PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Teoría de distribución de valores de funciones meromorfas y sus aplicaciones

Tesis para optar el grado de

Magíster en Matemáticas.

Autor

Br. Garry Achahuanco Gamarra.

Asesor

Dr. Rudy Rosas Bazán.

Jurado

Dr. Andrés Beltrán Cortez.

Dra. Liliana Puchuri Medina.

LIMA-PERÚ

2016

TEORÍA DE DISTRIBUCIÓN DE VALORES DE FUNCIONES MEROMORFAS Y SUS APLICACIONES

Garry Achahuanco Gamarra

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magíster en Matemática.

Miembros del jurado:

Dr. Andrés Beltrán (presidente)

Dra. Liliana Puchuri (miembro)

Dr. Rudy Rosas (asesor)

Lima - Perú

Noviembre - 2016

Dedicado a mi padres:
Freddy Juan Achahuanco Medina,
Betty Victoria Gamarra Meza
y a mi hermano Yojhan.
En memoria de mi madre.

Agradecimiento

Agradezco a Dios por por iluminar mi camino y cuidar de mis pasos en mi vida.

Expreso mi inmensa gratitud al Dr. Rudy Rosas Bazan, mi asesor de tesis, que con admirable paciencia y sobre todo con mucha genialidad supo guiarme y así hacer posible este trabajo.

Al miembro del Jurado, los Drs. Liliana Puchuri y Andres Beltran por su buena disposición y paciencia al absolver dudas y brindar observaciones para la mejor presentación de esta tesis.

Al Dr. Percy Fernández, que me motivo a estudiar una maestría, además me brindo confianza y me ayudo en los momentos más difíciles en mi estadía en la PUCP, siempre recordare sus palabras.

Al Dr. Roland Rabanal, por sus enseanzas y apoyo incondicional en los momentos más difíciles que me toco vivir en Lima.

A todos los profesores de la sección Matemáticas, por brindarme su apoyo que Dios los bendiga siempre.

Definitivamente no podrían faltar mis sinceros agradecimientos a mi familia, la cual supieron alentarme siempre en este duro trabajo, a mis amigos Joel, José, Juan, Marco, Carmen, Yovana, Victor por su paciencia, compresión y por estar ahí cuando uno los necesita.

Gracias a Todos.

Introducción

Rolf Nevanlinna, matemático finlandés ($1895 - 1980$), fué reconocido por sus trabajos en el campo de las funciones de variable compleja. Su trabajo más significativo estuvo relacionado con la teoría de la distribución de los valores de las funciones meromorfas, donde probó los dos teoremas que llevan su nombre, con importantes consecuencias en dicha teoría.

Es conocido que la resolución de ciertos problemas teóricos y prácticos dependen a veces del comportamiento de las raíces de la ecuación $f(z) = a$, donde $f(z)$ es una función entera o meromorfa y a es un valor complejo. Por ende es de vital importancia investigar el número $n(r, f = a)$ de las raíces de la ecuación anterior y su distribución en el disco D_R, cada raíz será contada de acuerdo a su multiplicidad.

En el último siglo, el famoso matemático E. Picard obtuvo un resultado importante: toda función entera no constante $f(z)$ toma cada valor complejo infinitas veces, con la posible excepción de un valor. Después, E. Borel introdujo el concepto de orden de una función entera y otros matematicos profundizaron el teorema de Picard, como el teorema grande de Picard y el teorema de Picard-Borel. Estos resultados tenián limitaciones importantes, por ejemplo trataban solamente el caso de funciones enteras, es decir no consideraban funciones meromorfas y por otro lado se imponía la restricción de que fueran funciones de orden finito.

Rolf Nevanlinna hizo la decisiva contribución al desarrollo de la teoría de distribución de valores introduciendo la función característica $T(r, f)$ para funciones meromorfas en un dominio $|z| < R$ con $R \leq \infty$ y $0 < r < R$. Esta teoría puede ser resumida como sigue.

Sea f una función meromorfa. Dado un número complejo a, incluyendo el

∞, denote por $n(r,a)$ el número de raíces de la ecuación $f(z)=a$ contando su multiplicidad en el disco $|z|\leq r$. Así, $n(r,\infty)$ denota el número de polos de la función $f(z)$ en el disco $|z|\leq r$. Entonces defina

$$N(r,a)=\int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt+\log n(0,a)\log r.$$

Esta función es llamada función contadora. Luego, defina la función proximidad dada por

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$$

y por

$$m(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-a}\right|d\theta, \quad \text{para} \quad a\in\mathbb{C}.$$

Finalmente, se define la función característica por

$$T(r,f)=m(r,\infty)+N(r,\infty).$$

Uno de los resultados más importantes es el primer teorema fundamental de Nevanlinna dado por

$$T(r,f)=N(r,a)+m(r,a)+O(1),$$

para todo $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Por otro lado, los matemáticos Lars Ahlfors y Shimizu introdujeron una formulación geométrica del primer teorema fundamental de Nevanlinna usando la esfera de Riemann. Ahlfors y Shimizu presentan definiciones alternativas de la función característica y la función proximidad, que denotamos por $\overset{\circ}{T}(r,f)$ y $\overset{\circ}{m}(r,a)$. De está manera el primer teorema fundamental de Nevanlinna adquirirá la forma siguiente

$$\overset{\circ}{T}(r,f)=N(r,a)+\overset{\circ}{m}(r,a),$$

válido para todo $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

El resultado cumbre de la teoría de distribución de valores de funciones meromorfas es el segundo teorema fundamental de Nevanlinna que se discute en el capítulo 3, específicamente en el teorema 3.1, el cual afirma que para $q\geq 3$ valores distintos $a_1,a_2,a_3,......,a_q$ tenemos:

$$\sum_{v=1}^{q} m(r,a_v)\leq 2T(r,f)-N_1(r)+S(r,f),$$

donde $N_1(r)$ es un término positivo dado esencialmente por las raíces múltiples de la ecuación $f(z) = a$ y $S(r, f)$ es el término error cuyo crecimiento es más lento en general que los otros términos. La teoría de distribución de valores tiene significativas aplicaciones, por ejemplo a las ecuaciones diferenciales complejas. Para citar tenemos el famoso teorema de Malmquist (1913) que nos dice: Sea $\mathbb{C}(z)$ el cuerpo de las funciones racionales en la variable z con coeficientes complejos y sea $\mathbb{C}(z)[X]$ el anillo de polinomios complejos con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$. Sean $P(X)$ y $Q(X)$ elementos primos relativos en $\mathbb{C}(z)[X]$. Si la ecuación diferencial

$$f' = \frac{P(f)}{Q(f)}$$

tiene una solución meromorfa trascendental f, entonces Q es de grado cero en X y P es de grado a lo más 2 en X. Existen muchas aplicaciones de esta maravillosa teoría a diversos campos de la matemática como en dinámica compleja, teoriá de números, etc.

Finalmente indicamos que a lo largo del tiempo se han desarrollado métodos diferentes para demostrar los resultados de Nevanlinna, pero en este trabajo se a seguido los resultados originales en muchos casos de esta teoría.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo presentamos algunos resultados y definiciones básicas del análisis complejo como series de potencias, funciones analíticas, fórmula integral de Cauchy, funciones meromorfas y la esfera de Riemann. Para referencia de este capítulo tomamos algunos textos guía como [1], [5], [8], [16].

1.1. Topología de $\mathbb{C}$

El plano complejo $\mathbb{C}$ hereda naturalmente todas las propiedades métricas y topológicas del plano $\mathbb{R}^2$. Vamos admitir que se conocen algunos conceptos topológicos de los espacios euclidianos tales como las definiciones de conjunto abierto, cerrado, conexo, compacto, etc. Ahora presentaremos algunas notaciones que utilizaremos en el tratado de este trabajo. Definamos
El *disco abierto* de centro z_0 y radio $r > 0$ como el conjunto

$$D(z_0.r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

El *disco abierto* de centro $z_0 = 0$ y radio $r > 0$ como el conjunto

$$D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

El *disco cerrado* de centro z_0 y de radio $r \geq 0$ como el conjunto

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

El *disco cerrado* de centro $z_0 = 0$ y de radio $r \geq 0$ como el conjunto

$$\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}.$$

El *disco perforado* de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$, como el conjunto

$$D^*(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

El *círculo* de centro z_0 y radio $r > 0$, está dado por

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Si $z_0 = 0$, entonces el *círculo* de centro 0 y radio $r > 0$, será denotado por ∂D_r

Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$. definamos el *interior* de A

$$\operatorname{int}(A) = \{z \in \mathbb{C} : \text{existe } \; r > 0 \; \text{ tal que } \; D(z, r) \subset A\}.$$

La *clausura* de A, está dado por

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : \; \text{ para todo } \; r > 0 \; \text{ se tiene } \; D(z, r) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Diremos que Ω es un dominio en $\mathbb{C}$ si es abierto y conexo.
Decimos que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto de *acumulación* de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ si para todo $r > 0$ se cumple $(D(z_0, r) \backslash \{z_0\}) \cap A \neq \varnothing$. Un punto $z_0 \in A$ que no es punto de acumulación de A es llamado *punto aislado* de A.
Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es llamado *discreto* cuando todos sus puntos son aislados.

1.2. Sucesiones de funciones

Dado $A \subset \mathbb{C}$, una función $f : A \to \mathbb{C}$ es llamada un *función compleja.* A una función compleja tenemos asociadas otras funciones: la función *conjugada* de f, $\overline{f} : A \to \mathbb{C}$ definida como $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ y las funciones *parte real* y *parte imaginarias* de f, $\Re e f : A \to \mathbb{R}$, $\Im m f : A \to \mathbb{R}$, definidas como $\Re e f = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$ y $\Im m f = \dfrac{f - \overline{f}}{2i}$.
Sea $(f_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones complejas definidas en el conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Diremos que $(f_n)_{n \geq 0}$ *converge* en $a \in A$ si la sucesión de números complejos $(f_n(a))_{n \geq 0}$ es convergente. Si $(f_n)_{n \geq 0}$ es convergente en todo punto de A se dice que es *puntualmente convergente* en A y la función $f : A \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(z)$ es llamada la *función limite* de f.
Es importante destacar que la convergencia puntual es muy débil ya que la

función limite no hereda las propiedads básicas de los términos de la sucesión. La convergencia uniforme es una convergencia más fuerte que la convergencia puntual y es un concepto más natural para sucesiones de funciones.

Definición 1.1. Una sucesión de funciones complejas $(f_n)_{n\geq 0}$ definidas en $A \subset \mathbb{C}$ *converge uniformemente* a f si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ en A.

Observamos que una sucesión de funciones que converge uniformemente también converge puntualmente.

Teorema 1.2. *Una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente, converge a una función continua.*

La demostración puede ser encontrada en [11].

1.3. Teoría elemental de funciones holomorfas

Definición 1.3. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en el abierto U de $\mathbb{C}$. Decimos que f es holomorfa en $z_0 \in U$ si existe el limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to z_0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

El número complejo $f'(z_0)$ es llamado derivada de f en z_0. Si existe $f'(z_0)$ para todo $z_0 \in U$ diremos que f es holomorfa en U. La clase de todas las funciones holomorfas en U se denotara mediante $\mathcal{O}(U)$. Por lo tanto:

$$\mathcal{O}(U) = \{f : f \text{ es holomorfa en } U\}$$

Teorema 1.4. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua con $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f es holomorfa en $z_0 \in U$.

2) f es diferenciable en $z_0 \in U$ desde el punto de vista real y si $f(z) = u(z) + iv(z)$, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

A estas ecuaciones se les conoce como Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

La demostración puede ser encontrada en [10]

Proposición 1.5. *Si $f, g \in \mathcal{O}(U)$ entonces*

1) $f + g \in \mathcal{O}(U)$ además, dado $z_0 \in U$ se tiene

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

2) $f - g \in \mathcal{O}(U)$ además, dado $z_0 \in U$ se tiene

$$(f-g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0).$$

3) $fg \in \mathcal{O}(U)$ además, dado $z_0 \in U$ se tiene

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

4) Si $g(z_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es holomorfa en $z_0 \in U$, además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

La demostración puede ser encontrada en [10].

Proposición 1.6. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ y $g : V \to \mathbb{C}$ funciones continuas en U y V, abiertos de $\mathbb{C}$. Supongamos que $f(U) \subset V$, f es holomorfa en $z_0 \in U$ y que g es holomorfa en $w_0 = f(z_0)$. Entonces $g \circ f$ es holomorfa en z_0 y además*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

La demostración puede ser encontrada en [10].

Definición 1.7. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}$ es abierto. Decimos que f es un biholomorfismo sobre $f(U)$, si $f(U)$ es abierto y si $f : U \to f(U)$ es un homeomorfismo cuya inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ es holomorfa.

Teorema 1.8. ***(Teorema de la función inversa)*** *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}$ es abierto. Supongamos que z_0 pertenece a U y que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe una vecindad abierta V de z_0 tal que $g = f|_V$ es un biholomorfismo y además*

$$(g^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(g^{-1}(w))},$$

para todo $w \in f(V)$.

La demostración puede ser encontrada en [10].

1.4. Series de potencias

Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una suceción de números complejos y sea $c \in \mathbb{C}$ un número complejo fijo. La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ es llamada una serie de potencias. Para simplificar el trabajo consideremos $c = 0$.

Observación 1.9. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ consideremos las siguientes tres condiciones:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$.

c) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n z_0^n| < \infty$.

d) La secuencia $(a_n z_0^n)$ es acotada.

La condición *a*) implica la condición *b*) y esta implica *c*) y esta a su vez implica *d*).

Dada la serie de potencias $S = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, defina

$$\varrho(S) = \varrho = \sup\{r \geq 0 : \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < \infty\}.$$

El número ϱ es llamado radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. $D(0, \varrho)$ y $\partial D(0, \varrho)$ son llamados disco y circulo de convergencia de la serie. Entonces para ϱ pueden ocurrir los siguientes casos:

i) $\varrho = 0$. En este caso diremos que la serie es divergente.

ii) $0 < \varrho < +\infty$. En este caso la serie converge absolutamente para todo $z \in D(0, \varrho)$.

iii) $\varrho = \infty$. Decimos en este caso que la serie es entera. La definición de ϱ implica que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.

En los dos casos *ii*) y *iii*) diremos que la serie es convergente.

Teorema 1.10. *Dada una serie de potencias* $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, su radio de convergencia es*

$$\varrho(S) = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

La demostración puede ser encontrada en [10].

Proposición 1.11. ***(Criterio de la razón).*** *Consideremos la serie de potencias* $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *tal que* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \geq 0$*. Sea* $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *y sea* $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$*. Entonces*

$$\frac{1}{\alpha} \leq \varrho(S) \leq \frac{1}{\beta}.$$

En particular, si $\alpha = \beta$*, entonces*

$$\frac{1}{\varrho(S)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

La demostración puede ser encontrado en [10].

1.5. Funciones analíticas

Sea $U \in \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $f : U \to \mathbb{C}$ es analítica, si para todo $z_0 \in U$, existe una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n$, con radio de convergencia $\varrho > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n,$$

para todo $z \in U$ tal que $|z - z_0| < \varrho$. Una serie de potencias como en la ecuación de arriba sera llamada serie de potencias que representa f en z_0.

Teorema 1.12. *Una función es analítica si, y solo si, es holomorfa.*

La demostración puede ser encontrado en [10].

Definición 1.13. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera si es analítica en todo $\mathbb{C}$.

1.6. Función exponencial y el logaritmo complejo

La exponencial es una función compleja definida por la serie

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \cdots$$

Utilizando el criterio de la razón se observa que el radio de convergencia de esta serie es ∞, por lo tanto el disco de convergencia es todo $\mathbb{C}$ y es así que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Además su derivada puede ser calculada derivando la serie término a término

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z).$$

Denotemos por $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Sea $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Diremos que una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ es una rama de argumento en U, si para todo $z \in U$ se tiene que

$$\frac{z}{|z|} = e^{if(z)}.$$

Observe que si $f : U \to \mathbb{R}$ es una rama de argumento y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f + 2k\pi$ es también una rama de argumento en U.

Diremos que una función continua $g : U \to \mathbb{C}$ es rama de logaritmo en U, si para todo $z \in U$ se tiene que

$$e^{g(z)} = z.$$

Observe que si g es una rama de logaritmo y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $g + 2k\pi i$ es también una rama de logaritmo. Por esta razón no podemos esperar que $g(\exp(w)) = w$, siempre que $\exp(w) \in U$.

Teorema 1.14. *Sea $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Entonces*

a) Existe una rama de logaritmo en U si, y solamente si, existe una rama de argumento definido en U.

b) Si $g : U \to \mathbb{C}$ es una rama de logaritmo, entonces g es holomorfo y ademas $g'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z \in U$.

1.7. Fórmula integral de Cauchy y consecuencias

Teorema 1.15. ***(Fórmula integral de Cauchy)*** *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto. Sea $\overline{D}$ un disco cerrado tal que $\overline{D} \subset U$. Para todo z en el interior de $\overline{D}$ se cumple*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overline{D}} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

La demostración puede ser encontrada en [10]

Teorema 1.16. *Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : \quad f(a) = 0\}.$$

Entonces o bien $Z(f) = \Omega$ o bien $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. En el último caso a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo $m = m(a)$ tal que

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad z \in \Omega$$

donde $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$. Además, $Z(f)$ es a lo sumo numerable.

Al entero m se le llama orden del cero que f tiene en el punto a. A $Z(f)$ se le llama conjunto de ceros de f.

La demostración puede ser encontrada en [16].

Corolario 1.17. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde U es abierto y conexo. Si $f^{-1}(0) = \{z \in U : \quad f(z) = 0\}$ posee algún punto de acumulación en U. Entonces $f \equiv 0$.*

Corolario 1.18. *Si f y g son funciones holomorfas en un dominio Ω y si $f(z) = g(z)$ para todos los z de algún conjunto que tiene un punto de acumulación Ω, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Teorema 1.19. ***(Principio de extensión analítica)*** *Sean f, g funciones holomorfas en un dominio Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $f \equiv g$ *en* Ω.

b) *Existe una vecindad no vacía $V \subset \Omega$ tal que $f|_v = g|_v$*

Ahora damos a conocer un resultado interesante que solo sucede en el caso complejo más no en el real

Teorema 1.20. ***(Teorema de Lioville)*** *Una función entera y acotada es constante.*

La demostración puede ser encontrada en [12].

Teorema 1.21. ***(Teorema de Cauchy-Goursat)*** *Si f es analítica en $U \subset \mathbb{C}$ abierto y f' es continua en $\overline{U}$ y sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada tal que $\gamma([a,b]) = \partial U$. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

La demostración puede ser encontrada en [10]

Definición 1.22. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en U y sea $a \in U$. Definimos $M(r,a,f)$ como:

$$M(r,a,f) = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(r,a)\}$$

donde $C(r,a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$.

Teorema 1.23. ***(Desigualdad de Cauchy)*** *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en U, $a \in U$ y $\overline{D}(r,a) \subset U$. Entonces:*

$$|f^{(n)}| \leq \frac{n!}{r^n} M(r,a,f),$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

La demostración puede ser encontrada en [10].

Teorema 1.24. ***(Principio del Módulo Máximo)*** *Si una función f es analítica en $U \in \mathbb{C}$ donde U es abierto y conexo y $|f|$ alcanza un máximo relativo en un punto de U, entonces f es constante en U.*

La demostración puede ser encontrada en [10].

Teorema 1.25. ***(Fórmula de Poisson)*** *Sea $f : \overline{D}(r,a) \to \mathbb{C}$ una función continua y holomorfa en $D(r,a)$. Entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z-a|^2}{|re^{i\theta} - (z-a)|^2} d\theta, \quad z \in D(r,a).$$

La demostración puede ser encontrada en [1].

Definición 1.26. Sea $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Definimos el Kernel de Poisson para el disco $D(r, a)$ como la función

$$P_{a,r}(z,t) = \mathrm{Re}\left(\frac{re^{it} + (z-a)}{re^{it} - (z-a)}\right),$$

donde $z \in D(r, a)$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.27. Decimos que una función continua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tiene la propiedad del valor medio si para todo $z \in \Omega$ existe una sucesión (r_n) tal que $r_n > 0$, $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, de manera que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + r_n e^{it})dt, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

En otras palabras $f(z)$ es igual al valor medio de f sobre las circunferencias de radios $r_n > 0$ y de centro z.

1.8. Funciones meromorfas

Definición 1.28. Si $a \in \Omega$ y si $f \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{a\})$, se dice que f tiene una singularidad aislada en el punto a. Si f se puede definir en a y la función extendida es holomorfa en Ω, se dice que a es una singularidad evitable.

Teorema 1.29. ***(Teorema de Extensión de Riemann)*** *Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{a\})$. Si f es acotada en $D^*(a, r)$, para algún $r > 0$, entonces f tiene una singularidad evitable en a.*

La demostración puede ser encontrada en [10].

Teorema 1.30. *Si $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{a\})$, entonces ocurre uno de los siguientes casos:*

a) f tiene una singularidad evitable en a.

b) Existen números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_m$ donde m es un entero positivo y $a_m \neq 0$, tales que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(z-a)^k},$$

tiene una singularidad evitable en a

c) Si $r > 0$ *y* $D(a,r) \subset \Omega$*, entonces* $f(D^*(a,r))$ *es denso en* $\mathbb{C}$.

En la situación b) se dice que f *tiene un polo de orden* m *en* a*. La función* $\sum_{k=1}^{m} a_k(z-a)^{-k}$*, que es un polinomio en* $(z-a)^{-1}$*, se llama la parte principal de* f *en* a*. Es claro en este caso que* $|f(z)| \to \infty$ *cuando* $z \to a$ *.*

En la situación c) se dice que f *tiene una singularidad esencial en* a*.*
De los resultados previos podemos deducir la siguiente clasificación de singularidades aisladas, en cuanto al comportamiento de la función en una vecindad perforada.

- z_0 *es una singularidad evitable de* $f \Leftrightarrow f$ *es limitada en una vecindad perforada de* $z_0 \Leftrightarrow$ *existe y es finito el limite* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.
- z_0 *es un polo de* $f \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
- z_0 *es una singularidad esencial de* $f \Leftrightarrow$ *para toda vecindad perforada* V *de* z_0*,* $f(V)$ *es denso en* $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ *el limite* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ *no existe.*

Definición 1.31. Se dice que una función f es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si existe un conjunto $\Sigma \subset \Omega$ tal que

a) Σ no tiene puntos de acumulación en Ω.

b) $\Omega - \Sigma$ es abierto y $f \in \mathcal{O}(\Omega - \Sigma)$.

c) f tiene un polo en cada punto de Σ.

Observación 1.32. No se excluye la posibilidad de que $\Sigma = \varnothing$. Así, toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es meromorfa en Ω.
Observemos también que *a*) implica que ningún subconjunto compacto de Ω contiene infinitos puntos de Σ y por lo tanto, Σ es un conjunto numerable.

1.9. Polinomios complejos

Un polinomio complejo es una función compleja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que todo polinomio complejo es holomorfo en todo $\mathbb{C}$, para ver esto, basta ver que un monomio $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ es holomorfo.
Una función $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida como

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0},$$

donde $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0$ donde $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ no tienen ceros comunes se llama función racional.

Definición 1.33. El grado de $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ no tienen ceros en común se define como:

$$\text{grad}(f) = \text{máx}\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}.$$

Las funciones racionales están bien definidas en $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir:

i) $f(\infty) = 0$ si $n < m$.

ii) $f(\infty) = \dfrac{a_n}{a_m}$ si $n = m$.

iii) $f(\infty) = \infty$ si $n > m$.

Definición 1.34. Una función meromorfa definida en $\mathbb{C}$ que no es una función racional se llama función meromorfa trascendental.

Es preciso indicar que las funciones enteras que no son polinomios se denominan funciones trascendentales enteras.

A continuación damos un resultado conveniente para el desarrollo de este trabajo.

Lema 1.35. *Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ con $a_n \neq 0$ un polinomio. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $r_0 > 0$ tal que para todo $r = |z| > r_0$ la desigualdad*

$$(1-\epsilon)|a_n|r^n \leq P(z) \leq (1+\epsilon)|a_n|r^n,$$

vale.

La demostración puede ser encontrada en [8].

1.10. La Esfera de Riemann

Muchos problemas en el análisis complejo requieren del uso de un elemento llamado infinito ($\infty \notin \mathbb{C}$), por lo tanto es conveniente hacer un estudio breve acerca de este elemento que ayudaran mucho a entender diversos problemas que se pueden presentar en el desarrollo de este trabajo.

Consideremos un elemento $\infty \notin \mathbb{C}$. El conjunto $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ será llamado esfera de Riemann. Los puntos de $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ serán llamados puntos finitos. Diremos que V es una vecindad de ∞, si $\infty \in V$ y si existe $r > 0$ tal que $\mathbb{C} \backslash \overline{D}(0, r) \subset V$. Basado en este hecho tenemos ciertas propiedades que pueden ser verificadas.

a) La unión arbitraria de vecindades de ∞ es una vecindad de ∞.

b) la intersección finita de vecindades de ∞ es una vecindad de ∞.

c) Para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ y todo $r \geq 0$, $\overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D}(z_0, r)$ es una vecindad de ∞.
Además, observe que

$$\bigcap_{r \geq 0} (\overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D}(z_0, r)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D}(z_0, r)) = \{\infty\}.$$

Diremos que un subconjunto $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ es abierto de $\overline{\mathbb{C}}$, si A es vecindad de todos sus puntos.

Diremos que un subconjunto $F \subset \mathbb{C}$ es cerrado si $\overline{\mathbb{C}} \backslash F$ es abierto. Con estas definiciones podemos establecer las nociones de limite usual y limite infinito de sucesiones de funciones.

Sea $(z_n) \subset \overline{\mathbb{C}}$. Decimos que $\lim_{n \to \infty} z_n = a \in \overline{\mathbb{C}}$, si para toda vecindad V de a existe $n_0 \geq 1$ (que depende de V) tal que si $n \geq n_0$, entonces $z_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.

Análogamente, si $f : A \to \overline{\mathbb{C}}$ es una función donde $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ y z_0 es un punto de acumulación de A, diremos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, si para toda vecindad V de w_0 existe una vecindad U de z_0 tal que $f(U \cap A - \{z_0\}) \subset V$.

Diremos que una función $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ es continua en un punto $z_0 \in U$, si z_0 es un punto aislado de U, o si z_0 es un punto de acumulación de U y $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Diremos que f es continua en U si f es continua en todos los puntos de U.

Ahora buscaremos la forma de definir funciones holomorfas, para este caso. Sea $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ una función continua, donde $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ es abierto. Diremos que f es holomorfa en $z_0 \in U$ si alguna de las cuatro condiciones vale:

i) $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ y f es holomorfa en z_0 en el sentido usual.

ii) $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$ y $\dfrac{1}{f(z)}$ es holomorfa en 0.

iii) $z_0 = \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ y $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ es holomorfa en 0.

iv) $z_0 = \infty$, $f(z_0) = \infty$ y $\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ es holomorfa en 0.

Diremos que f es holomorfa en U si f es holomorfa en todos los puntos de U.

Definición 1.36. Ahora definiremos singularidades aisladas en el punto infinito.

1) Decimos que f tiene una singularidad evitable en ∞ si f está definida sobre alguna vecindad de ∞ y $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c \in \mathbb{C}$.

2) Decimos que f tiene un polo en ∞ si f está definida sobre alguna vecindad de ∞ y $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

3) Decimos que f tiene una singularidad esencial en ∞ si f está definida sobre alguna vecindad de ∞ y no existe $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Definición 1.37. Sea $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ un abierto. Decimos que f es meromorfa en Ω si satisface las siguientes condiciones:

a) f es meromorfa en $\Omega \backslash \{\infty\}$.

b) f tiene una singularidad evitable o polo en ∞.

Capítulo 2

Teoría de Nevanlinna

La teoría de distribución de valores también llamada Teoría de Nevanlinna es el estudio de como una función compleja asume diferentes valores.
Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que cualquier polinomio en $\mathbb{C}$ está completamente definido por sus ceros salvo multiplicidades. ¿ Qué podemos decir de las funciones enteras en general?
Observemos el caso de una función polinomial f de grado n. Por el teorema fundamental del álgebra f tiene exactamente n ceros contando con multiplicidad, en otras palabras la función f toma el valor cero exactamente n veces. Ahora podemos preguntarnos ¿Cuántas veces f toma cualquier otro valor $a \in \mathbb{C}$?
Tratando de generalizar el teorema fundamental del álgebra, en 1925 R. Nevanlinna revolucionó el estudio de las funciones meromorfas estableciendo dos teoremas fundamentales.
En este capítulo tratamos el Primer teorema fundamental Nevanlinna y sus propiedades, también desarrollaremos un paralelo a esta teoría con un sentido más geométrico desarrollado independientemente por Ahlfors y Shimizu.
Para referencia de este capitulo ver ([3], [4], [7], [8], [9], [11], [13] y [15]).

2.1. Fórmula de Jensen-Poisson

Teorema 2.1. *Suponga que $f(z)$ es meromorfa en el disco cerrado*

$$\overline{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}, \quad (0 < R < \infty).$$

Sean a_u $(u = 1, 2, ..., m)$ los ceros de $f(z)$ y b_v $(v = 1, 2, ..., n)$ los polos de $f(z)$ en el disco abierto D_R. Si $z = re^{i\theta}$ $(0 < r \leq R)$ y $f(z) \neq 0, \infty$ entonces

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ + \sum_{u=1}^{m} \log\left|\frac{R(z - a_u)}{R^2 - \bar{a}_u z}\right| - \sum_{v=1}^{n} \log\left|\frac{R(z - b_v)}{R^2 - \bar{b}_v z}\right| \tag{2.1}$$

*Cuando no existen ceros o polos en el teorema **??** la fórmula (2.1) es usualmente llamado fórmula de Poisson. Cuando $z = 0$ en el teorema **??** la fórmula (2.1) es llamado fórmula de Jensen.*

Demostración. i) Supongamos primero que f no tiene ceros ni polos en el disco $|z| \leq R$. Fije z, $|z| < R$ y considere la aplicación

$$w = \frac{R(\xi - z)}{R^2 - \bar{z}\xi},$$

que aplica el disco $\{|\xi| < R\}$ biholomorficamente sobre el disco $\{|w| < 1\}$ y que envía $\xi = z$ a $w = 0$. La inversa de esta aplicación es dada por

$$\xi = \frac{R(Rw + z)}{R + w\bar{z}}.$$

La aplicación

$$w \to F(w) = f(\xi)$$

no tiene ceros ni polos sobre $|w| \leq 1$. Entonces existe $g(w)$, analítica sobre el disco $|w| \leq 1$, tal que

$$e^{g(w)} = F(w) \ \ \forall w, \ \ |w| < 1.$$

(para ver una justificación de este hecho dirigirse a [6, p.202]). Por la fórmula integral de Cauchy

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} g(w)\frac{dw}{w}$$

Como

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\xi}{\xi - z} + \frac{\bar{z}R}{R^2 - \bar{z}\xi} = \frac{(R^2 - |z|^2)d\xi}{(R^2 - \bar{z}\xi)(\xi - z)},$$

obtenemos

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} g(w)\frac{(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \bar{z}\xi)(\xi - z)} d\xi.$$

De aquí, haciendo $\xi = Re^{i\phi}$, $\quad z = re^{i\theta} \quad (0 < r < R)$ tenemos

$$g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(w)\frac{(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2}d\phi.$$

Finalmente, igualando a las partes reales, como $\Re e(g(w)) = \log|F(w)| = \log|f(\xi)|$, tenemos

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})|\frac{(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2}d\phi. \tag{2.2}$$

ii) Ahora veamos el caso general, cuando $f(\xi)$ tiene ceros y polos en $|\xi| < R$, denotados por a_u $(u = 1, 2, ..., m)$ y b_v $(v = 1, 2, .., n)$ respectivamente. Sea

$$\psi(\xi) = f(\xi)\prod_{v=1}^{n}\left\{\frac{R(\xi - b_v)}{R^2 - \bar{b_v}\xi}\right\} / \prod_{u=1}^{m}\left\{\frac{R(\xi - a_v)}{R^2 - \bar{a_v}\xi}\right\}. \tag{2.3}$$

esta función es holomorfa sobre $|\xi| \leq R$ y no tiene ceros ni polos en $|\xi| < R$ además $\psi(\xi) \neq 0, \infty$ en $|\xi| < R$.

Por otro lado, si $\xi = Re^{i\phi}$ y $|a| < \xi$

$$\left|\frac{R(\xi - a)}{R^2 - \bar{a}\xi}\right| = \left|\frac{R(Re^{i\phi} - a)}{R^2 - \bar{a}Re^{i\phi}}\right| = \left|\frac{Re^{i\phi} - a}{R - \bar{a}e^{i\phi}}\right| = \left|\frac{R - ae^{-i\phi}}{R - \bar{a}e^{i\phi}}\right| = 1.$$

Así, $|\psi(\xi)| = |f(\xi)|$ sobre $|\xi| = R$. Ahora podemos aplicar (2.1) a $\psi(\xi)$

$$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi.$$

Además, tomando logaritmo en ambos lados de la ecuación (2.3)

$$\log|\psi(\xi)| = \log|f(\xi)| + \log\left|\prod_{v=1}^{n}\left\{\frac{R(\xi - b_v)}{R^2 - \bar{b_v}\xi}\right\} / \prod_{u=1}^{m}\left\{\frac{R(\xi - a_v)}{R^2 - \bar{a_v}\xi}\right\}\right|,$$

$$\log|\psi(\xi)| = \log|f(\xi)| + \sum_{v=1}^{n}\log\left|\frac{R(\xi - b_v)}{R^2 - \bar{b_v}\xi}\right| - \sum_{u=1}^{m}\log\left|\frac{R(\xi - u_v)}{R^2 - \bar{a_u}\xi}\right|$$

y finalmente obtenemos la fórmula requerida

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi$$
$$+ \sum_{u=1}^{m}\log\left|\frac{R(z - a_u)}{R^2 - \bar{a}_u z}\right| - \sum_{v=1}^{n}\log\left|\frac{R(z - b_v)}{R^2 - \bar{b}_v z}\right|.$$

□

*Como un caso especial tomando $z = 0$ en el teorema **??** obtenemos la fórmula de Jensen como sigue:*

Corolario 2.2. *Bajo las condiciones del teorema 1.2. Si $f(0) \neq 0, \infty$, entonces*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})d\phi + \sum_{u=1}^{m} \log\frac{|a_u|}{R} - \sum_{v=1}^{n} \log\frac{|b_v|}{R}. \tag{2.4}$$

2.2. La función característica

Posteriormente, Rolf Nevanlinna revolucionó el estudio de las funciones meromorfas, usando una pequeña modificación de la fórmula de Jensen

Definición 2.3. Dado $x \geq 0$ definimos

$$\log^+ x = \text{máx}(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & x \geq 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Claramente si $x > 0$, entonces

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}.$$

Ahora damos algunas propiedades básicas de este logaritmo.

Lema 2.4. *a)* $\log x \leq \log^+ x$.

b) $\log^+ x \leq \log^+ y$, *para* $x \leq y$.

c) $\log^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i$

d) $\log^+ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i$

Demostración. *a)* y *b)* La prueba es trivial

c) Si $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, entonces la desigualdad vale trivialmente. Por otro lado, si $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$, entonces

$$\log^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i,$$

donde la última desigualdad es por la parte a).

d) Por la parte b) y c), tenemos

$$\begin{aligned}\log^+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \log^+\left(n \max_{1\leq i\leq 1} x_i\right) &\leq \log n + \log^+\left(\max_{1\leq i\leq n} x_i\right)\\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n}\log^+ x_i.\end{aligned}$$

□

Si f es meromorfa en $|z| < R$ y si $0 < r < R$, entonces

$$\log|f(re^{i\phi})| = \log^+|f(re^{i\phi})| - \log^+\frac{1}{|f(re^{i\phi})|}, \tag{2.5}$$

luego integramos de 0 a 2π y dividimos entre $\frac{1}{2\pi}$ a la ecuación (2.5)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})|d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\phi})|d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\phi})|}d\phi.$$

Note que el primer término del lado derecho se puede interpretar como la contribución cuando f es grande y el segundo término del lado derecho cuando f es pequeño. Así, definimos a continuación la función proximidad.

Definición 2.5. (Función proximidad) Sea f una función meromorfa definida en el disco D_R tal que f no tenga polos sobre $|z| = r$, donde $r \in (0, R)$. Definimos

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\phi})|d\phi. \tag{2.6}$$

Debemos resaltar que $m(r, f)$ mide como varia el crecimiento de f sobre la frontera del disco $|z| = r$. Dado $a \in \mathbb{C}$, si $f - a$ no tiene ceros sobre $|z| = r$, definimos

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\phi}) - a|}d\phi. \tag{2.7}$$

Es necesario indicar que $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ también puede ser denotado como $m(r, f = a)$ o $m(r, a)$.

Proposición 2.6. *Sean f_v, $v = 1, 2, \ldots, p$, funciones meromorfas, entonces*

$$m\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(z)\right) = \sum_{v=1}^{p} m(r, f_v(z)) + \log p.$$

$$m\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) = \sum_{v=1}^{p} m(r, f_v(z)).$$

Estas propiedades de la función proximidad, fácilmente se pueden demostrar haciendo uso del lema 2.4.

Denote por $n(t, f)$ el número de polos de f en el disco cerrado $\{|z| \leq t\}$, $(0 < t < R)$ cada polo contado de acuerdo a su multiplicidad. Además, denote por $n(0, f)$ el número de polos de $f(z)$ en el origen contados de acuerdo a su multiplicidad (Si $f(0) \neq \infty$, entonces $n(0, f) = 0$).

Sean $b_1, b_2, ..., b_m$ los polos de f en $0 < |z| \leq r$ contados con multiplicidad. Denote $r_v = |b_v|$ y suponga que $0 < r_1 \leq \cdots \leq r_m \leq r$ donde $v = 1, 2, \ldots, m$. Entonces, usando propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes (ver [3])

$$\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{m} \log \frac{r}{|b_v|} &= \sum_{v=1}^{m} \log \frac{r}{r_v} = \int_0^r \log \frac{r}{t} d(n(t, f) - n(0, f)). \\
&= \log \frac{r}{t}(n(t, f) - n(0, f))\Big]_0^r - \int_0^r n(t, f) - n(0, f) d(\log \frac{r}{t}). \\
&= \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Similarmente, denote por $n(t, a) := n\left(t, \dfrac{1}{f - a}\right)$, *con* $a \in \mathbb{C}$, el número de soluciones $f(z) = a$ en el disco cerrado $\{|z| \leq t\}$; cada raíz es contada de acuerdo a su multiplicidad.

Definición 2.7. (Función contadora) Sea f una función meromorfa en el disco D_R. Dado $0 < t \leq r < R$ defina

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r, \tag{2.8}$$

Observe que $N(r, f)$ es una función que cuenta la media logarítmica de los polos de $f(z)$ dentro del disco $|z| < r$. Denotaremos $N(r, f)$ también como $N(r, f = \infty)$.

Además, dado $a \in \mathbb{C}$

$$N\left(r, \frac{1}{f - a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r, \quad a \neq \infty. \tag{2.9}$$

Además, $N\left(r, \dfrac{1}{f - a}\right)$ será denotado por $N(r, f = a)$ o $N(r, a)$ donde $a \in \mathbb{C}$. A continuación mostraremos algunas propiedades de la función contadora.

Proposición 2.8. *Sean f_v, $v = 1, 2, ..., p$, funciones meromorfas, entonces*

$$N\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} N(r, f_v(z)).$$

$$N\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} N(r, f_v(z))$$

Estas propiedades se pueden demostrar fácilmente haciendo uso de la definicón 2.7.

Definición 2.9. (Función característica) La función Característica de una función meromorfa f definida en el disco D_R, está definida como:

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f), \tag{2.10}$$

donde $0 < r < R$.

Observación 2.10. a) La expresión $T(r, f)$ es usualmente llamada función característica de Nevanlinna.

b) La cantidad $m(r, f) + N(r, f)$ mide en algún sentido la afinidad total de f para el valor ∞.

c) Similármente, $m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ mide la afinidad total de f para el valor cero.

Con estas notaciones la fórmula de Jensen puede ser reescrita como:

$$\log|f(0)| = m(r, f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

o

$$m(r, f) + N(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|.$$

Así, la fórmula de Jensen se podrá reescribir como

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|. \tag{2.11}$$

Ahora daremos algunas propiedades de la función característica

Proposición 2.11. *Sean $f_v(z)$ con $v = 1, 2, \ldots, p$ funciones meromorfas definidas en el disco D_R. Entonces*

1) $T\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} T(r, f_v(z)) + \log p.$

2) $T\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} T(r, f_v(z))$

Demostración. Demostremos el item 1)

$$T\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(p)\right) = m\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(z)\right) + N\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(p)\right).$$

Por la proposición 2.8 y el lema 2.4, tendremos

$$T\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(p)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} m(r, f_v(z)) + \log p + \sum_{v=1}^{p} N(r, f_v(z)).$$

Así

$$T\left(r, \sum_{v=1}^{p} f_v(p)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} T(r, f_v(z)) + \log P.$$

Ahora demostremos el item 2)

$$T\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) = m\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) + N\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right).$$

Por la proposición 2.8 y el lema 2.4, tenemos

$$T\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} m(r, f_v(z)) + \sum_{v=1}^{p} N(r, f_v(z)).$$

Así

$$T\left(r, \prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \leq \sum_{v=1}^{p} T(r, f_v(z)).$$

□

A continuación mencionaremos y probaremos el primer teorema fundamental de Nevanlinna.

Teorema 2.12. ***(Primer teorema fundamental de Nevanlinna)*** *Sea f una función meromorfa definida en D_R. Si a es un número complejo arbitrario y $0 < r < R$, entonces*

$$m(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) - \log|f(0) - a| + \epsilon(a, r)$$

donde

$$|\epsilon(a, r)| \leq \log^+ |a| + \log 2$$

Demostración. Por la definición de función característica, ecuación (2.10) y la fórmula de Jensen

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|.$$

Luego

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f-a) - \log|f(0)-a|. \tag{2.12}$$

Por otro lado

$$T(r, f-a) = m(r, f-a) + N(r, f-a).$$

$N(r, f-a) = N(r, f)$, pues los polos de la ecuación $f(z) - a$ son los mismos que de la ecuación $f(z)$ y $m(r, a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ |a| d\phi = \log^+ |a|$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
T(r, f-a) &= m(r, f-a) + N(r, f) \\
&\leq m(r, f) + m(r, a) + \log 2 + N(r, f) \\
&= m(r, f) + N(r, f) + \log^+ |a| + \log 2 \\
&= T(r, f) + \log^+ |a| + \log 2.
\end{aligned}$$

De la ecuación (2.12)

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= T(r, f-a) - \log|f(0)-a| \\
&\leq T(r, f) + \log^+ |a| + \log 2 - \log|f(0)-a|.
\end{aligned}$$

Luego

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq T(r, f) + \log^+ |a| + \log 2 - \log|f(0)-a|. \tag{2.13}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
m(r, f) = m(r, f-a+a) &\leq m(r, f-a) + m(r, a) + \log 2 \\
&= m(r, f-a) + \log^+ |a| + \log 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$m(r, f-a) \geq m(r, f) - \log^+ |a| - \log 2$$

y esta última inecuación la remplazamos en la ecuación (2.12)

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= m(r, f-a) + N(r, f) - \log|f(0)-a| \\
&\geq m(r, f) - \log^+ |a| - \log 2 + N(r, f) - \log|f(0)-a| \\
&= T(r, f) - \log^+ |a| - \log 2 - \log|f(0)-a|.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \geq T(r,f) - \log^+|a| - \log 2 - \log|f(0)-a|. \tag{2.14}$$

Luego, de (2.13) y (2.14) obtenemos

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|f(0)-a| + \epsilon(a,r),$$

donde

$$|\epsilon(a,r)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

$\square$

Observación 2.13. a) El *Primer teorema fundamental de Nevanlinna* nos dice que existe una simetría observable por una función meromorfa $f(z)$ en su comportamiento relativo a diferentes valores $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. La suma $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ para diferentes valores de a viene dada por la cantidad $T(r,f)$ salvo un término acotado.

b) El primer coeficiente no nulo en la expansión de Laurent de $f-a$ en el origen es $f(0)-a$.

c) El *Primer teorema fundamental de Nevanlinna* puede ser expresado como

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \tag{2.15}$$

para todo $a \in \mathbb{C}$. El término $O(1)$ es una función limitada de r que solo depende de $a \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.14. Si $f(z) = C$, donde $C \in \mathbb{C}$ entonces

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|C|d\phi = \log^+|C| \; y \; N(r,f) = 0.$$

Así $T(r,f) = m(r,f) = \log^+|C|$.

Ejemplo 2.15. Sea $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$. Luego, si $z = re^{i\theta}$ tenemos que $|e^z| = e^{Re(z)} = e^{rcos\theta}$ y

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+(e^{r\cos\theta})\, d\theta.$$

Como la función $\cos\theta$ solo es positiva en el intérvalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \bigcup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ o equivalentemente $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se tiene que

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} r\cos\theta\, d\theta = \frac{r}{\pi}.$$

Además, como $f(z)$ es una función entera

$$N(r,f) = 0.$$

Entonces

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Por otro lado

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = m(r,0) = \frac{r}{\pi}$$

y

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = N(r,0) = 0.$$

Así

$$T(r,f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{r}{\pi}.$$

En este ejemplo podemos observar que la función exponencial $f(z) = e^z$ se aproxima rápidamente a dos valores $0, \infty$, cuando $z \to \infty$.

Ejemplo 2.16. Sea $f(z) = e^{P(z)}$, donde $P(z) = a_p z^p + ... + a_1 z + a_0$ es un polinomio.

Si escribimos $P(z)$ en su forma polar tenemos que

$$\begin{aligned} P(re^{i\theta}) &= a_p r^p e^{ip\theta} + ... + a_1 re^{i\theta} + a_0 \\ &= a_p r^p \cos(p\theta) + ... + a_1 r\cos\theta + a_0 \\ &\quad +i\big(a_p r^p \sin(p\theta) + ... + a_1 r\sin\theta\big) \end{aligned}$$

y $\log^+|f(z)| = \log|f(z)| = a_p r^p\cos(p\theta) + ... + a_1 r\cos\theta + a_0$ para todos los valores donde esta suma sea positiva. Además, notemos que cuando $r \to \infty$ esta suma depende esencialmente del polinomio $|a_p| r^p \cos(p\theta)$. Entonces:

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|e^{P(z)}|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(a_p r^p\cos(p\theta) + ... + a_1 r\cos\theta + a_0\big)d\theta.$$

Si $r \to \infty$

$$m(r,f) \sim \frac{2p}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2p}} |a_p| r^p \cos(p\theta) d\theta = |a_p|\frac{r^p}{\pi}$$

y como $f(z)$ es una función entera, la función contadora $N(r, f) = 0$. Por lo tanto $T(r, f) \sim |a_p|\dfrac{r^p}{\pi}$.

2.3. Identidad de Cartan y teoremas de convexidad

Teorema 2.17. ***(Identidad de Cartan)*** *Sea f una función holomorfa en D_R. Entonces*

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta})d\theta + \log^+ |f(0)| \qquad (0 < r < R)$$

Demostración. Aplicando la fórmula de Jensen a $f(z) = a - z$ y tomando $R = 1$ tenemos

1) Si $|a| < 1$ y como f no tiene polos y tiene un único cero en $z = a$,

$$\log |a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\theta}|d\theta + \log |a|.$$

Así

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\theta}| = 0.$$

2) Si $|a| \geq 1$, como la función $f(z) = a - z$ no tiene ceros ni polos en el disco $|z| < 1$,

$$\log |a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |a - e^i\theta|d\theta.$$

De 1) y 2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\theta}|d\theta = \begin{cases} \log |a|; & |a| \geq 1 \\ 0; & |a| < 1 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\theta}|d\theta = \log^+ |a|. \tag{2.16}$$

Nuevamente, aplicando la fórmula de Jensen a $f(z) - e^{i\theta}$ tenemos

$$\log |f(0) - e^{i\theta}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\phi}) - e^{i\theta}|d\phi \;+\; N(r, f) - N(r, e^{i\theta}). \tag{2.17}$$

Luego, integrando la ecuación (2.17) respecto a θ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})-e^{i\theta}|d\phi\right)d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,f)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta.\end{aligned}$$

Ahora tomando $f(0)=a$ y cambiando el orden de integración sabiendo que el lado derecho de la última expresión es permisible desde que la doble integral es absolutamente convergente, tenemos

$$\begin{aligned}\log^+|a| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\phi})|d\phi + N(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta. \\ &= m(r,f)+N(r,f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta. \\ &= T(r,f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta.\end{aligned}$$

Entonces

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta+\log^+|a|.$$

□

Demostración. Sea $y=\log r$ entonces $dy=\frac{1}{r}dr$, así

$$\frac{dT(r,f)}{d\log r}=r\frac{d}{dr}T(r,f)$$

y por el teorema 2.17

Corolario 2.18. *La Característica de Nevanlinna, $T(r,f)$ es una función creciente y convexa de $\log r$ para $0<r<R$.*

$$\begin{aligned}
\frac{dT(r,f)}{d\log r} &= r\frac{d}{dr}T(r,f) = r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta + \log^+|f(0)|\right) \\
&= r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta\right) \\
&= r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \frac{n(t,e^{i\theta})-n(0,e^{i\theta})}{t}dt + n(0,e^{i\theta})\log r\right)d\theta\right) \\
&= r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \frac{n(t,e^{i\theta})}{t}dt\right)d\theta\right) \\
&= r\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{n(r,e^{i\theta})}{r}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r,e^{i\theta})d\theta > 0 \quad para \quad 0<r<R,
\end{aligned}$$

ya que $n(r,e^{i\theta})$ es una función creciente de r para $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$, $T(r,f)$ es función convexa de $\log r$. □

Corolario 2.19. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta \leq \log 2.$

Demostración. Por el teorema 2.12 tenemos que:

$$T\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right) = T(r,f) - \log|f(0)-e^{i\theta}| + \epsilon(e^{i\theta},r),$$

donde $|\epsilon(e^{i\theta},r)| \leq \log^+|e^{i\theta}| + \log 2 = \log 2$.
Ahora integramos esta expresión respecto de θ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta &= T(r,f) \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\epsilon(e^{i\theta},r)d\theta. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Por el teorema 2.17

$$T(r,f) - \log^+|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta. \qquad (2.19)$$

Luego, aplicando la fórmula de Jensen a $f(z)-e^{i\theta}$ tenemos $\log|f(0)-e^{i\theta}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})-e^{i\theta}|d\phi + N(r,f) - N(r,e^{i\theta})$, integrando respecto a θ y cambiando el orden de integración

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})-e^{i\theta}|d\theta\right)d\phi\\ &+ N(r,f)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,e^{i\theta})d\theta = T(r,f)-\log^+|f(0)|,$$

y

$$\begin{aligned}N(r,f)-T(r,f) &= N(r,f)-m(r,f)-N(r,f)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\phi})|d\phi.\end{aligned}$$

Por el teorema 2.17

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})-e^{i\theta}|d\theta\right)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\phi})|d\phi.$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta = \log^+|f(0)|. \tag{2.20}$$

Finalmente, reemplazando la ecuación (2.19) y (2.20) en la ecuación (2.18), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}m(r,e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\epsilon(e^{i\theta},r)d\theta \leq \log 2.$$

□

Este resultado muestra que $m(r,a)$ es acotado en el promedio sobre el círculo $|a|=1$ y un correspondiente resultado vale también sobre cualquier otro círculo. Así, si $T(r,f)$ es grande y $m(r,a)$ es acotado, entonces $N(r,a)$ es próximo o igual a $T(r,f)$.

2.4. Funciones racionales y teoría de Nevanlinna

Muchas desigualdades de la Teoría de Nevanlinna dependen de un término de error cuyo crecimiento es de tipo $O(\log r)$, además esto es importante para caracterizar funciones meromorfas cuya función característica tiene el crecimiento de ese tipo.

Teorema 2.20. *Si f es holomorfa sobre $\overline{D}_R$ y $M(r,f) = \max_{|z|\leq r}|f(z)|$. Entonces*

$$T(r,f) \leq \log^+ M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r}T(R,f),$$

para $0 < r < R$.

Demostración. Primero probaremos que

$$T(r,f) \leq \log^+ M(r,f). \tag{2.21}$$

En efecto, como $f(z)$ es una función holomorfa definida en el disco $\overline{D}_R$ entonces $f(z)$ no tiene polos, por lo tanto su función característica estará dada por

$$T(r,f) = m(r,f).$$

Además, $m(r,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \log^+ M(r,f)$, pues $\log^+|f(re^{i\theta})| \leq \log^+ M(r,f)$. Así, tenemos (2.21)
Ahora veamos que

$$\log^+ M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r}T(R,f).$$

Si $M(r,f) < 1$, la desigualdad es trivial pues $\log^+ M(r,f) = 0$ y como $R-r>0$, $\dfrac{R+r}{R-r} > 0$ entonces $0 \leq \dfrac{R+r}{R-r}T(R,f)$.

Si $M(r,f) \geq 1$, $\log^+ M(r,f) = \log M(r,f)$. Tomando $z = re^{i\theta}$ tal que $|f(z)| = M(r,f)$ la fórmula de Poisson quedará

$$\begin{aligned}\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi \\ +\sum_{u=1}^{m}\log\left|\frac{R(z-a_u)}{R^2-\bar{a}_u z}\right|,\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde $a_1,\ldots,a_m$ son los ceros de f con módulo menor a R. Como $|a_u| < R$ implica que

$$\left|\frac{R(z-a_u)}{R^2-\bar{a}_u z}\right| < 1.$$

(Vea la demostración del teorema **??**), tendremos que

$$\log\left|\frac{R(z-a_u)}{R^2-\bar{a}_u z}\right| < 0$$

para todo $u \in \{1,\ldots,m\}$. Luego, de la ecuación (2.22) obtenemos

$$\log|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi.$$

Claramente tenemos que

$$\log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi-\theta)} \leq \log^+|f(Re^{i\phi})|\frac{R+r}{R-r},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\log|f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\phi})|\frac{R+r}{R-r}d\phi.\\
&\leq \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(Re^{i\phi})|d\phi\\
&= \frac{R+r}{R-r}m(R,f)\\
&= \frac{R+r}{R-r}T(R,f).
\end{aligned}$$

Así

$$\log^+ M(r,f) = \log|f(z)| \leq \frac{R+r}{R-r}T(R,f).$$

□

Ahora estamos listos para dar una anticipada caracterización de las funciones racionales

Teorema 2.21. *Una función meromorfa f es racional si, y solo si, $T(r,f) = O(\log r)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que f sea una función racional,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \cdots + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_0}, \quad a_n, b_m \neq 0.$$

Si $m \geq n$, entonces $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)$ es finito, por lo tanto para algún $r_0 > 0$, tenemos $n(r,f) = m, \quad r \geq r_0$, entonces

$$\begin{aligned}
N(r,f) &= \int_0^{r_0}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + \int_{r_0}^{r}\frac{m-n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\log r\\
&= (m-n(0,f))(\log r - \log r_0) + n(0,f)\log r + O(1)\\
&= m\log r - m\log r_0 + n(0,f)\log r_0 + O(1)\\
&= m\log r + O(1).
\end{aligned}$$

Luego $N(r,f) = m(\log r) + O(1)$.
Por el lema 1.35

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

implica que dado $\epsilon > 0$, existe un $r_0 > 0$ tal que $\forall \ r = |z| > r_0$ vale que

$$(1-\epsilon)|a_n|r^n \leq |P(z)| \leq (1+\epsilon)|a_n|r^n.$$

Así, para $r > r_0$, podemos asumir que $|P(z)| = |a_n|r^n(1+o(1))$. Analogamente, como

$$(1-\epsilon)|b_m|r^m \leq |Q(z)| \leq (1+\epsilon)|b_m|r^m,$$

podemos asumir

$$|Q(z)| = |b_m|r^m(1+o(1)), \text{ si } r > r_0$$

Por lo tanto, para $r \geq r_0$

$$\log^+|f(z)| = \log^+\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \log^+\left(\left|\frac{a_n}{b_m}\right|r^{n-m}(1+o(1))\right) = O(1).$$

Entonces

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta = O(1).$$

Por consiguiente, la función caracterítica de $f(z)$ está dada por

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = O(1) + m\log r + O(1) = O(1) + m\log r$$

$$T(r,f) = O(\log r).$$

Si $m < n$ y aplicando la fórmula de Jensen a $f(z)$

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})d\phi - \sum_{u=1}^{m}\log\frac{r}{|a_u|} + \sum_{v=1}^{n}\log\frac{r}{|b_v|},$$

entonces

$$\log|f(0)| = m(r,f) - m\left(r,\frac{1}{f}\right) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) = T(r,f) - T\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

por consiguiente

$$T(r,f) \ = \ T\left(r,\frac{1}{f}\right) + O(1).$$

La función meromorfa $\dfrac{1}{f}$ se encuadra en el caso anterior ($m \geq n$), así que $T\left(r, \dfrac{1}{f}\right) = O(\log r)$, de donde obtenemos $T(r, f) = O(\log r)$.

($\Leftarrow$) Asumimos ahora que f es una función meromorfa tal que

$$T(r, f) = O(\log r),$$

esto implica que para algún $r_0 \geq 1$ y para algún $K > 0$

$$T(r, f) \leq K \log r, \quad para \;\; r \geq r_0.$$

Podemos asumir que f es una función no constante, como la función característica de f está dado por $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$, entonces

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) \leq K \log r, \quad para \;\; r \geq r_0.$$

Esto implica que

$$N(r, f) \leq K \log r, \quad para \;\; r \geq r_0.$$

Entonces, para todo $r \geq r_0$

$$\begin{aligned}
\big(n(r, f) - n(0, f)\big) \log r &= \big(n(r, f) - n(0, f)\big) \int_r^{r^2} \frac{dt}{t} \leq \int_r^{r^2} \frac{\big(n(t, f) - n(0, f)\big)}{t} dt \\
&\leq \int_0^{r^2} \frac{\big(n(t, f) - n(0, f)\big)}{t} dt + n(0, f) \log r^2 \\
&= N(r^2, f) \leq K \log r^2 = 2K \log r.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$n(r, f) - n(0, f) \leq 2K,$$

entonces

$$n(r, f) \leq n(0, f) + 2K, \quad para \;\; todo \;\; r \geq r_0.$$

Esto significa que f tiene un número finito de polos. Sean $b_1, \ldots, b_n$ polos de f en $\mathbb{C}$.

Defina la función entera g por

$$g(z) = f(z)P(z) \;\; \text{donde} \;\; P(z) = (z - b_1) \cdots (z - b_n).$$

Por la primera parte de la prueba aplicado a la función P tenemos

$$T(r, P) = O(\log r).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T(r,fP) \leq T(r,f) + T(r,P) \\ &= O(\log r) + O(\log r) = O(\log r). \end{aligned}$$

Entonces existe $L \in \mathbb{N}$ y $r_1 > 0$ tales que $T(r,g) \leq L \log r$, para $r \geq r_1$. Luego, por el teorema 2.20 y haciendo $R = 2r$ obtenemos

$$\log M(r,g) \leq \frac{R+r}{R-r} T(r,g) \leq 3L \log 2r \quad \text{para} \quad r \geq r_1.$$

Entonces

$$M(r,g) \leq (2r)^{3L} \quad \text{para} \quad r \geq r_1.$$

Por otro lado, como g es una función entera, podemos expresar g como

$$g(z) := \sum_{u=0}^{\infty} a_u z^u.$$

Entonces, podemos estimar el término a_u de la serie dada por

$$a_u = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^{u+1}} dz.$$

Como $|g(z)| \leq M(r,g)$ si $|z| = r$, tenemos que

$$|a_u| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^{u+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi}(2\pi r) \frac{M(r,g)}{r^{u+1}} = \frac{M(r,g)}{r^u}.$$

Luego, si $u > 3L$, para todo $r \geq r_1$

$$|a_u| \leq \frac{(2r)^{3L}}{r^u} = \frac{2^{3L}}{r^{u-3L}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad r \to \infty,$$

o sea, $a_u = 0$.

Por lo tanto, g es un polinomio y por consiguiente f es una función racional. □

2.5. Orden de crecimiento de una función meromorfa

Definición 2.22. Sea $S(r)$ una función real definida en (r_0, ∞), donde $r_0 \geq 0$. Si $S(r)$ es una función creciente y no negativa en este intervalo, entonces el orden ρ y orden inferior μ de S están definidos respectivamente como

$$\rho(S) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ S(r)}{\log r}, \qquad \mu(S) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ S(r)}{\log r}.$$

Si f es una función meromorfa definida en $\mathbb{C}$, entonces $T(r, f)$ es no negativa y creciente en $(0, \infty)$, además el orden superior y orden inferior de $T(r, f)$ están definidos.

Definición 2.23. Sea $f(z)$ una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$, defina el orden superior $\rho(f)$ y el orden inferior $\mu(f)$ de $T(r, f)$ por

$$\rho(f) = \rho(T(r, f)), \qquad \mu(f) = \mu(T(r, f)).$$

El orden superior y orden inferior de una función meromorfa satisface la siguiente relación

$$0 \leq \mu \leq \rho \leq \infty.$$

Decimos que f tiene orden finito si $\rho(f) < \infty$ o equivalentemente $T(r, f) = O(r)$. Decimos que $f(z)$ tiene orden infinito si $\rho(f) = \infty$.

Corolario 2.24. *Sea f una función entera. Entonces las funciones $S_1(r) = \log^+ M(r, f)$ y $S_2(r) = T(r, f)$ tienen el mismo orden.*

Demostración. En el teorema 2.20 tomamos $2r = R$, luego

$$S_2(r) \leq S_1(r) \leq 3S_2(2r).$$

De la primera desigualdad obtenemos

$$\rho(S_2) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+ S_2(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+ S_1(r)}{\log r} = \rho(S_1).$$

Por lo tanto

$$\rho(S_2) \leq \rho(S_1).$$

Por otro lado, usando la segunda desigualdad

$$\begin{aligned}
\rho(S_1) &= \limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+ S_1(r)}{\log r} \\
&\leq \limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+ 3S_2(2r)}{\log r} \\
&= \limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+ 3 + \log^+(S_2(2r))}{\log r} \\
&= \limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+(S_2(2r))}{\log r} \\
&= \rho(S_2).
\end{aligned}$$

Así

$$\rho(S_1) = \rho(S_2).$$

$\square$

Ejemplo 2.25. Sea f una función racional, la función característica de f será $T(r,f) = O(\log r)$. Además, para cierto $K > 0$:

$$\begin{aligned}
\rho(f) &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ K \log r}{\log r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Concluimos que el orden de una función racional es cero.

Ejemplo 2.26. Sea $f(z) = e^z$ cuya función característica está dado por

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Entonces su orden es 1.

2.6. La característica de Ahlfors-Shimizu

Ahora formularemos una segunda versión del primer teorema fundamental de Nevanlinna debida a Ahlfors y Shimizu.

Denote a la esfera de Riemann por S_0 en $\mathbb{R}^3$, $S_0 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$.

Sea $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y sea $p : \overline{\mathbb{C}} \to S_0$ la aplicación inversa de la proyección estereográfica definida por

$$p(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right).$$

Tome $w = x + iy$, entonces

$$p(w) = \left(\frac{w}{1+|w|^2}, \frac{|w|^2}{1+|w|^2}\right).$$

Denote por $[w_1, w_2]$ la longitud del segmento de linea que une los puntos $p(w_1)$ y $p(w_2)$ sobre la esfera S_0 y q el polo norte de la esfera S_0. Puesto que el diámetro de la esfera S_0 es 1, entonces $[w_1, w_2] \leq 1$ para cada par de puntos $w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Defina la distancia en $\overline{\mathbb{C}}$, llamada distancia esférica como

$$[w_1, w_2] = \begin{cases} \| p(w_1) - p(w_2) \| & , \text{ si } w_1, w_2 \neq \infty \\ \|p(w_1) - q\| & , \text{ si } w_1 \neq \infty, w_2 = \infty \\ 0 & , \text{ si } w_1 = w_2 = \infty \end{cases}$$

Entonces

$$[w_1, w_2] = \begin{cases} \dfrac{|w_1 - w_2|}{\sqrt{1 + |w_1|^2}\sqrt{1 + |w_2|^2}} & , \text{ si } w_1, w_2 \neq \infty \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 + |w_1|^2}} & , \text{ si } w_1 \neq \infty, w_2 = \infty \\ 0 & , \text{ si } w_1 = w_2 = \infty \end{cases}$$

Por otro lado, es fácil de verificar que

$$[w_1, w_2] = \left[\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}\right], \quad \text{si} \quad w_1, w_2 \neq \infty, 0.$$

$$[w_1, \infty] = \left[\frac{1}{w_1}, 0\right], \quad \text{si} \quad w_1 \neq \infty, 0.$$

Además, la relación entre el elemento de longitud de la esfera S_0 y el plano $\overline{\mathbb{C}}$ estará dada por

$$\frac{|dp(w)|}{|dw|} = \frac{1}{1 + |w|^2}$$

y la relación entre el elemento de área $d\omega(w)$ sobre S_0 y $d\sigma(w)$ sobre $\overline{\mathbb{C}}$ será

$$\frac{d\omega(w)}{d\sigma(w)} = \frac{|dp(w)|^2}{|dw|^2} = \frac{1}{(1 + |w|^2)^2}.$$

Definición 2.27. Sean $D \subset \mathbb{C}$ un disco y $f : D \to S_0$ una función meromorfa. Si $a \in D$ es tal que $f(a) \neq \infty$, la derivada esférica de $f(z)$ en a es definida por

$$\overset{\circ}{f}(a) = \frac{|f'(a)|}{1 + |f(a)|^2}. \tag{2.23}$$

Si $f(a) = \infty$ entonces

$$\overset{\circ}{f}(a) = \left(\frac{1}{f}\right)^{\circ}(a).$$

Note que $\overset{\circ}{f}$ solo toma valores en $[0, \infty\rangle$.

Además, observe que

$$\overset{\circ}{f}(z) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = \frac{|dp(f(z))|}{|df(z)|}\frac{|df(z)|}{|dz|} = \frac{|dp(f(z))|}{|dz|}$$

y

$$\lim_{z\to z_0} \frac{[f(z)-f(z_0)]}{|z-z_0|} = \overset{\circ}{f}(z_0).$$

Es de fácil verificación que la función $\overset{\circ}{f}$ es continua en cada punto z de $\mathbb{C}$.

Por otro lado, sea $dxdy$ el elemento de área en el disco $|z| < r$, su imagen vía f en $\overline{\mathbb{C}}$ es $|f'(z)|^2 dxdy$. Así, el elemento de área correspondiente a $dxdy$ sobre la esfera de Riemann es precisamente $\dfrac{|f'(z)|^2}{[1+|f(z)|^2]^2}dxdy$. Entonces defina

$$A(r,f) = \frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r} \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}dxdy = \frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2 dxdy.$$

Se puede interpretar a $A(r,f)$ como el área del disco $|z| \leq r$ con respecto al PullBack de la métrica esférica. En otras palabras, el número promedio de cubrimientos de la esfera de Riemann por la restricción de f al disco $|z| \leq r$.

Por otro lado, defina la función $\overset{\circ}{T}(r,f)$ como

$$\overset{\circ}{T}(r,f) = \int_0^r \frac{A(t,f)}{t}dt.$$

Esta función es llamada Característica de Ahlfors-Shimizu de $f(z)$, esta es análoga al grado de una función racional en el sentido de que mide el número de preimágenes de un punto genérico. Por la continuidad de $\overset{\circ}{f}(z)$ la función $\overset{\circ}{A}(r,f)$ es una función continua de r para $0 \leq r < \infty$, además $A(r,f) = O(r^2)$ cuando $r \to 0$, por lo tanto la función $\overset{\circ}{T}(r,f)$ es finita y continua para $0 \leq r < \infty$. Por otro lado, recuerde que

$$A(r,f) = \frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2 dxdy.$$

Tome $z = te^{i\theta}$ donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq t \leq r$. Derivando bajo el signo integral la función $A(r,f)$ respecto de r, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dA(r,f)}{dr} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r \left(\overset{\circ}{f}(te^{i\theta})\right)^2 tdtd\theta\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dr}\left(\int_0^r\left(\overset{\circ}{f}(te^{i\theta})\right)^2 tdt\right)d\theta.\end{aligned}$$

Luego, por el primer teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\frac{dA(r,f)}{dr} = \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(\overset{\circ}{f}\,(re^{i\theta})\big)^2 d\theta > 0, \quad para \;\; r > 0. \tag{2.24}$$

Entonces, la función $A(r,f)$ es estrictamente creciente sobre $[0,\infty\rangle$ y la función $\overset{\circ}{T}\,(r,f)$ es dos veces continuamente diferenciable y estrictamente creciente en $[0,\infty\rangle$.

Definición 2.28. Sea f una función meromorfa no constante. Defina

$$\overset{\circ}{m}\,(r,a) = \begin{cases} \overset{\circ}{m}\,(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a]}d\theta - \log\frac{1}{[f(0),a]}, & \text{si } \; f(0)\neq a \\ \overset{\circ}{m}\,(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),a]}d\theta - \log\frac{\sqrt{1+|a|^2}}{|c_\lambda(a)|}, & \text{si } \; f(0)=a, a\neq\infty. \\ \overset{\circ}{m}\,(r,\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),\infty]}d\theta - \log|c_\lambda(0)|, & \text{si } \; f(0)=a, a=\infty \end{cases}$$

donde $c_\lambda(a)$ es el primer coeficiente no nulo en la serie de Laurent de $f(z)-a$ en una vecindad de $z=0$. Observe que la integral de la definición de $\overset{\circ}{m}\,(r,a)$ es diferente de la integral en la definición de $m(r,a)$. Además, la distancia entre $f(re^{i\theta})$ y a no es la distancia usual en $\mathbb{C}$.

Teorema 2.29. *Sea $f(z)\not\equiv 0$ una función meromorfa definida en el disco $|z|\le r$. Si $f(0)\neq\infty$, entonces la siguiente fórmula (llamada fórmula de Ahlfors-Shimuzu) vale*

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\le r}\left(\log\frac{r}{|z|}\right)\big(\overset{\circ}{f}\,(z)\big)^2 d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}d\theta - \\ \log\sqrt{1+|f(0)|^2} + \sum_{|b_n|<R}\log\frac{r}{b_n}$$

donde b_n son los polos de f en el disco $|z|\le r$. En el caso que $f(0)=\infty$ el lado derecho de la ecuación debe ser remplazado por

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}d\theta - \log|c_\lambda| + \sum_{0<|b_n|<R}\log\frac{r}{|b_n|},$$

donde c_λ es el primer coeficiente no nulo de la expansión de Laurent de f en una vecindad de $z=0$.

Demostración. Sea $u(z)=\log\sqrt{1+|f(z)|^2}$ definida en el disco $D=\{|z|\le r\}$. Para calcular $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, sea $A(z)=Ref(z)$, $B(z)=Imf(z)$. Entonces

$$u = \frac{1}{2}\log(1+A^2+B^2) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A\dfrac{\partial A}{\partial x}+B\dfrac{\partial B}{\partial x}}{1+A^2+B^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{(1+A^2+B^2)^2}\Bigg\{ \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right](1+A^2+B^2) - \left(A\frac{\partial A}{\partial x} + B\frac{\partial B}{\partial x}\right)\left(2A\frac{\partial A}{\partial x} + 2B\frac{\partial B}{\partial x}\right)\Bigg\}.$$

Similarmente, podemos calcular $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, entonces

$$u = \frac{1}{2}\log(1+A^2+B^2) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{A\frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial B}{\partial y}}{1+A^2+B^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{(1+A^2+B^2)^2}\Bigg\{ \left[\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + A\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right](1+A^2+B^2) - \left(A\frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial B}{\partial y}\right)\left(2A\frac{\partial A}{\partial y} + 2B\frac{\partial B}{\partial y}\right)\Bigg\}.$$

Observe que

$$\Delta A = \Delta B = 0$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

Además, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y} = 0.$$

Ahora calculemos Δu.

Observe primero que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+A^2+B^2)^2}\Bigg\{ \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right](1+A^2+B^2) + \\
&\frac{1}{(1+A^2+B^2)^2}\Bigg\{ \left[\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + A\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right](1+A^2+B^2) = \\
&\frac{1}{1+A^2+B^2}\left[|f'(z)|^2 + A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\right] + \frac{1}{1+A^2+B^2}\left[|f'(z)|^2 + A\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right] \\
&= \frac{1}{1+A^2+B^2}\left[2|f'(z)|^2 + A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right] \\
&= \frac{1}{1+A^2+B^2}\left(2|f'(z)|^2 + A\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) + B\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right)\right) \\
&= \frac{2|f'(z)|^2}{1+A^2+B^2}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

y

$$\frac{2}{(1+A^2+B^2)^2}\left(A\frac{\partial A}{\partial x}+B\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2+\frac{2}{(1+A^2+B^2)^2}\left(A\frac{\partial A}{\partial y}+B\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2$$
$$=\frac{2}{(1+A^2+B^2)^2}\left[\left(A\frac{\partial A}{\partial x}+B\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2+\left(A\frac{\partial A}{\partial y}+B\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$=\frac{2}{(1+A^2+B^2)^2}\left[2AB\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}\right)+A^2\left(\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.+B^2\left(\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2\right)\right]=\frac{2}{(1+A^2+B^2)^2}(A^2+B^2)|f'(z)|^2. \quad (2.26)$$

Luego, sumando las expresiones (2.25) y (2.26), obtenemos

$$\Delta u=\frac{2|f'(z)|^2}{1+A^2+B^2}-\frac{2}{(1+A^2+B^2)^2}(A^2+B^2)|f'(z)|^2.$$

Así

$$\Delta u=\frac{2|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}.$$

Ahora por el teorema 4.4 del Capítulo 4

$$\log\sqrt{1+|f(z)|^2}+\frac{1}{\pi}\iint_{|\varsigma|\leq r}\log\left|\frac{r^2-\varsigma z}{r(z-\varsigma)}\right|\frac{|f'(\varsigma)|^2}{(1+|f(\varsigma)|^2)^2}d\sigma(\varsigma)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}d\theta+\sum_{|b_n|<r}\log\left|\frac{r^2-\bar{b}_n z}{r(z-b_n)}\right|.$$

Si $f(0)\neq\infty$, entonces tomando $z=0$ obtenemos

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\log\frac{r}{|z|}\right)\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2d\sigma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}d\theta-$$
$$\log\sqrt{1+|f(0)|^2}+\sum_{|b_n|<r}\log\frac{r}{b_n}.$$

Si $f(0)=\infty$ y tomando en cuenta que

$$\log\sqrt{1+|f(z)|^2}=\lambda\log|z|+\log|c_\lambda|+o(1).$$

Entonces

$$\sum_{|b_n|<r}\log\left|\frac{r^2-b_n z}{r(z-b_n)}\right|=\lambda\log\frac{|z|}{r}+\sum_{0<|b_n|<r}\log\frac{r}{|b_n|}+o(1),$$

solo cuando $z\to 0$ en

$$\log\sqrt{1+|f(z)|^2}+\frac{1}{\pi}\iint_{|\varsigma|\leq r}\log\left|\frac{r^2-\varsigma z}{r(z-\varsigma)}\right|\frac{|f'(\varsigma)|^2}{(1+|f(\varsigma)|^2)^2}d\sigma(z)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}d\theta+\sum_{|b_n|<r}\log\left|\frac{r^2-\bar{b}_n z}{r(z-b_n)}\right|.$$

$\square$

Teorema 2.30. *Sea f una función meromorfa no constante en D_R, donde $0 < R < \infty$. Entonces para cada número complejo a finito o infinito, y $0 < r < R$*

$$\overset{\circ}{m}(r,a) + N(r,a) = \overset{\circ}{T}(r,f).$$

Demostración. Primero demostremos la siguiente igualdad.

$$\overset{\circ}{T}(r,f) = \frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\log\frac{r}{|z|}\right)\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2 d\sigma(z). \tag{2.27}$$

En efecto, tomemos $z = te^{i\theta}$ en la parte derecha de la ecuación (2.27), entonces

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\log\frac{r}{|z|}\right)\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2 d\sigma(z) = \int_0^r \log\frac{r}{t}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\overset{\circ}{f}(te^{i\theta}))^2 t d\theta\right\}dt. \tag{2.28}$$

Además, por la ecuación (2.24), tenemos que

$$\frac{dA(t,f)}{dt} = \frac{t}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\overset{\circ}{f}(te^{i\theta})\right)^2 d\theta \text{ para } t > 0$$

remplazando la ecuación (2.24) en la ecuación (2.28), obtenemos

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\log\frac{r}{|z|}\right)\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2 d\sigma(z) = \int_0^r \log\frac{r}{t}\left(\frac{dA(t,f)}{dt}\right)dt \tag{2.29}$$

Integrando por partes el lado derecho de la ecuación (2.29), obtenemos

$$\int_0^r \log\frac{r}{t}\left(\frac{dA(t,f)}{dt}\right)dt = \log\frac{r}{t}A(t,f)\Big|_0^r + \int_0^r\frac{A(t,f)}{t}dt = \overset{\circ}{T}(r,f).$$

Así

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\log\frac{r}{|z|}\right)\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2 d\sigma(z) = \overset{\circ}{T}(r,f). \tag{2.30}$$

Por otro lado, por el teorema 2.29 (fórmula de Ahlfors-Shimizu) para $f(0) = \infty$ vale que

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\log\frac{r}{|z|}\right)\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2 d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}d\theta -$$
$$\log|c_\lambda(0)| + \sum_{|b_n|<r}\log\frac{r}{b_n}$$

donde b_n son los polos de f. Por la definición 2.28

$$\overset{\circ}{m}(r,\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{[f(re^{i\theta}),\infty]}d\theta - \log|c_\lambda(0)|$$

donde $c_\lambda(0)$ es el primer coeficiente no nulo de la serie de Laurent de f al rededor de $z=0$. Luego

$$\overset{\circ}{m}(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|f(re^{i\theta})|^2}d\theta-\log|c_\lambda(0)|$$

Así

$$\overset{\circ}{T}(r,f)=\overset{\circ}{m}(r,\infty)+N(r,\infty),\quad para\quad a=\infty.$$

Si $a\neq\infty$, definimos

$$F(z,a)=\frac{1+\bar{a}f(z)}{f(z)-a}. \tag{2.31}$$

Nosotros probaremos que:
1) $\overset{\circ}{T}(r,F(z,a))=\overset{\circ}{T}(r,f)$.
2) El valor $\overset{\circ}{m}(r,\infty)$ para la función $F(z,a)$ coincide con el valor $\overset{\circ}{m}(r,a)$ para la función f.
En efecto
Derivando la ecuación (2.31) respecto de z

$$F'(z,a)=-\frac{1+|a|^2}{(f(z)-a)^2}f'(z),$$

teniendo en cuenta la siguiente identidad

$$|f-a|^2+|1+\bar{a}f|^2=(1+|a|^2)(1+|f|^2),$$

tomando la derivada esférica a la función $F(z,a)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{F}(z,a)&=\frac{|F'(z,a)|}{1+|F(z,a)|^2}\\&=\frac{(1+|a|^2)|f'(z)|}{|f(z)-a|^2+|1+\bar{a}f(z)|^2}\\&=\frac{(1+|a|^2)|f'(z)|}{(1+|a|^2)(1+|f|^2)}\\&=\overset{\circ}{f}(z).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\overset{\circ}{F}(z,a)=\overset{\circ}{f}(z). \tag{2.32}$$

Como consecuencia de la ecuación (2.32), obtenemos que

$$\begin{aligned}A(r,F(z,a))&=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\overset{\circ}{F}(z,a)\right)^2d\sigma(z)\\&=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r}\left(\overset{\circ}{f}(z)\right)^2d\sigma(z)=A(r,f(z)).\end{aligned}$$

Así

$$A(r, F(z,a)) = A(r, f(z)) \tag{2.33}$$

Luego, haciendo un cambio de variable en la función característica de Ahlfors-Shimizu, obtenemos

$$\overset{\circ}{T}(r, F(z,a)) = \int_0^r \frac{A(t, F(z,a))}{t} dt = \int_0^r \frac{A(t, f(z))}{t} dt = \overset{\circ}{T}(r, f). \tag{2.34}$$

Por consiguiente, el enunciado 1) está probado.

Por otro lado, tomando en cuenta que

$$F(z,a) = \frac{1 + \bar{a} f(z)}{f(z) - a}$$

y la métrica de la esfera S_0, obtenemos que

$$\begin{aligned} [F, \infty] &= \frac{1}{\sqrt{1 + |F|^2}} = \frac{|f-a|}{\sqrt{|f-a|^2 + |1 + \bar{a} f|^2}} \\ &= \frac{|f-a|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|f|^2}} = [f, a]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[F, \infty] = [f, a]. \tag{2.35}$$

Por las ecuaciones (2.34) y (2.35) el resultado se obtiene para $a \neq \infty$. Así

$$\overset{\circ}{m}(r, a) + N(r, a) = \overset{\circ}{T}(r, f).$$

□

Teorema 2.31. *$T(r, f)$ y $\overset{\circ}{T}(r, f)$ difieren a lo más en una función limitada.*

Demostración. Basta probar que $|m(r,a) - \overset{\circ}{m}(r,a)| < d(a)$ donde $d(a)$ es una constante que solo depende de a y además, $0 < d(a) < \infty$. Entonces

Para $a \neq \infty$

$$\frac{1}{[f,a]} = \frac{\sqrt{1+|f|^2}\sqrt{1+|a|^2}}{|f-a|} \geq \text{máx}\left\{\frac{1}{|f-a|}, 1\right\}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{[f,a]} &\leq \frac{\sqrt{1 + (|f-a| + |a|)^2}\sqrt{1+|a|^2}}{|f-a|} \leq \frac{(1 + |f-a| + |a|)\sqrt{1+|a|^2}}{|f-a|} \\ &= \left(\frac{1+|a|}{|f-a|} + 1\right)\sqrt{1+|a|^2} \leq \left(\frac{1+|a|}{|f-a|} + 1\right)(1+|a|) \\ &\leq \left(\text{máx}\left\{\frac{1}{|f-a|}, 1\right\}(1+|a|) + \text{máx}\left\{\frac{1}{|f-a|}, 1\right\}(1+|a|)\right. \\ &\leq \text{máx}\left\{\frac{1}{|f-a|}, 1\right\}(2+|a|)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{[f-a]} \geq \text{máx}\left\{\frac{1}{|f-a|}, 1\right\} \text{ y } \frac{1}{[f-a]} \leq \text{máx}\left\{\frac{1}{|f-a|}, 1\right\}\left(2+|a|\right)^2. \quad (2.36)$$

Por consiguiente, tomando el logaritmo a (2.36)

$$\log^+ \frac{1}{|f-a|} \leq \log \frac{1}{[f-a]} \leq \log^+ \frac{1}{|f-a|} + 2\log^+(2+|a|). \quad (2.37)$$

Observemos que $\log \text{máx}\{x, 1\} = \log^+ x$.

Integrando la desigualdad (2.37), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f-a|}d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[f-a]}d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f-a|}d\theta + 2\log^+(2+|a|) \end{aligned}$$

y esto nos conduce al resultado deseado puesto que

$$m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f-a|}d\theta.$$

En consecuencia

$$|m(r,a) - \overset{\circ}{m}(r,a)| < 2\log^+(2+|a|)$$

Por otro lado, si $a = \infty$

$$\text{máx}\{|f|, 1\} \leq \frac{1}{[f,\infty]} \leq \text{máx}\{|f|, 1\}\sqrt{2}$$

pues $|f| \leq \sqrt{1+|f|^2}$, $\quad \sqrt{1+|f|^2} \leq \sqrt{2}|f|$. Además,

$$\log^+ |f| \leq \log \frac{1}{[f,\infty]} \leq \log^+ |f| + \frac{1}{2}\log 2,$$

tomando la integral como en el caso anterior, conseguimos el resultado deseado para $a = \infty$.

$\square$

Como consecuencia del teorema anterior podemos observar que la característica de Nevanlinna y la característica de Ahlfors-Shimizu difieren a lo más en una función limitada por una constante.

$$|T(r,f) - \overset{\circ}{T}(r,f)| \leq d_1(f)$$

donde $d_1(f) = \frac{1}{2}\log(2+2|f(0)|^2)$, si $f(0) \neq \infty$ y

$d_1(f) = \frac{1}{2}\log 2 + (\log|c_\lambda(0)|)$, si $f(0) = \infty$.

Ejemplo 2.32. Podemos consideremos la función $f(z) = z^2$ sobre el disco D_1. Esta función cubre dos veces a la esfera de Riemann.

Capítulo 3

Segundo Teorema Fundamental

3.1. Desigualdades fundamentales

En este capítulo desarrollaremos el Segundo teorema fundamental de Nevanlinna, este teorema dice que el término predominante en la suma $m(r,a)+N(r,a)$ es $N(r,a)$. Además, nos proponemos como uno de los objetivos de la investigación, estudiar los términos $m(r,a)$ y $N(r,a)$. En esta dirección conociendo ya el Teorema de Picard el cual afirma que la función contadora de una función meromorfa en el plano complejo puede anularse como máximo para dos valores a.
Para referencia de este capitulo ver ([7], [8] y [9])

Teorema 3.1. *Suponga que f es una función meromorfa no constante definida en el disco $\overline{D}_r$ tal que $f(0) \neq \infty$ o $f'(0) \neq 0$. Sean $a_1, a_2, \dots, a_q$ números complejos distintos y finitos, donde $q > 2$. Dado $\delta > 0$ y $|a_u - a_v| \geq \delta$, para $1 \leq u < v \leq q$. Entonces*

$$m(r,\infty) + \sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r),$$

donde $N_1(r)$ es positivo y está dado por

$$N_1(r) = N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 2N(r,f) - N(r,f')$$

y

$$S(r) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left\{r, \sum_{v=1}^{q} \frac{f'}{(f-a_v)}\right\} + q\log^{+}\frac{3q}{\delta} + \log 2 + \log\frac{1}{|f'(0)|},$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$. Si z pertenece al disco $\overline{D}_r$ y $v \in \{1, 2, \ldots, q\}$satisface $|f(z) - a_v| < \dfrac{\delta}{3q}$, entonces para $u \neq v$,

$$|f(z)-a_u| \geq |a_u-a_v|-|f(z)-a_v| \geq \delta-\frac{\delta}{3q} \geq \frac{2\delta}{3}, \quad \text{para} \ \ u \in \{1, 2, \ldots, q\} \ \ \text{y} \ \ q \geq 2.$$

Por otro lado, sea la función

$$F(z) = \sum_{v=1}^{q} \left(\frac{1}{f(z) - a_v} \right).$$

Luego, para $u \neq v$

$$\frac{1}{|f(z) - a_u|} < \frac{3}{2\delta} < \frac{1}{2q} \frac{1}{|f(z) - a_v|},$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
|F(z)| &= \left| \sum_{v=1}^{q} \frac{1}{f(z) - a_v} \right| = \left| \frac{1}{f(z) - a_v} + \sum_{u \neq v}^{q} \frac{1}{f(z) - a_u} \right| \\
&\geq \left| \frac{1}{f(z) - a_v} \right| - \sum_{u \neq v} \frac{1}{|f(z) - a_u|} \\
&\geq \left| \frac{1}{f(z) - a_v} \right| - \frac{q - 1}{2q|f(z) - a_v|} \\
&= \frac{1}{|f(z) - a_v|} \left(1 - \frac{q - 1}{2q} \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{1}{|f(z) - a_v|}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$|F(z)| \geq \frac{1}{2|f(z) - a_v|}. \tag{3.1}$$

Tomando $\log^+$ en ambos miembros de la ecuación (3.1), obtenemos

$$\log^+ |F(z)| \geq \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_v|} - \log 2. \tag{3.2}$$

Como

$$\frac{1}{|f(z) - a_u|} \leq \frac{3}{2\delta} = \frac{1}{2q} \frac{3q}{\delta} \leq \frac{3q}{\delta}, \tag{3.3}$$

entonces, Tomando $\log^+$ a la ecuación (3.3) y sumamos los términos para $u \neq v$, obtenemos

$$\sum_{u \neq v} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a_u|} \leq (q - 1) \log^+ \frac{3q}{\delta} \leq q \log^+ \frac{3q}{\delta}. \tag{3.4}$$

Sumando las ecuaciones (3.2) y (3.4), obtenemos

$$\begin{aligned}\log^+|F(z)| &\geq \log^+\frac{1}{|f(z)-a_v|} - \log 2\\ &\geq \log^+\frac{1}{|f(z)-a_v|} + \sum_{u\neq v}\frac{1}{|f(z)-a_u|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2\\ &= \sum_{u=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_u|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2\end{aligned}$$

esto es

$$\log^+|F(z)| \geq \sum_{u=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_u|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2. \tag{3.5}$$

Esta desigualdad vale si $|f(z)-a_v| < \dfrac{\delta}{3q}$, para algún $v \in \{1,2,\ldots,q\}$.
Si esto no es verdad para algún valor v, entonces

$$\frac{1}{|f(z)-a_v|} \leq \frac{3q}{\delta} \quad \text{para todo} \quad v \in \{1,\ldots,q\}. \tag{3.6}$$

Tomando $\log^+$ en la ecuación (3.6) y sumando los términos de $v = 1,\ldots,q$, obtenemos

$$\sum_{v=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_v|} \leq q\log^+\frac{3q}{\delta},$$

así

$$\sum_{v=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_v|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} \leq 0.$$

Como la última desigualdad es negativa y $\log^+|F(z)| \geq 0$, entonces

$$\log^+|F(z)| \geq \sum_{u=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_u|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2.$$

Y así, esta última desigualdad es válida en general
Integrando esta última desigualdad, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|F(z)|\,d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{v=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_v|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2\right)d\theta,$$

luego

$$m(r,F) \geq \sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2. \tag{3.7}$$

Para la otra desigualdad, como

$$m(r,F) = m\left(r, \frac{1}{f}\frac{f}{f'}f'F\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, f'F), \tag{3.8}$$

usando la fórmula de Jensen $T(r,f) = T\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|f(0)|$, tenemos

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| \tag{3.9}$$

y

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log\frac{1}{|f(0)|}. \tag{3.10}$$

Reemplazando (3.9) y (3.10) en la ecuación (3.8), obtenemos

$$\begin{aligned} m(r,F) \leq T(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log\frac{1}{|f(0)|} + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ - N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| + m(r, f'F). \end{aligned}$$

Combinando esta última expresión con (3.7) y sumamos a ambos lados de la expresión el término $m(r,\infty)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) + m(r,\infty) &\leq m(r,F) + m(r,f) + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2 \\ &\leq T(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log\frac{1}{|f(0)|} + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ &\quad - N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| + m(r, f'F) + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2 \\ &= T(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ - N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + \log\frac{1}{|f'(0)|} &+ m(r, f'F) + q\log^+\frac{3q}{\delta} + \log 2 + m(r,f) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por otro lado, aplicando la fórmula de Jensen a la función $\frac{f}{f'}$.

$$T\left(r, \frac{f}{f'}\right) = T\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|,$$

luego

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + N\left(r, \frac{f}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|.$$

Observe que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{f(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|d\theta,$$

entonces

$$\begin{aligned}
N\left(r,\frac{f'}{f}\right)-N\left(r,\frac{f}{f'}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|d\theta+\log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-\log|f(0)|\\
&- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f'(re^{i\theta})|d\theta-\log|f'(0)|\\
&= N\left(r,\frac{1}{f}\right)-N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N(r,f'),
\end{aligned}$$

remplazando este último resultado en (3.11), obtenemos

$$\begin{aligned}
m(r,\infty)+\sum_{v=1}^{q}m(r,a_v) &\le 2T(r,f)-\left\{N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+2N(r,f)-N(r,f')\right\}\\
&+m\left(r,\sum_{v=1}^{q}\frac{f'}{(f-a_v)}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\log^+\frac{3q}{\delta}+\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente podemos escribir este resultado así

$$m(r,\infty)+\sum_{v=1}^{q}m(r,a_v)\le 2T(r,f)-\left\{2N(r,f)-N(r,f')+N\left(\frac{1}{f'}\right)\right\}+S(r).$$

donde $S(r)$ está definido como en el teorema 3.1 □

Observación 3.2. 1) La función $N_1(r)$ definido como en el teorema 3.1 es positiva y por lo tanto el término de la derecha en la expresión $m(r.\infty)+\sum_{v=1}^{q}m(r,a_v)\le 2T(r,f)-N_1(r)+S(r)$, no crece más rápidamente que $2T(r,f)$.

2) Ahora analicemos la función $N_1(r)$ definido como en el teorema 3.1.
$N_1(r)$ consiste de dos partes $2N(r,f)-N(r,f')$ y $N\left(r,\frac{1}{f'}\right)$, el segundo cuenta los puntos z donde la función $f(z)$ toma un valor finito a con multiplicidad $k>1$ y la contribución de tal punto es $(k-1)$. El primer término $2N(r,f)-N(r,f')$, tiene en cuenta de forma análoga los puntos donde la función toma el valor ∞ con multiplicidad $k>1$, es decir los polos múltiples. La cantidad $N_1(r)$ mide el número de puntos múltiples de f.

3) El término $S(r,f)$ juega el rol de un término de error despreciable, en general

frente a la función Característica $T(r, f)$ cuando $r \to \infty$. En particular esto es siempre cierto para funciones meromorfas definidas en $\mathbb{C}$, en el caso de un disco es preciso imponer condiciones adicionales de crecimiento a la función $T(r, f)$.

Ahora daremos a conocer algunos teoremas a cerca del crecimiento de la función $S(r, f)$, pues estudiar el comportamiento de la función $m(r, a)+N(r, a)$ y la preponderancia de la función $N(r, a)$ depende de que logremos conocer dicha información.

Teorema 3.3. *Suponga que f sea una función meromorfa no constante definido en $|z| < R_0 \leq +\infty$ y que $S(r, f)$ esta definido como en el teorema 3.1. Entonces*

i) Si $R_0 = \infty$ y el orden de f es finito, entonces

$$S(r, f) = O(\log r), \quad r \to \infty.$$

Si el orden de $f(z)$ es infinito, entonces

$$S(r, f) = O(\log(rT(r, f))), \quad r \to \infty,$$

excepto fuera de un conjunto con medida lineal finita.

ii) Si $0 < R_0 < \infty$,

$$S(r, f) = O\left\{ \log^+ T(r, f) + \log \frac{1}{R_0 - r} \right\}, \quad r \to R_0,$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita.

Ahora necesitamos de algunos resultados geométricos para poder estimar el término $S(r)$.

Lema 3.4. *Sea z un número complejo y $0 < r < \infty$. Sea E_k el conjunto de los θ tal que $|z - re^{i\theta}| < kr$ con $0 \leq |\theta| < \pi$, donde $0 \leq k < 1$. Entonces*

$$\int_{E_k} \log \left| \frac{r}{z - re^{i\theta}} \right| d\theta < \pi k \left\{ \log \frac{1}{k} + 1 \right\}.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos asumir que z sea un número real y positivo. Si z fuese cero entonces E_k será vació y no tenemos que probar nada. Si $z > 0$. Entonces para θ perteneciente a E_k,

$$rk > |z - re^{i\theta}| \geq |Im(z - re^{i\theta})| = r \sin\theta$$

y E_k pertenecerá a un intérvalo de la forma $|\theta| < \theta_0$ donde $r \geq \sin\theta_0$, entonces

$$\int_{E_k} \log\left|\frac{r}{z - re^{i\theta}}\right| d\theta \leq 2\int_0^{\theta_0} \log\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) d\theta,$$

ahora, $\theta < \frac{\pi}{2}$ cuando $\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi$, y $|z - re^{i\theta}| > |re^{i\theta}| = r$. Por otro lado, si consideramos $h(\theta) = \sin\theta$ y $g(\theta) = \frac{2}{\pi}\theta$, entonces $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}|\theta|$ y $\frac{2}{\pi}|\theta| < \theta_0$, así tenemos

$$\begin{aligned} \int_{E_k} \log\left|\frac{r}{z - re^{i\theta}}\right| d\theta \leq 2\int_0^{\theta_0} \log\left(\frac{1}{\sin\theta}\right) d\theta &\leq 2\int_0^{\theta_0} \log\frac{\pi}{2\theta} d\theta \\ &= 2\theta_0\left\{\log\left(\frac{\pi}{2\theta_0}\right) + 1\right\}. \end{aligned}$$

desde que $\sin\theta_0 = k$, podemos remplazar θ_0 por el número $\frac{\pi}{2}k$ en la última ecuación y esto prueba el lema. □

Lema 3.5. *Sean $z_1, \ldots, z_n$, $n \geq 1$ puntos en $\mathbb{C}$ y sea $\delta(z)$ la menor de las distancias $|z - z_v|$ con $v = 1, 2, \ldots, n$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} d\theta \leq 2\log n + \frac{1}{2}.$$

Demostración. Sea E_v el conjunto de los θ donde $|re^{i\theta} - z_v| < \frac{r}{n}$ y $z = re^{i\theta}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$. Tome $E = \bigcup_{v=1}^{n} E_v$,

además

$$\log_0 x = \begin{cases} \log x, & x \geq n. \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Entonces, en E, $\delta(re^{i\theta}) < \frac{r}{n}$ esto implica que $\frac{r}{\delta(re^{i\theta})} > n$ y como $n \geq 1$, obtenemos

$$\log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} = \log\frac{r}{\delta(re^{i\theta})} = \log_0 \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} \leq \sum_{v=1}^{n} \log_0\left|\frac{r}{re^{i\theta} - z_v}\right|,$$

donde la suma es tomada para todos los z_v pertenecientes a $\mathbb{C}$. Ahora, por el lema 3.4 y tomando $k = \frac{1}{n}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_E \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} d\theta \leq \sum_{v=1}^{n}\int_0^{2\pi} \log_0 \frac{r}{|re^{i\theta} - z_v|} d\theta &\leq \sum_{v=1}^{n}\left\{\pi\frac{1}{n}\Big(\log(n) + 1\Big)\right\} \\ &= n\pi\frac{1}{n}\Big(\log(n) + 1\Big). \end{aligned}$$

Por otro lado, para el complemento del conjunto E denotado por CE tenemos $\delta(re^{i\theta}) \geq \dfrac{r}{n}$, por lo tanto

$$\int_{CE} \log^{+} \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} d\theta \leq \int_{0}^{2\pi} \log n = 2\pi \log n.$$

Así

$$\int_{E} \log^{+} \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} d\theta + \int_{EC} \log^{+} \frac{r}{\delta(re^{i\theta})} d\theta \leq n\pi \frac{1}{n}\Big(\log(n)+1\Big) + 2\pi \log n = 3(\log n + 1).$$

□

Con el fin de poder estimar el término $S(r)$ necesitamos obtener una estimación de la derivada logarítmica de la función meromorfa $f(z)$, entonces ya estamos listos para poder estimar $m\left(r, \dfrac{f'}{f}\right)$ en términos de $T(r,f)$, donde $R > r$.

Lema 3.6. ***(Lema de la derivada logarítmica)*** *Suponga que f es una función meromorfa definida en el disco $\overline{D}_R$, con $0 < r < R$ y que $f(0) \neq 0, \infty$. Entonces*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^{+} T(R,f) + 4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|} + 5\log^{+} R + 6\log^{+}\frac{1}{R-r} + \log^{+}\frac{1}{r} + 14.$$

Demostración. Primero probaremos que $\dfrac{\partial}{\partial z}\log|f(z)| = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. En efecto
Sea f una función meromorfa, sea $z \in dom(f)$ tal que z no es un polo ni un cero. Por continuidad de f existe un disco Ω donde $z \in \Omega$, tal que $\Omega \subset dom(f)$ y $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^{*}$, o sea $f|_{\Omega}$ es holomorfa y no se anula. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y no se anula en el disco Ω, entonces existe $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z) = e^{h(z)}, \quad \forall z \in \Omega$. Si $\tilde{h} : \Omega \to \mathbb{C}$ es otra función holomorfa tal que $f(z) = e^{\tilde{h}(z)}$, entonces $\tilde{h} = h + 2k\pi i$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, en este caso decimos que h es un logaritmo de f pero no escribimos $h(z) = \log f(z)$ ya que h no es único, sin embargo la derivada de $h(z)$ si está bién definida:

$$f'(z) = \left(e^{h(z)}\right)' = h'(z)e^{h(z)} = h'(z)f(z)$$

y de aquí obtenemos

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad \text{para todo} \quad z \in \Omega.$$

Entonces como $e^{h(z)} = f(z)$, para todo $z \in \Omega$,

$$\log|f(z)| = \log|e^{h(z)}| = \log e^{Re(h(z))} = Re(h(z)) = \frac{1}{2}\Big(h(z) + \overline{h}(z)\Big).$$

Como h es holomorfo, $\overline{h(z)} = h(\bar{z})$, entonces

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2}\Big(h(z) + h(\bar{z})\Big),$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial z}\log|f(z)| = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial z}h(z) + \frac{\partial}{\partial z}h(\bar{z})\Big) = \frac{1}{2}h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2} = Re\Big(\frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z}\Big),$$

derivando esta expresión obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z}\bigg(Re\Big(\frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z}\Big)\bigg) = \frac{2Re^{i\phi}}{(Re^{i\phi} - z)^2},$$

aplicando $\dfrac{\partial}{\partial z}$ en la fórmula de Jensen-Poisson

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\log|f(z)|\Big) &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi\Big)\\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\Big(\sum_{u=1}^{m}\log\Big|\frac{R(z - a_u)}{R^2 - \bar{a}_u z}\Big|\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\sum_{v=1}^{n}\log\Big|\frac{R(z - b_v)}{R^2 - \bar{b}_v z}\Big|\Big)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{2Re^{i\phi}}{(Re^{i\phi} - z)^2}d\phi\\ &+ \sum_{|a_u|<R}\Big(\frac{\bar{a}_u}{R^2 - \bar{a}_u z} - \frac{1}{a_u - z}\Big) + \sum_{|b_v|<R}\Big(\frac{1}{b_v - z} - \frac{\bar{b}_v}{R^2 - \bar{b}_v z}\Big).\end{aligned}$$

Además, tomando $\rho = \frac{1}{2}(R + r)$ en lugar de R y $|z| = r$ en la última relación, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\phi})|\frac{2\rho e^{i\phi}}{(\rho e^{i\phi} - z)^2}d\phi\\ &+ \sum_{|a_u|<\rho}\Big(\frac{\bar{a}_u}{\rho^2 - \bar{a}_u z} - \frac{1}{a_u - z}\Big) + \sum_{|b_v|<\rho}\Big(\frac{1}{b_v - z} - \frac{\bar{b}_v}{\rho^2 - \bar{b}_v z}\Big),\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde los polos b_v y ceros a_u de f están dentro del disco $|z| < \rho$. Por otro lado, sea $\delta(z)$ la distancia más corta de z a algún punto de entre todos los ceros y polos de f.

Sea

$$n = n(\rho, f) + n\left(\rho, \frac{1}{f}\right),$$

el número total de ceros y polos de f en el disco $|z| < \rho$.

Tomando en cuenta que

$$|\rho^2 - \bar{a}_u z| \geq ||\rho^2| - |\bar{a}_u z|| = \rho^2 - \rho r = \rho(\rho - r),$$

donde $R > r$ implica $R + r > 2r$ entonces $\rho = \frac{1}{2}(R + r) > r$, por lo tanto

$$\left|\frac{a_u}{\rho^2 - \bar{a}_u z}\right| \leq \frac{\rho}{\rho(\rho - r)} = \frac{1}{\rho - r} \text{ y } \left|\frac{b_v}{\rho^2 - \bar{b}_u z}\right| \leq \frac{1}{\rho - r}. \tag{3.13}$$

También

$$\left|\frac{1}{a_u - z}\right| \leq \frac{1}{\delta(z)} \text{ y } \left|\frac{1}{b_v - z}\right| \leq \frac{1}{\delta(z)}. \tag{3.14}$$

Además, considerando que $\log|f| = \log^+|f| - \log^+ \frac{1}{|f|}$, tenemos

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\phi})| \frac{2\rho e^{i\phi}}{(\rho e^{i\phi} - z)^2} d\phi\right| \leq$$
$$\frac{2\rho}{(\rho - r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|f(\rho e^{i\phi})||d\phi = \frac{2\rho}{(\rho - r)^2}\left\{m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{1}{f}\right)\right\}, \tag{3.15}$$

de tal forma que junto con las acotaciones (3.13), (3.14) y (3.15), se deduce de (3.12), que

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{2\rho}{(\rho - r)^2}\left\{m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{1}{f}\right)\right\} + n\left\{\frac{1}{\delta(z)} + \frac{1}{\rho - r}\right\}, \tag{3.16}$$

donde n es el número total de ceros y polos de f en $|z| < \rho$. Ahora haciendo uso de la función Característica de Nevanlinna

$$m(\rho, f) + N(\rho, f) = T(\rho, f)$$

y

$$m\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + N\left(\rho, \frac{1}{f}\right) = T\left(\rho, \frac{1}{f}\right)$$

sumando $T(\rho, f)$ y $T\left(\rho, \dfrac{1}{f}\right)$, conseguimos que

$$m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{1}{f}\right) = T(\rho, f) - N(\rho, f) + T\left(\rho, \frac{1}{f}\right) - N\left(\rho, \frac{1}{f}\right)$$

y por la fórmula de Jensen, deducimos que

$$m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{1}{f}\right) \leq T(\rho, f) + T(\rho, f) + \log^+ \left|\frac{1}{f(0)}\right|. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, remplazando (3.17) en (3.16), obtenemos

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{4\rho}{(\rho - r)^2}\left\{T(\rho, f) + \log^+ \frac{1}{|f(0)|}\right\} + \frac{1}{r}n\left\{\frac{r}{\delta(z)} + \frac{r}{\rho - r}\right\}. \tag{3.18}$$

Tomando $\log^+$ a (3.18), obtenemos

$$\log^+ \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \log^+ \left\{\frac{4\rho}{(\rho - r)^2}\left\{T(\rho, f) + \log^+ \frac{1}{|f(0)|}\right\} + \frac{1}{r}n\left\{\frac{r}{\delta(z)} + \frac{r}{\rho - r}\right\}\right\}.$$

Y por el lema 2.3 aplicado a esta última expresión

$$\begin{aligned}\log^+ \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq{}& \log^+ \rho + 2\log^+ \frac{1}{\rho - r} + 2\log 2 + \log^+ T(\rho, f) + \log^+ \log^+ \left|\frac{1}{f(0)}\right| \\ & + \log 2 + \log^+ \frac{n}{r} + \log^+ \frac{r}{\delta(z)} + \log^+ \frac{r}{\rho - r} + 2\log 2,\end{aligned}$$

ahora integramos con respecto a z sobre el circulo $|z| = r$

$$\begin{aligned}m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq{}& \log^+ \rho + 2\log^+ \frac{1}{\rho - r} + 2\log 2 + \log^+ T(\rho, f) + \log^+ \log^+ \left|\frac{1}{f(0)}\right| \\ & + \log 2 + \log^+ \frac{n}{r} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{r}{\delta(re^{i\phi})} d\phi + \log^+ \frac{r}{\rho - r} + 2\log 2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora nos fijamos en n pues necesitamos estimar n.

Considerando que $R > t > \rho$, entonces

$$n(t, f) \geq n(\rho, f)$$

dividimos entre t

$$\frac{n(t, f)}{t} \geq \frac{n(\rho, f)}{t}$$

integramos

$$\int_\rho^R \frac{n(t, f)}{t} dt \geq \int_\rho^R \frac{n(\rho, f)}{t} dt = n(\rho, f)\log \frac{R}{\rho} \geq n(\rho, f)\frac{R - \rho}{R},$$

la última desigualdad es por que $\log x \geq 1 - \dfrac{1}{x}$ si $x \geq 1$, además

$$N(R,f) \geq \int_{\rho}^{R} \frac{n(t,f)}{t} dt,$$

por lo tanto

$$N(R,f) \geq \int_{\rho}^{R} \frac{n(t,f)}{t} dt \geq n(\rho,f)\frac{R-\rho}{R}. \tag{3.20}$$

Similarmente, para el otro caso

$$N\left(R,\frac{1}{f}\right) \geq n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\frac{R-\rho}{R}. \tag{3.21}$$

Como n es el número total de ceros y polos de f, entonces por (3.20) y (3.21) n estará estimado por

$$\begin{aligned}
n &= n(R,f) + n\left(R,\frac{1}{f}\right) \\
&\leq \frac{R}{R-\rho}\left\{N(R,f) + N\left(R,\frac{1}{f}\right)\right\} \\
&\leq \frac{R}{R-\rho}\left\{m(R,f) + N(R,f) + m(R,\frac{1}{f}) + N\left(R,\frac{1}{f}\right)\right\} \\
&\leq \frac{R}{R-\rho}\left\{T(R,f) + T\left(R,\frac{1}{f}\right)\right\} \\
&\leq \frac{R}{R-\rho}\left\{T(R,f) + T(R,f) - \log|f(0)|\right\} \\
&\leq \frac{2R}{R-\rho}\left\{T(R,f) + \log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right\}.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$n \leq \frac{2R}{R-\rho}\left\{T(R,f) + \log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right\}. \tag{3.22}$$

tomando $\log^{+}$ ala ecuación (3.22), obtenemos

$$\log^{+} n \leq \log^{+}\frac{2R}{R-\rho} + \log^{+} T(R,f) + \log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|} + \log 2$$

$$\log^{+} n \leq \log^{+} R + \log^{+}\frac{1}{R-\rho} + \log^{+} T(R,f) + \log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|} + 2\log 2. \tag{3.23}$$

Observe que $\rho - r = R - \rho = \dfrac{1}{2}(R-r)$ para $r < \rho < R$, así los términos en la desigualdad (3.19) que dependen de ρ pueden ser remplazados por términos que dependen de R en la desigualdad (3.23). Por lo tanto, la desigualdad (3.19) puede ser descrita como:

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T(R,f) + 4\log^+\log^+ \frac{1}{|f(0)|} + 5\log^+ R$$
$$+ 6\log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14.$$

□

Para poder aplicar el lema de la derivada logarítmica al teorema 3.3 tenemos que eliminar el término R, pues probaremos en general que es posible seleccionar $R > r$ tal que ni $\log^+ T(R,f)$ o $\log^+ \frac{1}{R-r}$ son más grandes que $\log^+ T(r,f)$, con este fin haremos uso del siguiente resultado, debido a Borel.

Lema 3.7. ***(Lema de Borel)***

i) Suponga que $T(r)$ sea una función continua, creciente y $T(r) \geq 1$ para $r_0 \leq r < +\infty$. Entonces

$$T\left(r + \frac{1}{T(r)}\right) < 2T(r), \tag{3.24}$$

para todo r fuera de un conjunto excepcional E el cual tiene medida lineal a lo más 2.

ii) Si $T(r)$ es una función continua y creciente para $r_0 \leq r < +\infty$ y $T(r) \geq 1$, entonces

$$T\left(r + \frac{R_0 - r}{eT(r)}\right) < 2T(r), \tag{3.25}$$

para todo r fuera de un conjunto excepcional E tal que $\int_E \frac{dr}{R_0 - r} \leq 2$. En particular (3.25) vale para algún r en el intervalo $\rho < r < \rho'$ provisto que $r_0 < \rho < R_0$ y $R_0 - \rho' < \frac{(R_0 - \rho)}{e^2}$.

Demostración. Prueba de la parte $i)$
Sea
$$E = \left\{ r \geq r_0 \ \text{ tal que } \ T\left(r + \frac{1}{T(r)}\right) \geq 2T(r) \right\}.$$
Probemos que la medida $m(E)$ de E es menor o igual a 2.
Claramente, podemos suponer que $E \neq \Phi$. Sea entonces $r_1 \in E$ el mínimo de E (observe que E es cerrado) y defina

$$r_1' = r_1 + \frac{1}{T(r_1)}.$$

Si $E \cap [r_1', +\infty] = \Phi$, entonces $E \subset [r_1, r_1']$ y entonces $m(E) \leq r_1' - r_1 = \frac{1}{T(r_1)} \leq 1$, ya que $T(r_1) \geq 1$. Podemos suponer entonces que $E \cap [r_1', +\infty[\neq \Phi$. Sea $r_2 \in E \cap [r_1', +\infty]$ el mínimo de $E \cap [r_1', +\infty]$ y defina $r_2' = r_2 + \frac{1}{T(r_2)}$. Claramente, E es disjunto de (r_1', r_2). Además, como T es creciente y $r_1 \in E$, tenemos

$$T(r_2) \geq T(r_1') = T\left(r_1 + \frac{1}{T(r_1)}\right) \geq 2T(r_1) \geq 2.$$

Luego, si $E \cap [r_2', +\infty) = \Phi$, tenemos $E \subset [r_1, r_1'] \cup [r_2, r_2']$, luego $m(E) \leq (r_1' - r_1) + (r_2' - r_2) = \frac{1}{T(r_1)} + \frac{1}{T(r_2)} \leq 1 + \frac{1}{2} \leq 2$ y entonces el teorema estaría demostrado. Podemos suponer entonces que $E \cap [r_2', +\infty] \neq \Phi$.
Sea r_3 el mínimo de $E \cap [r_2', +\infty)$ y defina

$$r_3' = r_3 + \frac{1}{T(r_3)}.$$

Claramente E es disjunto de (r_2', r_3).
De nuevo, como T es creciente y $r_2 \in E$, entonces

$$T(r_3) \geq T(r_2') = T\left(r_2 + \frac{1}{T(r_2)}\right) \geq 2T(r_2) \geq 2(2) = 4.$$

Luego, si $E \cap [r_3', +\infty) = \Phi$, tenemos

$$E \subset [r_1, r_1'] \cup [r_2, r_2'] \cup [r_3, r_3'],$$

de aquí

$$\begin{aligned} m(E) &\leq (r_1' - r_1) + (r_2' - r_2) + (r_3' - r_3) \\ &= \frac{1}{T(r_1)} + \frac{1}{T(r_2)} + \frac{1}{T(r_3)} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 2 \end{aligned}$$

y entonces el teorema estaría demostrado.
Si continuamos con este argumento de manera indefinida encontramos dos sucesiones r_n , $r_n' = r_n + \frac{1}{T(r_n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ tales que $r_n \leq r_n' \leq r_{n+1}$, de forma que E es disjunto de los intervalos (r_n', r_{n+1}).

Observe que $\lim r_n = +\infty$; caso contrario, si $\lim r_n = \tau < +\infty$, tenemos $\lim r_n' = \tau$ y entonces

$$0 = \lim(r_n' - r_n) = \lim \frac{1}{T(r_r)} = \frac{1}{T(\tau)} > 0,$$

lo que es una contradicción. Entonces los intervalos (r_n', r_{n+1}) junto con los intervalos $[r_n, r_n']$ cubren toda la semirecta $[r_1, +\infty)$. Como E es disjunto de los intervalos (r_n', r_{n+1}), tenemos $E \subset \bigcup [r_n, r_n']$ y entonces

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (r_n' - r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} T(r_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 2.$$

Esto prueba el item i).

Para probar la parte ii). Sea

$$\rho = \log \frac{1}{R_0 - r}, \quad r = R_0 - e^{-\rho}, \quad \rho_0 = \log \frac{1}{R_0 - r_0},$$

tome $T_1(\rho) = T(R_0 - e^{-\rho})$ con $\rho_0 \leq \rho < \infty$. Esta función es continua y creciente en $\rho_0 \leq \rho < \infty$, entonces aplicando la primera parte de la prueba a la función $T_1(\rho)$, sea E_0 el conjunto de todos los valores ρ para los cuales $\rho_0 \leq \rho < \infty$ y

$$T_1\left(\rho + \frac{1}{T_1(\rho)}\right) \geq 2T_1(\rho).$$

Si $E = \{r = R_0 - e^{-\rho} \text{ tal que } \rho \in E_0\}$ entonces por i) tendremos:

$$\int_E \frac{dr}{R_0 - r} = \int_{E_0} d\rho \leq 2.$$

Luego, si $r \notin E$ y $\rho = \log \dfrac{1}{R_0 - r}$, tenemos que $T_1\left(\rho + \dfrac{1}{T_1(\rho)}\right) < 2T_1(\rho)$, o sea $T\left(R_0 - e^{-\left(\rho + \frac{1}{T_1(\rho)}\right)}\right) < 2T_1(r)$. Por otro lado,

$$r' = R_0 - e^{\left(-\rho + \frac{1}{T_1(\rho)}\right)} = r + (R_0 - r)\left(1 - e^{-\frac{1}{T(r)}}\right). \tag{3.26}$$

Por el teorema del valor medio, si $0 \leq x \leq 1$, tenemos $1 - e^{-x} = xe^{-\theta}$ para algún $\theta \in [0, 1]$, y entonces $1 - e^{-x} \geq \dfrac{x}{e}$. Usando esto en la ecuación (3.26) obtenemos

$$r' = r + (R_0 - r)\left(1 - e^{-\frac{1}{T(r)}}\right).$$

Luego, como T es creciente:

$$T\left(r + \frac{R_0 - r}{eT(r)}\right) < 2T(r),$$

lo que demuestra (3.25).

Ahora, si $r_0 < \rho < \rho' \leq R_0$, tenemos que

$$\int_{\rho}^{\rho'} \frac{dt}{R_0 - t} = \log \frac{R_0 - \rho}{R_0 - \rho'} > 2, \quad \text{si} \quad R_0 - \rho' < \frac{(R_0 - \rho)}{e^2}.$$

Así, el conjunto E no puede ocupar todo el intervalo (ρ, ρ') y podemos encontrar algún r tal que $\rho < r < \rho'$ y r está fuera de E, esto es

$$T\left(r + \frac{R_0 - r}{eT(r)}\right) < 2T(r).$$

Y esto completa la prueba del lema de Borel.

$\square$

Con todos estos lemas técnicos, ya estamos listos para poder demostrar el teorema 3.3

Demostración. Suponga que $S(r, f)$ está definida como en el teorema 3.1 y defina

$$\phi(z) = \prod_{v=1}^{q} \Big(f(z) - a_v\Big).$$

Cuando r varia tenemos

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) + O(1), \tag{3.27}$$

Suponga primero que $R_0 = \infty$ y f tiene orden finito en $\mathbb{C}$, entonces

$$T(r, f) = O(r^k) \quad \text{cuando} \quad r \to \infty.$$

Por la proposición 2.11 item 2)

$$T(r, \phi) = T\left(r, \prod_{v=1}^{q}(f - a_v)\right) \leq \sum_{v=1}^{q} T(r, f - a_v),$$

luego, por la proposición 2.11 item 1)

$$\begin{aligned} T(r, f - a_v) &\leq T(r, f) + T(r, a_v) + \log 2 \\ &= T(r, f) + N(r, a_v) + m(r, a_v) + \log 2 \\ &= T(r, f) + 0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |a_v| d\theta + \log 2 \\ &= T(r, f) + \log^+ |a_v| + \log 2. \end{aligned}$$

Así
$$T(r, f - a_v) \leq T(r, f) + \log^+ |a_v| + \log 2.$$
Por lo tanto
$$T(r, \phi) \leq \sum_{v=1}^{q} \Big(T(r, f) + \log^+ |a_v| + \log 2 \Big) \leq qT(r, f) + O(1).$$
Luego, la función característica de ϕ estará estimado por:
$$T(r, \phi) \leq qT(r, f) + O(1). \tag{3.28}$$
Ahora estimemos $m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right)$. Tomando $R = 2r$ en el lema 3.6
$$m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) < 4\log^+ T(2r, \phi) + 4\log^+ \log^+ \frac{1}{|\phi(0)|} + 5\log^+ 2r \\ + 6\log^+ \frac{1}{2r - r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14. \tag{3.29}$$
Reemplazando la ecuación (3.28) en la ecuación (3.29), obtenemos
$$m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) < 4\log^+ \big(qT(2r, f) + O(1)\big) + 4\log^+ \log^+ \frac{1}{|\phi(0)|} + 5\log^+ 2r \\ + 6\log^+ \frac{1}{r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14.$$
Como $T(r, f) = O(r^K)$ cuando $r \to \infty$, entonces
$$m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) < 4\log^+ \big(qO((2r)^k) + O(1)\big) + 4\log^+ \log^+ \frac{1}{|\phi(0)|} + 5\log^+ 2r \\ + 6\log^+ \frac{1}{r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14. \tag{3.30}$$
Note que en la ecuación (3.30), $4\log^+ \big(qO((2r)^K\big) = O(\log r)$, $5\log^+(2r) = O(\log r)$, $6\log^+ \frac{1}{r} = O\log r$ y $\log^+ \frac{1}{r} = O(\log r)$ cuando $r \to \infty$.
Por lo tanto, (3.30) quedaría como
$$m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) = O(\log r) + 4\log^+ \log^+ \frac{1}{|\phi(0)|} + O(\log r) + O(\log r) + O(\log r) + 14$$
cuando $r \to \infty$. Así
$$m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) = O(\log r) \ \text{ cuando } \ r \to \infty. \tag{3.31}$$

Ahora estimemos $m\left(r, \dfrac{f'}{f}\right)$. Tome $R = 2r$ en el lema 3.6. Obtenemos

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T(2r, f) + 4\log^+\log^+ \frac{1}{|f(0)|} + 5\log^+ 2r + 6\log^+ \frac{1}{2r-r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14,$$

luego

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T(2r, f) + 4\log^+\log^+ \frac{1}{|f(0)|} + 5\log^+ 2r + 6\log^+ \frac{1}{r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14. \quad (3.32)$$

Como $T(r, f) = O(r^K)$, entonces $T(2r, f) = O\big((2r)^K\big)$. Además, $5\log^+(2r) = O(\log r)$, $6\log^+ \dfrac{1}{r} = O(\log r)$ y $\log^+ \dfrac{1}{r} = O(\log r)$ cuando $r \to \infty$. Así, en la ecuación (3.32) tenemos

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ O\big((2r)^K\big) + 4\log^+\log^+ \frac{1}{|f(0)|} + O(\log r) + O(\log r) + O(\log r) + 14$$

cuando $r \to \infty$. Por lo tanto

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r), \quad \text{cuando } r \to \infty. \quad (3.33)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.31) y (3.33) en (3.27), obtenemos

$$S(r, f) = O(\log r) + O(\log r) + O(1) \ \text{ cuando } r \to \infty.$$

Por consiguiente

$$S(r, f) = O(\log r), \quad r \to \infty.$$

Así, i) está probado en este caso.

Ahora suponga que el orden de f es de orden infinito en $\mathbb{C}$. En efecto, tome $R - r = \dfrac{1}{T(r, f)}$ en el lema 3.6

$$m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) < 4\log^+ T\left(r + \frac{1}{T(r, f)}, \phi\right) + 4\log^+\log^+ \frac{1}{|\phi(0)|} + 5\log^+\left(r + \frac{1}{T(r, f)}\right) + 6\log^+ T(r, f) + \log^+ \frac{1}{r} + 14. \quad (3.34)$$

Por el lema 3.7 item i) aplicado a los términos
$T\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)},\phi\right)$ y $5\log^{+}\left(r+\dfrac{1}{T(r,f)}\right)$ en la ecuación (3.34), obtenemos

$$m\left(r,\frac{\phi'}{\phi}\right) < 4\log^{+}\left(2T(r,\phi)\right)+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|\phi(0)|}+10\log^{+}r$$
$$+6\log^{+}T(r,f)+\log^{+}\frac{1}{r}+14, \quad (3.35)$$

fuera de un conjunto excepcional E de r de medida finita a lo más 2.
Por otro lado, usando la ecuación (3.28)

$$\begin{aligned} 4\log^{+}(2T(r,\phi)) &\leq 4\log^{+}(2qT(r,f)+O(1)) \\ &\leq 4\log^{+}(2qT(r,f)) \\ &= 4\log^{+}(2q)+4\log^{+}T(r,f) \\ &\leq 4\log^{+}T(r,f). \end{aligned}$$

Así
$$4\log^{+}(2T(r,\phi)) \leq 4\log^{+}T(r,f). \quad (3.36)$$

Reemplazando (3.36) en (3.35)

$$\begin{aligned} m\left(r,\frac{\phi'}{\phi}\right) &< 4\log^{+}T(r,f)+10\log^{+}(r)+6\log^{+}T(r,f)+O(1) \\ &\leq 10\log^{+}T(r,f)+10\log^{+}r \end{aligned}$$

cuando $r\to\infty$, fuera de un conjunto excepcional E de r de medida finita a lo más 2.
Por lo tanto

$$m\left(r,\frac{\phi'}{\phi}\right) < 10\log^{+}T(r,f)+10\log^{+}(r) \ \text{ cuando } \ r\to\infty \quad (3.37)$$

fuera de un conjunto excepcional E de r de medida finita a lo más 2. Similarmente, estimemos $m\left(r,\dfrac{f'}{f}\right)$. Tomando $R-r=\dfrac{1}{T(r,f)}$ en el lema 3.6

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < 4\log^{+}T\left(r+\frac{1}{T(r,f)},f\right)+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}+5\log^{+}\left(r+\frac{1}{T(r,f)}\right)$$
$$+6\log^{+}T(r,f)+\log^{+}\frac{1}{r}+14. \quad (3.38)$$

Usando el lema 3.7 item i) en la ecuación (3.38)

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ 2T(r,f) + 4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + 10\log^+ r$$
$$+ 6\log^+ T(r,f) + \log^+\frac{1}{r} + 14 \quad (3.39)$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita a lo más 2.
Cuando $r\to\infty$, la ecuación (3.39) se puede escribir como:

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T(r,f) + 6\log^+ T(r,f) + 10\log^+ r + O(1)$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita a lo más 2. En consecuencia

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < 10\log^+ T(r,f) + 10\log^+ r, \;\; \text{cuando} \;\; r\to\infty, \quad (3.40)$$

fuera de conjunto excepcional E de medida finita a lo más 2.
Reemplazando las ecuaciones (3.37) y (3.40) en la ecuación (3.27), obtenemos

$$S(r,f) = O(\log(rT(r,f))), \quad r\to\infty$$

fuera de un conjunto excepcional de medida finita E de r. Esto prueba $i)$ en este caso.

Para probar el caso $ii)$. Tome $R = r + \dfrac{R_0 - r}{eT(r,f)}$ en el lema 3.6. Entonces

$$m\left(r,\frac{\phi'}{\phi}\right) < 4\log^+ T\left(r + \frac{R_0-r}{eT(r,f)},\phi\right) + 4\log^+\log^+\frac{1}{|\phi(0)|}$$
$$+ 5\log^+\left(r + \frac{R_0-r}{eT(r,f)}\right) + 6\log^+\frac{eT(r,f)}{R_0-r} + \log^+\frac{1}{r} + 14. \quad (3.41)$$

Ahora por el lema 3.7 item ii), la ecuación (3.41) puede expresarse como

$$m\left(r,\frac{\phi'}{\phi}\right) < 4\log^+\big(2T(r,\phi)\big) + 10\log^+ r + 6\log^+\frac{eT(r,f)}{R_0-r} + \log^+\frac{1}{r} + O(1), \quad (3.42)$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita. Por otro lado, reemplazando la ecuación (3.28) en (3.42), tenemos

$$m\left(r,\frac{\phi'}{\phi}\right) < 10\log^+ T(r,f) + 9\log^+ r + 6\log^+\frac{1}{R_0-r}$$
$$+ 6\log^+ T(r,f) + O(1)$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita.
En consecuencia, cuando $r \to R_0$

$$m\left(r, \frac{\phi'}{\phi}\right) < 16\log^+ T(r,f) + O(\log r) + 6\log^+ \frac{1}{R_0 - r} \tag{3.43}$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita.
Similarmente, podemos estimar $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$. Tome $R = r + \dfrac{R_0 - r}{eT(r,f)}$ en el lema 3.6. Entonces

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T\left(r + \frac{R_0 - r}{eT(r,f)}, f\right) + 4\log^+\log^+ \frac{1}{|f(0)|} + 5\log^+\left(r + \frac{R_0 - r}{eT(r,f)}\right)$$
$$+ 6\log^+ \frac{eT(r,f)}{R_0 - r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14. \tag{3.44}$$

Por el lema 3.7 item ii), la ecuación 3.44 se podrá escribir como

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ \big(2T(r,f)\big) + 4\log^+\log^+ \frac{1}{|f(0)|} + 10\log^+ r$$
$$+ 6\log^+ \frac{eT(r,f)}{R_0 - r} + \log^+ \frac{1}{r} + 14, \tag{3.45}$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita. Además, cuando $r \to R_0$ (3.45) se puede expresar como

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ \big(2T(r,f)\big) + 9\log^+ r + 6\log^+ T(r,f) + 6\log^+ \frac{1}{R_0 - r} + O(1) \tag{3.46}$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita.
Por lo tanto, cuando $r \to R_0$

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 10\log^+ \big(T(r,f)\big) + 6\log^+ \frac{1}{R_0 - r} + O(\log r) \tag{3.47}$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita.
Así, sustituyendo las ecuaciones (3.43) y (3.47) en la (3.27), obtenemos

$$S(r,f) = O\left(\log^+ T(r,f) + \log^+ \frac{1}{R_0 - r}\right) \text{ cuando } r \to R_0$$

fuera de un conjunto excepcional E de medida finita. Y esto concluye la prueba del teorema 3.3 □

3.2. Teoría de Nevanlinna de valores deficientes.

Decimos que la función f es *admisible* en el disco D_R, si se tiene alguna de las siguientes condiciones

1) $R = +\infty$ y $f(z)$ no es constante.

2) $R < +\infty$ y $\limsup_{r \to R} \dfrac{T(r,f)}{-\log(R-r)} = +\infty$.

Recordemos que $n(t,a)$ es el número de raíces de la ecuación $f(z) = a$ en el disco $|z| \leq t$, contadas con raíces múltiples. Denotemos por $\bar{n}(t,a)$ el número de raíces de la ecuación $f(z) = a$ en el disco $|z| \leq t$ contadas sin multiplicidad. Definamos

$$N(r,a) = \int_0^r \frac{n(t,a) - n(0,a)}{t} dt + n(0,a) \log r.$$

$$\overline{N}(r,a) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t,a) - \bar{n}(0,a)}{t} dt + \bar{n}(0,a) \log r.$$

Recuerde que $N(r,a)$ ya fué definido y puede denotarse también por $N(r, f = a)$ o $N(r,f)$. Similarmente, $\overline{N}(r,a)$ podrá ser denotado también por $\overline{N}(r, f = a)$ o $\overline{N}(r,f)$.

Sea $a \in \overline{\mathbb{C}}$ y f una función meromorfa en el disco D_R tal que $T(r,f) \to +\infty$ cuando $r \to R$. Así, por el Primer teorema fundamental de Nevanlinna

$$m(r,a) + N(r,a) = T(r,f) + O(1), \quad \text{cuando} \quad r \to R.$$

Luego definimos

1) $\delta(a) = \delta(a,f) = \liminf_{r \to R} \dfrac{m(r,a)}{T(r,f)} = 1 - \limsup_{r \to R} \dfrac{N(r,a)}{T(r,f)}$.

2) $\Theta(a) = \Theta(a,f) = 1 - \limsup_{r \to R} \dfrac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)}$.

3) $\theta(a) = \theta(a,f) = \liminf_{r \to R} \dfrac{N(r,a) - \overline{N}(r,a)}{T(r,f)}$.

$\delta(a)$, $\Theta(a)$, y $\theta(a)$ se denominan Deficiencia de Nevanlinna , Defecto de Ramificación y Orden de Multiplicidad respectivamente.

De la definición de Deficiencia de Nevanlinna y del Primer teorema fundamental de Nevanlinna se deduce que

$$0 \leq \delta(a) \leq 1.$$

El término

$$1 - \delta(a) = \limsup_{r \to R} \frac{N(r,a)}{T(r,f)}$$

mide la frecuencia relativa asintótica de las raíces de la ecuación $f(z) = a$, consecuentemente la deficiencia $\delta(a)$ es un número que mide en que medida la función $f(z)$ deja de tomar el valor a.

Por otro lado

$$1 - \frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)} = 1 - \frac{N(r,a)}{T(r,f)} + \frac{N(r,a) - \overline{N}(r,a)}{T(r,f)}, \tag{3.48}$$

tomando limite inferior a la ecuación (3.48) cuando $r \to R$, obtenemos que

$$\liminf_{r \to R} \left(1 - \frac{\bar{N}(r,a)}{T(r,f)}\right) \geq \liminf_{r \to R} \left(1 - \frac{N(r,a)}{T(r,f)}\right) + \liminf_{r \to R} \left(\frac{N(r,a) - \bar{N}(r,a)}{T(r,f)}\right).$$

$$1 - \limsup_{r \to R} \left(\frac{N(r,a)}{T(r,f)}\right) \geq 1 - \limsup_{r \to R} \left(\frac{N(r,a)}{T(r,f)}\right) + \theta(a)$$

$$\Theta(a) \geq \delta(a) + \theta(a).$$

Definición 3.8. Un número complejo a es llamado valor deficiente de f si su deficiencia es positiva. Un valor deficiente es llamado también un valor excepcional en el sentido de Nevanlinna.

Teorema 3.9. ***(Teorema de Nevanlinna sobre valores deficientes)*** *Suponga que f es admisible en el disco D_R. Entonces $\Theta(a) = 0$ excepto posiblemente para una secuencia finita o contable a_v de valores tales que $\sum_v \Theta(a_v) \leq 2$.*

Demostración. Es suficiente probar que $\sum_{v=1}^{q} \Theta(a_v) \leq 2$ para cualesquiera puntos $a_1, \ldots, a_q \in \overline{\mathbb{C}}$ con $a_1 = \infty$. Del teorema 3.1 podemos escribir

$$\sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f), \tag{3.49}$$

donde $N_1(r)$ y $S(r,f)$ están definidas como en el teorema 3.1

Sumando $\sum_{v=1}^{q} N(r,a_v)$ en la desigualdad (3.49), obtenemos

$$\sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + \sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f) + \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v).$$

En consecuencia

$$\sum_{v=1}^{q} T(r,a_v) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f) + \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v). \tag{3.50}$$

Por el Primer teorema fundamental de Nevanlinna, la ecuación (3.50) se transforma en

$$\sum_{v=1}^{q} T(r,f) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f) + \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + O(1). \tag{3.51}$$

Luego

$$qT(r,f) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f) + \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + O(1)$$

y

$$(q-2)T(r,f) \leq \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) - N_1(r) + S(r,f) + O(1). \tag{3.52}$$

Por otro lado

$$N_1(r) = 2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right). \tag{3.53}$$

Como al comienzo de la prueba se tomó $a_1 = \infty$, entonces $N(r,\infty) = N(r,a_1)$. por consiguiente

$$N(r,\infty) - N_1(r) = N(r,a_1) - N_1(r).$$

Luego, reemplazando (3.53) en esta última expresión

$$N(r,\infty) - N_1(r) = N(r,a_1) - \left(2N(r,f) - N(r,f^{'}) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right).$$

Como $N(r,f) = N(r,\infty)$ y $a_1 = \infty$ entonces

$$\begin{aligned} N(r,a_1) - N_1(r) &= N(r,a_1) - 2N(r,a_1) + N(r,f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &= N(r,f') - N(r,a_1) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right). \end{aligned}$$

Así

$$N(r,a_1)-N_1(r)=N(r,f')-N(r,a_1)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right). \tag{3.54}$$

Por lo tanto, reemplazando la ecuación (3.54) en la ecuación (3.52) y además $N(r,a_1)=N(r,f)$ por que $a_1=\infty$, obtenemos

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{v=2}^{q}N(r.a_v)+N(r,f')-N(r,f)-N\left(r.\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)+O(1). \tag{3.55}$$

Si f tiene un polo de orden p en z_0, f' tendrá un polo de orden $(p+1)$ en z_0 y entonces $n(t,f')-n(t,f)=\bar{n}(t,f)$.

Luego

$$\begin{aligned}N(r,f')-N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f')-n(0,f')}{t}dt+n(0,f')\log r\\ -\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt-n(0,f)\log r.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}N(r,f')-N(r,f) &= \int_0^r\frac{\bar{n}(t,f)-\bar{n}(0,f)}{t}dt+\bar{n}(0,f)\log r\\ &= \bar{N}(r,f).\end{aligned}$$

Así

$$N(r,f')-N(r,f)=\overline{N}(r,f). \tag{3.56}$$

Similarmente, si a es uno de los valores $a_2,a_3,\ldots,a_q\in\mathbb{C}$ y $f(z)=a$ tiene una raíz de multiplicidad p, $f'(z)$ tendrá un cero de orden $(p-1)$, así

$$\sum_{v=2}^{q}N(r,a_v)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)=\sum_{v=2}^{q}\bar{N}(r,a_v)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right), \tag{3.57}$$

donde $N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ se refiere a los ceros de $f'(z)$ en puntos distintos de las raíces de $f(z)=a_v,\quad v=1,2,3,.......,q$.

Reemplazando (3.56) y (3.57) en la desigualdad (3.55), obtenemos

$$(q-2)T(r,f)\leq\sum_{v=2}^{q}\overline{N}(r,a_v)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)+\overline{N}(r,f)+O(1).$$

Pero $\overline{N}(r,f)=\overline{N}(r,a_1)$, luego

$$(q-2)T(r,f)\leq\sum_{v=1}^{q}\overline{N}(r,a_v)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)+O(1). \tag{3.58}$$

Ignorando el término $N_0\left(r, \dfrac{1}{f'}\right)$ y dividiendo a la desigualdad (3.58) entre $T(r,f)$, tenemos

$$\frac{\sum_{v=1}^{q}\overline{N}(r,a_v)}{T(r,f)} \geq (q-2) - \frac{S(r,f)+O(1)}{T(r,f)}.$$

Como $\liminf\limits_{r\to R} \dfrac{S(r,f)}{T(r,f)} = 0$ y $T(r,f) \to \infty$ cuando $r \to R$,

$$\limsup_{r\to R}\left[-\frac{O(1)+S(r,f)}{T(r,f)}\right] = 0,$$

así

$$\limsup_{r\to R}\left(\frac{\sum_{v=1}^{q}\overline{N}(r,a_v)}{T(r,f)}\right) \geq q-2$$

$$\sum_{v=1}^{q}\limsup_{r\to R}\frac{\overline{N}(r,a_v)}{T(r,f)} \geq (q-2),$$

en consecuencia

$$\sum_{v=1}^{q}(1-\Theta(a_v)) \geq (q-2),$$

$$q - \sum_{v=1}^{q}\Theta(a_v) \geq q-2,$$

finalmente obtenemos

$$\sum_{v=1}^{q}\Theta(a_v) \leq 2.$$

□

Ejemplo 3.10. Consideremos la función exponencial $f(z) = e^z$. De la sección 2.2 ejemplo 2.12. Sabemos que

$$m(r,0) = m(r,\infty) = \frac{r}{\pi},$$

$$N(r,0) = N(r,\infty) = 0,$$

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi},$$

de tal forma que

$$\delta(0,f) = \liminf_{r\to R}\frac{m(r,0)}{T(r,f)} = 1$$

y

$$\delta(\infty,f) = \liminf_{r\to R}\frac{m(r,0)}{T(r,f)} = 1.$$

Para $a \neq 0, \infty$ tenemos

$$m(r,a) = O(1),$$
$$N(r,a) = \frac{r}{\pi} + O(1),$$
$$\delta(a,f) = \liminf_{r\to R} \frac{m(r,a)}{T(r,f)} = 0.$$

Finalmente observamos que se verifica la relación de deficiencia

$$\sum_v \delta(a_v, f) = \delta(0,f) + \delta(\infty, f) = 2.$$

Ejemplo 3.11. Consideremos el caso de una función racional

$$f(z) = \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \ldots + a_0}{b_p z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \ldots + b_0}, \quad a_p, b_q \neq 0.$$

Suponga $p > q$, el resto de los casos se trata de forma análoga. En este caso, $f(z) \to \infty$ cuando $z \to \infty$, de donde se concluye que para cualquier valor $a \in \mathbb{C}$ $m(r,a) = 0$, para r suficientemente grande. Por otro lado, la ecuación $f(z) = a$ tiene p raíces, de tal forma que $n(t,a) = p$ para t suficientemente grande, en consecuencia

$$N(r,a) = \int_0^r \frac{n(t,a)}{t} dt = p \log + O(1)$$

para r suficientemente grande. Así por el *Primer teorema fundamental de Nevanlinna*

$$T(r,f) = p \log r + O(1),$$

por tanto para a finito

$$\delta(a,f) = \liminf_{r\to R_0} \frac{m(r,a)}{T(r,f)} = 0.$$

Para $a = \infty$ se tiene que $n(t,\infty) = q$ para t grande, entonces deducimos

$$N(r,\infty) = \int_0^r \frac{n(t,\infty)}{t} dt = q \log r + O(1),$$

para r suficientemente grande y también

$$m(r,\infty) = T(r,f) - N(r,\infty) = (p-q) \log r + O(1),$$

por lo tanto

$$\delta(\infty, f) = \liminf_{r\to R_0} \frac{m(r,\infty)}{T(r,f)} = \liminf_{r\to R_0} \frac{(p-q)\log r + O(1)}{p \log r + O(1)} = 1 - \frac{q}{p}.$$

Así, observamos que en este caso también se verifica la relación de deficiencia

$$\sum \delta(a,f) = 1 - \frac{q}{p} < 2.$$

El teorema 3.1 puede ser expresado como.

Teorema 3.12. *Sea $f(z)$ una función meromorfa no constante en el disco $\overline{D}_R$. Sean $a_1, a_2, ..., a_q$ con $q \geq 3$, q valores distintos finitos o infinitos. Entonces para $r > 0$ tenemos*

$$(q-2)T(r,f) \leq \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) - N_1(r) + S(r,f),$$

donde $N_1(r)$ y $S(r,f)$ están definidas como en el teorema 3.1.

Demostración.
Del teorema 3.1 (Segundo teorema fundamental de Nevanlinna), para los q valores a_v y tomando $a_1 = \infty$, tenemos

$$\sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f), \tag{3.59}$$

donde $N_1(r)$ y $S(r,f)$ están definidos como en el teorema 3.1.
Adicionando el término $\sum_{v=1}^{q} N(r,a_v)$ en la desigualdad (3.59)

$$\sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + \sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) \leq \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f).$$

Por la definición 2.9 (Función característica) la última desigualdad se podrá expresar como:

$$\sum_{v=1}^{q} T(r,a_v) \leq \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f). \tag{3.60}$$

Ahora aplicamos el teorema 2.12 (Primer teorema fundamental de Nevanlinna) a (3.60)

$$\sum_{v=1}^{q} T(r,f) + O(1) \leq \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f).$$

El término $O(1)$ es un término despreciable, así que podemos omitir. Por lo tanto

$$\sum_{v=1}^{q} T(r,f) \leq \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) + 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f).$$

Luego

$$(q-2)T(r,f) \leq \sum_{v=1}^{q} N(r,a_v) - N_1(r) + S(r,f).$$

El cual muestra una usual forma de enunciar el teorema 3.1 con $N_1(r)$ y $S(r,f)$ definidos como en el teorema 3.1. $\square$

Mostraremos ahora un resultado especial desarrollado por Rolf Nevanlinna usualmente llamado

Teorema 3.13. *(Teorema de Nevanlinna de Funciones Deficientes) Si f es meromorfa y admisible en D_R y $a_1(z)$, $a_2(z)$, $a_3(z)$ son funciones meromorfas tal que para $v = 1, 2, 3$*

$$T(r, a_v) = o(T(r, f)), \quad \textit{cuando} \ \ r \to R,$$

entonces

$$\big(1 + o(1)\big)T(r, f) \leq \sum_{v=1}^{3} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_v}\right) + S(r, f),$$

cuando $r \to R$, donde $S(r, f)$ satisface la conclusión del teorema 3.3

Demostración. Sea $g(z)$ una función definida como

$$g(z) = \left(\frac{f(z) - a_1(z)}{f(z) - a_3(z)}\right)\left(\frac{a_2(z) - a_3(z)}{a_2(z) - a_1(z)}\right).$$

Luego, haciendo algunas operaciones algebraicas obtenemos

$$\frac{1}{f - a_3} = \frac{1}{a_3 - a_1}\left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3} g - 1\right).$$

Luego, por la proposición 2.11 parte i)

$$T(r, f) = T(r, f - a_3 + a_3) \leq T(r, f - a_3) + T(r, a_3) + \log 2. \tag{3.61}$$

De la fórmula de Jensen $T(r, f - a_3) = T\left(r, \frac{1}{f - a_3}\right) + O(1)$ y por hipótesis del teorema $T(r, a_3) = o(T(r, f))$. Entonces, la ecuación (3.61) se puede expresar como

$$T(r, f) \leq T\left(r, \frac{1}{f - a_3}\right) + o\big(T(r, f)\big) + \log 2 + O(1). \tag{3.62}$$

Observe que $O(1) = o(T(r, f))$ y $\log 2 = o(T(r, f))$ cuando $r \to R$. Por lo tanto, la ecuación (3.62) estará escrita como

$$T(r, f) \leq T\left(r, \frac{1}{f - a_3}\right) + o\big(T(r, f)\big) + o(T(r, f)) + o(T(r, f))$$

luego

$$T(r, f) \leq T\left(r, \frac{1}{f - a_3}\right) + o\big(T(r, f)\big) \ \text{ cuando } \ r \to R. \tag{3.63}$$

Por otro lado

$$\frac{1}{f - a_3} = \frac{1}{a_3 - a_1}\left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3} g - 1\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{f-a_3}\right) &= T\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\left(\frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}g-1\right)\right)\\
&\leq T\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\right)+T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}g-1\right)\\
&\leq T\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\right)+T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}g\right)+T(r,1)+\log 2\\
&\leq T\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\right)+T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}\right)+T(r,g)+T(r,1)+\log 2\\
&\leq T\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\right)+T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}\right)+T(r,g)+\log 2.
\end{aligned}$$

Así

$$T\left(r, \frac{1}{f-a_3}\right) \leq T\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\right)+T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}\right)+T(r,g)+\log 2 \qquad (3.64)$$

pero

$$T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}\right) \leq T\left(r, \frac{1}{a_2-a_3}\right)+T\left(r, a_2-a_1\right).$$

Por hipótesis del teorema, para cada $v=1,2,3$. $T(r,a_v)=o\big(T(r,f)\big)$ cuando $r\to R$, por lo tanto $T\left(r, \frac{1}{a_3-a_1}\right)=o(T(r,f))$, $T(r, \frac{1}{a_2-a_3})=o\big(T(r,f)\big)$ y $T(r,a_2-a_1)=o\big(T(r,f)\big)$ cuando $r\to R$. Así

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}\right) &\leq T\left(r, \frac{1}{a_2-a_3}\right)+T\left(r, a_2-a_1\right)\\
&= o(T(r,f))+o(T(r,f))\\
&= o(T(r,f)).
\end{aligned}$$

Luego

$$T\left(r, \frac{a_2-a_1}{a_2-a_3}\right)=o(T(r,f)) \text{ cuando } r\to R. \qquad (3.65)$$

Reemplazando (3.65) en (3.64) obtenemos

$$T\left(r, \frac{1}{f-a_3}\right) \leq o(T(r,f))+o(T(r,f))+T(r,g)+\log 2 \text{ cuando } r\to R. \quad (3.66)$$

Equivalentemente se puede escribir la ecuación (3.66) como

$$T\left(r, \frac{1}{f-a_3}\right) \leq o(T(r,f))+T(r,g) \text{ cuando } r\to R. \qquad (3.67)$$

Luego, reemplazando la ecuación (3.67) en la ecuación (3.63)

$$T(r,f) \leq o\big(T(r,f)\big)+T(r,g)+o\big(T(r,f)\big).$$

Así

$$T(r,f) \leq o(T(r,f)) + T(r,g) \text{ cuando } r \to R. \tag{3.68}$$

Por otro lado, tomando $q = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ y $f = g$ en la ecuación (3.58), obtenemos

$$(3-2)T(r,g) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r,g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r,g) + O(1).$$

Podemos despreciar el término $N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)$

$$T(r,g) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r,g) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) + S(r,g) + O(1). \tag{3.69}$$

Ahora como g está definido por la forma

$$g(z) = \left(\frac{f(z) - a_1(z)}{f(z) - a_3(z)}\right)\left(\frac{a_2(z) - a_3(z)}{a_2(z) - a_1(z)}\right),$$

implica que $g = 0$ solo si $f = a_1$ o $a_2 = a_3$, entonces

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{a_2 - a_3}\right) \text{ cuando } r \to R$$

y como $\overline{N}\left(r, \frac{1}{a_2 - a_3}\right) \leq o(T(r,f))$ tenemos que

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_1}\right) + o(T(r,f)) \text{ cuando } r \to R. \tag{3.70}$$

Similarmente, $g = \infty$ solo si $f = a_3$ o $a_2 = a_1$, entonces

$$\overline{N}(r,g) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_3}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{a_2 - a_1}\right) \text{ cuando } r \to R$$

y como $\overline{N}\left(r, \frac{1}{a_2 - a_1}\right) \leq o(T(r,f))$ tenemos que

$$\overline{N}(r,g) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_3}\right) + o(T(r,f)) \text{ cuando } r \to R. \tag{3.71}$$

De la misma forma podemos razonar $g = 1$ solo si $f = a_2$ o $a_1 = a_3$, entonces

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_2}\right) + o(T(r,f)) \text{ cuando } r \to R. \tag{3.72}$$

Reemplazando las ecuaciones (3.70), (3.71) y (3.72) en la ecuación (3.69) obtenemos

$$T(r,g) \leq \sum_{v=1}^{3} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_v}\right) + o(T(r,f)) + S(r,g) + O(1) \text{ cuando } r \to R.$$

Además, $S(r,g)$ satisface las mismas condiciones que $S(r,f)$ cuando $r\to R$. En consecuencia

$$T(r,g)\le\sum_{v=1}^{3}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_v}\right)+o(T(r,f))+S(r,f)\ \text{ cuando }\ r\to R.$$

Sustituyendo esta última expresión en (3.68) obtenemos

$$(1-o(1))T(r,f)\le\sum_{v=1}^{3}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_v}\right)+S(r,f)\ \text{ cuando }\ r\to R.$$

□

3.3. Aplicaciones de los teoremas fundamentales de Nevanlinna

Recuerde que una función meromorfa definida en $\mathbb{C}$ que no es una función racional se llama función meromorfa trascendental (ver Definicion 1.33.) Los siguientes teoremas pueden encontrarse en los textos ([7], [8], [15])

Teorema 3.14. *Sea f una función meromorfa trascendental. Entonces*

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty. \tag{3.73}$$

Demostración. Supongamos que la conclusión del teorema no es verdad. Entonces $\exists\ M>0$ y $\exists$ una sucesión $r_n\to\infty$ tales que

$$\frac{T(r_n,f)}{\log r_n}<M,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Por la definición de la función característica, $T(r_n,f)=m(r_n,f)+N(r_n,f)$, luego $N(r_n,f)\le T(r_n,f)$ y $N\left(r_n,\frac{1}{f}\right)\le T(r_n,f)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, por el teorema 2.12. Luego

$$\frac{N(r_n,f)}{\log r_n}<M,\quad \frac{N\left(r_n,\frac{1}{f}\right)}{\log r_n}<M\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Luego

$$n(\sqrt{r_n},f)\le\frac{n(\sqrt{r_n},f)}{\log\sqrt{r_n}}\int_{\sqrt{r_n}}^{r_n}\frac{dt}{t}\le\frac{1}{\log\sqrt{r_n}}\int_{\sqrt{r_n}}^{r_n}\frac{n(t,f)}{t}dt\le\frac{N(r_n,f)}{\log\sqrt{r_n}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

Así, f tiene un número finito de polos. Analogamente tenemos $n\left(\sqrt{r_n},\frac{1}{f}\right)\le\frac{N(r_n,\frac{1}{f})}{\log\sqrt{r_n}}$ y así f tiene un número finito de ceros.

Sea $G(z)$ una función racional que posee el mismo número de ceros y polos con las mismas multiplicidades que $f(z)$, entonces

$$\frac{f(z)}{G(z)} = e^{h(z)} \tag{3.74}$$

donde $h(z)$ en una función entera. Como $G(z)$ es una función racional $T(r,G) = O(\log r)$ así,

$$T\left(r, \frac{f}{G}\right) \leq T(r,f) + T\left(r, \frac{1}{G}\right) \leq T(r,f) + T(r,G) + O(1) = O(\log r).$$

Luego

$$T\left(r, \frac{f}{G}\right) \leq O(\log r).$$

Por el teorema 2.17, tomando $R = 2r$ y aplicado a la función $\dfrac{f}{G}$, tenemos

$$\log M\left(r, \frac{f}{G}\right) \leq \frac{2r+r}{2r-r} T\left(r, \frac{f}{G}\right) \leq O(\log r).$$

Además, de (3.74), la parte real de la función $h(z)$ estará dado por:

$$\Re h(z) = \log\left|\frac{f(z)}{G(z)}\right| \leq O(\log r)$$

para cada punto z sobre $|z| = r$. Afirmamos que la función $h(z)$ es constante. En efecto, como $h(z)$ es una función entera, entonces

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

y esta serie es absolutamente convergente para todo z.
Sea $z = re^{i\theta}$, entonces

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \text{ donde } a_n = \alpha_n + i\beta_n.$$

Luego, la parte real de esta serie tendrá la forma

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) r^n. \tag{3.75}$$

Esta serie converge uniformemente respecto a θ. Multiplicando por $\cos n\theta$ o $\sin n\theta$ e integrando término a término a la ecuación (3.75), obtenemos

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\cos n\theta d\theta = \alpha_n r^n. \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\sin n\theta d\theta = -\beta_n r^n, \text{ para } n > 0 \tag{3.76}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)d\theta = \alpha_0. \tag{3.77}$$

Por lo tanto

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n)r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta \quad (n>0).$$

Como $u(r,\theta)$ representa la parte real de la función $h(z)$ y $Re(h(z)) \leq O(\log r)$ para $z = re^{i\theta}$, entonces

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n)r^n \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} O(\log r)d\theta \quad (n>0).$$

Así, cuando $r \to \infty$ para cada $n > 0$ tenemos que $a_n = 0$. Por lo tanto, la función $h(z)$ será constante y en consecuencia el término $\left|\dfrac{f(z)}{G(z)}\right|$ estará acotado. Luego por el teorema de Liouville $\dfrac{f(z)}{G(z)}$ es constante y f es holomorfa en $\mathbb{C}$ el cual es una contradicción. □

Teorema 3.15. *Sea f una función meromorfa trascendental. Entonces para cada valor a, finito o infinito, la ecuación $f(z) = a$ tiene un número infinito de raíces, excepto para a lo más dos valores excepcionales.*

Demostración. Suponga que la conclusión de este teorema no es verdad. Entonces existirán tres números complejos distintos a_1, a_2, a_3, tales que la ecuación $f(z) = a_v$ con $v = 1,2,3$ toma cada a_v un número finito de veces para cada $v = 1,2,3$. Así

$$N(r,a_v) = O(\log r), \quad \text{para cada} \;\; v = 1,2,3. \tag{3.78}$$

Por otro lado, para $q = 3$ en el teorema 3.12

$$T(r,f) \leq \sum_{v=1}^{3} N(r,a_v) - N_1(r) + S(r,f). \tag{3.79}$$

Reemplazando (3.78) en (3.79), obtenemos

$$T(r,f) \leq O(\log r) - N_1(r) + S(r,f).$$

Como $N_1(r)$ es un término positivo, entonces

$$T(r,f) \leq O(\log r) + S(r,f). \tag{3.80}$$

Dividiendo a (3.80) entre $T(r,f)$

$$1 \leq \frac{O(\log r)}{T(r,f)} + \frac{S(r,f)}{T(r,f)}. \tag{3.81}$$

Tomando limite a (3.81) cuando $r \to \infty$ tenemos

$$\lim_{r\to\infty} 1 \leq \lim_{r\to\infty} \frac{O(\log r)}{T(r,f)} + \lim_{r\to\infty} \frac{S(r,f)}{T(r,f)}. \tag{3.82}$$

Como $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{S(r,f)}{T(r,f)} = 0$ y $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{O(\log r)}{T(r,f)} = 0$ por el teorema 3.14 la parte de la derecha de la desigualdad (3.82) tiende a cero cuando $r \to \infty$ el cual es una contradicción.

$\square$

Teorema 3.16. *Sea f una función meromorfa no constante en $\mathbb{C}$. Si f omite tres valores diferentes en la Esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, entonces f es constante.*

Demostración. Si f omite tres valores diferentes, entonces existe tres valores a_1, a_2, a_3 tales que $\delta(a_1) = \delta(a_2) = \delta(a_3) = 1$. Esto no es coherente pues $\sum_a \Theta(a) \geq 3 > 2$ y esto contradice el Teorema 3.9. $\square$

Ahora daremos a conocer una bonita aplicación de esta teoría al campo de las ecuaciones diferenciales complejas.

Teorema 3.17. ***(Teorema de Malmquist)*** *Sea $\mathbb{C}(z)$ el cuerpo de las funciones racionales en la variable z con coeficientes complejos y sea $\mathbb{C}(z)[X]$ el anillo de polinomios complejos con coeficientes en $\mathbb{C}(z)$. Sean $P(X)$ y $Q(X)$ elementos primos relativos en $\mathbb{C}(z)[X]$. Si la ecuación diferencial*

$$f' = \frac{P(f)}{Q(f)}$$

tiene una solución meromorfa trascendental f, entonces Q es de grado cero en X y P es de grado a lo más 2 en X.

Es preciso indicar que el teorema de Malmquist nos dice que las únicas ecuaciones diferenciales de la forma $f' = \dfrac{P(f)}{Q(f)}$ que admiten soluciones meromorfas trascendentales son ecuaciones de la forma

$$f' = a_0(z) + a_1(z)f + a_2(z)f^2,$$

conocidas como ecuaciones diferenciales de Riccati, donde $a_0(z)$, $a_1(z)$ y $a_2(z)$ son funciones racionales de z.

Para facilitar la demostración del teorema 3.17 (Teorema de Malmquist) dividiremos el teorema en dos partes.

Proposición 3.18. *Sean P y Q como en el teorema 3.17 (Teorema de Malmquist), f una función meromorfa trascendental y $g = \dfrac{P(f)}{Q(f)}$. Entonces*

$$T(r,g) = T(r,\frac{P}{Q}) = \textit{máx}\{gr(P), gr(Q)\}T(r,f) + o(T(r,f)).$$

Demostración. Sean

$$P(X) = \sum_{j=1}^{p} a_j(z)X^j$$

y

$$Q(X) = \sum_{j=1}^{q} b_j(z)X^j$$

donde a_j y b_j son funciones racionales en la variable z. Como a_j y b_j son funciones racionales, entonces $T(r,a_j) = O(\log r)$ y $T(r,b_j) = O(\log r)$. Además, como $f(z)$ es una función meromorfa, entonces $T(r,a_j) = O(\log r) = o(T(r,f))$, de la misma forma $T(r,b_j) = O(\log r) = o(T(r,f))$.
Primero analizamos el caso polinomial, este es $q = gr(Q) = 0$, entonces asumimos que $Q \equiv 1$.
Nuestro objetivo será demostrar que

$$T(r,g) = T(r,P) \leq pT(r,f) + o(T(r,f)). \tag{3.83}$$

En efecto, usando inducción sobre p.

Cuando $p = 0$ la desigualdad (3.83) es trivial puesto que

$$T(r,g) = T(r,P) = T(r,a_0) \leq o(T(r,f)).$$

Además, podemos considerar

$$\begin{aligned} P(f) &= a_p(z)f^p + \ldots, + a_1(z)f + a_0(z) \\ &= f\left(\sum_{j=1}^{p} a_j f^{j-1}\right) + a_0. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Por la proposición 2.11, la ecuación (3.84) se podrá expresar como

$$T(r, P(f)) \leq T(r, f) + T\left(r, \sum_{j=1}^{p} a_j f^{p-1}\right) + T(r, a_0) + \log 2,$$

ahora aplicamos la hipótesis inductiva y así obtenemos el resultado deseado.
Ahora probemos que

$$T(r, P(f)) \geq pT(r, f) + o(T(r, f)). \tag{3.85}$$

Como los a_j son funciones racionales, entonces existe alguna cantidad finita de puntos donde alguna de las funciones racionales tenga un cero o un polo. Si z_0 no es uno de aquellos puntos y si f tiene un polo de orden k en z_0, entonces f^p tiene un polo de orden kp en z_0 y así también $P(f)$. De esta manera, si no fuera por los ceros y polos de las funciones racionales a_j, tenemos que

$$N(r, P(f)) = pN(r, f),$$

sin embargo, considerando estos valores

$$N(r, P(f)) \geq pN(r, f) - O(\log r). \tag{3.86}$$

Por otro lado, como los coeficientes a_j son funciones racionales, entonces existe un entero d tal que para r suficientemente grande y para $j = 0, 1, ..., p-1$

$$\frac{|a_j(re^{i\theta})|}{|a_p(re^{i\theta})|} \leq r^d. \tag{3.87}$$

Definamos

$$S_r = \{\theta \in [0, 2\pi] : |f(re^{i\theta})| \geq r^{d+1}\}$$

y

$$S_r^C = [0, 2\pi] \backslash S_r.$$

Entonces, para $z = re^{i\theta}$, con $\theta \in S_r$ y r suficientemente grande tenemos que

$$\begin{aligned} P(f(z)) &= a_p(z)f^p(z) + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(z)f^j(z) \\ &= a_p(z)f^p(z) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)f^j(z)}{f^p(z)} f^p(z) \\ &= a_p(z)f^p(z) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)}{f^{p-j}(z)} f^p(z) \\ &= a_p(z)f^p(z) + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)}{a_p(z)f^{p-j}(z)} a_p(z)f^p(z) \\ &= a_p(z)f^p(z)\left(1 + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)}{a_p(z)f^{p-j}(z)}\right), \end{aligned}$$

así

$$P(f(z)) = a_p(z)f^p(z)\left(1 + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)}{a_p(z)f^{p-j}(z)}\right). \tag{3.88}$$

Tomando valor absoluto a la ecuación (3.88), tenemos

$$|P(f(z))| = |a_p(z)||f(z)|^p \left|1 + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)}{a_p(z)f^{p-j}(z)}\right|.$$

Por otro lado, por la desigualdad (3.87) $\dfrac{|a_j(re^{i\theta})|}{|a_p(re^{i\theta})|} \leq r^d$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ y que cuando $\theta \in S_r$ vale que $\left|\dfrac{1}{f(re^{i\theta})}\right| \leq \dfrac{1}{r^{d+1}}$, entonces

$$1 - \frac{1}{r} \leq \left|1 + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)}{a_p(z)f^{p-j}(z)}\right| \leq 1 + \sum_{j=0}^{p-1} \left|\frac{a_j(z)}{a_p(z)}\right| \left|\frac{1}{f^{j-p}(z)}\right| \leq 1 + \frac{1}{r}.$$

Así

$$\begin{aligned} |P(f(z))| &= |a_p(z)||f(z)|^p \left|1 + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j(z)}{a_p(z)f^{p-j}(z)}\right| \\ &\geq |a_p(z)||f(z)|^p \left(1 - \frac{1}{r}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}|a_p(z)||f(z)|^p. \end{aligned}$$

Luego

$$|f(z)| \leq |f(z)|^p \leq \frac{2|P(f(z))|}{|a_p(z)|} \quad \text{para } \theta \in S_r \tag{3.89}$$

Por otro lado, para $z = re^{i\theta}$ con $\theta \notin S_r$ tenemos que $|f(z)| \leq r^{d+1}$. Así, para r suficientemente grande

$$m(r,f) = \int_{s_r} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{S_r^C} \log^+ |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{3.90}$$

Reemplazando (3.89) $|f(z)| \leq r^{d+1}$ en la ecuación (3.90)

$$\begin{aligned} pm(r,f) &= \int_{s_r} \log^+ |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{S_r^C} \log^+ |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \int_{S_r} \log^+ 2\frac{|P(f(re^{i\theta}))|}{|a_p(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{S_r^C} \log^+ r^{p(d+1)} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \int_0^{2\pi} \log^+ |P(f(re^{i\theta}))| \frac{d\theta}{2\pi} + O(\log r). \\ &= m(r, P(f)) + O(\log r). \end{aligned}$$

Así

$$m(r, P(f)) \geq pm(r,f) - O(\log r). \tag{3.91}$$

Sumando las ecuaciones (3.86) y (3.91) tenemos

$$m(r, P(f)) + N(r, P(f)) \geq pm(r,f) + pN(r,f) - O(\log r).$$

Luego

$$T(r, P(f)) \geq pT(r,f) - O(\log r).$$

En consecuencia

$$T(r, P(f)) \geq pT(r,f) + o(T(r,f)).$$

Ahora probemos

$$T(r,g) \leq T(r, \frac{P}{Q}) = \text{máx}\{gr(P), gr(Q)\}T(r,f) + o(T(r,f)).$$

En efecto, cuando $\text{gr}(Q) \geq 1$, por el teorema 2.12 (Primer teorema fundamental de Nevanlinna), $T(r,g) = T\left(r, \frac{1}{g}\right) + O(1)$. Luego, sin perdida de generalidad podemos asumir que $p \geq q$. Procedemos por inducción sobre q. Por el algoritmo de la división existen polinomios $A(X), B(X) \in \mathbb{C}(z)[X]$ tales que

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{B}{Q}, \tag{3.92}$$

donde $\text{gr}(B) < \text{gr}(Q)$ siendo $\text{gr}(A) = p - q$ y grado de B estrictamente menor que el grado de Q. Así, por las propiedades de la función característica aplicado a la ecuación (3.92), tenemos que

$$T(r,g) = T(r, \frac{P}{Q}) \leq T(r, A(f)) + T(r, \frac{B(f)}{Q(f)}) + O(1), \tag{3.93}$$

además

$$T(r, A(f)) \leq (p-q)T(r, f) + o(T(r, f)), \tag{3.94}$$

pues esta última desigualdad para polinomios ya fue probada donde $\mathrm{gr}(A) = p - q$.

Por otro lado, aplicando el Teorema **??** a la función $\dfrac{B(f)}{Q(f)}$, tenemos que

$$T\left(r, \frac{B(f)}{Q(f)}\right) = T\left(r, \frac{Q(f)}{B(f)}\right) + O(1) \leq qT(r, f) + o(T(r, f)). \tag{3.95}$$

Luego, reemplazando las ecuaciones (3.94) y (3.95) en la ecuación (3.93),

$$\begin{aligned} T(r, g) &= T\left(r, \frac{P(f)}{Q(F)}\right) \leq T(r, A(f)) + T\left(r, \frac{B(f)}{Q(f)}\right) + O(1) \\ &\leq (p-q)T(r, f) + o(T(r, f)) + q(T(r, f)) + O(1) \\ &\leq pT(r, f) + o(T(r, f)). \end{aligned}$$

Así

$$T(r, g) \leq pT(r, f) + o(T(r, f)).$$

Lo que finalmente se deseaba probar.

Nos resta probar que

$$T(r, g) \geq \max\{p, q\}T(r, f) + o(T(r, f)).$$

Como P y Q son relativamente primos, existen polinomios $C, D \in \mathbb{C}(z)[X]$ tales que

$$CP + DQ = 1.$$

Dividimos por CQ y tenemos que

$$\frac{1}{CQ} = \frac{P}{Q} + \frac{D}{C}. \tag{3.96}$$

Ahora podemos asumir que $q \geq p$, en cuyo caso tenemos

$$c = \mathrm{gr}(C) \geq \mathrm{gr}(D).$$

Como CQ es un polinomio (en X), entonces

$$T(r, C(f)Q(f)) = (c+q)T(r, f) + o(T(r, f)). \tag{3.97}$$

Esta propiedad para polinomios ya fue probada. (Ver el inicio de la demostración de este teorema).
Por las propiedades de la función característica aplicado a la ecuación (3.96), obtenemos

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{C(f)Q(f)}\right) &\leq T\left(r, \frac{P(f)}{Q(f)}\right) + T\left(r, \frac{D(f)}{C(f)}\right) + \log 2 \\ &\leq T\left(r, \frac{P(f)}{Q(f)}\right) + cT(r,f) + o(T(r,f)). \end{aligned} \tag{3.98}$$

Finalmente, combinando (3.97) y (3.98), resulta

$$\begin{aligned} (c+q)T(r,f) + o(T(r,f)) &= T\left(r, \frac{1}{C(f)Q(f)}\right) \\ &\leq T\left(r, \frac{P(f)}{Q(f)}\right) + cT(r,f) + o(T(r,f)), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$qT(r,f) + o(T(r,f)) \leq T(r,g),$$

donde $q \geq p$. $\square$

Ahora estableceremos una versión más débil del teorema de Malmquist.

Lema 3.19. *Sean $P(X)$ y $Q(X)$ polinomios relativamente primos en $\mathbb{C}(z)[X]$ y f una solución meromorfa trascendental para la ecuación $f' = \dfrac{P(f)}{Q(f)}$. Entonces, $gr(P) \leq 2$ y $gr(Q) \leq 2$.*

Demostración. Sea $d = \text{máx}\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$. Como $f' = \dfrac{P(f)}{Q(f)}$, por la proposición 3.18

$$\begin{aligned} dT(r,f) &= T\left(r, \frac{P(f)}{Q(f)}\right) + oT(R,f) \\ &= T(r,f') + o(T(r,f)) \\ &= m(r,f') + N(r,f') + o(T(r,f)). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$dT(r,f) = m(r,f') + N(r,f') + o(T(r,f)). \tag{3.99}$$

Luego

$$m(r,f') = m\left(r, \frac{f'}{f}f\right) \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r,f) + \log 2. \tag{3.100}$$

Reemplazando la desigualdad (3.100) en la ecuación (3.99), obtenemos

$$dT(r,f) \leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m(r,f)+\log 2+N(r,f')+o(T(r,f))$$

pero $N(r,f') \leq 2N(r,f)$, entonces

$$dT(r,f) \leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m(r,f)+2N(r,f)+\log 2+o(T(r,f)). \qquad (3.101)$$

Además, $m(r,f)+2N(r,f) \leq 2T(r,f)$. Por lo tanto, la ecuación (3.101) puede escribirse como

$$dT(r,f) \leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+2T(r,f)+\log 2+o(T(r,f)). \qquad (3.102)$$

Ahora por el lema 3.6 (Lema de la derivada logarítmica) con $R=2r$

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T(2r,f)+5\log^+(2r)+7\log^+\frac{1}{r}+O(1),$$

luego

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < 4\log^+ T(2r,f)+O(\log r),$$

por consiguiente

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < O\big(\log^+ T(r,f)\big)$$

y como $O(\log^+ T(r,f)) = o(T(r,f))$ tenemos

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) = o\big(T(r,f)\big) \qquad (3.103)$$

Así, reemplazando la ecuación (3.103) en la desigualdad (3.102), resulta

$$dT(r,f) \leq 2T(r,f)+o(T(r,f)),$$

por consiguiente $d \leq 2$. □

El lema probado permite reducir la demostración de la prueba del teorema de Malmquist (Teorema 3.17) al caso cuando los polinomios Q y P son cuadráticos. Para finalizar, consideramos la siguiente proposición concerniente a factorización de polinomios cuadráticos.

Proposición 3.20. *Sean* $P(X)=a_2X^2+a_1X+a_0$, $Q(X)=b_2X^2+b_1X+b_0$, *donde* a_2, a_1, a_0, b_2, b_1 *y* $b_0 \in \mathbb{C}(z)$ *y sean* $\widetilde{P}(X)=a_0X^2+a_1X+a_2$, $\widetilde{Q}(X)=b_0X^2+b_1X+b_2$.
Entonces P *y* Q *son primos relativos en* $\mathbb{C}(z)[X]$*, si y solo si,* $\widetilde{P}$ *y* $\widetilde{Q}$ *son primos relativos en* $\mathbb{C}(z)[X]$.

Demostración. Sean $c_0,\ \ c_1 \in \mathbb{C}(z)$. Basta observar que $c_1X + c_0$ es factor común de P y Q, si y solo si, $c_0X + c_1$ es factor común de $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$. □

Ahora demostraremos el teorema de Malmquist (Teorema 3.17).

Demostración. Sea f una solución meromorfa trascendental de la ecuación diferencial

$$f' = \frac{P(f)}{Q(f)}.$$

Por el lema 3.19 tenemos $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ y $Q = b_2X^2 + b_1X + b_0$. Debemos mostrar que $b_1(z) \equiv b_2(z) \equiv 0$.
Sea $g = \dfrac{1}{f}$, entonces

$$\begin{aligned}
g' &= \frac{-f'}{f^2} = -\frac{\frac{P(f)}{Q(f)}}{f^2} = -\frac{a_0 + a_1f + a_2f^2}{f^2(b_0 + b_1f + b_2f^2)} \\
&= \frac{g^2\left(a_0 + a_1\dfrac{1}{g} + a_2\dfrac{1}{g^2}\right)}{b_0 + b_1\dfrac{1}{g} + b_2\dfrac{1}{g^2}} \\
&= \frac{a_0 + a_1\dfrac{1}{g} + a_2\dfrac{1}{g^2}}{\dfrac{1}{g^2}\left(b_0 + b_1\dfrac{1}{g} + b_2\dfrac{1}{g^2}\right)} \\
&= \frac{g^2(a_0g^2 + a_1g + a_2)}{b_0g^2 + b_1g + b_2}
\end{aligned}$$

Así, g es una solución meromorfa trascendental de la ecuación diferencial

$$g' = \frac{g^2\widetilde{P}(g)}{\widetilde{Q}(g)}$$

donde $\widetilde{P}(X)$ y $\widetilde{Q}(X)$ están definidos como en la proposición 3.20.
Como $X^2\widetilde{P}(X)$ tiene grado $4 \geq 2$ y por el lema 3.19 $X^2\widetilde{P}(X)$ y $\widetilde{Q}(X)$ tienen un factor cuadrático en común. Por otro lado, $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ son primos relativos por la proposición 3.20. luego X^2 divide $\widetilde{Q}(x)$, o sea, $b_1 \equiv b_2 \equiv 0$. Por lo tanto

$$f' = a_0(z) + a_1(z)f + a_2f^2.$$

Así, la demostración del teorema de Malmquist está completa. □

El siguiente teorema es una bonita aplicación de la teoría de distribución de valores de funciones meromorfas al análisis complejo.

Teorema 3.21. *Sean f_1 y f_2 dos funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ y sean $E_j(a) = \{z \in \mathbb{C} : f_j(z) = a\}$ para $j = 1, 2$. Si $E_1(a) = E_2(a)$ para 5 valores distintos, entonces*

$$f_1 \equiv f_2 \quad \textit{o son ambos constantes.}$$

Observemos primero que las funciones $f_1(z) = e^z$ y $f_2(z) = e^{-z}$ comparten valores $-1, 0, 1, \infty$, esto muestra que 5 valores no puede ser remplazado por 4 valores. Además, es preciso aclarar que cuando hacemos mención a que $E_1(a) = E_2(a)$ está referido que $f_1(z) = a$ y $f_2(z) = a$ tienen soluciones en los mismos puntos y con las mismas multiplicidades.

Demostración. Suponga que f_1 y f_2 no son idénticamente iguales. Si alguna de ellas fuera constante, entonces la hipótesis implica que la otra función omite a al menos 4 valores y por el Teorema 3.16 la otra función sería también constante. Por lo tanto, podemos asumir que ninguna de ellas es constante. Defina $g(z) = \dfrac{1}{f_1(z) - f_2(z)}$. Como f_1 y f_2 no son idénticamente iguales, entonces g no es idénticamente ∞. Por el primer teorema fundamental de Nevanlinna

$$T(r, g) = T(r, f_1 - f_2) + O(1).$$

Luego, por las propiedades de la función Característica

$$T(r, g) \leq T(r, f_1) + T(r, f_2) + \log 2 + O(1),$$

sabemos que $\log 2 + O(1)$ es un término acotado. Por lo tanto,

$$T(r, g) \leq T(r, f_1) + T(r, f_2) + O(1). \tag{3.104}$$

Por otro lado, sean a_1, a_2, a_3 , a_4 y a_5 los 5 valores tales que

$$E_1(a_j) = E_2(a_j) \ \text{ para } \ j = 1, ..., 5.$$

Sin perdida de generalidad podemos asumir que ninguno de los a_j para $j = 1, 2, 3, 4, 5$ es infinito. Definamos

$$\overline{N}(r) = \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - a_j}\right) = \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2 - a_j}\right).$$

Luego, para $r \geq 1$

$$\overline{N}(r) \leq \overline{N}(r, g) \leq N(r, g) \leq N(r, g) + m(r, g) = T(r, g). \tag{3.105}$$

Recuerde que $N_1(r) = 2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \dfrac{1}{f'}\right)$, donde

$$2N(r,f) - N(r,f') = \int_0^r \frac{n_1(t,f) - n_1(0,f)}{t} dt + n_1(0,f) \log r$$

y

$$n_1(t,f) = 2n(t,f) - n(t,f').$$

Por otro lado, si f tiene un polo de orden p en z_0, f' tendrá un polo de orden $(p+1)$ en z_0 y $n(t,f') - n(t,f) = \bar{n}(t,f)$, entonces $N(r,f') - N(r,f) = \overline{N}(r,f)$. Luego, para $l = 1,2$ y $r \geq 1$

$$\overline{N}(r) = \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_l - a_j}\right) \geq \sum_{j=1}^{5} N\left(r, \frac{1}{f_l - a_j}\right) - N_1(r).$$

Así

$$\overline{N}(r) \geq \sum_{j=1}^{5} N\left(r, \frac{1}{f_l - a_j}\right) - N_1(r). \tag{3.106}$$

Ahora tomando $q = 5$ en el teorema 3.12

$$3T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{5} N(r,a_j) - N_1(r) + S(r,f). \tag{3.107}$$

Por lo tanto, para $l = 1,2$ y $r \geq 1$ y reemplazando la desigualdad (3.107) en la desigualdad (3.106), resulta

$$\overline{N}(r) \geq \sum_{j=1}^{5} N\left(r, \frac{1}{f_l - a_j}\right) - N_1(r,f) \geq 3T(r,f_l) - S(r,f_l).$$

Esto implica que para $l = 1,2$ y $r \geq 1$

$$3\Big(T(r,f_1) + T(r,f_2)\Big) \leq S(r,f_1) + S(r,f_2) + 2\overline{N}(r) \tag{3.108}$$

Luego, sustituyendo la desigualdad (3.105) en (3.108)

$$3T(r,f_1) + 3T(r,f_2) \leq S(r,f_1) + S(r,f_2) + 2T(r,g).$$

Remplazando la desigualdad (3.104) en esta última expresión

$$3T(r,f_1) + 3T(r,f_2) \leq S(r,f_1) + S(r,f_2) + 2T(r,f_1) + 2T(r,f_2) + O(1).$$

Como $f_1(z)$ y $f_2(z)$ no son funciones constantes como se asumió, entonces esta expresión contradice al segundo teorema fundamental de Nevanlinna (Teorema 3.1).

$\square$

El siguiente teorema es una aplicación a la Dinámica Compleja.
Sea f una función holomorfa. Decimos que un punto $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ es llamado un punto fijo de f si $f(z_0) = z_0$ y decimos que z_0 es un punto periódico de periodo $n \in \mathbb{N}$, si $f^n(z_0) = z_0$ y $f^j(z_0) \neq z_0$ para $j = 1, 2, 3, ..., n-1$. Se puede probar por el Teorema Fundamental del Álgebra que una función polinomial tiene puntos periódicos de periodo n para todo $n \geq 1$. Esto no es cierto para funciones enteras trascendentales, pues ellas no necesariamente poseen puntos fijos, como ejemplo tenemos a la función $f(z) = e^z + z$.
Recordemos que una función entera trascendental es una función entera no polinomial. Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.22. ***(Teorema de Fatou)*** *Sea f una función entera trascendental. Entonces $f(z)$ tiene al menos un punto periódico de periodo 2.*

Demostración. Consideremos la función

$$h(z) = \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}.$$

Suponga que $f(z)$ no tiene puntos periódicos de periodo 2. Así, se tiene que la función $h(z)$ no toma los valores 0 (pues $f(f(z)) \neq z$, para todo $z \in \overline{\mathbb{C}}$), 1 (si h toma el valor 1, entonces $f(f(z)) = f(z)$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}}$, en consecuencia $f(z) = z$ $\forall z$ pero $f(f(z)) \neq z$. Luego $f(z) \neq z$ $\forall z$ y esto es una contradicción) e ∞ (si h toma el valor ∞, entonces $f(z) = z$ $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, en consecuencia $f(f(z)) = f(z) = z$, o sea, $f(f(z)) = z$ y esto contradice que $f(f(z)) \neq z$ $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$). Luego, por el teorema 3.16 $h(z)$ es constante.
Por otro lado, consideremos

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

y

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

dos expansiones en serie de Taylor alrededor de z_0 de $f(z) - z$ y de $f(f(z)) - z$ respectivamente. Para que el cociente entre estas funciones sea una función constante, debe ocurrir que

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_m}{b_m},$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Note que

$$F(z) = f(z) - z \to a_0 = F(z_0) = f(z_0) - z_0,$$

$$F'(z) = f'(z) - 1 \to a_1 = F'(z_0) = f'(z_0) - z_0,$$

$$G(z) = f(f(z)) - z \to b_0 = G(z_0) = f(f(z_0)) - z_0,$$

$$G'(z) = f'(f(z))f'(z) - 1 \to b_1 = G'(z_0) = f'(f(z))f'(z_0) - 1,$$

por lo tanto, multiplicando tenemos que $a_1 b_0 \neq a_0 b_1$ luego $h(z)$ no puede ser constante lo cual es una contradicción $\square$

Capítulo 4

Apéndice

En este capítulo se desarrollan algunos conceptos y resultados auxiliares, los cuales son necesarios como apoyo para el desarrollo de algunos resultados particulares del trabajo elaborado.

4.1. Símbolos de orden

Las siguientes notaciones y propiedades de las relaciones asintóticas son muy útiles en varios contextos.

a) Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ tal que $0 \in \overline{\Omega}$ y sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones definidas en $\Omega \backslash \{0\}$. Entonces la relación asintótica

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \in \Omega$$

significa que existe una constante positiva K tal que $|f(z)| \leq K|g(z)|$, para todo $z \in \Omega$.

b) Sea Ω y $f(z)$, $g(z)$ como en el item anterior. Entonces la relación asintótica

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \to z_0, \quad z, z_0 \in \Omega$$

significan que existen constantes positivas K y ρ tales que

$$|f(z)| \leq K|g(z)|$$

para todo $z \in \Omega$ y $0 < |z - z_0| < \rho$.

En este caso se dicen que f es O grande de g cuando $z \to z_0$.

c) Sea Ω, $f(z), g(z)$ como en el primer item. Entonces la relación asintótica

$$f(z) = 0(g(z)), \quad z \to z_0, \quad z, z_0 \in \Omega$$

significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que $|f(z) \leq \epsilon|g(z)|$, para todo $z \in \Omega$, con $0 < |z - z_0| < \rho$.
En caso se dice que f es o pequeña de g cuando $z \to z_0$.

Los símbolos de orden O y o llamados también **símbolos de Landau,** se pueden definir también de la siguiente forma:

Supongamos que $g(x) \neq 0$ en $|x_0 - x| < x_r$ para algún $x_r > 0$ y consideremos el limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Entonces, por ejemplo se dice que f es O grande de g cuando $x \to x_0$ si el limite existe y es finito.
Ahora damos algunos resultados que relacionan las dos definiciones.

Teorema 4.1. *Sean $g(x) \neq 0$ en $|x - x_0| < x_r$ con $x_r > 0$ y $f(x)$ dos funciones.*

1. *Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y es finito, entonces $f = O(g)$ cuando $x \to x_0$.*

2. *Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces $f = o(g)$ cuando $x \to x_0$*

Demostración. 1. Supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = M$. De la definición de limite para todo $\epsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| - |M| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - M\right| < \epsilon,$$

de donde se sigue que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - M\right| < \epsilon + M,$$

tomando $k = \epsilon + M$ se tiene que $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq k$.
2. Es inmediato de la definición de limite. □

Proposición 4.2. *Damos a conocer algunas propiedades cuya demostración se deducen de la definición*

i. *O(O(f))=O(f).*

ii. *o(o(f))=o(f).*

iii. *O(fg)=O(f)O(g).*

iv. *O(f)o(g)=o(fg)O(g).*

v. *O(f)+O(f)=O(f).*

vi. *o(f)+o(f)=o(f).*

vii. *o(f)+O(f)=O(f).*

viii. *O(o(f))=o(O(f))=o(f)*

Si se tiene una relación de orden entre dos funciones f y g una pregunta natural es si se hereda o no la misma propiedad o no para derivadas o una integral.

Observación 4.3. En el contexto real si $f = O(g)$ no necesariamente se sigue que $f' = O(g')$, por ejemplo $f(x) = x + \sin(e^x)$ y $g(x) = x + 1$ no cumplen con la propiedad pues la derivada de f' no es acotada. Sin embargo desde el punto de vista complejo es posible establecer cierto tipo de relación para los símbolos de orden en referencia a la derivada de funciones. Respecto a la integral la situación es diferente.

4.2. Resultados auxiliares

Teorema 4.4. *Sea D una región simplemente conexa con frontera Γ y sea $u(z)$ una función de clase C^2 en algún dominio conteniendo a $\overline{D}$ excluyendo un conjunto finito $\{c_1, c_2, ..., c_q\} \subset \overline{D}$. En una vecindad de estos puntos $u(z)$ tiene la forma*

$$u(z) = d_k \log|z - c_k| + u_k(z),$$

donde d_k son constantes y $u_k(z)$ son funciones de clase C^2 en una vecindad de los puntos c_k con $k = 1, 2, 3, ..., q$. Entonces

$$u(z) + \frac{1}{2\pi}\int\int_D G(\zeta, z)\Delta u(\zeta)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(\zeta)\frac{\partial G}{\partial n} - \sum_{c_k \in D} d_k G(c_k, z),$$

*para $z \in D$ con $z \neq c_1, ..., c_q$, donde $G(\zeta, z)$ es la función de **Green** y esta definida para $\zeta \in \overline{D}$, $z \in \overline{D}$, $\zeta \neq z$ y satisface las siguientes condiciones* *i. Para cada* $z \in D$

$$G(\zeta, z) = \log \frac{1}{|\zeta - z|} + h_z(\zeta),$$

donde $h_z(\zeta)$ *es una función armónica en* D *y continua en* $\overline{D}$

ii. Si $\zeta \in \Gamma$, $z \in \overline{D}$, $\zeta \in \overline{D}$ *y* $z \in \Gamma$, *entonces* $G(\zeta, z) = 0$.

La demostración de este teorema puede ser encontrado en [3].

Bibliografía

[1] Ahlfors, L.- *Complex Analysis. 3a. ed*, McGraw-hill Book, New york, 1978.

[2] Alexandre Eremenko.- *Ahlfors' contribution to the theory of meromorphic functions. In Lectures in memory of Lars Ahlfors (Haifa, 1966).* Volume 14 of Israel Math. Conf. Proc., pages 41-63. Bar-Llan Univ., Ramat Gan, 2000.

[3] Anatoly A. Goldberg and Iossif V. Ostrouskii.- *Value distribution of meromorphic functions, volume 236 of Traslations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. Traducido de la versión original Rusa de 1970 por Mikhail Ostrovskii, Con un apéndice de Alexandre Eremenko y James K. Langley.

[4] Einar Hille.- *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain.* Jhon Wiley and Sons, New-York 1976.

[5] Fernández, P.- *Una variable compleja.* PUCP-2008.

[6] Jonh B. Conway.- *Function of one Complex Variable.* Graduate Text in Mathemaics. Springer-Verlag, New York, 1973.

[7] Hayman, W,H.- *Meromorphic Functions.* Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1964.

[8] Ilpo Laine.- Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[9] Lee A. Rubel.- *Entire and Meromorphic Functions.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1996. Con la cooperación de James E. Colliander.

[10] LINS NETO, A.- *Funcões de uma Variável Complexa.* Rio de Janeiro: Proyecto Euclides-IMPA, 1993.

[11] LIMA, E.- *Curso de Analise, Vol.2.* Projeto Euclides vol. 13, IMPA, Rio de Janeiro. 1970.

[12] NOGUCHI, JUGIRO.- *Introduction to Complex Analysis, vol. 168.* American Mathemathical Society. 1998.

[13] SCHIFF, J.L.- *Normal Families.* Springer-Verlag. 1993.

[14] SERGE LANG.- *Complex Analysis, volume 103 of Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 1992.

[15] WILLIAM CHERRY AND ZHUAN YE.- *Nevanlinna's theory of value distribution.* Springer Monographs in mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. The second main theorem and its error terms.

[16] W, RUDIN.- *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, 2005.