PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS

Una secuencia didáctica sobre conceptos de topología métrica para la formación de docentes de matemática en la UNE "Enrique Guzmán y Valle"

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACION

CON MENCION EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

PRESENTADA POR:

HERNÁN JOSÉ ESPINOZA ROJAS

ASESOR DE TESIS:

MG. TEÓDULO VERÁSTEGUI CH.

MIEMBROS DEL JURADO:

DRA. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

DR. FRANCISCO UGARTE

LIMA, 2016

Dedicatoria:

A mi querida Madre, mi ejemplo de vida.

Agradecimientos:

- Mi eterna gratitud al Mg. Teódulo Verástegui Ch. asesor de la presente Tesis, por su invalorable apoyo y sobre todo por su ejemplo de maestro y mejor persona.

- A los maestros miembros del jurado, Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre y Dr. Francisco Ugarte, por sus pertinentes y valiosas sugerencias que ayudaron a mejorar sustancialmente el presente trabajo de investigación.

- Infinitas gracias a todos mis familiares y amigos, porque de una u otra forma apoyaron la realización del presente trabajo.

- A mis alumnos de la UNE-EGV, gracias porque me permiten seguir aprendiendo día a día; en especial a aquéllos que participaron en el presente estudio, muchas gracias por su comprensión y apoyo.

RESUMEN

El presente estudio de investigación es una propuesta de Secuencia Didáctica sobre conceptos de topología métrica para la formación de docentes de matemática en la Universidad Nacional de Educación “Enrique Guzmán y Valle”. Siguiendo el proceso metodológico de la Ingeniería Didáctica, se diseña la secuencia didáctica, en base a un análisis previo que abarca los aspectos epistemológico, cognitivo y didáctico.

Coherentes con la Teoría de las Situaciones Didácticas, las actividades que conforman la Secuencia Didáctica han sido diseñadas de tal manera que los estudiantes transiten por situaciones a-didácticas de acción, formulación y validación en la construcción de sus aprendizajes, bajo la premisa de que solo la acción autónoma permite aprendizajes y comportamientos auténticamente matemáticos.

En la fase experimental, con el propósito de que los estudiantes asuman la responsabilidad de su aprendizaje y actúen lo más independientemente posible de la acción del docente, la secuencia didáctica se presenta a través de cinco fascículos impresos, de modo que la intervención del docente se limite a orientar, centrar o desbloquear la actividad de los alumnos.

El proceso de validación de la Secuencia Didáctica fue llevada a cabo en la UNE “Enrique Guzmán y Valle” con los estudiantes que cursan el VIII Ciclo (Semestre 2011-I) del Departamento Académico de Matemática e Informática de la Facultad de Ciencias.

En general, se pudo constatar que los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática – VIII Ciclo de la Facultad de Ciencias, tienen serias dificultades en el proceso de aprendizaje de la topología métrica principalmente en cuanto a la formulación matemática de las definiciones y las demostraciones de los espacios métricos y las vecindades.

La secuencia didáctica propuesta ayudó significativamente a superar dichas dificultades. En base a las conclusiones y recomendaciones que presentamos esperamos se realicen estudios que complementen y amplíen el presente estudio en la perspectiva del mejoramiento del proceso de aprendizaje de este tópico de la matemática, fundamental en la formación de docentes de la especialidad.

Palabras clave: Secuencia didáctica, topología métrica, métrica y vecindades.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Página

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se propone y valida una Secuencia didáctica sobre conceptos de topología métrica realizada en la Universidad Nacional de Educación “Enrique Guzmán y Valle” – La Cantuta en el Semestre Académico 2011-I, como parte del desarrollo del curso de Topología en el VIII ciclo de la especialidad de Matemática e Informática.

En la Primera Parte se plantea el problema que da inicio al presente trabajo y se formulan los objetivos de la investigación; luego se presentan los planteamientos fundamentales de la Teoría de Situaciones Didácticas y las ideas directrices de la Ingeniería Didáctica como método de investigación.

La Segunda Parte corresponde al desarrollo de la Ingeniería Didáctica, el que se inicia con el Análisis Preliminar, que abarca los aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos acerca del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Topología Métrica, de acuerdo con el enfoque sistémico en el que se sustenta tanto al marco teórico (TSD) como al marco metodológico (ID) del presente estudio.

Asimismo se realiza el análisis del campo de restricciones, referido a la descripción de las características esenciales de la población de estudiantes participantes en el presente estudio; que en este caso corresponde a los estudiantes del VIII Semestre Académico de la Especialidad de Matemática e Informática de la Facultad de Ciencias de la UNE “Enrique Guzmán y Valle”.

Luego, se presenta el Análisis a priori, que involucra la formulación de las hipótesis, la identificación de las variables didácticas y el planteamiento de los comportamientos esperados por cada de una de las actividades de la secuencia didáctica; los que constituyen los referentes de validación del presente estudio.

En la Fase experimental, se presentan los resultados de la aplicación de la Secuencia Didáctica, describiendo de manera detallada las acciones y comportamientos de los estudiantes en el desarrollo de la misma; información que fue recogida a través de diversos instrumentos, como la Ficha de observación, el material fílmico, las fichas de auto y coevaluación, las carpetas de trabajo, los informes grupales, los papelógrafos usados en las exposiciones, las Pruebas escritas y la Encuesta aplicada a los estudiantes al concluir la aplicación de la secuencia didáctica.

En base a estos resultados de la aplicación de la secuencia didáctica, se realiza el Análisis a posteriori, el que a su vez nos permitió realizar la validación de la propuesta confrontando con el Análisis a priori, y más específicamente con las hipótesis planteadas y los comportamientos esperados.

Finalmente presentamos las conclusiones y recomendaciones basados en los resultados obtenidos, y los que esperamos sirvan de referencia a futuros estudios relacionados a la topología métrica.

Entre los anexos presentamos la Secuencia Didáctica distribuida en dos bloques de actividades, elaboradas en función al análisis preliminar, el análisis a priori, y los planteamientos fundamentales de la Teoría de Situaciones Didácticas; de manera que en todo cuanto es posible los estudiantes transiten por situaciones de acción, formulación y validación en el proceso de construcción de sus conocimientos.

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEÓRICOS

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 IDENTIFICACIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La matemática es una disciplina eminentemente formativa, por lo que es fundamental en todo sistema educativo. Es de suma importancia en el desarrollo de las capacidades humanas básicas; nada mejor que la matemática como dice Zubiría (1997) para desarrollar el nivel más complejo de pensamiento como es el hipotético-deductivo. Además de la utilidad de su lenguaje que se ha constituido en el lenguaje de las ciencias, así como su incidencia en el desarrollo de la capacidad para resolver problemas.

Los Diseños Curriculares Nacionales de Educación Básica desde la década pasada se han reorientado hacia el logro de estos propósitos. Tal es el caso del DCN-2010, aún vigente, que plantea la enseñanza de la matemática centrado en el desarrollo de las capacidades de razonamiento y demostración, de comunicación matemática y resolución de problemas; mientras que el DCN-2016 (que entrará en vigencia a partir del 2017) respondiendo a las tendencias actuales de la enseñanza de la matemática, orienta su enseñanza hacia el logro de la competencia de resolución de problemas, que entendida como una macrohabilidad integra las demás capacidades.

Sin embargo, los resultados que se vienen logrando no son muy alentadores. Por ejemplo, como refiere Díaz (2006) en ECE-2004[50], apenas 3 de cada 100 alumnos (2,9%) que terminaban la Secundaria lograban un nivel satisfactorio. Si bien estas cifras en los últimos años evidencian alguna mejora, como el 16,8% de desempeño suficiente logrado por los niños de 2° grado de primaria en ECE-2013, el informe de UNICEF[51] concluye que uno de los problemas educativos más graves que afecta a las niñas y niños del Perú es el bajo nivel en razonamiento matemático. En el mismo sentido, Andreas Schleicher[52] (2016) afirma que el desempeño del Perú en las Pruebas PISA (en la que participan estudiantes de 15 años) es muy bajo, en particular en las pruebas de matemáticas.

[50] Evaluaciones Censales de Estudiantes que aplica el Ministerio de Educación.
[51] https://www.unicef.org/peru/spanish/children_3787.htm
[52] Director general del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA).

Por el contexto en el que se desarrolla la presente investigación, de los múltiples factores que explican estos bajos niveles de logro en el aprendizaje de la matemática, centramos nuestra atención en el factor docente; puesto que como afirma Díaz (2006) existe una correlación entre los aprendizajes que muestran los estudiantes y las habilidades de sus profesores, es decir, los alumnos de los profesores con mayores habilidades en matemática tienden a obtener mejores resultados, y viceversa.

Además, los mismos estudios han encontrado que la mayor parte de los docentes de matemática resuelve básicamente problemas rutinarios de carácter algorítmico, totalmente estructurados y definidos; que tienen dificultades para resolver problemas indirectos de dos o tres etapas que exigen la construcción de estrategias novedosas, extraer información indirecta de gráficos, tomar decisiones a partir de los resultados obtenidos y formular modelos matemáticos. (Díaz, 2006).

Por eso se explicaría que solo una tercera parte de los profesores de escuelas públicas y la mitad de las escuelas privadas logra cumplir con la programación curricular oficial, y que se concentran principalmente en la enseñanza de los aprendizajes más sencillos, dejando de lado aquéllos que implican un pensamiento complejo, como la capacidad para resolver problemas. (Díaz, 2006).

También por nuestra experiencia personal, podemos afirmar que a pesar de las diversas propuestas de cambio realizadas desde el Ministerio de Educación, la enseñanza de la matemática en nuestro país (en todos los niveles), en gran parte, se encuentra centrado aún en la trasmisión de conocimientos y no en el desarrollo de capacidades, caracterizado por el aprendizaje memorístico de fórmulas, conceptos y propiedades, la aplicación mecánica de técnicas y algoritmos, y la “resolución de problemas tipo” siguiendo un modelo propuesto por el docente, que los estudiantes muchas veces no entienden.

Entonces, es necesario sumar esfuerzos desde la formación inicial del docente de matemática; revisando la malla curricular, replanteando los objetivos, los lineamientos metodológicos, e incorporando procesos de reflexión, investigación e innovación permanentes, a fin de formar docentes con amplios y sólidos conocimientos y capacidades en matemática y didáctica; capaces de promover, como dice Brousseau, que los alumnos se involucren en actividades verdaderamente matemáticas, que regulen sus procesos de aprendizaje de manera autónoma y que no imiten procedimientos o rutinas de otros. (Sadovsky, 2005).

En ese sentido, la presente investigación se centra en el estudio didáctico de los conceptos y propiedades relacionados a la métrica, que es transversal a varias asignaturas de la especialidad y que tiene una estrecha relación con los conceptos de valor absoluto, desigualdad, funciones, intervalos, números reales, entre otros, que se desarrollan en educación secundaria.

El interés por investigar este tema surge a partir de la constatación que muchos estudiantes en su formación profesional para docentes de matemática, evidencian falta de comprensión del concepto de valor absoluto, pues el manejo de este concepto está restringido al cálculo, desvinculado de su representación gráfica y por ende del concepto de distancia. Esta deficiencia a su vez dificulta la comprensión y demostración de sus propiedades, así como la comprensión de otros conceptos matemáticos como los de límite y continuidad y la demostración de sus propiedades.

Estas dificultades que tienen su origen en la educación básica y que persisten en los primeros años de formación docente, se hacen latentes en el desarrollo de la asignatura de topología, específicamente en el estudio de la métrica. Aquí los estudiantes muestran dificultad en la comprensión y representación gráfica de la métrica incluyendo la usual; en la demostración de sus propiedades, especialmente la desigualdad triangular; en la conceptualización y representación de vecindades, conjuntos abiertos y cerrados, así como en la comprensión del interior, exterior y frontera de conjuntos que constituyen conceptos fundamentales de la topología métrica.

A partir de lo expuesto, nos planteamos la siguiente interrogante:

¿Cómo se deben abordar los conceptos de métrica en la formación de docentes de matemática en la UNE Enrique Guzmán y Valle?

En esta perspectiva, en el presente trabajo de investigación se pretende realizar un estudio didáctico de la métrica, como parte de la asignatura de Topología, mediante la elaboración, aplicación y validación de una Secuencia Didáctica que nos permita abordar la problemática observada durante varios años de docencia y proponer recomendaciones para mejorar los niveles de comprensión y aplicación de los conceptos involucrados en la formalización y demostración de otros conceptos y propiedades relacionados.

1.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.2.1 Objetivo general

Frente al problema planteado, el propósito del presente trabajo es:

Diseñar, aplicar y validar una Secuencia Didáctica sobre la métrica como parte del curso de topología en la formación de docentes de Matemática en la Universidad Nacional de Educación "Enrique Guzmán y Valle" – La Cantuta, en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica.

1.2.2 Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general propuesto, se deben lograr los siguientes objetivos específicos:

Objetivo específico 1:

Analizar y seleccionar los planteamientos teórico-científicos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la métrica.

Objetivo específico 2:

Diseñar y elaborar una Secuencia Didáctica sobre la Métrica teniendo en cuenta los planteamientos de la Teoría de Situaciones Didácticas y siguiendo el proceso metodológico de la Ingeniería Didáctica.

Objetivo específico 3:

Aplicar y validar la Secuencia Didáctica propuesta en el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica con estudiantes de la especialidad que cursan el VIII Ciclo Académico en el Semestre 2011-I.

1.3 PERSPECTIVA TEÓRICA

Frente al problema planteado, el propósito del presente estudio es diseñar, elaborar y validar una secuencia didáctica sobre los conceptos de topología métrica, en el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica y bajo los planteamientos teóricos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau.

Valoramos las propuestas de la TSD por su enfoque sistémico de la didáctica de la matemática, pues no es solo el alumno, el profesor o el conocimiento matemático considerados de manera aislada los que permiten el logro de los aprendizajes, sino la confluencia y la sinergia de todos ellos.

Teniendo en cuenta el principio fundamental de la TSD, de que todo conocimiento matemático puede caracterizarse por una o más situaciones o problemas, cuya solución sea posible a través de la aplicación de dicho conocimiento, es que planteamos situaciones a modo de actividades que consideramos deben motivar y generar los conceptos relacionados a la métrica y sus propiedades.

Como propone Brousseau, dichas situaciones deben obligar a que el alumno modifique sus conocimientos y esquemas previos, y que el nuevo conocimiento se evidencie a través de respuestas nuevas, las que constituyen la prueba del aprendizaje.

En esta perspectiva el rol del docente es fundamental, ya que en primer lugar tiene la delicada y difícil labor de diseñar o seleccionar situaciones que generen los conocimientos que se quiere que los alumnos aprendan o construyan, a la vez que les resulten accesibles; y en segundo lugar tiene la tarea de lograr que los alumnos acepten la situación y asuman la responsabilidad de construir sus propios aprendizajes.

Dicha construcción de aprendizajes será posible solo si los alumnos interactúan con el problema o situación de manera independiente, es decir sin la intervención del docente, estas interacciones como propone Brousseau pueden ser de *acción*, *formulación* y *validación*; que consisten respectivamente en interacciones no codificadas, individuales y directas sobre la situación; interacciones grupales, de intercambio de informaciones y hallazgos a través de un lenguaje matemático; y un intercambio de aseveraciones o enunciados acompañados de una argumentación.

En este proceso la intervención del docente es brindar orientaciones generales, centrar la actividad de los estudiantes o desbloquear cuando sea necesario; por lo que se dice que estas interacciones son de naturaleza a-didáctica.

Complementariamente, la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación nos proporciona pautas específicas para la realización de un estudio de caso en cuanto a la enseñanza de la matemática poniendo énfasis en los acontecimientos que ocurren en el aula.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En el presente capítulo se presentan planteamientos teóricos directamente relacionados con el presente trabajo que servirán como referencia sobre el objeto matemático elegido (la métrica) así como respecto al marco teórico (TSD) y el marco metodológico (Ingeniería Didáctica).

2.1 ANTECEDENTES

Los estudios sobre la enseñanza de la métrica en la formación de docentes de matemática son escasos. Más bien, aquellos que tienen el mismo marco teórico y el marco metodológico actualmente son significativos. Por lo que, luego de presentar los estudios directamente relacionados con el objeto matemático en estudio, presentamos aquéllos que hemos usado de referencia respecto al marco teórico y al marco metodológico.

Bastán, Cuenya, y Fioritti (2004), como parte de su tesis de maestría titulada: *“La Transposición Didáctica de la Topología en la Formación de Profesores de Matemática. Incidencia de los modelos epistemológicos y docentes”* presentan “un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática” realizado a partir del análisis de sus propias experiencias en la enseñanza de la asignatura “Introducción a la Topología” en la Universidad Nacional de Río Cuarto-Argentina. El estudio toma como punto de partida la propuesta de Brousseau que asigna un rol fundamental al estudio del saber matemático, no solo como un saber en sí mismo sino por el tipo de problemas que le dieron origen, las técnicas matemáticas que surgen en ese contexto y los elementos tecnológico-teóricos que se utilizan; además del planteamiento de que todo problema didáctico requiere de una toma de posición epistemológica frente al objeto de conocimiento (Jean Brun, 1996), que a su vez permite relacionar los saberes enseñados y los saberes científicos. El estudio concluye que los problemas que le dieron origen a la topología se sitúan en dos contextos matemáticos diferentes: el geométrico y el del análisis matemático, y que en cada uno de ellos se da respuesta a determinado tipo de problemas, que se resuelven con técnicas diferentes y que utilizan tecnologías diferentes aunque mantienen en común ciertos elementos tecnológico-teóricos, generando los dos enfoques que actualmente se conocen, como son la topología combinatoria y la topología conjuntista.

Usando este análisis realizan un estudio de la organización matemática (OM) enseñada en la formación de profesores de matemática, para identificar las restricciones que sufre el saber hasta tomar las características particulares y las razones que determinan dichas restricciones; y concluyen que las razones por las que la OM enseñada en la formación de profesores bajo el nombre de topología no abarca todo lo que por esta disciplina matemática se entiende, responden a decisiones fundamentalmente institucionales. En general la tesis se desarrolla bajo el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en el que se modeliza el proceso de transformación que sufre el saber hasta constituirse en saber aprendido, a través del proceso de la Transposición Didáctica. A partir del análisis de la OM a enseñar y enseñada, los investigadores afirman que la asignatura solo abarca conceptos de la Topología Conjuntista, que no mantiene la funcionalidad que presenta en la ciencia y que no se proponen problemas que sirvan de hilo conductor para la reconstrucción de los saberes. Además, si bien la topología se muestra como un Análisis generalizado, presenta diferencias significativas con él.

Bastán, Cuenya y Fioritti (2001) en el estudio titulado “La topología en la formación de profesores de matemática”, en la misma perspectiva de su tesis anterior, analizan la Transposición Didáctica de los conceptos involucrados en la asignatura “Introducción a la Topología” para profesores de matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) en el marco de la teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

En base a su experiencia docente de varios años en diferentes asignaturas, los autores afirman que se dan ciertas paradojas en la formación de profesores de matemática, por un lado la práctica profesional de los profesores de enseñanza media en matemática tiene requerimientos que no se adquieren en la formación de base, y por otro, dicha formación les provee de ciertos saberes que no son percibidos como necesarios para su práctica.

Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) asumen que el enfoque del proceso de enseñanza son decisiones institucionales más que individuales; es decir que, las relaciones que el docente establece con el saber matemático y las propuestas de su enseñanza no dependen solo de sí mismo, sino de las características epistemológicas del conocimiento matemático, y del entorno institucional. En esta perspectiva se plantean el objetivo de “Identificar las condiciones a las que está sometida la transposición didáctica de las organizaciones matemáticas topológicas, con especial referencia a la población del profesorado de Matemática en la Universidad Nacional de Río Cuarto”.

Respecto a la organización matemática (OM) que debería ser reconstruida en la formación de los profesores respecto a la topología, sostienen que debe atender a distintos factores, por un lado, los alumnos, para los que la asignatura debería ser menos compleja y tediosa, que encuentren razones y motivación para su aprendizaje y que logren establecer suficiente relación con su práctica futura; es decir:

(i) Que encuentren razones de ser para esa OM, de manera que ésta surja como respuesta a cuestiones problemáticas, matemáticas o extra matemáticas.

(ii) Que la OM pueda ser abordada desde los conocimientos previos adquiridos a lo largo de la carrera.

(iii) Que pueda establecer vínculos entre la OM estudiada y las que debe abordar en su futuro desarrollo profesional (aplicabilidad).

Por lo que plantean la necesidad de construir los conceptos topológicos a través de lo que denominan praxeologías matemáticas de complejidad creciente que, partiendo de problemas del campo de la geometría como del análisis, hagan necesaria la modelización topológica; es decir que las herramientas de la topología surjan como las óptimas para modelizar problemas de ambos campos. Dichos problemas convenientemente seleccionados, darían respuesta a lo requerido en (i); para (ii), sería necesario replantear las asignaturas previas, y respecto a la misma asignatura, proponen incorporar el ámbito de lo geométrico buscando una entrada desde los saberes previos a los topológicos. Por otra parte, dada la proximidad de lo geométrico a la práctica de los futuros docentes, contribuiría a dar respuesta a (iii); además los problemas permitirían interiorizar lo topológico de manera articulada, lo que tendría más y mejor sentido para el estudiante.

Del análisis de la enseñanza de la topología en la Universidad de Río Cuarto, a partir de las propuestas curriculares y la bibliografía usada, dicen: la currícula de la asignatura se restringe a la Topología Conjuntista, pese a su relevancia en la escuela media, la dimensión geométrica no es abordada; la propuesta curricular presenta los conocimientos aislados dispuestos en unidades que no contribuyen a una reconstrucción de la topología como una organización matemática en sentido creciente, tampoco mantiene la funcionalidad que presenta la ciencia; no aparece el propósito de dar solución a problemas ni matemáticos ni extra matemáticos; la falta de problemas que sirvan de hilo conductor da lugar a una reconstrucción de OM desarticuladas e incompletas.

Refieren que en los libros de texto usados por el profesor la topología aparece como un Análisis Generalizado, se observa una desgeometrización, es decir no se modelizan problemas topológicos de naturaleza geométrica, las OM aparecen impuestas, guardando solo una coherencia lógica entre sí; los problemas aparecen como aplicaciones al final de cada tema, son complejos y aislados, no muestran técnicas de desarrollo didáctico, no se evidencia el momento exploratorio en la reconstrucción de la topología; las nociones topológicas aparecen en una presentación estructural, en la que el trabajo es esencialmente de tipo tecnológico-teórico.

En cuanto a las razones que llevan a la identificación de la Topología con un Análisis Generalizado afirman que provienen de la influencia institucional de la formación de los matemáticos puros. La epistemología cultural en la formación de docentes acepta como bueno para la enseñanza todo lo que es bueno para la ciencia. La preeminencia de los modelos epistemológicos de los sistemas de producción matemática sobre los sistemas didácticos hacen que se valoren más algunos contextos que otros, no solo por las OM que se estudian sino por los elementos tecnológico-teóricos con que se abordan.

Finalmente, a manera de recomendaciones plantean: caracterizar lo que en una institución formadora de docentes se entiende por Topología, es útil porque permite tener un conocimiento cabal de lo que se realiza en la asignatura, de lo que debe modificarse, además cómo y por qué debe hacerse; permite asimismo, encontrar indicadores de los modelos epistemológicos dominantes que condicionan las praxeologías matemáticas y didácticas. Para llevar a cabo una reestructuración de las prácticas de enseñanza se requiere trabajar institucionalmente sobre las maneras de entender la matemática y su enseñanza, buscando la coherencia entre las prácticas matemáticas de las instituciones formadoras de profesores de matemática con aquéllas en que los profesores realizan su desarrollo profesional para contribuir a lograr organizaciones didácticas y matemáticas que tengan sentido y legitimidad para los futuros docentes de matemática.

Benitez y Cárdenas. (2001) en el estudio titulado “*La Enseñanza de la Topología a través de la Cartografía: una experiencia matemática en básica primaria*” parten de las consideraciones de que los niños cuando ingresan a la escuela poseen nociones intuitivas sobre el espacio que les permite solucionar problemas cotidianos, los que deben ser reconocidos, valorados y enriquecidos en la escuela con el fin de contribuir en el proceso de desarrollo y constitución del pensamiento espacial y geométrico, componentes fundamentales del pensamiento matemático. Pero, el propósito de la geometría en la enseñanza básica se simplifica a la enseñanza de algunos elementos de la geometría euclidiana, desconociendo que el espacio es una totalidad que se compone de relaciones topológicas, proyectivas y euclidianas, siendo las relaciones topológicas, aprehendidas primero por los niños antes que las proyectivas y las euclidianas, como afirman algunos estudios. Por lo que es importante rescatar el valor de la geometría en los currículos escolares, puesto que favorece el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los niños.

En base a ellas, se plantea la siguiente pregunta de investigación: Sí los niños poseen diversas nociones y vivencias de conocimiento espacial, ¿por qué seguir manteniendo un esquema de enseñanza en el aula centrado en lo aritmético y numérico, dejando de lado lo geométrico y espacial? Como respuesta plantean la enseñanza de la topología a través de la cartografía que permite vincular el pensamiento matemático, desde los componentes espacial y geométrico (nociones topológicas) al quehacer en el aula. Por ejemplo, en el plano de un barrio o ciudad se destacan calles que pueden ser asumidos como aristas, y las intersecciones de estas como vértices, que hacen propicio introducir nociones topológicas como abierto, cerrado, adentro, afuera, frontera, región, (interior y exterior), grafo, camino y vecindad.

Para los fines del presente estudio consideramos importantes las siguientes conclusiones: se evidencia la construcción de nociones topológicas en el trabajo sobre las representaciones cartográficas, cambios en sus verbalizaciones, en su relación con los otros en el trabajo en grupo, en su actuar; la propuesta permitió acercar e introducir elementos de la geometría de las transformaciones, aspectos relacionados con las simetrías, giros, reflexiones y traslaciones de figuras geométricas trazadas sobre mapas y planos, así como, el trabajo relacionado con las teselaciones y mosaicos geométricos. Así, la propuesta “La enseñanza de la topología a través de la cartografía” se convierte en una alternativa en la educación matemática, que trasciende la enseñanza enfocada en la adquisición de habilidades para realizar ejercicios que implican la aplicación de las operaciones básicas y da apertura a la exploración de otros campos de la matemática que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático en los niños.

Respecto al marco teórico y el tipo de investigación, consideramos importantes las investigaciones de:

Moreno, O. (2011), que en su tesis de maestría en enseñanza de la matemática, presentada en la Pontificia Universidad Católica del Perú, titulada “Un estudio didáctico de los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal” – PUCP, resalta al final de sus conclusiones las ventajas de la Teoría de Situaciones Didácticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, porque según afirma, permite diseñar situaciones que favorecen que los estudiantes construyan sus propios conocimientos y participen en actividades verdaderamente matemáticas. Del mismo modo destaca la pertinencia de la ingeniería didáctica como metodología de investigación como instrumento de mejora de la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos. Encontramos en este estudio claridad y precisión en cuanto al proceso y conceptos de la ingeniería didáctica, así como en el planteamiento de los conceptos fundamentales de la teoría de situaciones didácticas.

De manera complementaria también consideramos valioso el estudio de:

Cruz, E. (2008), quién en su tesis de maestría en Matemática Educativa presentada en CICATA del IPEN - México, titulada "*Diseño de una secuencia didáctica donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática*", aborda la dificultad que se presenta al tratar de utilizar el método de factorización como método general en la solución de ecuaciones cuadráticas. Proponiendo frente a este obstáculo una forma de encontrar dos números de los cuales se conoce su suma y su producto desde un punto de vista numérico y geométrico. En el diseño de la secuencia didáctica se toma en cuenta las componentes didáctica, epistemológica y cognitiva, y se busca que el alumno haga suyo el conocimiento por descubrimiento guiado, desarrollando actividades en diferentes contextos: numérico, geométrico, algebraico y sus aplicaciones, las que a su vez involucran habilidades mentales, tales como la observación, deducción y predicción. Sin embargo es necesario verificar si las actividades de la secuencia propuesta en realidad ayudan a mejorar y significar la solución de una ecuación cuadrática, pues se dejan pendientes la experimentación y validación, solo ha sido sometida a una validación de expertos, pues las actividades fueron desarrolladas por un grupo de profesores, quienes aportaron sugerencias para el rediseño de la secuencia didáctica.

2.2 LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

La Teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada en Francia por Guy Brousseau a finales de los años 60 del siglo pasado, es una de las teorías de la Matemática Educativa que surge de la necesidad de disponer de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el que se encuentren representadas todas las relaciones y las operaciones que intervienen en dicho proceso, intentando descubrir, interpretar y explicar los fenómenos y procesos relacionados a la adquisición y transmisión del conocimiento matemático.

Esta teoría parte de la tesis de que el alumno construye un conocimiento matemático, mediante un proceso similar al que realizaron los productores originales del conocimiento (los matemáticos) que se quiere enseñar.

En este sentido, el diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado, se orienta a la construcción de su génesis artificial, que simule los diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes y que sin producir el proceso histórico, conduzca a resultados similares; identificándose una concepción constructivista –en el sentido piagetiano- del aprendizaje, cuando se afirma que: "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje." Brousseau (1986). Pero Brousseau acota, que si dicho medio careciese de intenciones didácticas resultaría insuficiente para inducir al alumno en la adquisición de los conocimientos que se quisiera que aprenda.

Es decir, Brousseau busca encontrar las condiciones de enseñanza que garanticen que los alumnos se involucren en actividades verdaderamente matemáticas, regulando sus procesos de aprendizaje independientemente del criterio del docente, que no imiten procedimientos o rutinas de otros, y que el logro de sus aprendizajes no dependa de lo que el docente espera de ellos. Por lo que propone "un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar" (Sadovsky, 2005).

Entendiendo que *producir conocimientos* significa establecer, transformar y reorganizar relaciones, y validarlos de acuerdo a las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática.

Además, en esta teoría, se entiende que "Saber matemática" no significa solamente saber definiciones y teoremas, y reconocer situaciones donde aplicarlos; sino que exige que el alumno sea partícipe de la actividad matemática, es decir, que formule enunciados, que pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, y que verifique si son concordantes con la cultura matemática". (Chevallard, Y. y otros, 2005, p. 227)

Así, la Teoría de Situaciones postula que para todo conocimiento matemático, es posible construir una "situación fundamental" que representa la problemática que permite que surja dicho conocimiento como la estrategia óptima para resolver dicho problema. Como sostiene Brousseau (1983) “una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen la significación de la noción.

En este contexto, aprender un conocimiento matemático significa adaptarse a una situación a-didáctica específica de dicho conocimiento, lo que se manifiesta mediante un cambio de estrategia del alumno que le lleva a poner en práctica la estrategia óptima de manera estable en el tiempo, y estable respecto a los diferentes valores de las variables de la situación a-didáctica en cuestión. (Chevalard y otros, 2005).

Por ello, se considera que ésta es una teoría de la enseñanza que busca las condiciones del “origen artificial” de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.

En síntesis, la teoría de situaciones permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase concebidas por el profesor con el fin de disponer de un medio para realizar un determinado proyecto de aprendizaje.

2.2.1 Conceptos fundamentales de la teoría de situaciones didácticas

a. Situación didáctica

La situación elegida por el profesor, es un elemento que genera interacción entre el docente, el alumno y el mismo problema.[53] Este conjunto de interacciones alrededor de estos tres elementos es lo que se denomina situación didáctica.

Es decir, una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (Brousseau, 1982 citado en Panizza, s.f.)

[53] En tal razón, se dice que la Teoría de Situaciones se ubica dentro de un enfoque sistémico, ya que considera a la didáctica de la matemática como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo, en el que se encuentra el docente, y los alumnos.

ENFOQUE SISTÉMICO DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA [54]

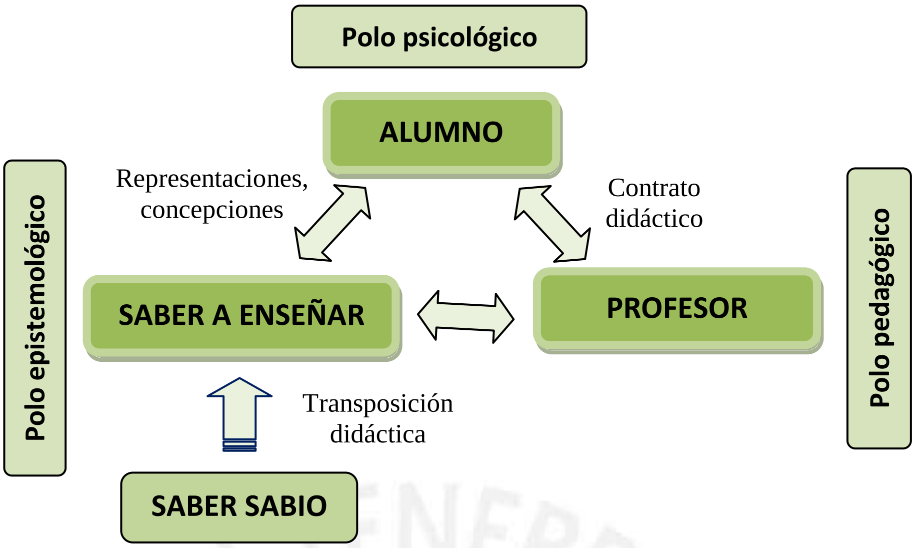


Fig. N° 01

De manera que la situación didáctica es construida intencionalmente por el profesor con el propósito de facilitar a los alumnos la adquisición de un determinado conocimiento, teniendo en cuenta dos condiciones esenciales:

- El carácter de necesidad de los conocimientos, que significa que: la situación didáctica se organiza de manera que el conocimiento sea necesario para la resolución del problema, es decir que, la situación no puede ser abordada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos que se pretende que los alumnos aprendan.

- La noción de "retroacción" o "sanción", que quiere decir que: la situación debe estar organizada de tal manera que el medio ofrezca al alumno información sobre su producción o elaboración.

b. Variable didáctica

Las variables de una situación matemática son elementos susceptibles de tomar diferentes valores y capaces de generar cambios en las estrategias de solución. Como dicen Chevallard, Bosh y Gascón, una variable de una situación a-didáctica se llama variable didáctica si sus valores pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor. Partiendo de un conocimiento concreto y de una situación a-didáctica específica

[54] Lezama, F. (2003). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.

de dicho conocimiento, la modificación de los valores de las variables didácticas de esta situación a-didáctica permite engendrar un tipo de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución. (Chevalard y otros, 2005).

Significa que, con el propósito de asegurar que los alumnos logren realmente construir un conocimiento matemático específico, es necesario que lo aborde desde diversas perspectivas, lo que exige introducir cambios a la situación para obligar al alumno a poner en juego nuevas y diversas estrategias de solución.

c. El contrato didáctico

El contrato didáctico regula las relaciones que el maestro y los alumnos mantienen con el saber, establece derechos y obligaciones de unos y otros en relación con cada contenido escolar. (Brousseau, 1986).

En esta mutua relación se define lo que el maestro y el alumno tienen la responsabilidad de hacer, y de aquello que cada uno debe asumir frente al otro. La labor del maestro no es comunicar el conocimiento, sino su responsabilidad es la devolución al alumno de un “buen problema”. (Brousseau, 1986).

Este contrato puede modificarse de acuerdo a la relación que establece el alumno con la situación; por ejemplo, si el estudiante se resistiera a la devolución de la situación, la acción del profesor tendría necesariamente que cambiar; y si no puede resolver el problema debe ayudarlo. Tiene la delicada misión de saber y decidir en qué momento brindar información, formular preguntas, sugerir estrategias, y en qué otros momentos debe abstenerse de intervenir.

2.2.2 Situaciones a-didácticas

Las interacciones entre el alumno y el medio se describen a partir del concepto teórico de *situación a-didáctica*, que modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación del docente. (Sadovsky, 2005).

Es decir, una situación a-didáctica es una situación matemática específica a un conocimiento, que por sí misma genera aprendizajes en el alumno; aprendizajes que permanecen estables en el tiempo y respecto a las variables de la situación. (Chevalard y otros, 2005).

En la teoría de situaciones, el concepto de situación a-didáctica es fundamental, puesto que constituye una condición necesaria que favorece la construcción del conocimiento por parte del estudiante.

Fig. N° 02

La no intencionalidad de este concepto se refiere a que el alumno asume el compromiso y la responsabilidad de su aprendizaje lo más independientemente posible de la acción del docente. Debe relacionarse con el problema motivado por éste, movilizando los conocimientos y estrategias que crea convenientes y no por las intenciones del docente. Esta interacción es la que le permitirá modificar sus esquemas y producir conocimiento.

El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, pues sólo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional". (Brousseau, 1986).

Por lo tanto, es fundamental diseñar situaciones que ofrezcan al alumno la posibilidad de construir el conocimiento, teniendo en cuenta que resulta muy útil un tipo de problemas con condiciones variables cuyas particularidades se vayan fijando progresivamente. (Moreno, 2011).

Las situaciones a-didácticas deben asimismo ofrecer al alumno la posibilidad de validar los resultados de su acción y conocer la pertinencia de sus decisiones de acuerdo a los resultados que obtenga, e intentar nuevas formas de solución si fueran necesarias.

En resumen, una situación a-didáctica es aquélla en la cual el profesor no interviene dentro del escenario, dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independiente del sistema educativo (Margolinas, 1993). Cada conocimiento tiene situaciones a-didácticas que preservan su sentido, estas situaciones son denominadas situaciones fundamentales (Situación didáctica) por Brousseau.

Se distinguen tres tipos de situaciones a-didácticas:

a. Situación a-didáctica de acción

Fig. N° 03

El alumno actúa sobre un problema (intenta resolver) aplicando solamente sus conocimientos previos (constituidos de nociones protomatemáticas), son aquellas que son utilizadas en la práctica para resolver problemas, pero no son reconocidas ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

Toda situación de acción propone al alumno un problema en unas condiciones tales que la mejor solución se obtiene mediante el conocimiento a enseñar, y de tal forma que el alumno puede actuar sobre la situación y hacer elecciones durante esta acción, al tiempo que la situación le devuelve información sobre las consecuencias de su acción". (Chevalard y otros, 2005).

No se trata de una situación de manipulación libre, ni una acción con orientaciones preestablecidas, sino que son acciones guiadas por la misma situación, la que permite al alumno juzgar el resultado de sus acciones para corregir y mejorarlas. Es un proceso generalmente no lingüístico y debe darse sin la intervención del docente.

b. Situación a-didáctica de formulación

Fig. N° 04

Un alumno (o grupo de alumnos) *emisor* debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) *receptor,* que debe comprender el mensaje y actuar en base al conocimiento contenido en el mensaje.

Surgen las nociones paramatemáticas y son utilizadas como instrumento útil para describir objetos matemáticos, pero no son considerados como objetos de estudio en la cultura matemática. Son situaciones centradas en la comunicación, en la que los estudiantes comunican los resultados de sus trabajos a otros estudiantes y al profesor". (Godino, s.f., diapositiva Nº 53).

En este tipo de situaciones los estudiantes explicitan sus modelos implícitos de la etapa anterior, comunican, intercambian y comparten mensajes orales o escritos acerca de lo encontrado, sus experiencias y exploraciones respecto al problema planteado; y es conveniente que lo hagan usando el lenguaje matemático aunque sea incipiente. Podemos decir que corresponde a la interacción colectiva con el medio didáctico.

c. Situación a-didáctica de validación

Las afirmaciones propuestas por cada grupo (*proponente)* son sometidas a la consideración del otro grupo *(oponente)*, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”; es decir, aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, u oponer otras aserciones”. (Panizza, s.f.).

Los alumnos deben enunciar un modelo explicito y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Surgen las nociones matemáticas, objetos de conocimiento, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.

Fig. N° 05

En este tipo de situaciones, los estudiantes comparten conclusiones y enunciados cuya validez deben demostrar o justificar usando preferentemente argumentos teóricos más que empíricos. Es el momento de someter sus construcciones a modo de aseveraciones a sus compañeros (o cualquier interlocutor), y demostrar la exactitud y la pertinencia de sus afirmaciones, proporcionando si es posible una justificación o validación semántica y sintáctica.

La posibilidad de validar las construcciones o decisiones del alumno es inherente a la noción de a-didáctico y está ligada a la importancia de que el alumno pueda juzgar por sí mismo sus respuestas. (Panizza, M.; s.f.)

Aunque en la mayoría de los casos el orden en el que se producen estas situaciones sea apropiado, puede haber excepciones. Es decir, si bien, una situación de validación supone la formulación de una proposición, y la formulación de una proposición supone una acción interiorizada, no significa que necesariamente haya que pasar previamente por las fases a-didácticas de acción y formulación. Además habrán conocimientos que funcionen implícitamente y cuya formulación explícita sea conveniente dejarla para después, o bien, conocimientos que se formulen explícitamente, cuya validación explícita no sea necesaria para el nivel de escolaridad.

2.2.3 Las funciones del docente en la teoría de situaciones didácticas

a. Devolución

Fig. N° 06

La concepción de la situación a-didáctica como una fase de aprendizaje y no de enseñanza, implica la "no intervención" del docente; sin embargo la entrada a esta fase es gestionada por el mismo maestro.

La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia. (Brousseau, 1998, citado en Panizza, s.f.).

Es decir, la devolución de una situación a-didáctica consiste, no sólo en presentar al alumno el problema y las reglas de juego, sino, además, en hacer que el alumno se sienta responsable de la búsqueda de la solución; sin que ello signifique que el maestro abandone sus propias responsabilidades, más por el contrario, es el que debe lograr que el alumno asuma conscientemente la responsabilidad en la construcción del conocimiento.

De manera que, en este contexto, la enseñanza es la devolución al alumno de una situación a-didáctica correcta; y el aprendizaje es una adaptación a esta situación (Brousseau, 1986).

b. La institucionalización

Por lo general, los alumnos que han construido un conocimiento matemático, no disponen aún de los medios para descontextualizar y darle un estatus científico y cultural a los nuevos conocimientos; esta es función de la institucionalización y responsabilidad del docente.

En esta etapa se deben establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural. En ella se produce el reconocimiento del objeto de enseñanza por parte del alumno, a través de intervenciones, pruebas, formulaciones, construcción de modelos, lenguajes, conceptos y teorías, en interacción con otros, y reconociendo la veracidad de sus conjeturas y razonamientos.

La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización. (Brousseau, 1994; citado en Panizza, M. s.f.).

Inversamente a la devolución, la institucionalización consiste en dar un estatuto cultural a las producciones de los alumnos; actividades, lenguajes, conocimientos expresados en proposiciones. Constituye, junto a la devolución, una de las actividades principales del profesor. (Chevalard y otros, 2005).

La institucionalización es de alguna manera complementaria al proceso de devolución. En estos dos procesos, Brousseau reconoce los roles principales del maestro: en la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica, en la institucionalización, define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones “libres” del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status. (Brousseau, 1986 citado en Panizza, s.f.).

Las situaciones de enseñanza tradicionales carentes de situaciones a-didácticas, se reducen a actividades de institucionalización; en el que no cuenta el aporte o producción de los estudiantes; sólo se expone, comunica y explica lo que se desea que el alumno “aprenda”.

2.3 LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La Ingeniería didáctica surge a principios de los años ochenta del siglo pasado, dentro del desarrollo de investigaciones en didáctica de la matemática en la escuela francesa. La denominación proviene de un homeomorfismo con el trabajo de un Ingeniero, ya que además de tomar en cuenta los resultados científicos, el “profesor-ingeniero” debe tomar decisiones y controlar los componentes del proceso enseñanza-aprendizaje para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo específico de alumnos (Artigue, 1995).

Las teorías que sustentan a la Ingeniería Didáctica son la teoría de transposición didáctica de Chevallard, y la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, que buscan acercamientos teóricos menos simplistas que los proporcionados por disciplinas como la pedagogía, la psicología, la sociología y la matemática misma; más bien integrando los aportes de todas ellas en un esfuerzo por crear explicaciones propias y por tanto generar una disciplina que atienda la problemática particular que produce el tratamiento de entes matemáticos en un ambiente áulico y los fenómenos inherentes a esta actividad. (Ferrari, 2001).

La ingeniería didáctica tiene doble función, por un lado como metodología de investigación y por otro como producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje (Douady, 1996).

2.3.1 La ingeniería didáctica como metodología de investigación

Una ingeniería didáctica consiste en concebir un proceso de enseñanza que responda a objetivos de aprendizaje determinados a priori en función de un marco teórico y el planteamiento de un conjunto de hipótesis, llevar a cabo dicho proceso, recabar observaciones y confrontar las observaciones con lo que se esperaba.

En comparación con otras metodologías de investigación, la ingeniería didáctica se diferencia por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. Mientras las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa; la ingeniería didáctica se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso cuya validación es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue, 1995).

2.3.2 Fases de una ingeniería didáctica

En el proceso de construcción de ingenierías didácticas se distinguen las siguientes cuatro fases fundamentales:

- Análisis preliminar.
- Diseño de una situación didáctica y su análisis a priori.
- Experimentación.
- Análisis a posteriori y validación.

a. Análisis preliminar

Siguiendo a Artigue (1995), para la concepción de una ingeniería didáctica es necesario realizar análisis preliminares respecto al aspecto teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos relacionados con el tema en función de los objetivos específicos de la investigación; los que se van retomando y profundizando en las distintas fases.

Este análisis debe abarcar fundamentalmente las tres dimensiones que conforman una secuencia didáctica, es decir:

- El análisis de los contenidos contemplados en la enseñanza (dimensión epistemológica).
- El análisis del proceso de enseñanza del objeto matemático en estudio y sus efectos (dimensión didáctica).
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (dimensión cognitiva).

Además es necesario considerar,

- El análisis del campo de restricciones donde se va a aplicar la secuencia didáctica.

Fig. N° 07

[55] Lezama (2003); citado y modificado por Moreno, O. (2010).

b. Análisis a priori y diseño de la situación didáctica

En esta fase de la ingeniería didáctica se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. También se establecen las hipótesis de trabajo, es decir lo que se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, los logros, las dificultades, los errores que se perciben persistentes, así como los mecanismos que serán utilizados, entre otros. Es, por tanto, una fase prescriptiva y predictiva al mismo tiempo.

Luego de determinar las variables didácticas y de establecer los objetivos, se pasa al diseño de la situación didáctica considerando las distintas formas de interacción que tendrán los estudiantes con el medio didáctico (acción, formulación y validación); además de generar un modo favorable para que el alumno acepte la responsabilidad de construir su propio conocimiento, se sienta motivado y desafiado a apropiarse del saber puesto en juego.

Este análisis a priori se debe concebir como un análisis de control de significado. Esto quiere decir, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones (Artigue, 1995).

En suma, el propósito del análisis a priori es determinar si las restricciones consideradas sobre el sistema didáctico y las variables elegidas, permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y los significados construidos, basado en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán éstos.

c. Experimentación

Llamada también "puesta en escena" de la situación diseñada, es la etapa del desarrollo de la secuencia didáctica en condiciones controladas por el investigador.

Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundarán en la calidad y confiabilidad de la siguiente etapa. Los medios para registrar los sucesos que ocurran, para su posterior análisis son de responsabilidad y elección del investigador. En nuestro caso usamos una filmadora, una cámara fotográfica, una encuesta, y Fichas de Observación, de auto y coevaluación.

d. Análisis a posteriori y validación

El análisis a posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos ocurridos durante la puesta en escena de la situación diseñada, en esta etapa se confrontan las hipótesis formuladas en el análisis a priori y se determina en qué medida fueron alcanzadas, o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, que es la validación de la misma. En la ingeniería didáctica, la validación es interna, pues se confrontan dos fases de la misma, lo esperado y lo que se obtuvo en la fase de experimentación, entre las conjeturas y expectativas que fueron formuladas en el análisis a priori y los resultados analizados y categorizados en el análisis a posteriori. Por ello, es importante remarcar dos aspectos fundamentales: el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

CAPITULO III: ANÁLISIS PRELIMINAR

3.1 ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO

El análisis epistemológico corresponde al estudio de conceptos y propiedades relacionados a la métrica o función distancia, los que luego nos permiten abordar las vecindades, los conjuntos abiertos y cerrados, el interior, exterior, frontera y clausura de conjuntos provistos de la función métrica.

Previamente a ello, consideramos algunas referencias históricas de la topología incidiendo en los clásicos problemas que le dieron origen, las que sirven de base para construir una concepción epistemológica y científica de esta disciplina matemática.

3.1.1 Referencias históricas acerca de la topología.

La primera referencia acerca de la topología data de 1679, cuando Leibniz al intentar estudiar las propiedades topológicas de las figuras, concluye que además de su representación coordenada se necesita de un análisis geométrico o lineal que defina su posición (situs).

Uno de los problemas más conocidos de la topología es el de los Puentes de Königsberg. Este problema fue resuelto por Euler en 1736 bajo el título "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" (Solución de un problema relacionado con la geometría de posición). Asimismo Euler, en 1750, propone la fórmula para poliedros: $V - A + C = 2$ [56] , y dos años después ofrece su demostración basada en la disección de sólidos en rodajas tetraédricas. Antes de Euler era casi imposible pensar en propiedades geométricas sin que estuviera involucrada la medida.

Lhuilier continuando el trabajo iniciado por Euler, en 1813 señala que la fórmula de Euler no es válida para sólidos con asas[57], proponiendo para estos casos la fórmula: $V - A + C = 2 - 2G$ [58] , siendo éste el primer resultado conocido sobre invariantes topológicas.

El problema de "si cuatro colores eran suficientes para colorear cualquier mapa" se plantea en 1850, y recién en 1976, Appel y Haken con la ayuda de un ordenador

56 V: número de vértices, A: número de aristas y C: número de caras.
57 Un asa es un toro adjuntado al espacio mediante suma conexa.
58 V: número de vértices, A: número de aristas y C: número de caras y G: número de agujeros.

concluyeron que sí era posible; y solo veinte años después (1996), los matemáticos Robertson y Sanders, Seymour y Thomas de la escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Georgia, publicaron una demostración que hasta el momento nadie ha refutado. [59]

En 1865, Möbius publica una descripción de la banda que lleva su nombre, en la que describe su propiedad en términos de *no orientabilidad*. Realmente, fue este matemático en 1813, el primero que formuló de manera apropiada la naturaleza de las ideas topológicas, al estudiar y clasificar las propiedades geométricas como proyección, afinidad, similitud y orientabilidad. La idea fundamental que propuso fue el estudio de las relaciones entre dos figuras que estaban en correspondencia 1-1 y tales que, puntos cercanos correspondían a puntos cercanos.

Listing en 1847 escribe un artículo titulado “Vorstudien zur Topologie”, siendo el primero en usar la palabra topología, aunque sus ideas topológicas se deben a la influencia de Gauss. Listing describe asimismo la banda de Möbius cuatro años antes que el propio Möbius. También estudia la noción de conexión de superficies, estudiado anteriormente por Riemann (1851), quién a su vez en 1857 introdujo un concepto muy importante del análisis matemático, conocido como las superficies de Riemann.

En 1882, Jordan publica su Tours d’Analyse, que contiene pruebas rigurosas de resultados topológicos intuitivamente obvios sobre curvas en el plano, introduciendo otro método para estudiar la conexión de las superficies, que es examinado por Listing en el espacio euclídeo de dimensión tres, y que Betti (1823- 1892) extiende a dimensiones arbitrarias. Pero la idea de conexión es descrita con rigor por Poincaré en 1895 en sus estudios bajo el título de “Analysis situs”, quién asimismo introduce el concepto de homología.

Un segundo camino en el cual se desarrolla la topología es a través de la generalización de ideas de convergencia, iniciado en 1817 por Bolzano, y posteriormente en 1872, Cantor introduce el concepto de conjunto derivado (o familia de puntos límite) de un conjunto; define los subconjuntos cerrados de la recta real como aquéllos que contienen a su conjunto derivado, introduce la idea de conjunto abierto, un concepto clave en la topología de conjuntos y define el concepto de entorno de un punto.

---

[59] Éste, el problema de los Puentes de Köenisberg y el de los dominios vecinos nos conducen a la teoría de grafos, la misma que está relacionada con el concepto de continuidad en un nivel inicial.

En 1906, Fréchet define espacios compactos, además extiende la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los espacios métricos, y prueba que los conceptos de abierto y cerrado de Cantor se extienden a espacios métricos. En 1909, en el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma, Riesz propone un nuevo acercamiento axiomático a la topología, basado en una definición conjuntista de puntos límite, sin un concepto de distancia subyacente. En 1914, Hausdorff define otra vez, los entornos a través de cuatro axiomas, sin consideraciones métricas. Estos trabajos, de Riesz y Hausdorff, son los que realmente definen la topología en un sentido general y por ende el de un espacio topológico abstracto.

3.1.2 La Topología como disciplina matemática

La palabra "topos" proviene del griego y significa "lugar". La Topología es parte de la matemática que estudia aquellas propiedades de los objetos geométricos que tienen que ver con la "proximidad" o la "posición relativa" entre puntos. Podríamos entender también a la Topología como una "geometría cualitativa", en la que se deja de lado las nociones cuantitativas como longitud, ángulo, área, volumen, etc. (propias de la geometría clásica) y se centra más bien en cuestiones cualitativas como por ejemplo si tiene agujeros o no, borde, o si se puede partir en componentes conexas.

La topología estudia las propiedades de las figuras geométricas o los espacios que no se ven alteradas por transformaciones continuas. Esto incluye una abstracción muy general de la noción de “espacio” y ha resultado muy útil en la mayoría de las áreas de la matemática moderna, sobre todo en la Geometría y el Análisis. En general, la Topología nos proporciona métodos y herramientas que nos permiten distinguir cuándo dos o más objetos son *homeomorfos*.

Así, desde el punto de vista topológico, una taza de té es similar a una llanta, pues como si fueran objetos de plastilina, podemos doblarlos, estirarlos o encogerlos para pasar de uno a otro sin que haya rompimiento, lo cual nos indica que hay una continuidad entre los puntos de dichos objetos.

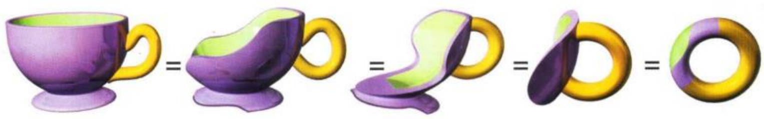


Fig. 08

Del mismo modo, una esfera, un cubo o la superficie de una naranja representan el mismo objeto topológico, no importa si tienen picos o están arrugados; pues podemos pasar de uno a otro de forma continua mediante *transformaciones*, por lo tanto podemos afirmar que dichos objetos son espacios *homeomorfos,* o que existe un *homeomorfismo* entre ellos.

En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer los objetos pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, es decir *la transformación debe ser continua;* ni pegar lo que estaba separado, *la inversa también debe ser continua*. Es decir, no se permiten transformaciones que puedan provocar una discontinuidad como por ejemplo cortar, pinchar o pegar puntos separados.

Así, una circunferencia no es homeomorfa a un segmento, ya que habría que partirla por algún punto.

En la Enseñanza-Aprendizaje de la topología usualmente existen dos formas de abordarla, uno, es la topología métrica y el otro, la topología conjuntista o general.

a. Topología métrica

Para iniciar el estudio de la topología métrica se define en primer lugar la métrica o función distancia, indicando los axiomas correspondientes. En base a ella se definen los entornos, bolas o vecindades, cuyas representaciones geométricas, dependen del tipo de conjunto en el que se trabaje y de acuerdo al tipo de función que se defina; pudiendo percibir por ejemplo que las bolas o vecindades no siempre son redondas. Luego estas definiciones nos permiten a su vez definir y estudiar los conjuntos abiertos y cerrados, enunciando y probando sus propiedades, encontrándonos nuevamente con ciertas rarezas, como por ejemplo que el conjunto vacío y el conjunto referencial en el que se define la métrica son abiertos y cerrados a la vez.

Por otro lado, la definición de abiertos y cerrados se puede hacer también usando la definición de punto interior e interior de un conjunto, y éstos generan los otros conceptos como los de punto clausura y clausura de conjuntos; así como el concepto de punto exterior y exterior de un conjunto se generan como el interior del complemento de dicho conjunto, y a partir de ello podemos definir punto frontera y frontera de un conjunto que está dada como la diferencia entre el conjunto referencial y la unión del interior y el exterior.

Otro concepto fundamental de la topología métrica es el de sucesión en espacios métricos, y entre ellos es relevante el concepto de las sucesiones de Cauchy que reviste especial importancia en el espacio métrico euclideo, pues fortalece y aclara el estudio de la construcción del conjunto de los números reales.

Finalmente, el estudio de la continuidad resume y refuerza los conceptos anteriores, (de abiertos, cerrados, etc.), pues la continuidad de una función en espacios métricos establece una relación entre dichos espacios y se define a través de abiertos e imágenes de abiertos.

b. Topología general o conjuntista

La topología general o conjuntista está caracterizada por hacer uso de la teoría de conjuntos y para definir una topología hace uso de un conjunto no vacío E, y a partir de la definición del conjunto potencia, distingue en él una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de partes de E, que cumplen determinadas condiciones como:

i) El vacío y el conjunto E están en $\mathcal{T}$.

ii) La intersección de una familia finita de elementos de $\mathcal{T}$ es otro elemento de $\mathcal{T}$; y,

iii) La unión de una familia cualquiera de elementos de $\mathcal{T}$ es otro elemento de $\mathcal{T}$.

Estas condiciones hacen que $\mathcal{T}$ sea una topología, y que el par (E, $\mathcal{T}$) se llame espacio topológico, donde a los elementos de $\mathcal{T}$, se les llama abiertos.

A partir de la definición de los espacios topológicos podemos definir los conceptos de conjuntos cerrados, vecindades, interior, exterior, frontera y clausura de conjuntos en un espacio topológico, así como también las nociones fundamentales de continuidad en espacios topológicos, de conexidad y los axiomas de separación.

Además de estas dos presentaciones que son comunes en la enseñanza universitaria en la formación de docentes de matemática en la UNE EGV, la *topología combinatoria* relacionada a muchos problemas que subyacen en el origen de esta disciplina matemática son de suma importancia, porque a través de ella se estudian en general todos los problemas que pueden ser traducidos en la teoría de grafos a poliedros[60], que son unos tipos especiales de espacios topológicos.

---

[60] Un poliedro es la reunión finita de vértices, segmentos de recta, triángulos, tetraedros, elementos que son llamados de un modo genérico "simplejos".

La idea de la topología combinatoria es estudiar los poliedros, no sus elementos en sí, si no analizar cómo están dispuestos, unos en relación de otros, ver cómo están "combinados", lo que da origen al nombre de este tipo de topología.

3.1.3 Métrica y espacios métricos

Definición 1:

Sea E un conjunto no vacío, una función d: E x E $\rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica o función distancia en E, si cumple las siguientes condiciones:

i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in E$ *(d es una función no negativa)*

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$ (d es una función simétrica)

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in E$ (desigualdad triangular)

Nota: d (x , y) se lee distancia o medida de x a y.

Definición 2:

Un espacio métrico es un par ordenado (E, d), donde E es un conjunto diferente del vacío y d es una métrica en E.[61] En este caso, a los elementos de E los llamamos puntos.

Ejemplo 1:

La función *d*: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$, define una métrica en $\mathbb{R}$, llamada métrica euclidiana.

En efecto:

i) $d(x, y) \geq 0$

Pero $d(x, y) = |x - y| \geq 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

($\Rightarrow$) Si $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

$$|x - y| = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x = y$$

[61] Es decir, un espacio métrico es un conjunto no vacío *E* provisto de una métrica d.

($\Leftarrow$) Si $x = y$

$$x - y = 0$$

$$|x - y| = 0$$

$$d(x, y) = 0$$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

Pero $d(x, y) = |x - y|$

$= |y - x|$

$= d(y, x)$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Pero $d(x, z) = |x - z|$

$= |x + 0 - z|$

$= |x - y + y - z|$

$\leq |x - y| + |y - z|$

$\leq d(x, y) + d(y, z)$

Por lo que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ es un espacio métrico, llamado espacio métrico usual o euclideo.

Ejemplo 2:

Si E = $\{1, 3, 5\}$, y d: E x E $\rightarrow \mathbb{R}$, tal que: $d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad si: x = y \\ 1 & ; \quad si: x \neq y \end{cases}$

Se verifica que d es una métrica en *E*, llamada métrica discreta.

En efecto:

i) d (1,1) = d (3,3) = d (5,5) = 0

d (1,3) = d (1,5) = d (3,5) = 1 $\geq$ 0, y

d (3,1) = d (5,1) = d (5,3) = 1 $\geq$ 0

ii) d (x, y) = 0 $\Leftrightarrow$ x = y (Por definición)

iii) Si $x = y$, se tiene $d(x, y) = d(x, y) = d(x, x) = 0$

Si $x \neq y$, se tiene $d(x, y) = 1 = d(y, x)$

iv) Si $x \neq y \neq z$, se tiene que:

$$d(x, y) = 1 \text{ y } d(x, z) + d(z, y) = 1 + 1 \text{ o } 1 \leq 2.$$

Luego, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si $x = y \wedge y \neq z$, se tiene que:

$$d(x, y) = 0 \text{ y } d(x, z) + d(z, y) = 1 + 1 \text{ o } 0 \leq 2.$$

Luego $(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si $x = z \wedge z \neq y$, se tiene que:

$$d(x, y) = 1 \text{ y } d(x, z) + d(z, y) = 0 + 1 \text{ o } 1 \leq 1.$$

Luego $(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si $z = y \wedge x \neq z$, se tiene que:

$$d(x, y) = 1 \text{ y } d(x, z) + d(z, y) = 1 + 0 \text{ o } 1 \leq 1.$$

Luego $(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si $x = y = z$, se tiene que:

$$d(x, y) = 0 \text{ y } d(x, z) + d(z, y) = 0 + 0 \text{ o } 0 \leq 0.$$

Luego $(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplo 3:

La función: $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2}$ define una métrica en $\mathbb{R}^2$, llamada métrica pitagórica.

En efecto:

Sea $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$, $C = (z_1, z_2)$ en $\mathbb{R}^2$

i) $d_1(A, B) = [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2} \geq 0, \forall A, B \in \mathbb{R}^2$

ii) $d_1(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

$$\begin{aligned} d_1(A, B) = 0 &\Leftrightarrow [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y_1 - x_1)^2 = 0 \wedge (y_2 - x_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 - x_1 = 0 \wedge y_2 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 = x_1 = 0 \wedge y_2 = x_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ &\Leftrightarrow A = B \end{aligned}$$

iii) $d_1(A, B) = [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2}$

$= [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$

$= d_1(B, A)$;

Es decir: $d_1(A, B) = d_1(B, A)$

iv) Debemos probar que: $d_1(A, C) \leq d_1(A, B) + d_1(B, C)$

Sean: $A = (x_1, x_2)$, $B = (y_1, y_2)$ y $C = (z_1, z_2)$ puntos en $\mathbb{R}^2$.

Entonces:

$d_1(A, C) = [(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2]^{1/2}$

$d_1(A, B) = [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2}$

$d_1(B, C) = [(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2]^{1/2}$

Luego tendremos que probar que:

$[(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2]^{1/2} \leq [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{1/2} + [(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2]^{1/2}$ ... (1)

Expresado de otro modo:

$$\left[\sum_{i=1}^{2}(z_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{2}(y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{2}(z_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots. (2)$$

Llamemos $\alpha_i = y_i - x_i$ y $\beta_i = z_i - y_i$

De donde: $\alpha_i + \beta_i = z_i - x_i$

Luego reemplazando en (2) tenemos:

$$\left[\sum_{i=1}^{2}(\alpha_i + \beta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{2}\beta_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots. (3)$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy - Buniakovski:

$$\boxed{\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot \beta_i\right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\beta_i^2}$$

Tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot \beta_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^2$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{2} \beta_i^{\,2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

Tomando extremos se prueba (3); con lo cual queda probada la desigualdad triangular; es decir, se cumple que:

$$d_1\,(A, C) \le d_1\,(A, B) + d_1\,(B, C)$$

Por i), ii), iii) y iv) queda demostrado que d_1 es una métrica en $\mathbb{R}^2$, llamada métrica pitagórica.

Ejemplo 4:

La función $d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $d_2((x_1, y_1), ((x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, define una métrica en $\mathbb{R}^2$, llamada la métrica de la suma o del taxista.

En efecto:

i) Sean: $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. Como $d_2(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$,
en donde $|x_1 - x_2| \ge 0$ y $|y_1 - y_2| \ge 0$, se tiene $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \ge 0$;
es decir, $d_2(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \ge 0$.

ii) $d_2(A, B) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 0 \wedge |y_1 - y_2| = 0$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \wedge y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

$\Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow A = B$

Luego, $d_2(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

iii) $d_2(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d_2(B, A)$

Luego, $d_2(A, B) = d_2(B, A)$

iv) $d_2(A, B) \le d_2(A, C) + d_2(C, B)$. Para $C = (x_3, y_3)$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_2(A, B) &= |x_1 - x_2| + |y_1 + y_2| \\ &= |x_1 - x_3 + x_3 - x_2| + |y_1 - y_3 + y_3 - y_2| \\ &\le |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| \\ &= d_2(A, C) + d_2(C, B) \end{aligned}$$

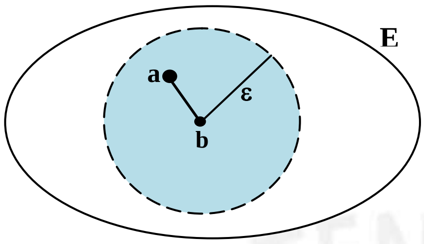
Luego: $d_2(A, B) \le d_2(A, C) + d_2(C, B)$

3.1.4 Vecindades en espacios métricos [62]

Definición 3:

Sea (E, d) un espacio métrico, donde $b \in E$ y sea $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$.

Una vecindad abierta con centro b y radio ε, $V_\varepsilon(b)$ o $V(b,\varepsilon)$ se define como: $V_\varepsilon(b) = \{a \in E \,/\, d(a, b) < \varepsilon\}$



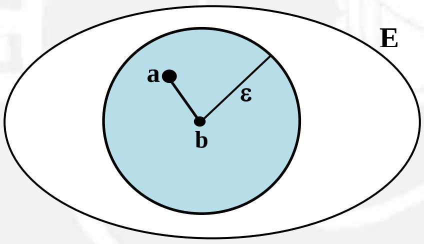
$$a \in V_\varepsilon(b) \Leftrightarrow d(a,b) < \varepsilon$$

Fig. 09

Definición 4:

Sea (E, d) un espacio métrico, tal que, $b \in E$ y sea $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$.

Una vecindad cerrada con centro b y de radio ε, denotado por $\overline{V_\varepsilon(b)}$ o $\overline{V(b,\varepsilon)}$ se define como: $\overline{V_\varepsilon(b)} = \{a \in E \,/\, d(a, b) \leq \varepsilon\}$



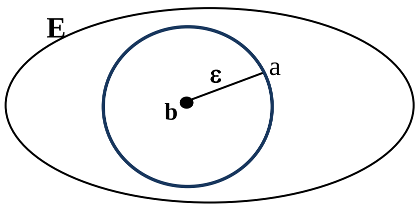
$$a \in \overline{V_\varepsilon(b)} \Leftrightarrow d(a,b) \leq \varepsilon$$

Fig. 10

Definición 5:

Sea (E, d) un espacio métrico, $b \in E$ y $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$.

Una esfera de centro b y radio ε se denota por $S_\varepsilon(b)$ ó $S(b, \varepsilon)$; y está definido de la siguiente manera: $S_\varepsilon(b) = \{a \in E \,/\, d(a, b) = \varepsilon\}$.



$$a \in S_\varepsilon(b) \Leftrightarrow d(a,b) = \varepsilon$$

Fig. 11

[62] En geometría se habla de esfera abierta, esfera cerrada y superficie esférica en lugar de vecindad abierta, cerrada y esfera respectivamente.

Ejemplo 1:

En el espacio métrico euclideo $(\mathbb{R}, |\ |)$;

i) La vecindad o entorno abierto de centro $b \in \mathbb{R}$ y radio $\varepsilon > 0$:

$V_\varepsilon(b) = \{a \in \mathbb{R} \ / \ |a - b| < \varepsilon\} = \,]\, b - \varepsilon , b + \varepsilon \,[$, un Intervalo abierto.

Pues, para la vecindad abierta se tiene:

$|a - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a - b < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < a < \varepsilon + b \Leftrightarrow a \in \,]\, b - \varepsilon , b + \varepsilon \,[$

Y su representación gráfica:

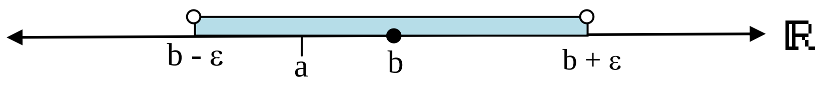


Fig. 12

ii) La vecindad cerrada de centro $b \in \mathbb{R}$ y radio $\varepsilon > 0$, $[\, b - \varepsilon , b + \varepsilon \,]$, es un intervalo cerrado, cuya representación gráfica es:

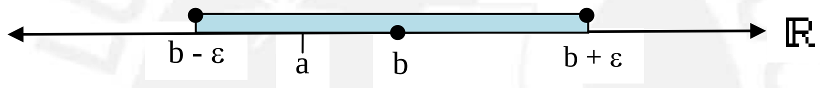


Fig. 13

iii) La esfera de centro b y radio ε, para la métrica euclidiana en $\mathbb{R}$, es $\{b - \varepsilon , b + \varepsilon\}$.

$S_\varepsilon (b) = \{a \in \mathbb{R} \ / \ d(a, b) = |a - b| = \varepsilon\}$

$\Rightarrow |a - b| = \varepsilon$

- $(a - b) > 0 \Rightarrow a - b = \varepsilon \Rightarrow a = b + \varepsilon$
- $(a - b) < 0 \Rightarrow -(a - b) = \varepsilon \Rightarrow a = b - \varepsilon$

Cuya representación gráfica es:

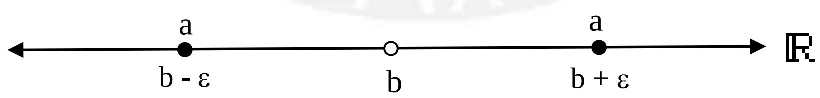


Fig. 14

Ejemplo 2:

A continuación mostramos ejemplos de vecindad abierta, vecindad cerrada y esfera en $\mathbb{R}^2$ con la métrica pitagórica:

$d_1 \ ((x_1, y_1) , (x_2 - y_2)) = [\, (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \,]^{½}$

a. Vecindad abierta de centro (0,1) y radio $\varepsilon = 3$.

$V_3((0,1)) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / d_1((x, y),(0,1)) < 3 \}$

$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / [(x - 0)^2 + (y - 1)^2]^{1/2} < 3 \}$

El conjunto de puntos que satisface la inecuación

$[(x^2 + (y - 1)^2]^{1/2} < 3$

$x^2 + (y - 1)^2 < 3^2$

representa el interior de la circunferencia de centro (0, 1) y radio 3.

b. Vecindad cerrada de centro (1, 0) y radio $\varepsilon = 2$.

$\overline{V_2((1,0))} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / d_1((x, y),(1,0)) \leq 2 \}$

$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / [(x - 1)^2 + (y - 0)^2]^{½} \leq 2 \}$

En este caso, el conjunto de puntos que satisface la inecuación

$[(x- 1)^2 + (y - 0)^2]^{1/2} \leq 2$

$(x - 1)^2 + y^2 \leq 2^2$

representa el círculo de centro (1, 0) y radio 2.

c. Esfera de centro (3, 2) y radio $\varepsilon = 1$.

$S_1((3,2)) = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 / d_1 ((x, y) , (3,2)) = 1\}$

$= \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 / [(x - 3)^2 + (y - 2)^2]^{1/2} = 1\}$

En este caso, el conjunto de puntos que satisface la ecuación

$[(x - 3)^2 + (y - 2)^2]^{1/2} = 1$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Describe la circunferencia de centro (3, 2) y radio 1.

Graficando tenemos:

a) Vecindad abierta: $V_3((0,1))$

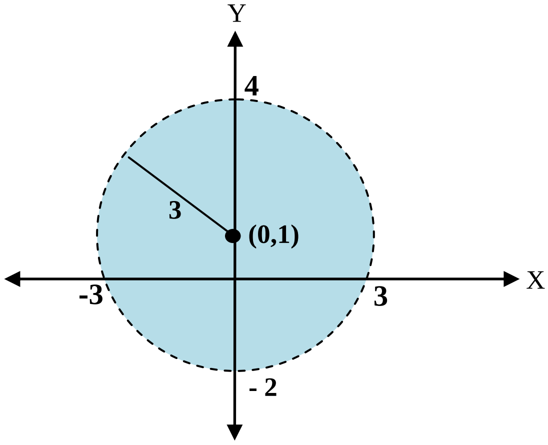


Fig. 15

b) Vecindad cerrada: $\overline{V_2((1,0))}$

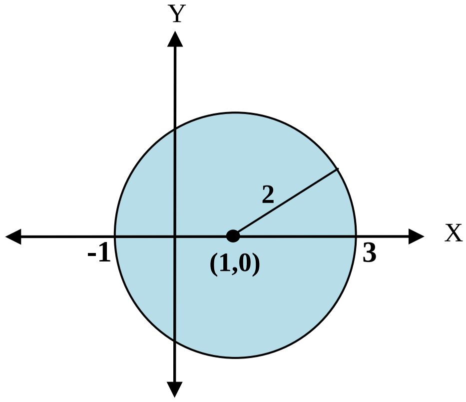


Fig. 16

c) Esfera: $S_1((3,2))$

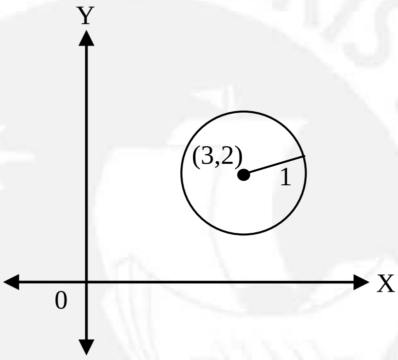


Fig. 17

Ejemplo 3:

Veamos a continuación cómo son estas vecindades y la esfera, si en lugar de la métrica pitagórica consideramos la métrica de la suma[63], definida como:

$d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / \; d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

a. *Vecindad abierta* de centro (0,1) y radio $\varepsilon = 3$.

$$V_3((0,1)) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; d_2((x, y),(0,1)) < 3 \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x - 0| + |y - 1| < 3 \}$$

Para representar gráficamente la inecuación $|x| + |y - 1| < 3$, es necesario considerar los siguientes casos:

[63] Con los mismos centros y el mismo radio.

i) Si x $\geq$ 0 $\wedge$ y – 1 $\geq$ 0 entonces x + y – 1 < 3, de donde x + y < 4

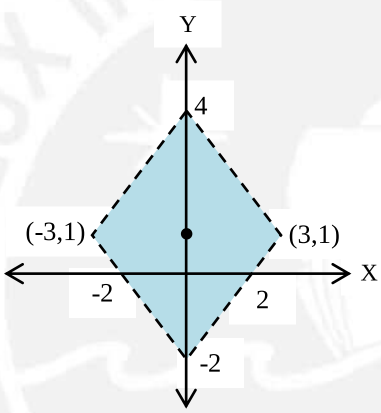
ii) Si x $\geq$ 0 $\wedge$ y – 1 $\leq$ 0 entonces x – y + 1 < 3, de donde x – y < 2

iii) Si x $\leq$ 0 $\wedge$ y – 1 $\geq$ 0 entonces – x + y – 1 < 3, de donde – x + y < 4.

iv) Si x $\leq$ 0 $\wedge$ y – 1 $\leq$ 0 entonces – x – y + 1 < 3, de donde – x – y < 2.

Al graficar cada una de estas inecuaciones obtenemos los semiplanos abiertos que contienen al origen de coordenadas, cuyas fronteras son las rectas que pasan por los puntos (0,4) y (4,0); (0,-2) y (2,0); (- 4,0) y (0,4); y (- 4,0) y (0,-2), respectivamente.

Luego, la vecindad abierta $V_3((0,1))$ queda determinada por la intersección de los cuatro semiplanos; que como se observa en la gráfica es la región del plano limitada por el rombo de vértices (- 3,1), (0,4), (3,1) y (0,-2); pero sin incluir su borde.



Vecindad abierta: $V_3((0,1))$

Fig. 18

b. Vecindad cerrada de centro (1, 0) y radio ε = 2 para la métrica de la suma:

$$\overline{V_2((1,0))} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, d_2((x, y),(1,0)) \leq 2 \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x - 1| + |y - 0| \leq 2 \}$$

De manera análoga al ejemplo anterior, la solución de la inecuación
$|x - 1| + |y| \leq 2$ nos conduce a los siguientes casos:

i) Si x - 1 $\geq$ 0 $\wedge$ y $\geq$ 0 entonces x – 1 + y $\leq$ 2, de donde x + y $\leq$ 3

ii) Si x - 1 $\geq$ 0 $\wedge$ y $\leq$ 0 entonces x – 1 - y $\leq$ 2, de donde x - y $\leq$ 3

iii) Si x – 1 $\leq$ 0 $\wedge$ y $\leq$ 0 entonces - x + 1 - y $\leq$ 2, de donde - x - y $\leq$ 1

iv) Si x – 1 $\leq$ 0 $\wedge$ y $\geq$ 0 entonces - x + 1 + y $\leq$ 2, de donde - x + y $\leq$ 1

Al graficar estas inecuaciones obtenemos los semiplanos cerrados que contienen el origen de coordenadas y cuyas fronteras son respectivamente las rectas que pasan por los puntos (0,3) y (3,0); (0,-3) y (3,0); (0,-1) y (-1,0); y (0,1) y (-1,0).

Luego, la vecindad cerrada $\overline{V_2((1,0))}$ queda determinada por la intersección de dichos semiplanos; que como se observa en la gráfica es la región del plano limitada por el rombo de vértices (-1,0), (1,2), (3,0) y (1,-2); en este caso, incluyendo su borde.

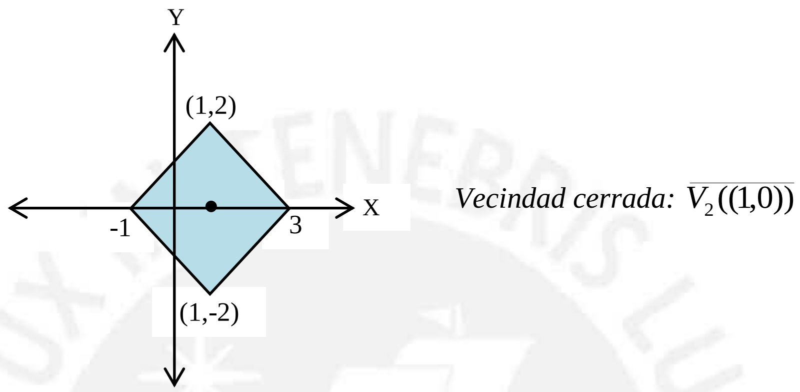


Fig. 19

c. Esfera de centro (3,2) y radio $\varepsilon = 1$.

$S_1((3,2)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, d_2((x, y), (3, 2)) = 1\}$

$\qquad = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x - 3| + |y - 2| = 1\}$

Para resolver la ecuación $|x - 3| + |y - 2| = 1$ debemos tener en cuenta los siguientes casos:

i) Si $x - 3 \geq 0 \ \wedge \ y - 2 \geq 0$

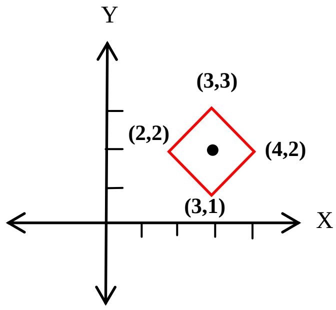
ii) Si $x - 3 \geq 0 \ \wedge \ y - 2 \leq 0$

iii) Si $x - 3 \leq 0 \ \wedge \ y - 2 \geq 0$

iv) Si $x - 3 \leq 0 \ \wedge \ y - 2 \leq 0$

Graficando las soluciones obtenemos respectivamente rectas que pasan por los puntos (0,6) y (6,0); (0,-2) y (2,0); (2,2) y (3,3); y (0,4) y (4,0).

Luego, la esfera $S_1((3,2))$ es el rombo de vértices (2,2), (3,3), (4,2) y (3,1).



Esfera: $S_1((3,2))$

Fig. 20

3.2 ANÁLISIS DIDÁCTICO

3.2.1 La enseñanza de la topología en la UNE

El Departamento Académico de Matemática e Informática de la Facultad de Ciencias de la UNE “Enrique Guzmán y Valle”, cuenta con 40 docentes responsables de la enseñanza de los diferentes cursos de especialidad.

Entre los docentes que enseñan Topología, encontramos dos grupos claramente diferenciados por el enfoque con el que abordan la asignatura:[64]

Grupo 1:
En este grupo identificamos a por lo menos cuatro docentes formados en la misma Universidad. Ellos, según sus propias manifestaciones, tienen como paradigma el estilo didáctico deductivo del profesor C. Cabrera Gen plasmado en sus “Apuntes de Topología”. Usan principalmente los libros de “Introducción a la Topología” de M. J: Mansfield y la “Topología” de G. Choquet, y de manera complementaria el texto “Actividades Matemáticas” de la Ed. Narcea.

En términos generales, inician el desarrollo de la asignatura con una revisión general de la Teoría de Conjuntos, los conjuntos indizados, valor absoluto de números reales, funciones, clases de funciones y funciones continuas. Luego, plantean el estudio de “una topología” a partir de un conjunto no vacío y de la familia de subconjuntos del conjunto de partes de dicho conjunto. Definen los espacios topológicos en términos generales, para particularizar el caso de los números reales y sus subconjuntos. A continuación, estudian los conceptos de los U-abiertos, los conjuntos cerrados, los entornos o vecindades, las bases de una Topología, los puntos de acumulación, cierre e

[64] Pese a la sumilla común, cada docente tiene la libertad de incluir los contenidos necesarios y abordar la asignatura desde un enfoque metodológico que considere pertinente.

interior de un conjunto. Finalmente tratan los conceptos de continuidad y homeomorfismos, así como los espacios conexos. No siempre abordan los espacios compactos y separables. En general, en un primer momento el desarrollo del curso es teórico y posteriormente ven las aplicaciones.

Específicamente los docentes identificados con este grupo, desarrollan el curso desde un punto de vista conjuntista y basados en el libro de Mansfield y Bushaw, enfocando directamente los conjuntos U-abiertos y solo plantean algunos ejemplos usando el conjunto de los números reales con la métrica euclidea, es decir limitan el estudio de la métrica al conjunto de los números reales o a lo más a $\mathbb{R}^2$.

Grupo 2:

En este grupo se encuentran los docentes que siguen el modelo didáctico instaurado por los profesores N. Cáceres y T. Verástegui, quienes desarrollaron la asignatura de Topología en la UNE entre los años 70 y 90, priorizando el aspecto didáctico formativo pero sin descuidar el rigor matemático.

El curso se inicia con una revisión del libro "Introducción a la Topología" de J. Tola, luego se realiza una revisión general de los números reales: valor absoluto y sus propiedades, intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos), entre otros. Sobre esta base se introducen los conceptos de métrica usual (euclidea, pitagórica) en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, luego se abordan las demás métricas, como la discreta, la del supremo, la del máximo y otras. Asimismo se desarrollan los conceptos de vecindades, conjuntos abiertos y cerrados, interior, exterior, frontera y clausura de un conjunto y el concepto de punto de acumulación, entre otros, usando las diversas métricas.

A continuación, se desarrollan los conceptos de sucesiones en espacios métricos, continuidad y homeomorfismo, para finalmente abordar los conceptos de topología y espacios topológicos.

Son estas ideas directrices las que en general seguimos los docentes del segundo grupo, y usamos preferentemente los textos de *"Introducción a la Topología"* de J. Horváth, *"Topología General"* de S. Lipschutz, *Introducción a la Topología* de A. Ortiz, Topología de E. Lima, además de algunos textos de Análisis de G. Choquet.

En resumen, podemos decir que el primer grupo de docentes aborda la enseñanza de la topología desde un enfoque deductivo, pues a partir de casos generales particularizan para casos específicos; mientras que el segundo grupo por razones estrictamente didácticas consideramos que a partir de las nociones básicas de la topología métrica se pueden desarrollar con mayor facilidad conceptos más complejos, siguiendo un proceso inductivo.

Al margen de las diferencias, ambos grupos de docentes tenemos una preocupación común por mejorar la enseñanza de la Topología y de la Matemática en general en la formación de los futuros docentes de la especialidad, para ello creemos conveniente socializar nuestras experiencias para potenciar las fortalezas y superar las debilidades de una u otra opción didáctica.

Experiencia personal:

Un día de manera casual encontré un cuaderno de Topología de un estudiante de la UNE desarrollada magistralmente por el Mg. Teódulo Verástegui, el que me impactó por la forma didáctica de la presentación de los contenidos. Empezaba con los espacios métricos por medio de ejemplos sencillos y comprensibles, para luego paulatinamente darle el rigor matemático necesario. Desde entonces, en el desarrollo de mis clases de Topología tomo en cuenta estas ideas.

Por ejemplo, considero importante al inicio del curso que los estudiantes exploren los problemas que generaron el estudio de la Topología con la finalidad de que se motiven y logren una conceptualización intuitiva inicial de los objetos de estudio de esta ciencia.

En general, tomando en cuenta las corrientes pedagógicas constructivistas y específicamente las investigaciones actuales en el campo de la didáctica de la matemática, intentamos reemplazar las clases expositivas por sesiones participativas por lo que planteamos las clases a través de discusiones en pequeños grupos en un primer momento para luego pasar a las exposiciones y debates en el plenario, valorando en todo momento lo que el alumno ya conoce de cursos previos además de sus experiencias personales.

En esta perspectiva consideramos importante la realización del presente estudio porque nos permitirá afianzar y mejorar lo que ya veníamos experimentando, a fin de que se logren los propósitos de la enseñanza de esta ciencia en la formación de los futuros docentes de matemática.

La importancia de la enseñanza de la topología en la formación docente radica en que provee recursos para lograr mejores niveles de comprensión de conceptos matemáticos a través de la abstracción y generalización de diversas propiedades, mejora el nivel de razonamiento y demostración, asimismo amplía la visión de la matemática evitando circunscribirla al aspecto operativo.

3.2.2 Análisis de los libros de texto de topología más usuales en la UNE "Enrique Guzmán y Valle".

Además de lo descrito anteriormente sobre la enseñanza de la topología en la UNE, es necesario realizar un análisis de los libros de texto que generalmente se usan en la UNE EGV, lo que nos permitirá tener una idea más clara sobre la orientación que tiene la asignatura en esta casa de estudios, y que serán importantes al momento de plantear las actividades de extensión o investigación.

En términos generales, los docentes de la UNE EGV, seleccionamos los libros teniendo en cuenta en primer lugar la coherencia y rigurosidad matemática ("Saber sabio" en la terminología de Chevallard) y por otra parte, el aspecto didáctico, que se evidencia en la claridad y sencillez de los conceptos de manera que resulten comprensibles para los estudiantes universitarios, asimismo consideramos importante los ejemplos y las actividades de aplicación propuestas que son muy importantes para reforzar los aprendizajes.

A continuación presentamos los textos de Topología más usados en la UNE EGV, clasificados según los enfoques ya descritos:

Grupo 1: Topología conjuntista

TÍTULO	AUTOR, EDITORIAL	AÑO
Introducción a la topología	M.J. Mansfield Ed. Alambra, Madrid - España	1974
Fundamentos de Topología General	D. Bushaw Ed. LIMUSA Wiley, México.	1970
Topología	J. Hocking y G. Young. Ed. Reverté, México.	1966
Topología	James R. Munkres Ed. Prentice hall, España.	2002
Cours d´Analyse – Tome II Topología	Gustave Choquet Masson et Cie editeurs; París - Francia.	1964

Tabla 01

En forma general, estos textos inician el desarrollo del curso con una breve descripción del objeto de estudio de la topología como disciplina matemática, para que luego apoyados en los conocimientos de la teoría de conjuntos se realice una definición formal de “una topología” y de “un espacio topológico”.

A continuación presentan definiciones de diversos conceptos topológicos de manera muy general y abstracta, por lo que resultan incomprensibles para muchos alumnos, pese a que inmediatamente presentan ejemplos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ lo que permite superar parte de la dificultad. Por ello, consideramos que este enfoque deductivo y conductista, no es el más adecuado para lograr que los estudiantes se motiven por el estudio de esta disciplina matemática, pues la comprensión que logran tanto de los contenidos en sí como de su aplicabilidad es limitada.

Un ejemplo típico de estos textos y que muchos docentes usan como texto base es la “*Introducción a la Topología*” de M.J. Mansfield, fundamentalmente porque está acorde a la currícula de la especialidad.

Grupo 2: Topología métrica

Estos textos se caracterizan por plantear el estudio de la topología de manera inductiva, de lo particular a lo general, de lo simple a lo complejo. Todos ellos presentan en primer lugar un estudio de los espacios métricos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$, usan conceptos conocidos por los alumnos como intervalos, valor absoluto, funciones continuas en $\mathbb{R}$, sobre esta base generalizan los diversos conceptos de la topología.

El enfoque disciplinar y didáctico de estos textos, que ubicamos dentro de la corriente constructivista, permite una mejor comprensión y aplicación de los conceptos de la topología. Así podemos afirmar, que lo didáctico no va en desmedro del rigor matemático que exige esta disciplina matemática.

Entre estos textos, encontramos los siguientes:

TÍTULO	AUTOR, EDITORIAL	AÑO
Introducción a la topología	Juan Horváth Monografía N° 9. OEA – EEUU.	1975
Topología General	Seymour Lipschutz Ed. Mc GRAW HILL - México.	1970
Introducción a la Topología	Alejandro Ortiz Fernández Trujillo - Perú.	1987
Introducción a la Topología	Juan Margalef R. – E. Outerelo D. Editorial Complutense – Madrid - España.	1993

Tabla 02

3.3 ANÁLISIS COGNITIVO

A partir de nuestras experiencias personales y observaciones de situaciones de enseñanza-aprendizaje de la métrica como parte de la asignatura de Topología a estudiantes de la especialidad de matemática del VIII ciclo, a lo largo de más de veinte años en la UNE “Enrique Guzmán y Valle” – La Cantuta, podemos afirmar que los estudiantes presentan ciertas dificultades, carencias o limitaciones que son recurrentes y persistentes, a pesar de que de una promoción a otra se podría esperar que la situación sea distinta. Entre ellas tenemos:

a. Los estudiantes no manejan un concepto adecuado de valor absoluto de números reales, solo calculan de manera mecánica sin poder realizar su interpretación geométrica.

b. Tienen dificultades en la interpretación de intervalos, muchas veces lo restringen únicamente a los números enteros.

c. La mayoría de estudiantes muestran dificultades al resolver inecuaciones con valor absoluto e interpretar geométricamente su conjunto solución.

d. Presentan serias dificultades al demostrar la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ provisto de la métrica usual; dificultad que se acrecienta en otros espacios métricos.

e. Algunos estudiantes logran comprender el concepto de distancia en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual, asimismo representan vecindades abiertas y cerradas en estos conjuntos solo con dichas métricas, pero muestran dificultades al trabajar con otras métricas.

f. Los estudiantes presentan deficiencias al representar vecindades abiertas, cerradas e incluso la esfera usando la métrica discreta.

g. Tienen dificultades al realizar las demostraciones de las propiedades de espacios métricos, generalmente no justifican el procedimiento.

De manera complementaria a las consideraciones anteriores y con el fin de que la secuencia didáctica se adecúe lo mejor posible a los propósitos del presente estudio, llevamos a cabo una “Evaluación de los conocimientos previos” de los estudiantes participantes en el presente estudio; asimismo aplicamos la “Evaluación de entrada” con el propósito de identificar en qué medida los estudiantes participantes de la presente investigación conocen el concepto de métrica.

3.3.1 Análisis de la Evaluación de conocimientos previos

Los conocimientos y capacidades que los estudiantes necesitan como pre-requisito para desarrollar las actividades propuestas en la secuencia didáctica propuesta en el presente estudio son:

a. Identificar las propiedades de los números reales.
b. Definir el valor absoluto en $\mathbb{R}$, aplicar y demostrar sus propiedades.
c. Representar intervalos de números reales en diferentes registros: gráfico, simbólico y algebraico.
d. Realizar operaciones con intervalos en $\mathbb{R}$.
e. Representar diversas regiones en $\mathbb{R}^2$.
f. Calcular distancias entre dos puntos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.
g. Definir una función.

Es así como se elaboró la Prueba de Conocimientos Previos[65] conformada por seis (06) preguntas, las mismas que fueron seleccionadas sometiéndolas a juicio de expertos (docentes de la especialidad con estudios de Maestría). La Prueba se aplicó quince días antes del inicio de la fase experimental, a los 16 estudiantes participantes del presente estudio; luego del cual hubo necesidad de programar algunas actividades de reforzamiento.

TABLA Nº 03: RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS [66]

ÍTEMS		CORRECTO		INCORRECTO		EN BLANCO		TOTAL	
N°	INDICADORES	N°	%	N°	%	N°	%	N°	%
1	Identifica conjuntos finitos.	03	19%	13	81%	--	--	16	100%
2	Determina el número de elementos de intervalos cerrados.	05	31%	09	56%	02	12%	16	100%
3	Realiza operaciones con intervalos.	02	12%	12	75%	02	12%	16	100%
4	Compara distancias en $\mathbb{R}$.	10	62%	06	38%	--	--	16	100%
5	Calcula distancias entre dos puntos en la recta $\mathbb{R}$.	11	69%	03	19%	02	12%	16	100%
6	Representa gráficamente una inecuación lineal en $\mathbb{R}^2$.	04	25%	05	31%	07	44%	16	100%

Fuente: Propia, en base a los resultados de la Evaluación de Conocimientos previos.

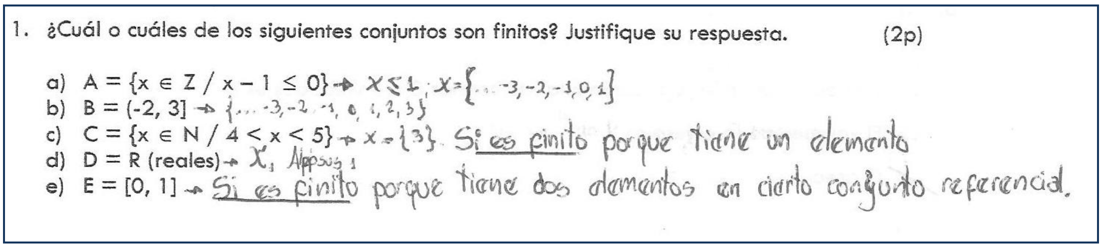
---

65 Anexo N° 02 y 03.

66 Consideramos correcto, sólo cuando la pregunta es desarrollada completa y correctamente, e incorrecto, cuando hay error en el proceso de solución o la respuesta no corresponde a lo que se pide.

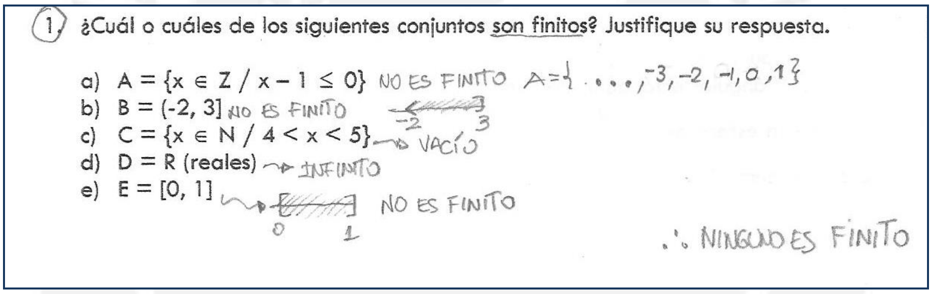
Pregunta 1:

La finalidad de esta pregunta es saber si los estudiantes distinguen los conjuntos finitos de los infinitos, pues es un conocimiento fundamental en la conceptualización de conjuntos abiertos, cerrados, y otros.


1. ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son finitos? Justifique su respuesta. (2p)

a) $A = \{x \in Z / x - 1 \leq 0\}$ → $x \leq 1$; $x = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1\}$
b) $B = (-2, 3]$ → $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
c) $C = \{x \in N / 4 < x < 5\}$ → $x = \{3\}$. Si es finito porque tiene un elemento
d) $D = R$ (reales) → X,
e) $E = [0, 1]$ → Si es finito porque tiene dos elementos en cierto conjunto referencial.

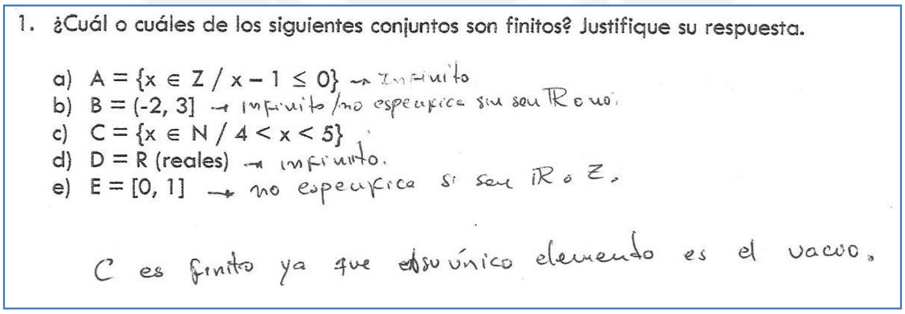
De los 16 estudiantes, solo 3 identifican que solo el conjunto C es finito, aunque como se observa en el caso que mostramos, hay error en la determinación del conjunto (dice que es unitario cuando se trata de un conjunto vacío). Pero también hay algunos que habiendo determinado correctamente el conjunto C, concluyen que ningún conjunto es finito.


1. ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son finitos? Justifique su respuesta.

a) $A = \{x \in Z / x - 1 \leq 0\}$ NO ES FINITO $A = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1\}$
b) $B = (-2, 3]$ NO ES FINITO -2 3
c) $C = \{x \in N / 4 < x < 5\}$ → VACÍO
d) $D = R$ (reales) → INFINITO
e) $E = [0, 1]$ → 0 1 NO ES FINITO

∴ NINGUNO ES FINITO

Del mismo modo, tienen confusiones en la comprensión de los intervalos, pues dicen que para determinar si es o no finito hay necesidad de precisar si está definido en $\mathbb{Z}$ (enteros) o en $\mathbb{R}$ (reales). [67]


1. ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son finitos? Justifique su respuesta.

a) $A = \{x \in Z / x - 1 \leq 0\}$ → Infinito
b) $B = (-2, 3]$ → infinito /no especifica si son $\mathbb{R}$ o no.
c) $C = \{x \in N / 4 < x < 5\}$
d) $D = R$ (reales) → infinito.
e) $E = [0, 1]$ → no especifica si son $\mathbb{R}$ o Z.

C es finito ya que su único elemento es el vacío.

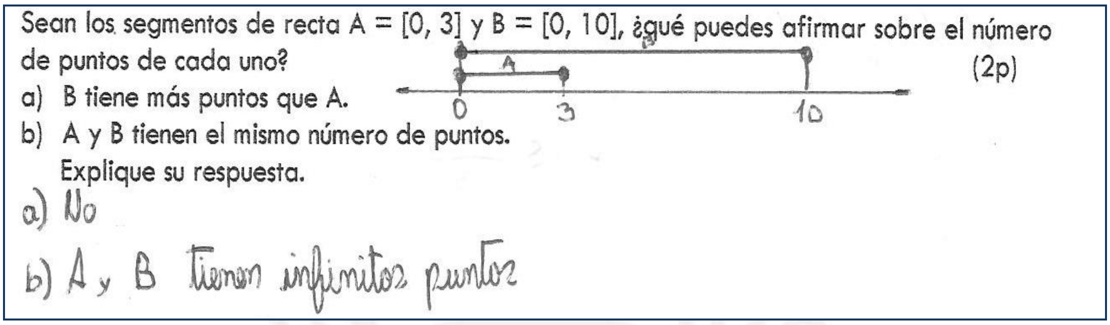
Pregunta 2:

El desarrollo de la Topología métrica generalmente se inicia teniendo como base el conjunto de los números reales y sus subconjuntos (intervalos). Por ello, consideramos

[67] En base a los resultados se replantearon dos de los conjuntos propuestos. Ver Anexo N° 03.

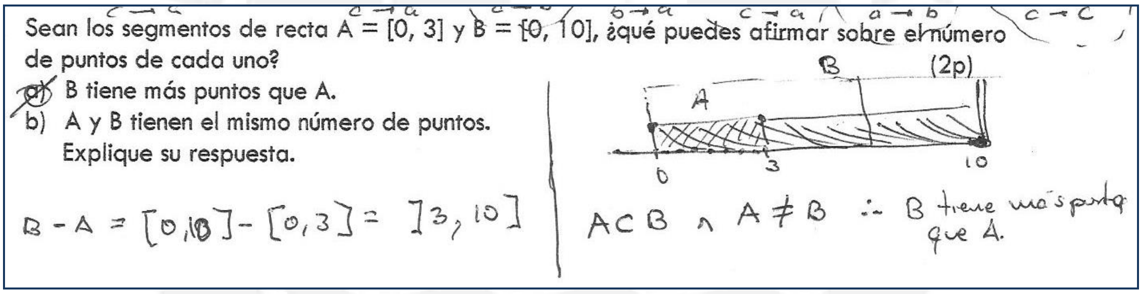
importante conocer el nivel de manejo que tenían los estudiantes de dichos conjuntos, sabiendo además que son conceptos básicos que se abordan desde la secundaria.

Es así como en esta pregunta se les pide comparar el número de elementos que tienen dos intervalos cerrados; encontrando que solo la tercera parte de estudiantes responde correctamente, aunque la mayoría explica con cierta ambigüedad.

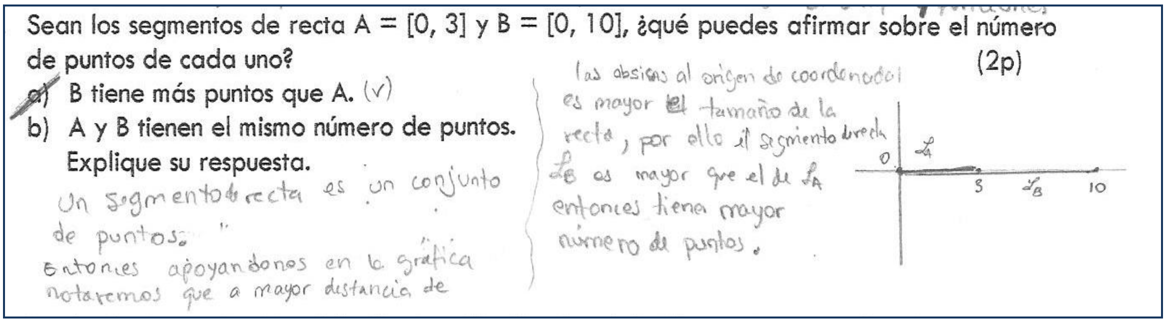

Sean los segmentos de recta A = [0, 3] y B = [0, 10], ¿qué puedes afirmar sobre el número de puntos de cada uno? (2p)
a) B tiene más puntos que A.
b) A y B tienen el mismo número de puntos.
Explique su respuesta.
a) No
b) A y B tienen infinitos puntos

Entre los que responden de manera incorrecta, encontramos los siguientes casos:

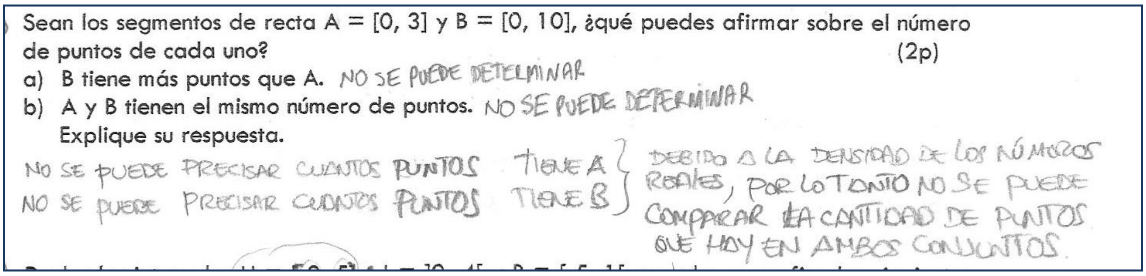
- Un alumno argumenta, “como A ⊂ B, entonces B tiene más puntos que A”.


Sean los segmentos de recta A = [0, 3] y B = [0, 10], ¿qué puedes afirmar sobre el número de puntos de cada uno? (2p)
a) B tiene más puntos que A.
b) A y B tienen el mismo número de puntos.
Explique su respuesta.
B - A = [0,10] - [0,3] =]3,10]
A⊂B ∧ A ≠ B ∴ B tiene más puntos que A.

- Otro estudiante dice: “un segmento de recta es un conjunto de puntos; entonces apoyándonos en la gráfica notaremos que a mayor distancia de las abscisas al origen de coordenadas es mayor el tamaño de la recta, por ello el segmento de recta L_B es mayor que L_A, entonces tiene mayor número de puntos”.


Sean los segmentos de recta A = [0, 3] y B = [0, 10], ¿qué puedes afirmar sobre el número de puntos de cada uno? (2p)
a) B tiene más puntos que A. (v)
b) A y B tienen el mismo número de puntos.
Explique su respuesta.
Un segmento de recta es un conjunto de puntos; entonces apoyandonos en la gráfica notaremos que a mayor distancia de las absisas al origen de coordenadas es mayor el tamaño de la recta, por ello el segmento de recta L_B es mayor que el de L_A entonces tiene mayor número de puntos.

- Otro alumno afirma que debido a la densidad de los números reales no se pueden comparar la cantidad de puntos de estos conjuntos.



Sean los segmentos de recta A = [0, 3] y B = [0, 10], ¿qué puedes afirmar sobre el número de puntos de cada uno? (2p)

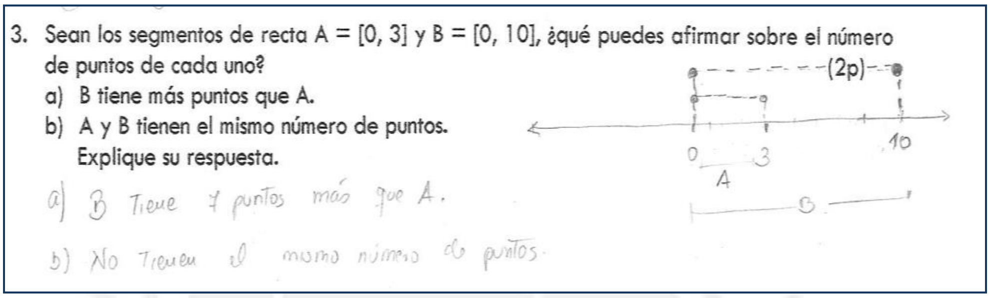
a) B tiene más puntos que A. NO SE PUEDE DETERMINAR

b) A y B tienen el mismo número de puntos. NO SE PUEDE DETERMINAR

Explique su respuesta.

NO SE PUEDE PRECISAR CUANTOS PUNTOS TIENE A
NO SE PUEDE PRECISAR CUANTOS PUNTOS TIENE B
DEBIDO A LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS REALES, POR LO TANTO NO SE PUEDE COMPARAR LA CANTIDAD DE PUNTOS QUE HAY EN AMBOS CONJUNTOS.

- Asimismo, una alumna afirma que B tiene 7 puntos más que A, por lo que podemos entender, considera los intervalos como subconjuntos de $\mathbb{Z}$.



3. Sean los segmentos de recta A = [0, 3] y B = [0, 10], ¿qué puedes afirmar sobre el número de puntos de cada uno? (2p)

a) B tiene más puntos que A.

b) A y B tienen el mismo número de puntos.

Explique su respuesta.

a) B Tiene 7 puntos más que A.

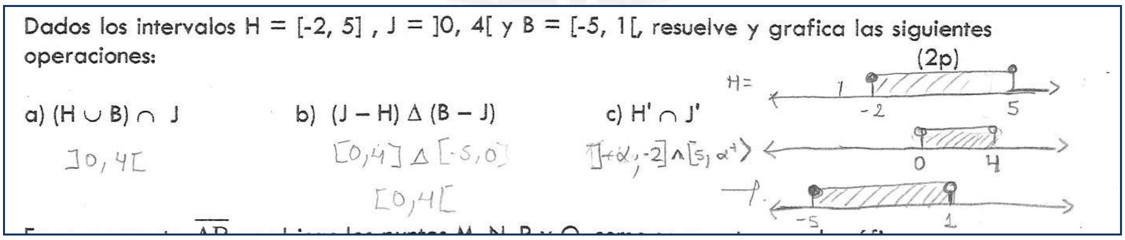
b) No Tienen el mismo número de puntos.

Pregunta 3:

En esta pregunta se plantean operaciones con intervalos, puesto que servirán como fundamento en el estudio de los espacios métricos, los conjuntos abiertos y cerrados, y sus propiedades.

Solo dos estudiantes (12%) resuelven correctamente las tres operaciones propuestas, cuyos resultados son: a) $]0,4[$; b) $[-5,0]$ y c) $]-\infty,.2[\cup]5,+\infty[$.

- La mayoría incurre en errores en las subpreguntas (b) y (c), como en el siguiente caso, donde observamos serios errores en estos subítems. Se observa que escribe $\wedge$ en lugar de $\cup$.



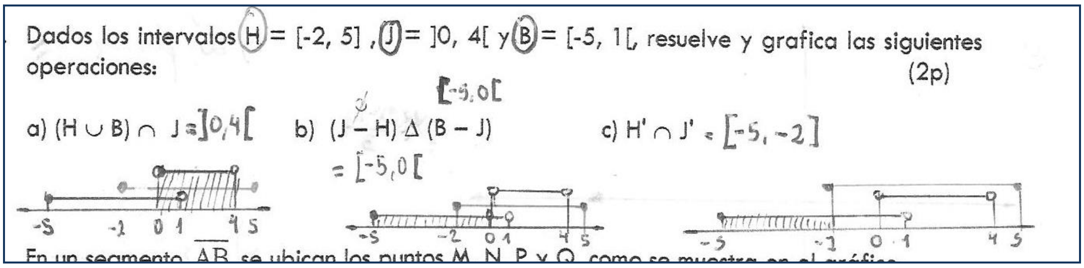
Dados los intervalos H = [-2, 5] , J =]0, 4[y B = [-5, 1[, resuelve y grafica las siguientes operaciones: (2p)

a) (H ∪ B) ∩ J   ]0, 4[

b) (J − H) Δ (B − J)   [0,4] Δ [-5,0]   [0,4[

c) H' ∩ J'   ]+∞,-2] ∧ [5, ∞+⟩

- Otro alumno, en la subpregunta (b), en lugar del intervalo cerrado $[-5,0]$, escribe $[-5,0[$, mientras que en (c) es inexplicable la gráfica que realiza y la respuesta que da.



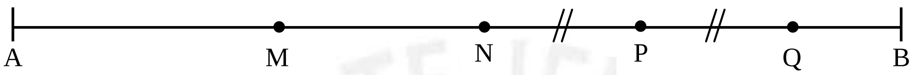
Dados los intervalos H = [-2, 5] , J =]0, 4[y B = [-5, 1[, resuelve y grafica las siguientes operaciones: (2p)

a) (H ∪ B) ∩ J =]0,4[b) (J − H) ∆ (B − J) = [-5,0[c) H' ∩ J' = [-5, -2]

Pregunta 4:

Textualmente, la pregunta fue formulada de la siguiente manera:[68]

En el segmento $\overline{AB}$ se ubican los puntos M, N, P y Q, como se muestra en el gráfico:

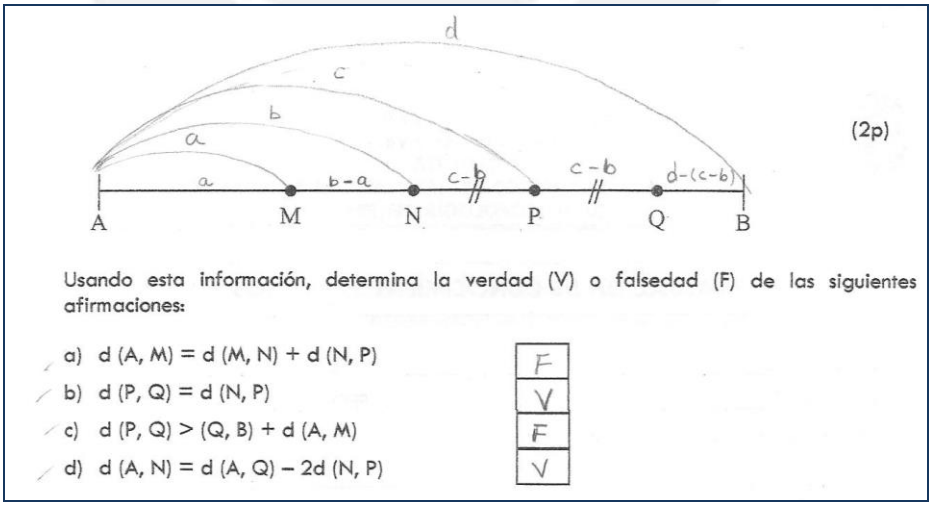


Usando esta información, determina la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

a) d (A, M) = d(M, N) + d (N, P) ( ) b) d (P, Q) = d (N, P) ( )

c) d (P, Q) > d(Q, B) + d (A, M) ( ) d) d (A, N) = d (A, Q) - 2d (N, P) ( )

El propósito de esta pregunta es explorar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre las propiedades de la distancia en $\mathbb{R}$. Los resultados demuestran que la mayoría de ellos (62%) conoce dichas propiedades y puede ayudar a superar la dificultad o el desconocimiento del 38% restante. Por lo que esperamos que no tendrían mayores inconvenientes en definir la función distancia y analizar las propiedades de la topología métrica en cualquier conjunto.



Usando esta información, determina la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

a) d (A, M) = d (M, N) + d (N, P) F

b) d (P, Q) = d (N, P) V

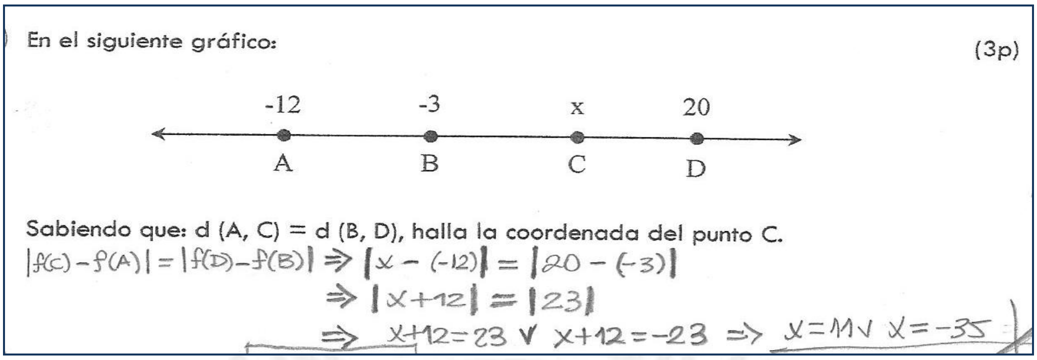
c) d (P, Q) > (Q, B) + d (A, M) F

d) d (A, N) = d (A, Q) − 2d (N, P) V

[68] Después fue reformulada como aparece en el Anexo N° 03.

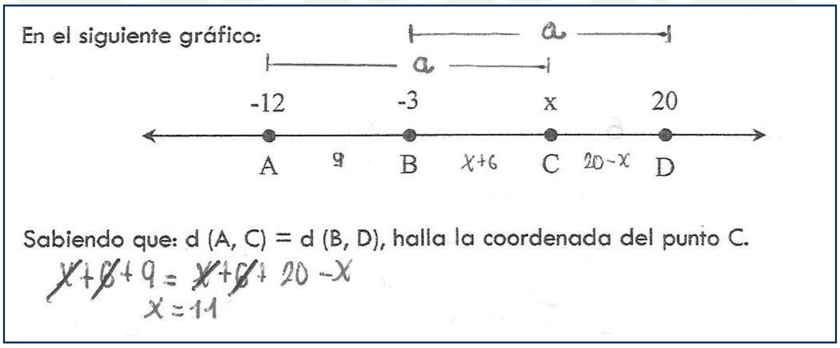
Pregunta 5:

Esta pregunta es complementaria y confirmatoria de la anterior, pues se pasa a la parte aplicativa de las propiedades de la distancia en $\mathbb{R}$. Efectivamente, los resultados confirman que algunos estudiantes conoce y aplica correctamente las propiedades de la distancia en $\mathbb{R}$, como se puede ver en los siguientes casos:



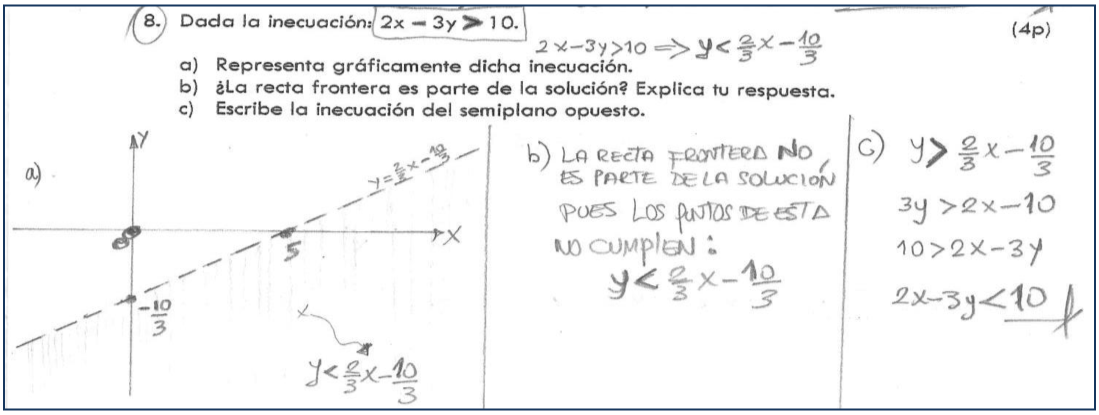
Un estudiante aplica correctamente el concepto de distancia entre dos puntos en la recta y resuelve correctamente la ecuación resultante. Pero se observa que no precisa la respuesta, lo que muestra que no contrasta su respuesta con la gráfica propuesta.

Sin embargo otra alumna, a pesar de que inicialmente señala en la gráfica la igualdad de las distancias según el dato, indica que la distancia de B a C es x + 6 sin un fundamento lógico, es más no usa correctamente la distancia entre dos puntos, se limita a calcular distancias por conteo.

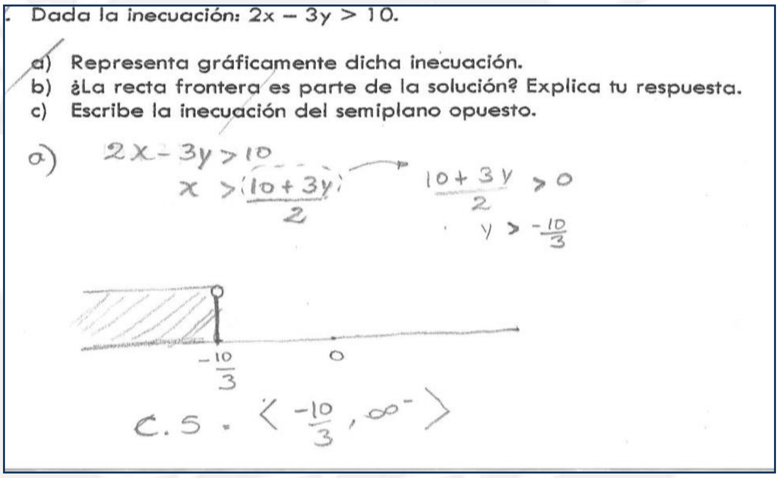


Pregunta 6:

El propósito de esta pregunta es conocer el nivel de manejo que tienen los estudiantes del plano coordenado, puesto que el desarrollo de la asignatura se hará fundamentalmente tomando como referencia los espacios métricos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$. Aquí encontramos que solo el 25% de estudiantes grafica correctamente la desigualdad $2x-3y>10$, como lo hizo el siguiente alumno:



El 31% presenta serios errores; por ejemplo, uno de ellos grafica la desigualdad en $\mathbb{R}$ (y no en $\mathbb{R}^2$.), evidenciando dificultad en la comprensión del objeto matemático; además en la interpretación del sentido de la desigualdad.



3.3.2 Análisis de la Prueba de entrada[69]

Pese a que los resultados de la Prueba de conocimientos previos nos daban suficientes evidencias que los estudiantes no tenían mayores conocimientos sobre los temas que se plantean desarrollar en la presente secuencia didáctica, aplicamos la Prueba de entrada para determinar con mayor certeza el nivel de conocimiento que tenían los estudiantes respecto a los conceptos topológicos fundamentales así como sus antecedentes históricos. Pues de ser así se tendrían que haber planteado las actividades con otro nivel de exigencia.

[69] Ver Anexo N° 04 y 05.

Esta Prueba que consta de diez (10) preguntas se aplicó quince días antes del inicio de la Parte Experimental del presente estudio, a los mismos estudiantes que se les aplicó la Prueba de conocimientos previos.

En resumen, los resultados de esta Prueba muestran que los estudiantes del VIII Ciclo de la especialidad de Matemática e Informática de la Facultad de Ciencias conocen algunos conceptos topológicos pero solo a nivel intuitivo, tal como se describen en la tabla adjunta.

TABLA Nº 04: RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DE ENTRADA[70]

PREGUNTAS		CORRECTO		INCORRECTO		EN BLANCO		TOTAL	
Nº	INDICADORES	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
1	Reconocen la denominación inicial de la Topología y el matemático que inició su estudio.	01	06%	14	88%	01	06%	16	100%
2	Identifican al matemático que resolvió el misterio de los Puentes de Köenisberg.	01	06%	13	81%	02	12%	16	100%
3	Reconocen el concepto actual de la Topología como disciplina matemática.	08	50%	06	38%	02	12%	16	100%
4	Identifican espacios métricos en $\mathbb{R}$.	02	12%	06	38%	08	50%	16	100%
5	Clasifican vecindades en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.	02	12%	06	38%	08	50%	16	100%
6	Hallan la unión y la intersección de intervalos y reconocen si son conjuntos abiertos o cerrados.	04	25%	04	25%	08	50%	16	100%
7	Prueba la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ con la métrica del máximo.	03	19%	01	06%	12	75%	16	100%
8	Identifican punto interior, exterior y frontera en subconjuntos de $\mathbb{R}$.	02	12%	02	12%	12	75%	16	100%
9	Halla el interior, exterior y frontera de conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$) en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.	--	--	02	12%	14	88%	16	100%
10	Identificación de situaciones reales que involucran conceptos topológicos.								

Fuente: Propia, en base a los resultados de la Evaluación de Entrada.

Pregunta 1:

Solamente un estudiante responde con acierto que las ideas generales de la Topología surgen con las investigaciones de Cantor y que inicialmente se denominó Análisis Situs, el 38% (seis alumnos) cree que la topología surge con las investigaciones de Hilbert y que su denominación inicial fue “Teoría de Grafos”.

[70] Consideramos **correcto**, sólo cuando la pregunta es desarrollada completa y correctamente, e **incorrecto**, cuando hay error en el proceso de solución o la respuesta no corresponde a lo que se pide.

Pregunta 2:

Un solo estudiante responde que Euler develó el misterio de los Puentes de Köenisberg.

1. Las ideas generales de la Topología surgen con las investigaciones de HiLberT; e inicialmente nació con el nombre de Teoría de Grafos. (1p)
   A) Galois - Geometría algebraica B) Pitágoras - Geometría proyectiva
   C) Hilbert - Teoría de Grafos D) Cantor - Análisis Situs

2. Uno de los siguientes matemáticos, resolvió el misterio de los puentes de Köenisberg:
   A) Euclides B) Platón C) Cantor D) Euler (1p)

3. La topología se define como el estudio de: (1p)
   A) Las funciones derivables.
   B) Las nociones de continuidad en sentido general.
   C) Las funciones integrables.
   D) Las funciones discontinuas raras.
   Explique su respuesta:

Pregunta 3:

Pese al desconocimiento respecto a los orígenes de la topología, el 50% de los estudiantes intuye la idea correcta acerca del objeto de estudio de esta disciplina matemática aunque pocos intentan una justificación.

1. Las ideas generales de la Topología surgen con las investigaciones de ________; e inicialmente nació con el nombre de ________ (1p)
   A) Galois - Geometría algebraica B) Pitágoras - Geometría proyectiva
   C) Hilbert - Teoría de Grafos D) Cantor - Análisis Situs

2. Uno de los siguientes matemáticos, resolvió el misterio de los puentes de Köenisberg:
   A) Euclides B) Platón C) Cantor D) Euler (1p)

3. La topología se define como el estudio de: (1p)
   A) Las funciones derivables.
   B) Las nociones de continuidad en sentido general.
   C) Las funciones integrables.
   D) Las funciones discontinuas raras.
   Explique su respuesta:
   Según entiendo el sentido de la topología es el estudiar el como una figura (triangulo) se puedo expresar de otra forma (circunferencia) a través de rotaciones, translación, etc)

Pregunta 4:

Los estudiantes casi en su totalidad desconocen las propiedades que deben verificar los espacios métricos. Solamente un alumno presenta el siguiente desarrollo:

4. ¿Será el par (IR, d) con d (x,y) = |x| + |y| un espacio métrico? $\begin{cases} d(x,y) \geq 0 \ldots (1) \\ d(x,y) = d(y,x) \ldots (2) \\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ldots (3) \end{cases}$ (2p)

SI ☒ NO ☐

v métrica

Justifique su respuesta:

Si porque: Do (1): $|x|+|y| \geq 0$, Do (2) $d(x,y) = d(y,x)$, Do (3), sea $z \in \mathbb{R}$, por la desigualdad triangular, si se cumple.

Como vemos, intenta verificar tres de las cuatro propiedades, que efectivamente son las que se cumplen, pero deja de lado la propiedad: $d(x,y)=0 \iff x=y$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ que no se cumple.

Pregunta 5:

Solamente dos alumnos reconocen que los intervalos semiabiertos en $\mathbb{R}$, no son vecindades abiertas ni cerradas, pero no dan explicación alguna. [71]

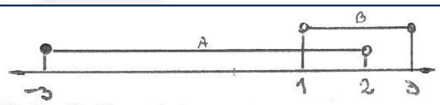
5. *En el espacio métrico (IR, d) con d (x,y) = |x - y|, los intervalos [a,b[y]a,b], son vecindades:* (2p)

A) Abiertas
B) Cerradas
~~C)~~ No son abiertas ni cerradas.
D) Son vecindades degeneradas.

Justifique su respuesta:

Pregunta 6:

La cuarta parte de estudiantes hallan correctamente la intersección y unión de dos intervalos semi-abiertos e identifican si son abiertos o cerrados.



6. En el espacio métrico (IR, d) con d (x,y) = |x - y|, sean A = [-3,2[, B =]1,3]; serán los conjuntos: A ∩ B y A ∪ B: (2p)

$A \cap B =]1,2[$

$A \cup B = [-3,3]$

A) Conjuntos abiertos
B) Conjuntos cerrados.
~~C)~~ Conjuntos abiertos y cerrados
D) Conjuntos cerrados y abiertos.

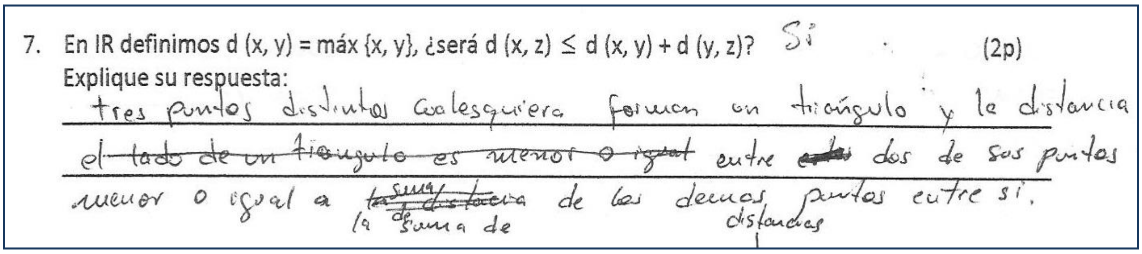
Justifique su respuesta:

Los conjuntos A∩B y A∪B son abiertos y cerrados respectivamente abiertos porque en A∩B no se toma los puntos "1", "2"; y cerrados porque se toma los puntos "-3" y "3".

[71] Para evitar errores generados por el uso de términos nuevos, decidimos sustituir la palabra "vecindades" por "conjuntos", ver Anexo N° 05,

Pregunta 7:

Solamente tres alumnos (19%) afirman que se cumple la desigualdad triangular, aunque no hacen referencia a la métrica dada. Justifican usando la distancia usual y la propiedad de los lados de un triángulo.

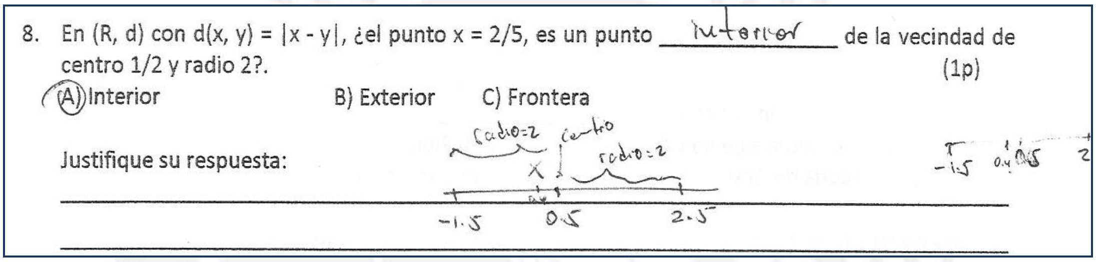

7. En IR definimos d (x, y) = máx {x, y}, ¿será d (x, z) ≤ d (x, y) + d (y, z)? Sí (2p)

Explique su respuesta:

tres puntos distintos cualesquiera forman un triángulo y la distancia ~~el lado de un triangulo es menor o igual~~ entre dos de sus puntos menor o igual a ~~la distancia~~ la suma de de las demas puntos entre si. distancias

Pregunta 8:

Solo dos alumnos reconocen y explican adecuadamente que el punto x = 2/5 es un punto interior de la vecindad de centro ½ y radio 2.

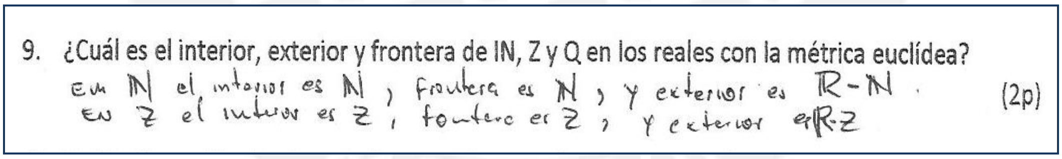

8. En (R, d) con d(x, y) = |x - y|, ¿el punto x = 2/5, es un punto Interior de la vecindad de centro 1/2 y radio 2?. (1p)

(A) Interior B) Exterior C) Frontera

Justifique su respuesta:

Pregunta 9: [72]

Un solo estudiante identifica con acierto el exterior y frontera de ℕ y ℤ, pero presenta error en la determinación del interior de dichos conjuntos.


9. ¿Cuál es el interior, exterior y frontera de IN, Z y Q en los reales con la métrica euclídea? (2p)

En N el interior es N, frontera es N, y exterior es R-N.
En Z el interior es Z, frontera es Z, y exterior es R-Z

Pregunta 10: [73]

Los estudiantes no identifican conceptos topológicos (como distancia, conjuntos abiertos, cerrados, interior, frontera, entre otros) en el currículo de Educación Secundaria.

3.4 ANÁLISIS DEL CAMPO DE RESTRICCIONES.

Como se indica en el planteamiento del problema, el presente estudio se lleva a cabo con los estudiantes que cursan el VIII Ciclo Académico en el Semestre 2011-I, de la Facultad

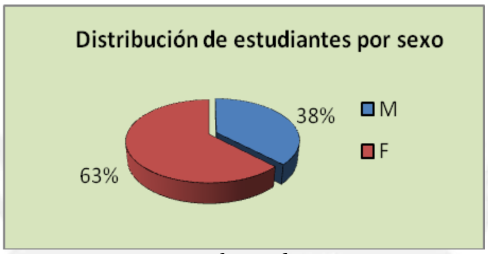
[72] Para facilitar la identificación se reformuló quedando como aparece en el Anexo N° 05.

[73] La pregunta se reformuló, ampliando el contexto.

de Matemática e Informática de la Universidad Nacional de Educación "Enrique Guzmán y Valle".

Para efectos del diseño de las Situaciones Didácticas describimos algunas características del grupo, incidiendo en el aspecto académico; información que fue recogida a través del Cuestionario N° 1[74] aplicada con anterioridad a la puesta en escena de la secuencia didáctica. El grupo estuvo conformado por 16 estudiantes (10 mujeres y 6 varones) que en su mayoría son jóvenes, solteros (88%) menores de 26 años (75%).

Gráfico Nº 01



Fuente: Propia, en base al Instrumento Nº 1.

Casi en su totalidad (94%) proceden de Instituciones Educativas Públicas, aproximadamente el 44% opina que su formación matemática en el nivel secundario fue bueno o muy bueno, mientras que el 56% restante piensa que fue regular o deficiente.

Gráfico Nº 02

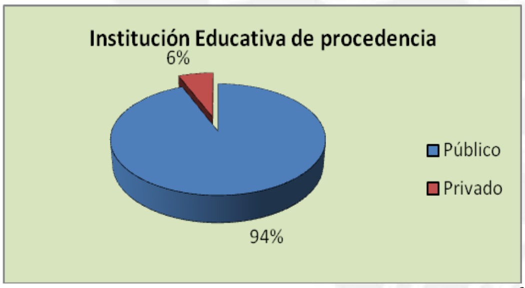
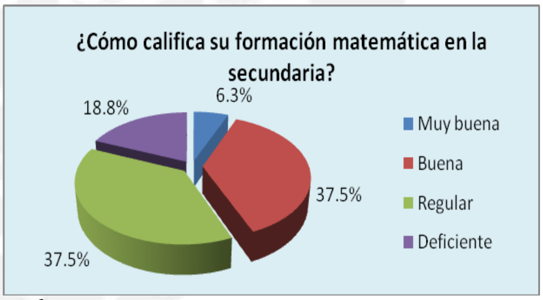


Gráfico Nº 03



Fuente: Propia, en base al Instrumento Nº 1.

Más de los dos tercios de los estudiantes (69%) ingresó a la Universidad por la Modalidad del Examen de Admisión Ordinario, el resto (aprox. 31%) tuvo un ingreso directo, ya sea por exoneración por haber ocupado los primeros puestos en la secundaria (12,5%), o en el Centro Preuniversitario de la Universidad (CEPREUNE) (18,8%).

[74] Anexo N° 06.

Gráfico Nº 04

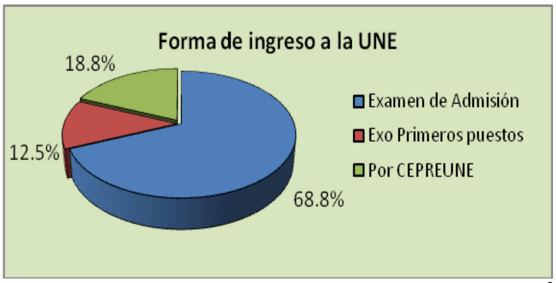
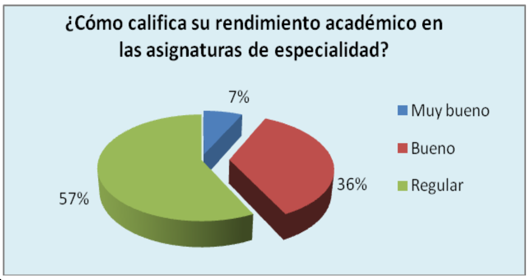


Gráfico Nº 05



Fuente: Propia, en base al Instrumento Nº 1.

Según se pudo verificar en las Actas de Evaluación del ciclo anterior, se puede afirmar que el rendimiento académico de los estudiantes es bueno, pues la mayoría (81%) aprobó todas las asignaturas y solo el 19% desaprobó una de ellas. Sin embargo esta situación difiere de la percepción que tienen los mismos alumnos acerca de su rendimiento en las asignaturas de especialidad, pues solo el 7% lo califica como muy bueno, el 36% como bueno y el 57% considera que su nivel es regular.

Gráfico Nº 06

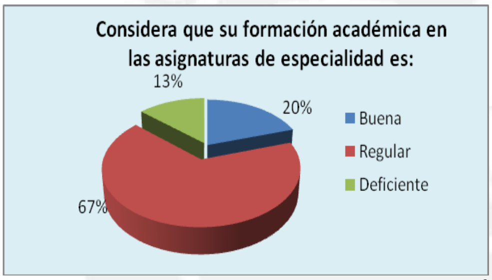


Gráfico Nº 07

Fuente: Propia, en base al Instrumento Nº 1.

La misma tendencia se observa respecto a la valoración de la formación académica en las asignaturas de especialidad que reciben, pues solo el 20% de los alumnos considera que es buena, mientras que el 80% restante dice que es regular o deficiente. Similar situación se observa en cuanto al nivel de motivación que tienen respecto al estudio de las asignaturas de especialidad, pues la mayoría (57%) manifiesta que tienen una regular o baja motivación, contra el 43% que manifiestan tener una buena o muy buena motivación.

Por otro lado, es alentador que la gran mayoría (87%) dedique alguna parte del día al estudio, pero de todas maneras es preocupante que el 13% no lo haga. Además, la mayoría (68%) estudia solo cuando tiene tarea o cuando tiene que rendir un examen.[75]

[75] Consideramos importante esta información por la necesidad de desarrollar las Actividades de Aplicación fundamentales para reforzar las Actividades desarrolladas en el aula.

Gráfico Nº 09

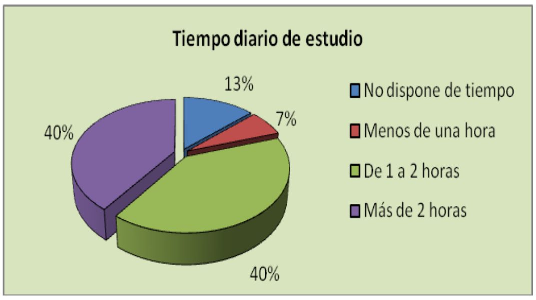
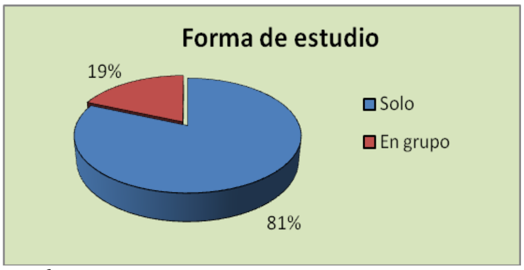


Gráfico Nº 10



Fuente: Propia, en base al Instrumento Nº 1

Respecto a las formas de estudio, la mayoría (81%) está acostumbrado a estudiar solo; solamente el 19% lo hace en grupos; aunque cuando necesitan apoyo, manifiestan que acuden en su mayoría a sus compañeros de aula (56%) y solo el 25% a sus profesores.

La mayoría de los estudiantes (56%) realiza consultas bibliográficas en la Biblioteca de la universidad y el 28% usa el internet; sin embargo el 64% opina que la bibliografía que consulta no cubre sus expectativas.

CAPITULO IV: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

En base al análisis preliminar (epistemológico, didáctico y cognitivo) realizado en el capítulo anterior, en el presente capítulo elaboramos la Secuencia Didáctica teniendo como referentes un conjunto de hipótesis, que en este caso son comportamientos observados que la mayoría de estudiantes muestra cuando aprende el concepto de métrica.

Asimismo definimos un conjunto de variables que son fundamentales en el logro de los propósitos planteados en el presente trabajo. Remarcando que en el contexto de la ingeniería didáctica, llamamos *variables* a los aspectos sobre los que el investigador decide actuar o controlar, distinguiendo las de nivel global o *macro-didácticas* de aquéllas de nivel local o *micro-didácticas.* Entre las primeras están los aspectos relacionados a la organización de los estudiantes, la forma de presentación de los recursos, la forma de abordar los pre-requisitos, entre otros; mientras que las *variables micro-didácticas* o simplemente *variables didácticas* se relacionan específicamente a los contenidos en el que se enfoca la secuencia didáctica y que supone cambio de estrategias de aprendizaje.

4.1 DETERMINACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

Las siguientes hipótesis se desprenden directamente del análisis cognitivo realizado en el capítulo anterior:

a. Los estudiantes no manejan un concepto adecuado de valor absoluto de números reales, solo calculan de manera mecánica sin poder realizar su interpretación geométrica.

b. Tienen dificultades en la interpretación de intervalos, muchas veces lo restringen únicamente a los números enteros.

c. La mayoría de estudiantes muestran dificultades al resolver inecuaciones con valor absoluto e interpretar geométricamente su conjunto solución.

d. Presentan serias dificultades al demostrar la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ provisto de la métrica usual; dificultad que se acrecienta en otros espacios métricos.

e. Algunos estudiantes logran comprender el concepto de distancia en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual, asimismo representan vecindades abiertas y cerradas en estos conjuntos solo con dichas métricas, pero muestran dificultades al trabajar con otras métricas.

f. Los estudiantes presentan deficiencias al representar vecindades abiertas, cerradas e incluso la esfera usando la métrica discreta.

g. Tienen dificultades al realizar las demostraciones de las propiedades de los espacios métricos, generalmente no justifican el procedimiento.

4.2 DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES

4.2.1 Variables macro-didácticas

Para llevar a cabo la parte experimental del presente estudio se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos generales:

- Los estudiantes estuvieron organizados en grupos de cuatro (04) integrantes, eligiendo internamente a un coordinador.

- Las situaciones didácticas se presentaron impresas y se distribuyeron a cada uno de los estudiantes al inicio de cada sesión.

- Los prerrequisitos se verificaron a través de la Prueba de Conocimientos Previos[76] lo que permitió realizar actividades de reforzamiento antes del inicio de la fase experimental, así como a través de estudios personales de cada alumno.

- En cuanto al nivel de tratamiento del tema, las actividades de aprendizaje se diseñaron a partir de situaciones cotidianas las que permitieron -acorde a la naturaleza de la asignatura- lograr la abstracción y rigor tanto en el manejo conceptual como procedimental, así como un nivel de comprensión suficiente para desarrollar un pensamiento hipotético-deductivo y argumentativo requerido.

4.2.2 Variables micro-didácticas

Las variables didácticas que identificamos en la presente secuencia didáctica corresponden tanto al campo algebraico como al geométrico.

---
[76] Anexo N° 02.

a. Variables asociadas al campo algebraico

- Tipo de registro: gráfico contextualizado, en el plano coordenado, verbal y algebraico.
- Tipo de métrica: de contexto real, euclidea, discreta, pitagórica, del máximo y de la suma.
- Conjunto de referencia: enteros positivos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.
- Clases de conjuntos: abiertos y cerrados.

b. Variables asociadas al campo geométrico

- Tipo de vecindad: abierta, cerrada y esfera.
- Tipo de gráfica: de contexto real, en la recta y en el plano coordenado.
- Centro de la vecindad: objeto real, origen de coordenadas y un punto arbitrario.

4.2.3 Identificación de las variables didácticas en las actividades de aprendizaje

Secuencia didáctica	Variables didácticas
Actividad N° 1: "Recorriendo caminos" (Distancia entre dos puntos en una situación de contexto real).	Tipo de registro: gráfico contextualizado. Tipo de métrica: de contexto real (distancia por cuadras). Conjunto de referencia: enteros positivos.
Actividad N° 2: Calculando distancias en la recta.	Tipo de registro: gráfico (recta coordenada). Tipo de métrica: euclidea. Conjunto de referencia: $\mathbb{R}$.
Actividad N° 3: Calculando distancias en el plano.	Tipo de registro: gráfico y algebraico. Tipo de métrica: pitagórica. Conjunto de referencia: $\mathbb{R}^2$.
Actividad N° 4: Otras métricas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.	Tipo de registro: algebraico. Tipo de métrica: discreta y del máximo Conjunto de referencia: $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Actividad N° 5: ¡Qué bonita vecindad…! (Vecindades en un contexto real).	Tipo de registro: gráfico contextualizado. Tipo de métrica: de contexto real (distancia por cuadras). Conjunto de referencia: enteros positivos. Tipo de vecindad: abierta, cerrada y esfera. Centro de la vecindad: ubicación de una persona (Brenda).
Actividad N° 6: Vecindades en la recta.	Tipo de registro: verbal matemático. Tipo de métrica: euclidea. Conjunto de referencia: $\mathbb{R}$. Tipo de vecindad: abierta, cerrada y esfera. Centro de vecindad: punto de origen (0).
Actividad N° 7: ¡El alcance del burrito…!!! (Vecindades en un contexto real).	Tipo de registro: gráfico y verbal. Tipo de métrica: pitagórica. Conjunto de referencia: $\mathbb{R}^2$. Tipo de vecindad: abierta, cerrada y esfera. Centro de vecindad: objeto real (estaca).
Actividad N° 8: Vecindades en $\mathbb{R}^2$**.**	Tipo de registro: gráfico y verbal. Tipo de métrica: pitagórica y del máximo. Conjunto de referencia: $\mathbb{R}^2$. Tipo de vecindad: abierta y cerrada. Centro de vecindad: un punto arbitrario (diferente de (0,0)).
Actividad N° 9: “Raras vecindades”	Tipo de registro: algebraico. Tipo de métrica: del máximo y de la suma. Conjunto de referencia: $\mathbb{R}^2$. Tipo de vecindad: cerrada. Centro de vecindad: origen de coordenadas, (0,0).
Actividad N° 10: “La vecindad del taxista”.	Tipo de registro: gráfico. Tipo de métrica: de la suma, pitagórica y del máximo. Conjunto de referencia: $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Tipo de vecindad: abierta. Centro de vecindad: un punto arbitrario (diferente de (0,0)).

4.3 DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

4.3.1 Perspectiva general

La secuencia didáctica que proponemos ha sido diseñada siguiendo el marco teórico de la TSD, el análisis preliminar y las consideraciones previas del análisis a priori. Está conformada por diez actividades, que se desarrollan en momentos de trabajo individual y grupal.

Las cuatro primeras corresponden a la métrica y sus propiedades; y las seis siguientes desarrollan el estudio de las vecindades. Las actividades iniciales son situaciones de contexto real que además de motivar la participación de los estudiantes son fundamentales para generar los conceptos matemáticos en juego, a partir de los cuales se generan nuevas situaciones al asignarle diferentes valores a las variables didácticas adoptadas en el presente estudio.

Las actividades propuestas siguiendo el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas, prevén que los estudiantes transiten por situaciones adidácticas de acción, formulación y validación; las que son complementadas con situaciones de devolución e institucionalización con intervención del docente.

4.3.2 Secuencia didáctica y comportamientos esperados

SECUENCIA DIDÁCTICA	DESCRIPCION DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
Actividad N° 01: **Recorriendo caminos**	▪ La actividad se plantea a través de un croquis de viviendas con el propósito de que los estudiantes en forma individual calculen distancias como se hace cotidianamente (en cuadras). De esta manera se pretende generar conflicto en los esquemas de los estudiantes que están restringidos a la aplicación de determinadas fórmulas, a la vez hacer visible la posibilidad de medir distancias de distintas maneras.	▪ Se espera que a partir del croquis los estudiantes trabajando en forma individual calculen distancias entre dos viviendas indicadas. ▪ Asimismo, al anotar dichas distancias en una tabla de valores se espera inicien la conceptualización de la distancia como una función. ▪ Se espera que trabajando en equipos y en base a sus conocimientos previos identifiquen el objeto matemático involucrado en la actividad, formulen su concepto en lenguaje usual y en base a las preguntas planteadas exploren algunas de sus propiedades. ▪ Es posible que algunos estudiantes en base a sus conocimientos intenten calcular las distancias usando alguna fórmula, por lo que será necesario aclarar que el contexto solo permite recorridos a través de las calles. (Devolución).
Actividad N° 02: **Calculando distancias en la recta.**	▪ El propósito de la actividad es favorecer que los estudiantes logren una conceptualización adecuada de distancia en la recta, que generalmente está ligado al cálculo. ▪ La actividad se inicia proponiendo una recta real donde se les pide calcular y comparar distancias dados dos puntos. Para lograr mayor comprensión se hacen variar los datos, es decir las coordenadas de los puntos y la distancia. ▪ La actividad grupal se plantea en forma verbal y requiere que los estudiantes expresen la distancia usando diversos registros (gráfico, usando valor	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en forma individual y en base a sus conocimientos previos de los números reales calculen distancias entre dos puntos en la recta sin mayor dificultad. ▪ Sin embargo es posible que en el caso de buscar la coordenada de un punto conociendo la coordenada de otro punto y la distancia entre ambos, den solo una coordenada (generalmente el valor positivo). Frente al cual el docente planteará preguntas similares para que los mismos estudiantes aclaren sus dudas. ▪ Se espera que trabajando en equipos logren interpretar geométrica y algebraicamente el concepto de distancia entre dos puntos en la recta. Asimismo en base a sus conocimientos previos logren expresar formalmente la métrica euclidea así como sus propiedades.

	absoluto, la simbología de intervalos, entre otros); con la finalidad de ayudar a la conceptualización de la distancia en la recta y la formalización de la métrica euclidea. ▪ Al finalizar la actividad y sobre las construcciones de los estudiantes se formulan las definiciones de métrica y espacio métrico.	▪ En base a lo observado en la Prueba de entrada es posible que los estudiantes muestren alguna dificultad en la verificación de la desigualdad triangular, por lo que se promoverá la aclaración entre los mismos estudiantes, formulando preguntas, así como proponiendo ejemplos y contraejemplos. (Devolución).
Actividad N° 03: **Calculando distancias en el plano.**	▪ La actividad se propone usando el registro gráfico. Se propone un plano coordenado relacionado a la Actividad 1 (croquis de viviendas), con la finalidad de que logren entender que existen diversas formas de calcular distancias entre dos puntos en el plano. ▪ Se les pide que en forma individual calculen distancias entre dos puntos en el plano usando sus coordenadas; y luego comparen dichas distancias con las encontradas en la Actividad 1. ▪ La actividad grupal está centrado en la formalización de la métrica (pitagórica) en $\mathbb{R}^2$, así como la formalización y verificación de sus propiedades.	▪ Aplicando sus conocimientos previos se espera que la mayoría de estudiantes hallen distancias entre dos puntos en el plano sin ninguna dificultad. Además, a través de las preguntas planteadas identifiquen algunas de sus propiedades. ▪ Se espera que los estudiantes, en base a las actividades anteriores y trabajando en equipos logren formular con rigor matemático tanto el concepto como las propiedades de la distancia en $\mathbb{R}^2$. ▪ Por experiencia se sabe que algunos estudiantes tienen dificultad para ubicar puntos en el plano así como en la aplicación del teorema de Pitágoras (métrica pitagórica), por lo que será necesario promover que en el trabajo grupal entre los mismos estudiantes aclaren y refuercen dichos conocimientos.

Actividad N° 04: **Otras métricas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.**	▪ La finalidad de la actividad es que los estudiantes logren una amplia comprensión de la métrica y sus propiedades. Por lo que dada una función no solo deben verificar sus propiedades, sino demostrarlas. ▪ Inicialmente se propone la métrica del máximo en $\mathbb{R}^2$ en forma algebraica, luego en el mismo registro se plantea la métrica discreta en $\mathbb{R}$. Finalmente se les pide proponer una métrica en $\mathbb{R}$ y otra en $\mathbb{R}^2$. ▪ Al concluir esta actividad y con la participación de los mismos estudiantes, se consolida el concepto y las propiedades de la métrica o función distancia. (institucionalización).	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en forma individual, antes de pasar a la demostración, se familiaricen con la métrica del máximo calculando distancias entre dos puntos en el plano con dicha métrica. ▪ Luego, trabajando en equipos deben demostrar que $\mathbb{R}^2$ provisto de la métrica del máximo es un espacio métrico. ▪ Del mismo modo deben probar que $(\mathbb{R}, d_2)$, donde d_2 es la métrica discreta, es un espacio métrico. ▪ En base a la investigación bibliográfica y la creatividad del grupo es posible que puedan plantear otro tipo de métricas tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{R}^2$. ▪ Es posible que los estudiantes muestren dificultad en la comprensión y el manejo de la métrica discreta, por lo que será necesario enfatizar el concepto de métrica. ▪ Si bien, ya están familiarizados con la desigualdad triangular a modo de comprobación o verificación, sin embargo es muy probable que muestren dificultad en su demostración, por lo que será necesario orientar a través de las propiedades de la desigualdad en $\mathbb{R}$. ▪ En general, frente a cualquier dificultad que muestren los estudiantes, el docente debe ayudar a que ellos mismos identifiquen y corrijan sus errores. Para ello puede realizar repreguntas, enfatizar conceptos y propiedades y mostrar ejemplos y contraejemplos, entre otras estrategias.

Actividad N° 05: **¡Qué bonita vecindad…!**	▪ La actividad se plantea a través de un croquis de viviendas (similar al propuesto en la Actividad 1) con el propósito de que los estudiantes construyan el concepto matemático de vecindad a partir del significado cotidiano del término.	▪ A partir de la situación de contexto real propuesta, se espera que los estudiantes en forma individual elaboren el concepto de vecindad con sus propias palabras identificando sus elementos fundamentales (centro y radio). ▪ Asimismo en base a las preguntas planteadas y a la variación que se hace de expresiones como: "vecinos que se encuentran a menos de 2m de distancia", "… a 2m o menos de distancia", … a 2m de distancia exactamente, se espera que logren diferenciar las vecindades abiertas, cerradas, y esferas. ▪ Luego en equipos se espera que mejoren sus conceptualizaciones.
Actividad N° 06: **Vecindades en la recta**	▪ Por la familiaridad que tienen los estudiantes con la recta real decidimos que luego de la situación contextualizada de la actividad anterior, y trabajando en equipos empiecen a formalizar el concepto matemático de distancia y sus propiedades en dicho entorno, expresando tanto en forma verbal, simbólica como gráfica. ▪ Por lo que la actividad se inicia proponiendo que representen en la recta tres conjuntos, con centro en el origen de la recta (punto 0) y radios: $r < 1$, $r \leq 2$ y $r = 3$, que generan en cada caso una vecindad abierta, una vecindad cerrada y una esfera. ▪ Se ofrece asimismo la notación simbólica de una vecindad abierta, en base al cual deben expresar simbólicamente una vecindad cerrada y una esfera.	▪ Se espera que a partir de las gráficas identifiquen las diferencias entre los tres conjuntos y las asocien a la variación que se hace de los signos de desigualdad e igualdad: $<$, $\leq$ e $=$. Asimismo deben establecer relaciones entre ellos. ▪ En base a la notación simbólica dada de vecindad abierta, se espera que expresen vecindades y esferas en $\mathbb{R}$ usando diversos registros. ▪ Se espera que dadas diversas expresiones algebraicas (en lenguaje conjuntista, usando la notación de intervalos, valor absoluto, igualdades y desigualdades) los estudiantes reconozcan vecindades y esferas, identificando su centro y su radio. ▪ Finalmente los estudiantes deben consolidar sus aprendizajes describiendo las características gráficas y expresando simbólicamente de manera general vecindades abiertas, cerradas y esfera. ▪ La intervención del docente se limita a aclarar las indicaciones o ítems que pudieran resultar poco comprensibles, y orientar que sean los mismos alumnos que superen sus dificultades mediante la interacción entre ellos mismos.

Actividad N° 07: **El alcance del burrito…!**	▪ La situación contextualizada propuesta (el alcance de un animal atado a una estaca) tiene semejanza con la gráfica de vecindad en $\mathbb{R}^2$ con la métrica pitagórica, en el que se visibilizan sus elementos (la estaca como centro, y la longitud de la cuerda como radio). ▪ Por lo que a partir de ella se consolida el concepto de vecindad construida en $\mathbb{R}$ y sirve de base para conceptualizar la vecindad en $\mathbb{R}^2$.	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en forma individual, a partir de la situación, sus experiencias vivenciales y respondiendo a las preguntas formuladas afiancen el concepto de vecindad, identificando sus elementos. ▪ Asimismo se espera que establezcan diversas relaciones entre las vecindades abiertas, cerradas y la esfera, en el contexto propuesto, y a partir de ellas elaboren sus conceptualizaciones tanto en forma verbal como simbólica. ▪ Luego, trabajando en equipos se espera que formulen otros ejemplos de vecindades relacionados a su contexto real. ▪ En esta actividad se espera que la intervención del docente sea mínima, pues se sabe que en situaciones contextualizadas los estudiantes suelen tener mayor motivación y por consecuencia mayor comprensión.
Actividad N° 08: **Vecindades en $\mathbb{R}^2$**	▪ El propósito de la actividad es que los estudiantes identifiquen y diferencien diversas métricas en $\mathbb{R}^2$. Para ello, inicialmente, conectando con la actividad anterior y considerando sus conocimientos previos se plantea que representen en el plano una vecindad abierta con la métrica pitagórica, dándoles como datos el centro (distinto del origen de coordenadas) y el radio. A partir del cual se les pide generar la respectiva vecindad cerrada, para luego compararlas describiendo sus características. ▪ Para el momento del trabajo grupal se les pide graficar dos esferas, usando la métrica pitagórica en un caso, y la métrica del máximo en el otro; para el que se les da el mismo centro y el mismo radio.	▪ Se espera que los estudiantes afiancen sus conocimientos sobre vecindad y el manejo de la métrica pitagórica en $\mathbb{R}^2$, identificando la forma circular de dichas vecindades. ▪ Asimismo dada una vecindad, abierta, cerrada o la esfera deben hacer variar convenientemente los signos $<$, $\leq$ e $=$ para generar cada tipo de vecindad o esfera, estableciendo relaciones (de inclusión u otra). ▪ En el trabajo grupal, se espera que los estudiantes apliquen la métrica del máximo definida en la Actividad N° 4, representen la esfera en el plano, y establezcan relaciones con la esfera obtenida con la métrica pitagórica, con el mismo centro y el mismo radio. ▪ En algunos casos los estudiantes no logran graficar adecuadamente vecindades en $\mathbb{R}^2$ con la métrica del máximo por lo que el docente mediante preguntas y la revisión de la definición de la misma, debe lograr

	▪ Todos los ítems requieren que los estudiantes expliquen, justifiquen o argumenten sus respuestas o resultados, con la finalidad de asegurarnos la comprensión de los conceptos.	que los mismos estudiantes superen sus dificultades.
Actividad N° 09: **Raras vecindades.**	▪ La actividad se plantea como un trabajo grupal. Se proponen las expresiones simbólicas de dos vecindades con el mismo centro y el mismo radio, una con la métrica del máximo y la otra con la métrica de la suma; para que los estudiantes las grafiquen y establezcan relaciones entre dichas vecindades. ▪ Se pretende que los estudiantes tengan la flexibilidad mental para entender que las formas de las vecindades pueden ser diversas (no solo circulares) y que solo dependen de las funciones que las definen y del conjunto de referencia.	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en equipos y en base a las actividades anteriores grafiquen en el plano, las vecindades de acuerdo a las definiciones algebraicas de la métrica del máximo y la métrica de la suma, estableciendo relaciones entre ellas. ▪ Además se espera que realicen operaciones (unión, intersección, diferencia, etc.) con dichas vecindades determinando si los nuevos conjuntos obtenidos son a su vez vecindades o esferas. ▪ Generalmente los estudiantes tienen dificultades para expresar algebraicamente la unión, intersección o diferencia de vecindades. Por lo que el docente a través de nuevas repreguntas y ejemplos debe encaminarlos para que los mismos estudiantes logren superar sus dificultades.
Actividad N° 10: **La vecindad del taxista.**	▪ Esta última actividad se plantea con la intención de que los estudiantes ampliando las vecindades en el plano, infieran las características de las vecindades en $\mathbb{R}^3$, con las diversas métricas. ▪ Se inicia presentando el gráfico de la vecindad abierta con la métrica de la suma cuyo centro ((0,1) y radio (r = 3) deben hallarlos antes de identificar el tipo de vecindad. ▪ Luego se proponen en forma algebraica vecindades y esferas en $\mathbb{R}^3$, con diversas métricas, que los estudiantes deben representar gráficamente, y	▪ Es posible que los estudiantes a partir de la observación de la gráfica identifiquen fácilmente el centro, y con alguna dificultad el radio, por lo que será necesario apoyar a través de repreguntas, o sugerir revisar la definición de la métrica de la suma. ▪ Además por las situaciones similares resueltas en las actividades anteriores es posible que formulen algebraicamente la vecindad e identifiquen que se trata de una vecindad abierta. ▪ Por otro lado, trabajando en grupos y en base a las gráficas que ya conocen en $\mathbb{R}^2$, es posible que logren graficar las vecindades en $\mathbb{R}^3$ dadas algebraicamente, o conociendo el centro, el radio y la métrica. En caso contrario, se orientará a revisar las definiciones de cada una de las métricas y la ubicación de puntos en $\mathbb{R}^3$.

	verificar si son vecindades abiertas, cerradas o esferas.	▪ Se espera que los estudiantes por simple inspección identifiquen vecindades en $\mathbb{R}^2$, tanto en el registro simbólico como gráfico. ▪ Además esperamos que los estudiantes infieran las formas de las vecindades en $\mathbb{R}^3$, con los tres tipos de métricas (pitagórica, del máximo y de la suma). ▪ Como última actividad se espera que los estudiantes, expliquen sus respuestas argumentando con coherencia y rigor matemático, usando de manera apropiada los conceptos matemáticos construidos. Asimismo den ejemplos y contraejemplos sencillos sobre vecindades y esferas. ▪ A partir de las construcciones de los estudiantes el docente ayudará a consolidar los conceptos de vecindades abiertas, cerradas, y esferas, y su representación en los diferentes registros y espacios métricos.

CAPITULO V: FASE EXPERIMENTAL

La parte experimental del presente trabajo consiste en la aplicación de la Secuencia Didáctica diseñada, y el recojo y registro de información sobre el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas; señalando sus logros, sus dificultades, sus aciertos y errores, así como sus actitudes frente a cada una de las situaciones presentadas.

5.1 PUESTA EN ESCENA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Fig. 21

La fase experimental del presente estudio se llevó a cabo en cuatro sesiones de seis horas de 45 minutos cada una, desde el martes 3 de mayo al martes 17 de junio del 2011 de acuerdo al horario de la asignatura.

Fecha	Actividad de aprendizaje	Hora
Martes 03/05/2011	Reforzamiento de conocimientos previos.	8.00 am – 8.45 am
	Actividad N° 1: “Recorriendo caminos”	8.45 am – 11 am
	Actividad N° 2: Calculando distancias en la recta.	11.45 am – 2pm.
Viernes 06/05/2011	Actividad N° 3: Calculando distancias en el plano.	8.45 am – 11 am
	Actividad N° 4: Otras métricas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.	11.45 am – 2 pm
Martes 10/05/2011	Actividad N° 5: ¡Qué bonita vecindad…!	8.45 am – 11 am
	Actividad N° 6: Vecindades en la recta.	11.45 am – 2 pm
Viernes 13/06/2011	Actividad N° 7: ¡El alcance del burrito…!!!	8.45 am – 11am
	Actividad N° 8: Vecindades en $\mathbb{R}^2$.	11.45 am – 2 pm
Martes 17/06/2011	Actividad N° 9: “Raras vecindades”-	8.45 am – 11 am
	Actividad N° 10: “La vecindad del taxista”.	11.45 am – 2 pm

Tabla 05

Actividad de reforzamiento de conocimientos previos

Antes de iniciar el desarrollo de las actividades, de acuerdo a los resultados de la Prueba de conocimientos previos, se programó y desarrolló actividades de reforzamiento, incidiendo en los ítems donde los estudiantes presentaban mayores deficiencias. Dicha actividad la realizamos en un tiempo de una hora académica, antes del inicio de la primera actividad.

Con el propósito de recoger la mayor y mejor información posible de la interacción de los estudiantes con las situaciones planteadas, que servirán de base para el análisis del logro de los objetivos así como para la validación de las hipótesis, usamos una Ficha de Observación[93] de actividades, la filmación de cada una de las sesiones y tomas fotográficas.

Esta información se complementó con la apreciación personal y grupal de los propios estudiantes realizada al término de cada Sesión y recogida a través de las Fichas de Autoevaluación y Coevaluación[94].

Igualmente importantes fueron los Informes Grupales presentados al término de cada sesión así como los papelógrafos de las exposiciones grupales, cuya revisión diaria nos permitió lograr una mejor comprensión del avance y las dificultades de los estudiantes, en base a los cuales se realizaron los reajustes correspondientes en las siguientes actividades.

En base a la información recogida a través de los instrumentos mencionados, presentamos a continuación el informe del proceso de aplicación de las actividades centrado nuestra atención en las hipótesis planteadas y los comportamientos esperados.

Actividad Nº 01: Recorriendo caminos

La actividad tiene la intención de que los estudiantes en forma individual calculen distancias como se hace cotidianamente (en cuadras). De esta manera se pretende generar conflicto en los esquemas de los estudiantes que están restringidos a la aplicación de determinadas fórmulas.

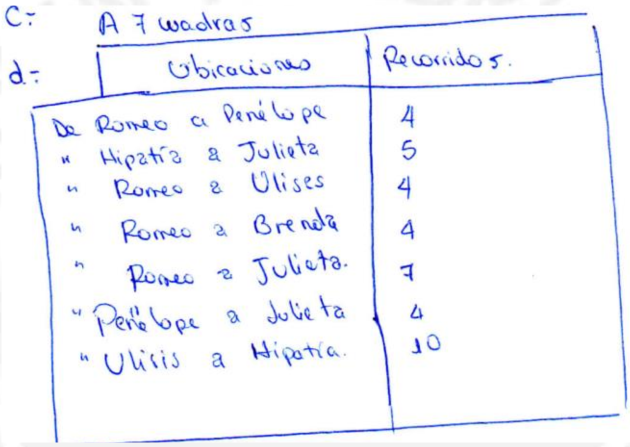
La actividad se desarrolló el día martes 03 de mayo de 2011, contando con la participación de 15 estudiantes, inmediatamente después de realizar el reforzamiento de los conocimientos previos. Se inicia dando las pautas generales sobre la forma del desarrollo de las sesiones, enfatizando en su responsabilidad tanto individual como en grupo, en el desarrollo de las actividades. Indicando asimismo el rol del docente (contrato didáctico).

---

[93] Ver Anexo Nº 09.
[94] Ver Anexo Nº 10 y 11.

Luego, se entregó el material impreso de la Actividad a cada estudiante para que en forma individual y en base a sus experiencias previas resolvieran las preguntas planteadas (fase de acción). A continuación detallamos los aspectos más relevantes del desarrollo de la actividad.

Inicialmente muchos estudiantes se sorprenden al ver el tipo de actividad en un curso de topología, pero luego desarrollan con entusiasmo. La mayoría calcula correctamente las distancias de una vivienda a otra, trazando los recorridos en el mismo gráfico. De inmediato determinan que entre dos viviendas “todos los caminos son iguales” y que “no hay distancia más corta ni más larga”. Aunque al inicio, tres alumnos dan más de una respuesta porque no consideraron las condiciones dadas, es decir el sentido de los recorridos. Entonces se les indica tener en cuenta dichas condiciones (devolución). Posteriormente al completar la tabla casi todos visualizan que se trata de una función.


c: A 7 cuadras

d:

Ubicaciones	Recorridos.
De Romeo a Penélope	4
" Hipatía a Julieta	5
" Romeo a Ulises	4
" Romeo a Brenda	4
" Romeo a Julieta.	7
" Penélope a Julieta	4
" Ulises a Hipatía.	10

Luego, se organizan en grupos de trabajo (3 grupos de 4, y uno de 3) con la finalidad de discutir y consensuar sus respuestas (formulación). En el planteamiento de sus respuestas se observan tres niveles diferenciados tanto en el uso del lenguaje como en el nivel de argumentación; unos hacen uso de un lenguaje coloquial, explicando a través de ejemplos sencillos y usando principalmente el gráfico de la actividad; un segundo grupo muestra intentos de formalización, (usan algunas definiciones de distancia pero con ciertas imprecisiones); mientras que un tercer grupo usa un lenguaje matemático formal y ofrece explicaciones mucho más elaboradas, llegando inclusive a deducir algunas propiedades de la función distancia.

Fig. 22

Llama la atención que pese a que no se da ninguna medida de las cuadras, dos grupos asumen que cada cuadra mide 100m y afirman por ejemplo que la distancia mínima y máxima entre Romeo y Julieta es de 700 metros, expresando simbólicamente:

mín d(R,J) = 700m = d(R,J)

máx d(R,J) = 700m = d(R,J)

$\therefore$ *mín d(R,J) = máx d(R,J) = 700m = d(R,J)*

Y escriben: "se concluye que todas las distancias de R a J son iguales.

Asimismo, todos los grupos afirman que por las restricciones del problema no hay camino en línea recta que conduzca de la casa de Romeo a la casa de Julieta; pero sin esta condición, dicen que sí se puede desplazar en diagonal.[95]

En cuanto al ítem (d), todos concluyen que no existe distancia negativa, y que la distancia de un punto a otro es igual a la distancia del segundo al primero. Así, un grupo dice "***no se recorren distancias negativas***", y escriben ***d(R, J)*** $\geq$ ***0;*** otro grupo afirma "la distancia de un punto a otro, siempre será positivo, es decir: ***d(x, y)*** $\geq$ ***0".***

Respecto al camino de retorno (de la casa de Julieta a la casa de Romeo), expresan correctamente que "se trata de la misma distancia, aunque en **diferentes sentidos**", y escriben: ***d(R, J) = d(J, R).*** De igual manera, otro grupo dice "la distancia del camino de retorno siempre será la misma", es decir que, "se puede regresar por cualquier camino"; además agregan que "la ***dirección*** del camino de vuelta es el opuesto de la dirección del camino de ida", incurriendo en un error conceptual[96].

Respecto al ítem (e), concluyen que todos los caminos que conducen de la casa de Romeo a la de Julieta son iguales, pase o no por la casa de Brenda; lo que simbólicamente expresan como:

$$d\overline{RJ} = d\overline{RB} + d\overline{BJ} \quad \ldots^{97} \qquad \text{o,} \quad d(R,J) = d(R,B) + d(B,J)$$

Aquí observamos error de notación, pues escriben $d\overline{RJ}$ en lugar de $d(R,J)$.

En el ítem (f), en el que se les pide plantear una situación donde la distancia sea 0 (cero), dan las siguientes respuestas:

- "Cuando Romeo y Julieta vivan en una misma manzana, y dentro de la manzana uno vive piso sobre piso (R: 1er piso y Julieta 2°)".

[95] Lo que demuestra una descontextualización, pues aunque no consideremos las restricciones no se podría hacer un desplazamiento en diagonal porque solo se puede caminar por las calles.

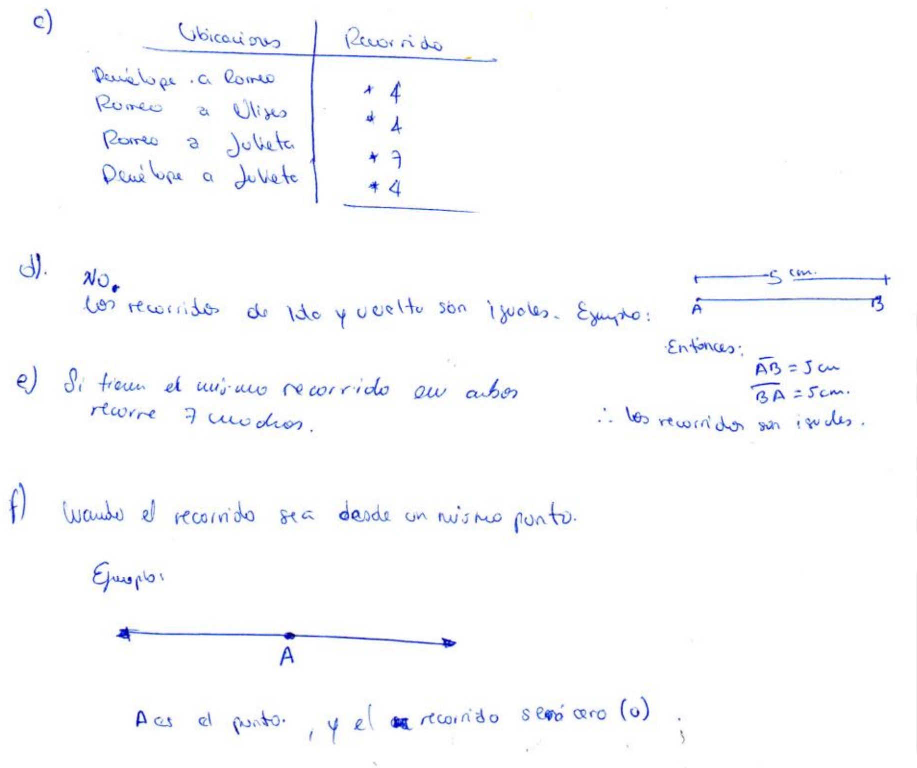
[96] Usan "dirección" en lugar de "sentido".

[97] Es la notación que usan los estudiantes; pese a que no es correcta, se entiende la idea que quieren expresar, y sirvió para reflexionar sobre la importancia de usar correctamente el lenguaje matemático.

- “Cuando Romeo no haga ningún recorrido”,
- “Cuando R y J vivan juntos”.
- “La distancia de Romeo a Romeo es 0, ya que el punto de inicio es el mismo punto final. Por lo tanto, la distancia de un punto ***x*** a un punto ***y*** es igual a 0, si el punto ***x*** es igual al punto ***y”;*** y escriben simbólicamente:

$$d(x,y)=0 \ <> \ x=y \qquad \text{o} \qquad d(R,J)=0 \ <> \ R=J$$

A continuación adjuntamos las respuestas a los diferentes ítems de un grupo de estudiantes:



Conclusión:

Como se observa, a partir de la situación propuesta y las preguntas planteadas, los estudiantes logran visualizar la distancia como una función y explorar sus propiedades. Tres de los cuatro grupos intentan formalizaciones simbólicas, aunque solo uno logra hacerlo correctamente.

Actividad Nº 02: Calculando distancias en la recta.

Luego de generar el concepto y las propiedades de la función distancia en una situación contextualizada, y considerando la familiaridad que tienen los estudiantes con la recta real, se pretende favorecer una adecuada conceptualización de distancia en la recta, que generalmente está ligado al cálculo.

Los estudiantes trabajando en forma individual y aplicando sus conocimientos sobre la recta de los números reales (fase de acción), calculan las distancias entre dos puntos dados (cuyas coordenadas se deducen del gráfico), como la diferencia de dichas coordenadas, aunque la mayoría resta la coordenada del punto que está a la derecha menos la coordenada del punto de la izquierda, hay tres alumnas que restan al revés, obteniendo resultados negativos y deduciendo conclusiones incorrectas. Solo cuatro alumnos usan el valor absoluto, calculan correctamente y formulan conclusiones válidas.

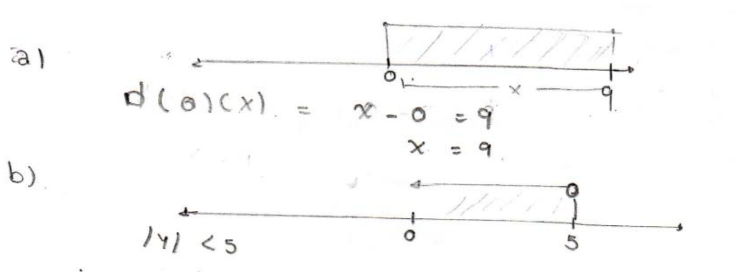
Por ejemplo, en el ítem (c), aplicando el mismo procedimiento (diferencia de coordenadas), donde conociendo que "la distancia entre el punto P y 4 es 20", la mayoría de estudiantes da como respuesta, 24; solo los cuatro alumnos que usan el valor absoluto calculan las dos coordenadas posibles (-16 y 24). Encontramos asimismo que una alumna habiendo planteado "P – 4 = 20", concluye que P = 16.

En cuanto al ítem (d) donde se pide comparar distancias entre dos puntos del gráfico, la mayoría responde correctamente que la distancia de A(-3) a C(5) es mayor que la distancia de D(-4) a B(3). Solo las tres alumnas que restan al revés obtienen resultados negativos y llegan a establecer una relación incorrecta.

En cuanto al ítem (h), solamente los mismos estudiantes que usan el valor absoluto expresan con sus propias palabras correctamente la forma de calcular distancias entre dos puntos de la recta. Los demás expresan lo que en la práctica hacen. Las alumnas que obtienen distancias negativas no logran a formular.

Comparando sus resultados y discutiendo con sus compañeros mejoran sus respuestas a los ítems desarrollados en forma individual. Aquí los estudiantes más avanzados explican a sus compañeros la forma de calcular distancias usando el valor absoluto. Aún así hay un grupo de estudiantes que muestra dificultades y se hace necesario aclarar a través de ejemplos en la misma recta e inclusive usando situaciones de contexto real.

Respecto a los ítems planteados para el momento del trabajo grupal, dos de los cuatro grupos, representan los ítems (a) y (b) usando el valor absoluto y también lo representan en la recta correctamente. Sin embargo, los otros dos grupos en el ítem (a) solo escriben d(0, x) = 9 y obtienen que x = 9, representando en la gráfica solo el segmento del 0 a 9. En cuanto al ítem (b), de igual manera representan el intervalo abierto $]-\infty,5[$, como se puede ver en la siguiente figura:

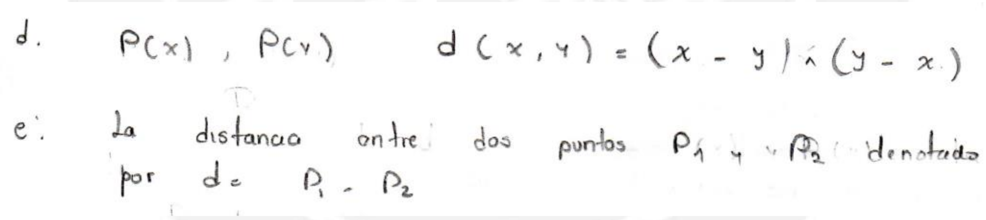


Cabe mencionar que casi todos muestran dificultad para representar la expresión “la distancia entre A y -2 es por lo menos 4”; analizan una y otra vez escribiendo los signos <, >, $\leq$ y $\geq$; por lo que se les propone expresiones equivalentes y otras, de sentido, para ayudarles a comprender el significado de cada uno de los signos de desigualdad. (devolución).

De igual forma, respecto al ítem (d), dos grupos expresan la distancia entre dos puntos de la recta como el valor absoluto de la diferencia de dichos puntos. Es decir:

$$d(x,y)=|x-y|$$

Pero un grupo dice que la distancia entre dos puntos es la diferencia de sus coordenadas, mientras que otro grupo propone:



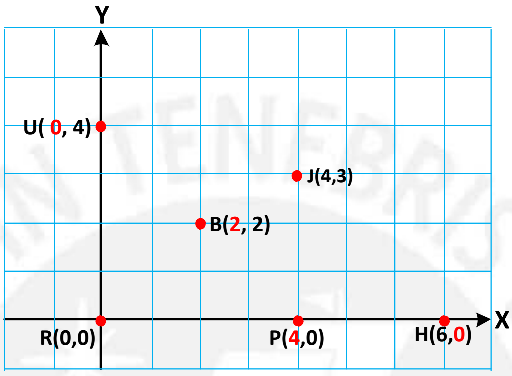
Finalmente, por grupos presentan sus respuestas y conclusiones al aula (unos usando la pizarra y otros en papelógrafos). Luego de analizar cada propuesta e intercambiar opiniones los mismos estudiantes logran consolidar el concepto de distancia como una función, sus propiedades, y la formalización de la métrica euclidea en $\mathbb{R}$.

Conclusión:

A pesar que el tema no es nuevo para los estudiantes, algunos estudiantes éstos muestran serios errores de cálculo, llegando inclusive a proponer resultados negativos, lo que evidencia que no tienen claro el concepto de distancia en la recta. Pues a pesar que en la primera actividad dicen que no hay distancia negativa, aquí circunscritos al proceso de cálculo mecánico no perciben su error. Por otro lado, es importante señalar que hay alumnos que demuestran conocimientos suficientes respecto al tema, por lo que el trabajo en equipos resulta muy útil para ayudar a superar las deficiencias encontradas.

Actividad Nº 03: Calculando distancias en el plano.

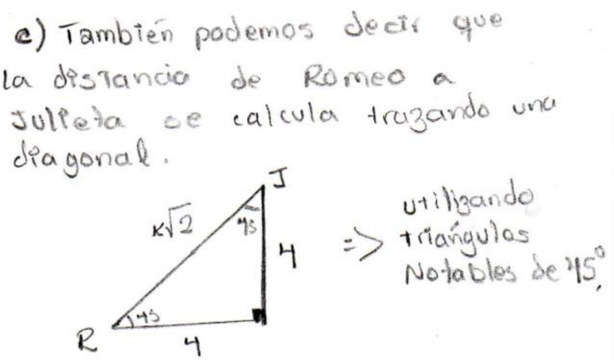
Luego de generar el concepto y las propiedades de la métrica en una situación contextualizada, y luego de institucionalizar la métrica euclidea en la recta real, en esta actividad se traslada la situación planteada de la primera actividad al plano coordenado, tal como se aprecia:



En primer lugar todos completan correctamente las coordenadas de los puntos U, B, P y H. En el ítem (a), trasladando el lenguaje del gráfico, la mayoría dice que “Hipatía se encuentra ubicada a 6 *cuadras* de distancia de Romeo”, sin realizar operación alguna; otros, en cambio escriben: $d\overline{RH} = d\overline{HR} = 6$ evidenciando la propiedad de simetría. Solo tres estudiantes calculan dicha distancia aplicando la fórmula pitagórica.

En el ítem (b), la mayoría responde que la distancia entre Romeo y Julieta, sí se puede calcular por conteo de desplazamientos horizontales y verticales, solo tres estudiantes propone que “como los puntos tienen coordenadas, ya no es posible calcular dicha distancia solo por conteo”. Al pedirles otra forma de calcular dicha distancia (ítem (c)), la mayoría propone la fórmula pitagórica[98]; aunque hay otros que dicen “también podemos decir que la distancia de Romeo a Julieta se calcula trazando la diagonal, utilizando triángulos notables de 45°”:

[98] Es probable que muchos estudiantes conocen y recuerdan la fórmula pitagórica, pero también algunos pueden haber visto la propuesta en el ítem(a) del trabajo grupal, por lo que se decidió modificar dicho ítem.



A pesar que en el gráfico muestra error en cuanto al punto de ubicación de Julieta (4,4), la misma alumna al aplicar la fórmula pitagórica, toma correctamente las coordenadas de J, es decir (4, 3) y no (4, 4) como quedaba implícita en la gráfica. Lo mismo realizan los demás, aplicando correctamente la fórmula pitagórica calculan que la distancia entre Romeo y Julieta es 5. Concluyendo que, “de R a H y de H a R existe la misma distancia”. Además dicen que “no coincide con la distancia hallada en la parte (a), porque son diferentes formas”.

En el trabajo grupal consolidan estos resultados, mejoran las notaciones usadas y en base a las preguntas refuerzan la verificación de las propiedades. Los estudiantes trabajando en equipos, no muestran mayores dificultades, y evidencian coincidencias en sus respuestas.

Por ejemplo, el Grupo 4 destaca por el lenguaje formal que usa, pues respecto al ítem (b) presentan lo siguiente:

$$d(\overline{RH}) = \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2} = |6| = 6$$

$$d(\overline{HR}) = \sqrt{(0-0)^2 + (6-0)^2} = |6| = 6$$

$$\therefore \quad d(\overline{RH}) = d(\overline{HR})$$

Luego, generalizan:

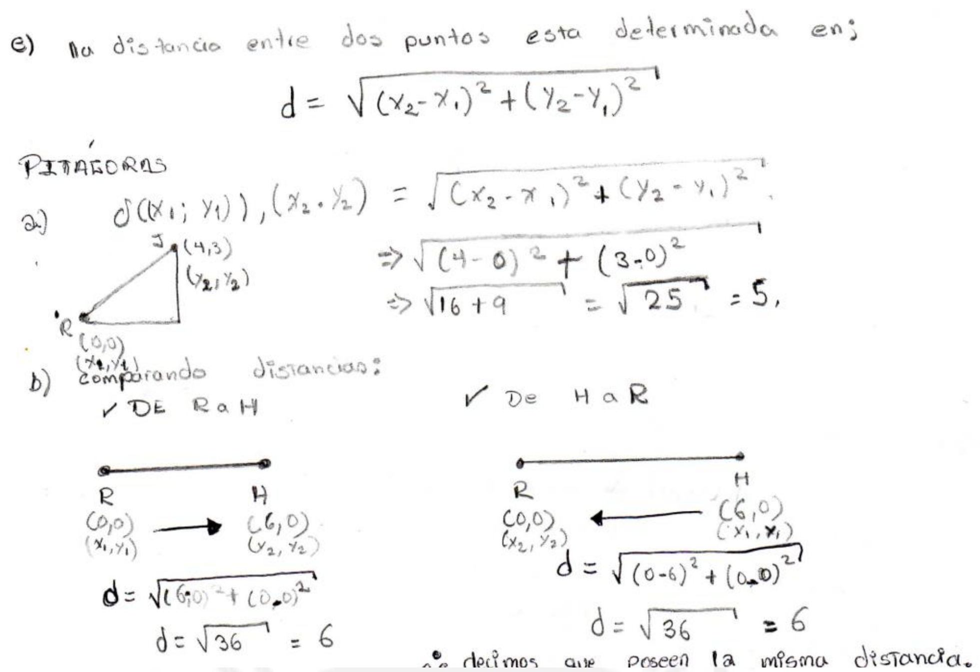
$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(x-a)^2 + (a-a)^2} = |x-a|$$

$$d(\overline{BA}) = \sqrt{(x-x)^2 + (x-a)^2} = |x-a|$$

$$\therefore \quad d(\overline{BJ}) = d(\overline{PJ})$$

Donde se supone que toman A(a, a) y B(x, a).

A continuación se observa que el grupo 3 resuelve las preguntas aplicando la métrica pitagórica:


e) la distancia entre dos puntos esta determinada en:

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

PITÁGORAS

a) $d((x_1; y_1)),(x_2 . y_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

J (4,3) (y_2, y_2)

R (0,0) (x_1, y_1)

$\Rightarrow \sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

b) comparando distancias:

✓ DE R a H

R (0,0) (x_1, y_1) → H (6,0) (x_2, y_2)

$d = \sqrt{(6-0)^2+(0-0)^2}$

$d = \sqrt{36} = 6$

✓ De H a R

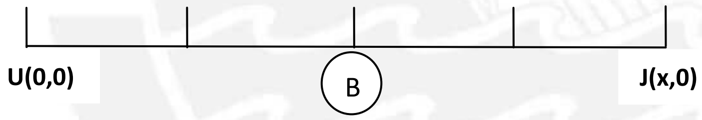
R (0,0) (x_2, y_2) ← H (6,0) (x_1, x_1)

$d = \sqrt{(0-6)^2+(0-0)^2}$

$d = \sqrt{36} = 6$

∴ decimos que poseen la misma distancia.

En cuanto al ítem (d.i), para que se cumpla que: d(R, J) = d(R, B) + d(B, J), la mayoría de los grupos propone que Brenda debe ubicarse en el punto medio del segmento (horizontal) que une las casas de Ulises y Julieta, representando gráficamente de la siguiente manera:



B: punto medio

$B\left(\frac{x}{2},0\right)$

Como se observa, cambian la posición de Julieta y ubican sobre el eje horizontal, lo cual no se ajusta a los datos de la situación propuesta.

La respuesta del Grupo 4 es más general, pues sostienen que "puede ubicarse en cualquier punto de dicho segmento", y argumentan de la siguiente manera:[99]

Tiene que cumplirse que: $B \in \overline{UJ}$

Sean: R(0;0), B(a;0) y J(x;0).

$$d(\overline{RB}) = \sqrt{(0-a)^2+(0-0)^2} = a$$

$$d(\overline{BJ}) = \sqrt{(a-x)^2+(0-0)^2} = |a-x| = x-a$$

$$d(\overline{RJ}) = \sqrt{(0-x)^2+(0-0)^2} = x$$

$x > a$

$0 > a - x$

[99] Aunque como se observa persisten errores de notación.

$$\therefore \quad a+(x-a)=x$$
$$d(R;B)+d(B;J)=d(R;J)$$

Pese al avance que muestra este grupo, también asumen que Julieta está ubicada en el eje horizontal, situación que se corrige con la observación del docente.

En cuanto al ítem (d.ii), es decir para que se cumpla la desigualdad $d(R,J)<d(R,B)+d(B,J)$, todos coinciden que Brenda no debe ubicarse en el segmento que une a Ulises y Julieta, lo que simbólicamente representan $B\notin\overline{UJ}$, tal como se esperaba.

Respecto al ítem (e) sobre el concepto de distancia y sus propiedades de los diferentes grupos, tenemos:

El Grupo 1 usando los elementos de la situación contextualizada propone:

Sea $E=\{R,P,U,J\}$

La distancia es toda función de E x E en ℝ, que satisface las siguientes propiedades:

1) $d(R,J)\geq 0$

2) $d(R,J)=0 \Leftrightarrow R=J$

3) $d(R,J)=d(J,R)$

4) $d(R,J)\leq d(R,L)+d(L;J)$

El Grupo 2, textualmente dice:

"Es una correspondencia $\div$ el espacio E y los números reales";

$$d:E\rightarrow R$$
$$(x,y)\mapsto d(x,y)$$

Que cumple con las siguientes propiedades:

i) $d(x,y)\geq 0\ldots$la distancia siempre es positiva.

ii) Si $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ si el punto de partida y el de llegada son los mismos la distancia es 0.

iii) La $d(x,y)=d(y,x),\forall x,y\in E$ (la distancia de un punto a otro es el mismo que la distancia de regreso).[100]

iv) $d(x,y)\leq d(x,y)+d(y;z);\forall x,y,z\in E$

[100] Son expresiones que usan los estudiantes, si bien no es muy formal, se entiende lo que quieren decir.

Aquí observamos un error en la definición de distancia, puesto que consideran como conjunto de partida el espacio E, en lugar del producto cartesiano E x E; además las expresiones verbales que usan tampoco son muy adecuadas (distancia de regreso); además observamos que en (iv) en lugar de d(x, z) han escrito d(x, y).

Todas estas limitaciones fueron superadas en el plenario (fase de validación) con las observaciones que hicieron sus compañeros y el docente.

El Grupo 3, por su parte dice: "entendemos por distancia a la aplicación de M x M → ℝ.

d: M x M → ℝ

x y → d(x, y) …[101]

Cumpliéndose las siguientes propiedades:

1) $d(x,y) \geq 0; \forall x, y \in M.$

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x,y) = d(y,x)$

4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y;z)$

Por último, el Grupo 4 da la siguiente definición:

"Sea E ≠ ∅, una métrica o función distancia, es toda función "d" de E x E en ℝ que satisface los siguientes axiomas:

i) $d(x,y) \geq 0; \forall x, y \in E.$

ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in E.$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y;z); \forall x, y, z \in E$

Además, usando el mismo gráfico verifican algunas propiedades señaladas, destacando las siguientes conclusiones:

- Como $d(\overline{RU}) = |x| \geq 0$

  Entonces la distancia entre dos puntos será mayor o igual que 0: $d(\overline{AB}) \geq 0$

- Como $d(\overline{UR}) = \sqrt{(0-0)^2 + (0-x)^2} = |x|$

  $d(\overline{RU}) = \sqrt{(0-0)^2 + (x-0)^2} = |x|$

  $\therefore \; d(\overline{UR}) = d(\overline{RU})$

[101] Aquí se repite un error de notación, escriben x y en lugar de (x, y).

Luego concluyen que “la distancia entre dos puntos es conmutativa”, y denotan:
$d(\overline{A;B}) = d(\overline{B;A})$

- Si $d(\overline{RP}) = 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

  Entonces $R(0,0)$ y $P(0,0)$ $\Rightarrow R = P$

Lo que llama la atención es que ningún grupo presenta la desigualdad triangular, como por ejemplo: $d(U,R) < d(U,B) + d(B,R)$ $, o,$ $d(U,P) < d(U,J) + d(J,P)$

Tomando en cuenta las propuestas de todos los grupos, el docente orienta a que los mismos estudiantes mejoren la definición de distancia y sus propiedades.

Conclusión:
La gráfica presentada ayuda en gran medida a que los estudiantes logren una adecuada conceptualización de distancia en el plano; asimismo ayuda a visualizar gráficamente la métrica pitagórica, y es un gran soporte en la verificación de las propiedades de distancia y su subsiguiente formulación algebraica.

Actividad N° 4: Otras métricas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.

Esta actividad se propone con la finalidad que los estudiantes amplíen sus conocimientos para lograr una mejor comprensión de la métrica y sus propiedades.

Para empezar se les propone la métrica del máximo definida en $\mathbb{R}^2$:

$$d_1\big((x_1;y_1),(x_2,y_2)\big) = máx\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

Inicialmente, muchos estudiantes trabajando en forma individual muestran sorpresa frente a la métrica propuesta. Entonces se les sugiere leer con atención la forma como está definida dicha métrica (devolución). Luego reemplazando las coordenadas de los puntos A (2, 7) y B(-4, 3) tal como está indicado, algunos dan la respuesta correcta (6), pero no todos entienden pueden explicar lo que significa. Hay dos alumnas que ni siquiera logran calcular porque no reemplazan bien las coordenadas. Los que logran obtener el resultado correcto, por su propia iniciativa toman otros puntos y también proceden a reemplazar. Pese a que algunos realizan los cálculos correctamente, la gran mayoría tiene mucha dificultad para realizar la representación gráfica, inclusive los estudiantes más avanzados, preguntan sobre cómo debía ser la gráfica; dicen, y ¿cómo representamos el 6?, ¿si unimos los puntos A y B, medirá 6?

De igual manera, dados los puntos A(-1,3), B(2,-2),C(3, 4), solo tres estudiantes logran verificar las propiedades de la métrica “d_1”. Solo en el trabajo grupal analizando y discutiendo con sus compañeros logran hacerlo. Respecto a la gráfica, inclusive en el trabajo grupal siguen con dudas, solo el grupo 4 logra realizar la siguiente representación y dicen con acierto que la respuesta es el segmento rojo.

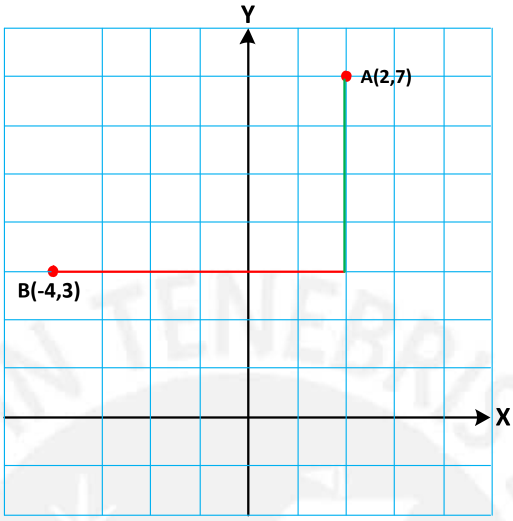
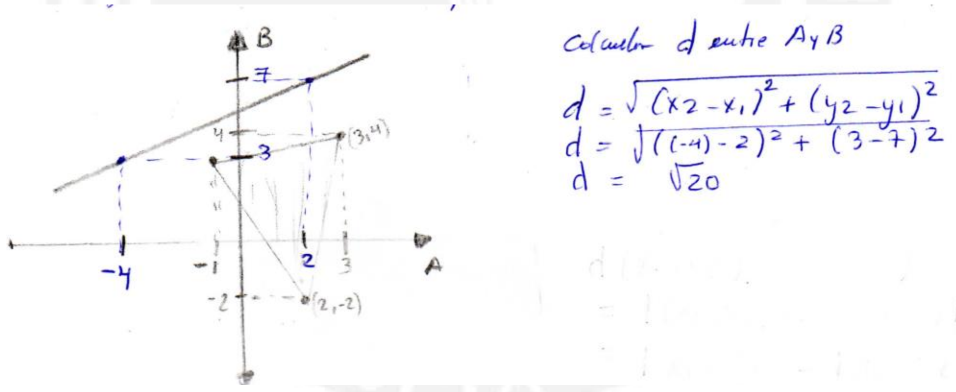


Fig. 25

El grupo 3 se limita a trazar el segmento AB, y al calcular la distancia aplicando la métrica pitagórica cometen error al operar, tal como se observa en la siguiente figura.



Los del grupo 2 también trazan los segmentos pero no dan respuesta alguna.

Respecto a la prueba de si $\mathbb{R}^2$ provisto de la función “d_1” es un espacio métrico, solo los grupos 1 y 4, luego de intercambiar opiniones entre ellos saben que deben probar las cuatro propiedades, los otros dos grupos preguntan sobre qué debían probar, por lo que se les indica revisar el concepto (que se encontraba en la misma página) (devolución).

Grupo 4 (similar el grupo 1):

Debemos probar que ($\mathbb{R}^2$; d_1) es un espacio métrico, sabiendo que:

$$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = máx\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$

i. $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \geq 0$

$$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = máx\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$

$$|x_1-y_1| \geq 0 \quad \wedge \quad |x_2-y_2| \geq 0$$

$$\therefore \; d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \geq 0$$

ii. $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$

Si $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0 \;\Rightarrow (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$

Como $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = máx\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

Si $máx\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\} = |x_1-y_1| = 0$

$$x_1 - y_1 = 0$$

$$x_1 = y_1 \qquad \text{... (1)}$$

Si $máx\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\} = |x_2-y_2| = 0$

$$x_2 - y_2 = 0$$

$$x_2 = y_2 \qquad \text{... (2)}$$

De (1) y (2) se tiene: $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$

$(\Leftarrow)$

Si $(x_1,x_2) = (y_1,y_2) \quad \Rightarrow \quad d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0$

Pero si: $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$

$$x_1 = y_1 \quad \wedge \quad x_2 = y_2$$

$$x_1 - y_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 - y_2 = 0$$

$$|x_1 - y_1| = 0 \quad \wedge \quad |x_2 - y_2| = 0$$

Entonces, $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0$

iii. $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1((y_1,y_2),(x_1,x_2))$

Pero, $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = máx\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

$$= máx\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$$

$$= d_1((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

Por lo tanto: $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1((y_1, y_2), (x_1, x_2))$

iv. $d_1((x_1, x_2), (z_1, z_2)) \leq d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_1((y_1, y_2), (z_1, z_2))$

$$máx\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \quad \leq \quad máx\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad + \quad máx\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\}$$

Es decir: $d_3((x_1, x_2), (z_1, z_2)) \leq d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_3((y_1, y_2), (z_1, z_2))$

Por (i), (ii), (iii) y iv): ($\mathbb{R}^2$; d_1) es un espacio métrico.

El grupo 4 demuestra correctamente las tres primera propiedades de la métrica del máximo, pero en la propiedad de la desigualdad triangular cometen un error.

Grupo 3:

Estos estudiantes suponen tácitos las propiedades (i), (ii) y (iii), por lo que se limitan a probar la propiedad (iv) (desigualdad triangular) de la siguiente forma:

Por propiedad de valor absoluto en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = máx\{|x_i - y_i|; \ i = 1, 2$

$\leq máx\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|; \ i = 1, 2 \quad \ldots \quad (\alpha)$

$\leq máx\{|x_i - z_i|; \ i = 1, 2\} + máx\{|z_i - y_i|; \ i = 1, 2\} \quad (*)$

$\leq d_1((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d_1((z_1, z_2), (y_1, y_2)) \ldots (3)$

Por (i), (ii), (iii) y iv): ($\mathbb{R}^2$; d_1) es un espacio métrico.

Este grupo comete el mismo error que el grupo 4, es decir en la demostración de la propiedad de la desigualdad triangular, (en (*) corresponde =) la misma que se pone de manifiesto en el proceso de validación, por lo que es analizada y aclarada con la participación de sus compañeros.

En la parte (b), donde se pide demostrar si el conjunto E = {1, 2, 3} provisto de la métrica discreta es un espacio métrico, los estudiantes demuestran cierta incertidumbre. Por lo que se les sugiere que antes de demostrar verifiquen. La función es la siguiente:

$$d_2(x; y) = \begin{cases} 0 \quad , \quad si \quad x = y \\ 1 \quad , \quad si \quad x \neq y \end{cases}$$

Por ejemplo, calculan:

$d_2\ (1,1) = 0 \quad d_2\ (2,2) = 0 \quad d_2\ (3,3) = 0$

$d_2\ (1,3) = 1 \quad d_2\ (1,2) = 1 \quad d_2\ (3,2) = 1$

Luego, uno de los grupos presenta la siguiente demostración:

1. $d(x, y) \geq 0$ [por definición]
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

   $d(1,1) = d(2,2) = d(3,3) = 0$

3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in A$

   Si x = y d(x, y) = d(y, x) = 0

   Si x ≠ y d(x, y) = 1 = d(y, x)

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in A$

   Si x = y y ≠ z x ≠ z

   $1 \leq 0 + 1$

Como observamos, las pruebas de las propiedades (1), (2) y (3) las realizan correctamente. En la prueba de la propiedad 4, solo indican una de las cuatro relaciones existentes entre los elementos de A; es decir, muestran que: si x = y, y ≠ z, x ≠ z entonces 1 ≤ 0 + 1; pero existen otras relaciones que verifican que:

d(x, z) ≤ d(x, y) + d(y, z)

Luego, con la finalidad de corregir errores y afianzar el concepto y las propiedades de la métrica realizan las demostraciones propuestas en "Consolidando lo aprendido", que casi en su totalidad son funciones definidas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$; solo una está definida en el conjunto de los números complejos.

Por cuestiones de tiempo se distribuye un caso por grupo; sin embargo, por iniciativa propia algunos grupos desarrollan más de uno. A continuación presentamos las demostraciones realizadas:

1. En primer lugar tenemos las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$.

   a. f(x) = |x|

   i. $|x| \geq 0$

   ii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   iii. $|x - y| = |y - x|$

iv. $|x-z| \le |(x-y)+(y-z)|$

$$|x-z| = |(x-y)+(y-z)|$$

$$\le |x-y| + |y-z|$$

Como se observa, aquí solo se enuncian las propiedades del valor absoluto, no constituyen una demostración.

b. $d_1(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

i) ¿$d_1(x,y) \ge 0$?

$$d_1(x,y) = |x-y|$$

$$|x-y| \ge 0$$

ii) $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$d_1(x,y) = |x-y|$$

$\Rightarrow$) $\quad |x-y| = 0$

$$\Rightarrow x-y=0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$\Leftarrow$) $\quad x = y \Rightarrow d_1(x,y) = 0$

$$x-y=0$$

$$|x-y| = d_1(x,y) = 0$$

iii) ¿$d_1(x,y) = d_1(y,x)$?

$$d_1(x,y) = |x-y|$$

$$d_1(x,y) = |y-x|$$

$$= d_1(y,x)$$

$$\therefore d_1(x,y) = d_1(y,x)$$

iv) ¿$d_1(x,z) \le d_1(x,y) + d_1(y,z)$?

$$d_1(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)|$$

$$\le |x-y| + |y-z|$$

$$\le d_1(x,y) + d_1(y,z)$$

$$\therefore d_1(x,z) \le d_1(x,y) + d_1(y,z)$$

Todas las propiedades están demostradas correctamente, solo falta la justificación en todos los casos.

c. **$d_2(x, y) = |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.**

En general el proceso de demostración que presentan los estudiantes es similar al caso anterior, pero igual obvian la justificación del proceso. Sin embargo, cabe señalar que al probar la segunda propiedad afirman que la implicación recíproca (de derecha a izquierda) es análoga a la primera (implicación de izquierda a derecha), lo que no es correcto, tal como se muestra: [102]

$$d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$|x| + |y| = 0$$

$$\Rightarrow \quad |x| = 0 \quad \wedge \quad |y| = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \wedge y = 0$$

Entonces $x = y$. Análogamente $(\Leftarrow)$

Los estudiantes prueban la implicación de izquierda a derecha; y según concluyen la segunda implicación (de derecha a izquierda) es "análoga", lo cual es incorrecto; pues, en el segundo caso se debe probar que:

$(\Leftarrow)$ Si $|x| + |y| = 0$; entonces $d_2(x, y) = 0$

Pero; si $|x| + |y| = 0$ entonces $|x| = -|y|$, y por propiedad de valor absoluto se tiene que: $x = -y \ \vee \ x = -(-y)$

De donde, $x = -y \ \vee \ x = y$.

Esto no siempre conduce a que $d_2(x, y) = 0$. Por lo tanto, $\boldsymbol{d_2}$ no es una métrica.

Pese a la observación realizada por el docente, los estudiantes no llegan a corregir el error, por lo que se tuvo que hacer en la pizarra con la participación de los estudiantes.

d. **$d_3(x, y) = e^{|x-y|}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.**

En este caso los estudiantes rápidamente concluyen que $\boldsymbol{d_3}$ no es una métrica en $\mathbb{R}$, pues como muestran en la verificación de la primera propiedad se tiene que:

$d_3(x, x) = e^{|x-x|} = e^0 = 1 \neq 0$.

[102] Esta observación se hizo luego de la exposición.

e. d_4 **(x , y) = máx { x - y, 0 }**

Aquí los estudiantes concluyen correctamente que d_4 no es una métrica.

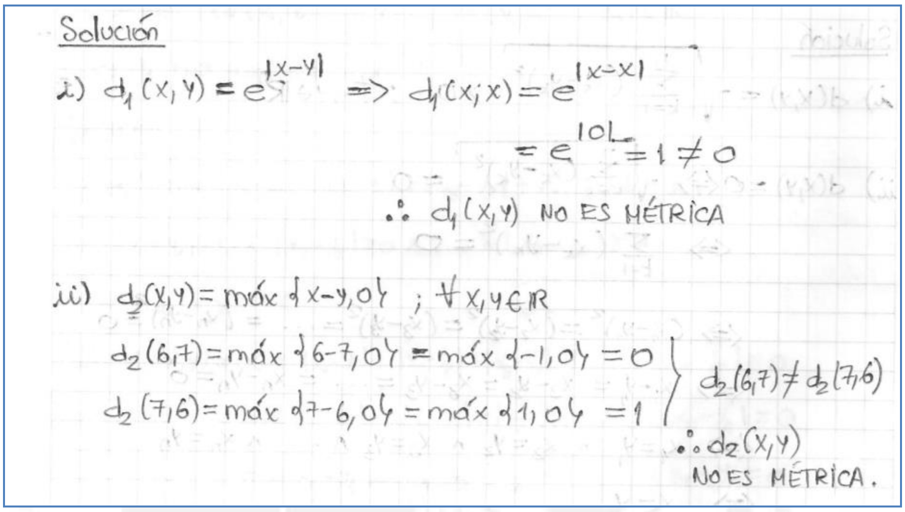
Pero, para probar la tercera propiedad: $d_4(x, y) = d_4(y, x)$, asumen valores particulares para ***x*** e ***y*** (6 y 3); y proceden de la siguiente manera:

$$d_4(6 ; 3) = \text{máx}\{6 - 3; 0\} = 3$$

$$d_4(3 ; 6) = \text{máx}\{3 - 6; 0\} = 0$$

De donde concluyen que: $d_4(6;3) \neq d_4(3; 6)$; por lo que $d_4(x; y)$ no es una métrica.

A continuación podemos visualizar la propuesta de otro grupo:



Solución

i) $d_1(x,y) = e^{|x-y|} \Rightarrow d_1(x;x) = e^{|x-x|}$

$= e^{|0|} = 1 \neq 0$

∴ $d_1(x,y)$ NO ES MÉTRICA

ii) $d_2(x,y) = \text{máx}\{x-y, 0\}$; $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$d_2(6,7) = \text{máx}\{6-7, 0\} = \text{máx}\{-1, 0\} = 0$

$d_2(7,6) = \text{máx}\{7-6, 0\} = \text{máx}\{1, 0\} = 1$

$d_2(6,7) \neq d_2(7,6)$

∴ $d_2(x,y)$ NO ES MÉTRICA.

Ambos grupos demuestran que la función dada en el primer caso no es una métrica. Pero, en el segundo caso, aunque llegan a una conclusión cierta, sólo realizan la verificación de que la propiedad $d(x,y) = d(y,x)$ no se cumple tomando valores particulares. Un estudiante (de otro grupo) hizo la observación en el momento de la validación.

En base a las actividades anteriores y destacando los aportes de todos los grupos, se ayudó a que los mismos alumnos corrigieran sus errores y precisaran las condiciones para que un conjunto cualquiera provisto de una función sea un espacio métrico.

2. Las siguientes actividades piden probar si $\mathbb{R}^2$ provisto de algunas funciones, constituye o no, un espacio métrico.

   a. Dada la función $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{½}$

      Uno de los grupos hizo lo siguiente:

      i) $d_1 \geq 0$? , como $(x_1 - y_1)^2 \geq 0 \quad \wedge \quad (x_2 - y_2)^2 \geq 0$ entonces:

$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{½} \geq 0.$

ii) $d_1 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

como : $d_1 ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0$ o sea $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{½} = 0$

por lo que: $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$; del cual tenemos:

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \\ x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2 \end{cases}$$

Por lo que: $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

iii) $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{½}$

$= [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{½}$

$= d_1((y_1, y_2) (x_1, x_2))$

iv) $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq d_1((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + d_1((z_1, z_2), (y_1, y_2))$

Plantean esta propiedad pero no la demuestran.

b. Dada la función $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

Probar si $(\mathbb{R}^2, d_2)$ es un espacio métrico.

Uno de los grupos presenta la siguiente demostración:

i) $d_2 \geq 0$, $x_1 - y_1 \geq 0 \quad \wedge \quad x_2 - y_2 \geq 0$

ii) $d_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1 - y_2)$ $\quad \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \\ x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2 \end{cases}$

iii) $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$

$= d_2((y_1, y_2), (x_1, x_2))$

iv) $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{2} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \quad \ldots (1)$

$\leq \sum_{i=1}^{2} (|x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{2} |z_i - y_i|$

$\leq d_2((x_1, x_2) (z_1, z_2)) + d_2((z_1, z_2) (y_1, y_2)) \ldots \quad (2)$

Observaciones:

- La prueba de la propiedad (i) lo hacen directamente utilizando el concepto de valor absoluto pero no lo justifican.

- En la propiedad (ii) escriben $d_2 = 0$, se deberían citar los elementos, aunque usan las caracterizaciones de cuándo las distancia entre dos puntos es cero. Es necesario probar la doble implicación.
- En la propiedad (iii) los estudiantes asumen que es tácita la propiedad simétrica del valor absoluto en $\mathbb{R}$. Obvian pasos y no justifican las inferencias.
- En (iv), incluyen las nociones de sumatoria como si se tratase de un caso general. Además hay error de notación de distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ (hace falta escribir la coma o el punto y coma, para separar los elementos).

3. La tercera parte pide demostrar si el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, provisto de la función $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, es un espacio métrico. A continuación reproducimos la demostración realizada por uno de los grupos:

i) $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(a + b_i) - (c - d_i)|$

$$= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \geq 0$$

$\therefore\ d(z_1, z_2) \geq 0$

ii) $d(z_1, z_2) = |(a + b_i) - (c - d_i)| = |(a - c) + (b - d)i| = 0$

$$= \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = c \quad \wedge \quad b = d \quad \ldots (\alpha)$$ [103]

$\therefore\ d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$

iii) $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |-1 \times (z_2 - z_1)| \quad \ldots (\beta)$ [104]

$= |-1|\,|z_2 - z_1| = |z_2 - z_1|$

$\Rightarrow a = c \ \wedge \ b = d$

$\therefore\ d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$

iv) $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2)|$

$\leq d(z_1 ; z_3) + d(z_3 ; z_2)$

$\therefore\ d(z_1, z_2) \leq d(z_1 ; z_3) + d(z_3 ; z_2)$

De (i), (ii), (iii) y (iv) concluyen que $d(z_1, z_2)$ es una métrica.

---

[103] En (α) hay necesidad de definir z_1 y z_2 antes de establecer la igualdad.

[104] En (β) en lugar de factorizar se debe justificar que $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ (propiedad de módulo de los números complejos).

Se debió precisar la conclusión afirmando que $d(z_1, z_2) = | z_1 - z_2 |$ es una métrica en el conjunto de los números complejos.[105]

- Otro grupo realiza la siguiente demostración:

1) Sea la función $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \ ; \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

¿Será una métrica sobre el conjunto de los números complejos?

Solución

i) $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \geq 0 \ldots (|z| \geq 0 ; \forall z \in \mathbb{C}) \ ; \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

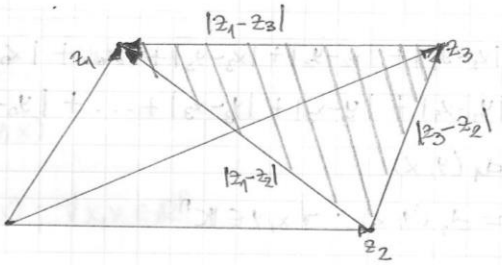
ii) $d(z_1, z_2) = 0 \iff |z_1 - z_2| = 0$
$\iff z_1 - z_2 = 0$
$\iff z_1 = z_2$

$\therefore d(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$

iii) $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$
$= |z_2 - z_1| \ldots, |z| = |-z| ; \forall z \in \mathbb{C}$
$= d(z_2, z_1)$

$\therefore d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1) \ ; \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

iv) Por desigualdad triángular:



$\therefore \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$

$\therefore$ $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sí es una métrica sobre $\mathbb{C}$.

Como se observa, el primer grupo hace la demostración expresando los números complejos a través de la notación binómica; mientras que los del segundo grupo, toman los complejos como si fueran números reales, y para justificar la desigualdad triangular hacen uso de la propiedad de los lados de un triángulo.

Como vemos, ambas demostraciones son bastante coherentes, aunque se sigue obviando la justificación del procedimiento; por lo que hubo necesidad de reflexionar sobre la importancia de las justificaciones en un proceso de demostración matemática.

105 Persiste la omisión de la justificación del proceso de demostración.

Conclusión:

- Los estudiantes en su mayoría no justifican sus demostraciones, sin embargo evidencian mejoras en el manejo del valor absoluto en $\mathbb{R}$ y algunas propiedades del álgebra elemental.
- Muestran serias dificultades en la demostración de la desigualdad triangular en $\mathbb{R}^2$ con las métricas más usuales, pues evidencian desconocimiento de la desigualdad de Schwartz.
- Otra omisión frecuente y generalizada en la que incurren, es que luego de realizar las demostraciones no formulan la conclusión, es decir, no dicen si la función dada es o no una métrica.

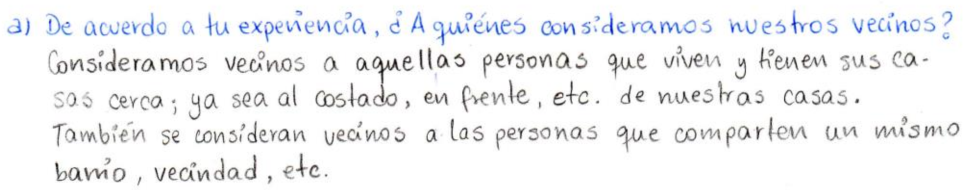
Estas dificultades u omisiones fueron puntualizadas permanentemente, y se lograron superar en la mayoría de los casos.

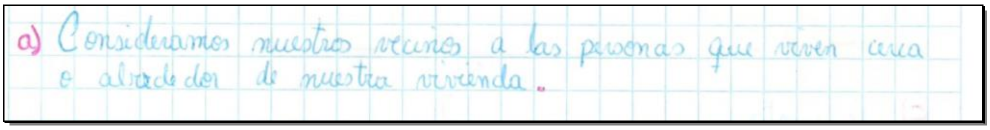
Actividad N° 5: ¡Qué bonita vecindad…!

La actividad se plantea a través de un croquis de viviendas con el propósito de que los estudiantes construyan el concepto matemático de vecindad a partir del significado cotidiano del término y de la situación de contexto.

El concepto de vecindad no es nuevo para los estudiantes, es así como frente a la pregunta exploratoria de ¿a quiénes consideramos nuestros vecinos?, responden:

- "Llamamos vecinos a los que viven a dos cuadras *a la redonda*".
- "A los que viven en la misma cuadra o *a la redonda*".
- "Vecinos son las personas que habitan en las viviendas contiguas a la nuestra".
- "A todas las personas que habitan en la *proximidad* en donde vivimos".


a) De acuerdo a tu experiencia, ¿A quiénes consideramos nuestros vecinos?
Consideramos vecinos a aquellas personas que viven y tienen sus casas cerca; ya sea al costado, en frente, etc. de nuestras casas.
También se consideran vecinos a las personas que comparten un mismo barrio, vecindad, etc.


a) Consideramos nuestros vecinos a las personas que viven cerca o alrededor de nuestra vivienda.

- En particular, consideramos interesante la siguiente respuesta: "Para poder determinar a las personas que consideramos nuestros vecinos, tenemos que *especificar primero el punto de referencia:*

- ✓ Si consideramos como punto de referencia a toda la jurisdicción como una sola organización entonces todas las personas que pertenezcan a ella serían considerados vecinos.
- ✓ Por otro lado, si el punto de referencia es una avenida (*línea recta*); entonces serían vecinos aquellas personas que se ubican en una misma avenida.
- ✓ En general, son ideas bastante cercanas al concepto matemático de vecindad, donde queda claro el carácter relativo de este concepto.

En ese mismo sentido, respecto a los vecinos de Brenda, proponen vecindades de diversas amplitudes; así, algunos dicen que "la única vecina de Brenda es Dalila", porque como explican "*vive en la misma cuadra*"; otros dicen que son Dalila y Espartaco, porque "*a comparación de las otras personas son los que viven más cerca*"; otros afirman que son Dalila, Espartaco y Julieta, porque "Brenda está ubicada en la intersección de las avenidas"; en cambio hay otros que consideran que "los vecinos de Brenda son Dalila, Espartaco, Julieta, Sansón y Cleopatra", tomando una vecindad más amplia que el resto.

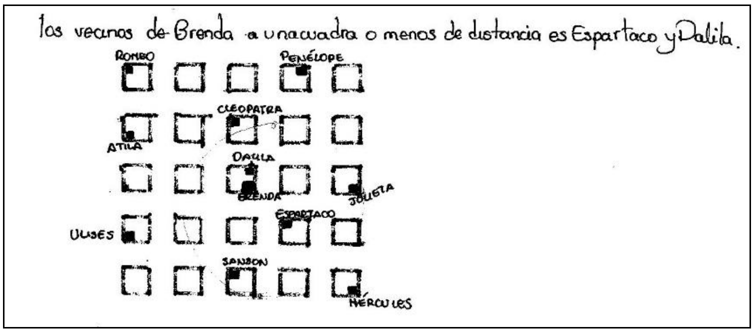
Como se ve, los estudiantes consideran vecinos con respecto a una cuadra, dos cuadras, etc., donde queda implícita la idea de una *distancia fija* (radio); además dan a entender que están bajo una determinada forma de vecindad, así hablan de vecindades a la redonda[106], vecindades en una calle o avenida[107], o en una manzana; en los que subyace la idea de diversas métricas, tanto en la recta como en el plano. Pese a que usan la expresión "*punto de referencia*", ésta no alude al punto fijo (centro) de la vecindad como se podría pensar, sino a la "forma" en que se toma la vecindad; a la redonda, en línea recta o de otra forma.

En cuanto al *ítem (c)*, la mayoría determina correctamente que los vecinos de Brenda a *una cuadra o menos de distancia (a la redonda)* son Dalila y Espartaco; entre los que destaca la propuesta del G-1, quienes trazando un círculo con centro en Brenda y radio de una cuadra, denotan $V(Brenda)=\{Dalila, Espartaco\}$ y escriben $d(D,B)\leq 1$ *y* $d(E,B)\leq 1$.

---

106 Lo que se relaciona con una vecindad en el plano determinada por la métrica pitagórica.

107 Cuando consideran vecinos de Brenda, a todas las personas que viven en la misma avenida o calle, se puede interpretar como vecindades en la recta real determinada por la métrica euclidea (o usual) en $\mathbb{R}$.



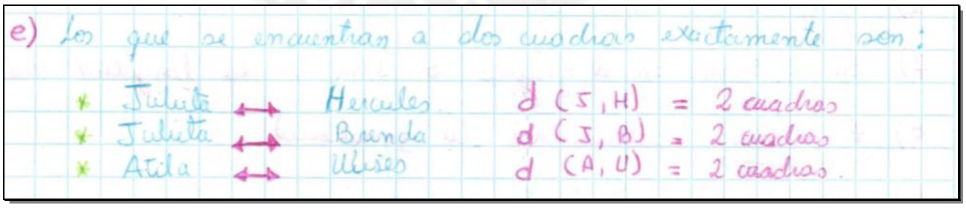
Avanzando aún más en el nivel de formalización, el Grupo 4 propone que $V(B) = \{x_1, x_2 / d((x_1, B) \leq 1 \wedge d(x_2, B) \leq 1\}$, donde x_1: Dalila, x_2: Espartaco y el radio r = 1.

Sin embargo, respecto a los vecinos de Brenda a tres cuadras o menos a la redonda, encontramos diversas respuestas; mientras que unos dicen que son Dalila, Espartaco, Julieta, Sansón y Cleopatra; otro grupo incluye a Atila y Hércules; otro, también considera a Ulises; y un último grupo afirma que todos son vecinos de Brenda.

Sólo el Grupo 1 trazando un círculo con centro en Brenda y tomando un radio de tres cuadras, afirma que los vecinos de Brenda a tres cuadras son todos, menos Hércules y Romeo, formalizando de la siguiente manera: $V(B) = \{x / d((x, B) \leq 3\}$.

En cuanto a los vecinos de Brenda que están a una distancia de dos cuadras exactamente, hay un grupo que afirma que solo es Julieta, mientras que otros dicen que son Julieta y Sansón, y el Grupo 4 llega a formalizar como: $V(B) = \{x / d((x, B) = 2\}$.

También encontramos un grupo de estudiantes que lejos de tomar a Brenda como punto de referencia, proponen pares de vecinos que están ubicados a dos cuadras de distancia uno del otro, y dan las siguientes parejas, evidenciando una interpretación distinta de los datos: [108]



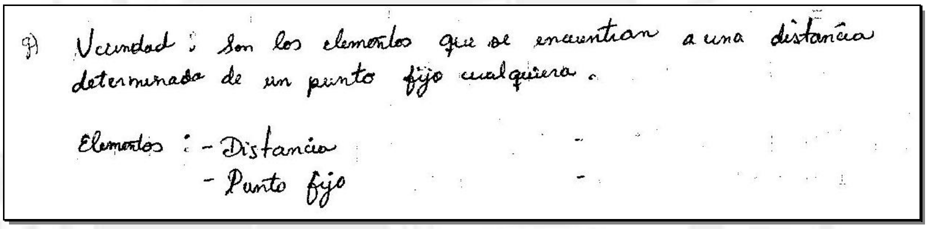
En cuanto al ítem (f) encontramos asimismo diversas respuestas, mientras que unos dicen que para incluir en la vecindad de Brenda a Penélope y Romeo, basta tomar 3 cuadras a la redonda, otros proponen que hay que tomar 4 cuadras; otros, 5 y hasta 6

[108] Por eso, se reformuló la pregunta, especificando que se debe tomar como punto de referencia a Brenda.

cuadras, evidenciando errores de medición. Lo aceptable es considerar entre 4 y 5 cuadras.

Al concluir esta actividad introductoria, los estudiantes trabajando siempre en equipos, proponen los siguientes conceptos de vecindad:

- "Llamamos vecindad a las personas que se encuentran a una cierta distancia fijada".
- "Vecindad es un conjunto de viviendas determinadas por una distancia en particular".
- "La vecindad es un conjunto de personas que comparten un espacio delimitado".
- "Vecindad es un término que hace referencia a la palabra "vecino", y se define como el "espacio conformado por un conjunto de individuos que se ubican dentro de una misma jurisdicción".
- A diferencia de los anteriores, uno de los grupos dice:


Vecindad: Son los elementos que se encuentran a una distancia determinada de un punto fijo cualquiera.

Elementos: - Distancia
- Punto fijo

Logrando descontextualizar el concepto, haciendo explicitos los elementos de una vecindad, llaman (distancia) al radio y punto fijo al centro.

- El Grupo 3, propone: $V(P) = \{x / d(x,P) \leq r\}$, donde como explican, P es un punto de referencia, r es una valor fijo y x es un elemento de la vecindad; logrando formalizar en parcialmente el concepto , pues no dicen a qué conjunto pertenece x.

Respecto a los elementos fundamentales en el concepto de vecindad, unos dicen "son las personas y la distancia", otros proponen que hay que "tomar un punto de referencia y el alcance de la vecindad"; otros consideran que son, "la distancia y el área"; "la distancia, la circunferencia y el epicentro"; "la distancia, la recta y el área"; así como algunos específicamente dicen que son "la distancia y el punto fijo".

En síntesis, los estudiantes logran una aceptable conceptualización de vecindad; señalando de diversas formas sus dos elementos fundamentales (el centro y el radio).

Actividad N° 6: Vecindades en la recta.

Considerando que los estudiantes tienen cierto dominio de la recta real, la presente actividad se plantea con la intención de que empiecen a formalizar el concepto matemático de distancia y sus propiedades, tomando en cuenta asimismo los resultados de la actividad anterior.

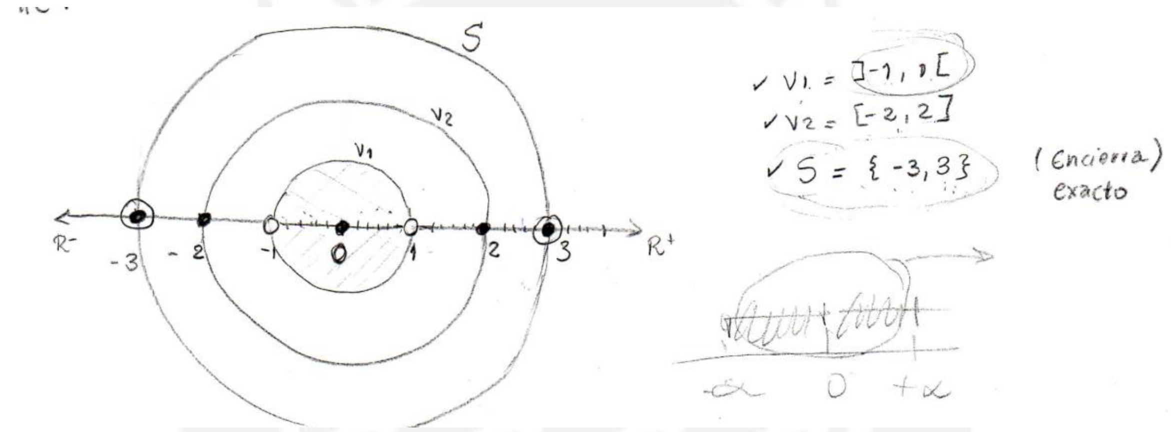
Usando los elementos generados en la actividad anterior, se inicia pidiéndoles que representen en la recta los siguientes conjuntos:

V_1, con centro 0 y radio r < 1

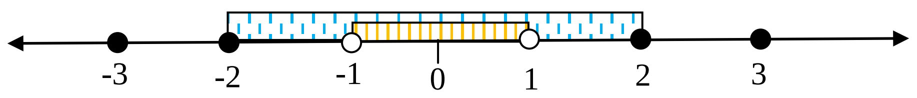
V_2, con centro 0 y radio r ≤ 2

S, con centro 0 y radio r = 3

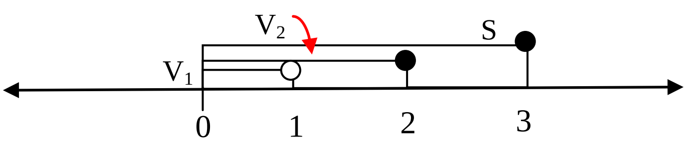
En un primer momento, muchos estudiantes trazan circunferencias concéntricas de radios 1, 2 y 3 con centro en 0 (cero), como el siguiente:



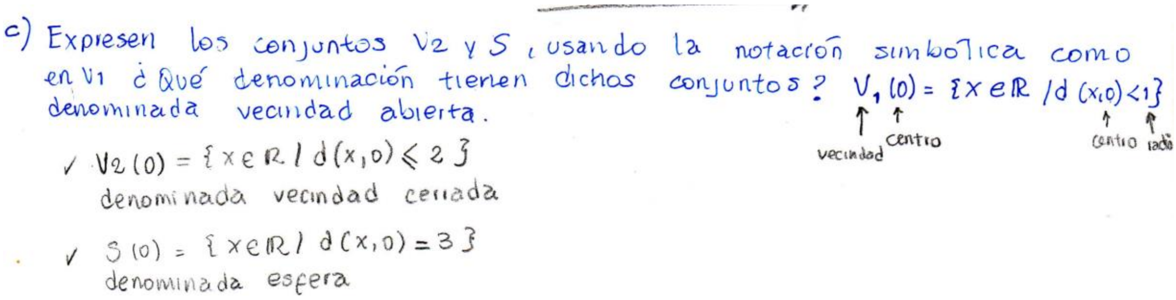
Entonces, se les indica que tomen en cuenta la indicación que tenían en la actividad, es decir que las gráficas deben hacerse en la recta (devolución). Lo que permite que todos mejoren sus gráficas. Entre ellos, por ejemplo logran realizar gráficos como los siguientes:



S = {-3, 3}
V_1 =]-1, 1[
V_2 = [-2, 2]



Los estudiantes que logran graficar correctamente, determinan con acierto las relaciones entre V_1, V_2 y S; los demás también lo hacen según el gráfico; y otros como no logran hacer los gráficos no pueden responder dichas preguntas. Por otro lado, la mayoría no tienen dificultad al expresar simbólicamente V_2, y S, siguiendo el ejemplo de V_1.


c) Expresen los conjuntos V2 y S ¿usando la notación simbólica como en V1 ¿Qué denominación tienen dichos conjuntos? $V_1(0) = \{x \in \mathbb{R} / d(x,0) < 1\}$ denominada vecindad abierta.
vecindad centro centro radio
✓ $V_2(0) = \{x \in \mathbb{R} / d(x,0) \leq 2\}$ denominada vecindad cerrada
✓ $S(0) = \{x \in \mathbb{R} / d(x,0) = 3\}$ denominada esfera

Con estos resultados pasan a trabajar en equipos, donde mejoran sus gráficas y las relaciones entre ellos.

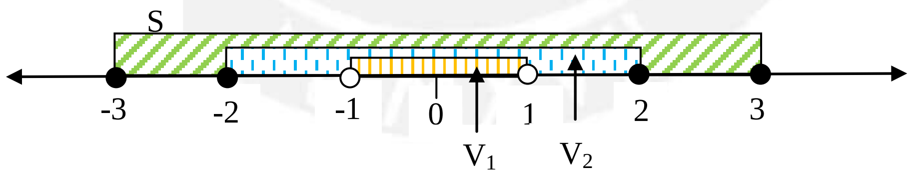
Por ejemplo, uno de los grupos que realiza correctamente el gráfico, establecen las siguientes relaciones:

a) $V_1 \subset V_2$ b) $V_1 \cap V_2 = V_1$ c) $V_2 - V_1 = [-2,-1] \cup [1.2]$

d) S no tiene relación con las vecindades V_1 y V_2.[109]

Otro grupo de estudiantes habiendo graficado correctamente no dicen nada acerca de la relación entre la esfera y las vecindades V_1 y V_2.

Sin embargo, encontramos un tercer grupo que representa la esfera como un intervalo cerrado, tal como se puede apreciar en la siguiente figura:



A partir del cual establecen las siguientes relaciones:

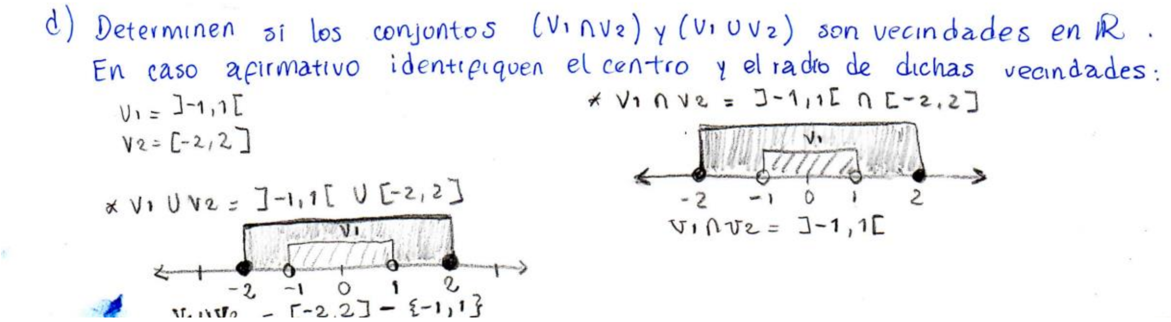
a) $V_1 \subset V_2$ b) $V_1 \cap V_2 = V_1$ c) $V_2 - V_1 = [-2,-1] \cup [1.2]$

d) $V_1 \subset S$ e) $V_2 \subset S$ f) $V_2 \cap S = V_2$

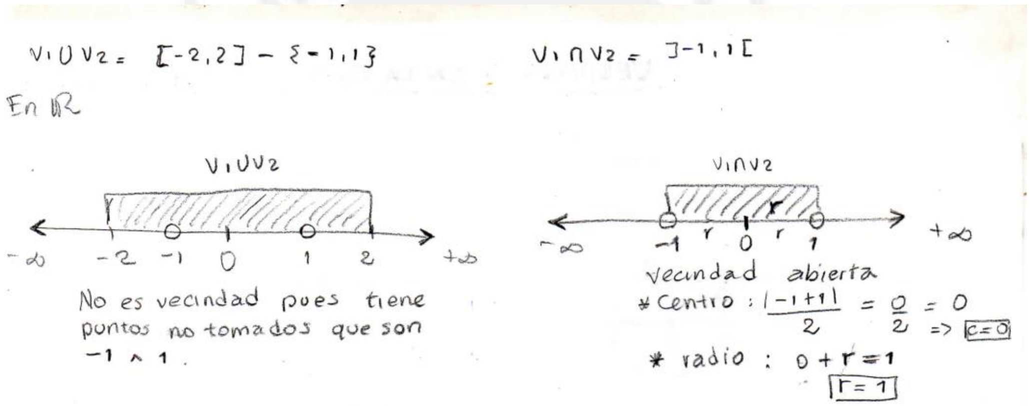
e) $S - V_2 = [-3.-2[\cup]2,3]$

109 Lo que es parcialmente correcto, puesto que S si tiene relación con V_2.

Como se observa las relaciones a, b y c son correctas; en cambio d, e, f y g son incorrectas, por la forma como toman la esfera.



Como se ve en el último grupo, no todos logran determinar correctamente los conjuntos ($V_1 \cap V_2$) y ($V_1 \cup V_2$), por lo que tampoco responden si son o no vecindades o lo hacen de manera incorrecta, como el siguiente que concluye que solo la intersección es una vecindad, y halla correctamente tanto el centro (0) como el radio (1):

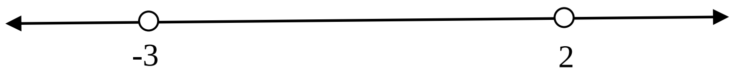


A continuación, con la finalidad de que los estudiantes manejen diversas formas de representación y mejoren su nivel de comprensión de las vecindades en ℝ, se les pide graficar y definir algebraicamente los intervalos $\langle -3,2 \rangle$ y [-3, 2], además que establezcan la correspondiente relación entre ellos. Adicionalmente se les solicita justificar por qué se les denomina intervalo abierto y cerrado respectivamente.

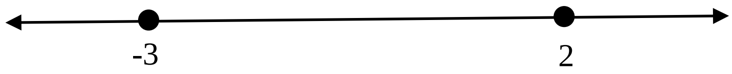
En esta actividad los estudiantes están agrupados en cinco grupos de 3 estudiantes.

Grupo 1:

Sea el conjunto: $A = \{x / x \in R \wedge -3 < x < 2\}$



Sea el conjunto: $B=\{x/x\in R\wedge -3\le x\le 2\}$

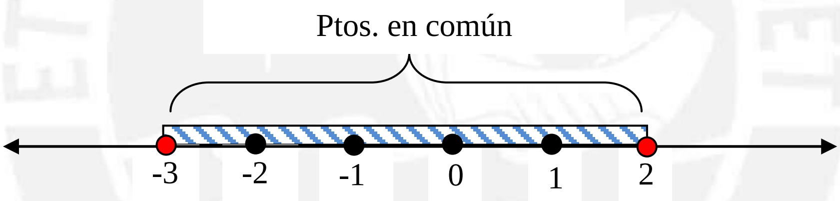


Luego dicen, "la relación entre ambos conjuntos de intervalos es que el conjunto A está incluido en el conjunto B ($A\subset B$), *es decir:* $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\ \wedge\ B\cup A=B$. [110]

Grupo 2: [111]

- $\langle -3,2\rangle$ es aquel intervalo donde el conjunto solución no toma en cuenta las cotas superiores ni inferiores. Se denomina *intervalo abierto* porque no se toma los extremos o *puntos referenciales*.

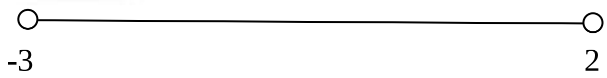
- [-3, 2] es aquel intervalo donde el conjunto solución toma en cuenta la cota superior y cota inferior.



"Ambos intervalos tienen puntos en común que pertenecen al intervalo $\langle -3,2\rangle$ sin tomar en cuenta las **cotas**".

Grupo 3: [112]

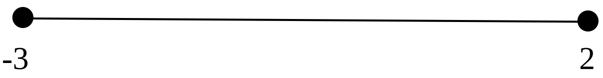
$\langle -3,2\rangle=\{x\in R/-3<x<2\}=C$



$$\left.\begin{array}{l} Supremo: 2\notin C \\ \acute{I}nfimo: -3\notin C \end{array}\right\} abierto$$

[110] Las representaciones algebraicas y la relación que establecen entre ambos intervalos son correctas; en cuanto a la representación gráfica se les pidió aclaración, pues solo el hecho de señalar los puntos -3 y 2 no resulta suficiente.
[111] En este caso, se observa que la representación gráfica como la relación (también gráfica) que establecen entre ambos intervalos son correctas; sin embargo han obviado la representación algebraica.
[112] La representación algebraica es correcta, aunque a ambos intervalos le asignan el mismo nombre (Conjunto C), la representación gráfica es comprensible, y respecto a la relación solo dicen que ambos intervalos poseen ínfimo y supremo; lo que resulta insuficiente.

$[-3,2]=\{x\in R/-3\leq x\leq 2\}=C$



$$\left.\begin{array}{l} Supremo: 2\in C \\ \text{Ínfimo}: -3\in C \end{array}\right\} cerrado$$

Luego dicen, "la relación que tienen es que ambos poseen ínfimo y supremo".

Grupo 4: [113]

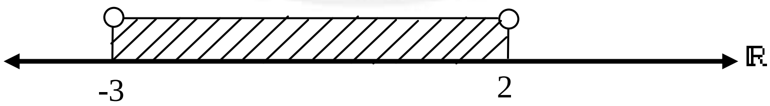
En el conjunto $A=]-3,2[=\{x\in R/-3<x<2\}$ porque no toma sus extremos.

En $B=[-3,2]=\{x\in R/-3\leq x\leq 2\}$, porque toma sus extremos.

i) La relación de A y B, sería que toma los puntos que están dentro de los extremos de los intervalos.

ii) Porque tienen a todos sus extremos.

Grupo 5: … [114]



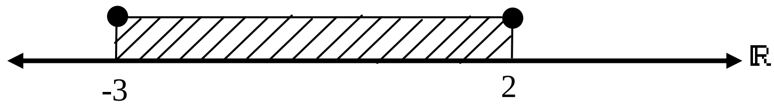
$I=\{x\in R/-3<x<2\}$

Intervalo abierto

[113] Las representaciones algebraica y gráfica son correctas, pero la relación que establecen no queda clara, sin embargo manifiestan que se debía entender en el sentido de que la intersección de ambos intervalos es el intervalo abierto, y que la diferencia entre ambos es que el segundo toma sus extremos.

[114] La representación gráfica de ambos intervalos es correcta, la definición algebraica es aceptable en la primera formulación; aunque en la caracterización de los elementos usan la relación de pertenencia y no pertenencia entre conjuntos, en lugar de la inclusión. No responden a la pregunta de por qué uno es un intervalo abierto y el otro es un intervalo cerrado, tampoco establecen la relación entre dichos intervalos.

$x \in \langle -3,2 \rangle \Rightarrow \exists \delta > 0 / V_{\delta}(x) \notin \langle -3,2 \rangle$

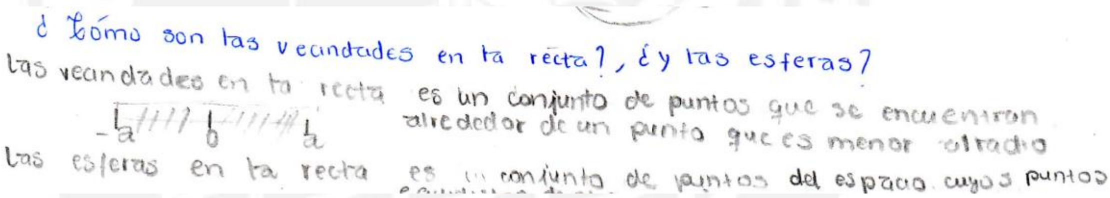


$I = \{x \in R / -3 \leq x \leq 2\}$

$x \in [-3,2] \Rightarrow \exists \delta > 0 / V_{\delta}(x) \in [-3,2]$ **Intervalo cerrado**

Como observamos, la mayoría de los grupos representan correctamente los intervalos tanto en forma simbólica como gráfica; algunos establecen una relación correcta entre dichos intervalos, y uno de los grupos (Grupo 5) intenta caracterizar a los elementos de ambos intervalos usando vecindades aunque con ciertas limitaciones.

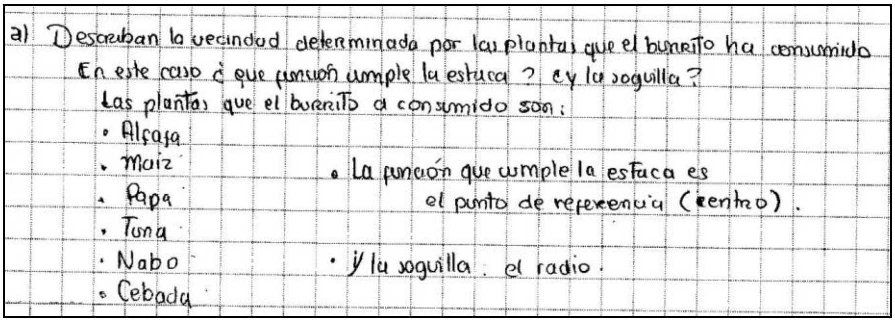
Finalmente, los conceptos que dan sobre las vecindades demuestran un aceptable nivel de comprensión, pero hay imprecisión en la formulación. Solo algunos logran hacerlo de manera coherente. El siguiente grupo aunque tiene la idea es un poco impreciso en la redacción.



Actividad N° 7: El alcance del burrito…!

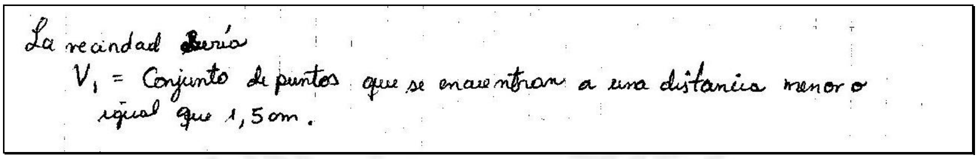
La situación contextualizada presentada en esta actividad tiene semejanza con la gráfica de una vecindad en $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual (pitagórica), y permite visibilizar sus elementos (centro y radio).

Inicialmente todos logran identificar la vecindad determinada por el pasto consumido por el burrito.



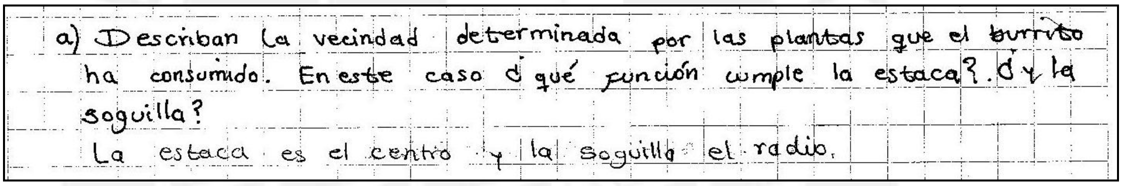
a) Describan la vecindad determinada por las plantas que el burrito ha consumido
En este caso ¿ qué función cumple la estaca ? ¿y la soguilla ?
Las plantas que el burrito a consumido son :
• Alfafa
• Maiz
• Papa
• Tuna
• Nabo
• Cebada
• La función que cumple la estaca es el punto de referencia (centro) .
• ¿y la soguilla : el radio .

Algunos escriben V = {T, M, P, A, N, C}, y otros simplemente indican que la vecindad es:

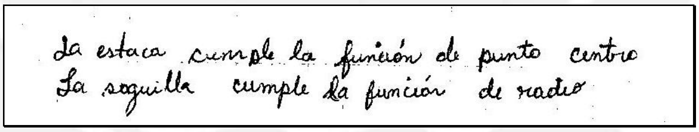


La vecindad sería
V_1 = Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor o igual que 1,5 cm .

Además la gran mayoría de estudiantes asocia correctamente la estaca con el ***centro*** de la vecindad[115]; y la soguilla con el ***radio*** de dicha vecindad[116].



a) Describan la vecindad determinada por las plantas que el burrito ha consumido. En este caso ¿ qué función cumple la estaca? ¿ y la soguilla?
La estaca es el centro y la soguilla el radio.



La estaca cumple la función de punto centro
La soguilla cumple la función de radio

En el ítem (c), la mayoría acierta al afirmar que la soguilla debe tener 5m de longitud para que el burrito logre alcanzar la lechuga, sin embargo uno de los grupos se excede al proponer 6m, y otro, comete el error de dar la respuesta en centímetros, sin tener en cuenta la equivalencia dada.

Respecto a la pregunta (d) sobre la cantidad de plantas que puede alcanzar el burrito con una soguilla de 4m de longitud bien estirada (esfera de radio de 4m), la mayoría responde con acierto que solo podía ser la zanahoria, pero algunos consideran todas las plantas de la vecindad cerrada (en lugar de referirse solo a la esfera).

115 También dicen que es el punto de referencia, el centro de la circunferencia, o el eje central, entre otros.
116 Algunos dicen que es la distancia que delimita la vecindad, que es el alcance de la vecindad, o el alcance del burrito.

En cuanto a la parte (e), donde tomando como centro la estaca (E) se les pide graficar y definir matemáticamente los siguientes conjuntos:

V_1: Conjunto de plantas que se encuentran a una distancia menor que 3m. …[117]

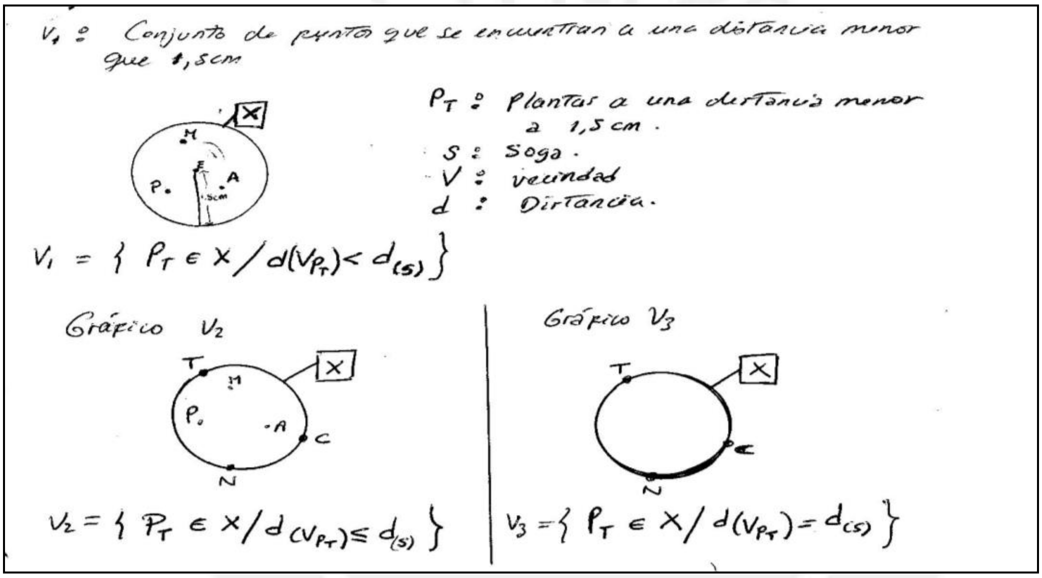
V_2: Conjunto de plantas que se encuentran a una distancia menor o igual que 3m.

V_3: Conjunto de plantas que se encuentran a una distancia de 3m;

Los estudiantes hacen las siguientes propuestas:

Propuesta 1: $V_1 = \{M, A, P\}$, $V_2 = \{T, M, A, P, C, N\}$ y $V_3 = \{T, C, N\}$.[118]

Propuesta 2:



La propuesta es interesante, pues previamente indican los elementos que usan en las definiciones, además hay coherencia en las formulaciones matemáticas.

Propuesta 3:

$$V_1 = \{x - y / x \in V_2 \wedge y \in V_3\}$$

$$V_2 = V_3 \cup V_1$$

$$V_3 = \{x - z / x \in V_2 \wedge z \in V_1\}$$[119].

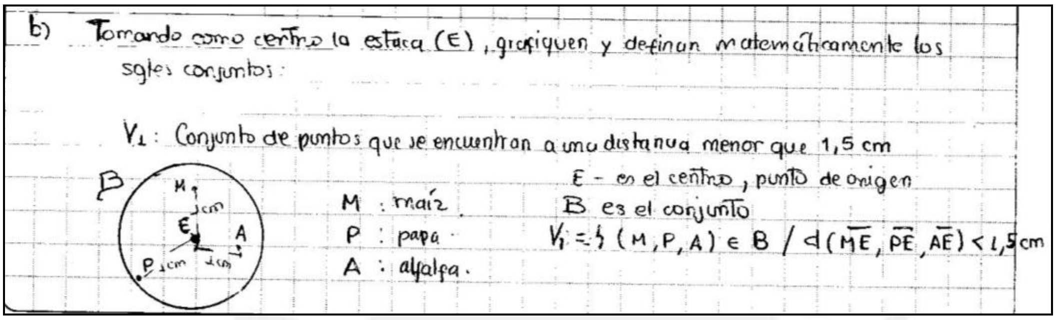
[117] Se les indicó que realizaran las diversas mediciones en el gráfico dado. El ítem se modificó dándoles en metros con la finalidad que hallaran la equivalencia. Inicialmente decía 1,5 cm.

[118] Esta representación conjuntista no responde a lo pedido (graficar y definir matemáticamente).

[119] Los tres conjuntos están definidos correctamente, pero no indican sus respectivos nombres.

Este grupo tampoco responde a lo que se pide (representar gráficamente), sin embargo es rescatable y valiosa porque se adelantan a proponer algunas *relaciones entre las vecindades y la esfera.* Como vemos, afirman que la vecindad abierta (V_1) es igual a la diferencia entre la vecindad cerrada (V_2) y la esfera (V_3); que la vecindad cerrada es la unión de la vecindad abierta y la esfera, y definen la esfera como la diferencia entre la vecindad cerrada y la vecindad abierta.

Propuesta 4:

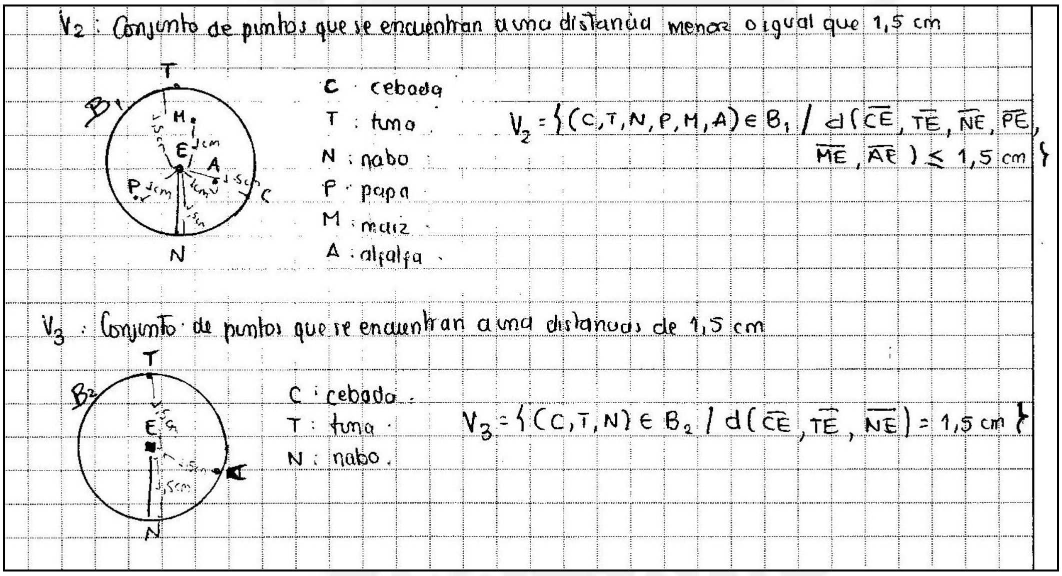

b) Tomando como centro la estaca (E), grafiquen y definan matemáticamente los sgtes conjuntos:

V_1 : Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor que 1,5 cm

E - es el centro, punto de origen
B es el conjunto

M : maíz
P : papa
A : alfalfa

$V_1 = \{ (M, P, A) \in B \,/\, d(\overline{ME}, \overline{PE}, \overline{AE}) < 1{,}5 \text{ cm}$


V_2 : Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor o igual que 1,5 cm

C : cebada
T : tuna
N : nabo
P : papa
M : maíz
A : alfalfa

$V_2 = \{ (C, T, N, P, M, A) \in B_1 \,/\, d(\overline{CE}, \overline{TE}, \overline{NE}, \overline{PE}, \overline{ME}, \overline{AE}) \leq 1{,}5 \text{ cm} \}$

V_3 : Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia de 1,5 cm

C : cebada
T : tuna
N : nabo.

$V_3 = \{ (C, T, N) \in B_2 \,/\, d(\overline{CE}, \overline{TE}, \overline{NE}) = 1{,}5 \text{ cm} \}$

Como se observa las representaciones son aceptables, pero presentan limitaciones en las notaciones, pues en lugar de expresar la distancia entre dos puntos de la forma $d(X, X_0) < 1{,}5$ escriben $d(\overline{ME}, \overline{PE}, \overline{AE}) < 1{,}5$ para referirse a las distancias de los puntos M, P y A, al punto E.

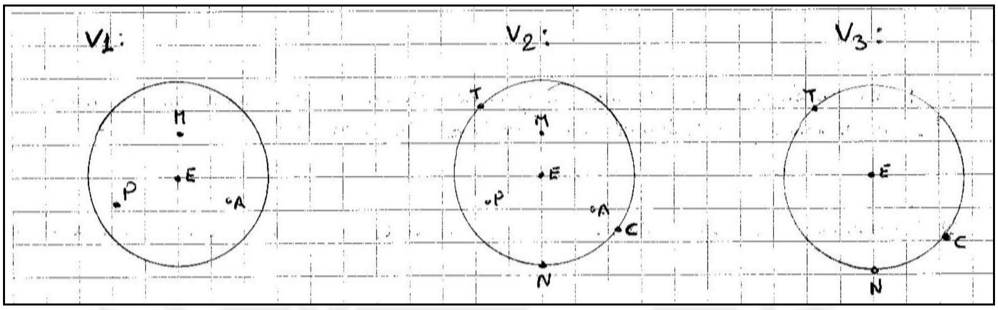
Propuesta 5:

b) Tomando como centro la estaca (E), grafiquen y definan matemáticamente los siguiente conjuntos:

V_1 : Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor que 1,5 cm. $V_1 = \{ X / X \text{ es un punto } \wedge d(E, X) < 1,5 \text{cm} \}$

V_2 : Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor o igual a 1,5 cm. $V_2 = \{ X / X \text{ es un punto } \wedge d(E, X) \leq 1,5 \text{ cm}$

V_3 : Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia de 1,5 cm. $V_3 = \{ X / X \text{ es un punto } \wedge d(E, X) = 1,5 \text{ cm} \}$.



Esta propuesta es aceptable tanto en el aspecto gráfico como en las formulaciones simbólicas.

En síntesis, tres de los cinco grupos representan adecuadamente los conjuntos propuestos (vecindad abierta, cerrada y esfera). Los otros dos grupos aunque no logran representar gráficamente, hacen formulaciones simbólicas correctas.

En cuanto a las relaciones entre dichos conjuntos, la mayoría establece relaciones de inclusión, como:

V_1 y V_3 son disjuntos, $V_1 \not\subset V_3$

V_1 y V_2 incluido, $V_1 \subset V_2$

V_3 y V_2 incluido, $V_3 \subset V_2$

Otros combinan inclusiones, intersecciones y uniones:[120]

d) Establezcan todas las relaciones posibles entre dichos conjuntos.

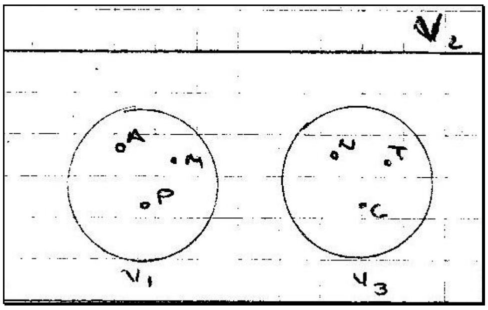
$V_1 \subset V_2$, $V_3 \subset V_2$, $V_1 \cup V_3 = V_2$, $V_1 \cap V_3 = \emptyset$

$V_1 \cap V_2 = V_1$, $V_3 \cap V_2 = V_3$

[120] Todas las relaciones son correctas.

Otro grupo propone: $V_2 = V_1 \cup V_3$, $V_3 = V_2 \cap V_1$, $V_1 = V_2 \cap V_3$ [121]

El Grupo 3 ilustra su respuesta con una representación conjuntista:



A partir del gráfico dicen que la vecindad abierta y la esfera son conjuntos disjuntos, y que la vecindad cerrada contiene a la vecindad abierta y a la esfera; lo que es correcto.

Mientras que el Grupo 4, en lugar de las notaciones usadas en los conjuntos dados, prefieren usar las notaciones X, Y y Z[122], definiéndolas de la siguiente manera:

X: Vecindad de M, P, A que se encuentran a una distancia menor a 1,5 cm con respecto a E.

Y: Vecindad de T, M, A, C, P, N que se encuentran a una distancia menor o igual a 1,5 cm con respecto a E.

Z: Vecindad de T, C, N que se encuentran a una distancia de 1,5 cm de E.

Luego, establecen las siguientes relaciones:[123]

$X \subset Y$; $Z \subset Y$; $X \cup Z \subseteq Y$; $X \neq Z$; $Y \neq Z$; $X \neq Y$; $Y \Delta X = Z$; $Y \Delta Z = X$

El concepto de vecindad que tienen los estudiantes en esta etapa aún no es formal, pero se entiende la idea.

Uno de los grupos concluye de manera errónea que “la vecindad abierta contiene a la cerrada y esfera” (fueron aquéllos que habían confundido la conceptualización de la vecindad abierta con la de la vecindad cerrada).

Luego de estas actividades los estudiantes expresan sus conceptos de vecindades abiertas, vecindades cerradas y esferas:

121 Como se observa, la segunda relación es incorrecta.
122 Los estudiantes manifiestan que prefieren denotar conjuntos con letras como: X, Y, Z, etc., sin subíndices.
123 Todas correctas, pero sin una visualización gráfica adecuada.

Grupo 1:

h) • Vecindad abierta: Conjuntos de puntos que se encuentran a una distancia menor o igual que la radio

• Vecindad cerrada: Conjunto de puntos que se encuentran a una distância de la radio

g. • Vecindad esfera Conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor o igual que la radio.

Como observamos, confunden los conceptos de vecindad cerrada y esfera.

Grupo 2:

Vecindad abierta: $V(P) = \{x / d(x,P) < r\}$

Vecindad cerrada: $V(P) = \{x / d(x,P) \leq r\}$

Esfera: $V(P) = \{x / d(x,P) = r\}$

Son definiciones acertadas, e igual que en los demás casos, este grupo maneja un lenguaje formal, sólo falta diferenciar y precisar las respectivas notaciones en cada caso.

Grupo 3:

h) ▶ VECINDAD CERRADA: Es aquella vecindad cuyos elementos tienen una misma distancia con respecto al eje (E).

▶ VECINDAD ABIERTA: Es aquella vecindad cuyos elementos tienen una distancia menor a 1.5 cm con respecto al eje (E).

▶ Esfera: Es la union de todas las vecindades que equidistan al eje

Es rescatable la definición de vecindad abierta. Definen la vecindad cerrada como si fuera la esfera y la definición de esfera es ambigua.

Grupo 4:

Vecindad Abierta: Es el conjunto de puntos que pertenecen a la distancia que recorre la cuerda y no toma los puntos de los extremos.

Vecindad Cerrada: Es el conjunto de puntos que pertenecen a la distancia que recorre la cuerda, tomando todos los puntos.

Esfera: Sólido terminado por una superficie curva cuyos puntos equidistan todos dentro de otro interior llamado centro.

Definen correctamente vecindad abierta y cerrada, mientras que para la esfera usan el concepto de esfera como un sólido geométrico convencional.

Grupo 5:

Vecindad abierta: En un área determinada, se toman como vecinos a los que se encuentran sólo dentro del área sin tomar en cuenta las casas que se encuentran al extremo.

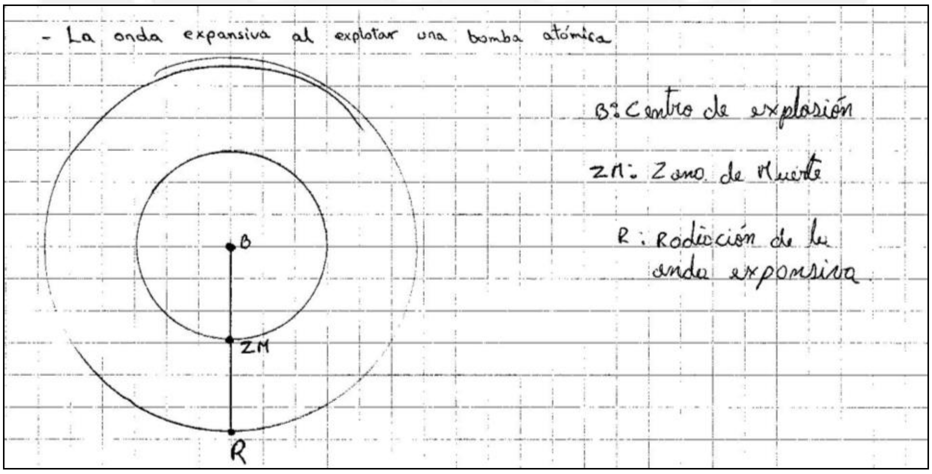
Vecindad cerrada: En un área determinada se toma como vecinos a los que están dentro del área y a los que se encuentran a los extremos de la misma área.

Esfera: Es un área circular, se toman como vecinos a las casas que se encuentran en las tangentes de un punto cualquiera.

Como podemos ver, las propuestas de los grupos 4 y 5 son las que más aceptables.

Por último, proponen los siguientes ejemplos reales de vecindades abiertas, cerradas y esferas, indicando cada uno de sus elementos:

Propuesta 1: La explosión de la bomba.



Aquí tenemos otro ejemplo interesante donde los estudiantes presentan dos vecindades concéntricas destacando en el gráfico los elementos fundamentales que debe tener toda vecindad como son el centro y el radio. Pero no logran hacer la distinción entre vecindades abiertas, vecindades cerradas y esfera.

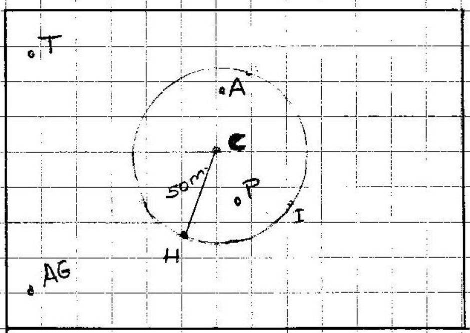
Propuesta 2: El campo de fútbol.

i) • Campo de fútbol, cuyo punto frontera son los árbitros de frontera
• V abierta = { jueces de línea }
V cerrada = { árbitros, jugadores }
V esfera = { jueces de línea, jugadores, árbitro }
Radio = Punto centro del campo

- Es un ejemplo interesante, pues tras de él encontramos una vecindad en $\mathbb{R}^2$ con otra métrica (del máximo).

Propuesta 3: La Universidad y sus facultades.

i) La universidad y sus facultades.



A : facultad de Arte.
P : " de Pedagogía.
H : " de Humanidades
C : " de ciencias.
AG : " de Agropecuaria.
T : " de Tecnología.
I : " de Inicial.

Con respecto a C como eje.

- V.C. = {H, I}
- V.A. = {A, P}
- E. = {A, P, H, I}

Esta última propuesta es muy original y acertada en cuanto al concepto de vecindad abierta, pero confunden los conceptos de vecindad cerrada con el de la esfera (toman el concepto de uno por el del otro). Además hablan de eje en lugar de centro.

Propuesta 4:

Vecindades abiertas: son las casas que se encuentran dentro de un área sin contar con los extremos.

Vecindades cerradas: son las casas que se encuentran dentro de un área contando con los extremos.

Esferas: son los que se encuentran en los extremos de un área circular: las tangentes.

Esta es también una propuesta interesante.

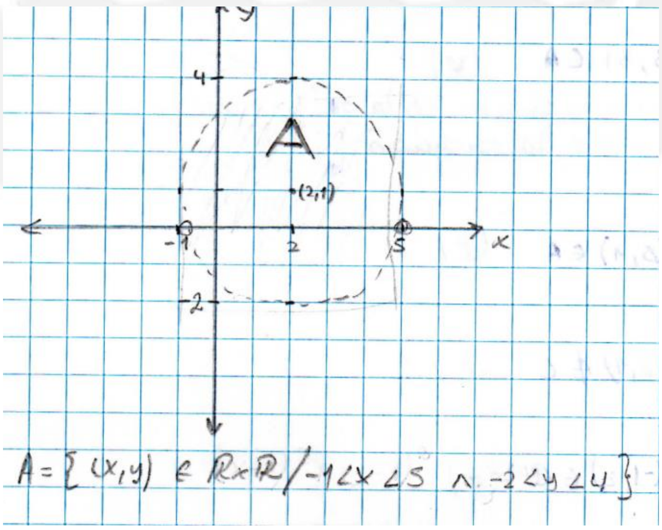
En general, la mayoría de estudiantes tiene claro el concepto de vecindad, aunque con limitaciones en la formulación matemática. Por lo que la intervención del docente en la etapa de institucionalización se centró en este aspecto.

En cuanto a la clasificación de vecindades pese a que algunos grupos lo tienen claro, existe un grupo que evidencia confusiones, principalmente entre el concepto de vecindad cerrada y el de esfera; que logran superar en la etapa de validación al confrontar sus ideas con los otros grupos.

Actividad N° 8: Vecindades en $\mathbb{R}^2$.

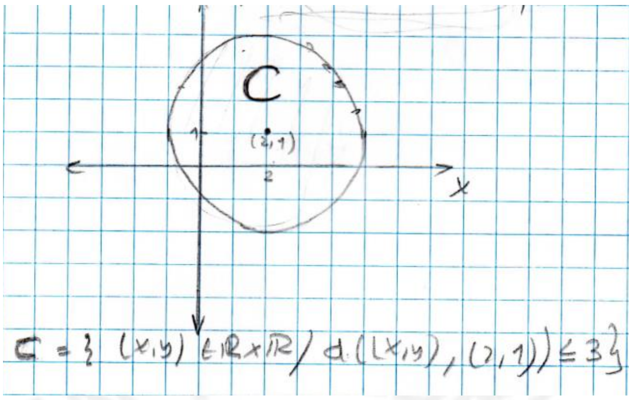
Esta actividad se plantea con el propósito de que los estudiantes identifiquen y diferencien diversas métricas en $\mathbb{R}^2$. Inicialmente se les pide representar en el plano la vecindad abierta con centro (2,1) y radio r = 3 con la métrica pitagórica.

Pese a que la mayoría de los estudiantes grafica correctamente, algunos hacen una interpretación errónea, afirman que es una “circunferencia” y otros dicen que es un círculo. También hay alumnos que solo trazan la circunferencia con líneas discontinuas y habiendo sombreado el interior, se observa que deciden borrar y dejar en blanco. Finalmente se ratifican que se trata de una circunferencia.



En cuanto a la representación simbólica, solo algunos lo hacen correctamente, la mayoría aunque evidencia que tiene la idea, muestran imprecisiones. Como se ve en el gráfico se limitan a escribir los intervalos de valores para x e y; otros en cambio solo escriben: d((x,y), (2,1)) < 3. También encontramos que tres estudiantes, en lugar del signo < usan el signo $\leq$, explicando que no habían prestado atención a que la vecindad debía ser abierta.

A partir de la formulación de la vecindad abierta, todos cambian el signo "<" por el signo "$\leq$" para expresar la vecindad cerrada como en el siguiente caso:

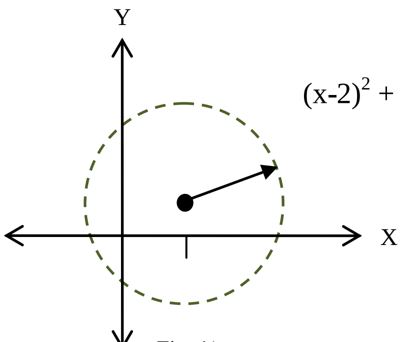


Respecto a que si ciertos puntos pertenecen o no a dichas vecindades, se encuentran algunos errores, debido a errores en la gráfica o en la parte simbólica.

En cuanto al objeto matemático que representa C – A (vecindad cerrada, menos vecindad abierta), algunos estudiantes, basados en la representación simbólica que realizan previamente, identifica correctamente que se trata de una esfera (circunferencia). Pero otros al no lograr la representación algebraica de dicha diferencia, no pueden identificar el objeto.

En el trabajo grupal, consolidan y mejoran en alguna medida estos resultados. Por ejemplo, respecto al primer ítem realizan las siguientes representaciones de la vecindad abierta con centro (2,1) y radio r = 3:

Grupo 1:



$(x-2)^2 + (y-1)^2 < 9$

Fig. 41

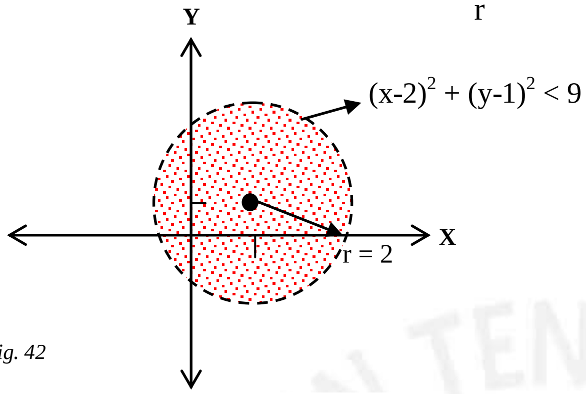
"Se genera una circunferencia"

Se observa que la parte simbólica es correcta, sin embargo la gráfica y el nombre del objeto matemático son incorrectos.

Grupo 2:

$$d((x,y),(2,1)) = \sqrt{(y-1)^2 + (x-2)^2} < 3^2$$

$$(y-1)^2 + (x-2)^2 < \underbrace{3^2}_{r}$$



La representación gráfica y la simbólica lo hacen correctamente. Indican el radio, pero el nombre del objeto es incorrecto, debe decir círculo sin borde.

Fig. 42

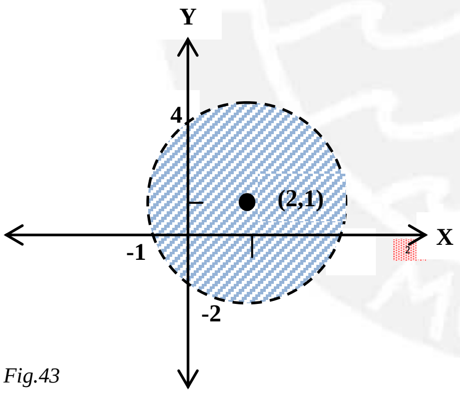
"Se genera un círculo"

Grupo 3:

Métrica pitagórica: $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \left[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\right]^{1/2}$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < 3$$

$$\Rightarrow \ (x-2)^2 + (y-1)^2 < 9 : V_3((2,1))$$

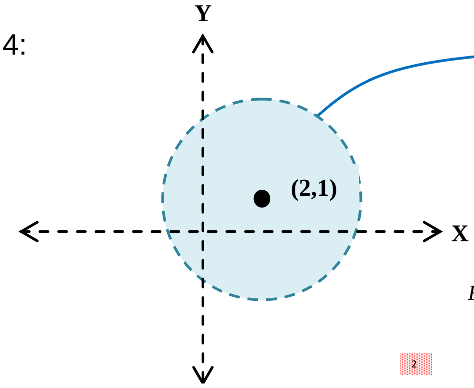


Tanto la representación gráfica como simbólica son correctas, además indican el centro de la vecindad. En este caso, el nombre del objeto también es incorrecto.

Fig.43

Es un círculo

Grupo 4:



$$A = \{(x, y) \in R^2 / d((x, y), (2,1)) < 3\}$$

Se genera un círculo

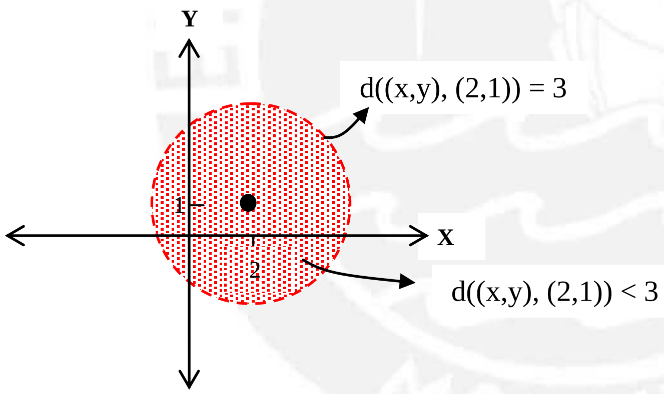
Fig. 44

Igual que el grupo 3, representan correctamente la vecindad tanto en forma simbólica como gráfica, indican el centro, pero no el radio. En este caso, el nombre del objeto también es incorrecto. Además sorprende el trazo discontinuo de los ejes.

Grupo 5:

Recordando:

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]^{½}$$



Círculo

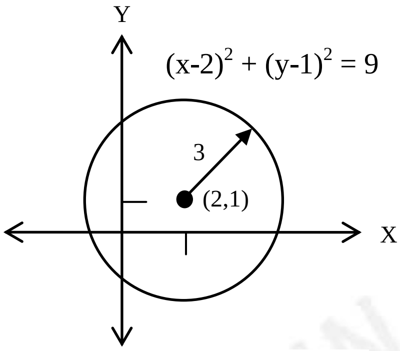
Hacen la representación gráfica correcta. En cuanto a la representación simbólica hacen una para el borde que es incorrecta y otra para el interior que es correcto. Marcan el centro y no señalan el radio, y el nombre que dan al objeto es incorrecto.

Respecto a la denominación de la figura, hubo necesidad de generar reflexión sobre las siguientes preguntas: ¿qué es un círculo?, ¿qué es una circunferencia? Pidiendo que ellos mismos den ejemplos de objetos reales. Lo mismo se hizo con las representaciones gráficas y simbólicas, partiendo desde sus propuestas se fue precisando los conceptos y la simbología. (devolución).

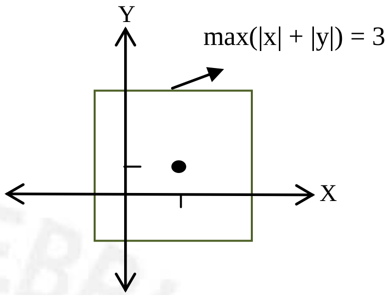
En base a estas aclaraciones casi todos los grupos representan correctamente la vecindad cerrada cambiando el signo < por el signo "$\leq$"; también grafican correctamente y reconocen que se trata de un círculo. De igual manera reconocen que C – A es una esfera en base a su representación simbólica.

Para afianzar esta idea, en la actividad grupal se pide representar dicha esfera (con la métrica pitagórica), además de la esfera con la métrica del máximo, ambos con centro (2,1) y radio r = 3, cuyas gráficas reproducimos a continuación:

Grupo 1:



Con la métrica pitagórica se genera una circunferencia.



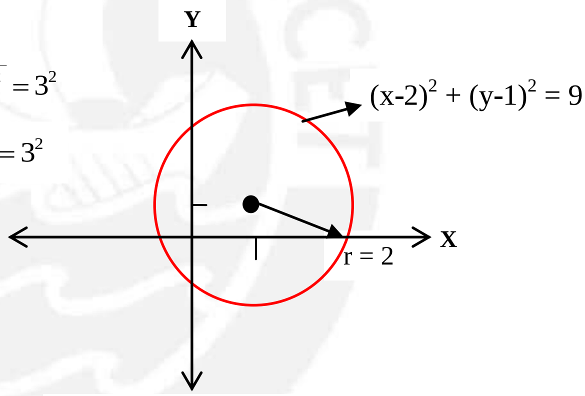
"Se genera un cuadrado"

Grupo 2:

Primer caso: con la métrica pitagórica

$$S=\{(x,y)\in RxR/d((x,y),(2,1))=\sqrt{(y-1)^2+(x-2)^2}=3^2$$

$$(y-1)^2+(x-2)^2=3^2$$



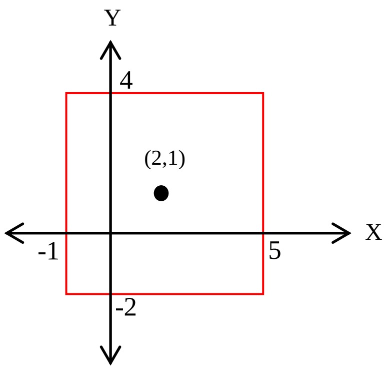
Circunferencia

Primer caso: con la métrica del máximo

$$d((x,y),(2,1))=máx\{|x-2|,|y-1|\}=3$$

$$\{x-2\}=3 \qquad x=5\vee x=-1$$

$$\{y-1\}=3 \qquad y=4\vee y=-2$$



Cuadrado

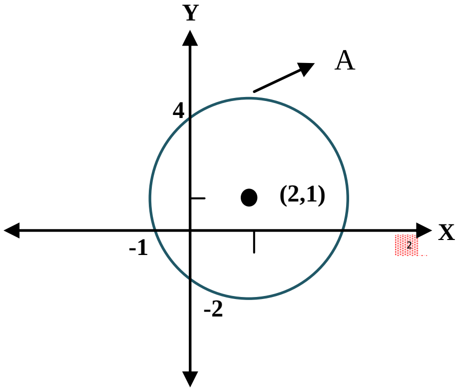
Grupo 3:

Métrica pitagórica:

$$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]^{1/2}$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 3$$

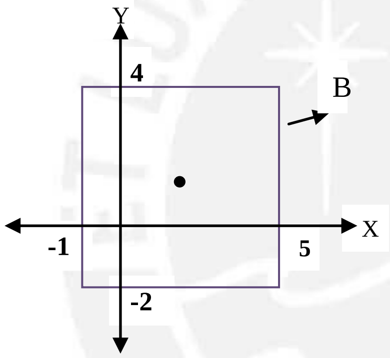
$$\Rightarrow \quad S_3((2,1)) = (x-2)^2+(y-1)^2 = 9$$



Se genera: una circunferencia.

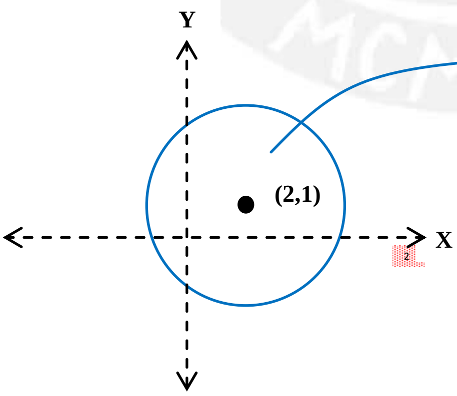
Métrica del máximo: $d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = máx\{|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\}$

$$\Rightarrow máx\{|x-2|+|y-1|=3\}$$



Se genera: "el perímetro de un cuadrado".

Grupo 4:

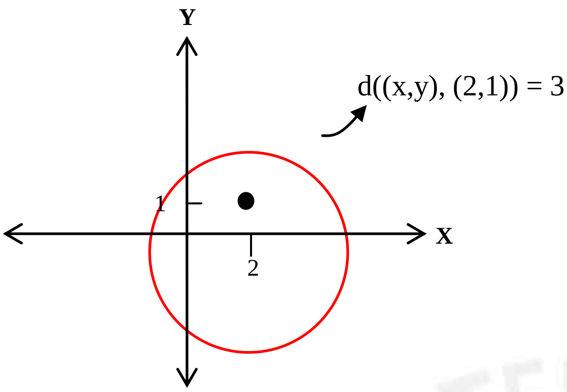


$$A = \{(x,y) \in R^2 \,/\, d((x,y),(2,1)) < 3\}$$

Se genera un círculo

Grupo 5:

Recordando: $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]^{1/2}$



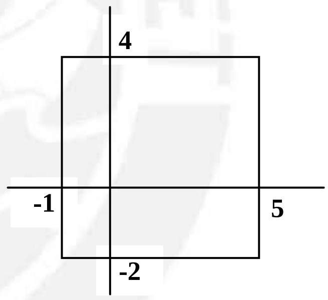
Circunferencia

Recordando: $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = Máx\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$

$\Rightarrow d_1((x,y),(0,0)) = Máx\{|x-2|,|y-1|\}$

Si: $Máx\{|x-2|,|y-1|\} = |x-2| = 3\ ;\quad x=5 \vee x=-1$

Si: $Máx\{|x-2|,|y-1|\} = |y-1| = 3\ ;\quad y=4 \vee y=-2$



Cuadrado

Como se observa, la representación de las esferas por cada uno de los grupos presenta más o menos las misma características. Por ejemplo las graficas que realizan los Grupos 2, 3 y 5 son aceptables, aunque no indican el centro y tampoco señalan los ejes coordenados.

Respecto a las denominaciones de las figuras generadas, también se presentan errores tanto en el grupo 3 como en el grupo 4, mientras que el grupo 3, dice “perímetro de un cuadrado” en lugar de cuadrado; el grupo 4, llama círculo a la circunferencia, y no grafica la segunda esfera. Conceptos que se aclaran en base a la discusión que se genera a partir de las afirmaciones que se piden evaluar si son verdaderas o falsas.

Por otro lado, vemos que en general no se usan adecuadamente las expresiones matemáticas, como es la definición y el símbolo de valor absoluto, a excepción del Grupo 5, quienes para graficar hacen un análisis detallado de la métrica dada y las inecuaciones involucradas.

Actividad N° 9: Raras vecindades.

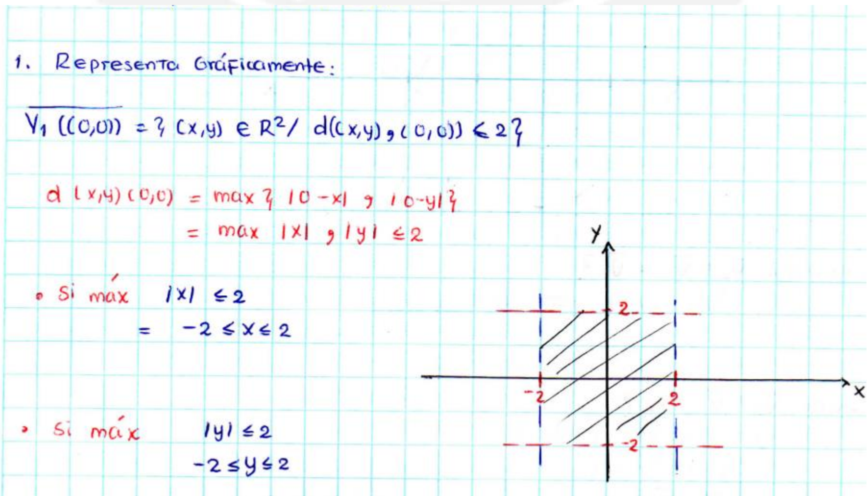
La actividad se plantea como un trabajo grupal. Se proponen las expresiones simbólicas de dos vecindades con el mismo centro y el mismo radio, una con la métrica del máximo y la otra con la métrica de la suma. Se pretende que a partir de las gráficas de dichas vecindades los estudiantes comprendan que las vecindades no siempre son circulares, y que la diversidad de formas que pueden adoptar depende de las funciones que las definen y del conjunto de referencia.

Para el caso se plantean las siguientes vecindades cerradas:

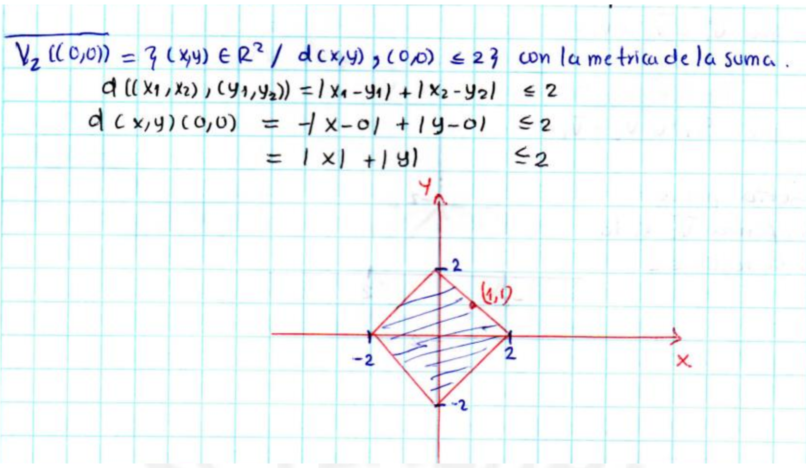
$\overline{V_1((0,0))} = \{(x,y) \in R^2 / d((x,y),(0,0)) \leq 2\}$, con la métrica del máximo

$\overline{V_2((0,0))} = \{(x,y) \in R^2 / d((x,y),(0,0)) \leq 2\}$, con la métrica de la suma

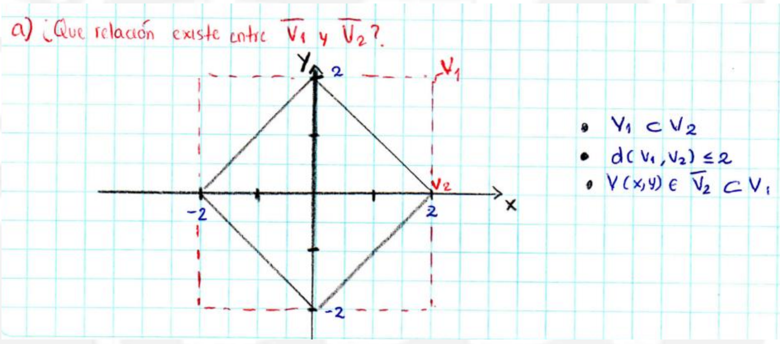
Los estudiantes en su mayoría en base a las actividades anteriores logran graficar dichos conjuntos y establecer las relaciones entre ellas en un nivel aceptable. Aunque en algunos casos presentan aún ciertas deficiencias u omisiones. Como por ejemplo en el caso que observamos, el estudiante en la gráfica de $\overline{V_1}$ (del máximo) no considera el borde, es decir lo grafica como una vecindad abierta, además no indica el centro, ni el radio.



Pero, el mismo estudiante, en la gráfica de $\overline{V_2}$ (con la métrica de la suma), si bien tampoco indica el centro, ni el radio, si la grafica correctamente, es decir como una vecindad cerrada, considerando su borde.



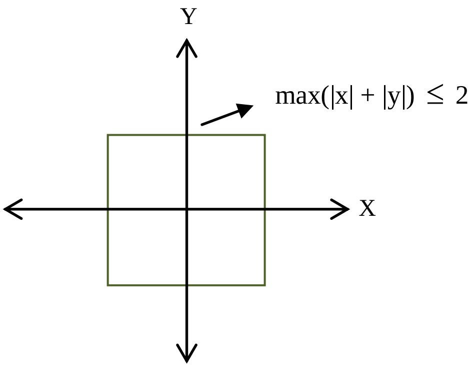
Cuando relaciona ambas vecindades, y hace las gráficas de manera conjunta, también considera lo mismo, la vecindad $\overline{V_1}$ (del máximo) abierta y $\overline{V_2}$ (de la suma) cerrada.



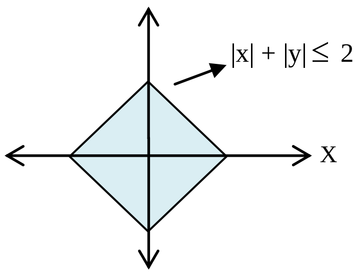
También apreciamos que ambos casos, las formulaciones algebraicas son correctas.

En los trabajos grupales, luego de discutir los avances individuales, todos los grupos mejoran sus propuestas:

Grupo 1:



"Se genera un cuadrado"



"Se genera un rombo"

En el primer caso (con la métrica del máximo) los integrantes de este grupo indican que representan max(|x| + |y|) $\leq$ 2, lo cual es incorrecto, ya que la gráfica corresponde a máx(|x| , |y|) = 2. El nombre del objeto representado es correcto, aunque obviamente no corresponde al nombre de la vecindad pedida.

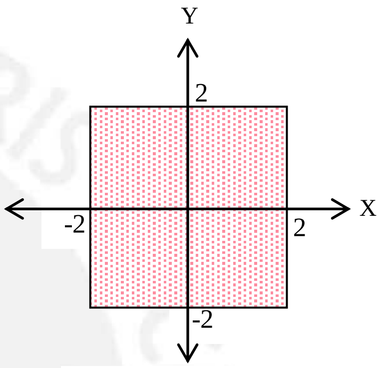
En el segundo caso (con la métrica de la suma) la representación gráfica es correcta, aunque no informan cómo lo hicieron, tampoco indican el centro, el radio, ni los puntos de intersección con los ejes coordenados. Así mismo dicen que el objeto generado que representa dicha vecindad es un rombo, debiendo decir que es una región limitada por un rombo de centro (0,0) y radio r = 2.

Grupo 2:

$$d((x,y),(0,0)) = máx\{|x-0|, |y-0|\} \leq 2$$

$$= máx\{|x|, |y|\} \leq 2$$

- $|x| \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$
- $|y| \leq 2 \quad \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$



Cuadrado

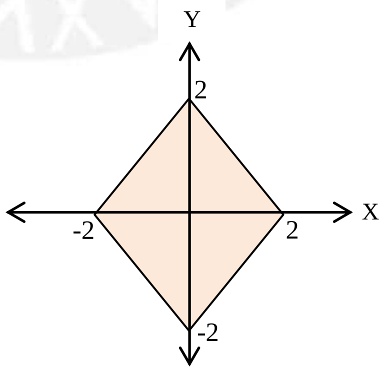
Este grupo logra graficar adecuadamente la vecindad pedida, pero tampoco indican el centro ni el radio. En cuanto al nombre del objeto dicen incorrectamente, cuadrado, debiendo decir, región cuadrada.

Estos estudiantes, en ambos casos acompañan a las gráficas el procedimiento algebraico realizado.

$C = \{(x,y) \in R^2 / d((x,y),(0,0)) \leq 2\}$, con la métrica de la suma.

= |x- 0| + |y- 0| $\leq$ 2

= |x| + |y| $\leq$ 2



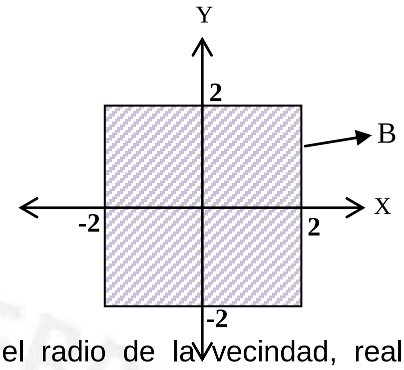
Rombo

Aquí el procedimiento algebraico es incompleto, grafican correctamente la vecindad, aunque no indican el centro ni el radio. Así mismo el nombre del objeto generado dicen que es un rombo, en lugar de decir que es una región plana limitada por un rombo de centro (0,0) y radio 2.

Grupo 3:

Métrica del máximo: $d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = máx\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\}$

$$\Rightarrow máx\{|x| + |y| \leq 2\}$$



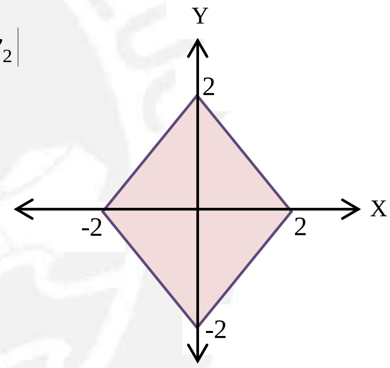
Se genera: " un cuadrado sin tomar en cuenta los vértices".

Aunque no indican explícitamente el centro y el radio de la vecindad, realizan una representación gráfica correcta. La denominación también es incorrecta, debiendo decir, región cuadrada.

Métrica de la suma: $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$\Rightarrow$ |x- 0| + |y- 0| $\leq$ 2

$\Rightarrow$ |x| + |y| $\leq$ 2



"Región cuadrangular"

Representan correctamente la vecindad, aunque tampoco indican el centro ni el radio. Respecto al nombre del objeto generado dicen que es una región cuadrangular lo cual es incorrecto, en lugar de decir que es una región plana limitada por un rombo de centro (0,0) y radio 2. Presentan un procedimiento algebraico incompleto.

Grupo 4:

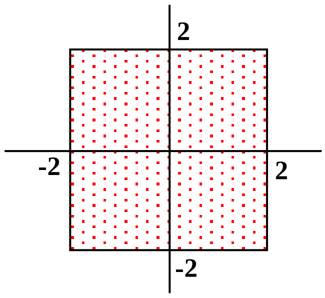
Recordando:

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = Máx\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$\Rightarrow d_1((x,y),(0,0)) = Máx\{|x-0|,|y-0|\}$

Si: $Máx\{|x|,|y|\} = |x| \leq 2 \;; -2 \leq x \leq 2$

Si: $Máx\{|x|,|y|\} = |y| \leq 2 \;; -2 \leq y \leq 2$



Cuadrado

La representación gráfica que realiza el grupo es aceptable, aunque no indican el centro y tampoco señalan el radio. Respecto a la denominación de la figura generada, nos encontramos con un error generalizado en nuestro medio, pues existe una tendencia a llamar cuadrado a “una región cuadrada”.

Por otro lado, vemos que en general no se usan adecuadamente las expresiones matemáticas, como es la definición y el símbolo de valor absoluto, a excepción del G-2, quienes para graficar hacen un análisis detallado de la métrica dada y las inecuaciones involucradas.

Para el caso del conjunto $S_2((0,0)) = \{(x,y) \in R^2 / d((x,y),(0,0)) \leq 2\}$, con la métrica de la suma, presentan de manera similar lo siguiente:

Recordando:

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$d((x,y),(0,0)) = |x-0| + |y-0| \leq 2$$

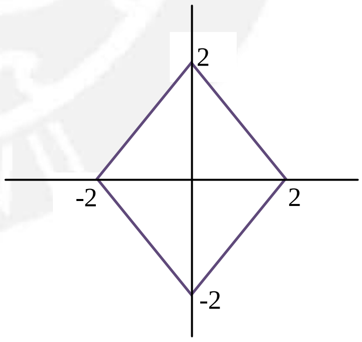
$$|x| + |y| \leq 2$$

Tenemos: $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \,; x + y = 2$ (I C)

$x \geq 0 \wedge y < 0 \,; \; x - y = 2$ (IV C)

$x < 0 \wedge y \geq 0 \,; \; -x + y = 2$ (II C)

$x < 0 \wedge y < 0 \,; \; -x - y = 2$ (III C)



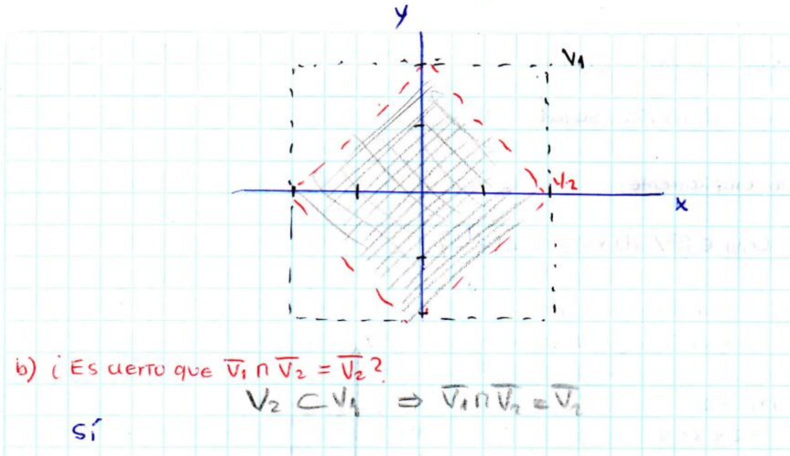
Rombo

Estas cuatro expresiones las resumimos en la siguiente gráfica:

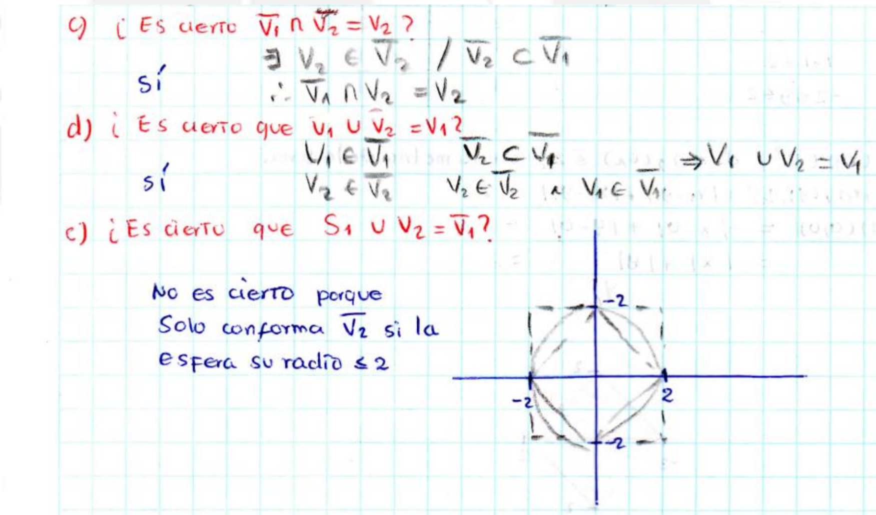
Representan esta vecindad usando un conjunto de inecuaciones, a partir de ellas obtienen el rombo, pero obvian sombrear su interior. Igual que los demás grupos no indican el centro ni el radio, y en cuanto al nombre del objeto generado, dicen que es un rombo, que es correcto de acuerdo a la gráfica que presentan; pero no corresponde a la vecindad que se pide.

Respecto a la relación existente entre ambas vecindades $\overline{V}_1$ y $\overline{V}_2$ el grupo 4 concluye que: $\overline{V}_1 \subset \overline{V}_2$ y $d(\overline{V}_1, \overline{V}_2) \leq 2$

Por su parte el grupo 3, afirma que $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \overline{V}_2$, lo cual es correcto.



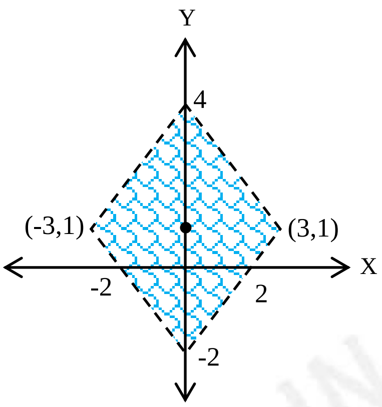
De manera similar respecto al ítem (c), los estudiantes del grupo 1 afirman que $\overline{V}_1 \cap V_2 = V_2$ es cierto, col lo que coincide también el grupo 3.



En general los estudiantes determinan correctamente las relaciones entre las vecindades, básicamente en función de las gráficas que realizan. Inclusive aquéllos que no sombrean los interiores de las gráficas. Pero si muestran errores en cuanto a la relación $S_1 \cup V_2 = \overline{V}_1$, que siendo falsa varios responden que es verdadera.

Actividad N° 10: La vecindad del taxista.

Esta última actividad se plantea con la intención de que los estudiantes ampliando las vecindades en el plano, infieran las características de las vecindades en $\mathbb{R}^3$, con las diversas métricas.



Solo algunos estudiantes trabajando en forma individual definen la figura presentada con sus propias palabras como la vecindad abierta de centro (0,1) y radio r = 3 con la métrica de la suma, así mismo definen algebraicamente como:

V $_3$((0,1)) = $\{(x, y) \in R^2 / d((x, y), (0,0)) < 3\}$

Respecto al ítem (c), donde se pide representar gráficamente la siguiente vecindad:

$V_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / d((x, y, z), (0,0,0)) \leq 5\}$, con la métrica pitagórica.

Solo el grupo 4 logra una representación correcta de la vecindad pedida, concluyendo que se trata de una esfera y su interior, con centro en el origen de coordenadas y radio r=5. El grupo 1, pese a que también logra graficar, no dice nada respecto a la figura obtenida. En cambio el grupo 2, así como el grupo 3 realizan la representación gráfica con dificultad, al principio muestran incertidumbre sobre cómo graficar los ejes, y luego en la ubicación de los puntos. Les resulta difícil ubicar puntos en el espacio tridimensional, muestran errores en los desplazamientos en los tres ejes a la vez. Tampoco describen correctamente el nombre del sólido, unos afirman que se trata de una esfera y otros dicen que es una superficie esférica.

En cuanto al ítem (d) que pide representar gráficamente la vecindad cerrada de centro (1,1,1) y radio r = 2 , con la métrica del máximo los estudiantes de los grupos 1 y 4 lo hacen sin mayores dificultades y mencionan que la vecindad representa un cubo de centro (1,1,1) y radio r = 2; lo cual es cierto. Mientras que a los estudiantes de los grupos 2 y 3, fue necesario sugerirles que debían revisar la definición de la métrica y las propiedades del valor absoluto.

Finalmente respecto a la gráfica de la esfera con centro (2;2;2) y radio r=3 con la métrica de la suma, solo el grupo 4 pudo representar gráficamente, una vez más los estudiantes de los otros grupos evidencian deficiencias de conocimientos de geometría tridimensional. Además por razones de tiempo no logran concluir la gráfica.

5.2 VALORACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS ESTUDIANTES.[124]

Al término de cada Actividad aplicamos las Fichas de Autoevaluación en las que los estudiantes realizaron valiosas apreciaciones; algunas de ellas transcribimos a continuación:

ACTIVIDAD	COMENTARIOS
LA MÉTRICA Y SUS PROPIEDADES	▪ Me pareció ameno, pero faltó tiempo. ▪ Dinámico, pero a veces no concordamos en una misma opinión. ▪ La actividad ayudó inconscientemente a iniciar el tema de distancia o métrica. ▪ Me llamaron la atención los caminos, fue muy interesante. ▪ Muy dinámico. Entretenido para aprender varios conceptos. ▪ Didáctica, entretenida ya que estuvimos en todo momento concentrados. ▪ Muy interesante pues me sorprendió la contrastación de la distancia en geometría y la distancia en el croquis. ▪ El problema estuvo muy didáctico. Me permitió recordar algunos conceptos. ▪ Interesante, porque la mayoría de profesores no hacen actividades dinámicas. ▪ Me gustó la forma cómo se aprovecha el problema planteado para extraer las definiciones. ▪ Fue bastante interesante, porque a pesar de incluir una situación de la vida diaria y aparentemente sencilla, generó polémica sobre el concepto de distancia. ▪ Me parece muy motivadora, permite deducir el tema, pero deberían darnos el tema para repasarlos. ▪ Interesante llegar a conceptos abstractos de ejemplos de la vida cotidiana.
VECINDADES.	▪ Interesante, pues de un simple juego y con la participación de todos sacamos conceptos topológicos. ▪ Las exposiciones fueron interesantes, cada uno de ellos con sus respectivas explicaciones. ▪ Interesante ya que dentro de la actividad existían muchos conceptos que poco a poco íbamos descubriendo. ▪ La separata guarda coherencia con el tema presentado; las intervenciones favorecieron el aprendizaje. ▪ Muy dinámica, se interactuó con el compañero en todo momento. ▪ La clase me pareció muy buena, por la participación activa de los estudiantes. ▪ Un poco complicado, pero nos sirve para investigar más. ▪ Muy dinámico e integral. Nos ayuda a poder debatir. ▪ Me pareció más dinámica que la anterior. ▪ Me pareció un poco nueva, ya que desconocía que podían haber varias métricas. ▪ La actividad nos permitió analizar con diferentes puntos de vista y complementar con conceptos matemáticos ya conocidos. ▪ Realmente muy constructiva, pues ayudó a formular intuitivamente los conceptos de entornos, bolas o vecindades. ▪ Es muy dinámica y eso ayuda para reforzar los conocimientos. ▪ Interesante, motivador y didáctico.

[124] Se adjuntan algunas Fichas escaneadas en el Anexo N° 12.

Como podemos ver, los estudiantes resaltan el hecho de que las actividades resulten novedosas e interesantes, que generan conflictos cognitivos, y sobre todo valoran la posibilidad de construir conceptos matemáticos abstractos a partir de situaciones concretas y sencillas de la vida cotidiana.

Valoran asimismo la metodología aplicada porque como manifiestan les permitió comprender mejor los conceptos en interacción con sus compañeros de grupo; resaltan la importancia de la confrontación de ideas y el debate; destacan la importancia de las exposiciones porque según dicen les ayudó a consolidar sus conocimientos y despejar sus dudas.

Por otro lado, muchos opinan que el tiempo asignado para desarrollar las actividades fue insuficiente, pero pese a ello proponen que en lo posible se aplique esta metodología con mayor frecuencia.

CAPITULO VI: ANÁLISIS A POSTERIORI Y VALIDACIÓN

Siguiendo el esquema metodológico de la Ingeniería Didáctica, después de la aplicación de la secuencia didáctica, en el presente capítulo corresponde realizar la confrontación de los resultados de dicha aplicación con el análisis a priori, es decir con comportamientos esperados y las hipótesis planteadas.

6.1 ANÁLISIS DE LOS COMPORTAMIENTOS ESPERADOS

A continuación, presentamos el análisis del logro de los aprendizajes esperados respecto a los indicadores propuestos:

SECUENCIA DIDÁCTICA	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS	COMPORTAMIENTO OBSERVADOS / COMENTARIOS
Actividad N° 01: **Recorriendo caminos.**	▪ Se espera que a partir del croquis los estudiantes trabajando en forma individual calculen distancias entre dos viviendas indicadas. ▪ Asimismo, al anotar dichas distancias en una tabla de valores se espera inicien la conceptualización de la distancia como una función. ▪ Se espera que trabajando en equipos y en base a sus conocimientos previos identifiquen el objeto matemático involucrado en la actividad, formulen su concepto en lenguaje usual y en base a las preguntas planteadas exploren algunas de sus propiedades. ▪ Es posible que algunos estudiantes en base a sus conocimientos intenten calcular las distancias usando alguna fórmula, por lo que será necesario aclarar que el contexto solo permite recorridos a través de las calles. (Devolución).	▪ Como se esperaba los estudiantes trabajando en forma individual calculan distancias entre dos viviendas indicadas sin mayor dificultad. ▪ Por otro lado, la tabla de valores les ayuda a visualizar el concepto de distancia como una función. ▪ Muchos estudiantes trabajando en forma individual reconocen que el objeto de estudio es la distancia, formulan su concepto con sus propias palabras, y deducen sus propiedades de manera muy natural a partir de las preguntas y dan ejemplos usando la gráfica (a excepción de que no se visualiza la desigualdad triangular). Significa que la actividad pueden desarrollarla sin necesidad del apoyo de sus compañeros. Pero de todas maneras el trabajo en grupos ayuda a ver otras formas de resolver o expresar los conceptos que ya han elaborado. ▪ A pesar que pensábamos que algunos estudiantes podían calcular las distancias usando alguna fórmula, esto no ocurrió.

Actividad N° 02: **Calculando distancias en la recta.**	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en forma individual y en base a sus conocimientos previos de los números reales calculen distancias entre dos puntos en la recta sin mayor dificultad. ▪ Sin embargo es posible que en el caso de buscar la coordenada de un punto conociendo la coordenada de otro, y la distancia entre ambos, den solo una coordenada (generalmente el valor positivo). Frente al cual el docente planteará preguntas similares y más sencillos para que los mismos estudiantes aclaren sus dudas. ▪ Se espera que trabajando en equipos logren interpretar geométrica y algebraicamente el concepto de distancia entre dos puntos en la recta. Asimismo en base a sus conocimientos previos logren expresar formalmente la métrica euclidea y sus propiedades. ▪ En base a lo observado en la Prueba de entrada es posible que los estudiantes tengan dificultad en la verificación de la desigualdad triangular, por lo que se promoverá la aclaración entre los mismos estudiantes, formulando preguntas, así como proponiendo ejemplos y contraejemplos. (Devolución).	▪ Individualmente se evidencian grandes diferencias respecto al manejo del concepto de distancia, lo que se evidencia en los cálculos que realizan. Mientras unos son capaces de explicar sus cálculos de diversas maneras usando inclusive un lenguaje formal, hay otros que dan como resultado resultados negativos y no perciben su error. ▪ Como se esperaba la mayoría de estudiantes cuando conocen un punto, la distancia y buscan otro, solo dan el valor positivo. Únicamente los que usan el valor absoluto dan ambos valores. ▪ Inclusive trabajando en equipos algunos estudiantes tienen dificultad para realizar la interpretación geométrica de la distancia, más aún cuando involucra desigualdades. La representación algebraica también lo logran parcialmente, pues la mayoría no acostumbran usar el valor absoluto. ▪ Como estaba previsto la mayoría de estudiantes tiene dificultad en la interpretación de la desigualdad triangular en la recta, pues inclusive geométricamente solo se visualiza la igualdad. Por lo que queda para reforzar en $\mathbb{R}^2$.
Actividad N° 03: **Calculando distancias en el plano.**	▪ Aplicando sus conocimientos previos se espera que la mayoría de estudiantes hallen distancias entre dos puntos en el plano sin ninguna dificultad. Además, a través de las preguntas planteadas identifiquen algunas de sus propiedades. ▪ Se espera que los estudiantes, en base a las actividades anteriores y trabajando en equipos logren formular con rigor matemático tanto el concepto como las propiedades de la distancia en $\mathbb{R}^2$. ▪ Por experiencia se sabe que algunos estudiantes tienen dificultad para ubicar puntos en el plano así como en la aplicación del	▪ Como se esperaba la mayoría de estudiantes están familiarizados con el cálculo de distancias en el plano (con la métrica pitagórica). Lo que se refuerza a través del sistema de coordenadas propuesto en base a una situación contextualizada. ▪ De igual manera, la mayoría de estudiantes logran definir el concepto de distancia entre dos puntos en el plano y enuncian correctamente sus propiedades usando un lenguaje formal. ▪ No hubo mayor dificultad en cuanto a la ubicación de puntos ni en la aplicación de la métrica pitagórica como se había previsto.

	teorema de Pitágoras (métrica pitagórica), por lo que será necesario promover que en el trabajo grupal entre los mismos estudiantes aclaren y refuercen dichos conocimientos.	
Actividad N° 04: **Otras métricas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$.**	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en forma individual, antes de pasar a la demostración, se familiaricen con la métrica del máximo calculando distancias entre dos puntos en el plano con dicha métrica. ▪ Luego, trabajando en equipos deben demostrar que $\mathbb{R}^2$ provisto de la métrica del máximo es un espacio métrico. ▪ Del mismo modo deben probar que $(\mathbb{R}, d_2)$, donde d_2 es la métrica discreta, es un espacio métrico. ▪ En base a la investigación bibliográfica y la creatividad del grupo es posible que puedan plantear otro tipo de métricas tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{R}^2$. ▪ Es posible que los estudiantes muestren dificultad en la comprensión y el manejo de la métrica discreta, por lo que será necesario enfatizar el concepto de métrica. ▪ Si bien, ya están familiarizados con la desigualdad triangular a modo de comprobación o verificación, sin embargo es muy probable que muestren dificultad en su demostración, por lo que será necesario orientar a través de las propiedades de la desigualdad en $\mathbb{R}$.	▪ Los estudiantes muestran dificultades al calcular distancias entre dos puntos en el plano con la métrica del máximo. La dificultad es casi generalizada al intentar realizar su interpretación geométrica. ▪ En cuanto a la demostración de las propiedades de las diferentes métricas (del máximo, de la suma, discreta y otros) definidas en $\mathbb{R}^2$, si bien la mayoría logra hacerlo correctamente, todos muestran mayor o menor dificultad en la demostración de la desigualdad triangular. Además ninguno justifica las demostraciones que realizan. ▪ Como se esperaba los estudiantes muestran resistencia frente a nuevas métricas, como sucede con la métrica discreta.
Actividad N° 05: **¡Qué bonita vecindad…!**	▪ A partir de la situación de contexto real propuesta, se espera que los estudiantes en forma individual elaboren el concepto de vecindad con sus propias palabras identificando sus elementos fundamentales (centro y radio).	▪ Tal como se había previsto, el contexto seleccionado ayudó significativamente en la construcción del concepto de vecindad y que fue base para la formulación en términos algebraicos. ▪ Los estudiantes, a través del análisis de la situación propuesta logran

	▪ Asimismo en base a las preguntas planteadas y a la variación que se hace de expresiones como: "vecinos que se encuentran a menos de 2m de distancia", "… a 2m o menos de distancia", … a 2m de distancia exactamente, se espera que logren diferenciar las vecindades abiertas, cerradas, y esferas. ▪ Luego en equipos se espera que mejoren sus conceptualizaciones.	establecer algunos requisitos que definen una vecindad, como son: un punto de referencia (centro) y la distancia de dicho punto a cualquiera de los elementos (radio). ▪ Los estudiantes desde la situación propuesta diferencian y relacionan vecindades abiertas, cerradas y la esfera. ▪ Un grupo de estudiantes logra proponer definir una vecindad como: $V(P)=\{x/d(x,P)\leq r\}$.
Actividad N° 06: **Vecindades en la recta**	▪ Se espera que a partir de las gráficas identifiquen las diferencias entre los tres conjuntos y las asocien a la variación que se hace de los signos de desigualdad e igualdad: <, ≤ e =. Asimismo deben establecer relaciones entre ellos. ▪ En base a la notación simbólica dada de vecindad abierta, se espera que expresen vecindades y esferas en $\mathbb{R}$ usando diversos registros. ▪ Se espera que dadas diversas expresiones algebraicas (en lenguaje conjuntista, usando la notación de intervalos, valor absoluto, igualdades y desigualdades) los estudiantes reconozcan vecindades y esferas, identificando su centro y su radio. ▪ Finalmente los estudiantes deben consolidar sus aprendizajes describiendo las características gráficas y expresando simbólicamente de manera general vecindades abiertas, cerradas y esfera. ▪ La intervención del docente se limita a aclarar las indicaciones o ítems que pudieran resultar poco comprensibles, y orientar que sean los mismos alumnos que superen sus dificultades mediante la interacción entre ellos mismos.	▪ En un inicio los estudiantes no tienen clara la idea de vecindades en la recta. Dado un radio y centro en el origen dibujan circunferencias y no intervalos, lo que repercute en las relaciones que establecen entre ellos. ▪ Trabajando en grupos, la mayoría supera las deficiencias presentadas y representan vecindades simbólicamente, usando desigualdades, la notación conjuntista, y la notación de intervalos. Asimismo resuelven operaciones con vecindades correctamente. ▪ Los estudiantes trabajando en equipos logran formalizar el concepto matemático de distancia así como sus propiedades. ▪ Les resulta más fácil representar tanto algebraica como gráficamente vecindades y esferas con centros y radios establecidos, que determinar el centro y el radio dada la vecindad (en sus diversas formas).

Actividad N° 07: **El alcance del burrito…!**	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en forma individual, a partir de la situación, sus experiencias vivenciales y respondiendo a las preguntas formuladas afiancen el concepto de vecindad, identificando sus elementos. ▪ Asimismo se espera que establezcan diversas relaciones entre las vecindades abiertas, cerradas y la esfera, en el contexto propuesto, y a partir de ellas elaboren sus conceptualizaciones tanto en forma verbal como simbólica. ▪ Luego, trabajando en equipos se espera que formulen otros ejemplos de vecindades relacionados a su contexto real. ▪ En esta actividad se espera que la intervención del docente sea mínima, pues se sabe que en situaciones contextualizadas los estudiantes suelen tener mayor motivación y por consecuencia mayor comprensión.	▪ Como se esperaba la actividad propuesta ayudó mucho en la identificación de los elementos de una vecindad, y complementó el concepto de vecindad. ▪ Como se esperaba, tanto en forma individual como grupal dan ejemplos de contexto real sobre vecindades abiertas, cerradas y esferas, lo que evidencia el concepto que tienen. Asimismo expresan con sus propias palabras dicho concepto. ▪ Algunos trabajando en equipos inclusive formulan dichos conceptos matemáticamente. ▪ Los gráficos que proponen sobre vecindades generalmente son circulares, lo que demuestra una fuerte inclinación al uso de la métrica pitagórica.
Actividad N° 08: **Vecindades en $\mathbb{R}^2$.**	▪ Se espera que los estudiantes afiancen sus conocimientos sobre vecindad y el manejo de la métrica pitagórica en $\mathbb{R}^2$, identificando la forma circular de dichas vecindades. ▪ Asimismo dada una vecindad, abierta, cerrada o la esfera deben hacer variar convenientemente los signos $<$, $\leq$ e $=$ para generar cada tipo de vecindad o esfera, estableciendo relaciones (de inclusión u otra). ▪ En el trabajo grupal, se espera que los estudiantes apliquen la métrica del máximo definida en la Actividad N° 4, representen la esfera en el plano, y establezcan relaciones con la esfera obtenida con la métrica pitagórica, con el mismo centro y el mismo radio.	▪ Los estudiantes muestran confusiones tanto en la representación gráfica como en la denominación de las vecindades en $\mathbb{R}^2$ con la métrica pitagórica. ▪ Como se esperaba manejan bien la representación algebraica de las vecindades, abiertas, cerradas o esferas, haciendo variar convenientemente los signos $<$, $\leq$ e $=$. Sin embargo, muestran deficiencias en las relaciones que establecen entre ellas. ▪ Los estudiantes trabajando en equipo y con algunas orientaciones del docente logran representar correctamente la esfera con centro (2,1) y radio 3 con la métrica del máximo, pese a que aún no logran un tratamiento algebraico adecuado, principalmente por la presencia del valor absoluto.

	▪ En algunos casos los estudiantes no logran graficar adecuadamente vecindades en $\mathbb{R}^2$ con la métrica del máximo por lo que el docente mediante preguntas y la revisión de la definición de la misma, debe lograr que los mismos estudiantes superen sus dificultades.	
Actividad N° 09: **Raras vecindades.**	▪ Se espera que los estudiantes trabajando en equipos y en base a las actividades anteriores grafiquen en el plano, las vecindades de acuerdo a las definiciones algebraicas de la métrica del máximo y la métrica de la suma, estableciendo relaciones entre ellas. ▪ Además se espera que realicen operaciones (unión, intersección, diferencia, etc.) con dichas vecindades determinando si los nuevos conjuntos obtenidos son a su vez vecindades o esferas. ▪ Generalmente los estudiantes tienen dificultades para expresar algebraicamente la unión, intersección o diferencia de vecindades. Por lo que el docente a través de nuevas repreguntas y ejemplos debe encaminarlos para que los mismos estudiantes logren superar sus dificultades.	▪ Como se esperaba los estudiantes trabajando en equipos logran graficar en el plano, vecindades abiertas, cerradas y esferas con las métricas del máximo y la suma, aunque no indican ni el centro ni el radio. Estas gráficas les permiten establecer relaciones adecuadas entre ellas. Aún persisten algunas deficiencias en el manejo algebraico. ▪ Las denominaciones de las vecindades graficadas no siempre son correctas. Usan las denominaciones de cuadrado, rombo, círculo y circunferencia, aunque no correspondan. ▪ Las relaciones conjuntistas entre las vecindades no siempre son correctas.
Actividad N° 10: **La vecindad del taxista.**	▪ Es posible que los estudiantes a partir de la observación de la gráfica identifiquen fácilmente el centro, y con alguna dificultad el radio, por lo que será necesario apoyar a través de repreguntas, o sugerir revisar la definición de la métrica de la suma. ▪ Además por las situaciones similares resueltas en las actividades anteriores es posible que formulen algebraicamente la vecindad e identifiquen que se trata de una vecindad abierta. ▪ Por otro lado, trabajando en grupos y en base a las gráficas que ya conocen en $\mathbb{R}^2$, es posible que logren graficar las vecindades en $\mathbb{R}^3$ dadas algebraicamente, o conociendo el centro, el radio y la métrica. En caso contrario, se orientará a revisar las definiciones de	▪ Dada la gráfica de la vecindad abierta con la métrica de la suma, solo algunos estudiantes logran identificar su centro y su radio. Les dificulta reconocer el tipo de métrica usada así como su representación algebraica. ▪ Pocos estudiantes logran graficar y expresar algebraicamente vecindades en $\mathbb{R}^3$ con la métrica pitagórica y del máximo. Aún son mucho menos aquéllos que pueden representar vecindades con la métrica de la suma.

	cada una de las métricas y la ubicación de puntos en $\mathbb{R}^3$. ▪ Se espera que los estudiantes por simple inspección identifiquen vecindades en $\mathbb{R}^2$, tanto en el registro simbólico como gráfico. ▪ Además esperamos que los estudiantes infieran las formas de las vecindades en $\mathbb{R}^3$, con los tres tipos de métricas (pitagórica, del máximo y de la suma). ▪ Como última actividad se espera que los estudiantes, expliquen sus respuestas argumentando con coherencia y rigor matemático, usando de manera apropiada los conceptos matemáticos construidos. Asimismo den ejemplos y contraejemplos sencillos sobre vecindades y esferas. ▪ A partir de las construcciones de los estudiantes el docente ayudará a consolidar los conceptos de vecindades abiertas, cerradas, y esferas, y su representación en los diferentes registros y espacios métricos.	

6.2 VALIDACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

Las hipótesis que planteamos son los comportamientos que generalmente se observan en los estudiantes cuando aprenden la topología métrica. Por lo que resulta significativo contrastar con los resultados obtenidos de la aplicación de la presente secuencia didáctica.

HIPÓTESIS	VALIDACIÓN
a. Los estudiantes no manejan un concepto adecuado de valor absoluto de números reales, solo calculan de manera mecánica sin poder realizar su interpretación geométrica.	▪ Las deficiencias en el manejo del valor absoluto se hacen evidentes en el concepto de distancia en la recta, así como en la aplicación de las métricas del máximo y la suma.
b. Tienen dificultades en la interpretación de intervalos, muchas veces lo restringen únicamente a los números enteros.	▪ Las dificultades en la interpretación de intervalos se evidenció en la Actividad N° 2, es decir relacionado al cálculo de distancias en la recta, al manejo del valor absoluto y la representación gráfica de desigualdades. Aunque no se evidenció la restricción a los números enteros.
c. La mayoría de estudiantes muestran dificultades al resolver inecuaciones con valor absoluto e interpretar geométricamente su conjunto solución.	▪ La dificultad en el manejo de las inecuaciones con valor absoluto se hizo visible cuando los estudiantes tuvieron que graficar vecindades con la métrica del máximo y de la suma, así como de vecindades en la recta. Asimismo dificultó la demostración de la desigualdad triangular con dichas métricas.
d. Presentan serias dificultades al demostrar la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ provisto de la métrica usual; dificultad que se acrecienta en otros espacios métricos.	▪ Esta dificultad se observó en las actividades 3 y 4. Solo algunos estudiantes logran demostrar correctamente dicha propiedad. Esta dificultad se explicaría por las deficiencias en el manejo del concepto y propiedades de la desigualdad.

e. Algunos estudiantes logran comprender el concepto de distancia en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual, asimismo representan vecindades abiertas y cerradas en estos conjuntos solo con dichas métricas, pero muestran dificultades al trabajar con otras métricas.	▪ Las dificultades que tienen los estudiantes con otras métricas (del máximo y de la suma), están relacionadas principalmente a la dificultad en el manejo del valor absoluto y sus propiedades, principalmente de las desigualdades con valor absoluto.
f. Los estudiantes presentan deficiencias al representar vecindades abiertas, cerradas e incluso la esfera usando la métrica discreta.	▪ La dificultad se hizo evidente en la Actividad N° 4. Como las demás métricas se definen en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^{2,}$ los estudiantes desarrollan el concepto restringido solo a dichos conjuntos, y les resulta difícil romper dicho esquema mental.
g. Tienen dificultades al realizar las demostraciones de las propiedades de los espacios métricos, generalmente no justifican el procedimiento.	▪ Esta dificultad se evidenció en la actividad 4, donde se pide demostrar o probar si determinadas funciones definidas en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ son métricas. Se puede observar que los estudiantes obvian completamente la argumentación o justificación de los procesos de inferencia. Además muchos presentan dificultad en la prueba de la propiedad simétrica, generalmente prueban la implicación de izquierda a derecha, aparte de la dificultad en la demostración de la desigualdad triangular que ya se mencionó antes. Otros muestran deficiencias en la comprensión de las funciones, principalmente cuando estas involucran el valor absoluto.

CONCLUSIONES

Las situaciones de aprendizaje son singulares e irrepetibles; sin embargo, algunos comportamientos de los estudiantes se reproducen una y otra vez, al margen de los múltiples factores condicionantes como pueden ser el espacio y el tiempo, entre otros.

Por ello, al finalizar el presente estudio consideramos importante puntualizar algunos resultados que pueden ser útiles para afrontar las dificultades que con frecuencia se presentan, afianzar los logros encontrados y prever errores recurrentes, tanto en el proceso de enseñanza - aprendizaje como en la realización de estudios de investigación acerca de la topología métrica.

Respecto a las hipótesis:

Hipótesis (a):

Los estudiantes no manejan un concepto adecuado de valor absoluto de números reales, solo calculan de manera mecánica sin poder realizar su interpretación geométrica.

01. Las deficiencias en el manejo del valor absoluto se hacen evidentes en el concepto y el cálculo de distancias en la recta. También repercute en la representación de vecindades usando las métricas del máximo y la suma.

Hipótesis (b):

Los estudiantes tienen dificultades en la interpretación de intervalos, muchas veces lo restringen únicamente a los números enteros.

02. La dificultad en la interpretación de intervalos que muestran los estudiantes la encontramos ligada a las deficiencias en el manejo de las desigualdades, sus propiedades y su interpretación en la recta, así como al manejo del valor absoluto. En el presente estudio no se evidenció la restricción a los números enteros.

Hipótesis (c):

La mayoría de estudiantes muestran dificultades al resolver inecuaciones con valor absoluto e interpretar geométricamente su conjunto solución.

03. La dificultad en el manejo de las inecuaciones con valor absoluto se hace visible en el proceso de representación gráfica de vecindades con la métrica del máximo y de

la suma, así como de vecindades en la recta. Asimismo dificulta la demostración de la desigualdad triangular con dichas métricas.

Hipótesis (d):

Los estudiantes presentan serias dificultades al demostrar la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ provisto de la métrica usual; dificultad que se acrecienta en otros espacios métricos.

04. La dificultad en la demostración de la desigualdad triangular es generalizado con todo tipo de métricas. Esta dificultad está relacionada generalmente a las deficiencias en el manejo del concepto y propiedades de la desigualdad.

Hipótesis (e):

Algunos estudiantes logran comprender el concepto de distancia en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual, asimismo representan vecindades abiertas y cerradas en estos conjuntos solo con dichas métricas, pero muestran dificultades al trabajar con otras métricas.

05. Las dificultades que tienen los estudiantes con otras métricas (del máximo y de la suma), están relacionadas principalmente a la dificultad en el manejo del valor absoluto y sus propiedades, principalmente de las desigualdades con valor absoluto.

Hipótesis (f):

Los estudiantes presentan deficiencias al representar vecindades abiertas, cerradas e incluso la esfera usando la métrica discreta.

06. Como casi siempre se trabaja con métricas definidas en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$, los estudiantes desarrollan el concepto restringido solo a dichos conjuntos, les resulta difícil romper dicho esquema mental.

Hipótesis (g):

La mayoría de estudiantes tienen dificultades al realizar las demostraciones de las propiedades de los espacios métricos, generalmente no justifican el procedimiento.

07. Las dificultades en los procesos de demostración de las propiedades de los espacios métricos generalmente están relacionados a las deficiencias en la comprensión de las respectivas métricas, principalmente cuando éstas involucran el valor absoluto. Específicamente esta dificultad corresponde a la demostración de la desigualdad triangular. Además se observa que la gran mayoría demuestra la propiedad

simétrica, solo de manera parcial, es decir solo prueban la implicación de izquierda a derecha, y no de derecha a izquierda. Asimismo es generalizado el hecho que los estudiantes no justifiquen el proceso de demostración.

Respecto al logro de los objetivos de la investigación:

Objetivo específico 1:

Analizar y seleccionar los planteamientos teórico-científicos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Métrica y de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

08. El objetivo se logra con la investigación bibliográfica realizada al inicio y en el proceso del presente estudio, seguido de la etapa de análisis y síntesis, que permitieron diseñar convenientemente la secuencia didáctica.

Objetivo específico 2:

Diseñar y elaborar una Secuencia Didáctica sobre la Métrica y sus aplicaciones teniendo en cuenta los planteamientos de la Teoría de Situaciones Didácticas y siguiendo el proceso metodológico de la Ingeniería Didáctica.

09. El diseño de la Secuencia Didáctica se realizó teniendo en cuenta los fundamentos de la Teoría de Situaciones Didácticas, con el propósito de que los estudiantes construyan sus conocimientos a partir de situaciones cotidianas, pasando por situaciones de acción, formulación y validación. También resultó fundamental el análisis preliminar considerando los componentes epistemológico, cognitivo y didáctico. Asimismo, el análisis a priori nos permitió formular las hipótesis, los comportamientos esperados y las variables didácticas.

Objetivo específico 3:

Aplicar y validar la Secuencia Didáctica propuesta en el marco metodológico de la Ingeniería Didáctica con estudiantes de la especialidad que cursan el VIII Ciclo Académico en el Semestre 2011-I.

10. En la aplicación de la Secuencia Didáctica resultó fundamental el contrato didáctico realizado entre el docente y los estudiantes, quienes asumieron tanto en forma individual como grupal la responsabilidad de su propio aprendizaje. En situaciones

de dificultad la acción del docente se limitó a *devolverles* la situación a través de nuevas preguntas o ejemplos sencillos; finalmente la institucionalización se llevó a cabo con la participación activa de los estudiantes y sobre lo que ellos habían logrado formular y validar en sus respectivos grupos.

11. Finalmente consideramos importante enfatizar que las situaciones de *acción* se favorecen a través de situaciones contextualizadas, pues los alumnos se muestran más motivados y se involucran mejor en las actividades de aprendizaje; otra estrategia eficaz para lograr que los estudiantes se comprometan con las situaciones planteadas, es que aborden los problemas en pares.

12. En el proceso de *formulación* los estudiantes generalmente usan lenguaje matemático (simbólico), aunque con ciertas deficiencias; pero resulta muy enriquecedor pues permite que entre los mismos estudiantes mejoren la comprensión y la formulación de los conceptos cada vez con mayor rigor. La *validación* de sus construcciones o soluciones, los estudiantes generalmente lo hacen usando ejemplos, hay necesidad de incidir en el uso de los conceptos a nivel formal.

RECOMENDACIONES

Al finalizar el presente trabajo, además de las conclusiones, consideramos importante realizar las siguientes recomendaciones, con el propósito de motivar la realización de estudios similares, prever dificultades comunes que suelen presentarse y obtener mejores resultados.

01. Para abordar los conceptos de la topología métrica es conveniente diseñar o formular situaciones relacionadas al contexto de los estudiantes; este hecho motiva y ayuda significativamente a la comprensión de los conceptos fundamentales.

02. Las dificultades que tienen los estudiantes en la formalización de los conceptos de la topología métrica se pueden superar si los cursos previos se abordan desde un enfoque metodológico que favorezca la comprensión y no la memorización de dichos conceptos; es decir, se deben usar estrategias metodológicas que permitan que los estudiantes construyan y elaboren los conceptos y no sean simples receptores de los conocimientos matemáticos.

03. Resulta fundamental propiciar situaciones que permitan que los estudiantes sean los que formulen los conceptos, hagan conjeturas, prueben hipótesis, resuelvan los problemas; para ello, entre tantas propuestas en didáctica de la matemática, valoramos la propuesta de la TSD de Brousseau, quien como insistimos plantea la necesidad de que los estudiantes transiten por situaciones de acción, formulación y validación, en la construcción de sus aprendizajes.

04. El proceso de ***formulación*** es importante en la comprensión de los conceptos pues permite la construcción de los mismos desde las nociones o preconceptos que los estudiantes tienen, pasando muchas veces desde el lenguaje proto o paramatemático al manejo del lenguaje matemático (simbólico, formal y riguroso).

05. La etapa de ***validación*** resulta enriquecedora, pues permite que los estudiantes socialicen sus hallazgos o soluciones contrastando con la de sus compañeros, exige coherencia y precisión para explicar o argumentar sus resultados y opiniones, reforzando sus conocimientos previos, y valorando sus propios conocimientos y la de sus compañeros.

06. Para mejorar la aplicación de una secuencia didáctica basada en la TSD es fundamental incidir en el contrato didáctico sobre la importancia de la asistencia y

puntualidad a las clases de todos los estudiantes, de manera que todos puedan pasar por todas las situaciones a-didácticas: acción, formulación y validación, de lo contrario se generan dificultades no solo para el mismo alumno sino para los demás estudiantes.

07. Es igualmente importante asignar intervalos de tiempo razonables de acuerdo a la complejidad de cada una de las situaciones planteadas, comprometiendo a los coordinadores de grupo y los estudiantes en general en el uso racional del mismo.

08. Como es comprensible este tipo de metodologías requieren mayor tiempo que una metodología expositiva, este hecho es necesario tomarlo en cuenta desde el momento de la programación de la asignatura; sin embargo, el tiempo invertido no es en vano, pues luego de la aplicación de la secuencia didáctica la actitud de los alumnos es distinta, muestran un mayor interés y compromiso con su aprendizaje, así como una mayor seguridad y valoración de sus capacidades que les permite aprender solos.

09. Como punto de partida en la elaboración de una secuencia didáctica, no solo con fines de investigación, sino en el proceso de enseñanza-aprendizaje cotidiano, es muy importante realizar un análisis previo de los tres elementos que interactúan en toda situación didáctica, como son: el conocimiento (análisis epistemológico), el docente (análisis didáctico) y el alumno (análisis cognitivo).

10. En educación superior, el proceso de institucionalización se favorece con el uso de la bibliografía seleccionada como complemento a la intervención del docente; por lo que se sugiere implementar las bibliotecas de nuestras Universidades con un adecuado material bibliográfico.

11. Es importante profundizar el estudio de los planteamientos de la Teoría de Situaciones y la Ingeniería Didáctica, para su aplicación en la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles educativos.

12. Finalmente sugerimos que como formadores de maestros asumamos con mayor responsabilidad la investigación en didáctica de la matemática, involucrando a los mismos estudiantes, futuros docentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Artigue, M. y otros. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bastán, M. y otros. (2004). *Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática*. Universidad Nacional de Río Cuarto - Argentina.

Benitez, M. y O. Cárdenas. (2001). Proyecto pedagógico *"Pensar Matemáticamente: Una manera distinta de enfocar el ambiente matemático en la escuela"*. IED Entre Nubes Sur Oriental sedes Santa Rita S. O. y Canadá Güira (2001).

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros.

Bushaw, D. (1970). *Fundamentos de Topología General*. México: Limusa S.A.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2005). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Lima: El Comercio, S.A.

Díaz, H. (2006). Panorama actual de la educación peruana. Una visión del período 2000-2006 y su proyección al 2011. http://www.educared.edu.pe/modulo/upload/116853183.doc

Espacios métricos. *¿Cuál es la diferencia entre cerca y lejos?* http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/APtopo1.pdf

Espacios métricos con mosaicos http://computacion.cs.cinvestav.mx/~acaceres/docs/dinR110/node11.html

Espacio métrico de configuraciones http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/summer99/seck/node22.html

Figueroa Mora, K. http://www.dcc.uchile.cl/~gnavarro/algoritmos/tesisKarinaCorta.pdf

Garro Moreno, D. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/trabajosdehistoria/HISTORIADELATOPOLOGIA.pdf

Hocking, J. y C. Young. (1975). *Topología*. Barcelona: Edit. Reverté S.A.

Horvath, J. (1969). *Introducción a la Topología General*. Monografía N° 09. OEA.

Kuratowski, K. (1966). *Introducción a la Teoría de Conjuntos y la Topología*. Madrid: Edit. Vicens Vives.

La enseñanza de la topología a través de la cartografía. http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-88824.html

Lezama, F. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias, en la especialidad de Matemática Educativa. México: CINVESTAV.

Lipschutz, Seymour. (1980). *Topología General*. Colección Schaum.

López, R. (2008). *Topología*. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~rcamino/pid.htm

Mansfield, M. (1974). *Introducción a la Topología*. Madrid: Edit. Alhambra S.A.

Moreno, O. (2011). Un estudio didáctico de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal. Lima: PUC. (Tesis)

Ortiz, A. (1985). *Introducción a la Topología*. Trujillo - Perú.

Panizza, M. (s.f.). *Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas*. http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

Relime Vol 9 – Nº 1 http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33590103.pdf

Revista Unión N° 21. Topología. http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Sadovsky, P. (2005). *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires. http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/teoria_situaciones.pdf

Tola, J. (1992) *Introducción a la Topología*. Lima: Fondo Editorial PUCP.

Universidad Nacional de Rosario. (2003). *Espacios métricos*. http://www.fceia.unr.edu.ar/~fismat2/practicas03/apun3-fismat2-2003.pdf

ANEXOS

ANEXO N º 01

MATRIZ DE EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

ASIGNATURA: TOPOLOGÍA GENERAL

CRITERIOS (CAPACIDADES)	INDICADORES	PESO	PTJE	Nº Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
1. Discriminar los conjuntos finitos de los conjuntos infinitos.	Identifica conjuntos finitos.	20%	4p	1 – Alternativa múltiple.	Prueba escrita
	Determina el número de elementos de intervalos cerrados.	10%	3p	1 – Ítem con dos alternativas.	
2. Identificar las propiedades de la función distancia en $\mathbb{R}$.	Realiza operaciones con intervalos.	20%	3p	1 – Ítem de Verdadero y Falso	
	Compara distancias en $\mathbb{R}$.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
3. Realizar operaciones con intervalos reales y graficarlos.	Calcula distancias entre dos puntos en la recta $\mathbb{R}$.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	
4. Representar gráficamente y caracterizar subconjuntos en $\mathbb{R}^2$.	Representa gráficamente una inecuación lineal en $\mathbb{R}^2$.	20%	4p	1 – Ítem de desarrollo	

ANEXO N º 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN
Enrique Guzmán y Valle - LA CANTUTA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA
CURSO: TOPOLOGÍA GENERAL

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

ALUMNO (A) : ________________________________ CÓDIGO: ______________

PROMOCIÓN : ______________________ FECHA: ____/_____/_____

PROFESOR : Hernán José Espinoza Rojas

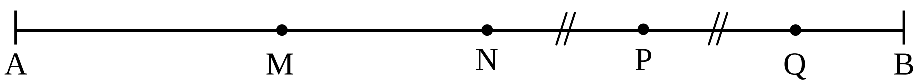
Lee cuidadosamente las siguientes preguntas, resuelva y responda. (Tiene 60 minutos).

1. ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son finitos? Justifique su respuesta. (4p)
   a) $A = \{x \in \mathbb{Z} / x - 1 \leq 0\}$
   b) $B = (-2, 3]$
   c) $C = \{x \in \mathbb{N} / 4 < x < 5\}$
   d) $D = \mathbb{R}$ (números reales)
   e) $E = \{-2, 1, 4, 7, \ldots, 121, 124\}$ … [125]

2. Dados los intervalos $A = [0, 3]$ y $B = [0, 10]$
   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (3p)
   a) B tiene más elementos que A.
   b) A y B tienen el mismo número de elementos.
   Explique su respuesta.

3. Dados los intervalos $H = [-2, 5]$, $J =]0, 4[$ y $B = [-5, 1[$
   Resuelve y grafica las siguientes operaciones: [126] (4p)
   a) $(H \cup B) \cap J$
   b) $(J - H) \Delta B'$

4. En un segmento $\overline{AB}$ se ubican los puntos M, N, P y Q, como se muestra en el gráfico:

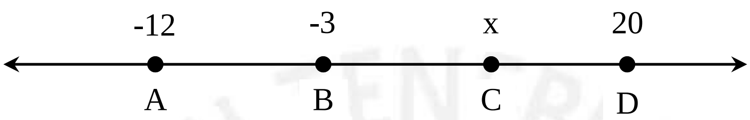


[125] Se cambió la pregunta respecto a lo que inicialmente se había planteado.
[126] Se redujo el número de sub preguntas por razones de tiempo.

Usando el gráfico y la distancia entre dos puntos en ℝ, determina la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones: (3p)

a) d (M, P) $\leq$ d(M, N) + d (N, P) ( )
b) d (Q, Q) $\leq$ d (N, P) ( )
c) d (N, P) < d(P, N) ( )
d) d (A, M) + d (N, P) = d (A, P) + d (P, Q) ( )

5. En el siguiente gráfico: (2p)



Sabiendo que: d (A, C) = d (B, D), halla la coordenada del punto C.

6. Dada la inecuación: 2x – 3y > 10. (4p)
a) Representa gráficamente dicha inecuación.
b) ¿La recta frontera es parte de la solución? Explica tu respuesta.
c) Escribe la inecuación del semiplano opuesto.

ANEXO Nº 03

MATRIZ DE LA EVALUACIÓN DE ENTRADA

CAPACIDADES	INDICADORES	PESO	PTJE	Nº Y TIPO DE PREGUNTA	INSTRUMENTO
1.- Reconocen la topología como disciplina matemática tomando en cuenta su evolución histórica.	Reconocen la denominación inicial de la Topología y el matemático que inició su estudio.	10%	2p	1 – Ítem de alternativa múltiple	Prueba Escrita
	Identifican al matemático que resolvió el misterio de los Puentes de Köenisberg.	05%	1p	1 – Ítem de alternativa múltiple	
	Reconocen el concepto actual de la Topología como disciplina matemática.	10%	2p	1 – Ítem de alternativa múltiple y desarrollo	
2.- Identifican espacios métricos en $\mathbb{R}$ y realizan operaciones con subconjuntos de $\mathbb{R}$.	Identifican espacios métricos en $\mathbb{R}$.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	Prueba la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ con la métrica del máximo.	10%	2p	1 – Ítem de alternativa múltiple y desarrollo	
	Clasifican vecindades en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.	15%	3p	1 – Ítem de descarte y desarrollo.	
	Hallan la unión y la intersección de intervalos y reconocen si son conjuntos abiertos o cerrados.	10%	2p	1 – Ítem de alternativa múltiple y desarrollo	
3.- Identifican el interior, exterior y frontera de conjuntos en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.	Identifican punto interior, exterior y frontera en subconjuntos de $\mathbb{R}$.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	
	Halla el interior, exterior y frontera de conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$) en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.	10%	2p	1 – Ítem de alternativa múltiple y desarrollo	
	Identificación de situaciones reales que involucran conceptos topológicos.	10%	2p	1 – Ítem de desarrollo	

ANEXO N ° 04

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN
ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE - LA CANTUTA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA
CURSO: TOPOLOGÍA GENERAL

PRUEBA DE ENTRADA

¿Cuánto conoces acerca de la medida, los espacios métricos y la topología?

ALUMNO (A): ____ CÓDIGO: ________________

PROMOCIÓN: _______________________ FECHA: _____/_____/______

PROFESOR: Hernán José Espinoza Rojas

Lee con atención las siguientes preguntas, analiza cada una de ellas y responde convenientemente. (Dispones de 60 minutos).

1. Las ideas generales de la Topología surgen con las investigaciones de ________________; e inicialmente nació con el nombre de ____________________ (1p)
   A) Galois - Geometría algebraica B) Pitágoras - Geometría proyectiva
   C) Hilbert - Teoría de Grafos D) Cantor - Análisis Situs

2. Uno de los siguientes matemáticos, resolvió el misterio de los puentes de Köenisberg:
   A) Euclides B) Platón C) Cantor D) Euler
   (1p)

3. La topología se define como el estudio de: (1p)
   A) Las funciones derivables.
   B) Las nociones de continuidad en sentido general.
   C) Las funciones integrables.
   D) Las funciones discontinuas.
   Explique su respuesta:
   ____
   ____

4. ¿Será el par ($\mathbb{R}$, d) con d (x, y) = |x| + |y| un espacio métrico? (2p)
   SI ☐ NO ☐

   Justifique su respuesta:
   ____
   ____

5. En el espacio métrico ($\mathbb{R}$, d) con d (x,y) = |x - y|, los intervalos [a, b[y]a, b], son **conjuntos**: (2p)
   A) Abiertos B) Cerrados
   C) No son abiertos ni cerrados. D) Son conjuntos degenerados.

Justifique su respuesta:

____

____

6. En el espacio métrico ($\mathbb{R}$, d) con d (x, y) = |x - y|. Dados los conjuntos A = [-3,2[y B =]1,3]; la intersección (A $\cap$ B) y la unión (A $\cup$ B) son:
   (2p)
   A) Conjuntos abiertos
   B) Conjuntos cerrados.
   C) Conjunto abierto y conjunto cerrado.
   D) Conjunto cerrado y conjunto abierto.

   Justifique su respuesta:

   ____

   ____

7. En $\mathbb{R}$ definimos d (x, y) = máx {x, y}, ¿será d (x, z) $\leq$ d (x, y) + d (y, z)? (2p)
   Explique su respuesta.

   ____

   ____

8. En el espacio métrico ($\mathbb{R}$, d), con d(x, y) = |x - y|, dada la vecindad de centro ½ y radio 2, ¿será el punto x = 2/5, un punto interior, exterior o frontera? (1p)
   Justifique su respuesta:

   ____

   ____

9. Determine el interior de $\mathbb{N}$, el exterior de $\mathbb{Z}$ y la frontera de $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$ con la métrica usual (métrica euclídea)? (2p)

10. Identifica situaciones concretas en las que se presentan conceptos topológicos. (1p)

CLAVE DE RESPUESTAS

1 D	2 D	3 B	4 No	5 C
6 C	7 Sí	8 A		

ANEXO Nº 05

CUESTIONARIO Nº 01: ENCUESTA A LOS ESTUDIANTES

Estimado alumno(a): La presente encuesta tiene como propósito conocer tus necesidades y expectativas respecto a la asignatura de Topología para tenerlos en cuenta durante su desarrollo; por lo tanto te pedimos que contestes las preguntas con sinceridad y mucha seriedad.

Escriba una (x) para indicar su respuesta.

01. Sexo:
    a) Masculino ( ) b) Femenino ( )

02. Edad:
    a) Hasta 20 años ( ) b) De 21 a 25 ( )
    c) De 26 a 30 ( ) d) De 31 a más ( )

03. Estado civil:
    a) Soltero ( )
    b) Casado o conviviente ( )
    c) Otro ( )

04. Tipo de Institución Educativa donde terminó la secundaria:
    a) Público ( ) b) Privado ( )

05. Para ingresar a la UNE-EGV, se preparó:
    a) En la CEPREUNE ( )
    b) En otros Centros Pre-universitarios ( )
    c) Por su cuenta ( )
    d) No se preparó. ( )

06. Forma de Ingreso a la UNE-EGV:
    a) Examen de Admisión. ( )
    b) Exonerado por Primeros Puestos. ( )
    c) Exonerado por Título Profesional. ( )
    d) Otra. ¿Cuál?____________________

07. Tiempo diario que dedica al estudio (fuera de clases).
    a) No dispone de tiempo ( )
    b) Menos de una hora ( )
    c) De una a dos horas ( )
    d) Más de dos horas ( )

08. Generalmente estudia:
    a) Solo ( ) b) En grupo ( )

09. Generalmente estudia, cuando:
    a) Tiene examen. ( )
    b) Tiene tarea. ( )
    c) Otro. ¿Cuál? __________________

10. Cuando tiene dudas o desea profundizar en los cursos de especialidad, usualmente recurre a:
    a) Profesores de la UNE. ( )
    b) Profesores particulares. ( )
    c) Compañeros de aula. ( )
    d) Otro. Especifique: _________________

11. Usualmente realiza consultas bibliográficas en:
    a) Biblioteca de la UNE. ( )
    b) Biblioteca de otras instituciones. ( )
    c) Otro ( ) ¿Cuál? __________________

12. ¿Cómo califica su rendimiento académico en las asignaturas de especialidad (en la UNE)?
    a) Muy bueno ( ) b) Bueno ( )
    c) Regular ( ) d) Deficiente ( )

13. ¿Cómo califica su motivación respecto al estudio de las asignaturas de especialidad?
    a) Muy bueno ( ) b) Bueno ( )
    c) Regular ( ) d) Deficiente ( )

14. Considera que su formación académica en las asignaturas de especialidad hasta el momento es:
    a) Muy buena ( ) b) Buena ( )
    c) Regular ( ) d) Deficiente ( )

15. Actividad que realiza en forma paralela a sus estudios:
    a) Trabaja ( )
    b) Estudia otra carrera ( )
    c) Otra. ¿Cuál? ___________________

ANEXO Nº 06

CUESTIONARIO Nº 02: ENCUESTA DE SALIDA A LOS ESTUDIANTES

Estimado alumno(a):
Tu opinión es muy útil e importante, de manera que te pedimos seriedad y sinceridad al responder el siguiente cuestionario.

GRUPO: ____________________________ FECHA: _____/_____/_____

Instrucción: Califica las preguntas marcando un aspa (x) en el casillero correspondiente. Utiliza la escala del 1 al 5, en la que 1 es el mínimo puntaje y 5 es el máximo.

I.- EVALUANDO LAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Las actividades planteadas fueron interesantes y motivadoras.					
2	Las actividades propuestas fueron pertinentes y suficientes para lograr las capacidades planteadas.					
3	Las actividades planteadas fueron útiles en la comprensión de los conceptos.					
4	La secuencia de actividades fue adecuada.					
5	Las actividades propuestas se relacionaron con situaciones del contexto.					
6	Se tomaron en cuenta los aportes de los alumnos en la formalización de los conceptos y procedimientos.					
7	Los temas se abordaron con amplitud y profundidad.					
8	El trabajo en equipo ha sido importante en el aprendizaje.					
9	El material que se usó en clase ayudó a desarrollar las actividades y lograr los objetivos.					
10	Las orientaciones para desarrollar las actividades fueron claras.					
11	El tiempo asignado a cada actividad fue suficiente.					
12	El apoyo del profesor fue adecuado y oportuno.					
13	Los conocimientos que tenía Ud. fueron suficientes para desarrollar las actividades.					
14	Considera que las actividades de refuerzo propuestas fueron útiles para afianzar los conocimientos adquiridos en el aula.					
15	Considera que las evaluaciones le ayudaron a identificar y corregir sus errores oportunamente.					
16	La bibliografía recomendada le ha sido útil.					
17	Considera que el tema desarrollado es aplicable a la educación secundaria.					
18	Las actividades le han permitido asumir un mayor compromiso con su aprendizaje.					
19	Asigne un puntaje a sus logros en el desarrollo de la secuencia didáctica.					
20	Cuál es su valoración respecto a la metodología usada en el desarrollo de las actividades.					

II.- ¿EN QUÉ MEDIDA LAS ACTIVIDADES LE HAN PERMITIDO DESARROLLAR LAS SIGUIENTES ACTITUDES Y HABILIDADES?

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Motivación por el estudio de la Topología.					
2	Responsabilidad en el cumplimiento de las tareas establecidas.					
3	Compromiso con su superación profesional.					
4	Perseverancia en la solución de situaciones problemáticas.					
5	Trabajo en equipo.					
6	Valoración de sus propias capacidades.					
7	Capacidad de razonamiento y análisis.					
8	Capacidad de aprender a aprender.					
9	Capacidad para argumentar sus opiniones.					
10	Capacidad para matematizar situaciones.					

III.- ¿EN QUÉ MEDIDA CONSIDERA USTED HABER LOGRADO LAS SIGUIENTES CAPACIDADES?

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Identifica los principales problemas que dieron origen al estudio de la topología.					
2	Discrimina los conceptos topológicos en situaciones de su entorno.					
3	Formaliza la topología como una disciplina matemática cualitativa desarrollada a partir de situaciones de su entorno.					
4	Identifica los espacios métricos en diferentes conjuntos con diversas métricas.					
5	Representa gráficamente vecindades en espacios métricos.					
6	Relaciona espacios métricos.					
7	Demuestra propiedades en espacios métricos.					
8	Formula los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados.					
9	Demuestra las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados.					
10	Discrimina los conceptos de interior, exterior y frontera de conjuntos a partir de situaciones de su entorno.					
11	Demuestra las propiedades de interior, exterior y frontera de conjuntos.					
12	Define el concepto de clausura o adherencia de conjuntos.					
13	Demuestra las propiedades de la clausura o adherencia de conjuntos.					
14	Discrimina sucesiones en espacios métricos.					
15	Interpreta la convergencia de sucesiones en espacios métricos.					
16	Demuestra la convergencia de sucesiones en espacios métricos.					
17	Interpreta sucesiones de Cauchy en espacios métricos.					

18	Define la continuidad en espacios métricos.					
19	Demuestra propiedades de la continuidad en espacios métricos.					
20	Define homeomorfismo en espacios métricos.					
21	Analiza la continuidad y homeomorfismo en espacios métricos.					
22	Analiza el DCB de la educación secundaria.					
23	Identifica los conceptos topológicos en el DCB.					
24	Formula situaciones problemáticas contextualizadas de aplicación de los conceptos topológicos.					
25	Propone actividades de aprendizaje para la enseñanza de los conceptos topológicos en la educación secundaria incorporando recursos didácticos de su entorno y estrategias didácticas creativas.					

OBSERVACIONES O SUGERENCIAS:

ANEXO Nº 07

SECUENCIA DIDÁCTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN
ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE – LA CANTUTA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA
CURSO: TOPOLOGÍA GENERAL

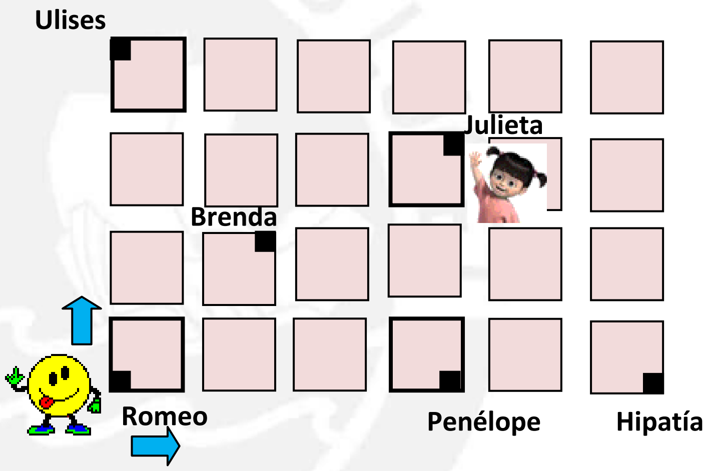
LA MÉTRICA Y SUS PROPIEDADES

<u>Actividad N° 1</u>: Recorriendo caminos…

Dada la siguiente situación, resuelve las preguntas planteadas:

En el gráfico observamos una pequeña población de 16 manzanas donde viven Romeo, Julieta y sus amigos. Romeo para visitar a Julieta tiene ciertas restricciones: solo le está permitido caminar en las direcciones que indican las flechas: ➡ ⬆

Y puede regresar de una casa a otra casa en sentido inverso.



a. ¿Cuántas cuadras tendrá que caminar Romeo para visitar a Penélope?

b. ¿Cuántas cuadras tendrá que caminar Romeo para visitar a Julieta?

Trace todos los caminos posibles que puede tomar Romeo para trasladarse a la casa de Julieta.

- ¿Cuál es el camino más corto?, ¿y cuál es el camino más largo?
- ¿Podría hacer un recorrido en línea recta?; ¿muestre en qué situaciones es posible?

c. ¿A cuántas cuadras de la casa de Ulises se encuentra la casa de Penélope?

d. Resumiendo, complete el cuadro adjunto:

Ubicaciones	Recorridos (en cuadras)
De Romeo a Penélope	
De Hipatía a …………………….	5
De Romeo a Ulises	
De ……………….. a Brenda	4
De Romeo a Julieta	
De Penélope a Julieta	
De Ulises a ………………….	10

e. ¿Has podido encontrar valores diferentes para un mismo recorrido?
   Entonces, ¿qué puedes concluir?

En grupos de 4

a. ¿Cuál es el concepto matemático involucrado en las situaciones anteriores?
b. ¿Cuáles son las características de dicho concepto?
   Formulen dicho concepto.
c. Completen el siguiente cuadro:

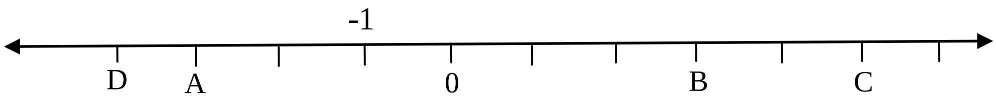
Ubicaciones referenciales	Recorridos (en cuadras)
De Penélope a Romeo	
De Romeo a Ulises	
De Romeo a Julieta	
De Penélope a Julieta	

d. Según el cuadro, ¿se puede decir que en el camino de regreso se ha recorrido una longitud negativa[62]? Comparen los recorridos de ida y vuelta, y escriban sus conclusiones.
e. Cierto día, Romeo en el camino a la casa de Julieta, visitó a Brenda (luego continuó su recorrido a la casa de Julieta). Comparen este recorrido con el recorrido que Romeo hace cuando va directamente a la casa de Julieta.
f. Planteen una situación donde la distancia recorrida sea cero (0); ¿qué pueden concluir?
g. Sinteticen el concepto matemático involucrado en esta situación y sus respectivas propiedades, con sus propias palabras.

[62] Es recomendable que en esta actividad inicial (ítems de a hasta d) se sustituya el término distancia por el de "longitud", para que a partir de ello los estudiantes generen el concepto de distancia.

<u>Actividad N° 2</u>: Calculando distancias en la recta.

Dada la recta:



a. Calcule la distancia entre los puntos A y C.

b. Calcule la distancia entre los puntos 125 y B.

c. La distancia entre el punto P al punto 4 es 20, ¿cuál es la coordenada de P?

d. ¿Es cierto que la distancia entre A y C es mayor que la distancia entre D y B?

e. Los puntos A y B, ¿se encuentran a la misma distancia del punto 0?

f. ¿La distancia de -1 a 0 es -1?

g. Verifique si, la distancia de A a B, más la distancia de B a C es igual a la distancia de A a C.

h. ¿Cómo se calcula la distancia entre dos puntos en la recta?
Exprese con sus propias palabras.

En grupos de 4

Antes de desarrollar las siguientes preguntas, comparen y discutan sus respuestas a las preguntas anteriores.

Expresen en forma gráfica y simbólica los siguientes enunciados:

a. La distancia de 0 a x es 9.

b. El valor absoluto de "y" es menor que 5.

c. La distancia entre A y -2 es por lo menos 4.

d. ¿Cómo interpreta el concepto de distancia entre dos puntos en la recta?

e. Expresen usando lenguaje simbólico la forma que permite calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta.

f. Llamando "d" a la expresión matemática formulada verifiquen si las siguientes afirmaciones son ciertas:

   i. $d(x.y) \geq 0$

   ii. $d(x.y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

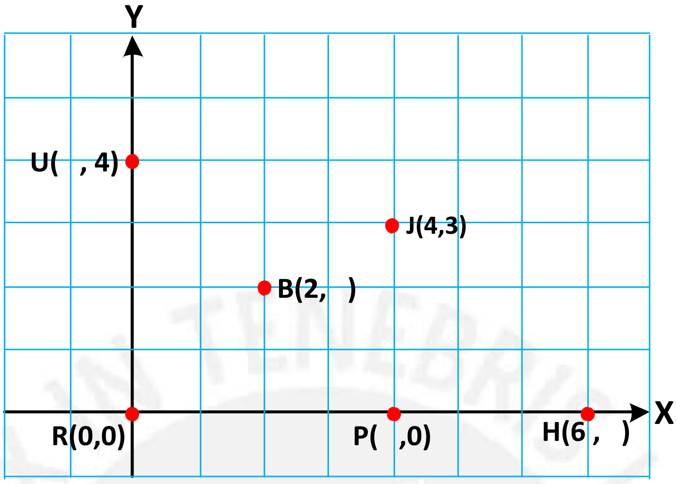
   iii. $d(x.y) = d(y,x)$

   iv. $d(x.z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

- Una función "d" definida de E x E en $\mathbb{R}$, que verifica estas cuatro propiedades se llama métrica o función distancia.
- El conjunto E, provisto de una métrica "d", se denomina espacio métrico.

<u>Actividad N° 3</u>: Calculando distancias en el plano.

El croquis de la Actividad N° 1 se ha trasladado al siguiente sistema de coordenadas cartesianas, donde la casa de Romeo es el origen de coordenadas. En base al gráfico, resuelva las preguntas que se plantean a continuación. [63]



a. ¿A qué distancia se encuentra Hipatía respecto a Romeo?
b. ¿Se podría calcular la distancia de Romeo a Julieta solo por conteo de los desplazamientos horizontales y verticales?
c. Explica otra forma de calcular dicha distancia.
d. De acuerdo a la propuesta que acabas de hacer, verifica la distancia calculada en la parte (a).
e. Exprese simbólicamente la distancia entre dos puntos en el plano.

En grupos de 4

Antes de desarrollar las siguientes preguntas, comparen y discutan sus respuestas a las preguntas anteriores.

a. ¿Recuerdan la fórmula pitagórica para calcular las distancias entre dos puntos en el plano?
b. Comparen las distancias de R a H, y de H a R.
c. Es cierto que: d(R,H) = d(R,P) + d(P,H).
   Expliquen su respuesta.

[63] En el sistema de ejes coordenados ya no consideramos las condiciones iniciales de desplazamientos.

d. ¿Qué ubicaciones tendría Brenda para que se cumpla que:

i) d(R, J) = d(R, B) + d(B, J)

ii) d(R, J) < d(R, B) + d(B, J)

De ambos casos, ¿qué se puede concluir?

> ***Observación:***
> d(R, J) representa la longitud del camino de la casa de Romeo a la casa de Julieta. Del mismo modo para los otros casos.

e. En base a las situaciones resueltas, formulen el concepto de métrica en $\mathbb{R}^2$. Enuncien y verifiquen sus propiedades.

f. $\mathbb{R}^2$ provisto de la función "d", ¿es un espacio métrico?

Actividad N° 4: Otras métricas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$

a. Dada la función $d_1((x_1;y_1),(x_2,y_2)) = máx\{|x_2 - x_1|,|y_2 - y_1|\}$[64] definida en $\mathbb{R}^2$.

- De acuerdo a esta métrica calculen y representen gráficamente las distancias entre los puntos A (2, 7) y B(-4, 3) .
- Para tres puntos del plano A(-1,3), B(2,-2),C(3, 4), verifiquen las propiedades de la métrica "d_1".

En grupos de 4

- Prueben si $\mathbb{R}^2$ provisto de la función "d_1" es un espacio métrico.

b. Dado el conjunto E = {1, 2, 3}, y la función:

$$d_2(x;y) = \begin{cases} 0 \quad , \quad si \quad x = y \\ 1 \quad , \quad si \quad x \neq y \end{cases}$$ [65]

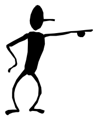
Demostrar que (E, d_2) es un espacio métrico.

c. Propongan y demuestren una métrica en $\mathbb{R}$ y otra en $\mathbb{R}^2$.

[64] Esta métrica se conoce como la métrica del máximo.
[65] La función d_2 se conoce como la métrica discreta.

Consolidando lo aprendido

1. Discutan y prueben si las funciones definidas a continuación son o no métricas en $\mathbb{R}$.
    a. $f(x) = |x|$
    b. $d_1(x, y) = |x - y|$
    c. $d_2(x, y) = |x| + |y|$
    d. $d_3(x, y) = e^{|x-y|}$
    e. $d_4(x, y) = \text{máx}\{x - y, 0\}$



> ***Espacio métrico:***
> Un conjunto E, provisto de una métrica o función distancia d, se llama espacio métrico; y usualmente se denota por (E, d). Algunos tienen nombres especiales, como euclídeos, pitagóricos, del máximo, de la suma, discreto, etc.

2. Demuestren si $\mathbb{R}^2$ provisto de las siguientes funciones es un espacio métrico:
    a. $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{½}$
    b. $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

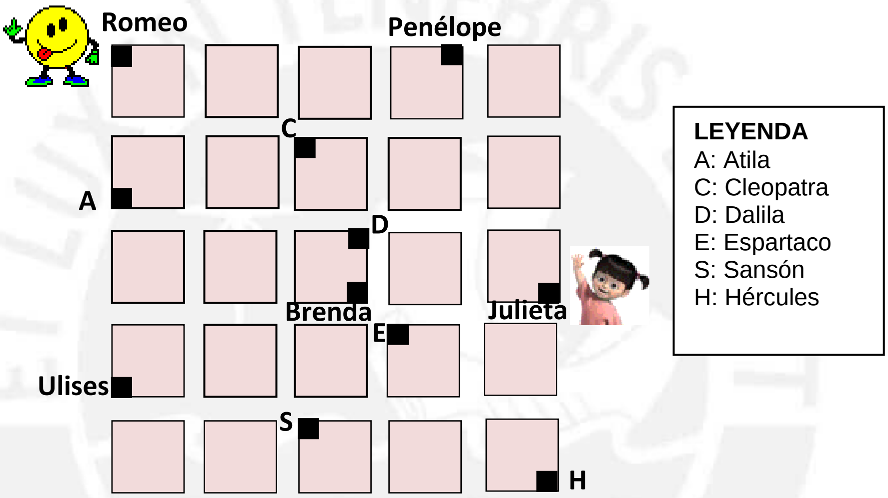
3. Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos; y la función d: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por:

    $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Analicen si ($\mathbb{C}$, d) es un espacio métrico.

VECINDADES

Actividad N° 5: ¡Qué bonita vecindad…!

a. De acuerdo a tu experiencia, ¿a quiénes consideramos nuestros vecinos?
b. Teniendo en cuenta el croquis de las viviendas de Romeo y sus amigos, ¿quiénes se pueden considerar vecinos de Brenda? Explique su respuesta.



c. Si consideramos vecinos a los que se encuentran a una cuadra o menos de distancia, ¿quiénes son los vecinos de Brenda? Represente en el croquis.
d. Y si consideramos vecinos a quienes viven a tres cuadras o menos, ¿quiénes son vecinos de Brenda?
Ubíquelos en el croquis y compare con el gráfico de la parte c).
e. ¿Quiénes se encuentran a una distancia de dos cuadras exactamente respecto a Brenda? Señálelos en el croquis.
¿Qué puede decir acerca de estos “vecinos” y los del caso c)?
f. ¿Cuál tendría que ser el alcance de la vecindad para que Romeo y Penélope sean también vecinos de Brenda?
g. En base a las situaciones resueltas, ¿qué idea tiene de vecindad?
¿Qué elementos considera importantes en el concepto de vecindad?

En grupos de 4

a. En base a la situación propuesta, ¿qué idea tienen de vecindad?
b. ¿Qué elementos consideran importantes en el concepto de vecindad?
c. ¿Cuántas clases de vecindades pueden identificar?

<u>Actividad N° 6</u>: Vecindades en la recta.

En la recta de los números reales represente los siguientes conjuntos:

V_1, con centro 0 y radio r < 1

V_2, con centro 0 y radio r ≤ 2

S, con centro 0 y radio r = 3

a. ¿Es cierto que $V_1 \subset S$? Explique sus respuestas.
b. ¿Qué elementos del conjunto A = {-1, 0, 1, 2, 3, 4} pertenecen a V_2?

- V_1 y V_2 se denominan vecindades en la recta, mientras que S se llama esfera.
- Simbólicamente, el conjunto V_1 se expresa como $V_1(0) = \{x \in R / d(x,0) < 1\}$ y se denomina vecindad abierta.

c. Expresen los conjuntos V_2 y S, usando la notación simbólica como en V_1. ¿Qué denominación tienen dichos conjuntos?
d. Determinen si los conjuntos ($V_1 \cap V_2$) y ($V_1 \cup V_2$) son vecindades en ℝ. En caso afirmativo identifiquen el centro y el radio de dichas vecindades.

En grupos de 4

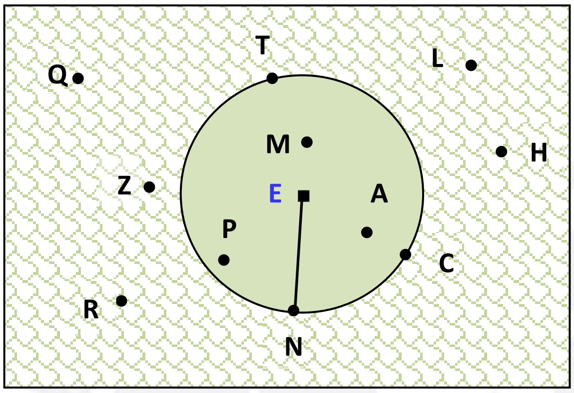
Antes de desarrollar las siguientes preguntas, comparen y discutan sus respuestas a las preguntas anteriores.

a. Grafiquen y definan algebraicamente los intervalos $\langle -3,2 \rangle$ y [-3, 2] y determinen si son vecindades. En caso afirmativo determinen su centro y su radio.
b. ¿Es cierto que $\overline{V_{1/2}(1)} = \{x \in R / d(x,1/2) \leq 1\}$?
c. ¿Es cierto que el conjunto $V_2(0) = \{x \in R / d(x,0) < 2\}$ representa el intervalo]-2, 2?
d. ¿Cómo son las vecindades en la recta?, ¿y las esferas?
e. Definan algebraicamente vecindades abiertas, cerradas y esferas en la recta.

Actividad N° 7: El alcance del burrito…!

Don Próspero tiene un burrito pastando en el jardín botánico de la Facultad de Ciencias, que tiene forma rectangular y está sembrado con gras y otras plantas. Por temor a que el animalito se escape lo tiene atado con una soguilla a una estaca.

La gráfica muestra la parte del jardín que comió el burrito en un par de días que estuvo atado.



LEYENDA
A : Alfalfa
C : Cebada
H : Habas
L : Lechuga
M : Maíz
N: Nabo
P : Papas
Q : Quinua
R : Retama
T : Tunas
Z: Zanahoria
E: Estaca

a. ¿De qué depende la cantidad de plantas que puede consumir el burrito?
b. ¿Por qué la parte de las plantas consumidas tiene forma circular?
   ¿Podría tomar otra forma? Expliquen con un ejemplo.
c. Sabiendo que 1 cm en el gráfico representa una longitud real de 2m, ¿cuál tendría que ser la longitud de la soguilla para que el burrito pueda comer la lechuga?
d. ¿A cuántas plantas alcanzaría el burrito con una soguilla de 4m de longitud bien estirada?
e. Tomando como centro la estaca (E), grafiquen y definan simbólicamente los siguientes conjuntos:
   V_1: Conjunto de plantas que se encuentran a una distancia menor que 3m.
   V_2: Conjunto de plantas que se encuentran a una distancia de a lo más 3m.
   V_3: Conjunto de plantas que se encuentran exactamente a 3m de distancia.
   - ¿Es cierto que $V_1 \subset V_2$?
   - ¿Es $V_3 \cap V_2 = \varnothing$?

   Explique sus respuestas.

En grupos de 4

a. A partir de estas situaciones, definan el concepto de vecindades abiertas, cerradas y esferas.

b. Muestren ejemplos de contexto real de vecindades abiertas, cerradas y esferas, identificando cada uno de sus elementos.

<u>Actividad N° 8</u>: Vecindades en $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^2$, represente gráficamente la vecindad abierta A, con centro (2, 1) y radio r = 3, con la métrica pitagórica.

a. ¿Qué objeto matemático se obtiene?
b. Exprese simbólicamente dicho conjunto.
c. Llamando C a la vecindad cerrada con el mismo centro y el mismo radio que A, exprese simbólicamente dicha vecindad.
   ¿Qué ha cambiado respecto a la expresión simbólica de A?
d. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
   - (3, 3) $\in$ A
   - (5, 1) $\in$ A
   - (2, 1) $\notin$ C
   - (-1, 2) $\in$ C
e. ¿Qué objeto matemático representa C – A?
   Defina simbólicamente dicho conjunto.

En grupos de 4

Antes de desarrollar las siguientes preguntas, comparen y discutan sus respuestas a las preguntas anteriores.

f. Representa gráficamente la esfera con centro (2,1) y radio r = 3, con la métrica pitagórica y del máximo.
   En base a las gráficas, determine la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
   - La gráfica de la esfera con la métrica pitagórica es un cuadrado.
   - Las esferas determinadas tienen cuatro puntos comunes.
   - La esfera generada con la métrica pitagórica está contenida en la esfera determinada con la métrica del máximo.

<u>Actividad N° 9</u>: Raras vecindades.

Representen gráficamente las siguientes vecindades cerradas.

$\overline{V_1((0,0))} = \{(x,y) \in R^2 / d((x,y),(0,0)) \le 2\}$, con la métrica del máximo.

$\overline{V_2}((0,0)) = \{(x,y) \in R^2 / d((x,y),(0,0)) \leq 2\}$, con la métrica de la suma.

En grupos de 4

a. ¿Qué relación existe entre $\overline{V_1}$ y $\overline{V_2}$?

b. ¿Es cierto que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \overline{V_2}$?

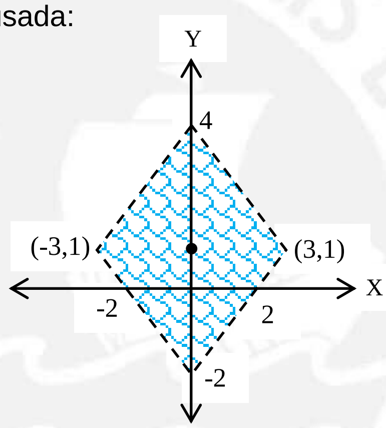
c. ¿Es cierto que $\overline{V_1} \cap V_2 = V_2$?

d. ¿Es cierto que $V_1 \cup V_2 = V_1$?

e. ¿Es cierto que $S_1 \cup V_2 = \overline{V_1}$?

<u>Actividad N° 10</u>: La vecindad del taxista.

a. Defina algebraicamente la vecindad representada en el gráfico, indicando su centro, su radio y la métrica usada:



b. Verifique si es una vecindad abierta o no.

En grupos de 4

c. Represente gráficamente las siguientes vecindades:

- $V_1 = \{(x,y,z) \in R^3 / d((x,y,z),(0,0,0)) \leq 5\}$, con la métrica pitagórica.
- La vecindad cerrada de centro (1,1,1) y radio r = 2 , con la métrica del máximo.
- La esfera con centro (2,2,2) y radio r = 3 , con la métrica de la suma.

d. Demuestre que el conjunto A = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2\}$ es una vecindad cerrada con la métrica de la suma.

Consolidando lo aprendido

1. Identifique cuáles de los siguientes conjuntos representan vecindades o esferas en $\mathbb{R}$:

   A = {x $\in \mathbb{R}$ / 3 < x < 7}

   B =]-1, 5]

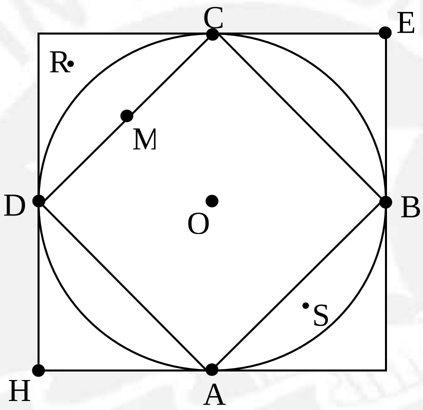
   C = [4, ∞[

   $|2x+3| \leq 7$

   $|x-3| = 2$

   En caso afirmativo, determine su centro, su radio y exprese usando la notación simbólica que corresponda en cada caso. Represente gráficamente cada uno.

2. En una circunferencia se han inscrito y circunscrito dos cuadrados como muestra la figura adjunta. Además se sabe que el área del cuadrado inscrito es de $4u^2$.



   Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, explicando por qué.

   a. El cuadrilátero ABCD es una vecindad determinada por la métrica pitagórica.
   b. El radio de la vecindad del cuadrilátero mayor es 4.
   c. El círculo queda determinado por: $V((0,0)) = \{(x,y) \in R^2 / d((x,y),(0,0)) \geq 2\}$
   d. Con la métrica del máximo, ¿qué punto se encuentra más cerca al centro?

3. Analice las vecindades abiertas, cerradas y esferas en el conjunto A = {1, 2, 3} con la métrica discreta.

4. En relación a un espacio métrico, ¿cuál es su opinión respecto a la afirmación: “toda esfera es redonda”?

¡Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad!
A. Einstein

ANEXO Nº 08

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN "ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE" – LA CANTUTA
FACULTAD DE CIENCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

FICHA DE OBSERVACIÓN

ASIGNATURA: TOPOLOGÍA

SEMESTRE ACADÉMICO: 2011-I

PROFESOR: HERNÁN ESPINOZA ROJAS

DURACIÓN: ___________________

FECHA DE INICIO: ____/____/____

FECHA DE TÉRMINO: ____/____/____

ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad logran desarrollar sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitan apoyo)	OBSERVACIONES/SUGERENCIAS
Nº 01: Recorriendo caminos Fecha: ___/___/___			
Nº 02: Calculando distancias en la recta. Fecha: ___/___/___			

Nº 03: Calculando distancias en el plano Fecha: ___/___/___			
Nº 04: Otras métricas en $\mathbb{R}$ **y** $\mathbb{R}^2$ Fecha: ___/___/___			

COMENTARIOS GENERALES:

____

____

____

____

____

____

____

____

Firma del responsable de la observación

ANEXO Nº 09

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN “*ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE*” – LA CANTUTA
FACULTAD DE CIENCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

FICHA DE AUTOEVALUACIÓN

ASIGNATURA: TOPOLOGÍA SEMESTRE ACADÉMICO: 2011-I PROFESOR: HERNÁN ESPINOZA ROJAS

ALUMNO(A): ____ CÓDIGO: ________________ PROMOCIÓN: _________ GRUPO Nº: ______

ACTIVIDAD	**LOGROS** (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	**DIFICULTADES** (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	**COMENTARIOS** (Qué te pareció la actividad)
Nº 01: Recorriendo caminos Fecha: ___/___/___			
Nº 02: Calculando distancias en la recta. Fecha: ___/___/___			

Nº 03: Calculando distancias en el plano Fecha: ___/___/___			
Nº 04: Otras métricas en $\mathbb{R}$ **y** $\mathbb{R}^2$ Fecha: ___/___/___			

ASPECTOS POSITIVOS

____

____

____

ASPECTOS A MEJORAR

____

____

____

SUGERENCIAS

____

____

____

ANEXO Nº 10

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN "ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE" – LA CANTUTA
FACULTAD DE CIENCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

ESCALA	VALORACIÓN
2	SI
1	A VECES
0	NO

ASIGNATURA: TOPOLOGÍA SEMESTRE ACADÉMICO: 2011-I PROFESOR: HERNÁN ESPINOZA ROJAS

ACTIVIDAD N°____ : ____ FECHA: ____ /____ /____

GRUPO N°: ______________ COORDINADOR DEL GRUPO: ______________________________

Nº	INDICADORES	INTEGRANTES					
1	Muestra disposición para trabajar en equipo.						
2	Motiva a sus compañeros a involucrarse en las actividades.						
3	Expresa sus ideas con confianza y seguridad.						
4	Respeta y valora la opinión de sus compañeros.						
5	Muestra originalidad en la solución de las situaciones planteadas.						
6	Es perseverante en la búsqueda de la solución.						
7	Comparte sus conocimientos con sus compañeros.						
8	Demuestra iniciativa al plantear soluciones.						
9	Cumple con las tareas asignadas.						
10	Investiga para ampliar sus conocimientos.						
PUNTAJE							

COMENTARIOS:

A: Acerca del trabajo del grupo.

……
……
……
……
……
……
…….

B: Acerca de las Actividades planteadas.

……
……
……
……
……
……
……….

Firma del Coordinador de grupo: ___________________________________

ANEXO Nº 11

INSTRUMENTOS APLICADOS A LOS ESTUDIANTES

01. ***Autoevaluación de la alumna 1***

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN *"ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE"* - LA CANTUTA
FACULTAD DE CIENCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

FICHA DE AUTOEVALUACIÓN

ASIGNATURA: TOPOLOGÍA — SEMESTRE ACADÉMICO: 2011-I — PROFESOR: HERNÁN ESPINOZA ROJAS

ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	COMENTARIOS (Qué te pareció la actividad)
Nº 1: Descubriendo la geometría del caucho. Fecha: 08 / 05 / 2011	El análisis de las dos formas de cintas tanto la circular como la de Möebius y de allí sacar la conclusión.	Las dificultades que tuve fue a la hora de conceptualizar algunas preguntas.	Es interesante, cuando estas actividades se pueden llevar a la práctica como lo hicimos
Nº 2: Recorriendo todos los caminos posibles. Fecha: 10 / 05 / 11	la parte de Romeo y Julieta y formular los conceptos me pareció interesante	En la institucionalización es más amplio el conocimiento que se debe tener para resolver los ultimos ejercicios	Interesante llegar a conceptos abstractos de ejemplos de la vida cotidiana.
Nº 3: "Raras Vecindades". Fecha: 24 / 05 / 11	Toda la actividad la resolví intuitivamente al hacer la comparación con todos los integrantes del grupo las respuestas dadas por cada uno era concordante	Como todo se resolvio intuitivamente y no con un sustento teórico tubimos algunos problemas a la hora de formular algunas respuestas de la actividad.	Siempre es interesante ya que nos ayuda a reflexionar sobre algunos puntos raros en cuanto a la formulación de algunas respuestas.
Nº 4: ¿Interior o exterior? Fecha: 07 / 06 / 11	La actividad del burrito de don Prospero era intuitivo así que estubo facil realizarlo	En trabajando en equipo la pregunta asignada la hicimos juntos y con ayuda del profesor.	Interesante cada vez se va despejando mas dudas en cuanto al tema anterior.

02. *Autoevaluación del alumno 2*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN *"ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE"* - LA CANTUTA
FACULTAD DE CIENCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

FICHA DE AUTOEVALUACIÓN

ASIGNATURA: TOPOLOGÍA | SEMESTRE ACADÉMICO: 2011-I | PROFESOR: HERNÁN ESPINOZA ROJAS

ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	COMENTARIOS (Qué te pareció la actividad)
Nº 1: Descubriendo la geometría del caucho. Fecha: 3/05/11	- La parte experimental	- En el análisis sobre los trazos paralelos continuos - Sobre el número de caras	- Interesante, porque he experimentado con materiales concretos conceptos matemáticos
Nº 2: Recorriendo todos los caminos posibles. Fecha: 10/05/11	- Concepto de distancia (Trabajo en Equipo)	- En definir si la distancia usual, distancia del taxi y distancia máximo cumplía con las propiedades de Métrica	- Buena, porque de cierta forma cambio mi entendimiento de distancia
Nº 3: "Raras Vecindades". Fecha: 24/05/11	• Clasificación de figuras • Trabajando en Equipo: Todos menos la definición de Conjunto Abierto y Cerrado	• El concepto de conjuntos abiertos y cerrados • El conjunto referencial es es cerrado.	Exelente, los ejemplos contextualizados, perdurarán.
Nº 4: ¿Abiertos ó Cerrados? Fecha: 31/06/11	• El interior de un Conjunto • Punto interior • El exterior de un conjunto • El Punto exterior	• El punto frontera de un conjunto • La Frontera de un conjunto	Estuvo interesante dado que para mi solo existía el interior y el exterior; pensaba equivocadamente que la frontera era parte del interior

03. *Autoevaluación del alumno 3*

Nº Y NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	COMENTARIOS (Qué te pareció la actividad)
Nº : 01 Eligiendo caminos Fecha: 20/04/10	Casi en su totalidad, logre identificar y comprender los problemas que en su desarrollo incluyeron el razonamiento sobre distancia.	En la parte final, pues mencionaba que se podían definir tipos de distancia, según un conjunto referencial.	Fue bastante interesante, porque a pesar de incluir 1 situación de la vida diaria y aparentemente sencilla, generó polémica por el concepto de distancia
Nº : 02 Entorno, bolas y vecindades Fecha: 04/05/10	Logré identificar los conceptos que se plantearon en la actividad.	En la definición formal de los conceptos matemáticos propuestos.	Fue bastante analítica, generó muchos conflictos, que fueron esclarecidos en su definición

04. *Autoevaluación del alumno 4*

Nº Y NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	LOGROS (Qué partes de la actividad lograste desarrollar sin ayuda)	DIFICULTADES (En qué partes de la actividad necesitaste apoyo)	COMENTARIOS (Qué te pareció la actividad)
Nº :1 Eligiendo Caminos Fecha: 20-04-10	Cuando pedian hallar q distancia era la más corta, e Si la distancia de llegar a la casa de julieta y Romeo eran las mismas.	A la hora de contar cuantos caminos habia de la Casa de Romeo a la de Julieta y cuantas distancias te pedian hallar.	Me pareció interesante ya que fuimos descubriendo poco a poco que inconvenientes tuvimos a la hora de desarrollar la actividad y partimos de ello para ser la clase
Nº :2 El borro de Don Prospero Fecha: 04-05-10	El borrito de don Próspero respondí las preguntas donde estaba el borro y las plantas que comia y q' plantas no comia, tambien grafique bien las porciones q' pasto comia excepto el item c). El problema de la vaca fue la más sencilla.	Cuando preguntaron la formulación y definición de conceptos. y Relacion existe ¿ las Vecindados.	La actividad fue muy interesante y dinámica ya que de una forma sencilla podemos descubrir las dificultades q' tenemos en resolver problemas y q' nos faltan conceptos y tenemos obstáculos epistemológicos.

05. *Coevaluación del Grupo 3*

ANEXO Nº 13

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN *"ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE"* – LA CANTUTA
FACULTAD DE CIENCIAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

FICHA DE COEVALUACION

ESCALA	VALORACIÓN
2	SI
1	A VECES
0	NO

ASIGNATURA: TOPOLOGÍA | SEMESTRE ACADÉMICO: 2010-I | PROFESOR: HERNÁN ESPINOZA ROJAS

Nº	INDICADORES	INTEGRANTES					
		Lozano	Musayon	Alarcon	Carbajal		
1	Muestra entusiasmo en la organización del grupo.	2	2	1	2		
2	Muestra interés en el desarrollo de las actividades.	2	2	2	2		
3	Demuestra responsabilidad en el trabajo del grupo.	2	1	2	2		
4	Demuestra iniciativa al plantear la solución.	1	1	1	2		
5	Muestra seguridad en la solución de las situaciones planteadas.	2	2	1	1		
6	Es perseverante en la búsqueda de la solución.	1	1	1	2		
7	Comparte sus conocimientos con sus compañeros.	2	1	1	2		
8	Respeta y valora la opinión de sus compañeros.	1	1	2	2		
9	Expresa sus ideas sin agredir a los demás.	1	2	2	2		
10	Cumple con las tareas asignadas.	2	2	2	2		
	PUNTAJE	16	15	15	19		

COMENTARIOS:

A: Acerca de la Identificación en el trabajo grupal.

Se vio que todos trabajaron con material y cada uno defendio lo expuesto.

B: Acerca de las Actividades Planteadas.

El desarrollo de las actividades estubo bien solo hubo algunos puntos que no fueron del todo claro.

Firma del Coordinador de grupo: Miguel R

06. ***Cuestionario N° 2 desarrollado por una alumna***

CUESTIONARIO N° 02

ENCUESTA DE SALIDA A LOS ESTUDIANTES DEL CURSO DE TOPOLOGÍA - 2011

Estimado alumno(a):
Tu opinión es muy útil e importante, de manera que te pedimos seriedad y sinceridad al responder el siguiente cuestionario.

Instrucción: Califica las preguntas marcando un aspa (x) en el casillero correspondiente. Utiliza la escala del 1 al 5, en la que 1 es el mínimo puntaje y 5 es el máximo.

I.- EVALUANDO LAS ACTIVIDADES DESARROLLADAS

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Las actividades planteadas fueron interesantes y motivadoras.			X		
2	Las actividades propuestas fueron pertinentes y suficientes para lograr las capacidades planteadas.				X	
3	Las actividades planteadas fueron útiles en la comprensión de los conceptos.				X	
4	La secuencia de actividades fue adecuada.			X		
5	Las actividades propuestas se relacionaron con situaciones del contexto.					X
6	Se tomaron en cuenta los aportes de los alumnos en la formalización de los conceptos y procedimientos.				X	
7	Los temas se abordaron con amplitud y profundidad.			X		
8	El trabajo en equipo ha sido importante en el aprendizaje.				X	
9	El material que se usó en clase ayudó a desarrollar las actividades y lograr los objetivos.				X	
10	Las orientaciones para desarrollar las actividades fueron claras.				X	
11	El tiempo asignado a cada actividad fue suficiente.		X			
12	El apoyo del profesor fue adecuado y oportuno.				X	
13	Los conocimientos que tenía Ud. fueron suficientes para desarrollar las actividades.			X		
14	Considera que las actividades de refuerzo propuestas fueron útiles para afianzar los conocimientos adquiridos en el aula.					X
15	Considera que las evaluaciones le ayudaron a identificar y corregir sus errores oportunamente.					X
16	*La bibliografía recomendada le ha sido útil.*				X	
17	Considera que el tema desarrollado es aplicable a la educación secundaria.					X
18	Las actividades le han permitido asumir un mayor compromiso con su aprendizaje.					X
19	En qué nivel considera haber logrado los objetivos planteados.				X	
20	Cuál es su valoración respecto a la metodología usada en el desarrollo de las actividades.					X

II.- ¿EN QUÉ MEDIDA LAS ACTIVIDADES LE HAN PERMITIDO DESARROLLAR LAS SIGUIENTES ACTITUDES Y HABILIDADES?

N°	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Motivación por el estudio de la Topología.					X
2	Responsabilidad en el cumplimiento de las tareas establecidas.				X	
3	Compromiso con su superación profesional.					X
4	Perseverancia en la solución de situaciones problemáticas.				X	
5	Trabajo en equipo.				X	
6	Valoración de sus propias capacidades.				X	
7	Capacidad de razonamiento y análisis.					X
8	Capacidad de aprender a aprender.				X	
9	Capacidad para argumentar sus opiniones.				X	
10	Capacidad para matematizar situaciones.				X	

III.- ¿EN QUÉ MEDIDA CONSIDERA USTED HABER LOGRADO LAS SIGUIENTES CAPACIDADES?

	INDICADORES	1	2	3	4	5
1	Identifica los principales problemas que dieron origen al estudio de la topología.			X		
2	Discrimina los conceptos topológicos en situaciones de su entorno.				X	
3	Formaliza la topología como una disciplina matemática cualitativa desarrollada a partir de situaciones de su entorno.				X	
4	Identifica los espacios métricos en diferentes conjuntos con diversas métricas.			X		
5	Representa gráficamente vecindades en espacios métricos.				X	
6	Relaciona espacios métricos.				X	
7	Demuestra propiedades en espacios métricos.				X	
8	Formula los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados.				X	
9	Demuestra las propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados.			X		
10	Discrimina los conceptos de interior, exterior y frontera de conjuntos a partir de situaciones de su entorno.				X	
11	Demuestra las propiedades de interior, exterior y frontera de conjuntos.			X		
12	Define el concepto de clausura o adherencia de conjuntos.				X	
13	Demuestra las propiedades de la clausura o adherencia de conjuntos.			X		
14	Discrimina sucesiones en espacios métricos.			X		
15	Interpreta la convergencia de sucesiones en espacios métricos.			X		
16	Demuestra la convergencia de sucesiones en espacios métricos.			X		
17	Interpreta sucesiones de Cauchy en espacios métricos.			X		
18	Define la continuidad en espacios métricos.				X	
19	Demuestra propiedades de la continuidad en espacios métricos.			X		
20	Define homeomorfismo en espacios métricos.		X			
21	Analiza la continuidad y homeomorfismo en espacios métricos.		X			
22	Analiza el DCB de la educación secundaria.			X		
23	Identifica los conceptos topológicos en el DCB.			X		
24	Formula situaciones problemáticas contextualizadas de aplicación de los conceptos topológicos.				X	
25	Propone actividades de aprendizaje para la enseñanza de los conceptos topológicos en la educación secundaria incorporando recursos didácticos de su entorno y estrategias didácticas creativas.				X	

OBSERVACIONES O SUGERENCIAS:

En las actividades desarrolladas lo único que faltó es modular el tiempo para las exposiciones por grupo. En cuanto a la metodología usada si en mi opinión fue buena ya que como grupo pudimos formular sin necesidad de libros conceptos y propiedades.