelo está basado en la aplicación del enfoque Ontosemiótico sobre el Conocimiento y la Instrucción matemática y comprende categorías de análisis más finas que los anteriores modelos, a saber Shulman(1987), Ball (2000), Ball, Lubienski y Mewborn, (2001) y Hill, Ball y Schilling(2008), citados por Godino(2009), que describen los múltiples tipos de conocimientos que debe poner en juego el profesor para favorecer el proceso de aprendizaje de los alumnos, en un tema específico.

2.1.1 Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor

De acuerdo a Godino (2009), el modelo de categorización de conocimientos del profesor de matemáticas que ofrece el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática es denominado Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor. Este modelo tiene en cuenta las diversas facetas o dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas, a continuación describimos tales facetas:

- Faceta epistémica: Conocimientos matemáticos en referencia a la institución donde se realiza el proceso de estudio y su distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza y aprendizaje, de los componentes del contenido (problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos).
- Faceta cognitiva: Conocimientos personales de los alumnos, es decir, la evolución de sus significados personales.
- Faceta afectiva: Distribución, a lo largo del tiempo, de los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias y valores) en relación al proceso de estudio y los objetos matemáticos.
- Faceta mediacional: Distribución de los recursos tecnológicos, manipulativos y de asignación de tiempo a las acciones y procesos.
- Faceta interaccional: Secuencia de interacciones entre profesor y alumnos, ordenada a la fijación y negociación de significados.
- Faceta ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, entre otros. Tal que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Además, para cada una de las facetas anteriores, proponen cuatro niveles de análisis del conocimiento didáctico del profesor, según el tipo de información que se requiera. Estos niveles de análisis son los siguientes:

- Prácticas matemáticas y didácticas: Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del profesor y de los discentes.
- Configuración de objetos y procesos (matemáticos y didácticos): Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen y emergen de las prácticas con el propósito de describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor esclarecedor de los conflictos en la realización y progresión del aprendizaje.
- Normas y metanormas: Identificación de la malla de reglas que condicionan y posibilitan el proceso de estudio, y que afecta a cada faceta y a sus interacciones.
- Idoneidad: Identificación de posibles mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

En la Figura 6 se presenta el modelo del conocimiento del profesor CDM, que presenta las seis facetas descritas y los cuatro niveles de análisis sobre los que se puede fijar la atención, además se señala que aunque se representan de manera disjunta los distintos niveles y facetas ellos interactúan entre sí.

Figura 6. Facetas y niveles del conocimiento matemático y didáctico del profesor

Fuente: Godino (2009, p. 21)

Debemos precisar que debido al carácter amplio de los conocimientos del profesor de matemática, para nuestro estudio únicamente consideraremos conocimientos de la faceta epistémica.

El modelo de Godino (2009) propuesto a partir del marco EOS, además de incluir facetas y niveles de análisis que refieren a categorías de análisis más “finas” de los conocimientos didáctico y matemáticos del profesor, propone también una “guía” para la formulación de consignas (ítems de evaluación) que permitan evaluar dicho conocimiento didáctico-matemático en los profesores. Así, la propuesta es que la faceta epistémica, del modelo CDM, incluye y refina al conocimiento del contenido (conocimiento común, especializado y el ampliado. Ver Figura 7).

Faceta epistémica	**Consigna**
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
Conexiones	-Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Figura 7. Conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)

Fuente: Godino (2009, p. 25)

Nuestro estudio centra su interés en la faceta epistémica, en referencia a la institución de la educación secundaria, del modelo CDM en el que según las consignas, propuestas en la Figura 7, tiene un rol preponderante pues además de las matemáticas que le permitan al profesor resolver problemas en los que pone en juego su conocimiento común y ampliado. Se debe tener presente también un conocimiento asociado a la enseñanza, lo que implica que el profesor debe poder movilizar variadas representaciones de un objeto matemático, resolver las tareas propuestas mediante distintos métodos para poder anticiparse a las soluciones de sus alumnos; relacionar el objeto matemático con otros objetos matemáticos del mismo nivel educativo en el que enseña o de niveles posteriores, proporcionar diversas justificaciones o argumentaciones, e identificar los conocimientos movilizados en la resolución de una tarea matemática.

Así mismo, el modelo del CDM propuesto por Godino (2009) aporta nuevas ideas en relación a la problemática de los modelos anteriores del conocimiento de los profesores. Sin embargo, como el mismo autor señala, los ejemplos de consignas que se plantean como parte del modelo en su faceta epistémica (mostradas en las Figuras 3) no son exhaustivos, por lo que hace falta refinamientos y adaptaciones para la elaboración de consignas que permitan evaluar o describir el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre temas concretos, en nuestra investigación estamos interesados en elaborar tal refinamiento sobre el razonamiento algebraico, en referencia a tareas funcionales presentes en los textos educativos usados por los profesores.

Entre los aspectos teóricos que emplearemos, en este capítulo distinguimos la caracterización de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental propuesto en Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012); el enfoque Ontosemiótico permite construir tal caracterización e interpretación de la naturaleza del razonamiento algebraico, el que propone que el razonamiento algebraico se puede desarrollar a través de tareas matemáticas adecuadas, tal caracterización está dada a partir de objetos, significados y procesos que se requieren y emergen en la solución de una actividad matemática, estableciendo para la actividad una configuración algebraica; el modelo en el que se distinguen cuatro niveles de algebrización, el que permite reconocer el estado de los conocimientos de los alumnos en un proceso formativo, propuesto en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014); el modelo del conocimiento didáctico matemático propuesto en Godino (2009); y finalmente la integración del modelo de conocimientos y el RAE, desarrollado por el EOS, en categorías de conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental (Godino, Fernandez, Lacasta, Neto, Wilhelmi, Contreras, Áke, Olivares y Estepa, 2015).

2.1.2 Razonamiento Algebraico Elemental desde el EOS.

Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) proponen un modelo de razonamiento algebraico elemental (RAE), el que considera a las configuraciones matemáticas de objetos y procesos herramientas de análisis para esclarecer la naturaleza de la práctica algebraica.

Objetos algebraicos:

Figura 8. Objetos implicados en la práctica algebraica

Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.492)

La práctica matemática es considerada de índole algebraica en base a la presencia de un cierto tipo de objetos que por lo general son vistos por la literatura como algebraicos. Estos pueden ser los objetos primarios propuestos en el EOS (ver Figura 8), como conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos expresados en un lenguaje alfanumérico, en una primera instancia los tipos de objetos algebraicos son:

- Relaciones, las que pueden ser: binarias, de equivalencia y de orden con sus respectivas propiedades: reflexiva, transitiva y simetría o antisimetría, las que son usadas para definir nuevo conceptos.
- Operaciones y sus propiedades, realizadas con elementos de conjuntos de diversos objetos, como números, transformaciones geométricas, etc. En el caso del cálculo algebraico se aplican propiedades como: asociatividad, conmutatividad, distributividad, existencia de elemento neutro y de un inverso. También pueden intervenir los conceptos de ecuaciones, inecuaciones y su representación con el uso de incógnitas y procesos tales como: trasposición de términos, eliminación, factorización, etc.
- Funciones, considerando los distintos tipos de funciones (lineal, afín, cuadráticas, etc) y el álgebra asociada a ellos, es decir las operaciones y propiedades asociadas a tales funciones. En ese mismo sentido es preciso diferenciar los diversos objetos asociados a su naturaleza como: variables, parámetros, fórmulas, etc; al igual que sus distintas representaciones: tabular, gráfica, fórmula analítica.
- Estructuras, sus tipos y propiedades, su estudio por lo general corresponde a niveles educativos superiores pero es posible encontrarse con esta estructura:$(N,+,\times)$ que caracteriza al semi-anillo de los números naturales.

Procesos algebraicos:

Desde el EOS en las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen y emergen de ella se pueden interpretar de diferentes enfoques, según el contexto o el juego de lenguaje empleado en dicha práctica matemática, estos enfoques se representan por parejas duales como se observa en la Figura 9. De tales dualidades consideraremos sólo tres de ellas, por su estrecha relación con la actividad algebraica.

Figura 9. Relatividad contextual de la práctica algebraica

Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.494)

- Procesos de *particularización-generalización*, desde el EOS se considera generalización en términos del reconocimiento de objetos *intensivos* y objetos *extensivos* intervinientes en las prácticas matemáticas, tales *atributos* de los objetos algebraicos emergentes de este proceso dual , son relativos al juego de lenguaje en el que interviene y no es absoluto, como por ejemplo en el caso de funciones, la función $f(x) = 2x + 1$ es un objeto extensivo de la clase de funciones afines de la forma $g(x) = ax + b$ la que correspondería a un objeto intensivo, aunque si consideramos al conjunto de las funciones polinómicas, la función g sería un objeto extensivo. Esto nos muestra el carácter relativo y contextual que tiene este modo de abordar el proceso de generalización, así como la presencia de distintos niveles de generalización que se pueden dar lugar en una práctica matemática.
- Proceso de reificación (unitarización), mediante el cual una entidad compuesta o sistémica (un intensivo) pasa a ser una entidad unitaria y participar así en otros procesos de generalización, para luego pasar a ser un intensivo de grado superior empleando los atributos de *unitario-sistémico*.
- Proceso de simbolización, parte fundamental del razonamiento algebraico permitiendo que los objetos matemáticos sean más claro para su reflexión. Tal es así que la dualidad *ostensivo-no ostensivo* aporta un artefacto que tiene lugar en los proceso de *generalización*, puesto que los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, etc) se consideran objetos ideales o mentales, es decir objetos *no ostensivos*, pero su

comunicación requiere que sean representados, es decir objetos perceptibles esto es objetos *ostensivos.*

Configuraciones algebraicas:

Según los objetos y procesos descritos en los apartados anteriores, podemos advertir distintos tipos de configuraciones algebraicas de acuerdo a los objetos algebraicos que estén en juego en la tarea matemática. A continuación, describimos diferentes tipos de configuraciones algebraicas:

Configuración intensional

Aquella en la que se reconoce en la solución del sujeto la generación de objetos intensivos, se considera que no es necesario representar con símbolos tales objetos emergentes para considerarlos parte de la práctica matemática, los que si serán necesarios si se quieren producir intensivos de mayor generalidad, presente en un grado superior de algebrización.

A continuación, consideramos una tarea propuesta en Godino, Castro, Aké, Wilhelmi (2012) en la que se muestra una configuración intensional, ante una respuesta correcta a la siguiente tarea (incompleta):

Tarea 1: *Pinta de color rojo los triángulos, de verde los círculos (redondos), de azul los cuadrados, de amarillo los rectángulos y de negro los rombos,*

Figura 10. Tarea relativa a una configuración intensional

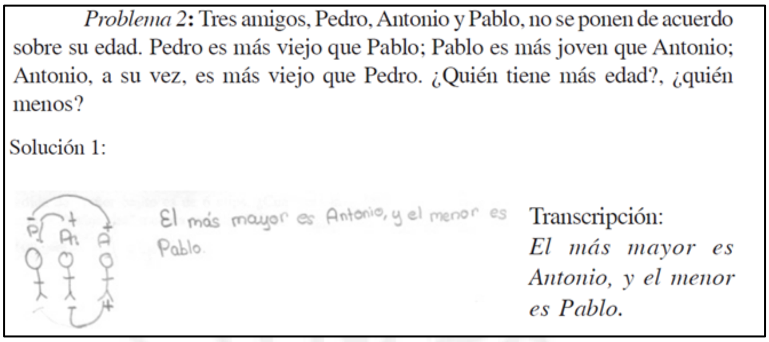
Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.501)

Es así que el alumno que responde correctamente a esta tarea, muestra un cierto grado de desarrollo de generalización y abstracción, puesto que reconoce los aspectos figurativos de los conceptos generales de círculo, cuadrado, rectángulo y rombo, presentes en las figuras a la tarea.

Configuración relacional

Aquella en la que se reconoce en la solución del sujeto los objetos algebraicos de relaciones, en la que se movilicen las relaciones conocidas y/o las propiedades inherentes a ellas.

A continuación, consideramos una tarea propuesta en Godino, Castro, Aké, Wilhelmi (2012) en la que se muestra una configuración relacional, ante una respuesta planteada por un alumno dicha tarea:


Problema 2: Tres amigos, Pedro, Antonio y Pablo, no se ponen de acuerdo sobre su edad. Pedro es más viejo que Pablo; Pablo es más joven que Antonio; Antonio, a su vez, es más viejo que Pedro. ¿Quién tiene más edad?, ¿quién menos?

Solución 1:

El más mayor es Antonio, y el menor es Pablo

Transcripción:
El más mayor es Antonio, y el menor es Pablo.

Figura 11. Tarea y solución relativa a una configuración relacional

Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.502)

En la solución del alumno podemos observar rasgos característicos del razonamiento algebraico del tipo relacional, puesto que entre las edades de los amigos hay relaciones de desigualdad, por lo que se requiere poner en juego propiedades como la de transitividad de la relación de orden en el conjunto numérico de los números naturales, el alumno muestra recursos gráficos para lograr resolver la tarea lo que permite catalogar tal configuración como relacional.

Configuración operacional

Aquella en la que se reconoce en la solución del sujeto se pone en juego letras para representar incógnitas, las relaciones se establecen mediante una ecuación, además se opera con la incógnita aplicando propiedades.

A continuación, consideramos una tarea propuesta en Godino, Castro, Aké, Wilhelmi (2012) en la que se muestra una configuración relacional, ante una respuesta planteada por un alumno dicha tarea:

Problema 1: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Un estudiante A resolvió el problema de la siguiente manera:

Sea D el dinero recibido de los padres. Representamos por x el gasto diario previsto por los padres para comer 40 días: $x = D / 40$.

Sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = D / 60$.

$40x = 60y$; además $y = x - 4$;

$40\,x = 60\,(x - 4)$; $20\,x = 240$; $x = 12$; Cantidad recibida: 12 X 40 = 480; 480€.

Figura 12. Tarea y solución relativa a una configuración operacional

Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.484)

En la solución observamos el uso de incógnitas representadas por letras, además de la aplicación de definiciones y propiedades en la ecuación planteada para obtener las incógnitas.

Configuración relacional-operacional

Aquella en la que se reconoce en la solución del sujeto algún rasgo de aplicar propiedades de relaciones y propiedades de adición entre otras.

A continuación, consideramos una tarea propuesta en Godino, Castro, Aké, Wilhelmi (2012) en la que se muestra una configuración relacional-operacional, ante una respuesta planteada por un alumno a la tarea:

Tarea 2: ¿Qué número hay que poner en lugar de [ ] en la expresión, 67 + 83 = [ ] +82?

Solución: Un alumno puede resolver la tarea sumando y restando 1 al primer miembro de la igualdad, 67+1+83 - 1, obtiene 68 + 82; a continuación resta 82 a ambos miembros y obtiene [ ] = 68.

Figura 13. Tarea y solución relativa a una configuración relacional-operacional

Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.502)

En la solución del alumno podemos observar rasgos característicos del razonamiento algebraico del tipo mixto en la que aplica propiedades de relaciones de equivalencia y la propiedad asociativa de la adición.

Configuración funcional

Aquella en la que se reconoce en la solución del sujeto algún tipo de vínculo entre las funciones con algún patrón que se pueda expresar usando otros objetos ostensivos, como gráficos, tablas, fórmulas, etc.

A continuación, consideramos una tarea propuesta en Godino, Castro, Aké, Wilhelmi (2012) en la que se muestra una configuración relacional-operacional, ante una respuesta planteada por un alumno a la tarea:

Tarea 4: Una bacteria se reproduce por reproducción celular. De cada una se obtienen dos. ¿Cuántas bacterias formarán parte de la cuarta generación? ¿Y en la quinta generación? ¿Y en la generación número 100?

Se establece una dependencia funcional entre la generación (variable independiente) y el número de bacterias correspondiente (variable dependiente). El lenguaje es aritmético y se pretende generar la regla general, o criterio de la correspondencia, al cual se puede llegar por multiplicaciones sucesivas y, subsecuentemente, por el reconocimiento del uso de potencias. Lo que podría desembocar en la expresión funcional que establece que a la generación n le corresponde 2^n bacterias.

Figura 14. Tarea y solución relativa a una configuración funcional

Fuente: Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p.504)

En esta tarea se observa que se reconoce la variable independiente de la dependiente y además de reconocer el criterio general de la correspondencia entre las variables, expresada en el lenguaje alfanumérico.

A continuación, presentamos los niveles de algebrización propuesto desde el marco del EOS, con el propósito de capacitar a los profesores dotándoles de herramientas para que logren reconocer en las prácticas matemáticas de sus alumnos características algebraicas.

2.1.3 Niveles de algebrización en la actividad matemática

En Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) se presenta el modelo del RAE propuesto en Godino et al. (2012) estructurado en niveles de algebrización, los que describen en forma progresiva características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, Godino et al. (2014) presenta cuatro niveles de algebrización.

Estos niveles de algebrización nos muestran una “frontera” entre la aritmética y el álgebra, a través de una descripción de la actividad matemática del sujeto, en términos de las dualidades y de los procesos propios de la actividad algebraica, descritos en la sección anterior. Tal frontera no está establecida o fijada, puesto que las dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica algebraica.

Cada nivel de algebrización considera los objetos y procesos que intervienen y emergen de la actividad matemática, se propone distinguir dos niveles de algebrización primarios, primitivos o incipientes, los que están entre un nivel 0 de algebrización, caracterizado por ausencia de razonamiento algebraico, y un nivel 3 de algebrización, en el que la actividad es propiamente algebraica.

En ese sentido se señala que los criterios seguidos para hacer esta caracterización por niveles se debe a la presencia de: *generación* de objetos ostensivos, reconocimiento explícito de objetos intensivos como *unidades*, uso de *símbolos*, manejo de objetos intensivos en *procesos de cálculo* y en generalizaciones. El carácter algebraico se pone en evidencia si el sujeto muestra que reconoce la generalidad como una nueva entidad unitaria y su posterior materialización, en cualquier registro, para finalmente su tratamiento analítico, este triple proceso define los niveles primarios o también nombrados *proto-algebraicos*. Asimismo, para lograr catalogar al sujeto de tener un razonamiento algebraico más avanzado, el objeto intensivo debe ser considerado como una nueva unidad a través de su representación con lenguaje alfanumérico, a continuación detallamos los niveles de algebrización:

- Ausencia de razonamiento algebraico (nivel 0): Práctica matemática en la que intervienen objetos extensivos expresados en lenguaje natural, icónico o gestual. Podrían participar símbolos que representan valores desconocidos pero como resultado de operar con objetos extensivos. En *tareas de generalización*, en el que se conoce la regla recursiva mas no la regla de formación, indicando que no se logró la generalización.
- Nivel incipiente de algebrización (nivel 1): Práctica matemática en la que intervienen objetos intensivos expresados en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Podrían participar símbolos que representan los intensivos reconocidos pero sin operar con tales objetos. En *tareas funcionales* se reconoce la generalidad aunque en un lenguaje distinto al simbólico-literal. Mientras que en tareas estructurales se emplean propiedades, relaciones de las operaciones y podrían intervenir datos desconocidos expresados en símbolos.
- Nivel intermedio de algebrización (nivel 2): Práctica matemática en la que intervienen indeterminadas o variables a través de un lenguaje simbólico-literal para representar a los intensivos reconocidos. En tareas estructurales las ecuaciones manejadas son de la forma

$Ax \pm B = C$. En *tareas funcionales* ya se reconoce la generalidad, aunque no se opera con los objetos intensivos para obtener la expresión reducida a su mínima expresión.

- Nivel consolidado de algebrización (nivel 3): Práctica matemática en la que se producen objetos intensivos a través de su representación simbólica-literal, operando con tales objetos intensivos.

A continuación, organizaremos los niveles de algebrización en la Tabla 9, en el que tenemos en cuenta únicamente nuestro tema de interés, además hemos considerado el desarrollo de estos niveles, propuesto en la investigación de Martínez (2014).

Tabla 9. *Indicadores de los niveles de algebrización en la resolución de tareas que involucran funciones.*

Nivel	**Descripción**
0	• Extiende patrones numéricos y geométricos simples • Conoce la regla recursiva mas no la regla de formación, aun no se logra la generalización.
1	• Identifica patrones numéricos y geométricos simples, y los explica verbalmente. • Crea patrones numéricos y geométricos simples. • Completa tablas siguiendo patrones preestablecidos que usan simbología algebraica. • Identifica variables dependientes e independientes en un fenómeno cualquiera. • Describe la relación entre dos elementos matemáticos cualesquiera. • Representa algebraicamente situaciones aditivas que incluyen variables, aunque aún no opera con ellos. • Representa algebraicamente sentencias numéricas simples. • Reconoce la generalidad aunque en un lenguaje distinto al simbólico-literal.
2	• Identifica patrones numéricos y geométricos simples, y los modela por medio del lenguaje simbólico-literal. • Predice el cambio de una variable en función de la otra y toma como referencia fenómenos intra matemáticos y extra matemáticos. • Diseña tablas para analizar el cambio de dos variables relacionadas. • Representa algebraicamente situaciones aditivas y multiplicativas que incluyen variables, aunque no los opera para obtener una expresión reducida. • Reconoce la generalidad.
3	• Formula reglas canónicas y equivalente para representar sucesiones. • Describe el cambio de una variable en función de la otra. • Representa algebraicamente situaciones diversas, a partir de referentes verbales, escritos, gráficos o tabulares. Además, opera la representación algebraica reduciéndola a su mínima expresión. • Reconoce expresiones equivalentes entre distintas representaciones de la función.

Fuente: Martínez (2014, p. 32)

Una vez construido el significado de referencia sobre funciones lineales y cuadráticas; pretendemos reconocer aquellas tareas, del significado de referencia, que permitan el desarrollo del razonamiento algebraico, es así que nuestra propuesta de conocimiento didáctico-matemático que debe tener el profesor, será presentada en base a tales tareas, en donde explicitaremos los objetos y procesos algebraicos puestos en juego en las resoluciones de tales tareas así como del reconocimiento del nivel de algebrización que se le atribuye.

A continuación, mostramos las categorías de conocimientos sobre el razonamiento algebraico elemental propuesto en Godino, Fernandez, Lacasta, Neto, Wilhelmi, Contreras, Áke, Olivares y Estepa (2015) que permitió elaborar un cuestionario para evaluar los conocimientos sobre el razonamiento algebraico en futuros profesores.

2.1.4 Categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre el RAE

En Godino et al. (2015) se presenta el diseño del cuestionario CDM-RAE para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre el RAE, desarrollado a partir de la caracterización del razonamiento algebraico elemental y del modelo de conocimientos didáctico-matemáticos, ambos aspectos en el marco del EOS. En el cuestionario se consideran dos variables, para el contenido algebraico y para el contenido didáctico.

Para el contenido algebraico se consideran las siguientes categorías:

- Estructuras: relación de equivalencias, propiedades de las operaciones, ecuaciones.
- Funciones: patrones aritméticos, patrones geométricos, función lineal, afín, cuadrática.
- Modelización: problemas de contexto resueltos mediante el planteamiento de ecuaciones o relaciones funcionales.

Para el contenido didáctico se consideran las siguientes categorías:

- Faceta epistémica: reconocimiento de objetos y proceso algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, generalización y modelización) y reconocimiento de niveles de algebrización.
- Faceta cognitiva: significados personales de los alumnos, conflictos de aprendizaje sobre objetos y procesos algebraicos.
- Faceta instruccional: recursos para la enseñanza del algebra y su acondicionamiento al currículo escolar.

Godino, Fernandez, Lacasta, Neto, Wilhelmi, Contreras, Áke, Olivares y Estepa (2015) aporta a nuestra investigación en el sentido que nos presenta descriptores a las categorías de la variable de contenido didáctico del modelo CDM respecto al razonamiento algebraico. Nuestro objetivo es elaborar una propuesta de conocimientos didáctico-matemáticos de la faceta epistémica, que refine los descriptores propuestos en este modelo, para la variable de contenido funciones específicamente en la subcategoría funciones lineales y cuadráticas, considerando también la categoría de modelización puesto que en la educación secundaria se presentan situaciones extra matemáticas que involucran funciones lineales y cuadráticas.

Asimismo, Godino et al. (2015) señala que en los planes de formación de profesores no se contempla de manera sistemática la formación didáctica-matemática sobre el razonamiento algebraico elemental, indica también que la aplicación del cuestionario CDM-RAE, desarrollado en su investigación, permitiría conocer el estado de conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento algebraico elemental para así diseñar acciones formativas. Es así que presentar una propuesta sobre los conocimientos didáctico-matemáticos tiene relevancia para su llevada a escena en una formación, en el tema abordado, con profesores en ejercicio interesados en mejorar su práctica docente.

2.2 Aspectos metodológicos

De acuerdo a Martínez (2006) la metodología, por definición, es el camino que se debe seguir para poder alcanzar los objetivos de investigación, la metodología cualitativa es aquella que busca estudiar el todo integrado de algo que es una unidad de análisis y que hace que ese algo sea como es, tratando de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, y el método cualitativo específico va depender de la naturaleza de la estructura a estudiar. La investigación cualitativa se produce normalmente en situaciones naturales a diferencia de una investigación cuantitativa que requiere una manipulación de comportamientos y lugares.

En ese sentido, esta investigación analizará principalmente aspectos cualitativos, como los objetos primarios del significado de referencia, así como los indicadores de conocimientos didáctico-matemáticos que debe poseer un profesor de educación secundaria para lograr desarrollar el razonamiento algebraico en sus alumnos, respecto a tareas funcionales presentes en su práctica educativa, presentando características propias de la metodología cualitativa.

Para Bogdan y Biklen (1994), las características de una investigación empleando una metodología cualitativa son múltiples, entre ellas:

- La investigación cualitativa emerge del proceso de investigación en lugar de ser pre-establecidos; en consecuencia, las preguntas de investigación pueden cambiar y ponerse a cero durante el proceso.
- La investigación cualitativa es profundamente interpretativa y descriptiva; el investigador realiza una interpretación de los datos, se describen los participantes y los lugares, analiza los datos para establecer temas o categorías y deduce conclusiones.
- Los estudios cualitativos son inductivos; el investigador analiza los datos en forma inductiva; no existe la preocupación por la búsqueda de datos o pruebas que evidencien o rechacen la hipótesis.
- El investigador cualitativo ve los fenómenos sociales en forma holística, utilizando, al mismo tiempo, la recogida de datos, análisis y proceso de escritura.
- El investigador cualitativo es el principal instrumento de recolección de datos; el investigador pasa mucho tiempo en el lugar de estudio para entender los contextos

Nuestra investigación principalmente aplicará un análisis teórico y no experimental, nos proponemos presentar una propuesta de conocimientos del profesor, de matemáticas de educación secundaria, necesarios para desarrollar el razonamiento algebraico en sus alumnos respecto a funciones lineales y cuadráticas, el que será planteado en base a un estudio con textos didácticos de educación secundaria, investigaciones en didáctica de la matemática detallados en los antecedentes, y textos matemáticos; a través de un análisis epistémico de las fuentes señaladas, el mismo que será inductivo y cíclico.

El interés de esta investigación es el de analizar la actividad matemática presente en tareas que involucren *funciones lineales y cuadráticas* en la educación secundaria, a través del análisis de tales tareas presentes en textos didácticos de educación secundaria empleados por profesores, puesto que en muchos casos son su único referente teórico, para los procesos de enseñanza y aprendizaje con sus alumnos, apoyados además de investigaciones en didáctica de la matemática que aborden ese aspecto con el objetivo de presentar una propuesta de conocimientos didáctico-matemáticos, presente en la faceta epistémica, que debe poseer el profesor para desarrollar en sus alumnos el razonamiento algebraico ante tareas que involucren a tales funciones.

Es así que por las características de nuestra investigación emplearemos el método de **análisis de contenido** de textos didácticos de educación secundaria, ya que según López (2002) es un método empleado para analizar y estudiar las comunicaciones de forma sistémica buscando analizar las ideas planteadas en tales textos. De acuerdo a Maz (2009) el análisis de contenido puede ser cuantitativo o cualitativo dependiendo del enfoque empleado, asimismo presenta como procesos básicos para el análisis de contenido:

- Elección de la unidad de análisis.

- Elaboración del conjunto de indicadores o categorías.
- Elaboración de un fundamento lógico que sirva como guía para colocar las respuestas en cada categoría.

El análisis de contenido, en nuestra investigación, tiene carácter cualitativo puesto que el objetivo es estudiar a las funciones lineales y cuadráticas en relación a los significados que presenta, nuestra unidad de análisis serán textos matemáticos, textos didácticos de educación secundaria, además de investigaciones en didáctica de la matemática que aborden este tema, asimismo debemos indicar que el enfoque teórico en el que está enmarcada nuestra investigación nos brinda herramientas metodológicas, tal es así que para construir el significado de funciones en la institución de secundaria emplearemos las categorías que nos brinda el significado institucional de referencia, donde tales categorías están conformadas por los objetos primarios del significado institucional; y sus respectivas descripciones, propuestos por el enfoque Ontosemiótico, nos proporcionan el fundamento lógico para colocar las respuestas en cada categoría.

Como se ha indicado en los aspectos teóricos de nuestra investigación, el significado de un concepto varía de acuerdo a la institución considerada. Además, el significado en la institución secundaria no necesariamente se corresponde con el significado atribuido por los matemáticos profesionales, de un tema específico.

En ese sentido, el objetivo general de nuestra investigación es determinar conocimientos didáctico-matemáticos que debe poseer un profesor de secundaria para que pueda desarrollar el razonamiento algebraico en sus alumnos, para tal fin consideramos necesario establecer todos los elementos puestos en juego al resolver una determinada tarea respecto a funciones de primer y segundo grado en la institución de secundaria que pretendemos analizar.

Es así que, como primer paso pretendemos construir un significado de referencia para las funciones de primer y segundo grado en la institución de secundaria. Para ello empleamos el análisis de contenido a diversas fuentes, entre ellas los textos destinados a la enseñanza en instituciones educativas públicas del Perú así como los documentos oficiales empleados por los profesores en tales instituciones. Puesto que según Ortiz (1999, citado por Cobo, 2003), el texto didáctico se considera como un segundo nivel de trasposición didáctica, después del primer nivel que lo constituirán los currículos y programas oficiales, por lo que el profesor que emplea tales textos debe vigilar permanentemente los contenidos que presentan cuidando que el contenido a estudiar no presente un s*ignificado sesgado*.

En base a este análisis de textos, como señalan Robert y Robinet (1989, citados por Cobo, 2003) se puede conocer de forma indirecta las concepciones del profesor, sobre un contenido específico. Por tanto, construir el significado de referencia institucional permitirá delimitar los conocimientos de contenido matemático del que disponen y deben tener los profesores de secundaria del país, respecto al contenido específico que estamos abordando. Es así que se desprende el primer objetivo específico de nuestra investigación.

Asimismo, el segundo objetivo específico se obtendrá mediante la puesta en práctica de la caracterización del razonamiento algebraico a través del reconocimiento de los objetos y procesos algebraicos puestos en juego en la resolución de las tareas, que favorezcan el desarrollo del razonamiento algebraico de los alumnos, identificados en el significado institucional de referencia. Puesto que el reconocimiento de estos objetos y procesos algebraicos por parte del profesor constituye el conocimiento didáctico que debe poseer.

Finalmente, el último objetivo específico se alcanzará explicitando los niveles de algebrización correspondientes a las situaciones identificadas en el significado institucional de referencia, debido a que el reconocimiento del nivel de algebrización en las resoluciones a las tareas, por parte del profesor, forma parte del conocimiento didáctico que debe poseer.

Es así que planteamos los siguientes procedimientos para alcanzar nuestros objetivos específicos.

- Selección de investigaciones en didáctica de la matemática, donde se aborda el razonamiento algebraico elemental, a las funciones lineales y cuadráticas, así como conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática.
- Selección de textos didácticos de educación secundaria, así como también de textos matemáticos donde se ocupen de las funciones lineales y cuadráticas.
- Selección de los capítulos en donde se tratan a las funciones en estudio.
- Realizar un análisis de contenido de los capítulos seleccionados de las fuentes consideradas, siguiendo los siguientes pasos:
    - Hacer una lectura minuciosa de los capítulos que abordan el tema de funciones, clasificando y agrupando los objetos primarios.
    - Elaborar tablas que sinteticen los objetos primarios encontrados.
- El procedimiento anterior nos permitirá determinar las situaciones, lenguajes, procedimientos, propiedades, definiciones y argumentos que conforman el significado de referencia, de funciones lineales y cuadráticas, en la institución de educación secundaria.
- A partir de los tipos de situaciones identificadas en el significado de referencia, se seleccionaran aquellas situaciones que favorecen el razonamiento algebraico mediante la aplicación de la caracterización del razonamiento algebraico propuesta por el EOS.

- Elaborar las soluciones expertas de las situaciones identificadas en el paso anterior, para esclarecer los objetos y procesos puestos en juego además de identificar los procesos algebraicos presentes en tales situaciones.
- Determinar los niveles de algebrización de las soluciones expertas de las situaciones identificadas en el significado de referencia.

De acuerdo a los aspectos teóricos del EOS que estamos considerando, el primer paso para poder establecer algunos cocimientos del profesor de matemática, es determinar un *modelo* que presente los objetos y procesos algebraicos alrededor de las situaciones problemas de funciones lineales y cuadráticas. Tal *modelo* es el significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas en la institución de secundaria.

En el siguiente capítulo mostraremos el significado de referencia construido a partir del análisis de contenido de diversas fuentes y su posterior uso para identificar algunos conocimientos, en relación al contenido algebraico.

CAPITULO III: CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA, EN RELACIÓN AL CONTENIDO ALGEBRAICO SOBRE FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS.

El objetivo del capítulo es el de explicitar conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática en relación al contenido algebraico del objeto matemático en estudio, como se señala en los aspectos metodológicos un punto importante para lograr tales conocimientos es la construcción del significado de referencia de funciones lineales y cuadráticas.

De acuerdo a los aspectos teóricos adoptados en la investigación, el significado de los objetos matemáticos puede variar en distintas instituciones, nuestro interés es determinar tal significado en la educación secundaria, para la obtención del significado haremos un análisis de contenido de textos didácticos e investigaciones en didáctica de la matemática que abordan a las funciones en estudio. En este análisis se distinguirán, en las prácticas matemáticas, una serie de objetos intervinientes los que, de acuerdo a Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), también forman parte de funciones, los objetos: funciones algebraicas, operaciones con funciones y propiedades, funciones proposicionales, variables, fórmulas y parámetros, distintas formas de representación de las funciones, patrones aritméticos y geométricos, secuencias y regularidades.

Finalmente, presentamos indicadores de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, de acuerdo a los objetos primarios identificados en el significado de referencia.

3.1 Construcción del significado institucional de referencia de funciones lineales y cuadráticas en la educación secundaria.

Según Godino, Batanero, Font (2007) el significado institucional de referencia de un objeto matemático, en particular de la *función,* se entiende como el sistema de prácticas compartidas en el seno de una institución para resolver un tipo de situaciones-problemas. Es el sistema de prácticas que se adopta como referencia para construir el significado pretendido; para la elaboración del significado de referencia se debe tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego tal objeto matemático. Es así que, a fin de explicitar las prácticas matemáticas que ponen en juego a las funciones construiremos el significado de referencia para las funciones lineales y cuadráticas, en la institución secundaria.

La reconstrucción del significado institucional de referencia de función resulta de gran importancia puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, necesitan un estudio profundo sobre el significado de los objetos matemáticos que conforman tal contenido. A partir del significado de referencia de un objeto se determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una institución educativa específica.

Esto permitirá establecer criterios para seleccionar situaciones-problemas adecuadas y generar prácticas matemáticas que puedan ser incluidas en los planes y procesos de formación de profesores. Por tanto, es pertinente, la reconstrucción del significado de referencia de funciones, para establecer las categorías del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemática.

Dado que el significado de un objeto matemático puede variar según la institución, la construcción del significado de referencia de la institución secundaria, se hará a partir de textos didácticos empleados en la secundaria peruana; sin embargo, para ampliar ese significado, teniendo en cuenta que se trata de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores, consideraremos también textos matemáticos utilizados en cursos de pre-cálculo y cálculo de educación superior e investigaciones en didáctica de la matemática que abordan el tema de funciones lineales y cuadráticas. El detalle de las fuentes empleadas se presenta en la Tabla 10.

Tabla 10. *Fuentes empleadas para la construcción del significado de referencia de la institución de secundaria.*

Fuente	Titulo	Autores	Año
Texto didáctico: Educación Secundaria	Matemática 1 Editorial: Norma	E. Huapaya, J. Ynfanzon, S. Pacheco, J. Brito, M. Rivera.	2015
Texto didáctico: Educación Secundaria	Matemática 2, Secundaria Editorial: Norma	R. Marin, J. Santisteban, A. Vergaray, N. Espinoza, E. Onsihuay.	2012
Texto didáctico: Educación Secundaria	Matemática 3 Editorial: Santillana	C. Mejia, C. Valverde, R. Lafosse, S. Huailla, J. Torres, R. Moy.	2016
Texto didáctico: Pre-grado	Calculus Editorial: Reverté	Spivak M.	2012

Texto didáctico: Pre-grado	Pre cálculo, Gráfico, numérico, algebraico.	Demana F, Waits, B., Gregory D., foley D.	2007
Texto didáctico: Pre-grado	Pre cálculo	Stewart J.	2007
Texto didáctico: Dirigido a profesores de secundaria	La Matemática de la Enseñanza media Volumen 1	Lages E., Pinto, P., Wagner, E., Morgado, A.	2000
Tesis de Maestría en enseñanza de ciencias exactas y naturales	El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica.	Roldan, O.	2013
Tesis de Maestría en enseñanza de las matemáticas.	Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico.	Torres, C.	2016
Trabajo de grado de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.	Algunas herramientas de la interdisciplinariedad para la Comprensión del concepto de función lineal.	Gómez Bello, W.	2011
Artículo en didáctica de la matemática	Identificación de indicadores del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre funciones mediante el análisis didáctico.	Espinoza, G	2015
Artículo en didáctica de la matemática	Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros.	Godino, J., Wilhelmi, M., Neto, T., Blanco, T., Contreras, A., Díaz-Batanero, C., Estepa, A. y Lasa, A.	2015
Artículo en didáctica de la matemática	Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática aplicación a una experiencia de enseñanza de la	Godino, J., Wilhelmi, M., Bencomo, D.	2016

	noción de función.		
Artículo en didáctica de la matemática	Epistemología y Didáctica de las Matemáticas.	Font, V.	2007
Libro de enseñanza de matemáticas: dirigido a profesores	Aportes para la enseñanza. Nivel secundario. Matemática. Función cuadrática, Parábola y Ecuaciones de Segundo Grado.	Ministerio de Educación. Buenos Aires.	2014

El foco de atención al analizar estas fuentes será identificar los objetos primarios sobre funciones lineales y cuadráticas, que se ponen en juego ante situaciones que involucran dicha temática.

Lenguaje

Son las palabras, símbolos, expresiones, notaciones y toda representación del objeto abstracto y sirven para representar las definiciones y propiedades, así como para describir las situaciones. Su importancia se debe a que en el trabajo matemático los usamos normalmente en representación de los objetos abstractos o de las situaciones en las que intervienen.

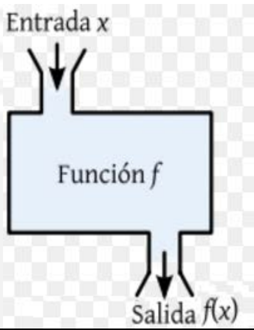
La siguiente organización está sujeta principalmente a las cuatro configuraciones epistémicas del Holo-significado de la noción de función presentado en Godino, wilhelmi, Bencomo (2016), ver Figura 2. Así creemos necesario considerar cuatro tipos de lenguajes, que mostramos a continuación.

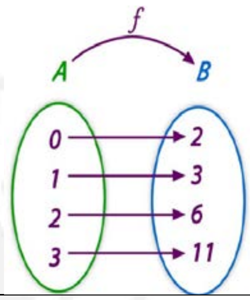
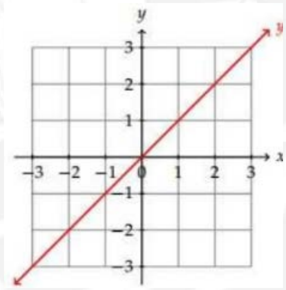
Tabla 11. *Lenguaje del significado de referencia de funciones.*

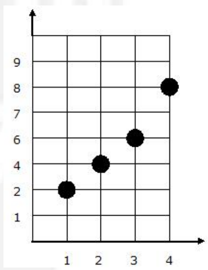
DESCRIPTORES DE LENGUAJES	EJEMPLO
Verbal	Función, magnitud, relación, función lineal, función afín, representación, dependencia, proporción directa, proporción inversa, variable independiente, variable dependiente, par ordenado, la ordenada en el origen (y −intercepto), pendiente, plano cartesiano, diagrama sagital, dominio, rango, imagen, conjunto de llegada, asíntotas, regla de formación, sistema de coordenadas cartesianas, eje de ordenadas, eje de abscisas. Descriptores verbales: Es el doble del valor dado, es el triple del valor dado más uno, es la inversa del número dado.

<table>
<tr><td colspan="2">Numérico</td><td>Números naturales.

Uso de tablas para representar las funciones:

<table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>-3</td><td>-3</td></tr><tr><td>-2</td><td>-2</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Gráfico</td><td>Diagramas</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Planos cartesianos</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Simbólico-literal</td><td>Conjuntista</td><td>Previos: símbolos:+, -, ×, ÷ , potencia, ∈, ⊂,∪,∩,

$(a,b), [a,b],]a,b[, [a,+\infty[,]a,+\infty[,]-\infty,b[,$

$]-\infty,b[$.

Emergentes:

$f=\{(x,y): y=f(x)\}$, $f=\{(a;5),(b;5),(c;5)\}$,

$Dom(f)$, $Ran(f)$.</td></tr>
</table>

Simbólico-literal	Expresión analítica $y = f(x)$	Letras: x, y, z, t, d, e. Ecuaciones: $y = ax, y = mx + n, y = \frac{1}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$.

A continuación presentamos una tipología de situaciones.

Situaciones

Son los campos de problemas, tareas y aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, del que emergen los objetos matemáticos de funciones lineales y cuadráticas.

La organización de situaciones que presentaremos, considera principalmente la investigación de Godino et al. (2016), donde se presentan las distintas configuraciones asociadas al concepto de función, tales configuraciones se clasifican según el contexto en el que se aborda a dicho concepto, a saber, conjuntista, analítico, gráfico y tabular.

Sin embargo, en el significado de referencia, que en cierta modo representa un *significado ideal*, creemos necesario incluir situaciones que integran dos o más contextos de uso del concepto función; esto se hará pues Godino, et al. (2016) señalan como objetivo fundamental para la enseñanza de la noción de función, la integración de las diferentes configuraciones asociadas a la misma, de tal manera que los alumnos sean capaces de realizar un *tránsito flexible* entre ellas.

Por otro lado, Godino et al. (2015) presenta como una subcategoría del conocimiento didáctico-matemático sobre el RAE, en referencia al contenido algebraico, la importancia del reconocimiento de situaciones de modelización, constituidos por problemas contextualizados (extra-matemáticos) resueltos mediante el planteamiento de relaciones funcionales. En ese sentido incluiremos también en la organización, situaciones de modelización.

S1: Problemas en contexto tabular

Situaciones donde el contexto de uso de la función interviniente es tabular, en esta categoría consideramos aquellos problemas que exigen el reconocimiento de la regularidad para obtener valores numéricos de las magnitudes que participan en la relación funcional.

Consideramos aquellas situaciones que exigen reconocer una variación constante entre las magnitudes presentes, para obtener valores numéricos.

Por ejemplo: La siguiente tabla muestra la correspondencia entre algunos de los valores entre x e y.

X	1	3	5	8	12	16	17	20	34
Y	7	11	15	21	29	37	39	45	73

¿Cuál es el valor de y si $x = 2$? ¿Si x aumenta en una unidad, en cuánto aumenta y?

Fuente: Roldan (2007, p.80)

Asimismo, consideramos aquellas situaciones donde se pide evaluar funciones cuadráticas, donde se pide el valor numérico de una función a partir de la representación de la función y de un valor de su domino.

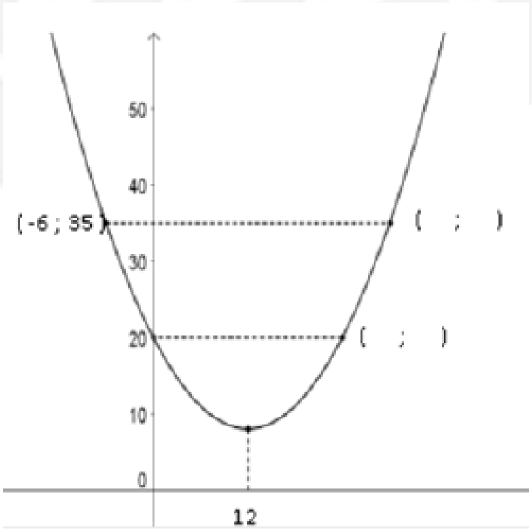
Por ejemplo: Sea f la función "Área de un cuadrado", si la longitud del lado del cuadrado es 3. Halle el valor de la función f en dicho valor.

Fuente: Propia

S2: Problemas en contexto gráfico

Situaciones donde el contexto de uso de la función interviniente o que finalmente se pide determinar es gráfico. En esta categoría podemos identificar problemas donde se pide interpretar el gráfico de la función a través de la identificación de intervalos de crecimiento, decrecimiento, simetrías, concavidad y convexidad.

Por ejemplo: Para la siguiente gráfica obtenga las coordenadas de los puntos marcados:



Fuente: Buenos Aires (2014, p.56)

S3: Problemas en contexto analítico

Situaciones donde el contexto de uso de la función interviniente o que finalmente se pide determinar es analítica, donde se exige el reconocimiento y la representación simbólica-literal de la relación funcional.

Estas características se presentan, por ejemplo, en problemas donde se pide hallar el término general de sucesiones, relacionadas con funciones lineales y cuadráticas. Las sucesiones son funciones que presentan como dominio a los números naturales, en éste tipo de situaciones es necesario que se reconozca la regularidad para poder encontrar el término general.

Por ejemplo: A partir de la secuencia siguiente

Indica el número de puntos necesarios para la construcción de la figura que se encuentra en la n-ésima posición.

Fuente: Godino, Wilhelmi, Neto, Blanco, Contreras, Díaz-Batanero, Estepa, Lasa (2013, p.226)

También podemos mencionar en esta categoría a aquellas situaciones en las que se pide resolver ecuaciones de primer y segundo grado, referidas a situaciones donde se tiene la representación simbólica-literal de la función lineal o cuadrática y se busca el valor o valores que toma la variable independiente.

Por ejemplo: Dada la siguiente función $f(x) = (x-2)^2 - 5$

¿Existe otro valor del dominio que tenga la misma imagen que $x = 2$? ¿Por qué? ¿Existe otro valor del dominio que tenga la misma imagen que $x = -1$? ¿Por qué?

Adaptado de: Buenos Aires (2014, p.55)

S4: Problemas en contexto conjuntista

Situaciones donde el contexto de uso de la función interviniente o que finalmente se pide determinar es conjuntista, de acuerdo a Godino, et al. (2016) en un contexto conjuntista la noción de función se formaliza mediante un par ordenado, por tanto este significado se fundamenta sobre axiomas de la teoría de conjuntos.

Por ejemplo: Determine si $f = \{(1;4),(2;5),(2;6),(3;6),(4;7)\}$ es una función.

Fuente: Huapaya, Ynfanzon, Pacheco, Brito, Rivera (2015, p.137)

S5: Problemas que integran diferentes contextos de uso, asociados a la noción de función

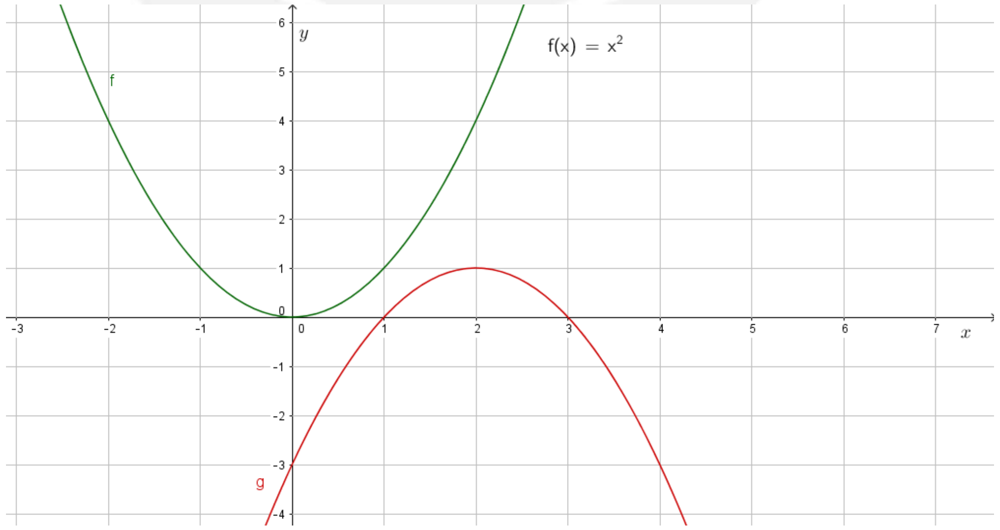
Situaciones en donde es necesaria la intervención de dos o más contextos de uso de la noción de función. Consideramos en esta categoría a los problemas donde se pide reconocer y caracterizar funciones lineales o cuadráticas, en cualquiera de sus representaciones.

Por ejemplo: Demuestre que cada punto del gráfico de la función $f(x) = x^2$ equidista del punto $(0,\frac{1}{4})$ y de la gráfica de la función $g(x) = -\frac{1}{4}$.

Fuente: Spivak (2012, p.74)

En este ejemplo se pide establecer que todo punto del gráfico de una función cuadrática, es decir, la parábola cumple una *propiedad* que la caracteriza; situación que puede abordarse a partir del reconocimiento del foco y de la directriz de la parábola como lugar geométrico, o en forma analítica.

Por ejemplo: Dadas las gráficas de las funciones f y g, encuentra la expresión analítica de la función g.



Adaptado de: Stewart (2007, p.190)

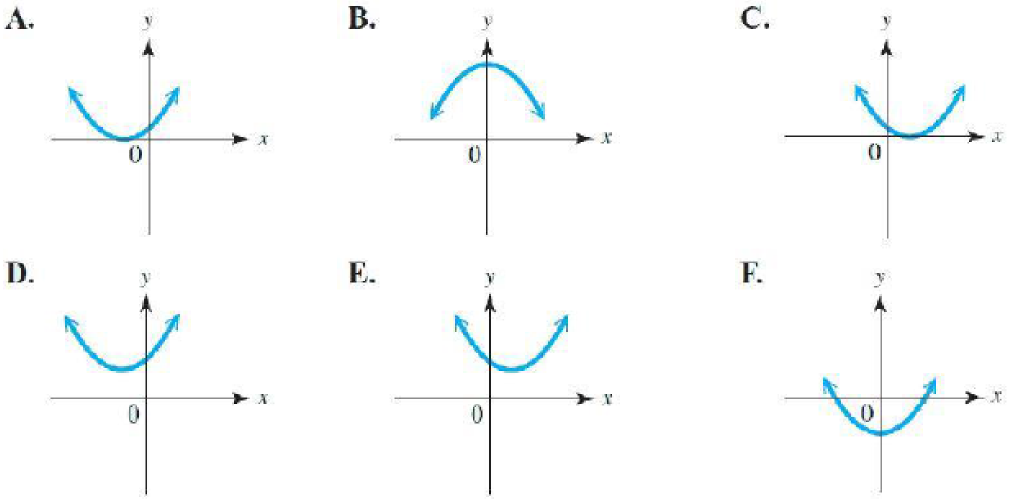
En este ejemplo se pide reconocer la relación entre las representaciones gráficas de las funciones cuadráticas, haciéndose necesario encontrar la transformación entre ambas funciones, para obtener así la representación simbólico-literal de la función pedida.

Asimismo, consideramos las situaciones donde se pida establecer relaciones entre distintas representaciones de una función lineal o cuadrática.

Por ejemplo: Complete el siguiente cuadro relacionando gráficos y funciones.

A	B	C	D	E	F

$$p(x) = x^2 - 5 \qquad s(x) = -x^2 + 4$$
$$q(x) = (x-1)^2 \qquad t(x) = (x+1)^2$$
$$r(x) = (x-1)^2 + 1 \qquad u(x) = (x+1)^2 + 1$$



Fuente: Torres (2016, p.257)

S6: Problemas de modelización

En Gómez (2011) se señala la importancia que adquieren las situaciones extra-matemáticas en el proceso de aprendizaje de la función lineal, ya que de esta forma puede adquirir mayor significado para los alumnos, mostrándoles evidencias de que este concepto aparece en muchos contextos además del matemático.

De acuerdo a Godino et al. (2015), son problemas contextualizados los que pueden tener menor o un mayor grado de complejidad para hacer una distinción. Así, siguiendo a Font (2007), convenimos en hacer una clasificación en términos de la complejidad de los procesos necesarios para su resolución, como sigue:

S6.1: Problemas contextualizados introductorios

Problemas que tienen por objetivo presentar una situación del mundo real que el alumno pueda resolver con sus conocimientos previos de forma que facilite la construcción, de los conceptos nuevos que van a adquirir.

En esta subcategoría podemos considerar a problemas de variación constante entre dos magnitudes, donde se pide encontrar el valor de una de las magnitudes cuando la otra toma un valor particular. Este tipo de tareas son consideradas frecuentemente en textos didácticos de educación secundaria para iniciar el estudio de funciones lineales.

Por ejemplo: Un cocinero tarda 10 horas en preparar comida para 500 comensales ¿Cuántas horas tardará en preparar comida para 1000 comensales, en las mismas condiciones iniciales? ¿Qué relación existe entre el tiempo y el número de comensales?

Adaptado de: Huapaya, Ynfanzon, Pacheco, Brito, Rivera (2015, p.134)

S6.2: Problemas contextualizados evocados de aplicación,

Problemas relativamente sencillos, los que sirven para que los alumnos reconozcan las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.

En esta subcategoría consideramos situaciones donde se requiere encontrar la representación simbólico-literal de la función que modela la relación entre las variables identificadas.

Por ejemplo: En la tabla se presenta información sobre dos magnitudes, la altura de un árbol y la longitud de su sombra a una hora y en un lugar determinado:

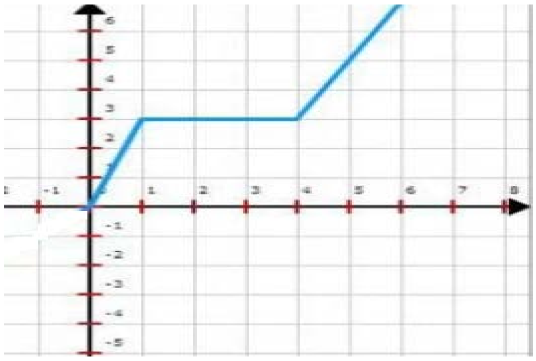
X (altura árbol en m.)	1	2	4	5	0.5	9	12
Y (long. Sombra en m.)	1,5	3	6	7,5	0,75	13,5	18

Encuentre la relación entre ambas variables.

Fuente: Gómez (2011, p.31)

Asimismo, consideramos situación de interpretación de representaciones de las funciones lineales y cuadráticas.

Por ejemplo: La siguiente gráfica representa la distancia, en metros, recorrida por una moto en función del tiempo, en minutos, transcurrido.



¿Qué sucede con la moto entre el primer y el cuarto minuto?

Fuente: Huapaya, Ynfanzon, Pacheco, Brito, Rivera (2015, p.190)

Consideramos problemas de modelización relacionadas con funciones cuadráticas, de aplicación.

Por ejemplo: En un terreno cuadrado que mide x m de largo, se construirá una casa. La autoridad competente exige que la casa se construya a una distancia de por lo menos 4,5 m de todos los lados del terreno. Indique la regla de correspondencia de la función que asigne a cada longitud x del terreno, la mayor área posible de la casa.

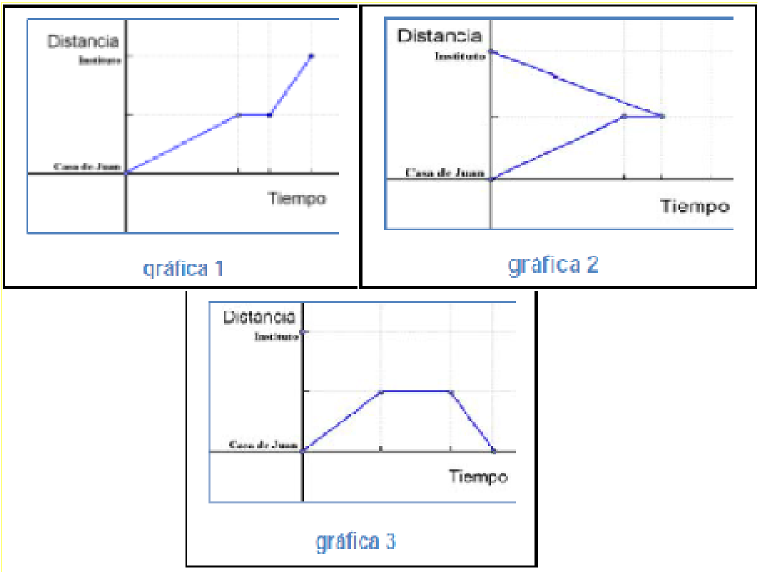
Fuente: Propia

S6.3: Problemas contextualizados evocados de consolidación

Problemas más complejos, los que sirven para aplicar los conocimientos adquiridos previamente en el proceso de instrucción.

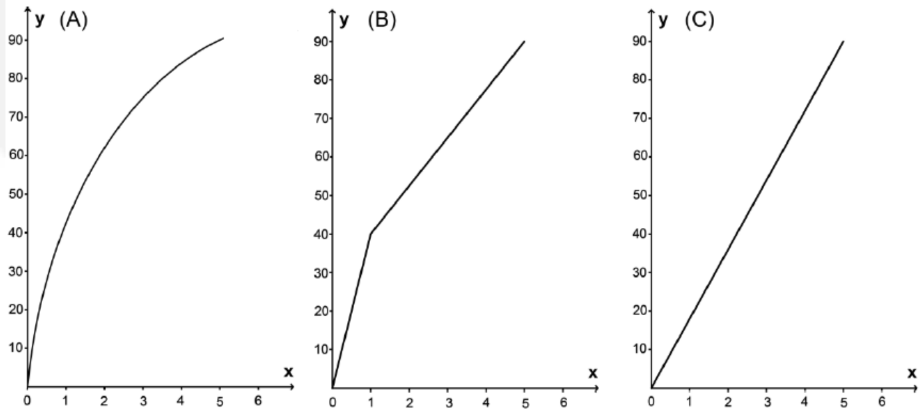
A continuación, presentamos dos situaciones, en las que se requiere una adecuada interpretación de la situación, además de un uso del contexto gráfico de las funciones lineales y lineales afines para poder resolver, es así que consideramos pertinente ubicarlas en esta subcategoría por el grado de complejidad que este tipo de tareas presenta.

Juan va al instituto desde su casa, un día se encuentra con su amigo y se queda charlando un ratito. Como se le ha hecho tarde sale corriendo para llegar a tiempo a la primera clase. Indique cuál de las siguientes gráficas corresponde de manera adecuada a la situación planteada.



Fuente: Huapaya, Ynfanzon, Pacheco, Brito, Rivera(2015, p.190)

Por ejemplo: Para llenar con agua un recipiente de una capacidad máxima de 90 litros se usa un grifo cuyo caudal es constante e igual a 18 litros por minuto. Indica cuál de las tres representaciones gráficas corresponde a la situación descrita, siendo que en el eje de las X se representa el tiempo en minutos y en el eje de las Y el volumen del agua en litros.



Fuente: Godino, Wilhelmi, Neto, Blanco, Contreras, Díaz-Batanero, Estepa, y Lasa (2015, p.227)

Asimismo, consideramos que las situaciones de optimización, corresponden a esta categoría por el alto grado de complejidad que conlleva su tratamiento. Las situaciones consideradas representan un primer acercamiento a las situaciones de optimización que serán abordadas con un mayor grado de generalidad en un curso de cálculo.

Por ejemplo: En el distrito de la Victoria, se encuentra el emporio comercial de Gamarra. Marlene es una pequeña empresaria que tiene su negocio en ese lugar. Su utilidad diaria está definida por la función $f(x) = -x^2 + 40x - 300$, donde x representa la cantidad de polos vendidos. ¿Cuántos polos debe vender para obtener la mayor utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

Fuente: Mejia, Valverde, Lafosse, Huailla, Torres, Moy (2016, p. 238)

Vemos que esta situación presenta a la función, a optimizar, ya modelada. Estas situaciones son muy comunes en textos didácticos de educación secundaria, debemos mencionar que este tipo de situaciones son abordadas en un contexto gráfico, aunque también pueden ser desarrolladas en contexto analítico.

A diferencia de la anterior situación problema, a continuación mostramos un problema donde se tiene que plantear la función que se va optimizar, constituyendo un problema con mayor complejidad que el anterior, y con poca presencia en textos didácticos de educación secundaria.

Por ejemplo: De cada esquina de una pieza de cartón de 8 por 15 pulgadas se corta un cuadrado de x pulgadas por lado y los lados se doblan hacia arriba para formar una caja sin tapa. Plantee la función área de la base de la caja en función de x, estableciendo su dominio de definición. Además encuentre el valor de x que hace que el área sea máxima.

Fuente: Demana, Waits, Gregory, Foley (2007, p.152)

De acuerdo a Font (2007), en muchos de los problemas de modelización, la descontextualización, referida al proceso que traduce la realidad en un objeto matemático, requiere el uso de situaciones de enseñanza-aprendizaje "ricas" las que implican una globalización de contenidos. Por ello, creemos necesario continuar con la clasificación de los problemas de modelización y distinguir dos categorías adicionales. Estas se refieren a problemas intradisciplinarios e interdisciplinarios, dicha clasificación corresponde a tareas de modelización y pueden referirse tanto a situaciones extra-matemáticas como intra-matemáticas, en estas categorías predomina las relaciones establecidas alrededor de la situación.

S6.4: Problemas intradisciplinarios

Son problemas en los que se establecen relaciones entre contenidos que forman los diferentes bloques del currículo de matemáticas.

En esta categoría podemos considerar aquellas situaciones en las que se pide expresar áreas de figuras geométricas conocidas a través de funciones lineales y cuadráticas.

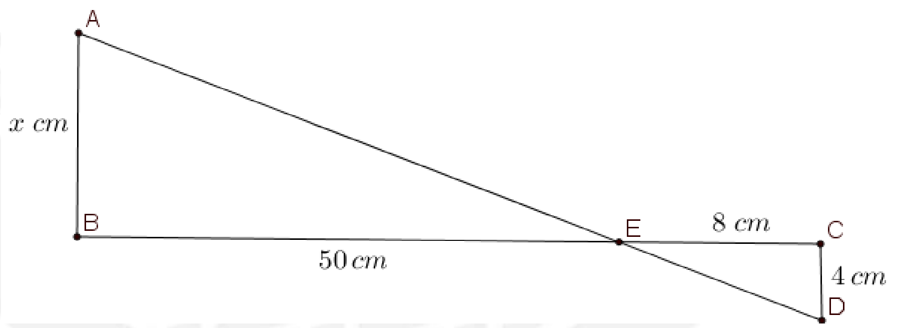
Por ejemplo: Describa el área de un círculo en función de su radio, asimismo como función de su diámetro. Identificando variable dependiente e independiente en cada caso

Fuente: Demana, Waits, Gregory, Foley (2007, p.151)

El tema de áreas es abordado en el bloque de geometría del currículo de matemática desde la educación primaria y puede ser empleado para establecer relaciones funcionales en situaciones familiares a los alumnos. Esta situación exige reconocer la relación de dependencia para posteriormente representarla en forma simbólica-literal.

Asimismo, resolver situaciones de ampliación o reducción de figuras geométricas mediante homotecias, son un tipo de situaciones que se hacen en bloque de geometría, las que son un primer acercamiento a funciones lineales, a través de la semejanza de triángulos y del teorema de Tales para la obtención de medidas.

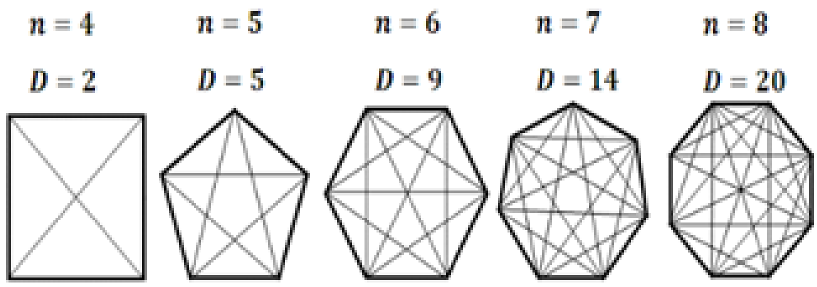
Por ejemplo: Halle el valor de x



Fuente: Propia

Además, en el bloque de geometría existen situaciones que conllevan a encontrar relaciones funcionales de tipo lineal o cuadrática.

Ejemplo: Halle el número de diagonales que se puede trazar desde un vértice en un polígono regular de n lados.



Adaptado de: Huapaya et al. (2015, p.127)

Asimismo, situaciones intra-matemáticas de modelar relaciones, como por ejemplo áreas.

Por ejemplo: De cada esquina de una pieza de cartón de 8 por 15 pulgadas se corta un cuadrado de x pulgadas por lado y los lados se doblan hacia arriba para formar una caja sin tapa. Plantee la función área de la base de la caja en función de x, estableciendo su dominio de definición.

Fuente: Demana, Waits, Gregory, foley (2007, p.152)

S6.5: Problemas interdisciplinarios

Son problemas de otras áreas como la física, bilogía, economía, etc., y que se puede estudiar desde la matemática. Esto tiene su sustento en el hecho que diversos conceptos matemáticos no surgieron en el campo de las matemáticas, fueron el resultado de un proceso evolutivo. En particular la interpretación de ciertas relaciones a campos como la física aportó muchas ideas que sirvieron para establecer su concepción actual. Es así que surge la noción de función como herramienta matemática para describir distintos fenómenos principalmente de la física, posteriormente debido a su amplia aplicabilidad es empleada en otras ciencias como la química, biología, economía o disciplinas tecnológicas como computación, comunicación. Finalmente, la función evoluciona hasta convertirse en objeto de estudio dentro de las propias matemáticas. En la educación secundaria es utilizada como herramienta de modelización principalmente en el área de la física.

Por ejemplo: La temperatura y presión de un gas; desplazamiento y presión de un émbolo, posición y tiempo de un móvil para una velocidad constante, la relación entre la altura y la sombra de un edificio, la relación entre la velocidad y el tiempo para una aceleración constante, la ley de Hooke, la ley de Ohm que nos dice que la diferencia de potencia V aplicada a un conductor de resistencia constante R es proporcional a la intensidad de corriente eléctrica I que circula por él, son ejemplos entre otras opciones.

Fuente: Roldan (2007, p.45)

Ejemplos en relación a funciones lineales; asimismo podemos encontrar funciones cuadráticas en el campo de la física.

Por ejemplo: La relación entre la posición y el tiempo para una aceleración constante, distancia recorrida por un cuerpo en caída libre.

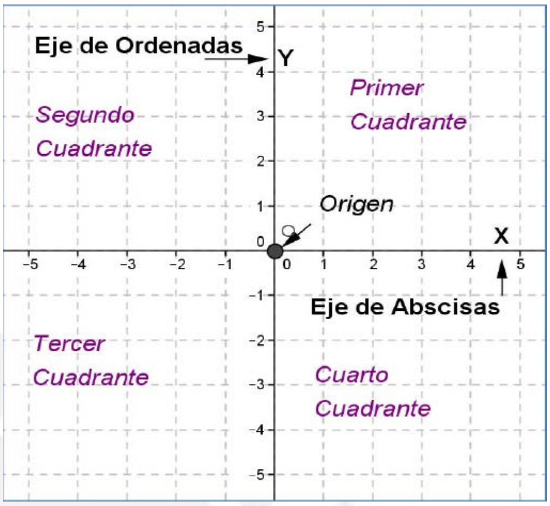
Fuente: Torres (2016, p.63)

Debemos precisar que la tipología de situaciones que hemos presentado no es disjunta, pudiendo existir situaciones que están en dos o más de las categorías definidas. Sin embargo, el haber establecido una tipología servirá de pauta para poder identificar cuáles de estas permiten el desarrollo del razonamiento algebraico

Conceptos

Son entidades matemáticas, para las que se puede proponer una definición. En las diversas fuentes revisadas, ver Tabla 10, hemos encontrado los siguientes conceptos, en los que hacemos distinción entre conceptos previos y emergentes.

Tabla 12. *Conceptos del significado de referencia de funciones.*

CONCEPTO	DEFINICIÓN
Sistema de coordenadas cartesiano: sistema bidimensional.	 Es una identificación entre los puntos de un plano y pares ordenados de números reales.
Dominio	Es el conjunto de valores a los cuales se aplica la función. Notación: $Dom(f)$
Función lineal afín	$f(x) = ax + b, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}, x \epsilon\ Dom(f)$
Función lineal	Es el modelo matemático para las funciones de proporcionalidad. $f(x) = ax, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}, x \epsilon\ Dom(f)$
Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}, b, c \in \mathbb{R},$ $x \epsilon\ Dom(f)$
Rango	Son los valores que toma la variable dependiente Notación: $Ran(f)$ Si la función $f(x) = a(x-h)^2 + k, \quad x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$ Entonces: $Ran(f) = [k, +\infty >$
Pendiente	En la representación gráfica de las funciones lineales, la pendiente es la razón de cambio entre dos

	puntos sobre la recta, es decir: $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ En la función lineal: $f(x) = ax + b$ Entonces , la pendiente es a.	
Intercepto con el eje x	Lineal afín $f(x) = ax + b$	$(-\frac{b}{a}, 0)$
	Lineal $f(x) = ax$	(0,0)
	Segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\Delta = b^2 - 4ac$ Sean $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	Si $\Delta > 0$ $(x_1, 0), (x_2, 0)$
		Si $\Delta = 0$ $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$
		Si $\Delta < 0$ No existe intercepto con el eje x
Intercepto con el eje y	Lineal afín $f(x) = ax + b$	*(0,b)*
	Segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$	*(0,c)*
Magnitudes	Magnitudes proporcionales: En la función lineal $y = ax$, la magnitud y es directamente proporcional a la magnitud x, a es la constante de proporcionalidad.	
Progresiones aritméticas.	Conjunto ordenado de términos numéricos, en el que pares de términos sucesivos tienen una diferencia constante. El término general se expresa como sigue:	

	$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
Progresiones geométricas.	Conjunto ordenado de términos numéricos no nulos, en el que pares de términos sucesivos tienen una razón constante distinta de la unidad. El término general se expresa como sigue: $$a_n = a_1 r^{n-1}$$

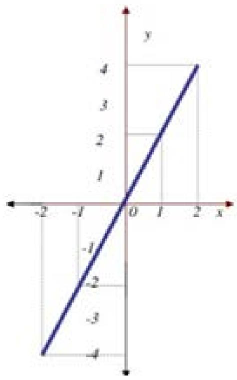
Procedimientos

Las situaciones descritas pueden resolverse empleando diversos procedimientos. Estas técnicas dependen de la representación de la función con la que se esté trabajando, podrían emplearse métodos numéricos, analíticos o gráfico.

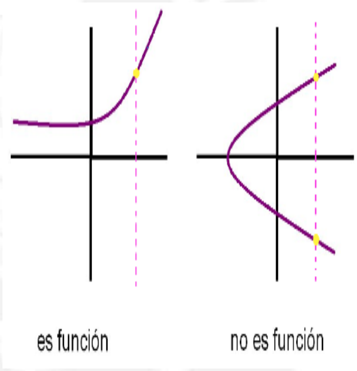
Tabla 13. *Procedimientos del significado de referencia de funciones.*

PROCEDIMIENTOS	EJEMPLO
En las situaciones extra matemáticas se debe descontextualizar el enunciado identificando los elementos relevantes de la función involucrada.	Movistar ofrece un servicio de móviles con un coste fijo de 20 soles al mes más 0.10 soles por minuto de llamada. Represente mediante una expresión simbólica el monto de facturación de la compañía en función del tiempo de uso del servicio. *Declarar la variable independiente de la situación, en este caso x representa los minutos trascurridos en una llamada, luego representar en lenguaje simbólico-literal la relación funcional que modela el coste, como sigue:* $$f(x) = 20 + 0.1x$$
Representación de una función dada en lenguaje simbólico literal a su representación tabular o gráfica, a través de la asignación de valores a la variable independiente para obtener sus correspondientes parejas para luego organizarlas en una tabla o en un sistema de coordenadas cartesianas.	Obtenga el gráfico de la función $f(x) = 2\,x$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>X</th><th>y = 2x</th><th>Y</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>2(-2)</td><td>-4</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>2(-1)</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2(0)</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2(1)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2(2)</td><td>4</td></tr>
</table>



Ubicar en el plano cartesiano los pares ordenados obtenidos y luego trazar la recta que pasa por tales puntos.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Identificación de una función mediante el trazado de rectas verticales que corten al gráfico de la relación.</td>
<td>
Indique si las siguientes relaciones representadas en forma gráfica corresponden a funciones.



Trazar rectas verticales que intercepten a los gráficos de las funciones, si alguna de ellas corta al gráfico en más de una vez no correspondería a una función.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Interpretación de las características de una función dada en cualquiera de sus representaciones.</td>
<td>
Dada la función $f(x) = 2x - 1$ con

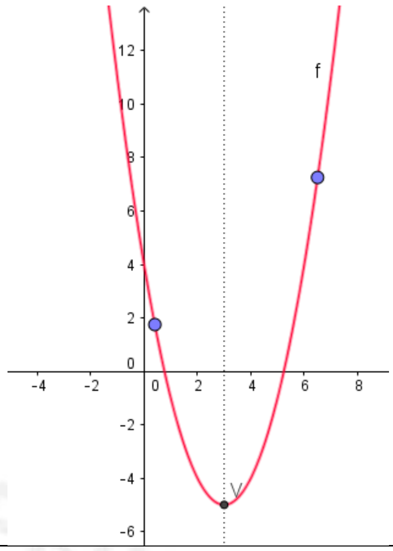
$Dom(f) = [1,2]$. Halle su rango.

A partir del intervalo de variación de la variable independiente, mediante propiedades de los números reales, construiremos la expresión analítica de la función.

En este ejemplo: $1 \leq x \leq 2 \rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$, *así*

$Ran(f) = [1,3]$
</td>
</tr>
</table>

	El procedimiento para hallar el rango, en el caso de funciones cuadráticas, es similar aunque la expresión analítica de la función debe estar dada en su forma canónica es decir: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$ *Donde* $h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h)$
Cálculo de valores numéricos a partir de la identificación e interpretación de las magnitudes que intervienen en la situación.	Un cocinero tarda 10 horas en preparar comida para 500 comensales ¿Cuántas horas tardará en preparar comida para 1000 comensales, en las mismas condiciones iniciales? Procedimiento de la posible resolución: $10h \rightarrow 500\ invitados$ $xh \rightarrow 1000\ invitados$ Así: $x = \frac{1000.10}{500} = 20\ horas$ *Regla de tres simple.* *Evaluación directa.*
Representación gráfica de una función cuadrática a partir del reconocimiento de su vértice.	Bosqueja la gráfica de a $y = x^2 - 6x + 4$, hallando el vértice. *Para realizar la gráfica, debemos usar la forma canónica de la expresión analítica de la función mediante el proceso de* ***completar cuadrados****, para luego poder encontrar el vértice de la parábola, luego usando la expresión analítica reemplazando algunos valores del dominio de la función para tabular algunos valores y usando la simetría de la gráfica podemos esbozar la gráfica de la función.*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Representación simbólica-literal de una función cuadrática a partir de tres pares ordenados que verifican la relación funcional.</td>
<td>A partir de la representación simbólica-literal en general de la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
Con tres puntos de paso $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ se genera un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas, consistente determinado

$$ax_1^{\ 2} + bx_1 + c = y_1$$
$$ax_2^{\ 2} + bx_2 + c = y_2$$
$$ax_3^{\ 2} + bx_3 + c = y_3$$
Obteniendo así la expresión simbólica-literal de la función cuadrática.</td>
</tr>
<tr>
<td>Representación simbólica-literal de una función lineal afín a partir de dos pares ordenados que verifican la relación funcional.</td>
<td>• A partir de la representación simbólica-literal en general de la función lineal afín

$$f(x) = ax + b$$
Con dos puntos de paso $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ se genera un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones

con dos incógnitas, consistente determinado</td>
</tr>
</table>

	$ax_1 + b = y_1$ $ax_2 + b = y_2$ *Obteniendo así la expresión simbólica-literal de la función lineal afín.* • *Si la relación pedida es una función lineal afín la razón de cambio es constante, esto es* $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *Finalmente para obtener el valor de b, reemplazamos un par ordenado en la relación funcional.*
Representación simbólica-literal de una función lineal a partir de un par ordenado que verifica la relación funcional.	*Si la relación pedida es una función lineal, su representación simbólica-literal en general es* $f(x) = ax$ *Con el punto de paso* (x_1, y_1)*, luego la razón de proporcionalidad es hallada como* $a = \frac{y_1}{x_1}$ *Obteniendo así la expresión simbólica-literal de la función lineal.*

Propiedades

Son proposiciones o enunciados sobre conceptos, es decir atributos sobre objetos matemáticos. En las diversas fuentes revisadas, ver Tabla 10, hemos encontrado propiedades, las que están presentes en forma implícita o explícita, o incluso en algunos casos se pide que se deduzcan.

Tabla 14. *Propiedades del significado de referencia de funciones.*

PROPIEDADES	EJEMPLO
Inyectividad: $f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$	A partir de la siguiente secuencia 1,2,4,8,16, .. Indique los dos números que le siguen, e indique la posición del número 1024 en la secuencia. Resolución: $a_1 = 2^0, a_2 = 2^1, a_3 = 2^2,\ldots$ Entonces $a_6 = 2^5 = 32$, $a_7 = 2^6$=64, $a_n = 2^{n-1} = 2^{10} = 1024$. En esta ecuación empleamos la inyectividad de la función exponencial de base 2. Así n=11, es decir 1024 ocupa el lugar 11 en la secuencia.
Sobreyectividad: $f: A \to B$ es sobreyectiva si para cada $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $f(x) = y$.	Ejemplo: Los departamentos Camelot compraron un apartamento de $50,000 que, desde el punto de vista fiscal, se deprecia $2,000 por año durante un periodo de 25 años mediante una depreciación lineal. ¿La función que modela el costo del departamento toma todo valor entre 0 y 50,000 dólares? Resolución: La relación que presenta las magnitudes costo y tiempo es lineal afín, luego modelando tal función es: $C(t) = 50\,000 - 2\,000t, \qquad t\epsilon[0,25]$ El rango de la función es [0,50 000], por ser sobreyectiva la función lineal, podemos interpretar que el costo del departamento toma cualquier valor entre 0 y 50,000 dólares.

<table>
<tr>
<td>Función lineal: El cambio en la variable dependiente es constante por una unidad de cambio en la variable independiente.</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)=-2x+1</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-7</td></tr>
</table>
-2
-2
-2
-2
</td>
</tr>
<tr>
<td>Función cuadrática: El segundo cambio de la variable dependiente es constante por una unidad de cambio en la variable independiente.</td>
<td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)=$2x^2 + 3x - 1$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>13</td></tr>
<tr><td>3</td><td>26</td></tr>
<tr><td>4</td><td>43</td></tr>
</table>
+5
+9
+13
+17

+4
+4
+4
</td>
</tr>
<tr>
<td>Valores extremos de funciones

$f(x) = a(x-h)^2 + k$</td>
<td>Si $a > 0$, la función posee mínimo

Si $a < 0$, la función posee máximo</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td>Creciente: Si un aumento en la variable independiente provoca que se mantengan o aumenten los valores de la variable dependiente. Es decir:

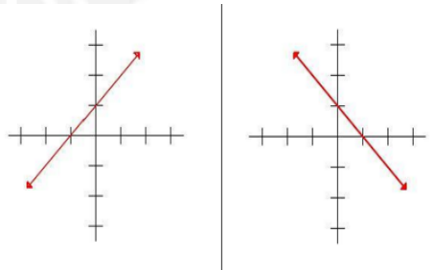
$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
Ejemplo: La función lineal $f(x) = ax + b,\ a \geq 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>Decreciente: Si un aumento en la variable independiente provoca que se mantengan o disminuyan los valores de la</td>
</tr>
</table>

Monotonía $f: A \to B$	variable dependiente. Es decir: $$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$ Ejemplo: La función lineal $f(x) = ax + b,\ a \leq 0$
	Estrictamente creciente: Si un aumento en la variable independiente provoca que aumenten los valores de la variable dependiente. Es decir: $$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$ Ejemplo: La función lineal $f(x) = ax + b,\ a > 0$
	Estrictamente decreciente: Si un aumento en la variable independiente provoca que disminuyan los valores de la variable dependiente. Es decir: $$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$ Ejemplo: La función lineal $f(x) = ax + b,\ a < 0$

Argumentos

Las definiciones, propiedades, situaciones y procedimientos se ligan entre sí mediante los argumentos, los que son empleados para comprobar las soluciones de los problemas o demostrar las propiedades y relaciones. En las diversas fuentes revisadas, ver Tabla 10, hemos encontrado los siguientes argumentos.

Tabla 15. *Argumentos del significado de referencia de funciones.*

ARGUMENTOS		EJEMPLO
Deductivo.	A partir del reconocimiento del patrón	A partir de la sucesión $5; 10; 20, ...$ Indique los dos términos siguientes. <u>Argumento de la posible resolución:</u> $a_1 = 5$ $a_2 = 2(a_1) = 10$ $a_3 = 2(a_2) = 20$ Así deducimos: $a_4 = 2(a_3) = 40$ $a_5 = 2(a_4) = 80$
	A partir de las definiciones o propiedades.	• Si la función $f(x) = 3x$, deducimos que su pendiente es 3. • Indique si las siguientes gráficas corresponden a pendientes negativas o positivas 

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Inductivo</td>
<td>Empírica: a partir de casos particulares.</td>
<td rowspan="2">
A partir de la secuencia siguiente

Indica el número de puntos necesarios para la construcción de la figura que se encuentra en la n-ésima posición.
<u>Argumento de la posible resolución:</u>
$a_1 = 1(1\,punto) + 1(2puntos) = 3\,puntos$
$a_2 = 1(2\,punto) + 2(3puntos) = 8\,puntos$
$a_3 = 1(3\,punto) + 3(4puntos) = 15\,puntos$
Así podemos apoyar nuestra conjetura de la regla de formación del término general a través de una gráfica:


$a_n = 1(n\,punto) + n(n+1\,puntos)$
$= n^2 + 2n\;\;puntos$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Matemática: Formalización del término general encontrado empíricamente</td>
</tr>
</table>

Atendiendo a las configuraciones epistémicas presentadas en el Holo-Significado de funciones (ver Figura 2) hemos establecido el significado referencial de funciones lineales y cuadráticas en la institución de educación secundaria, ejemplificando las características presentadas en cada objeto primario. De este significado ideal se desprende el significado pretendido por la institución de educación secundaria.

En la siguiente sección mostramos algunos conocimientos del profesor de acuerdo a las características presentadas en los objetos primarios del significado referencial.

3.2 Indicadores de conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemática, en relación al contenido algebraico

De acuerdo a los objetos primarios reconocidos en el significado de referencia, a partir de este trabajo que hemos realizado en el significado de referencia, nosotros definiremos indicadores de conocimientos, en base para el conocimiento de contenido algebraico de la faceta epistémica del modelo CDM del profesor de matemática.

- Resuelve las tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas.

  El profesor debe poder resolver las situaciones problemas, que involucran a las funciones lineales y cuadráticas, presentes en la educación secundaria. Consideramos que en el trabajo de Torres (2016) los conocimientos que debe tener el profesor en cuanto a resolución de tareas sobre funciones cuadráticas, se presenta en la matriz de especificaciones de la Tabla 3 del primer capítulo, los que organizamos en la Tabla 16 de acuerdo a los objetos primarios y ampliamos a funciones lineales.

Tabla 16. Conocimientos del profesor de matemática para resolver tareas de funciones lineales y cuadráticas.

Objetos primarios	**El profesor**
Conceptos	Recuerda la definición de las funciones lineales y cuadráticas mediante su regla de correspondencia. Comprende la representación gráfica de las funciones lineales y cuadráticas mediante su regla de correspondencia verificando los puntos en el plano correspondiente a dicha función. Reconoce si el gráfico de una función en el plano de coordenadas rectangulares corresponde a una función lineal o a una función cuadrática.
Lenguajes	Reconoce si el gráfico de una función en el plano de coordenadas rectangulares corresponde a una función lineal o a una función cuadrática. Elabora representaciones algebraicas de la función cuadrática, utilizando una regla de correspondencia. Elabora la representación algebraica de la función lineal y de la función lineal afín, utilizando su regla de correspondencia.

	Interpreta el resultado obtenido luego de la resolución de problemas que involucre funciones lineales y cuadráticas.
Procedimientos	Resuelve problemas de funciones lineales y cuadráticas usando procedimientos correctos. Transforma representaciones algebraicas de la función cuadrática en gráficos en el plano de coordenadas rectangulares.
Propiedades y Argumentos	Explica su procedimiento en la resolución de problemas sobre funciones lineales y cuadráticas con un orden lógico. Justifica con rigor su procedimiento en la resolución de problemas que involucren funciones lineales y cuadráticas

Adaptado: Torres (2016, p.120)

- Reconoce los distintos problemas sobre las funciones lineales y cuadráticas.

  En referencia a que el profesor debe reconocer la tipología de situaciones problemas presentes en el sistema de prácticas de la institución de educación secundaria, es así que a partir del significado de referencia donde se identificó una tipología de seis situaciones problemas, donde la categoría de modelización presenta cinco subcategorías de acuerdo al grado de complejidad de situaciones problemas en tal categoría.
- Reconoce el carácter intradisciplinario e interdisciplinario que presenta el concepto función. Así como de las distintas situaciones que se presentan en torno a este indicador; por ejemplo situaciones de geometría donde se evidencia la noción de función, puesto que estas son situaciones potencialmente ricas, pues permiten la integración y la conexión entre contenidos matemáticos correspondientes a bloques matemáticos distintos del currículo.

  De esta forma, el profesor puede emplear adecuadamente estructuras estudiadas en otros bloques, a partir de las que puede iniciar la construcción del objeto función, permitiendo que este concepto trascienda del bloque de álgebra.

  Asimismo, esta visión ampliada por parte del profesor, le permitirá uniformizar las notaciones empleadas en las distintas áreas, presentes en la educación secundaria, donde este concepto es empleado a fin de evitar conflictos en los alumnos.
- Reconoce los distintos lenguajes empleados para representar una función: verbal, tablas, diagramas, como conjunto de pares ordenados, como una expresión analítica.

- Conoce la definición de los objetos habitualmente empleados alrededor del tema: función lineal, función afín, función cuadrática, dominio, rango, pendiente, intercepto con los ejes.
- Describe el procedimiento seguido, indicando las posibles acciones a realizar.
- Modeliza situaciones que involucran funciones lineales y cuadráticas, traduciendo sus elementos a la matemática.
- Establece criterios para elegir y transitar entre las distintas representaciones de las funciones.
- Aplica propiedades de números reales para encontrar en forma analítica el rango de las funciones estudiadas.
- Establece criterios gráficos para hallar el rango de las funciones estudiadas.
- Reconoce el comportamiento variacional de las funciones lineales y cuadráticas.
- Establece criterios para optimizar este tipo de funciones.
- Utiliza argumentos deductivos e inductivos.

A continuación, en la Tabla 17, mostramos una síntesis de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática, en relación al contenido algebraico.

Tabla 17. *Indicadores de conocimientos del profesor de matemática, en relación al contenido algebraico.*

Situaciones	
• Conoce distintos contextos de uso de funciones lineales y cuadráticas: problemas de contexto tabular, problemas de contexto analítico, problemas de contexto gráfico, problemas de contexto conjuntista, problemas que integran diferentes contextos de uso y problemas de modelización.	• Resuelve las tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas. • Reconoce el carácter intradisciplinario e interdisciplinario que presenta el concepto función
Lenguajes	
• Reconoce los distintos lenguajes empleados para representar una función: verbal, tablas, diagramas, como conjunto de pares ordenados, como una expresión analítica. • Conoce la posición relativa de una recta en el plano con respecto a los ejes del sistema.	• Conoce la representación más adecuada según la situación planteada.

Conceptos	
• Conoce el concepto de constante de proporcionalidad. • Conoce la definición del concepto función.	• Reconoce las diferencias entre las representaciones de una relación funcional de una no funcional
Procedimientos y Propiedades	
• Conoce como la constante de proporcionalidad es empleada en la determinación de la representación de la función lineal • Establece criterios para determinar si un ejemplo o situación corresponde a una función.	• Resuelve ecuaciones como herramienta en la determinación de imágenes y pre imágenes. • Conoce la propiedad de linealidad de una función.
Argumentos	
• Emplea argumentos deductivos	• Emplea argumentos inductivos

En la Tabla 16, se quiere hacer un paralelo con los resultados presentados en Espinoza (2015), ver Tabla 2, donde se señalan algunos conocimientos del profesor respecto a funciones lineales. En el siguiente capítulo presentaremos conocimientos del profesor, en relación al RAE. Conocimientos que denoten que el profesor reconoce la complejidad, de acuerdo al grado de algebrización, de las situaciones problemas.

CAPITULO IV: CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA, EN RELACIÓN AL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

El reconocimiento de los objetos y procesos algebraicos en tareas funcionales debe formar parte de las competencias del profesor de matemática.

Consideramos como tareas funcionales, a las situaciones identificadas en el significado de referencia que involucran a las funciones lineales y cuadráticas; tendremos en cuenta aquellas situaciones adecuadas para el desarrollo del razonamiento algebraico, a partir de la postura del EOS.

De acuerdo a la caracterización de la naturaleza del razonamiento algebraico presentada en el capítulo II, entre los procesos asociados a las prácticas algebraicas están la particularización, generalización, simbolización y unitarización.

Los objetos algebraicos presentes en estas tareas funcionales se han identificado en el significado de referencia, los mismos que se relacionan entre sí.

4.1 Procesos algebraicos en tareas funcionales

- Procesos de particularización-generalización, estos procesos duales tienen especial importancia, puesto que uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es la generalización. Como objeto emergente de un proceso de generalización tenemos la generación de objetos intensivos, que viene a ser la regla que genera clase y que permite identificar un elemento particular como representante de la clase. Mediante el proceso de particularización emergen objetos que son denominados objetos extensivos, los que son objetos particulares.
- Unitarización, en referencia al reconocimiento explícito de objetos intensivos como entidades unitarias. Es decir cuando, una colección finita de casos particulares no constituye un objeto intensivo, será considerado intensivo cuando el sujeto encuentra la regla que se aplica a tales casos particulares, el conjunto pasa a ser algo nuevo diferente a los elementos que lo conforman, presentando características de una entidad unitaria que emerge del sistema.
- Proceso de simbolización, o de representación, referido a la ostensión de intensivos a través de expresiones simbólicos-literales.

En base a los procesos algebraicos puestos en juego en las resoluciones a tareas, identificaremos en la siguiente sección, situaciones que presentan rasgos algebraicos afín de promover el razonamiento algebraico del sujeto que desarrolla dicha tarea.

4.2 Tipología de tareas funcionales para promover el razonamiento algebraico

Consideramos pertinente establecer aquellas situaciones, de las identificadas en el significado de referencia de funciones lineales y cuadráticas, que favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico.

De acuerdo al significado de referencia, se organizaron en seis tipos las situaciones problema, para cada una de ellas teniendo en cuenta cuales son los objetos y procesos que intervienen en una actividad considerada algebraica. Analizaremos cada una de las seis situaciones propuestas, reconociendo cuales son las que favorecen el razonamiento algebraico. Las descripciones de tales tareas determinarán si la tarea es adecuada para promover el razonamiento algebraico.

S1: Problemas en contexto tabular.

Consideramos que este tipo de situaciones no favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico del sujeto que la resuelve, puesto que su resolución se desarrolla en el mismo contexto en que ha sido planteada (contexto tabular), lo que evidencia ausencia de objetos y procesos algebraicos. A pesar que, esta situación también puede ser resuelta empleando objetos algebraicos en relación a funciones, la tarea no exige que así sea.

S2: Problemas de contexto gráfico.

Consideramos que este tipo de situaciones si favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico del sujeto que la resuelve, puesto que son problemas de interpretación de la representación gráfica de la función, así para su resolución se evidencia un manejo adecuado de objetos algebraicos y la emergencia de tales objetos es dada principalmente por el proceso de unitarización, puesto que el gráfico de la función es visto como un unidad, del que se extraen propiedades que lo caracterizan, como por ejemplo: monotonía, inyectividad, intercepto con los ejes, etc.

S3: Problemas de contexto analítico.

Consideramos que este tipo de situaciones favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico del sujeto que la resuelve, puesto que su resolución es posible principalmente por el reconocimiento de la regularidad y de su respectiva formulación por medio de la simbolización en el lenguaje simbólico-literal, evidenciando así la presencia de objetos algebraicos y procesos de simbolización y generalización principalmente.

S4: Problemas de contexto conjuntista.

Consideramos que este tipo de situaciones no favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico del sujeto que la resuelve, puesto que estas situaciones evidencian el carácter estático de este contexto de uso, lo que evidencia ausencia de objetos y procesos algebraicos.

S5: Problemas que integran diferentes contextos de uso.

Consideramos que este tipo de situaciones favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico del sujeto que la resuelve, puesto que su resolución exige el tránsito entre diferentes contextos de uso de la relación funcional, lo que evidenciaría presencia de objetos y procesos algebraicos. Principalmente el proceso de unitarización, pues es necesario que el objeto función sea una unidad para poder extraer información del contexto de uso en el que se desarrolle la situación.

S6: Problemas de modelización.

Consideramos que este tipo de situaciones favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico del sujeto que la resuelve. En ese sentido, de acuerdo al grado de complejidad principalmente la clasificación de problemas evocados de consolidación, problemas intradisciplinarios e interdisciplinarios, son las situaciones que favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico; puesto que la modelización exige una traducción de una situación del mundo real al contexto matemático lo que evidencia presencia de objetos y procesos algebraicos.

En la Tabla 18 mostramos la tipología de situaciones, que en base a la presencia de objetos y procesos algebraicos en su resolución, se considera que favorecen el razonamiento algebraico.

Tabla 18. *Tipología de tareas que favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico.*

Descriptor de la tarea	**Objetos (O) y Procesos (P) referidos en la práctica algebraica.**
S2: Problemas de contexto gráfico.	**O:** Función de primer grado, variable independiente, variable dependiente, regla de correspondencia, **P:** Simbolización, particularización, unitarización.
S3: Problemas de contexto analítico.	**O:** Función de segundo grado, variable independiente, variable dependiente, regla de correspondencia, **P:** Simbolización, generalización.
S5: Problemas que integran diferentes contextos de usos.	**O:**Función de primer y segundo grado, representación tabular, representación gráfica, regla de correspondencia, **P:** Simbolización, unitarización, particularización, generalización.
S6.3: Problemas contextualizados evocados de consolidación.	**O:** Argumentos deductivos e inductivos. **P:** Generalización, particularización, simbolización, unitarización.
S6.4: Problemas intradisciplinarios.	**O:** Semejanza, proporcionalidad, variable dependiente e independiente, progresiones. **P:** Generalización, particularización, simbolización, unitarización.
S6.5: Problemas interdisciplinarios.	**O:** Valores máximos o mínimos, intervalos de crecimientos y decrecimientos, **P:** Generalización, particularización, simbolización, unitarización.

De acuerdo al modelo de conocimiento didáctico-matemático que estamos empleando, forma parte del conocimiento de contenido didáctico del profesor la competencia del reconocimiento del nivel de algebrización correspondiente a la práctica matemática de los alumnos, para así poder intervenir de forma adecuada e incrementar progresivamente el nivel de algebrización en las prácticas matemáticas de los alumnos.

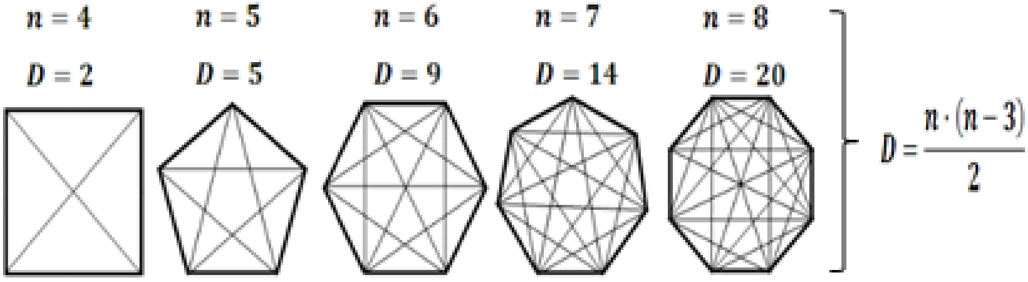
4.3 Indicadores de conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemática, en relación al razonamiento algebraico.

En base a los aspectos desarrollados en las secciones anteriores mostraremos en la presente sección conocimientos didáctico-matemáticos, de la faceta epistémica del modelo CDM del profesor de secundaria, necesarios para desempeñar su labor docente de manera eficaz, respecto de tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas. Para fundamentar tales conocimientos empleamos situaciones particulares, de las identificadas en la tipología de situaciones que favorece el desarrollo del razonamiento algebraico (ver Tabla 18), que ejemplifiquen tal conocimiento.

- Reconocer la potencialidad de las tareas que están presentes en textos didácticos para desarrollar el razonamiento algebraico de los alumnos, tales tareas podrían formar parte de diversos contextos del área de la matemática y no solo corresponder a los contenidos propios del álgebra.

A continuación, mostramos una situación del tipo S6.4 que aparece en el contexto de la geometría en el texto didáctico de primero de secundaria, donde se plantea directamente el número de diagonales, sin aprovechar la regularidad que se presenta.

Ejemplo: Número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un polígono regular de n lados.



Adaptado de: Huapaya et al. (2015, p.127)

Debemos considerar que si bien es cierto que esta situación ha sido tomada del libro de primero de secundaria, donde aún no se abordan contenidos que involucran a las funciones cuadráticas, el profesor debe reconocer la conexión existente de este tipo de tareas con funciones a fin de poder orientar a sus alumnos hacia temas más avanzados.

Consideramos que esta actividad podría ser abordada de forma gradual sin imponer la regla general que presenta el número de diagonales, mediante la identificación de la regularidad existente y una argumentación deductiva por medio de progresiones aritméticas. A continuación, mostramos una posible solución a la situación propuesta.

i. Formar la sucesión de números correspondientes al número de diagonales que se van obteniendo, como sigue

$$2, 5, 9, 14, 20, \ldots$$

ii. Identificar cada término como suma de términos de una progresión aritmética, como sigue

Para $n = 4$, tenemos $2 = 2$, conformado por 1 sumando

Para $n = 5$, tenemos $5 = 2 + 3$, conformado por 2 sumandos

Para $n = 6$, tenemos $9 = 2 + 3 + 4$, conformado por 3 sumandos

Para $n = 7$, tenemos $14 = 2 + 3 + 4 + 5$, conformado por 4 sumandos

Para $n = 8$, tenemos $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, conformado por 5 sumandos

iii. Establecer la regularidad del número de diagonales del polígono regular para n lados, en general

Para n lados, tenemos $D = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n - 2$, conformado por n-3 sumandos.

Es decir D es la suma de términos de la progresión aritmética

$$2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n - 2$$

Donde el primer término es $a_1 = 2$, la razón es $r = 1$, el último término es $a_m = n - 2$, el número de término es m= $n - 3$. Finalmente es posible establecer la fórmula de la suma de términos de la progresión aritmética antes descrita, tenemos:

$$D = \frac{(a_1 + a_m)m}{2} = \frac{(2 + n - 2)(n - 3)}{2} = \frac{n(n - 3)}{2}$$

- Identificar conocimientos que se ponen en juego en el enunciado de una tarea, así como de las prácticas matemáticas empleadas, por parte de sus alumnos, al resolver la tarea.

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen los objetos primarios identificados en el significado de referencia, de acuerdo a la función que desempeñan en dicha práctica

- Modificar aquellas tareas presentes en textos didácticos, de educación secundaria, que no contribuyen al desarrollo del razonamiento algebraico de los alumnos, mediante consignas que impulsen la emergencia de objetos intensivos y su respectiva unitarización así como procesos de generalización y simbolización.

A continuación, mostramos una situación del tipo S8, la que podría ser modificada a fin de que el alumno haga operativos los procesos algebraicos que le ayuden a alcanzar el grado consolidado de algebrización.

A partir de la siguiente secuencia, indica el número de puntos necesarios para la construcción de la figura que se encuentra en la posición 19**.**

Adaptado: Godino et al. (2015, p. 138)

Una posible resolución a esta tarea, podría ser a partir de una tabla donde se colocan valores que se obtienen para casos específicos y así inferir la regla de regularidad entre el número de puntos por cada una de las figuras de acuerdo a su posición.

Posición	# de puntos	Observación
1	3	$2^2 - 1$
2	8	$3^2 - 1$
3	15	$4^2 - 1$
4	24	$5^2 - 1$
5	35	$6^2 - 1$
…	…	…

Figura 15. Número de puntos respecto a la posición de la figura

Adaptado: Godino et al. (2015, p. 138)

Luego se deduce que la posición pedida es $f(19) = 20^2 - 1 = 399$ puntos.

En esta posible resolución a la tarea propuesta no se ha producido objetos intensivos, hay ausencia de simbolización así como señales que se ha unitarizado, por tanto consideramos pertinente establecer la siguiente consigna que potencie la tarea a fin de que emerjan los objetos y procesos algebraicos.

a) Identifique el número de puntos en una posición arbitraria, suponiendo que se continúa con la misma regla de formación de las figuras.

- Reconocer la tipología de problemas, respecto de funciones lineales y cuadráticas, que favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico: S2, S3, S5, S6.3, S6.4, S6.5.
- Reconocer las categorías de problemas que predominan en textos didácticos de educación secundaria y que no contribuyen al desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

A continuación, presentamos una situación problema encontrada en el texto didáctico de primero de secundaria, en el capítulo de funciones lineales, correspondiente al tipo de situación S1.

Por ejemplo: Un cocinero tarda 10 horas en preparar comida para 500 comensales ¿Cuántas horas tardará en preparar comida para 1000 comensales, en las mismas condiciones iniciales?

Fuente: Huapaya, Ynfanzon, Pacheco, Brito, Rivera (2015, p.134)

Consideramos que la determinación del valor numérico pedido denota el carácter estático que presenta esta concepción de función. Tales tareas encontradas en textos didácticos predominan en la educación secundaria, lo que dificultaría que los alumnos en una etapa posterior logren modelizar situaciones extra matemáticas de variación no constante de magnitudes discretas o incluso continuas.

Es así que, el profesor debe enriquecer estas tareas, pidiendo por ejemplo, distintos valores e incluso pidiendo que se explicite la relación general entre las variables involucradas, identificando variables dependiente e independiente de dicha situación.

- Interpretar el razonamiento algebraico de los alumnos, a través de sus soluciones, identificando los objetos primarios, esclarecidos en el significado de referencia.
- Reconocer las diferentes soluciones que presenta una situación-problema, con el objetivo de anticiparse a las posibles soluciones de los alumnos, de forma que reformule las preguntas para que la tarea exija el logro de las competencias pretendidas.

Ejemplo: La siguiente tabla muestra la correspondencia entre algunos de los valores entre x e y.

X	1	3	5	8	12	16	17	20	34
Y	7	11	15	21	29	37	39	45	73

¿Cuál es el valor de y si $x = 2$?

Resolución1:

Completando la tabla inicial, con un cuadro más exhaustivo, tenemos

X	1	**2**	3	**4**	5	8	12	16	17	20	34
Y	7	**9**	11	**13**	15	21	29	37	39	45	73

Luego el valor de y, cuando $x = 2$, es de 9.

Resolución2:

De acuerdo a la tabla, se observa que si la variación en x es de 2 unidades, la respectiva variación en y es de 4 unidades, si la variación en x es de 3 unidades, la respectiva variación en y es de 6 unidades. De esto deducimos que, mientras en x existe una variación de 1 unidad en y la respectiva variación es de 2 unidades. Luego el valor de y, cuando $x = 2$, es de 9.

Resolución3:

Este comportamiento de variación constante de la variable y ante la variación de una unidad en la variable independiente x es propio de una función lineal afín, luego presenta la representación analítica

$$y = f(x) = ax + b$$

Reemplazando dos valores de la tabla, tenemos el sistema siguiente

$$\begin{aligned} 7 &= \quad a + b \\ 9 &= \quad 2a + b \end{aligned}$$

Resolviendo $a = 2$ y $b = 5$.

Así, la función es $f(x) = 2x + 5$, reemplazando el valor de y, cuando $x = 2$, es 9.

Resolución4:

Este comportamiento de variación constante de la variable y ante la variación de una unidad en la variable independiente x es propio de una función lineal afín, luego presenta la representación analítica

$$y = f(x) = ax + b$$

Como esta razón constante es 2, el valor de $a = 2$ y en la tabla podemos completar el valor de y cuando $x = 0$, para obtener el y-intercepto de la función afín, de esta forma $b = 5$. Así la función es $f(x) = 2x + 5$, reemplazando el valor de y, cuando $x = 2$, es 9.

- Reconocer objetos intervinientes y los emergentes en la resolución de la tarea.
- Reconocer procesos algebraicos que están presentes en las resoluciones de los alumnos.

Consideramos que reconocer la matemática presente en la solución a una situación problema no es suficiente para enseñarlas, también es necesario que el profesor de matemática reconozca en la actividad matemática de sus alumnos los objetos y procesos presentes, así como ser consciente de la complejidad de la situación a la que se enfrenta. En el siguiente capítulo presentamos nuestros principales resultados de investigación.

CAPITULO V: CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se responde la pregunta de investigación, además se indica en forma sintetizada las conclusiones obtenidas respecto al cumplimiento de los objetivos específicos planteados en nuestra investigación, así como las implicaciones de nuestro estudio. Posteriormente, se señala algunas limitaciones de la investigación, como problemas abiertos que se derivan de la investigación.

Inicialmente nuestro interés surge de la problemática en torno a las dificultades de la enseñanza del álgebra, atribuido por diversas investigaciones, a carencias didáctico-matemáticas del profesor de matemática. Es por ello que para afrontar esta situación nos propusimos identificar conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de secundaria, necesarios para contribuir al proceso de aprendizaje de los alumnos.

Consideramos que para lograr una enseñanza idónea, no es suficiente que el profesor de matemática evidencie conocimiento de contenido matemático; existen competencias didáctico-matemáticas que se requieren. Es por ello que en la revisión de los antecedentes surge el interés por trabajar con el modelo de conocimientos del EOS que integra el modelo del razonamiento algebraico, el que se caracteriza por la presencia y emergencia de objetos y procesos algebraicos. Dicho modelo contempla en la faceta epistémica, el reconocimiento del nivel de algebrización, atribuido a las resoluciones de tareas que aborden el tema de funciones lineales y cuadráticas.

En ese sentido empleamos aspectos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática y el método que adoptamos es el análisis de contenido, para finalmente obtener las siguientes conclusiones.

- Para conseguir el primer objetivo específico

  Identificar conocimientos didáctico-matemáticos en relación al contenido algebraico, que debe tener el profesor de educación secundaria, respecto a las funciones lineales y cuadráticas.

  Para alcanzar este objetivo construimos el significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas en la institución de educación secundaria. Para ello se organizan las situaciones que se presentan alrededor de las funciones lineales y cuadráticas, así como de los lenguajes, propiedades, procedimientos, definiciones y argumentos puestos en juego al resolver tales situaciones.

  Debemos señalar que para la elaboración del significado referencial tomamos como base las distintas configuraciones epistémicas que figuran en el Holo-significado de la noción de función, como se muestran en Godino, Wilhelmi, Bencomo (2016, p.7). Estas configuraciones principalmente se emplearon para formular una tipología de situaciones, en cuanto a funciones lineales y cuadráticas, la que mostramos a continuación:

- Problemas en contexto tabular.
- Problemas en contexto gráfico.
- Problemas en contexto analítico.
- Problemas en contexto conjuntista.
- Problemas que integran distintos contextos de uso, asociados a la noción de función.
- Problemas de modelización: Contextualizados introductorios, evocados de aplicación, evocados de consolidación, intradisciplinarios e interdisciplinarios.

Asimismo, se consideraron los objetos primarios señalados en las configuraciones epistémicas del Holo-significado de la noción función mencionado en el párrafo anterior. Los descriptores de estos objetos primarios se ejemplificaron, en el caso específico de funciones lineales y cuadráticas, mediante un análisis de contenido de textos didácticos de educación secundaria, textos matemáticos, así como de investigaciones en didáctica de la matemática que abordan a tales funciones.

Tal revisión nos proporcionó los siguientes conocimientos en relación al contenido algebraico:

- Resuelve las tareas que involucran funciones lineales y cuadráticas.
- Reconoce las distintas situaciones problema sobre las funciones lineales y cuadráticas.
- Reconoce el carácter intradisciplinario e interdisciplinario que presenta el concepto función. Así como de las distintas situaciones que se presentan en torno a este indicador
- Reconoce los distintos lenguajes empleados para representar una función: verbal, tablas, diagramas, como conjunto de pares ordenados, como una expresión analítica.
- Conoce la definición de los objetos habitualmente empleados alrededor del tema.
- Describe el procedimiento seguido, indicando las posibles acciones a realizar.
- Modeliza situaciones que involucran funciones lineales y cuadráticas, traduciendo sus elementos a la matemática.
- Establece criterios para elegir y transitar entre las distintas representaciones de las funciones.
- Aplica propiedades de números reales para encontrar en forma analítica el rango de las funciones estudiadas.
- Establece criterios gráficos para hallar el rango de las funciones estudiadas.
- Reconoce el comportamiento variacional de las funciones lineales y cuadráticas.
- Establece criterios para optimizar este tipo de funciones.
- Utiliza argumentos deductivos e inductivos.

- Respecto al segundo objetivo específico

Identificar conocimientos didáctico-matemáticos en relación al razonamiento algebraico, que debe tener el profesor de educación secundaria, para el reconocimiento de objetos y procesos algebraicos en la resolución de tareas matemáticas, que involucran funciones lineales y cuadráticas.

Para alcanzar este objetivo se hizo una revisión de las situaciones problemas identificas en el significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas de la institución de educación secundaria. Se emplearon ejemplos representativos de tales situaciones para encontrar aquellas situaciones que favorecen el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico, así como de los niveles de algebrización atribuidos a las soluciones esperadas. Tal revisión nos proporcionó los siguientes conocimientos en relación al razonamiento algebraico.

- Reconoce la potencialidad de las tareas presentes en textos didácticos, de la educación secundaria, para desarrollar el razonamiento algebraico de los alumnos.
- Modifica aquellas tareas presentes en textos didácticos, de la educación secundaria, que no contribuyen al desarrollo del razonamiento algebraico de los alumnos.
- Reconoce la tipología de situaciones problemas, respecto de funciones lineales y cuadráticas, que favorecen el desarrollo del razonamiento algebraico: S2, S3, S5, S6.3, S6.4, S6.5.
- Reconoce las categorías de problemas que predominan en textos didácticos de la educación secundaria que no contribuyen al desarrollo del razonamiento algebraico elemental.
- Interpreta el razonamiento algebraico de los alumnos, a través de sus soluciones, identificando los objetos primarios, esclarecidos en el significado de referencia.
- Reconoce las diferentes soluciones que presenta una situación-problema, con el objetivo de anticiparse a las posibles soluciones de los alumnos, de forma que reformule las preguntas para que la tarea exija el logro de las competencias pretendidas.
- Reconoce los objetos intervinientes y emergentes en la resolución de la tarea.
- Reconoce los procesos que están presentes en las resoluciones de los alumnos.

Podemos señalar como limitación de nuestra investigación el carácter amplio del modelo de conocimientos del profesor de matemática CDM, que contempla seis facetas, lo que dificultó explorar cada una de ellas, es así que únicamente consideramos el estudio de la faceta epistémica.

Teniendo en cuenta los resultados encontrados en nuestra investigación, enunciamos las siguientes sugerencias para futuras investigaciones:

- El significado de referencia de las funciones lineales y cuadráticas en la institución de secundaria debe ser operativizado en el contexto escolar peruano, empleándolo como instrumento para valorar los documentos oficiales así como los textos proporcionados por el estado a las instituciones educativas del Perú.
- La tipología de situaciones que favorecen al desarrollo del razonamiento algebraico podría ser puesta en práctica con alumnos en un aula clase, a modo de hacer mejoras a nuestra propuesta.
- Los descriptores de conocimientos hallados son útiles para formular un plan formativo en formación continua de profesores, para posteriormente ser puesto en práctica con profesores en ejercicio dispuestos a mejorar su práctica docente.
- Explorar otras facetas del modelo CDM respecto al tema específico en el que estamos abocados, para que puedan ser integradas a un plan formativo con profesores en ejercicio.

Referencias

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. (Tesis doctoral) Universidad de Granada, Granada.

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29*(2), 191-206.

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Trad. María Álvarez, Sara

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives.* Berlín: Springer-Verlag.

Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria. *Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada*.

Espinoza, J. (2015) Identificación de indicadores del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre funciones mediante el análisis didáctico. En Editor Parraguez, M., Rivas, H., Vásquez, C., Pincheira, N., Solar, H., Rojas, F. y Chandía, E. (Eds.), XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática (pp. inicial-final). Lugar: Villarrica-Chile.

Font, V. (2007). Epistemología y Didáctica de las Matemáticas. *Reportes de investigación. (21)*(pp. 1-48).

Gaita, C., Huanqui, J., Wilhelmi, M., y Lasa, A. (2009) Estudio de significados institucionales de la función en textos oficiales de secundaria. *Investigación en didáctica de la matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación, XIII simposio de la SEIEM. Santander: Universidad de Cantabria.*

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2004). Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción Matemática. Aplicación a una experiencia de enseñanza de la noción de función. *In XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática.*

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education,* 39, 127-135.

Godino, J.(2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. *En Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 285-294). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2012). Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática. *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*, 47-78.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletín de Educación Matemática- BOLEMA, 26* (42B), 483-511.

Godino, J., Fernandez, T., Lacasta, E., Neto, T., Wilhelmi, M., Contreras, A., Áke L., Olivares, L. y Estepa, A. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 127-150.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articuluación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

Godino, J., Wilhelmi, M., Neto, T., Blanco, T., Contreras, A., Díaz-Batanero, C., Estepa, A. y Lasa, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de educación nº 370. Octubre-Diciembre 2015*, Vol. 370, p. 2015199.

Hefez, A. (2010). *Curso de álgebra*. Impa.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 11-49.

Lima, E. (2002). *Análise real* (No. 510/L73a/v. 1/6a. ed.).

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI, 9(1), pp. 123-146.*

Martínez J. (2014). Caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización. *Tesis de Maestría en educación matemática. Medellín. Universidad de Medellín.*

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado de

http://www.minedu.gob.pe

Perú, Ministerio de Educación (2013). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Matemática: Cambio y Relaciones*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016). *Programa curricular de educación secundaria. Área curricular: Matemática*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2015). *Rutas de Aprendizaje. Área curricular: Matemática ciclo VI.* Lima. Recuperado de

http://recursos.perueduca.pe/rutas/secundaria.php

Pino-Fan, L., Font, V., y Godino, J. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. *Matamática educativa: La formación de profesores*, 137-151.

Puyal M. (2013). Métodos de resolución y errores en problemas de funciones lineales y afines del alumnado de 3º ESO del aula ordinaria y del aula de excelencia. (Trabajo de fin de maestría) Universidad Pública de Navarra, Navarra.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91-95.

Rodríguez, A., Picado, M., Espinoza, J., Rojas, N., y Flores, P. (2016). Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: un estudio de caso. *Uniciencia, 30*(1), 1-16.

Stewart, J. (2007). Pre cálculo Quinta Edición. *México, Thomson.*

Wilhelmi, M., Godino, J., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(79), 77.