

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSTGRADO



**RENTABILIDAD DE LOS BIENES RAICES RESIDENCIALES EN EL PERU:
¿EXISTE BURBUJA INTRÍNSECA?**

Tesis para optar el grado de Magíster en Economía
que presentan

HÉCTOR ANGEL LOZANO BAZÁN
DILQUER LUNA DURAND

Dirigido por
ELÍAS MINAYA CUBILLAS

San Miguel, 2016

Resumen

Este trabajo busca identificar los determinantes de largo plazo del precio de la vivienda en Lima-Metropolitana, así como testear la existencia de burbuja en el sector vivienda. Con este fin se estimó un SVAR a lo Blanchard y Quah basado en el “Modelo de Fry del sector hipotecario en el largo plazo”; y un “Modelo de Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld”. Un aporte fundamental, en relación a otros trabajos realizados en el Perú y Latinoamérica, es la estimación del modelo SVAR utilizando la serie del índice de costos de terreno y una adecuada especificación de la matriz de choques de largo plazo, con lo cual se obtuvieron estimaciones coherentes y con los signos esperados. Asimismo, se utiliza la serie de alquileres como fundamento del precio de vivienda, la cual permitió estimar el Modelo de Burbuja Intrínseca, cuya característica principal es capturar la sobrereacción del precio a través del impacto no lineal del propio fundamento. De los resultados se concluye que los principales determinantes del precio de vivienda en el largo plazo son: el Producto Bruto Interno real, el índice de costos de construcción y terreno, la tasa de interés real y el Índice General de la Bolsa de Valores de Lima. Del mismo modo, en el caso de la burbuja intrínseca, se encuentra una sobrevaloración importante del 34% a partir del primer trimestre del 2010; además, según las estimaciones de este modelo el período de recuperación de la inversión en vivienda en el Perú sería de aproximadamente 12 años, menor al periodo promedio de recuperación observado de 17 años; lo cual evidencia la sobrevaloración actual del precio. Finalmente, considerando los posibles escenarios futuros de la evolución del precio y sus determinantes, podría decirse que nos encontramos en un escenario de riesgo de burbuja inmobiliaria, cuya explosión dependerá de la evolución del contexto macroeconómico, principalmente de variables que afecten al crédito hipotecario.

Palabras claves: Precio de vivienda, bienes raíces, SVAR, burbuja intrínseca.

Clasificación JEL: C22, C32, G12, R21; R31.

Abstract

This paper seeks to identify the determinants of long-term price of housing in Metropolitan Lima and test the existence of bubble in the housing sector. To this end, it was estimated a SVAR Blanchard and Quah to based on the "Model Fry the mortgage sector in the long run"; and a "Intrinsic Bubble Model Froot and Obsteld". A fundamental contribution, in relation to other work in Peru and Latin America, is the estimation of the model SVAR using the index series of costs of land, and a suitable specification of the matrix of shocks long term, with which were obtained consistent estimates with the expected signs. Also, the series of rentals is used as the fundament of the price of housing, which allowed us to estimate the Intrinsic Bubble Model, whose main feature is to capture the overreaction of the price through the nonlinear impact of the fundament itself. From the results it is concluded that the main determinants of housing prices in the long term are the real gross domestic product, the index of construction costs and land, the real interest rate and the General Index of the Lima Stock Exchange. Similarly, in the case of the intrinsic bubble it is found a significant overvaluation of 34% from the first quarter of 2010; Furthermore, according to this model estimates the payback period of investment in housing in Peru would be approximately 12 years less than the average observed recovery period of 17 years; which shows the current overvaluation of price. Finally, considering the possible future scenarios of price developments and its determinants, we could say that we are in a risk scenario housing bubble, whose explosion will depend on the evolution of the macroeconomic environment, especially variables affecting the mortgage credit.

Keywords: housing price, real estate, SVAR, intrinsic bubble.

JEL classification: C22, C32, G12, R21; R31.

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN.....	7
1. Hechos estilizados del mercado de bienes raíces residenciales	9
1.1. El mercado de vivienda en el Perú	9
1.2. Evolución y análisis de las variables relevantes del mercado de vivienda.....	13
1.3. Burbujas de precios y evidencia empírica internacional	17
1.3.1. Los tipos de burbujas que existen en la teoría	17
1.3.2. Las principales burbujas en el mundo	19
1.3.3. La posible burbuja en el Perú.....	21
2. Revisión de la literatura	22
3. Marco teórico.....	28
3.1. Definición de términos principales.....	28
3.2. Modelo de inversión en vivienda	30
3.2.1. El mercado de vivienda: La oferta.....	30
3.2.2. El mercado de vivienda: La demanda.....	31
3.2.3. El mercado de vivienda en el corto plazo	32
3.2.4. La dinámica del mercado de viviendas	33
3.2.5. El mercado de vivienda en el equilibrio estacionario	34
3.3. Modelo de Fry del sector hipotecario en el largo plazo	35
3.4. Modelo de dividendos descontados para el precio de las acciones	36
3.5. Modelo de inversión q de Tobin.....	37
3.6. Modelo de Burbuja de Intrínseca de Froot y Obsteld	39
3.6.1. La burbuja intrínseca.....	41
4. Hipótesis de la investigación.....	41
5. Estimación del modelo y resultados.....	41
5.1. Metodología	41
5.1.1. Structural VAR de Blanchard Quah	41
5.1.2. Restricciones e Identificación	43
5.1.3. Burbuja intrínseca de Froot y Obsteld	43
5.2. Los datos.....	45
5.2.1. Transformación de las series	46
5.2.2. Estadísticos descriptivos	47

5.2.3.	Estacionalidad	47
5.2.4.	Raíz unitaria	48
5.3.	Resultados	52
5.3.1.	Estimación SVAR Blanchard y Quah	52
5.3.2.	Funciones impulso respuesta del precio y descomposición de varianza.....	54
5.3.3.	Análisis de sobrevaloración del precio del modelo SVAR	56
5.3.4.	Escenarios de crisis ante un choque crediticio	58
5.3.5.	Estimación de la Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld	60
5.3.6.	Análisis de sobrevaloración del precio del modelo de Burbuja Intrínseca ..	62
6.	Conclusiones	63
7.	Recomendaciones.....	64
8.	Agenda pendiente.....	64
	Bibliografía	65
	Anexos.....	68
	Anexo I: Derivación del modelo de Fry del sector hipotecario en el largo plazo	68
	Anexo II: Derivación del Structural VAR de Blanchard Quah.....	71
	Anexo III: Derivación del modelo de Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld	80
	Anexo IV: Datos de Costo de Terreno y Alquiler de Departamentos	87
	Anexo V: Escenarios de tasas de crecimiento aleatorias de las colocaciones netas	88

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro N° 01: Bono del Buen Pagador	11
Cuadro N° 02: Variables del mercado de vivienda	12
Cuadro N° 03: Metodologías de determinantes del precio de vivienda y sobrevaloración ...	25
Cuadro N° 04: Niveles socioeconómicos asociados al sector alto de Lima	45
Cuadro N° 05: Estadísticos descriptivos	47
Cuadro N° 06: Test de Estacionalidad del PBI real	48
Cuadro N° 07: Test de Raíz Unitaria a las series en niveles	49
Cuadro N° 08: Test de Raíz Unitaria a las series en niveles con quiebre estructural	50
Cuadro N° 09: Test de Raíz Unitaria a las series en primeras diferencias	51
Cuadro N° 10: Rezagos Óptimos	52
Cuadro N° 11: Parámetros de largo plazo estimados para el modelo SVAR	54
Cuadro N° 12: Estimación SVAR con choque de crédito	58
Cuadro N° 13: Estimación de la Burbuja Intrínseca	61
Cuadro N° 14: Regresiones de Cointegración de los Precios Reales de la Vivienda y Alquileres Reales	62
Cuadro N° 15: Número de Restricciones del SVAR	73
Cuadro N° 16: Medianas del Costo de Terreno y Alquiler.....	87
Cuadro N° 17: Tasa de crecimiento trimestral (%).....	88

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico N° 01: Oferta vs Venta de Viviendas Nuevas	9
Gráfico N° 02: Evolución de los créditos hipotecarios	10
Gráfico N° 03: Calidad de la cartera hipotecaria del sistema bancario	10
Gráfico N° 04: Colocaciones anuales del Fondo Mivivienda	12
Gráfico N° 05: Precio/m2 de departamentos del Sector alto de Lima	13
Gráfico N° 06: PBI real	14
Gráfico N° 07: Tasa activa promedio en moneda nacional	14
Gráfico N° 08: Inflación	15
Gráfico N° 09: Índice General de la Bolsa de Valores de Lima	15
Gráfico N° 10: Ratio Precio de venta/Alquiler	16
Gráfico N° 11: Alquiler anual	16
Gráfico N° 12: Índice de costo de la construcción	17
Gráfico N° 13: Índice de costo de terreno	17
Gráfico N° 14: Evolución del precio del tulipán en Holanda entre 1636 y 1637	19
Gráfico N° 15: Cotización de la <i>South Sea Company</i>	20
Gráfico N° 16: Crisis Financiera 1929	20
Gráfico N° 17: Los determinantes de la inversión	31
Gráfico N° 18: Preferencias y restricción presupuestal	31
Gráfico N° 19: La oferta de viviendas en el corto plazo	32
Gráfico N° 20: El mercado de viviendas en el corto plazo	33
Gráfico N° 21: La oferta de viviendas en el equilibrio estacionario	34
Gráfico N° 22: La demanda de viviendas en el equilibrio estacionario	35
Gráfico N° 23: Análisis de Estacionalidad del PBI real	48
Gráfico N° 24: Representación gráfica de las series en niveles	48
Gráfico N° 25: Representación gráfica de las series en primeras diferencias	51
Gráfico N° 26: Funciones de impulso respuesta del precio de vivienda	55
Gráfico N° 27: Descomposición de varianza del precio de vivienda	56
Gráfico N° 28: Análisis de sobrevaloración del precio del modelo SVAR	57
Gráfico N° 29: Escenarios de explosión del precio de vivienda ante un choque crediticio ...	59
Gráfico N° 30: Precio vs Alquiler anual	60
Gráfico N° 31: Predicción del Modelo de Froot y Obsteld	63

INTRODUCCIÓN

Entre una de las primeras interrogantes que cualquier inversionista se hace está: ¿cuáles serían las mejores alternativas entre las que podría escoger para invertir?. En este sentido y de acuerdo al contexto económico y al boom inmobiliario de los últimos años surgen nuevas preguntas, ¿Sería el mejor camino invertir en bienes raíces?, ¿Será cierto que se puede obtener un rendimiento elevado destinando los recursos a adquirir propiedades inmobiliarias?, ¿Será un fenómeno estable en el largo plazo, o es que se producen burbujas en los precios de dichos bienes, específicamente en lo que corresponde al sector de vivienda?. Para dar un ejemplo, durante los últimos años en Lima metropolitana, se ha podido ver un sostenido incremento de precios del sector; el mismo Banco Central de Reserva señala, que entre el último trimestre del 2014 y el del 2013 los precios se han incrementado en 16% en soles constantes¹. Al tomar el caso de los alquileres de vivienda, la rentabilidad para el año 2014 alcanzó un valor del 6%², claramente superior a rentabilidades derivadas de otras inversiones alternativas como son los instrumentos financieros. A modo de comparación en el primer trimestre del 2014 el IGBVL obtuvo una rentabilidad de 3,7%, las AFP siguieron el orden con rentabilidades del 3.4%³. De este modo, esto justifica preguntarse si ¿existe de manera implícita una burbuja con esas tasas de retorno? ¿Existirá una sobrevalorización de la vivienda en el mercado?.

En este sentido, esta tesis pretende responder entonces a **la interrogante**: ¿La elevada rentabilidad de los precios de los bienes raíces residenciales en el período 1998 -2015 ha respondido al comportamiento de variables fundamentales tales como el producto real, el igbvl, el índice de costos de vivienda, la tasa de interés real, la tasa de inflación, el precio de la vivienda; o de otro lado, podría explicarse por la presencia de una burbuja en el mercado inmobiliario?, esto implica responder también a la pregunta, ¿Existe relación estable de largo plazo entre el precio de los bienes raíces con sus variables fundamentales?.

Entre **los objetivos** de esta tesis están: **a) identificar los factores que explican la rentabilidad de los bienes raíces residenciales**, con el fin de comprender el comportamiento del mercado inmobiliario para Lima – Perú e identificar la evolución del precio de la vivienda durante el periodo 1998 -2015, **b) determinar si existe una relación estable de largo plazo entre los precios de los bienes raíces residenciales y sus variables fundamentales**. Asimismo, la tesis permitirá **c) testear si existe la presencia de burbuja intrínseca en el sector inmobiliario en el periodo de estudio**. Y adicionalmente **d) analizar la dinámica del comportamiento de los precios del sector en el periodo de estudio**, ayudando finalmente a clarificar el camino para las decisiones de inversión en activos de esta clase como alternativa a otros activos financieros.

El documento final se organizará de la siguiente forma: La sección 1 revisa los hechos estilizados sobre el mercado de bienes raíces, en particular el mercado de vivienda en el Perú, sus determinantes y su dinámica; así como teoría y evidencia empírica relacionada con la formación de burbujas inmobiliarias. La sección 2 presenta la Revisión de la Literatura, citando los diversos autores y los avances realizados hasta el momento en el Perú y en el exterior, referentes a los temas en los cuáles se enfoca la investigación. En la sección 3 se desarrollará el marco teórico, hablando de modelos para el mercado inmobiliario, resaltando la importancia de encontrar nuevos factores que expliquen la dinámica del precio. En esta sección, también se busca revisar y presentar a manera de resumen, un conjunto de teorías seleccionadas y relacionadas con el tema de estudio, utilizando sus principales resultados y variables relevantes, situando el aporte de nuestra investigación en ese contexto. En la sección 4 se incorpora brevemente la hipótesis de investigación. La sección 5 presenta la metodología, el desarrollo de los modelos propuestos, los

¹ La Republica.pe/Economía, “Se reaviva el debate sobre una posible burbuja inmobiliaria”, Lunes 10 de Marzo de 2014

² La Republica.pe/Economía, “Se reaviva el debate sobre una posible burbuja inmobiliaria”, Lunes 10 de Marzo de 2014

³ Diario Gestión, Sábado 12 de julio del 2014

métodos econométricos para su estimación, la revisión de los datos, las estimaciones empíricas y sus resultados; la sección 6 discute y presenta las conclusiones y finalmente la sección 7 incorpora la agenda pendiente.



1. Hechos estilizados del mercado de bienes raíces residenciales

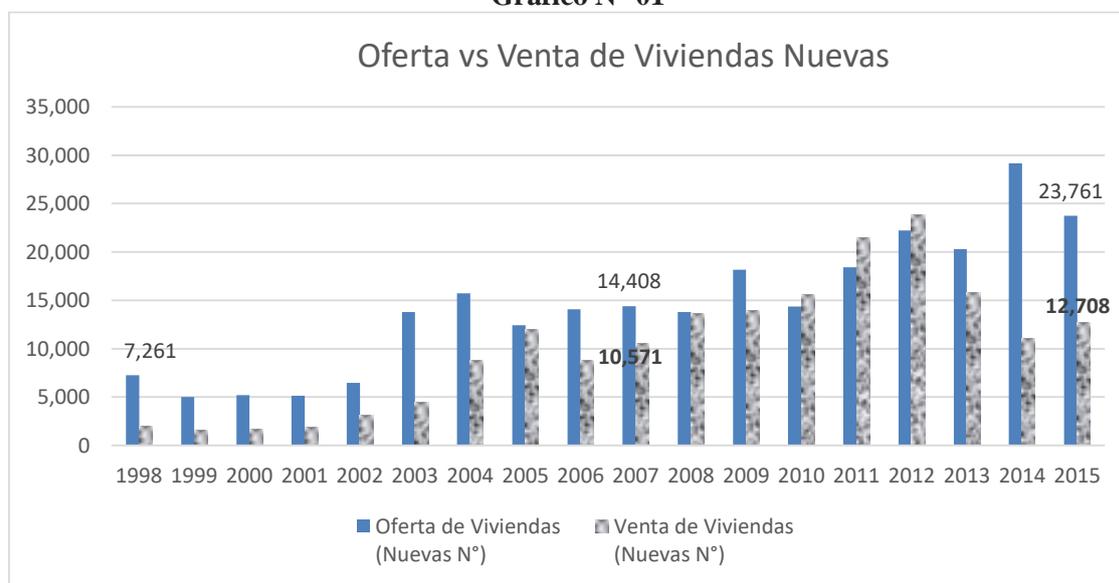
1.1. El mercado de vivienda en el Perú

El mercado de la vivienda en el Perú de las últimas décadas se desarrolló en un contexto de crecimiento económico sostenido, reflejado en el incremento permanente del Producto Bruto Interno que entre el año 2001 y el 2015 aumentó en 123%; de control de la inflación con niveles inferiores a los 02 dígitos; así como de relativa estabilidad del tipo de cambio. Factores que habrían permitido la mejora en el empleo y el ingreso per cápita de las familias peruanas, incentivando mayores niveles de inversión en el sector construcción y por ende de la inversión de vivienda. Esta estabilidad económica experimentada en el Perú de los últimos años generó un ambiente adecuado para la flexibilización financiera, específicamente en cuanto a dar facilidades y relajar las condiciones para el otorgamiento de créditos hipotecarios, cuya cartera crediticia pasó de S/ 3,608 MM en el año 2001 a S/. 38,493 MM al cierre del año 2015, incrementándose en 967%. Siendo importante resaltar que la expansión de estos créditos estuvo acompañada de una caída de las tasas de interés y bajos niveles de morosidad.

No obstante, pasando a mirar la situación actual del mercado de vivienda, el déficit de vivienda en el Perú se estima en 1.86 millones de unidades de vivienda. Asimismo, según las estimaciones realizadas por CAPECO, la demanda efectiva en Lima es de 444 mil familias. Con lo cual existiría un potencial para la expansión de viviendas, justificándose de este modo el boom inmobiliario, y la reciente creación de productos financieros destinados a este sector (BBVA 2015).

El número de viviendas nuevas ofrecidas en el año 1998 fue de 7,261, en tanto que la venta de viviendas nuevas fue de aproximadamente 2,000 viviendas. Para el año 2015 el número de viviendas nuevas fue de 23,761 viviendas, mientras que las viviendas vendidas fueron 12,708. Como podemos apreciar en el siguiente gráfico, el mercado de viviendas nuevas en Lima y Callao, empieza a dinamizarse a partir del año 2001.

Gráfico N° 01



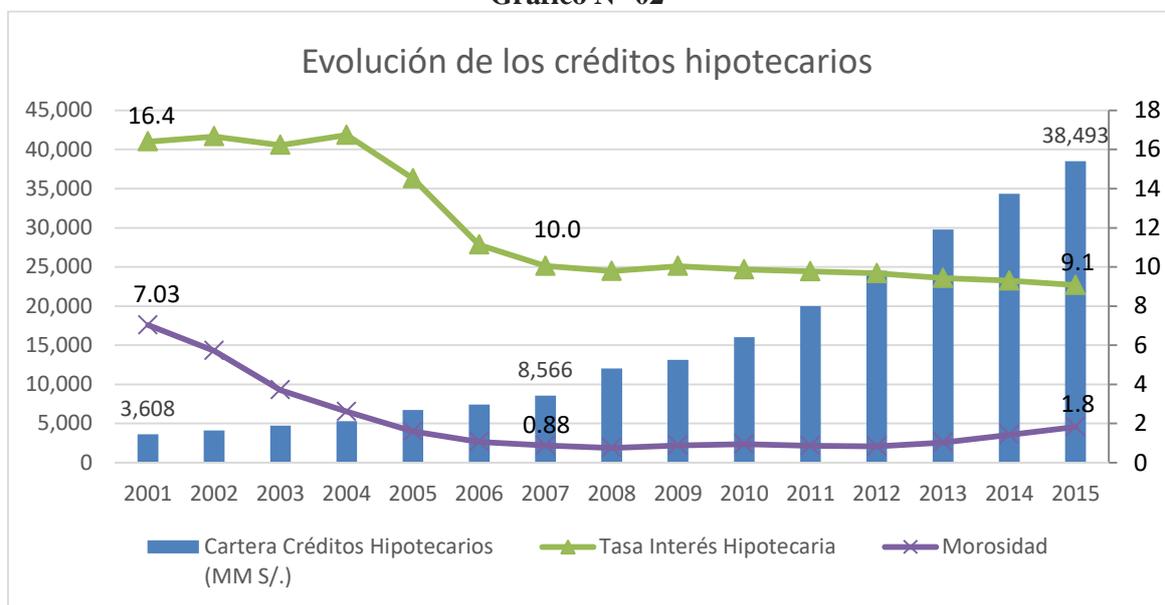
Fuente: CAPECO – BBVA

En relación a la evolución de los créditos hipotecarios del sistema financiero en su conjunto⁴, principal indicador de los créditos para vivienda, teniendo en cuenta que por lo general cada venta de una vivienda estaría respaldada por un crédito hipotecario; se tiene como principal

⁴ Banca Múltiple, Empresas Financieras, Cajas Municipales, Cajas Rurales, EDPYME, Empresas de Arrendamiento Financiero y entidades estatales.

indicador de esta evolución a la cartera de créditos hipotecarios que pasa de S/ 3,600 MM en el 2001 a S/ 38,493 MM del 2015, lo cual estaría asociado a la caída de la tasa de interés hipotecaria de 16.4% a 9%; la caída de la morosidad de los créditos hipotecarios que pasa de 7.03% a 1.83%, así como la disminución del tipo de cambio que pasa de 3.5 del año 2001 a 2.9 en el año 2008.

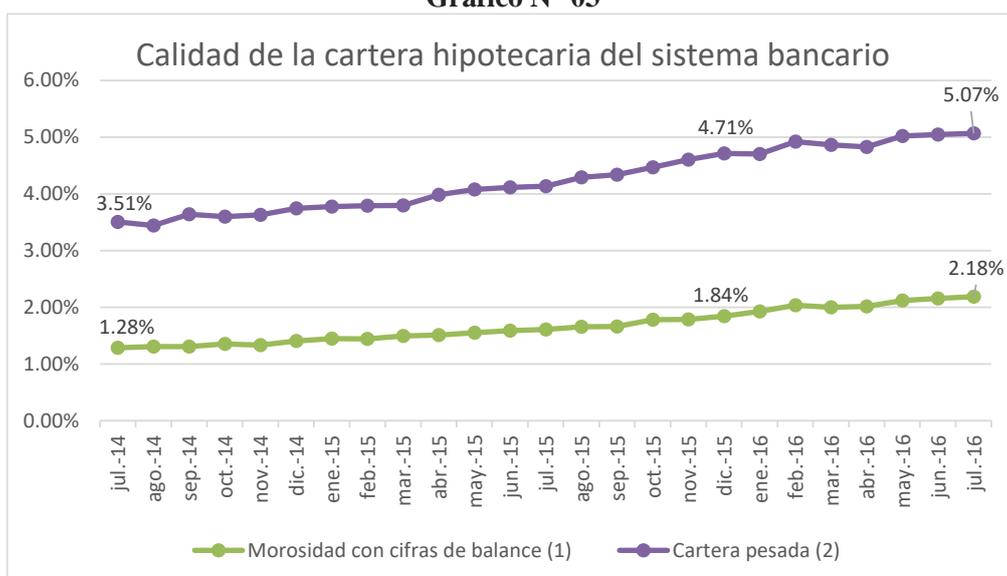
Gráfico N° 02



Fuente: SBS

Sobre la morosidad de los créditos hipotecarios del sistema bancario, según lo información proporcionada por ASBANC, se advierte un importante deterioro de la cartera pesada, que pasa de 3.51% en julio de 2014 a 5.07% a julio de 2016. Similar comportamiento se observa en el indicador de morosidad, que en el mismo periodo pasa de 1.28% a 2.18%. Esta tendencia es similar a la que experimenta la morosidad del sistema financiero en este periodo.

Gráfico N° 03



(1): Morosidad= (créditos vencidos + créditos en cobranza judicial) / total de créditos

(2): Cartera pesada = (deficiente + dudoso + perdida) / total de créditos

Fuente: ASBANC

A partir del año 1998, el estado peruano tiene como principal promotor del financiamiento para compra de viviendas, al Fondo Mivivienda. Las actividades realizadas por esta empresa se orientan a la solución de la problemática de vivienda del país. Su principal objetivo es desarrollar programas para el financiamiento de viviendas que buscan brindar respaldo a la demanda de las mismas otorgando líneas de crédito hipotecario a las instituciones financieras y subsidios a la población demandante; no obstante, brinda también apoyo a la generación de oferta inmobiliaria a fin de incrementar el número de viviendas ofertadas en los segmentos objetivo (Fondo Mivivienda 2015)⁵.

En la actualidad, están vigentes siete productos “Mivivienda” denominados: Nuevo Crédito Mivivienda (NCMV), MiConstrucción (MC), Financiamiento Complementario Techo Propio (FCTP), MiCasa Más (MCM), MiTerreno (MT), MiProyecto (MP) y MiAlquiler Compra (MAC). El principal producto que ofrece el Fondo Mivivienda es el Nuevo Crédito Mivivienda (Fondo Mivivienda 2016)⁶. Adicionalmente, en los últimos meses el Fondo Mivivienda viene promoviendo el alquiler - venta y el leasing inmobiliario, con lo cual se espera recuperar el dinamismo de los créditos hipotecarios para vivienda.

El Nuevo Crédito Mivivienda, permite comprar cualquier vivienda nueva, usada o construir en terreno propio, para viviendas cuyo valor fluctúe entre S/ 55,300 hasta S/ 395,000, con un plazo de pago de 10 a 20 años, su tasa de fondeo a las instituciones financieras asciende a 6,60%. Como parte del programa, se otorga el Bono del Buen Pagador (BBP). Este bono es una ayuda económica no reembolsable que se otorga a las personas que adquieren un producto “Mivivienda” a través de las instituciones financieras intermediarias, cuyos valores se detallan a continuación:⁷.

Cuadro N° 01

Valor de Vivienda	Bono al Buen pagador
Desde S/ 55,300 Hasta S/ 67,150	S/ 17,000
Desde S/ 67,150 Hasta S/ 79,000	S/ 16,000
Desde S/ 79,000 Hasta S/ 138,250	S/ 14,000
Desde S/ 138,250 Hasta S/ 197,500	S/ 12,500

Nota: Para valores de S/ 197,500 hasta S/ 276,500 se puede acceder a un Premio al Buen Pagador de S/ 5,000
Fuente: Fondo Mivivienda.

El Nuevo Crédito Mivivienda puede ser obtenido en las distintas instituciones financieras, en tanto se cumpla con los siguientes requisitos:

- ✓ Ser mayor de edad.
- ✓ Ser calificado por una entidad financiera.
- ✓ No debe ser propietario ni copropietario de otra vivienda a nivel nacional. Esta condición debe ser cumplida por el cónyuge y los hijos menores de edad.
- ✓ No haber adquirido una vivienda con recursos del Fondo Mivivienda, Fonavi, Fondo Hipotecario de promoción de la vivienda ni del Programa techo Propio.
- ✓ Contar con una cuota inicial mínima del 10% del valor de la vivienda que se va a comprar.

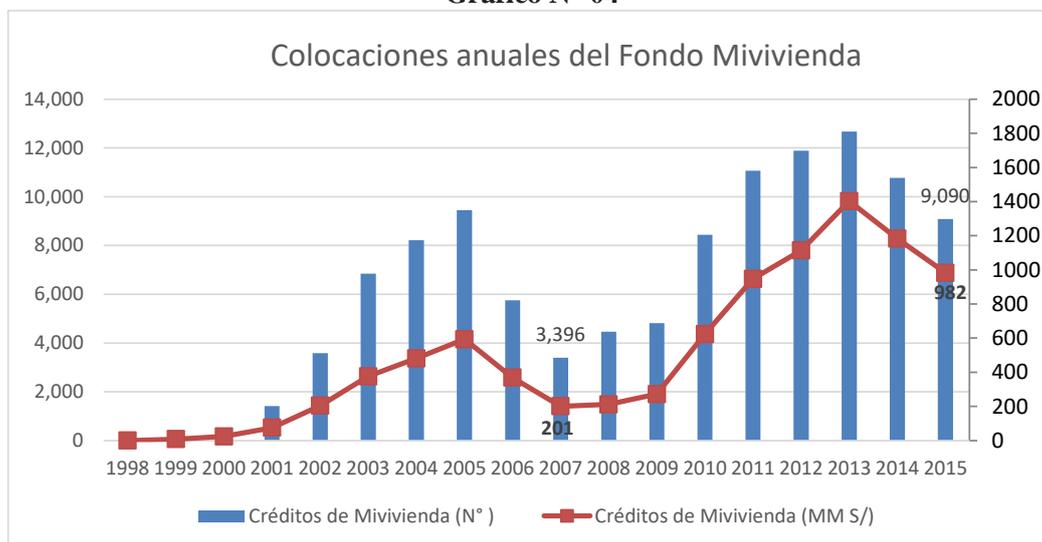
⁵ Fondo Mivivienda S.A. (2015): “Gestión integral de créditos y subsidios para vivienda”, Lima y Cuzco, Perú, 3 al 6 de Noviembre de 2015.

⁶ Fondo Mivivienda S.A. (2015): “Informe de gestión – Transferencia de Gobierno”, Julio.2011 – Junio.2016”,

⁷ <http://www.mivivienda.com.pe/portalweb/usuario-busca-viviendas/pagina.aspx?idpage=20>

En relación a las colocaciones históricas, en el año 2007 el Fondo Mivivienda colocó 3,396 créditos por un monto S/ 201 MM, en tanto que en el año 2015 colocó 9,090 créditos por un monto de S/ 982 MM. La cartera de créditos del Fondo Mivivienda, al cierre de 2015, alcanza los S/ 5,875 MM. Es importante precisar que del total de créditos colocados por el sistema financiero en el año 2015 (37,146) el 24% corresponde a créditos financiados por el Fondo Mivivienda. A continuación, se muestra la evolución de las colocaciones del Fondo Mivivienda tanto en números como en S/ MM.

Gráfico N° 04



Fuente: Fondo Mivivienda

El análisis de la evolución de las principales variables se explica en la siguiente sección. A manera de resumen, a continuación, podemos evidenciar el contexto macroeconómico bajo el cual se desarrolló el mercado de la vivienda desde el año 2001.

Cuadro N° 02

Variable	2001	2007	2015	Var % 2007 - 2001	Var % 2015 - 2007	Var % 2015 - 2001
Precio / m2 de departamentos Sector alto de Lima (S/ constantes 2009)	2,334	1,954	4,977	-16%	155%	113%
Producto Bruto Interno (MM S/ constantes 2007)	57,268	85,024	127,980	48%	51%	123%
Tasa Activa Promedio en Moneda Nacional (TAMN %)	25.0	22.9	16.1	-8%	-30%	-36%
Inflación (% Año base 2001)	0.2	3.5	4.1	3.3	0.6	3.9
Índice General de la Bolsa de Valores de Lima	1,176	17,525	9,849	1390%	-44%	737%
PER: Precio de venta / Alquiler anual	15	12	17	-25%	45%	9%
Alquiler anual (en S/ por m2)	125	155	334	24%	115%	166%
Índice de Costo de la Construcción (Año base 1999)	110	204	531	86%	161%	385%
Cartera Créditos Hipotecarios (MM S/)	3,608	8,566	38,493	137%	349%	967%
Tasa Interés Hipotecaria (%)	16.4	10.0	9.1	-39%	-10%	-45%
Morosidad Hipotecarios (%)	7.0	0.9	1.8	-88%	109%	-74%
Cartera Créditos Hipotecarios del FMV (MM S/)	35	1,218	5,875	3380%	382%	16685%
Número Créditos Hipotecarios del FMV (Nuevos créditos por año)	1,409	3,396	9,090	141%	168%	545%
Demanda Efectiva de Viviendas (En miles de unidades)	186	297	444	60%	49%	139%

Fuente: BCRP – SBS – CAPECO – Fondo Mivivienda

1.2. Evolución y análisis de las variables relevantes del mercado de vivienda

En esta sección se muestran las distintas series relacionadas con el precio de los departamentos del sector alto para el periodo 1998 - 2015, de acuerdo con la disponibilidad de los datos. Asimismo, se analiza de manera preliminar las relaciones que existen entre el precio y sus respectivos determinantes.

El precio de los departamentos para este periodo muestra un comportamiento que se puede separar en dos etapas. En 1998 el precio por m² es de S/ 2,549 para luego descender de manera consistente hasta alcanzar los S/ 2,129 en el año 2007. A partir del año 2008 el precio se incrementa de manera exponencial, incrementando en 155% hasta el año 2015. Tal como se aprecia a continuación:

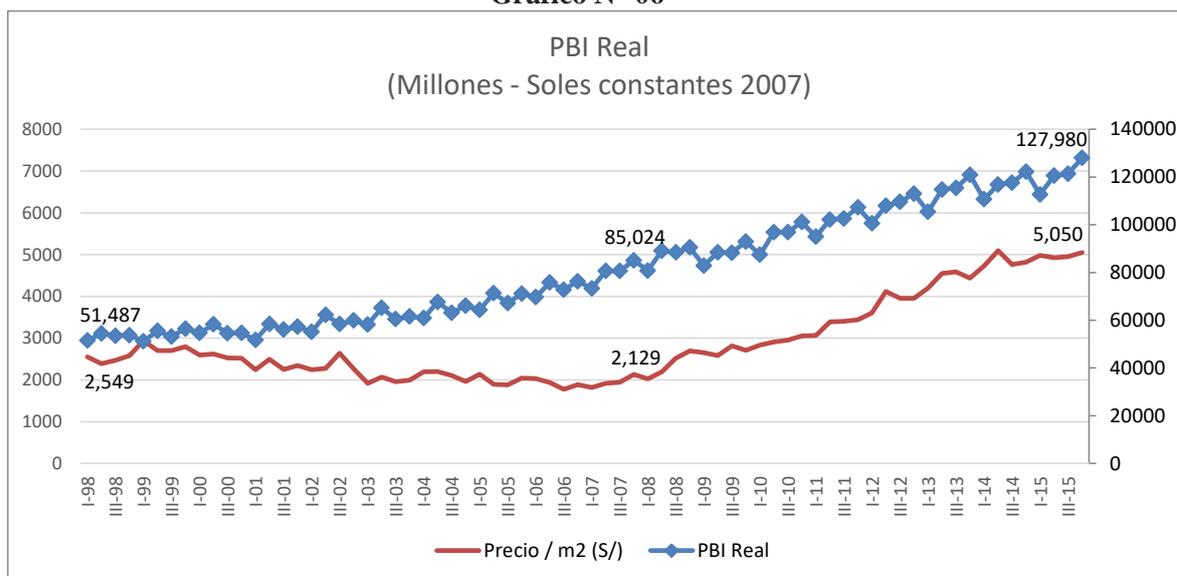
Gráfico N° 05



Fuente: BCRP

El PBI creció ininterrumpidamente desde el año 1998, pasando de S/ 51,487 MM a S/ 127,980 MM en el año 2015. Como es de esperar la relación con el precio es directa, lo cual podría ser explicado por el hecho de que a mayor producción mejora el ingreso de las familias y por ende la demanda de viviendas. Entre el periodo 2001-2015 el PBI se incrementó en 123%, en tanto que el precio de los departamentos lo hizo en 113%. La expansión del PBI estuvo asociada al crecimiento de las exportaciones que pasaron de US\$ 7,026 del año 2001 a US\$ 34,236 del año 2015, de las cuales el 55% corresponde a la exportación de minerales.

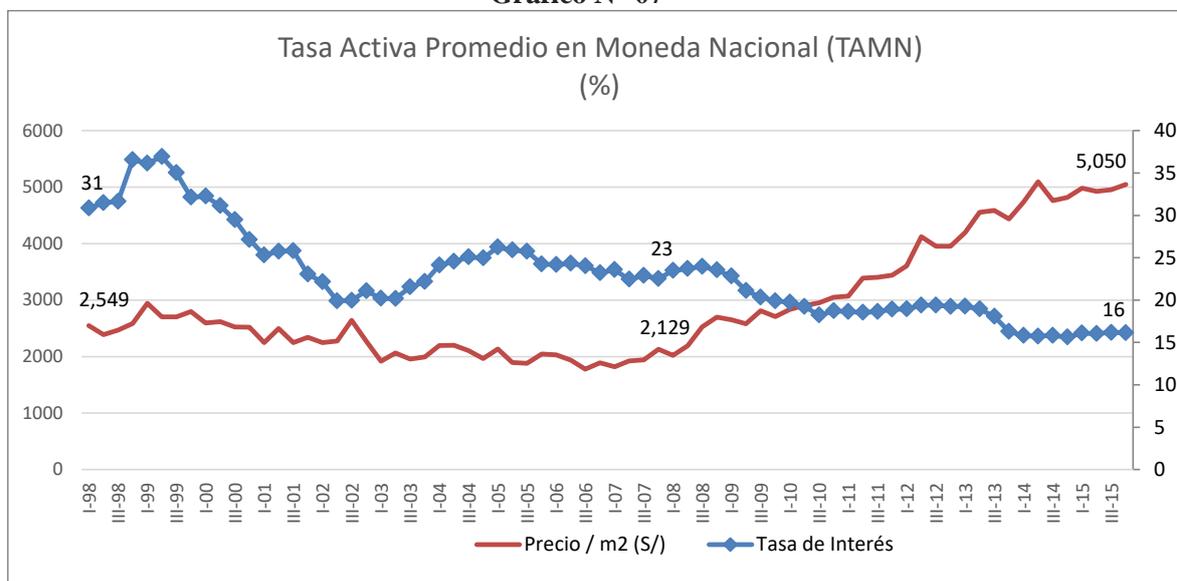
Gráfico N° 06



Fuente: BCRP

La tasa activa mostró una tendencia decreciente desde el año 1998, pasando de 31% a 16% en el año 2015. La relación con el precio de los departamentos parecería ser inversa, lo cual podría explicarse en el sentido que las menores tasas de interés impulsan la compra de departamentos o de vivienda mediante el uso del crédito. Tal como se aprecia a continuación.

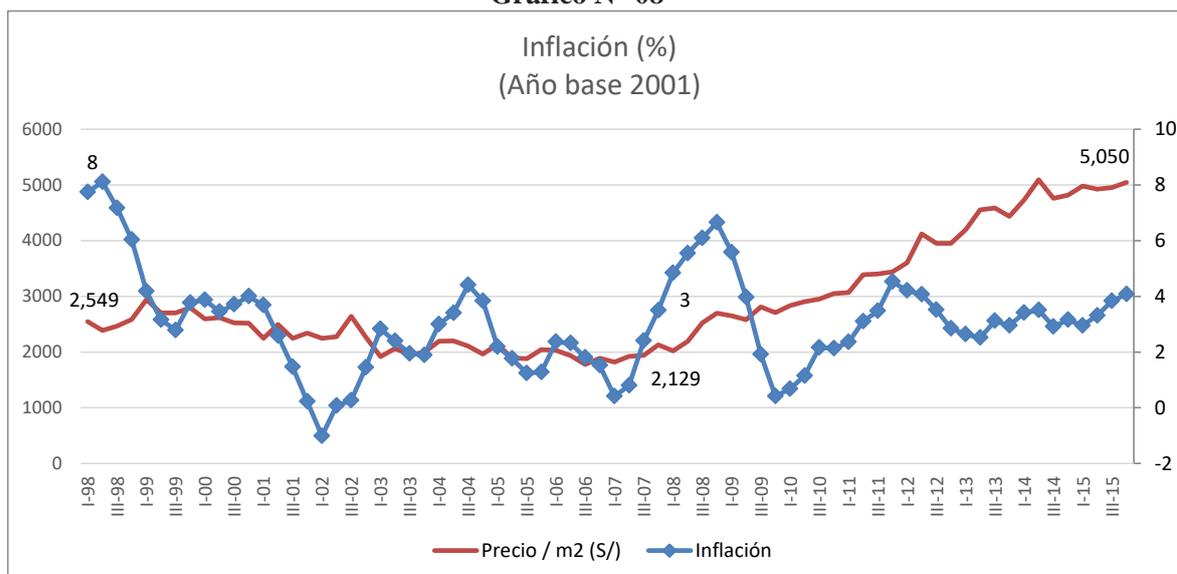
Gráfico N° 07



Fuente: BCRP

La evolución de la inflación experimenta una tendencia decreciente en el periodo 1998 -2007, en el periodo 2008-2015 la tendencia es ligeramente creciente. Para estos periodos el comportamiento del precio de los departamentos es parecido, lo cual nos diría que existe una relación directa entre estas dos variables. La racionalidad podría radicar en el hecho de que para la construcción de vivienda se usa distintos insumos, como la mano de obra, cuyos precios son afectados por la inflación.

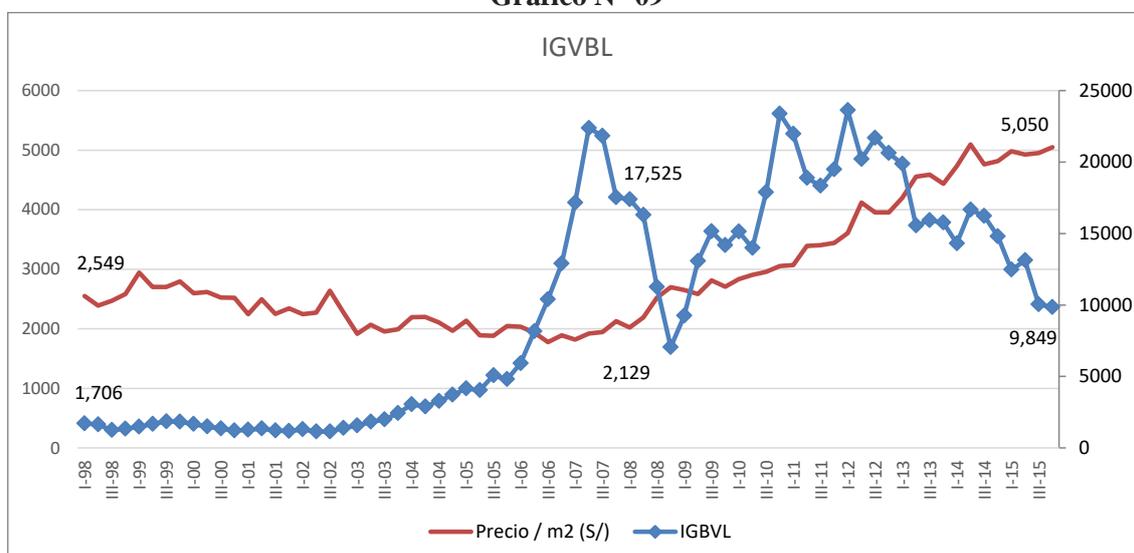
Gráfico N° 08



Fuente: BCRP

La Índice General de la Bolsa de Valores de Lima muestra una tendencia ascendente en el periodo 1998 -2007, pasando de 1706 a 17,525; para el periodo 2008-2015 la tendencia es decreciente hasta alcanzar un nivel de 9,849. Para estos periodos el comportamiento del precio de los departamentos es inverso, lo cual podría estar explicado por el grado de sustitución que existe entre los bienes raíces y la BVL, al ser ambas alternativas de inversión.

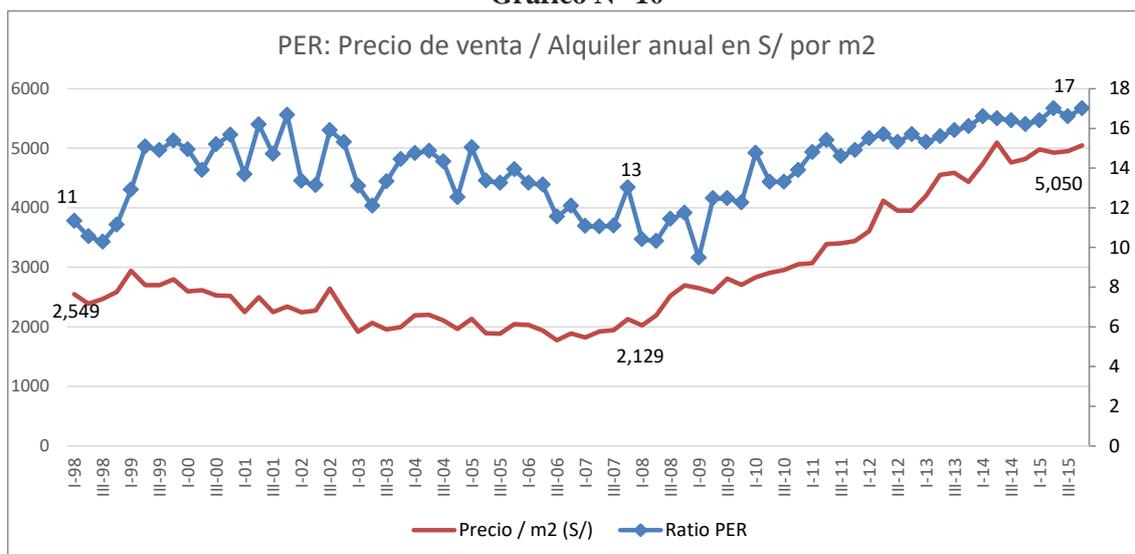
Gráfico N° 09



Fuente: BVL

De acuerdo con los datos disponibles, el ratio PER pasa de 13 años en el primer trimestre de 1998 a 17 años a fines del 2015. Esto nos dice que el periodo de recuperación de una inversión en vivienda se ha incrementado. Lo cual podría ser explicado por el incremento del precio de los departamentos en mayor proporción que el crecimiento de los alquileres. Tal como se muestra a continuación.

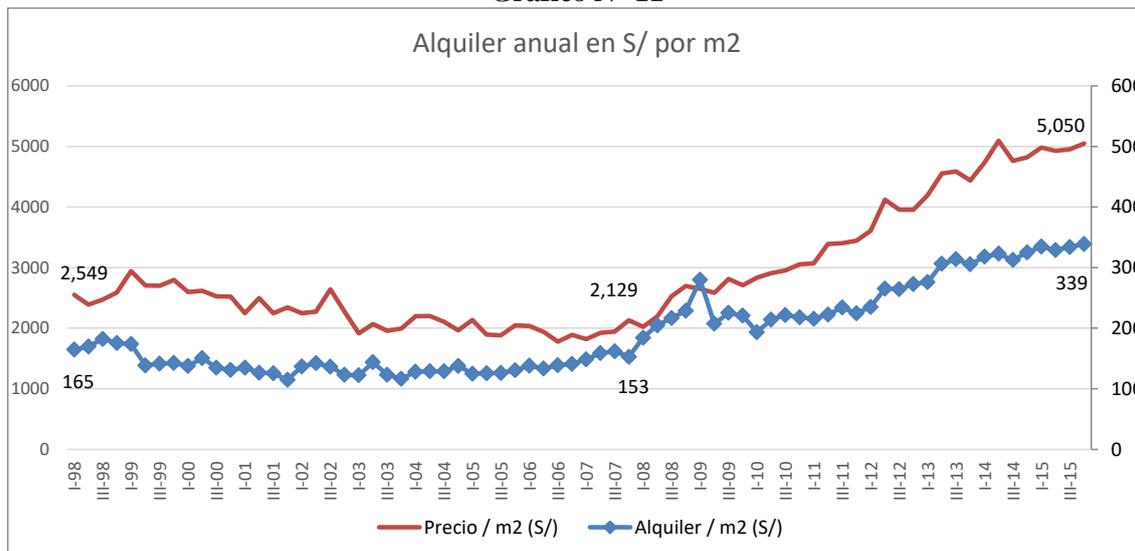
Gráfico N° 10



Fuente: BCRP (2010 II – 2015 IV). Elaboración Propia (1998 I – 2010 I)

Por su parte los alquileres anuales en S/ por m2 pasan de 165 en el primer trimestre de 1998 a 339 a fines del 2015. El crecimiento de los alquileres para este periodo es de 166%. En el gráfico siguiente se puede observar que los alquileres se mantienen constantes a partir del año 2013, incluso disminuyen ligeramente, lo cual podría estar explicado por el exceso de oferta de viviendas en los últimos años (11 mil en el año 20015).

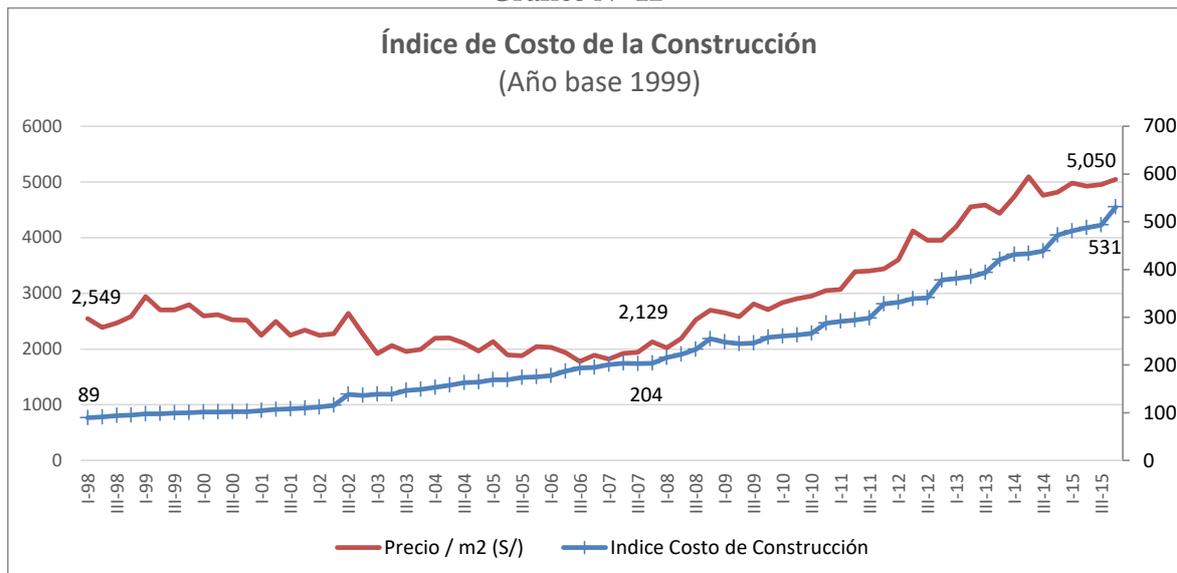
Gráfico N° 11



Fuente: BCRP (2010 III -2015 IV). Elaboración Propia (1998 II – 2010 II)

El índice de costos de construcción creció significativamente desde el año 1998, pasando de 89 a 531 en el año 2015. La relación con el precio es directa, lo cual podría ser explicado por el hecho de que el incremento de los costos se ve reflejado en el precio final de las viviendas. Entre el periodo 2001-2015 este índice se incrementó en 385%, en tanto que el precio de los departamentos lo hizo en 113%. Tal como se aprecia a continuación.

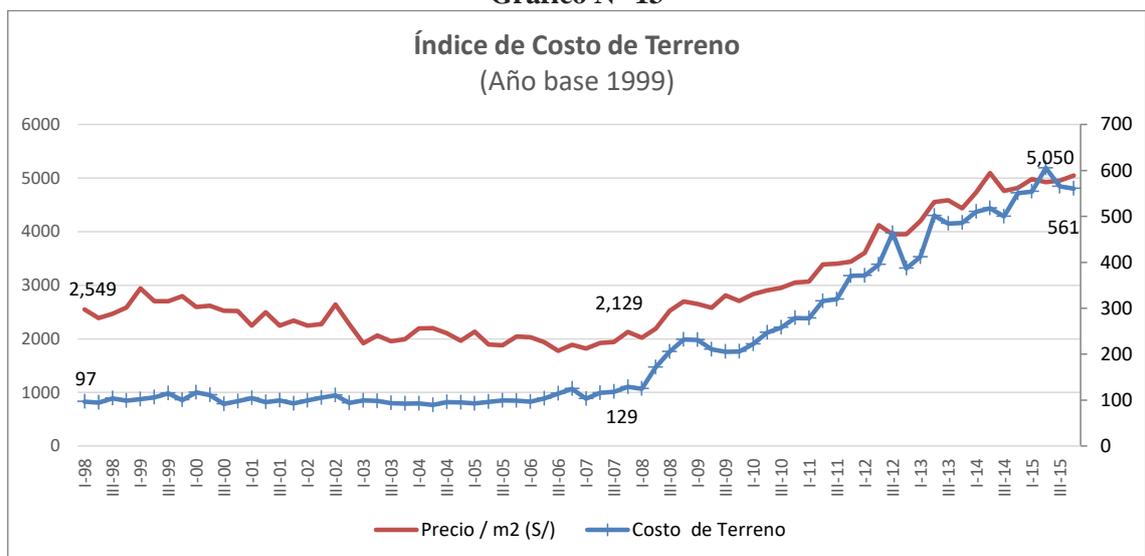
Gráfico N° 12



Fuente: INEI

El índice de costos de terreno creció desde el año 1998, pasando de 97 a 561 en el año 2015. La relación con el precio es directa, lo cual podría ser explicado por el hecho de que se trata del principal insumo para la construcción de las viviendas. Tal como se aprecia a continuación.

Gráfico N° 13



Fuente: BCRP (2007 I – 2013 I). Elaboración Propia (1998 I – 2006 IV, 2013 II – 2015 IV)

1.3. Burbujas de precios y evidencia empírica internacional

1.3.1. Los tipos de burbujas que existen en la teoría

Una burbuja económica también conocida como burbuja de mercado o burbuja financiera es un fenómeno que se produce en los mercados, caracterizado por una subida anormal y prolongada del precio de un activo o producto, de forma que dicho precio se aleja cada vez más de su valor real o intrínseco. Se han sugerido diversas explicaciones para sus causas, incluso mostrándose

que estas aparecen en ausencia de incertidumbre⁸, especulación⁹, o racionalidad limitada¹⁰. Actualmente se ha encontrado que las burbujas podrían ser originadas por procesos de coordinación de precios o normas sociales emergentes.

Los precios en episodios de burbuja pueden fluctuar caóticamente y volverse imposible predecirlos únicamente basándose en factores de oferta y demanda. En la vida real, es difícil observar la evolución intrínseca del precio, por lo que las burbujas con frecuencia son identificadas cuando se produce la caída repentina de este, conocida como crash o "estallido de la burbuja". Generalmente se considera a las burbujas económicas como negativas debido a que generan una asignación inadecuada de recursos, destinándose gran parte de ellos a fines improductivos: la alimentación de la burbuja. Pero, además, el crash con el que termina este fenómeno puede destruir una gran cantidad de riqueza y producir malestar continuo.

Las investigaciones postulan diversas causas para su formación, sin embargo, a la fecha, no existe una teoría ampliamente aceptada que explique su ocurrencia. En este sentido, se ha propuesto que las burbujas pueden clasificarse en:

Las burbujas racionales.- Constituyen un fenómeno que se repite regularmente cuando los mercados financieros están poco regulados, siendo las causantes de las principales crisis económicas mundiales de los últimos siglos. La literatura sobre burbujas es relativamente reciente, los primeros trabajos se remontan a principio de los ochenta, Tirole (1982) y Blanchard y Watson (1983). Estos trabajos toman como fundamento la teoría de los mercados eficientes y el problema que se plantean es conocer la diferencia que producen las burbujas entre el valor fundamental y el valor de mercado y si la misma puede considerarse como racional. Sin embargo, existe una amplia discusión sobre el origen de las burbujas basadas en el comportamiento irracional de los agentes que pone en entredicho la base teórica de este análisis.¹¹ En este tipo de modelos el precio de los activos es determinado en un mercado competitivo y en todo momento refleja en forma completa toda la información disponible.¹²

Las burbujas intrínsecas.- Es un subtipo de modelo de burbujas racionales, cuya diferencia principal se encuentra en que no obedece a factores exógenos ajenos a las variables que determinan el valor teórico, sino que es provocada por la sobre-reacción de los agentes al cambio en los factores fundamentales.¹³ Uno de los primeros trabajos fue propuesto por Froot y Obstfeld (1991).

⁸ Las burbujas ocurren incluso en mercados experimentales altamente predecibles, donde la incertidumbre es eliminada y los participantes del mercado deben ser capaces de calcular el valor intrínseco de los bienes simplemente examinando el flujo de dividendos esperado.

⁹ La especulación, según Nicholas Kaldor, consiste en la compra (o venta) de bienes con vistas a su posterior reventa (recompra), cuando el motivo de tal acción es la expectativa de un cambio en los precios afectados con respecto al precio dominante y no la ganancia derivada de su uso.

¹⁰ Herbert Simon (1957) señala que las personas son parcialmente racionales y que, actúan según impulsos emocionales no totalmente racionales en muchas de sus acciones (animal spirits). Apunta que la racionalidad personal está limitada por tres dimensiones: 1) la información disponible, 2) la limitación cognoscitiva de la mente individual y 3) el tiempo disponible para tomar la decisión.

¹¹ Madrid, Alberto y Hierro, Angel. Burbujas especulativas. El estado de una cuestión poco estudiada. Departamento de Economía e Historia Económica. Universidad de Sevilla.

¹² Bubbles and Volatility of Stock Prices: Effect of Mimetic Contagion (1991). Topol, Richard.

¹³ Precios de la vivienda: sobrevaloración y burbuja (2013). Abad Sánchez, Jorge. Universidad Complutense de Madrid.

Fads models.- En este caso el modelo de la economía conocido por los agentes al momento de hacer sus expectativas con el objetivo de calcular el valor fundamental del precio, es parte de su propio conjunto de información, en este sentido incorpora el concepto de ‘espíritus animales’ y otras novedades de los inversionistas.

Las burbujas contagiosas.- Este tipo de burbujas toman en cuenta dos aspectos importantes de las decisiones de los agentes: 1) la influencia del punto colectivo de vista, y 2) el comportamiento de racionalidad limitada, con respecto al conjunto de información en el cual las variables que representan el precio de los agentes en forma individual no son presentadas. En consecuencia, la dinámica del precio no estaría explícitamente relacionada a las características de los agentes en forma individual sino más bien en forma colectiva, tampoco estaría explícitamente relacionada al comportamiento de los mismos. En este sentido, en este modelo el mercado se encuentra constituido por agentes que saben que están informados en forma distinta e incompleta. Para fijar sus precios de oferta o de demanda cada agente, conociendo su propio conjunto de información no puede confiar en el cálculo del valor presente del precio como precio fundamental en el sentido que lo presenta la Hipótesis de los Mercados Eficientes; por el contrario, el inversor menos informado trata de ajustar sus precios a los precios de otros agentes mejor informados en ese momento; es decir, los agentes van actualizando su conjunto informativo. La dinámica del precio puede formalizarse entonces como un proceso de aprendizaje al determinar el valor fundamental o bien mirar la existencia de un contagio mimético que determina las relaciones entre agentes (espíritus animales) del cual podría surgir una burbuja.¹⁴ La definición del precio fundamental está dada por:

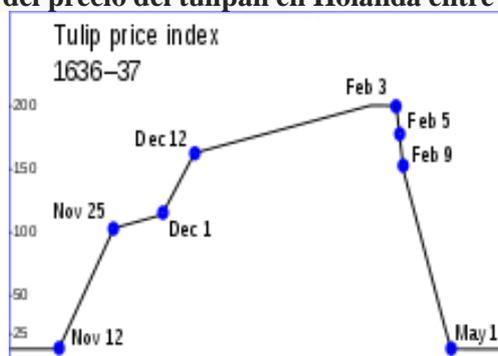
$$F(t) = \sum_{s=1}^{\infty} (1+r)^{-s} \cdot E(z(t+s)|\Phi(t))$$

Donde z representa el fundamento o dividendo, $\Phi(t)$ el conjunto de información disponible cuya interpretación varía según el tipo de burbuja.

1.3.2. Las principales burbujas en el mundo¹⁵

Tulipomanía holandesa.- Fue un periodo de euforia especulativa que se produjo en los Países Bajos en el siglo XVII. El objeto de especulación fueron los bulbos de tulipán, cuyo precio alcanzó niveles desorbitados, dando lugar a una gran burbuja económica y una crisis financiera. Constituye uno de los primeros fenómenos especulativos de masas de los que se tiene noticia. Varios factores explican su origen. Por un lado, el éxito de la Compañía Neerlandesa de las Indias Orientales y la prosperidad comercial de los Países Bajos, y por otro, el gusto por las flores, especialmente las exóticas, que se convirtieron en objeto de ostentación y símbolo de riqueza.

Gráfico N° 14
Evolución del precio del tulipán en Holanda entre 1636 y 1637



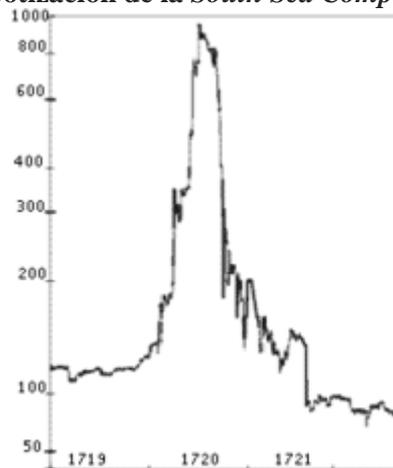
Fuente: Wikipedia La enciclopedia libre

¹⁴ Adaptado de Bubbles and Volatility of Stock Prices: Effect of Mimetic Contagion (1991). Topol, Richard.

¹⁵ Adaptado de Wikipedia La enciclopedia libre.

Burbuja de los mares del Sur.- Fue una burbuja especulativa que ocurrió en Gran Bretaña a principios del siglo XVIII, y que condujo al crack de 1720. Este fenómeno se produjo en relación de las acciones de la Compañía de los mares del sur, que tenía el monopolio del comercio británico con las colonias españolas de Sudamérica y las Indias Occidentales. Estos derechos comerciales exclusivos le habían sido concedidos como parte del Tratado de Utrecht que puso fin a la Guerra de Sucesión Española. A cambio del monopolio, la Compañía asumió toda la deuda británica por la participación del Reino Unido en dicho conflicto. Dado que el comercio directo con las colonias españolas estaba muy restringido, muchos inversores ingleses vieron en la Compañía una fabulosa oportunidad de negocio. Las historias y rumores sobre las riquezas de Sudamérica a la espera de ser importadas a Europa hicieron que muchos ahorradores británicos, invirtieran y se sumaran al frenesí especulador. En 1720, cuando las condiciones del Tratado de Utrecht se hicieron públicas y las promesas de oportunidades de negocio dejaron de verse como realizables, la burbuja especulativa explotó.

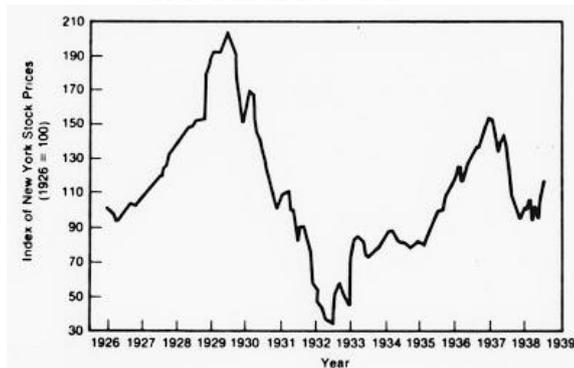
Gráfico N° 15
Cotización de la *South Sea Company*



Fuente: Wikipedia La enciclopedia libre

Crac de 1929.- Fue la más devastadora caída del mercado de valores en la historia de la Bolsa en Estados Unidos, tomando en consideración el alcance global y la larga duración de sus secuelas y que dio lugar a la Crisis de 1929 también conocida como La Gran Depresión, un periodo de declive económico en las naciones industrializadas, que llevó al establecimiento de reformas financieras y nuevas regulaciones que se convirtieron en un punto de referencia. La euforia y las ganancias financieras de la gran tendencia de mercado fueron hechas pedazos el Jueves Negro, cuando el valor de las acciones en la Bolsa de Nueva York se desplomó, 100 000 trabajadores estadounidenses perdieron su empleo en un periodo de tres días. El Dow Jones, alcanzó su nivel más bajo el 8 de julio de 1932, y no retornó al nivel de 1929 hasta 1954.

Gráfico N° 16
Crisis Financiera 1929



Fuente: Wikipedia La enciclopedia libre

Crisis económica de 2008.- Se conoce así a la crisis económica mundial que comenzó en el año 2008, y fue originada en los Estados Unidos. Entre los principales factores que se atribuyen como sus causas se encuentran los fallos en la regulación económica, la gran cantidad de delitos cometidos por los bancos, la mejora de los precios de las materias primas debido a una mayor demanda de las mismas y a un mercado mundial competitivo, la sobrevalorización del producto, crisis alimentaria mundial y energética, y la amenaza de una recesión en todo el mundo, así como una crisis crediticia, hipotecaria y de confianza en los mercados. Aunque se considera que la crisis surgió en 2008, especialmente tras la caída del banco estadounidense Lehman Brothers, los primeros síntomas aparecieron en agosto de 2007 con la quiebra de varios bancos menores de inversión. Con la caída de estos bancos debido a la crisis de hipotecas subprime, que representaba un alto porcentaje de su inversión, las bolsas y mercados de valores se derrumbaron provocando la crisis financiera de 2008 en todo el mundo. Posteriormente, debido a que los gobiernos tuvieron que realizar numerosos rescates financieros para salvar a empresas financieras y no financieras de la quiebra, terminó generándose una crisis de deudas en diferentes países. Debido a la gran cantidad de dinero asignado a los rescates financieros y a la fuerte caída generalizada de los ingresos en la recaudación fiscal, algunos gobiernos realizaron programas de austeridad económica que implicaban fuertes recortes sociales provocando contestaciones sociales y un aumento de la pobreza generalizada en gran cantidad de países del mundo.

1.3.3. La posible burbuja en el Perú

Como se mencionó en las secciones previas, el principal indicador de la presencia de una burbuja es el incremento persistente del precio de un activo, en este caso los bienes raíces residenciales, sin tomar en cuenta su fundamento. Al respecto, el precio promedio por m² de los departamentos para el sector alto de Lima fue de S/ 2,498 en el año 1998 para luego descender hasta alcanzar los S/ 1,954 en el año 2007. A partir del año 2008 el precio se incrementa de manera permanente llegando a un nivel de S/ 4,977 en el año 2015 (incremento de 155%: 2007 - 2015).

El crecimiento del precio de los bienes raíces residenciales estuvo asociado a la evolución positiva de los créditos hipotecarios y el desempeño favorable de la economía. La cartera de créditos hipotecarios pasó de S/ 3,600 MM en el 2001 a S/ 38,493 MM del 2015, lo cual estaría relacionado a la disminución de la tasa de interés de 16.4% a 9.1%; la caída de la morosidad que pasa de 7.03% a 1.83%, así como la disminución del tipo de cambio que pasa de 3.5 del año 2001 a 2.9 en el año 2008. Por su parte, el PBI creció ininterrumpidamente desde el año 1998, pasando de S/ 51,487 MM a S/ 127,980 MM en el año 2015.

Distintas investigaciones han descartado la presencia de burbuja inmobiliaria en Perú. Así, por ejemplo, Fabrizio Orrego 2014, concluye que sus estimaciones muestran que el crédito hipotecario, el financiamiento externo, los términos de intercambio y la demografía son variables explicativas del precio por m². Asimismo, afirma que en la actualidad, no hay evidencia de que el precio observado se encuentra desalineado respecto de sus fundamentos¹⁶.

Por otro lado según el análisis realizado por el Scotiabank¹⁷: “A mediano plazo el potencial del sector inmobiliario continúa siendo interesante en la medida que la economía peruana se aproxime nuevamente a tasas de expansión de 5%, su tasa de crecimiento potencial. Ello se refleja en el importante déficit de viviendas a nivel nacional -estimado en 1.86 millones de unidades- y a la baja penetración de los créditos hipotecarios -medido por el ratio crédito hipotecario / PBI”. Asimismo, en esta publicación se menciona que la demanda efectiva, es de 444 mil hogares y está concentrada en un rango de precios que va desde US\$ 10,000 hasta US\$ 80,000 representando el

¹⁶ Precios de viviendas en Lima (2014). Fabrizio Orrego. Banco Central de Reserva del Perú y Universidad de Piura.

¹⁷ Scotiabank. El mercado inmobiliario en perspectiva, 2015.

75% del total de la demanda. Lo cual indica que la demanda estaría concentrada en el sector de bajos ingresos.

Entre otras afirmaciones que descartan la presencia de una burbuja inmobiliaria en el Perú, tenemos a la siguiente: “Los precios de los departamentos no se encuentran desalineados según el indicador PER” (BBVA 2016)¹⁸. Según este indicador se tiene los siguientes criterios: Subvaluado: 5-12.5, Normal: 12.5 – 25, Sobrevaluado: 25-50. Asimismo, se menciona que este ratio para Perú se encuentra en 17; en tanto que países como Colombia tiene un ratio de 15, Chile (16), Brasil (21), y EEUU (26).

Las apreciaciones que se han realizado sobre la presencia de la burbuja inmobiliaria para el Perú toman en cuenta los determinantes del precio. Los determinantes del precio pueden justificar los niveles actuales del mismo; no obstante, en contextos bajo los cuales los propios determinantes, como el crédito, sufran volatilidades o disminuciones importantes, podrían desencadenar la caída abrupta del precio de la vivienda en el Perú. En este sentido, en la presente investigación se testeará la presencia de burbuja inmobiliaria, tomando en cuenta principalmente la relación que existe entre el precio de los departamentos y su fundamento, el alquiler. Es importante precisar, que este trabajo tratará de identificar si nos encontramos en un escenario bajo el cual, de ocurrir ciertos eventos, se desencadenaría una corrección abrupta del precio de la vivienda.

2. Revisión de la literatura

Los cambios en los precios de los bienes raíces, específicamente de la vivienda, y su evolución en el tiempo son muy importantes a la hora de tomar decisiones de inversión. La inversión en vivienda, que equivale a un importante porcentaje de la inversión total en la economía de un país, está presente en diversos agentes económicos: las familias, que compran y venden, los bancos comerciales, que son los que entregan créditos hipotecarios y créditos de capital de trabajo a las empresas inmobiliarias.

Entre los trabajos que se encuentran en el Perú sobre el tema tenemos: “**Precios de la Vivienda en Lima**”. Este trabajo estima la **relación de equilibrio entre el precio por m² de la vivienda en Lima y sus fundamentos macroeconómicos desde el primer trimestre de 1998 al cuarto trimestre del 2013**.

Entre las **variables fundamentales elegidas** para este trabajo tenemos a los términos de intercambio, la cuenta corriente, el crédito hipotecario, el índice de imperio de la ley, la demografía y la capitalización bursátil; los cuales resultaron significativos y con los signos esperados.

Para la estimación se utilizó la **metodología de vectores de cointegración con la técnica de FMOLS de Phillips y Hansen (1990)** obteniendo un vector a través del cual construyeron el precio por m² de equilibrio. Ahora con el objetivo de evaluar si el precio de las viviendas se encuentra desalineado con respecto a sus factores fundamentales, se elaboraron 10,000 secuencias de precios de equilibrio de las viviendas, a partir del muestreo repetido de la relación de equilibrio estimada. Los resultados mostraron que el precio por m² de las viviendas no se encontrara desalineado con respecto a sus fundamentos, a pesar del incremento observado durante los últimos años. Finalmente este estudio como se dice líneas arriba hace énfasis en los desalineamientos del precio por m² de las viviendas, pero evita referirse a la existencia o no existencia de una burbuja en el precio de las viviendas.

En la misma dirección de estos resultados el documento del **BCRP (2010)** por ejemplo discute que a pesar de la subida del precio de las viviendas, el ratio precio/alquiler se mantuvo dentro del rango comúnmente descrito en la literatura para referirse a situaciones normales. Del mismo modo, un estudio del **BBVA (2012)** afirma que el nivel de los precios observados de las viviendas

¹⁸ BBVA | RESEARCH. Situación Inmobiliaria, 2016.

no está muy separado de su valor fundamental. **Cubeddu et al. (2012)** adiciona a los resultados anteriores, que los precios en Perú se han desviado de su nivel de equilibrio un 6 % entre el tercer trimestre de 1998 y el segundo trimestre del 2011 y que, además, los signos de sobrevaloración han sido modestos.

Entre otros autores que abordan el tema en estudio están **Abraham y Hendershott (1996)**, **Capozza et al. (2002)**, **Capozza et al. (2004)**, **Stevenson (2008)** y **Cubeddu et al. (2012)**. Estos trabajos incluyen modelos uniecuacionales que explican el precio de las viviendas a partir de factores que son específicamente de origen interno, entre estos tenemos a la demografía, la tasa de interés y el PBI real. Sin embargo, actualmente se han comenzado a incorporar factores de origen externo, como son los términos de intercambio o la cuenta corriente, como por ejemplo **Mendoza et al. (2007)**, **Aizenman y Jinjark (2009)** y **Glindro et al. (2011)**. La teoría nos dice que los flujos de capital incentivan la demanda de activos, y por supuesto la demanda por activos bienes raíces. Por otra parte **Laibson y Mollerstrom (2010)**, hacen observaciones a estas nuevas teorías, demostrando que los mayores flujos de capital en EEUU tuvieron un impacto significativo en el consumo, pero no en la inversión. De hecho, **Favilukis et al. (2011)** discute que, controlando por la liberalización del mercado financiero, los flujos de capital tienen un moderado impacto en el precio de las viviendas en EEUU.

Desormeaux (2010) testea la **existencia de una relación de largo plazo entre los precios de las viviendas con sus variables fundamentales** usando un índice de precios hedónicos, con el fin de comprender el comportamiento del **mercado inmobiliario para Santiago, Chile**. La importancia de esta tesis radica en entender si es posible identificar burbujas en el sector inmobiliario utilizando dicho índice de precios. El trabajo busca identificar burbujas inmobiliarias mediante **cointegración** usando un **índice de precios** de vivienda construidos bajo la **metodología hedónica**.

Los resultados no son concluyentes a la existencia de burbujas inmobiliarias, dada la forma metodológica en que se construye el índice de precios. Sin embargo, no se encuentra la existencia de una relación de largo plazo para el índice de precios de vivienda con sus variables fundamentales. Este resultado es robusto a otros test de cointegración. Sin embargo, al cambiar las especificaciones de los test de cointegración, es posible poder identificar la relación de largo plazo para el índice de precio de las casas y de los departamentos. Por lo tanto, la evidencia con respecto a la cointegración es mixta.

En relación al tema de la existencia o no de una burbuja en los precios de la vivienda, a pesar de que teóricamente es posible definir con precisión que es una burbuja, como por ejemplo en **Brunnermeier (2008)** y **Arce y López Salido (2011)**, en la práctica no existe un consenso acerca de cómo identificar una burbuja en los datos con herramientas de econometría.

Case y Shiller (2003) definen una burbuja como “una situación donde la excesiva expectativa del público a aumentos del precio causa que el precio suba temporalmente”. Esto quiere decir que ante presencia de una burbuja, los dueños de las viviendas gastan más en ella ya que creen que mañana el precio será mayor. Dados los altos retornos, son las expectativas de mayores precios de viviendas las que hacen que la inversión en vivienda sea irresistible (**ver Arshanapalli y Nelson 2008**). **Lind (2008)**. La definición usada es “hay una burbuja si el precio del activo aumenta al principio dramáticamente para luego caer inmediatamente de forma dramática”. **Krainer y Wei (2004)** identifican una burbuja, ya sea en el mercado accionario o inmobiliario, cuando el precio de un activo se desvía del fundamental.

Wu y Xiao (2002) usan el modelo estándar dinámico de expectativas racionales para los precios de los activos donde se relaciona el precio de un activo con los dividendos descontados. Es decir, el precio del activo está explicado por el valor presente de los dividendos, esto es, por los fundamentos. Por lo tanto, existen burbujas si existen otros factores, aparte de los fundamentales, que están explicando el precio de hoy. En el caso de las viviendas, el dividendo corresponde al

pago mensual que se recibe al invertir en una vivienda, es decir, al alquiler. Por lo tanto, el precio debe estar explicado por el alquiler y por la tasa de interés. Dado lo anterior, los autores muestran que existe una relación lineal entre el precio de un activo y su fundamental. Concluyen que dicha relación es la de largo plazo y es la que se testea mediante el test de cointegración. Si no hay presencia de burbujas, debe existir una relación de largo plazo entre el precio del activo y sus dividendos tal que la combinación de ambos, sea estacionaria. Es decir, el hecho de que exista una relación funcional de largo plazo entre el precio de las viviendas con los fundamentos implica que los cambios en el precio de la viviendas quedan determinados por la evolución de los fundamentos, lo que implica que no existirían burbujas inmobiliarias.

OECD (2005) plantea algunos indicadores tales como la **razón = índice de precios vivienda/índice ingreso**. Si sube por sobre su promedio de largo plazo, indica que los precios están sobrevalorados. Otro indicador que plantea la OECD son las tasas de deudas hipotecarias y su evolución en el tiempo.

La **razón precio-arriendo** es un indicador para medir como se relaciona el precio con el arriendo de la vivienda en el tiempo. **Roche (2001), Case y Shiller (2003), Black et al.(2006), OECD (2005), Krainer y Wei (2004), Mikhed y Zemčík (2009)**.

Budnevich y Langoni (1998) siguen una metodología similar a la de **Bergoeing et al.(1998)**. La idea de los autores es obtener relaciones de largo plazo del precio de venta de las viviendas para siete zonas de Santiago para el período 1993 - 1998. La estimación se basa en un modelo de panel que se llega mediante una forma reducida de modelos de oferta y demanda por vivienda. Los autores encuentran evidencia de burbuja especulativa que estaría explicando la excesiva sobrevaloración del activo en ese momento.

Cuadro N° 03
Metodologías de determinantes del precio de vivienda y sobrevaloración

INVESTIGACIÓN	METODOLOGÍA	OBJETIVO	AUTOR	RESULTADOS	VENTAJAS	DESVENTAJAS
Precio de la Vivienda en el Perú (2014)	Vectores de cointegración con la técnica de FMOLS de Phillips y Hansen (1990)	Estimar la relación de equilibrio entre el precio por m2 de la vivienda en Lima y sus fundamentos macroeconómicos	Orrego Fabrizio. BRCP y Universidad de Piura.	El precio por m2 de las viviendas no se encontrara desalineado con respecto a sus fundamentos		Ya fue utilizada para el Perú y en diversas investigaciones en Latinoamérica, Europa y EEUU
¿Existe Relación de Largo Plazo entre el Precio de las Viviendas con sus Variables Fundamentales? Un Análisis de Cointegración (2012)	Indice de precios hedónicos para el precio de la vivienda y cointegración	En entender si es posible identificar burbujas en el sector inmobiliario utilizando dicho índice de precios	Desormeaux Nicolás. Pontificia Universidad Católica de Chile.	Evidencia con respecto a la cointegración es mixta: Existe una relación de largo plazo No existe una relación de largo plazo al cambiar las especificaciones de los test de cointegración	Puede contribuir a mejorar la especificación de un modelo causal, al decidir correctamente si algunas variables explicativas deben figurar en niveles o en primeras diferencias. Útil para alcanzar la estacionariedad después de haber clarificado el sentido de causalidad de las variables	Su aplicación de forma rígida y excluyente sin atender a otras evidencias, puede conducir a errores importantes Puede identificar erróneamente regresiones espurias. Las relaciones no cointegradas no siempre son espurias
Comportamiento Reciente de los Precios de los Activos del Sector Inmobiliario (1998)	Panel de Cointegración	Evaluación del grado de desalineación y la relación de largo plazo del precio de venta de la vivienda con respecto a sus determinantes fundamentales	Budnevich, C. y Langoni, P. Banco Central de Chile.	Encuentran evidencia de burbuja especulativa que estaría explicando la excesiva sobrevaloración del activo		Falta de distinción entre no estacionariedad e incertidumbre

<p>Precios de la vivienda: sobrevaloración y burbuja (2013)</p>	<p>Obtención de un precio teórico en función a fundamentales. Poterba (1984)</p> <p>Estimación MCO de la renta teórica. Hott (2009)</p> <p>Calculo del precio teórico, discrepancia precio observado –precio teórico</p> <p>Testeo de existencia de burbuja intrínseca. Froot y Obstfeld (1991)</p>	<p>Determinar si la elevación y posterior caída en el precio de los bienes raíces ha respondido al comportamiento de variables fundamentales, o por otro lado se debe a la presencia de una burbuja</p>	<p>Abad Sánchez Jorge. Universidad Complutense de Madrid.</p>	<p>El precio de la vivienda observado durante este periodo se habría desviado hasta un 80% de su valor teórico, y al final del 2012 seguiría sobrevalorado alrededor del 24 a 30%</p> <p>Confirma la presencia de una burbuja causante del gran auge de precios entre 1997 y 2007 que explicaría el 98% de la sobrevaloración</p>	<p>La capacidad que han demostrado estos modelos para capturar comportamientos recientes del mercado inmobiliario podría ser otro factor para justificar su uso</p> <p>Permitió identificar con mayor claridad que otros modelos el incremento de precios debido a una burbuja en la Crisis Hipotecaria del 2007</p> <p>Facilidad y practicidad por la metodología de estimación</p>	<p>Asume ajuste instantáneo de oferta y demanda</p> <p>No es capaz de explicar la lenta caída de precios (rigidez) tras el pinchazo de la burbuja</p> <p>No incorpora características particulares del mercado de vivienda al igual que otros modelos de activos financieros</p>
<p>Una aproximación cuantitativa a la burbuja inmobiliaria (2002)</p>	<p>Modelo de Poterba (1984)</p>	<p>Determinar si la elevación y posterior caída en el precio de los bienes raíces ha respondido al comportamiento de variables fundamentales, o por otro lado se debe a la presencia de una burbuja</p>	<p>Balsameda, San Martín y Sebastián. BBVA</p>	<p>Sobrevaloración del precio observado respecto al precio de equilibrio en un 28% entre los años 2000 y 2002</p> <p>Confirman evidencia de burbuja especulativa</p>		

Situación Perú: Análisis económico tercer trimestre (2012)	Estadísticas e indicadores	Describir la posibilidad de una burbuja en el mercado de viviendas en el contexto de expansión de crédito moderado	BBVA	Nivel de los precios observados de las viviendas no está muy separado de su valor fundamental	Facilidad	No es un estudio de investigación.
Notas de Estudio del BCRP N° 55 Indicadores del Mercado Inmobiliario (2010)	Estadísticas e indicadores	Presentar distintos indicadores del mercado inmobiliario para Lima Metropolitana	Banco Central de Reserva del Perú	El ratio precio/alquiler se mantuvo dentro del rango de situaciones normales	Permite ver el contexto de manera rápida	No es un estudio de investigación. El ratio precio/alquiler no es muy recomendado en la literatura relacionada

3. Marco teórico

3.1. Definición de términos principales.

Se definen a continuación los términos principales que son de utilidad en el desarrollo de la investigación:

Alquiler de vivienda: Es el promedio de las medianas trimestrales de los alquileres anuales de departamentos de los distritos del sector alto de Lima-Metropolitana, medido en soles constantes por m² del año 2009.

Burbuja intrínseca: Subida persistente del precio de un activo originada por la sobre-reacción de los agentes a cambios en el fundamento que determina el precio teórico, y no debido a la ocurrencia de factores exógenos. Tiene como característica principal capturar esta sobre-reacción a través del impacto no lineal de su propio fundamento.

Choque de crédito: Se define como el cambio inesperado en las colocaciones de créditos de la economía, que finalmente impacta en el precio de la vivienda.

Choque de demanda agregada: Es un elemento del vector de perturbaciones u_t del SVAR, que representa un cambio inesperado en la tasa de interés real, que impacta en el largo plazo en el vector de variables endógenas del modelo.

Choque de demanda de vivienda: Es un elemento del vector de perturbaciones u_t del SVAR, que representa un cambio inesperado en el precio de la vivienda, que impacta en el largo plazo en el vector de variables endógenas del modelo.

Choque nominal: Es un elemento del vector de perturbaciones u_t del SVAR, que representa un cambio inesperado en la tasa de inflación, que impacta en el largo plazo en el vector de variables endógenas del modelo.

Choque de oferta agregada: Es un elemento del vector de perturbaciones u_t del SVAR, que representa un cambio inesperado en el producto real de la economía, que impacta en el largo plazo en el vector de variables endógenas del modelo.

Choque de oferta de vivienda: Es un elemento del vector de perturbaciones u_t del SVAR, que representa un cambio inesperado en el Índice de Costos de Vivienda, que impacta en el largo plazo en el vector de variables endógenas del modelo.

Choque de portafolio local: Es un elemento del vector de perturbaciones u_t del SVAR, que representa un cambio inesperado en el Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, que impacta en el largo plazo en el vector de variables endógenas del modelo.

Estacionariedad: Es una propiedad de series de tiempo que hace que una determinada serie tenga media y varianza finita. Es una condición necesaria para obtener las soluciones de un SVAR.

Índice de costos de construcción: Es la suma ponderada del Índice de Materiales de Construcción y el Costo Unificado de Mano de Obra, ambos elaborados y publicados por el INEI.

Índice de costos de terreno: Es el promedio de las medianas trimestrales de los precios de terreno de los distritos del sector alto de Lima-Metropolitana, medido en soles por m², con base en el año 1999.

Índice de costos de vivienda: Es la suma del índice de costos de la construcción medido en el año base 1999 y el índice de costos del terreno medido en el año base 1999.

Índice General de la Bolsa de Valores de Lima: Índice conformado por las acciones más representativas de la Bolsa de Valores de Lima, seleccionadas por su frecuencia de negociación, monto negociado y número de operaciones. Las variaciones de este índice reflejan las ganancias o pérdidas producto de variaciones de precios, así como por entrega de dividendos.

Índice de Precios al Consumidor: Mide la evolución del costo de la canasta de consumo. En el Perú, al igual que en la mayor parte de países, el índice de precios al consumidor (IPC) se calcula oficialmente utilizando la fórmula de Laspeyres, en la que se compara el valor de una canasta de bienes de consumo típica de las familias, a precios corrientes, con el valor de la misma canasta en un año base. El seguimiento de la inflación se realiza a través de la evolución del índice de precios al consumidor de Lima Metropolitana.

Inflación: Aumento persistente del nivel general de los precios de la economía, con la consecuente pérdida del valor adquisitivo de la moneda. Se mide generalmente a través de la variación del índice de precios al consumidor.

Precio de la vivienda: Es el promedio de las medianas trimestrales de los precios de departamentos de los distritos del sector alto de Lima-Metropolitana, medido en soles constantes por m² del año 2009.

Producto Bruto Interno Real: Suma de los valores monetarios de los bienes y servicios producidos en un país durante un ejercicio, está expresado en soles constantes del 2007. La expresión real o constante se refiere a los precios medidos descontando los efectos de la inflación.

Raíz unitaria: Es una característica de una serie de tiempo no estacionaria.

Ratio Precio de venta/Ingreso por alquiler anual (Price to Earnings Ratio - PER): El PER es equivalente a la relación precio/ganancias de las acciones. Representa cuántos años se tendría que alquilar la propiedad para recuperar el valor del inmueble.

SVAR: Se refiere a un modelo de vectores autorregresivos estructurales, que busca determinar los efectos de diversos choques de la economía sobre un conjunto de variables endógenas. El término estructural se añade debido a que incorpora aspectos teóricos al momento de definir la matriz de restricciones.

Tasa de Interés Real: Es la tasa de interés que habría prevalecido en ausencia de expectativas de inflación. Se calcula descontando a la tasa de interés nominal el efecto de la inflación.

Variable fundamental: Está referida a los factores o determinantes de largo plazo que explican el comportamiento de la variable endógena (en este caso el precio de la vivienda) en el modelo SVAR. Para el modelo de burbuja intrínseca, el fundamento se encuentra definido por el alquiler de vivienda; esto de ninguna manera implica una contradicción entre ambos enfoques, debido a que en equilibrio y en ausencia de arbitraje la tasa de alquiler recoge de manera implícita e indirecta estos factores que afectan el precio.

Se pasan a revisar a continuación los modelos, conceptos, evidencia empírica y resultados teóricos relacionados con el tema de estudio; los cuáles serán de utilidad y se emplearán en el desarrollo de la investigación. Asimismo, se presentará el modelo de Fry del sector hipotecario en el largo plazo del cual se parte para la realización de este trabajo, además del modelo de Froot y Obsteld para testear la presencia de burbuja intrínseca en el mercado de vivienda peruano.

3.2. Modelo de inversión en vivienda

3.2.1. El mercado de vivienda: La oferta

La función de producción de la construcción de nuevas viviendas, con factor de producción β con rendimientos a escala decrecientes:

$$I^H = AX^\beta; 0 < \beta < 1 \quad (1)$$

Los factores de producción en proporciones fijas (Leontief):

$$L = aX \quad ; \quad Q = bX \quad (2)$$

El costo total de producción del insumo compuesto X (L=trabajo y Q=materiales de construcción):

$$CT_X = WL + p^Q Q \quad (3)$$

El índice de costes de construcción:

$$P = \frac{CT_X}{X} = aW + bp^Q \quad (4)$$

El beneficio de la empresa constructora (Π):

$$\Pi = p^H I^H - PX = p^H I^H - P \left(\frac{I^H}{A} \right)^{1/\beta} \quad (5)$$

Maximizando los beneficios (Π):

$$p^H = CMg$$

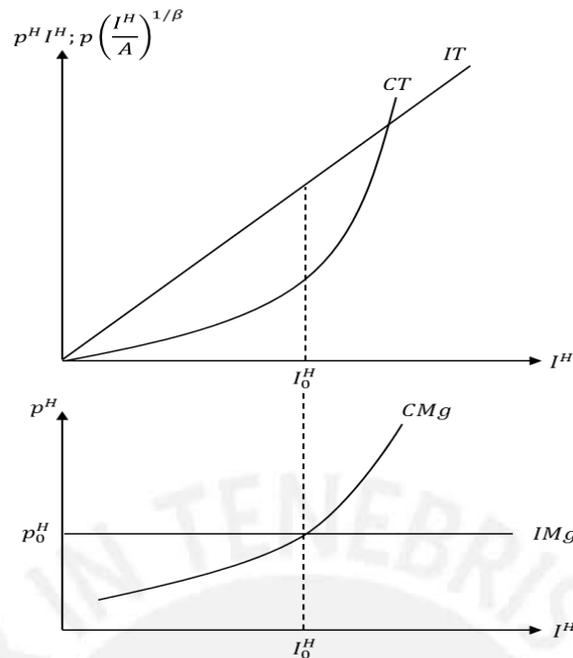
de (5),

$$p^H = \frac{P}{\beta A} \left[\frac{I^H}{A} \right]^{(1-\beta)/\beta} \quad (6)$$

Despejando el nivel de inversión en vivienda:

$$I^H = k \left[\frac{p^H}{P} \right]^{\beta/(1-\beta)} ; \quad k \equiv \beta^{\beta/(1-\beta)} A^{1/(1-\beta)} \quad (7)$$

Gráfico N° 17
Los determinantes de la inversión



3.2.2. El mercado de vivienda: La demanda

Las preferencias de las familias representadas en una función de utilidad del tipo Cobb-Douglas:

$$U = H^n C^{1-n}; 0 < n < 1 \quad (8)$$

Donde H se refiere a los servicios de vivienda y C a bienes no duraderos

La restricción presupuestal del consumidor, normalizando el precio de los bienes duraderos C:

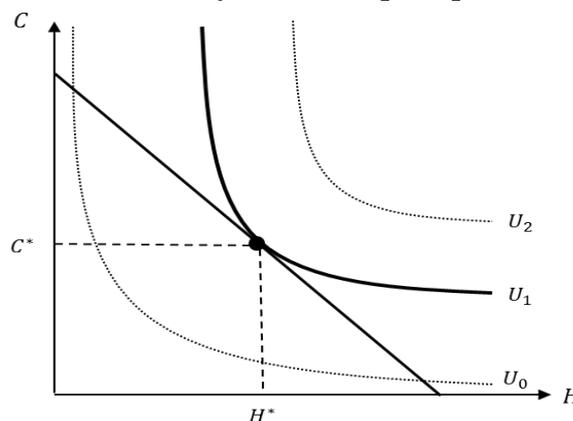
$$Y = C + (r + \delta)p^H H \quad (9)$$

Siendo r la tasa de financiamiento de la vivienda o llamado también el costo del crédito hipotecario.

δ es el costo de reposición o mantenimiento para compensar y cubrir la depreciación

$$C = Y - (r + \delta)p^H H \quad (10)$$

Gráfico N° 18
Preferencias y restricción presupuestal



La cantidad de viviendas que hace máxima su utilidad:

Incorporando (10) en (8),

$$U = H^n [Y - (r + \delta)p^H H]^{1-n} \quad (11)$$

Primera condición de maximización:

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0$$

De (11),

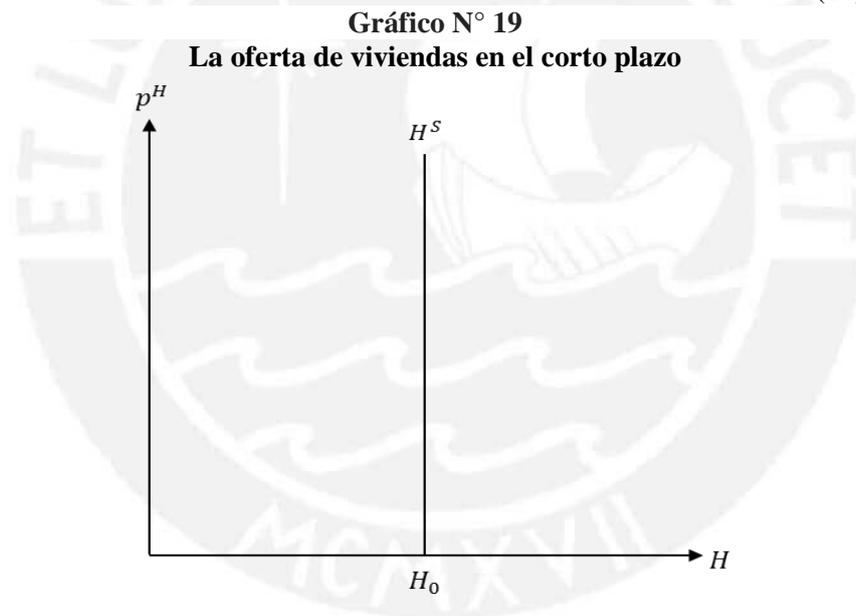
$$H^d = \frac{nY}{(r+\delta)p^H} \quad (12)$$

La vivienda varía negativamente con los costos de uso r y δ de la misma y con su precio p^H

3.2.3. El mercado de vivienda en el corto plazo

En el corto plazo la oferta de viviendas está fija (H_0).

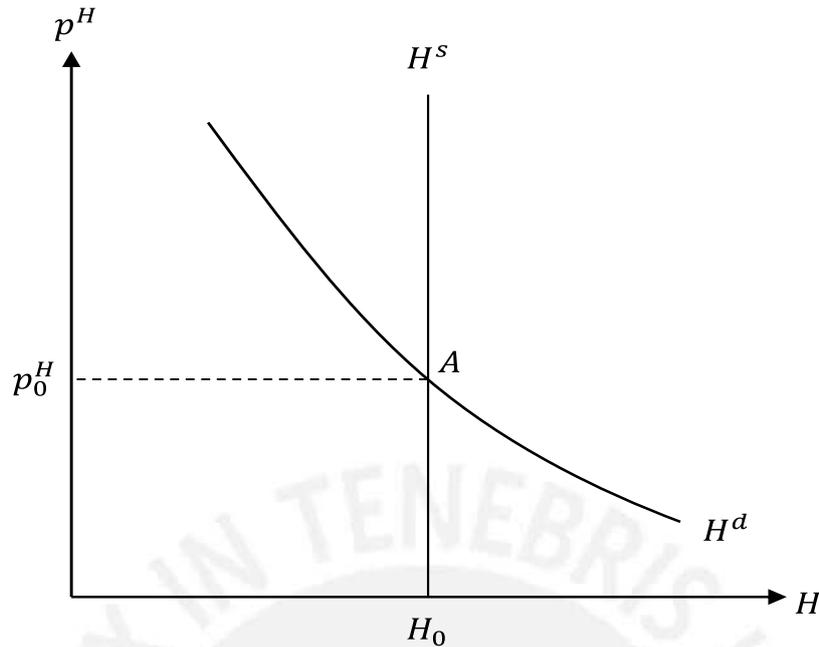
$$H^s = H_0 \quad (13)$$



Por lo tanto, la demanda determina el precio de las viviendas en el corto plazo

$$p^H = \frac{nY}{(r+\delta)H_0} \quad (14)$$

Gráfico N° 20
El mercado de viviendas en el corto plazo



Se puede observar que el precio de equilibrio solo cambia por modificaciones en la demanda de vivienda.

La nueva función de inversión en construcción:

Reemplazando (14) en (7)

$$I_t^H = k \left[\frac{nY}{(r+\delta)PH_0} \right]^{1-\beta}; \quad k \equiv \beta^{\beta/(1-\beta)} A^{1/(1-\beta)} \quad (15)$$

En su forma reducida:

Reemplazando (4) en (15),

$$I_t^H = k \left[\frac{nY}{(r+\delta)(aW+bp^Q)H_0} \right]^{1-\beta}; \quad k \equiv \beta^{\beta/(1-\beta)} A^{1/(1-\beta)} \quad (16)$$

En conclusión, la inversión en vivienda en su forma reducida depende de:

$$I^H = I^H(Y, H_0, r, \delta, W, p^Q) \quad (17)$$

3.2.4. La dinámica del mercado de viviendas

Abandonando el supuesto de que el stock de viviendas está dado en el corto plazo. El stock de viviendas *al inicio* del periodo actual depende de la cantidad de vivienda que se deprecia en periodos previos y de la reinversión en vivienda del siguiente modo:

$$H_t = (1 - \delta)H_{t-1} + I_{t-1}^H \quad (18)$$

El modelo dinámico sencillo del mercado de viviendas utilizando los resultados anteriores con las endógenas que cambian en el tiempo p^H , I_t^H y H_t .

$$p^H = \frac{nY}{(r+\delta)H_0} \quad (14)$$

$$I_t^H = k \left[\frac{p^H}{P} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}; k \equiv \beta^{\beta/(1-\beta)} A^{1/(1-\beta)} \quad (7)$$

$$H_t = (1 - \delta)H_{t-1} + I_{t-1}^H \quad (18)$$

3.2.5. El mercado de vivienda en el equilibrio estacionario

En estado estacionario por definición:

$$(H_{ee} = H_t = H_{t-1}; I_{ee}^H = I_t^H = I_{t-1}^H)$$

La ecuación dinámica (18) se transforma en,

$$I_{ee}^H = \delta H_{ee} \quad (19)$$

Donde el nivel de inversión en estado estacionario compensa exactamente la depreciación de tal forma que el stock de viviendas H_{ee} se mantenga constante.

El equilibrio del mercado de viviendas en el estado estacionario:

$$\frac{I_{ee}^H}{\delta} = H_{ee}^s = \frac{k}{\delta} \left[\frac{p_{ee}^H}{P} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}; k \equiv \beta^{\beta/(1-\beta)} A^{1/(1-\beta)} \quad (20)$$

De la ecuación (20) se puede observar que la oferta de viviendas en equilibrio estacionario depende positivamente de p_{ee}^H

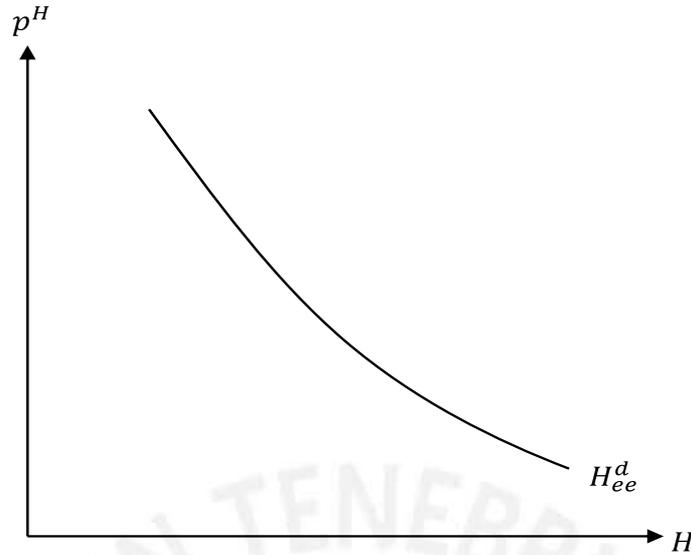


De la ecuación (14),

$$p_{ee}^H = \frac{nY}{(r+\delta)H_{ee}} \quad (21)$$

Gráfico N° 22

La demanda de viviendas en el equilibrio estacionario



Resolviendo el sistema de ecuaciones (20), (21) y (4), se obtienen las soluciones para el precio de la vivienda en estado estacionario y el stock de viviendas en estado estacionario, los cuáles ahora dependen de factores de oferta y demanda.

$$H_{ee}^s = \left(\frac{k}{\delta}\right)^{1-\beta} \left[\frac{nY}{(r+\delta)(aW+bp^Q)}\right]^\beta \quad (22)$$

$$p_{ee}^H = (aW + bp^Q)^\beta \left[\frac{\delta nY}{k(r+\delta)}\right]^{1-\beta} \quad (23)$$

3.3. Modelo de Fry del sector hipotecario en el largo plazo

Se asume la existencia de agentes en el mercado de vivienda que escogen un nivel de inversión con el objetivo de maximizar su flujo descontado de beneficios:

$$\max_I \Pi(t) = \int_t^\infty e^{-R.(s-t)} . [P^h(s).h(s) - P^I(s).I]. ds$$

$$s. a. \dot{h} = \psi(I, h) - \delta. h$$

donde P^h es el precio de una vivienda, P^I es el precio de inversión en el activo vivienda, h e I representan el acervo y la inversión en vivienda, R es la tasa de interés nominal, $\psi(I, h)$ caracteriza a la función de instalación de vivienda, la cual es monótona creciente y cóncava en la inversión y acervo de vivienda¹⁹; y δ es la tasa de depreciación de las viviendas. Por simplicidad el modelo asume que $P^h = P^I$ y que, además, estos precios crecen a la misma tasa que la inflación en estado estacionario.

El Hamiltoniano en valor corriente del problema está dado por:

$$\bar{H} = P^h . (h - I) + m . [\psi(I, h) - \delta . h]$$

¹⁹ Hayashi (1982). Dada una cantidad de terreno para construcción fija; la acumulación marginal de vivienda y la inversión es decreciente en el stock de viviendas.

siendo m una variable de coestado. Para ver los detalles y derivación extendida del modelo ir al Anexo I.

Haciendo uso de supuestos, cambios de variable y utilizando resultados como el de la Teoría q – Tobin de inversión, llegamos a las ecuaciones que caracterizan al sector vivienda, las cuáles serán importantes al momento de llevarlas al SVAR para definir el ordenamiento y el signo esperado de los choques estructurales.

$$c = \beta \cdot y + c_0$$

$$p^h = \alpha \cdot \beta \cdot y + \alpha \cdot c_0 - r - \phi$$

Las ecuaciones obtenidas son utilizadas para identificar las ecuaciones de oferta y demanda por vivienda. Un choque en la oferta de vivienda se identifica con un cambio en los costos. Por otro lado, un choque en la demanda agregada es analizado por medio de los cambios en la tasa real de la economía.

3.4. Modelo de dividendos descontados para el precio de las acciones

En el mercado de capitales, suponiendo que solamente existen bonos y acciones; un inversionista solamente tendrá estas dos opciones de inversión, y en equilibrio la inversión en acciones debe ser tan atractiva como la inversión en bonos, esta es llamada la condición de arbitraje.

El rendimiento esperado de las acciones viene a ser: $D_t^e + (V_{t+1}^e - V_t)$. Donde D_t^e son los dividendos esperados al final del período t , los cuales son una fracción de los beneficios π_t de la empresa que se distribuyen entre los accionistas de la misma. La otra fracción de π_t se destina a la inversión I_t . V_{t+1}^e representa el valor esperado de la empresa o el valor de sus acciones en $t+1$, y V_t representa el mismo valor en t .

Si el accionista vende sus acciones de valor V_t y compra bonos; estos bonos rendirán $r \cdot V_t$ siendo r el rendimiento o tasa de interés real de los bonos para el período t .

Es necesario hacer notar que el rendimiento un bono es más seguro en comparación al rendimiento de una acción debido a que r se fija al momento de la compra del bono, mientras el rendimiento de las acciones depende de variables esperadas; es decir el bono es menos riesgoso que la acción. De esta aseveración al comparar las rentabilidades de ambos instrumentos tenemos:

$$r \cdot V_t < D_t^e + (V_{t+1}^e - V_t)$$

Por lo tanto, para mantener la condición de arbitraje mencionada en un inicio se debe agregar una prima por riesgo ε al rendimiento de los bonos para igualarlo al rendimiento de las acciones.

$$(r + \varepsilon) \cdot V_t = D_t^e + (V_{t+1}^e - V_t)$$

Reordenando se tiene:

$$V_t = \frac{D_t^e + V_{t+1}^e}{1 + r + \varepsilon}$$

Iterando n veces esta expresión y haciendo reemplazos sucesivos obtenemos el valor de mercado de la empresa o precio fundamental de las acciones:

$$V_t = \frac{D_t^e}{1 + r + \varepsilon} + \dots + \frac{D_{t+n-1}^e}{(1 + r + \varepsilon)^n} + \frac{V_{t+n}^e}{(1 + r + \varepsilon)^n}$$

Es razonable suponer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_{t+n}^e}{(1+r+\varepsilon)^n} = 0$. Esto evita la existencia de burbujas en el precio al hacer que el valor presente de las acciones V_t no dependa de su comportamiento futuro V_{t+n}^e .²⁰

Para hacer máximo en Bolsa el precio de mercado de las acciones de la empresa V_t , necesito maximizar cada uno de los dividendos de los propietarios; y esto sólo será posible maximizando los beneficios de la empresa debido ya que los dividendos son resultado de estos beneficios.

3.5. Modelo de inversión q de Tobin

Se define una variable q_t como el ratio del valor de mercado de la empresa V_t que ya se definió anteriormente, respecto al costo de reposición del stock de capital $v_t \cdot K_t$.

$$q_t = \frac{V_t}{v_t \cdot K_t} = \frac{V_t}{K_t} \text{ con } v_t = 1 \text{ normalizado}$$

A partir de esta expresión q_t también se puede interpretar como el valor de las acciones de la empresa por unidad de capital. Es importante mencionar que la q_t permite validar empíricamente la Teoría de la Inversión.

Reordenando la expresión anterior expresamos el valor de la empresa en función de q_t y K_t :

$$V_t = q_t \cdot K_t$$

Los planes para realizar un monto de inversión I_t en el período t es comunicado previamente a los accionistas; se recuerda que los beneficios de la empresa son destinados a dividendos e inversión, de modo que a mayor inversión reduce el monto de dividendos a ser repartidos. De este modo conociendo el monto de inversión en t ya se puede determinar el capital K_{t+1} .

$$K_{t+1} = K_t + I_t$$

Además, los accionistas esperan que: $q_{t+1}^e = q_t$. Llevando un período adelante la expresión para el valor de la empresa y utilizando este supuesto se tiene:

$$V_{t+1}^e = q_{t+1}^e \cdot K_{t+1} = q_t \cdot K_{t+1}$$

$$V_{t+1}^e = q_t \cdot (K_t + I_t)$$

Los dividendos como fracción de los beneficios vienen expresados como:

$$D_t^e = \pi_t^e - I_t - C(I_t)$$

Donde I_t se puede interpretar como un costo de inversión por incorporación de nuevo capital y $C(I_t)$ son los costos de ajuste o costos de instalación de la inversión (costos de capacitación, de reorganización, etc).

Utilizando el resultado previo del modelo de dividendos descontados, además por las expresiones anteriores se puede observar que los dividendos esperados y el valor esperado de la empresa dependen del nivel de inversión.

$$V_t = \frac{D_t^e(I_t) + V_{t+1}^e(I_t)}{1 + r + \varepsilon}$$

Se buscará hallar el nivel de inversión I_t que maximice el valor de mercado de la empresa:

²⁰ En este trabajo se utiliza el Modelo de Dividendos Descontados en su versión estocástica (Myron Gordon's 1962), que brindará un resultado útil al momento de encontrar la parte fundamental de la solución en el Modelo de Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld. Para ver el desarrollo completo y su aplicación al mercado de bienes raíces ir al Anexo 3.

$$\max_{\{I_t\}} V_t = \frac{\pi_t^e - I_t - C(I_t) + q_t \cdot (K_t + I_t)}{1 + r + \varepsilon}$$

Utilizando las condiciones de primer orden se tiene:

$$\frac{\partial V_t}{\partial I_t} = \frac{-1 - C'(I_t) + q_t}{1 + r + \varepsilon} = 0$$

$$q_t = 1 + C'(I_t)$$

Se puede observar que $\partial K_{t+1}/\partial I_t = 1$, $\partial I_t/\partial I_t = -1$ representando el costo de adquirir una unidad adicional de capital; y $\partial C(I_t)/\partial I_t = C'(I_t)$ representando el costo marginal de instalación de una unidad adicional de capital. Además $\partial V_{t+1}^e(I_t)/\partial I_t = q_t$ representa cuanto aumenta el valor esperado de la empresa debido a un incremento de una unidad de inversión, por lo tanto q_t es la ganancia de capital esperada.

El modelo de inversión de Tobin asume costos de ajuste para evitar tasas de cambio infinitas para la inversión. Además, introducir dichos costos resultará en un agente que invierte pensando en el futuro.

Entre los principales supuestos se tiene: **i)** El inversionista maximiza el valor presente del flujo de beneficios. **ii)** Al invertir, incurre en un costo hundido de “instalación” por encima del costo de la inversión misma.

Asumiendo que el costo de instalación/ajuste tiene la siguiente forma funcional:

$$\frac{\chi}{2} \cdot \frac{I_t^2}{K_t}$$

Por lo tanto, mientras más rápido el ajuste del capital (mayor I), más alto el costo promedio y marginal.

La firma buscará maximizar:

$$\sum_{s=t}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot \left[A_s \cdot F(K_s, L_s) - \frac{\chi}{2} \cdot \frac{I_t^2}{K_t} - w_s \cdot L_s - I_s \right]$$

sujeto a: $K_{t+1} - K_t = I_t$

El Lagrangiano asociado a este problema sería:

$$\mathcal{L}_t = \sum_{s=t}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{s-t} \cdot \left[A_s \cdot F(K_s, L_s) - \frac{\chi}{2} \cdot \frac{I_t^2}{K_t} - w_s \cdot L_s - I_s + q_s \cdot (I_t + K_t - K_{t+1}) \right]$$

Al derivar respecto al trabajo y a la inversión obtenemos estas dos condiciones:

$$A_t \cdot F_L(K_t, L_t) = w_t$$

$$q_t = \chi \cdot \frac{I_t}{K_t} + 1$$

donde q puede interpretarse como el precio sombra del capital. Por lo tanto, es condición para un óptimo que el precio sombra del capital iguale el costo marginal de la inversión. La condición puede ser formulada de la siguiente forma:

$$I_t = \frac{q_t - 1}{\chi} \cdot K_t$$

La inversión sólo aumenta cuando el precio sombra q del capital instalado excede el precio del capital nuevo (1). En otras palabras, la firma incrementa su capital sólo si su valoración privada del mismo es mayor al costo de mercado.

El comportamiento dinámico de la solución es descrito a través del siguiente sistema que se obtiene de las condiciones de primer orden.

$$K_{t+1} - K_t = \frac{q_t - 1}{\chi} \cdot K_t$$

$$q_{t+1} - q_t = r \cdot q_t - A \cdot F_k \left(K_t \left(1 + \frac{q_t - 1}{\chi} \right), L_t \right) - \frac{1}{2 \cdot \chi} \cdot (q_{t+1} - 1)^2$$

Puede demostrarse que q marginal (con la que se ha estado trabajando) es igual a q promedio. Ello implica que el valor de mercado en bolsa de una firma puede utilizarse para aproximar q .²¹

3.6. Modelo de Burbuja de Intrínseca de Froot y Obsteld

Este modelo busca determinar si la elevación precio de los bienes raíces ha respondido al comportamiento de variables fundamentales, o por otro lado se debe a la presencia de una burbuja en el mercado inmobiliario.

En una **primera etapa** obtiene el precio teórico de equilibrio (precio intrínseco) de la vivienda, es decir, el valor que se deriva de del fundamento. Al comparar la información teórica de los precios obtenida con el modelo, con los valores observados de los precios, se podrán calcular las diferencias entre ambos precios, definiendo si se ha producido una sobrevaloración sostenida del precio observado con respecto al precio teórico, además de poder identificar el momento cuando los precios se desvían.

En una **segunda etapa testea** la existencia de una burbuja intrínseca en el precio de los bienes raíces. Se considera burbuja intrínseca debido a que es originada por la sobrereacción de los agentes a cambios en el fundamento que determina el precio teórico, y no debido a la ocurrencia de factores exógenos. En este sentido, los trabajos que se basan en este modelo buscan determinar en qué medida ha influido el fundamento en la evolución del precio de los bienes raíces.

El modelo para explicar burbuja intrínseca para el precio de los activos en EEUU desarrollado por **Froot y Obsteld (1991)** ha sido abordado en diversos estudios y aplicaciones para el mercado inmobiliario norteamericano cuyos resultados sugirieron la existencia de este tipo de burbuja que explica la evolución de los precios de la vivienda. La capacidad que han demostrado estos modelos para capturar comportamientos recientes del mercado inmobiliario podría ser otro factor para justificar su uso.

A continuación, presentamos un primer enfoque para abordar el modelo a partir del cual se pretende obtener el precio teórico de equilibrio para la vivienda, siguiendo a Poterba (1984). Supuesto: Ausencia de arbitraje entre el alquiler y la compra de la vivienda. En equilibrio el coste de tener una vivienda en propiedad para el inversionista ha de ser igual a la renta (alquiler) que se obtiene de esta.

$$R = (r + \delta + m + \rho - \pi^e) \cdot P$$

Donde el costo de uso está compuesto por: r que representa el tipo de interés del préstamo hipotecario, δ la tasa de depreciación, m el coste de mantenimiento, ρ la prima por riesgo y π^e la

²¹ La demostración está basada en Tobin's Marginal q and Average q : A Neoclassical Interpretation. Hayashi – 1982. Econometrica, Vol. 50, No. 1. (Jan., 1982), pp. 213-224.

revalorización esperada del capital. Los agentes demandaran vivienda hasta que el ingreso marginal por el alquiler real o renta imputada sea igual al costo marginal de uso ($r + \delta + m + \rho - \pi^e$). El inversionista compra una vivienda en el mercado de construcción con el objetivo de volverla a alquilar a demandantes finales; por lo tanto, tendrá incentivo a adquirir una vivienda adicional en la medida que el ingreso que recibe producto del alquiler cubre el costo marginal de su uso. Considerando expectativas racionales la revalorización esperada de la vivienda es:

$$\pi^e = \frac{E_t(P_{t+1}) - P_t}{P_t}$$

De este modo podemos escribir:

$$R_t = \left[r_t + \kappa - \left(\frac{E(P_{t+1})}{P_t} - 1 \right) \right] \cdot P_t$$

Donde $\kappa = \rho + m + \delta$

Haciendo $\omega_t = 1 + r_t + \kappa$ despejando el precio de la vivienda P_t y considerando expectativas racionales $E_t(P_{t+1}) = P_{t+1}$. Realizando iteraciones sucesivas hacia el infinito obtenemos el precio (**precio teórico**) en el periodo t como valor presente de los alquileres:

$$P_t = E \left[\frac{R_t}{\omega_t} + \frac{R_{t+1}}{\omega_t \cdot \omega_{t+1}} + \frac{R_{t+2}}{\omega_t \cdot \omega_{t+1} \cdot \omega_{t+2}} + \dots \right] = E \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{R_{t+i}}{\prod_{j=0}^i \omega_{t+j}} \right]$$

La expresión resultante es un análogo del valor presente de las rentas futuras que pagaría cualquier activo financiero siendo el coste de uso ω_{t+j} la tasa de descuento del flujo. La dificultad que se presenta ahora se debe a que las rentas (alquileres imputados R_{t+i}) según la expresión son no observables. **Hott y Monnin (2008)** proponen calcular una **renta fundamental** a partir del equilibrio del mercado de servicios de vivienda.

Un agente representativo demanda servicios de vivienda d_t y consumo c_t que maximiza su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria.

$$\begin{aligned} \max_{\{d_t, c_t\}} U(d_t, c_t) &= d_t^\alpha \cdot c_t^{1-\alpha} \\ \text{s. a.} \quad y_t &= d_t \cdot R_t + c_t \end{aligned}$$

La demanda individual de servicios de vivienda es entonces.

$$d_t = \frac{\alpha \cdot y_t}{R_t}$$

La demanda agregada de servicios de vivienda.

$$D_t = \frac{\alpha \cdot y_t \cdot N_t}{R_t} = \frac{\alpha \cdot Y_t}{R_t}$$

En equilibrio se cumple que la demanda agregada es igual a la oferta agregada (stock de viviendas) $D_t = S_t$. A partir de aquí obtenemos el precio de la vivienda como:

$$P_t = E \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot Y_{t+i}}{S_{t+i} \cdot \prod_{j=0}^i \omega_{t+j}} \right]$$

Se está suponiendo que los agentes que demandan servicios de vivienda ajustan su cantidad de vivienda demandada d_t cada periodo en función de su renta disponible y_t . Debido a esto el alquiler R_t es muy sensible a cambios en la renta disponible y_t . Se observa aquí:

$$R_t = \frac{\alpha \cdot y_t \cdot N_t}{S_t}$$

Según **Bajari et al. (2010)** los hogares reducen consumo antes que su stock de vivienda cuando se producen reducciones de la renta disponible y_t . Por ello, es necesario utilizar una medida suavizada para medir el alquiler R_t .

3.6.1. La burbuja intrínseca

Este tipo de burbuja no obedece a factores exógenos ajenos a las variables que determinan el valor teórico, sino que es provocada por la sobre-reacción de los agentes al cambio en los factores fundamentales. El precio de la vivienda en el periodo t está determinado por el valor presente de los alquileres A_t y el precio esperado para el periodo siguiente:

$$P_t = \frac{E(A_t + P_{t+1})}{1 + r_t + \kappa}$$

Iterando y haciendo sustituciones sucesivas en el precio se obtiene la parte de la ecuación de donde se puede obtener la solución fundamental.

$$P_t^{pv} = \sum_{s=t}^{\infty} \frac{E[R_s]}{(1 + r_t + \kappa)^{s-t+1}}$$

Pero además existen más soluciones llamadas soluciones de burbuja B_t . Así la solución completa al problema está dada por $P_t = P_t^{pv} + B_t$.²²

4. Hipótesis de la investigación

En el presente trabajo se plantea la siguiente hipótesis como respuesta al problema de investigación:

El precio de los bienes raíces residenciales en el Perú, en el período 1998-2015, ha sobre-reaccionado al comportamiento de su variable fundamental.

5. Estimación del modelo y resultados

En este apartado se presentan los aspectos teóricos de la metodología, así como los datos y los resultados para el modelo SVAR de Blanchard y Quah y en la parte final los resultados para el modelo de burbuja intrínseca de Froot y Obsteld.

5.1. Metodología

5.1.1. Structural VAR de Blanchard Quah

Se propone utilizar la metodología para especificar y estimar un SVAR a lo Blanchard y Quah mostrada por el “Centre for Central Banking Studies”, con el propósito de analizar el comportamiento del precio en el mercado de bienes raíces residenciales cuando lo sometemos a

²² Se extiende este tema en la parte de Metodología. Para ver el desarrollo completo del modelo ver el Anexo 2.

distintos choques; además de determinar las variables que explican el movimiento del precio en el largo plazo. Se resalta el hecho de la elección del SVAR como metodología de estimación, debido a que, por su naturaleza estructural, permite incorporar resultados obtenidos en modelos de teoría económica al momento de especificar el ordenamiento y la inclusión de los choques en la matriz de impactos de largo plazo; de este modo se pueden estimar las ecuaciones teóricas incorporadas, obtener resultados empíricos para los modelos teóricos propuestos y por lo tanto testear la validez de estos modelos para ciertas economías y bajo ciertas condiciones y contextos. En este sentido un SVAR va más allá de un análisis estadístico de interrelación y causalidad entre un conjunto de variables, sino que además es enriquecido y construido a partir de resultados teóricos, para los cuales se busca probar su veracidad. Otra ventaja de utilizar el SVAR se la puede encontrar en el uso que le han dado otros trabajos de investigación a nivel de Latinoamérica y también algunos pocos en el Perú, orientados a la búsqueda de los determinantes del precio de vivienda; sin embargo, se hace hincapié que en esta investigación se incorpora la información adicional significativa que no fue incluida en estos trabajos previos; por lo tanto, en nuestro caso se elige estimar utilizando SVAR, de modo que posteriormente se faciliten las comparaciones, buscando además mejorar los resultados obtenidos en los trabajos existentes.

Con este objetivo se incluyeron en el SVAR las ecuaciones de precio y costo obtenidas en el modelo de sector hipotecario de largo plazo (Fry et al. 1991)²³, asimismo se utilizó un conjunto de variables incorporando el índice del mercado de valores nacional, además de la serie del índice de costo de terreno, no tomados en cuenta en otros trabajos que se han realizado actualmente en el Perú.

El vector de variables a utilizarse es definido como: $z = [y, igbvl, c, r, \pi, p^h]^T$, donde: y es el logaritmo del producto real, $igbvl$ es el logaritmo del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, c es el logaritmo de la suma del índice de costos de construcción y el índice de costo del terreno, r es la tasa de interés real activa en moneda nacional, π es la tasa de inflación, p^h es el logaritmo del precio por m2 de departamentos en el sector alto de Lima.

En nuestro análisis se especifica un modelo SVAR con las 6 variables. Como se mencionaba anteriormente, esta metodología tiene como principal fortaleza el rico contenido económico, además, de hacer posible la identificación de choques de diferente origen, basados en la teoría económica. El SVAR de k rezagos se presenta como:

$$A. \Delta z_t = (\phi_1.L^1 + \phi_2.L^2 + \dots + \phi_k.L^k). \Delta z_t + \theta + B. u_t$$

El SVAR en su forma reducida viene a ser:

$$[I - A^{-1}.C(L)]. \Delta z_t = \vartheta + A^{-1}.B. u_t^{24}$$

Los choques estructurales que determinan la dinámica del proceso se denotan como un vector de perturbaciones u_t . El orden de los choques es el siguiente:

$$u_t = \begin{bmatrix} \text{Oferta Agregada} \\ \text{Portafolio Local} \\ \text{Oferta de Vivienda} \\ \text{Demanda Agregada} \\ \text{Nominal} \\ \text{Demanda de Vivienda} \end{bmatrix}$$

²³ Para solucionar el modelo se hizo uso de un resultado de la Teoría Q de Tobin, presentado en Hayashi (1982).

²⁴ Se entiende a A como la matriz que guarda las relaciones contemporáneas entre las endógenas del modelo. Se estima el modelo considerando las endógenas como $I(0)$, por lo tanto, estas se especifican en diferencias Δz_t .

Las perturbaciones de la forma reducida y los choques estructurales se relacionan a través de la matriz $A^{-1}.B$ del siguiente modo:

$$e_t = A^{-1}.B.u_t$$

$$\Delta z_t = [I - A^{-1}.C(L)]^{-1}.\vartheta + H.u_t$$

En el largo plazo (estado estacionario) el crecimiento de las variables es constante $\Delta z_{t-j} = \Delta z_t \forall t$ por lo que el modelo se reduce a:

$$\Delta z_t = [I - A^{-1}.\phi_1 - A^{-1}.\phi_2 - \dots - A^{-1}.\phi_k]^{-1}.\vartheta + H.u_t$$

H contiene los parámetros que controlan las propiedades de largo plazo del modelo, es decir captura los efectos de los choques estructurales sobre las endógenas.²⁵

5.1.2. Restricciones e Identificación

La matriz de restricciones ha sido estructurada según el esquema de Blanchard y Quah, es decir, permitirá estimar funciones impulso-respuesta de largo plazo. Además, su construcción está basada y enriquecida por diversos aspectos teóricos, basada también en la especificación propuesta por Fry y en los niveles de endogeneidad y causalidad entre las variables.

$$H = \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{31} & 0 & \theta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} & 0 & 0 \\ \theta_{51} & \theta_{52} & \theta_{53} & \theta_{54} & \theta_{55} & \theta_{56} \\ \theta_{61} & \theta_{62} & \theta_{63} & \theta_{64} & 0 & \theta_{66} \end{bmatrix}$$

Asimismo, se han incorporado 51 restricciones en el modelo AB (36 restricciones en A y 15 en H), de tal modo que permitan la exacta identificación del modelo. Cabe hacer notar, que previamente a la estimación final del SVAR se estimó el modelo con restricciones a lo Cholesky y sin incorporar el índice de costos de terreno, sin embargo, esta forma de estimación no produce resultados muy satisfactorios. La estimación final del SVAR incorporó el índice de costos de terreno y la modificación teórica de las restricciones, mejorando notablemente los resultados.

5.1.3. Burbuja intrínseca de Froot y Obsteld

Se busca testear la existencia de burbuja intrínseca en el mercado de bienes raíces residenciales en el Perú. Con este objetivo, se hará uso del modelo de Froot y Obsteld “Intrinsic Bubbles: The Case of Stock Prices” (1991) que identifica burbujas en el precio de las acciones basadas en la sobrevaloración de los agentes al cambio en los factores fundamentales. En nuestro caso se busca investigar la sobrevaloración del precio de los bienes raíces residenciales, siendo el factor fundamental el alquiler. De este modo se optó por utilizar este mecanismo de estimación, debido a que ha demostrado efectividad al capturar en forma muy cercana la evolución del precio (su sobrevaloración y caída) en diversos trabajos empíricos, destacando entre estos, documentos elaborados para el caso Español que buscan explicar el comportamiento del precio de la vivienda en la Crisis Financiera del 2008, trabajos realizados en Europa y Estados Unidos, y especialmente el paper de Froot y Obsteld que replica la evolución del precio de las acciones antes de la II Guerra Mundial (1900-1945) y después de esta (1946-1990), capturando de manera muy precisa el boom económico que siguió al término del conflicto. Una razón adicional para interesarnos en utilizar esta forma de estimación, está relacionada a que, en comparación a otros test de identificación de burbujas basados en análisis puramente estadísticos, la solución propuesta por Froot y Obsteld

²⁵ Para ver más detalles de esta metodología ver Anexo II.

proviene de un modelo teórico fundamentado, ofreciendo de esta forma resultados más sólidos. En este sentido, un aspecto importante a destacar, es la forma no lineal de la solución que representa el comportamiento de la burbuja de precios, interpretándose el termino no lineal como aquel que genera el comportamiento explosivo en el precio debido a una sobre-reacción de su propio fundamento (el alquiler). Al depender la solución de burbuja solamente de su fundamento, ayuda a simplificar el trabajo, pues ya no es necesario pensar en una diversidad de factores exógenos como probables causas de la explosión del precio de vivienda, por el contrario, el comportamiento explosivo es explicado exclusivamente por el alquiler, esto debido a que en equilibrio el alquiler equivale en cierto modo a un conjunto de variables de las cuales depende el precio de vivienda en el largo plazo (choques estructurales como se ve en el SVAR); en otras palabras los impactos sobre la dinámica del precio debido a choques estructurales en el largo plazo, son transmitidos en forma indirecta hacia el precio a través del alquiler.²⁶

Ahora se presentan los resultados principales del modelo, donde el precio de la vivienda en el periodo t está determinado por el valor presente de los alquileres A_t y el precio esperado para el periodo siguiente.²⁷

$$P_t = e^{-r} \cdot E_t(A_t + P_{t+1})$$

El valor presente para el precio del bien raíz bajo condición de transversalidad cero queda definido como:

$$P_t^{pv} = \sum_{s=t}^{\infty} e^{-r \cdot (s-t+1)} \cdot E_t(A_s)$$

Se asume que el alquiler sigue un crecimiento estocástico de acuerdo con el modelo de crecimiento estocástico de dividendos de Myron-Gordon. Por lo tanto, el logaritmo de los alquileres se comporta como una martingala donde ε_{t+1} es una variable aleatoria normal con media cero y varianza σ^2 .

$$a_{t+1} = \mu + a_t + \varepsilon_{t+1}$$

Utilizando estos resultados se prueba que, para la parte fundamental del comportamiento del precio, este es proporcional al alquiler en un factor κ .

$$P_t^{pv} = \kappa \cdot A_t \quad \text{donde: } \kappa = (e^r - e^{\mu + \sigma^2/2})^{-1}$$

Adicionalmente se pueden obtener más soluciones a partir de una secuencia de variables aleatorias $\{B_t\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfacen $B_t = e^{-r} \cdot E_t(B_{t+1})$ tal que $B_t(A_t) = c \cdot A_t^\lambda$ es la solución burbuja.

Finalmente, la ecuación de la burbuja intrínseca de Froot y Obsteld que contiene la solución fundamental y la solución burbuja:

$$P_t = \kappa \cdot A_t + c \cdot A_t^\lambda$$

Con este propósito se recuperarán los parámetros μ y σ^2 a partir de la estimación martingala de los alquileres usando OLS, la misma que es contrastada con un test de raíz unitaria. Utilizando

²⁶ Este resultado se deriva de la condición de ausencia de arbitraje entre alquiler y compra de vivienda: En equilibrio el coste de tener una vivienda en propiedad ha de ser igual a la renta (alquiler) que se obtiene de esta. La condición propuesta se representa a través de $(r + \delta + m + \rho - \pi^e) \cdot P = A$, donde r que representa el tipo de interés del préstamo hipotecario, δ la tasa de depreciación, m el coste de mantenimiento, ρ la prima por riesgo y π^e la revalorización esperada del capital. Para ver en más detalle ver la sección 3.5.

²⁷ Esta expresión también proviene de la condición de arbitraje, además es equivalente a la presentada en la sección 3.5.1. en términos discretos.

estos parámetros para calcular exponentes λ que describen el proceso explosivo del fundamento, para posteriormente probar la significancia de parámetros de la ecuación de burbuja intrínseca.²⁸

5.2. Los datos

En el trabajo se utiliza la denominación empleada por el Banco Central de Reserva del Perú sobre los precios por m2 del Sector Alto de Lima que incluye los precios de departamentos en venta de los distritos de La Molina, Miraflores, San Isidro, San Borja y Surco. Los niveles socioeconómicos asociados al sector alto, detallados por la Asociación Peruana de Empresas de Investigación de Mercados²⁹, se concentran en los niveles A, B y C. Tal como se muestra a continuación:

Cuadro N° 04
Distribución de niveles socioeconómicos asociados al sector alto de Lima
(La Molina, Miraflores, San Isidro, San Borja y Surco)

NSE A	NSE B	NSE C	NSE D	NSE E	TOTAL
29.4	45.1	17.6	5.6	2.3	100

Fuente: Asociación Peruana de Empresas de Investigación de Mercados

Es importante precisar que para este trabajo se hace uso únicamente de los datos de este sector, debido que los precios por m2 de departamentos se encuentran disponibles en el Banco Central de Reserva del Perú a partir del año 1998, a diferencia de otros sectores cuyo registro empieza a partir del año 2007, lo cual es importante para una adecuada estimación del modelo SVAR que requiere un importante número de observaciones. Por otro lado, la acotación a este sector alivia sustancialmente el trabajo de campo para la recolección de los datos no disponibles de las variables del costo de terreno y de los alquileres de departamentos.

Es importante precisar que el Banco Central de Reserva del Perú realiza un seguimiento y registro de precios de venta de departamentos, desde enero de 1998, y de alquileres de departamentos, desde mayo de 2010. En este sentido, para el caso de los alquileres, como parte de este trabajo de investigación se hizo una reconstrucción de los datos faltantes siguiendo la metodología empleada por el BCRP.

Los precios de venta y alquiler son las medianas de los precios de todas las observaciones contenidas en un trimestre. Las medianas son calculadas de una muestra que contiene información de precios de oferta de departamentos de cinco distritos de Lima Metropolitana: La Molina, Miraflores, San Borja, San Isidro y Surco. Con ello, el precio de cada distrito es la mediana de la muestra del distrito, mientras que el precio del sector es la mediana del total de la muestra.

Los datos son obtenidos mediante encuestas realizadas con frecuencia semanal, las que tienen como fuente de información la sección Urbana del diario El Comercio, así como la página web con el mismo nombre. Para la selección de la muestra se emplea el método de muestreo aleatorio simple.

Respecto al índice de los costos de terrenos, el BCRP no cuenta con una serie publicada y actualizada de esta variable. Por este motivo, al igual que en el caso de los alquileres se construirá la serie correspondiente utilizando la metodología mencionada.

Las variables PBI real, precio de departamentos, inflación, alquiler (2010 III – 2015 IV) se obtuvieron de la página web del BCRP. En el caso del IGBVL se obtuvo de la página web de la Bolsa de Valores de Lima. El índice de costos de construcción de la página web del INEI y la tasa activa promedio en moneda nacional de la página web del BCRP.

²⁸ Para ver los detalles y demostración del modelo ir al Anexo III.

²⁹ Asociación Peruana de Empresas de Investigación de Mercados, Niveles Socioeconómicos 2015, Lima julio del 2015.

Las series construidas

Es necesario hacer notar que un importante aporte del trabajo es la construcción de la base de datos para la variable índice de costos de terreno y para la serie de precios de los alquileres, casi inexistente en el Perú hasta entonces. Cabe resaltar que para el caso del índice de costos de terreno el BCRP solamente cuenta con la información para el período 2007 II – 2013 I; por lo que se recopilieron los datos faltantes para los períodos 1998 I – 2007 I y 2013 II – 2015 VI. Del mismo modo para el caso de los alquileres el BCRP cuenta con la información para el período 2010 III – 2015 IV; recopilándose la información faltante para el período 1998 I – 2010 II.³⁰

Por esta razón en primer lugar se realizó un minucioso trabajo de recolección de información de las variables mencionadas, para los distritos del sector alto de Lima Metropolitana, obtenido a partir de la sección Urbana del diario El Comercio³¹, la cuál es publicada una vez por semana, los días domingos de cada semana. Se realizó este trabajo haciendo uso de la colección de periódicos ubicados en el Primer Sótano de la Hemeroteca Central perteneciente a la Biblioteca Central “Luis Jaime Cisneros” de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Específicamente se recopiló la fecha de la observación, el trimestre y año de la observación, el distrito de procedencia, el área en m² del terreno, el área en m² del departamento en alquiler, el precio de venta del terreno en dólares y el monto de alquiler anual en dólares. Debido a que la frecuencia de publicación de la sección Urbana es una vez por semana, al tomar una muestra de 10 observaciones por semana, se obtuvieron 40 observaciones por mes para la serie de costos de terreno y 40 observaciones por mes para la serie de alquileres. En este sentido, para el caso del índice de costos de terreno fue necesaria la recolección de 12 años de información, y 12 años con 2 trimestres para la serie de alquileres. El tiempo utilizado para la recolección fue de aproximadamente 1 semana por cada 8 trimestres de información, utilizando entonces 3 meses (mayo-junio-julio del 2016) para recoger un total de 24 años con 2 trimestres de datos para ambas series.

El trabajo de recolección dio por resultado: una base de datos para el caso de alquileres con un total de 6197 observaciones de frecuencia semanal; además una base de datos para el caso del costo de terreno haciendo un total de 5941 observaciones de frecuencia semanal. Posteriormente aplicando la metodología utilizada por BCRP se procedió a procesar esta información de la cual se obtuvieron medianas de alquileres en dólares por m² de frecuencia trimestral y medianas de costo de terreno en dólares por m² de frecuencia trimestral para cada distrito del sector alto de Lima.

Finalmente se tomó el promedio de las medianas de los distritos del sector alto por cada trimestre de información, del cual se obtuvo un promedio de alquileres y costo de terreno en dólares por m² para cada trimestre; además haciendo uso del tipo de cambio promedio trimestral vigente se obtuvo la serie final de alquileres en soles por m² (para el modelo de Burbuja Intrínseca) y el índice de costos de terreno con base 1999 (para el SVAR).

5.2.1. Transformación de las series

Para la estimación del **SVAR_BQ** se hace uso de **datos de frecuencia trimestral** desde el año 1998 hasta el año 2015 de las siguientes variables las cuáles describimos a continuación:

Precio de la vivienda (p^h): se utiliza el logaritmo del precio por m² de departamentos en el sector alto de Lima (P^h) en soles constantes del 2009.

Tasa de inflación (π): corresponde a la tasa de inflación porcentual de la economía peruana considerando el 2001 como año base.

³⁰ Para ver el detalle de la información consolidada ir al Anexo IV.

³¹ Para el período 1999-2006 los datos fueron obtenidos de la sección de Clasificados del diario El Comercio. Asimismo, a partir del año 2007 se empezó a publicar la sección Urbana.

Tasa de interés real (r): se utiliza el logaritmo de la diferencia de la tasa de interés activa en moneda nacional (R) respecto a la tasa de inflación (π). Se encuentra medida en términos porcentuales.

Índice de costos de vivienda (c): se utiliza el logaritmo de la suma del índice de costos de la construcción (C) medido en el año base 1999 y el índice de costos del terreno (L) medido en el año base 1999.

Producto bruto interno real (y): se utiliza el logaritmo del PBI real desestacionalizado en millones de soles constantes del 2007.

Índice General de la Bolsa de Valores de Lima ($IGBVL$): se utiliza el logaritmo del IGBVL.

Para la estimación de la **Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld** se emplean **datos de frecuencia trimestral** desde el año 1998 hasta el año 2015 de las siguientes variables:

Precio en niveles (P^h) por m2 de departamentos en el sector alto de Lima en soles constantes del 2009.

Alquiler (A): se utiliza el alquiler anual medido en soles constantes del 2009 por m2 de la vivienda en el sector alto de Lima.

5.2.2. Estadísticos descriptivos

A continuación, se presenta los estadísticos de las series en niveles.

Cuadro N° 05

Date: 09/07/16 Time: 20:04
Sample: 1998Q1 2015Q4

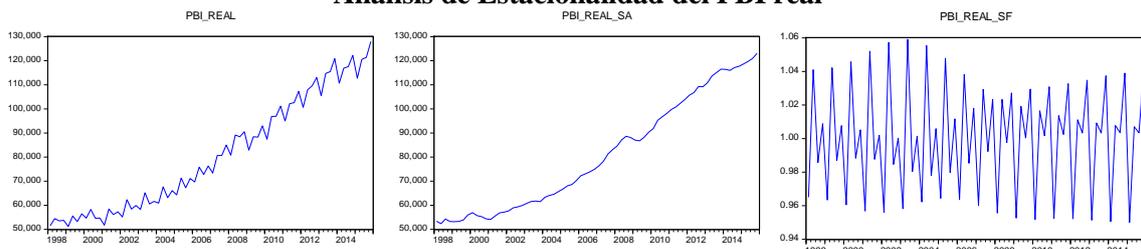
	PRECIO	PBI_REAL	IGBVL	COST_CONS...	COST_TERR	INFLACION	TASA_INTERES	ALQUILER
Mean	2888.110	80993.24	9676.272	229.3499	219.7807	3.050694	22.94625	193.7879
Median	2584.190	76060.40	9543.120	197.9750	116.2200	2.970000	22.48500	167.0400
Maximum	5094.140	127979.9	23612.02	530.9400	605.2300	8.110000	36.91000	338.8500
Minimum	1776.450	51214.63	1134.930	89.28000	89.48000	-1.010000	15.61000	114.7700
Std. Dev.	989.9136	23461.44	7650.460	122.1393	162.5517	1.770211	5.340085	70.28449
Skewness	1.019602	0.388217	0.257203	0.797632	1.049513	0.551394	0.883338	0.754207
Kurtosis	2.740649	1.768163	1.545293	2.566537	2.609784	3.731522	3.279281	2.218913
Jarque-Bera	12.67686	6.360822	7.142360	8.198265	13.67455	5.253800	9.597425	8.656225
Probability	0.001767	0.041569	0.028123	0.016587	0.001073	0.072302	0.008240	0.013192
Sum	207943.9	5831513.	696691.6	16513.19	15824.21	219.6500	1652.130	13952.73
Sum Sq. Dev.	69574949	3.91E+10	4.16E+09	1059179.	1876037.	222.4889	2024.672	350733.6
Observations	72	72	72	72	72	72	72	72

Fuente: Elaboración Propia

5.2.3. Estacionalidad

Se realizó la prueba de estacionalidad a todas las series; sin embargo, la única que presentó estacionalidad significativa fue la serie del logaritmo del PBI real. Se puede observar del primer gráfico como esta serie evidencia comportamiento estacional; por lo que ha sido desestacionalizada utilizando la metodología CENSUS-X12. Separando una serie limpia y sus factores estacionales.

Gráfico N° 23
Análisis de Estacionalidad del PBI real



Fuente: Elaboración Propia

Cuadro N° 06
Test de Estacionalidad del PBI real

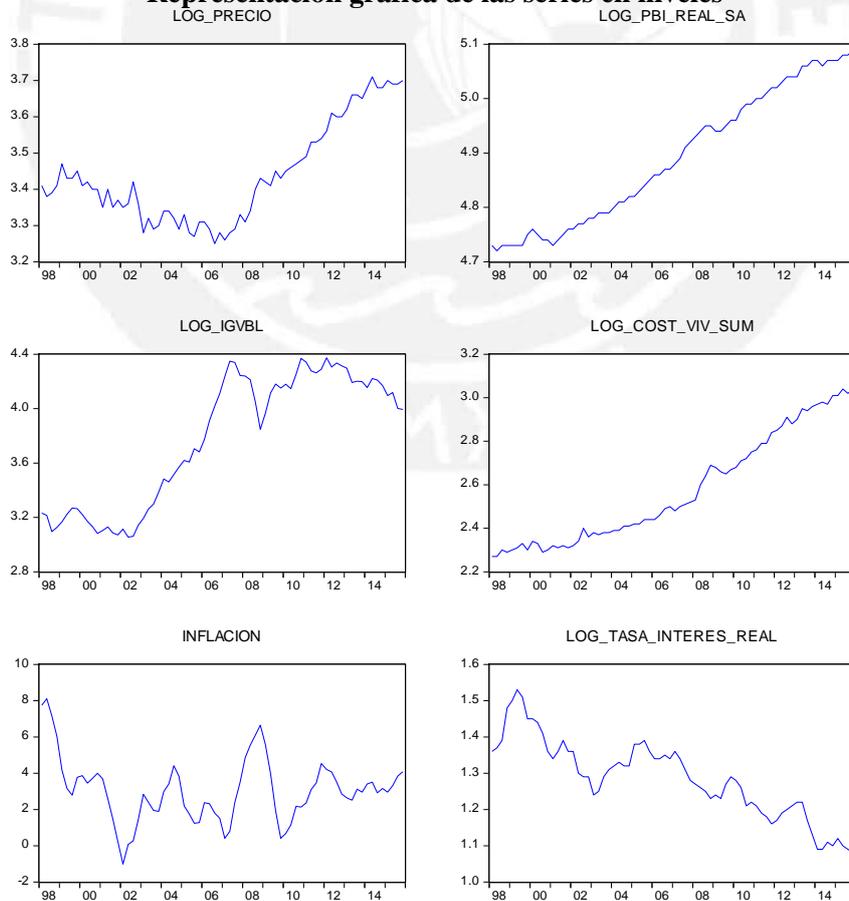
Test	Estadístico	Interpretación
Test for the presence of seasonality assuming stability.	F-Value 93.164**	**Seasonality present at the 0.1 per cent level.
Nonparametric Test for the Presence of Seasonality Assuming Stability	Kruskal-Wallis Statistic 56.3047	Seasonality present at the one percent level.

H0: No evidencia estacionalidad Ha: Evidencia estacionalidad
Fuente: CENSUS-X12

5.2.4. Raíz unitaria

Del análisis gráfico inicial se aprecia que algunas series presentan indicios de ser integradas de orden uno I(1); es decir, podrían evidenciar presencia de raíz unitaria con excepción de la inflación, tal como se aprecia a continuación:

Gráfico N° 24
Representación gráfica de las series en niveles



Fuente: Elaboración Propia

En este sentido, se realizaron los test de raíz unitaria a las diferentes series con el objetivo de determinar si son estacionarias o no lo son, además de determinar qué tipo de términos de tendencia poseen; para posteriormente diferenciarlas y obtener series estacionarias $I(0)$, condición necesaria para estimar el SVAR_BQ. Inicialmente se realizaron los test a las series transformadas en niveles, de los cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

Cuadro N° 07
Test de Raíz Unitaria a las series en niveles

Variable	Término de Tendencia	Test de Raíz Unitaria	Rezagos	Valor de la prueba	Valor crítico		
					1%	5%	10%
log(pbi_real_sa)*	Constante y Tendencia	ADF	10	-2.911906	-4.092547	-3.474363	-3.164499
	Constante y Tendencia	Phillips Perron	-	-2.915861	-4.092547	-3.474363	-3.164499
log(tasa_interés_real)*	Constante y Tendencia	ERS	-	-2.866552	-3.694000	-3.126000	-2.830000
	Constante y Tendencia	ADF	10	-3.573512	-4.094550	-3.475305	-3.165046
log(precio)*	Constante y Tendencia	Phillips Perron	-	0.289368	-3.525618	-2.902953	-2.588902
	Constante y Tendencia	ADF	10	-1.455613	-4.092547	-3.474363	-3.164499
log(cost_viv_sum) *	Constante y Tendencia	ADF	10	-1.942384	-4.092547	-3.474363	-3.164499
	Constante y Tendencia	Phillips Perron	10	-1.766042	-4.092547	-3.474363	-3.164499

Test ADF (Ho: Presenta Raíz Unitaria

Ha: No Presenta Raíz Unitaria)

Test Phillips Perron (Ho: Presenta Raíz Unitaria

Ha: No Presenta Raíz Unitaria)

Test KPSS (Ho: Estacionariedad

Ha: No Estacionariedad)

* Presenta Raíz Unitaria

Fuente: Elaboración Propia

El log(pbi_real_sa) evidencia la existencia de raíz unitaria a todo nivel de significancia, además de evidenciar tendencia y constante significativas. En el caso del log(tasa_interés_real) el test ERS muestra que la serie presenta raíz unitaria en todos los niveles de significancia, y el test ADF verifica que la serie presenta raíz unitaria al 1% de significancia, además de evidenciar tendencia y constante significativas. El log(precio_relativo) presenta raíz unitaria a cualquier nivel de significancia. En el caso del log(cost_viv_sum) los resultados son concluyentes en la presencia de raíz unitaria.

Siguiendo a Perron y Rodríguez (2012) se recomienda verificar la hipótesis de raíz unitaria en la presencia de cambio estructural, además de investigar las propiedades de los estadísticos cuando se selecciona un punto de quiebre ya sea minimizando el estadístico-t o maximizando el valor absoluto del estadístico-t. En conclusión, recomiendan utilizar GLS para la estimación del test ADF incorporando el punto de quiebre en el proceso. A continuación, se prueba la hipótesis de raíz unitaria bajo quiebre estructural de las series log(igbvl), log(precio), log(tasa_interés_real) e inflación.

Cuadro N° 08
Test de Raíz Unitaria a las series en niveles con quiebre estructural

Variable	Especificación del Quiebre	Selección Punto de Quiebre	Rezagos	Valor de la prueba	Valor crítico		
					1%	5%	10%
log(igbvl)*	Tendencia	Dickey_Fuller min-t 2010:Q4	10	-2.897993	-5.067425	-4.524826	-4.261048
	Tendencia	Break_Max Abs-t 2006:Q2	10	-1.808106	-5.047224	-4.507350	-4.244797
log(precio)*	Constante y Tendencia	Dickey_Fuller min-t 2007:Q3	10	-5.445017	-5.719131	-5.175710	-4.893950
	Constante y Tendencia	Break_Max Abs-t 2007:Q3	10	-5.445017	-5.711386	-5.155006	-4.860969
inflación	Constante y Tendencia	Dickey_Fuller min-t 2002:Q3	10	-5.692548	-5.719131	-5.175710	-4.893950
	Tendencia	Dickey_Fuller min-t 2002:Q3	10	-5.255036	-5.067425	-4.524826	-4.261048
log(tasa_inter_real)**	Tendencia	Dickey_Fuller min-t 2001:Q3	10	-3.757299	-5.067425	-4.524826	-4.261048
	Constante y Tendencia	Dickey_Fuller min-t 2004:Q4	10	-6.598607	-5.719131	-5.175710	-4.893950

Ho: Presenta Raíz Unitaria

Ha: No Presenta Raíz Unitaria

* Presenta Raíz Unitaria

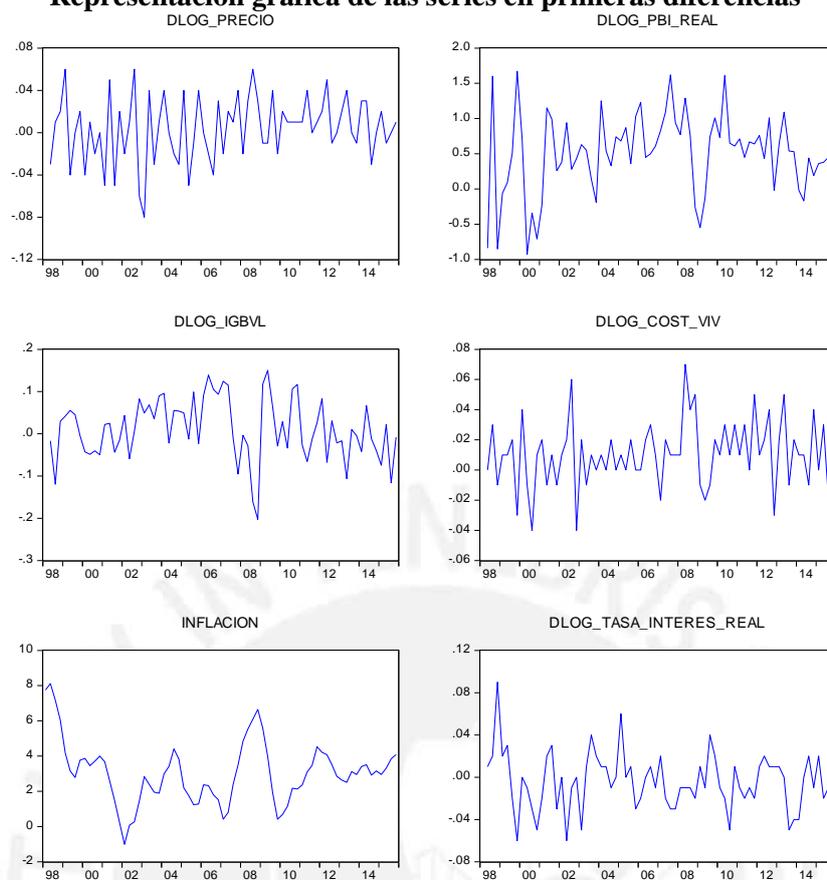
** No es concluyente la presencia de raíz unitaria

Fuente: Elaboración Propia

En la tabla se aprecia que el log(igbvl) presenta raíz unitaria a todo nivel de significancia, además de mostrar un coeficiente de quiebre en tendencia significativo. Del mismo modo la serie del log(precio) evidencia existencia de raíz unitaria al nivel de 1% de significancia. La serie inflación no presenta raíz unitaria, siendo los coeficientes de quiebre en constante y tendencia significativos en todos los casos. Adicionalmente si se mira la serie del log(tasa_interés_real) no es concluyente en la presencia o no de raíz unitaria bajo quiebre estructural en todos los niveles de significancia, no obstante, se utilizará la primera diferencia de esta variable dado que nos permite una mejor estimación del SVAR.

Se procedió a aplicar primeras diferencias a las series que presentaron raíz unitaria, con el objetivo de lograr su estacionariedad.

Gráfico N° 25
Representación gráfica de las series en primeras diferencias



Fuente: Elaboración Propia

Las series en diferencias que se evidencian en el gráfico anterior fueron contrastadas a fin de verificar su estacionariedad. En todos los casos las series son estacionarias al 1%, 5% o al 10% de significancia, como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro N° 09
Test de Raíz Unitaria a las series en primeras diferencias

Variable	Término de tendencia	Rezagos	Valor de la prueba	Valor crítico		
				1%	5%	10%
$\Delta \log(\text{precio})$	Constante y Tendencia**	10	-10.68742	-4.094550	-3.475305	-3.165046
	Constante**	10	-10.35454	-3.527045	-2.903566	-2.589227
$\Delta \log(\text{pbi_real_sa})$	Constante y Tendencia	10	-8.587176	-4.094550	-3.475305	-3.165046
	Constante*	10	-8.596049	-3.527045	-2.903566	-2.589227
$\Delta \log(\text{igbvl})$	Constante y Tendencia	10	-5.967546	-4.094550	-3.475305	-3.165046
	Constante	10	-5.934273	-3.527045	-2.903566	-2.589227
	Ninguno*	10	-5.871155	-2.598416	-1.945525	-1.613760
$\Delta \log(\text{cost_viv_sum})$	Constante y Tendencia**	10	-10.36996	-4.094550	-3.475305	-3.165046
	Constante*-.**	10	-10.06009	-3.527045	-2.903566	-2.589227
$\Delta \log(\text{tasa_inter_real})$	Constante **	10	-6.220910	-3.527045	-2.903566	-2.589227

Test ADF (Ho: Presenta Raíz Unitaria)

Ha: No Presenta Raíz Unitaria)

* Coeficiente estimado significativo

** Significativo en probabilidad

Fuente: Elaboración Propia

5.3. Resultados

En esta sección se presentan los resultados de las estimaciones para el modelo SVAR de Blanchard y Quah que busca identificar los determinantes de largo plazo del precio de la vivienda; así como los resultados para el modelo de burbuja intrínseca de Froot y Obsteld que busca explicar la sobrevaloración del precio en función de su fundamento.

5.3.1. Estimación SVAR Blanchard y Quah

Elección de los rezagos óptimos: Se estimó un VAR No Restringido con 2 y 4 rezagos inicialmente. Posteriormente se determinó el número de rezagos a través de los diferentes criterios de información evidenciando un valor óptimo de 2 rezagos para el modelo en ambas estimaciones.

Cuadro N° 10
Rezagos Óptimos

VAR Lag Order Selection Criteria

Endogenous variables: DLOG_PBI_REAL DLOG_IGBVL DLOG_COST_VIV DLOG_TASA_INTERES_...

Exogenous variables: C

Date: 09/10/16 Time: 16:46

Sample: 1998Q1 2015Q4

Included observations: 66

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	373.6161	NA	5.85e-13	-11.13988	-10.94082	-11.06122
1	477.1363	185.0815	7.60e-14	-13.18595	-11.79253*	-12.63534*
2	519.7047	68.36741*	6.39e-14*	-13.38499*	-10.79722	-12.36244
3	546.8019	38.59302	8.97e-14	-13.11521	-9.333078	-11.62071
4	580.6579	42.06348	1.10e-13	-13.05024	-8.073750	-11.08379
5	618.7959	40.44949	1.31e-13	-13.11503	-6.944183	-10.67663

* indicates lag order selected by the criterion

LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)

FPE: Final prediction error

AIC: Akaike information criterion

SC: Schwarz information criterion

HQ: Hannan-Quinn information criterion

Fuente: Elaboración Propia

Estimación del SVAR de Blanchard y Quah

El modelo SVAR se construyó incluyendo las 6 variables anteriormente mencionadas, con una especificación de $K = 2$ rezagos asociados a la estimación. Para la estimar el modelo se utilizó Máxima Verosimilitud (MLE), mediante method of scoring (analytic derivatives).

La matriz estimada representa la acumulación de las respuestas de las variables del SVAR frente a los choques en el largo plazo. Se observa que en la mayoría de los casos los coeficientes estimados son significativos y con los signos teóricos esperados. Se observa que el producto real y el *igbvl* responden con signos positivos esperados y significativos frente a los choques de oferta agregada.

En relación a los costos de vivienda agregados, un choque positivo de oferta agregada genera un aumento en los costos de manera significativa y esperada, corroborando la ecuación de costos del modelo de vivienda.

El choque de oferta agregada afecta positivamente a la tasa de interés real. Lo que podría estar asociado a que un mayor nivel de producción implica una mayor cantidad de transacciones en el mercado lo que incentiva a demandar mayor cantidad de dinero aumentando la tasa de interés. Otra explicación está relacionada con la actuación del BCRP en la política monetaria, debido a que subidas del producto real están asociadas a incrementos inflacionarios, presionando al alza las expectativas de inflación, lo que obliga a la autoridad monetaria a incrementar su tasa de referencia para controlar dichas expectativas. (Modelo Neokenesiano). Un aumento del índice (*igbvl*) ocurre debido a una expansión de producto real, lo cual a su vez incrementa la tasa de interés real por el análisis anterior; por lo tanto, un choque de portafolio local podría tener una relación positiva y significativa con la tasa de interés real. Acorde a lo obtenido por Fry el efecto de una subida del índice de portafolio local aumenta la riqueza del individuo, la productividad marginal del capital, esto eleva el producto de largo plazo y finalmente la tasa de interés. Un incremento de costos de construcción (*c*) contrae la oferta de casas y aumenta su precio, elevando el valor de la vivienda construida, lo que atrae mayor inversión en vivienda; impactando positivamente en la demanda agregada y en consecuencia elevando la tasa de interés. Por tanto un choque positivo de oferta de vivienda (*c*) eleva la tasa de interés significativamente.

La relación entre el producto real (*y*) y la inflación tiene el signo negativo y es significativo. Un choque de oferta agregada (*y*) en un primer momento eleva los precios y las expectativas de inflación, por lo que enseguida el BCRP eleva la tasa de interés, con el objetivo de que en trimestres siguientes se reduzca la inflación. Un choque de portafolio local (*igbvl*) tiene un impacto negativo en la inflación, esto estaría explicado porque un mayor nivel del *igbvl* está asociado a un mayor nivel de producto real (*y*), lo cual se asocia a un menor nivel inflacionario.

Un choque de oferta de vivienda (*c*) está asociado a mayor nivel de precios de vivienda (*ph*) lo cual contribuye a un mayor nivel inflacionario. En este caso el valor estimado es positivo y significativo. En el caso de un choque de demanda agregada (*r*) sobre la inflación debería ser negativa; subidas de la tasa de interés encarecen los créditos reduciendo la demanda, los precios y la inflación; el coeficiente estimado es negativo y significativo. En el caso del choque de demanda de vivienda (*ph*) sobre inflación el efecto es positivo y significativo.

El choque de oferta agregada (*y*) tiene un impacto positivo en el precio de la vivienda, lo que podría estar relacionado con el hecho de que una mayor producción real causa incrementos en los costos de vivienda, trasladándose finalmente al precio de la vivienda. En cuanto al choque de portafolio local (*igbvl*) sobre el precio de la vivienda tenemos una relación negativa, debido a que una mayor rentabilidad de la Bolsa de Valores Peruana (*igbvl*) hará que caiga la demanda de vivienda y el precio, debido a la sustitución entre acciones y casas. El choque de oferta de vivienda (*c*) sobre los precios de la vivienda tiene signo positivo esperado, un aumento del costo de

vivienda se traslada en aumentos del precio. Este último resultado ha mejorado en cuanto a la dirección del efecto y su significancia debido a la incorporación de la serie de costo de terreno en Lima Metropolitana. El choque de demanda agregada (r) sobre el precio de la vivienda tiene signo negativo significativo esperado, ante subidas de la tasa de interés se encarece el crédito reduciendo la demanda de vivienda y finalmente su precio.

Cuadro N° 11
Parámetros de largo plazo estimados para el modelo SVAR

Variable	Choque	Parámetro	Estimador	Error estándar	z-Statistic	Prob.
y	Oferta agregada	θ_{11}	0.704081	0.059935	11.74734	0.0000
$igbvl$	Oferta agregada	θ_{21}	0.054449	0.010323	5.274571	0.0000
	Portafolio local	θ_{22}	0.073457	0.006253	11.74734	0.0000
	Oferta de vivienda	θ_{23}	-0.021786	0.009036	-2.411095	0.0159
c	Oferta agregada	θ_{31}	0.004914	0.002149	2.286412	0.0222
	Oferta de vivienda	θ_{33}	0.017511	0.001491	11.74734	0.0000
r	Oferta agregada	θ_{41}	0.004588	0.003645	1.258675	0.2081
	Portafolio local	θ_{42}	0.011179	0.003410	3.277930	0.0010
	Oferta de vivienda	θ_{43}	0.006433	0.003583	1.795423	0.0726
	Demanda agregada	θ_{44}	-0.027204	0.002316	-11.74734	0.0000
π	Oferta agregada	θ_{51}	-1.519189	0.324839	-4.676740	0.0000
	Portafolio local	θ_{52}	-0.276297	0.254343	-1.086317	0.2773
	Oferta de vivienda	θ_{53}	1.274809	0.277525	4.593492	0.0000
	Demanda agregada	θ_{54}	-1.168795	0.232891	-5.018634	0.0000
	Nominal	θ_{55}	-1.591309	0.135461	-11.74734	0.0000
	Demanda de vivienda	θ_{56}	0.726039	0.201294	3.606858	0.0003
p^h	Oferta agregada	θ_{61}	0.000602	0.003089	0.194895	0.8455
	Portafolio local	θ_{62}	-0.000571	0.002176	-0.262407	0.7930
	Oferta de vivienda	θ_{63}	0.018202	0.002672	6.812480	0.0000
	Demanda agregada	θ_{64}	-0.004534	0.002141	-2.117615	0.0342
	Demanda de vivienda	θ_{66}	0.017494	0.001489	11.74734	0.0000

Ln L= 483.3818

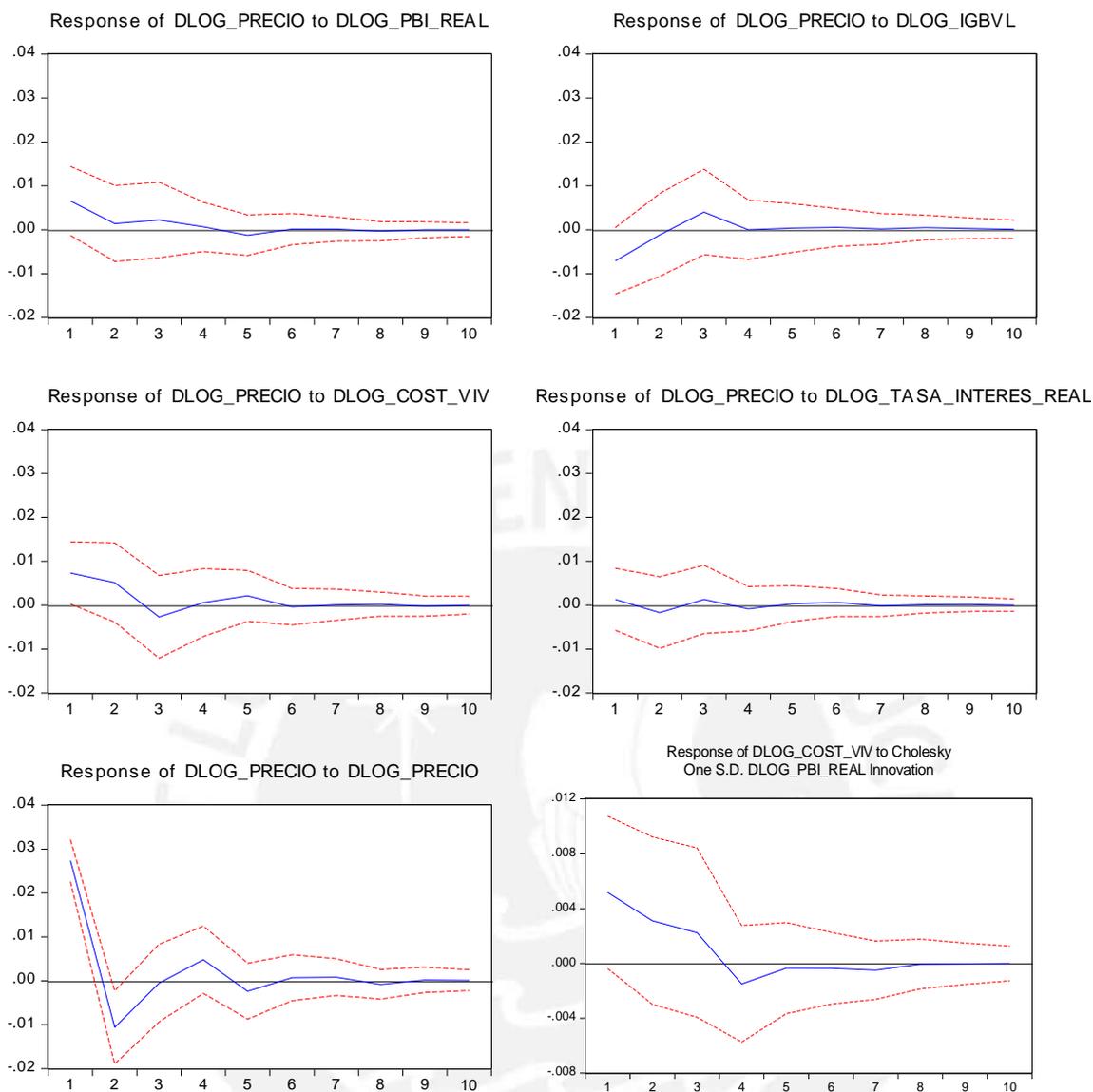
Fuente: Elaboración Propia

5.3.2. Funciones impulso respuesta del precio y descomposición de varianza

Haciendo uso de las estimaciones del SVAR ahora se pasa a determinar las respuestas del precio de la vivienda cuando lo sometemos a diversos choques estructurales. Como resultado se muestran las funciones de impulso respuesta (RI) junto con el análisis de descomposición de varianza (VD) del modelo.

Gráfico N° 26

Response to Cholesky One S.D. Innovations ± 2 S.E.



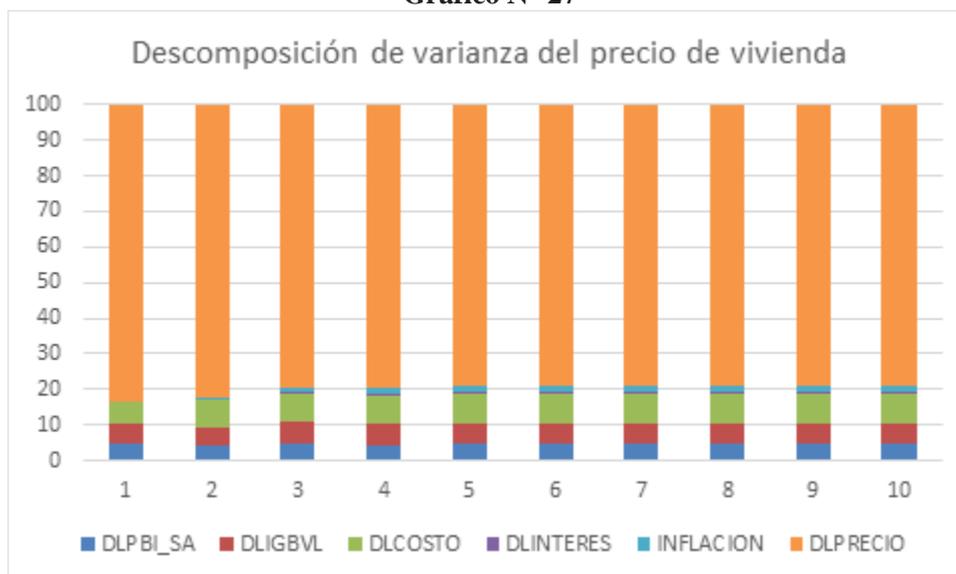
Fuente: Elaboración Propia

Se puede observar un choque positivo de oferta agregada (y) que eleva el precio al inicio y luego se va diluyendo hasta el sexto trimestre. El choque de oferta de vivienda (c) tiene un impacto positivo en el precio hasta el segundo trimestre para luego desaparecer en trimestres posteriores. Un choque de portafolio local ($igbvl$) hace caer el precio de la vivienda en los dos primeros trimestres, para luego reducirse los trimestres siguientes. No se aprecia claramente el impacto negativo de la tasa de interés sobre el precio de vivienda.

El choque de producto real sobre los costos de vivienda agregados es positivo hasta el cuarto trimestre para luego desaparecer. Todos estos efectos demuestran coherencia con el Modelo de Vivienda de Fry analizado en este trabajo.

En el siguiente gráfico, se pueden observar los aportes de los choques estructurales en la variación del precio de los bienes raíces residenciales.

Gráfico N° 27



Fuente: Elaboración Propia

La mayor contribución a la varianza del precio de vivienda para 12 trimestres es aportada por la propia variable (79.78%); a continuación, el costo de vivienda agregado tiene una contribución del (7.84%); el igbv* tiene una participación de (5.94%); el PBI aporta con el (4.54%); la inflación contribuye con el (1.32%) de esta varianza; y finalmente la tasa de interés tiene una contribución de (0.58%).

5.3.3. Análisis de sobrevaloración del precio del modelo SVAR

Caicedo, Morales, Pérez (2010) señalan que para identificar si el precio real de la vivienda está o no sobrevalorado, es necesario desarrollar un marco que permita identificar el precio “normal” de la vivienda. Para este fin, se utilizó la aproximación adoptada en el trabajo mencionado que consiste en descomponer el precio real de la vivienda en su esperanza condicional y en un choque idiosincrático del siguiente modo:

$$p_{T+J}^h = E_T(p_{T+J}^h) + \eta_{T+J}$$

El término $E_T(p_{T+J}^h)$, representa la esperanza condicional del precio real de la vivienda en el periodo T + J condicional a la información existente hasta T. El valor inicial de T corresponde al Primer Trimestre de 1998 donde J es un contador correspondiente a las observaciones entre el Primer Trimestre del 2007 hasta el Cuarto Trimestre del 2015. La esperanza condicional se calcula utilizando el sistema de ecuaciones del VAR no restringido, a partir del cual se desarrollan los pronósticos condicionados a la especificación del sistema. Por lo que se puede inferir que si no existiesen choques (η_{T+J}) sobre el precio de la vivienda en el mercado peruano en el periodo pronosticado 2007-2015, el precio real observado de la vivienda actual sería igual al precio de la esperanza condicional (precio que depende de sus determinantes de largo plazo), por lo tanto, ambos precios estarían alineados y no habría sobrevaloración. Por el contrario, si ocurre que $p_{T+J}^h > E_T(p_{T+J}^h)$, entonces podría existir una situación de sobrevaloración, lo anterior porque existe un componente del precio que no es explicado por los determinantes considerados.³²

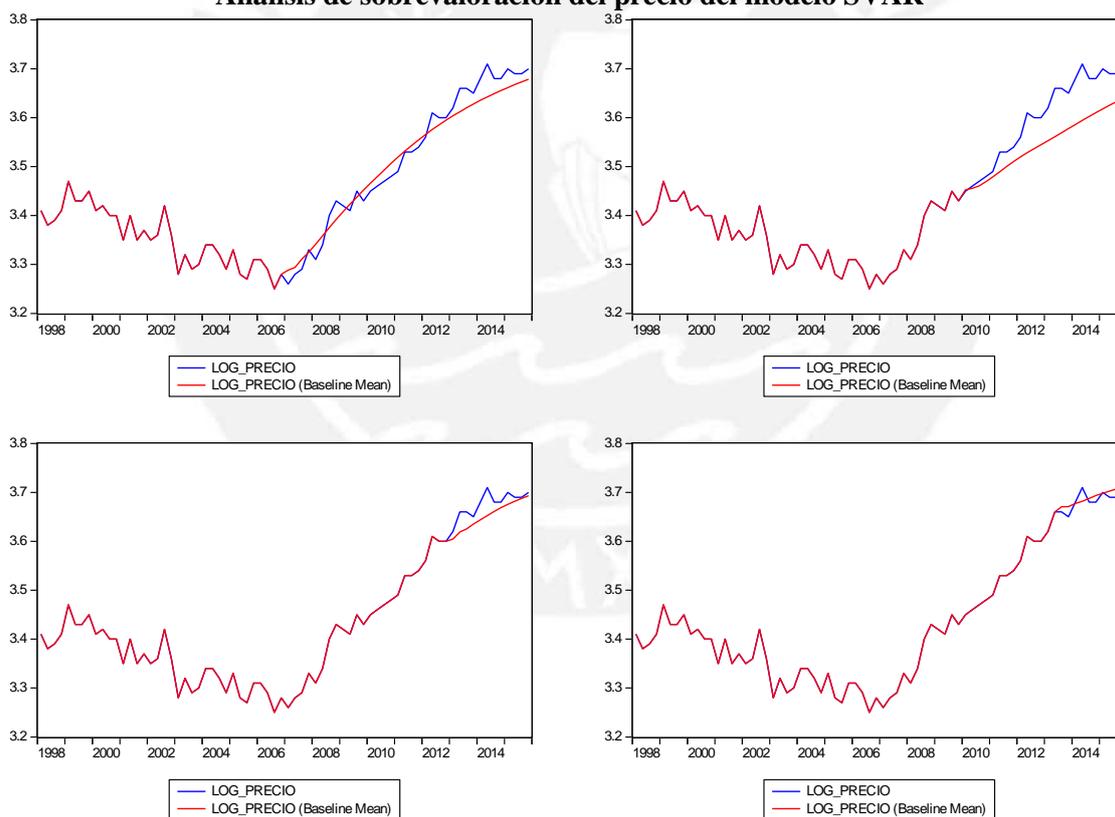
Al realizar la predicción del precio a partir del modelo VAR utilizando toda la información disponible (años 1998 – 2015) no se ven indicios de sobrevaloración del precio observado con

³² Adaptado a partir de “Un análisis de sobrevaloración en el mercado de la vivienda en Colombia”. Caicedo, Morales, Pérez. Banco de la República, Octubre 2010.

respecto al precio predicho. Este resultado depende de la fecha a partir de la cual se realice el pronóstico; por ejemplo, partiendo del primer trimestre del 2007 el gráfico de la esquina superior izquierda no evidencia sobrevaloración alguna, la línea azul observada y la línea roja predicha se superponen. En el gráfico contiguo proyectado a partir del primer trimestre del 2010 se puede observar al precio observado de línea azul por encima de la línea roja predicha, indicando sobrevaloración. Sin embargo, en los dos gráficos siguientes proyectados a partir del primer y cuarto trimestre del 2013 respectivamente, la media condicional del precio vuelve a acercarse y a superponerse a la serie observada del precio de vivienda.

Además, tomando en cuenta que las estimaciones del SVAR que fueron presentadas previamente corroboran los sentidos teóricos de los choques sobre el precio de vivienda en las ecuaciones del Modelo de Fry, y adicionalmente observando las series en niveles se pueden ver las fuertes tendencias crecientes del producto y del costo agregado de vivienda (especialmente el rápido crecimiento del costo del terreno) que hacen que la media condicional pronosticada del precio reproduzca esta tendencia creciente acercándose y superponiéndose en varios casos a la serie del precio observado, lo cual es un indicio de que el rápido incremento de precios de vivienda en la última década podría estar explicado por la evolución natural de sus fundamentos de largo plazo, dejando de lado la posible existencia de una burbuja. Sin embargo, estas primeras conclusiones se verificarán en la siguiente sección en donde se realizará el análisis de sobrevaloración analizándolo a través de un modelo de burbuja intrínseca.

Gráfico N° 28
Análisis de sobrevaloración del precio del modelo SVAR



Dynamic-Stochastic Simulation. Solver: Broyden. Max iterations = 5000, Convergence = 1e-08. Requested repetitions = 100000. Calculating Bootstrap Innovations. Sample: 1998Q1 - 2006Q4. 34 residuals per equation calculated for bootstrap.

Fuente: Elaboración Propia

5.3.4. Escenarios de crisis ante un choque crediticio

En esta sección se incorpora el Crédito como determinante del precio de vivienda en el largo plazo, en este sentido se estima un SVAR en el cual se reemplaza el choque de Demanda Agregada (tasa de interés) por un choque Crediticio. Es importante precisar que, si bien el modelo teórico de Fry no incorpora el Crédito como determinante en la ecuación del precio, se considera apropiado realizar este ejercicio debido a la relación inversa que existe entre el crédito y la tasa de interés, esperando encontrar una relación directa entre crédito y precio. Asimismo, se toma en cuenta la literatura que analiza la relación entre las fricciones financieras y el precio de los activos.

Con relación a la literatura consultada, Bernanke *et.al.* (1999) así como Kiyotaki y Moore (1997) resaltan la relación entre ciclo de crédito y ciclo económico; considerando el ciclo crediticio como acelerador de la actividad económica. Según este enfoque, las variaciones en el crédito estarían explicadas, por los cambios en el valor de los activos utilizados como garantías para obtener préstamos. Para el caso de los créditos hipotecarios, la garantía está dada por la vivienda, en tanto que, para el caso de las empresas las garantías pasan a ser los bienes aportados, o su valor de liquidación. El valor de la vivienda puesta como garantía, varía en función al ciclo económico originando de este modo el ciclo crediticio. En épocas expansivas el valor de la vivienda aumenta, incrementando la capacidad de obtener financiamiento; este dinamismo propicia el aumento en la demanda presionando el precio de estos activos al alza. Este fenómeno se repite hasta que se produzca un choque externo, que da lugar a un proceso de desaceleración de la producción, originado por la caída del crédito; reduciendo finalmente el precio de los bienes raíces.

Por su parte Holmstrom & Tirole (1997) relacionan el otorgamiento de créditos con la estructura del sistema financiero. Con este objetivo, desarrollan un modelo en el que la existencia de intermediarios financieros facilita el acceso al crédito y mejorar las condiciones del mismo.

Asimismo, Gimeno, R. and C. Martínez-Carrascal (2010) analizan la interacción que existe entre el precio de la vivienda y los préstamos hipotecarios para el caso Español. Ellos encuentran que, en el largo plazo, el crédito depende negativamente de las tasas de interés y positivamente de la renta y del valor de los inmuebles. Por su parte, el precio está positivamente relacionado con el crédito y con los ingresos familiares.

A continuación, se presentan los resultados del SVAR incorporando el choque crediticio medido como la diferencia del logaritmo de la cartera de créditos hipotecarios del Sistema Financiero (Banca Múltiple, Empresas Financieras, Cajas Municipales, Cajas Rurales, EDPYME, Empresas de Arrendamiento Financiero y entidades estatales), obtenidas de la página web de la SBS, para el periodo 2002-2015. Los resultados muestran que choque crediticio sobre el precio de vivienda tiene un impacto positivo y significativo en el largo plazo, acorde con la literatura existente, del mismo modo los impactos de los choques restantes tienen el signo esperado a excepción del choque de oferta agregada.

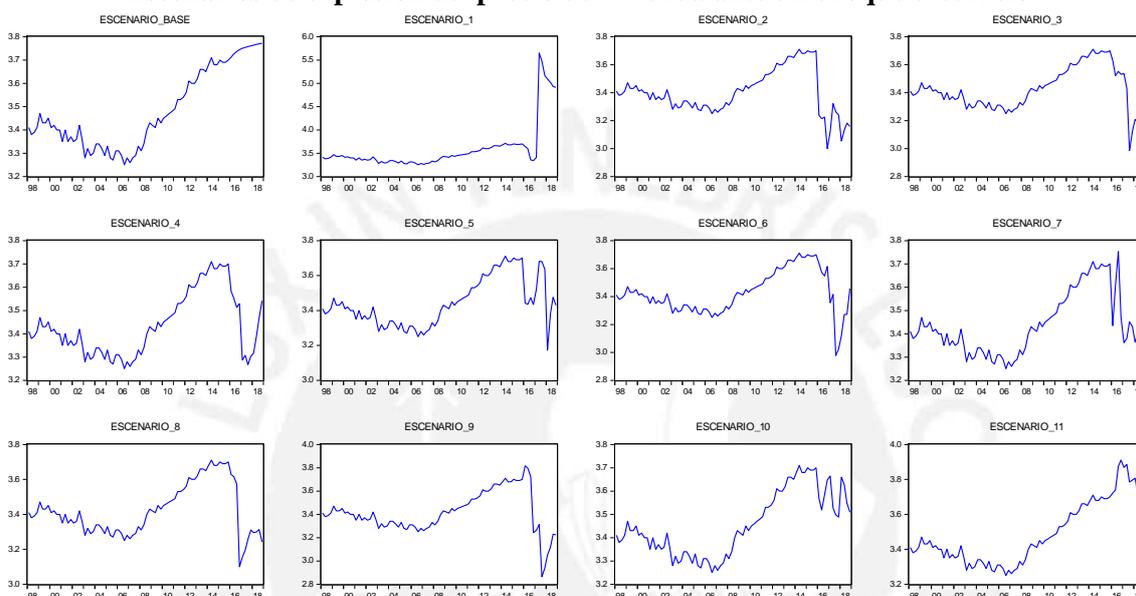
Cuadro N° 12
Estimación SVAR con choque de crédito

Variable	Choque	Parámetro	Estimador	Error estándar	z-Statistic	Prob.
p^h	Oferta agregada	θ_{61}	-0.008073	0.003420	-2.360237	0.0183
	Portafolio local	θ_{62}	-0.004061	0.002307	-1.760586	0.0783
	Oferta de vivienda	θ_{63}	0.017239	0.002878	5.991048	0.0000
	Crediticio	θ_{64}	0.006273	0.002189	2.865106	0.0042
	Demanda de vivienda	θ_{66}	0.015310	0.001487	10.29563	0.0000

Fuente: Elaboración Propia

Adicionalmente se realizan simulaciones del precio de vivienda para 12 trimestres a partir del trimestre 2016-I, frente a escenarios³³ de caídas permanentes del crédito durante 4 trimestres consecutivos, escenarios para tasas de crecimiento aleatorias del crédito, escenarios de subidas permanentes del crédito durante 4 trimestres consecutivos y 1 escenario base que considera el nivel actual de las colocaciones netas. Los siguientes gráficos muestran que una fuerte restricción del crédito en la economía para la mayoría de los casos, genera bruscas caídas en el precio de vivienda; asimismo de mantenerse el ritmo de las colocaciones actuales consideradas en el escenario base se predice que el precio de vivienda continuaría subiendo de manera lenta. Los resultados muestran también que ante subidas importantes del crédito el precio de vivienda seguiría incrementándose considerablemente.³⁴

Gráfico N° 29
Escenarios de explosión del precio de vivienda ante un choque crediticio



Fuente: Elaboración Propia

Las simulaciones fueron obtenidas a partir de la ecuación del precio de un VAR sin restricciones, utilizando para su estimación las series en niveles, incorporando al Crédito como variable exógena. Considerando que la variable que impacta en el nivel del precio de la vivienda no es la cartera total del crédito sino los créditos adicionales realizados en el trimestre, es decir las colocaciones netas, por lo que se aproximó la variable colocaciones a través de los incrementos de la cartera de créditos.

³³ Los escenarios fueron creados a partir de las tasas de crecimiento históricas de las colocaciones netas, las mismas que fueron seleccionadas aleatoriamente. Para un mayor detalle ver el Anexo V.

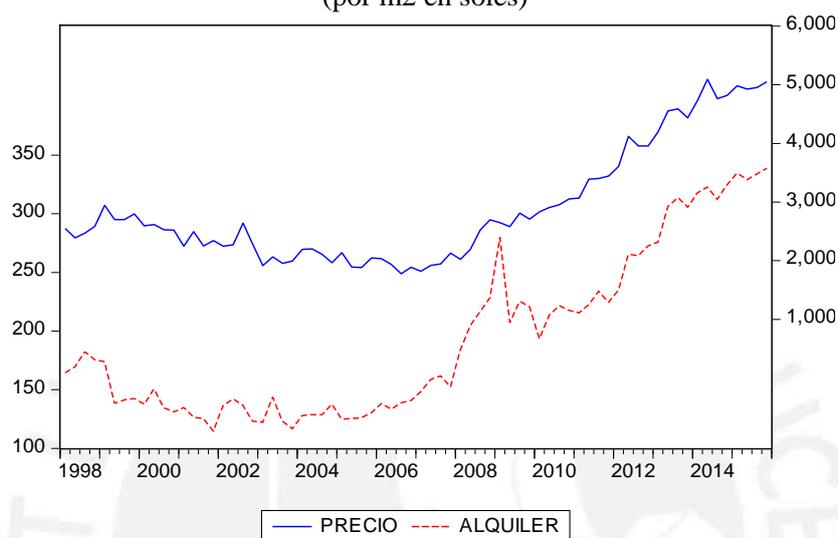
³⁴ Cabe hacer notar que el momento cuando se inicia la crisis, y los precios empiezan a caer abruptamente dependería de la probabilidad y el trimestre de ocurrencia del choque crediticio. En nuestro caso se ha supuesto que este choque ocurre en el 2016-I.

5.3.5. Estimación de la Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld

Estimaciones y selección del modelo

A continuación, se presentan las series de tiempo en niveles para las variables Precio de vivienda por metro cuadrado en soles y Alquiler anual por metro cuadrado en soles para el período de estudio 1998-2015. Se puede notar a primera vista que ambas series se mueven en la misma dirección, aparentemente a una misma tasa de crecimiento, acelerándose a partir del año 2007.

Gráfico N° 30
Precio vs Alquiler anual
(por m² en soles)



Nota: Precio eje derecho. Alquiler eje izquierdo
Fuente: Elaboración propia

Estimación de la martingala del alquiler

Los alquileres siguen un proceso estocástico de martingala, en donde la información de alquileres hasta t sirve para determinar los alquileres en $t+1$ ³⁵. Siguiendo a Froot y Obsteld se procedió a estimar el proceso de martingala que explica la evolución del alquiler representada por la siguiente expresión, donde a_t es el logaritmo de la serie de alquileres en t , y a_{t+1} es el logaritmo de la serie de alquileres en $t+1$:

$$a_{t+1} = \mu + a_t + \varepsilon_{t+1}$$

A partir de este proceso se recupera la tasa de crecimiento (tendencia) del alquiler $\mu = 0.638102$, además de la varianza del término de error $\sigma^2 = 0.017090$. Esta especificación es descartada dado que nos arroja un valor de $k = -1.28350675$ no consistente con la solución fundamental del modelo. En este sentido calibramos los parámetros r , μ y σ^2 utilizando la información de las series de precio de vivienda y alquileres. $r = 12.22\%$ es retorno promedio anual del precio de la vivienda, del mismo modo $\mu = 0.0202$ es obtenido como la tasa promedio de crecimiento de los alquileres y finalmente $\sigma^2 = 0.0182$ es la varianza de serie de las desviaciones de las tasas de crecimiento de los alquileres respecto de su tasa de crecimiento promedio. Es importante precisar que estos datos son coherentes con los planteados en diversos trabajos teóricos.³⁶

³⁵ Basada en la hipótesis de Burbujas Racionales.

³⁶ Para ver la forma de cálculo de los parámetros μ y σ^2 revisar Anexo III.

Utilizando estos datos se obtuvo un valor teórico de $k = (e^r - e^{\mu+\sigma^2/2})^{-1} = 9.9672$ y un valor de $\lambda = 2.72$. Al igual que en el caso anterior estos resultados son consistentes con los trabajos empíricos existentes.

Estimación de la burbuja intrínseca

Se realizó la estimación de la ecuación de burbuja intrínseca tomando como endógena el ratio precio alquiler, para evitar problemas de multicolinealidad; y como explicativa el alquiler (fundamento), para un valor de $\lambda_1 = 2.72$ que garantiza la libre disponibilidad y la coherencia de la solución burbuja. Es importante precisar que la estimación se realizó utilizando OLS corrigiendo por el estimador de la matriz de covarianza para correlación serial de forma no conocida de Whitney, Newey and West permitiendo Heterocedasticidad Condicional, tal como sugieren Froot y Obstfeld (1991). Este procedimiento de corrección es necesario debido a que el nuevo error de regresión compuesto (η_t) genera problemas en los errores estándar de los coeficientes estimados.³⁷

$$\frac{P_t}{A_t} = c_0 + c \cdot A_t^{\lambda-1} + \eta_t$$

Cuadro N° 13
Estimación de la Burbuja Intrínseca

Dependent Variable: RAT_PRECIO_ALQUILER
Method: Least Squares
Date: 09/17/16 Time: 19:00
Sample: 1998Q1 2015Q4
Included observations: 72
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 4.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	12.21635	0.905349	13.49353	0.0000
ALQUILER_LAMDA	0.000216	0.000109	1.986526	0.0509
R-squared	0.134388	Mean dependent var		14.26196
Adjusted R-squared	0.122022	S.D. dependent var		2.233450
S.E. of regression	2.092754	Akaike info criterion		4.342224
Sum squared resid	306.5733	Schwarz criterion		4.405464
Log likelihood	-154.3200	Hannan-Quinn criter.		4.367400
F-statistic	10.86759	Durbin-Watson stat		0.503387
Prob(F-statistic)	0.001539	Wald F-statistic		3.946284
Prob(Wald F-statistic)	0.050891			

Fuente: Elaboración propia

El coeficiente estimado $c_0 = 12.211635$ es estadísticamente significativo, el cual es ligeramente superior a su valor teórico $k = (e^r - e^{\mu+\sigma^2/2})^{-1} = 9.9672$. Este valor puede ser interpretado como el número de años que tardaría un inversionista en recuperar el precio de venta de la vivienda a través del flujo de alquileres (ratio PER).

En esta estimación, el coeficiente de burbuja intrínseca es significativo solamente al 10% aceptando la existencia de una burbuja en el precio de la vivienda; no obstante, el coeficiente estimado es muy pequeño en relación a coeficientes estimados en otros trabajos.

³⁷ El término de error compuesto toma la forma $\eta_t = D_t^{-1} \cdot \sum_{s=t}^{\infty} e^{-r \cdot (s-t+1)} \cdot E_t(u_s)$

Adicionalmente se realizaron regresiones de cointegración entre el precio de vivienda y la variable alquileres. En la primera fila se realizó una regresión en niveles dando como resultado un coeficiente de cointegración $\beta = 20.16315 > k = 9.9672$. En la segunda fila se muestra la regresión en logaritmos cuyo coeficiente de cointegración resultó $\beta = 1.282736 > k = 1$. En ambos casos el coeficiente de cointegración estimado (β) es mayor al valor teórico (k) de la solución de valor presente para el precio de vivienda, indicando de este modo la existencia de sobrevaloración en el precio; un aumento de los alquileres hace que el precio de vivienda aumente más allá de lo que predice su valor teórico (k), es decir, que los precios suben por encima de su comportamiento en forma normal. Esta desviación del precio respecto a su nivel natural $\beta - k > 0$, ya no es explicada a través de la solución fundamental del modelo, por lo que a partir de este resultado toma relevancia la existencia de una solución burbuja para explicarla.

Cuadro N° 14

Regresiones de Cointegración de los Precios Reales de la Vivienda y Alquileres Reales

Ecuación de Regresión	Coefficiente de Cointegración	R ²	Prob	d.f.
$P_t = \alpha + \beta \cdot A_t + v_t$	20.16315	0.765253	0.0000	70
$p_t = \alpha + \beta \cdot a_t + v_t$	1.282736	0.751207	0.0000	70

Nota: Las regresiones de cointegración se estimaron utilizando OLS. El período de la muestra para las regresiones fue de I-1998 al IV-2015. Donde $p_t = \log(P_t)$ y $a_t = \log(A_t)$.

Fuente: Elaboración propia

5.3.6. Análisis de sobrevaloración del precio del modelo de Burbuja Intrínseca

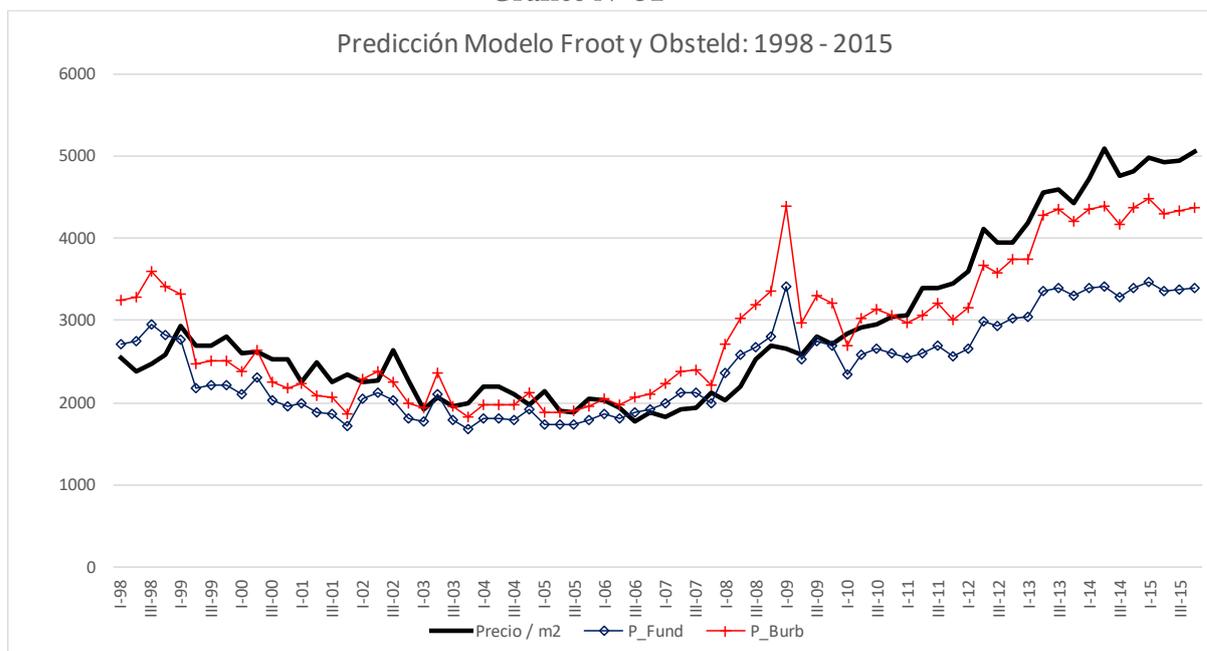
Al comparar las series del precio observado, precio fundamental y el precio con burbuja intrínseca se puede observar gráficamente la existencia de sobrevaloración del valor observado del precio respecto a su valor fundamental (solución de valor presente).

Se puede apreciar como la trayectoria de la solución completa del modelo (solución de valor presente + solución burbuja) en la línea roja captura perfectamente el comportamiento del precio de vivienda observado en la línea negra (a partir del I-2010 se aprecia como los precios observados empiezan a acelerarse respecto a su comportamiento normal representado en la línea azul, del mismo modo a partir del I-2010 la línea roja que representa el precio estimado con burbuja se empieza a separar de la línea del precio fundamental en color azul, acercándose y replicando el comportamiento de la línea del precio observado).

Es muy interesante hacer notar que en la sección anterior relacionada al Análisis de sobrevaloración del precio del modelo SVAR cuando se realizó el escenario de predicción a partir del I-2010, el SVAR también detecta la presencia de una burbuja en el precio en la misma fecha predicha por el modelo de Burbuja Intrínseca, haciendo de este modo consistentes los resultados obtenidos por ambos modelos; sin embargo, se puede ver que el modelo de Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld, en cuanto a análisis de sobrevaloración se refiere, es un mejor predictor del comportamiento de los precios de vivienda en el período de estudio al capturar de una manera muy cercana el comportamiento de estos.

Acorde con la literatura, la variable fundamental del precio de la vivienda es el alquiler. En ese sentido, se estimó el modelo de Froot y Obsteld con la finalidad de detectar la presencia de una burbuja intrínseca. Los resultados muestran la existencia de una burbuja intrínseca, encontrando una sobrevaloración importante a partir del primer trimestre del 2010, con un promedio de 34%, y niveles máximos de 49%. Asimismo, según las estimaciones de este modelo el período de recuperación de la inversión en vivienda para el Perú sería de aproximadamente de 12.2 años. Sin embargo, actualmente el periodo promedio de recuperación es de aproximadamente 17 años.

Gráfico N° 31



Fuente: Elaboración propia

6. Conclusiones

Esta investigación busca identificar los determinantes de largo plazo del precio de la vivienda en Lima-Metropolitana, así como descartar la presencia de una burbuja en el sector inmobiliario. Con esta finalidad se estimó en primer lugar un SVAR a lo Blanchard y Quah basado en el “Modelo de Fry del sector hipotecario en el largo plazo”; del mismo modo se testeó la presencia de burbuja a través del “Modelo de Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld”. Siendo parte importante de esta investigación la reconstrucción de las series del índice de costos de terreno y de los alquileres a fin de completar la información disponible hasta el momento en el Perú; elaborándose una base de datos para el caso de alquileres con un total de 6197 observaciones y una base de datos para el caso del índice de costos de terreno de 5941 observaciones.

Un aporte fundamental, en comparación a otros trabajos realizados en el Perú y Latinoamérica, es la estimación del modelo SVAR utilizando la serie del índice de costos de terreno y una adecuada especificación teórica de la matriz de choques de largo plazo, con lo cual se obtuvieron estimaciones más coherentes y con los signos esperados. Por su parte, la serie de alquileres que se utiliza como fundamento del precio de vivienda, nos permitió estimar el Modelo de Burbuja Intrínseca, cuya característica principal es capturar la sobre-reacción del precio a través del impacto no lineal del propio fundamento. Esta última metodología fue elegida por su alto poder explicativo de fenómenos empíricos de burbujas, tales como los casos de España y Estados Unidos.

Al correr el modelo SVAR se obtienen estimados significativos y con los signos teóricos esperados, de este modo se verifican las ecuaciones propuestas por Fry en el modelo del sector hipotecario de largo plazo. Por lo tanto, se concluye que los principales determinantes del precio de vivienda en el largo plazo son: el Producto Bruto Interno real, el índice de costos de construcción y terreno, la tasa de interés real y el Índice General de la Bolsa de Valores de Lima.

Acorde con la literatura, la variable fundamental del precio de la vivienda es el alquiler. En ese sentido, se estimó el modelo de Froot y Obsteld con la finalidad de detectar la presencia de una burbuja intrínseca. Los resultados muestran la existencia de una burbuja intrínseca, encontrando una sobrevaloración importante a partir del primer trimestre del 2010, con un promedio del 34%,

y niveles máximos del 49%. Asimismo, según las estimaciones de este modelo el período de recuperación de la inversión en vivienda para el Perú sería de aproximadamente de 12.2 años, sin embargo, actualmente el periodo promedio de recuperación observado es de aproximadamente 17 años; lo cual evidencia la sobrevaloración actual del precio. Es importante precisar que en la sección relacionada al Análisis de sobrevaloración del precio del modelo SVAR, cuando se realizó el escenario de predicción a partir del I-2010, también detecta la presencia de una burbuja en el precio en la misma fecha predicha por el modelo de Burbuja Intrínseca, haciendo de este modo consistentes los resultados obtenidos por ambos modelos; sin embargo, se puede ver que el modelo de Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld, en cuanto a análisis de sobrevaloración se refiere, es un mejor predictor del comportamiento de los precios de vivienda en el período de estudio al capturar de una manera muy cercana el comportamiento de estos.

En relación a la dinámica del precio de la vivienda, este se empieza a acelerar a partir del año 2001, conjuntamente con la cartera de créditos hipotecarios que pasó de S/ 3,608 MM a S/. 38,493 MM al cierre del año 2015. Esta evolución en el Perú se puede dividir en dos secciones, una tendencia decreciente en el periodo 1998 - 2006 y el permanente crecimiento desde el 2007 hasta el año 2015. No obstante, en los últimos trimestres del 2015 se experimentó una ligera caída lo cual estaría asociado al exceso de oferta de viviendas nuevas en los últimos años.

Tomando en consideración los posibles escenarios futuros de la evolución del precio y sus determinantes de corto y largo plazo, nos encontramos en un escenario de riesgo de burbuja inmobiliaria. La explosión dependerá de la evolución del contexto macroeconómico, principalmente de las variables que afecten al crédito hipotecario. Se debe tener en cuenta que las ventas de las viviendas nuevas en Lima están asociadas al desembolso de los créditos hipotecarios. En la medida que ocurra una restricción del crédito para viviendas nuevas, esto obligaría a los constructores a reducir el precio a fin de disminuir su stock (oferta), con lo cual las viviendas perderían su valor pudiendo desatarse una crisis inmobiliaria. Es importante aclarar que la probable crisis no se generaría en tanto no ocurra un choque importante que afecte la producción, el empleo y se restrinjan los créditos hipotecarios.

7. Recomendaciones

Se recomienda que las instituciones públicas, tales como el Banco Central de Reserva del Perú (BCRP) y el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), que administran la información relacionada con el mercado inmobiliario, hagan un seguimiento permanente a las variables principales, principalmente al costo de terreno y los alquileres, considerando la importancia de este mercado para la economía en su conjunto.

8. Agenda pendiente

Se deberá profundizar el análisis de los posibles escenarios bajo los cuales explotaría una burbuja inmobiliaria en el Perú. Asimismo, es necesario explorar otras formas funcionales de burbujas para el precio de la vivienda en el Perú, incorporando otras variables relevantes en el análisis.

Bibliografía

- Abad, J. (2013): “Precios de la vivienda: sobrevaloración y burbuja”, *Universidad Complutense de Madrid*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2010): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 55*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2011): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 71*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2012): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 31*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2012): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 76*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2013): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 29*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2014): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 05*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2014): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 52*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2015): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 39*.
- Banco Central de Reserva del Perú (2016): “Indicadores del mercado inmobiliario”, *Nota de Estudios N° 08*.
- BBVA (2002): “Situación Inmobiliaria – Perú, Diciembre 2002”, *BBVA*.
- BBVA (2008): “Situación Inmobiliaria - Perú”, *BBVA / Servicio de Estudios Económicos*.
- BBVA (2012): “Situación Perú: Análisis económico tercer trimestre”, *BBVA Report*.
- BBVA (2016): “Situación Inmobiliaria - Perú”, *BBVA / Research*.
- Bernanke, B. y M. Gertler (1999): “The financial accelerator in a quantitative business cycle framework”, *Princeton University, New York University, and Boston University*
- Budnevich, C. y P. Langoni (1998): “Comportamiento Reciente de los Precios de los Activos del Sector Inmobiliario”, *Banco Central de Chile*.
- Caicedo, S., M. Morales y D. Pérez (2010): “Un análisis de sobrevaloración en el mercado de la vivienda en Colombia”, *Reporte de Estabilidad Financiera, Setiembre 2010, Banco de la República Colombia*.
- Carbó, S. y F. Rodríguez (2010): “The Relationship between Mortgage Markets and House Prices: Does Financial Instability Make the Difference”, *CenFIS Working Paper 10-02 February 2010*.

- Castañeda, J. y M. Hernández (2011): “Burbujas especulativas en los precios de los activos (oficios, ferrocarriles, inmuebles y bolsa)”. *X Congreso Internacional de la AEHE*.
- Ceron, M. (2013): “Análisis del mercado de viviendas en el Perú a través de un modelo SVAR”, *Pontificia Universidad Católica del Perú*.
- Cochrane, J. (1997), "Time Series for Macroeconomics and Finance", *mimeo, The University of Chicago*.
- Desormeaux, N. (2012): “¿Existe Relación de Largo Plazo entre el Precio de las Viviendas con sus Variables Fundamentales? Un Análisis de Cointegración”, *Pontificia Universidad Católica de Chile*.
- Enders W. (2003): “Applied Econometric Time Series”. *2nd. ed., Wiley, New York*.
- Eyzaguirre, H. y C. Calderón (2003): “El mercado de crédito hipotecario de Perú”, *Banco Interamericano de Desarrollo (BID) – Instituto Apoyo*.
- Froot, K. y M. Obstfeld (1991): “Intrinsic Bubbles: The Case of Stock Prices”, *American Economic Review*. 81(5), pp. 1189-214.
- Fry, R., V. Martin, y N. Voukelatos (2009). “Overvaluation in Australian Housing and Equity Markets: Wealth Effects or Monetary Policy?” *CAMA, Australian National University. University of Melbourne. March 2009*.
- Gonzales, G. (2002): “El crédito hipotecario y el acceso a la vivienda para los hogares de menores ingresos en América Latina”, *CEPAL. Santiago de Chile, septiembre de 2002*.
- Hamilton, J. (1994): “Times Series Analysis”, *Princeton University Press. Princeton, New Jersey*.
- Hayashi, F. (1982): “Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation”, *Econometrica*, Vol. 50, No. 1. (Jan., 1982), pp. 213-224.
- Holmström, B y J. Tirole, "Financial Intermediation, Loanable Funds and the Real Sector", *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 112, núm. 3, Cambridge Massachusetts, Harvard University, agosto de 1997, pp. 663-691.
- IPAE (2011): “Acceso a la vivienda propia: ¿Es ahora más fácil?”, *Centro de Estudios Estratégicos de IPAE*.
- Kamel, N. (2010): “Intrinsic Bubbles in the American Stock Exchange: The case of the S&P 500 Index”, *Department of accounting and finance, Ecole supérieure de commerce de Tunis Campus Universitaire de la Manouba, la Manouba 2010*.
- Kiyotaki, N., y J. Moore (1997). “Credit Cycles”, *Journal of Political Economy*, n.º 105, pp. 211-248.
- Orrego, F. (2014): “Precio de la vivienda en el Perú”, *Banco Central de Reserva del Perú y Universidad de Piura*.
- Poterba, J. (1991): “House Price Dynamics: The Role of Tax Policy and Demography” *Brookings Papers on Economic Activity 1991:2, 143-203*.
- Poterba, J. (1984): “Tax subsidies to owner-occupied housing: an asset-market approach” *The quarterly journal of economics*, 729-752, 1984. 1132, 1984.

- Perron, P y G. Rodriguez, 2012. "Residual test for cointegration with GLS detrended data," *Documentos de Trabajo / Working Papers 2012-327*.
- Simon, H. (1957). "A Behavioral Model of Rational Choice, in *Models of Man, Social and Rational*": *Mathematical Essays on Rational Human Behavior in a Social Setting*. New York: Wiley.
- Scotiabank (2015): "El mercado inmobiliario en perspectiva", *Estudios Económicos de Scotiabank Perú*.
- Topol, R. (1991): "Bubbles and Volatility of Stock Prices: Effect of Mimetic Contagion".
- Universidad Ricardo Palma (2013): "Informe especial: El mercado de vivienda en el 2013", *Instituto Ciudades siglo XXI Perú*.
- Vernon, S., S. Gerry, y W. Arlington (1988): "Bubbles, Crashes, and Endogenous Expectations in Experimental Spot Asset Markets", *Econometrica* 56:1119-1151.



Anexos

Anexo I: Derivación del modelo de Fry del sector hipotecario en el largo plazo³⁸

Se asume que el inversionista escoge un nivel de inversión residencial (I) de tal modo que maximice el flujo neto descontado de sus beneficios como se representa a continuación:

$$\max_I \pi(t) = \int_t^{\infty} e^{-R.(s-t)} . [P^h(s) . F(h(s)) - P^I(s) . I(s)] . ds \quad (1)$$

sujeto a una restricción de acumulación en el stock de vivienda. Se asume además que la cantidad de servicios de vivienda vienen dados por $F(.) = h(s)$, lo cual supone por simplicidad que la cantidad de servicios de vivienda son exactamente iguales a la cantidad de acervo de vivienda (h) en el mercado.

$$\dot{h} = \psi(I, h) - \delta . h \quad (2)$$

donde P^h es el precio de una unidad de vivienda, P^I es el precio de inversión en el activo vivienda, h e I representan el acervo y la inversión real en vivienda, R es la tasa de interés nominal, $\psi(I, h)$ caracteriza a la función de instalación de vivienda, la cual es monótona creciente y cóncava en la inversión y acervo de vivienda; y δ es la tasa de depreciación de la vivienda. El modelo asume que $P^h = P^I$ y que, además, estos precios crecen a la misma tasa que la inflación (π) en estado estacionario entre los instantes (s) y (t).

$$P^h(s) = P^h(t) . e^{\pi.(s-t)} \quad (3)$$

Reemplazando los supuestos en la función objetivo

$$\max_I \pi(t) = \int_t^{\infty} e^{-R.(s-t)} . [P^h(t) . e^{\pi.(s-t)} . h(s) - P^h(t) . e^{\pi.(s-t)} . I(s)] . ds$$

$$\max_I \pi(t) = \int_t^{\infty} e^{-R.(s-t) + \pi.(s-t)} . [P^h(t) . h(s) - P^h(t) . I(s)] . ds$$

$$\max_I \pi(t) = \int_t^{\infty} e^{-(R-\pi).(s-t)} . [P^h(t) . h(s) - P^h(t) . I(s)] . ds$$

$$\max_I \pi(t) = \int_t^{\infty} e^{-(R-\pi).(s-t)} . P^h(t) . [h(s) - I(s)] . ds$$

El Hamiltoniano en valor presente del problema viene dado por

$$H = e^{-(R-\pi).(s-t)} . P^h(t) . [h(s) - I(s)] + \lambda . [\psi(I, h) - \delta . h] \quad (4)$$

Entonces el Hamiltoniano en valor corriente estará dado por

$$\bar{H} = P^h(t) . [h(s) - I(s)] + m . [\psi(I, h) - \delta . h] \quad (5)$$

Siendo la nueva variable de coestado: $m = e^{(R-\pi).(s-t)} . \lambda$. Las condiciones de primer orden se encuentran en primer lugar derivando la expresión anterior respecto al control (I)

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial I} = -P^h + m . \psi_I = 0$$

³⁸ Adaptado a partir de Fry et al (2009) y de Caicedo, Morales y Pérez (2010)

$$\dot{m} = (R - \pi).m - \frac{\partial \bar{H}}{\partial h} = (R - \pi).m - P^h - (\psi_h - \delta).m$$

$$\dot{m} = (R - \pi + \delta - \psi_h).m - P^h$$

Derivando \bar{H} respecto al coestado (m)

$$\dot{h} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial m} = \psi(I, h) - \delta.h$$

Se asume una función de instalación monótona creciente y cóncava en la inversión (I) y el acervo de capital (h) de la forma $\psi(I, h) = I^\gamma . h^{1-\gamma}$ con parámetro $0 < \gamma < 1$ que genera el carácter cóncavo.

Sabemos que: $\psi_h = (1 - \gamma). \left[\frac{I}{h}\right]^\gamma$. Reemplazando en la segunda y tercera condición de tenemos

$$\dot{m} = \left(R - \pi + \delta - (1 - \gamma). \left[\frac{I}{h}\right]^\gamma\right).m - P^h \quad (6)$$

$$\dot{h} = I^\gamma . h^{1-\gamma} - \delta.h \quad (7)$$

Para capturar la dinámica del modelo al momento de especificar el SVAR se impondrán restricciones de largo plazo con el objetivo de determinar las relaciones entre las variables del modelo. Por esta razón, se mira que ocurre en el estado estacionario (largo plazo), es decir, cuando

$$\dot{m} = \dot{h} = 0$$

Entonces

$$\left(R - \pi + \delta - (1 - \gamma). \left[\frac{I}{h}\right]^\gamma\right).m - P^h = 0 \quad (8)$$

$$I^\gamma . h^{1-\gamma} - \delta.h = 0 \quad (9)$$

De esta última expresión se tiene:

$$\delta = \left[\frac{I}{h}\right]^\gamma$$

Reemplazando en (8), reordenando y utilizando la condición de primer orden ($\partial \bar{H} / \partial I = 0$) se obtiene:

$$(R - \pi + \delta - (1 - \gamma). \delta).m - P^h = 0$$

$$m = \frac{P^h}{R - \pi + \gamma. \delta} = \frac{P^h}{\psi_I} \quad (10)$$

A partir de la siguiente expresión se define la **q marginal de Tobin** como el cociente entre la variable de coestado (m) y el precio de la vivienda en el mercado (P^h). Donde (m) representa el beneficio marginal que gana el inversionista por brindar una unidad adicional de servicios vivienda (h); y (P^h) se interpreta como el costo marginal en el cual incurre este inversionista para generar esta unidad de vivienda (h). Donde se recuerda que $P^h = P^I$ en (10). Además $\psi_I = R - \pi + \gamma. \delta$ captura el hecho que cuando el inversionista dedica sus recursos a producir una unidad adicional de vivienda (ψ_I) a través de la función de instalación $\psi(I, h)$, en ese momento sacrifica intereses reales ($R - \pi$) si hubiera dedicado estos recursos a comprar algún otro activo financiero,

además de tener que cubrir los costos de depreciación de la vivienda ($\gamma \cdot \delta$) ponderados por la proporción de inversión realizada (γ).

$$q_m = \frac{m}{p^h} = \frac{1}{R - \pi + \gamma \cdot \delta} \quad (11)$$

Del mismo modo se define **q promedio** como la razón entre el valor de mercado de la vivienda y su costo de reemplazo. Donde $\alpha \in (0,1)$, L es el índice de costos de terreno y C representa el índice de costos de construcción.

$$\bar{q} = \frac{p^h \cdot h}{L^{1-\alpha} \cdot C^\alpha \cdot h} \quad (12)$$

Si el inversionista es tomador de precios, con función de producción $F(.) = h$ y función de instalación $\psi(I, h)$ linealmente homogéneas, luego se puede probar que $q_m = \bar{q}$.³⁹

Por lo tanto, de (11) y (12) se tiene que

$$\frac{1}{R - \pi + \gamma \cdot \delta} = \frac{p^h \cdot h}{L^{1-\alpha} \cdot C^\alpha \cdot h}$$

$$p^h = \frac{L^{1-\alpha} \cdot C^\alpha}{R - \pi + \gamma \cdot \delta}$$

Dividiendo ambos lados por la variable índice de costos de terreno (L) y tomando logaritmos obtenemos una expresión en términos relativos. Donde $p^h = \ln(P^h/L)$ es el precio de la vivienda relativo al índice de costos de terreno y $c = \ln(C/L)$ es el índice de costos de construcción relativo al índice de costos de terreno.

$$p^h = \alpha \cdot c - \ln(R - \pi + \gamma \cdot \delta) \quad (13)$$

Haciendo unos arreglos se tiene

$$p^h = \alpha \cdot c - \ln(R - \pi + \gamma \cdot \delta) + \ln(R - \pi) - \ln(R - \pi)$$

$$p^h = \alpha \cdot c - [\ln(R - \pi + \gamma \cdot \delta) - \ln(R - \pi)] - \ln(R - \pi)$$

$$p^h = \alpha \cdot c - \left[\ln \left(\frac{R - \pi + \gamma \cdot \delta}{R - \pi} \right) \right] - \ln(R - \pi)$$

$$p^h = \alpha \cdot c - \ln \left(1 + \frac{\gamma \cdot \delta}{R - \pi} \right) - \ln(R - \pi)$$

$$p^h = \alpha \cdot c - \ln(R - \pi) - \ln \left(1 + \frac{\gamma \cdot \delta}{R - \pi} \right)$$

De donde $r = \ln(R - \pi)$ es el logaritmo de la tasa de interés real y haciendo $\phi = \ln \left(1 + \frac{\gamma \cdot \delta}{R - \pi} \right)$

$$p^h = \alpha \cdot c - r - \phi \quad (14)$$

³⁹ Hayashi (Junio-1982). Econometrica. Vol. No. I. Proposition 1, pag. 218

Se supone que en el largo plazo el índice de costos de construcción relativo al índice de costos de terreno (c) es función del producto real (y)

$$c = \beta \cdot y + c_0 \quad (15)$$

Reemplazando (15) en (14) se obtiene la ecuación del precio de vivienda relativo que depende del choque de producto real en forma positiva (y), del choque de costos relativos (c) también en sentido positivo y del choque de tasa de interés real en forma negativa (r) en el largo plazo. Adicionalmente en la estimación del SVAR se incorporó en esta ecuación un choque de portafolio local medido a través del IGBVL, para medir el efecto del mercado bursátil sobre el mercado de vivienda.

$$p^h = \alpha \cdot \beta \cdot y + \alpha \cdot c_0 - r - \phi \quad (16)$$

Anexo II: Derivación del Structural VAR de Blanchard Quah⁴⁰

El vector de variables a utilizarse es definido como: $z = [y, igbvl, c, r, \pi, p^h]^T$, donde: y es el logaritmo del producto real, $igbvl$ es el logaritmo del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, c es el logaritmo del Índice de costos de construcción relativo al Índice de costo del terreno, r es la tasa de interés activa en moneda nacional, π es la tasa de inflación, p^h es el precio por m² de departamentos en el sector alto de Lima.

En nuestro análisis se especifica un modelo SVAR con las 6 variables en su forma estructural. El SVAR de k rezagos se presenta como:

$$A \cdot \Delta z_t = (\phi_1 \cdot L^1 + \phi_2 \cdot L^2 + \dots + \phi_k \cdot L^k) \cdot \Delta z_t + \theta + B \cdot u_t$$

El SVAR en su forma reducida viene a ser:

$$\Delta z_t = A^{-1} \cdot (\phi_1 \cdot L^1 + \phi_2 \cdot L^2 + \dots + \phi_k \cdot L^k) \cdot \Delta z_t + A^{-1} \cdot \theta + A^{-1} \cdot B \cdot u_t^{41}$$

$$[I - A^{-1} \cdot (\phi_1 \cdot L^1 + \phi_2 \cdot L^2 + \dots + \phi_k \cdot L^k)] \cdot \Delta z_t = A^{-1} \cdot \theta + A^{-1} \cdot B \cdot u_t$$

Para solucionar el modelo SVAR con el objetivo de recuperar la matriz que contiene los choques de largo plazo sobre las endógenas Δz_t , las endógenas Δz_t deben expresarse en función de la matriz A (guarda las relaciones contemporáneas entre endógenas), de la matriz B y de la matriz $C(L)$ (guarda el efecto de periodos pasados, es decir, de las endógenas rezagadas sobre las endógenas Δz_t en el período actual que se muestran en el VAR sin restricciones).

$$[I - A^{-1} \cdot C(L)] \cdot \Delta z_t = \vartheta + A^{-1} \cdot B \cdot u_t$$

Los choques estructurales que determinan la dinámica del proceso se denotan como un vector de perturbaciones u_t . Se ha determinado un orden de los choques de la manera siguiente:

⁴⁰ Se utilizó el artículo "Exercise on Estimating a Structural VAR in Eviews" del "Centre for Central Banking Studies". Bank of England.

⁴¹ Se entiende a A como la matriz que guarda las relaciones contemporáneas entre las endógenas del modelo. Se estima el modelo considerando las endógenas en forma estacionaria, es decir como $I(0)$, por lo tanto, estas se especifican en diferencias Δz_t .

$$u_t = \begin{bmatrix} \text{Oferta Agregada} \\ \text{Portafolio Local} \\ \text{Oferta de Vivienda} \\ \text{Demanda Agregada} \\ \text{Nominal} \\ \text{Demanda de Vivienda} \end{bmatrix}$$

Las perturbaciones de la forma reducida (e_t) y los choques estructurales (u_t) se relacionan a través de la matriz $A^{-1}.B$ del siguiente modo:

$$e_t = A^{-1}.B.u_t$$

$$\Delta z_t = [I - A^{-1}.C(L)]^{-1}.\vartheta + [I - A^{-1}.C(L)]^{-1}.A^{-1}.B.u_t$$

$$\Delta z_t = [I - A^{-1}.C(L)]^{-1}.\vartheta + [I - A^{-1}.C(L)]^{-1}.A^{-1}.B.u_t$$

$$\Delta z_t = [I - A^{-1}.C(L)]^{-1}.\vartheta + H.u_t$$

$$\Delta z_t = [I - A^{-1}.\phi_1.L^1 + \phi_2.L^2 + \dots + \phi_k.L^k]^{-1}.\vartheta + H.u_t$$

En el largo plazo (estado estacionario) el crecimiento de las variables es constante $\Delta z_{t-j} = \Delta z_t$ $\forall t$ por lo que el modelo se reduce a:

$$\Delta z_t = [I - A^{-1}.\phi_1 - A^{-1}.\phi_2 - \dots - A^{-1}.\phi_k]^{-1}.\vartheta + H.u_t$$

H contiene los parámetros que controlan las propiedades de largo plazo del modelo, es decir captura los efectos de los choques estructurales sobre las endógenas.

Donde $H = [I - A^{-1}.C(L)]^{-1}.A^{-1}.B$: El procedimiento para estimar H consiste en recuperar la matriz de efectos rezagados $C(L)$ a partir de VAR sin restricciones, estimando el sistema ecuación por ecuación utilizando por lo general OLS. Adicionalmente al imponer restricciones sobre la matriz de efectos contemporáneos A y directamente sobre ciertos parámetros en H es posible estimarla utilizando MLE.

Restricciones

Se incorporaron 51 restricciones en el modelo AB (36 restricciones en A y 15 en H), de tal modo que permitan la exacta identificación del modelo. En la estimación final del SVAR se realizó la modificación teórica de las restricciones en H , mejorando notablemente los resultados en relación a estimarlo en forma Choletzky.

Las restricciones son impuestas a partir de la relación entre la matriz de varianza covarianza de las innovaciones (e_t) del VAR en la forma reducida con la matriz de varianza covarianza de los choques estructurales (u_t) y la matriz A que guarda los choques contemporáneos (de corto plazo).

$$\Omega_e = A^{-1}.\Omega_u.(A^{-1})'$$

Ω_e es conocida a partir de las estimaciones del VAR sin restricciones. A partir de estos estimados se recuperarán los parámetros contenidos en Ω_u y A , imponiendo cierto número de restricciones que hagan el SVAR identificable.

Cuadro N° 15

Matrices	En un modelo SVAR B	En un modelo SVAR AB
A	Parámetros estructurales a recuperar $K^2 - K$	Parámetros estructurales a recuperar $K^2 - K$
Ω_u	K	K
B		K^2
Ω_e	Parámetros conocidos $\frac{K^2 + K}{2}$	Parámetros conocidos $\frac{K^2 + K}{2}$
Total	N° restricciones = $\frac{K^2 + K}{2}$	N° restricciones = $\frac{3.K^2 - K}{2}$

De este modo utilizando N° restricciones = $\frac{3.K^2 - K}{2} = \frac{3.(6)^2 - 6}{2} = 51$, se imponen en este trabajo del siguiente modo:

$$H = \begin{bmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{31} & 0 & \theta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} & 0 & 0 \\ \theta_{51} & \theta_{52} & \theta_{53} & \theta_{54} & \theta_{55} & \theta_{56} \\ \theta_{61} & \theta_{62} & \theta_{63} & \theta_{64} & 0 & \theta_{66} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Funciones impulso respuesta y estacionariedad.⁴²

Se presenta un VAR en su forma reducida.

$$y_t = \sum_{s=1}^p \Phi_s \cdot y_{t-s} + e_t$$

$$y_t = \Phi_1 \cdot y_{t-1} + \Phi_2 \cdot y_{t-2} + \dots + \Phi_p \cdot y_{t-p} + e_t$$

Siendo y_t un vector de (nx1) que contiene las n variables del VAR medidas en un tiempo t. Los vectores $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}\}$ cada uno de dimensión (nx1) son los p rezagos de y_t . Adicionalmente $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p\}$ son p matrices cada una de dimensión (nxn), con n filas que corresponden a las n ecuaciones del sistema y las n columnas que equivalen a las n variables del VAR. Asimismo, e_t es el vector de las perturbaciones aleatorias del VAR reducido de orden (nx1).

Se puede escribir el VAR(p) en su forma espacio estado, de mayor utilidad para demostrar varias implicaciones. De esta manera se puede representar un VAR(p) como un VAR(1).

⁴² Based on "Times Series Analysis" chapters 1,2-Hamilton J. "Applied Econometric Time Series" chapters 5,6-Enders W. "Time Series for Macroeconomics and Finance" sections 5.2.3 and 7.3.

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}_{npx1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{npxnp} \cdot \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ y_{t-3} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix}_{npx1} + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{npx1} \cdot [e_t]_{1x1}$$

Entonces.

$$x_t = F \cdot x_{t-1} + v_t$$

Donde F se denomina como la matriz compañera del sistema, posteriormente haciendo reemplazos sucesivos hacia atrás (**backward looking**) se tiene:

$$x_t = F \cdot (F \cdot x_{t-2} + v_{t-1}) + v_t$$

$$x_t = F^2 \cdot x_{t-2} + F \cdot v_{t-1} + v_t$$

$$x_t = F^2 \cdot (F \cdot x_{t-3} + v_{t-2}) + F \cdot v_{t-1} + v_t$$

$$x_t = F^3 \cdot x_{t-3} + F^2 \cdot v_{t-2} + F \cdot v_{t-1} + v_t$$

En forma general:

$$x_t = F^s \cdot x_{t-s} + \sum_{s=0}^n F^s \cdot v_{t-s} \quad (1)$$

Si se asume que F es diagonalizable puede expresarse como $F^s = [P \cdot \Lambda \cdot P]^{-s} = P \cdot \Lambda^s \cdot P^{-1}$, siendo P la matriz que contiene los vectores propios de F y Λ una matriz diagonal con sus eigenvalores. Si $s \rightarrow \infty$ luego $P \cdot \Lambda^s \cdot P^{-1} \rightarrow 0$ y por lo cual $F^s \rightarrow 0$. A partir de esto se obtiene la representación de medias móviles del VAR(p).

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} F^s \cdot v_{t-s} \quad (2)$$

El nuevo vector de perturbaciones de la forma reducida escrita como espacio estado del VAR(p) se denota como.

$$v_t = \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{npx1}$$

En este sentido se recuerda que el vector de perturbaciones e_t de la forma reducida del VAR(p) se relaciona con el vector de choques estructurales u_t a través de la matriz de relaciones contemporáneas entre las endógenas del sistema que se denotará por A . Siendo e_t y u_t de dimensión $(nx1)$ y A de dimensión (nxn) .

$$e_t = A^{-1} \cdot u_t$$

Utilizando esta información podemos expresar.

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}^s \cdot \begin{bmatrix} e_{t-s} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces.

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix}^s \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [u_{t-s}]$$

De aquí se puede observar que el producto de la matriz compañera F con el vector que contiene a A^{-1} representa las respuestas de las endógenas contenidas en x_t ante impulsos generados por el vector de choques estructurales u_{t-j} .

Para que el sistema sea más manejable se asume que nos encontramos en el caso de un VAR(2), es decir con $p = 2$ rezagos. Se escriben las endógenas en primeras diferencias.

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^s \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [u_{t-s}] \quad (3)$$

Utilizando el operador de retardos L^s se tiene.

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^s \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} L^s \cdot [u_t]$$

Además, debe notarse que se hace uso del supuesto que las endógenas del VAR no crecen en el largo plazo $\Delta x_{t-s} = \Delta x_t$ debido a que es una condición que hace que estas endógenas sean estacionarias en un SVAR y sea posible determinar las funciones de impulso respuesta del modelo. De este modo, si $L^j \cdot \Delta x_t = \Delta x_{t-s}$, entonces para que se cumpla la condición $L^s = 1$.⁴³ De esta forma el vector de choques estructurales $[u_t]$ ya no depende del efecto de los rezagos, es decir, no depende de j .

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^s \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot [u_t]$$

Haciendo recordar que Φ_1 y Φ_2 son matrices de orden $(n \times n)$, I_n es la identidad de orden $(n \times n)$, 0 es de orden $(n \times n)$ y A^{-1} es la matriz de relaciones contemporáneas de las endógenas de orden $(n \times n)$. Se expande esta expresión y se obtiene la matriz con sumatorias que contiene los $(2n \times n)$ multiplicadores de largo plazo de impulso respuesta. Exactamente son n choques estructurales contenidos en $[u_t]$ que generan las $(2n)$ respuestas de las endógenas del VAR. Por ejemplo $\sum_{s=0}^{\infty} \phi_{12}(s)$ representa la respuesta acumulada en el largo plazo de Δy_{1t} a un impulso u_{2t} . Es necesario hacer que notar que $|\sum_{s=0}^{\infty} \phi_{12}(s)| < \infty$ existe si las endógenas del VAR son estacionarias.

⁴³ Fry et.al. pag.9

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \\ \vdots \\ \Delta y_{nt} \\ \Delta y_{1t-1} \\ \Delta y_{2t-1} \\ \vdots \\ \Delta y_{nt-1} \end{bmatrix}_{2nx1} = \begin{bmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{11}(s) & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{12}(s) & \cdots & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{1n}(s) \\ \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{21}(s) & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{22}(s) & \cdots & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{n1}(s) & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{n2}(s) & \cdots & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{nn}(s) \\ \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(n+1)1}(s) & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(n+1)2}(s) & \cdots & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(n+1)n}(s) \\ \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(n+2)1}(s) & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(n+2)2}(s) & \cdots & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(n+2)n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(2n)1}(s) & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(2n)2}(s) & \cdots & \sum_{s=0}^{\infty} \phi_{(2n)n}(s) \end{bmatrix}_{2n \times n} \cdot \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \vdots \\ u_{nt} \end{bmatrix}_{nx1}$$

$$x_t = H \cdot u_t$$

Haciendo $C = \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ puede expresarse en forma compacta (3) como.

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} F^s \cdot C \cdot [u_{t-s}]$$

Luego en forma directa las funciones de impulso respuesta individuales estarán dadas por las matrices C , $F \cdot C$, $F^2 \cdot C$, ...; y los efectos de largo plazo como la suma de las mismas.

Ahora haciendo uso de (2) y utilizando el operador de rezagos L^s podemos expresar las medias móviles del VAR del siguiente modo.

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} F^s \cdot L^s \cdot v_t$$

Debido a que estamos en un contexto de búsqueda de los efectos de largo plazo, ya se había mostrado que $L^s = 1$, entonces resulta.

$$x_t = [\sum_{s=0}^{\infty} F^s] \cdot v_t \quad (4)$$

$$x_t = [F^0 + F^1 + F^2 + \cdots + F^s] \cdot v_t$$

$$x_t = [I + F^1 + F^2 + \cdots + F^s] \cdot v_t \quad (5)$$

Haciendo un cambio de variable, donde Z es una matriz de orden $(2n \times 2n)$ dado que F es de orden $(2n \times 2n)$.

$$Z = I + F^1 + F^2 + \cdots + F^s$$

$$F \cdot Z = F^1 + F^2 + \cdots + F^{s+1}$$

$$Z - F \cdot Z = I - F^{s+1}$$

$$(I - F) \cdot Z = I - F^{s+1}$$

$$Z = (I - F)^{-1} \cdot (I - F^{s+1})$$

Sustituyendo en (5) se tiene.

$$x_t = Z \cdot v_t$$

$$x_t = (I - F)^{-1} \cdot (I - F^{s+1}) \cdot v_t$$

Se conoce que $F^{s+1} = [P \cdot \Lambda \cdot P]^{s+1} = P \cdot \Lambda^{s+1} \cdot P$, luego cuando $s \rightarrow \infty$ entonces $\Lambda^{s+1} \rightarrow 0$ y por lo tanto $F^{s+1} \rightarrow 0$. De aquí se prueba que la solución para el vector x_t de endógenas del modelo converge.

$$x_t = (I - F)^{-1} \cdot v_t \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & I_n & -I_n & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expresando en función del vector de choque estructurales $[u_t]$.

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix}_{2nx1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & I_n & -I_n & 0 \end{bmatrix}^{-1}_{2nx2n} \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}_{2nxn} \cdot [u_t]_{nx1}$$

Escribiendo en forma compacta se obtiene una matriz $H = (I - F)^{-1} \cdot C$ que controla las propiedades de largo plazo del modelo del mismo tipo de la que se obtuvo en el SVAR de Blanchard y Quah de secciones anteriores, solamente que en este caso es para el VAR(p) transformado en su representación espacio estado. Entonces se tiene.

$$x_t = (I - F)^{-1} \cdot C \cdot u_t$$

$$x_t = H \cdot u_t$$

Donde x_t es de orden $(2n \times 1)$, H de orden $(2n \times n)$ y u_t de orden $(n \times 1)$.

Utilizando las expresiones (4) y (6) puede concluirse que la suma sucesiva de matrices F existirá si y solo si existe la inversa $(I - F)^{-1}$. Otra forma de verlo sería decir que $\sum_{s=0}^{\infty} F^s \rightarrow (I - F)^{-1}$ cuando $s \rightarrow \infty$ en (4).

$$\sum_{s=0}^{\infty} F^s = (I - F)^{-1} \quad (7)$$

Ahora suponemos una representación de Wold que dice que un VAR puede escribirse como un proceso de medias móviles, donde $B(L)$ es el polinomio de rezagos de B, siendo B matrices de dimensión $(2n \times 2n)$. Es necesario aclarar que esta es una representación de medias móviles del VAR(p) en su forma espacio estado similar a la encontrada en (4); sin embargo, en este caso se asume que las matrices B no son conocidas. Entonces puede escribirse.

$$x_t = B(L) \cdot v_t$$

$$x_t = [B^0 \cdot L^0 + B^1 \cdot L^1 + B^2 \cdot L^2 + \dots + B^s \cdot L^s] \cdot v_t$$

Del mismo modo como se hizo antes se asume que en el largo plazo $L^s = 1, \forall s$. Luego se tiene.

$$x_t = \left[\sum_{s=0}^{\infty} B^s \right] \cdot v_t \quad (8)$$

Reemplazando el vector v_t de la expresión (6) en (8).

$$x_t = \left[\sum_{s=0}^{\infty} B^s \right] \cdot (I - F) \cdot x_t$$

Este resultado es cierto si ocurre que $[\sum_{s=0}^{\infty} B^s] \cdot (I - F) = I$. Utilizando la condición dada en (7) se tiene que.

$$\left[\sum_{s=0}^{\infty} B^s \right] \cdot \left[\sum_{s=0}^{\infty} F^s \right]^{-1} = I$$

$$[B^0 + B^1 + B^2 + \dots + \dots] \cdot [F^0 + F^1 + F^2 + \dots + \dots]^{-1} = I$$

Esto solo es posible si $B^0 = F^0 = I$, $B^1 = F^1$, $B^2 = F^2$, ...

Por lo tanto, es posible recuperar los parámetros desconocidos contenidos en las matrices B de la representación de medias móviles de un VAR, a través de la información existente en las matrices compañeras F. Recordemos que para el caso que se está analizando $F = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$, tal matriz contiene en su primera fila las matrices $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ cada una de dimensión $(n \times n)$, que almacenan la información de los parámetros del VAR(2) en su forma reducida para el primer $p = 1$ y el segundo rezago $p = 2$. En otras palabras, el procedimiento para recuperar B inicia estimando el VAR(2) en su forma reducida ecuación por ecuación utilizando OLS, de esta forma se estiman $\{\Phi_1, \Phi_2\}$; con estos parámetros conocidos F se recupera de manera automática, y finalmente a través de F se pueden encontrar los parámetros de B.

A continuación, se hace uso de un VAR(2) con 2 variables endógenas $\{y_t, z_t\}$ para probar resultados relevantes relacionados con la estacionariedad y la estabilidad de las soluciones.

$$y_t = \beta_{11} \cdot y_{t-1} + \beta_{12} \cdot y_{t-2} + \beta_{13} \cdot z_{t-1} + \beta_{14} \cdot z_{t-2} + e_{yt}$$

$$z_t = \beta_{21} \cdot y_{t-1} + \beta_{22} \cdot y_{t-2} + \beta_{23} \cdot z_{t-1} + \beta_{24} \cdot z_{t-2} + e_{zt}$$

En forma matricial.

$$\begin{bmatrix} (1 - \beta_{11} \cdot L - \beta_{12} \cdot L^2) & -(\beta_{13} \cdot L + \beta_{14} \cdot L^2) \\ -(\beta_{21} \cdot L + \beta_{22} \cdot L^2) & (1 - \beta_{23} \cdot L - \beta_{24} \cdot L^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{bmatrix}$$

Utilizando la regla de Cramer.

$$y_t = \frac{\begin{vmatrix} e_{yt} & -(\beta_{13} \cdot L + \beta_{14} \cdot L^2) \\ e_{zt} & (1 - \beta_{23} \cdot L - \beta_{24} \cdot L^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - \beta_{11} \cdot L - \beta_{12} \cdot L^2) & -(\beta_{13} \cdot L + \beta_{14} \cdot L^2) \\ -(\beta_{21} \cdot L + \beta_{22} \cdot L^2) & (1 - \beta_{23} \cdot L - \beta_{24} \cdot L^2) \end{vmatrix}}$$

$$z_t = \frac{\begin{vmatrix} (1 - \beta_{11} \cdot L - \beta_{12} \cdot L^2) & e_{yt} \\ -(\beta_{21} \cdot L + \beta_{22} \cdot L^2) & e_{zt} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - \beta_{11} \cdot L - \beta_{12} \cdot L^2) & -(\beta_{13} \cdot L + \beta_{14} \cdot L^2) \\ -(\beta_{21} \cdot L + \beta_{22} \cdot L^2) & (1 - \beta_{23} \cdot L - \beta_{24} \cdot L^2) \end{vmatrix}}$$

Entonces.

$$y_t = \frac{(1 - \beta_{23} \cdot L - \beta_{24} \cdot L^2) \cdot e_{yt} + (\beta_{13} \cdot L + \beta_{14} \cdot L^2) \cdot e_{zt}}{\Delta}$$

$$z_t = \frac{(\beta_{21} \cdot L + \beta_{22} \cdot L^2) \cdot e_{yt} + (1 - \beta_{11} \cdot L - \beta_{12} \cdot L^2) \cdot e_{zt}}{\Delta}$$

El **polinomio característico** que depende del operador de rezagos L es el mismo para ambas variables, y está representado a través del determinante del sistema.

$$\Delta = (1 - \beta_{11} \cdot L - \beta_{12} \cdot L^2) \cdot (1 - \beta_{23} \cdot L - \beta_{24} \cdot L^2) - (\beta_{21} \cdot L + \beta_{22} \cdot L^2) \cdot (\beta_{13} \cdot L + \beta_{14} \cdot L^2)$$

Haciendo un poco de algebra se obtiene.

$$\Delta = 1 - (\beta_{11} + \beta_{23}) \cdot L + [(\beta_{11} \cdot \beta_{23} - \beta_{21} \cdot \beta_{13}) - (\beta_{12} + \beta_{24})] \cdot L^2 + [(\beta_{11} \cdot \beta_{24} - \beta_{21} \cdot \beta_{14}) + (\beta_{12} \cdot \beta_{23} - \beta_{22} \cdot \beta_{13})] \cdot L^3 + [\beta_{12} \cdot \beta_{24} - \beta_{22} \cdot \beta_{14}] \cdot L^4$$

Se hace uso de la variable lambda que a su vez se asume que es la inversa de las raíces del polinomio característico $\lambda = L^{-1}$. Se demostrará posteriormente que λ corresponde exactamente a los eigenvalores de la matriz compañera F del VAR en su forma espacio estado; por lo tanto, esta expresión resultante correspondería a la **ecuación característica** del sistema.

$$\Delta = \lambda^4 - (\beta_{11} + \beta_{23}) \cdot \lambda^3 + [(\beta_{11} \cdot \beta_{23} - \beta_{21} \cdot \beta_{13}) - (\beta_{12} + \beta_{24})] \cdot \lambda^2 + [(\beta_{11} \cdot \beta_{24} - \beta_{21} \cdot \beta_{14}) + (\beta_{12} \cdot \beta_{23} - \beta_{22} \cdot \beta_{13})] \cdot \lambda + [\beta_{12} \cdot \beta_{24} - \beta_{22} \cdot \beta_{14}] \quad (9)$$

Expresando el sistema propuesto en su forma espacio estado.

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{13} & \beta_{12} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{23} & \beta_{22} & \beta_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ y_{t-2} \\ z_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{bmatrix}$$

En forma compacta.

$$x_t = F \cdot x_{t-1} + v_t \quad (10)$$

La ecuación característica de este sistema estaría dada por.

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{13} & \beta_{12} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{23} & \beta_{22} & \beta_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} - \lambda & \beta_{13} & \beta_{12} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{23} - \lambda & \beta_{22} & \beta_{24} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Utilizando expansión de Laplace utilizando la primera fila del determinante.

$$(\beta_{11} - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} \beta_{23} - \lambda & \beta_{22} & \beta_{24} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \beta_{13} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{24} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \beta_{12} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{21} & \beta_{23} - \lambda & \beta_{24} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \beta_{14} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{21} & \beta_{23} - \lambda & \beta_{22} \\ 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Expandiendo los determinantes utilizando la primera fila tenemos.

$$(\beta_{11} - \lambda) \cdot [(\beta_{23} - \lambda) \cdot \lambda^2 + \beta_{24} \cdot \lambda] - \beta_{13} \cdot [\beta_{21} \cdot \lambda^2 + \beta_{22} \cdot \lambda] + \beta_{12} \cdot [(\beta_{23} - \lambda) \cdot \lambda + \beta_{24}] - \beta_{14} \cdot [\beta_{21} \cdot \lambda + \beta_{22}] = 0$$

Simplificando adecuadamente se llega finalmente a la **ecuación característica** del VAR espacio estado.

$$\lambda^4 - (\beta_{11} + \beta_{23}) \cdot \lambda^3 + [(\beta_{11} \cdot \beta_{23} - \beta_{21} \cdot \beta_{13}) - (\beta_{12} + \beta_{24})] \cdot \lambda^2 + [(\beta_{11} \cdot \beta_{24} - \beta_{21} \cdot \beta_{14}) + (\beta_{12} \cdot \beta_{23} - \beta_{22} \cdot \beta_{13})] \cdot \lambda + [\beta_{12} \cdot \beta_{24} - \beta_{22} \cdot \beta_{14}] = 0 \quad (11)$$

La ecuación característica (11) obtenida a partir del determinante de la matriz compañera F del VAR en la forma espacio estado, es exactamente igual a la expresión en (9) que se obtiene invirtiendo el polinomio característico utilizando el supuesto que $\lambda = L^{-1}$. Por lo tanto, se prueba que esta última ecuación contiene efectivamente los eigen valores (λ) del VAR espacio estado, y además estos eigen valores son los recíprocos de las raíces (L) del polinomio característico. Esto también quiere decir que el **polinomio característico** del VAR en la forma reducida es la función inversa de la **ecuación característica** del VAR en la forma espacio estado.

Partiendo de (10) se itera hacia delante (**forward looking**).

$$x_t = F \cdot x_{t-1} + v_t$$

$$t = 1 \quad x_1 = F \cdot x_0 + v_1$$

$$t = 2 \quad x_2 = F \cdot x_1 + v_2 = F \cdot (F \cdot x_0 + v_1) + v_2 = F^2 \cdot x_0 + F^1 \cdot v_1 + v_2$$

$$t = 3 \quad x_3 = F^3 \cdot x_0 + F^2 \cdot v_1 + F^1 \cdot v_2 + v_3$$

.

.

.

$$t = t \quad x_t = F^t \cdot x_0 + \sum_{s=0}^{t-1} F^s \cdot v_{t-s}$$

Esta última expresión es casi idéntica a la solución backward looking presentada en un inicio en (1). Se asumía que F es diagonalizable y por lo tanto puede expresarse como $F^s = [P \cdot \Lambda \cdot P]^{-s} = P \cdot \Lambda^s \cdot P^{-1}$. Si $s \rightarrow \infty$ luego $P \cdot \Lambda^s \cdot P^{-1} \rightarrow 0$ y por lo cual $F^s \rightarrow 0$. Por lo tanto, el vector solución converge a.

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} F^s \cdot v_{t-s} = (I - F)^{-1} \cdot v_t$$

Esto fue posible gracias a que los eigen valores (λ) de F en la diagonal de Λ son números menores que la unidad $|\lambda| < 1$, en otras palabras, se encuentran dentro del círculo unitario en términos de series de tiempo, evitando que el término $F^t \cdot x_0$ explote. De este modo ya que se demostró que $\lambda = L^{-1}$ luego las raíces del polinomio característico $|L| > 1$; en conclusión, la condición de estacionariedad para obtener soluciones estables en un VAR exige que los eigen valores del sistema se encuentren dentro del círculo unitario, lo que es lo mismo afirmar que las raíces del polinomio característico estén fuera de este círculo.

Anexo III: Derivación del modelo de Burbuja Intrínseca de Froot y Obsteld⁴⁴

Los modelos estocásticos de expectativas racionales pueden tener múltiples soluciones que dependen de fundamentos, pero no de variables extrañas. En este sentido la excesiva volatilidad en la solución del precio de vivienda contiene una burbuja intrínseca que proviene completamente de su forma funcional. En este modelo se describe como tal tipo de burbuja racional surge como una solución no lineal en un modelo de precios de vivienda lineal.

⁴⁴ El Modelo original se encuentra en Froot y Obsteld (1991) "Intrinsic Bubbles: The Case of Stock Prices". Se hace uso además del modelo de Myron Gordon (1962) en su versión estocástica, sin embargo, las derivaciones detalladas que se muestran en este anexo pertenecen a esta investigación.

El modelo está basado en la condición de vincular las series de tiempo de precios de vivienda en términos reales con las series de tiempo de los pagos de alquileres reales cuando la tasa de retorno de los precios de vivienda permanece constante. De este modo P_t representa el precio de vivienda en soles por m2 al inicio del período t, A_t es el alquiler en soles por metro cuadrado pagados en el período t y r representa la tasa de retorno promedio de vivienda. En términos continuos el retorno sobre la vivienda proviene de una parte por el cambio en el precio entre el período t+1 y t, y de otro lado por el pago de alquileres del período t.

$$r = \ln(A_t + P_{t+1}) - \ln(P_t)$$

$$e^r = \frac{A_t + P_{t+1}}{P_t}$$

De aquí se obtiene la condición enfocada en Froot y Obsteld (1991), donde se observa que el precio de vivienda al inicio de t se determina a partir del valor presente de los alquileres (fundamento) del período t y del esperado del precio para t+1. Donde $E_t(\cdot)$ representa la esperanza condicional a la información conocida al inicio del período t⁴⁵.

$$P_t = e^{-r} \cdot E_t(A_t + P_{t+1}) \tag{1}$$

Iterando esta expresión k veces hacia adelante

$$P_t = e^{-r} \cdot A_t + e^{-r} \cdot P_{t+1}$$

$$P_{t+1} = e^{-r} \cdot A_{t+1} + e^{-r} \cdot P_{t+2}$$

$$P_{t+2} = e^{-r} \cdot A_{t+2} + e^{-r} \cdot P_{t+3}$$

·
·
·

$$P_{t+k} = e^{-r} \cdot A_{t+k} + e^{-r} \cdot P_{t+k+1}$$

Haciendo reemplazos sucesivos hacia adelante en el precio

$$P_t = e^{-r} \cdot A_t + e^{-r} \cdot (e^{-r} \cdot A_{t+1} + e^{-r} \cdot P_{t+2})$$

$$P_t = e^{-r} \cdot A_t + e^{-2r} \cdot A_{t+1} + e^{-2r} \cdot P_{t+2}$$

$$P_t = e^{-r} \cdot A_t + e^{-2r} \cdot A_{t+1} + e^{-3r} \cdot A_{t+2} + e^{-3r} \cdot P_{t+3}$$

·
·
·

$$P_t = \sum_{s=t}^k e^{-r \cdot (s-t+1)} \cdot E_t(A_s) + e^{-k \cdot r} \cdot P_{t+k}$$

Ahora cuando $k \rightarrow \infty$ se obtiene

$$P_t = \sum_{s=t}^{\infty} e^{-r \cdot (s-t+1)} \cdot E_t(A_s) + \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s \cdot r} \cdot E_t(P_s) \tag{2}$$

⁴⁵ Esto define a la burbuja intrínseca como un tipo de burbuja racional.

Si el valor esperado del precio de vivienda en el largo plazo no sube explosivamente entonces la condición de transversalidad obtenida es igual a cero, lo que significa que no existe burbuja en este mercado

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s.r} \cdot E_t(P_s) = 0 \quad (3)$$

Si esta última condición se cumple entonces se obtiene el valor presente para el precio de vivienda. Esta ecuación se trata de la solución particular de la ecuación en diferencias estocástica (1).

$$P_t^{PV} = \sum_{s=t}^{\infty} e^{-r \cdot (s-t+1)} \cdot E_t(A_s) \quad (4)$$

Esta última ecuación iguala el precio de vivienda con el valor presente descontado de los pagos de alquileres futuros esperados; siendo la solución del precio en función de su fundamento.

Relajando el supuesto (3) sea $\{B_t\}_{t=0}^{\infty}$ una secuencia de variables aleatorias, que representan diversas soluciones burbuja a (1), las cuales satisfacen la siguiente condición

$$B_t = e^{-r} \cdot E_t(B_{t+1}) \quad (5)$$

Entonces $P_t = P_t^{PV} + B_t$ es una solución a (1) la cual está conformada por la suma de la solución de valor presente y la solución de burbuja racional. El comportamiento de una burbuja racional puede depender de variables extrañas, sin embargo, en el caso de burbuja intrínseca se trata de una clase de burbujas racional cuya dinámica se encuentra dirigida solamente por fundamentos; por lo tanto, construir una burbuja intrínseca se trata de buscar una función que dependa en forma no lineal de sus fundamentos (en este caso del alquiler A_t) y que satisfaga (5).

Este modelo considera una única variable fundamental estocástica; se trata de los alquileres (A_t), cuyos logaritmos $a_t = \ln(A_t)$ se suponen son generados por una martingala geométrica.

$$A_{t+1} = A_t \cdot e^{\mu + \xi_{t+1}} \quad (6)$$

$$\text{En forma general: } A_s = A_{t-1} \cdot e^{(\mu + \xi_t) \cdot (s-t+1)} \quad (6')$$

Tomando logaritmos se obtiene la martingala, donde μ es la tasa de crecimiento de los alquileres, sin embargo, se trata de un crecimiento estocástico debido a la presencia de $\xi_{t+1} \sim N(0, \sigma^2)$.

$$a_{t+1} = \mu + a_t + \xi_{t+1} \quad (7)$$

Si los alquileres en t son conocidos, reemplazando el supuesto de martingala (6') en la solución del precio (2) se tiene

$$P_t = \sum_{s=t}^k e^{-r \cdot (s-t+1)} \cdot E_t[A_{t-1} \cdot e^{(\mu + \xi_t) \cdot (s-t+1)}] + e^{-k.r} \cdot P_{t+k} \quad (8)$$

Cuando $k \rightarrow \infty$ luego $s: t \dots \infty$. Si el límite superior de $s \rightarrow \infty$ entonces

$$P_t = \sum_{s=t}^{\infty} A_{t-1} \cdot E_t \left[\frac{e^{(\mu + \xi_t) \cdot (s-t+1)}}{e^{r \cdot (s-t+1)}} \right] + \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s.r} \cdot E_t(P_s) \quad (9)$$

Debido a que buscamos la solución de valor presente sin existencia de burbuja hacemos uso de (3)

$$P_t^{PV} = A_{t-1} \cdot E_t \left\{ \sum_{s=t}^{\infty} \left[\frac{e^{(\mu + \xi_t)}}{e^r} \right]^{(s-t+1)} \right\} \quad (10)$$

Siendo

$$S = \sum_{s=t}^{\infty} \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^{(s-t+1)} = \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^1 + \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^2 + \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^3 + \dots + \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^n + \dots$$

Multiplicando por $\left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]$

$$\left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right] \cdot S = \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^2 + \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^3 + \dots + \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^{n+1} + \dots +$$

$$\text{Entonces: } S - \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right] \cdot S = \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^1 - \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^{n+1}$$

$$S = \frac{\left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^1 - \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]^{n+1}}{1 - \left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right]} \quad (11)$$

Para que la suma converja debe cumplirse que $\left[\frac{e^{(\mu+\xi_t)}}{e^r} \right] < 1$, por lo que en forma inmediata $e^{(\mu+\xi_t)} < e^r$.

Si $\xi_t \sim N(0, \sigma^2)$, si hacemos la transformación $z_t = \mu + \xi_t$, donde μ es la tendencia de crecimiento constante de los alquileres, entonces utilizando la propiedad de la distribución normal resulta que $z_t \sim N(\mu, \sigma^2)$. Asimismo, si definimos que $z_t = \ln(x_t)$ entonces ocurre que $z_t = \ln(x_t) \sim N(\mu, \sigma^2)$; donde podemos expresar esta última igualdad como $x_t = e^{z_t}$. Ahora haciendo uso de la propiedad de distribución log-normal se puede demostrar que $x_t = e^{z_t} \sim \text{Log}_N\left(e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2 \cdot \mu + \sigma^2}\right)$, o escribiendo este último resultado como $e^{\mu + \xi_t} \sim \text{Log}_N\left(e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2 \cdot \mu + \sigma^2}\right)$. Por lo tanto, tomando esperanza condicional a la última desigualdad $E_t(e^{\mu + \xi_t}) < e^r$, resulta que $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} < e^r$. Finalmente se obtuvo la condición que garantiza la existencia de la solución de valor presente del precio que establece que debe cumplirse la condición donde el retorno promedio (r) de la vivienda debe ser mayor que la tasa de crecimiento de los dividendos $r > \mu + \frac{\sigma^2}{2}$.

Cuando $n \rightarrow \infty$ en (11) y aplicando el valor esperado de (10) en (11) se obtiene

$$S = \frac{\left[\frac{e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}}{e^r} \right]^1}{1 - \left[\frac{e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}}{e^r} \right]}$$

$$S = \frac{e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}}{e^r - e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}}$$

Reemplazando este resultado en (10)

$$P_t^{PV} = A_{t-1} \cdot \left[\frac{e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}}{e^r - e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}} \right]$$

Utilizando la martingala de alquileres en (6') cuando $s = t$ y el resultado para la tasa de crecimiento estocástica de los alquileres $E_t(e^{\mu + \xi_t}) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ resulta

$$P_t^{PV} = A_t \cdot \left[\frac{1}{e^r - e^{(\mu + \xi_t)}} \right]$$

De esta forma se obtiene la solución de valor presente del precio de vivienda. Esta solución representa la evolución en forma natural del precio de la vivienda, el cual depende del movimiento de los alquileres, y la relación se da en forma proporcional fija a través de la constante $k = [e^r - e^{(\mu + \xi_t)}]^{-1}$, siendo k el ratio precio alquiler, que puede interpretarse como el número de años necesarios para recuperar la inversión por haber comprado un bien raíz.

$$P_t^{PV} = k \cdot A_t \tag{12}$$

Hallada la solución particular del precio, se pasa a buscar la solución bajo presencia de burbuja. De este modo si $B_t \neq 0$ entonces $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s \cdot r} \cdot E_t(P_s) \neq 0$ y la solución completa para el precio de vivienda es $P_t = P_t^{PV} + B_t$. Debido a la existencia de múltiples tipos de soluciones de esta clase, se propone una solución que dependa del alquiler (fundamento) en forma no lineal de tal forma que cumpla con la condición para existencia de burbujas (5).

$$B_t(A_t) = c \cdot A_t^\lambda \tag{13}$$

Adelantando un periodo

$$B_{t+1}(A_t) = c \cdot A_{t+1}^\lambda \tag{14}$$

Reemplazando (14) en (5) se debe probar que la solución propuesta en (13) es una solución de (5) entonces

$$B_t = e^{-r} \cdot E_t(c \cdot A_{t+1}^\lambda)$$

Reemplazado el supuesto de martingala de alquileres (6) en esta última expresión

$$B_t = e^{-r} \cdot E_t[c \cdot A_t^\lambda \cdot e^{\lambda \cdot (\mu + \xi_{t+1})}]$$

Aplicando el operador esperado y haciendo uso de la propiedad de momento de orden λ para distribuciones log-normales se tiene

$$B_t = e^{-r} \cdot \left[c \cdot A_t^\lambda \cdot e^{\lambda \cdot \mu + \lambda^2 \cdot \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \right]$$

Para que la solución en (13) sea efectivamente una solución de (5) tiene que cumplirse que

$$\lambda^2 \cdot \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) + \lambda \cdot \mu + -r = 0 \quad (15)$$

Por lo tanto, se prueba que (13) es una solución de burbuja intrínseca de (5), que depende del alquiler (fundamento) en forma no lineal a través del parámetro λ , que mide la explosividad de la burbuja. En la aplicación empírica λ se recuperó a partir de la ecuación de segundo grado en (15).

$$B_t = c \cdot A_t^\lambda \quad (16)$$

La solución completa del precio de vivienda entonces tiene dos partes; una parte que corresponde al comportamiento normal de los precios ante cambios en los alquileres (fundamento), y otra parte que tiene que ver con el crecimiento acelerado de estos precios o la sobre-reacción de estos ante crecimientos acelerados en el mismo fundamento. Este comportamiento de sobre-reacción es capturado en la no linealidad de la burbuja, por lo tanto, la solución del precio es expresada como:

$$P_t = P_t^{PV} + B_t$$

Existencia de burbuja

Se buscará probar la condición en (5) que define la existencia de una burbuja en el precio de vivienda. Con este objetivo se hacen arreglos sencillos a (1) y (2) para facilitar la demostración

$$P_t = e^{-r} \cdot E_t(P_{t+1}) + e^{-r} \cdot A_t \quad (1')$$

$$P_t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r \cdot (k+1)} \cdot E_t(A_{t+k}) + \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k \cdot r} \cdot P_{t+k} \quad (2')$$

La solución del precio en forma completa considerando existencia de burbuja

$$P_t = P_t^* + B_t \quad (17)$$

Donde:

$$P_t^* = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r \cdot (k+1)} \cdot E_t(A_{t+k}) \quad (17')$$

Adelantando un periodo y tomando expectativas

$$E_t(P_{t+1}) = E_t(P_{t+1}^*) + E_t(B_{t+1}) \quad (18)$$

Multiplicando (18) por e^{-r}

$$e^{-r} \cdot E_t(P_{t+1}) = e^{-r} \cdot E_t(P_{t+1}^*) + e^{-r} \cdot E_t(B_{t+1}) \quad (19)$$

Reemplazando (1') en (17)

$$e^{-r} \cdot E_t(P_{t+1}) + e^{-r} \cdot A_t = P_t^* + B_t \quad (20)$$

Reemplazando (19) en (20)

$$e^{-r} \cdot E_t(P_{t+1}^*) + e^{-r} \cdot E_t(B_{t+1}) + e^{-r} \cdot A_t = P_t^* + B_t \quad (21)$$

Adelantando un período (17') y tomando expectativas

$$E_t(P_{t+1}^*) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r.(k+1)}.E_t(A_{t+k+1}) \quad (22)$$

Multiplicando por e^{-r}

$$e^{-r}.E_t(P_{t+1}^*) = e^{-r}.\sum_{k=0}^{\infty} e^{-r.(k+1)}.E_t(A_{t+k+1})$$

Sumamos $e^{-r}.A_t$

$$e^{-r}.E_t(P_{t+1}^*) + e^{-r}.A_t = e^{-r}.\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-r.(k+1)}.E_t(A_{t+k+1})\right] + e^{-r}.A_t$$

$$e^{-r}.E_t(P_{t+1}^*) + e^{-r}.A_t = \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-r.(2+k)}.E_t(A_{t+k+1})\right] + e^{-r}.A_t$$

El lado izquierdo de esta expresión viene a ser la solución completa del precio de vivienda (P_t) pero evaluada en (*), es decir $P_t^* = e^{-r}.E_t(P_{t+1}^*) + e^{-r}.A_t$, por lo que

$$P_t^* = \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-r.(2+k)}.E_t(A_{t+k+1})\right] + e^{-r}.A_t \quad (23)$$

Expandiendo estas sumas para $k = 0,1,2, \dots \infty$ se puede probar que (17') = (23)

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-r.(2+k)}.E_t(A_{t+k+1})\right] + e^{-r}.A_t = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-r.(k+1)}.E_t(A_{t+k})$$

Reordenando (21) se puede observar que

$$[e^{-r}.E_t(P_{t+1}^*) + e^{-r}.A_t] + e^{-r}.E_t(B_{t+1}) = P_t^* + B_t$$

$$P_t^* + e^{-r}.E_t(B_{t+1}) = P_t^* + B_t$$

De donde se obtiene finalmente la solución burbuja que estábamos buscando

$$B_t = e^{-r}.E_t(B_{t+1}) \quad (24)$$

Por lo tanto, se demuestra a partir de (24) que existe Burbuja Intrínseca de la forma como se lo presentó en (5). A partir de esta condición se pueden plantear diversas formas funcionales, para ser probadas en la evidencia empírica.

³⁶ **Parámetros de martingala de alquileres:** Escribiendo la martingala de los alquileres $a_t - a_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$ en la forma $\log(A_t) - \log(A_{t-1}) = \mu + \varepsilon_t$, se tiene la tasa de crecimiento de alquileres para la primera observación $D_t - D_{t-1}/D_{t-1} = \mu + \varepsilon_t$, de aquí la tasa de crecimiento de la segunda observación se expresa como $D_{t+1} - D_t/D_t = \mu + \varepsilon_{t+1}$ y la tasa de crecimiento para la n-ésima observación $D_{t+n-1} - D_{t+n-2}/D_{t+n-2} = \mu + \varepsilon_{t+n-1}$. Sumando las tasas de crecimiento para las n observaciones y tomando expectativa $E\left[\sum_{j=1}^n (D_{t+j-1} - D_{t+j-2}/D_{t+j-2})\right] = n.\mu + \sum_{j=1}^n E(\varepsilon_{t+j-1})$; haciendo uso de $\xi_t \sim N(0, \sigma^2)$ el retorno promedio de alquileres queda expresado como $\mu = \sum_{j=1}^n (D_{t+j-1} - D_{t+j-2}/D_{t+j-2})/n$ y la varianza del término de error de la martingala $var(\varepsilon_t) = \sum_{j=1}^n [(D_{t+j-1} - D_{t+j-2}/D_{t+j-2}) - \mu]^2/n$.

Anexo IV: Datos de Costo de Terreno y Alquiler de Departamentos

Cuadro N° 16

Medianas del Costo de Terreno en US\$ por m ²						Medianas del Alquiler Anual en US\$ por m ²					
Periodo	La Molina	Miraflores	San Borja	San Isidro	Surco	Periodo	La Molina	Miraflores	San Borja	San Isidro	Surco
1998-I	150	450	410	633	250	1998-I	43	71	47	72	60
1998-II	210	500	405	320	350	1998-II	60	60	51	69	51
1998-III	150	430	429	500	361	1998-III	55	63	44	80	58
1998-IV	213	400	383	437	290	1998-IV	46	58	43	85	47
1999-I	180	524	337	516	98	1999-I	42	56	50	64	45
1999-II	211	540	352	400	239	1999-II	34	49	41	50	33
1999-III	159	519	354	528	280	1999-III	39	48	34	46	39
1999-IV	192	415	335	417	215	1999-IV	36	44	37	52	36
2000-I	200	545	338	580	197	2000-I	39	36	28	50	48
2000-II	180	400	400	527	239	2000-II	49	39	37	53	38
2000-III	165	350	344	400	183	2000-III	34	36	33	49	41
2000-IV	150	346	385	427	210	2000-IV	37	36	36	39	38
2001-I	157	483	400	387	200	2001-I	36	42	34	45	35
2001-II	164	450	380	280	213	2001-II	36	35	35	40	33
2001-III	146	400	380	400	239	2001-III	29	40	34	41	36
2001-IV	144	346	427	371	194	2001-IV	32	35	32	38	30
2002-I	133	400	421	368	250	2002-I	32	37	41	49	39
2002-II	168	407	376	400	305	2002-II	36	42	36	43	47
2002-III	180	393	406	414	280	2002-III	30	37	30	53	38
2002-IV	143	330	365	380	243	2002-IV	38	32	34	41	30
2003-I	147	320	359	500	240	2003-I	34	39	28	37	38
2003-II	183	400	348	386	230	2003-II	40	33	31	60	42
2003-III	185	348	355	345	238	2003-III	29	36	30	40	42
2003-IV	175	317	355	400	213	2003-IV	34	38	28	37	32
2004-I	291	293	355	361	160	2004-I	36	36	33	39	41
2004-II	175	338	369	300	230	2004-II	35	35	32	40	44
2004-III	195	344	350	404	270	2004-III	45	30	35	42	40
2004-IV	168	389	350	419	260	2004-IV	36	40	37	60	37
2005-I	195	413	387	333	232	2005-I	36	39	31	40	46
2005-II	175	371	450	370	255	2005-II	37	43	31	40	41
2005-III	181	470	364	382	250	2005-III	32	42	35	43	39
2005-IV	181	440	300	400	260	2005-IV	32	40	33	45	40
2006-I	183	362	352	400	290	2006-I	33	50	37	44	42
2006-II	196	409	428	389	320	2006-II	34	46	35	49	41
2006-III	203	428	435	500	362	2006-III	31	53	43	45	41
2006-IV	211	480	403	531	510	2006-IV	28	52	37	52	50
2007-I	202	350	459	410	356	2007-I	30	54	42	60	47
2007-II	233	457	460	500	350	2007-II	37	63	38	56	57
2007-III	244	480	450	544	350	2007-III	38	60	39	77	44
2007-IV	250	595	490	667	369	2007-IV	27	68	40	65	56
2008-I	210	600	540	731	353	2008-I	43	66	48	96	75
2008-II	271	795	787	900	500	2008-II	45	80	50	101	78
2008-III	363	1,000	860	907	670	2008-III	49	91	58	79	88
2008-IV	399	1,050	885	1,050	700	2008-IV	44	84	57	92	90
2009-I	406	1,074	914	1,014	582	2009-I	63	92	71	123	92
2009-II	400	1,133	754	941	630	2009-II	45	80	61	88	72
2009-III	350	1,071	750	996	700	2009-III	57	78	57	104	90
2009-IV	406	1,013	913	1,000	590	2009-IV	64	76	60	92	91
2010-I	402	1,099	832	1,150	805	2010-I	53	75	63	80	69
2010-II	433	1,300	955	1,175	908	2010-II	58	90	72	87	70
2010-III	500	1,326	1,100	1,242	899	2010-III	57	102	69	96	73
2010-IV	497	1,570	1,064	1,350	951	2010-IV	56	98	69	92	71
2011-I	550	1,400	1,191	1,350	1,000	2011-I	55	102	73	90	67
2011-II	516	1,613	1,442	1,602	1,091	2011-II	60	102	74	94	72
2011-III	585	1,581	1,360	1,730	1,132	2011-III	66	96	76	103	85
2011-IV	674	2,029	1,558	2,025	1,250	2011-IV	65	99	78	100	76
2012-I	844	2,059	1,411	1,850	1,454	2012-I	91	89	92	90	78
2012-II	816	2,385	1,600	2,026	1,283	2012-II	108	111	79	110	88
2012-III	815	2,854	2,150	2,550	1,400	2012-III	96	120	90	109	93
2012-IV	893	2,261	1,549	2,069	1,489	2012-IV	108	125	92	113	94
2013-I	882	2,200	1,853	2,143	1,625	2013-I	96	135	95	111	95
2013-II	884	2,753	2,076	2,500	1,795	2013-II	98	133	104	120	102
2013-III	944	2,657	2,039	2,500	1,414	2013-III	96	132	107	128	101
2013-IV	842	2,956	1,802	2,465	1,500	2013-IV	89	131	105	125	100
2014-I	828	3,265	1,981	2,400	1,492	2014-I	93	129	106	132	106
2014-II	1,120	2,859	2,079	2,500	1,603	2014-II	89	134	113	129	113
2014-III	1,069	2,800	1,689	2,375	1,639	2014-III	88	133	103	120	101
2014-IV	870	3,000	2,256	2,472	1,595	2014-IV	87	134	103	124	101
2015-I	900	2,768	2,482	2,444	1,230	2015-I	81	132	100	126	102
2015-II	798	3,500	2,331	2,389	1,478	2015-II	84	128	95	113	102
2015-III	845	2,935	2,015	2,289	1,540	2015-III	79	127	100	114	99
2015-IV	670	2,950	1,742	2,219	1,500	2015-IV	79	122	94	111	94

Fuente: BCRP (2007 II – 2013 I). Elaboración Propia (1998 I – 2007 I y 2013 II – 2015 VI)

Fuente: BCRP (2010 III – 2015 IV). Elaboración Propia (1998 I – 2010 II)

Anexo V: Escenarios de tasas de crecimiento aleatorias de las colocaciones netas

Cuadro N° 17
Tasa de crecimiento trimestral (%)

Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3	Escenario 4	Escenario 5	Escenario 6	Escenario 7	Escenario 8	Escenario 9	Escenario 10	Escenario 11
-118	-857	-146	-234	-486	-136	-500	-151	186	-260	17
-123	-135	-234	-99	-78	-151	245	-61	-41	-135	8
-486	-151	-7	-136	-37	-101	182	-123	-123	46	230
-101	-486	-97	-21	-118	70	-486	-894	-894	71	71
8	93	-25	-486	100	-500	-234	-16	-61	17	-41
3987	230	-234	-36	245	52	-80	-97	-61	-260	39
-25	-172	-857	-189	-16	-894	46	46	-857	-98	-172
28	-135	100	-14	-99	-21	-101	7	7	-99	23
-61	-486	-37	-78	-894	-37	-172	-101	7	245	7
6	-37	-101	46	245	182	-16	-101	17	-98	-146
-37	-106	8	46	7	-98	-234	-106	71	-151	-201
186	-172	-98	52	-99	245	46	-260	-135	-135	100

