

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS



**TITULO**

**Modelo de colas con vacaciones e interrupciones en el servidor  
bajo procesos de Lévy**

**TESIS PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAGISTER EN  
MATEMÁTICAS**

**Presentado por:**

**Wilmer Jhonny Atoche Díaz**

**Asesor: Dr. Luis Valdivieso Serrano**

**Miembros del jurado:**

**Dr. Jonathan Farfán Vargas**

**Dr. Johel Beltrán Ramírez**

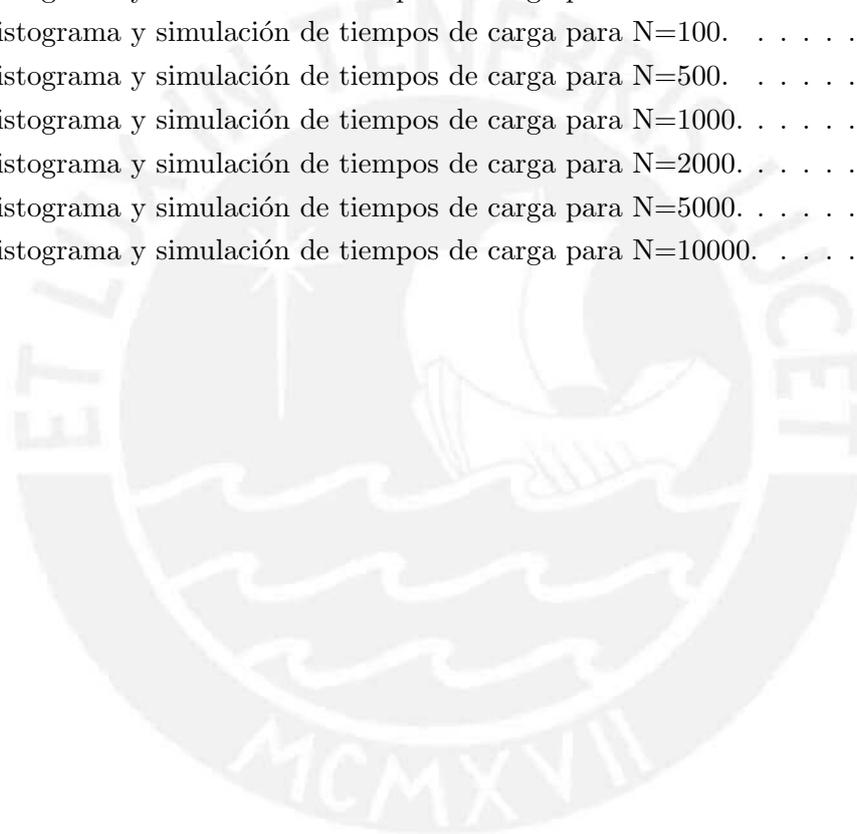
Lima, 2016

# Índice general

Índice de figuras	3
Índice de tablas	4
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Proceso básico de colas . . . . .	7
2.2. Terminología y notación . . . . .	8
2.3. Proceso de nacimiento y muerte . . . . .	10
2.4. Interrupciones por fallas y vacaciones en el servidor . . . . .	13
<b>3. Procesos de Lévy</b>	<b>14</b>
3.1. Procesos estocásticos . . . . .	14
3.2. Procesos de Lévy . . . . .	15
3.3. Procesos de Lévy espectralmente positivos . . . . .	18
3.4. Colas con entradas de Lévy . . . . .	19
<b>4. Modelo</b>	<b>21</b>
4.1. Formulación del modelo . . . . .	21
4.2. La distribución de estado estacionario . . . . .	22
4.3. La distribución transitoria . . . . .	29
4.4. Descomposición estocástica . . . . .	32
<b>5. Simulación</b>	<b>35</b>
5.1. Algoritmo para la simulación . . . . .	35
5.2. Caracterización . . . . .	40
<b>6. Conclusiones</b>	<b>42</b>
<b>A. Transformada de Laplace-Stieltjes</b>	<b>44</b>
<b>B. Código</b>	<b>45</b>
Bibliografía	47

## Índice de figuras

2.1. Proceso básico de colas. . . . .	7
2.2. Diagrama de tasas: Nacimiento y muerte . . . . .	11
2.3. Diagrama de tasas $M/M/1 : DG/K/\infty$ . . . . .	12
5.1. Histograma y simulación de tiempos de carga para $N=50$ . . . . .	36
5.2. Histograma y simulación de tiempos de carga para $N=100$ . . . . .	37
5.3. Histograma y simulación de tiempos de carga para $N=500$ . . . . .	37
5.4. Histograma y simulación de tiempos de carga para $N=1000$ . . . . .	38
5.5. Histograma y simulación de tiempos de carga para $N=2000$ . . . . .	38
5.6. Histograma y simulación de tiempos de carga para $N=5000$ . . . . .	39
5.7. Histograma y simulación de tiempos de carga para $N=10000$ . . . . .	39



## Índice de tablas

5.1. Media y varianza para $N=50$ . . . . .	36
5.2. Media y varianza para $N=100$ . . . . .	37
5.3. Media y varianza para $N=500$ . . . . .	37
5.4. Media y varianza para $N=1000$ . . . . .	38
5.5. Media y varianza para $N=2000$ . . . . .	38
5.6. Media y varianza para $N=5000$ . . . . .	39
5.7. Media y varianza para $N=10000$ . . . . .	39



## Capítulo 1

### Introducción

Los modelos de colas tradicionales se concentran en el comportamiento de los clientes, desde que arriban al sistema, esperan ser atendidos, se atienden y salen del sistema. Los clientes entran y esperan a ser atendidos en una fila de espera (cola), cuando el servidor está ocupado. Siempre se asume que el servidor que se desocupa está disponible para atender al primero de la fila de espera.

El presente trabajo se basa en los estudios de Kella et al. (2010) y de Wu et al. (2015), centrándose en el estudio de la carga de trabajo en el servidor, considerando llegadas, salidas, fallas y vacaciones en el servidor. Esta forma de estudiar el comportamiento de la carga de trabajo en el servidor hace que el modelo aplicado se ajuste mejor a la realidad.

El modelo de  $W_t$  es la representación en tiempo de la carga de trabajo en el tiempo  $t$  y se define por:

$$W_t = W_0 + X_t - rt + \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i, \quad t \geq 0,$$

donde:

$W_0$  es la carga inicial de trabajo,

$X_t$  es la carga de trabajo que llega hasta el instante  $t$ ;  $\{X_t\}$  es un proceso de Lévy,

$r$  es la tasa de servicio constante,

$\sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i$  es la suma de todos los tiempos de falla del servidor, y

$\sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i$  es la suma de todos los tiempos de vacancia del servidor.

La tesis se encuentra dividida en cinco capítulos.

En el segundo capítulo, denominado Preliminares, se describe un proceso básico de colas para definir los elementos que lo componen, la terminología y la notación que usamos en un sistema de colas, luego bajo el modelo de nacimiento y muerte se desarrolla el modelo M/M/1/K, que nos muestra en forma estable e ideal las cantidades fundamentales de un sistema de colas. Finalmente, se definen las interrupciones del servicio por fallas y vacaciones en el servidor.

En el tercer capítulo, denominado Procesos de Lévy, se presenta la teoría de procesos estocásticos, procesos de Lévy, procesos de Lévy espectralmente positivos y colas con entradas de Lévy, las definiciones y teoremas nos permiten modelar posteriormente.

En el cuarto capítulo, es donde se formula el modelo, se desarrolla el estudio de la distribución de estado estacionario, la distribución transitoria y la descomposición estocástica.

En el quinto capítulo, denominado Simulación, se ilustra la simulación de la carga de trabajo basado en un proceso de Lévy de incrementos dados por una distribución gamma, la tasa de servicio permanece constante, las fallas y vacancias son procesos de renovación. En este capítulo también se muestra la caracterización del modelo, así como su respectiva media y varianza. El sexto y último capítulo presenta las conclusiones y las futuras investigaciones que se podrían realizar a partir del presente trabajo.



## Capítulo 2

### Preliminares

Los sistemas de colas son de uso común en nuestra vida cotidiana, si vamos al supermercado, al banco, al hospital u otro sistema de servicio similar. Siempre nos preguntamos; ¿cuántos clientes existen en el sistema de colas?, ¿cuánto tiempo estaré en el sistema de colas?, ¿cuánto tiempo pasa antes de que me empiecen a atender? o ¿cuánta cola (clientes esperando el servicio) existe?.

Los clientes que entran al sistema de colas, son generados a través del tiempo en una fuente de entrada de acuerdo a un proceso estocástico; luego, los clientes en el sistema esperan a ser atendidos por los servidores siguiendo una disciplina de atención.

Las siguientes definiciones están basadas en Hillier and Liberman (2010) y en Winston (2005)

#### 2.1. Proceso básico de colas

El Proceso básico para la mayoría de sistemas de colas es el siguiente. Los clientes que requieren un servicio se generan en el tiempo en una fuente de entrada. Luego, entran al sistema y se unen a una cola. En determinado momento se selecciona un miembro de la cola, siguiendo alguna regla llamada disciplina de la cola, luego se procede con el servicio y el cliente sale del sistema de colas.

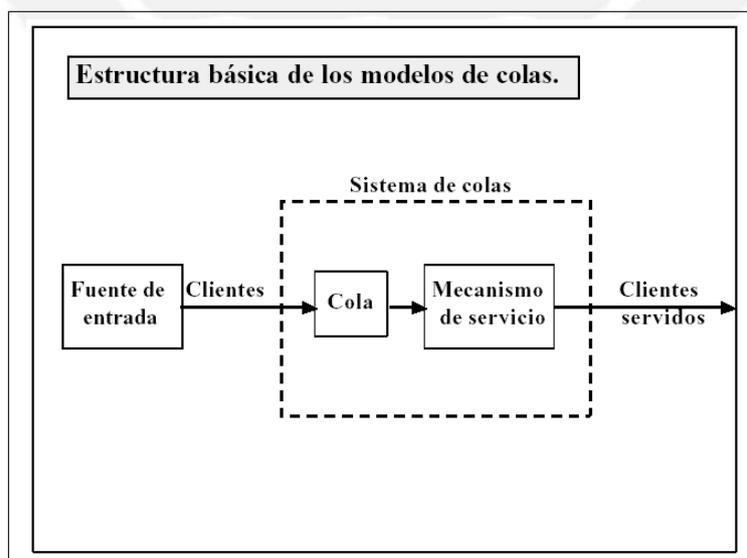


Figura 2.1: Proceso básico de colas.

**Definición 2.1.1** *La Fuente de entrada es la población de donde se generan los clientes hacia el sistema de colas. La fuente de entrada tiene por característica principal el tamaño de la población de donde se generan los clientes que pueden requerir servicio en determinado momento, es decir, es el número de clientes potenciales. El tamaño de la población que define la fuente de entrada puede ser infinito o finito, de modo que también se puede decir que la fuente de entrada es ilimitada o limitada.*

*Es importante especificar el patrón estadístico mediante el cual se generan los clientes en el tiempo. El supuesto normal es que se generan de acuerdo a un proceso de Poisson, esto corresponde a llegadas aleatorias pero con cierta tasa media fija y sin importa cuantos clientes existen en el sistema. Un supuesto equivalente es que la distribución de probabilidad de tiempo entre llegadas consecutivas es exponencial.*

**Definición 2.1.2** *La Cola es donde los clientes esperan antes de recibir servicio. Una cola se caracteriza por el número máximo permisible de clientes que puede admitir, este número puede ser finito o infinito, lo que define que una cola puede ser finita o infinita. El supuesto de una cola infinita es el estándar de la mayoría de modelos.*

**Definición 2.1.3** *La Disciplina de cola se refiere al orden con el que se seleccionan los clientes para su atención. En los modelos normalmente se establece la disciplina FIFO (First In First Out), a menos que se establezca de otra manera.*

**Definición 2.1.4** *El Mecanismo de servicio consiste en una o más estaciones de servicio, cada una de ellas con uno o más canales de servicio paralelos, llamados servidores. El cliente puede recibir el servicio en un canal de servicio, donde un servidor le brinda el servicio completo o existe una secuencia de servicios, brindados por varios servidores, que completan el servicio. Los modelos elementales suponen una estación de servicio, ya sea con un servidor o con un número finito de servidores.*

*La característica principal es el tiempo total de servicio, desde el inicio del servicio hasta su terminación. Este tiempo es llamado tiempo de servicio o duración del servicio. Un modelo de un sistema de colas debe especificar la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio de cada servidor, aunque es común suponer la misma distribución para todos los servidores. La distribución que más se usa en la práctica es la distribución exponencial.*

## 2.2. Terminología y notación

Los sistemas de colas se etiquetan de la siguiente manera:

$$A/B/s : D/E/F$$

$A$  : Denota la distribución de tiempos entre llegadas, es decir, se usa como variable aleatoria el tiempo entre las llegadas de dos clientes consecutivos

$B$  : Denota la distribución de tiempos de servicio, es decir, se usa como variable aleatoria el

tiempo de servicio del cliente

$s$  : Número de servidores en paralelo, es donde se realiza el servicio. Estos son similares y el cliente realiza el servicio en uno de ellos

$D$  : Disciplina de la cola, se refiere el orden como se atienden los clientes

$E$  : Capacidad del sistema, es el máximo número de clientes que en simultaneo podrían estar en el sistema de colas

$F$  : Tamaño de la población de la fuente de entrada, se refiere a la población de donde se generan los clientes que llegan al sistema de colas.

Se utilizará la siguiente terminología estándar:

Estado del sistema = número de clientes en el sistema

$N(t)$  = número de clientes en el sistema de colas en el tiempo  $t$

$P_n(t)$  = probabilidad de que  $n$  clientes estén en el sistema en el tiempo  $t$

$\lambda_n$  = tasa media de llegadas de nuevos clientes cuando hay  $n$  clientes en el sistema.

$\mu_n$  = tasa media de servicio cuando hay  $n$  clientes en el sistema.

$s$  = número de servidores en paralelo (canales de servicio)

En un sistema de colas utilizando las cadenas de Markov de estado estacionario e independiente del tiempo, es decir se hace  $N(t) = n$ , luego se obtiene la función de probabilidad  $P_n$  y con esta se calculan las cuatro cantidades fundamentales.

$L$  : Número esperado de clientes en el sistema, esta cantidad incluye el número total de clientes en el sistema, los que esperan en cola y los que se están atendiendo.

$$L = \mathbb{E}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

$L_q$  : Longitud esperada de la cola, representa el número de clientes en fila de espera.

$$L_q = \mathbb{E}(n - s) = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) P_n$$

$W$  : Tiempo esperado en el sistema, incluye el tiempo de espera más el tiempo de servicio, es decir, todo el tiempo que el cliente pasa en el sistema, desde su arribo hasta el fin de la atención.

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$W_q$  : Tiempo de espera promedio en la cola, representa el tiempo que el cliente pasa esperando, desde su arribo hasta antes del inicio de la atención.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Donde  $\bar{\lambda}$  : Tasa de llegadas promedio,

$$\bar{\lambda} = \mathbb{E}(\lambda_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mathbf{P}_n$$

### 2.3. Proceso de nacimiento y muerte

La mayoría de modelos elementales de colas suponen que las entradas (llegadas de clientes) y las salidas (clientes que salen) del sistema ocurren de acuerdo a un proceso de nacimiento y muerte. El termino nacimiento se refiere a la llegada de un cliente al sistema de colas y el termino muerte se refiere a la salida del sistema de un cliente servido o atendido. El estado del sistema en el tiempo  $t$ , denotado por  $N(t)$  cambia en términos probabilísticos al aumentar el tiempo  $t$ . Los siguientes supuestos describen de manera más precisa el proceso de nacimiento y muerte.

**Supuesto 1.** Dado  $N(t) = n$ , la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para el próximo nacimiento es exponencial con parámetro  $\lambda_n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

**Supuesto 2.** Dado  $N(t) = n$ , la distribución de probabilidad actual del tiempo que falta para la próxima muerte es exponencial con parámetro  $\mu_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

**Supuesto 3.** La variable aleatoria del supuesto 1 (el tiempo que falta para el próximo nacimiento) y la variable aleatoria del supuesto 2 (el tiempo que falta para la próxima muerte), son mutuamente independientes.

#### Análisis del proceso de nacimiento y muerte

Se denota el número de veces que el sistema entra al estado  $n$  y el número de veces que sale de él.

$E_n(t)$  = número de veces que el proceso entra al estado  $n$  hasta el tiempo  $t$ .

$L_n(t)$  = número de veces que el proceso sale del estado  $n$  hasta el tiempo  $t$ .

Como los dos tipos de eventos se deben alternar, estos números a lo más difieren de 1, es decir:

$$|E_n(t) - L_n(t)| \leq 1$$

Al dividir entre  $t$

$$\left| \frac{E_n(t)}{t} - \frac{L_n(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$$

y haciendo que  $t \rightarrow \infty$  se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{E_n(t)}{t} - \frac{L_n(t)}{t} \right| = 0$$

se puede obtener la tasa media de cada uno de los eventos.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_n(t)}{t}$  = tasa media a la que el proceso entra al estado  $n$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_n(t)}{t}$  = tasa media a la que el proceso sale del estado  $n$

Estos resultados conducen al siguiente principio:

**tasa de entrada=tasa de salida,**

para cualquier estado  $n$ .

La siguiente figura muestra el diagrama de tasas, usando el modelo de nacimiento y muerte, para el caso general.

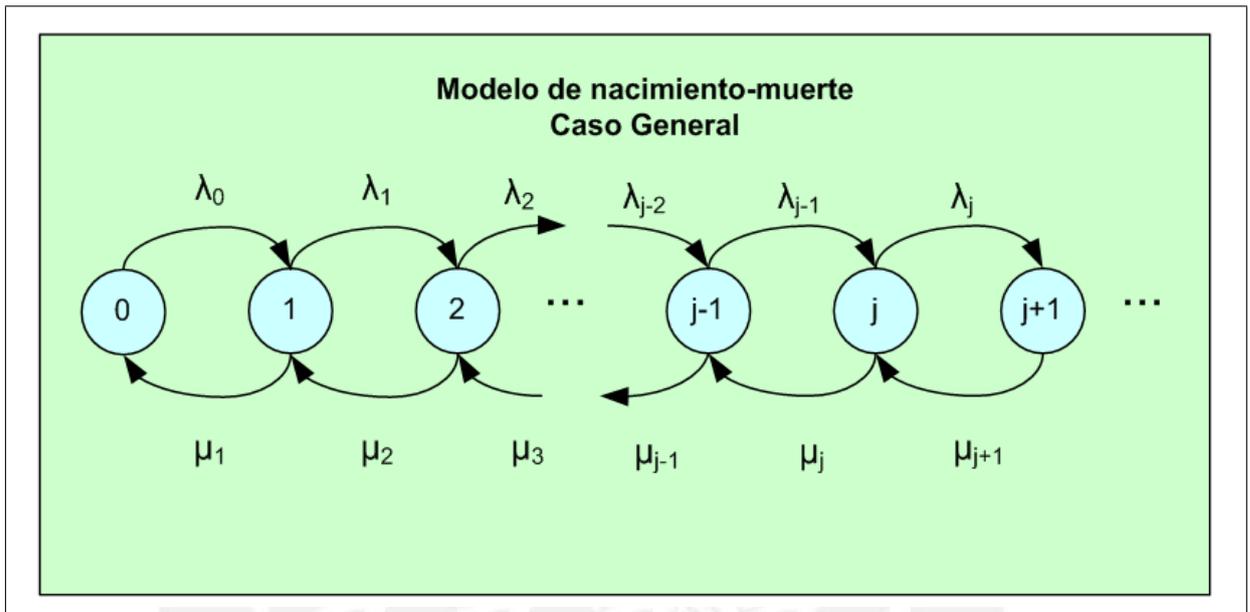


Figura 2.2: Diagrama de tasas: Nacimiento y muerte

Usando el diagrama de tasas general de la figura anterior; para cada nodo se puede obtener las ecuaciones de balance:

$$\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)P_n$$

$$P_n = C_n P_0$$

donde;

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}$$

Se puede obtener fácilmente que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

de donde, se puede calcular  $P_0$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n}$$

A manera de ejemplo, aplicaremos el proceso de nacimiento y muerte para el desarrollo del modelo  $M/M/1 : DG/K/\infty$ .

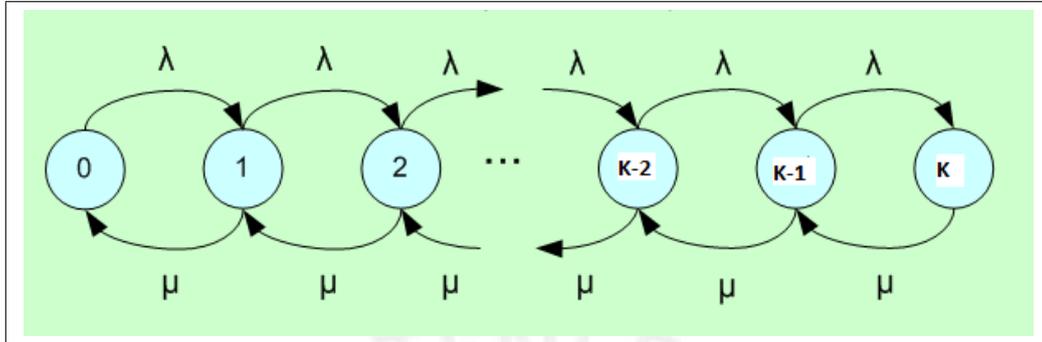


Figura 2.3: Diagrama de tasas  $M/M/1 : DG/K/\infty$ .

Se tiene un sistema de colas de un servidor ( $s = 1$ ) y capacidad finita ( $K$ ), esto hace que el sistema rechace los clientes cuando este está lleno, es decir desde el punto de vista del sistema de nacimiento y muerte, la tasa media de llegada se hace cero y la tasa de servicio permanece invariante, nosotros consideraremos las tasas constantes, es decir:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n \leq K - 1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases}, n \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\mu_n = \mu ; n \in \mathbb{N}$$

Se sabe que  $P_n = C_n P_0$ , donde  $C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n, n \leq K, n \in \mathbb{N}$  y  $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^K C_n}$ , desarrollando se tiene:

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

Luego, la probabilidad de que existan  $n$  clientes en el sistema es

$$P_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^n & ; \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

Se puede tener entonces las cantidades fundamentales para el modelo  $M/M/1/K$ .

$L$  : Número esperado de clientes en el sistema,

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$L_q$  : Número esperado de clientes en cola, se tiene la relación  $L_q = L - (1 - P_0)$  y reemplazando se tiene

$$L_q = \begin{cases} \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{K(1-\rho)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \frac{K(K-1)}{2(K+1)} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

donde  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ . También se puede tener  $\bar{\lambda}$  :tasa de llegadas promedio, donde  $\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_K)$  y usando las formulas de Little se obtienen  $W$  : tiempo esperado en el sistema (incluye el tiempo de servicio),  $W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$  y  $W_q$  :tiempo de espera en la cola,  $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$ .

#### 2.4. Interrupciones por fallas y vacancias en el servidor

Los sistemas de colas tradicionales consideran como una interrupción del servicio cuando este no es concluido para un cliente determinado; esto puede ocurrir porque la disciplina del sistema esta configurada de tal forma que las interrupciones ocurren por el desplazamiento de un cliente de mayor prioridad a otro de menor prioridad, en este caso el servidor no deja de atender, sólo cambia de tipo de cliente.

En el presente estudio se consideran; las interrupciones por falla en el servidor, cuando este deja de atender teniendo carga de trabajo, debe ser reparado, desplazando el servicio de los clientes a un tiempo después, cuando vuelva a estar operativo. Es importante señalar que al ser un sistema de colas fluido, la carga de trabajo sigue llegando y se sigue acumulando en el sistema. Por otro lado, las interrupciones por vacancia del servidor ocurren por intervalos de tiempo donde el servidor inicia la vacancia por no tener carga de trabajo, es decir no hay clientes que generen la carga de trabajo; estas vacancias, pueden ser, en intervalos de tiempo pequeños o prolongados ,como el sistema de colas es fluido, cuando el servidor regresa a seguir con la atención, encuentra carga de trabajo acumulado.

A manera de ejemplo podemos mencionar un proceso productivo, donde las unidades llegan a un determinado puesto de trabajo compuesto por una máquina y un operario, las unidades se van procesando continuamente, pero durante los intervalos de trabajo, la máquina puede tener interrupciones por fallas de la máquina, debido a que necesita mantenimiento preventivo o correctivo. Así también, durante los periodos de trabajo, el puesto de trabajo termina su carga de trabajo y el servidor se podría tomar una vacancia, es decir, entraría a un periodo de interrupción por vacancia, mientras espera el fin de las vacancias, los trabajos siguen llegando al sistema de colas. Este proceso se repite a lo largo de toda la jornada laboral en el puesto de trabajo.

## Capítulo 3

# Procesos de Lévy

En este capítulo daremos una breve introducción a los procesos de Lévy que son los procesos que fundamentalmente guían nuestro modelo de colas. Para ello partiremos asumiendo que trabajaremos sobre un mismo espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , en el cual  $\Omega$  es un espacio muestral,  $\mathcal{F}$  es un  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  y  $\mathbb{P}$  una medida de probabilidad.

Las siguientes definiciones, teoremas, proposiciones están basados en Applebaum (2004), Papoulis and Unnikrishna (2002), Grimmett and Stirzaker (1992), Valdivieso (2007), Kella and Whitt (1992), Sato (2002) y Debicki and Mandjes (2015)

### 3.1. Procesos estocásticos

**Definición 3.1.1** *Un proceso estocástico  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  es una familia de variables o vectores aleatorios indexados por el parámetro  $t \in \mathbb{T}$  y definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*

El conjunto de índices  $\mathbb{T}$  en la definición anterior es en general arbitrario, pero en nuestro trabajo asumiremos que es  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$  o  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ , dependiendo si los índices, que interpretaremos como tiempos, se miden de manera continua o discreta. En general, los elementos de un proceso  $X_t$  los consideraremos como vectores aleatorios que toman valor en  $\mathbb{R}^d$  y cuya distribución de probabilidades viene dada por  $P_{X_t} = P \circ X_t^{-1}$ .

Con la finalidad de mantener un control sobre la información que el proceso va revelando conforme el tiempo transcurra, introduciremos la siguiente definición.

**Definición 3.1.2** *Una filtración es una familia de sub- $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ,  $\forall 0 \leq s \leq t$ .*

Será usual añadir a un espacio probabilístico una filtración, en cuyo caso llamaremos a  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  un espacio filtrado.

**Definición 3.1.3** *Se dice que un proceso estocástico  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  es adaptado a una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$  si para todo  $t \geq 0$  se tiene que la variable aleatoria  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.*

**Definición 3.1.4** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  un espacio filtrado. Diremos que una variable aleatoria  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  es un tiempo de parada con respecto a  $\{\mathcal{F}_t\}$  si  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

**Definición 3.1.5** *Un proceso estocástico  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  adaptado a una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$  es una martingala si se cumple que:*

1.  $E(|X_t|) < \infty, \forall t \geq 0$ .
2.  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$  c.s.,  $\forall 0 \leq s < t$ .

### 3.2. Procesos de Lévy

#### Definición 3.2.1 (Proceso de Lévy)

Decimos que un proceso estocástico  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  es de Lévy si cumple las siguientes propiedades:

- a)  $\mathbf{X}$  tiene trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda (càdlàg).
- b)  $\mathbf{X}$  es estocásticamente continua; es decir, para todo  $s, t \geq 0$ :

$$X_{s+t} - X_s \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{conforme } t \rightarrow 0,$$

donde  $\xrightarrow{\mathcal{P}}$  denota convergencia en probabilidad.

- c)  $X_0 = 0$ , y  $\mathbf{X}$  tiene incrementos independientes; es decir, si se consideran los instantes de tiempo arbitrarios  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes.

- d) Si  $t > s \geq 0$ , la distribución del incremento  $X_t - X_s$  es homogénea en el tiempo; es decir, ella depende únicamente del incremento de tiempo  $t - s$  y no de los tiempos en sí:

$$X_t - X_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_{t-s},$$

donde  $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$  denota igualdad en distribución.

Note que la definición anterior incluye a la de un movimiento Browniano; es decir, de un proceso estocástico continuo c.s.  $\mathbf{B} = \{B_t\}$  que satisface b), c) y d) con distribución normal  $B_{s+t} - B_s \sim N(0, tI_d)$  en los incrementos. Otro proceso involucrado en esta definición es el de un proceso de Poisson  $\{N_t\}$ , el cual satisface a), c) y d) con incrementos  $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t - s))$  que siguen una distribución de Poisson de tasa  $\lambda(t - s) > 0$ . Un proceso de Lévy generaliza estos procesos permitiendo modelar la distribución de los incrementos, las cuales no necesariamente son normales ni tienen distribución de Poisson. Todas las siguientes distribuciones sirven para tal propósito.

**Definición 3.2.2** Una medida de probabilidad  $\mu$  en  $\mathbb{R}^d$  es infinitamente divisible si para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , existe una medida de probabilidad  $\mu_n$  en  $\mathbb{R}^d$  tal que  $\mu = \mu_n^{*n}$ , donde  $\mu_n^{*n}$  denota la  $n$ -ésima convolución de  $\mu_n$  consigo misma.

Además, diremos que un vector aleatorio  $X$  con valores en  $\mathbb{R}^d$  es infinitamente divisible si para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ :

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^n X_i ,$$

donde  $X_1, \dots, X_n$  son vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos.

La relación entre estas distribuciones y los procesos de Lévy se manifiesta en el siguiente teorema.

### Teorema 3.2.1

- (i) Si  $\mathbf{X} = \{X(t)\}$  es un proceso de Lévy, entonces  $P_{X(t)}$  es infinitamente divisible y  $P_{X(t)} = (P_{X(1)})^t$ , donde  $(P_{X(1)})^t$  denota a la única distribución asociada a la función característica  $(\hat{P}_{X(1)})^t$ .
- (ii) Recíprocamente, si  $\mu$  es una medida de probabilidad infinitamente divisible en  $\mathbb{R}^d$  entonces, existe un proceso de Lévy  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  tal que  $\mu = P_{X(1)}$ .
- (iii) Si  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  e  $\mathbf{Y} = \{Y_t\}$  son procesos de Lévy tales que  $P_{X(1)} = P_{Y(1)}$ , entonces  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.

Demostración: Ver Sato (2002) □

Veamos ahora un resultado central en la teoría de procesos de Lévy conocido como el teorema de representación de Lévy-Khintchine.

### Teorema 3.2.2

- (i) Si  $\mu$  es una medida de probabilidad infinitamente divisible en  $\mathbb{R}^d$ , entonces su transformada de Fourier o función característica viene dada por:

$$\hat{\mu}(\vartheta) = \exp \left( -\frac{1}{2} \vartheta^\top \Sigma \vartheta + i \vartheta^\top \gamma + \int (\exp(i \vartheta^\top x) - 1 - i \vartheta^\top x \mathbf{1}_{\|x\| \leq 1}(x)) \nu(dx) \right), \quad (3.1)$$

donde  $\Sigma$  es una matriz simétrica  $d \times d$  no-negativa definida,  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  y  $\nu$  es una medida en  $\mathbb{R}^d$  que satisface:

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{y} \quad \int (\|x\|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty. \quad (3.2)$$

- (ii) La representación  $(\Sigma, \gamma, \nu)$  para  $\hat{\mu}$  in (3.1) es única.
- (iii) Recíprocamente, si  $\Sigma$  es una matriz simétrica  $d \times d$  no-negativa definida,  $\gamma \in \mathbb{R}^d$  y  $\nu$  es una medida en  $\mathbb{R}^d$  que satisface (3.2), entonces existe una medida de probabilidad  $\mu$  en  $\mathbb{R}^d$ , cuya función característica es dada por (3.1).

Demostración: Ver Sato (2002) □

**Definición 3.2.3** La tripleta  $(\Sigma, \gamma, \nu)$  en el teorema 3.2.2 se denomina la tripleta generadora de  $\mu$  y  $\nu$  es conocida como la medida de Lévy de  $\mu$ .

Los teoremas 3.2.1 y 3.2.2 en su conjunto nos permiten identificar plenamente cualquier proceso de Lévy  $\mathbf{X} = \{X_t\}$ . De acuerdo a estos resultados  $X_t$  tiene una distribución infinitamente divisible  $\mu^t$ , donde  $\mu = P_{X(1)}$ , y recíprocamente, si  $\mu$  es una medida de probabilidad

infinitamente divisible, entonces existe un proceso de Lévy  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  tal que  $X_t$  tiene distribución  $\mu^t$ . En tal sentido, nosotros nos referiremos indistintamente a  $(\Sigma, \gamma, \nu)$  como la tripleta generadora de  $\mu$  o  $\mathbf{X}$ , cuando  $\mu$  sea la única medida de probabilidad infinitamente divisible asociada a  $\mathbf{X}$ . Más aún, toda propiedad sobre  $\mu$  será naturalmente extendida a  $\mathbf{X}$  si  $P_{X(1)}$  satisface tal propiedad.

Observemos en el teorema de Lévy-Khintchine que si  $\nu \equiv 0$ , entonces  $\mu$  corresponde a una distribución normal con media  $\gamma$  and matriz de covarianza  $\Sigma$ . El proceso de Lévy asociado  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  es luego Gaussiano y satisface que  $X(s+t) - X(s) \sim N(\gamma t, t\Sigma)$ ,  $\forall s, t \geq 0$ . Estos procesos junto con el trivial  $\{\gamma t\}$  resultan ser los únicos miembros de la familia de procesos de Lévy que son c.s. continuos. De otro lado, si  $\Sigma = 0$  el proceso de Lévy asociado a  $\mu$  es comúnmente referido como un proceso de saltos puros, aún cuando su dinámica sea continuamente guiada por el término de drift  $\gamma$ . Como veremos en el siguiente resultado, todo proceso de Lévy es una combinación de estos dos tipos de procesos. La parte continua de todo proceso de Lévy es principalmente guiada por un movimiento Browniano, el cual es de variación no acotada y tiene variación cuadrática proporcional al tiempo. De otro lado, la parte de saltos puros en todo proceso de Lévy se dice que es de actividad finita si  $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$ , y es de actividad infinita cuando  $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ . Los procesos de Lévy de saltos puros y de actividad finita (también conocidos como procesos de Poisson compuestos) saltan c.s. a lo más un número finito de veces en cualquier intervalo finito, mientras que los de actividad infinita lo hacen un número infinito de veces. Más aún, estos últimos procesos pueden ser subdivididos en los de variación acotada y no acotada. Para uno de estos procesos sea de variación acotada es necesario y suficiente que  $\int_{\|x\| \leq 1} x\nu(dx) < \infty$  (ver Sato (2002), theorem 21.9). Intuitivamente, un proceso de saltos puros de Lévy es de variación acotada si sus trayectorias son c.s. de longitud finita sobre cualquier intervalo finito, cosa que no ocurre con los de variación no acotada.

**Teorema 3.2.3** *Sea  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  un proceso Lévy. Entonces  $\mathbf{X}$  admite c.s. la descomposición en términos independientes:*

$$X_t = H_t + M_t$$

donde  $\mathbf{H} = \{H_t\}$  con

$$H_t = \gamma t + \int_{\|x\| > 1} x N_t(\cdot, dx)$$

es un proceso de variación acotada descrito por un drift más un proceso de Poisson compuesto que describe los saltos grandes del proceso  $\mathbf{X}$  hasta el instante  $t$  y  $\mathbf{M} = \{M_t\}$  con

$$M_t = \Sigma^{\frac{1}{2}} B_t + \gamma t + \int_{\|x\| \leq 1} x (N_t(\cdot, dx) - t\nu(dx))$$

es una martingala descrita como un movimiento Browniano multiplicada por una matriz de varianza-covarianza más un proceso de Poisson compuesto compensado que describe a los saltos pequeños.

### 3.3. Procesos de Lévy espectralmente positivos

Detallaremos ahora de manera más específica el tipo de procesos de Lévy que utilizaremos en este trabajo.

**Definición 3.3.1** *Se dice que un proceso de Lévy unidimensional  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  con tripleta generadora  $(\sigma^2, \gamma, \nu)$  es espectralmente positivo si este no tiene saltos negativos; esto es,  $\mathbf{X}$  posee una medida de Lévy tal que  $\nu(\cdot - \infty, 0] = 0$ .*

En adelante denotaremos por  $\mathcal{L}_+$  al conjunto de todos los procesos  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  espectralmente positivos con  $E(X_1) < 0$ .

Si  $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_+$ , resultará más conveniente trabajar con su transformada de Laplace-Stieltjes:

$$\mathcal{L}_{X_t}(\theta) = \mathbb{E}(\exp(-\theta X_t)) = \exp(t\varphi(\theta))$$

la cual siempre existe para  $\theta \geq 0$ . Aquí la función  $\varphi$  dada por:

$$\varphi(\theta) = -\gamma\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_0^\infty (\exp(-\theta x) - 1 + \theta x \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x))\nu(dx)$$

es conocida como el exponente de Laplace-Stieltjes del proceso de Lévy  $\mathbf{X}$ .

Note que en particular en  $t = 1$  de acuerdo a lo anterior se tendrá:  $\varphi(\theta) = \log \mathbb{E}(\exp(-\theta X_1))$ . No es difícil ver que  $\varphi(0) = 0$  y que  $\varphi$  es una función convexa. Más aún por la condición  $E(X_1) < 0$  y el hecho que  $\varphi'(0) = -E(X_1)$ , resulta ser que  $\varphi$  es una función estrictamente creciente en  $[0, \infty[$ . En virtud de esto último la función inversa  $\psi$  de  $\varphi$  está bien definida en  $[0, \infty[$

**Definición 3.3.2** *Se dice que un proceso de Lévy unidimensional  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  con tripleta generadora  $(\sigma^2, \gamma, \nu)$  es un subordinador si  $\sigma^2 = 0$  c.s,  $0 \leq \gamma_0 = \gamma - \int_{|x| \leq 1} x\nu(dx) < \infty$  y  $\nu(\cdot - \infty, 0] = 0$ .*

Note que si  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  es un subordinador, podríamos invocar el teorema 3.2.3 y caracterizar este proceso mediante

$$X_t = \gamma_0 t + \int x N_t(\cdot, dx);$$

en otras palabras, podemos entender a un subordinador como un proceso que es c.s. creciente y cuya dinámica se rige tan sólo por un término de drift estrictamente positivo y por saltos siempre hacia arriba. El exponente de un subordinador, como caso particular del de un proceso espectralmente positivo, viene dado entonces por:

$$\varphi(\theta) = -\gamma_0\theta + \int_0^\infty (\exp(-\theta x) - 1)\nu(dx).$$

Presentaremos ahora un proceso central en nuestro trabajo asociada a todo proceso  $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_+$ . Este es conocido como la martingala de Kella-Witt y viene dada por la proposición siguiente, cuya demostración puede encontrarse en (Debicki and Mandjes, 2015). Para ello consideremos primero un proceso adaptado cdlg  $\mathbf{Y} = \{Y_t\}$  de variación acotada con

descomposición:

$$Y_t = Y_t^c + \sum_{0 < s \leq t} \Delta Y_s,$$

donde  $\mathbf{Y}^c = \{Y_s^c\}$  es un proceso continuo de variación acotada con  $Y_0^c = 0$  y  $\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-}$  denota a la longitud de un salto en el punto de discontinuidad  $s$  del proceso.

Note que en nuestro estudio, el número de saltos hasta el instante  $t$  en este proceso es finito, la suma anterior tiene pleno sentido.

**Proposición 3.3.1** *Sea  $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_+$  con exponente  $\varphi$  y sea  $\mathbf{Y} = \{Y_t\}$  un proceso adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ , càdlàg de variación acotada. Si definimos  $Z_t = Z_0 + X_t + Y_t$ , donde  $Z_0 \in \mathcal{F}_0$ , entonces el proceso  $\mathbf{M} = \{M_t\}$  con*

$$M_t = \varphi(\theta) \int_0^t \exp(-\theta Z_s) ds + \exp(-\theta Z_0) - \exp(-\theta Z_t) - \theta \int_0^t \exp(-\theta Z_s) dY_s^c + \sum_{0 < s \leq t} \exp(-\theta Z_s)(1 - \exp(\theta \Delta Y_s)), \theta > 0$$

es una martingala local con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Más aún, si la variación esperada de  $\{Y_t^c\}$  y el número esperado de saltos de  $\{Y_t\}$  son finitos sobre cualquier intervalo finito y  $\{Z_t\}$  es un proceso no negativo, entonces  $\mathbf{M}$  es una martingala.

Demostración: Ver Kella and Whitt (1992) □

### 3.4. Colas con entradas de Lévy

En esta sección introduciremos un proceso de cola con entrada de Lévy como un análogo en tiempo continuo de su contraparte discreta. En la versión clásica de tiempo discreto una cola puede ser descrita mediante la conocida fórmula de recursión de Lindley. En ella se tiene un proceso de carga de trabajo  $\mathbf{Q} = \{Q_n\}$  con carga inicial  $Q_0 = x \geq 0$ , que satisface la ecuación

$$Q_n = \max\{Q_{n-1} + Y_{n-1}, 0\}, n \geq 1$$

donde  $Y_{n-1}$  es el flujo neto de trabajo al término del periodo  $n-1$ ; es decir, la carga de trabajo menos la cantidad de trabajo que potencialmente puede procesarse entre los periodos  $n-1$  y  $n$ . De iterarse esta ecuación, no es difícil ver que

$$Q_n = \max\{Q_{n-2} + Y_{n-2} + Y_{n-1}, 0\}, n \geq 2.$$

Más aún definiéndose  $X_n = \sum_{i=0}^n Y_i$  y considerándose la carga inicial de trabajo  $Q_0 = x \geq 0$ , se tiene que

$$Q_n = X_n + \max\{x, \max_{0 \leq i \leq n} -X_i\}.$$

De esta forma hemos podido escribir el proceso de carga de trabajo como una función del proceso de flujo neto de trabajo acumulado  $\{X_n\}$ .

El proceso continuo de cola con entrada de Lévy  $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_+$  lo definiremos como un análogo de la última relación; en ella caracterizaremos ahora al proceso de carga de trabajo mediante

$\mathbf{Z} = \{Z_t\}$ , el cual se definirá por:

$$Z_t = X_t + L_t^x,$$

donde  $L_t^x = \max\{x, L_t\}$  y  $L_t = \sup_{0 \leq s \leq t} -X_s = -\inf_{0 \leq s \leq t} X_s$ . Al último proceso  $\{L_t\}$  se le conoce como un proceso regulador, el cual es naturalmente continuo, creciente y por tanto de variación acotada.

Una observación interesante es que el proceso de carga de trabajo puede también escribirse como

$$Z_t = x + X_t + \tilde{L}_t^x,$$

donde  $\tilde{L}_t^x = \max\{0, L_t - x\}$ . Dada entonces la estructura de este proceso podríamos aplicar la proposición 3.3.1 y definir el proceso  $\mathbf{M} = \{M_t\}$  con

$$M_t = \varphi(\theta) \int_0^t \exp(-\theta Z_s) ds + \exp(-\theta Z_0) - \exp(-\theta Z_t) - \theta \int_0^t \exp(-\theta Z_s) d\tilde{L}_s^x,$$

el cual es una martingala. Así, si asumimos que el proceso  $\mathbf{Z}$  es un proceso estacionario con distribución inicial, lo cual implica que

$$\mathbb{E} \left( \int_0^1 \exp(-\theta Z_s) ds \right) = \mathbb{E}(\exp(-\theta Z))$$

se obtendrá tomando esperanzas

$$0 = \mathbb{E}(M_1) = \varphi(\theta) \mathbb{E}(\exp(-\theta Z)) + \mathbb{E}(\exp(-\theta Z)) - \mathbb{E}(\exp(-\theta Z)) - \theta \mathbb{E}(L_1^x),$$

o

$$\mathbb{E}(\exp(-\theta Z)) = \frac{\theta \mathbb{E}(L_1^x)}{\varphi(\theta)}$$

y la siguiente fórmula generalizada de Pollaczek-Khintchine

**Proposición 3.4.1** *Sea  $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_+$  con exponente  $\varphi$ , entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\exp(-\theta Z_t)) = \frac{\theta \varphi'(0)}{\varphi(\theta)}, \theta > 0$$

Demostración: Ver Debicki and Mandjes (2015)

□

## Capítulo 4

### Modelo

#### 4.1. Formulación del modelo

Consideremos un modelo de colas  $G/G/1 : DG/\infty/\infty$ , el cual considera que la llegada es bajo un proceso general, el servicio también se procesa bajo un proceso general, tiene un solo servidor, la disciplina de atención es general, fuente de entrada ilimitada y capacidad infinita. Nosotros consideramos un flujo de entrada de trabajo acumulado permanente, es decir siempre llegara trabajo al servidor, esta llegada de flujo de trabajo estará bajo un proceso de Lévy no decreciente y se tendrá un proceso de servicio de tasa constante con interrupciones por fallas y vacaciones.

Para cualquier  $t \geq 0$ , sea  $X_t$  el flujo de entrada de trabajo acumulado sobre el intervalo  $[0, t]$ , es decir es el trabajo que llego hasta el tiempo  $t$ . Se asume que  $\mathbf{X} = \{X_t\}$  es un subordinador; es decir, un proceso de Lévy con exponente

$$\phi(\theta) = -\gamma_0\theta + \int_0^\infty (e^{-\theta x} - 1)\nu(dx),$$

donde  $\gamma_0 \geq 0$  y  $\int_0^\infty x\nu(dx) < \infty$ . Este, se asumirán están definidos sobre un espacio filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ , donde la filtración  $\mathbb{F} = \{F_t\}$  se asumirá que satisface las condiciones usuales.

Sea  $S_t$  una variable aleatoria que denota al procesamiento de trabajo acumulado hasta el tiempo  $t$ . Aquí asumiremos que este proceso de servicio,  $\mathbf{S} = \{S_t\}$  tiene un flujo constante y determinístico de tasa  $r$ , siempre que el sistema este activo; esto es,  $S_t = rt, \forall t \geq 0$ . Asumiendo que el espacio de almacenamiento de trabajo es ilimitado, sea  $\{\tau_n\}$  una sucesión estrictamente creciente de tiempos de parada con respecto a  $\mathbb{F}$  en los que falla el servidor. Cuando el servidor falla; se asume que es reparado inmediatamente y el tiempo requerido para su reparación es una variable aleatoria  $\xi_n \geq 0$  que es  $\mathcal{F}_{\tau_n}$ -medible para  $n \geq 1$ . De otro lado, cuando el sistema se encuentra vacío; es decir, cuando el servidor procesa completamente la carga de trabajo, este toma una vacancia de longitud aleatoria  $\eta_n$  que es  $\mathcal{F}_{\sigma_n}$ -medible para  $n \geq 1$ , siendo  $\{\sigma_n\}$  la sucesión estrictamente creciente de tiempos de parada no negativos con respecto a  $\mathbb{F}$  en las que el servidor entra de vacaciones. Las vacaciones continúan hasta que a su regreso de este, el servidor encuentra el sistema no vacío.

Si  $W_t$  representa el tiempo de espera virtual en el tiempo  $t$ ; es decir, la representación en tiempo de la carga de trabajo en el tiempo  $t$  y denotamos por  $W_0 \in \mathcal{F}_0$  a la carga inicial de

trabajo, entonces  $W_t$  se define por:

$$W_t = W_0 + X_t - rt + \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i, \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

donde

$$N_t^R = \sup\{n \in \mathbb{N}^+ \mid \tau_n \leq t\},$$

$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0 \mid W_0 + X_t - rt + \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i = 0\} \quad (n \geq 1)$$

y

$$N_t^V = \sup\{n \in \mathbb{N}^+ \mid \sigma_n \leq t\},$$

donde  $\{N_t^R\}$  y  $\{N_t^V\}$  son procesos de renovación.

Vale aclarar que  $W_t$  no es en sí un proceso de carga de trabajo. Sin embargo, si  $\xi_n$  representa la carga total de trabajo que arriba durante el  $n$ -ésimo periodo de reparación y  $\eta_n$  representa la carga total de trabajo que arriba durante el  $n$ -ésimo periodo de vacancia, entonces  $W_t$  se podría interpretar como la carga de trabajo en el sistema de periodos activos; es decir, en los periodos normales de procesamiento fluido (que excluyen a los periodos de reparación y de vacancia). Si definimos  $Y_t = X_t - rt$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_t\}$  resulta ser un proceso de Lévy espectralmente positivo con exponente  $\varphi(\theta) = \phi(\theta) + r\theta$  que representa al flujo de procesamiento de trabajo en nuestro sistema. Definiendo  $\rho = -\phi'(0) = \mathbb{E}(X_1)$ , impondremos en adelante las condiciones que  $\rho < r$  y  $\mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$ ,  $\forall t \geq 0$ . En otras palabras asumiremos que  $\mathbf{Y} \in \mathcal{L}_+$ . Esta condición se toma para que el sistema alcance una distribución estacionaria y dice básica y naturalmente que la tasa de procesamiento del sistema debe de ser mayor a la tasa media del flujo de llegada de trabajo.

## 4.2. La distribución de estado estacionario

En esta sección caracterizamos la distribución límite del tiempo de espera virtual  $W_t$ , asumiendo que  $\rho < r$  y suponiendo que  $W_t \xrightarrow{\mathcal{D}} W$  y  $t^{-1}\mathbb{E}(W_t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , donde  $W$  es una variable aleatoria límite.

**Lema 4.2.1** Si  $\mathbb{E}(N_t^R + N_t^V) < \infty$ ,  $\forall t \geq 0$  y definimos el proceso  $\mathbf{M} = \{M_t\}$  como:

$$M_t = \varphi(\theta) \int_0^t e^{-\theta W_s} ds + e^{-\theta W_0} - e^{-\theta W_t} - \sum_{k=1}^{N_t^R} \left( e^{-\theta(W_{\tau_k} - \xi_k)} - e^{-\theta W_{\tau_k}} \right) - \sum_{k=1}^{N_t^V} (1 - e^{-\theta \eta_k}). \quad (4.2)$$

Entonces  $\mathbf{M}$  es una martingala.

Demostración: Sea  $H_t = \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i$ . Dado que  $W_t = W_0 + Y_t + H_t$  y  $\mathbf{H} = \{H_t\}$  es un proceso adaptado con respecto a  $\mathbb{F}$  de saltos puros de variación acotada, el lema se sigue directamente de la proposición 3.3.1.  $\square$

**Lema 4.2.2** Sea  $T$  una variable aleatoria con esperanza finita que toma como valores posibles a los enteros no negativos. Si  $\{\zeta_n\}$  es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. de esperanza

finita y en donde cada  $\zeta_n$  es independiente de  $\mathbf{1}_{\{T \geq n\}}$ , entonces

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^T \zeta_n\right) = \mathbb{E}(\zeta_1)\mathbb{E}(T) \quad (4.3)$$

Demostración: Puesto que  $\zeta_n$  es independiente de  $\mathbf{1}_{\{T \geq n\}}$ , el teorema de convergencia acotada garantiza que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^T \zeta_n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \mathbf{1}_{\{T \geq n\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\zeta_n)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T \geq n\}}) = \mathbb{E}(\zeta_1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{E}(\zeta_1)\mathbb{E}(T)$$

□

Con la ayuda de los lemas anteriores, podemos obtener la siguiente distribución límite del tiempo de espera virtual.

**Teorema 4.2.1** Sean  $\{\xi_n\}$  y  $\{\eta_n\}$  dos secuencias i.i.d. de variables aleatorias con esperanzas finitas. Supongamos que  $n^{-1}\tau_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_R^{-1}$  y  $n^{-1}\sigma_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_V^{-1}$ , conforme  $n \rightarrow \infty$ , siendo  $0 < \lambda_R^{-1} < \infty$  y  $0 < \lambda_V^{-1} < \infty$ . Supongamos que  $W_t \xrightarrow{\mathcal{D}} W$  y  $t^{-1}\mathbb{E}(W_t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , donde  $W$  es una variable aleatoria límite. Además supongamos que  $\{W_{\tau_k}\}$  y  $\{W_{\tau_k} - \xi_k\}$  son procesos estacionarios y ergódicos tales que  $(W_{\tau_k} - \xi_k, W_{\tau_k}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (W^-, W^+)$ , siendo  $W^-$  y  $W^+$  dos apropiadas variables aleatorias. Si  $\xi_n$  es independiente de  $\mathbf{1}_{\{N_1^R \geq n\}}$  y  $\eta_n$  es independiente de  $\mathbf{1}_{\{N_1^V \geq n\}}$ , donde las variables aleatorias  $N_t^R$  y  $N_t^V$  tienen esperanza finita para cualquier  $t > 0$ , entonces para cualquier  $\theta > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-\theta W_t}) = \mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \frac{\theta \varphi'(0)}{\varphi(\theta)} \left[ p \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})}{\theta \mathbb{E}(\xi_1)} + (1-p) \frac{1 - \mathbb{E}(e^{-\theta \eta_1})}{\theta \mathbb{E}(\eta_1)} \right], \quad (4.4)$$

donde:

$\xrightarrow{\mathcal{P}}$  denota convergencia en probabilidad,

$\xrightarrow{\mathcal{D}}$  denota convergencia en distribución,

$$p = \frac{\lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)}{\varphi'(0)} \text{ y } 1-p = \frac{\lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)}{\varphi'(0)}$$

Demostración: Dividiendo  $W_t$  por  $t$  en (4.1) y tomando esperanza, se tiene por ser  $\mathbf{Y}$  un proceso de Lévy que:

$$\begin{aligned} t^{-1}\mathbb{E}(W_t) &= t^{-1}\mathbb{E}(W_0) + t^{-1}\mathbb{E}(Y_t) + t^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i\right) + t^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i\right) \\ &= t^{-1}\mathbb{E}(W_0) + \mathbb{E}(Y_1) + t^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i\right) + t^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i\right) \end{aligned}$$

De la condición  $t^{-1}\mathbb{E}(W_t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  obtendremos en el límite que

$$0 = \mathbb{E}(Y_1) + \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i \right).$$

Sustituyendo  $-\mathbb{E}(Y_1) = \varphi'(0)$ , se tiene entonces que

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i \right).$$

Desde que  $n^{-1}\tau_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_R^{-1}$  y  $n^{-1}\sigma_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_V^{-1}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  siendo  $0 < \lambda_R^{-1} < \infty$  y  $0 < \lambda_V^{-1} < \infty$  y dado que  $\{\xi_n\}$  y  $\{\eta_n\}$  son secuencias i.i.d. de variables aleatorias con esperanzas finitas, se tiene por la ley débil de los grandes números que  $n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{E}(\xi_1)$  y  $n^{-1} \sum_{i=1}^n \eta_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{E}(\eta_1)$ . Por tanto, usando el Teorema 3 de Glynn and Whitt (1988) se tiene que

$t^{-1}(\sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i) \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)$  conforme  $t \rightarrow \infty$  y  $t^{-1}(\sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i) \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Mas aún, como para  $t$  suficientemente grande se cumple que  $\frac{\sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i}{t} \leq \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i$  y  $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i) = \mathbb{E}(N_t^R)\mathbb{E}(\xi_1) < \infty$  usando el teorema de Convergencia Dominada, ver el corolario 6.3.2 de Resnick (1999), se tiene

$t^{-1}\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i) \xrightarrow{c.s.} \lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)$  conforme  $t \rightarrow \infty$  y  $t^{-1}\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i) \xrightarrow{c.s.} \lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Luego, se tiene que

$$\varphi'(0) = \lambda_R \mathbb{E}(\xi_1) + \lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)$$

o equivalentemente

$$1 = \frac{\lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)}{\varphi'(0)} + \frac{\lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)}{\varphi'(0)}$$

Definamos entonces  $p = \frac{\lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)}{\varphi'(0)}$ . Note que  $1 - p = \frac{\lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)}{\varphi'(0)}$ .

Consideremos ahora el lema 4.2.1 y tomemos la esperanza a  $M_t$

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}(M_t) &= \varphi(\theta) \mathbb{E} \left( \int_0^t e^{-\theta W_s} ds \right) + \mathbb{E}(e^{-\theta W_0}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W_t}) \\ &- \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_t^R} \left[ e^{-\theta(W_{\tau_k} - \xi_k)} - e^{-\theta W_{\tau_k}} \right] \right) - \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_t^V} (1 - e^{-\theta \eta_k}) \right) \end{aligned}$$

Usando el lema 4.2.2, dividiendo la expresión sobre  $t$  y usando el teorema de Tonelli

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\varphi(\theta)}{t} \int_0^t \mathbb{E}(e^{-\theta W_s}) ds + \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W_0})}{t} - \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W_t})}{t} \\ &- \frac{\mathbb{E}(N_t^R)}{t} \mathbb{E} \left[ e^{-\theta(W_{\tau_k} - \xi_k)} - e^{-\theta W_{\tau_k}} \right] - \frac{\mathbb{E}(N_t^V)}{t} \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_k}) \end{aligned}$$

Desde que  $\{W_{\tau_k}\}$  y  $\{W_{\tau_k} - \xi_k\}$  son procesos estacionarios y ergódicos, tales que  $(W_{\tau_k} - \xi_k, W_{\tau_k}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (W^-, W^+)$ ; conforme  $\tau_k \rightarrow +\infty$  y  $\frac{\mathbb{E}(N_t^R)}{t} \rightarrow \mathbb{E}(N_1^R)$  y  $\frac{\mathbb{E}(N_t^V)}{t} \rightarrow \mathbb{E}(N_1^V)$  conforme

$t \rightarrow \infty$  al ser  $\{N_t^R\}$  y  $\{N_t^V\}$  procesos de renovación, se tiene tomando límites cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\tau_k \rightarrow \infty$  que

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\theta)}{t} \int_0^t \mathbb{E}(e^{-\theta W_s}) ds - \mathbb{E}(N_1^R) \mathbb{E}(e^{-\theta W^-} - e^{-\theta W^+}) - \mathbb{E}(N_1^V) \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1}).$$

Más aun, haciendo  $u = \frac{s}{t}$  en la primera integral se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\theta)}{t} \int_0^t \mathbb{E}(e^{-\theta W_s}) ds &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\theta)t}{t} \int_0^1 \mathbb{E}(e^{-\theta W_{ut}}) du \\ &= \varphi(\theta) \int_0^1 \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-\theta W_{ut}}) du = \varphi(\theta) \int_0^1 \mathbb{E}(e^{-\theta W}) du = \varphi(\theta) \mathbb{E}(e^{-\theta W}) \end{aligned}$$

consecuentemente

$$0 = \varphi(\theta) \mathbb{E}(e^{-\theta W}) - \mathbb{E}(N_1^R) \left[ \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) \right] - \mathbb{E}(N_1^V) \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1}) \quad (*)$$

Puesto que  $\tau_{N_t^R} \leq t < \tau_{N_t^R+1}$ ,  $\frac{\tau_{N_t^R}}{N_t^R} \leq \frac{t}{N_t^R} < \frac{\tau_{N_t^R+1}}{N_t^R+1} \frac{N_t^R+1}{N_t^R}$ ,  $N_t^R < \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y por hipótesis  $n^{-1}\tau_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_R^{-1}$ . Se tiene que  $\frac{t}{N_t^R} \xrightarrow{\mathcal{P}} \frac{1}{\lambda_R}$  conforme  $t \rightarrow \infty$  y por tanto  $\frac{N_t^R}{t} \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_R$  lo mismo ocurre con  $N_t^V$ ; es decir,  $\frac{N_t^V}{t} \xrightarrow{\mathcal{P}} \lambda_V$ . Así por la unicidad del límite en probabilidad debe de cumplirse que

$$\mathbb{E}(N_1^R) = \lambda_R \text{ y } \mathbb{E}(N_1^V) = \lambda_V.$$

Reemplazando luego en (\*) se tiene

$$\varphi(\theta) \mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \lambda_R \left[ \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) \right] + \lambda_V \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1})$$

y usando  $\lambda_R = \frac{p\varphi'(0)}{\mathbb{E}(\xi_1)}$  y  $\lambda_V = \frac{(1-p)\varphi'(0)}{\mathbb{E}(\eta_1)}$ ,

$$\varphi(\theta) \mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \frac{p\varphi'(0)}{\mathbb{E}(\xi_1)} \left[ \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) \right] + \frac{(1-p)\varphi'(0)}{\mathbb{E}(\eta_1)} \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1})$$

Así,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-\theta W_t}) = \mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \frac{\theta\varphi'(0)}{\varphi(\theta)} \left[ p \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} + (1-p) \frac{1 - \mathbb{E}(e^{-\theta \eta_1})}{\theta\mathbb{E}(\eta_1)} \right].$$

$$\text{donde } p = \frac{\lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)}{\varphi'(0)} \text{ y } 1-p = \frac{\lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)}{\varphi'(0)}. \quad \square$$

Usando las mismas condiciones del teorema 4.2.1, se formula el siguiente corolario.

**Corolario 4.2.1** *La media y la varianza de la distribución limite del tiempo de espera virtual*

vienen dados por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W) &= \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)} + p \frac{\mathbb{E}((W^+)^2) - \mathbb{E}((W^-)^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)} + (1-p) \frac{\mathbb{E}((\eta_1)^2)}{2\mathbb{E}(\eta_1)}, \\ \mathbb{V}(W) &= \left(\frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)}\right)^2 - \frac{\varphi'''(0)}{3\varphi'(0)} + (1-p) \left[ \frac{\mathbb{E}((\eta_1)^3)}{3\mathbb{E}(\eta_1)} - \left(\frac{\mathbb{E}((\eta_1)^2)}{2\mathbb{E}(\eta_1)}\right)^2 \right] \\ &\quad + p \left[ \frac{\mathbb{E}((W^+)^3) - \mathbb{E}((W^-)^3)}{3\mathbb{E}(\xi_1)} - \left(\frac{\mathbb{E}((W^+)^2) - \mathbb{E}((W^-)^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}\right)^2 \right],\end{aligned}$$

$$\text{donde } p = \frac{\lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)}{\varphi'(0)} \text{ y } 1-p = \frac{\lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)}{\varphi'(0)}$$

Demostración: Consideremos la transformada de Laplace-Stieltjes de la distribución estacionaria  $W$ , la cual denotaremos por  $g(\theta) = g_A(\theta) + g_B(\theta)$ , siendo

$$g_A(\theta) = \frac{\varphi'(0)p}{\mathbb{E}(\xi_1)} \left( \frac{\psi_-(\theta) - \psi_+(\theta)}{\varphi(\theta)} \right),$$

$$g_B(\theta) = \frac{\varphi'(0)(1-p)}{\mathbb{E}(\eta_1)} \left( \frac{1 - \psi(\theta)}{\varphi(\theta)} \right),$$

$\psi_-(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta W^-})$ ,  $\psi_+(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})$  y  $\psi(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta \eta_1})$ . Estas últimas, son las transformadas de Laplace-Stieltjes de  $W^-$ ,  $W^+$  y  $\eta_1$ , respectivamente. Puesto que el valor esperado de esta distribución se puede obtener mediante  $\mathbb{E}(W) = -\lim_{\theta \downarrow 0} g'(\theta)$  analicemos la derivadas correspondientes con respecto a  $\theta$ . En primer lugar

$$g'_A(\theta) = \frac{\varphi'(0)p}{\mathbb{E}(\xi_1)} \left( \frac{(\psi'_-(\theta) - \psi'_+(\theta)) \varphi(\theta) - (\psi_-(\theta) - \psi_+(\theta)) \varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)^2} \right)$$

tiene forma indeterminada  $\frac{0}{0}$  en el límite, la que podríamos levantar aplicando la regla de L'Hospital. En efecto una aplicación doble de esta regla nos conduce a

$$\lim_{\theta \downarrow 0} g'_A(\theta) = -p \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)} - p \frac{\mathbb{E}((W^+)^2) - \mathbb{E}((W^-)^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}$$

Similarmente, para  $g_B(\theta)$  se tiene que

$$g'_B(\theta) = \frac{\varphi'(0)(1-p)}{\mathbb{E}(\eta_1)} \left[ \frac{-\left(\psi'(\theta)\right) \varphi(\theta) - (1 - \psi(\theta)) \varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)^2} \right]$$

tiene también forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ . Una doble aplicación de la regla de L'Hospital nos conduce a

$$\lim_{\theta \downarrow 0} g'_B(\theta) = -(1-p) \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)} - (1-p) \frac{\mathbb{E}(\eta_1^2)}{2\mathbb{E}(\eta_1)}$$

Así

$$\mathbb{E}(W) = -\lim_{\theta \downarrow 0} g'(\theta) = \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)} + p \frac{\mathbb{E}((W^+)^2) - \mathbb{E}((W^-)^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)} + (1-p) \frac{\mathbb{E}(\eta_1^2)}{2\mathbb{E}(\eta_1)}$$

De otro lado para la varianza de  $W$ , sabemos que  $\mathbb{E}(W^2) = \lim_{\theta \downarrow 0} g''(\theta)$

Las segundas derivadas de  $g_A$  y  $g_B$  vienen dadas por

$$g_A''(\theta) = \frac{\varphi'(0)p}{\mathbb{E}(\xi_1)} \left[ \frac{(\psi''_-(\theta) - \psi''_+(\theta)) \varphi(\theta)^3}{\varphi(\theta)^4} \right]$$

$$- \frac{\varphi'(0)p}{\mathbb{E}(\xi_1)} \left[ \frac{2(\psi'_-(\theta) - \psi'_+(\theta)) \varphi(\theta)^2 \varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)^4} \right]$$

$$- \frac{\varphi'(0)p}{\mathbb{E}(\xi_1)} \left[ \frac{(\psi_-(\theta) - \psi_+(\theta)) \varphi(\theta)^2 \varphi''(\theta) - 2(\psi_-(\theta) - \psi_+(\theta)) \varphi(\theta) \varphi'(\theta)^2}{\varphi(\theta)^4} \right]$$

y

$$g_B''(\theta) = -\frac{\varphi'(0)(1-p)}{\mathbb{E}(\eta_1)} \left[ \frac{\psi''(\theta) \varphi(\theta)^3 + (1-\psi(\theta)) \varphi(\theta)^2 \varphi''(\theta)}{\varphi(\theta)^4} \right]$$

$$+ \frac{\varphi'(0)(1-p)}{\mathbb{E}(\eta_1)} \left[ \frac{2\psi'(\theta) \varphi(\theta)^2 \varphi'(\theta) + 2(1-\psi(\theta)) \varphi(\theta) \varphi'(\theta)^2}{\varphi(\theta)^4} \right]$$

Una triple aplicación de la regla de L'Hospital nos conduce a obtener  $\mathbb{E}(W^2) = \lim_{\theta \downarrow 0} g''(\theta)$ . Luego como  $\mathbb{V}(W) = \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2$ , se tiene que

$$\mathbb{V}(W) = \left( \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'(0)} \right)^2 - \frac{\varphi'''(0)}{3\varphi'(0)} + (1-p) \left[ \frac{\mathbb{E}(\eta_1^3)}{3\mathbb{E}(\eta_1)} - \left( \frac{\mathbb{E}(\eta_1^2)}{2\mathbb{E}(\eta_1)} \right)^2 \right]$$

$$+ p \left[ \frac{\mathbb{E}(W^+)^3 - \mathbb{E}(W^-)^3}{3\mathbb{E}(\xi_1)} - \left( \frac{\mathbb{E}(W^+) - \mathbb{E}(W^-)}{2\mathbb{E}(\xi_1)} \right)^2 \right].$$

□

Estaremos ahora interesados en obtener los tiempos medios de los periodos ocupados de nuestro sistema en el estado estacionario, para lo cual el siguiente lema será de gran ayuda.

**Lema 4.2.3** Sea  $T_n = \inf\{t \geq 0 | Y_t + \sum_{k=1}^{N_t^R} \xi_k + \sum_{i=1}^n B_i = 0\}$ ,  $n \geq 1$ , donde  $\{B_i, i \geq 1\}$  es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. positivas con esperanza finita. Si  $0 \leq p < 1$ , entonces

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{n\mathbb{E}(B_1)}{(1-p)\varphi'(0)}.$$

Demostración: Sea  $T_n^b = \inf\{t \geq 0 | Y_t + \sum_{k=1}^{N_t^R} \xi_k + nb = 0\}$ , donde  $b > 0$  y  $n \geq 1$ . Dado que  $\mathbf{Y} \in \mathcal{L}_+$ ,  $\{T_n^b, n \geq 1\}$  es un camino aleatorio en el que c.p.  $0 < T_n^b < T_{n+1}^b$ . Así tenemos  $\mathbb{E}(T_n^b) = n\mathbb{E}(T_1^b)$ . Desde  $\mathbb{E}(Y_t) < 0$  y  $0 \leq p < 1$ ,  $\mathbb{E}(Y_t + \sum_{k=1}^{N_t^R} \xi_k) = -(1-p)\varphi'(0)t$ . Por el

teorema 8.4.4 de Chung (1974), tenemos  $\mathbb{E}(T_1^b) < \infty$ . Desde el teorema 36.3, la ley fuerte de los grandes números, según Sato (2002) se tiene  $\mathbb{E}(|Y_t|) < \infty$ ,  $t^{-1}Y_t \xrightarrow{c.s.} \mathbb{E}(Y_1)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Teniendo en cuenta el echo que  $Y_{T_n^b} + \sum_{k=1}^{N_{T_n^b}^R} \xi_k = -nb$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n^b) &= n\mathbb{E}(T_1^b) \\ \mathbb{E}(Y_{T_n^b} + \sum_{k=1}^{N_{T_n^b}^R} \xi_k) &= \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(N_1^R)\mathbb{E}(\xi_1) = -(1-p)\varphi'(0) \\ -b &= n^{-1} \left( Y_{T_n^b} + \sum_{k=1}^{N_{T_n^b}^R} \xi_k \right) = n^{-1} T_n^b \left[ T_n^{b-1} Y_{T_n^b} + T_n^{b-1} \sum_{k=1}^{N_{T_n^b}^R} \xi_k \right] \end{aligned}$$

Si  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $T_n^b \rightarrow \infty$ . Como  $\mathbb{E}(Y_1) < \infty$  la ley fuerte de los grandes números para proceso de Lévy, teorema 36.5 de Sato (2002), garantiza que  $\frac{Y_t}{t} \xrightarrow{c.s.} \mathbb{E}(Y_1)$  y como vimos en el teorema (4.2.1)

$$t^{-1} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i \right) \rightarrow \lambda_R \mathbb{E}(\xi_1) = p\varphi'(0)$$

Así en el limite se cumple con probabilidad 1 que

$$-b = \mathbb{E}(T_1^b)(\mathbb{E}(Y_1) + p\varphi'(0))$$

de donde

$$\mathbb{E}(T_1^b) = \frac{b}{(1-p)\varphi'(0)},$$

y

$$\mathbb{E}(T_n^b) = n\mathbb{E}(T_1^b) = \mathbb{E}(T_n^b) = \frac{nb}{(1-p)\varphi'(0)}.$$

Por las condiciones dadas se tiene entonces que:

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_1^{\sum_{i=1}^n B_i}) = \mathbb{E} \left( \mathbb{E}(T_1^{\sum_{i=1}^n B_i} | \sum_{i=1}^n B_i) \right) = \mathbb{E} \left( \frac{\sum_{i=1}^n B_i}{(1-p)\varphi'(0)} \right),$$

de donde

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{n\mathbb{E}(B_1)}{(1-p)\varphi'(0)}.$$

□

**Teorema 4.2.2** Sea  $T = \inf\{t \geq 0 | W_t = 0\}$ , donde  $W_0$  está distribuido de acuerdo a la distribución estacionaria. Entonces la duración media de los periodos ocupados viene dada por:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\mathbb{E}(W)}{(1-p)\varphi'(0)}.$$

Demostración: Basta observar que

$$\begin{aligned} T = \sigma_1 &= \inf\{t \geq 0 / W_0 + Y_t + \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i = 0\} \\ &= \inf\{t \geq 0 / Y_t + \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i + W_0 = 0\} = T_1 \end{aligned}$$

luego si identificamos  $B_1$  con  $= W_0$ , para  $n = 1$  en el lema (4.2.3) se tiene que

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{\mathbb{E}(W_0)}{(1-p)\varphi'(0)} = \frac{\mathbb{E}(W)}{(1-p)\varphi'(0)}$$

□

Note que para el modelo M/G/1 con interrupciones por fallas del servidor y múltiples vacancias, si  $B_i$  se distribuye como el tiempo de servicio, entonces  $T_n$  es el periodo ocupado de orden  $n$  que se define como el periodo de tiempo que comienza cuando la vacancia termina y existen  $n$  clientes en el sistema y termina cuando el sistema se vacía.

### 4.3. La distribución transitoria

El enfoque se centrará ahora en el análisis de la distribución transitoria del tiempo de espera virtual para un tiempo aleatorio en distribución exponencial cuando la carga inicial de trabajo del sistema sea  $x \geq 0$ . Con ello estaremos en capacidad de caracterizar luego la correlación del tiempo de espera virtual.

Dada la asunción sobre la distribución del tiempo en que transitará la cadena es exponencial será posible aquí obtener una formulación cerrada para su transformada de Laplace. Ella viene dada por el siguiente resultado.

**Teorema 4.3.1** *Sea  $T \sim \exp(\gamma)$  una variable aleatoria independiente de  $\mathbf{Y}$ ,  $\tau_n$  y  $\sigma_n, \forall n \geq 1$ . Dados  $\theta > 0$  y  $x \geq 0$ , la transformada de Laplace-Stieltjes de  $W_T$  viene dada por*

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) = \frac{\gamma}{\varphi(\theta) - \gamma} \left( \mathbb{E}(N_T^R) \left[ \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) \right] - \mathbb{E}(N_T^V) \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1}) - e^{-\theta x} \right), \quad (4.5)$$

donde denotamos por  $\mathbb{E}_x(g(W_T))$  a la esperanza de la variable aleatoria  $g(W_T)$  cuando el proceso  $W$  empieza con  $W_0 = x$ .

Demostración: Por el lema 4.2.1, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}_x(M_T) = \varphi(\theta) \mathbb{E}_x \left( \int_0^T e^{-\theta W_s} ds \right) + e^{-\theta x} - \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) \\ &\quad - \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_T^R} \left[ e^{-\theta(W_{\tau_k} - \xi_k)} - e^{-\theta W_{\tau_k}} \right] \right) - \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_T^V} (1 - e^{-\theta \eta_k}) \right) \end{aligned}$$

Consideremos ahora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left( \int_0^T e^{-\theta W_s} ds \right) &= \int_0^\infty \left( \int_0^t (e^{-\theta W_s}) ds \right) \gamma e^{-\gamma t} dt \\ &= -e^{-\gamma t} \left( \int_0^t \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_s}) ds \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\gamma t} \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_t}) dt\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la integración por partes, haciendo  $u = \int_0^t (e^{-\theta W_s}) ds$  de donde  $du = (e^{-\theta W_t}) dt$ ,  $dv = \gamma e^{-\gamma t} dt$  de donde  $v = -e^{-\gamma t}$ .

Puesto que el primer termino se anula. Se tiene entonces

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \gamma e^{-\gamma t} \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_t}) dt = \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T})$$

reemplazando en la ecuación

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{E}(M_T) &= \frac{\varphi(\theta)}{\gamma} \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) + e^{-\theta x} - \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) \\ &\quad - \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_T^R} \left[ e^{-\theta(W_{\tau_k} - \xi_k)} - e^{-\theta W_{\tau_k}} \right] \right) - \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^{N_T^V} (1 - e^{-\theta \eta_k}) \right).\end{aligned}$$

Usando el lema 4.2.2 se tiene

$$0 = \frac{\varphi(\theta)}{\gamma} \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) + e^{-\theta x} - \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) - \mathbb{E}(N_T^R) \left[ \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) \right] - \mathbb{E}(N_T^V) \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1})$$

y despejando se tiene

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) = \frac{\gamma}{\varphi(\theta) - \gamma} \left\{ \mathbb{E}(N_T^R) \left[ \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) \right] - \mathbb{E}(N_T^V) \mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1}) - e^{-\theta x} \right\}$$

□

A continuación se obtiene explícitamente la transformada de Laplace correspondiente a la correlación del proceso de tiempo de espera virtual

$$c(t) = \frac{\text{Cov}(W_0, W_t)}{\sqrt{\mathbb{V}(W_0) \cdot \mathbb{V}(W_t)}}$$

En este caso asumimos que el sistema se encuentra en estado estacionario en el tiempo 0, por lo que  $w = \mathbb{E}(W_0) = \mathbb{E}(W_t)$  y  $v = \mathbb{V}(W_0) = \mathbb{V}(W_t)$  vienen dados por el corolario 4.2.1, entonces se tiene que

$$c(t) = \frac{\mathbb{E}(W_0 W_t) - (\mathbb{E}(W_0))^2}{\mathbb{V}(W_0)} = \frac{\mathbb{E}(W_0 W_t) - w^2}{v}$$

**Teorema 4.3.2** Si  $\theta > 0$ ,

$$\int_0^{\infty} c(t)e^{-\theta t} dt = \frac{1}{\theta} + \frac{w}{v\theta} \varphi'(0) \left(1 - \frac{1}{\varphi(\theta)}\right)$$

Demostración: Sea  $T$  una variable aleatoria exponencialmente distribuida con parámetro  $\theta$ . De la ecuación 4.5, se tiene que

$$\mathbb{E}_x(W_T) = -\frac{d}{d\theta} \mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T})|_{\theta=0}$$

Sean:  $\psi_-(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta W^-})$ ,  $\psi_+(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})$  y  $\psi(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta \eta_1})$ , las transformadas de Laplace-Stieltjes de  $W^-$ ,  $W^+$  y  $\eta_1$ , respectivamente. Luego se tiene

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta W_T}) = \frac{\gamma}{\varphi(\theta) - \gamma} \{ \mathbb{E}(N_T^R) [\psi_-(\theta) - \psi_+(\theta)] - \mathbb{E}(N_T^V) (1 - \psi(\theta)) - e^{-\theta x} \}$$

derivando y evaluando

$$= -\frac{\gamma}{(\varphi(\theta) - \gamma)} \left( \mathbb{E}(N_T^R) [\psi'_-(\theta) - \psi'_+(\theta)] + \mathbb{E}(N_T^V) \psi'(\theta) + x e^{-\theta x} \right) |_{\theta=0}$$

$$+ \frac{\gamma}{(\varphi(\theta) - \gamma)^2} \left( \mathbb{E}(N_T^R) [\psi_-(\theta) - \psi_+(\theta)] - \mathbb{E}(N_T^V) (1 - \psi(\theta)) - e^{-\theta x} \right) \varphi'(\theta) |_{\theta=0}$$

donde,  $\psi'_-(0) = \mathbb{E}(W^-)$ ,  $\psi'_+(0) = \mathbb{E}(W^+)$  y  $\psi'(0) = \mathbb{E}(\eta_1)$ , entonces se tiene

$$= \left( \mathbb{E}(N_T^R) [\mathbb{E}(W^+) - \mathbb{E}(W^-)] - \mathbb{E}(N_T^V) \mathbb{E}(\eta_1) + x \right) - \frac{\varphi'(0)}{\gamma} = \varphi'(0) + x - \frac{\varphi'(0)}{\gamma}$$

$$\mathbb{E}_x(W_T) = \varphi'(0) \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + x \quad (4.6)$$

Se tiene:

$$\mathbb{E}(W_0 W_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(W_0 W_t | W_0)) = \mathbb{E}(W_0 \mathbb{E}(W_t | W_0)) = \int_0^{\infty} x \mathbb{E}_x(W_t) d\mathbb{P}(W_0 \leq x)$$

Reemplazando se tiene que

$$\int_0^{\infty} c(t)e^{-\theta t} dt = \frac{1}{v} \int_0^{\infty} [\mathbb{E}(W_0 W_t) - w^2] e^{-\theta t} dt = \frac{1}{v} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \mathbb{E}(W_t) e^{-\theta t} d\mathbb{P}(W_0 \leq x) dt - \frac{w^2}{v\theta} \quad (4.7)$$

Sustituyendo 4.6 en 4.7 se obtiene que

$$\int_0^{\infty} c(t)e^{-\theta t} dt = -\frac{w^2}{v\theta} + \frac{1}{v} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \left( \varphi'(0) \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + x \right) e^{-\theta t} d\mathbb{P}(W_0 \leq x) dt$$

$$= -\frac{w^2}{v\theta} + \frac{1}{v\theta}\varphi'(0)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\mathbb{E}(W_0) + \frac{1}{v\theta}\mathbb{E}(W_0^2)$$

Sustituyendo  $\gamma = \varphi(\theta)$ ,  $\mathbb{E}(W_0) = w$  y  $\mathbb{E}(W_0^2) = v + w^2$  se tiene

$$= \frac{1}{\theta} + \frac{w}{v\theta}\varphi'(0)\left(1 - \frac{1}{\varphi(\theta)}\right)$$

□

#### 4.4. Descomposición estocástica

En esta sección, se identifican algunas de las propiedades de la descomposición estocástica del tiempo de espera virtual para el sistema de cola fluida que se está estudiando. Propiedades de descomposición estocástica se han estudiado en muchos modelos de vacaciones. La propiedad de descomposición estocástica clásica muestra que el tamaño del sistema estacionario en un punto arbitrario puede ser representado como la suma de dos variables aleatorias independientes, una de las cuales es el tamaño del sistema del correspondiente sistema de colas estándar sin vacaciones o fallas en el servidor y la otra variable depende de las vacaciones o fallas en casos específicos. En particular, en nuestros sistemas de cola fluida, tenemos los siguientes resultados de descomposición.

**Lema 4.4.1** *Existen dos variables aleatorias  $U$  y  $V$  tales que sus transformadas de Laplace-Stieltjes en  $\theta$  vienen dadas por:*

$$\mathbb{E}(e^{-\theta U}) = \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})}{\theta \mathbb{E}(\xi_1)}, \quad (4.8)$$

y

$$\mathbb{E}(e^{-\theta V}) = \frac{1 - \mathbb{E}(e^{-\theta \eta_1})}{\theta \mathbb{E}(\eta_1)} \quad (4.9)$$

Demostración: Puesto que  $\{W_{\tau_k}\} \xrightarrow{D} W^+$  y  $\{W_{\tau_k} - \xi_k\} \xrightarrow{D} W^-$  y  $W_{\tau_k} - (W_{\tau_k} - \xi_k) \xrightarrow{D} \xi_1 \geq 0$  entonces se tiene que  $W^+ > W^-$  c.s.

El lado derecho de la ecuación (4.8) es la transformada de Laplace-Stieltjes de la función

$$f(x) = \frac{\mathbb{P}(W^+ > x) - \mathbb{P}(W^- > x)}{\mathbb{E}(\xi_1)} \geq 0,$$

la cual es una función de densidad de probabilidad, desde que

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(W^+ > x) - \mathbb{P}(W^- > x)}{\mathbb{E}(\xi_1)} dx = \frac{\mathbb{E}(W^+) - \mathbb{E}(W^-)}{\mathbb{E}(\xi_1)} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1)}{\mathbb{E}(\xi_1)} = 1.$$

Así la transformada de Laplace-Stieltjes de una variable aleatoria  $U$  que tenga esta densidad viene dada por:

$$F(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x} \frac{\mathbb{P}(W^+ > x) - \mathbb{P}(W^- > x)}{\mathbb{E}(\xi_1)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\theta x} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{W^+ > x\}}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{W^- > x\}})}{\mathbb{E}(\xi_1)} dx \\
&= \mathbb{E} \left( \int_0^{W^+} \frac{e^{-\theta x}}{\mathbb{E}(\xi_1)} dx \right) - \mathbb{E} \left( \int_0^{W^-} \frac{e^{-\theta x}}{\mathbb{E}(\xi_1)} dx \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \frac{1 - e^{-\theta W^+}}{\theta \mathbb{E}(\xi_1)} \right) - \mathbb{E} \left( \frac{1 - e^{-\theta W^-}}{\theta \mathbb{E}(\xi_1)} \right) = \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})}{\theta \mathbb{E}(\xi_1)},
\end{aligned}$$

De otro lado, el lado derecho de la ecuación (4.9) es la transformada de Laplace-Stieltjes de la función

$$g(x) = \frac{\mathbb{P}(\eta_1 > x)}{\mathbb{E}(\eta_1)} \geq 0,$$

la cual es también una función de densidad de probabilidad, puesto que

$$\int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(\eta_1 > x)}{\mathbb{E}(\eta_1)} dx = \frac{\mathbb{E}(\eta_1)}{\mathbb{E}(\eta_1)} = 1$$

Así la transformada de Laplace-Stieltjes de una variable aleatoria  $V$  con densidad  $g$  viene dada por:

$$\begin{aligned}
G(\theta) &= \int_0^\infty e^{-\theta x} \frac{\mathbb{P}(\eta_1 > x)}{\mathbb{E}(\eta_1)} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta x} \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\eta_1 > x\}})}{\mathbb{E}(\eta_1)} dx \\
&= \mathbb{E} \left( \int_0^{\eta_1} \frac{e^{-\theta x}}{\mathbb{E}(\eta_1)} dx \right) = \frac{\mathbb{E}(1 - e^{-\theta \eta_1})}{\theta \mathbb{E}(\eta_1)} = \frac{1 - \mathbb{E}(e^{-\theta \eta_1})}{\theta \mathbb{E}(\eta_1)}.
\end{aligned}$$

□

Aplicando el lema 4.4.1, podemos obtener el siguiente teorema para caracterizar la propiedad de la descomposición estocástica

**Teorema 4.4.1** *Bajo las condiciones del teorema 4.2.1, la distribución de  $W$  es la convolución de dos distribuciones una de las cuales es la distribución de  $R$  y la otra es una mezcla de la distribución de  $U$  con probabilidad  $p$  y la distribución de  $V$  con probabilidad  $1 - p$ .*

Demostración: Se tiene que

$$\mathbb{E}(e^{-\theta R}) = \frac{\theta \varphi'(0)}{\varphi(\theta)},$$

Usando  $f_T = pf + (1 - p)g$  y las funciones  $f$  y  $g$  son las densidades de las variables aleatorias  $U$  y  $V$  del lema 4.4.1, entonces se tiene

$$\mathbb{E}(e^{-\theta T}) = p\mathbb{E}(e^{-\theta U}) + (1 - p)\mathbb{E}(e^{-\theta V}),$$

Usando lo anterior en la ecuación 4.4 del teorema 4.2.1 se tiene

$$\mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \mathbb{E}(e^{-\theta R * T}) = \mathbb{E}(e^{-\theta R})\mathbb{E}(e^{-\theta T}) = \frac{\theta\varphi'(0)}{\varphi(\theta)} \left[ p\mathbb{E}(e^{-\theta U}) + (1-p)\mathbb{E}(e^{-\theta V}) \right],$$

donde  $W = R * T$ , denota la convolución de  $R$  y  $T$

□

Además bajo ciertas condiciones, tenemos otro resultado de descomposición estocástica.

**Lema 4.4.2** *Bajo las condiciones del teorema 4.2.1, si las variables aleatorias  $\xi_n, n \geq 1$  son independientes de  $W_0, Y_{\tau_n}$  y  $\sum_{i=1}^{N_{\tau_n}^V} \eta_i$ , entonces tenemos*

$$\mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \frac{\theta\varphi'(0)}{\varphi(\theta)} \left[ p \frac{1 - \mathbb{E}(e^{-\theta\xi_1})}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) + (1-p) \frac{1 - \mathbb{E}(e^{-\theta\eta_1})}{\theta\mathbb{E}(\eta_1)} \right]$$

Demostración: Partiendo del hecho que  $\xi_k$  es independiente de  $W_{\tau_k} - \xi_k$  y

$$W_{\tau_k} - \xi_k = W_0 + Y_{\tau_n} + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i + \sum_{i=1}^{N_{\tau_k}^V} \eta_i,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta(W_{\tau_1} - \xi_1)}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W_{\tau_1}})}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} &= \frac{\mathbb{E}[(e^{-\theta(W_{\tau_1} - \xi_1)})(1 - \mathbb{E}(e^{-\theta\xi_1}))]}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} \\ &= \mathbb{E}(e^{-\theta(W_{\tau_1} - \xi_1)}) \frac{(1 - \mathbb{E}(e^{-\theta\xi_1}))}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} = \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) \frac{(1 - \mathbb{E}(e^{-\theta\xi_1}))}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} \end{aligned}$$

□

Desde el lema 4.4.1, obtenemos el siguiente teorema, que proporciona otra descomposición estocástica.

**Teorema 4.4.2** *Si los supuestos del lema 4.4.1 son satisfechos, entonces la distribución de  $U$  es la convolución de la distribución de  $W^-$  y la distribución estacionaria de vida residual de  $\xi_1$ .*

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\theta U}) &= \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} = \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) \frac{(1 - \mathbb{E}(e^{-\theta(W^+ - W^-)}))}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} \\ &= \mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) \frac{(1 - \mathbb{E}(e^{-\theta\xi_1}))}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} \end{aligned}$$

□

## Capítulo 5

### Simulación

En este capítulo hacemos un estudio de simulación particularizando nuestro modelo al caso que se ilustra a continuación. Para simular la dinámica de nuestro modelo y corroborar los resultados teóricos obtenidos en el capítulo anterior, consideremos como el proceso del tiempo de espera virtual en el tiempo  $t$ ; es decir, la representación en tiempo de la carga de trabajo en el tiempo  $t$  a:

$$W_t = W_0 + X_t - rt + \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{N_t^V} \eta_i, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

donde  $W_0$  es una carga inicial de trabajo,

$$N_t^R = \sup\{n \in \mathbb{N}^+ \mid \tau_n \leq t\},$$

$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0 \mid W_0 + X_t - rt + \sum_{i=1}^{N_t^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i = 0\} \quad (n \geq 1)$$

y

$$N_t^V = \sup\{n \in \mathbb{N}^+ \mid \sigma_n \leq t\}.$$

Aquí utilizaremos como subordinador a un proceso de Lévy Gamma  $\mathbf{X}$ , con parámetros  $a$  y  $b$ ; es decir, a un proceso  $\{X_t\}$  donde las variables aleatorias  $X_t$  tienen una distribución gamma de parámetros  $at$  y  $b$ , es decir  $X_t \sim \Gamma(at, b)$

De otro lado nuestros procesos de renovación  $\{N_t^R\}$  y  $\{N_t^V\}$  serán de Poisson con tasas  $\lambda_R$  para las fallas y  $\lambda_V$  para las vacaciones; esto es  $N_t^R \sim \mathcal{P}(\lambda_R t)$  y  $N_t^V \sim \mathcal{P}(\lambda_V t)$

Definimos el proceso de Lévy espectralmente positivo  $\{Y_t\}$  con  $Y_t = X_t - rt$ , seleccionaremos la tasa de servicio  $r$  adecuadamente para satisfacer las condiciones del modelo.

Finalmente consideremos que los tiempos de servicio y vacancia  $\xi_i$  y  $\eta_i$  siguen ambos una distribución exponencial de parámetros  $1/\alpha$  y  $1/\beta$  respectivamente; es decir  $\xi_i \sim \exp(1/\alpha)$  y  $\eta_i \sim \exp(1/\beta)$ ; siendo  $\alpha$  el tiempo medio de servicio que tomaría la reparación de la falla y  $\beta$  el tiempo medio que se toma la vacancia.

#### 5.1. Algoritmo para la simulación

En nuestra simulación usaremos el siguiente algoritmo:

1. Elegiremos un intervalo  $[0, T]$  y un valor de  $N$  para establecer una partición de tal forma

que tengamos los puntos:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , donde  $t_{i+1} - t_i = h = T/N$

2. Generamos los tiempos de fallas de acuerdo al proceso  $\{N_t^R\}$  con los correspondientes tiempos de reparación  $\xi_i$  y los tiempos de vacaciones de acuerdo al proceso  $\{N_t^V\}$  con los correspondientes tiempos de vacancia  $\eta_i$

3. Fijando  $W_0$  generamos  $W_1 = W_0 + X_h - rh + \sum_{i=1}^{N_h^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{N_h^V} \eta_i$ , donde  $r$  es un valor fijo.

4. Finalmente para  $i = 2$  hasta  $N$  hallamos  $W_i = W_{i-1} + X_h - rh + \sum_{i=1}^{N_h^R} \xi_i + \sum_{i=1}^{N_h^V} \eta_i$ ; si  $W_i > 0$  hacemos  $W_i = W_{i-1}$ , caso contrario hacemos  $W_i = W_{i-1} + X_h + \sum_{i=1}^{N_h^V} \eta_i$

Las siguientes figuras muestran el histograma y el gráfico de los tiempos de carga de trabajo para una simulación usando  $a = 3, b = 1, W_0 = 0,28, r = 10, \lambda_R = 18, \lambda_V = 26, 1/\alpha = 0,1, 1/\beta = 0,2, T = 1, N = 50, 100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000$ .

Las tablas adjuntas después de cada gráfico muestran los valores de media y varianza promedio obtenidos después de 100 simulaciones.

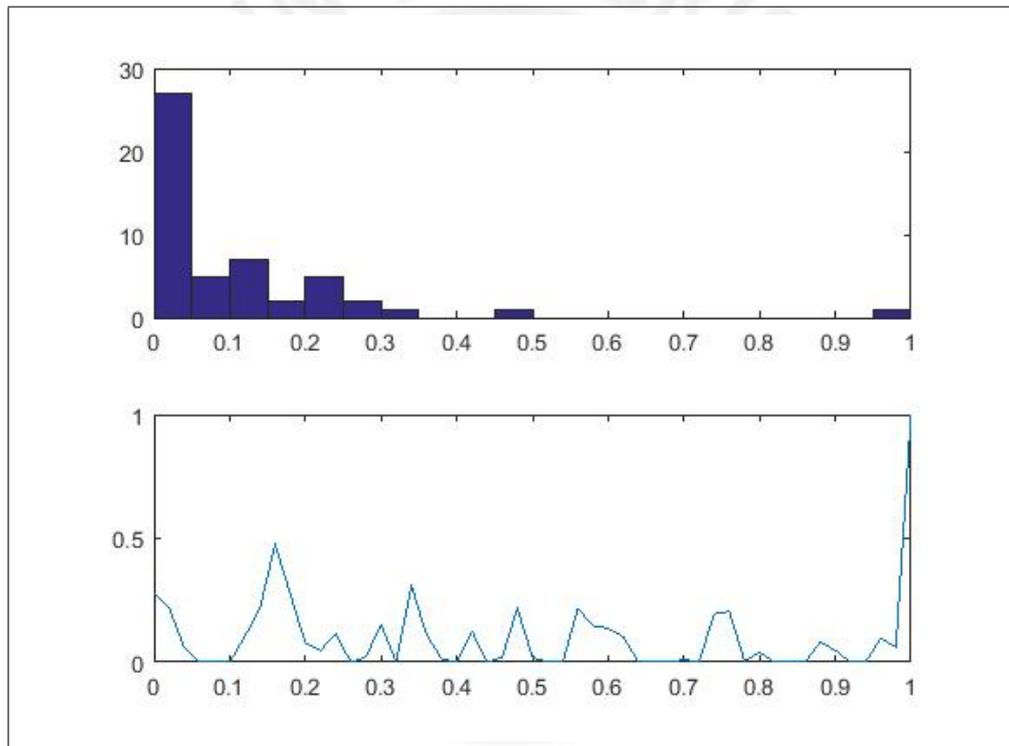


Figura 5.1: Histograma y simulación de tiempos de carga para  $N=50$ .

Media	Varianza
0.3022	0.2667

Tabla 5.1: Media y varianza para  $N=50$ .

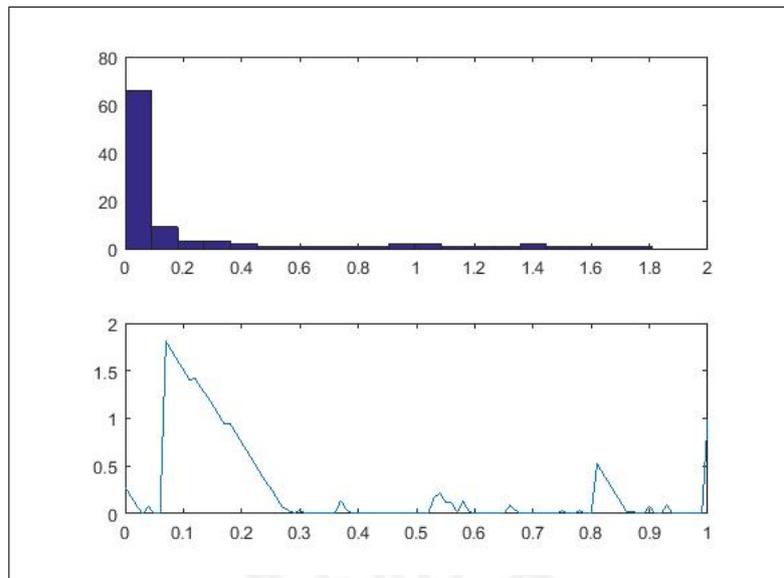


Figura 5.2: Histograma y simulación de tiempos de carga para N=100.

Media	Varianza
0.2810	0.2677

Tabla 5.2: Media y varianza para N=100.

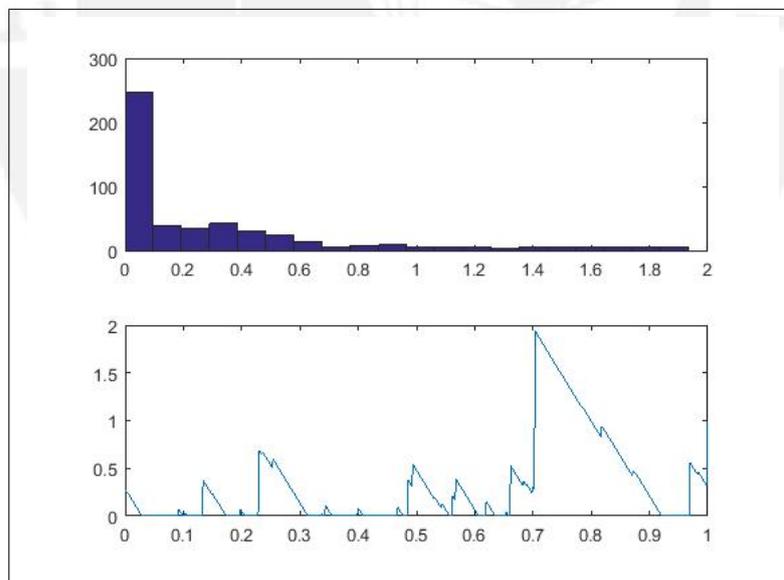


Figura 5.3: Histograma y simulación de tiempos de carga para N=500.

Media	Varianza
0.2860	0.2827

Tabla 5.3: Media y varianza para N=500.

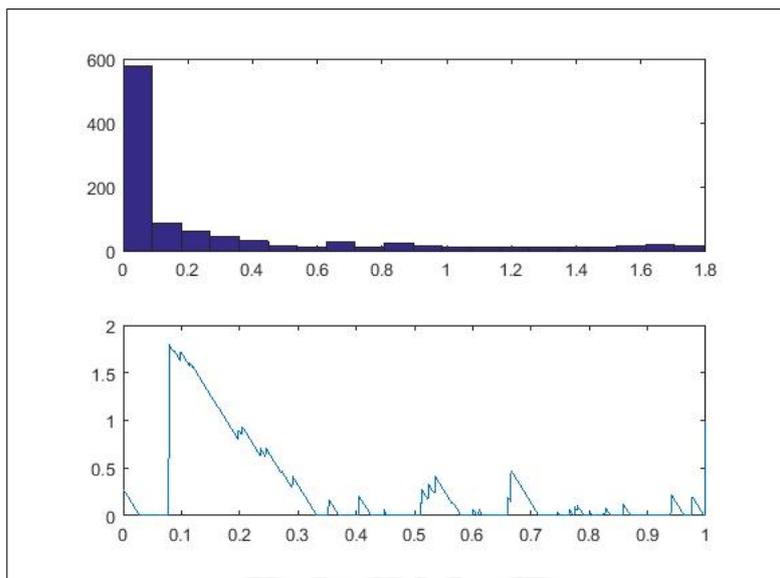


Figura 5.4: Histograma y simulación de tiempos de carga para N=1000.

Media	Varianza
0.3260	0.3218

Tabla 5.4: Media y varianza para N=1000.

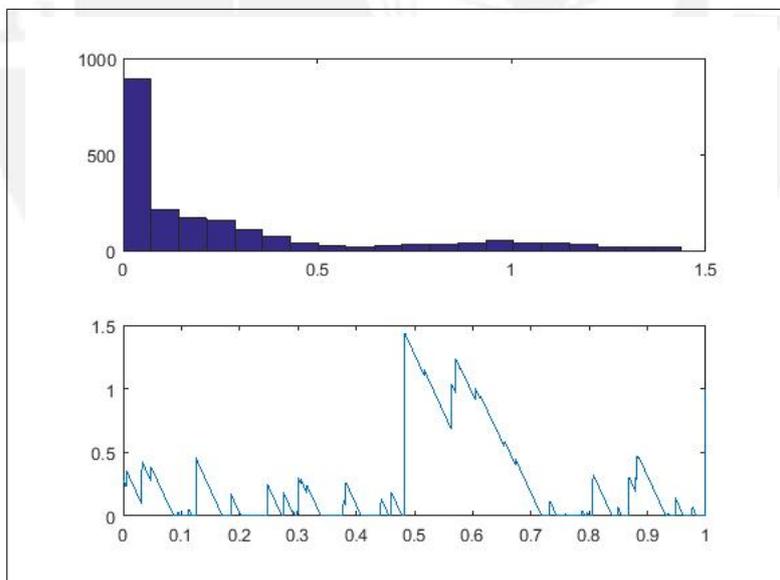


Figura 5.5: Histograma y simulación de tiempos de carga para N=2000.

Media	Varianza
0.3014	0.2743

Tabla 5.5: Media y varianza para N=2000.

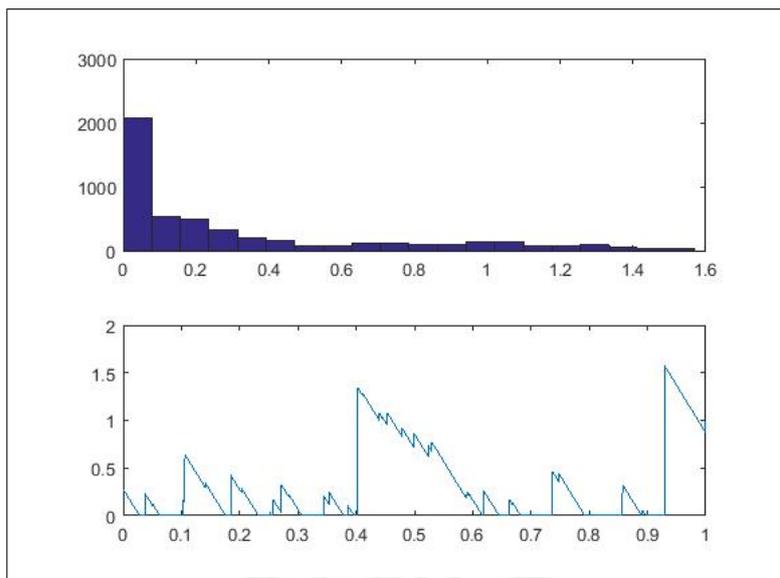


Figura 5.6: Histograma y simulación de tiempos de carga para N=5000.

Media	Varianza
0.2739	0.2412

Tabla 5.6: Media y varianza para N=5000.

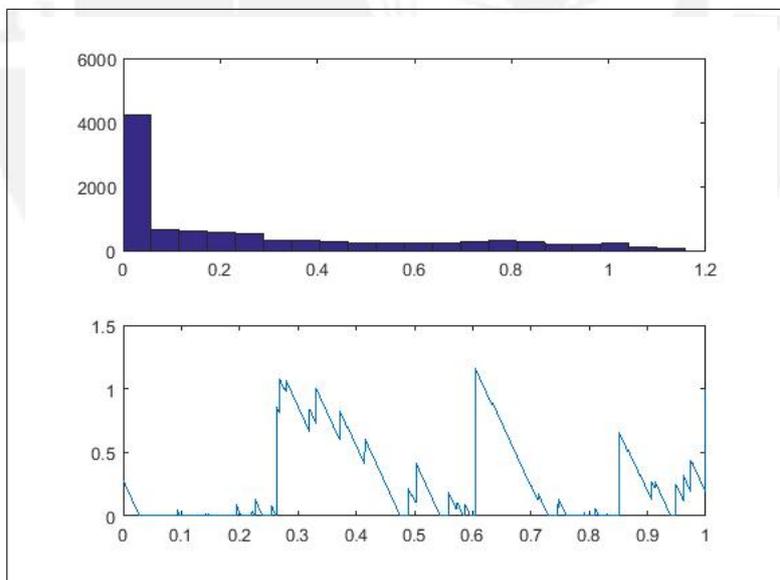


Figura 5.7: Histograma y simulación de tiempos de carga para N=10000.

Media	Varianza
0.2894	0.2508

Tabla 5.7: Media y varianza para N=10000.

## 5.2. Caracterización

Como indicamos en la sección 5.1, utilizaremos como subordinador a un proceso Lévy Gamma,  $X_t \sim \Gamma(at, b)$ . La transformada de Laplace-Stieltjes de este proceso  $\{X_t\}$  se caracteriza por:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta X_t}) = \left(\frac{b}{b+\theta}\right)^{at} = e^{-t(aLn(\frac{b+\theta}{b}))}$$

de donde, el proceso espectralmente positivo  $\mathbf{Y} = \{X_t - rt\}$ , entonces se caracteriza por el exponente

$$\varphi(\theta) = \phi(\theta) + r\theta = aLn\left(\frac{b}{b+\theta}\right) + r\theta,$$

siendo  $\phi(\theta) = aLn(\frac{b}{b+\theta})$  y  $\rho = -\phi(0) = \frac{a}{b}$

Puesto que los procesos  $\{W_{\tau_k}\}$  y  $\{W_{\tau_k} - \xi_k\}$  son procesos estacionarios y ergódicos que convergen espectralmente a  $W^+$  y  $W^-$ , se tiene que

$W^- \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_0 + X_{\tau_1} - r\tau_1$  y  $W^+ \stackrel{\mathcal{D}}{=} W^- + \xi_1$ , por tanto:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) = \mathbb{E}(e^{-\theta(X_{\tau_1} - r\tau_1)})$$

$$\mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) = \mathbb{E}(e^{-\theta(W^- + \xi_1)}) = \mathbb{E}(e^{-\theta(X_{\tau_1} - r\tau_1)})\mathbb{E}(e^{-\theta\xi_1})$$

Puesto que  $\tau_1 \sim Exp(\lambda_R)$ , se tiene que;  $\mathbb{E}(e^{-\theta(-r\tau_1)}) = \frac{\lambda_R}{\lambda_R - r\theta}$ .

De otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\theta X_{\tau_1}}) &= \int_0^{\infty} \mathbb{E}(e^{-\theta X_t}) \lambda_R e^{-\lambda_R t} dt = \lambda_R \int_0^{\infty} e^{-t(aLn(\frac{b+\theta}{b}))} e^{-\lambda_R t} dt \\ &= \lambda_R \int_0^{\infty} e^{-t(aLn(\frac{b+\theta}{b}) + \lambda_R)} dt = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R + aLn(\frac{b+\theta}{b})}\right) = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R - aLn(\frac{b}{b+\theta})}\right) \end{aligned}$$

De manera similar, como  $\xi_1 \sim Exp(1/\alpha)$ , se tiene que;  $\mathbb{E}(e^{-\theta\xi_1}) = \frac{1/\alpha}{1/\alpha + \theta}$ .

Así,  $\mathbb{E}(e^{-\theta(X_{\tau_1} - r\tau_1)}) = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R - (r\theta + aLn(\frac{b}{b+\theta}))}\right)$ .

Resumiendo todos estos cálculos, obtenemos finalmente que:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+}) = \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R - (r\theta + aLn(\frac{b}{b+\theta}))}\right) \left(\frac{\theta}{1/\alpha + \theta}\right)$$

Reemplazando lo anterior y el hecho de que  $\mathbb{E}(e^{-\theta\eta_1}) = \frac{1/\beta}{1/\beta + \theta}$  pues  $\eta_1 \sim Exp(1/\beta)$ , en la ecuación:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \frac{\theta\varphi'(0)}{\varphi(\theta)} \left[ p \frac{\mathbb{E}(e^{-\theta W^-}) - \mathbb{E}(e^{-\theta W^+})}{\theta\mathbb{E}(\xi_1)} + (1-p) \frac{1 - \mathbb{E}(e^{-\theta\eta_1})}{\theta\mathbb{E}(\eta_1)} \right], \quad (5.2)$$

donde  $p = \frac{\lambda_R \mathbb{E}(\xi_1)}{\varphi'(0)}$  y  $1 - p = \frac{\lambda_V \mathbb{E}(\eta_1)}{\varphi'(0)}$

Se tiene la siguiente caracterización

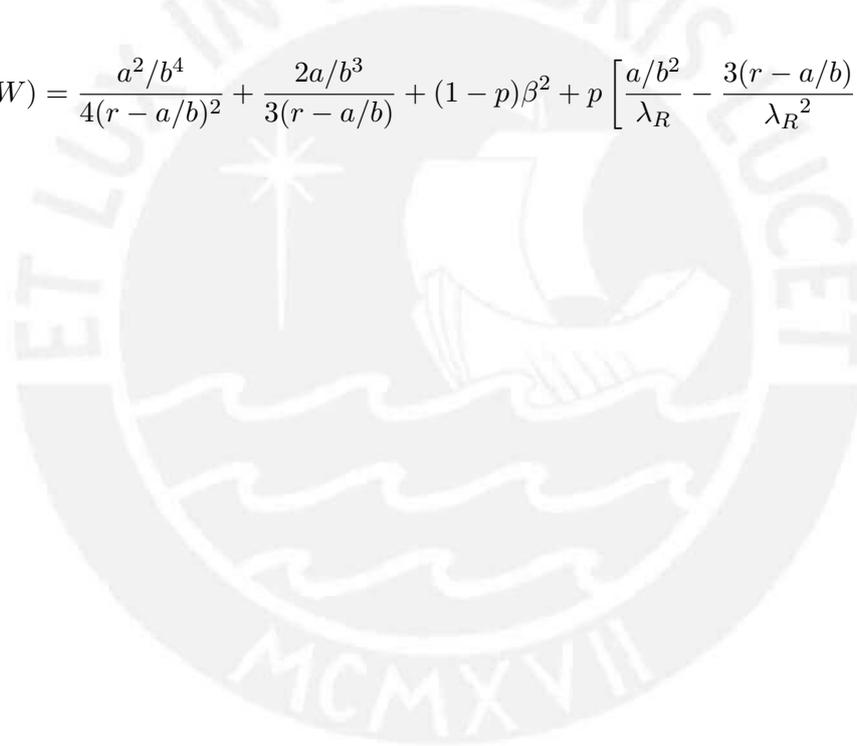
$$\mathbb{E}(e^{-\theta W}) = \frac{\theta(r - \frac{a}{b})}{a \text{Ln}(\frac{b}{b+\theta}) + r\theta} \left[ p \left( \frac{\lambda_R}{\lambda_R - (r\theta + a \text{Ln}(\frac{b}{b+\theta}))} \right) \left( \frac{1}{1 + \alpha\theta} \right) + (1 - p) \left( \frac{1}{1 + \beta\theta} \right) \right],$$

mediante diferenciación, podemos fácilmente obtener la media de esta distribución como:

$$\mathbb{E}(W) = \frac{a/b^2}{2(r - a/b)} + (1 - p)(\beta - \alpha),$$

diferenciando nuevamente se tiene  $\mathbb{E}(W^2)$  y este resultado se usa para obtener la varianza, usando la ecuación  $\mathbb{V}(W) = \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2$ . La varianza obtenida de esta distribución es:

$$\mathbb{V}(W) = \frac{a^2/b^4}{4(r - a/b)^2} + \frac{2a/b^3}{3(r - a/b)} + (1 - p)\beta^2 + p \left[ \frac{a/b^2}{\lambda_R} - \frac{3(r - a/b)}{\lambda_R^2} + \alpha^2 \right]$$



## Capítulo 6

### Conclusiones

El modelo de colas  $M/M/1 : DG/K/\infty$ , es un modelo tradicional, se basa en las tasas de llegadas y de servicios constantes; este modelo tiene una fuente de entrada ilimitada y la capacidad del sistema limitado. Los casos reales estas tasas son variables y dependen de factores, como: el horario, la carga del servidor, la eficiencia del sistema, el comportamiento de los clientes, las interrupciones del servidor. El modelo se basa en muchos supuestos para que sea valido, no tendría el alcance necesario y la certidumbre apropiada si se usaran estos factores reales.

El modelo de tiempo de carga de trabajo virtual  $W_t$ , considera las llegadas de carga de trabajo fluido bajo un proceso de Lévy  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t\}$ , esta llegada de trabajo es considerada a régimen continuo pero aleatorio, se puede considerar más real que los modelos de colas tradicionales. La única condición para que se alcance el estado estable, es que la tasa de servicio sea mayor al promedio de la tasa de llegadas, es decir, que se pueda procesar los trabajos de manera más rápida que los trabajos que llegan

Se deben usar procesos de renovación para las interrupciones por fallas y vacaciones del servidor, estos procesos en muchos sistemas reales se ajustan a los servicios de mantenimiento.

El modelo se puede usar para estudiar la carga de trabajo de cualquier sistema de colas, puesto que se basa en la carga del servidor, esto hace que la asignación de carga sea relativa al rendimiento del servidor independientemente del sistema de colas, por ejemplo, si se tiene dos estaciones en paralelo que realizan el mismo servicio, pero las tasas de fallas son diferentes, esto generará tiempos de carga diferentes para cada estación.

Los servidores se toman en forma independiente, es decir, cada servidor tiene su carga de trabajo por periodo de acuerdo al rendimiento histórico. La condición para que el modelo se ajuste a la realidad, es que el trabajo llegue continuamente a los servidores en forma independiente durante el periodo o jornada laboral.

Los tiempos de fallas y vacaciones están relacionados a los tiempos de ocupación previos del servidor, esto quiere decir, que si el servidor trabajo en forma ininterrumpida por un largo periodo, entonces las vacaciones y fallas son inminentes y prolongadas.

El modelo se puede emplear en un sistema de producción o en un sistema de servicios; en ambos casos es el servidor con sus fallas y vacaciones lo que se analizan.

La simulación usa un proceso de Lévy-Gamma para las llegadas de la carga de trabajo y usando los parámetros adecuados, se calculan la media y varianza, estos valores simulados para diferentes escenarios no difieren a los valores obtenidos por la caracterización del modelo con los mismos parámetros, es decir los valores simulados se ajustan a los valores teóricos.

Una forma diferente de estudiar el servidor con fallas y vacaciones es cuando la carga de trabajo no llega en forma fluida; en este caso las condiciones cambian y se tendría que estudiar un nuevo modelo.



## Apéndice A

### Transformada de Laplace-Stieltjes

**Definición A.0.1** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa con función de distribución  $F(\cdot)$ . La transformada de Laplace-Stieltjes de  $X$  es la función definida por:

$$\mathcal{H}(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta X}) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} dF(t), \theta \geq 0$$

Cuando la variable aleatoria  $X$  tiene una función de densidad  $f(\cdot)$ , entonces la transformada se simplifica a:

$$\mathcal{H}(\theta) = \mathbb{E}(e^{-\theta X}) = \int_0^{\infty} e^{-\theta t} f(t) dt, \theta \geq 0.$$

Note que  $|\mathcal{H}(\theta)| \leq 1$  para todo  $\theta \geq 0$ . Además

$$\mathcal{H}(0) = 1, \mathcal{H}'(0) = -\mathbb{E}(X), \mathcal{H}^{(k)}(0) = (-1)^k \mathbb{E}(X^k).$$

Para la transformación de la suma  $Z = X + Y$  de dos variables independientes  $X$  e  $Y$ , se tiene que

$$\mathbb{E}(e^{-\theta Z}) = \mathbb{E}(e^{-\theta(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{-\theta X})\mathbb{E}(e^{-\theta Y})$$

## Apéndice B

### Código

Se uso el siguiente código de MATLAB.

Código de Simulación de un periodo  $T$

```
p = [3,1,10,18,0.1,0.2]
a=p(1);
b=p(2);
r = p(3);
lambR=p(4);
lambV=26;
alfa=p(5);
beta=p(6);
Wo =0.280;
pe=lambR*alfa/(r-a/b);
T=1;
N=1000;
h=T/N;
W=0:h:T;
S=0:h:T;
tt = W;
W(1)=Wo;
X=gamrnd(a*h,1/b,1,N);
NR=poissrnd(lambR*h,1,N);
for i=2:N
W(i)=W(i-1)+ X(i)-r*h + sum(exprnd(alfa,1,NR(i)));
while W(i)<0
NV=poissrnd(lambV*h);
W(i)=sum(exprnd(alfa,1,NV));
end
end
V=[mean(W) var(W); m v]
subplot(2,1,1);
hist(W,20)
```

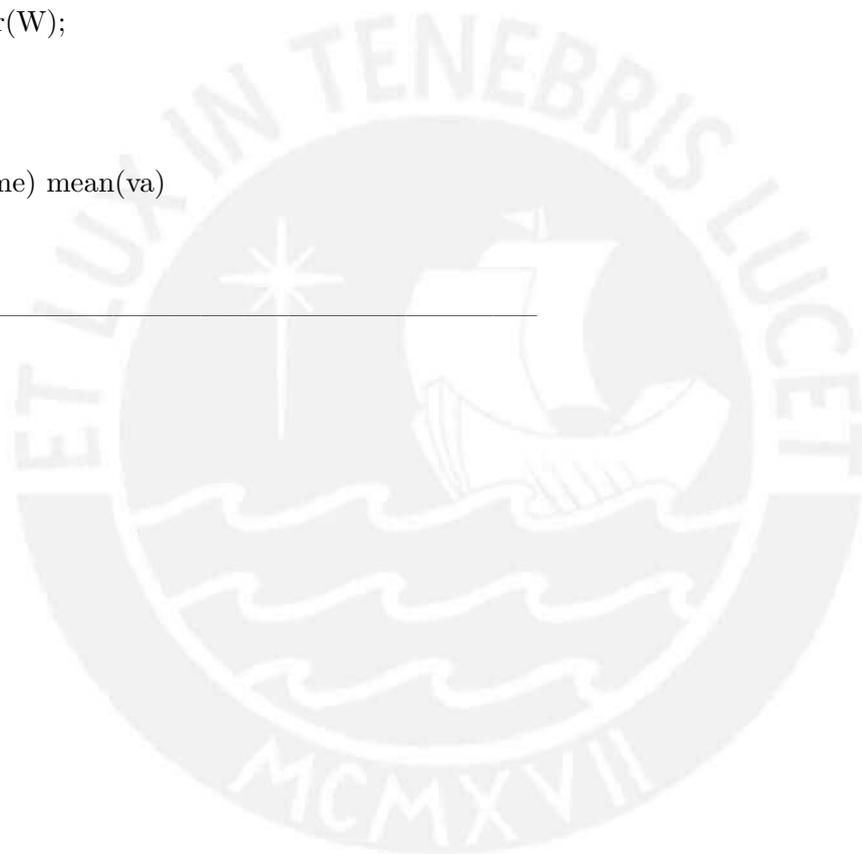
```
subplot(2,1,2);  
plot(tt,W)
```

---

Código para obtener 100 Simulaciones de un periodo  $T$

```
clear all;  
numsim = 100;  
me(1) = 0;  
va(1) = 0;  
for j=1:numsim  
Simula;  
me(j) = mean(W);  
va(j) = var(W);  
end  
me(2:end)  
va(2:end)  
mean(me) mean(va)
```

---



## Bibliografía

- Applebaum, D. (2004). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press.
- Chung, K. L. (1974). *A Course in Probability Theory*, Stanford University Academic Press, New York.
- Debicki, K. and Mandjes, M. (2015). *Queues and Lévy Fluctuation Theory*, Springer, Suiza.
- Glynn, P. and Whitt, W. (1988). Ordinary clt and wlln version of  $l=\lambda w^*$ , *MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH* **13**(4): 674–692.
- Grimmett, G. and Stirzaker, D. (1992). *Probability and Random Processes*, Oxford University Press.
- Hillier, F. S. and Liberman, G. J. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*, Mc Graw Hill, México.
- Kella, O., Boxma, O. and Mandjes, M. (2010). On lévy- driven vacation models with correlated busy periods and service interruptions, *Queueing Syst* **64**(3): 359–382.
- Kella, O. and Whitt, W. (1992). Useful martingales for stochastic storage processes with lévy input, *Journal of Applied Probability* **29**(2): 396–403.
- Papoulis, A. and Unnikrishna, P. S. (2002). *Probability, Random Variables, and stochastic Processes*, Mc Graw Hill, New York.
- Resnick, S. I. (1999). *A Probability Path*, Cornell University, Boston.
- Sato, K.-I. (2002). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, United Kingdom.
- Valdivieso, L. (2007). *Likelihood inference in processes of Ornstein-Uhlenbeck type*, K.U. Leuven, Faculteit Wetenschappen.
- Winston, W. (2005). *Investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos*, Thomson, México.
- Wu, J., Liu, Z. and Peng, Y. (2015). Lévy- driven fluid queue with server breakdowns and vacations, *arXiv* **1506**: 1–16.