PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DEL PERU

ESCUELA DE GRADUADOS

# "IDEALES GENERADOS POR R-SUCESIONES"

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADEMICO DE

MAGISTER EN MATEMATICAS

PRESENTADO POR:

JOSUE ANGULO PEREZ

LIMA – PERU

2004

**Dedico este trabajo:**

A mi hija Abigail, con infinita ternura,

A mi esposa María Ulda por su gran apoyo y

A mis queridos padres: Leonidas y Eudosia por su amor sin límites.

# AGRADECIMIENTO

Agradezco en forma muy especial a mi Asesor el Dr. Maynard Kong W. que fue quien motivó mi interés por la teoría de las R-Sucesiones, por sus palabras de estímulo y por la revisión del presente trabajo.

A mis profesores de Post Grado de la Pontificia Universidad Católica del Perú por los conocimientos brindados y en forma especial al Dr. César Carranza S. por su apoyo incondicional.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú en su conjunto por su calidad acogida.

# RESUMEN

En este trabajo denominado "Ideales Generados por R-Sucesiones" buscamos condiciones razonables para que un ideal de un anillo R sea generado por una R-sucesión sobre un R-módulo A, donde una R-sucesión sobre A es una sucesión ordenada

$$\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$$

de elementos en R tales que $x_i$ no es un divisor de cero con respecto a

$$\mathbf{A/(x_1, \ldots, x_{i-1})A}$$

# ABSTRACT

In this work named "Ideals Generated by R-Sequences" we search for reasonable conditions that ensure that an Ideal I of a ring R is generated by an R-sequence on a R module A, where a R-sequence on A is an ordered sequence of elements

$$\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$$

of R such that $x_i$ is not a zero divisor with respect to

$$\mathbf{A/(x_1, \ldots, x_{i-1})A}$$


**JOSUE ANGULO PEREZ**

# INDICE

# INTRODUCCIÓN

La teoría de las R-sucesiones es una adición a la teoría de los anillos conmutativos relacionada estrechamente a ideales primos, anillos locales Noetherianos, anillos regulares, grado, rango y ν-dimensión de un anillo, módulos finitamente generados, módulos proyectivos y dimensión proyectiva de un R-módulo.

Los primeros resultados sobre la teoría de R-sucesiones fueron obtenidos por J. P. Serret (1955)[11] y fueron estudiados sistemáticamente por Auslander M., Buchsbaum D. (1957)[2] y I. Kaplansky (1959)[6],[7] a fin de obtener relaciones entre R-sucesiones, dimensión homológica, anillos de Macaulay y anillos locales regulares.

Una R-sucesión sobre un R-módulo A es una sucesión ordenada $x_1, x_2,...,x_n$ de elementos en R tales que $x_i$ no es divisor de cero con respecto a $A/(x_1,...,x_{i-1})A$.

En 1962, Kaplansky [6] establece condiciones para que un ideal sea generado por una R-sucesión poniendo énfasis en el anillo y su ideal. En 1967, W. Vasconcelos [12] establece condiciones para que un ideal sea generado por una R-Sucesión poniendo énfasis en el R-módulo.

Nuestro trabajo consiste en hacer una exposición didáctica de la teoría de R-sucesiones para establecer, con ayuda del Teorema del Ideal Principal y los resultados obtenidos por I. Kaplansky y W. Vasconcelos, condiciones para que un ideal sea generado por una R-sucesión en las cuales se consideran el anillo R, el ideal I y el R-módulo A.

Así, el objetivo principal de este trabajo es buscar condiciones razonables que aseguren que un ideal en el anillo R es generado por una R-sucesión sobre A, y el objetivo específico es dar una presentación simplificada de un conjunto de resultados sobre: R-sucesiones, anillos locales regulares y homología que nos permitan hallar las condiciones buscadas. Para cumplir con estos objetivos, el trabajo ha sido dividido en cinco capítulos.

En el capítulo 1 damos las definiciones y resultados básicos sobre anillos, ideales primos, divisores de cero, anillos Noetherianos, rango de un ideal primo, dimensión de un anillo, R-módulos finitamente generados y dimensión proyectiva de un R-módulo.

En el capítulo 2 presentamos las R-sucesiones sobre un R-módulo. Mostramos que existe una longitud común para las R-sucesiones maximales en un ideal I sobre un R módulo A y lo llamamos el grado de I sobre A. Esto nos permite presentar los teoremas sin mixtura generalizados (Teoremas 2.11 y 2.14) para establecer condiciones sobre el grado de un ideal para resolver el problema planteado. También se define el rango de un ideal.

En el capitulo 3 presentamos el teorema del Ideal Principal de Krull y dos de sus generalizaciones, los cuales permitirán establecer relaciones entre el rango de un Ideal de un anillo Noetheriano R y el número de elementos que lo generan.

En el capítulo 4 damos una presentación simplificada de la teoría de los anillos locales regulares trabajando con un conjunto minimal de generadores de un R-módulo A lo cual nos ayudará a demostrar el Teorema 4.6, en el cual se establecen condiciones para que un ideal de un anillo local regular pueda ser generado por una R-sucesión.

Finalmente, en el capítulo 5 utilizamos resultados de álgebra homológica para demostrar un teorema debido a W. Vasconcelos (Teorema 5.6) el cual junto al Teorema 5.7 nos permitirá establecer que el ideal maximal M de un anillo local Noetheriano es generado por una R-sucesión sí y solo si M tiene dimensión proyectiva finita.

Cabe mencionar que las condiciones que aseguran que un ideal I es generado por una R-sucesión han quedado dispersos entre los Capítulos de esta tesis, aunque los resultados más fuertes son presentados en los capítulos 2,4 y 5.

Pensamos que este trabajo es de gran importancia en la Teoría de Anillos Conmutativos debido a su generalidad y aplicabilidad; además a nuestro conocimiento existen pocos trabajos en nuestro medio a nivel de maestría sobre el tema, por lo que creemos haber contribuido en la difusión de esta importante área de la matemática.

CAPITULO 1

# PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos algunas definiciones y resultados sobre Anillos conmutativos y álgebra homológica. Para información complementaria puede leerse [1], [3], [4], [5]. A través de todos los capítulos la palabra anillo significará un anillo conmutativo con elemento identidad.

## 1.1 Ideales Primos y Divisores de Cero.

Recordamos la definición: En un anillo conmutativo R, el ideal I es **primo** si $ab\in I$ implica $a\in I$ o $b\in I$. Además I es primo si y solo si R/I es dominio entero. Convenimos en que R no es ideal primo.

Un ideal M en R es **maximal** si $M \neq (1)$ y no existe ningún ideal I tal que $M \subset I \subset (1)$. Además M es maximal si y solo si R/M es un cuerpo. Por lo tanto todo ideal maximal es primo.

Sea S el complemento de un ideal I en un anillo R. Entonces la definición de un ideal primo I puede ser reestablecida como sigue: I es primo si y solo si S es multiplicativamente cerrado. El siguiente teorema es muy útil.

**Teorema 1.1. Si $S \subset R$ es multiplicativamente cerrado y I es un ideal en R maximal con respecto a R - S, entonces I es primo.**

**Prueba**. Dado $ab\in I$ debemos probar que $a\in I$ o $b\in I$. Haremos una prueba indirecta. Supongamos que $a\notin I$ y $b\notin I$. Si $a\notin I$ entonces el ideal (I , a) generado por I y a contiene estrictamente a I y, por lo tanto, intersecta a S. Entonces existe un elemento $s_1\in S$ de la forma

$$s_1 = i_1 + xa \ (i_1 \in I, x \in R). \qquad (1)$$

En forma similar, si $b \notin I$, el ideal (I , b) contiene estrictamente a I y, por lo tanto, intersecta a S, en consecuencia existe $s_2 \in S$ de la forma

$$s_2 = i_2 + yb \ (i_2 \in I, \ y \in R). \qquad (2)$$

Entonces

$$s_1 s_2 = (i_1 + xa)(i_2 + yb) = i_1 i_2 + i_1 yb + xai_2 + xayb \qquad (3)$$

y los cuatro términos del segundo miembro de (3) están en I (los tres primeros por que un factor está en I y el cuarto por que $ab \in I$). Por lo tanto $s_1 s_2 \in I$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a \in I$ o $b \in I$. ■

**Observaciones:**

1. El lema de Zorn establece lo siguiente: Si $A \neq \emptyset$ es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada cadena tiene cota superior, entonces A tiene un elemento maximal.

**2.** Dado un ideal J disjunto de un conjunto multiplicativamente cerrado S, podemos por el lema de Zorn extender J a un ideal maximal con respecto a R-S. Tenemos así un método para construir ideales primos.

**3.** Examinando el complemento de un ideal primo notamos que es un conjunto multiplicativamente cerrado con la propiedad adicional de ser saturado. Esto amerita la siguiente definición

**Definición 1.1.** Un subconjunto S de un anillo R se llama conjunto **multiplicativamente cerrado saturado** si junto a un elemento x contiene a todos sus divisores.

**Teorema 1.2. Sea R un anillo y $S \subset R$. Las siguientes afirmaciones sobre el conjunto S son equivalentes:**

**(1) S es un conjunto multiplicativamente cerrado saturado.**

**(2) El complemento de S es una unión de ideales primos.**

**Prueba.** 1⇒2) Sea $x \in R\text{-}S$ arbitrario. Entonces el ideal principal (x) es disjunto de S, pues S es saturado. Extendiendo (x) a un ideal $I_x$ maximal respecto a R-S (por el lema de Zorn), por el Teorema 1.1, $I_x$ es primo. Entonces $\forall x \in R\text{-}S$, podemos extender (x) a un ideal primo $I_x$ disjunto de S,. Por lo tanto el complemento S es la unión de ideales primos. probando (2).

2⇒1) Esto es inmediato de la definición. ■

**Observaciones:**

1. En el Teorema 1.2 se debe excluir la posibilidad $0 \in S$, pues un conjunto cerrado multiplicativamente saturado que contenga a 0 es el anillo total, y su complemento es el conjunto vacío que no es convenientemente una unión de ideales primos.
2. Cuando expresamos el complemento de S como una unión de ideales primos podemos descartar los ideales primos que no son maximales dentro del complemento en favor de dichos ideales maximales.

**Ejemplos:**

1. El conjunto {1} es multiplicativamente cerrado saturado. Su saturación es el conjunto de todas las unidades. Los ideales primos maximales en el complemento son los **ideales maximales ordinarios**.
2. Sea S el conjunto de todos los elementos que no son divisores de cero en R, entonces S es un conjunto multiplicativamente cerrado saturado. Por lo tanto: los divisores de cero en R son una unión de ideales primos. Los ideales primos maximales entre estos serán llamados **"primos maximales de divisores de cero"**.

Los dos ejemplos anteriores admiten apropiadas generalizaciones a módulos: en el primer caso tomamos todos los elementos de R que actúan biunivocamente como multiplicaciones del R-módulo dado; en el segundo caso tomamos todos los elementos que no son divisores de cero sobre el módulo. Este último caso es lo suficientemente importante para merecer una definición.

**Definición 1.2.** Sean R un anillo conmutativo y A un R módulo $\neq 0$. Se llaman **ideales primos maximales de A** a los ideales primos maximales dentro de los divisores de cero sobre A. Si I es ideal en R y A tiene la forma R/I, **se llaman primos maximales sobre I**, en lugar de R/I.

Los dos teoremas siguientes muestran dos métodos para construir ideales primos sin usar conjuntos multiplicativamente cerrados.

**Teorema 1.3. Sean R un anillo y A un R-módulo. Sea I un ideal en R maximal entre todos los anuladores de elementos diferentes de cero de A. Entonces I es primo.**

**Prueba.** Dado $ab\in I$ debemos probar que $a\in I$ o $b\in I$. Supongamos que $a\notin I$. Como $I = \text{ann}(x)$, entonces $ax\neq 0$. En consecuencia

$$\text{ann}(ax) \supset \text{ann}(x) = I.$$

Pero I es maximal entre los anuladores de elementos diferentes de cero, luego

$$I \supset \text{ann}(ax) \supset \text{ann}(x) = I.$$

Por lo tanto $\text{ann}(x)=I$. Así pues, b anula ax, y por lo tanto $b\in I$. En consecuencia I es ideal primo. ■

**Teorema 1.4. Sea I un ideal en R no finitamente generado que es maximal entre todos los ideales en R que no son finitamente generados. Entonces I es primo.**

**Prueba**. Dado $ab\in I$ debemos probar que $a\in I$ o $b\in I$. Haremos una prueba indirecta. Supongamos para esto que $a\notin I$ y $b\notin I$. Si $a\notin I$, entonces $I\subset(I,a)$ propiamente y como I es maximal, entonces $(I,a)$ es finitamente generado y podemos tomar como sus elementos generadores a elementos de la forma

$$i_1 + x_1a, \ldots ,i_n + x_na ,\ i_1,\ldots,i_n\in I.$$

**Afirmación: $J = \{y \in R / ya \in I\}$ es ideal en R y $b \in J$.**

Para probar esto supongamos que $y_1, y_2 \in J$, entonces $y_1a$ , $y_2a \in I$, luego $y_1a + y_2a = (y_1+y_2)a \in I$, por tanto $y_1+y_2 \in J$. Además si $y \in J$, entonces $ya \in I$, luego $-ya \in I$, por tanto $-y \in J$. En consecuencia $(J,+)$ es subgrupo aditivo de $(R,+)$. Por otra parte $RJ \subset J$, luego J es un ideal de R. Además $b \in J$ pues $ab \in I$.

Por otro lado, si $i \in I$, entonces $\forall r \in R$, $ri \in I$; luego $I \subset J$. En consecuencia $b \in J$ y $I \subset J$. Pero I es maximal; luego J es finitamente generado.

**Afirmación: $I = (i_1,...,i_n,Ja)$.**

Para probar esto sea $z \in I$, entonces $z \in (I,a)$, luego

$$z = i_1 + x_1a,...,i_n + x_na \in (i_1,..,i_n,Ja),$$

por lo tanto

$$I \subset (i_1,\dots,i_n,Ja). \qquad (4)$$

Supongamos ahora que $z \in (i_1,...,i_n, Ja)$. Entonces

$$z = u_1(i_1 + x_1a) + ... + u_n(i_n + x_na) = u_1i_1 + \dots + u_ni_n + (u_1x_1 + ... + u_nx_n)a \in I,$$

puesto que $u_1x_1 + ... + u_nx_n \in J$, luego

$$( i_1,...,i_n, Ja ) \subset I. \qquad (5)$$

De (4) y (5) tenemos que

$$I = ( i_1,...,i_n , Ja ).$$

Así pues, I es finitamente generado, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a \in I$ o $b \in I$, y en consecuencia I es ideal primo. ■

## 1.2 Anillos Noetherianos. Rango de un Ideal Primo.

Sea $\Sigma$ un conjunto no vacío de ideales de R parcialmente ordenado por la relación $\subseteq$ ($\subseteq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva).

**Teorema 1.5. Las condiciones siguientes son equivalentes:**

1) **Cada sucesión creciente $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ en $\Sigma$ es estacionaria (es decir, existe un n tal que $I_n = I_{n+1} = \ldots$),**
2) **Cada subconjunto no vacío de $\Sigma$ tiene un elemento maximal.**

**Prueba.**

1)$\Rightarrow$2) Si 2) es falso existe un subconjunto T de $\Sigma$ no vacío que no tiene elemento maximal, y se puede construir inductivamente una sucesión T estrictamente creciente y que no termina. Lo cual es una contradicción.

2)$\Rightarrow$1) El conjunto $( I_i )_{i\geq 1}$ tiene un elemento maximal, por ejemplo $I_n$. Por lo tanto $(I_i)_{i\geq 1}$ es estacionario. ■

**Observación:**

La condición 1) se llama **condición de cadena ascendente**.

**Definición 1.3.** Se dice que un anillo conmutativo R es **Noetheriano** si los ideales en R satisfacen las condiciones de cadena ascendente.

**Teorema 1.6. R es anillo Noetheriano si y solo si cada ideal en R es finitamente generado.**

**Prueba.** $\Rightarrow$): Sea R un anillo Noetheriano, I ideal de R y $\Sigma$ el conjunto de todos los ideales finitamente generados contenidos en I. Entonces $\Sigma \neq \phi$ (puesto que $0 \in \Sigma$) y por lo tanto tiene un elemento maximal $I_0$. Si $I_0 \neq I$, el ideal $I_0 + Ix$ donde $x \in I$, $x \notin I_0$, es de generación finita y contiene a $I_0$ en sentido estricto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $I = I_0$ y en consecuencia I es finitamente generado.

$\Leftarrow$): Supongamos que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ es una cadena ascendente de ideales de R. Entonces $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ es un ideal de R, por lo tanto es finitamente generado, y sea $x_1, \ldots, x_r$, un conjunto de generadores. Si $x_i \in I_{n_i}$; sea $n = \text{máx}\{n_i\}$; entonces cada $x_i \in I_n$, por lo tanto $I_n = I$ y la cadena es estacionaria. ■

**Observación:** Como consecuencia de los Teoremas 1.5 y 1.6 , R es anillo Noetheriano si se satisfacen las tres condiciones equivalentes siguientes:

i) Cada conjunto no vacío de ideales en R tiene un elemento maximal.

ii) Cada cadena de ideales en R es estacionaria.

iii) Cada ideal en R es finitamente generado.

**Teorema 1.7. Sea $\{P_i\}$ una cadena de ideales primos en R. Entonces $\cup P_i$ y $\cap P_i$ son ideales primos en R.**

**Prueba.-** Trabajando con los complementos $S_i$ de $P_i$, tenemos que $\cap S_i$ y $\cup S_i$ son multiplicativamente cerrados. Tomando nuevamente complementos se tiene que $\cap P_i$ y $\cup P_i$ son primos. ■

Como el Teorema 1.7 trabaja con intersecciones podemos usar el lema de Zorn en forma descendente.

**Teorema 1.8. Sean I un ideal en un anillo R y P un ideal primo conteniendo I. Entonces P puede ser reducido a un ideal primo minimal entre todos los ideales primos que contienen I.**

**Prueba.** Fijemos P en una cadena maximal $\{P_i\}$ de ideales primos que contienen I (Lema de Zorn). Por el Teorema 1.7, $\cap P_i$ es ideal primo y es minimal. ■

Retomamos el conjunto parcialmente ordenado S de ideales primos para hacer notar que tiene otra propiedad.

**Teorema 1.9. Sean P,Q ideales primos distintos en un anillo R tal que $P \subset Q$. Entonces existen ideales primos distintos $P_1, Q_1$ tal que**

$$\mathbf{P \subset P_1 \subset Q_1 \subset Q}$$

**y no existen ideales primos contenidos propiamente entre $P_1$ y $Q_1$ .**

**Prueba.** Como $P \subset Q$, podemos insertar (Por el Lema de Zorn) una cadena maximal $\{P_i\}$ de ideales primos entre P y Q. Sea x un elemento arbitrario que está en Q pero no en P. Definamos $Q_1$ como la intersección de todos los $P_i$ que contienen x, y $P_1$ la unión de todos los $P_i$ que no contienen x. Por el Teorema 1.7, $P_1$ y $Q_1$ son primos. Entonces

$$P \subset P_1 \subset Q_1 \subset Q$$

se cumple, por lo tanto ninguno de los $P_i$ pueden estar propiamente entre $P_1$ y $Q_1$, pues si $x \in P_i$, entonces $P_i \supset Q$ y si $x \notin P_i$ , entonces $P_i \subset P$. Por la maximalidad de $\{P_i\}$ se sigue que ningún ideal primo de todos ellos pueden estar propiamente entre $P_1$ y $Q_1$. ■

**Definición 1.4.** Se dice que una cadena descendente $P= P_0 \supset P_1 \supset ... \supset P_n$ de ideales primos distintos tiene **longitud n** cuando en ella aparecen exactamente n+1 ideales primos.

**Definición 1.5.** Se dice que un **ideal primo P tiene rango n** y se denota **ran(P) = n** si existe una cadena descendente de ideales primos de longitud n de P pero no existe una cadena de mayor longitud.

**Ejemplos**

1.- Un ideal primo minimal tiene rango 0 .

2.- Un ideal primo de rango 1 no es minimal, pero está situado directamente sobre un ideal primo minimal.

3.- En un dominio entero el único ideal primo minimal es 0. Por lo tanto en un dominio es usual decir ideal primo minimal de rango 1.

## 1.3 R-Módulos Finitamente Generados

**Definición 1.6.** Por un **R-módulo libre** sobre un conjunto S entendemos un R-módulo F junto con una función f : S → F tal que para cada función g : S → X siendo X cualquier R-módulo, existe un único homomorfismo h : F →X tal que hof = g. Se denota (F , f).

**Teorema 1.10. i) Si (F , f ) es un R-módulo libre sobre un conjunto S, entonces: f es una función inyectiva y Im(f) = f(S) genera al R-módulo F.**

**ii) . Un R-módulo X tiene una base si y solo sí X es libre.**

**Prueba.** i) [4], pag. 25; ii) [4], pag. 30. ■

**Observación .** Como consecuencia del Teorema 1.11 observamos (Ver [1] pág. 23) que un R-módulo libre es un R-módulo isomorfo a uno de la forma $\oplus_{i\in I} M_i$, donde $M_i \cong R$ (como un R-módulo). Un R-módulo libre finitamente Generado es isomorfo a $R \oplus \ldots \oplus R$(n sumandos), y se indica por $R^n$

**Teorema 1.11 A es un R-módulo con generación finita si y solo sí A es isomorfo a un cociente de $R^n$ para algún entero n > 0.**

**Prueba.** [1], págs. 23, 24 ■

**Teorema 1.12. Sea R un anillo, I ideal en R, A un R-módulo generado por n elementos, y sea $x\in R$ tal que $xA \subset IA$. Entonces $(x^n + y)A = 0$ para algún $y\in I$.**

**Demostración**: Supongamos que A es generado por $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si $a\in A$, entonces $a = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ , $r_i \in I$;

luego,

$$xa_i = \sum y_{ij} a_j \,,\ y_{ij}\in I.$$

Como $xA \subset IA$, efectuando operaciones se tiene

$$(x-y_{11})a_1 - y_{12}a_2 - \ldots - y_{1n}a_n = 0$$
$$-y_{21}a_1 + (x-y_{22})a_2 - \ldots - y_{2n}a_n = 0$$
$$-y_{n1}a_1 - y_{n2}a_2 - \ldots + (x-y_{nn})a_n = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos lo siguiente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-y_{11} & -y_{12} & \ldots & -y_{1n} \\ -y_{21} & x-y_{22} & \ldots & -y_{2n} \\ . & . & . & . \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \ldots & x-y_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} y_{11}+(-x) & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22}+(-x) & \ldots & y_{2n} \\ . & . & . & . \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn}+(-x) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n((-x)^n + \mathbf{a}_1(-x)^{n-1} + \mathbf{a}_2(-x)^{n-2} + \ldots + \mathbf{a}_n),$$

donde $\mathbf{a}_k$ es la suma de todos los menores de k-ésimo orden del determinante

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ . & . & . & . \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

obtenidos del mismo eliminando las n-k filas de índices $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_{n-k}$ y las columnas de los mismos índices.

Observamos entonces que el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones formado anula todos los $a_i \in A$, y por lo tanto anulan a A.

Por lo tanto $\Delta = x^n + y, y \in I$. Como consecuencia de esto tenemos $(x^n+y)A = 0$. ■

**Teorema 1.13. Sean R un anillo, I un ideal en R y A un R-módulo finitamente generado satisfaciendo IA =A. Entonces (1+y)A = 0 para algún y∈I.**

**Prueba.** Consecuencia del Teorema 1.12 con $x = 1$. ■

**Teorema 1.14. (Lema de Nakayama). Sean R un anillo (no necesariamente conmutativo), A un R-módulo izquierdo finitamente generado y supongamos que JA=A donde J es el radical de Jacoboson de R. Entonces A = 0.**

**Prueba.** Debemos probar que A = 0**.** Haremos una prueba indirecta. Supongamos que $A \neq 0$ y $a_1,\ldots,a_r$ es un conjunto minimal de generadores de A. Supongamos además que $r > 0$ y buscaremos una contradicción. En efecto, como $a_1 \in A$ tenemos

$$a_1 = j_1a_1 + \ldots + j_ra_r \ ; \ j_1,\ldots,j_r \in J.$$

Entonces

$$(1 - j_1)a_1 = j_2a_2 + \ldots + j_ra_r \ .$$

Puesto que $j_1$ pertenece al radical de Jacobson, $1\text{-}j_1$ es invertible, luego

$$a_1 = k_2a_2 + \ldots + k_ra_r \, , \, k_i = \frac{j_i}{1-j_1}, \ i=2,\ldots,r \ .$$

Por lo tanto $a_1$ puede ser expresado como una combinación lineal de los elementos $a_2,\ldots,a_r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto A = 0. ■

**Teorema 1.15. Sea R un anillo Noetheriano, A un R-módulo no nulo finitamente generado. Entonces; existe un número finito de primos maximales de A, y cada uno es anulador de un elemento no nulo de A .**

**Prueba.** Definamos**: a**nn(A) = $\{x \in R / xA = 0\}$. Probaremos que ann(A) es ideal en R. Probaremos esto en dos etapas. En primer lugar, si $x_1,x_2 \in$ ann(A), entonces $x_1A = 0$ y $x_2A = 0$, luego $(x_1 + x_2)A = 0$. Además si $x \in$ ann(A), entonces $xA = 0$, luego $-xA = 0$, en consecuencia ann(A) es subgrupo aditivo de R. En segundo lugar, si $r \in R$ y $x \in$ ann(A), entonces $rxA = 0$, por lo tanto Rann(A) $\subset$ ann(A). Por lo tanto, ann(A) es ideal en R. Como ann(A) es ideal en R, y por la condición de cadena ascendente para cada $y \in A$,

$ann(y) = \{x \in R / xy = 0\}$ es ideal contenido en un ideal maximal, es decir, existe $M_y$ ideal maximal en $Z(A)$ tal que

$$ann(y) \subset M_y \subset Z(A).$$

Por lo tanto

$$Z(A) = \cup M_y, \; y \in A.$$

Tenemos entonces que $\forall y \in A$, $M_y$ es maximal entre los anuladores de elementos no nulos de A, luego por el Teorema 1.3, $M_y$ es primo maximal de A.

Denotemos

$$P = \{P_i / P_i \text{ es anulador de } a_i,\; i = 1,\ldots,n\}.$$

Entonces el submódulo de A $< a_1,\ldots, a_n >$ es finitamente generado por $a_1,\ldots,a_n$, pues si $a_{i+1} \in A$ fuera anulado por $P_{i+1}$,

entonces

$$a_{i+1} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n,\; x_i \in R,$$

de donde

$$P_1 \cap \ldots \cap P_n \subset P_{n+1}.$$

Esto implica que algún $P_i (i=1,\ldots,n)$ debe estar contenido en $P_{n+1}$ contradiciendo la maximalitud de $P_i (i=1,\ldots,n)$. Esto prueba que existe un número finito de primos maximales $P_i$ de A. Finalmente, si I es ideal en R, entonces $I \subset Z(A)$, y por las condiciones de cadena resulta que $I \subset P_i$, para $i = 1,\ldots,n$. ■

**Teorema 1.16. Sean R un anillo conmutativo, $J_1,\ldots,J_n$ un número finito de ideales en R y S un subanillo de R contenido en $J_1 \cup \ldots \cup J_n$. Supongamos que al menos n-2 de los $J_i$ son primos. Entonces S está contenido en algún $J_i$.**

**Prueba**.- Haremos una prueba inductiva sobre n. Para k = 1,...,n, supongamos que

$$S \subset J_i \cup \ldots \cup \hat{J}_k \cup \ldots \cup J_n,$$

donde $\hat{J}_k$ significa que $J_k$ es omitido. Entonces la hipótesis de que a lo más dos de los $J_i$ no son primos se mantiene y aún más es reforzada.

Sea

$$x_k \in S,\ x_k \notin J_1 \cup \ldots \cup \hat{J}_k \cup \ldots \cup J_n.$$

Entonces $x_k$ debe estar en $J_k$, desde que está en S, pero no pertenece a ninguno de los $J_i$ restantes.

Si n = 1, entonces $S \subset J_1$, y el enunciado del teorema es cierto en este caso.

Supongamos que el enunciado es cierto para n = h. Probaremos que también es cierto para n = h + 1. En efecto supongamos que

$$y \in S \subset J_1 \cup \ldots \cup J_k \cup \ldots \cup J_h \cup J_{h+1}$$

y además

$$y \notin J_1 \cup \ldots \cup \hat{J}_k \cup \ldots \cup J_h \cup J_{h+1},$$

entonces

$$y \notin (J_1 \cup \ldots \cup \hat{J}_k \cup \ldots \cup J_h) \cup J_{h+1}$$

luego : $y \notin (J_1 \cup \ldots \cup \hat{J}_k \cup \ldots \cup J_h)$, o $y \notin J_{h+1}$

Por hipótesis inductiva tenemos entonces que $S \subset J_k$ o $y \notin J_{k+1}$. Por tanto, $S \subset J_k$. En consecuencia, el resultado también es cierto para n = h+1.

Finalmente, por inducción se tiene que S está contenido en algún $J_i$. ■

**Teorema 1.17. Sea R anillo Noetheriano Conmutativo, A un R-módulo finitamente generado $\neq 0$, y S un subanillo contenido en Z(A). Entonces existe un único elemento $a \neq 0$ en A tal que $Sa = 0$.**

**Prueba.** Consecuencia de los Teoremas 1.15 y 1.16. ■

**Teorema 1.18. Sean R un anillo Noetheriano, A un R-módulo finitamente generado y x un elemento en el radical de R pero no en Z(A). Sea I un ideal en R contenido en Z(A). Entonces: $(I,x) \subset Z(A/xA)$.**

**Prueba**. Como x anula A/xA, entonces $x \in Z(A/xA)$. Debemos establecer que $I \subset Z(A/xA)$. Sea S el submódulo de A anulado por I. Por el Teorema 1.17, $S \neq 0$.

Si $S \not\subset xA$, probamos todo, pues la imagen de S en A/xA será diferente de cero y será anulado por I. Supongamos al contrario que $S \subset xA$. Entonces cualquier $s \in S$ es de la forma $s = xa$, $a \in A$. Entonces $Ixa = Is = 0$. Desde que $x \notin Z(A)$, esto implica $Ia = 0$, $a \in S$. Por tanto $S = xS$. Pero entonces $S = 0$ por el lema de Nakayama (Teorema 1.14), lo cual es una contradicción.

Finalmente, desde que $x \in Z(A/xA)$ y $I \subset Z(A/xA)$ entonces $(I,x) \subset Z(A/xA)$. ■

## 1.4 Algunos Teoremas adicionales sobre Teoría de Anillos Conmutativos

A continuación presentamos algunos teoremas de teoría de anillos conmutativos que serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo.

**Teorema 1.19. Existe una correspondencia biyectiva que conserva el orden entre los ideales que contienen a I y los ideales $\overline{B}$ de R/I, dado por $B = \phi^{-1}(\overline{B})$ .**

**Prueba**. [1],pág. 2. ■

**Teorema 1.20. Si P es ideal primo de R, los ideales primos del anillo local $R_P$ están en correspondencia biyectiva con los ideales primos de R contenidos en P.**

**Prueba**. [1],pág. 48. ■

**Teorema 1.21. Sean I , J ideales en un anillo R, A un R-módulo y denotemos B = A/IA. Entonces B/JB es isomorfo a A/(I + J)A.**

**Prueba**. Consideramos las proyecciones naturales $p_1$ y $p_2$

$$A \xrightarrow{p_1} B \xrightarrow{p_2} B/JB$$

y denotemos $h = p_2 \circ p_1$. Entonces

$$\begin{aligned} \ker(h) &= \ker(p_2 \circ p_1) = \{x \in A / (p_2 \circ p_1)(x) = JB\} \\ &= \{x \in A / p_2(x + IA) = JB\} = \{x \in A / x + IA + JB = JB\} \end{aligned}$$

Entonces $IA \subset \ker(h)$ y $JA \subset \ker(h)$, luego

$$(I + J)A \subset \ker(h). \qquad (6)$$

Recíprocamente, si $x \in \ker(h)$, entonces $x + IA + JB = JB$,
por tanto x difiere de un elemento de JA por un elemento de IA,
luego, $x \in (I + J)A$, es decir:

$$\ker(f) \subset (I + J)A. \qquad (7)$$

Por lo tanto, de (6) y (7) tenemos: $\ker(h) = (I + J)A$.
Finalmente, como $h = p_2 \circ p_1$ es sobreyectiva, entonces

$$\mathrm{Im}(h) = B/JB.$$

En consecuencia $A/\ker(h) = A/(I + J)A \cong B/JB$. ■

**Teorema 1.22. Sean $P_1,\ldots,P_n$ ideales primos en un anillo conmutativo R, I un ideal en R, y $x \in R$ tal que $(x , I) \not\subset P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Entonces existe $i \in I$ tal que $x + i \notin P_1 \cup \ldots \cup P_n$.**

**Prueba**. En primer lugar observamos que podemos suponer que ningún par de los $P_i$ son comparables, pues de existir algún $P_k$ contenido en otro, este puede ser descartado sin cambiar el problema. Supongamos entonces que x esta en $P_1,\ldots,P_r$ pero no está en ninguno de los $P_{r+1}, \ldots, P_n$. (los casos extremos $r = 0$ y $r = n$ son admitidos; si $r = 0$, $i = 0$ y si $r = n$ la siguiente prueba es válida con la simplificación que y puede ser tomado como 1).
Entonces $I \not\subset P_1 \cup \ldots \cup P_r$, pues de otro modo

$$(x,I) \subset P_1 \cup \ldots \cup P_r \subset P_1 \cup \ldots \cup P_r \cup \ldots \cup P_n,$$

que es contrario a la hipótesis. Existe, entonces un elemento $i_0 \in I$, que no pertenece a ninguno de los $P_1,\ldots,P_r$. A continuación seleccionamos

$$y \in P_{r+1} \cap \ldots \cap P_n \text{ pero } y \notin P_1 \cup \ldots \cup P_r.$$

Tal selección tal es posible, pues de otro modo

$$P_{r+1} \cap \ldots \cap P_n \subset P_1 \cup \ldots \cup P_r \,,$$

de donde, por el Teorema 1.16

$P_{r+1} \cap \ldots \cap P_n \subset P_j$ para algún $j(1 \leq j \leq r)$, y $P_k \subset P_j( r+1 \leq k \leq n)$ para algún k,
lo cual es una contradicción. Por lo tanto el elemento $i = yi_0$ será el elemento buscado. ■

**Teorema 1.23. Sea R un anillo conmutativo, S un subanillo de R e I un ideal de R contenido en S. Supongamos que $I \neq S$ y que**

$$S - I \subset P_1 \cup \ldots \cup P_n$$

**donde $P_1,\ldots,P_n$ son ideales primos en R. Entonces $S \subset P_i$, para algún i.**

**Prueba.** Por hipótesis tenemos que

$$S \subset I \cup P_1 \cup \dots \cup P_n.$$

Se satisfacen entonces las hipótesis del Teorema 1.16. En consecuencia S está contenido en algún $P_i$. ■

**Definición 1.7.** Se llama **dimensión del anillo R**, y se denota **dim(R)**, al supremo de las longitudes de cadenas de ideales primos de R.

**Observaciones**:

1. Equivalentemente, la dimensión de un anillo R es el supremo de todos los rangos de ideales maximales.
2. Algunas veces a la dimensión de un anillo R se llama dimensión de Krull si no existe peligro de confusión con otras dimensiones.

**Ejemplos:**

1. Un anillo R es 0-dimensional si todos sus ideales primos son maximales.
2. Un dominio entero es 1-dimensional si todos los ideales primos no nulos son maximales.

**Observaciones:**

1) Una serie de composición para un R-módulo A es una cadena

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n = 0$$

de submódulos que comienzan en A y terminan en 0, tal que $A_i/A_{i+1}$ es irreducible (es decir no tiene submódulos propios).

2) El teorema de Jordan Holder ([3], pag. 105), establece lo siguiente: si el R-módulo A tiene una serie de composición, entonces cualquier cadena de submódulos de A puede

ser refinada hasta una serie de composición, y cualquier par de series de composición tiene la misma longitud.

A continuación presentamos una definición que será de gran importancia para los siguientes capítulos.

**Definición 1.8.** Se dice que R-módulo A tiene **longitud finita**, sí cualquier par de series de composición de A tiene la misma longitud.

**Teorema 1.24. Sea R un anillo conmutativo. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:**

**a) R es Noetheriano y 0-dimensional,**

**b) Cualquier R-módulo finitamente generado tiene longitud finita,**

**c) R como un R-módulo tiene longitud finita**

**Prueba** .**[6] , pag.59.** ■

**Teorema 1.25. Sea R anillo conmutativo satisfaciendo la condición de cadena ascendente sobre ideales radicales, y sea I un ideal en R. Entonces existe un número finito de ideales primos minimales sobre I.**

**Prueba.** [6],pág. 59. ■

**Teorema 1.26. Sean u,y elementos no nulos en un dominio entero. Entonces:**

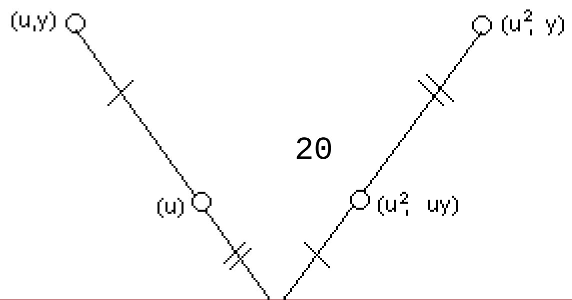
**a)** $(u,y)/(u) \cong (u^2,uy)/(u^2)$

**b) Si suponemos además que** $tu^2 \in (y)$ **implica** $tu \in (y)$**, entonces**

$$(u) / (u^2) \cong (u^2,y) / (u^2,uy)$$

**Prueba.**[6],pag. 105. ■

**Observación:** Como consecuencia de los Teoremas 1.19 y 1.26 se tiene que el R-módulo $(u,y)/(u^2)$ y su submódulo $(u^2,y)/(u^2)$ son piezas isomórficas como se ilustra en la figura.



## 1.5 Módulos Proyectivos y Dimensión Proyectiva

**Definición 1.9**: **Un R-módulo X es proyectivo**, si para cada homomorfismo $f : X \to B$ y cada epimorfismo $g : A \to B$, existe un homomorfismo $h : X \to A$, satisfaciendo $goh = f$.

**Teorema 1.27**. Cada R-módulo libre es proyectivo.

**Prueba.**[4], pag. 77. ■

**Teorema 1.28.** Cada sumando directo de un R-módulo proyectivo es proyectivo.

**Prueba.**[4], pag. 78. ■

**Teorema 1.29.** La suma directa de R-módulos proyectivos es proyectivo.

**Prueba.**[4] pag. 79. ■

**Definición 1.10**: Por una **resolución proyectiva del R-módulo X**, entendemos una sucesión exacta

$$C: \ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

de R-módulos y homomorfismos , que satisfacen las tres condiciones siguientes:

i) $C_{-1} = X$,

ii) $C_n = 0$ para cada $n < -1$,

iii) $C_n$ es R-módulo proyectivo para cada $n \geq 0$.

En particular, si $C_n$ es R-módulo libre para cada $n \geq 0$, entonces la sucesión C se llama **resolución libre del R-módulo X.**

**Teorema 1.30.** Cada R-módulo X tiene una resolución libre y una resolución proyectiva.

**Prueba.**[4], pag. 125 y 129. ■

**Definición 1.11.** Sea $m \in Z$, $m \geq 1$. Se dice que un R-módulo A tiene **dimensión proyectiva sobre R**(o dimensión homológica sobre R) $\leq m$ si existe una resolución proyectiva C de A satisfaciendo $C_n = 0$ para cada $n>m$. Si no existe un m tal se dice que A tiene **dimensión proyectiva** $\infty$; de otro modo, el menor entero m tal se llama **dimensión proyectiva (Sobre R) del R-módulo A** y se denota $\mathbf{dp_R A}$ o simplemente **dpA** cuando no existe ambigüedad.

**Ejemplos:**

1) Desde que el R-módulo Cero 0 tiene una resolución proyectiva C con $C_n = 0$ para cada n, tenemos $dp_R(0) = -1$.
2) Sea $A \neq 0$ R-módulo proyectivo. Desde que A es proyectivo obtenemos una resolución proyectiva

$$C: \ldots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

de X tal que

$$C_n = \begin{cases} X \ , & \text{si } n = -1 \ \text{ o } \ n = 0 \\ 0 \ , & \text{si } n \neq -1 \ \text{ y } \ n \neq 0 \end{cases}$$

y

$$\partial_n = \begin{cases} i \ , & \text{si } n = 0 \\ 0 \ , & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

donde i denota el homomorfismo $i: A \to A$. Por otro lado, desde que $A \neq 0$, no existe resolución proyectiva D de A con $D_0=0$. En consecuencia tenemos $dim_R A = 0$.

3. $dp_R\, A = 1$ si y solo si A no es proyectivo pero puede ser expresado como B/C con B y C proyectivos.

**Observación:** Tomaremos el punto de vista según el cual los módulos proyectivos son los más simples y estudiaremos otros módulos en términos de estos.

**Teorema 1.31. Sea R un anillo Noetheriano izquierdo, x un elemento central en el radical de Jacobson de R, sea R* = R/(x). Sea A un R-módulo finitamente generado. Supongamos que x no es divisor de cero sobre R y A. Entonces: $dp_{R^*}\, A/xA = dp_R\, A$ .**

**Prueba.** [6], pág. 178. ■

**Teorema 1.32. Sea R un anillo Noetheriano, A un R-módulo con resolución libre finita y anulador I. Entonces I = 0 o I contiene un elemento que no es divisor de cero.**
**En particular, si el ideal J en R es un R-módulo con una resolución libre finita, entonces J = 0 o J contiene un elemento que no es divisor de cero.**

**Prueba.** [6], pág. 141. ■

CAPITULO 2

# R-SUCESIONES SOBRE UN R-MODULO

En este capítulo desarrollaremos las propiedades básicas de las R-sucesiones que nos permitirán demostrar los teoremas sin mixtura (Teoremas 2.11 y 2.14) que establecen las primeras condiciones para que un ideal sea generado por una R-sucesión.

## 2.1 R-Sucesiones

**Definición 2.1**. Sea R un anillo conmutativo y A un R-módulo. Se dice que una sucesión ordenada de elementos $x_1,\ldots,x_n$ **de R es una R-sucesión sobre A** si

a) $(x_1,\ldots,x_n)A \neq A$,

b) Para $i = 1,\ldots,n$, $x_i \notin Z(A/(x_1,\ldots,x_{i-1})A)$.

**Observaciones:**

a. La suposición (a) garantiza dos cosas : en primer lugar, garantiza que los módulos $A, A/x_1A,\ldots,A/(x_1,\ldots,x_{n-1})A$ son todos diferentes de cero, y en segundo lugar, establece que el módulo $A/(x_1,\ldots,x_n)A$ es diferente de cero, lo cual asegura que será necesario trabajar con divisores de cero.

b. La suposición (b) dice que $x_1$ no es divisor de cero sobre A, $x_2$ no es divisor de cero sobre $A/x_1A,\ldots$, $x_n$ no es divisor de cero sobre $A/(x_1,\ldots,x_{n-1})A$.

c. Si A = R diremos que la sucesión $x_1,\ldots,x_n$ **es una R-sucesión**. La definición puede ser reestablecida en la siguiente forma: $x_1$ no es unidad ni divisor de cero en R, la imagen de $x_2$ no es unidad ni divisor de cero en el anillo $R/(x_1)$, la imagen de $x_3$ no es unidad ni divisor de cero en el anillo $R/(x_1,x_2)$, etc.

**Teorema 2.1. Sea i un entero menor que n. Sean A un R-módulo y $x_1,\ldots,x_n$ elementos en R. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes**

**(a) $x_1,\ldots,x_n$ es R-sucesión sobre A,**

**(b) $x_1,\ldots,x_i$ es R-sucesión sobre A y $x_{i+1},\ldots,x_n$ es R-sucesión sobre $A/(x_1,\ldots,x_i)A$.**

**Prueba**. Aplicando el Teorema 1.21 con I = $(x_1,...,x_i)$ y reemplazando J sucesivamente por $(x_{i+1}),(x_{i+1}, x_{i+2}),...$ ■

**Teorema 2.2. Sea x, $y \in R$ una R-sucesión sobre el R-módulo A. Entonces $x \notin Z(A/yA)$.**

**Prueba**.- Haremos una prueba indirecta. Si $x \in Z(A/yA)$, entonces existe $t \in A$ tal que su imagen $t^* \in A/yA$, $t^* \neq 0^*$, y $xt^* = 0^*$. Entonces $xt \in yA$, es decir, $xt = yu$, $u \in A$. Como x,y es una R-sucesión sobre A, entonces $x \notin Z(A)$ y $y \notin Z(A/xA)$. Desde que $y \notin Z(A/xA)$ y $xt = yu \in xA$, entonces $u \in xA$, es decir $u = xu_1, u_1 \in A$. Como $x \notin Z(A)$, podemos entonces cancelar x en la ecuación $xt = xyu_1$, obteniendo $t = yu_1$, $u_1 \in A$, luego $t^* = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \notin Z(A/yA)$. ■

**Observación:** Si x,y es R-sucesión, entonces $x \notin Z(A/yA)$, pero no puede concluirse que y,x es una R-sucesión, pues la condición $y \notin Z(A)$ falla. Si asumimos que $y \notin Z(A)$ entonces y,x es una R-sucesión sobre A, y es posible realizar el intercambio de x y y.

**Teorema 2.3. Sea x,y una R-sucesión sobre A. Entonces y, x es una R-sucesión si y solo si $y \notin Z(A)$.**

**Prueba($\Rightarrow$).-** Como x,y es una R-sucesión, si y,x es una R-sucesión entonces por definición y el Teorema 2.2 tenemos lo siguiente: $x \notin Z(A)$, $y \notin Z(A/xA)$, $y \notin Z(A)$ y $x \notin Z(A/yA)$. En particular $y \notin Z(A)$.
($\Leftarrow$) Por hipótesis $y \notin Z(A)$. Además x,y es una R-sucesión, luego por el Teorema 2.2, $x \notin Z(A/yA)$. Por lo tanto y,x es una R-sucesión. ■

En el siguiente teorema generalizamos el Teorema 2.2 a R-sucesiones más grandes.

**Teorema 2.4. Sea $x_1,...,x_n$ una R-sucesión sobre A. Entonces la sucesión obtenida intercambiando $x_i$ y $x_{i+1}$ es una R-sucesión si y solo sí $x_{i+1} \notin Z(A/(x_1,...,x_{i-1})A)$.**

**Prueba**. Consecuencia de los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3. ■

En los próximos teoremas probaremos que con suposiciones Noetherianas y radicales el intercambio puede ser realizado.

**Teorema 2.5. Sea R anillo Noetheriano, A R-módulo finitamente generado y x,y elementos en el radical de Jacobson de R formando una R-sucesión sobre A. Entonces y,x es también una R-sucesión sobre A.**

**Prueba.** Sea x,y elementos en el radical de Jacobson de R formando una R-sucesión sobre A. Por el Teorema 2.2 $x \notin Z(A/yA)$, luego es suficiente probar que $y \notin Z(A)$. En efecto:
Sea S el subconjunto de A anulado por y, es decir

$$S = \{ a \in A / ya = 0 \}$$

Si $a_1, a_2 \in S$, entonces $ya_1 = 0$, $ya_2 = 0$ se sigue entonces $ya_1 + ya_2 = y(a_1 + a_2) = 0$, luego $a_1 + a_2 \in S$. Si $a \in S$, entonces $ya = 0$, luego $-ya = 0$, por tanto $-a \in S$. En consecuencia (S,+) es un subgrupo aditivo del grupo aditivo (A,+).
Por otro lado si $a \in S$, y $m \in R$, entonces $m(ya) = y(ma) = 0$. Luego $ma \in S$ y S es cerrado respecto a la multiplicación escalar. Por lo tanto S es submódulo de A.

Probaremos que $S = 0$. En efecto, sea $s \in S$, entonces $s \in A$, y $ys = 0$. Desde que $y \notin Z(A/xA)$, entonces $s \in xA$, es decir $s = xa$, $a \in A$, en consecuencia $s \in xS$, es decir $S \subset xS$.

Por otro lado si $u \in xS$, entonces $u = xs, s \in S$, por tanto $yu = yxs = ys_1 = 0$, en consecuencia $u \in S$, es decir $xS \subset S$. Además $S \subset xS \subset S$, luego $S = xS$. Ahora bien, si x es un elemento arbitrario del radical de R, tenemos lo siguiente:R anillo, S R-módulo finitamente generado, y $S = xS$, de donde se sigue que se satisfacen las hipótesis del Lema de Nakayama (Teorema 1.14), por lo tanto $S = 0$.

Finalmente probaremos que $y \notin Z(A)$. Haremos una prueba indirecta. Supongamos que $y \in Z(A)$, entonces existe $z \in A$, $z \neq 0$ tal que $yz = 0$. Por tanto $z \in S$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $y \notin Z(A)$. ■

El próximo teorema es una generalización del Teorema 2.5 teniendo en cuenta que cualquier permutación de n objetos pueden ser logrados por intercambios sucesivos de elementos cercanos.

**Teorema 2.6. Sea R anillo Noetheriano, A un R-módulo finitamente generado y $x_1,\ldots,x_n$ elementos en el radical de Jacobson de R formando una R-sucesión sobre A. Entonces cualquier permutación de las $x_i$ es también una R-sucesión sobre A.**

**Prueba**.- Consecuencia de los Teoremas 2.2, 2.4 y 2.5 ■

**Observación:** Una inspección a la prueba del Teorema 2.5 muestra que no es necesario asumir que $x_n$ esté en el radical, es suficiente conocer esto para los n-1 elementos restantes.

**Teorema 2.7. Sea R anillo Noetheriano, A un R-módulo y $x_1,\ldots,x_n$ una R-sucesión sobre A, entonces los ideales**

$$(x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

**forman una cadena propiamente ascendente.**

**Prueba.** Haremos una prueba indirecta. Supongamos que

$$(x_1,\ldots,x_{i-1}) = (x_1,\ldots,x_i), \text{ para algún } 1\leq i \leq n.$$

Entonces $x_i$ es una combinación lineal de $x_1,\ldots,x_{i-1}$ de modo que $x_iA \subset (x_1,\ldots,x_{i-1})A$. Esto muestra que $x_i$ anula al módulo $A/(x_1,\ldots,x_{i-1})A$, lo cual es una contradicción puesto que $x_i$ no es divisor de cero de $A/(x_1,\ldots,x_{i-1})A$. ■

El Teorema 2.7 muestra que si R es anillo Noetheriano y A es un R-módulo $\neq 0$, entonces existe una R-sucesión maximal sobre A. En el siguiente teorema se establece que dos R-sucesiones maximales cualesquiera tienen la misma longitud, es decir que existe una cota superior para sus longitudes.

**Teorema 2.8. Sea R un anillo Noetheriano, I un ideal en R y A un R-Módulo finitamente generado. Supongamos que IA≠A. Entonces: Dos R-sucesiones maximales cualesquiera sobre A contenidas en I tienen la misma longitud.**

**Prueba**. Supongamos que $x_i,y_i \in I$, $i = 1,\ldots,n$; $x_1,\ldots,x_n$ es una R-sucesión maximal sobre A, y $y_1,\ldots,y_n$ es una R-sucesión sobre A. Probaremos que $y_1,\ldots,y_n$ también es maximal. Haremos esto por inducción sobre n.

Para el caso $n = 1$ tenemos lo siguiente: $x_1$ y $y_1$ son dos R-sucesiones sobre A. Además: $x_1$, $y_1$, no son divisores de cero sobre A y $x_1$ es R-sucesión maximal sobre A. Entonces todos los elementos de I son divisores de cero sobre $A/x_1A$ pues si existe $t \in I$ que no es divisor de cero sobre $A/x_1A$, entonces la sucesión $x_1$, t sería una R-sucesión sobre A, pues $(x_1,t)A \neq A$ debido a la hipótesis $IA \neq A$. Nuestro trabajo consiste en probar que I consiste de divisores de cero sobre $A/y_1A$. La información vital es proporcionada por el Teorema 1.17, el cual nos dice que existe un único elemento diferente de cero u* de $A/x_1A$ que es anulado por I. Reestableciendo esto en A, tenemos: $u \in A$ pero $u \notin x_1A$ tal que $Iu \subset x_1A$. En particular, $y_1u \in x_1A$, es decir $y_1u = x_1v$, $v \in A$.

Afirmación: $v \notin y_1A$ y $Iv \subset y_1A$. Haremos la prueba en dos partes.

Para la primera parte, utilizaremos una prueba indirecta. Si $v \in y_1A$ entonces $v = y_1w$, $w \in A$, luego $y_1u = x_1y_1w$. Entonces, el factor $y_1$ puede ser cancelado, produciendo $u = x_1w$, $w \in A$, lo cual es una contradicción.

Para la segunda parte tenemos $x_1Iv = y_1Iu \subset x_1y_1A$. En esta inclusión el factor $x_1$ puede ser cancelado, produciendo $Iv \subset y_1A$. Si v* denota la imagen de v en $A/y_1A$, entonces $v \neq 0$ y $Iv^* = 0$, como requeríamos.

Por lo tanto I consiste de divisores de cero sobre $A/y_1A$. En consecuencia $y_1$ forma una R-sucesión maximal sobre A.

Para el caso general supongamos que el enunciado del Teorema es cierto para n = k. Probaremos que también es cierto para n = k+1. Supongamos que $x_i, y_i \in I$, i = 1,..., k+1; $x_1,..., x_{k+1}$ es una R-sucesión maximal sobre A, y $y_1,...,y_{k+1}$ es una R-sucesión sobre A. Probaremos que $y_1,...,y_{k+1}$ es también maximal.

Denotemos:

$$B_i = A/(x_1,...,x_{i-1})A;\ C_i = A/(y_1,...,y_{i-1})A \text{ para } i = 1,...,k+1.$$

Haremos la prueba del caso general en dos etapas: En primer lugar probaremos que existe un elemento que está en I pero no está en $Z(B_i)$ ni en $Z(C_i)$ y en segundo lugar probaremos que $y_1,...,y_k, y_{k+1}$ es una R-sucesión maximal.

Para la primera parte como $x_i \notin Z(B_i)$ y $y_i \notin Z(C_i)$ tenemos que $I \not\subset Z(B_i)$, $I \not\subset Z(C_i)$ para todo i. De esto podemos deducir la existencia de un elemento z que esta en I pero no en $Z(B_i)$ ni en $Z(C_i)$. Una forma de ver esto es formando la unión de los conjuntos $Z(B_i)$, $Z(C_i)$. Por el Teorema 1.15 resulta que $Z(B_i) \cup Z(C_i)$ es una unión finita de ideales primos, y el Teorema 1.16 proporciona el elemento z deseado.

Para la segunda parte observamos que el elemento z no es divisor de cero sobre $B_{k+1}$, mientras $x_{k+1}$ forma una R-sucesión maximal sobre $B_{k+1}$. Por el caso n = 1, z es también R-sucesión maximal sobre $B_{k+1}$. Ahora el hecho de que z no sea elemento de ninguno de los $Z(B_k)$, $Z(B_{k-1})$,...,$Z(B_1)$, junto con el Teorema 2.4, nos permite desplazar z paso a paso delante de los $x_i$ hasta llegar a la conclusión que $z, x_1,...,x_k$ es R-sucesión sobre A. Por hipótesis esta es una R-sucesión maximal sobre A. Exactamente de la misma manera, tenemos que $z, y_1,...,y_k$ es R-sucesión sobre A pero aún no conocemos si es maximal.

Para probar la maximalitud pasamos al módulo A/zA sobre el cual tenemos dos R-sucesiones de longitud k: $x_1,...,x_k$ y $y_1,...,y_k$ ; la primera de las cuales conocemos que es maximal. Por hipótesis inductiva deducimos que $y_1,...,y_k$ es una R-sucesión maximal sobre A/zA, lo cual a su vez implica que $y_1,...,y_k$ , z es una R-sucesión maximal sobre A. Por otra aplicación del caso n = 1 obtenemos que $y_1,..., y_k, y_{k+1}$ es una R-sucesión maximal sobre A. Por lo tanto el enunciado es cierto para n = k + 1. Esto concluye la prueba. ■

## 2.2 Grado de un Ideal Sobre un Módulo

**Definición 2.2.** Sea R un anillo Noetheriano, I un ideal en R y A un R-módulo finitamente generado satisfaciendo IA≠A. Se llama **grado de I sobre A** y se denota **G(I,A)** a la longitud común de todas las R-sucesiones maximales en I sobre A.

**Observaciones:**

**1.** Si A=R llamamos a G(I,R) simplemente el **grado de I** y lo denotamos **G(I)**. Notamos que está definido para cualquier ideal I diferente de R y que G(I) es la longitud máxima de una R-sucesión maximal sobre I.

**2**. Si R es un anillo local con ideal maximal M, y A es cualquier R módulo finitamente generado no nulo, **llamaremos a G(M,A)** simplemente **el grado de A y lo escribimos G(A)**. Note que G(A) es definido desde que MA≠A por el lema de Nakayama.

**3.** Existe una posible ambigüedad en la notación G(I) desde que podría significar G(I,R) ó G(M,I); esto debería sin embargo ser siempre claro dentro del contexto en el cual se trabaja.

**4.** Cuando R es anillo local se escribe **G(R)** por G(M,R) y se llama **el grado del anillo**. Haremos esto sistemáticamente, pero evitaremos usar el símbolo G(R) si R no es local.

**5.** En la terminología original de Auslander y Buchsbaum, la designación era "codimensión" de I sobre A. La terminología, "grado" es debida a Rees. La Escuela Francesa introdujo "profondeur" que es traducida como altura.

**Teorema 2.9. Sea I un ideal en un anillo Noetheriano R, A un R-módulo finitamente generado tal que IA ≠ A. Entonces I puede ser extendido a un ideal primo P satisfaciendo G(P,A) = G(I,A).**

**Prueba**. Sea $x_1,\ldots,x_n$ una R-sucesión máximal en I sobre A, y denotemos $J = (x_1,\ldots,x_n)$. Entonces $I \subset Z(A/JA)$. Es posible entonces extender I hasta un ideal primo maximal P del módulo A/JA. Entonces P contiene al anulador de A y del Teorema 1.13 se sigue que PA≠A. Por lo tanto G(P,A) es definido, y evidentemente, es igual a k. ■

## 2.3 Teoremas sin Mixtura Generalizados

Procedemos a presentar dos teoremas a los cuales llamaremos "Teoremas sin mixtura generalizados". Estos Teoremas establecen las primeras condiciones para que un ideal sea generado por una R-sucesión sobre un R-módulo A. El primero (Teorema 2.11) es válido globalmente, y el segundo (Teorema 2.14) que solo se verifica localmente pero es ligeramente más fuerte.

**Teorema 2.10. Sea R un dominio Noetheriano entonces la expresión $R = \cap R_p$ con P recorriendo sobre los ideales primos maximales de ideales principales distintos de cero es localmente finita.**

**Prueba.** Sea $x \in R$ que $x \neq 0$ y no unidad arbitrario. Probaremos que x está sólo en un número finito de los P en cuestión. Sea P primo maximal arbitrario de ideales primos principales $\neq 0$ del dominio Noetheriano R. Existe, entonces $y \in R$ que no es cero ni unidad tal que $P = (y)$; luego y es una R-sucesión maximal en P. Entonces, por el Teorema 2.8 $(n = 1)$ x es también una R-sucesión maximal de P, es decir, $P \subset Z(R/(x))$. Desde que el mismo argumento es aplicable a cualquier ideal primo que contenga a P, se sigue que P es primo maximal de (x). Tenemos lo siguiente: R-anillo Noetheriano y (x) R-módulo finitamente generado, satisfaciéndose las hipótesis del Teorema 1.15. Por lo tanto, existe un número finito de primos maximales de (x). Esto prueba el Teorema. ■

Para el siguiente teorema presentamos una prueba hecha por I. Kaplansky en [6], pág. 91.

**Teorema 2.11. Sea R anillo Noetheriano, A un R-módulo finitamente generado, J un ideal en R que puede ser generado por k elementos. Supongamos $JA \neq A$. Entonces:**

**a) $G(J,A) \leq k$,**

**b) Si $G(J,A) = k$, entonces J puede ser generado por k elementos formando una R-sucesión sobre A.**

**Prueba**.- Denotemos $J = (x_1,.., x_k)$. Hallaremos elementos.

$$u_1 = x_1 + (\text{combinación lineal de } x_2,..,x_k),$$
$$u_2 = x_2 + (\text{combinación lineal de } x_3,..,x_k),...$$

constituyendo un cambio de base triangular, tal que las $u_i$ forman una R-sucesión sobre A. Lograremos esto aplicando recursivamente el Teorema 1.22.

En primer lugar supongamos lo siguiente $x = x_1$, $I_1 = (x_2,...,x_k)$, $Z(A) = P_1\cup...\cup P_n$ y $J_1 = (x_1, I_1) = (x_1,x_2,...,x_k) \not\subset Z(A)$. Por el Teorema 1.22 existe $i_1 \in I$ tal que

$$u_1 = x_1 + i_1 = x_1 + (\text{Combinación lineal de } x_2,...,x_k) ,$$

tenemos entonces que $u_1 \notin Z(A)$, luego es R-sucesión sobre A, y si $G(J,A) = 1$ hemos terminado pues $u_1$ agota J.

En segundo lugar supongamos lo siguiente: $x = x_2$, $I_2 = (x_3,...,x_k)$, $P_2\cup...\cup P_n = Z(A/u_1A)$ y $J_2 = (x_2,I_2) = (x_2,x_3,...x_k)$. Probaremos que $J_1 = (x_1,...,x_k) \not\subset Z(A/u_1A)$ implica que $(x_2,...,x_k)\not\subset Z(A/u_1A)$.

Supongamos lo contrario, esto es, supongamos que $(x_2,...,x_k) \subset Z(A/u_1A)$.

Si $j\in(x_1,...,x_k)$, entonces

$$\begin{aligned} j &= a_1x_1 +...+ a_kx_k = a_1(u_1 - i_1) + a_2x_2 +...+ a_kx_k, \quad (a_i \in R) \\ &= a_1u_1 - a_1i_1 + a_2x_2 +...+ a_kx_k, \ (i_1 \text{ combinación lineal de } x_2,...,x_k) \\ &= a_1u_1 - a_1(a'_2x_2 +...+ a'_kx_k) + a_2x_2 +... + a_kx_k \\ &= a_1u_1 + b_2x_2 + ... + b_kx_k, \ \ b_i\in R \end{aligned}$$

Ahora bien, desde que $a_1u_1$ anula $A/u_1A$ y $b_2x_2+...+b_kx_k$ es divisor de cero sobre $A/u_1A$ entonces $j\in Z(A/u_1A)$, luego $J \subset Z(A/u_1A)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(x_2,...,x_k) \subset Z(A/u_1A)$.

Tenemos: $x = x_2$, $I_2 = (x_3,...,x_k)$, $Z(A/u_1A) = P_2 \cup ...\cup P_k$, $J_2 = (x_2,I_2)$ y $J_2 \not\subset Z(A/u_1A)$, luego por el Teorema 1.22, existe $i_2\in I_2$ tal que $u_2 = x_2 + i_2$, $i_2\in I_2 = (x_3 ,..., x_k)$.

Tenemos entonces lo siguiente: $u_1\notin Z(A)$, $u_2\notin Z(A/u_1A)$. Por lo tanto $u_1, u_2$ es una R-sucesión sobre A y si $G(J,A) = 2$ resulta que $u_1, u_2$ agotan J.

Continuando recursivamente este procedimiento tantas veces como sea posible el proceso termina en uno de los dos casos: $G(J,A) < k$, o $G(J,A) = k$. Ahora bien, si $G(J,A) = k$, los elementos $u_1,\ldots,u_k$ agotan J, lo cual completa la prueba. ∎

**Observación**.- Este teorema nos proporciona las primeras condiciones para que un ideal sea generado por una R-sucesión.

**Teorema 2.12. Sea R un anillo Noetheriano, I un ideal en R, $x\in R$, y $J = (I,x)$. Sea A un R-módulo finitamente generado. Supongamos que J está contenido en el radical de R. Entonces: $G(J,A) \leq 1 + G(I,A)$**

**Prueba**. Supongamos que $G(I,A) = m$ y sea $x_1,\ldots,x_m$ una R-sucesión maximal en I sobre A. Sea $A' = A/(x_1,\ldots,x_m)A$. Después de un cambio de notación podemos por lo tanto, asumir $G(I,A') = 0$ y debemos probar que $G(J,A') \leq 1$. Si $J = (I,x) \subset Z(A')$ no hay nada por probar. Supongamos que $J = (I,x) \not\subset Z(A') = P_1\cup\ldots\cup P_n$. Entonces J contiene un elemento que no es divisor de cero sobre A'. Probaremos que $G(J,A') = 1$. Como se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.22, existe $i\in I$, tal que $x+i\notin Z(A')$. Si $x' = x + i$, entonces $x'\notin Z(A')$. Además $J \subset Z(A/x'A)$ por el Teorema 1.18. Por lo tanto $G(J,A) = 1$. ∎

Mediante una ligera variante de la prueba del Teorema 2.12, podemos probar el siguiente resultado que será de gran utilidad.

**Teorema 2.13. Sean R un anillo local con ideal maximal M, I ideal en R, $I \subset M$, y A R-módulo finitamente generado $\neq 0$. Supongamos $G(I,A) < G(M,A)$. Entonces: existe un ideal primo $P \supset I$ tal que $G(P,A) = 1 + G(I,A)$**

**Prueba**. Sea $x_1,\ldots,x_k$ una R-sucesión maximal sobre A contenida en I, y denotemos $J = (x_1,..,x_k)$. Como $G(M,A) > k$, existe $y\in M$, tal que $y\notin Z(A/JA)$. Entonces $G((I,y), A) \geq k+1$. Por el Teorema 2.11 o el Teorema 2.12, $G((I,y), A) = k+1$. Como se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.9 podemos extender $(I,y)$ al ideal primo $P \supset I$ deseado. ∎

A continuación presentamos el teorema sin mixtura local que había sido anunciado. Este teorema proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un ideal sea generado por una R-sucesión.

**Teorema 2.14. Sean R un anillo Noetheriano, I = $(x_1,...,x_n)$ donde las $x_i$ están en el radical de R, y A un R-módulo finitamente generado $\neq 0$. Entonces G(I,A) = n si y solo si los elementos $x_1,...,x_n$ constituyen una R-sucesión sobre A.**

**Prueba**. ($\Rightarrow$) Probaremos esta parte por inducción sobre n.
n=1. Si I = $(x_1)$, $x_1$ en radical de R, A R-módulo finitamente generado y G(I,A) =1, entonces $x_1 \notin Z(A)$, luego $x_1$ es una R-sucesión sobre A. En consecuencia el enunciado es cierto en este caso.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para n = k. Probaremos que también es válido para n = k+1. Sea I = $(x_1,...,x_k,x_{k+1})$, y supongamos que G(I,A) = k+1 y J = $(x_1,...,x_k)$. Entonces por el Teorema 2.12, G(J,A) = k. Por hipótesis inductiva tenemos que $x_1,...,x_k$ es R-sucesión sobre A. Resta ver que $x_{k+1} \notin Z(A/JA)$. Supongamos lo contrario $x_{k+1} \in Z(A/JA)$. Se tiene entonces I = $(J,x_{k+1}) \subset Z(A/JA)$, luego $x_1,...,x_k$ es una R-sucesión maximal en I sobre A lo cual contradice a G(I,A) = k+1. Por lo tanto $x_{k+1} \notin Z(A/JA)$; lo cual prueba que $x_1,...,x_{k+1}$ es R-sucesión sobre A. Esto prueba que el resultado es cierto entonces para n = k+1. Por el principio de inducción matemática el enunciado es cierto $\forall n>0$.

($\Leftarrow$) Sea $x_1,...,x_n$ R-sucesión sobre A y I = $(x_1,...,x_n)$, entonces $x_1,...,x_n$ es maximal sobre A, luego G(I,A) = n . ■

**Observaciones:**
1.- El Teorema 2.14 establece condiciones radicales sobre los $x_i$ y sobre G(I,A) para que un ideal I sea generado por una R-sucesión.
2.- El paso del Teorema 2.11 al Teorema 2.14 requiere que los elementos $x_i$ estén en el radical del anillo R.
3.- Nos referiremos a los Teoremas 2.11 y 2.14 como a **"Teoremas sin mixtura generalizados"**.

Sea I un ideal en un anillo Noetheriano R que tiene cierto grado, digamos k, sean $P_1,...,P_n$ los primos maximales de I, esto es, $Z(R/I) = P_1 \cup ... \cup P_n$ donde los $P_i$ son maximales dentro de Z(R/I). Entonces cualquier ideal conteniendo I tiene grado $\geq$ k; esto es en particular cierto para los $P_i$. Esto nos permite presentar la siguiente definición.

**Definición 2.3.** Sea I un ideal en un anillo Noetheriano. Se dice que I **tiene grado sin mixtura** si los grados de todos los primos maximales $P_1,...,P_n$ de I coinciden con el G(I).

A continuación presentamos un resultado que nos permitirá establecer otras condiciones para que un ideal sea generado por una R-sucesión.

**Teorema 2.15. Sea I un ideal en el anillo Noetheriano R que tiene grado k y es generado por k elementos. Entonces I tiene grado sin mixtura.**

**Prueba.-** Supongamos que A = R e I es un ideal generado por una R-sucesión $x_1,...,x_k$. Entonces para un primo maximal $P_i$ que contiene a I tenemos que $x_1,...,x_k$ es una R-sucesión maximal en $P_i$. Por lo tanto el Teorema 2.11 establece que $G(P_i) = k$, e I tiene grado sin mixtura. ■

## 2.4 Rango de un ideal.

En esta sección procedemos a construir un puente entre las versiones de rango y grado sin mixtura de grado y rango. La primera cosa que necesita ser hecha es definir el rango de un ideal general (ya que se había definido solo para ideales primos).

**Definición 2.4.** Sea I ideal en un anillo conmutativo de R. **El rango de I** es el mínimo de {ran(P)}, donde P recorre los ideales primos que contienen I.

El primer resultado relacionando grado y rango (Teorema 2.17) es bastante fácil, por el hecho de que es válido sin condiciones de cadena. A continuación presentamos un teorema que será necesario.

**Teorema 2.16. Sea P ideal primo en un anillo conmutativo R, y $x \in P$ un elemento que no está en ningún ideal primo minimal de R. Denotemos $R^*=R/(x)$, $P^* = P/(x)$ y supongamos que el rango de $P^*$ en $R^*$ igual a k. Entonces ran (P) en R es por lo menos k+1.**

**Prueba.** Supongamos que ran $P^*$ en $R^*$ es k, entonces existe una cadena de ideales primos en $R^*$ de longitud k

$$P^* = P_0^* \supset P_1^* \supset \dots \supset P_k^*$$

Si $P_i$ es imagen inversa de $P_i^*$ pasamos a la siguiente cadena en R:

$$P = P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_k$$

descendente de P de longitud k. Ahora bien, desde que x no está en ningún ideal primo maximal, la segunda cadena puede ser extendida al menos en 1, luego ran P en R es por lo menos k + 1. ■

**Teorema 2.17. Si un ideal I en un anillo R contiene una R-sucesión de longitud n, entonces $\mathrm{ran}(I) \geq n$.**

**Prueba**.- Supongamos que el ideal I contiene una R-sucesión de longitud n $x_1,\dots,x_n$. Como todo ideal puede ser extendido a un ideal primo maximal, podemos suponer que I es primo maximal y de acuerdo a esto cambiamos la notación a P y tenemos $R^* = R/(x)$ y $P^* = P/(x)$. Como por hipótesis P tiene una R-sucesión de longitud n, entonces tomando las imágenes de $x_2,\dots,x_n$ se tiene una R-sucesión de longitud n-1. Se satisface entonces las hipótesis del Teorema 2.16, luego $\mathrm{ran}(P) \geq n$.

CAPITULO 3

# EL TEOREMA DEL IDEAL PRINCIPAL DE KRULL

En este capítulo presentamos el teorema del ideal principal de Krull y dos de sus generalizaciones. Este es uno de los teoremas más importantes de la teoría de los anillos Noetherianos que nos permitirá establecer relaciones entre el rango de un ideal y el número de elementos que lo generan.

**Teorema 3.1. (Teorema del Ideal principal de Krull) Sea R anillo Noetheriano, $x \in R$, que no es unidad y P un ideal primo minimal sobre (x). Entonces el $ran(P) \leq 1$.**

**Prueba**. Probaremos el teorema por el absurdo. Supongamos que $ran(P) \geq 2$. Entonces existe una cadena de ideales primos de longitud 2 como $P \supset P_1 \supset P_2$ ( ver figura 1 ).

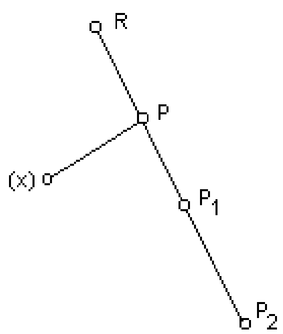



**Figura 1**

En primer lugar, pasando al dominio entero $R/P_2$ tenemos, por el teorema 1.19, que el rango y la Noetherianidad son preservados. Además $P/P_2$, la imagen de P, es todavía minimal sobre $(x)/P_2$, la imagen de (x), y tiene rango $\geq 2$. Localizando el dominio entero $R/P_2$ respecto al ideal primo imagen $P/P_2$ obtenemos $(R/P_2)_{P/P_2}$ y nuevamente, por el Teorema 1.20, tenemos que la Noetherianidad, el rango y la minimalitud también son preservados.

En segundo lugar para $y \in Q$, $y \neq 0$, definamos

$$I_k = \{t \in R / \ tx^k \in (y),\ k \in Z^+\}.$$

Afirmamos que para todo $k \in Z^+$, $I_k$ es ideal en R. En efecto, si $t_1, t_2 \in I_k$ entonces

$$t_1x^k + t_2x^k = (t_1 + t_2)x^k \in (y).$$

Además, si $t \in I_k$ entonces $tx^k \in (y)$, luego $-tx^k \in (y)$. Por lo tanto $I_k$ es subgrupo aditivo. Además $RI_K \subset I_K$, pues si $a \in R$ y $t \in I_k$ entonces $atx^k \in (y)$. Esto prueba que $\forall k \in Z^+$, $I_k$ es ideal en R.

En tercer lugar, como R es Noetheriano, por hipótesis, la cadena de ideales

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots$$

es estacionaria, digamos en $I_n$.
Además se satisface que $tu^2 \in (y)$ implica $tu \in (y)$. Para probar esto: si $tx^{2n} \in (y)$, entonces

$$t\,x^n x^n = x^n t\,x^n \in (y),$$

luego $tx^n \in (y)$. Por tanto, si $u = x^n$, entonces $tu^2 \in (y)$ implica $tu \in (y)$.

En cuarto lugar, $T=R/(u^2)$ tiene exactamente un ideal primo. Además, como consecuencia del Teorema 1.24 cualquier T-módulo finitamente generado tiene longitud finita. En particular podemos aplicar esto al módulo $(u,y)/(u^2)$, el cual es un R-módulo anulado por $(u^2)$, y puede ser considerado como un T-módulo.

Por la observación al Teorema 1.26 tenemos que $(u,y)/(u^2)$ y $(u^2,y)/(u^2)$, tienen la misma dimensión puesto que son isomorfos. Esto es posible solamente si $(u,y) = (u^2,y)$, es decir si $u \in (u^2,y)$, luego $u = cu^2 + dy$.

Finalmente, como por hipótesis u no es unidad en el anillo local R, entonces 1-cu es unidad; luego $u \in (y) \subset Q$. Pero M es minimal sobre (x) y por lo tanto también es minimal sobre (u) = $(x^n)$. Esta contradicción prueba el teorema. ■

**Teorema 3.2. (Primera generalización del Teorema del Ideal Principal). Sea R anillo Noetheriano, $I \neq R$ ideal en R generado por n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sea P ideal primo en R minimal sobre I. Entonces ran(P) $\leq$ n.**

**Prueba**. Haremos la prueba usando inducción. Como P es primo, por hipótesis, podemos localizar pasando a $R_p$. Supongamos entonces que R es anillo local y que P es su único ideal primo maximal.

Si n = 1, tenemos el Teorema 3.1 y el enunciado es válido en este caso.

Supongamos ahora que el resultado se cumple para $m \in Z^+$. Probaremos que el resultado también se cumple para m + 1. En efecto. Supongamos que R es anillo Noetheriano, $I \neq R$ ideal generado por m + 1 elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$, y P ideal primo en R minimal sobre I. Probaremos que ran(P) $\leq$ m + 1.
Haremos una prueba indirecta. Supongamos que ran(P) = m + 2. Entonces, por definición, existe una cadena descendente de ideales primos de longitud m + 2

$$P = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_{m+2}$$

Entonces $I \not\subset P_1$ pues $I \subset P_1 \subset P$ es una contradicción con la minimalitud de P sobre I. Además, por construcción no existe ideales primos propiamente contenidos entre $P_1$ y P. Supongamos que $a_1 \notin P_1$. Entonces $P_1 \subset (a_1, P_1)$, por lo tanto P es el único ideal primo que contiene a $(a_1,P_1)$.Como consecuencia del Teorema 1.19 ,en el ideal $R/(a_1,P_1)$, la imagen de P es el único ideal primo.

Como el nilradical de R es el conjunto de todos los elementos nipotentes de R y es a la vez la intersección de los ideales primos, alguna potencia de P está en (a, $P_1$). Entonces existe $\lambda \in Z^+$ tal que $P^\lambda \subset (a_1,P_1)$, además

$$a_i^{\lambda} = c_i a_1 + b_i \; (c_i \in R,\ b_i \in P_1,\ i = 2,\ldots,m+1)$$

Supongamos ahora que $J = (b_2,\ldots,b_{m+1})$. Entonces $J \subset P_1$. Además $ran(P_1) > m+1$, luego, por hipótesis inductiva, existe un ideal primo Q tal que $P_1 \supset Q \supset J$ (ver figura 2)

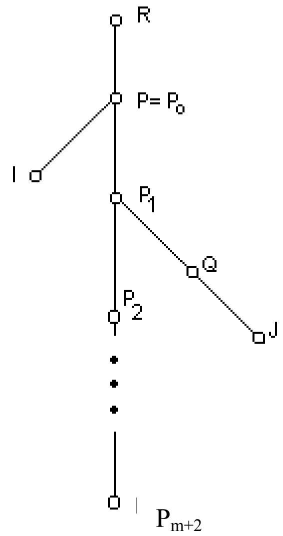



**Figura 2**

Además $(a_1,Q)$ contiene alguna potencia de cada elemento $a_i$ . Se sigue entonces ,por la minimalitud de P que P es el único ideal primo tal que $P \supset (a_1,Q)$.
Finalmente, pasando al anillo cociente R/Q y utilizando * para las imágenes de elementos o ideales tenemos que P* es minimal sobre $(a_1^*)$ obteniendo así una cadena descendente de P* de longitud 2

$$P^* \supset P_1^* \supset 0,$$

Lo cual contradice al Teorema 3.1. Por lo tanto ran(P) es a lo más m + 1, y el resultado también es cierto en este caso. Esto concluye la prueba. ■

**Teorema 3.3. (última generalización del Teorema del ideal principal). Sea R anillo Noetheriano, I ideal generado por n elementos, $I \neq R$ y P un ideal primo tal que $P \supset I$. Supongamos además que ran(P/I) sobre R/I es k. Entonces ran(P) sobre R es a lo más n+k.**

**Prueba.** Haremos la prueba por inducción sobre k.

Si k = 0 tenemos el Teorema 3.2 y en este caso el enunciado del teorema se cumple.

Supongamos que el teorema es válido para $k \in Z^+$. Probaremos que también es válido para k+1. En efecto, si k+1>0, entonces P no es minimal sobre I. Podemos suponer que

$$P_1 ,\ P_2 ,\dots,\ P_s$$

denotan todos los ideales minimales sobre I. Por el Teorema 1.25 tenemos que el número de estos es finito. Además se tiene que $P \subset P_i$, $\forall i:1,2,\dots,s$. Entonces, por el Teorema 1.16 existe $y \in P$ tal que

$$y \notin P_1 \cup \dots \cup P_s.$$

Supongamos que J = (I,y). Entonces $\text{ran}((P/J),R/J) \leq k$, pues la cadena de ideales primos de P a J terminan en un ideal primo que aún no es minimal sobre I. Por hipótesis inductiva tenemos entonces, la siguiente relación para el ideal P en R

$$\text{ran}(P) \leq k + (n + 1) = (k + 1) + n$$

y el enunciado es cierto para k+1. Luego, la afirmación es también válida para k+1. Esto concluye la prueba. ∎

El Teorema 3.3 es de gran importancia en el caso n = 1 y como será usado más adelante lo enunciamos como un resultado aparte.

**Teorema 3.4. Sea P ideal primo en un anillo Noetheriano R y x $\in$P. Supongamos además que ran(P) = k, en R. Entonces ran(P/(x)),en R/(x) es k o k-1. Además, si x no está en ningún ideal primo minimal de R(y si en particular x no es divisor de cero de R) entonces ran((P/(x)),en R/(x) = k-1.**

Estos teoremas establecen importantes relaciones entre un ideal I generado por n elementos y su rango que serán muy útiles en el capítulo siguiente.

CAPITULO 4

# ANILLOS LOCALES REGULARES y R-SUCESIONES

## 4.1 ν-Dimensión

En este capítulo buscamos condiciones que aseguren que un ideal es generado por una R-sucesión examinando conjuntos minimales de generadores para el ideal máximal M de un anillo local R.

**Teorema 4.1. Sean R un anillo local con ideal maximal M, A un R-módulo finitamente generado y $a_1,...,a_r \in A$. Entonces $a_1,..,a_r$ generan A si y solo sí sus imágenes generan A/MA.**

**Prueba.**($\Rightarrow$) Supongamos que $a_1,\ldots,a_r$ generan A y sea $\bar{a} \in A/MA$ arbitrario, entonces

$$\bar{a} = a + MA, a \in A,$$

Pero

$$a = \sum_{i=1}^{r} r_i a_i\ ,\ r_i \in R,\ a_i \in A;$$

luego

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{r} r_i a_i + MA\ .$$

En consecuencia se tiene que las imágenes de $a_1,...,a_r$ generan A/MA.

($\Leftarrow$) Supongamos que las imágenes de $a_1,...,a_r$ generan A/MA y denotemos $B = (a_1,...,a_r)$. Por hipótesis

$$B + MA = A,$$

luego

$$M(A/B) = A/B.$$

Por el lema de Nakayama (Teorema 1.14), $A/B = 0$, luego $A = B$ y en consecuencia $a_1,\dots,a_r$ generan A. ■

**Observación:** A/MA es un R-módulo anulado por M, en otras palabras A/MA es un espacio vectorial sobre el campo R/M. Se sigue entonces que los elementos de un conjunto minimal de generadores para A corresponden a los elementos de una base del espacio vectorial A/MA.

**Definición 4.1.** Sea R un anillo local con ideal maximal M y A un R-módulo finitamente generado. Se llama **base minimal para A** a un conjunto minimal de generadores para A. Si A = M el número de elementos de una base minimal se llamará la **ν-dimensión de R** y se denota por **ν(R)**.

**Observación**: ν(R) es la dimensión de $M/M^2$ como un espacio vectorial sobre el campo R/M.

**Teorema 4.2. Sea R un anillo local con ideal maximal M. Sea x cualquier elemento en $M - M^2$, y $R^* = R/(x)$. Entonces $\nu(R^*) = \nu(R) - 1$.**

**Prueba**. Supongamos que $y_1^*, \dots, y_r^*$ es una base minimal de $M^* = M/(x)$ el ideal maximal en R* correspondiente al ideal maximal M. Para $1 \le i \le r$, sea $y_i \in M$ cuya imagen correspondiente sea $y_i^*$.

Afirmamos que $x, y_1,\dots,y_r$ forma una base minimal de M. En efecto, por el Teorema 4.1 ellos generan M. Para probar la minimalitud consideremos la combinación lineal

$$dx + c_1y_1 + \dots + c_ry_r \qquad (1)$$

cuyos términos están en $M^2$, y probaremos que cada coeficiente esta en M. Pasando a R* tenemos

$$c_1^*y_1^* + \dots + c_r^*y_r^* \in (M^*)^2 \qquad (2)$$

de donde se sigue que $c_i^* \in M^*$, por la minimalitud de $y_1^*,...,y_r^*$. Por lo tanto $c_i \in M$. Esto nos da $dx \in M^2$, lo cual implica que $d \in M$, pues $x \notin M^2$.Esto prueba la minimalitud y concluye la prueba. ■

## 4.1 Anillos Locales Regulares y R-Sucesiones

Por el Teorema 3.2 tenemos $\dim(R) \leq \nu(R)$. Esto amerita la siguiente definición.

**Definición 4.2.** Se dice que un anillo R es **local regular** si es anillo local y $\dim(R) = \nu(R)$.

Procedemos a hora a establecer algunas relaciones entre anillos locales regulares y R-sucesiones.

**Teorema 4.3. Sea R un anillo local con ideal maximal M. Supongamos que M es generado por una R-sucesión. Entonces R es local regular. Además, la longitud de la R-sucesión es igual al valor común de dim(R) y ν(R).**

**Prueba.-** Por el Teorema 2.17 tenemos

$$k = G(R) \leq \mathrm{ran}(M). \qquad (3)$$

Por el Teorema 3.2 obtenemos

$$\mathrm{ran}(M) \leq \nu(R). \qquad (4)$$

y como $\nu(R)$ es el mínimo número de elementos que puede generar M,

$$\nu(R) \leq k. \qquad (5)$$

De (3),(4) y (5) resulta

$$k = G(R) \leq \mathrm{ran}(M) \leq \nu(R) \leq k.$$

Finalmente, de la cadena de desigualdades, se sigue que R es anillo local regular y la longitud de la R-sucesión es igual al valor común de dim(R) y ν(R). ■

El recíproco del Teorema 4.3 es también válido y será demostrado más adelante. En los dos teoremas siguientes se investigara el comportamiento de la regularidad al pasar de R a R/(x).

**Teorema 4.4. Sea R un anillo local regular con ideal maximal M y x un elemento en M-$M^2$. Entonces R* = R/(x) es local regular.**

**Prueba**. Por el Teorema 4.2,

$$\nu(R^*) = \nu(R) - 1.$$

Por el Teorema 3.4

$$\dim(R^*) = \dim(R) \text{ o } \dim(R^*) - 1.$$

Pero por el Teorema 3.2, debemos tener $\dim(R^*) \leq \nu(R^*)$,
por lo tanto

$$\dim(R^*) = \dim(R^*) - 1 = \nu(R^*)$$ ■

**Teorema 4.5. Sea R anillo local con ideal maximal M y x∈M - $M^2$, esto es no está en ningún ideal primo minimal de R. Supongamos que R* = R/(x) es local regular. Entonces R es local regular.**

**Prueba**. Por el Teorema 4.2,

$$\nu(R^*) = \nu(R) - 1.$$

Por el Teorema 3.4

$$\dim(R^*) = \dim(R) - 1.$$

Por lo tanto R es local regular. ■

Procedemos ahora a probar el recíproco del Teorema 4.3.

**Teorema 4.6. Sea R un anillo local regular n-dimensional con ideal maximal M. Entonces M puede ser generado por una R-sucesión de longitud n consistiendo de elementos que no están en $M^2$.**

**Prueba**. Haremos una prueba inductiva sobre la dimensión del anillo.
Para n = 1, dim(R) = ν(R) = 1 es el número de elementos de un conjunto minimal de generadores de M, luego existe $x \in M$ tal que (x) = M. Como $M^2$ anula a $M/M^2$, entonces x $\in M-M^2$ y no es unidad ni divisor de cero. Por lo tanto M es generado por una R-sucesión de longitud 1 y la afirmación es válida en este caso.

Supongamos ahora que el enunciado del teorema se cumple para n = k. Probaremos que el enunciado también es válido para n = k+1.En efecto, supongamos que R es anillo local regular k+1 dimensional con ideal maximal M cuya base minimal es $x_1,\ldots, x_k, x \in M-M^2$ y $R^*=R/(x)$. Por el teorema 4.4 R* es local regular, y dim(R*) = dim(R) -1 = k. Se satisface entonces la hipótesis inductiva, luego $M^* = (x_1^* ,x_2^* ,\ldots, x_k^*)$ donde $x_i^* \notin M^*- M^{*2}$, siendo $x_1^* ,x_2^* ,\ldots, x_k^*$ una R*-sucesión.

De aquí, por el Teorema 4.2 se sigue que

$$\nu(R) = \nu(R^*) + 1$$

y además

$$M = ( x_1, x_2, \ldots, x_k , x ).$$

entonces $x \notin Z(M/M^2)$ y por el teorema 2.1 resulta que $x_1 , x_2 , \ldots , x_k , x$ es una R-sucesión de longitud n cuyos elementos no están en $M-M^2$ y la afirmación también es válida en este caso. Esto concluye la prueba. ■

## CAPITULO 5

# UN TEOREMA DE VASCONCELOS SOBRE IDEALES GENERADOS POR R-SUCESIONES

El objetivo principal de este capítulo es demostrar un teorema debido a W. Vasconcelos (Teorema 5.6) dado en [12] el cual, junto a los Teorema 5.7 y 4.3 nos permitirá establecer que el ideal maximal M de un anillo local regular Noetheriano R es generado por una R-sucesión si y solo si M tiene dimensión proyectiva finita.

Para establecer los resultado principales tendremos en mente convenir que los anillos considerados en este capítulo serán locales Noetherianos conmutativos con elemento identidad y M es su ideal máximal.

**Teorema 5.1. Sean R un anillo local, A un R-módulo y $x \in R$ que no es unidad, ni divisor de cero con respecto a R y A. Entonces**

$$\mathbf{dp_{R/(x)}\, A/xA \;=\; dp_R A.}$$

**Prueba.** Supongamos que $X = \{X_i\}$:

$$\ldots \to X_1 \xrightarrow{f} X_0 \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva minimal del R-módulo A.
tensorizando con R/(x) obtenemos el complejo $X^* = \{X_i^*\}$:

$$\ldots \to X_1 \otimes R/(x) \xrightarrow{f \otimes i} X_0 \otimes R/(x) \xrightarrow{g \otimes i} A \otimes R/(x) \to 0$$

donde $i : R/(x) \to R/(x)$ es el endomorfismo identidad.
Probaremos que $X^* = \{X_i^*\}$ es una resolución proyectiva minimal de $A/xA \otimes R/(x)$.
En efecto, el grupo de homología de $X^* = \{X_i^*\}$ es dado por

$$H_i = tor_i(A,R/(x)).$$

En primer lugar tenemos que $H_i = 0$ para $i > 1$ puesto que $dp_R\ R/(x) = 1$.
En segundo lugar tenemos que $H_1 = 0$ pues además x no es divisor de cero con respecto a A y $H_0 = A/xA$.

En consecuencia X* es una resolución proyectiva minimal sobre $A/xA \otimes R/(x)$. Por lo tanto X y X* tienen la misma dimensión, esto es

$$dp_{R/(x)}\ A/xA = dp_R\ A. \blacksquare$$

**Teorema 5.2. Sean R anillo, A un R-módulo finitamente generado y**

$$\mathbf{0 \to X_r \to \ldots \to X_0 \to A \to 0}$$

**una sucesión exacta de R-módulos y homomorfismos de R-módulos donde los $X_i$ son R-módulos libres finitamente generados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:**

**(i) El anulador de A es $\neq 0$,**

**(ii) El anulador de A contiene algún elemento que no es divisor de cero en A.**

**Prueba:[2], Proposición 6.2.** $\blacksquare$

**Observaciones:**

1) Sabemos que todo R-módulo libre finitamente generado es proyectivo (Teorema 1.27) y como consecuencia del Teorema 5.2 tenemos que un ideal de un anillo local de dimensión proyectiva finita tiene algún elemento que no es divisor de cero. Usaremos esta observación varias veces.
2) Se asume de aquí en adelante que tenemos ideales I, J en R, tal que

$$I \supset J \supset I^2 \text{ con } I/J \cong (R/I)^r.$$

Esto significa que existe un conjunto minimal de elementos $x_1,\ldots,x_r$ en I los cuales, junto con J, generan I y tal que cualquier relación del tipo $\sum r_i . x_i \in J$ implica $r_i \in I$ para $i \leq r$. Nos referiremos a esta propiedad de los $x_i$ como su "independencia".

3) En 2) observamos que cualquier elemento en I - ( MI + J ) (es decir, los elementos elegibles para formar un conjunto minimal de generadores del módulo I/J) puede ser tomado como uno de los $x_i$.

**Teorema 5.3. Si I, J son ideales en R tales que $I \supset J \supset I^2$, $I/J \cong (R/I)^r$, $x_1 \in I$ que no es unidad ni divisor de cero y $R^* = R/(x_1)$, entonces**

$$\mathbf{I^* / J^* \cong ( R^* / I^* )^{r-1}.}$$

**Prueba.** Como por hipótesis los ideales I, J en R satisfacen

$$I \supset J \supset I^2 \quad y \quad I/J \cong (R/I)^r,$$

entonces existe un conjunto minimal de elementos $x_1, \ldots, x_r \in I$ tal que

$((x_1,\ldots,x_r),J) = I$ y además $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in J$ implica $r_i \in I$ para $i \leq r$.

Sean $R^* = R/(x_1)$, $I^* = I/(x_1)$ y $J^* = J/(x_1)$ imágenes de R, I y J respectivamente.

Entonces $I^*/J^*$ es un $R^*/I^*$ módulo. Además $x_2^*,\ldots, x_r^* \in R^* = R/(x_1)$ son imágenes de $x_2,\ldots,x_r \in R$. En consecuencia

$$( ( x_2^* ,\ldots, x_n^* ) , J^* ) = I^*.$$

Además la relación $\sum_{i=2}^{r} r_i^* x_i^* \in J^*$ significa que existen elementos $r_i \in R$ cuyas imágenes son $r_i^*$ tal que

$$\sum_{i=2}^{r} r_i x_i \in J + (x_1)\text{, es decir } \sum_{i=2}^{r} r_i x_i = a + r_1 x_1\text{, } a \in J,\ r_1 \in R.$$

Utilizando la hipótesis

$$I \supset J \supset I^2 \text{ con } I/J = (R/I)^r$$

se sigue que $r_i \in I$ para $i \leq r$ de donde se tiene que $r_i^* \in I^*$ para $2 \leq i \leq r$. Por lo tanto

$$I^* / J^* \cong ( R^* / J^* )^{r-1}. \quad \blacksquare$$

**Teorema 5.4. Si se satisfacen las hipótesis del Teorema 5.3, entonces:**

$$\mathbf{I / x_1 I = (x_1) / x_1 I \oplus I / (x_1).}$$

**Prueba.** Supongamos que

$$S = x_1 I + ( x_2 , \ldots , x_r ) + J.$$

Entonces

$$S + (x_1) = I.$$

Además, por la "independencia" de los $x_i$,

$$S \cap (x_1) = x_1 I.$$

Esto establece que la inclusión

$$( x_1 ) / x_1 I \rightarrow I / x_1 I$$

parte, de donde se sigue que

$$I / x_1 I = ( x_1 ) / x_1 I \oplus I / (x_1). \quad \blacksquare$$

**Teorema 5.5. Supongamos que el ideal I satisface las hipótesis de los Teoremas 5.3 y 5.4 y no consiste en su totalidad de divisores de cero. Entonces podemos elegir $x_1$ como un elemento que no es divisor de cero en I.**

**Prueba.** Debemos demostrar que no todos los divisores de cero en I están en **M**I + J. Haremos una prueba indirecta. Supongamos que todos los divisores de cero de I están en **M**I + J, entonces

$$I - (\mathbf{M} I + J) \subset P_1 \cup \ldots \cup P_s$$

donde los $P_i$ son ideales primos asociados a cero.
Seleccionemos

$$y \in I - (\mathbf{M}I + J) \text{ y sea } x \in \mathbf{M}I + J \text{ arbitrario.}$$

Entonces

$$y - x^i \in I - (\mathbf{M}I + J) \text{ para algún entero positivo i.}$$

Si tomamos suficientes potencias, dos de ellas caerán en el mismo primo, por ejemplo $P_1$

$$y - x^i \in P_1 \quad \text{y} \quad y - x^j \in P_1 \text{ con } i > j.$$

Entonces

$$(y - x^i - y + x^j) = x^j (1 - x^{i-j}) \in P_1,$$

luego $x \in P_1$. Esto significa que todo I está en la unión de los $P_i$, contradiciendo nuestra suposición. Por lo tanto no todos los divisores de cero en I están en MI + J. En consecuencia $x_1$ puede ser elegido como un elemento que no es un divisor de cero de I. ■

Procedemos ahora a presentar un teorema de W. Vasconcelos sobre ideales generados por R-Sucesiones anunciado al inicio de este capítulo. Este llega como consecuencia natural de los Teoremas 5.1 al 5.5.

**Teorema 5.6. Sea I un ideal de dimensión proyectiva finita. Supongamos que J es un ideal satisfaciendo**

$$\mathbf{I \supset J \supset I^2 \text{ y tal que } I / J \cong ( R / I )^r.}$$

**Entonces I = ( $x_1$ , ... , $x_r$ ) + J, donde las $x_i$ forman una R-sucesión. Si, en particular, J ⊂ MI entonces I es generado por una R-sucesión.**

**Prueba**. Haremos la prueba en dos partes. En primer lugar probaremos que I = ($x_1$,...,$x_n$) + J donde los $x_i$ forman una R-sucesión y en segundo lugar probaremos que si J ⊂ MI, entonces I es generado por una R-sucesión.

Para la primera parte, por hipótesis tenemos lo siguiente: $I \supset J \supset I^2$ y $I/J \cong (R/I)^r$, entonces existe un conjunto de elementos $x_1,...,x_r \in I$ los cuales junto con J generan I, es decir (($x_1$,...,$x_r$),J) =I. Para demostrar que $x_1$,...,$x_r$ es una R-sucesión usaremos inducción sobre r.

Sea r =1. Como I es ideal de un anillo local con dimensión proyectiva finita, por el Teorema 5.2, I contiene algún elemento que no es divisor de cero de I, luego podemos elegir $x_1$ como en el Teorema 5.5. Como por hipótesis $dp_R$ I es finito, por los Teoremas 1.32 y 5.1 $dp_{R/(x_1)} I/xI$ es finito y por el Teorema 5.4 tenemos

$$I/x_1I = (x_1)/x_1I \oplus I/(x_1),$$

luego $I/x_1I$ tiene a $I/(x_1)$ como sumando directo, por tanto $I/(x_1)$ tiene dimensión proyectiva finita relativo a $R/(x_1)$.

En consecuencia tenemos que $x_1I \neq I$ y $x_1 \notin Z(I)$, lo cual prueba que $x_1$ es R-sucesión sobre I y la afirmación es cierta en el caso r = 1.

Sea r = 2. Como $I/x_1I$ es ideal en un anillo local con dimensión proyectiva finita, por los Teoremas 1.32 y 5.2, $I/x_1I$ contiene algún elemento que no es divisor de cero, luego podremos elegir $x_2$, como en el Teorema 5.5, de modo que:

$$x_2 \in I/x_1 I,\ \ x_2 \notin Z\ (I/x_1 I).$$

Por el Teorema 5.1 tenemos

$$dp_{R/(x_1,x_2)} \quad I/(x_1,x_2) = d_{R/(x_1)} I/x_1 I \ .$$

Como $dp_{R/(x_1)} I/x_1 I$ es finito, entonces por el Teorema 5.4

$$I/(x_1,x_2)I = (x_1,x_2)/(x_1,x_2)I \oplus I/(x_1,x_2),$$

luego $I/(x_1,x_2)I$ tiene a $I/(x_1,x_2)$ como sumando directo, luego:

$$dp_{R/(x1,x2)} \ I/(x_1,x_2) < \infty.$$

Tenemos entonces lo siguiente: $x_1 \notin Z(I)$ y $x_2 \notin Z(I/(x_1)I)$, lo cual prueba que $x_1$, $x_2$ es R sucesión sobre I y el enunciado también es válido en este caso.

Para el caso general supongamos que el enunciado del teorema es verdadero para r = 1, 2, …, k-1, k. Probaremos que el enunciado también es verdadero para r = k + 1. En efecto, por el Teorema 5.2 tenemos que $I/(x_1,\ldots,x_k)I$ tiene elementos que no son divisores de cero y por el Teorema 5.5 podemos elegir

$$x_{k+1} \in I/(x_1,\ldots,x_k)I \text{ tal que } x_{k+1} \notin Z(I/(x_1,\ldots,x_k)I).$$

Por hipótesis inductiva y por el Teorema 5.1 tenemos

$$dp_{R/(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})} I/(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})I = dp_{R/(x_1,\ldots,x_k)} I/(x_1,\ldots,x_k)I \ .$$

El Teorema 5.4 establece que

$$I/(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})I \quad \text{tiene a} \quad I/(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1})$$

como un sumando directo.

Por lo tanto

$$I/(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$$

tiene dimensión proyectiva finita relativa al módulo $R/(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$.

Tenemos entonces lo siguiente:

$$x_1 \notin Z(I),\ x_2 \notin Z(I/x_1I),\ \dots, x_{k+1} \notin Z\left(I/(x_1,\dots,x_k)I\right),\ (x_1,\dots,x_k)I \neq I\ ,$$

por tanto $x_1,\dots,x_k, x_{k+1}$ es una R-sucesión, y el enunciado es cierto para $r = k+1$.

Por inducción matemática se sigue que $I = (x_1,\dots,x_n) + J$ donde las $x_i$ forman una R-sucesión .

Para la segunda parte tenemos lo siguiente: $I = (x_1,\dots,x_n) + J$ donde las $x_i$ no están en $M^2$ forman una R-sucesión. Además $J \subset MI$, luego I es generado por una R-sucesión. Esto concluye la prueba. ■

**Observación:** El módulo considerado líneas arriba $I/(x_1,\dots,x_r)$ tiene dimensión proyectiva finita sobre $R/(x_1,\dots,x_r)$.

**Teorema 5.7. Un ideal $I \neq 0$ en un anillo local R es generado por una R-sucesión si y solo sí $I/I^2$ es R/I módulo libre y $dp_R(I)$ es finita .**

**Prueba.** ($\Rightarrow$) Haremos esta prueba en dos partes: en primer lugar probaremos que $I/I^2$ es R/I módulo libre y en segundo lugar probaremos que $dp_R I$ es finita.

Para la primera parte probaremos lo siguiente:

i) R anillo local, I ideal en R, $I = (a_1,\dots,a_n)$ donde los elementos $a_1,\dots,a_n \in I$ forman una R-sucesión, entonces las imágenes de $a_1,\dots,a_n$ generan $I/I^2$.

ii) $I/I^2$ es R/I-módulo libre.

Para probar i) supongamos que $\bar{a} \in I/I^2$ arbitrario, entonces

$$\bar{a} = a + I^2,\ a \in I,$$

pero $I = (x_1,\dots,x_n)$, luego

$$a = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i,\ r_i \in R,\ a_i \in I,$$

por lo tanto

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + I^2 .$$

En consecuencia se tiene que las imágenes de $a_1,\dots,a_r$ generan $I/I^2$.

Para probar ii) observamos que $I / I^2$ es un R-módulo anulado por $I^2$, luego $I / I^2$ es espacio vectorial sobre el campo R/I. Además, $S = \{a_1,\dots,a_n\}$ corresponde a los elementos de una base del espacio vectorial $I/I^2$. Esto prueba que el módulo $I/I^2$ tiene una base. Por lo tanto $I/I^2$ es R/I módulo libre.

Para la segunda parte, por la afirmación anterior tenemos que $I/I^2$ es R/I-Módulo libre y como consecuencia del Teorema 1.27 tenemos que $I/I^2$ es R/I módulo proyectivo, luego $dp_{R/I}\ I / I^2$ es finito. De aquí, por el Teorema 1.31 tenemos lo siguiente:

$$dp_{R/I}\ I / I^2 = dp_R\ I .$$

Por lo tanto $dp_R I$ es finito.

($\Leftarrow$) Supongamos que $I/I^2$ es R/I-módulo libre y $dp_R$ I es finita. Probaremos que I es generado por una R-sucesión utilizando inducción sobre el número de elementos de la base del R/I- módulo libre $I/I^2$.

Para n = 1 supongamos que $x_1$ pertenece a I tal que $\{x_1^*\}$ forma una base libre para el R/I – módulo libre $I/I^2$. Como $I \neq 0$, el Teorema 1.32 afirma que I tiene un elemento x que no es divisor de cero, el cual por el Teorema 1.23, puede ser tomado en I-MI. Añadiendo x al conjunto $\{x_1\}$ cuya imagen es $\{x_1^*\}$ tenemos lo siguiente:

$$x,\ x_1 \in I,\ x \notin Z(I),\ x_1 \notin Z(I/x_1I),$$

luego $x, x_1$ es R-sucesión sobre I. además

$$(x\ ,\ x_1) + MI = I,$$

por lo tanto $(x, x_1) = I$. Esto prueba que el enunciado es cierto en este caso.

Para el caso general, supongamos que el enunciado es cierto para $n = k$. Probaremos su validez cuando el $R/I$-módulo $I/I^2$ es generado por $k+1$ elementos.

En primer lugar, supongamos que $I/I^2$ es $R/I$ módulo libre cuya base B tiene $k+1$ elementos, tales como: $x_1^*,\dots,x^*_{k+1.}$ Como $I \neq 0$, por el Teorema 1.32, I tiene un elemento x que no es divisor de cero. Además el Teorema 1.23 establece que este elemento puede ser tomado en I-MI. Añadiendo x al conjunto $\{x_1,\dots,x_{k+1}\}$ cuyas imágenes forman la base libre del R/I -módulo $I/I^2$ obteniendo $\{ x, x_1,\dots,x_{k+1}\}$.

En segundo lugar sea $I^* = I/(x)$, $R^* = R/(x)$, probaremos dos cosas: $I^*/(I^*)^2$ es $R^*/I^*$ módulo libre y $dp_{k^*}(I^*)$ es finito.
Para probar la primera afirmación, desde que $I/I^2$ es R/I-módulo libre, existe una base $B=\{x_1,\dots,x_{k+1}\}$ tal que el diagrama de la figura 1

$$\begin{tikzcd}
\{x_1,\dots,x_{k+1}\} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & I/I^2 \arrow[d, "\exists ! h"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

figura 1

es conmutativo, es decir, $hof = g$. En consecuencia se tiene el diagrama de la figura 2

$$\begin{tikzcd}
\{x_1^*,\dots,x_{k+1}^*\} \arrow[r, "f^*"] \arrow[dr, "g^*"'] & I^*/(I^*)^2 \arrow[d, "\exists ! h^*"] \\
 & X^*
\end{tikzcd}$$

figura 2

en el cual f*, g* y h* son los homomorfismos inducidos por f, g y h respectivamente es también conmutativo, es decir h*of* = g*. Por lo tanto $I^*/(I^*)^2$ es $R^*/I^*$ módulo libre.

Para la segunda afirmación debemos probar que $dp_{R^*}\, I^*$ es finito. Como $dp_R\, I$ es finito por hipótesis, observamos que el Teorema 1.31 afirma que $dp_{R^*}\, I/xI = dp_R(I) < \infty$. Según esto, será suficiente probar que I/(x) es sumando directo de I/xI.

Sea

$$J = ( xI , x_1 ,..., x_{k+1} ).$$

Entonces

$$( x ) + J = (x) + (xI , x_1,..., x_{k+1} ) = I,$$

por lo tanto

$$( x ) + J = I. \qquad (1)$$

Debemos demostrar que $(x) \cap J = xI$.

Si $y \in xI$, entonces $y = xi$, $i \in I$, luego $y \in (x)$.

Además $y \in (xI , x_1, ... , x_{k+1})$,

por lo tanto

$$xI \subset (x) \cap J. \qquad (2)$$

Si $y \in (x) \cap J$ se tiene la ecuación

$$y = ax = b_1x_1 + .... + b_{k+1}x_{k+1} + z \ , a,b;\in R, z \in xI.$$

Entonces

$$ax - b_1x_1 -...- b_{k+1}x_{k+1} \in I^2.$$

Desde que los elementos $x$ , $x_1$, ... , $x_k$ tienen como imágenes a elementos de una base libre del R/I módulo $I/I^2$, entonces $a \in I$, luego $y \in xI$, en consecuencia

$$(x) \cap J \subset xI. \qquad (3)$$

De (2) y (3) se sigue que

$$xI = (x) \cap J. \qquad (4)$$

De (1) y (4) se sigue que $I/(x)$ es sumando directo de $I/xI$. Esto prueba que $dp_{R^*} I^*$ es finito.

Tenemos entonces lo siguiente: $I^*/(I^*)^2$ es $R^*/I^*$ módulo libre y $dp_{R^*} I^*$ finito. Por hipótesis inductiva se sigue que $I^* = (x_1^*, \ldots, x_{k+1}^*)$, donde $x_1^*, \ldots, x_{k+1}^*$ forman una $R^*/I^*$-sucesión sobre $I^*/(I^*)^2$, luego $I = (x, x_1, \ldots, x_{k+1})$ donde $x, x_1, \ldots, x_{k+1}$ es una R-sucesión sobre I y el resultado también es válido en este caso.

Como el teorema es válido para $n = 1$ y la validez para $n = k$ implica la validez para $n = k+1$, por inducción matemática tenemos que I es generado por una R-sucesión. Esto concluye la prueba. ■

**Observaciones:**

1. En el Teorema 5.7 hemos probado que un anillo local de dimensión proyectiva finita es regular, pues si $I = M$ tenemos que $M/M^2$ es libre sobre el campo $R/M$.
2. En consecuencia se tiene la siguiente equivalencia: **El ideal M es generado por una R-sucesión si y solo si M tiene dimensión proyectiva finita,** lo cual por Teorema 4.3 ocurre solamente para **anillos locales regulares**.

# CONCLUSIONES

Del presente trabajo, concluimos lo siguiente:

1. Si R es anillo Noetheriano, A un R-módulo finitamente generado, J un ideal en R que puede ser generado por k elementos tal que $JA \neq A$ y G(J,A) = k, entonces J puede ser generado por k elementos formando una R-sucesión sobre A.

2. Si R es un anillo Noetheriano, I = ($x_1$ ,..., $x_n$), donde las $x_i$ están en el radical de Jacobson de R y A un R-módulo si finitamente generado $\neq 0$, entonces G(I,A) = n si y solo si los elementos $x_1$,..., $x_n$ constituyen una R-sucesión sobre A.

3. Si R es un anillo local regular n-dimensional con ideal maximal M, entonces M puede ser generado por una R-sucesión de longitud n cuyos elementos no están en $M^2$.

4. Sea I un ideal de dimensión proyectiva finita, J un ideal satisfaciendo $I \supset J \supset I^2$ y tal que $I/J \cong (R/I)^r$. Entonces I = ($x_1$ ,..., $x_r$) + J donde las $x_i$ forman una R-sucesión. Si en particular, $J \subset MI$ entonces I es generado por una R-sucesión.

5. Si I es ideal en un anillo local R tal que $d_R I$ es finita, entonces: $I/I^2$ es un R/I módulo libre, si y solo si I puede ser generado por una R-sucesión.

6. Si R es anillo local Noetheriano con ideal maximal M, entonces: El ideal M es generado por una R-sucesión si y sólo si M tiene dimensión proyectiva finita.

# BIBLIOGRAFIA


1. Atiyah H.“Álgebra Conmutativa”. Barcelona, Editorial Reverte S.A.,1978.

2. Auslander, M. And Buchsbaum, D. “Homological dimension in Local rings”. Trans. Amer. Math. Soc. 85(1957), 390-405.

3. Dummit, D. - Foote R., “Abstract Algebra”. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

4. Hu, Sze-Tsen, “Introduction to Homological Algebra”. Holden-Day Inc., San Francisco, 1968.

5. Kaplansky I. “Conmutative Rings”. University of Chicago press, Chicago 1969.

6. Kaplansky I. “Fields and Ring”. University of Chicago press, Chicago 1969.

7. Kaplansky I. “R-sequences and homological dimension”. Nagoya Math. J., 20(1962), 195-199.

8. Levin G. and Vasconcelos W. “Homological dimensions and Macaulay Rings”. Pac. J. of Math. 25 (1968), 315-323.

9. Matsamura H. “Conmutative Algebra”. New York ,W.A. Benjamín, Inc., 1970.

10. Nagata M. “Local Rings”. Interscience Publishers, New York, 1962.

11. Serre J. P. “Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethérian”. Proceedings of the International Symposium,Tokyo-Nikko 1955,Scientific Council of Japon,1956,pp 175-189.

12 Vasconcelos W. “Ideals Generated by R-Sequences”. J. of Alg. 6(1967), Pag. 309-316.