PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

ESTUDIO LOCAL DE LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES MODIFICADA II

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática
presentada por

Katia Vigo Ingar

Asesor

Juan Montealegre Scott

Lima, Febrero 2011

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ASESOR: JUAN MONTEALEGRE SCOTT

AUTOR: KATIA VIGO INGAR

MIEMBROS DEL JURADO

_ _

PRESIDENTE: JULIO ALCÁNTARA BODE

_ _

2DO JURADO: JOSÉ LUYO SÁNCHEZ

_ _

ASESOR: JUAN MONTEALEGRE SCOTT

A mis padres Julián

y Trinidad, a mi

sobrina Daniela.

Un agradecimiento a mi asesor,
profesor Juan Montealegre Scott
por su apoyo permanente en la
elaboración de este trabajo.

Resumen

El objetivo en esta tesis consiste en demostrar la buena formulación local del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u^2 \partial_x u = 0 \\ \quad u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(x,t)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$ en los espacios de Sobolev clásicos $H^{1/4}(\mathbb{R})$.

Para la demostración se utiliza el método de los estimados lineales de Kenig, Ponce y Vega con el fin de probar la existencia y unicidad de solución local de la ecuación integral asociada al PVI (1), además la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial. La técnica usada para obtener estos resultados está basada en el teorema de punto fijo de Banach combinado con los efectos regularizantes del grupo de operadores unitarios asociados a la parte lineal.

Índice general

Introducción

Para un problema de valor inicial asociado con una ecuación, en derivadas parciales de evolución, se tienen tres cuestiones fundamentales: existencia de soluciones, unicidad de solución y dependencia continua de la solución en los datos iniciales. Para discutir la existencia de soluciones es necesario especificar, no solamente, la clase de funciones donde buscamos la solución, sino también en que sentido las condiciones iniciales son satisfechas. Una vez garantizada la existencia de una solución, se debe garantizar también la unicidad de ésta y así mismo la dependencia de la solución de los datos iniciales. Debemos recordar que los datos de un problema físico son datos experimentales que necesariamente contienen errores de medida, es, por lo tanto, natural preguntarse si pequeñas variaciones en los datos conllevan pequeñas variaciones en la solución; es decir se debe garantizar que si la condición inicial sufre una pequeña variación, es natural esperar que la solución del problema de valor inicial también varía continuamente en alguna topología. Un problema de valor inicial para el cual valen la existencia, unicidad y dependencia continua en los datos iniciales es llamado problema bien formulado en el sentido de Hadamard, en caso contrario se dice que el problema es mal formulado.

Nos interesan las llamadas *ondas dispersivas*, es decir, aquellas ondas que describen la propagación de ondas en un fluido, de modo que las ondas con diferentes longitudes de onda tienen velocidades de propagación distintas. La noción de onda dispersiva no se basa en el carácter de la ecuación, sino en la naturaleza de la solución.

La ecuación de Korteweg-de Vries modificada (KdVm)

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u^2(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

donde u es una función real con $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, es una ecuación en derivadas parciales que incluye efectos de no linealidad y dispersión a la vez. El primer término de la ecuación denota la evolución temporal de una perturbación u (se puede considerar como la elevación de la superficie del agua relativa a su posición de equilibrio), el segundo es el término dispersivo debido a la tercera derivada parcial espacial de u, y el tercer término es considerado el término no lineal debido a la multiplicación entre u^2 y su primera derivada parcial respecto al espacio. Al igual que la ecuación de Korteweg-de Vries

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0,$$

la ecuación de KdVm es un modelo que describe en una dimensión espacial, la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios dispersivos no lineales. La propagación de ondas solitarias en la superficie del agua, en canales pocos profundos, es un ejemplo de medio dispersivo en el que se pueden hallar este tipo de ondas.

Kato 1975, [9] y [10], demostró que el PVI asociado a la ecuación de KdV generalizada

$$\partial_t u(t) + \partial_x u(t) + u^p u(t) = 0, \quad p \in \mathbb{Z}^+$$

está bien formulado localmente en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 3/2$, para ello usó la teoría cuasi-lineal por él desarrollada. Por otro lado, Nunes 1980, [19], demostró que el PVI asociado a la ecuación de KdV con coeficientes variables

$$\partial_t u(t) + a(t)\partial_x u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0$$

es bien formulado localmente en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 3/2$. Para ello usó el método de Regularización Parabólica como en [7] para mostrar la existencia de soluciones y los estimados de Bona-Smith [2] para probar la dependencia continua de la solución respecto de los datos iniciales.

El requisito $s > 3/2$ no es posible mejorarlo usando los métodos anteriores, pues una propiedad usada en los pasos críticos de las demostraciones de Kato y Nunes, es la que caracteriza a los espacios de Sobolev H^s como un álgebra de Banach. Por ello, con el fin de obtener mejores resultados ($s < 3/2$), es necesario prescindir de tal propiedad. Esto fue hecho por Kenig, Ponce y Vega en [11], [12] y [13]. Ellos demostraron que el PVI asociado a la ecuación de KdVm es bien formulado localmente en $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 1/4$. Para ello usaron las propiedades de la integral oscilatoria definida por el PVI asociado con la ecuación de KdVm lineal con el fin de obtener adecuados estimados lineales, que les permitieron utilizar el teorema de contracción y aplicar el método de punto fijo para resolver Ia ecuación integral equivalente al PVI asociado a la ecuación de KdVm.

En el trabajo proponemos estudiar el método de los estimados lineales de Kenig-Ponce-Vega, y utilizarlos para demostrar la buena formulación local del PVI

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) + u^2(t)\partial_x u(t) = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(x,t)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. El objetivo de la tesis es demostrar la buena formulación local del problema de valor inicial (1) en el espacio de Sobolev clásico $H^{1/4}(\mathbb{R})$.

Para ello, nos planteamos el siguiente objetivo:

Usando el método de los estimados lineales, probaremos el teorema local 5.2. Este teorema nos garantiza la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de la ecuación integral (5.1) determinada por el problema de valor inicial asociado a la ecuación de Korteweg-de Vries modificada (1) en el espacio de Sobolev $H^{1/4}(\mathbb{R})$.

Para lograr el objetivo propuesto dividimos nuestro trabajo en cinco capítulos.

En el primer capítulo presentamos los conceptos y propiedades de los espacios $L^p(\Omega)$, los espacios $L^p(I,X)$ y sus propiedades.

En el segundo capítulo estudiaremos temas del Análisis Armónico que comprende las integrales oscilatorias en una dimensión, teoremas de interpolación y teorema de Integral Fracionaria, además la transformada de Hilbert que serán necesarios para fundamentar las demostraciones de los capítulos posteriores.

En el tercer capítulo estudiamos la existencia y unicidad del PVI lineal (3.1), resultado que es demostrado en el teorema 3.3. Posteriormente enunciamos y demostramos algunas propiedades del grupo de operadores unitarios $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ generado por el problema lineal.

En el cuarto capítulo estudiamos los estimados lineales estudiados por Kenig, Ponce y Vega en los teoremas 4.1, 4.2 y 4.3.

Finalmente en el quinto capítulo estudiamos la buena formulación local de la ecuación de KdV modificada en espacios de menor regularidad, esto es en espacios de Sobolev $H^{1/4}(\mathbb{R})$.

Para ello tomaremos como referencia los artículos [11], [12] y [13] y demostramos el teorema 5.2 que garantiza la buena formulación local de KdVm (1).

Notaciones

- $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \{0, 1, \ldots\}$.
- X, Y espacios de Banach.
- $X \hookrightarrow Y$ cuando $X \subset Y$ con la aplicación “inclusión” continua.
- X', Y' espacios duales de los espacios de de Banach X e Y.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$ producto interno en la dualidad X', X.
- $\mathcal{L}(X, Y)$ espacio de operadores lineales acotados de X en Y.
- $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.
- $C^k([0, T], X)$ espacio de funciones con k derivadas continuas, definidas sobre $[0, T]$ con valores en X.
- $C([0, T] : X) = C^0([0, T] : X)$.
- $C_0^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de funciones en $C^k(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto.
- $C_0^\infty(I, x)$ espacio de funciones en C^∞ con soporte compacto de I en x.
- $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ espacio de funciones en $C^k(\mathbb{R}^n)$ tales que ella y sus derivadas hasta el orden k tienden a cero en el infinito.
- $\|u\|_{C_\infty^k} = \max\limits_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ espacio de Schwartz sobre $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ espacio de las distribuciones tempeeradas sobre $\mathbb{R}^n$.

- $L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f|_k \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega,\ 1 \leq p \leq \infty\}$.

- $L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ medible en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ y } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty,\ 1 \leq p < \infty \right\}$.

- $\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$ norma de u en $L_p(\Omega)$.

- $L^\infty(\Omega) = \{u \text{ medible en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ y } \exists\, C > 0 : |u(x)| \leq C\ c.e.t.\ \Omega\}$.

- $\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C\ c.e.t.\ \Omega\}$ norma de u en $L^\infty(\Omega)$.

- $\langle u, v \rangle_{L^2}$ producto interno en $L_2(\mathbb{R}^n)$ de u y v.

- $L^p(\mathbb{R} : L^q([0,T])) = \{u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R},\ \|u\|_{L^p_x L^q_t} < \infty \text{ con } 1 \leq p, q < \infty\}$.

- $\|u\|_{L^p_x L^q_T} = \left(\int_\mathbb{R} \left(\int_0^T |u(x,t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$, si $p = \infty$ ó $q = \infty$ usaremos una notación similar, incluyendo la norma del supremo esencial.

- $\mathcal{D}(A)$ dominio del operador lineal A.

- $\mathcal{R}(A)$ rango del operador lineal A.

- $\|u\|_{L^p_x L^q_t} = \left(\int_\mathbb{R} \left(\int_\mathbb{R} |u(x,t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$.

- $\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{-i\xi x} u(x) dx$ transformada de Fourier de u.

- $\check{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{i\xi x} \widehat{u}(\xi) d\xi$ transformada de Fourier inversa de u.

- D^s derivada homogénea de orden s, $\widehat{D^s u}(\xi) = |\xi|^s \widehat{u}(\xi)$.

- H^s espacio de Sobolev de orden s de tipo L^2.

- $\overset{\circ}{H}{}^s(\mathbb{R})$ espacio de Sobolev Homogéneo de orden s.

- $\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^s} = \|\widehat{D^s u}\|_{L^2}$.

- C representa una constante cuyo valor puede cambiar de una línea a otra.

Observación. Vamos a suprimir el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la transformada de Fourier y en la transformada inversa de Fourier.

Capítulo 1

Espacios de normas mixtas

En este capítulo presentamos los principales conceptos y resultados que serán utilizados en los capítulos posteriores.

1.1. Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 1.1. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

con

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Definición 1.2. Se define

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} :\ f \text{ es medible y } \exists\, C > 0 :\ |f(x)| \leq C, \text{ c.e.t. en } \Omega\}$$

y se denota

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{C :\ |f(x)| \leq C;\ c.e.t. \text{ en } \Omega\}.$$

Si $f \in L^\infty(\Omega)$, entonces $|u(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ c.e.t. en Ω.

Teorema 1.3. [5, *Desigualdad de Hölder*]. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$. Además,*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}. \tag{1.1}$$

Observación.

1) Cuando aplicamos (1.1) diremos que usamos la desigualdad de Hölder con (p,q).

2) En general, si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $fg \in L^r$ siempre que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Además,

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

En efecto, aplicando la desigualdad de Hölder a las funciones f^r y g^r sabiendo que $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|f^r g^r\|_{L^1} &\leq \|f^r\|_{L^{p/r}}\|g^r\|_{L^{q/r}} \\
&= \left(\int_\Omega |f^r|^{p/r} dx\right)^{r/p} \left(\int_\Omega |g^r|^{q/r} dx\right)^{r/q} \\
&= \left[\left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}\right]^r \left[\left(\int_\Omega |g|^q dx\right)^{1/q}\right]^r \\
&= \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^q}^r,
\end{aligned}$$

pero,

$$\|f^r g^r\|_{L^1} = \int_\Omega |fg|^r dx = \left[\left(\int_\Omega |fg|^r dx\right)^{1/r}\right]^r = \|fg\|_{L^r}^r,$$

luego $\|fg\|_{L^r}^r \leq \|f\|_{l^p}^r \|g\|_{L^q}^r$. Por lo tanto,

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Teorema 1.4. [5, *Desigualdad de Minkowski*]. *Si* $1 \leq p < \infty$ *y* $f, g \in L^p(\Omega)$, *entonces*

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Concluimos esta sección con algunos comentarios respecto de algunas propiedades elementales de los espacios $L^p(\Omega)$. Las demostraciones de estas propiedades se encuentran en [3].
Para $1 \leq p \leq \infty$, L^p es un espacio de Banach, además $L^p(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$. Así mismo, el espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$.

1.2. Espacios $L^p(I, X)$

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(I,X)$ al conjunto de (clases de equivalencia de) funciones medibles $u : I \to X$ tal que la función $t \mapsto \|f(t)\|_X$ pertenece a $L^p(I)$.

Si $u \in L^p(I,X)$ definimos

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \begin{cases} \left(\int_I \|f(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{C > 0 : \|f(t)\|_X \leq C \quad c.e.t. \quad I\} & si \qquad p = \infty. \end{cases}$$

Los espacios $L^p(I,X)$ tienen muchas de las propiedades de los espacios $L^p(I) = L^p(I,\mathbb{R})$, con esencialmente las mismas pruebas.

El espacio $L^p(I,X)$ con la norma $\|.\|_{L^p}$ es un espacio de Banach si $p \in [1,\infty]$. Cuando $1 \leq p < \infty$ el espacio $C_0^\infty(I,X)$ es denso en $L^p(I,X)$, como se puede ver en [3].

Si $f \in L^p(I,X) \cap L^q(I,X)$ con $p < q$, entonces para todo $r \in [p,q]$ tenemos $f \in L^r(I,X)$, y

$$\|f\|_{L^r(I,X)} \leq \|f\|_{L^p(I,X)}^\theta \|f\|_{L^q(I,X)}^{1-\theta},$$

donde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$, como se puede ver en [5].

Si $f \in L^p(I,X)$ y $g \in L^q(I,X')$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} \leq 1$, entonces la función $h : t \in I \mapsto \langle g(t), f(t)\rangle_{X',X}$ está en $L^r(I)$ y

$$\|h\|_{L^r(I)} \leq \|f\|_{L^p(I,X)} \|g\|_{L^q(I,X')}.$$

En relación con esta última observación, citamos el siguiente resultado.

Proposición 1.5. [4, *Teorema 1.4.19*]. *Si $p \in [1,\infty)$ y X es reflexivo (o X' es separable), entonces $(L^p(I,X))' = L^q(I,X)$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Además, si X es reflexivo $L^p(I,X)$ es reflexivo cuando $1 < p < \infty$.*

De aquí en adelante usaremos la notación L^pX para referirnos a los espacios $L^p(I,X)$.

1.3. Propiedades de los Espacios $L^p(I,L^q)$

Teorema 1.6. [5, *Desigualdad de Minkowski para integrales*]. *Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right|^p dy\right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|^p dy\right)^{1/p} dx,$$

es decir

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(x,y)\|_{L^p} dx.$$

Usaremos la notación $L_x^p L_T^q$ para referirnos al espacio $L^p(\mathbb{R}, L_T^q)$ y $L_x^p L_T^\infty$ para referirnos a $L^p(\mathbb{R}, L_T^\infty)$.

Lema 1.7. *Si* $f \in L_x^2 L_T^2$ *y* $f \in L_T^2 L_x^2$*, entonces*

$$L_x^2 L_T^2 = L_T^2 L_x^2.$$

Demostración. Usando el teorema de Fubini, tenemos

$$\|f\|_{L_x^2 L_T^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 dt \right) dx = \int_{-T}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^2 dx \right) dt = \|f\|_{L_T^2 L_x^2}^2$$

Por lo tanto $\|f\|_{L_x^2 L_T^2} = \|f\|_{L_T^2 L_x^2}$. □

Lema 1.8. *Si* $f \in L_x^2 L_T^\infty$ *y* $g \in L_x^\infty L_T^2$*, entonces* $fg \in L_x^2 L_T^2$*, además*

$$\|fg\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|f\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|g\|_{L_x^\infty L_T^2}.$$

Demostración. Usando la definición de norma en $L_x^2 L_T^2$, aplicando la desigualdad de Hölder en la variable t con $(\infty, 1)$ y en la variable x con $(1, \infty)$ respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L_x^2 L_T^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} |fg(x,t)|^2 dt \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 |g(x,t)|^2 dt \right) dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sup_{[-T,T]} |f(x,t)|^2 \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt \right) dx \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{[-T,T]} |f(x,t)|^2 dx \right) \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt \right) \\
&= \|f\|_{L_x^2 L_T^\infty}^2 \|g\|_{L_x^\infty L_T^2}^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|fg\|_{L_x^2 L_T^2} \leq \|f\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|g\|_{L_x^\infty L_T^2}.$$ □

Lema 1.9. *Si* $f \in L_x^{20} L_t^{5/2}$ *y* $g \in L_x^{20/9} L_t^{10}$*, entonces* $fg \in L_x^2 L_t^2$*, además*

$$\|fg\|_{L_x^2 L_t^2} \leq \|f\|_{L_x^{20} L_t^{5/2}} \|g\|_{L_x^{20/9} L_t^{10}}.$$

Demostración. Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada con $r = 2$, respecto a t con $(5/2, 10)$ y respecto a x con $(20, 20/9)$ respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L_x^2 L_t^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |(fg)(x,t)|^2 dt \right) dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^{5/2} dt \right)^{2/5} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x,t)|^{10} dt \right)^{1/10} dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,t)|^{5/2}dt\right)^{8}dx\right)^{1/20}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(x,t)|^{10}dt\right)^{\frac{2}{9}}dx\right)^{9/20}$$
$$= \|f\|_{L^{20}_x L^{5/2}_t}\|g\|_{L^{20/9}_x L^{10}_t}. \qquad \square$$

Por lo tanto

$$\|fg\|_{L^2_x L^2_t} \leq \|f\|_{L^{20}_x L^{5/2}_t}\|g\|_{L^{20/9}_x L^{10}_t}.$$

Lema 1.10. *Si $f \in L^4_x L^\infty_T$, entonces $f^2 \in L^2_x L^\infty_T$ y*

$$\|f^2\|_{L^2_x L^\infty_T} = \|f\|^2_{L^4_x L^\infty_T}$$

Demostración.

$$\|f^2\|_{L^2_x L^\infty_T} = \left(\int_{\mathbb{R}}\left|\sup_{t\in[-T,T]}|f^2(x,t)|\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left|\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|\right|^2 dx\right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}}\left|\sup_{t\in[-T,T]}f(x,t)\right|^4 dx\right)^{1/2} = \left[\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\sup_{t\in[-T,T]}|f(x,t)|\right|^4 dx\right)^{1/4}\right]^2$$
$$= \|f\|^2_{L^4_x L^\infty_T}. \qquad \square$$

Lema 1.11. [*Regla de Leibniz para derivadas fraccionarias*]. *Sea $\alpha \in]0,1[$, $\alpha_1, \alpha_2 \in]0,\alpha[$ donde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Sea $p_1, p_2, q_1, q_2 \in]1,+\infty[$ tal que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ y $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2}$. Entonces*

$$\|D^\alpha_x(uv) - uD^\alpha_x v - vD^\alpha_x u\|_{L^p_x L^q_T} \leq \|D^{\alpha_1}_x u\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T}\|D^{\alpha_2}_x v\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T}$$

Además, para $\alpha_1 = 0$ el valor $q_1 = \infty$ es elegido.

La demostración de este lema se encuentra en [12, Teorema A.8].

Lema 1.12. [*Regla de la cadena para derivadas fraccionarias*]. *Sea $\alpha \in]0,1[$ y $p, q, p_1, p_2, q_2 \in]1,+\infty[$, $q_1 \in]1,\infty[$ tal que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ y $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2}$. Entonces*

$$\|D^\alpha F(f)\|_{L^p_x L^q_T} \leq C\|F'(f)\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T}\|D^\alpha f\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T}.$$

La demostración de este lema se encuentra en [12, Teorema A.6].

Capítulo 2

Temas de análisis armónico

2.1. Integrales oscilatorias en una dimensión

En esta sección estudiamos el comportamiento asintótico de $I(\lambda)$ cuando $\lambda \to \infty$ donde

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x)dx,$$

y ϕ es una función real cuya derivada existe en todo $x \in [a,b]$ llamada *fase*, y f es una función compleja cuya derivada existe en todo $x \in [a,b]$.

Veremos que este comportamiento asintótico es determinado por los puntos críticos $\overline{x}$ de ϕ, esto es, $\phi'(\overline{x}) = 0$.

Proposición 2.1. *Sea $f \in C_0^\infty([a,b])$ y $\phi'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces*

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x)dx = O(\lambda^{-k}),$$

cuando $\lambda \to \infty$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Definamos el operador diferencial $L(f) = \frac{1}{i\lambda\phi'}\frac{df}{dx}$, entendiendo ϕ' como derivada de ϕ respecto a su variable independiente.

Es claro que el operador $L^t(f)$ satisface $L^t(f) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{i\lambda\phi'}\right)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle L(f), g\rangle &= \left\langle \frac{1}{i\lambda\phi'}\frac{df}{dx}, g\right\rangle = \left\langle \frac{df}{dx}, \frac{1}{i\lambda\phi'}g\right\rangle \\
&= -\left\langle f, \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{i\lambda\phi'}g\right)\right\rangle = \left\langle f, -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{i\lambda\phi'}g\right)\right\rangle,
\end{aligned}$$

por tanto $L^t(g) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{i\lambda\phi'}g\right)$. Además $L(e^{i\lambda\phi}) = \frac{1}{i\lambda\phi'}\frac{d}{dx}(e^{i\lambda\phi}) = e^{e^{i\lambda\phi}}$, en general $L^k(e^{i\lambda\phi}) = e^{i\lambda\phi}$. Luego,

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi} f dx = \int_a^b L^k(e^{i\lambda\phi}) f dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi}(L^t)^k f dx \quad \text{ya que} \quad (L^k)^t = (L^t)^k$$

$$= \int_a^b e^{i\lambda\phi)}\left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^k F_k(x)dx = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^k \int_a^b e^{i\lambda\phi} F_k(x)dx$$

$$= (i)^k(\lambda)^{-k}\int_a^b e^{i\lambda\phi}F_k(x)dx = O(\lambda^{-k}) \quad \text{cuando} \quad \lambda \to +\infty. \qquad \square$$

Proposición 2.2. *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ para todo $x \in [a,b]$ con $\phi'(x)$ monótona en el caso $k = 1$. Entonces*

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_k\lambda^{-1/k}, \qquad \lambda > 0$$

donde C_k es una constante independiente de a y b.

Demostración. Para $k = 1$. Usando integración por partes se tiene

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx = \int_a^b L(e^{i\lambda\phi})dx = \int_a^b \frac{1}{i\lambda\phi'} i\lambda\phi' e^{i\lambda\phi}dx = \frac{e^{i\lambda\phi}}{i\lambda\phi'}\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{1}{i\lambda}e^{i\lambda\phi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)dx$$

$$= \frac{1}{i\lambda}\left(\frac{e^{i\lambda\phi(b)}}{\phi'(b)} - \frac{e^{i\lambda\phi(a)}}{\phi'(a)}\right) - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b e^{i\lambda\phi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx\right| &\leq \frac{1}{\lambda}\left|\frac{e^{i\lambda\phi(b)}}{\phi'(b)} - \frac{e^{i\lambda\phi(a)}}{\phi'(a)}\right| + \frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{|\phi'(b)|} + \frac{1}{|\phi'(a)|}\right) + \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(b)} - \frac{1}{\phi'(a)}\right| \\
&< \frac{1}{\lambda}(2) + \frac{1}{\lambda}(1) \\
&= 3\lambda^{-1}.
\end{aligned}$$

Si $k \geq 2$. Lo demostraremos por inducción para $k+1$ por hipótesis (inductiva), suponiendo que se cumple para k, es decir $|\phi^{(k+1)}(x)| \geq 1$, demostremos que $\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx\right| \leq C_{k+1}\lambda^{-1/k+1}$.

Sea $x_0 \in [a,b]$ un minimizante global de ϕ, es decir $|\phi^{(k)}(x_0)| = \min_{a\leq x\leq b}|\phi^{(k)}(x)|$.

Si $\phi^{(k)}(x_0) = 0$, fuera del intervalo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ tenemos $|\phi^{(k)}(x)| \geq \delta$ para algún δ con ϕ' monótona si $k = 1$. Luego,

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx\right| \leq \left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\lambda\phi}dx\right| + \left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{i\lambda\phi}dx\right| + \left|\int_{x_0+\delta}^b e^{i\lambda\phi}dx\right|$$

pero,

$$\left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\lambda\phi}dx\right| = \left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\lambda\phi}e^{i(\lambda\delta)(\frac{\phi}{\delta})}dx\right| = \left|\int_a^{x_0-\delta} e^{i\bar{\lambda}\psi}dx\right| \leq C_k(\lambda\delta)^{-1/k},$$

por hipótesis inductiva donde $\psi(x) = \dfrac{\phi(x)}{\delta} \Rightarrow |\psi^{(k+1)}(x)| = \dfrac{|\phi^{(k+1)}(x)|}{\delta} \geq 1$ del mismo modo $\left|\int_{x_0+\delta}^{b} e^{i\lambda\phi}dx\right| \leq C_k(\lambda\delta)^{-1/k}$.

Por otro lado $\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{i\lambda\phi}dx\right| \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |e^{i\lambda\phi}|dx = 2\delta$. Por lo tanto, al tomar $\delta = \lambda^{-1/k+1}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{a}^{b} e^{i\lambda\phi}dx\right| &\leq C_k(\lambda\delta)^{-1/k} + 2\delta \\ &= C_k\lambda^{-1/k}(\lambda^{-1/k+1})^{-1/k} + 2\lambda^{-1/k+1} = (C_k+2)\lambda^{-1/k+1} = C_{k+1}\lambda^{-1/k+1}.\end{aligned}$$

Si $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$, entonces $x_0 = a$ ó $x_0 = b$ y un argumento similar nos lleva a la misma cota. Finalmente tomando $\delta = \lambda^{-1/k+1}$ completa la prueba. □

Corolario 2.3 (Van der Corput). *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ para todo $x \in [a,b]$ con $\phi'(x)$ monótona en el caso $k = 1$. Entonces*

$$\left|\int_{a}^{b} e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_k\lambda^{-1/k}(\|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^1})$$

donde C_k es una constante independiente de a y b.

Demostración. Se define $F(x) = \int_{a}^{x} e^{i\lambda\phi(y)}dy$, entonces $F'(x) = e^{i\lambda\phi(x)}$.

Además $|F(x)| = \left|\int_{a}^{b} e^{i\lambda\phi(y)}dy\right| \leq C_k\lambda^{-1/k}$ según el teorema anterior.

Luego,

$$\begin{aligned}\left|\int_{a}^{b} e^{i\lambda\phi(x)}f(x)dx\right| &= \left|\int_{a}^{b} F'(x)f(x)dx\right| = \left|F(x)f(x)|_a^b - \int_{a}^{b} F(x)f'(x)dx\right| \\ &\leq |F(b)f(b) - F(a)f(a)| + \left|\int_{a}^{b} F(x)f'(x)dx\right| \\ &\leq |F(b)f(x)| + \int_{a}^{b} |F(x)||f'(x)|dx \leq |F(b)||f(b)| + C_k\lambda^{-1/k}\int_{a}^{b} |f'(x)| \\ &\leq C_k\lambda^{-1/k}|f(b)| + C_k\lambda^{-1/k}\int_{a}^{b} |f'(x)|dx \\ &\leq C_k\lambda^{-1/k}\sup\{|f(x)|;\ a \leq x \leq b\} + C_k\lambda^{-1/k}\int_{a}^{b} |f'(x)|dx \\ &= C_k\lambda^{-1/k}\|f\|_{L^\infty} + C_k\lambda^{-1/k}\|f'\|_{L^1} = C_k\lambda^{-1/k}(\|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^1}).\end{aligned}$$ □

Estudiaremos una aplicación de estos resultados en la proposición 2.4, la cual será utilizada en la demostración de los estimados lineales del capítulo 4.

Proposición 2.4. *Sea $\beta \in [0, 1/2]$ y $I_\beta(x)$ la siguiente integral oscilatoria*

$$I_\beta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta d\eta$$

Entonces $I_\beta \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Demostración. Primero fijemos una función $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $\varphi_0(\eta) = \begin{cases} 1 & , \quad si\ |\eta| > 2 \\ 0 & , \quad si\ |\eta| < 1 \end{cases}$

Observemos que la función $(1 - \varphi_0)(\eta) e^{i\eta^3} |\eta|^\beta \in L^1(\mathbb{R})$, además su transformada de Fourier está en $L^\infty(\mathbb{R})$. Además,

$$\begin{aligned} I_\beta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta (1 - \varphi_0 + \varphi_0)(\eta) d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta (1 - \varphi_0)(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta \varphi_0(\eta) d\eta \\ &= \int_{-2}^{2} e^{ix\eta} e^{i\eta^3} |\eta|^\beta (1 - \varphi_0)(\eta) d\eta + \widetilde{I}_\beta(x) = C + \widetilde{I}_\beta(x), \end{aligned}$$

donde C es el valor de la primera integral y $\widetilde{I}_\beta(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta \varphi_0(\eta) d\eta$ luego, para acotar $|I_\beta(x)|$ es suficiente acotar $|\widetilde{I}_\beta(x)|$.

Para $x \geq -1$, la función fase $\phi(\eta) = x\eta + \eta^3$ en el soporte de φ_0, satisface

$$|\phi'(\eta)| = |x + 3\eta^2| \geq |x| + |\eta|^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_\beta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} \varphi_0(\eta) |\eta|^\beta d\eta &= \int_{-\infty}^{-1} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta d\eta + \int_{1}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} |\eta|^\beta d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{-1} e^{i(x\eta+\eta^3)} (-\eta)^\beta d\eta + \int_{1}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} \eta^\beta d\eta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Usando integración por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int_{1}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} \eta^\beta d\eta &= \int_{1}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} i(x+3\eta^2) \frac{\eta^\beta}{i(x+3\eta^2)} d\eta \\ &= \left. \frac{ie^{i(x\eta+\eta^3)} \eta^\beta}{x + 3\eta^2} \right|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{i(x\eta+\eta^3)} (\beta\eta^{\beta-1}(x + 3\eta^2) - 6\eta^{\beta+1}) d\eta}{i(x + 3\eta^2)} \end{aligned}$$

Entonces

$$\left| \int_1^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)} \eta^\beta d\eta \right| \leq \left| -\frac{e^{i(x+1)}}{x+3} \right| + \int_1^{+\infty} \frac{\left| \beta\eta^{\beta-1}(x + 3\eta^2) - 6\eta^{\beta+1} \right| d\eta}{|x + 3\eta^2|^2} = \frac{1}{x+3} + C_{x,\beta}$$

ya que $x \geq -1$ y la integral impropia es convergente. La primera integral de (2.1) se acota de manera similar. Por tanto, $|\widetilde{I}_\beta(x)| \leq K_{x,\beta}$ si $x \geq -1$.

Para $x < -1$, consideremos las funciones $(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta) = 1$$

con soporte de $\varphi_1 \subset A = \{\eta : \ |x + 3\eta^2| \leq |x|/2\}$ y $\varphi_2(\eta) = 0$ en $B = \{\eta : \ |x + 3\eta^2| \geq |x|/3\}$ y dividamos la inetgral $\widetilde{I}_\beta(x)$ en dos sumandos, como:

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_\beta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)(\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta))d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)\varphi_2(\eta))d\eta \\
&= \widetilde{I}_{\beta,1}(x) + \widetilde{I}_{\beta,2}(x)
\end{aligned}$$

Entonces, $|\widetilde{I}_\beta(x)| \leq |\widetilde{I}_{\beta,1}(x)| + |\widetilde{I}_{\beta,2}(x)|$.

Cuando $\varphi_2(\eta) = 0$ se prueba que $|\phi'(\eta)| = |x + 3\eta^2| \geq \dfrac{1}{6}(|x| + |\eta|^2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_{\beta,2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x\eta+\eta^3)}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)\varphi_2(\eta)d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\eta|^\beta}{i\phi'(\eta)}\varphi_0(\eta)\varphi_2(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(e^{i(x\eta+\eta^3)}\right)d\eta \\
&= \int_{|\eta|>2} \frac{|\eta|^\beta}{i\phi'(\eta)}\varphi_2(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(e^{i(x\eta+\eta^3)}\right)d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{-2} \frac{|\eta|^\beta}{i\phi'(\eta)}\varphi_2(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(e^{i(x\eta+\eta^3)}\right)d\eta + \int_{2}^{+\infty} \frac{|\eta|^\beta}{i\phi'(\eta)}\varphi_2(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(e^{i(x\eta+\eta^3)}\right)d\eta \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Solo acotaremos la segunda integral de (2.2), ya que la primera integral se acota de manera similar.

Así,

$$\begin{aligned}
&\int_{2}^{+\infty} \frac{|\eta|^\beta}{i\phi'(\eta)}\varphi_2(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(e^{i\phi}\right)d\eta \\
&= \frac{\eta^\beta\varphi_2(\eta)e^{i\phi}}{i\phi'}\bigg|_2^{+\infty} - \int_{2}^{+\infty} \frac{\left[\phi'\left(\beta\eta^{\beta-1}\varphi_2(\eta) + \eta^\beta\varphi_2'(\eta)\right) - \eta^\beta\varphi_2(\eta)\phi''\right]e^{i\phi}d\eta}{i(\phi')^2} \\
&= \frac{-(2^\beta\varphi_2(2)e^{i\phi(2)})}{i\phi'(1)} - \int_{2}^{+\infty} \frac{\left[\phi'\left(\beta\eta^{\beta-1}\varphi_2(\eta) + \eta^\beta\varphi_2'(\eta)\phi''\right)\right]e^{i\phi}d\eta}{i(\phi')^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{2}^{+\infty} \frac{\eta^\beta\varphi_2(\eta)}{i\phi'}\frac{d}{d\eta}\left(e^{i\phi}\right)d\eta\right| \\
&\leq \frac{|2^\beta\varphi_2(2)|}{|\phi'(2)|} + \int_{2}^{+\infty} \frac{\beta\eta^{\beta-1}|\varphi_2(\eta)|}{|\phi'|}d\eta + \int_{2}^{+\infty} \frac{\eta^\beta|\varphi_2'(\eta)|}{|\phi'|}d\eta + \int_{2}^{+\infty} \frac{\eta^\beta|\varphi_2(\eta)||\phi''|}{|\phi'|^2}d\eta \\
&\leq C_1 + C_2\int_{2}^{+\infty} \frac{d\eta}{|x + 3\eta^2|} + C_3\int_{2}^{+\infty} \frac{\eta^{1/2}}{|x + 3\eta^2|}d\eta + C_4\int_{2}^{+\infty} \frac{\eta^{3/2}}{|x + 3\eta^2|^2}d\eta \\
&= C
\end{aligned}$$

ya que las tres integrales impropias son convergentes. Por tanto, $\left|\widetilde{I}_{\beta,2}(x)\right| \leq C; \quad C > 0$.

Ahora si $\eta \in A$, tenemos que, $\dfrac{|x|}{2} \leq 3\eta^3 \leq \dfrac{3|x|}{2} \quad \wedge \quad \left|\dfrac{d^2\phi(\eta)}{d\eta^2}\right| = 6|\eta| \geq (6|x|)^{1/2} \geq \sqrt{6} > 1$.

Así, el lema de Van Der Corput (con $\lambda = 1$) y la forma de $\varphi_0; \varphi_1$ garantizan que existe una constante "C" independiente de $x < -1$ tal que,

$$\left|\widetilde{I}_{\beta,1}(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\phi(\eta)}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)\varphi_1(\eta)d\eta\right| \leq C_k \left(\|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^1}\right)$$

donde $f(\eta) = |\eta|^\beta \varphi_0(\eta)\varphi_1(\eta)$.

Luego,

$$\left|\widetilde{I}_{\beta,1}(x)\right| = \left|\int_{-\sqrt{\frac{|x|}{2}}}^{-\sqrt{\frac{|x|}{6}}} e^{i\phi}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)d\eta\right| + \left|\int_{\sqrt{\frac{|x|}{6}}}^{\sqrt{\frac{|x|}{2}}} e^{i\phi}|\eta|^\beta \varphi_0(\eta)d\eta\right| = K > 0$$

Por tanto $I_\beta \in L^\infty(\mathbb{R})$. □

2.2. Teoremas de interpolación de la integral fraccionaria

Aquí enunciamos el teorema de Riesz-Thorin y los teoremas 2.9 y 2.12. Así mismo consideremos (X, A, μ), (Y, B, μ) espacios medibles y denotamos $L^p(X) = L^p(X, A, \mu)$ y $L^q(Y) = L^q(Y, B, \mu)$ para $1 \leq p, q \leq \infty$.

Definición 2.5. Sea $T : L^p(X) \to L^q(Y)$ es llamada sublineal si

$$|T(u+v)| \leq |T(u)| + |T(v)| \quad \text{y} \quad |T(cu)| = c|T(u)|$$

para todo $u, v \in \mathcal{D} \subset Dom\, T$ y $c > 0$; el operador T es llamado de tipo fuerte (p, q) con constante M_{pq} si

$$\|Tu\|_{L^p} \leq M_{pq}\|u\|_{L^p}$$

para todo $u \in L^p(X)$.

Teorema 2.6. [5, *Riesz-Thorin*]. *Sea $p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$. Sea T un operador lineal acotado de $L^{p_1}(X)$ en $L^{q_1}(Y)$ con norma M_1 y de $L^{p_2}(X)$ en $L^{q_2}(Y)$ con norma M_2. Entonces T un operador lineal acotado de $L^{p_\theta}(X)$ en $L^{q_\theta}(Y)$ con norma $M_\theta \leq M_1^{1-\theta}M_2^\theta$ donde*

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

El siguiente ejemplo muestra una propiedad del operador convolución, el cual será demostrado gracias al teorema de Riesz-Thorin.

Ejemplo. (Desigualdad de Young generalizada). Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Además,

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

En efecto, para $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ definimos el operador

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)dy = (u * v)(x).$$

La desigualdad integral de Minkowski demuestra

$$\|Tu\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^q} \|u\|_{L^1}.$$

Por la desigualdad de Hölder

$$\|Tu\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{L^q} \|u\|_{L^{q'}}$$

así tenemos que T es de tipo $(1, q)$ y (q', ∞) con norma acotada por $\|v\|_{L^q}$. Luego el teorema 2.6 garantiza que T es de tipo (p,r), donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q'} = 1 - \frac{\theta}{q}$$

y

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + 0 = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{\theta}{q}\right) - 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1.$$

Además, por la definición de norma del operador T y el hecho de que $\|T\| \leq \|v\|_{L^q}$ se tiene

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$ □

Teorema 2.7 (Teorema de interpolación compleja de Stein). *Sea* $\{T_z\}$, $z \in \mathfrak{F} = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1\}$ *una familia admisible de operadores tal que*

$$\|T_{iy}u\|_{q_0} \leq M_0(y)\|u\|_{p_0}$$

y

$$\|T_{1+iy}u\|_{q_1} \leq M_1(y)\|u\|_{p_1}$$

para toda función $u \in L^{p_j}$, $1 \leq p_j, q_j \leq \infty$, $M_j(y)$, $j = 0, 1$ *son independientes de* u *y satisface la desigualdad*

$$\sup_{-\infty < y < \infty} e^{-b|y|} \log M_j(y) < \infty, \qquad b < \pi.$$

Entonces, si $0 \leq t \leq 1$ *existe una constante* M_t *tal que*

$$\|T_t u\|_{q_t} \leq M_t \|u\|_{p_t}$$

para toda función simple u *y* $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$, $\quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$.

La demostración de este resultado se encuentra en [14 *Teorema* 2.7].

Para enunciar y demostrar el teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev o teorema de la Integral Fraccionaria, teorema 2.12, necesitamos las siguientes definiciones y teoremas:

Definición 2.8. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos la función maximal de Hardy - Littlewood $\mathcal{M}f(x)$, asociado a f

$$\begin{aligned}\mathcal{M}f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|dy = \sup_{r>0} \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} |f(x-ry)|dy \\ &= \sup_{r>0} \left(|f| * \frac{1}{|B_1(0)|} \mathcal{X}_{B_r(0)} \right)(x).\end{aligned}$$

Teorema 2.9 (Hardy-Littlewood)**.** *Sea $1 < p \leq \infty$. Entonces $\mathcal{M}$ es un operador sublineal de tipo (p,p), es decir*

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \quad para \;\; todo \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

La demostración de este resultado se encuentra en [14, *Teorema* 2.5].

Teorema 2.10. [14, *Teorema 2.4*]. *Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función positiva y no creciente con respecto a $r = \|x\| \in [0,\infty)$. Entonces*

$$\sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| = \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(t^{-1}(x-y))}{t^n} f(y)dy \right| \leq \|\varphi\|_{L^1} \mathcal{M}f(x).$$

Definición 2.11. El potencial de Riesz de orden α con $0 < \alpha < 1$, denotado por I_α, se define

$$I_\alpha f(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = C_\alpha K_\alpha * f(x) \tag{2.3}$$

donde $K_\alpha(x) = \dfrac{1}{|x|^{n-\alpha}}$, $C_\alpha = \dfrac{\pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(n/2 - \alpha/2)}$ y Γ es la función Gamma.

Teorema 2.12 (Hardy - Littlewood - Sobolev)**.** *Sean $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces la integral* (2.3) *es absolutamente convergente para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Si $p > 1$, entonces I_α es de tipo (p,p), es decir*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq C_{p,\alpha} \|f\|_{L^p}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}|I_\alpha f(x)| &\leq C_\alpha \int_{|y|\leq\varepsilon} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}}dy + C_\alpha \int_{|y|>\varepsilon} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}}dy \\ &\leq |C_\alpha K_\alpha^0 * f(x)| + |C_\alpha K_\alpha^\infty + f(x)| \\ &\leq C_\alpha K_\alpha^0 * |f|(x) + C_\alpha K_\alpha^\infty * |f|(x),\end{aligned}$$

donde

$$K_\alpha^0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{n-\alpha}} & ; \quad |x| \leq \varepsilon \\ 0 & ; \quad |x| > \varepsilon \end{cases} \qquad \text{y} \qquad K_\alpha^\infty(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad |x| \leq \varepsilon \\ \dfrac{1}{|x|^{n-\alpha}} & ; \quad |x| > \varepsilon \end{cases}$$

$K_\alpha^0|f|(x)$ representa la convolución de la función $K_\alpha^0 \in (\mathbb{R}^n)$ con $|f| \in L^p$.

En efecto, $|f| \in L^p$ pues por hipótesis $f \in L^p$, $K_\alpha^0(x) = \dfrac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ es integrable en una vecindad del origen si y sólo si $n - \alpha < n$, es decir, si $\alpha > 0$ y por hipótesis esto es verdadero. Por la desigualdad de Young generalizada decimos que $K_\alpha^0(x) * |f| \in L^p$ con $p = 1$, $q = p$ y $r = p$.

$K_\alpha^\infty * |f|(x)$ es la convolución de la función $K_\alpha^\infty \in L^{p'}$ con $|f| \in L^p$. En efecto, $K_\alpha^\infty(x) = \dfrac{1}{|x|^{(n-\alpha)}}$ es integrable en $L^{p'}$ en el complemento de una vecindad del origen si y sólo si $(n-\alpha)p' < n$ y esto es verdadero puesto que por hipótesis $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$.

Por la desigualdad de Young generalizada decimos que $K_\alpha^\infty * |f| \in L^\infty$ con $p = p'$, $q = p$ y $r = \infty$.

Por lo tanto, ambas integrales convergen absolutamente, entonces $I_\alpha f(x)$ es absolutamente convergente para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostremos ahora

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq C_{\alpha,n} \|f\|_{L^p}.$$

En efecto, por el teorema 2.10

$$C_\alpha K_\alpha^0 * |f|(x) \leq \sup_{t>0} |C_\alpha K_\alpha^0 * |f|(x)| \leq C_\alpha \|K_\alpha^0\|_{L^1} \mathcal{M}|f|(x) \tag{2.4}$$

haciendo un cambo de variable en coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, tenemos

$$\|K_\alpha^0\|_{L^1} = \int_{|x|\leq\varepsilon} \frac{dx}{|x|^{n-\alpha}} = \int_{\partial B_1(0)} \int_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{r^{n-\alpha}} dr d\sigma(y) = \frac{nw_n}{\alpha}\varepsilon^\alpha = C_{n,\alpha}\varepsilon^\alpha \tag{2.5}$$

donde $w_n := |B_1(0)|$, medida de $B_1(0)$ en $\mathbb{R}^n$.

Usando la desigualdad de Young,

$$C_\alpha K_\alpha^\infty * |f|(x) \leq |C_\alpha K_\alpha^\infty * |f|(x)| \leq C_\alpha \|K_\alpha^\infty\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} \tag{2.6}$$

y de modo análogo a lo desarrollado en (2.5), tenemos

$$\begin{aligned}\|K_\alpha^0\|_{L^{p'}}^{p'} &= \int_{|x|>\varepsilon} \frac{dx}{|x|^{(n-\alpha)p'}} = \int_{\partial B_1(0)} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{(n-\alpha)p'}} dr d\sigma(y) \\ &= nw_n \int_\varepsilon^{+\infty} r^{n-1-(n-\alpha)p'} = \frac{nw_n}{(n-\alpha)p'-n} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{(n-\alpha)p'-n}}, \\ \|K_\alpha^0\|_{L^{p'}} &= C_{n,\alpha}\varepsilon^{(n-\alpha)-\frac{n}{p'}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

de (2.4) y (2.5) tenemos que $C_\alpha K_\alpha^0 * |f|(x) \leq C_{n,\alpha}\varepsilon^\alpha \mathcal{M}|f|(x)$ y de (2.6) y (2.7) tenemos $C_\alpha K_\alpha^\infty * |f|(x) \leq C_{n,\alpha}\varepsilon^{(n-\alpha)-\frac{n}{p'}}\|f\|_{L^p}$.

Entonces

$$|I_\alpha f(x)| \leq C_{n,\alpha}(\varepsilon^\alpha \mathcal{M}f(x) + \varepsilon^{(n-\alpha)\frac{n}{p'}}\|f\|_{L^p}).$$

Elegimos $\varepsilon = \varepsilon(x)$ de modo que

$$\varepsilon^\alpha \mathcal{M}f(x) = \varepsilon^{\frac{n}{p'}-(n-\alpha)}\|f\|_{L^p},$$

luego

$$|I_\alpha f(x)| \leq C_{n,\alpha}\varepsilon^\alpha \mathcal{M}f(x),$$

como $\varepsilon^\alpha \mathcal{M}f(x) = \varepsilon^{\frac{n}{p'}-(n-\alpha)}\|f\|_{L^p}$ entonces $\varepsilon^{-\frac{n}{p'}+n} = \|f\|_{L^p}(\mathcal{M}f(x))^{-1}$, por tanto

$$\varepsilon = \|f\|_{L^p}^{p/n}(\mathcal{M}f(x))^{-p/n}.$$

Luego,

$$|I_\alpha f(x)| \leq C_{n,\alpha}\varepsilon^\alpha \mathcal{M}f(x) = C_{n,\alpha}\|f\|_{L^p}^{\frac{\alpha p}{n}}(\mathcal{M}f(x))^{1-\frac{\alpha p}{n}} = C_{n,\alpha}\|f\|_{L^p}^\theta(\mathcal{M}f(x))^{1-\theta},$$

donde $\theta = \dfrac{\alpha p}{n}$.

Por otro lado, usando el teorema de Hardy-Littewood, teorema 2.9,

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_{L^q}^q &= \int_{\mathbb{R}} |I_\alpha f(x)|^q dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left|C_{\alpha,n}\|f\|_{L^p}^\theta(\mathcal{M}f(x))^{1-\theta}\right|^q dx \\ &= C_{n,\alpha}\|f\|_{L^p}^{\theta q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}f(x)|^{(1-\theta)q}dx\right)^{\frac{(1-\theta)q}{(1-\theta)q}} = C_{n,\alpha}\|f\|_{L^p}^{\theta q}\|\mathcal{M}f\|_{L^{(1-\theta)q}}^{(1-\theta)q} \\ &\leq C_{n,\alpha}\|f\|_{L^p}^{\theta q}\|f\|_{L^p}^{(1-\theta)q} \leq C_{n,\alpha}\|f\|_{L^p}^q\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq C_{n,\alpha}\|f\|_{L^p}. \qquad \square$$

2.3. Transformada de Hilbert

Definición 2.13. El valor principal de la función $\dfrac{1}{x}$, denotado por $vp\dfrac{1}{x}$, se define por

$$vp\frac{1}{x}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

para todo $f \in \mathcal{S}$.

También usaremos la notación $(vp\frac{1}{x}, f)$ para indicar a $vp\frac{1}{x}(f)$, uso que se justifica por la siguiente proposición.

Recordemos que: Ver [21]

1) Para cada $(\nu, \beta) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ denotamos la seminorma $|||\ .\ |||_{(\nu,\beta)}$ definida como

$$|||f|||_{(\nu,\beta)} = \|x^\nu \partial_x^\beta f\|_{L^\infty}.$$

El espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones reales

$$S(\mathbb{R}) = \{u \in C^\infty :\ |||u|||_{(\nu,\beta)} < \infty,\ \text{para todo } (\nu,\beta) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+\}$$

2) $\psi : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ define una distribución temperada si

a) ψ es lineal,

b) ψ es continua, es decir, si $f_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\psi(f_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Proposición 2.14. *El valor principal de* $\dfrac{1}{x}$ *es una distribución temperada, es decir*

$$vp\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'.$$

Demostración. Como $\dfrac{1}{x}$ es una función impar, $f_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
vp\frac{1}{x}(f_n) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f_n(x)}{x} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{f_n(x)}{x} dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_n(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_n(x)}{x} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{x} dx \right) \\
&= \int_{|x|\geq 1} \frac{f_n(x)}{x} dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_n(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_n(x)}{x} dx \right) \\
&= \int_{|x|\geq 1} \frac{f_n(x)}{x} dx + \int_{-1}^{0} \frac{f_n(x) - f_n(0) + f_n(0)}{x} dx + \int_{1}^{0} \frac{f_n(x)}{x} dx \\
&= \int_{|x|\geq 1} \frac{f_n(x)}{x} dx + \int_{-1}^{0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} dx + \int_{1}^{0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} dx \\
&= \int_{|x|\geq 1} \frac{f_n(x)}{x} dx + \int_{|x|<1} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} dx,
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
\left|vp\frac{1}{x}(f_n)\right| &\leq \int_{|x|\geq 1} |xf_n(x)|\frac{1}{x^2}dx + \int_{|x|<1}\frac{1}{x}\int_0^x f_n'(y)dydx \\
&\leq \|xf_n\|_{L^\infty}\int_{|x|\geq 1}\frac{1}{x^2}dx + \|f_n'\|_{L^\infty}\int_{|x|<1}dx \\
&\leq 2\|xf_n\|_{L^\infty} + 2\|f_n'\|_{L^\infty} \\
&\leq 2|||f_n|||_{(0,1)} + 2|||f_n|||_{(1,0)}
\end{aligned}$$

entonces $|||f_n|||_{(0,1)} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $|||f_n|||_{(1,0)}$ cuando $n \to \infty$, luego $vp\frac{1}{x}(f_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, $vp\frac{1}{x}$ es continua. Por lo tanto $vp\frac{1}{x} \in S'$. $\square$

Si $g \in \mathcal{S}'$ y $f \in \mathcal{S}$, entonces $\widehat{g}(f) = g(\widehat{f})$. En efecto, usando la identidad de Parseval tenemos para todo $f \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{g}(f) = \langle \widehat{g}, f\rangle = \langle g, \widehat{f}\rangle = g(\widehat{f}).$$

Proposición 2.15. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$\widehat{vp\frac{1}{x}}(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)$$

en donde la función sgn *se define para $\xi \neq 0$ por* $\mathrm{sgn}(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|}$.

Demostración. Para todo $f \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{vp\frac{1}{x}}(f) = vp\frac{1}{x}(\widehat{f}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|\xi|>\varepsilon}\frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|\xi|>\varepsilon}\frac{1}{\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)dxd\xi,$$

usando el teorema de Fubini y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos,

$$\widehat{vp\frac{1}{x}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} f(x)\int_{|\xi|>\varepsilon}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi}d\xi dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|\xi|>\varepsilon}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi}d\xi\right)dx.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|\xi|>\varepsilon}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi}d\xi &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi}d\xi + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi}d\xi\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi}d\xi + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi}d\xi\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{-2i\,sen\,x\xi}{\xi}d\xi = -2i\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{sen\,x\xi}{\xi}d\xi \\
&= -2i\int_0^{+\infty}\frac{sen\,x\xi}{\xi}d\xi = -\pi i\,\mathrm{sgn}(x).
\end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\widehat{vp\frac{1}{x}}(f) = \int_{\mathbb{R}} -\pi i\,\mathrm{sgn}(x)f(x)dx = -\pi i\,\mathrm{sgn}(f)$$

De esto concluimos que

$$\langle \widehat{vp\frac{1}{x}}, f\rangle = \langle -\pi i \ \mathrm{sgn}(x), f\rangle$$

Por lo tanto,

$$\widehat{vp\frac{1}{x}}(\xi) = -\pi i \ \mathrm{sgn}(\xi). \qquad \square$$

Definición 2.16. Dado $f \in \mathcal{S}$, la transformada de Hilbert es el operador dado por

$$\mathcal{H}f(y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{y-x}dx = \frac{1}{\pi}vp\frac{1}{x} * f(y).$$

Notemos además que, por definición de vp, se cumple

$$vp\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{y-x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{y-x}dx.$$

Así tenemos el teorema siguiente.

Teorema 2.17. *Para todo $f \in \mathcal{S}$ se cumple:*

$$\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{H}^2 = -I$$

$$\mathcal{H}\partial_x = \partial_x\mathcal{H}$$

$$\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

Demostración. En primer lugar,

$$\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\widehat{vp\frac{1}{x} * f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\widehat{vp\frac{1}{x}}(\xi)\widehat{f}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

En segundo lugar, $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}(\mathcal{H}f)$, entonces

$$\widehat{\mathcal{H}(\mathcal{H}f)}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)[-i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)] = -\widehat{f}(\xi)$$

luego $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$, es decir, $\mathcal{H}^2 = -I$, donde I es la función identidad.

En tercer lugar,

$$\widehat{\mathcal{H}\partial_x f}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\partial_x f}(\xi) = -i \ \mathrm{sgn}(\xi)i\xi\widehat{f}(\xi) = i\xi(-i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)) = i\xi\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = \widehat{\partial_x\mathcal{H}f}(\xi).$$

Luego, $\mathcal{H}\partial_x f = \partial_x\mathcal{H}f$, es decir $\mathcal{H}\partial_x = \partial_x\mathcal{H}$.

Finalmente, usando la igualdad de Plancherel y la primera igualdad, tenemos

$$\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|\widehat{\mathcal{H}f}\|_{L^2} = \| -i \ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \qquad \square$$

Capítulo 3

Problema de valor inicial asociado a la ecuación lineal de Korteweg-de Vries modificada

En este capítulo se estudiará el problema de valor inicial (PVI) asociado con el problema

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

donde u es una función real con $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$; $u_0 \in H^s$, detallando algunas propiedades del grupo de operadores unitarios en L^2 generado por el PVI (3.1).

3.1. Problema lineal

Iniciamos esta sección con la siguiente definición,

Definición 3.1. Definamos el operador $-A$ por

$$\begin{cases} \mathcal{D}(-A) = H^{s+3}, \quad s \in \mathbb{R} \\ Au = \partial_x^3 u \end{cases} \tag{3.2}$$

Así el problema lineal (3.1) puede escribirse de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + Au(t) = 0; \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Sea el operador $-A$ definido por (3.2), usando la transformada de Fourier con respecto a la variable x tenemos,

$$\widehat{\partial_t u}(\xi,t) = -\widehat{\partial_x^3 u}(\xi,t) = -(i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) = i\xi^3 \widehat{u}(\xi,t)$$

para cualquier $u \in H^s$.

Proposición 3.2. *$-A$ es lineal, tiene dominio denso, es m-disipativo y antiadjunto en H^s.*

Demostración. Sea $-A$ el operador,

$$\begin{aligned} -A : H^{s+3} \subseteq H^s &\longrightarrow H^s \\ u &\longmapsto -\partial_x^3 u \end{aligned}$$

La linealidad del operador $-A$ y la densidad son inmediatas. Además, si $u \in H^{s+3}$, por definición de $\|\cdot\|_{H^s}$ y la desigualdad

$$\|Au\|_{H^s} = \left\|-\partial_x^3 u\right\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^{s+3}}$$

de donde $-Au \in H^s$. Por lo tanto, $Ran\,(-A) \subseteq H^s$ cualquiera sea $u \in H^{s+3}$. Probaremos que $-A$ es m-disipativo en H^s. En efecto:

1. $-A$ es negativo. Sea $u \in H^{s+3}$, entonces

   $$\langle -Au, u\rangle_{H^s} = \left\langle -\partial_x^3 u, u\right\rangle_{H^s} = (-1)^3 \left\langle -u, \partial_x^3 u\right\rangle_{H^s} = -\left\langle u, -\partial_x^3 u\right\rangle_{H^s} = -\langle u, -Au\rangle_{H^s}.$$

   Luego $\langle -Au, u\rangle_{H^s} \leq 0$.

2. $-A$ es disipativo. En efecto, existe $\lambda_0 > 0$, para todo $v \in H^s$, existe $u \in \mathcal{D}\,(-A) = H^{s+3}$: $u + \lambda_0 Au = v$. Tomemos $\lambda_0 = 1$, entonces $(I + A)\,u = v$, esto es $u + Au = v$, aplicando transformada de Fourier con respecto a la variable x en ambos miembros de la igualdad y la definición del operador A, tenemos:

   $$\left(1 - i\xi^3\right) \widehat{u}\,(\xi) = \widehat{v}\,(\xi)$$

   despejando $\widehat{u}\,(\xi)$ y aplicando transformada inversa de Fourier se tiene, $u(\xi) = \left(\dfrac{\widehat{v}\,(\xi)}{1 - i\xi^3}\right)^{\vee}$.
   Luego dado $v \in H^s$ existe $u = \left(\dfrac{\widehat{v}\,(\xi)}{1 - i\xi^3}\right)^{\vee}$ tal que $u + Au = v$.
   Además $u \in H^{s+3}$, en efecto,

   $$\begin{aligned} \|u\|_{H^{s+3}}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \left|\frac{\widehat{v}\,(\xi)}{1 - i\xi^3}\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \frac{\left|\widehat{v}\,(\xi)\right|^2}{\left|1 - i\xi^3\right|^2} d\xi \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(1+\xi^2\right)^{s+3}}{\left(1+\xi^2\right)^3} \left|\widehat{v}\,(\xi)\right|^2 d\xi = C_1 \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\widehat{v}\,(\xi)\right|^2 d\xi < \infty \end{aligned}$$

   pues $v \in H^s$, luego $u \in H^{s+3}$.

3. $-A$ es antiadjunto en H^s. En efecto, sean $u, v \in H^s$ entonces

$$\begin{aligned}\langle -Au, v\rangle_{H^s} &= \left\langle -\partial_x^3 u, v\right\rangle_{H^s} = \left\langle \partial_x^3 u, -v\right\rangle_{H^s} \\ &= (-1)^3 \left\langle u, \partial_x^3(-v)\right\rangle_{H^s} = -\left\langle u, -\partial_x^3(v)\right\rangle_{H^s} = \langle u, -Av\rangle_{H^s}\end{aligned}$$

Por lo tanto $-A$ es antiadjunto en H^s. □

Teorema 3.3. *El operador $-A$ genera un semigrupo de contracciones $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre H^s, $s \geq 0$ tal que*

$$\widehat{W(t)\,u}(\xi) = e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi) \tag{3.4}$$

Además, $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ se extiende a un grupo de operadores unitarios en H^s y cualquiera sea $u \in H^s$, la función

$$W(\cdot)\,u : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow H^s$$

es la única solución del problema de valor inicial (3.1).

Demostración. La primera afirmación se cumple ya que $-A$ es m-disipativo y $\mathcal{D}(-A)$ es denso. Para demostrar (3.4), resolveremos el problema de valor inicial (3.1) tomando la transformada de Fourier en la variable espacial obteniendo

$$\partial_t \widehat{u}(\xi, t) = i\xi^3 \widehat{u}(\xi, t).$$

Luego,

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{it\xi^3}\widehat{u}_0(\xi). \tag{3.5}$$

Definimos $\widehat{W(t)u}(\xi) = e^{i\xi^3 t}\widehat{u_0}(\xi)$ obteniendo (3.4) y la última afirmación es consecuencia de la primera afirmación. □

Aplicando la transformada de Fourier inversa con respecto a la variable x en la ecuación (3.5) obtenemos una solución del problema (3.1) que tiene la forma

$$u(\cdot, t) = (e^{it\xi^3}\widehat{u}_0(\xi))^{\vee} = W(t)u_0.$$

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de este operador. Para esto, debido a [21, Proposición 1.33] porque $H^0 = L^2$, en adelante las funciones en H^s para $s \geq 0$ serán consideradas como funciones de L^2.

3.2. Propiedades del grupo generado por el problema lineal

El grupo de operadores unitarios sobre L^2 satisface las siguientes propiedades:

Teorema 3.4. *Si $u \in L^2$, entonces*

$$\partial_x W(t)u = W(t)\partial_x u \tag{3.6}$$

y

$$D^\alpha W(t)u = W(t)D^\alpha u \tag{3.7}$$

Demostración. Aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable espacial de la derivada con respecto a x, tenemos:

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_x W(t)}u(\xi) &= i\xi\widehat{W(t)u}(\xi)\\ &= (i\xi)e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi) = e^{i\xi^3 t}(i\xi)\widehat{u}(\xi)\\ &= e^{i\xi^3 t}\widehat{\partial_x u}(\xi) = \widehat{W(t)\partial_x} u(\xi).\end{aligned}$$

Luego

$$\partial_x W(t)u(x) = W(t)\partial_x u(x).$$

Además, aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable x del operador D^α tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha W(t)}u(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{W(t)u}(\xi) &= |\xi|^\alpha e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi) = e^{i\xi^3 t}|\xi|^\alpha\widehat{u}(\xi)\\ &= e^{i\xi^3 t}\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \widehat{W(t)D^\alpha} u(\xi)\end{aligned}$$

luego

$$D^\alpha W(t)u = W(t)D^\alpha u. \qquad \square$$

Teorema 3.5. *Si $u, v \in L^2$, entonces*

$$\langle W(t)u, v\rangle_{L^2_x} = \langle u, W(t)v\rangle_{L^2_x} \tag{3.8}$$

y

$$\langle D^\alpha W(t)u, v\rangle_{L^2_x} = \langle u, D^\alpha W(t)v\rangle_{L^2_x} \tag{3.9}$$

Demostración. Usando las propiedades de producto interno en L^2 y las propiedades de transformada de Fourier tenemos

$$\begin{aligned}\langle W(t)u, v\rangle_{L^2_x} &= \langle (e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi))^\vee, v\rangle_{L^2_x} = \langle e^{i\xi^3 t}\widehat{u}, \widehat{v}\rangle_{L^2_\xi}\\ &= \langle \widehat{u}, e^{i\xi^3 t}\widehat{v}\rangle_{L^2_\xi} = \langle \widehat{u}, \widehat{W(t)v}\rangle_{L^2_\xi}\\ &= \langle u, W(t)v\rangle_{L^2_x}.\end{aligned}$$

Además, usando las propiedades de producto interno en L^2, la igualdad (3.7), (3.8), las propiedades de transformada de Fourier y Plancherel, tenemos

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha W(t)u, v\rangle_{L^2_x} &= \langle \widehat{D^\alpha W(t)}u, \widehat{v}\rangle_{L^2_\xi} = \langle |\xi|^\alpha \widehat{W(t)u}, \widehat{v}\rangle_{L^2_\xi}\\ &= \langle \widehat{W(t)u}, |\xi|^\alpha \widehat{v}\rangle_{L^2_\xi} = \langle \widehat{W(t)u}, \widehat{D^\alpha v}\rangle_{L^2_\xi}\\ &= \langle W(t)u, D^\alpha v\rangle_{L^2_x}\\ &= \langle u, D^\alpha W(t)v\rangle_{L^2_x}.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. *Si $u, v \in L^2$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W(t)u(x)v(x,t)dtdx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}} W(t)v(x,t)dt\right)dx \tag{3.10}$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \partial_x W(t)u(x)v(x,t)dtdx = -\int_{\mathbb{R}} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_x W(t)v(x,t)dt\right)dx \tag{3.11}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (D^\alpha W(t)u)(x)v(x,t)dtdx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}} (D^\alpha W(t)v)(x,t)dt\right)dx \tag{3.12}$$

Demostración. Usando el teorema de Fubini y la igualdad (3.8) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W(t)u(x)v(x,t)dtdx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W(t)u(x)v(x,t)dxdt = \int_{\mathbb{R}} \langle W(t)u, v(\cdot,t)\rangle_{L^2_x} dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle u, W(t)v(\cdot,t)\rangle_{L^2_x} dt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x)W(t)v(x,t)dxdt\\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\int_{\mathbb{R}} W(t)v(x,t)dtdx.\end{aligned}$$

Luego, usando la desigualdad (3.8), integrando por partes y usando el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \partial_x W(t)u(x)v(x,t)dxdt &= \int_{\mathbb{R}} \langle \partial_x W(t)u(x), v(\cdot,t)\rangle_{L^2_x} dt\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \langle W(t)u(x), \partial_x v(\cdot,t)\rangle_{L^2_x} dt\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \langle u(x), W(t)\partial_x v(\cdot,t)\rangle_{L^2_x} dt\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \langle u(x), \partial_x W(t)v(\cdot,t)\rangle_{L^2_x} dt\\ &= -\int_{\mathbb{R}} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_x W(t)v(x,t)dt\right)dx.\end{aligned}$$

Por último, usando el teorema de Fubini, propiedades del producto interno en L^2 y la igualdad

(3.9) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(D^{\alpha}W(t)u)(x)v(x,t)dtdx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(D^{\alpha}W(t)u)(x)v(x,t)dxdt\\ &= \int_{\mathbb{R}}\langle D^{\alpha}W(t)u,v\rangle_{L^2_x}dt\\ &= \int_{\mathbb{R}}\langle u,D^{\alpha}W(t)v\rangle_{L^2_x}dt\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}u(x)D^{\alpha}W(t)v(x,t)dxdt\\ &= \int_{\mathbb{R}}u(x)\left(\int_{\mathbb{R}}D^{\alpha}W(t)v(x,t)dt\right)dx. \qquad \square\end{aligned}$$

Capítulo 4

Estimados lineales

En este capítulo se estudiarán los efectos regularizantes del grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ generado por el PVI (3.1) y los estimados lineales asociados con la KdVm, presentados por Kenig, Ponce y Vega [12], los cuales conducirán a un óptimo resultado local para la ecuación de KdVm.

4.1. Estimados lineales

Teorema 4.1. *Si $u \in L^2$ entonces*

$$\|\partial_x W(\cdot)u\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|u\|_{L_x^2} \tag{4.1}$$

y

$$\|D_x^s \partial_x W(\cdot)u\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|D_x^s u\|_{L_x^2}, \quad s \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

Si $v \in L_x^1 L_t^2$ entonces para cualquier $T > 0$

$$\left\|\partial_x \int_0^t W(t-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq C\|v\|_{L_x^1 L_T^2} \tag{4.3}$$

Demostración. Consideremos $u \in L^2$. Usando la transformada de Fourier con respecto a la variable x

$$\widehat{\partial_x W(t)}u(\xi) = (i\xi)\widehat{W(t)u}(\xi) = (i\xi)(e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi)),$$

y haciendo un cambio de variable $\eta = \xi^3$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_x W(t)u(x) &= C\int_{\mathbb{R}} i\xi e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi)e^{i\xi x}d\xi \\
&= C\int_{\mathbb{R}} i\eta^{1/3}e^{i\eta t}\widehat{u}(\eta^{1/3})e^{i\eta^{1/3}x}(3\eta^{-2/3})d\eta \\
&= C\int_{\mathbb{R}} \eta^{-1/3}e^{(i\eta t + i\eta^{1/3}x)}\widehat{u}(\eta^{1/3})d\eta.
\end{aligned}$$

Tomando la norma en L^2 a la función $\partial_x Wu$ con respecto a t y el usando el teorema de Plancherel, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x Wu\|_{L_t^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} i\eta^{-1/3} e^{(i\eta t + i\eta^{1/3} x)} \widehat{u}(\eta^{1/3}) d\eta \right|^2 dt \\
&= C \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (i\eta^{-1/3} e^{(i\eta^{1/3} x)} \widehat{u}(\eta^{1/3})) e^{i\eta t} d\eta \right|^2 dt \\
&= C \int_{\mathbb{R}} \left| (i\eta^{-1/3} e^{(i\eta^{1/3} x)} \widehat{u}(\eta^{1/3}))^{\vee}(t) \right|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |i\eta^{-1/3}|^2 |e^{i\eta^{1/3} x}|^2 |\widehat{u}(\eta^{1/3})|^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\eta^{-1/3}|^2 |\widehat{u}(\eta^{1/3})|^2 d\eta \\
&= 3 \int_{\mathbb{R}} |\xi^{-2}| |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^2 d\xi \\
&= C \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = C\|\widehat{u}\|_{L_x^2}^2 = C\|u\|_{L_x^2}^2.
\end{aligned}$$

Luego $\|\partial_x Wu(\cdot_x)\|_{L_t^2}^2 = C\|u\|_{L_x^2}^2$, aplicando supremo con respecto a la variable x a ambos términos de la igualdad resulta

$$\|\partial_x W(t)u(\cdot_x)\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|u\|_{L_x^2}.$$

Para demostrar la desigualdad (4.1) notemos que

$$D_x^s \partial_x W(t)u = D_x^s W(t)\partial_x u = W(t) D_x^s \partial_x u = W(t)\partial_x D_x^s u = \partial_x W(t) D_x^s u,$$

luego usando la igualdad (4.1) tenemos

$$\|D_x^s \partial_x W(\cdot)u\|_{L_x^\infty L_t^2} = \|\partial_x W(\cdot) D_x^s u\|_{L_x^\infty L_t^2} = C\|D_x^s u\|_{L_x^2},$$

lo que demuestra (4.2).

Probaremos en primer lugar que

$$\left\| \partial_x \int_{\mathbb{R}} W(-\tau) v(\cdot,\tau) d\tau \right\|_{L_x^2} \leq C\|v\|_{L_x^1 L_t^2}.$$

Recordemos que el "argumento de dualidad" es expresado por

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|h(x,t)\|_{L_x^p}^q dt \right)^{1/q} = \sup_{\|v\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x,t) v(x,t) dx dt \right| \right\}.$$

Por el argumento de dualidad tenemos

$$\left\| \partial_x \int_{\mathbb{R}} W(-\tau) v(\cdot,\tau) d\tau \right\|_{L_x^2} = \sup_{\|u\|_{L_x^2}=1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x \int_{\mathbb{R}} W(-\tau) v(x,\tau) d\tau \right) u(x) dx \right| \right\}$$

Integrando por partes, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz en τ, la desigualdad de Hölder en x con $(\infty, 1)$ y la desigualdad (3.6), tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_x\int_{\mathbb{R}}W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right)u(x)dx\right| &= \left|\left\langle\partial_x\int_{\mathbb{R}}W(-\tau)v(x,\tau)d\tau, u\right\rangle_{L^2_x}\right| \\
&= \left|-\left\langle\int_{\mathbb{R}}W(-\tau)v(x,\tau)d\tau, \partial_x u\right\rangle_{L^2_x}\right| \\
&= \left|-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}W(-\tau)\partial_x u(x)v(x,\tau)d\tau dx\right| \\
&= \left|-\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\partial_x W(-\tau)u(x)v(x,\tau)d\tau dx\right| \\
&\leq -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_x W(-\tau)u(x)v(x,\tau)|d\tau dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\partial_x W(-\tau)u(x)|^2 d\tau\right)^{1/2} \\
&\qquad \left(\int_{\mathbb{R}}|v(x,\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\|\partial_x W(-\tau)u(x)\|_{L^2_\tau}\|v(x,\cdot)\|_{L^2_\tau}dx \\
&\leq \|\partial_x W(-\tau)u\|_{L^\infty_x L^2_\tau}\int_{\mathbb{R}}\|v(x,\cdot)\|_{L^2_\tau}dx \\
&\leq C\|u\|_{L^2_x}\|v\|_{L^1_x L^2_\tau}
\end{aligned}$$

Tomando supremo en $\|u\|_{L^2_x} = 1$, obtenemos

$$\left\|\partial_x\int_{\mathbb{R}}W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} \leq C\|v\|_{L^1_x L^2_\tau}.$$

En segundo lugar, para $t \in [0, T]$, $T > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} &= \left\|\partial_x\int_0^t W(t)W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} \\
&= \left\|\partial_x W(t)\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} \\
&= \left\|W(t)\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} \\
&= \left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}
\end{aligned}$$

Por el argumento de dualidad tenemos

$$\left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} = \sup_{\|u\|_{L^2_x}=1}\left\{\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right)u(x)dx\right|\right\},$$

desarrollando de manera similar a la primera parte, se tiene,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right)u(x)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t |\partial_x W(-\tau)u(x)|^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t |v(x,t)|^2 d\tau\right)^{1/2} dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t |\partial_x W(-\tau)u(x)|^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^T |v(x,t)|^2 d\tau\right)^{1/2} dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x W(-\tau)u(x)|^2 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^T |v(x,t)|^2 d\tau\right)^{1/2} dx\\ &\leq \|\partial_x W(-\tau)u\|_{L^\infty_x L^2_\tau}\|v\|_{L^1_x L^2_T}\\ &\leq C\|u\|_{L^2_x}\|v\|_{L^1_x L^2_T}.\end{aligned}$$

Tomando supremo en $\|u\|_{L^2_x} = 1$, obtenemos

$$\left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} \leq C\|v\|_{L^1_x L^2_T},$$

tomando supremo a ambos términos de la desigualdad en $t \in [0,T]$, se tiene

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^2_x} \leq C\sup_{t\in[0,T]}\|v\|_{L^1_x L^2_T}$$

$$\left\|\partial_x\int_0^t W(-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq C\|v\|_{L^1_x L^2_T}.$$

Por lo tanto

$$\left\|\partial_x\int_0^t W(t-\tau)v(x,\tau)d\tau\right\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq C\|v\|_{L^1_x L^2_T}. \qquad \square$$

Teorema 4.2. *Si* $u \in \overset{\bullet}{H}^{1/4}$ *entonces*

$$\|W(t)u\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq C\|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x} \tag{4.4}$$

Demostración. Veamos que la desigualdad (4.4) es equivalente a

$$\|D_x^{-1/4}W(t)v\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq C\|v\|_{L^2_x} \tag{4.5}$$

En efecto, sea $D_x^{1/4}u = v;\ v \in L^2$ y

$$\begin{aligned}&(|\xi|^{1/4}\widehat{u}(\xi))^\vee(x) = v(x)\\ &|\xi|^{1/4}\widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi)\\ &\widehat{u}(\xi) = |\xi|^{-1/4}\widehat{v}(\xi)\\ &u(\xi) = (|\xi|^{-1/4}\widehat{v}(\xi))^\vee(x) = D_x^{-1/4}v(x).\end{aligned}$$

Además,

$$D_x^{1/4}(D_x^{-1/4}v(x)) = D_x^{1/4}(|\xi|^{-1/4}\widehat{v}(\xi))^\vee(x) = (|\xi|^{1/4}|\xi|^{-1/4}\widehat{v}(\xi))^\vee(x) = v(x).$$

Luego tenemos

$$\|W(t)u\|_{L_x^4L_t^\infty} = \|W(t)D_x^{-1/4}v\|_{L_x^4L_t^\infty} = \|D_x^{-1/4}W(t)v\|_{L_x^4L_t^\infty} \quad \text{y} \quad \|D_x^{1/4}u\|_{L_x^2} = \|v\|_{L_x^2}.$$

Se obtiene de esta forma la desigualdad (4.5).

Demostraremos que la desigualdad (4.5) es equivalente al estimado

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(\cdot,t)dt\right\|_{L_x^2} \leq C\|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1} \quad \text{con} \quad g \in L_x^{1/3}L_t^1 \tag{4.6}$$

Para esto, en primer lugar probaremos la desigualdad (4.6).

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(\cdot,t)dt\right\|_{L_x^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(\cdot,t)dt\right|^2 dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(x,t)dt\right)\left(\overline{\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(\tau)g(x,\tau)d\tau}\right) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(x,t)dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{D_x^{-1/4}W(\tau)g(x,\tau)d\tau}\right) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(x,t)dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}\overline{W(\tau)g(x,\tau)d\tau}\right) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(x,t)dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau\right) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(x,t)\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau\right) dtdx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W(t)D_x^{-1/4}g(x,t)\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau\right) dtdx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}g(x,t)W(t)\left(\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau\right) dtdx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}g(x,t)\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau dtdx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}D_x^{-1/4}W(t-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau dtdx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(t-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau dtdx,
\end{aligned}$$

luego

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(\cdot,t)dt\right\|_{L_x^2}^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(t-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau dtdx.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con respecto a t con $(1,\infty)$

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(\cdot,t)dt\right\|_{L_x^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x,t)dt\right)\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(t-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau\right) dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(\cdot_t-\tau)\overline{g}(x,\tau)d\tau\right\|_{L_t^\infty}\|g(x,\cdot_t)\|_{L_t^1}dx
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en x con $(4,4/3)$, tenemos

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4}W(t)g(\cdot,t)dt\right\|_{L_x^2}^2 \leq \left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(\cdot_t,-\tau)\overline{g}(\cdot_x,\tau)dx\right\|_{L_x^4L_t^\infty}\|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1} \tag{4.7}$$

En segundo lugar probaremos que

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(\cdot_t-\tau)\overline{g}(\cdot_x,\tau)dx\right\|_{L_x^4L_t^\infty}\leq C\|g\|_{L_x^{4/3}L_t^1}.$$

Para esto, veamos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(\cdot_t,-\tau)\overline{g}(\cdot_x,\tau)d\tau\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^{-1/2}\widehat{W(t-\tau)\overline{g}}(\xi,\tau))^\vee(x)d\tau\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^{-1/2}e^{i\xi^3(t-\tau)}\widehat{\overline{g}}(\xi,\tau))^\vee(x)d\tau\right|\\
&= C\left|\int_{\mathbb{R}}(|\xi|^{-1/2}e^{i\xi^3(t-\tau)})^{\vee(x)}*\overline{g}(\cdot,\tau)d\tau\right|\\
&= C\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\xi|^{-1/2}e^{i\xi^3(t-\tau)}e^{i\xi x}d\xi\right)*\overline{g}(\cdot,\tau)d\tau\right|\\
&= C\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{i(\xi x+(t-\tau)\xi^3)}\frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right)*\overline{g}(\cdot,\tau)d\tau\right|\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}e^{i(\xi x+(t-\tau)\xi^3)}\frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right|*|\overline{g}(\cdot,\tau)|d\tau
\end{aligned}$$

Afirmamos que existe $N\in\mathbb{Z}^+$ tal que para cualquier $\gamma\in\mathbb{R}$

$$\left|\int_{\mathbb{R}}e^{i(t\xi^3+x\xi)}\frac{d\xi}{|\xi|^{1/2+i\gamma}}\right|\leq C\frac{(1+|\gamma|)^N}{|x|^{1/2}},$$

usando esta afirmación obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(\cdot_t,-\tau)\overline{g}(\cdot_x,\tau)d\tau\right| &\leq \int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}e^{i(\xi x+(t-\tau)\xi^3)}\frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right|*|\overline{g}(x,\tau)|d\tau\\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\frac{C}{|x|^{1/2}}*|\overline{g}(x,\tau)|d\tau\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{C}{|y|^{1/2}}|\overline{g}(y-x,\tau)|dyd\tau\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{C}{|y|^{1/2}}|\overline{g}(y-x,\tau)|d\tau dy\\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{C}{|y|^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}|\overline{g}(y-x,\tau)|d\tau dy,
\end{aligned}$$

es decir

$$\left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2}W(\cdot_t,-\tau)\overline{g}(\cdot_x,\tau)d\tau\right|\leq\frac{C}{|x|^{1/2}}*\int_{\mathbb{R}}|\overline{g}(x,\tau)|d\tau. \tag{4.8}$$

Por otro lado debido al teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, donde $\alpha=1/2,\ n=1,\ p=4/3$ y $q=4$, el potencial de Riesz de orden $1/2$ es de tipo $(4/3,4)$. Además,

$$I_{1/2}=\frac{C}{|x|^{1/2}}*:L_x^{4/3}\longrightarrow L_x^4,$$

es decir,

$$\left\|\frac{C}{|x|^{1/2}}*\int_{\mathbb{R}}|g(\cdot,\tau)|d\tau\right\|_{L_x^4}\leq C_{4/3,1/2}\left\|\int_{\mathbb{R}}|g(\cdot,\tau)|d\tau\right\|_{L_x^{4/3}}$$

equivalentemente

$$\left\| \frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |g(\cdot,\tau)| d\tau \right\|_{L^4_x} \leq C \|g\|_{L^{4/3}_x L^1_t}. \tag{4.9}$$

Aplicando supremo con respecto a t a la desigualdad (4.8)

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} W(\cdot_t, -\tau) \overline{g}(\cdot_x, \tau) d\tau \right| \leq \frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |\overline{g}(x,\tau)| d\tau$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} W(\cdot_t, -\tau) \overline{g}(\cdot_x, \tau) d\tau \right\|_{L^\infty_t} \leq \frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |\overline{g}(x,\tau)| d\tau,$$

integrando con respecto a x a ambos miembros y usando (4.9)

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} W(\cdot_t, -\tau) \overline{g}(\cdot_x, \tau) d\tau \right\|^4_{L^\infty_t} dx \right)^{1/4} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |\overline{g}(x,\tau)| d\tau \right|^4 dx \right)^{1/4}$$

$$\left\| D_x^{-1/2} W(\cdot_t, -\tau) \overline{g}(\cdot_x, \tau) d\tau \right\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq \left\| \frac{C}{|x|^{1/2}} * \int_{\mathbb{R}} |\overline{g}(x,\tau)| d\tau \right\|_{L^4_x}$$

$$\left\| D_x^{-1/2} W(\cdot_t, -\tau) \overline{g}(\cdot_x, \tau) d\tau \right\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq C \|g\|_{L^{4/3}_x L^1_t}.$$

Reemplazando en (4.7) tenemos,

$$\|D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot, t) dt\|_{L^2_x} \leq C \|g\|_{L^{4/3}_x L^1_t} \tag{4.10}$$

lo que prueba la desigualdad (4.6). Por último demostraremos que (4.5) es equivalente al estimado (4.6). En efecto, usando el argumento de dualidad y la desigualdad (4.10) tenemos

$$\|D_x^{-1/4} W(t) v\|_{L^4_x L^\infty_t} = \sup_{\|g\|_{L^{4/3}_x L^1_t}=1} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) v(x) g(\cdot, t) dt dx \right| \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) v(x) g(\cdot, t) dt dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} v(x) \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot, t) dt dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left| v(x) \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot, t) dt \right| dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot, t) dt \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \|v\|^2_{L^2_x} \left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot, t) dt \right\|_{L^2_x} \\
&\leq C \|v\|^2_{L^2_x} \|g\|_{L^{1/3}_x L^1_t}
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre los $\|g\|_{L^{4/3}_x L^1_t} = 1$, obtenemos finalmente

$$\|D_x^{-1/4} W(t) v\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq C \|v\|_{L^2_x},$$

y así la desigualdad (4.4). □

Observación.

1) Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$D_x u = \partial_x \mathcal{H} u \qquad \text{y} \qquad \partial_x u = -D_x \mathcal{H} u \tag{4.11}$$

En efecto, aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable x y el Teorema 2.17 tenemos:

$$\widehat{D_x u}(\xi) = |\xi|\widehat{u}(\xi) = |\xi|\frac{i\xi}{i\xi}\widehat{u}(\xi) = -i\xi\frac{|\xi|}{\xi}\widehat{u}(\xi) = -i\xi\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{u}(\xi) = \xi\widehat{\mathcal{H}u}(\xi) = \widehat{\partial_x \mathcal{H}u}(\xi).$$

Luego, $D_x u = \partial_x \mathcal{H} u$.

Ahora, aplicando las propiedades de transformada de Hilbert tenemos:

$$\partial_x u = -\partial_x \mathcal{H}^2 u = -\mathcal{H}\partial_x \mathcal{H} u = -\mathcal{H} D_x u = -D_x \mathcal{H} u.$$

Por lo tanto, tenemos (4.11). □

Teorema 4.3. *Sea $u \in L^2$ entonces*

$$\|W(t)u\|_{L_x^5 L_t^{10}} \leq C\|u\|_{L_x^2} \tag{4.12}$$

$$\|D_x W(t)u\|_{L_x^{20} L_t^{5/2}} \leq \|D_x^{1/4} u\|_{L_x^2} \tag{4.13}$$

Demostración. Para demostrar (4.12) consideremos la familia analítica de operadores lineales

$$T_z u = D_x^{-z/4} D_x^{(1-iy)} W(t)u, \qquad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}, \qquad 0 \leq Re\ z \leq 1. \tag{4.14}$$

Cuando $z = iy$,

$$T_{iy} u = D_x^{-iy/4} D_x^{1-iy} W(t)u = D_x D_x^{-5iy/4} W(t)u = D_x W(t) D_x^{-5iy/4} u.$$

Debido a (4.11) $T_{iy} u = \partial_x W(t) D_x^{-5iy/4} \mathcal{H} u$, así mismo, por el estimado (4.1) tenemos la igualdad

$$\|T_{iy} u\|_{L_x^\infty L_t^2} = \|\partial_x W(t) D_x^{-5iy/4} \mathcal{H} u\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|D_x^{-5iy/4} \mathcal{H} u\|_{L_x^2} = C\|D_x^{-5iy/4} u\|_{L_x^2}.$$

Aplicando Plancherel,

$$\begin{aligned}
\|D_x^{-5iy/4} u\|_{L_x^2}^2 &= \|\widehat{D_x^{-5iy/4} u}\|_{L_\xi^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} ||\xi|^{-5iy/4}\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} ||\xi|^{-5iy/4}|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{u}\|_{L_\xi^2}^2 \\
&= \|u\|_{L_x^2}^2.
\end{aligned}$$

Luego, $\|T_{iy}u\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C\|u\|_{L_x^2}$, es decir

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|T_{iy}u\|_{L_t^2} \leq C\|u\|_{L_x^2}. \tag{4.15}$$

Por otro lado, cuando $z = 1 + iy$ obtenemos

$$T_{1+iy}u = D_x^{-(1+iy)/4} D_x^{[1-(1+iy)]} W(t)u = D_x^{-1/4} D_x^{-5iy/4} W(t)u.$$

Por la propiedad (3.7) y el estimado (4.5) tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}\|T_{1+iy}u\|_{L_x^4 L_t^\infty} &= \|D_x^{-1/4} D_x^{-5iy/4} W(t)u\|_{L_x^4 L_t^\infty} = \|D_x^{-1/4} W(t) D_x^{-5iy/4} u\|_{L_x^4 L_t^\infty} \\ &\leq C\|D_x^{-5iy/4}u\|_{L_x^2} = C\|u\|_{L_x^2},\end{aligned}$$

luego $\|T_{1+iy}u\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq C\|u\|_{L_x^2}$, es decir

$$\left\|\sup_{t\in\mathbb{R}} |T_{1+iy}u|\right\|_{L_x^4} \leq C\|u\|_{L_x^2} \tag{4.16}$$

observemos que $T_{iy} : L_x^2 \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}_x, L_t^2)$ y $T_{1+iy} : L_x^2 \longrightarrow L^4(\mathbb{R}_x, L_t^\infty)$. Luego para $f \in \mathbb{R}$ y de las desigualdades (4.15) y (4.16) obtenemos las estimativas

$$\|(T_{iy}u)f\|_{L_t^2} \leq C\|u\|_{L_x^2} \qquad \text{y} \qquad \|(T_{1+iy}u)f\|_{L_t^\infty} \leq C\|u\|_{L_x^2} \tag{4.17}$$

debido al teorema de interpolación compleja de Stein (Teorema 2.7), $q_0 = 2,\ p_0 = 2,\ q_1 = \infty$ y $p_1 = 2$. Si $z = 4/5$ en (4.14), $T_z u = T_{4/5}u = W(t)u$. Eligiendo $r = 4/5$, obtenemos la relación

$$\frac{1}{p_r} = \frac{1}{5p_0} + \frac{4}{5p_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q_r} = \frac{1}{5q_0} + \frac{4}{5q_1} \tag{4.18}$$

De la desigualdad (4.17), obtenemos $p_r = 2,\ q_r = 10$. Luego, $\|(T_{4/5}u)f\|_{L_t^{10}} \leq C_{4/5}\|u\|_{L_x^2}$, es decir

$$\|(W(t)u)f\|_{L_t^{10}} \leq C\|u\|_{L_x^2}.$$

Además para $u \in L^2$ y de las desigualdades (4.15) y (4.16) obtenemos las estimativas

$$\|T_{iy}u\|_{L_x^\infty} \leq C\|u\|_{L_x^2} \qquad \text{y} \qquad \|T_{1+iy}u\|_{L_x^4} \leq C\|u\|_{L_x^2} \tag{4.19}$$

debido al teorema de interpolación compleja de Stein (Teorema 2.7), $q_0 = \infty,\ p_0 = 2,\ q_1 = 4$ y $p_1 = 2$. Eligiendo $r = 4/5$ y por la relación (4.18) obtenemos $p_r = 2$ y $q_r = 5$. De la desigualdad (4.19), existe una constante C_r tal que $\|T_{4/5}u\|_{L_x^5} \leq C_{4/5}\|u\|_{L_x^2}$, es decir

$$\|W(t)u\|_{L_x^5} \leq C\|u\|_{L_x^2}$$

Finalmente, $T_{4/5} : L^2_x \longrightarrow L^5(\mathbb{R}_x, L^{10}_t)$ y

$$\|W(t)u\|_{L^5_x L^{10}_t} \leq C\|u\|_{L^2_x}.$$

Para demostrar (4.13) consideremos la familia analítica de operadores lineales

$$T_{\gamma+iy}u = D_x^{5/4(1-\gamma)} D_x^{iy} W(t)u \qquad \text{con} \qquad \gamma, y \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq \gamma \leq 1. \tag{4.20}$$

Cuando $\gamma = 0$,

$$T_{iy}u = D_x^{5/4} D_x^{iy} W(t)u$$

Debido al estimado (4.1) tenemos

$$\begin{aligned}\|T_{iy}u\|_{L^\infty_x L^2_t} &= \|D_x^{5/4} D_x^{iy} W(t)u\|_{L^\infty_x L^2_t} = \|D_x D_x^{1/4} D_x^{iy} W(t)u\|_{L^\infty_x L^2_t} \\ &= \|\partial_x W(t) D_x^{1/4} D_x^{iy} \mathcal{H}u\|_{L^\infty_x L^2_t} \leq C\|D_x^{1/4} D_x^{iy} \mathcal{H}u\|_{L^2_x} = C\|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x}\end{aligned}$$

luego $\|T_{iy}u\|_{L^\infty_x L^2_t} \leq C\|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x}$, es decir

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|T_{iy}u\|_{L^2_t} \leq C\|D^{1/4}u\|_{L^2_x}. \tag{4.21}$$

Por otro lado, cuando $z = 1 + iy$ obtenemos

$$T_{1+iy}u = D_x^{iy} W(t)u$$

Por la propiedad (3.7) y el estimado (4.4) tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}\|T_{1+iy}u\|_{L^4_x L^\infty_t} &= \|D_x^{iy} W(t)u\|_{L^4_x L^\infty_t} = \|W(t) D_x^{iy} u\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq C\|D_x^{1/4} D_x^{iy} u\|_{L^2_x} \\ &\leq \|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x},\end{aligned}$$

luego $\|T_{1+iy}\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq C\|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x}$, es decir

$$\left\|\sup_{t\in\mathbb{R}} |T_{1+iy}u|\right\|_{L^4_x} \leq C\|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x}. \tag{4.22}$$

Luego para $f \in \mathbb{R}$ y de las desigualdades (4.21) y (4.22) obtenemos las estimativas

$$\|(T_{1+iy}u)f\|_{L^\infty_t} \leq C\|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x} \qquad \text{y} \qquad \|(T_{iy}u)f\|_{L^2_t} \leq C\|D_x^{1/4}u\|_{L^2_x}, \tag{4.23}$$

debido al teorema 2.7, $q_0 = 2$, $p_0 = 2, q_1 = \infty$ y $p_1 = 2$. Por otro lado si $\gamma + iy = \frac{1}{5} + i0$ en (4.20), $T_{\gamma+iy}u = T_{1/5}u = D_x W(t)u$. Eligiendo $r = \frac{1}{5}$, obtenemos la relación

$$\frac{1}{q_r} = \frac{4}{5q_0} + \frac{1}{5q_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{p_r} = \frac{4}{5p_0} + \frac{1}{5p_1} \tag{4.24}$$

De la desigualdad (4.23), $p_r = 2,\ q_r = 5/2$. Luego $\|(T_{1/5}u)f\|_{L_t^{5/2}} \le C\|u\|_{L_x^2}$, es decir

$$\|(D_x W(t)u)f\|_{L_t^{5/2}} \le C\|u\|_{L_x^2}$$

Además para $u \in L^2$ y las desigualdades (4.21) y (4.22) obtenemos las estimativas

$$\|T_{iy}u\|_{L_x^\infty} \le C\|u\|_{L_x^2} \qquad \text{y} \qquad \|T_{1+iy}u\|_{L_x^4} \le C\|u\|_{L_x^2}, \tag{4.25}$$

debido al teorema 2.7, $q_0 = \infty,\ p_0 = 2, q_1 = 4$ y $p_1 = 2$. Eligiendo $r = \frac{1}{5}$, por la relación (4.24) obtenemos $p_r = 2$ y $q_r = 20$, de la desigualdad (4.25) tenemos $\|T_{1/5}u\|_{L_x^{20}} \le C\|u\|_{L_x^2}$, es decir

$$\|D_x W(t)u\|_{L_x^{20}} \le C\|u\|_{L_x^2}.$$

Finalmente, $T_{1/5} : L_x^2 \longrightarrow L^{20}(\mathbb{R}_x, L_t^{5/2})$ y

$$\|D_x W(t)u\|_{L_x^{20}L_t^{5/2}} \le C\|u\|_{L_x^2}.$$

De este modo concluimos la demostración del teorema. $\square$

Capítulo 5

Buena colocación local para el problema de valor inicial asociado a la ecuación de Korteweg-de Vries modificada

La diferencia entre la ecuación (5.1) y la dada en (1) es que en (5.1) no exige el mismo orden de diferenciabilidad de la solución. En este capítulo probamos que la ecuación integral (5.1) es bien colocada localmente en $H^{1/4}$. Para esto usamos los estimados lineales obtenidos en la sección 4.1 que permiten aplicar el teorema de punto fijo de Banach.

5.1. Buena colocación local de PVI asociado a la KdVm en $H^{1/4}$

Definición 5.1. Sea el operador A el generador de un semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$. Sea $u_0 \in \overset{\circ}{H}^{1/4}$. La solución $u \in C([-T,T] : \overset{\circ}{H}^{1/4})$ de (5.1) es llamada "solución mild" del problema de valor inicial no homogeneo (1).

La ecuación integral

$$u(t) = W(t)u_0(t) - \int_0^t W(t-\tau)u^2(\tau)\partial_x u(\tau)d\tau \tag{5.1}$$

está bien colocada localmente en $\overset{\circ}{H}^{1/4}$, si para todo $u_0 \in \overset{\circ}{H}^{1/4}$ existe $T > 0$ y una única solución de (5.1) tal que para $(x,t) \in \mathbb{R} \times [-T,T]$,

$$u \in C([-T,T] : \overset{\circ}{H}^{1/4}) \cap \bigcap_{j=1}^{n} E_j,$$

donde E_j son espacios de Banach. Además, la función flujo definida por

$$\begin{aligned} F : \overset{\circ}{H}^{1/4} &\longrightarrow C([-T,T] : \overset{\circ}{H}^{1/4}(\mathbb{R})) \cap \bigcap_{j=1}^{n} E_j \\ u_0 &\longmapsto u(\cdot,t) \end{aligned}$$

es continua.

Teorema 5.2. *Consideremos el PVI (1). Entonces para cada $u_0 \in H^{1/4}$, existe $T = T(\|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}) > 0$ y una solución mild única $u(t)$ de (1) que satisface*

$$u \in C([-T,T] : H^{1/4}), \tag{5.2}$$

$$\left\| D_x^{1/4}\partial_x u \right\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty, \tag{5.3}$$

$$\|\partial_x u\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} < \infty, \tag{5.4}$$

$$\left\| D_x^{1/4} u \right\|_{L_x^5 L_T^{10}} < \infty, \tag{5.5}$$

y

$$\|u\|_{L_x^4 L_T^\infty} < \infty. \tag{5.6}$$

Además, para cualquier $T' \in]0,T[$ existe una vecindad V de u_0 en $H^{1/4}$ tal que la función $F : \widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}(t)$ de V en el espacio definido por (5.2) - (5.6) con T' en lugar de T es lipschitziana.

Vamos a trabajar en los espacios $\overset{\circ}{H}^{1/4}$ debido a que sus elementos cumplen las propiedades exigidas para los estimados lineales estudiados en el capítulo 4 además, se cumple por la inclusión continua que $H^{1/4} \hookrightarrow \overset{\circ}{H}^{1/4}$.

Demostración. Sea $T > 0$ fijo, que definiremos después. Definimos el espacio de Banach

$$Y_T = C([-T,T] : \overset{\circ}{H}^{1/4}) \cap \bigcap_{j=1}^{4} E_j$$

donde E_j son espacios de Banach definidos por (5.3) - (5.6), con la norma

$$|||u|||_{Y_T} = \max_{j=0,\dots,4} \|u\|_{(T,j)},$$

donde

$$\|u\|_{(T,0)} = \|u\|_{L^\infty \overset{\circ}{H}^{1/4}} = \|D_x^{1/4}u\|_{L_T^\infty L_x^2}, \tag{5.7}$$

$$\|u\|_{(T,1)} = \|\partial_x u\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}, \tag{5.8}$$

$$\|u\|_{(T,2)} = \|D_x^{1/4} u\|_{L_x^5 L_T^{10}}, \tag{5.9}$$

$$\|u\|_{(T,3)} = \|D_x^{1/4}\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2}, \tag{5.10}$$

$$\|u\|_{(T,4)} = \|u\|_{L_x^4 L_T^\infty}, \tag{5.11}$$

Dado $a > 0$, que definiremos después, definidos el espacio de Banach

$$Y_T^a = \{u \in Y_T : |||u|||_{Y_T} \leq a\}$$

con la métrica inducida por la norma

$$d(u,v) = |||u - v|||_{Y_T}.$$

Probaremos que debido a los estimados (4.1), (4.2), (4.4), (4.5), (4.12), (4.13), si $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^{1/4}$ entonces para cualquier $T > 0$, $W(t)u_0 \in Y_T$ con $|||W(t)u_0|||_{Y_T}$ independiente de T. En efecto: Usando las propiedades de grupo de operadores unitarios tenemos:

$$\begin{aligned}
\|W(t)u_0\|_{(T,0)} &= \sup_{t\in[-T,T]} \|D_x^{1/4} W(t)u_0\|_{L_x^2} = \sup_{t\in[-T,T]} \|W(t)D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2} \\
&= \sup_{t\in[-T,T]} \|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2} = \|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}. \\
\|W(t)u_0\|_{(T,1)} &= \|\partial_x W(t)u_0\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&\leq \|D_x W(t)\mathcal{H}u_0\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \leq \|D_x^{1/4}\mathcal{H}u_0\|_{L_x^2} = \|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}. \\
\|W(t)u_0\|_{(T,2)} &= \|D_x^{1/4}W(t)u_0\|_{L_x^5L_T^{10}} = \|W(t)D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^5L_T^{10}} \\
&\leq \|W(t)D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^5L_T^{10}} \leq C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}. \\
\|W(t)u_0\|_{(T,3)} &= \|D_x^{1/4}\partial_x W(t)u_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \leq \|D_x^{1/4}\partial x W(t)u_0\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}. \\
\|W(t)u_0\|_{(T,4)} &= \|W(t)u_0\|_{L_x^4L_T^\infty} \leq \|W(t)u_0\|_{L_x^4L_t^\infty} \leq C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|||W(t)u_0|||_{Y_T} = \max\limits_{j=0,\dots,4} \|W(t)u_0\|_{(T,j)} \leq C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}$.
Definamos sobre Y_T^a el operador integral

$$\Psi_{u_0}(v)(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau \tag{5.12}$$

del PVI lineal no homogéneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + v^2\partial_x v = 0 \\ \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{5.13}$$

Antes de continuar con la demostración del teorema, necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 5.3.

$$\left\|D_x^{1/4}v^2\partial_x v\right\|_{L_x^2L_T^2} \leq C\|v\|_{Y_T}^3. \tag{5.14}$$

Demostración. Usando el lema 1.11 con $f = v^2$, $g = \partial_x v$, $p = q = 2$, $\alpha = \alpha_1 = 1/4$, $p_1 = 20/9$, $q_1 = 10$, $p_2 = 20$, $q_2 = 5/2$ deducimos lo siguiente:

$$\left\|D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v\right) - v^2D_x^{1/4}\partial_x v - \partial_x vD_x^{1/4}v^2\right\|_{L_x^2L_T^2} \leq C\|D_x^{1/4}v^2\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\left\|D_x^{1/4}v^2\partial_x v\right\|_{L_x^2L_T^2} \leq C\|D_x^{1/4}v^2\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} + \left\|v^2D_x^{1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^2L_T^2}\\ + \left\|\partial_x vD_x^{1/4}v^2\right\|_{L_x^2L_T^2}\end{aligned} \tag{5.15}$$

En primer lugar desarrollamos el primer sumando, para esto usamos el lema 1.12 con $F(v) = v^2$, $p_1 = 4$, $p_2 = 5$ y $q_1 = \infty$, $q_2 = 10$.

$$\left\|D_x^{1/4}v^2\right\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}} \leq C\|2v\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|D_x^{1/4}v\right\|_{L_x^5L_T^{10}} = C\,\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|D_x^{1/4}v\right\|_{L_x^5L_T^{10}}.$$

Desarrollando el segundo sumando, para esto usamos el lema 1.8, con $f = v^2$ y $g = D_x^{1/4}\partial_x v$.

$$\left\|v^2D_x^{1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^2L_T^2} = \|v^2\|_{L_x^2L_T^\infty}\left\|D_x^{1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^\infty L_T^2}.$$

Luego, desarrollamos el tercer sumando, para esto usamos el lema 1.9 con respecto a T y a x respectivamente.

$$\left\|\partial_x vD_x^{1/4}v^2\right\|_{L_x^2L_T^2} \leq \|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\left\|D_x^{1/4}v^2\right\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}.$$

Finalmente reemplazando en la expresión (5.15) tenemos:

$$\begin{aligned}\left\|D_x^{1/4}v^2\partial_x v\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq C\,\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|D_x^{1/4}v\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} + \|v^2\|_{L_x^2L_T^\infty}\left\|D_x^{1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\quad+\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\left\|D_x^{1/4}v^2\right\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\\ &= C\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|D_x^{1/4}v\|_{L_x^5L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} + \|v\|_{L_x^4L_T^\infty}^2\left\|D_x^{1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\quad+\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\|D_x^{1/4}v^2\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\\ &\leq C\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|D_x^{1/4}v\|_{L_x^5L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} + \|v\|_{L_x^4L_T^\infty}^2\left\|D_x^{1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\quad+C\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\left\|D_x^{1/4}v\right\|_{L_x^5L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\ &= 2C\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|D^{1/4}v\|_{L_x^5L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} + \|v\|_{L_x^4L_T^\infty}^2\left\|D_x^{1/4}\partial_x v\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\leq 2C\|v\|_{(T,4)}\|v\|_{(T,2)}\|v\|_{(T,1)} + \|v\|_{(T,4)}^2\|v\|_{(T,3)}\\ &\leq C|||v|||_{Y_T}^3.\end{aligned}$$

De esta manera queda demostrado el lema. $\square$

Continuando con la demostración del teorema, primeramente demostraremos que Ψ_{u_0} está bien definida, es decir, $\mathcal{R}(\Psi_{u_0}) \subset Y^a_{T_1}$ para algún $T_1 = T_1(\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x}) \in [-T, T]$.

En efecto, demostraremos que $\Psi_{u_0}(v)$ es continua en t_0^+

$$
\begin{aligned}
&\|\Psi_{u_0}(v)(t) - \Psi_{u_0}(v)(t_0)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} \\
&\leq \|W(t)u_0 - W(t_0)u_0 - \left(\int_0^t W(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau - \int_0^{t_0} W(t_0-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} \\
&\leq \|W(t)u_0 - W(t_0)u_0\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} + \left\|\int_0^{t_0} (W(t_0-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau) - W(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau))d\tau\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} \\
&\quad + \left\|\int_{t_0}^t (W(t_0-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} \\
&\leq \|W(t)u_0 - W(t_0)u_0\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} + \int_0^{t_0} \left\|(W(t_0-\tau) - W(t-\tau))(v^2\partial_x v)(\tau)\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} d\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^t \left\|(W(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} d\tau.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_{u_0}(v)(t) - \Psi_{u_0}(v)(t_0)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} \leq{}& \|W(t)u_0 - W(t_0)u_0\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} \\
&+ \int_0^{t_0} \|(W(t_0-\tau) - W(t-\tau))(v^2\partial_x v)(\tau)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}} \\
&+ |t-t_0| \sup_{[-T,T]} \|W(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{1/4}}
\end{aligned}
$$

cuando $t \to t_0^+$, el primer converge a cero por la continuidad de la aplicación $W(.)u$ lo mismo sucede en el segundo sumando por la misma razón y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. El último sumando converge a cero cuando $t \to t_0^+$. Esto nos demuestra la continuidad a la derecha de t. La continuidad a la izquierda de t_0, y de ahí la coninuidad en t_0, sigue de manera análoga.

Usando las propiedades del grupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, los estimados (4.1),(4.2), (4.4), (4.5), (4.12) y (4.13) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|D_x^{1/4}\Psi_{u_0}(v)\|_{L^2_x} &= \left\|D_x^{1/4}W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^2_x} \\
&= \left\|W(t)D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^2_x} \\
&= \left\|D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^2_x},
\end{aligned}
$$

tomando supremo en $t \in [-T,T]$, se tiene

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[-T,T]} \|D_x^{1/4}\Psi_{u_0}(v)\|_{L_x^2} &= \sup_{t\in[-T,T]} \left\| D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^2} \\ &\leq \left\| D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^2}.\end{aligned}$$

Luego $\|\Psi_{u_0}(v)\|_{(T_1,0)} \leq \left\| D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^2}$.

$$\begin{aligned}\|\Psi_{u_0}(v)\|_{(T_1,1)} &= \|\partial_x\Psi_{u_0}(v)\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\ &= \left\|\partial_x W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\ &= \left\|D_x W(t)\mathcal{H}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\ &\leq \left\|\mathcal{H}D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^2} \\ &= \left\|D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\Psi_{u_0}(v)\|_{(T_1,2)} &= \|D_x^{1/4}\Psi_{u_0}(v)\|_{L_x^5L_T^{10}} \\ &= \left\|D_x^{1/4}W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^5L_T^{10}} \\ &= \left\|W(t)D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^5L_T^{10}} \\ &\leq C\left\|D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\Psi_{u_0}(v)\|_{(T_1,3)} &= \left\|D^{1/4}\partial_x\Psi_{u_0}(v)\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &= \left\|D_x^{1/4}\partial_x W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &= \left\|\partial_x D_x^{1/4}W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &= \left\|\partial_x W(t)D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\leq C\left\|D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L_x^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_{u_0}(v)\|_{(T_1,4)} &= \|\Psi_{u_0}(v)\|_{L^4_xL^\infty_T}\\
&= \left\| W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(t-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\\
&= \left\| W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^4_xL^\infty_T}\\
&\leq C\left\| D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^2_x}
\end{aligned}
$$

Usando las desigualdad de Minkowski, resulta que:

$$
\begin{aligned}
|||\Psi_{u_0}(v)|||_{Y_{T_1}} &\leq C\left\| D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right)\right\|_{L^2_x}\\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_{L^2_x} + C\left\|D_x^{1/4}\int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}\\
&= C\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_{L^2_x} + C\left\|\int_0^t D_x^{1/4}W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau\right\|_{L^2_x}\\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_{L^2_x} + C\int_0^t \left\|D_x^{1/4}W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)\right\|_{L^2_x}d\tau\\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_{L^2_x} + C\int_{-T}^T \left\|D_x^{1/4}W(-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)\right\|_{L^2_x}d\tau\\
&= C\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_{L^2_x} + C\int_{-T}^T \left\|W(-\tau)D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)\right\|_{L^2_x}d\tau\\
&= C\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_{L^2_x} + C\int_{-T}^T \left\|D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)\right\|_{L^2_x}d\tau
\end{aligned}
$$

Usando Cauchy Schwarz y el teorema 5.3, se tiene

$$
\begin{aligned}
|||\Psi_{u_0}(v)|||_{Y_{T_1}} &\leq C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x} + C\left(\int_{-T}^T d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^T \left\|D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)\right\|^2_{L^2_x}d\tau\right)^{1/2}\\
&= C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x} + CT^{1/2}\left(\int_{-T}^T \left\|D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)\right\|^2_{L^2_x}d\tau\right)^{1/2}\\
&= C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x} + CT^{1/2}\left\|D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v\right)\right\|_{L^2_TL^2_x}\\
&\leq C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x} + CT^{1/2}|||v|||^3_T. \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Luego

$$
|||\Psi_{u_0}(v)|||_{Y_{T_1}} \leq C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x} + CT^{1/2}|||v|||^3_{Y_T}.
$$

Eligiendo

$$
a = 2C\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2_x} \tag{5.17}
$$

y T_1 satisface

$$
8CT_1^{1/2}a^2 \leq 1 \tag{5.18}
$$

entonces

$$|||\Psi_{u_0}(v)|||_{Y_{T_1}} \leq \frac{a}{2} + \frac{a^3}{8a^2} \leq a.$$

Es decir, $\mathcal{R}(\Psi_{u_0}) \subset Y_{T_1}^a$.

En segundo lugar demostraremos que $\Psi_{u_0} : Y_T^a \to Y_T^a$ es una contracción para algún $T = T(\|D_x^{1/4}u_0\|_{L_x^2}) < T_1$.

$$\begin{aligned}
\|D_x^{1/4}(\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v}))\|_{L_x^2} &= \left\| D_x^{1/4} \int_0^t W(t-\tau)(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&= \left\| D_x^{1/4} W(t) \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&= \left\| W(t) D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&= \left\| D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&= \left\| \int_0^t D_x^{1/4} W(-\tau)(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&\leq \int_0^t \left\| D_x^{1/4} W(-\tau)(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&\leq \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4}(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau
\end{aligned}$$

tomando el supremo en $t \in [-T, T]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[-T,T]} \|D_x^{1/4}(\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v}))\|_{L_x^2} &\leq \sup_{t\in[-T,T]} \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4}(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leq \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4}(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau
\end{aligned}$$

luego, $\|\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})\|_{(T,0)} \leq \displaystyle\int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4}(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v})(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau.$

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})\|_{(T,1)} &= \|\partial_x(\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&= \left\| \partial_x \int_0^t W(t-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&= \left\| \partial_x W(t) \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&= \left\| D_x W(t)\mathcal{H} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&\leq \left\| D_x^{1/4}\mathcal{H} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&= \left\| \int_0^t D_x^{1/4} W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&\leq \int_{-T}^{T} \left\| D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})\|_{(T,2)} &= \|D_x^{1/4}(\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v}))\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\
&= \left\| D_x^{1/4} \int_0^t W(t-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\
&\leq \left\| W(t) D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\
&\leq C \left\| D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&= C \left\| \int_0^t D_x^{1/4} W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&\leq C \int_{-T}^{T} \left\| D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})\|_{(T,3)} &= \left\| D_x^{1/4}\partial_x(\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})) \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&= \left\| D_x^{1/4}\partial_x \int_0^t W(t-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&= \left\| \partial_x W(t) D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq \left\| \partial_x W(t) D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leq C \left\| D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&\leq C \int_0^t \left\| D_x^{1/4} W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leq C \int_{-T}^{T} \left\| D_x^{1/4}\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})\|_{(T,4)} &= \|\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})\|_{L_x^4 L_T^\infty} \\
&= \left\| \int_0^t W(t-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^4 L_T^\infty} \\
&\leq \left\| W(t) \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x \widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^4 L_T^2}
\end{aligned}
$$

$$\leq C \left\| D_x^{1/4} \int_0^t W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2}$$
$$\leq C \int_0^t \left\| D_x^{1/4} W(-\tau)\left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau$$
$$\leq C \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4} \left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el lema 5.3 resulta

$$\begin{aligned}
|||\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})|||_{Y_T} &\leq C \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4} \left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leq C \left(\int_{-T}^T d\tau\right)^{1/2} \left(\int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4} \left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right)(\tau) \right\|_{L_x^2}^2 d\tau\right)^{1/2} \\
&= CT^{1/2} \left\| D_x^{1/4} \left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right) \right\|_{L_T^2 L_x^2} \\
&= CT^{1/2} \left\| D_x^{1/4} \left(v^2\partial_x v - \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v}\right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leq CT^{1/2} \left(\left\| D_x^{1/4} \left(v^2\partial_x v\right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\| D_x^{1/4} \widetilde{v}^2\partial_x\widetilde{v} \right\|_{L_x^2 L_T^2} \right) \\
&\leq CT^{1/2} \left(|||v|||_{Y_T}^3 + |||\widetilde{v}|||_{Y_T}^3 \right) \\
&= CT^{1/2} \left[\left(|||v|||_{Y_T} + |||\widetilde{v}|||_{Y_T}\right) \left(|||v|||_{Y_T}^2 + |||\widetilde{v}|||_{Y_T}^2 - |||v|||_{Y_T} |||\widetilde{v}|||_{Y_T} \right) \right] \\
&\leq CT^{1/2} \widetilde{C} \left(|||v|||_{Y_T}^2 + |||\widetilde{v}|||_{Y_T}^2 \right) |||v - \widetilde{v}|||_{Y_T} \\
&\leq 2CT^{1/2} a^2 |||v - \widetilde{v}|||_{Y_T}.
\end{aligned}$$

Entonces la elección de a y T en (5.17) y (5.18) nos muestra que Ψ_{u_0} es una contracción, pues

$$|||\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{u_0}(\widetilde{v})|||_{Y_T} \leq \frac{1}{4} |||v - \widetilde{v}|||_{Y_T}.$$

Entonces por el teorema de punto fijo de Banach, existe $v \in Y_T^a$ única solución $\Psi_{u_0}(v) = v$, es decir

$$v(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-\tau)\left(v^2\partial_x v\right)(\tau)d\tau. \tag{5.19}$$

Finalmente demostraremos que para $T' \in [-T, T]$ el flujo

$$F : V_{u_0} \subset \overset{\circ}{H}{}^{1/4} \longrightarrow Y_{T'}$$
$$\widetilde{u}_0 \longmapsto \widetilde{u} = F(\widetilde{u}_0),$$

en una vecindad V_{u_0} es una función lipschitziana, es decir, se cumple

$$|||F(u_0) - F(\widetilde{u}_0)|||_{Y_{T'}} \leq K\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{\overset{\circ}{H}^{1/4}}, \qquad K > 0.$$

En efecto, usando argumentos similares al anterior, deducimos que para $T' \in [-T, T]$,

$$\begin{aligned}
|||F(u_0) - F(\widetilde{u}_0)|||_{Y_{T'}} &= |||\Psi_{u_0}(v) - \Psi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})|||_{Y_{T'}} \\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}(u_0 - \widetilde{u}_0)\right\|_{L_x^2} + C(T')^{1/2}|||v - \widetilde{v}|||_{Y_{T'}}^3 \\
&= C\left\|D_x^{1/4}(u_0 - \widetilde{u}_0)\right\|_{L_x^2} + C(T')^{1/2}\left(|||v|||_{Y_{T'}}^2 + |||\widetilde{v}|||_{Y_{T'}}^2\right)|||v - \widetilde{v}|||_{Y_{T'}} \\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}(u_0 - \widetilde{u}_0)\right\|_{L_x^2} + \frac{1}{4}C|||v - \widetilde{v}|||_{Y_{T'}} \\
&\leq C\left\|D_x^{1/4}(u_0 - \widetilde{u}_0)\right\|_{L_x^2} + \frac{1}{4}C\left\|D_x^{1/4}(u_0 - \widetilde{u}_0)\right\|_{L_x^2} \\
&\leq K\left\|D_x^{1/4}(u_0 - \widetilde{u}_0)\right\|_{L_x^2} \\
&= K\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{\overset{\circ}{H}^{1/4}}
\end{aligned}$$

Esto muestra que existe $K = \frac{5}{4}C > 0$ tal que

$$|||F(u_0) - F(\widetilde{u}_0)|||_{Y_{T'}} \leq K\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{\overset{\circ}{H}^{1/4}}.$$

Por lo tanto, la solución $v(\cdot) \in Y_T^a$ de la ecuación integral (5.19) es una solución mild única del PVI (1). Ahora, extendemos este resultado de unicidad al espacio de Banach Y_T.

Supongamos que $\widetilde{v} \in Y_{T_1}$ para $T_1 \in [-T, T]$ es otra solución mild del PVI (1) con el mismo dato inicial. El argumento usado anteriormente muestra que para algún $\overline{T}_1 \in [-T, T]$, Ψ_{u_0} está bien definida y es una contracción en $Y_{T_1}^a$ para algún $T_1 < \overline{T}_1$, luego para $T_1 < T$ tenemos

$$|||v - \widetilde{v}|||_{Y_{T_1}} = |||F(u_0) - F(\widetilde{u}_0)|||_{Y_{T_1}} \leq K\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{\overset{\circ}{H}^{1/4}} = 0,$$

es decir, para todo $t \in [-T_1, T_1]$, $v(t) = \widetilde{v}(t)$. De esta manera resulta la unicidad de la solución mild en el espacio Y_{T_1}.

Ahora supongamos que $\widetilde{v} \in Y_{T_2}$ para $T_2 > T_1$ y $T_2 \in [-T, T]$ es solución mild del PVI (1) con el mismo dato inicial. Del mismo modo, se muestra que para algún $\overline{T}_2 \in [-T_1, T_1]$, Ψ_{u_0} está bien definida y para algún $T_2 < \overline{T}_2$, Ψ_{u_0} es una contracción en $Y_{T_2}^a$. Luego para $T_2 < T$ tenemos

$$|||v - \widetilde{v}|||_{Y_{T_2}} \leq K\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{\overset{\circ}{H}^{1/4}} = 0,$$

es decir, para todo $t \in]-T_2, T_2[$, $v(t) = \widetilde{v}(t)$. De este modo resulta la unicidad de la solución mild en Y_{T_2}.

Volviendo a aplicar este proceso, un número finito de veces, el resultado puede ser extendido a todo el intervalo $[-T, T]$. Esto implica la unicidad de la solución en Y_T. $\square$

Bibliografía

[1] T. Arbogast, J. Bona. *Method of Applied Mathematics.* 2nd ed. Department of Mathematics the University of Texas at Austin, Texas (2001).

[2] J. Bona, R. Smith. *The initial-valve problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A 278, 555-601, (1975).

[3] H. Brézis. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.

[4] T. Cazenave, A. Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations.* Oxfort University Press, New York (1998).

[5] G. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and their applications.* Second Edition. Pure and Apllied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons. Inc., New York, 1999. 386pp, ISBN: 0-471-316-0.

[6] R. J. Iório Jr., de M. Iório. *Equaçoes difenciais parciais: uma introduçao.* Projeto Euclides, IMPA, 1988.

[7] R. J. Iório Jr. *On the Cauchy problem for the Benjamin - Ono equation.* Comm. PDE, 11, 1031 - 1081, (1986).

[8] R. J. Iório Jr., V. Iório. *Fourier Analysis and partial differential equations.* Cambridge University Press, New York, (2001).

[9] T. Kato. *Quasi-linear equations of evolutions, with applications to partial differential equation.* Lecture and Notes in Mathematics, 448 (1975), 25-70.

[10] T. Kato. *On the Cauchy problem for the (Generalizad) KdV equations Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies,* 8, 93-128, (1983).

[11] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *On the (generalizad) Korteweg-de Vries equation.* Duke Math. J., 59, 585-128, (1983).

[12] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega. *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations.* Indiana U. Math. J., 40 (1991), 33-69.

[13] C. E. Kenig, G. Ponce y V. Vega. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle.* Comm. Pure Appl. Math, 46 (1993), 527-620.

[14] E. Kreyzig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons. Inc. 1978.

[15] F. Linares, G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Rio de Janeiro (2006).

[16] J. Montealegre, S. Petrozzi. *Semigrupos de Operadores Lineales y Ecuaciones de Evaluación Semi-Lineales.* Informe de investigación, $N^0$6 serie B, PUCP, (1999).

[17] J. Montealegre, S. Petrozzi. *Operadores Disipativos Maximales.* Informe de investigación, $N^0$2 serie B, PUCP, (1998).

[18] J. Montenegro. *Sistemas de equacoes de evolucao nao lineares. Estudo local, global e estabilidade de ondas solitarias.* Tesis de Doutorado, IMPA, (1995).

[19] W. Nunes. *O problema de Cauchy global para equaçoes dispersivas com coeficientes dependientes do Tempo.* Tesis de Doutorado, IMPA, (1991).

[20] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematica Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983. 279 pp. ISBN: 0-387-90845-5.

[21] V. Rocha. *Estudio local de la Ecuación de Korteweg-de Vries Modificada I.* Tesis de Maestría, PUCP, (2011).