

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS



COMBINACIÓN DE REGLAS DE PORTAFOLIO CON LA  
ASIGNACIÓN 1/N Y LA PONDERADA POR  
CAPITALIZACIÓN BURSÁTIL

TESIS PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAGISTER EN  
ESTADÍSTICA

Presentado por:

Augusto Fernando Rodríguez Alcocer

Asesor: Dr. Luis Valdivieso Serrano

Miembros del jurado:

Dr. Luis Carlos Chávez Bedoya Mercado

Dr. Oscar Edgardo Millones Destefano

Dr. Luis Hilmar Valdivieso Serrano

Lima, Julio 2016

## Dedicatoria

A las personas que me dan todos los motivos para seguir adelante, Santiago, Octavio y Cecilia.



## Agradecimientos

Agradezco al Dr. Luis Valdivieso por todo su apoyo, comprensión, paciencia y dirección en el desarrollo del presente trabajo. También agradezco al Dr. Jorge Luis Bazán, por todo el apoyo brindado al inicio de la elaboración de este documento. Finalmente, agradezco a Julio Villavicencio, amigo de los de antes, por su interés y tiempo para discutir enfoques sobre optimización de portafolios.



## Resumen

La teoría del portafolio estudia el proceso a través del cual se realiza la asignación óptima de activos. El análisis Media - Varianza (MV) propone que los agentes estructuran portafolios de inversión optimizando el retorno esperado o el riesgo. Así, fijando el nivel deseado de una de estas variables, es posible elaborar una frontera eficiente compuesta por portafolios óptimos. Sin embargo, si bien el análisis MV ha sido trabajado de manera extensa presenta una limitación: los parámetros reales no son conocidos sino estimados a partir de la observación de datos. Ello incorpora el problema de incertidumbre en la modelación, por lo que las reglas de portafolio óptimo están sujetas a errores aleatorios que pueden generar que los parámetros estimados se alejen de los reales. El objetivo del presente trabajo es revisar dicho análisis bajo el enfoque de reglas de portafolio, y si existe la posibilidad de reducir el riesgo de estimación a través de la combinación de las reglas con el portafolio de pesos iguales y con el portafolio ajustado por capitalización bursátil. Para la programación se utiliza el paquete estadístico *R - project*. Los resultados sugieren que la combinación de las reglas con los dos portafolios seleccionados puede mejorar los resultados fuera de muestra esperados y que bajo ciertas circunstancias, combinar con el portafolio de capitalización bursátil puede ser más eficiente que con el portafolio de pesos iguales.

**Palabras-clave:** Análisis Media - Varianza, selección de portafolios, incertidumbre de parámetros, desempeño fuera de muestra.

## Abstract

Portfolio theory examines how investors decide the optimal asset allocation. Mean - Variance (MV) analysis proposes that agents can construct portfolios to optimize expected return or the level of market risk. By setting a desired level in one of these variables, it is possible to obtain an efficient frontier of optimal portfolios. Despite the fact that the MV framework is still the main model used in practice, it has a limitation: the true parameters are unknown and have to be estimated from data, which introduces the parameter uncertainty problem since the estimated optimal portfolio rules are subject to random errors and can be substantially different from the true optimal rule. The aim of this document is to review the MV framework under the portfolio rules approach, and analyze if the combination of this rules with two portfolios, the  $1/N$  and the market capitalization portfolio, improves the expected out of sample performance of each rule. To program it we use the statistical package *R - project*. The results suggest that combining portfolio rules with the two selected portfolios can improve the expected out of sample performance and, under some circumstances, the combination with the market capitalization portfolio can be more efficient than with the  $1/N$  rule.

**Keywords:** Mean - Variance analysis, portfolio selection, parameter uncertainty, out of sample performance.

# Índice general

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Lista de Abreviaturas</b>  | <b>VIII</b> |
| <b>Lista de Símbolos</b>  | <b>IX</b>   |
| <b>Índice de figuras</b>  | <b>X</b>    |
| <b>Índice de cuadros</b>  | <b>XI</b>   |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>    |
| 1.1. Consideraciones Preliminares . . . . .   | 1           |
| 1.2. Objetivos . . . . .  | 3           |
| 1.3. Organización del Trabajo . . . . .   | 3           |
| <b>2. El análisis Media - Varianza (MV)</b>   | <b>5</b>    |
| 2.1. Conceptos preliminares de teoría del portafolio . . . . .  | 5           |
| 2.2. Formulación del problema de elección del portafolio . . . . .  | 10          |
| 2.2.1. La frontera eficiente bajo el análisis MV . . . . .  | 11          |
| 2.2.2. Formulación matemática del análisis MV . . . . .   | 12          |
| <b>3. Reglas para estimar los parámetros del análisis MV</b>  | <b>17</b>   |
| 3.1. Regla 1: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y sesgado para $\Sigma$ . . . . .                   | 20          |
| 3.1.1. Error de estimación con $\Sigma$ conocido y $\mu$ desconocido . . . . .  | 20          |
| 3.1.2. Error de estimación con $\mu$ conocido y $\Sigma$ desconocido . . . . .  | 21          |
| 3.1.3. Error de estimación con $\mu$ y $\Sigma$ desconocidos . . . . .  | 22          |
| 3.2. Regla 2: inferencia clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma$ . . . . .                             | 22          |
| 3.3. Regla 3: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$ . . . . .                           | 23          |
| 3.4. Regla 4: inferencia Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$ . . . . .   | 24          |
| 3.5. Regla 5: asignación óptima de dos fondos . . . . .   | 26          |
| 3.6. Regla 6: asignación óptima de tres fondos . . . . .  | 28          |
| <b>4. Combinación de reglas</b>   | <b>31</b>   |
| 4.1. Combinación de la regla 1: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y sesgado para $\Sigma$ . . . . . | 32          |
| 4.1.1. Combinación con $\omega_e$ . . . . .   | 32          |
| 4.1.2. Combinación con $\omega_{mk}$ . . . . .  | 34          |
| 4.2. Combinación de la regla 2: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y $\Sigma$ . . . . .              | 35          |

|   |           |
|---|-----------|
| 4.2.1. Combinación con $\omega_e$ . . . . .   | 35        |
| 4.2.2. Combinación con $\omega_{mk}$ . . . . .  | 36        |
| 4.3. Combinación de la regla 3: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$ . . . . . | 36        |
| 4.3.1. Combinación con $\omega_e$ . . . . .   | 36        |
| 4.3.2. Combinación con $\omega_{mk}$ . . . . .  | 38        |
| 4.4. Combinación de la regla 4: inferencia Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$ . . . . .               | 38        |
| 4.4.1. Combinación con $\omega_e$ . . . . .   | 38        |
| 4.4.2. Combinación con $\omega_{mk}$ . . . . .  | 39        |
| 4.5. Combinación de la regla 5: asignación óptima de dos fondos . . . . .                                       | 40        |
| 4.5.1. Combinación con $\omega_e$ . . . . .   | 40        |
| 4.5.2. Combinación con $\omega_{mk}$ . . . . .  | 40        |
| 4.6. Combinación de la regla 6: asignación óptima de tres fondos . . . . .                                      | 41        |
| 4.6.1. Combinación con $\omega_e$ . . . . .   | 41        |
| 4.6.2. Combinación con $\omega_{mk}$ . . . . .  | 42        |
| <b>5. Evaluación del desempeño esperado</b> . . . . .   | <b>43</b> |
| 5.1. Descripción de la simulación . . . . .   | 43        |
| 5.2. Estimación para $N = 5$ . . . . .  | 44        |
| 5.3. Estimación para $N = 10$ . . . . .   | 45        |
| <b>6. Conclusiones</b> . . . . .  | <b>49</b> |
| 6.1. Conclusiones . . . . .   | 49        |
| 6.2. Sugerencias para investigaciones futuras . . . . .   | 50        |
| <b>A. Distribuciones</b> . . . . .  | <b>51</b> |
| A.1. Distribución Normal Multivariada . . . . .   | 51        |
| A.2. Distribución $t$ - Student Multivariada . . . . .  | 51        |
| A.3. Distribución Wishart . . . . .   | 51        |
| A.4. Distribución Wishart Inversa . . . . .   | 52        |
| <b>B. Base de datos</b> . . . . .   | <b>53</b> |
| <b>C. Programación en R</b> . . . . .   | <b>58</b> |
| C.1. Análisis de los datos . . . . .  | 58        |
| C.2. Estimación de portafolios y reglas . . . . .   | 59        |
| C.3. Estimación de las combinaciones de las reglas . . . . .  | 60        |
| <b>Bibliografía</b> . . . . .   | <b>67</b> |

## Lista de Abreviaturas

|         |   |
|---------|---|
| 1/N     | Portafolio que invierte de manera igual en todos los activos que lo componen.   |
| AAPL    | Apple Inc.  |
| BAC     | Bank of America Corp.   |
| CVX     | Chevron Corp.   |
| EE.UU.  | Estados Unidos.   |
| FED     | Federal Reserve - Reserva Federal de Estados Unidos.                            |
| GE      | General Electric Co.  |
| IBM     | International Business Machines Corp.   |
| JNJ     | Johnson & Johnson.  |
| JPM     | JP Morgan Chase & Co.   |
| Mk      | Portafolio que invierte en función a la capitalización bursátil de sus activos. |
| MV      | Análisis Media - Varianza.  |
| PG      | Procter & Gamble.   |
| RS      | Ratio de <i>Sharpe</i> .  |
| S&P 500 | Índice Standard and Poors 500.  |
| USD     | Dólares Americanos.   |
| WFC     | Wells Fargo & Co.   |
| XOM     | Exxon Mobil Corp.   |

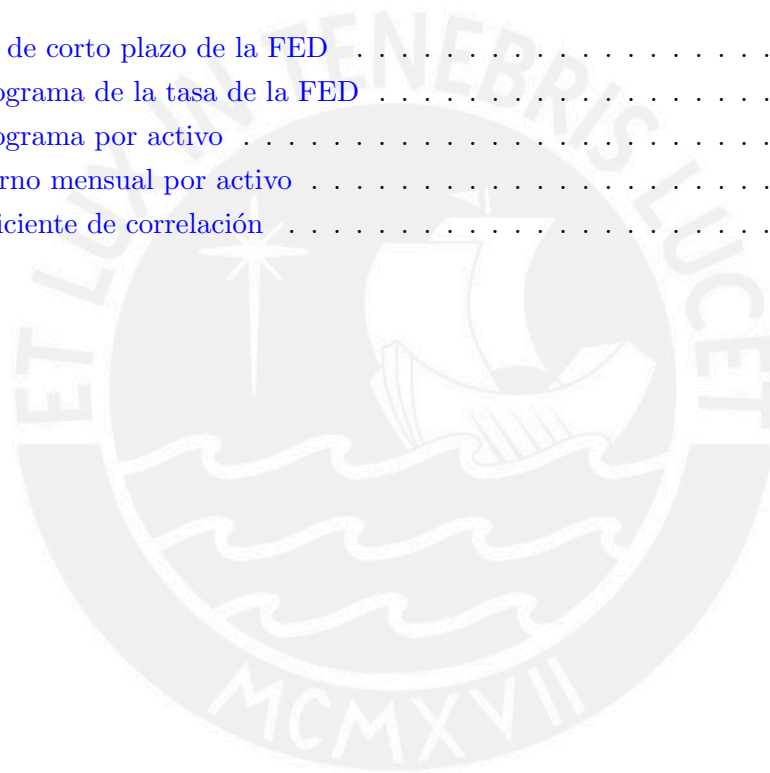


## Lista de Símbolos

|                        |   |
|------------------------|---|
| $\mu$                  | Media poblacional.  |
| $\hat{\mu}$            | Estimador de la media.  |
| $N$                    | Número de activos en el portafolio.   |
| $\omega$               | Vector de pesos óptimos.  |
| $\psi^2$               | Pendiente al cuadrado de la asíntota del portafolio de mínima varianza y la frontera eficiente. |
| $\hat{\psi}^2$         | Estimador de $\psi^2$ .   |
| $R_p$                  | Retorno del portafolio.   |
| $\rho_{i,j}$           | Correlación entre los activos $i$ y $j$ .   |
| $\Sigma$               | Matriz de covarianzas poblacional.  |
| $\hat{\Sigma}$         | Estimador de la matriz de covarianzas.  |
| $\bar{\Sigma}$         | Estimador insesgado de la matriz de covarianzas.  |
| $\tilde{\Sigma}$       | Estimador de la matriz de covarianzas insesgado para su inversa.                                |
| $\hat{\Sigma}^{Bayes}$ | Estimador Bayesiano para la matriz de covarianzas.  |
| $T$                    | Tamaño de muestra.  |
| $\theta^2$             | Ratio de Sharpe al cuadrado.  |
| $\hat{\theta}^2$       | Estimador de $\theta^2$ .   |
| $\tilde{U}$            | Desempeño esperado fuera de muestra de las diferentes reglas.                                   |

## Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 2.1. Riesgo diversificable y no diversificable . . . . .        | 7  |
| 2.2. Ganacias por correlación para dos activos . . . . .        | 9  |
| 2.3. Frontera de varianza mínima de activos riesgosos . . . . . | 12 |
| 2.4. Elección del portafolio óptimo . . . . .                   | 13 |
| B.1. Tasa de corto plazo de la FED . . . . .                    | 53 |
| B.2. Histograma de la tasa de la FED . . . . .                  | 54 |
| B.3. Histograma por activo . . . . .                            | 56 |
| B.4. Retorno mensual por activo . . . . .                       | 56 |
| B.5. Coeficiente de correlación . . . . .                       | 57 |



## Índice de cuadros

|   |    |
|---|----|
| 5.1. Desempeño fuera de muestra esperado para las reglas y sus combinaciones con N=5 activos . . . . .  | 46 |
| 5.2. Desempeño fuera de muestra esperado para las reglas y sus combinaciones con N=10 activos . . . . . | 48 |
| B.1. Acciones seleccionadas . . . . .   | 55 |
| B.2. Características de los datos . . . . .   | 55 |



## Capítulo 1

# Introducción

### 1.1. Consideraciones Preliminares

Markowitz (1952) definió un portafolio de inversión como una estructura que combina distintos activos financieros <sup>1</sup> con la finalidad de generar ganancias por diversificación. Será eficiente si obtiene el máximo retorno para un nivel de riesgo dado, o de manera análoga, el mínimo riesgo para un nivel de retorno dado. Tobin (1958) agregó el activo libre de riesgo al análisis y demostró que, al margen de aversión al riesgo del inversionista, su decisión se basa en asignar su riqueza en la línea que une el activo libre de riesgo y el portafolio tangente a la frontera que se obtiene a partir de las combinaciones de activos riesgosos. Este análisis, conocido como Media - Varianza (MV), plantea que la diversificación entre los activos con mayores retornos esperados ajustados por riesgo es beneficiosa para el inversionista, ya que la inversión sólo en activos con mayores retornos esperados induce a error, pues éstos suelen estar altamente correlacionados. Así, el observar sólo el retorno puede exponer al inversionista a riesgos que podrían ser eliminados a través de la diversificación.

Sin embargo, si bien el análisis MV ha sido trabajado de manera extensa presenta una limitación: los parámetros reales no son conocidos sino estimados a partir de la observación de datos. Ello incorpora el problema de incertidumbre de parámetros en la modelación, por lo que las reglas de portafolio óptimo están sujetas a errores aleatorios que pueden generar que los parámetros estimados se alejen de los reales, generando ineficiencia en la asignación de activos. Bawa et al. (1979) y Frost y Savarino (1986) estimaron el impacto del enfoque Bayesiano con priori no informativa e informativa, respectivamente, con la finalidad de reducir dicho error. Jorion (1986) analizó la aplicación del estimador shrinkage Bayes - Stein, y concluyó a través de simulaciones que dicha regla generaba desempeños esperados superiores a los obtenidos por el enfoque Bayesiano. Kan y Zhou (2007) trabajaron reglas de estimación, y propusieron la regla de tres portafolios a fin de reducir el riesgo de estimación a partir de la introducción en la optimización del portafolio de mínima varianza de la frontera eficiente, adicional al activo libre de riesgo y al portafolio tangente. Con ello mostraron, también a través de simulaciones, que la regla propuesta puede superar en el desempeño esperado a la trabajada por Jorion (1986).

DeMiguel et al. (2009) señalaron que el problema de incertidumbre de parámetros en la estimación de portafolios eficientes puede ser tan severo que, al margen de lo sofisticada que

---

<sup>1</sup>Bodie et al. (2008) definen un activo financiero como aquel que otorga derechos sobre los activos productivos o reales.

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

sea la regla, los resultados difícilmente superan a los obtenidos con un portafolio diversificado con asignación de pesos iguales entre los activos riesgosos (portafolio  $1/N$ ). Muestran que para que un portafolio generado a partir de una regla de estimación supere al  $1/N$  debe pasar un largo periodo de inversión: según la simulación aplicada al mercado de valores de EE.UU., los portafolios generados por reglas empiezan a superar al  $1/N$ , para el caso de 25 activos luego de 3,000 meses, y para el caso de 50 activos luego de 6,000 meses. Concluyen que aún faltan ajustar las distintas modelaciones para que se desarrollen metodologías que solucionen el problema de asignación ineficiente causado por el error de estimación.

Ante estos hallazgos, [Jun y Zhou \(2011\)](#) abordaron el problema de incertidumbre de parámetros con un nuevo enfoque. Ellos propusieron la combinación óptima de algunas de las reglas presentadas por [Kan y Zhou \(2007\)](#) con el portafolio  $1/N$ . A través de dicho análisis muestran que es posible alcanzar nuevas reglas que generan un desempeño esperado fuera de muestra que supera a los obtenidos de manera individual, ya sea por las reglas analizadas o por el portafolio  $1/N$ . En particular, concluyen que la regla de asignación óptima de tres fondos propuesta por [Kan y Zhou \(2007\)](#), combinada con el portafolio  $1/N$ , supera de manera consistente a las combinaciones de las otras reglas analizadas. Asimismo, mencionan que estos resultados se alcanzan con tamaños muestrales de 120 a 240 meses, y no 3,000 a 6,000, como señalan [DeMiguel et al. \(2009\)](#).

A la fecha, los trabajos de investigación suelen comparar el desempeño esperado fuera de muestra de los portafolios, ya sea bajo alguna regla de estimación, la asignación  $1/N$ , o a partir de combinaciones óptimas de ambas. Sin embargo, no existen muchas referencias respecto al impacto de incorporar el portafolio eficiente de mercado en el análisis de combinación de reglas. Como se sabe, partiendo del concepto de equilibrio global entre la oferta y demanda de activos, la teoría financiera concluye que el portafolio eficiente global es aquel compuesto por todos los activos disponibles, ponderados por su tamaño relativo. Así, la participación de cada activo dentro de dicho portafolio se obtiene de dividir su valor de mercado respecto a la sumatoria del valor de mercado de todos los activos disponibles. A este portafolio se le conoce como el ponderado por capitalización bursátil, al cual denotaremos portafolio  $Mk$ .

La incorporación de este portafolio resulta relevante por los siguientes motivos:

- A nivel global, los índices de mercado son diseñados a partir de una selección de activos que considera, básicamente, a aquellos con mayor capitalización bursátil. Hecha la selección, éstos se ponderan dentro del índice por el tamaño relativo de su capitalización respecto a la sumatoria total de la capitalización de todos los activos seleccionados. Estos índices constituyen las referencias en términos de rentabilidad y riesgo para los distintos gestores de portafolio.
- A nivel de estrategia de inversión, éstas pueden ser pasivas o activas. La estrategia pasiva consiste en replicar la composición de los índices de mercado. Por su parte, la estrategia activa consiste en sobre ponderar o sub ponderar los pesos de los índices de mercado en función a algún proceso de análisis u optimización de los activos. Así, ya sea el estilo de gestión pasivo o activo, se toma en consideración un índice de capitalización bursátil como punto de inicio.

- Finalmente, la gestión pasiva suele ser atractiva para los gestores, principalmente, por dos motivos. El primero, que el proceso de asignación de activos es bastante sencillo. El segundo, que esta estrategia reporta una muy baja rotación de activos, lo que la hace muy eficiente desde el punto de vista de los costos transaccionales. En el extremo, si uno adquiere la composición del índice en un momento del tiempo, asumiendo que el número de acciones del mismo se mantiene constante, no es necesario hacer ninguna operación de compra o venta posterior, ya que la variación de los precios reasignará los pesos de los activos dentro del portafolio, de manera que éste siempre se encuentre alineado con el índice de referencia.

Por las consideraciones señaladas, el estilo de gestión pasivo se encuentra bastante extendido entre los gestores a nivel global, por lo que resulta relevante tomar en consideración dentro del análisis de combinaciones de reglas, no sólo el portafolio  $1/N$ , sino también el ponderado por capitalización bursátil.

## 1.2. Objetivos

El objetivo general de la tesis es estudiar, comparar y simular a partir de un conjunto de datos reales las reglas de portafolio y la combinación de las mismas con los portafolios  $1/N$  y de capitalización bursátil. De manera específica se busca:

- Revisar la literatura acerca del análisis MV y de la estimación del desempeño esperado fuera de muestra de las distintas reglas de portafolio.
- Estimar la forma analítica de las combinaciones de las reglas de Kan y Zhou (2007) que no fueron consideradas por Jun y Zhou (2011), e incluir la óptima de tres fondos, ya que esta regla fue de manera consistente la más eficiente en la combinación con el portafolio  $1/N$ .
- Para las reglas consideradas, estimar la forma analítica de las combinaciones de dichas reglas con el portafolio ponderado por capitalización bursátil, a fin de comparar dichos resultados con las combinaciones hechas con el portafolio  $1/N$ .
- Simular a partir de datos reales el desempeño fuera de muestra de las reglas y de sus combinaciones con los dos portafolios propuestos. Las simulaciones considerarán repeticiones sobre distintos tamaños de muestra  $T$  y sobre distintos números de activos  $N$ .
- Implementar el programa de estimación y simulación de los desempeños esperados fuera de muestra para las reglas de portafolio consideradas y sus combinaciones.

## 1.3. Organización del Trabajo

En el capítulo 2 se detallan los aspectos relevantes de la teoría del portafolio, como el concepto de frontera eficiente y la elección del portafolio bajo el análisis MV. Asimismo, se estima la forma analítica del vector de pesos óptimos. En el capítulo 3 se presentan seis reglas de asignación trabajadas por Kan y Zhou (2007) para la estimación del portafolio tangente

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

bajo distintos supuestos sobre los parámetros. En el capítulo 4 se desarrolla la forma analítica de las combinaciones óptimas de cada regla con los portafolios  $1/N$  y el ponderado por capitalización bursátil. En el capítulo 5 se implementan estimaciones y repeticiones sobre distintos tamaños de muestra  $T$  y distinto número de activos  $N$  para las reglas de portafolio consideradas, así como para las combinaciones de cada regla con los dos portafolios seleccionados. La variable a ser estimada es el desempeño esperado fuera de muestra para cada regla y para cada una de sus combinaciones. Finalmente, en el capítulo 6 se discuten algunas conclusiones obtenidas en el presente trabajo. En dicha sección, se analizan las ventajas y desventajas de los enfoques mencionados.

En el anexo se presentan las funciones de densidad de las distribuciones trabajadas (Apéndice A), aspectos metodológicos para la elaboración de la base de datos (Apéndice B), y la programación implementada en  $R$  para el ejercicio de simulación (Apéndice C).





## Capítulo 2

# El análisis Media - Varianza (MV)

### 2.1. Conceptos preliminares de teoría del portafolio

Con la publicación de su trabajo, [Markowitz \(1952\)](#) dio inicio a la teoría moderna del portafolio. Él divide el proceso de estructuración de un portafolio en dos momentos. El primero comprende la observación de los activos y la acumulación de estas observaciones (experiencia), con lo cual los analistas forman sus expectativas respecto al desempeño futuro. El segundo comprende la elección de los activos que formarán parte del portafolio a partir de las expectativas en torno a su desempeño. Es en este punto donde centra su investigación.

Parte del supuesto que los agentes observan dos parámetros para sus elecciones, a saber, el retorno esperado y el riesgo de los activos. En términos de preferencias, el retorno es un atributo deseado y el riesgo es indeseado. Es decir, se considera al retorno como un bien y al riesgo como un mal en el proceso de elección del individuo. Este supuesto permite descartar que el inversionista únicamente maximice el retorno esperado de los activos disponibles, que implicaría la obtención de portafolios concentrados, cuando la diversificación permite eliminar parte del riesgo de las inversiones a partir de la combinación de activos.

El retorno de un activo en el momento  $t$  se suele medir como la primera diferencia del logaritmo de los precios en un intervalo de tiempo. Asumiendo composición continua en los retornos <sup>1</sup>, este tipo de medición permite transformar una estimación exponencial en lineal. Así:

$$r_{i,t} = \ln(P_{i,t}) - \ln(P_{i,t-1}), \quad (2.1)$$

donde:

- $r_{i,t}$ : retorno del activo  $i$  en  $t$ .
- $P_{i,t}$ : precio del activo  $i$  en  $t$ .
- $P_{i,t-1}$ : precio del activo  $i$  en  $t - 1$ .

[Tobin \(1958\)](#) agregó el activo libre de riesgo al análisis y demostró que, al margen de los excedentes y la aversión al riesgo del inversionista, su decisión se basa en asignar su riqueza

<sup>1</sup>Dado que el retorno  $r$  de un activo varía a lo largo de cada día, el intervalo de composición  $c$  en su capitalización para el intervalo  $[t - 1, t]$  se puede hacer infinitamente pequeño. Por ello, el precio en  $t$  de este activo se calcula como  $P_t = \lim_{c \rightarrow \infty} P_{t-1} \left(1 + \frac{r}{c}\right)^c = P_{t-1} \exp^r$ . De aplicar logaritmos a esta expresión se puede despejar el retorno  $r$ .



en la línea que une el activo libre de riesgo y el portafolio tangente a la frontera que se obtiene a partir de las combinaciones de activos riesgosos, lo que se denomina el Teorema de Separación. Así, a partir de  $r_{i,t}$  se estima el exceso de retorno  $R_{i,t}$ , el cual se define como la diferencia entre el retorno del activo menos el rendimiento del activo libre de riesgo  $R_f$ <sup>2</sup>, de donde se obtiene:

$$R_{i,t} = r_{i,t} - R_f, \quad (2.2)$$

donde:

- $R_{i,t}$ : exceso de retorno del activo  $i$  en  $t$ .
- $r_{i,t}$ : retorno del activo  $i$  en  $t$ .
- $R_f$ : retorno del activo libre de riesgo.

Este exceso de retorno refleja el premio para el inversionista por tomar posición en un activo riesgoso respecto al costo de oportunidad representado por el rendimiento del activo que no contiene riesgo.

Por su parte, el riesgo del activo  $i$  es medido como la desviación estándar  $\sigma_i$  de sus excesos de retorno, que por definición es igual a la raíz cuadrada de la varianza de  $R_{i,t}$ . Así,  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{V(R_{i,t})}$ . La ventaja de utilizar esta medida de dispersión como indicador del riesgo de un activo es que a diferencia de otras medidas está expresada en las mismas unidades que la serie de análisis.

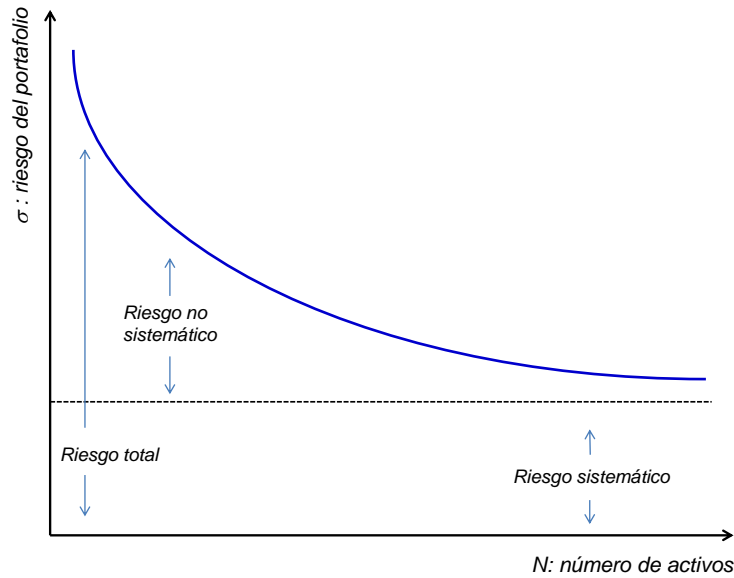
Markowitz (1952) propone que los agentes deben considerar el exceso de retorno esperado de cada activo  $\mu_i = E(R_{i,t})$  y el riesgo, buscando diversificar su inversión entre los activos con mayores retornos esperados ajustados por riesgo. El elegir sólo entre los activos con mayores retornos esperados induce a error: es común que estos retornos se encuentren altamente correlacionados, lo que implica la presencia de riesgo no sistemático en el portafolio (por ejemplo, el riesgo asociado a un sector económico en particular) que podría ser eliminado a través de la diversificación. Por otro lado, también se debe considerar que si bien la diversificación ayuda a reducir la varianza total del portafolio, ésta no puede ser eliminada del todo, lo que implica la existencia de riesgo sistemático (por ejemplo, el riesgo asociado al desempeño global de la economía), que no se puede eliminar (ver figura 2.1).

El retorno  $r_t$  en los  $N$  activos que conforman un portafolio de inversión en el periodo  $t$  se representan mediante el vector  $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{Nt})'$ . Así, el exceso de retorno  $R_t$  se define como  $R_t = r_t - R_f \mathbf{1}$ , donde  $\mathbf{1}$  es un vector  $N \times 1$ .

El peso asignado a cada activo es la fracción de una unidad monetaria invertida en el mismo, y está representado por el vector  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)'$ . Así, el exceso de retorno del portafolio en el periodo  $t$  está definido por:

<sup>2</sup>Por definición el activo libre de riesgo es aquel que registra una desviación estándar igual a 0. Se asume que la tasa de la deuda del gobierno del país donde se hace el análisis es la libre de riesgo.

Figura 2.1: Riesgo diversificable y no diversificable



$$R_p = \sum_{i=1}^N \omega_i R_{i,t} = \omega' R_t. \quad (2.3)$$

Por tanto, el exceso de retorno esperado del portafolio  $R_p$  expresado en términos de desvío respecto al activo libre de riesgo viene dado por:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N \omega_i E(R_{i,t}) = \sum_{i=1}^N \omega' \mu_i = \omega' \mu = \mu_p. \quad (2.4)$$

La varianza del portafolio se define como:

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j Cov(R_{i,t}, R_{j,t}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{i,j} = \omega' \Sigma \omega = \sigma_p^2, \quad (2.5)$$

donde  $\sigma_{i,j} = Cov(R_{i,t}, R_{j,t}) = Cov(r_{i,t}, r_{j,t})$  es la covarianza entre los retornos de los activos  $i$  y  $j$ , y  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas. Cabe señalar que la covarianza se puede normalizar dividiéndola entre el producto de las desviaciones estándar de los dos activos, obteniéndose el siguiente coeficiente de correlación  $\rho_{i,j}$  entre los activos  $i$  y  $j$ :

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (2.6)$$

La utilidad de esta normalización es que dicho coeficiente tiene sus valores acotados entre  $-1$  y  $1$ . Estas cotas permiten saber con precisión el grado de variación conjunta que experimentan los rendimientos de dos activos financieros. Así, el riesgo del portafolio también se puede expresar como:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}. \quad (2.7)$$

### Importancia de la correlación: el portafolio de dos activos

Para entender el impacto de la correlación de los activos sobre el riesgo total del portafolio, resulta gráfico analizar el caso de un portafolio compuesto por tan sólo dos activos,  $A$  y  $B$ , donde:

- $R_A$  : exceso de retorno del activo  $A$ .
- $R_B$  : exceso de retorno del activo  $B$ .
- $\sigma_A$  : desviación estándar del retorno del activo  $A$ .
- $\sigma_B$  : desviación estándar del retorno del activo  $B$ .
- $\omega$  : fracción de una unidad monetaria invertida en el activo  $A$ .
- $1 - \omega$  : fracción de una unidad monetaria invertida en el activo  $B$ .
- $\rho_{A,B}$  : coeficiente de correlación del retorno del activo  $A$  y del retorno del activo  $B$ .
- $R_p$  : exceso de retorno del portafolio.
- $\sigma_p$  : desviación estándar del portafolio.

El exceso de retorno de este portafolio se define como:

$$R_p = \omega R_A + (1 - \omega) R_B$$

. El riesgo expresado en función a la correlación entre los activos es igual a:

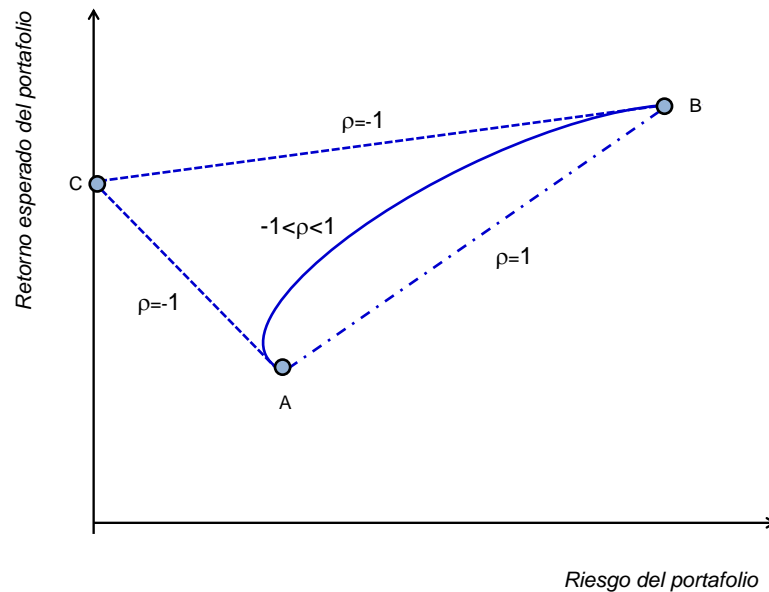
$$\sigma_p = \left[ \omega^2 \sigma_A^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_B^2 + 2 \omega (1 - \omega) \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} \right]^{1/2}$$

La figura 2.2 muestra el retorno esperado y el riesgo para el portafolio compuesto por los activos  $A$  y  $B$ , e ilustra el impacto de la correlación sobre el resultado de la cartera.

Cuando  $\rho$  es igual a 1, el riesgo del portafolio es:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \left[ \omega^2 \sigma_A^2 + (1 - \omega)^2 \sigma_B^2 + 2 \omega (1 - \omega) \sigma_A \sigma_B \right]^{1/2} \\ &= [\omega \sigma_A + (1 - \omega) \sigma_B], \end{aligned}$$

Figura 2.2: Ganancias por correlación para dos activos



que es la recta que une los puntos A y B. Así, al ser el riesgo una combinación lineal de los riesgos de los dos activos, no se registran ganancias por diversificación.

Cuando  $\rho$  es igual a  $-1$ , el riesgo del portafolio es:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \left( [\omega \sigma_A - (1 - \omega) \sigma_B]^2 \right)^{1/2} \\ &= |\omega \sigma_A - (1 - \omega) \sigma_B|. \end{aligned}$$

A mayor  $\omega$ , el punto correspondiente estará más cerca del riesgo del activo A. La recta CA registra como riesgo la combinación  $\sigma_p = \omega \sigma_A - (1 - \omega) \sigma_B$ . En el punto C se alcanza un nivel de riesgo  $\sigma_p = 0$ , con  $\omega = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$ . La combinación  $\omega \sigma_A - (1 - \omega) \sigma_B$  se mantiene positiva hasta el punto  $\omega = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$ .

Cuando  $\omega > \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$ , el valor de la combinación se traslada a la recta CB. En este caso, cuando la correlación alcanza el valor de  $-1$ , se aprecia que el riesgo del portafolio puede ser eliminado.

Finalmente, cuando la correlación se encuentra entre  $-1$  y  $1$ , es posible hallar un portafolio  $\omega$  de mínimo riesgo a partir de la siguiente derivación:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \omega} = 2\omega \sigma_A^2 - 2(1 - \omega) \sigma_B^2 + 2(1 - 2\omega) \rho \sigma_A \sigma_B = 0$$

De la expresión anterior se obtiene que:

$$\omega = \frac{\sigma_B^2 + \rho \sigma_A \sigma_B}{\sigma_A^2 - 2\rho \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2}$$

En este caso, es posible reducir el riesgo del portafolio a partir de la combinación de los dos activos, pero sin llegar a eliminarlo del todo.

Cabe señalar que en un portafolio compuesto por más de dos activos no va a ser posible eliminar el riesgo por completo, ya que no es factible que la totalidad de combinaciones de cada par de activos registren todas una correlación de -1. Así, la desviación estándar del portafolio mide el riesgo sistemático. A pesar de esa imposibilidad, mientras haya pares de activos que registren correlaciones negativas, habrá espacio para reducir de forma significativa el riesgo no sistemático. Sin embargo, no se debe perder de vista que el beneficio por diversificación existirá siempre que los activos que conforman el portafolio no mantengan una alta correlación entre sí, sin necesidad que sea negativa.

## 2.2. Formulación del problema de elección del portafolio

El Teorema de Separación planteado por Tobin (1958) implica que el inversionista puede dividir el problema de asignación óptima de su portafolio de inversión en dos pasos. En el primero, dada una distribución conjunta de retornos de los activos riesgosos y el activo libre de riesgo, elige el portafolio óptimo de activos riesgosos. En el segundo, dado el retorno esperado del portafolio riesgoso y del activo libre de riesgo, y considerando su parámetro de aversión al riesgo y su riqueza, divide sus excedentes entre el portafolio riesgoso y el activo libre de riesgo.

Así, el análisis Media - Varianza (MV) asume que los inversionistas son racionales, por lo que tendrán preferencia por el portafolio con la mayor expectativa de retorno para un nivel de riesgo definido. De manera análoga, un inversionista preferirá el portafolio de menor riesgo para un nivel de retorno esperado definido. Aquellos portafolios óptimos en ambos sentidos formarán la frontera eficiente. El inversionista mantendrá el portafolio invertido durante un periodo  $\tau$  con el objetivo de maximizar su riqueza en el horizonte de inversión  $T + \tau$ , donde  $T$  es el momento donde se invierte en el portafolio. Según Rachev et al. (2008) y Kan y Zhou (2007), el análisis MV puede ser expresado, ya sea a través del problema:

$$\begin{aligned}
 \min \sigma_p^2 &= \min \omega' \Sigma_{T+\tau} \omega \\
 \text{sujeto a } \omega' \mu_{T+\tau} &\geq \mu^* \\
 \omega' \mathbf{1} &= 1,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde  $\mathbf{1}$  es un vector  $N \times 1$  de unos y  $\mu^*$  es el retorno esperado mínimo aceptable del portafolio, o a través del problema:

$$\begin{aligned}
 \max \mu_p &= \max \omega' \mu_{T+\tau} \\
 \text{sujeto a } \omega' \Sigma_{T+\tau} \omega &\leq \sigma^{2*} \\
 \omega' \mathbf{1} &= 1,
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde  $\sigma^{2*}$  es el máximo nivel de riesgo aceptado del portafolio. Se agrega el sub índice  $T + \tau$  en la notación del retorno esperado y la covarianza a fin de recalcar que se hace referencia a

atributos de retornos aún no observados.

Una tercera formulación del problema de optimización del portafolio presentada por [Rachev et al. \(2008\)](#) plantea la maximización de la función de utilidad esperada del inversionista:

$$\begin{aligned} \max E [U (\omega' R_{T+\tau})] &= \int U (\omega' R_{T+\tau}) p_{T+\tau} (R_{T+\tau} | \mu, \Sigma) dR_{T+\tau} \\ &\text{sujeto a } \omega' \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En este caso, la utilidad esperada está expresada con respecto a la distribución  $p_{T+\tau}$  de los retornos futuros. Se puede interpretar este esperado como la suma ponderada de las utilidades que generan los retornos del portafolio, con las probabilidades de los retornos futuros tomadas como pesos.

La función de utilidad esperada por el inversionista al momento  $T + \tau$  toma la forma:

$$E [U (\omega' R_{T+\tau})] = \mu_p - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2, \quad (2.11)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro de aversión al riesgo, una medida de la tasa a la que el inversionista está dispuesto a asumir riesgo adicional por un incremento de una unidad en el retorno esperado. [Tobin \(1958\)](#) mostró que para que el análisis Media - Varianza sea consistente con la maximización de la utilidad esperada, la función de utilidad debe ser cuadrática o los retornos de los posibles portafolios deben registrar una distribución conjunta *Normal*. En línea con lo anterior, el análisis de la forma cuadrática de la función de utilidad esperada presentada por [Rachev et al. \(2008\)](#) se encuentra bastante extendida y se deriva a partir de una aproximación de Taylor.

### 2.2.1. La frontera eficiente bajo el análisis MV

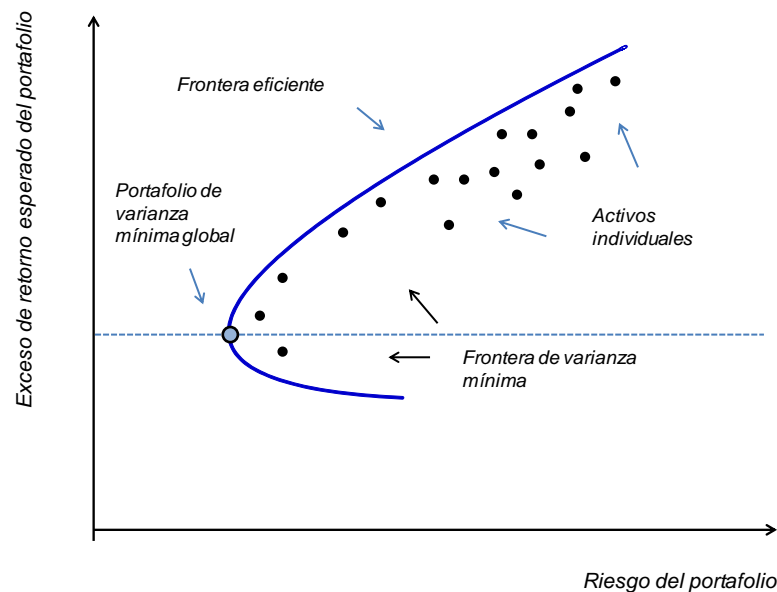
La figura 2.3 muestra que, para la obtención de la frontera eficiente se debe determinar, entre las distintas combinaciones de activos riesgosos, aquellas que componen la frontera de varianza mínima. Para ello, se van probando distintos niveles de  $\mu^*$  o de  $\sigma^{2*}$  a fin de obtener la secuencia de portafolios óptimos. Cabe señalar que todos los activos riesgosos individuales caen al lado derecho de la frontera, lo que implica que invertir en un único activo es ineficiente, ya que la diversificación permite obtener portafolios de mayor retorno esperado y menor riesgo.

Identificada la frontera de varianza mínima, se puede apreciar que a partir del portafolio de mínima varianza global, moviéndose hacia la derecha, todos los portafolios en la frontera son candidatos a portafolio óptimo. Este segmento de la frontera de varianza mínima se denomina frontera eficiente. Cabe señalar que los portafolios que están por debajo del de mínima varianza global son dominados, ya que siempre es posible encontrar en la frontera eficiente un portafolio de igual riesgo pero con mayor expectativa de retorno.

Obtenida la frontera, es necesario plantear un criterio de comparación entre portafolios eficientes a fin de elegir el óptimo. Una medida del desempeño del portafolio que facilita esta comparación es el ratio de [Sharpe \(1994\)](#). Éste calcula el exceso de retorno esperado por unidad de riesgo. El numerador del ratio se interpreta como el premio por riesgo, y el



Figura 2.3: Frontera de varianza mínima de activos riesgosos



denominador es el riesgo del portafolio. Así, la cartera más deseable para un inversionista es aquella que maximiza el ratio de Sharpe:

$$RS_P = \frac{\mu_p}{\sigma_p}, \quad (2.12)$$

donde:

- $\mu_p$ : exceso de retorno esperado del portafolio  $p$ .
- $\sigma_p$ : riesgo del portafolio  $p$  medido como la desviación estándar.

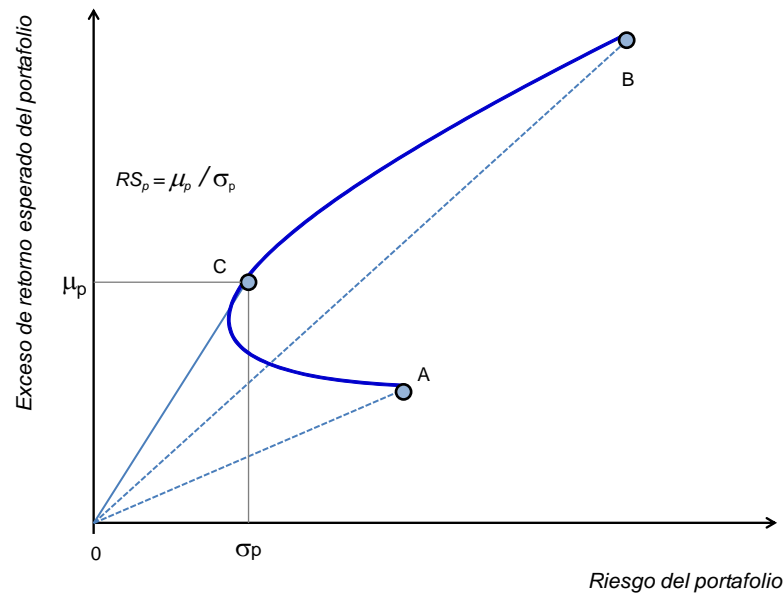
La figura 2.4 muestra la elección del portafolio óptimo dentro de la frontera eficiente. Las pendientes de las rectas que parten del origen son equivalentes al ratio de Sharpe. Así, se puede verificar que el portafolio donde se maximiza el exceso de retorno por unidad de riesgo es aquel donde la recta es tangente con la frontera eficiente (portafolio  $C$ ), ya que es la mayor pendiente que se puede obtener al combinar con el conjunto factible de portafolios de inversión. Se parte del origen ya que el retorno esperado está expresado en desvíos respecto al activo libre de riesgo. Cabe señalar que esta recta se conoce como *línea del mercado de capitales*.

### 2.2.2. Formulación matemática del análisis MV

#### Maximizando la utilidad

Kan y Zhou (2007) señalan que el inversionista elige  $\omega$  de tal manera que le permita

Figura 2.4: Elección del portafolio óptimo



maximizar su función de utilidad objetivo definida por:

$$U(\omega) = \mu_p - \frac{\gamma}{2} \sigma_p^2, \tag{2.13}$$

donde:

- $\mu_p = \omega' \mu$  es el exceso de retorno esperado del portafolio.
- $\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$  es la varianza del portafolio.
- $\gamma$  es el parámetro de aversión al riesgo del inversionista.

Si  $\mu$  y  $\Sigma$  son conocidos, la optimización del inversionista pasa por resolver:

$$\frac{\partial U(\omega)}{\partial \omega} = \mu - \gamma \Sigma \omega = 0, \tag{2.14}$$

de donde se obtiene la solución:

$$\omega^* = \frac{\Sigma^{-1} \mu}{\gamma}. \tag{2.15}$$

Cabe señalar que este ejercicio de optimización no incorpora la restricción que  $\omega^*$  sume uno. Por ello, el inversionista invertirá  $\omega^*$  en los activos riesgosos y  $1 - \omega^*$  en el activo libre de riesgo. A partir de  $\omega^*$ , la función de utilidad del inversionista toma la forma:



$$\begin{aligned}
 U(\omega^*) &= \frac{\mu' \Sigma^{-1} \mu}{\gamma} - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\Sigma^{-1} \mu}{\gamma} \right)' \Sigma \left( \frac{\Sigma^{-1} \mu}{\gamma} \right) \\
 &= \frac{\mu' \Sigma^{-1} \mu}{\gamma} - \frac{\mu' \Sigma^{-1} \mu}{2\gamma} \\
 &= \frac{\mu' \Sigma^{-1} \mu}{2\gamma} = \frac{\theta^2}{2\gamma},
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde  $\theta^2 = \mu' \Sigma^{-1} \mu$  es el ratio de Sharpe al cuadrado. Así, dado el parámetro de aversión al riesgo  $\gamma$ ,  $U(\omega^*)$  es la máxima utilidad que el inversionista puede obtener dado el vector de pesos  $\omega^*$  y los parámetros reales.

### Minimizando el riesgo

Se puede también hallar el vector de pesos de los activos que componen un portafolio de retorno esperado  $\mu_p$  a través del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
 \min \sigma_p^2 &= \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{i,j} \\
 \text{sujeto a } &\sum_{i=1}^N \omega_i \mu_i = \mu_p \\
 &\sum_{i=1}^N \omega_i = 1.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

En él, dado el nivel de retorno esperado del portafolio  $\mu_p$ , el inversionista busca minimizar el nivel de riesgo  $\sigma_p^2$ . Para resolver este problema se plantea el *lagrangiano*:

$$L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \sigma_{i,j} - \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^N \omega_i - 1 \right) - \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^N \omega_i \mu_i - \mu_p \right), \tag{2.18}$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los multiplicadores de *Lagrange*.

De diferenciar  $L$  con respecto a cada  $\omega_i$  y a los multiplicadores e igualar a cero se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = \sum_{j=1}^N \omega_j \sigma_{i,j} - \lambda_1 - \lambda_2 \mu_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^N \omega_i - 1 = 0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^N \omega_i \mu_i - \mu_p = 0. \tag{2.21}$$

De la ecuación (2.19), los pesos del portafolio admiten una solución de la forma:

$$\omega^* = \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mu_i), \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)'$  y  $\mu_i = E(R_{i,t}) = E(R_{1,t}, \dots, R_{N,t})'$ . Para determinar  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se aplican las dos restricciones:

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \Sigma \omega^* = \lambda_1 \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu_i \quad (2.23)$$

$$\mu_p = \mu_i' \Sigma^{-1} \Sigma \omega^* = \lambda_1 \mu_i' \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \mu_i' \Sigma^{-1} \mu_i. \quad (2.24)$$

Se definen:

$$a = \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

$$b = \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu_i$$

$$c = \mu_i' \Sigma^{-1} \mu_i.$$

Por tanto,  $\mathbf{1} = \lambda_1 a + \lambda_2 b$  y  $\mu_p = \lambda_1 b + \lambda_2 c$ . Resolviendo se obtiene que:

$$\lambda_1 = \frac{c - b\mu_p}{\Delta}$$

$$\lambda_2 = \frac{a\mu_p - b}{\Delta},$$

donde  $\Delta = ac - b^2$ . Cabe resaltar que tanto  $\lambda_1$  como  $\lambda_2$  dependen de  $\mu_p$ , que es el objetivo de retorno del portafolio definido en el problema de minimización del riesgo. Así, dado  $\mu_p$ , se obtiene  $\lambda_1 = \frac{c - b\mu_p}{\Delta}$  y  $\lambda_2 = \frac{a\mu_p - b}{\Delta}$ , y el peso óptimo  $\omega^* = \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mu_i)$ .

Para hallar el portafolio de varianza mínima se realiza una segunda derivación:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \mu_p} = \frac{2a\mu_p - 2b}{\Delta} = 0,$$

de donde se obtiene que  $\mu_p = \frac{b}{a}$  y  $\sigma_p^2 = \frac{1}{a}$ . En este caso  $\lambda_1 = \frac{1}{a}$  y  $\lambda_2 = 0$ .

Así, el vector de pesos con el que se obtiene el portafolio de varianza mínima global es:

$$\omega_{mg} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{a} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}. \quad (2.25)$$

De otro lado, para hallar el portafolio que maximiza el retorno por unidad de riesgo se fija  $\lambda_1 = 0$  de donde se obtiene que  $\mu_p = \frac{c}{b}$ . Así, el valor del otro multiplicador de *Lagrange* es  $\lambda_2 = \frac{a\frac{c}{b} - b}{\Delta} = \frac{1}{b}$ . Así, el riesgo de este portafolio equivale a  $\sigma_p^2 = \frac{a\frac{c^2}{b^2} - 2b\frac{c}{b} + c}{\Delta} = \frac{c}{b^2}$ . Finalmente, el vector de pesos de este portafolio óptimo viene definido por:

$$\omega_{op}^* = \frac{\Sigma^{-1} \mu_i}{b} = \frac{\Sigma^{-1} \mu_i}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu_i}. \quad (2.26)$$

Como se puede apreciar, este vector de pesos óptimo es un caso particular del obtenido a través de la maximización de la función de utilidad. Cabe señalar que en la formalización aquí realizada del problema de la elección del portafolio por parte del inversionista, se ha considerado la restricción que la suma de los pesos de los activos sea igual a uno.<sup>3</sup> Según [Michaud y Michaud \(2007\)](#), es común en ciertos contextos que se incorporen restricciones lineales (igualdades y desigualdades) sobre la asignación de los activos en el problema de optimización de un portafolio. Las restricciones más frecuentes son las de limitar las ventas en corto de los activos, que se da cuando se impone como restricción que los  $\omega_i \geq 0$ , es decir, que no es posible vender un activo que no se mantiene en posición (o en otras palabras tomar en préstamo), o la incorporación de límites de concentración por activo, sector económico, entre otras.



---

<sup>3</sup>Restricción presupuestaria que asume que la totalidad del dinero va a ser invertida en el portafolio de activos riesgosos.

## Capítulo 3

# Reglas para estimar los parámetros del análisis MV

En la formulación clásica del enfoque MV, la solución óptima  $\omega^*$  considera a los parámetros estimados como los verdaderos. Como se menciona en [Rachev et al. \(2008\)](#), dicha solución falla en reconocer que las estimaciones de  $\mu$  y  $\Sigma$  pueden contener errores, que a su vez pueden generar la obtención de portafolios óptimos mal comportados. Así, éstos suelen invertir de manera concentrada en activos con alto retorno esperado y bajo nivel de riesgo, que son los que normalmente contienen mayor error de estimación. Por ejemplo, [Best y Grauer \(1991\)](#) muestran que los portafolios óptimos estimados son altamente sensibles a los supuestos, en particular a los retornos esperados, donde un pequeño desvío en su estimación puede implicar cambios significativos en la asignación de pesos al interior del portafolio. Asimismo, según [Black y Litterman \(1992\)](#), es común observar altos niveles de concentración en términos del número de activos al maximizar el ratio de Sharpe, lo cual discrepa con el principio de diversificación.

En la misma línea, [Kan y Zhou \(2007\)](#) afirman que el asumir que los valores estimados de los parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$  son los reales implica no reconocer el riesgo de dicha estimación. También señalan que el resultado de la optimización, y por tanto, la utilidad del modelo MV, va a depender en parte de qué tan bien hayan sido hechas estas estimaciones. Para ello, el inversionista observa durante  $T$  periodos datos de rentabilidad, por lo que cuenta con un vector de información  $\phi_T = f(R_1, R_2, \dots, R_T)$ , y desea invertir en un portafolio para el periodo  $T+1$ . [Kan y Zhou \(2007\)](#) señalan que los pesos del portafolio óptimo serán obtenidos en dos pasos. En el primero, el vector de medias y la matriz de covarianzas serán estimados a partir de dichos retornos históricos observados. En el segundo, estas estimaciones muestrales serán tomadas como los parámetros reales, por lo que serán incorporadas en la ecuación (2.15) para obtener  $\hat{\omega}$ . Así, la regla de estimación será una función de los datos históricos  $\phi_T$ .

Para los inversionistas que utilicen esta regla, la media y la varianza fuera de muestra <sup>1</sup> del portafolio serán dadas por:

$$\tilde{\mu}_p = \hat{\omega}' \mu, \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>Por fuera de muestra se hace referencia a la aplicación de parámetros estimados sobre la base de información pasada que serán aplicados a las realizaciones futuras de retornos

$$\tilde{\sigma}_p^2 = \hat{\omega}' \Sigma \hat{\omega}. \quad (3.2)$$

Cabe señalar que en la medida que  $\hat{\omega}$  es aleatoria en lugar de determinística, tanto  $\tilde{\mu}_p$  como  $\tilde{\sigma}_p^2$  son variables aleatorias que dependen de los retornos históricos.

Para establecer un criterio de comparación de las diferentes reglas de portafolio es necesario definir una función objetivo. En este sentido, resulta lógico elegir una función basada en el desempeño promedio fuera de muestra de las reglas de portafolio a ser comparadas. Una medida consistente con dicha función objetivo es:

$$\tilde{U}(\hat{\omega}) = \tilde{\mu}_p - \frac{\gamma}{2} \tilde{\sigma}_p^2 = \hat{\omega}' \mu - \frac{\gamma}{2} \hat{\omega}' \Sigma \hat{\omega}, \quad (3.3)$$

que es la utilidad esperada condicional a los pesos elegidos  $\hat{\omega}$ . Se podría considerar otras medidas de desempeño, como el ratio de Sharpe fuera de muestra  $\frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{\sigma}_p}$ . Sin embargo, dicho ratio no es el más apropiado, ya que al ser independiente del nivel de apalancamiento del portafolio, una asignación sub - óptima en el activo libre de riesgo no afecta dicha medida. De otro lado,  $\tilde{U}(\hat{\omega})$  tiene como ventaja que establece de manera clara la medida de equivalencia del portafolio  $\hat{\omega}$  entre los activos ajustados por riesgo y el activo libre de riesgo en términos de las preferencias del inversionista. Sin embargo, es importante tener en cuenta que  $\tilde{U}$  no es la utilidad esperada en el sentido tradicional, ya que  $\mu$  y  $\Sigma$  son desconocidos para el inversionista. Por ello,  $\tilde{U}$  debe ser interpretado como la medida de desempeño fuera de muestra del portafolio  $\hat{\omega}$ .

Se debe considerar que como  $\hat{\omega}$  es una variable aleatoria, el desempeño fuera de muestra  $\tilde{U}$  es también una variable aleatoria. Por tanto, es necesario evaluar las reglas de portafolio en términos de su desempeño esperado fuera de muestra  $E[\tilde{U}(\hat{\omega})]$ . Para ello se definirá la función de pérdida de  $\hat{\omega}$  como:

$$L(\omega^*, \hat{\omega}) = U(\omega^*) - \tilde{U}(\hat{\omega}), \quad (3.4)$$

donde  $\omega^*$  viene de (2.15) y  $U(\omega^*)$  de (2.16).

Como  $\hat{\omega}$  no es igual a  $\omega^*$ , en general, la pérdida es estrictamente positiva. Además, como  $\hat{\omega}$  es una función de  $\phi_T$ , la pérdida depende de la realización de los datos históricos. La función de pérdida esperada se denomina función de riesgo y se define como:

$$\rho(\omega^*, \hat{\omega}) = E[L(\omega^*, \hat{\omega})] = U(\omega^*) - E[\tilde{U}(\hat{\omega})], \quad (3.5)$$

donde el esperado es tomado con respecto a la real distribución de  $\phi_T$ . Así, dado  $\mu$  y  $\Sigma$  (o dado  $\omega^*$ ),  $\rho(\omega^*, \hat{\omega})$  representa la pérdida esperada sobre todas las posibles realizaciones de  $\phi_T$  en que se incurre utilizando la regla de portafolio  $\hat{\omega}$ .

Esta función de riesgo provee un criterio para el ordenamiento de las distintas reglas de

portafolio que se pueden definir, en donde la regla con el menor riesgo será la preferida. En lugar de ordenar las reglas de portafolio utilizando la función de riesgo  $\rho(\omega^*, \hat{\omega})$ , se puede, de manera equivalente, ordenarlas por su desempeño esperado fuera de muestra  $E[\tilde{U}(\hat{\omega})]$ . Es importante resaltar que  $E[\tilde{U}(\hat{\omega})]$  es el desempeño esperado fuera de muestra bajo la real distribución de los retornos, obtenido a partir de muestreos aleatorios de  $\phi_T$ . Así,  $E[\tilde{U}(\hat{\omega})]$  es el desempeño fuera de muestra que un inversionista puede obtener, en promedio, bajo incertidumbre de parámetros cuando aplica la regla de portafolio  $\hat{\omega}$ . Este es un criterio objetivo para comparar y elegir entre dos reglas de portafolio distintas. En algunos casos, unas reglas dominarán a otras, dados los valores de  $\mu$  y  $\Sigma$ , y serán dominadas para otros valores. Así, la dominancia no necesariamente será uniforme. Sin embargo, algunas reglas serán inadmisibles en la medida que siempre será posible encontrar una regla de portafolio que generará mayores expectativas de desempeño fuera de muestra. Por tanto, aquellas reglas inadmisibles de portafolio no deberán ser tomadas en cuenta.

El retorno de un conjunto de activos de tamaño  $N$  en el periodo  $t$  está definido por  $R_t = (R_{1t}, \dots, R_{Nt})'$ . Rachev et al. (2008) asumen que la distribución de estos retornos es *Normal Multivariada*:

$$p(R_t | \mu, \Sigma) \sim N_N(\mu, \Sigma), \quad (3.6)$$

donde la media es representada por el vector  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)'$  de dimensión  $N \times 1$ , y la covarianza por la matriz  $\Sigma$  de dimensión  $N \times N$ .

Siguiendo a Rachev et al. (2008), se menciona que el enfoque clásico Media - Varianza asume los siguientes dos supuestos. En primer lugar, que los parámetros desconocidos son estimados de una muestra de datos disponibles, y estos estimados son considerados los parámetros reales. En segundo lugar, que está implícito que la distribución de los retornos se mantiene desde que el portafolio óptimo es estimado hasta que culmina el periodo de inversión en el mismo.

Considerando una muestra de  $t = 1, \dots, T$  retornos que siguen una distribución normal, la media muestral  $\hat{\mu}$  y la matriz de covarianzas  $\hat{\Sigma}$  se definen como:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t, \quad (3.7)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})', \quad (3.8)$$

que son estimadores suficientes de los retornos históricos  $\phi_T$ . Cabe señalar que se asume que  $T > N$  y que la matriz  $\hat{\Sigma}$  es invertible. La regla de portafolio por MV será reemplazar  $\mu$  y  $\Sigma$  por  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\Sigma}$ . Así, los pesos estimados bajo esta regla son:



$$\hat{\omega} = \frac{1}{\gamma} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}. \quad (3.9)$$

En términos estadísticos,  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\Sigma}$  son los estimadores máximo verosímiles de  $\mu$  y  $\Sigma$ , por lo que  $\hat{\omega}$  es también el estimador máximo verosímil de  $\omega^* = \Sigma^{-1} \mu / \gamma$ . Por tanto, asintóticamente,  $\hat{\omega}$  es el estimador más eficiente para el vector de parámetros desconocidos  $\omega^*$ . Los estimadores máximo verosímiles suelen ser óptimos. Sin embargo, se verá que este estimador de  $\omega^*$  no es óptimo en términos de maximizar el desempeño esperado fuera de muestra.

Kan y Zhou (2007) señalan que bajo el supuesto de normalidad, es conocido que  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\Sigma}$  son independientes y siguen las siguientes distribuciones:

$$\hat{\mu} \sim N_N(\mu, \Sigma/T), \quad (3.10)$$

$$\hat{\Sigma} \sim W_N(T-1, \Sigma)/T, \quad (3.11)$$

donde  $W_N(T-1, \Sigma)$  corresponde a la distribución Wishart con  $T-1$  grados de libertad y matriz de covarianzas  $\Sigma$ . Como  $E[\hat{\Sigma}^{-1}] = T\Sigma^{-1}/(T-N-2)$  (ver Muirhead (1982), p. 97), se tiene que:

$$E[\hat{\omega}] = \frac{T}{T-N-2} \omega^*, \quad (3.12)$$

cuando  $T > N + 2$ . Esto implica que, en promedio, los inversionistas que no conocen los parámetros verdaderos y los estiman mediante esta regla tienden a tomar mayores posiciones en los activos riesgosos que aquellos que sí conocen los parámetros reales.

### 3.1. Regla 1: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y sesgado para $\Sigma$

Para entender el riesgo de estimación, Kan y Zhou (2007) analizan el impacto de tomar la media y la varianza de (3.7) y (3.8) en tres escenarios, a saber, cuando  $\Sigma$  es conocida, cuando  $\mu$  es conocida, y cuando ambos parámetros son desconocidos.

#### 3.1.1. Error de estimación con $\Sigma$ conocido y $\mu$ desconocido

Se estiman los pesos óptimos  $\hat{\omega}$  a partir de la ecuación (3.9). En este caso, la regla del portafolio será  $\hat{\omega} = \Sigma^{-1} \hat{\mu} / \gamma$ . Cabe señalar que al ser  $\Sigma$  conocido, el error de estimación proviene de tomar  $\hat{\mu}$  como estimador de  $\mu$ . Si  $R_t \sim N(\mu, \Sigma)$ , se sabe que  $\hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu} \sim \chi_N^2(T\mu' \Sigma \mu) / T$ , con esperado  $(N + T\mu' \Sigma^{-1} \mu) / T$  y varianza  $(2N + 4T\mu' \Sigma^{-1} \mu) / T$ . Con ello se obtiene que:

$$E[\tilde{U}(\hat{\omega}) | \Sigma] = E[\hat{\omega}]' \mu - \frac{\gamma}{2} E[\hat{\omega}' \Sigma \hat{\omega}]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\gamma} \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{1}{2\gamma} E \left[ \hat{\mu}' \Sigma^{-1} \hat{\mu} \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma} \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{N + T \mu' \Sigma^{-1} \mu}{T} \right) \\
 &= \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N}{2\gamma T}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Como resultado, la función de riesgo al utilizar  $\hat{\omega}$  en lugar de  $\omega^*$  es:

$$\rho(\omega^*, \hat{\omega} | \Sigma) = U(\omega^*) - E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}) | \Sigma \right] = \frac{N}{2\gamma T}, \tag{3.14}$$

que implica que el inversionista está dispuesto a perder, en promedio por la incertidumbre sobre el vector de medias, hasta  $N/(2\gamma T)$ . De manera intuitiva, mientras el tamaño de muestra se incrementa,  $\hat{\mu}$  se convierte en un estimador más preciso de  $\mu$ , por lo que la pérdida se reduce. En el extremo donde  $T \rightarrow \infty$ , los parámetros reales son conocidos, por lo que la pérdida es cero. De otro lado, a mayor número de activos a estimar  $N$ , mayor el error de estimación, por lo que la pérdida esperada se incrementa. Finalmente, mientras el inversionista muestre mayor aversión al riesgo (mayor parámetro  $\gamma$ ), y por tanto un menor nivel de inversión en activos riesgosos, su pérdida esperada será también menor.

### 3.1.2. Error de estimación con $\mu$ conocido y $\Sigma$ desconocido

Se estiman los pesos óptimos  $\hat{\omega}$  a partir de la regla del portafolio  $\hat{\omega} = \hat{\Sigma}^{-1} \mu / \gamma$ . Se define  $W = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \hat{\Sigma} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \sim W_N(T-1, I_N) / T$ . A partir de esta definición de  $W$  se sigue que:

$$W^{-1} = \Sigma^{\frac{1}{2}} \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}}, \tag{3.15}$$

$$W^{-2} = \Sigma^{\frac{1}{2}} \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma^{\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

A partir del trabajo de [Haff \(1979\)](#), se tiene que los momentos inversos de  $W$  son:

$$E[W^{-1}] = \left( \frac{T}{T-N-2} \right) I_N, \tag{3.17}$$

$$E[W^{-2}] = \left( \frac{T^2(T-2)}{(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)} \right) I_N, \tag{3.18}$$

donde  $T > N + 4$ .

Con estos resultados, el desempeño esperado fuera de muestra es:

$$E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}) | \mu \right] = \frac{1}{\gamma} E \left[ \mu' \hat{\Sigma}^{-1} \mu \right] - \frac{1}{2\gamma} E \left[ \mu' \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} \mu \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\gamma} E \left[ \mu' \Sigma^{-\frac{1}{2}} W^{-1} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right] - \frac{1}{2\gamma} E \left[ \mu' \Sigma^{-\frac{1}{2}} W^{-2} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right] \\
 &= k_1 \frac{\theta^2}{2\gamma},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde:

$$k_1 = \left( \frac{T}{T - N - 2} \right) \left[ 2 - \frac{T(T - 2)}{(T - N - 1)(T - N - 4)} \right]. \tag{3.20}$$

Cabe señalar que  $1 - k_1$  es el porcentaje de pérdida esperada en el desempeño fuera de muestra asociado al error de estimación de  $\hat{\Sigma}$ . Se debe verificar que  $k_1 < 1$  y que es una función decreciente de  $N$  y creciente de  $T$ . Por tanto, el análisis es similar al caso anterior en el sentido que a mayor tamaño de muestra el error se reduce y a mayor número de activos el error se incrementa.

### 3.1.3. Error de estimación con $\mu$ y $\Sigma$ desconocidos

Se analiza el escenario de incertidumbre sobre los valores de los parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$ . De tomar las propiedades de los momentos inversos para la distribución Wishart y el hecho que  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\Sigma}$  son independientes se tiene que:

$$\begin{aligned}
 E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}) \right] &= \frac{1}{\gamma} E \left[ \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \mu \right] - \frac{1}{2\gamma} E \left[ \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma} E \left[ \hat{\mu}' \Sigma^{-\frac{1}{2}} W^{-1} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mu \right] - \frac{1}{2\gamma} E \left[ \hat{\mu}' \Sigma^{-\frac{1}{2}} W^{-2} \Sigma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mu} \right] \\
 &= k_1 \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{NT(T - 2)}{2\gamma(T - N - 1)(T - N - 2)(T - N - 4)},
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde  $T > N + 4$ .

Así, la pérdida esperada en el desempeño fuera de muestra es:

$$\rho(\omega^*, \hat{\omega}) = (1 - k_1) \frac{\theta^2}{2\gamma} + \frac{NT(T - 2)}{2\gamma(T - N - 1)(T - N - 2)(T - N - 4)}. \tag{3.22}$$

Esta fórmula relaciona la pérdida esperada del desempeño fuera de muestra con  $N$ ,  $T$ ,  $\gamma$  y  $\theta^2$ . A mayor  $N$  o  $\theta^2$  la pérdida se incrementa, y a mayor  $T$  o  $\gamma$  la pérdida se reduce. Además se destaca que el segundo término de  $\rho(\omega^*, \hat{\omega})$  será siempre mayor que  $\rho(\omega^*, \hat{\omega}|\Sigma)$ , por lo que los efectos de los errores de estimación de  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\Sigma}$  sobre el desempeño fuera de muestra son no aditivos debido a que  $\hat{\omega}$  es una función multiplicativa de  $\hat{\Sigma}^{-1}$  y de  $\hat{\mu}$ . Cuando  $\hat{\Sigma}^{-1}$  es utilizado en lugar de  $\Sigma^{-1}$  en la estimación de  $\hat{\omega}$ , el error de estimación de  $\hat{\mu}$  se amplifica, lo que implica que el inversionista toma posiciones más largas en los activos riesgosos.

### 3.2. Regla 2: inferencia clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma$

Como señalan [Rachev et al. \(2008\)](#) por teoría se sabe que el estimador máximo verosímil de la media coincide con  $\hat{\mu}$ , mientras que el estimador máximo verosímil no insesgado de la

covarianza viene dado por:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})' = \frac{T}{T-1} \hat{\Sigma}. \quad (3.23)$$

Kan y Zhou (2007) señalan que  $\bar{\Sigma}$ , al ser ligeramente mayor que  $\hat{\Sigma}$ , los pesos óptimos resultantes del portafolio serán menores también, por lo que se invertirá de manera más conservadora en los activos riesgosos que cuando se toma  $\hat{\omega}$ :

$$\bar{\omega} \equiv \frac{1}{\gamma} \bar{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T-1}{T} \right) \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} = \left( \frac{T-1}{T} \right) \hat{\omega}. \quad (3.24)$$

Sin embargo, como  $E[\bar{\omega}] = ((T-1)/(T-N-2))\omega^*$ , esta regla de portafolio implica tomar posiciones más largas en los activos riesgosos respecto al portafolio óptimo. Asumiendo que se cumple que  $T > N + 4$  el desempeño fuera de muestra esperado para la regla de portafolio  $\bar{\omega}$  viene dado por:

$$E[\tilde{U}(\bar{\omega})] = k_2 \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N(T-1)^2(T-2)}{2\gamma T(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)}, \quad (3.25)$$

donde:

$$k_2 = \left( \frac{T-1}{T-N-2} \right) \left[ 2 - \frac{(T-1)(T-2)}{(T-N-1)(T-N-4)} \right]. \quad (3.26)$$

A partir de estas expresiones se puede verificar que  $E[\tilde{U}(\bar{\omega})]$  es mayor que  $E[\tilde{U}(\hat{\omega})]$ , por lo que  $\bar{\omega}$  es una mejor elección que  $\hat{\omega}$ .

### 3.3. Regla 3: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$

Kan y Zhou (2007) proponen como regla estimar  $\Sigma$  a través de:

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{T-N-2} \sum_{t=1}^T (R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})' = \frac{T}{T-N-2} \hat{\Sigma}. \quad (3.27)$$

Así, el estimador para los pesos óptimos sería:

$$\tilde{\omega} \equiv \frac{1}{\gamma} \tilde{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} = \frac{T-N-2}{T} \hat{\omega}. \quad (3.28)$$

A pesar que  $\tilde{\Sigma}$  no es un estimador insesgado de  $\Sigma$ ,  $\tilde{\Sigma}^{-1}$  es por (3.11) un estimador insesgado de  $\Sigma^{-1}$ , por lo que  $\tilde{\omega}$  es un estimador insesgado de  $\omega^*$ . Es decir,  $E[\tilde{\omega}] = \omega^*$ . Así, sobre una repetición de muestras, un inversionista que toma  $\tilde{\omega}$  invertirá en promedio el mismo peso en los activos riesgosos que lo que invertiría en el portafolio óptimo. Asumiendo

$T > N + 4$  se tiene que:

$$E \left[ \tilde{U}(\tilde{\omega}) \right] = k_3 \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N(T-2)(T-N-2)}{2\gamma T(T-N-1)(T-N-4)}, \quad (3.29)$$

donde:

$$k_3 = 2 - \frac{(T-2)(T-N-2)}{(T-N-1)(T-N-4)}. \quad (3.30)$$

Se puede verificar que  $E \left[ \tilde{U}(\tilde{\omega}) \right]$  es mayor que  $E \left[ \tilde{U}(\bar{\omega}) \right]$ , por lo que la regla de portafolio  $\tilde{\omega}$  es mejor que las reglas  $\bar{\omega}$  y que  $\hat{\omega}$ . Así, se puede afirmar que  $\tilde{\omega}$ , el estimador insesgado de los pesos del portafolio óptimo  $\omega^*$ , es el que alcanza el mejor desempeño esperado fuera de muestra, mientras que el estimador máximo verosímil obtiene el menor desempeño esperado.

### 3.4. Regla 4: inferencia Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$

Los errores de estimación implícitos en la determinación del portafolio óptimo en el enfoque clásico han sido tratados a través de distintas modelaciones de los retornos esperados y del riesgo, y de la aplicación de técnicas de remuestreo. Sin embargo, el enfoque Bayesiano aplicado a la estimación del portafolio óptimo ha abierto nuevas perspectivas, al considerar los parámetros desconocidos no como fijos sino como aleatorios. Así, la expectativa de los agentes respecto al desempeño de las variables, combinada con los datos observados, generan una nueva distribución que captura el componente de incertidumbre al momento de estimar el portafolio óptimo.

En este caso el inversionista, a partir de las observaciones  $\phi_T = f(R_1, R_2, \dots, R_T)$ , genera expectativas sobre el resultado de sus potenciales inversiones en términos de la distribución condicional  $p(R_{T+1}|\phi_T)$ . Se suele asumir que esta distribución corresponde a una Normal Multivariada. Sin embargo, dado que los valores reales de  $\mu$  y  $\Sigma$  no son conocidos, el inversionista debe enfrentar el riesgo de estimación. En este contexto,  $p(R_{T+1}|\phi_T)$  no es por lo general una Normal Multivariada.

En el análisis Bayesiano se plantea que antes de observar  $\phi_T$ , el inversionista tiene creencias sobre  $\mu$  y  $\Sigma$ , las cuales se representan por una función de densidad a priori. Dentro de las distribuciones *no informativas*, [Gelman et al. \(2003\)](#) señalan que lo común es utilizar la priori multivariada de *Jeffreys*, a saber:

$$p(\mu, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-\frac{N+1}{2}}. \quad (3.31)$$

Para obtener la probabilidad condicional  $p(R_{T+1}|\phi_T)$ , conocida como la función de densidad Bayesiana predictiva, se pre multiplica la función de densidad a posteriori  $p(\mu, \Sigma|\phi_T)$  por la función  $p(R_{T+1}|\mu, \Sigma, \phi_T)$  para obtener:

$$p(R_{T+1}, \mu, \Sigma|\phi_T) = p(R_{T+1}|\mu, \Sigma, \phi_T)p(\mu, \Sigma|\phi_T)$$

De integrar sobre  $\mu$  y  $\Sigma$  se obtiene la función de distribución predictiva:

$$p(R_{T+1}|\phi_T) = \int_{\mu} \int_{\Sigma} p(R_{T+1}, \mu, \Sigma | \phi_T) d\mu d\Sigma$$

Como señala [Stambaugh \(1997\)](#), con la distribución a priori de *Jeffreys*, la función de verosimilitud *Normal Multivariada*, y las observaciones  $\phi_T$ , se obtiene:

$$\hat{\mu}^{Bayes} = \hat{\mu}, \quad (3.32)$$

$$\hat{\Sigma}^{Bayes} = \frac{T+1}{T-N-2} \hat{\Sigma}. \quad (3.33)$$

Destacan que el error de estimación no afecta el retorno esperado, en el sentido que la función de densidad predictiva para dicho estimador es la misma que la de la estimación máximo verosímil. El riesgo de estimación se refleja en en la matriz de covarianzas de la función de densidad predictiva, en el sentido que  $\Sigma^{Bayes}$  es mayor que  $\hat{\Sigma}$ . Asimismo, el riesgo de estimación afecta la forma de la función de densidad predictiva, ya que  $p(R_{T+1}|\phi_T)$  no es una Normal Multivariada, al margen que este efecto no afecte la asignación propuesta por el modelo MV asumido para el análisis.

A partir de las estimaciones de parámetros bajo el enfoque Bayesiano, se obtiene:

$$\hat{\omega}^{Bayes} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T-N-2}{T+1} \right) \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}. \quad (3.34)$$

Como señalan [Kan y Zhou \(2007\)](#), la solución Bayesiana difiere de la del estimador insesgado  $\tilde{\omega}$  únicamente por el factor  $T/(T+1)$ . Sin embargo, como:

$$E[\hat{\omega}^{Bayes}] = \frac{T}{T+1} \omega^*, \quad (3.35)$$

la solución Bayesiana es más conservadora que en el caso que los parámetros reales son conocidos, ya que sugiere tomar menor posición en los activos riesgosos. La intuición es que el riesgo de estimación vuelve más riesgosos a los activos del portafolio tangente, y por tanto, hace más atractiva la inversión en el activo libre de riesgo.

De utilizar los mismos supuestos en las reglas anteriores se obtiene la siguiente forma analítica:

$$E[\tilde{U}(\hat{\omega}^{Bayes})] = k_4 \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{NT(T-N-2)(T-2)}{2\gamma(T+1)^2(T-N-1)(T-N-4)}, \quad (3.36)$$

donde  $T > N + 4$  y:

$$k_4 = \left( \frac{T}{T+1} \right) \left[ 2 - \frac{T(T-N-2)(T-N-4)}{(T+1)(T-N-1)(T-N-4)} \right]. \quad (3.37)$$

Así:

$$E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}^{Bayes}) \right] - E \left[ \tilde{U}(\tilde{\omega}) \right] = (k_4 - k_3) \frac{\theta^2}{2\gamma} + \frac{N(T-2)(T-N-2)(2T+1)}{2\gamma(T+1)^2(T-N-1)(T-N-4)}. \quad (3.38)$$

Se puede verificar que si  $T > N + 4$ :

$$k_4 - k_3 = \frac{(T^2 + 6T - 4) + N[2T(T-N)] - 3T - 2(N+4)}{(T+1)^2(T-N-1)(T-N-4)} > 0, \quad (3.39)$$

pues  $2T(T-N) > 8T > 3T + 2(N+4)$ . Así, las expresiones explícitas  $E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}^{Bayes}) \right]$  y  $E \left[ \tilde{U}(\tilde{\omega}) \right]$  muestran de manera analítica que el portafolio Bayesiano siempre va a mostrar un mejor desempeño fuera de muestra que las reglas anteriores, al margen del valor real de los parámetros.

### 3.5. Regla 5: asignación óptima de dos fondos

El planteamiento a partir de la inversión en dos fondos, a saber, el activo libre de riesgo y el portafolio de activos riesgosos, es encontrar una función  $f(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  que permita maximizar el resultado fuera de muestra esperado. Con dicha finalidad, [Kan y Zhou \(2007\)](#) plantean la regla para dos fondos de la forma:

$$\hat{\omega} = \frac{c}{\gamma} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}, \quad (3.40)$$

donde  $c$  es un escalar. Se puede verificar que todas las reglas anteriores son casos especiales de esta regla general. De aplicar la misma derivación para las reglas previas, se obtiene que el desempeño esperado fuera de muestra de la regla es:

$$E \left[ \tilde{U} \left( \frac{c}{\gamma} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} \right) \right] = \frac{c\theta^2}{\gamma} \left( \frac{T}{T-N-2} \right) - \frac{c^2}{2\gamma} \left( \theta^2 + \frac{N}{T} \right) \left[ \frac{T^2(T-2)}{(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)} \right], \quad (3.41)$$

asumiendo que  $T > N + 4$ . De diferenciar la expresión con respecto de  $c$ , se obtiene que el valor óptimo de la constante es:

$$c^* = \left[ \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{T(T - 2)} \right] \left( \frac{\theta^2}{\theta^2 + \frac{N}{T}} \right). \quad (3.42)$$

Como señalan Kan y Zhou (2007), si  $\Sigma$  es conocido,  $c^*$  sólo dependerá del segundo término, por lo que sólo será afectado por el error de estimación en  $\hat{\mu}$ . De manera análoga, el primer término ajusta por el error de estimación en  $\hat{\Sigma}$ . Asimismo, ambos términos son menores que 1. El valor del segundo término depende de la magnitud relativa de  $\theta^2$  y de  $N/T$ , mientras que el primero depende de la magnitud relativa de  $N$  y de  $T$ , pero no de  $\theta^2$ .

El desempeño fuera de muestra esperado para  $\hat{\omega}^* = c^* \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} / \gamma$  es:

$$E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}^*) \right] = \left[ \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{(T - 2)(T - N - 2)} \right] \left( \frac{\theta^2}{\theta^2 + \frac{N}{T}} \right), \quad (3.43)$$

que es mayor que los obtenidos bajo las reglas anteriores, incluyendo la Bayesiana. Sin embargo, si bien la regla es óptima, no se puede implementar debido a que  $\theta$  no es conocido en la práctica. Para que esta regla sea aplicable, es necesario contar con un estimador para  $\theta^2$ . Kan y Zhou (2007) señalan que el estimador natural es:

$$\hat{\theta}^2 = \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}. \quad (3.44)$$

Sin embargo, no se debe perder de vista que  $\hat{\theta}^2$  puede ser un estimador muy sesgado de  $\theta$  cuando  $T$  es pequeño. Se sabe además que:

$$\hat{\theta}^2 \sim \left( \frac{N}{T - N} \right) F_{N, T - N}(T\theta^2), \quad (3.45)$$

donde  $F_{N, T - N}(T\theta^2)$  es una distribución  $F$  no centrada con  $N$  y  $T - N$  grados de libertad, y parámetro de no centralidad  $T\theta^2$ . Por esta característica, el estimador insesgado de  $\theta^2$  es:

$$\hat{\theta}_u^2 = \frac{(T - N - 2)\hat{\theta}^2 - N}{T}. \quad (3.46)$$

Cabe señalar que este estimador puede tomar valores negativos, por lo que no cumple con las características deseadas. Kan y Zhou (2007) toman, por ello, el siguiente estimador mejorado:

$$\hat{\theta}_a^2 = \frac{(T - N - 2)\hat{\theta}^2 - N}{T} + \frac{2 \left( \hat{\theta}^2 \right)^{\frac{N}{2}} \left( 1 + \hat{\theta}^2 \right)^{-\frac{T-2}{2}}}{TB \frac{\hat{\theta}^2}{1 + \hat{\theta}^2} \left( \frac{N}{2}, \frac{T-N}{2} \right)}, \quad (3.47)$$

donde:



$$B_x(a, b) = \int_0^x y^{a-1}(1-y)^{b-1} dy, \quad (3.48)$$

es la función *Beta Incompleta*. La primera parte de la ecuación corresponde al estimador insesgado de  $\theta^2$  y la segunda parte es un ajuste para mejorar el estimador insesgado cuando éste es muy pequeño.

Así, con el estimador ajustado de  $\theta^2$ , finalmente se puede obtener un estimador para  $c^*$  a partir de:

$$\hat{c}^* = \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{T(T-2)} \left( \frac{\hat{\theta}_a^2}{\hat{\theta}_a^2 + \frac{N}{T}} \right), \quad (3.49)$$

y los pesos asociados al portafolio óptimo de dos fondos:

$$\hat{\omega}^{II} = \frac{1}{\gamma} \hat{c}^* \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}. \quad (3.50)$$

### 3.6. Regla 6: asignación óptima de tres fondos

Kan y Zhou (2007) señalan que invertir únicamente en dos fondos en un escenario de incertidumbre de parámetros genera pérdidas en el desempeño esperado fuera de muestra. Una manera de reducir este riesgo es la incorporación de un fondo adicional, de manera que el efecto de mayor diversificación puede ayudar a reducir las pérdidas esperadas. Si bien ambos portafolios van a tener riesgo de estimación, dado que los errores no van a estar perfectamente correlacionados, se pueden generar ganancias por diversificación. Para ello, toman como candidato al portafolio de mínima varianza de la frontera eficiente (ver 2.25).

Se considera una regla de la forma:

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}(c, d) = \frac{1}{\gamma} \left( c \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} + d \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right), \quad (3.51)$$

donde  $c$  y  $d$  son constantes que van a ser elegidas de manera óptima. Dado que los pesos de los portafolios de tangencia y de mínima varianza global muestrales son proporcionales a  $\hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}$  y a  $\hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N$ , respectivamente, la regla de portafolio  $\hat{\omega}(c, d)$  invierte en estos dos portafolios y en el activo libre de riesgo.

Bajo este tipo de reglas, el desempeño esperado fuera de muestra es:

$$\begin{aligned} E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}(c, d)) \right] &= E [\hat{\omega}(c, d)]' \mu - \frac{\gamma}{2} E [\hat{\omega}(c, d)' \Sigma \hat{\omega}(c, d)] \\ &= \left( \frac{T}{T-N-2} \right) \frac{1}{2\gamma} [2(c\mu' \Sigma^{-1} \mu + d\mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N)] \\ &\quad - \left( \frac{T(T-2)}{(T-N-1)(T-N-4)} \right) \end{aligned}$$

$$\left( \left( \mu' \Sigma^{-1} \mu + \frac{N}{T} \right) c^2 + 2(\mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N) cd + (\mathbf{1}_N' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N) d^2 \right), \quad (3.52)$$

donde  $T > N + 4$ . De diferenciar la expresión anterior con respecto a  $c$  y  $d$ , se pueden hallar los valores de estas variables que maximizan el desempeño esperado fuera de muestra:

$$c^{**} = \left( \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{T(T - 2)} \right) \left( \frac{\psi^2}{\psi^2 + \frac{N}{T}} \right), \quad (3.53)$$

$$d^{**} = \left( \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{T(T - 2)} \right) \left( \frac{\frac{N}{T}}{\psi^2 + \frac{N}{T}} \right) \mu_g, \quad (3.54)$$

donde:

$$\psi^2 = \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{(\mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N)^2}{\mathbf{1}_N' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N} = (\mu - \mu_g \mathbf{1}_N)' \Sigma^{-1} (\mu - \mu_g \mathbf{1}_N), \quad (3.55)$$

es la pendiente al cuadrado de la asíntota del portafolio ex ante <sup>2</sup> de mínima varianza de la frontera eficiente, y  $\mu_g = \mathbf{1}_N' \Sigma^{-1} \mu / \mathbf{1}_N' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N$  es el exceso de retorno esperado del mismo portafolio. Así, los pesos del portafolio óptimo son:

$$\hat{\omega}^{**} = \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{\gamma T(T - 2)} \left[ \left( \frac{\psi^2}{\psi^2 + \frac{N}{T}} \right) \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} + \left( \frac{\frac{N}{T}}{\psi^2 + \frac{N}{T}} \right) \mu_g \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right]. \quad (3.56)$$

Dado que  $d^{**} \neq 0$  a menos que  $\mu_g = 0$ , esta regla de portafolio sugiere el uso del portafolio de mínima varianza de la frontera eficiente, sin importar el verdadero valor de los parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$  (excepto cuando  $\mu_g = 0$ ). A mayor  $N/T$ , mayor la inversión requerida en el portafolio de mínima varianza. De manera intuitiva, a mayor número de activos, mayor la dificultad en la estimación de los pesos del portafolio tangente, y por tanto, mayor la importancia del portafolio que asume medias constantes entre los activos.

Bajo los pesos óptimos  $\hat{\omega}^{**}$ , el desempeño esperado fuera de muestra es:

$$E \left[ \tilde{U}(\hat{\omega}^{**}) \right] = \frac{\theta^2}{2\gamma} \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{(T - 2)(T - N - 2)} \left[ 1 - \frac{\frac{N}{T}}{\theta^2 + \left( \frac{\theta^2}{\psi^2} \right) \left( \frac{N}{T} \right)} \right], \quad (3.57)$$

donde  $T > N + 4$ . Bajo incertidumbre de parámetros sobre  $\mu$  y  $\Sigma$ , la expresión anterior muestra el mayor nivel esperado de desempeño fuera de muestra respecto a las reglas anteriores. Sin embargo, se debe tener en cuenta que  $\psi^2$  y  $\mu_g$  no son conocidos, por lo que deben ser estimados para poder aplicar la regla.

<sup>2</sup>Por ex ante se hace referencia al portafolio obtenido a partir de la observación de datos y estimación de parámetros previo al momento de la inversión. Ex post es el portafolio realmente obtenido luego de culminado el periodo de inversión.



Para estimar  $\psi^2$  y  $\mu_g$  se pueden tomar sus aproximaciones muestrales:

$$\hat{\mu}_g = \frac{\hat{\mu}'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_N}{\mathbf{1}_N'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_N}, \quad (3.58)$$

$$\hat{\psi}^2 = (\hat{\mu} - \hat{\mu}_g\mathbf{1}_N)'\hat{\Sigma}^{-1}(\hat{\mu} - \hat{\mu}_g\mathbf{1}_N). \quad (3.59)$$

Además, se sabe que:

$$\frac{(T - N + 1)\hat{\psi}^2}{N - 1} \sim F_{N-1, T-N+1}(T\psi^2), \quad (3.60)$$

por lo que  $\hat{\psi}^2$  comparte el mismo problema de fuerte sesgo que  $\hat{\theta}^2$  cuando  $T$  es pequeño. De manera análoga al caso de  $\hat{\theta}^2$ , se toma:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_a^2 &= \frac{(T - N - 1)\hat{\psi}^2 - (N - 1)}{T} \\ &+ \frac{2\left(\hat{\psi}^2\right)^{\frac{N-1}{2}}\left(1 + \hat{\psi}^2\right)^{-\frac{T-2}{2}}}{TB \frac{\hat{\psi}^2}{1+\hat{\psi}^2} \left(\frac{N-1}{2}, \frac{T-N+1}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

para estimar  $\psi^2$ . Los pesos asociados al portafolio óptimo para el caso de tres fondos son de la forma:

$$\hat{w}^{III} = \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{\gamma(T)(T - 2)} \left[ \left( \frac{\hat{\psi}_a^2}{\hat{\psi}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu} + \left( \frac{\frac{N}{T}}{\hat{\psi}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \hat{\mu}_g\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}_N \right]. \quad (3.62)$$

Tal como  $\hat{w}^{II}$ ,  $\hat{w}^{III}$  es aleatorio, ya que los pesos del portafolio tangente y de mínima varianza dependen de las realizaciones de  $\hat{\mu}_g$  y  $\hat{\psi}^2$ . Sin embargo, como  $\hat{\mu}^{**}$  domina a  $\hat{\mu}^*$ , se espera que  $\hat{w}^{III}$  domine a  $\hat{w}^{II}$ .

## Capítulo 4

### Combinación de reglas

Sea  $\tilde{\omega}$  cualquier estimador del vector de pesos óptimos del portafolio tangente, tal que  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(R_1, \dots, R_T) = \tilde{\omega}(\phi_T)$ . Se puede expresar la función de pérdida esperada del desempeño fuera de muestra como:

$$L(\omega^*, \tilde{\omega}) = U(\omega^*) - E \left[ \tilde{U}(\tilde{\omega}) \right], \quad (4.1)$$

donde  $U(\omega^*)$  es la utilidad esperada con parámetros conocidos, y  $E \left[ \tilde{U}(\tilde{\omega}) \right]$  es el desempeño esperado fuera de muestra bajo la real distribución de los retornos, obtenidos a partir de una muestra aleatoria de  $\phi_T$ . Cabe recordar que éste es de la forma:

$$E \left[ \tilde{U}(\tilde{\omega}) \right] = \tilde{\omega}' \mu - \frac{\gamma}{2} \tilde{\omega}' \Sigma \tilde{\omega}. \quad (4.2)$$

Así, para cualquier regla, la función de pérdida esperada se puede escribir como:

$$\begin{aligned} L(\omega^*, \tilde{\omega}) &= \frac{\gamma}{2} \left[ \frac{1}{\gamma^2} \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{2}{\gamma} \mu' [E(\tilde{\omega})] + E[\tilde{\omega}' \Sigma \tilde{\omega}] \right] \\ &= \frac{\gamma}{2} E \left[ \left( \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu - \tilde{\omega} \right)' \Sigma \left( \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu - \tilde{\omega} \right) \right] \\ &= \frac{\gamma}{2} E \left[ (\tilde{\omega} - \omega^*)' \Sigma (\tilde{\omega} - \omega^*) \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

que es una función cuadrática de los errores en la estimación de  $\omega^*$ .

A partir de esta forma de la función de pérdida esperada, [Jun y Zhou \(2011\)](#) combinan algunas de las reglas trabajadas por [Kan y Zhou \(2007\)](#) con el portafolio que asigna pesos iguales a cada activo (portafolio  $1/N$ ), con la finalidad de demostrar que dicha solución es más eficiente que invertir únicamente en el portafolio  $1/N$ . Las asignaciones a los portafolios para la combinación son planteadas a partir de:

$$\hat{\omega}_s = (1 - \delta)\omega_e + \delta\tilde{\omega}, \quad (4.4)$$

donde  $\omega_e = \mathbf{1}_N/N$ , que invierte  $1/N$  de una unidad monetaria en cada activo riesgoso,  $\tilde{\omega}$  es

un estimador insesgado de  $\omega^*$ , y  $\delta$  es el parámetro de combinación entre las dos reglas, tal que  $0 \leq \delta \leq 1$ . El objetivo es hallar el valor de  $\delta^*$ , tal que el resultado esperado del desempeño fuera de muestra de la combinación sea el más eficiente posible.

En el presente capítulo se derivará la forma analítica de la combinación de cada una de las seis reglas de portafolio trabajadas en la sección anterior, con dos reglas empíricas de portafolio, a saber, la  $1/N$  y la ponderada por capitalización bursátil.

Con respecto a la primera, DeMiguel et al. (2009) mostraron que el portafolio de pesos iguales podía tener, bajo ciertas condiciones, un mejor desempeño fuera de muestra que el obtenido por cualquier regla de estimación. De hecho, cuando los  $N$  activos tienen la misma media y varianza, y son independientes, la asignación  $1/N$  es la mejor posible.

Con respecto a la segunda, existe en la gestión de portafolios el concepto de estrategia pasiva, que se da cuando el gestor asigna los activos replicando la composición de un índice de mercado. Estos índices asignan los activos en su interior, básicamente, a partir de los pesos relativos de cada activo respecto al total de activos seleccionados para constituir el índice (asignación por capitalización bursátil). Cuando el portafolio se diversifica de manera global, esa manera de asignar activos debería ser la más eficiente, ya que es a través de la misma que se alcanza el equilibrio entre la oferta y la demanda de los activos financieros. Una gran ventaja del estilo de inversión pasivo es que, una vez adquiridos los activos y bajo el supuesto que los números de acciones se mantienen fijos, la fluctuación de precios hace que el rebalanceo de las posiciones sea automático. Por ello, no es necesario realizar compras o ventas periódicas en el mercado, lo que es eficiente ya que minimiza los costos transaccionales.

De manera formal, la asignación de pesos para cada activo bajo la ponderación por capitalización bursátil es de la forma:

$$\omega_{i,t} = \frac{P_{i,t}S_i}{\sum_{i=1}^N P_{i,t}S_i}, \quad (4.5)$$

donde:

- $\omega_{i,t}$ : unidades monetarias a ser invertidas en el activo  $i$  en  $t$ .
- $P_{i,t}$ : precio del activo  $i$  en  $t$ .
- $S_i$ : unidades del activo  $i$  en el mercado.
- $N$ : total de activos en el mercado.

El vector  $N \times 1$  compuesto por estos pesos asignados bajo la ponderación por capitalización bursátil de los activos será denotado por  $\omega_{mk,t}$ .

#### 4.1. Combinación de la regla 1: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y sesgado para $\Sigma$

##### 4.1.1. Combinación con $\omega_e$

Se obtendrá la forma analítica para el caso de  $\mu$  y  $\Sigma$  desconocidos. Se sabe que:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\gamma} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}, \quad (4.6)$$

por tanto:

$$E[\hat{\omega}] = \frac{T}{T - N - 2} \omega^*, \quad (4.7)$$

y que la regla de combinación es de la forma:

$$\hat{\omega}_{1,e} = (1 - \delta_{1,e}) \omega_e + \delta_{1,e} \hat{\omega}. \quad (4.8)$$

De reemplazar (4.8) en (4.3), se obtiene que:

$$\begin{aligned} L(\omega^*, \hat{\omega}) &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{1,e})^2 (\omega_e - \omega^*)' \Sigma (\omega_e - \omega^*) + \delta_{1,e}^2 E((\hat{\omega} - \omega^*)' \Sigma (\hat{\omega} - \omega^*))] \\ &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{1,e})^2 \pi_{1,e}^1 + \delta_{1,e}^2 \pi_{1,e}^2], \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde

$$\pi_{1,e}^1 = \omega_e' \Sigma \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \mu + \frac{1}{\gamma^2} \theta^2, \quad (4.10)$$

$$\pi_{1,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_1 - \frac{2T}{(T - N - 2)} + 1 \right) \theta^2 + \frac{c_1}{\gamma^2} \frac{N}{T}, \quad (4.11)$$

con

$$\theta^2 = \mu' \Sigma^{-1} \mu, \quad (4.12)$$

y

$$c_1 = \frac{T^2(T - 2)}{(T - N - 1)(T - N - 2)(T - N - 4)}, \quad (4.13)$$

para  $T > N + 4$ . Se puede apreciar que (4.10) y (4.11) se derivan a partir de la función de pérdida definida en (4.9). De derivar dicha función de pérdida con respecto a  $\delta_{1,e}$  se obtendrá la combinación óptima entre las dos reglas de portafolio, a saber:

$$\delta^* = \frac{\pi_{1,e}^1}{\pi_{1,e}^1 + \pi_{1,e}^2}. \quad (4.14)$$

Es claro que el valor de  $\delta^*$  es desconocido, por lo que deberá ser estimado. Para ello se definirán los siguientes estimadores:

$$\hat{\pi}_{1,e}^1 = \omega_e' \hat{\Sigma} \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.15)$$

$$\hat{\pi}_{1,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_1 - \frac{2T}{(T - N - 2)} + 1 \right) \hat{\theta}_a^2 + \frac{c_1}{\gamma^2} \frac{N}{T}, \quad (4.16)$$

donde  $\hat{\theta}_a^2$  es el estimador presentado en (3.47).

A partir de estos estimadores, y de reemplazar en (4.14) se obtiene:

$$\hat{\delta}_{1,e} = \frac{\hat{\pi}_{1,e}^1}{\hat{\pi}_{1,e}^1 + \hat{\pi}_{1,e}^2}. \quad (4.17)$$

Así,  $\hat{\delta}_{1,e}$  nos indica cuántas unidades monetarias se deben asignar al portafolio tangente y al activo libre de riesgo, mientras que su complemento  $(1 - \hat{\delta}_{1,e})$  nos indica cuánto asignar a la regla  $1/N$ .

#### 4.1.2. Combinación con $\omega_{mk}$

Para estimar la combinación óptima de reglas a partir del portafolio ponderado por la capitalización bursátil de los activos, es necesario definir:

$$\hat{\omega}_{1,mk} = (1 - \delta_{1,mk}) \omega_{mk} + \delta_{1,mk} \hat{\omega}, \quad (4.18)$$

que es la regla de combinación. Para poder estimar  $\hat{\delta}_{1,mk}$ , al igual que en el caso anterior se requiere:

$$\hat{\pi}_{1,mk}^1 = \omega_{mk}' \hat{\Sigma} \omega_{mk} - \frac{2}{\gamma} \omega_{mk}' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.19)$$

$$\hat{\pi}_{1,mk}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_1 - \frac{2T}{(T - N - 2)} + 1 \right) \hat{\theta}_a^2 + \frac{c_1}{\gamma^2} \frac{N}{T}, \quad (4.20)$$

donde  $\hat{\theta}_a^2$  viene de (3.47) y  $c_1$  de (4.13).

A partir de estas definiciones, la estimación de pesos a asignar al portafolio de capitalización bursátil es:

$$\hat{\delta}_{1,mk} = \frac{\hat{\pi}_{1,mk}^1}{\hat{\pi}_{1,mk}^1 + \hat{\pi}_{1,mk}^2}. \quad (4.21)$$

## 4.2. Combinación de la regla 2: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y $\Sigma$

### 4.2.1. Combinación con $\omega_e$

Para esta regla se sabe que:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \hat{\mu} = \left( \frac{T-1}{T} \right) \hat{\omega}, \quad (4.22)$$

con

$$E[\bar{\omega}] = \frac{T-1}{T-N-2} \omega^*. \quad (4.23)$$

La regla de combinación para este caso es de la forma:

$$\bar{\omega}_{2,e} = (1 - \delta_{2,e}) \omega_e + \delta_{2,e} \bar{\omega}. \quad (4.24)$$

De reemplazar (4.24) en (4.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} L(\omega^*, \bar{\omega}) &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{2,e})^2 (\omega_e - \omega^*)' \Sigma (\omega_e - \omega^*) + \delta_{2,e}^2 E((\bar{\omega} - \omega^*)' \Sigma (\bar{\omega} - \omega^*))] \\ &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{2,e})^2 \pi_{2,e}^1 + \delta_{2,e}^2 \pi_{2,e}^2], \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde:

$$\pi_{2,e}^1 = \omega_e' \Sigma \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \mu + \frac{1}{\gamma^2} \theta^2, \quad (4.26)$$

$$\pi_{2,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_2 - \frac{2(T-1)}{(T-N-2)} + 1 \right) \theta^2 + \frac{c_2}{\gamma^2} \frac{N}{T}. \quad (4.27)$$

Se puede verificar que:

$$c_2 = \frac{(T-1)^2(T-2)}{(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)}, \quad (4.28)$$

con  $T > N + 4$ . A partir de dichos resultados se obtendrán los siguientes estimadores:

$$\hat{\pi}_{2,e}^1 = \omega_e' \hat{\Sigma} \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.29)$$

$$\hat{\pi}_{2,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_2 - \frac{2(T-1)}{(T-N-2)} + 1 \right) \hat{\theta}_a^2 + \frac{c_2}{\gamma^2} \frac{N}{T}, \quad (4.30)$$

Con dichos valores es directo el reemplazo para obtener:

$$\hat{\delta}_{2,e} = \frac{\hat{\pi}_{2,e}^1}{\hat{\pi}_{2,e}^1 + \hat{\pi}_{2,e}^2}. \quad (4.31)$$

#### 4.2.2. Combinación con $\omega_{mk}$

Se define:

$$\bar{\omega}_{2,mk} = (1 - \delta_{2,mk}) \omega_{mk} + \delta_{2,mk} \bar{\omega}, \quad (4.32)$$

que es la regla de combinación. Asimismo:

$$\hat{\pi}_{2,mk}^1 = \omega_{mk}' \hat{\Sigma} \omega_{mk} - \frac{2}{\gamma} \omega_{mk}' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.33)$$

$$\hat{\pi}_{2,mk}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_2 - \frac{2(T-1)}{(T-N-2)} + 1 \right) \hat{\theta}_a^2 + \frac{c_2}{\gamma^2} \frac{N}{T}, \quad (4.34)$$

Con ello es posible obtener el estimador de asignación eficiente:

$$\hat{\delta}_{2,mk} = \frac{\hat{\pi}_{2,mk}^1}{\hat{\pi}_{2,mk}^1 + \hat{\pi}_{2,mk}^2}. \quad (4.35)$$

### 4.3. Combinación de la regla 3: inferencia clásica con estimador insesgado para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$

#### 4.3.1. Combinación con $\omega_e$

Para esta regla se sabe que:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\gamma} \tilde{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} = \left( \frac{T-N-2}{T} \right) \hat{\omega}, \quad (4.36)$$

con:



$$E[\tilde{\omega}] = \omega^*. \quad (4.37)$$

La regla de combinación en este caso es de la forma:

$$\tilde{\omega}_{3,e} = (1 - \delta_{3,e})\omega_e + \delta_{3,e}\tilde{\omega}. \quad (4.38)$$

De reemplazar (4.38) en (4.3), se obtiene que:

$$\begin{aligned} L(\omega^*, \tilde{\omega}) &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{3,e})^2 (\omega_e - \omega^*)' \Sigma (\omega_e - \omega^*) + \delta_{3,e}^2 E((\tilde{\omega} - \omega^*)' \Sigma (\tilde{\omega} - \omega^*))] \\ &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{3,e})^2 \pi_{3,e}^1 + \delta_{3,e}^2 \pi_{3,e}^2], \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde:

$$\pi_{3,e}^1 = \omega_e' \Sigma \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \mu + \frac{1}{\gamma^2} \theta^2, \quad (4.40)$$

$$\pi_{3,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} (c_3 - 1) \theta^2 + \frac{c_3}{\gamma^2} \frac{N}{T}. \quad (4.41)$$

Se puede verificar que:

$$c_3 = \frac{(T - 2)(T - N - 2)}{(T - N - 1)(T - N - 4)}, \quad (4.42)$$

con  $T > N + 4$ . A partir de dichos resultados se obtendrán los siguientes estimadores:

$$\hat{\pi}_{3,e}^1 = \omega_e' \hat{\Sigma} \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.43)$$

$$\hat{\pi}_{3,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} (c_3 - 1) \hat{\theta}_a^2 + \frac{c_3}{\gamma^2} \frac{N}{T}. \quad (4.44)$$

Con dichos valores es directo el reemplazo para obtener:

$$\hat{\delta}_{3,e} = \frac{\hat{\pi}_{3,e}^1}{\hat{\pi}_{3,e}^1 + \hat{\pi}_{3,e}^2}. \quad (4.45)$$

#### 4.3.2. Combinación con $\omega_{mk}$

Se define:

$$\tilde{\omega}_{3,mk} = (1 - \delta_{3,mk})\omega_{mk} + \delta_{3,mk}\tilde{\omega}, \quad (4.46)$$

que es la regla de combinación. Asimismo:

$$\hat{\pi}_{3,mk}^1 = \omega_{mk}'\hat{\Sigma}\omega_{mk} - \frac{2}{\gamma}\omega_{mk}'\hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2}\hat{\theta}_a^2, \quad (4.47)$$

$$\hat{\pi}_{3,mk}^2 = \frac{1}{\gamma^2}(c_3 - 1)\hat{\theta}_a^2 + \frac{c_3}{\gamma^2}\frac{N}{T}. \quad (4.48)$$

Con ello es posible obtener el estimador de asignación eficiente entre portafolios:

$$\hat{\delta}_{3,mk} = \frac{\hat{\pi}_{3,mk}^1}{\hat{\pi}_{3,mk}^1 + \hat{\pi}_{3,mk}^2}. \quad (4.49)$$

#### 4.4. Combinación de la regla 4: inferencia Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$

##### 4.4.1. Combinación con $\omega_e$

Para esta regla se sabe que:

$$\hat{\omega}^{Bayes} = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{T - N - 2}{T - 1} \right) \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}, \quad (4.50)$$

con:

$$E[\hat{\omega}^{Bayes}] = \frac{T}{T + 1} \omega^*. \quad (4.51)$$

La regla de combinación en este caso es de la forma:

$$\hat{\omega}_{4,e}^{Bayes} = (1 - \delta_{4,e})\omega_e + \delta_{4,e}\hat{\omega}^{Bayes}. \quad (4.52)$$

De reemplazar (4.52) en (4.3), se obtiene que:

$$\begin{aligned} L(\omega^*, \hat{\omega}^{Bayes}) &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{4,e})^2(\omega_e - \omega^*)'\Sigma(\omega_e - \omega^*) + \delta_{4,e}^2 E((\hat{\omega}^{Bayes} - \omega^*)'\Sigma(\hat{\omega}^{Bayes} - \omega^*))] \\ &= \frac{\gamma}{2} [(1 - \delta_{4,e})^2 \pi_{4,e}^1 + \delta_{4,e}^2 \pi_{4,e}^2], \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde:

$$\pi_{4,e}^1 = \omega_e' \Sigma \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \mu + \frac{1}{\gamma^2} \theta^2, \quad (4.54)$$

$$\pi_{4,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_4 - \frac{2T}{T+1} + 1 \right) \theta^2 + \frac{c_4}{\gamma^2} \frac{N}{T}. \quad (4.55)$$

Se puede verificar que:

$$c_4 = \frac{T^2(T-2)(T-N-2)}{(T+1)^2(T-N-1)(T-N-4)}, \quad (4.56)$$

con  $T > N + 4$ . A partir de dichos resultados se obtendrán los siguientes estimadores:

$$\hat{\pi}_{4,e}^1 = \omega_e' \hat{\Sigma} \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.57)$$

$$\hat{\pi}_{4,e}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_4 - \frac{2T}{T+1} + 1 \right) \hat{\theta}_a^2 + \frac{c_4}{\gamma^2} \frac{N}{T}. \quad (4.58)$$

Con dichos valores es directo el reemplazo para obtener:

$$\hat{\delta}_{4,e} = \frac{\hat{\pi}_{4,e}^1}{\hat{\pi}_{4,e}^1 + \hat{\pi}_{4,e}^2}. \quad (4.59)$$

#### 4.4.2. Combinación con $\omega_{mk}$

Se define:

$$\hat{\omega}_{4,mk}^{Bayes} = (1 - \delta_{4,mk}) \omega_{mk} + \delta_{4,mk} \hat{\omega}^{Bayes}, \quad (4.60)$$

que es la regla de combinación. Asimismo:

$$\hat{\pi}_{4,mk}^1 = \omega_{mk}' \hat{\Sigma} \omega_{mk} - \frac{2}{\gamma} \omega_{mk}' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.61)$$

$$\hat{\pi}_{4,mk}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left( c_4 - \frac{2T}{T+1} + 1 \right) \hat{\theta}_a^2 + \frac{c_4}{\gamma^2} \frac{N}{T}. \quad (4.62)$$

Con ello es posible obtener el estimador de asignación eficiente entre portafolios:

$$\hat{\delta}_{4,mk} = \frac{\hat{\pi}_{4,mk}^1}{\hat{\pi}_{4,mk}^1 + \hat{\pi}_{4,mk}^2}. \quad (4.63)$$

#### 4.5. Combinación de la regla 5: asignación óptima de dos fondos

##### 4.5.1. Combinación con $\omega_e$

En el caso de la asignación óptima del activo libre de riesgo y el portafolio tangente, se sabe que:

$$\hat{\omega}^{II} = \frac{1}{\gamma} \hat{c}^* \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu}, \quad (4.64)$$

y que la regla de combinación es de la forma:

$$\hat{\omega}_{5,e}^{II} = (1 - \hat{\delta}_{5,e}) \omega_e + \hat{\delta}_{5,e} \hat{\omega}^{II}. \quad (4.65)$$

De reemplazar (4.65) en la función de pérdida estimada, se obtiene que los estimadores de los parámetros son:

$$\hat{\pi}_{5,e}^1 = \omega_e' \hat{\Sigma} \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.66)$$

$$\hat{\pi}_{5,e}^2 = \frac{\hat{\theta}_a^2}{\gamma^2} \left[ 1 - c_5 \left( \frac{\hat{\theta}_a^2}{\hat{\theta}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \right], \quad (4.67)$$

donde:

$$c_5 = \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{(T - 2)(T - N - 2)}. \quad (4.68)$$

Con dichos valores es directo el reemplazo para obtener:

$$\hat{\delta}_{5,e} = \frac{\hat{\pi}_{5,e}^1}{\hat{\pi}_{5,e}^1 + \hat{\pi}_{5,e}^2}. \quad (4.69)$$

##### 4.5.2. Combinación con $\omega_{mk}$

Se define:

$$\hat{\omega}_{5,mk}^{II} = (1 - \delta_{5,mk}) \omega_{mk} + \delta_{5,mk} \hat{\omega}^{II}, \quad (4.70)$$

que es la regla de combinación. Asimismo:

$$\hat{\pi}_{5,mk}^1 = \omega_{mk}' \hat{\Sigma} \omega_{mk} - \frac{2}{\gamma} \omega_{mk}' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.71)$$

$$\hat{\pi}_{5,mk}^2 = \frac{\hat{\theta}_a^2}{\gamma^2} \left[ 1 - c_5 \left( \frac{\hat{\theta}_a^2}{\hat{\theta}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \right]. \quad (4.72)$$

Con ello es posible obtener el estimador de asignación eficiente entre portafolios:

$$\hat{\delta}_{5,mk} = \frac{\hat{\pi}_{5,mk}^1}{\hat{\pi}_{5,mk}^1 + \hat{\pi}_{5,mk}^2}. \quad (4.73)$$

#### 4.6. Combinación de la regla 6: asignación óptima de tres fondos

##### 4.6.1. Combinación con $\omega_e$

Para esta regla se sabe que el estimador de pesos óptimos es de la forma:

$$\hat{w}^{III} = \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{\gamma T(T - 2)} \left[ \left( \frac{\hat{\psi}_a^2}{\hat{\psi}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} + \left( \frac{\frac{N}{T}}{\hat{\psi}_a^2 + \frac{N}{T}} \right) \hat{\mu}_g \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right]. \quad (4.74)$$

Siguiendo el desarrollo analítico de esta combinación realizado por [Jun y Zhou \(2011\)](#), ellos re escriben la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\hat{w}^{III} = \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{\gamma T(T - 2)} \left[ \hat{\eta} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} + (1 - \hat{\eta}) \hat{\mu}_g \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right], \quad (4.75)$$

donde  $\hat{\eta} = \hat{\psi}^2 / (\hat{\psi}^2 + N/T)$ ,  $\hat{\psi}^2 = (\hat{\mu} - \hat{\mu}_g \mathbf{1}_N)' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\mu} - \hat{\mu}_g \mathbf{1}_N)$ , y  $\hat{\mu}_g = \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N / \mathbf{1}_N' \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N$ .

Para obtener una combinación eficiente entre las reglas, [Jun y Zhou \(2011\)](#) definen los siguientes estimadores de parámetros:

$$\hat{\pi}_{6,e}^1 = \omega_e' \hat{\Sigma} \omega_e - \frac{2}{\gamma} \omega_e' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{6,e}^2 = & \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2 - \frac{1}{\gamma} \omega_e' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma} \frac{(T - N - 1)(T - N - 4)}{(T - 2)(T - N - 2)} \\ & \left( [\hat{\eta} \omega_e' \hat{\mu} + (1 - \hat{\eta}) \hat{\mu}_g \omega_e' \mathbf{1}_N] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma} \left[ \hat{\eta} \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} + (1 - \hat{\eta}) \hat{\mu}_g \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right] \right), \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\hat{\pi}_{6,e}^3 = \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2 - \frac{1}{\gamma^2} \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{(T-2)(T-N-2)} \left( \hat{\theta}_a^2 - \frac{N}{T} \hat{\eta} \right). \quad (4.78)$$

A partir de estas definiciones plantean siguiente la regla de combinación:

$$\hat{\omega}_{6,e}^{III} = (1 - \hat{\delta}_{6,e}) \omega_e + \hat{\delta}_{6,e} \hat{\omega}^{III}, \quad (4.79)$$

donde  $\hat{\delta}_{6,e}$  es de la forma:

$$\hat{\delta}_{6,e} = \frac{\hat{\pi}_{6,e}^1 - \hat{\pi}_{6,e}^2}{\hat{\pi}_{6,e}^1 - 2\hat{\pi}_{6,e}^2 + \hat{\pi}_{6,e}^3}. \quad (4.80)$$

#### 4.6.2. Combinación con $\omega_{mk}$

Para el caso de la combinación con el portafolio ponderado por capitalización bursátil, se obtienen los siguientes estimadores:

$$\hat{\pi}_{6,mk}^1 = \omega_{mk}' \hat{\Sigma} \omega_{mk} - \frac{2}{\gamma} \omega_{mk}' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2, \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{6,mk}^2 = & \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2 - \frac{1}{\gamma} \omega_{mk}' \hat{\mu} + \frac{1}{\gamma} \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{(T-2)(T-N-2)} \\ & \left( [\hat{\eta} \omega_{mk}' \hat{\mu} + (1-\hat{\eta}) \hat{\mu}_g \omega_{mk}' \mathbf{1}_N] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma} [\hat{\eta} \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mu} + (1-\hat{\eta}) \hat{\mu}_g \hat{\mu}' \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N] \right), \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\hat{\pi}_{6,mk}^3 = \frac{1}{\gamma^2} \hat{\theta}_a^2 - \frac{1}{\gamma^2} \frac{(T-N-1)(T-N-4)}{(T-2)(T-N-2)} \left( \hat{\theta}_a^2 - \frac{N}{T} \hat{\eta} \right). \quad (4.83)$$

A partir de estas definiciones se plantea la siguiente regla de combinación:

$$\hat{\omega}_{6,mk}^{III} = (1 - \hat{\delta}_{6,mk}) \omega_{mk} + \hat{\delta}_{6,mk} \hat{\omega}^{III}, \quad (4.84)$$

donde  $\hat{\delta}_{6,mk}$  es de la forma:

$$\hat{\delta}_{6,mk} = \frac{\hat{\pi}_{6,mk}^1 - \hat{\pi}_{6,mk}^2}{\hat{\pi}_{6,mk}^1 - 2\hat{\pi}_{6,mk}^2 + \hat{\pi}_{6,mk}^3}. \quad (4.85)$$

## Capítulo 5

# Evaluación del desempeño esperado

### 5.1. Descripción de la simulación

Se evaluará el desempeño esperado fuera de muestra de las seis reglas seleccionadas y sus combinaciones con el portafolio de pesos iguales  $1/N$ , y con el ajustado por capitalización bursátil  $Mk$ . Para fines comparativos, se considerarán dos tamaños de portafolio en términos de números de activos, a saber  $N = 5$  y  $N = 10$ . Asimismo, se considerarán diferentes tamaños de muestra  $T$ . Para todos los casos se asumirá que el inversionista registra un parámetro de aversión al riesgo  $\gamma = 3$ . Como se sabe, se sugiere definir dicho parámetro entre valores de 2 y 4, y que la determinación del mismo no afecta el análisis de comparación de los resultados, ya que el cambio de dicho parámetro genera únicamente un re escalamiento en el resultado obtenido.

Los parámetros de las estimaciones serán calibrados a partir de datos reales. Las acciones fueron seleccionadas del índice S&P 500, teniendo en cuenta 2 criterios: i) que sean las de mayor capitalización bursátil dentro del mismo, y ii) que registren al menos 30 años de historia (ver Apéndice B). Como activo libre de riesgo se consideró la tasa efectiva a la que la Reserva Federal presta a los bancos de su sistema a muy corto plazo. La frecuencia definida fue mensual, por lo que se consideró los precios de las acciones y la tasa libre de riesgo de cierre de cada mes. Con respecto a la moneda de denominación, todos los activos considerados están denominados en USD. Se procedió a calcular la rentabilidad mensual de las acciones a partir de la diferencia de logaritmos de los precios, y a cada observación se le restó la tasa mensual libre de riesgo respectiva, con la finalidad de que la base de datos esté expresada en términos de excesos de retornos. A partir de dicha muestra se obtuvo valores para  $N = 5$  de  $\theta = 0,12099$ ,  $\mu_g = 0,00376$  y  $\psi = 0,07407$ ; y para  $N = 10$  de  $\theta = 0,15767$ ,  $\mu_g = 0,00405$  y  $\psi = 0,11762$ . Estos parámetros serán considerados los valores reales, y a partir de los mismos se realizarán simulaciones bajo las distribuciones asumidas para  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\Sigma}$ . Con ello se podrán obtener los parámetros estimados de pesos asignados a los activos y cuantificar el error de estimación.

Se presentarán los resultados esperados fuera de muestra en porcentaje promedio mensual de las seis reglas de portafolio y sus respectivas combinaciones con el portafolio  $1/N$  y  $Mk$ . Las distribuciones de  $\hat{\mu}$  y de  $\hat{\Sigma}$  serán las planteadas en (3.10) y (3.11), respectivamente. Los desempeños fuera de muestra de las cuatro primeras reglas serán obtenidos de manera analítica, considerando que los pesos asignados por cada una de ellas depende de los valores muestrales de los parámetros. Las dos reglas restantes y todas las combinaciones serán



estimadas cada una a partir de 10,000 simulaciones, considerando que para estos casos, la asignación de pesos va a depender de parámetros no conocidos que deberán ser estimados, a saber,  $\hat{\theta}_a^2$ ,  $\hat{\mu}_g$  y  $\hat{\psi}^2$ . Los trabajos de investigación suelen realizar de 10,000 (Jun y Zhou (2011)) a 100,000 (Kan y Zhou (2007)) simulaciones. Se verificó que a partir de 1,000 simulaciones, los resultados rápidamente convergen al nivel obtenido con 100,000. Por ello se estimó eficiente realizar 10,000 simulaciones para cada ejercicio.

## 5.2. Estimación para $N = 5$

La tabla 5.1 muestra los resultados obtenidos para el caso de  $N = 5$  activos. Los primeros cuatro portafolios asumen que el inversionista conoce algunos de los parámetros. Si conoce  $\mu$  y  $\Sigma$  se encuentra en el caso de certidumbre de parámetros y con ello alcanza una utilidad mensual esperada de 0,244%. En el caso del portafolio de mínima varianza, se asume que conoce la matriz  $\Sigma$  y el resultado es de 0,144%. Asumiendo que sólo conoce  $\theta$  se obtiene para  $T = 600$  un resultado de 0,154% mensual bajo el portafolio óptimo de dos fondos. Cabe señalar que la pérdida esperada en el desempeño fuera de muestra respecto al caso de certidumbre de parámetros puede ser significativa: pasa de 86,6% para  $T = 60$  a 36,9% para  $T = 600$ . Así, se puede apreciar también que la pérdida es una función decreciente del tamaño de muestra  $T$ . Para invertir de manera óptima en el portafolio de mínima varianza y el portafolio tangente se requiere conocer los parámetros  $\psi$  y  $\mu_g$ . Se observa cómo se puede mejorar el desempeño respecto al portafolio de dos fondos: la pérdida frente al caso de certidumbre de parámetros pasa de 29,6% para  $T = 60$  a 23,4% para  $T = 600$ . Cabe señalar que estos cuatro portafolios no se pueden implementar en la práctica. Sin embargo, sirven como punto de referencia para el presente análisis.

Los siguientes dos portafolios presentados son el  $1/N$  y el  $Mk$ . Los resultados obtenidos se alcanzan cuando el inversionista conoce los parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$ . Se puede apreciar que el portafolio  $1/N$  registra un desempeño menor al de certidumbre de parámetros en un 72,4%, mientras que el  $Mk$  en 63,8%. Sin embargo, es importante considerar que a pesar de registrar desempeños menores al del caso de certidumbre, la combinación de dichos portafolios con los obtenidos a través de las reglas puede generar mejoras conjuntas a partir de las ganancias por correlación entre ambos portafolios.

Los siguientes resultados mostrados en la tabla 5.1 corresponden a las seis reglas y sus respectivas combinaciones. Se observa que las cuatro primeras reglas, a saber, las tres clásicas y la Bayesiana presentan, hasta tamaños de muestra de  $T = 300$  y  $T = 360$ , resultados negativos. Esto muestra lo costoso que puede ser, en términos de resultados, considerar los parámetros estimados como los óptimos. En todos estos casos también se puede apreciar que sus combinaciones registran, en particular para tamaños pequeños de  $T$ , una significativa ganancia de eficiencia, en la medida que ninguna combinación obtiene resultados fuera de muestra esperados negativos. También se debe tener en consideración que a menor tamaño  $T$ , los resultados de las combinaciones de estas cuatro primeras reglas con el portafolio  $Mk$  tienden a superar las combinaciones con el portafolio  $1/N$ . Sin embargo, conforme el tamaño de muestra supera el valor de  $T = 300$ , las combinaciones con el portafolio  $1/N$  terminan registrando mejores desempeños esperados.

En general, el combinar una regla con un portafolio como el  $1/N$  o el  $Mk$  permite reducir

la varianza, dadas las ganancias por correlación producto de la combinación, pero puede incrementar el sesgo si es que se acentúa el desvío respecto al vector de asignación óptima  $\omega^*$ . Que los resultados de estas combinaciones superen a los de las cuatro primeras reglas muestra que el efecto que predomina es el de la reducción de la varianza. De hecho, para  $T = 600$ , las combinaciones pueden superar al desempeño fuera de muestra esperado de las reglas señaladas entre en un 70 % y 90 %. Con relación a cuál portafolio de los dos propuestos es más eficiente para las combinaciones, en las cuatro primeras reglas no se puede afirmar que exista uno que supere al otro, porque los resultados varían dependiendo del tamaño de muestra  $T$ . Sin embargo, se debe tener en consideración que el portafolio  $1/N$  y el  $Mk$  van a ser los más eficientes sólo cuando el vector  $\omega^*$  coincida con ellos, respectivamente. Como se mencionó, en los demás casos ayudan, a través de las combinaciones, a reducir la varianza con el costo potencial de incrementar el sesgo. De los resultados analizados, se puede afirmar que para tamaños de muestra pequeños, el portafolio  $Mk$  ayuda a reducir el riesgo de manera más eficiente que el portafolio  $Mk$ . Sin embargo, conforme el tamaño de muestra se incrementa, el portafolio  $Mk$  introduce mayor sesgo sobre los parámetros que el  $1/N$ .

Con relación a la regla 5, se aprecia que la simulación del parámetro  $\hat{\theta}_a^2$  permite estimar asignaciones de activos más eficientes que las primeras cuatro reglas analizadas, en el sentido que los resultados fuera de muestra esperados obtenidos superan de manera constante a los de las reglas previas. Sin embargo, al momento de realizar la simulación de las 2 combinaciones propuestas con la regla 5, se obtuvieron resultados inconsistentes para los primeros tamaños de muestra. De hecho, en el caso de la combinación con el portafolio  $1/N$ , los resultados son consistentes a partir de  $T = 300$ , mientras que para la combinación con el portafolio  $Mk$  a partir de  $T = 420$ . Este problema se explica por el incremento en el error de estimación contenido en el parámetro  $\hat{\theta}_a^2$ , el cual no sólo va a afectar a la determinación de la regla, sino va a volver a generar error adicional al momento de definir el parámetro de combinación, ya que éste depende directamente también de  $\hat{\theta}_a^2$ . Este error se hace más notorio en tamaños de muestra pequeños. Al igual que en las cuatro primeras reglas analizadas, los resultados de las combinaciones superan al resultado de la regla 5.

Finalmente, respecto a la regla 6, sus resultados superan a los obtenidos por las otras reglas, y a nivel de combinaciones, la del portafolio  $Mk$  genera mejores resultados que la del portafolio  $1/N$ . Resulta interesante este hallazgo en la medida que está bastante extendido el análisis de las combinaciones de las reglas con el portafolio  $1/N$ . Sin embargo, no existe muchas referencias respecto a las combinaciones con el portafolio  $Mk$ . Cabe mencionar que los pesos por capitalización bursátil no son fijos, ya que cada cierto periodo se recomponen en función a las nuevas condiciones de mercado. Sin embargo, dicha información es pública y el gestor de portafolios puede alinear el portafolio  $Mk$  cuando se den los ajustes.

### 5.3. Estimación para $N = 10$

La tabla 5.2 muestra los resultados obtenidos para el caso de  $N = 10$  activos. Como se sabe, conforme se incrementa el número de activos riesgosos se registran dos efectos. El primero es que, al haber mayor número de parámetros a ser estimados, el error de estimación se incrementa, lo que determinará menores desempeños esperados fuera de muestra. El segundo es que a mayor número de activos, se incrementa el valor de  $\theta$  (el ratio de Sharpe), lo que

CAPÍTULO 5. EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO ESPERADO

Cuadro 5.1: Desempeño fuera de muestra esperado para las reglas y sus combinaciones con  $N=5$  activos

| Tamaño de muestra T:   | 60     | 120    | 180    | 240    | 300    |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|
| Portafolio óptimo con certidumbre de parámetros                        | 0.244  | 0.244  | 0.244  | 0.244  | 0.244  |
| Portafolio de mínima varianza  | 0.144  | 0.144  | 0.144  | 0.144  | 0.144  |
| Óptimo teórico de 2 fondos   | 0.033  | 0.060  | 0.081  | 0.098  | 0.112  |
| Óptimo teórico de 3 fondos   | 0.142  | 0.155  | 0.162  | 0.167  | 0.172  |
| Asignación 1/N   | 0.067  | 0.067  | 0.067  | 0.067  | 0.067  |
| Asignación por Mk  | 0.088  | 0.088  | 0.088  | 0.088  | 0.088  |
| Regla 1: Clásica con estimadores de $\mu$ y $\Sigma$ desconocidos      | -1.783 | -0.597 | -0.284 | -0.141 | -0.059 |
| Combinación con 1/N  | 0.066  | 0.070  | 0.079  | 0.092  | 0.106  |
| Combinación con Mk   | 0.085  | 0.078  | 0.077  | 0.083  | 0.092  |
| Regla 2: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma$      | -1.715 | -0.583 | -0.278 | -0.138 | -0.057 |
| Combinación con 1/N  | 0.066  | 0.069  | 0.079  | 0.094  | 0.109  |
| Combinación con Mk   | 0.085  | 0.078  | 0.077  | 0.080  | 0.090  |
| Regla 3: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$ | -1.335 | -0.501 | -0.244 | -0.119 | -0.045 |
| Combinación con 1/N  | 0.067  | 0.071  | 0.078  | 0.093  | 0.108  |
| Combinación con Mk   | 0.083  | 0.078  | 0.075  | 0.081  | 0.090  |
| Regla 4: Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$                  | -1.283 | -0.489 | -0.238 | -0.116 | -0.043 |
| Combinación con 1/N  | 0.063  | 0.071  | 0.079  | 0.093  | 0.110  |
| Combinación con Mk   | 0.084  | 0.077  | 0.075  | 0.082  | 0.092  |
| Regla 5: Asignación óptima de 2 fondos                                 | 0.019  | 0.039  | 0.057  | 0.074  | 0.090  |
| Combinación con 1/N  | —      | —      | —      | —      | 0.095  |
| Combinación con Mk   | —      | —      | —      | —      | —      |
| Regla 6: Asignación óptima de 3 fondos                                 | 0.132  | 0.146  | 0.149  | 0.153  | 0.155  |
| Combinación con 1/N  | 0.177  | 0.194  | 0.202  | 0.207  | 0.211  |
| Combinación con Mk   | 0.188  | 0.205  | 0.211  | 0.216  | 0.220  |
| Tamaño de muestra T:   | 360    | 420    | 480    | 540    | 600    |
| Portafolio óptimo con certidumbre de parámetros                        | 0.244  | 0.244  | 0.244  | 0.244  | 0.244  |
| Portafolio de mínima varianza  | 0.144  | 0.144  | 0.144  | 0.144  | 0.144  |
| Óptimo teórico de 2 fondos   | 0.123  | 0.133  | 0.141  | 0.148  | 0.154  |
| Óptimo teórico de 3 fondos   | 0.175  | 0.179  | 0.182  | 0.184  | 0.187  |
| Asignación 1/N   | 0.067  | 0.067  | 0.067  | 0.067  | 0.067  |
| Asignación por Mk  | 0.088  | 0.088  | 0.088  | 0.088  | 0.088  |
| Regla 1: Clásica con estimadores de $\mu$ y $\Sigma$ desconocidos      | -0.005 | 0.032  | 0.060  | 0.081  | 0.098  |
| Combinación con 1/N  | 0.124  | 0.143  | 0.159  | 0.176  | 0.188  |
| Combinación con Mk   | 0.105  | 0.119  | 0.137  | 0.155  | 0.170  |
| Regla 2: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma$      | -0.004 | 0.033  | 0.060  | 0.082  | 0.098  |
| Combinación con 1/N  | 0.125  | 0.143  | 0.158  | 0.175  | 0.188  |
| Combinación con Mk   | 0.104  | 0.118  | 0.138  | 0.155  | 0.171  |
| Regla 3: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$ | 0.004  | 0.039  | 0.065  | 0.085  | 0.101  |
| Combinación con 1/N  | 0.127  | 0.144  | 0.160  | 0.176  | 0.188  |
| Combinación con Mk   | 0.103  | 0.121  | 0.136  | 0.157  | 0.170  |
| Regla 4: Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$                  | 0.006  | 0.040  | 0.066  | 0.086  | 0.102  |
| Combinación con 1/N  | 0.124  | 0.142  | 0.161  | 0.175  | 0.189  |
| Combinación con Mk   | 0.104  | 0.121  | 0.140  | 0.157  | 0.173  |
| Regla 5: Asignación óptima de 2 fondos                                 | 0.104  | 0.116  | 0.127  | 0.136  | 0.144  |
| Combinación con 1/N  | 0.147  | 0.162  | 0.182  | 0.194  | 0.205  |
| Combinación con Mk   | —      | —      | 0.144  | 0.176  | 0.193  |
| Regla 6: Asignación óptima de 3 fondos                                 | 0.156  | 0.159  | 0.160  | 0.161  | 0.163  |
| Combinación con 1/N  | 0.215  | 0.218  | 0.222  | 0.225  | 0.228  |
| Combinación con Mk   | 0.225  | 0.228  | 0.231  | 0.235  | 0.238  |

mejora el resultado esperado fuera de muestra en ausencia de errores de estimación. Así, al pasar de 5 a 10 activos, el parámetro pasa de  $\theta = 0,12099$  a  $\theta = 0,15767$ . Ello determina que el desempeño fuera de muestra esperado para el caso de certidumbre de parámetros pase de 0,244 % mensual del caso  $N = 5$  a 0,414 % con  $N = 10$ . Con relación al portafolio de mínima varianza, el resultado obtenido es de 0,182 % (0,144 % con  $N = 5$ ). Para  $T = 600$ , el portafolio óptimo de dos fondos obtiene un 0,243 % mensual (0,154 % con  $N = 5$ ), mientras que el portafolio óptimo de tres fondos registra un desempeño esperado de 0,283 % (0,187 %

## CAPÍTULO 5. EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO ESPERADO

con  $N = 5$ ). Así, a pesar que todos estos resultados son referenciales, se puede verificar que el incremento de parámetros facilitó la mejora del desempeño esperado de las reglas en términos absolutos.

Los siguientes dos portafolios presentados son el  $1/N$  y el  $Mk$ . Se puede apreciar que el portafolio  $1/N$  registra, a diferencia del caso de  $N = 5$  un desempeño esperado mejor al del portafolio  $Mk$  (0,030% -0,160%, respectivamente). De hecho, el desempeño fuera de muestra esperado de este último es negativo, por lo que el riesgo de este portafolio no estaría compensando la rentabilidad esperada. Así, ambos portafolios muestran un desempeño esperado fuera de muestra menor al de certidumbre de parámetros (-93% en el  $1/N$  y -139% en el  $Mk$ ).

Los siguientes resultados mostrados en la tabla 5.2 corresponden a las seis reglas y sus respectivas combinaciones. De comparar con lo obtenido para el caso de  $N = 5$ , los resultados con  $N = 10$  son bastante similares. Así, a nivel de reglas, la óptima de tres fondos estimada supera de manera consistente a las demás. A nivel de combinaciones, nuevamente se observa que para las primeras cuatro reglas, para tamaños de  $T$  pequeños, las combinaciones con el portafolio  $Mk$  superan a las combinaciones con el portafolio  $1/N$ . Sin embargo, entre  $T = 240$  y  $T = 300$ , los resultados obtenidos por las combinaciones con  $1/N$  se vuelven más eficientes desde la perspectiva de rentabilidad ajustada por riesgo. Para la regla 5, las combinaciones empiezan a converger a resultados consistentes para tamaños de muestra menores que para el caso de  $N = 5$ , a saber, entre  $T = 180$  y  $T = 240$ . Finalmente, para el caso de las combinaciones de la regla 6, sus resultados son los mejores obtenidos, siendo la combinación con el portafolio  $Mk$  la que supera de manera marginal a la combinación con el portafolio  $1/N$ . Sin embargo, no se debe dejar de tener cuenta que para  $T = 600$ , el resultado de la mejor combinación se encuentra por debajo en un 28% respecto al obtenido bajo certidumbre de parámetros. Con ello, se puede verificar que al incrementar el tamaño de  $N$  se incrementa el desvío respecto al resultado bajo certidumbre de parámetros. Esto es importante tener en cuenta pues a nivel de portafolios de inversión en acciones internacionales, el número de posiciones suele fluctuar de 25, cuando son portafolios altamente concentrados, a 200 cuando se busca reducir el riesgo de concentración.



Cuadro 5.2: Desempeño fuera de muestra esperado para las reglas y sus combinaciones con N=10 activos

| Tamaño de muestra T:   | 60     | 120    | 180    | 240    | 300    |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|
| Portafolio óptimo con certidumbre de parámetros                        | 0.414  | 0.414  | 0.414  | 0.414  | 0.414  |
| Portafolio de mínima varianza  | 0.182  | 0.182  | 0.182  | 0.182  | 0.182  |
| Óptimo teórico de 2 fondos   | 0.044  | 0.086  | 0.120  | 0.148  | 0.170  |
| Óptimo teórico de 3 fondos   | 0.163  | 0.196  | 0.216  | 0.230  | 0.242  |
| Asignación 1/N   | 0.030  | 0.030  | 0.030  | 0.030  | 0.030  |
| Asignación por Mk  | -0.160 | -0.160 | -0.160 | -0.160 | -0.160 |
| Regla 1: Clásica con estimadores de $\mu$ y $\Sigma$ desconocidos      | -5.125 | -1.535 | -0.752 | -0.416 | -0.230 |
| Combinación con 1/N  | 0.037  | 0.054  | 0.075  | 0.099  | 0.125  |
| Combinación con Mk   | 0.071  | 0.077  | 0.084  | 0.099  | 0.121  |
| Regla 2: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma$      | -4.938 | -1.502 | -0.739 | -0.409 | -0.225 |
| Combinación con 1/N  | 0.039  | 0.054  | 0.077  | 0.099  | 0.125  |
| Combinación con Mk   | 0.072  | 0.077  | 0.086  | 0.100  | 0.121  |
| Regla 3: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$ | -3.114 | -1.160 | -0.600 | -0.334 | -0.178 |
| Combinación con 1/N  | 0.040  | 0.058  | 0.078  | 0.102  | 0.128  |
| Combinación con Mk   | 0.071  | 0.076  | 0.087  | 0.102  | 0.123  |
| Regla 4: Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$                  | -2.999 | -1.134 | -0.589 | -0.328 | -0.174 |
| Combinación con 1/N  | 0.040  | 0.061  | 0.079  | 0.102  | 0.129  |
| Combinación con Mk   | 0.070  | 0.075  | 0.084  | 0.100  | 0.122  |
| Regla 5: Asignación óptima de 2 fondos                                 | 0.018  | 0.039  | 0.061  | 0.085  | 0.108  |
| Combinación con 1/N  | —      | —      | —      | 0.141  | 0.161  |
| Combinación con Mk   | —      | —      | —      | —      | 0.140  |
| Regla 6: Asignación óptima de 3 fondos                                 | 0.156  | 0.182  | 0.195  | 0.206  | 0.217  |
| Combinación con 1/N  | 0.179  | 0.206  | 0.220  | 0.231  | 0.242  |
| Combinación con Mk   | 0.189  | 0.215  | 0.229  | 0.240  | 0.250  |
| Tamaño de muestra T:   | 360    | 420    | 480    | 540    | 600    |
| Portafolio óptimo con certidumbre de parámetros                        | 0.414  | 0.414  | 0.414  | 0.414  | 0.414  |
| Portafolio de mínima varianza  | 0.182  | 0.182  | 0.182  | 0.182  | 0.182  |
| Óptimo teórico de 2 fondos   | 0.190  | 0.206  | 0.220  | 0.233  | 0.243  |
| Óptimo teórico de 3 fondos   | 0.252  | 0.261  | 0.269  | 0.277  | 0.283  |
| Asignación 1/N   | 0.030  | 0.030  | 0.030  | 0.030  | 0.030  |
| Asignación por Mk  | -0.160 | -0.160 | -0.160 | -0.160 | -0.160 |
| Regla 1: Clásica con estimadores de $\mu$ y $\Sigma$ desconocidos      | -0.111 | -0.030 | 0.030  | 0.076  | 0.111  |
| Combinación con 1/N  | 0.151  | 0.179  | 0.204  | 0.230  | 0.251  |
| Combinación con Mk   | 0.143  | 0.167  | 0.193  | 0.219  | 0.244  |
| Regla 2: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma$      | -0.108 | -0.028 | 0.032  | 0.077  | 0.112  |
| Combinación con 1/N  | 0.153  | 0.179  | 0.206  | 0.230  | 0.250  |
| Combinación con Mk   | 0.145  | 0.168  | 0.195  | 0.220  | 0.244  |
| Regla 3: Clásica con estimadores insesgados para $\mu$ y $\Sigma^{-1}$ | -0.076 | -0.004 | 0.049  | 0.091  | 0.124  |
| Combinación con 1/N  | 0.155  | 0.183  | 0.208  | 0.231  | 0.254  |
| Combinación con Mk   | 0.147  | 0.172  | 0.197  | 0.222  | 0.245  |
| Regla 4: Bayesiana con priori impropia sobre $\Sigma$                  | -0.074 | -0.002 | 0.051  | 0.092  | 0.125  |
| Combinación con 1/N  | 0.155  | 0.184  | 0.208  | 0.232  | 0.252  |
| Combinación con Mk   | 0.145  | 0.169  | 0.196  | 0.222  | 0.247  |
| Regla 5: Asignación óptima de 2 fondos                                 | 0.131  | 0.154  | 0.175  | 0.194  | 0.212  |
| Combinación con 1/N  | 0.182  | 0.201  | 0.222  | 0.242  | 0.261  |
| Combinación con Mk   | 0.171  | 0.194  | 0.218  | 0.240  | 0.260  |
| Regla 6: Asignación óptima de 3 fondos                                 | 0.226  | 0.236  | 0.246  | 0.255  | 0.265  |
| Combinación con 1/N  | 0.251  | 0.261  | 0.270  | 0.281  | 0.290  |
| Combinación con Mk   | 0.260  | 0.270  | 0.278  | 0.289  | 0.298  |

## Capítulo 6

# Conclusiones

### 6.1. Conclusiones

Con relación al análisis realizado se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Implementar el enfoque MV tradicional puede resultar costoso para un gestor de portafolios en términos de desempeño fuera de muestra obtenido, dado el alto nivel de error de estimación que pueden contener los parámetros. Frente a esta limitación, una manera eficiente de reducir dicho error es combinar el portafolio tangente y el activo libre de riesgo con otros portafolios. A nivel de reglas, el portafolio óptimo de tres fondos, que incluye el de mínima varianza, muestra de manera consistente resultados esperados fuera de muestra superiores a los de las otras reglas que sólo incluyen al portafolio tangente y al activo libre de riesgo. A nivel de combinaciones de reglas, el incorporar el portafolio  $1/N$  o el  $Mk$  también ayuda a obtener mejores resultados.
- Con relación a qué portafolio es más eficiente para realizar las combinaciones, se sabe que el mejor será aquel que coincida con el vector de pesos asignados a los activos  $\omega^*$ . Sin embargo, como dicha probabilidad es cercana a cero, el análisis permite encontrar que las ganancias por correlación de combinar una regla con cualquiera de estos dos portafolios, permite mejorar de manera significativa los resultados esperados fuera de muestra. Asimismo, de acuerdo al análisis realizado, el portafolio  $Mk$  mostró mejor desempeño en tamaños  $T$  pequeños, mientras que el  $1/N$  lo superó en tamaños de muestra grandes. Esto a excepción de la regla 6 en que el portafolio  $Mk$  mostró mejores resultados de manera consistente para ambos tamaños de activos  $N$ . Por ello, se puede concluir que el incorporar el portafolio  $Mk$  al análisis agrega valor.
- La simulación para las combinaciones de la regla 5 registran resultados consistentes para tamaños de muestra  $T$  por encima de  $T = 420$  para el caso de  $N = 5$  y  $T = 240$  para  $N = 10$ . Ello se debe a que tanto la estimación de la regla como sus combinaciones dependen de manera directa del parámetro  $\hat{\theta}_a^2$ , lo que amplifica el efecto del error de estimación sobre el desempeño esperado fuera de muestra, volviendo inconsistentes los resultados para  $T$  pequeños.
- Conforme se incrementa el número de activos  $N$  se aumenta el error de estimación, pero también se incrementa el valor del Ratio de Sharpe que podría ser alcanzado. En el presente documento se trabajó con tamaños de  $N = 5$  y  $N = 10$  registrándose un

significativo incremento del error de estimación. Esto es importante de considerar, ya que un portafolio de acciones internacionales suele registrar entre 25 y 200 posiciones.

## 6.2. Sugerencias para investigaciones futuras

Respecto a tópicos pendientes a ser desarrollados se tiene:

- Analizar el impacto de incorporar el portafolio  $Mk$  a combinaciones con reglas como las de factores y la de estimadores shrinkage. Asimismo, analizar el resultado fuera de muestra para las combinaciones con el portafolio  $Mk$  no únicamente para el caso que se asume que el peso se mantiene fijo durante el periodo de análisis, sino también ajustando dicho peso por la rentabilidad simulada (ajustes continuos por capitalización bursátil).
- Considerar únicamente la toma de posiciones largas en los portafolios de inversión, ya que las posiciones cortas normalmente están prohibidas por regulación para los inversionistas institucionales, dado el riesgo que representan.
- Evaluar si es que la incorporación de distintas categorías de activos dentro del portafolio (depósitos, bonos, acciones, commodities, monedas, entre otros), mejora los resultados obtenidos, al registrar éstos niveles de correlación y volatilidad diferenciados.
- Aplicar las combinaciones con ventanas móviles a datos reales del mercado global y local, a fin de comparar dichos resultados con los reales obtenidos por los portafolios de gestión activa, como los Fondos Mutuos, y los de gestión pasiva que replican índices, a fin de medir la utilidad de los ejercicios de optimización.



## Apéndice A

### Distribuciones

#### A.1. Distribución Normal Multivariada

Sea un vector de dimensión  $n \times 1$  tal que  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  con distribución normal multivariada, su función de densidad viene dada por:

$$f(x|\mu, \Sigma) = (2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)\right) \quad (\text{A.1})$$

donde el vector  $n \times 1$  de medias  $\mu$  y la matriz  $n \times n$  positiva semidefinida  $\Sigma$  es la covarianza de los elementos. La diagonal de dicha matriz está compuesta por las varianzas de cada componente de  $x$ , mientras que los elementos fuera de la diagonal son las covarianzas  $cov(x_i, x_j)$  con  $i \neq j$ , entre dos componentes de  $x$ . Dado que la  $cov(x_i, x_j)$  es igual a la  $cov(x_j, x_i)$ ,  $\Sigma$  es simétrica y contiene  $\frac{n(n-1)}{2}$  elementos distintos.

#### A.2. Distribución $t$ - Student Multivariada

Sea un vector de dimensión  $n \times 1$  tal que  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  con distribución  $t$  - Student multivariada, su función de densidad viene dada por:

$$f(x|v, \mu, S) = C (v + (x - \mu)' S^{-1} (x - \mu))^{-(n+v)/2} \quad (\text{A.2})$$

donde  $C = \frac{v^{v/2} \Gamma((v+n)/2) |S|^{1/2}}{\pi^{n/2} \Gamma(v/2)}$ .

El parámetro  $v$  corresponde a los grados de libertad, que regula el tamaño de las colas,  $\mu$  es el vector de medias y  $S$  es la matriz de escala. Se denota la distribución como  $t(v, \mu, S)$ . La matriz de covarianzas de  $x$  está dada por:

$$\Sigma = S^{-1} \frac{v}{v-2}$$

La matriz de covarianzas existe para  $v > 2$  y la media para  $v > 1$ .

#### A.3. Distribución Wishart

Se parte de la observación de varias muestras de vectores de dimensión  $n \times 1$  de la forma  $X_1, X_2, \dots, X_T$ . Estos vectores están independientemente distribuidos con distribución normal multivariada  $N(\mu, \Sigma)$ . La distribución Wishart se genera como una distribución de

cantidad  $Q$  tal que:

$$Q = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(X_t - \bar{X})'$$

que es igual a  $T$  veces la matriz de covarianzas muestral, donde  $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$ . Si  $Q$  es una matriz positivo definida, su función de densidad viene dada por:

$$f(Q|T, \Sigma) = \frac{|Q|^{\frac{1}{2}(T-N-1)} \exp\left(-\frac{1}{2}tr\Sigma^{-1}Q\right)}{2^{NT/2} \pi^{N(N-1)/4} |\Sigma|^{T/2} \prod_{i=1}^N \Gamma((T+1-i)/2)} \quad (\text{A.3})$$

La distribución Wishart se denota por  $W(T-1, \Sigma)$ .

#### A.4. Distribución Wishart Inversa

Bajo el enfoque bayesiano, la función Wishart inversa es la priori conjugada de la matriz de covarianzas de la distribución normal. Se considera que una matriz positivo definida  $Q$  y se denota  $S$  como su inversa tal que  $S = Q^{-1}$ . Su densidad viene dada por:

$$f(S|\Psi, v) = \frac{|\Psi|^{v/2}}{2^{vN/2} \pi^{N(N-1)/4} \prod_{i=1}^N \Gamma(v-i+1)/2} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}trS^{-1}\Psi\right)}{|S|^{(v+n+1)/2}} \quad (\text{A.4})$$

donde  $\Psi = \Sigma^{-1}$  y  $v$  es un parámetro de grados de libertad, tal que  $v \geq N$ . Se denota esta distribución como  $IW(\Psi, v)$ .

Esta distribución es una generalización de la distribución *Gamma inversa* para el caso multivariado. Los elementos de la diagonal de  $S$  tienen distribución  $\chi^2$  *inversa*.

El esperado de una variable aleatoria con distribución *Wishart inversa* es:

$$E(S) = \Psi \frac{1}{N-T-1}$$

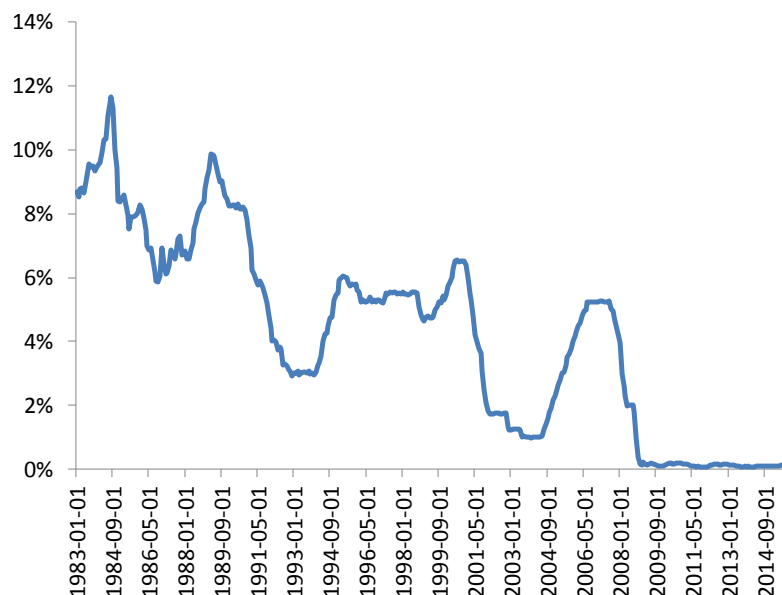
## Apéndice B

### Base de datos

Se elaboró una base de datos a partir de la cual se estimaron los parámetros para los ejercicios de simulación. La muestra tiene frecuencia mensual, y va de diciembre de 1982 hasta diciembre de 2015 para cada uno de los activos.

Para la tasa libre de riesgo, se optó por considerar la tasa efectiva en USD a la que la Reserva Federal Americana (FED) presta a los bancos de su sistema a muy corto plazo, la cual es publicada por la plataforma Bloomberg (ticker FEDL01 Index). Esta tasa es estimada y publicada por la Reserva de Nueva York con periodicidad diaria. Se calcula al cierre de cada día como el promedio ponderado por monto de cada una de las tasas a las que se cerraron los préstamos. Para efectos de la estimación de los parámetros reales en la simulación, se tomó la tasa efectiva de cada cierre de mes, considerando que la periodicidad de los datos es mensual.

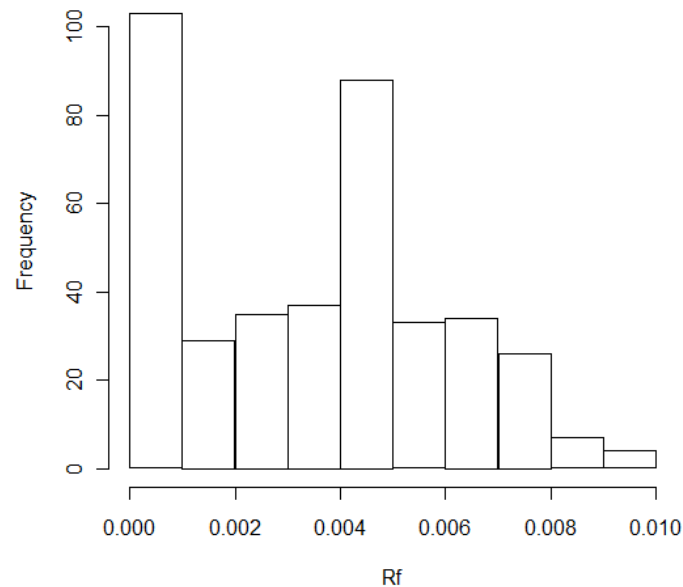
Figura B.1: Tasa de corto plazo de la FED



Al ser tasas nominales y con la finalidad de trabajar sobre una frecuencia mensual, las observaciones anuales fueron divididas entre doce para tenerlas expresadas en dicha frecuencia.

El histograma de las tasas mensuales se aprecia en el gráfico B.2.

Figura B.2: Histograma de la tasa de la FED



De aplicar la prueba de Shapiro para verificar la normalidad de la serie, se obtuvo un valor de  $W$  igual a 0.9332 y un  $p$  - valor de  $2.534e-12$ , por lo que se rechaza la hipótesis de normalidad.

Para la selección de los activos riesgosos, se tomó como referencia la composición del índice de mercado S&P 500 (Standard and Poors 500). Como se sabe, este índice se estima sobre la capitalización bursátil de 500 grandes empresas que poseen acciones que cotizan en las bolsas NYSE o NASDAQ. Los componentes del índice S&P 500 y su ponderación son determinados por S&P Dow Jones Índices.

Para la selección inicial de las acciones que forman parte de la muestra, se consideró las de mayor participación por peso dentro del índice al cierre de diciembre de 2015. Definidas las acciones, se procedió a obtener los precios de las mismas de la plataforma Bloomberg. Los datos considerados fueron los valores de las acciones al cierre de cada mes. Cabe señalar que estos precios estuvieron todos expresados en USD, por lo que no hubo necesidad de transformar ninguno por monedas. A fin que la muestra sea representativa y que los resultados sean consistentes (p.e. que los activos muestren excesos de retornos positivos en el periodo analizado), se consideraron las primeras empresas por tamaño y que además registren al menos treinta años de historia. Así, se seleccionaron las primeras diez empresas que cumplieran con estas restricciones. Los datos mensuales inician al cierre de diciembre de 1982 y culminan al cierre de diciembre de 2015, lo que da un total de 397 observaciones de precio y 396 de retorno para cada activo (33 años).

La tabla B.1 muestra las diez acciones seleccionadas, así como la abreviatura utilizada para cada una de ellas. Estas empresas se encuentran ordenadas, de mayor a menor, por su

capitalización bursátil. Asimismo, para el diseño de la simulación, con la finalidad de contar con dos ejercicios con distintos número de activos  $N$ , se trabajó no sólo con  $N = 10$  sino también con  $N = 5$  (las cinco primeras por capitalización bursátil de la muestra seleccionada). Cabe señalar que la participación relativa de cada empresa dentro del índice, ajustada por la suma de los pesos de todas las empresas consideradas para los dos tamaños de muestra trabajados, fueron utilizados para calcular los pesos del portafolio ajustado por capitalización bursátil. En la misma tabla se puede observar también los pesos por capitalización bursátil por empresa para los dos tamaños de  $N$  considerados.

Cuadro B.1: Acciones seleccionadas

| Empresa                     | Ticker         | Abreviación | % para T = 5 | % para T = 10 |
|-----------------------------|----------------|-------------|--------------|---------------|
| Exxon Mobil Corp            | XOM US Equity  | XOM         | 0.17         | 0.29          |
| Apple Inc.                  | AAPL US Equity | AAPL        | 0.13         | 0.22          |
| Procter & Gamble            | PG US Equity   | PG          | 0.10         | 0.17          |
| General Electric Co         | GE US Equity   | GE          | 0.09         | 0.16          |
| Intl Business Machines Corp | IBM US Equity  | IBM         | 0.09         | 0.16          |
| Johnson & Johnson           | JNJ US Equity  | JNJ         | 0.09         | —             |
| JP Morgan Chase & Co        | JPM US Equity  | JPM         | 0.09         | —             |
| Chevron Corp                | CVX US Equity  | CVX         | 0.08         | —             |
| Wells Fargo & Co            | WFC US Equity  | WFC         | 0.08         | —             |
| Bank of America Corp        | BAC US Equity  | BAC         | 0.08         | —             |
| TOTAL                       |                |             | 1.000        | 1.000         |

Con relación a los retornos mensuales de los activos, sus características se detallan en la tabla B.2.

Cuadro B.2: Características de los datos

| Empresa     | XOM   | AAPL  | PG    | GE    | IBM   | JNJ   | JPM   | CVX   | WFC   | BAC   |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| nobs        | 396   | 396   | 396   | 396   | 396   | 396   | 396   | 396   | 396   | 396   |
| NAs         | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| Minimum     | -0.15 | -0.86 | -0.44 | -0.35 | -0.30 | -0.20 | -0.43 | -0.20 | -0.45 | -0.76 |
| Maximum     | 0.20  | 0.37  | 0.22  | 0.22  | 0.30  | 0.17  | 0.28  | 0.21  | 0.34  | 0.55  |
| 1. Quartile | -0.02 | -0.06 | -0.02 | -0.03 | -0.04 | -0.03 | -0.04 | -0.03 | -0.03 | -0.04 |
| 3. Quartile | 0.04  | 0.10  | 0.05  | 0.05  | 0.05  | 0.05  | 0.06  | 0.04  | 0.05  | 0.06  |
| Mean        | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.00  |
| Median      | 0.01  | 0.02  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.01  |
| Sum         | 3.04  | 5.29  | 3.07  | 2.76  | 1.74  | 3.50  | 1.99  | 2.42  | 3.97  | 1.97  |
| SE Mean     | 0.00  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.01  |
| LCL Mean    | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | -0.01 |
| UCL Mean    | 0.01  | 0.03  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.01  | 0.02  | 0.02  |
| Variance    | 0.00  | 0.02  | 0.00  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.01  | 0.00  | 0.01  | 0.01  |
| Stdev       | 0.05  | 0.14  | 0.06  | 0.07  | 0.07  | 0.06  | 0.10  | 0.06  | 0.08  | 0.11  |
| Skewness    | 0.13  | -1.00 | -1.22 | -0.68 | -0.14 | -0.20 | -0.75 | -0.10 | -0.64 | -1.22 |
| Kurtosis    | 1.06  | 4.40  | 8.23  | 2.66  | 1.86  | 0.70  | 2.24  | 0.84  | 5.78  | 9.24  |

Se puede apreciar que la base de datos está compuesta por diez activos y que no se registra ausencia de datos en ninguna de las series. Con respecto a la media, en todos los casos se registraron retornos positivos, al igual que en la mediana. Respecto al nivel de desviación estándar, se puede apreciar que éste registra valores superiores a los de la media. Es decir, la volatilidad de los activos seleccionados es alta, lo que grafica el nivel de riesgo de un portafolio de acciones. Con relación al sesgo, a excepción de XOM, las demás series registran cola hacia la izquierda. Considerando la curtosis, PG y BAC presentan excesos importantes (leptocurtosis).

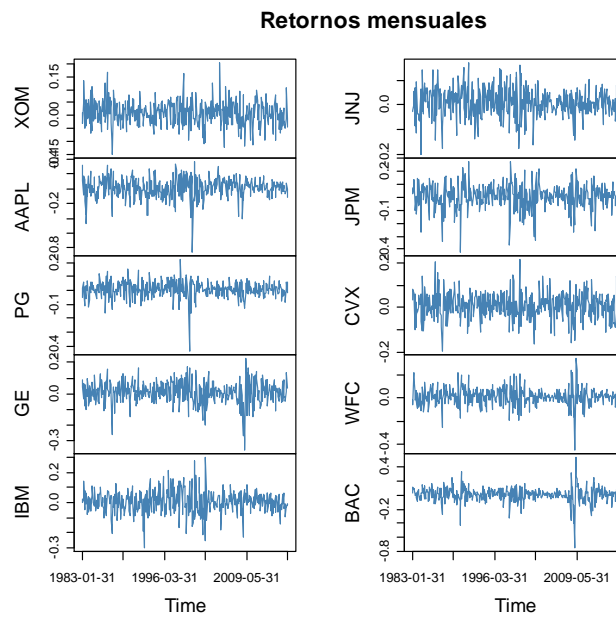
A nivel de histograma, las características de las series se puede apreciar en el gráfico B.3.

Figura B.3: Histograma por activo



Como series de tiempo, el desempeño del exceso de retorno mensual de cada una de las series muestra un patrón estacionario (figura B.4).

Figura B.4: Retorno mensual por activo

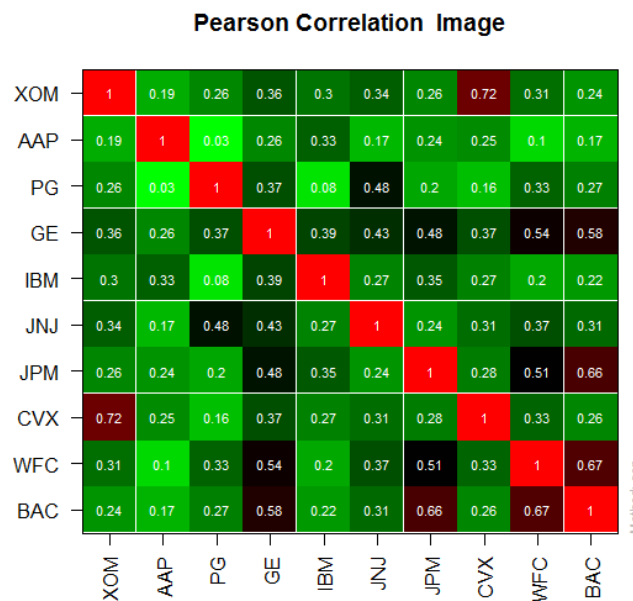


Con relación al supuesto de normalidad, se procedió a realizar la prueba Energy. Se obtuvo

un E-Statistic de 12.8859 y un p - valor de 2.2e-16, por lo que no se puede afirmar que los datos sigan un patrón normal multivariado.

Finalmente, un aspecto fundamental de la teoría del portafolio es la posibilidad de generar ganancias por correlación al diversificar las inversiones en un conjunto grande de activos. La figura B.5 muestra las distintas correlaciones entre los activos. Mientras más zonas estén coloreadas de verde claro mayor será la ganancia por correlación que se obtendrá al combinar dichas acciones. Así, se puede afirmar que los activos seleccionados registran en promedio niveles de correlación menores que 1, por lo que se registrarán ganancias por diversificación.

Figura B.5: Coeficiente de correlación





## Apéndice C

# Programación en R

### C.1. Análisis de los datos

```

#FONDO 01: ACTIVO LIBRE DE RIESGO

require(timeSeries)
Rf <- readSeries(file = "C:Basef1.csv", header = TRUE, sep = ",", format = "%Y-%m-%d")
Rf
Rf.matriz<-cbind(Rf,Rf,Rf,Rf,Rf,Rf,Rf,Rf,Rf,Rf)

#HISTOGRAMA

hist(Rf)

#NORMALIDAD

require(fPortfolio)
ShapiroTest <- assetsTest(Rf, method = "shapiro")
print(ShapiroTest)

#FONDO 02: PORTAFOLIO RIESGOSO

require(timeSeries)
Rp <- readSeries(file = "C:Basef2.csv", header = TRUE, sep = ",", format = "%Y-%m-%d")
Rp

#RESUMEN DATOS

require(fBasics)
basicStats(Rp, ci=0.95)

#SERIES DE TIEMPO

plot(Rp[, 1:10], main = "Retornos mensuales", col = "steelblue")

#HISTOGRAMA

histPanel <- function(x, ...) {
  usr <- par("usr")
  on.exit(par(usr))
  par(usr = c(usr[1:2], 0, 1.5))
  h <- hist(x, plot = FALSE)
  breaks <- h$breaks
  nB <- length(breaks)
  y <- h$counts
  y <- y/max(y)
  rect(breaks[-nB], 0, breaks[-1], y, ...)
}

assetsPairsPlot(Rp, diag.panel = histPanel, pch = 19, cex = 0.5, col = "royalblue4")

#CORRELACIÓN

require(fAssets)
assetsCorImagePlot(Rp)

#NORMALIDAD

require(fPortfolio)
EnergyTest <- assetsTest(Rp, method = "energy")
print(EnergyTest)

```

```
#BASE DE DATOS

Datos<-Rp-Rf.matriz
Datos
N<-10
gamma<-3
mu<-colMeans(Datos)
mu
Sigma<-cov(Datos)
Sigma
```

## C.2. Estimación de portafolios y reglas

### # PORTAFOLIO ÓPTIMO

```
Omega<-(1/gamma)*ginv(Sigma)%*%mu
Omega
theta.2<-t(mu)%*%ginv(Sigma)%*%mu
theta.2
E.omega<- (1/(2*gamma))%*%theta.2
E.omega
```

### # PORTAFOLIO ÓPTIMO DE DOS FONDOS

```
N=10
T=600
c<-((T-N-1)*(T-N-4))/(T*(T-2))*(theta.2/(theta.2 + N/T))
E.2fondos<-(theta.2/(2*gamma))*(theta.2/(theta.2 + N/T))*((T-N-1)*(T-N-4))/((T-2)*(T-N-2))
E.2fondos
```

### # PORTAFOLIO ÓPTIMO DE TRES FONDOS

```
gamma<-3
N=10
T=600
uno<-cbind(rep(1,10))
num<-(t(mu)%*%ginv(Sigma)%*%uno)^2
den<-t(uno)%*%ginv(Sigma)%*%uno
phi<-theta.2-(num/den)
E.3fondos<-(theta.2/(2*gamma))*(1-((N/T)/(theta.2+(theta.2/phi)*(N/T))))*(T-N-1)*(T-N-4)/((T-2)*(T-N-2))
E.3fondos
```

### # PORTAFOLIO DE VARIANZA MÍNIMA

```
Omega.mv<- (drop(1/(t(uno)%*%ginv(Sigma)%*%uno)))*(ginv(Sigma)%*%uno)
E.Omega.mv<-t(Omega.mv)%*%mu-(gamma/2)*t(Omega.mv)%*%Sigma%*%Omega.mv
E.Omega.mv
```

### # PORTAFOLIO DE PESOS IGUALES

```
N=10
Omega.e<- rep(1/N, N)
E.Omega.e<-Omega.e%*%mu-(gamma/2)*t(Omega.e)%*%Sigma%*%Omega.e
E.Omega.e
```

### # PORTAFOLIO DE CAPITALIZACIÓN BURSÁTIL

```
require(timeSeries)
Mk <- readSeries(file = "C:Basef3.csv", header = TRUE, sep = ",", format = "%Y-%m-%d")
RMkm<-cbind(diag(Mk%*%t(Datos)))
require(matrixStats)
RMk<-colMeans(RMkm)
Stdev<-colSds(RMkm)
Var<-Stdev^2
E.Omega.mk<-RMk-(gamma/2)*Var
E.Omega.mk
```

### # REGLAS ANALÍTICAS

```
T<-600

# REGLA 01

k1<-((T)/(T-N-2))*(2-(T*(T-2))/((T-N-1)*(T-N-4)))
k1

ER01<-(k1*(theta.2))/(2*gamma)-((N*T*(T-2))/(2*gamma*(T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))
ER01
```

```
# REGLA 02

k2<-((T-1)/(T-N-2))*(2-((T-1)*(T-2))/((T-N-1)*(T-N-4)))
k2

ER02<-((k2*(theta.2))/(2*gamma))-((N*((T-1)^2)*(T-2))/(2*gamma*T*(T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))
ER02

# REGLA 03

k3<-2-((T-2)*(T-N-2))/((T-N-1)*(T-N-4))
k3

ER03<-((k3*(theta.2))/(2*gamma))-((N*(T-2)*(T-N-2))/(2*gamma*T*(T-N-1)*(T-N-4)))
ER03

# REGLA 04

k4<-((T)/(T+1))*(2-(T*(T-2)*(T-N-2))/((T+1)*(T-N-1)*(T-N-4)))
k4

ER04<-((k4*(theta.2))/(2*gamma))-((N*T*(T-2)*(T-N-2))/(2*gamma*(T+1)^2*(T-N-1)*(T-N-4)))
ER04

# REGLA 05 - SIMULACIÓN DOS FONDOS

sim.ER05<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
require(MASS)
E.mu<-colMeans(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
E.c<-drop(((T-N-1)*(T-N-4))/(T*(T-2))*(E.theta2a/(E.theta2a+(N/T))))
ER05<-(E.c/gamma)*(T/(T-N-2))*theta.2-((E.c^2)/(2*gamma))*(theta.2+(N/T))*(((T-2)*(T-2))/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))
sim.ER05<-rbind(sim.ER05,ER05)
}

ER05.prom<-colMeans(sim.ER05)
ER05.prom

# REGLA 06 - SIMULACIÓN TRES FONDOS

sim.ER06<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
require(MASS)
E.mu<-cbind(colMeans(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma)))
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
uno<-cbind(rep(1,10))
E.mu.g<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*uno)/(t(uno)%*ginv(E.Sigma)%*uno)
E.phi.2<-t(E.mu-drop(E.mu.g)*uno)%*ginv(E.Sigma)%*(E.mu-drop(E.mu.g)*uno)
Int<-E.phi.2/(1+E.phi.2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, ((N-1)/2), ((T-N+1)/2))
E.phi.2a<-(((T-N-1)*E.phi.2-(N-1))/T)+((2*(E.phi.2^((N-1)/2))*((1+E.phi.2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
E.omega.3<-(((T-N-1)*(T-N-4))/(gamma*(T)*(T-2)))*(drop(E.phi.2a/(E.phi.2a+(N/T))))
*ginv(E.Sigma)%*E.mu+drop((N/T)/(E.phi.2a+(N/T)))*drop(E.mu.g)%*ginv(E.Sigma)%*uno)
ER06<-t(E.omega.3)%*mu-(gamma/2)*t(E.omega.3)%*Sigma)%*E.omega.3
sim.ER06<-rbind(sim.ER06,ER06)
}

ER06.prom<-colMeans(sim.ER06)
ER06.prom
```

### C.3. Estimación de las combinaciones de las reglas

```
# COMBINACIÓN DE LA REGLA 01

# CON EL PORTAFOLIO 1/N

sim.ER01.e<-c()
for(i in 1:10000){
  N=10
  T=600
  gamma<-3
  Omega.e<- rep(1/N, N)
  require(MASS)
  r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
  E.mu<-colMeans(r)
  require(MCMCpack)
  E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
  E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
  E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
  Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
  require(zipfR)
  Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
  E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
  c1<-((T^2)*(T-2))/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4))
  E.pi.1<-t(Omega.e)%*E.Sigma%*Omega.e-(2/gamma)*t(Omega.e)%*E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
  E.pi.2<-(1/gamma^2)*(c1-((2*T)/(T-N-2))+1)*E.theta2a+(c1/gamma^2)*(N/T)
  d1<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
  w<-(1/gamma)*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)
  ER01.e<-(d1/gamma)*T/(T-N-2)+theta.2-((d1^2)/(2*gamma))*((T^2)*(T-2)/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))
  *(theta.2+(N/T))+(1-d1)*t(Omega.e)%*mu-(((1-d1)^2))*gamma/2*t(Omega.e)%*Sigma%*Omega.e-(gamma/2)*d1*(1-d1)*w)%*Sigma%*Omega.e
  sim.ER01.e<-rbind(sim.ER01.e,ER01.e)
}

ER01.e.prom<-colMeans(sim.ER01.e)
ER01.e.prom

# CON EL PORTAFOLIO MK

sim.ER01.mk<-c()
for(i in 1:10000){
  N=10
  T=600
  gamma<-3
  Omega.mk<-t(cbind(0.17,0.13,0.10,0.09,0.09,0.09,0.09,0.08,0.08,0.08))
  require(MASS)
  r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
  E.mu<-colMeans(r)
  require(MCMCpack)
  E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
  E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
  E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
  Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
  require(zipfR)
  Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
  E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
  c1<-((T^2)*(T-2))/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4))
  E.pi.1<-t(Omega.mk)%*E.Sigma%*Omega.mk-(2/gamma)*t(Omega.mk)%*E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
  E.pi.2<-(1/gamma^2)*(c1-((2*T)/(T-N-2))+1)*E.theta2a+(c1/gamma^2)*(N/T)
  d1<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
  w<-(1/gamma)*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)
  ER01.mk<-(d1/gamma)*T/(T-N-2)+theta.2-((d1^2)/(2*gamma))*((T^2)*(T-2)/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))
  *(theta.2+(N/T))+(1-d1)*t(Omega.mk)%*mu-(((1-d1)^2))*gamma/2*t(Omega.mk)%*Sigma%*Omega.mk-(gamma/2)*d1*(1-d1)*w)%*Sigma%*Omega.mk
  sim.ER01.mk<-rbind(sim.ER01.mk,ER01.mk)
}

ER01.mk.prom<-colMeans(sim.ER01.mk)
ER01.mk.prom

# COMBINACIÓN DE LA REGLA 02

# CON EL PORTAFOLIO 1/N

sim.ER02.e<-c()
for(i in 1:10000){
  N=10
  T=600
  gamma<-3
  Omega.e<- rep(1/N, N)
  require(MASS)
  r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
  E.mu<-colMeans(r)
  require(MCMCpack)
  E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
  E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
```

```

E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
c2<-((T-1)^2)*(T-2)/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4))
E.pi.1<-t(Omega.e)%*%E.Sigma%*%Omega.e-(2/gamma)*t(Omega.e)%*%E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-((1/gamma^2)*(c2-((2*(T-1))/(T-N-2))+1)*E.theta2a+(c2/gamma^2)*(N/T)
d2<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
w<-(1/gamma)*((T-1)/T)*t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)
ER02.e<-(d2/gamma)*((T-1)/(T-N-2))*theta.2-((d2^2)/(2*gamma))*(((T-1)^2)*(T-2)/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))
*(theta.2+(N/T))+1-d2)*t(Omega.e)%*%mu-(((1-d2)^2))*gamma/2)*t(Omega.e)%*%Sigma%*%Omega.e-(gamma/2)*d2*(1-d2)*w)%*%Sigma%*%Omega.e
sim.ER02.e<-rbind(sim.ER02.e,ER02.e)
}

ER02.e.prom<-colMeans(sim.ER02.e)
ER02.e.prom

# CON EL PORTAFOLIO MK

sim.ER02.mk<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
Omega.mk<-t(cbind(0.17,0.13,0.10,0.09,0.09,0.09,0.09,0.08,0.08,0.08))
require(MASS)
r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
E.mu<-colMeans(r)
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
E.theta2<-t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)%*%E.mu
E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
c2<-((T-1)^2)*(T-2)/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4))
E.pi.1<-t(Omega.mk)%*%E.Sigma%*%Omega.mk-(2/gamma)*t(Omega.mk)%*%E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-((1/gamma^2)*(c2-((2*(T-1))/(T-N-2))+1)*E.theta2a+(c2/gamma^2)*(N/T)
d2<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
w<-(1/gamma)*((T-1)/T)*t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)
ER02.mk<-(d2/gamma)*((T-1)/(T-N-2))*theta.2-((d2^2)/(2*gamma))*(((T-1)^2)*(T-2)/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))
*(theta.2+(N/T))+1-d2)*t(Omega.mk)%*%mu-(((1-d2)^2))*gamma/2)*t(Omega.mk)%*%Sigma%*%Omega.mk-(gamma/2)*d2*(1-d2)*w)%*%Sigma%*%Omega.mk
sim.ER02.mk<-rbind(sim.ER02.mk,ER02.mk)
}

ER02.mk.prom<-colMeans(sim.ER02.mk)
ER02.mk.prom

# COMBINACIÓN DE LA REGLA 03

# CON EL PORTAFOLIO 1/N

sim.ER03.e<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
Omega.e<- rep(1/N, N)
require(MASS)
r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
E.mu<-colMeans(r)
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
E.theta2<-t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)%*%E.mu
E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
c3<-((T-2)*(T-N-2))/((T-N-1)*(T-N-4))
E.pi.1<-t(Omega.e)%*%E.Sigma%*%Omega.e-(2/gamma)*t(Omega.e)%*%E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-((1/gamma^2)*(c3-1)*E.theta2a+(c3/gamma^2)*(N/T)
d3<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
w<-(1/gamma)*((T-N-1)/T)*t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)
ER03.e<-((d3/gamma)*theta.2-((d3^2)/(2*gamma))*(((T-2)*(T-N-2))/((T-N-1)*(T-N-4)))*(theta.2+(N/T)
+(1-d3)*t(Omega.e)%*%mu-(((1-d3)^2))*gamma/2)*t(Omega.e)%*%Sigma%*%Omega.e-(gamma/2)*d3*(1-d3)*w)%*%Sigma%*%Omega.e
sim.ER03.e<-rbind(sim.ER03.e,ER03.e)
}

ER03.e.prom<-colMeans(sim.ER03.e)

```

```

ER03.e.prom

# CON EL PORTAFOLIO MK

sim.ER03.mk<-c()
for(i in 1:10000){
  N=10
  T=600
  gamma<-3
  Omega.mk<-t(cbind(0.17,0.13,0.10,0.09,0.09,0.09,0.09,0.08,0.08,0.08))
  require(MASS)
  r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
  E.mu<-colMeans(r)
  require(MCMCpack)
  E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
  E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
  E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
  Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
  require(zipfR)
  Beta<-Ibeta(Int,(N/2),(T-N)/2)
  E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta)
  c3<-((T-2)*(T-N-2))/((T-N-1)*(T-N-4))
  E.pi.1<-t(Omega.mk)%*E.Sigma%*Omega.mk-(2/gamma)*t(Omega.mk)%*E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
  E.pi.2<-(1/gamma^2)*(c3-1)*E.theta2a+(c3/gamma^2)*(N/T)
  d3<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
  w<-(1/gamma)*((T-N-1)/T)*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)
  ER03.mk<-(d3/gamma)*theta.2-((d3^2)/(2*gamma))*(((T-2)*(T-N-2))/((T-N-1)*(T-N-4)))*(theta.2+(N/T))
  +(1-d3)*t(Omega.mk)%*mu-(((1-d3)^2)*gamma/2)*t(Omega.mk)%*Sigma%*Omega.mk-(gamma/2)*d3*(1-d3)*w%*Sigma%*Omega.mk
  sim.ER03.mk<-rbind(sim.ER03.mk,ER03.mk)
}

ER03.mk.prom<-colMeans(sim.ER03.mk)
ER03.mk.prom

# COMBINACIÓN DE LA REGLA 04

# CON EL PORTAFOLIO 1/N

sim.ER04.e<-c()
for(i in 1:10000){
  N=10
  T=600
  gamma<-3
  Omega.e<- rep(1/N, N)
  require(MASS)
  r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
  E.mu<-colMeans(r)
  require(MCMCpack)
  E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
  E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
  E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
  Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
  require(zipfR)
  Beta<-Ibeta(Int,(N/2),(T-N)/2)
  E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta)
  c4<-((T^2)*(T-2)*(T-N-2))/((T+1)^2*(T-N-1)*(T-N-4))
  E.pi.1<-t(Omega.e)%*E.Sigma%*Omega.e-(2/gamma)*t(Omega.e)%*E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
  E.pi.2<-(1/gamma^2)*(c4-(2*T/(T+1))+1)*E.theta2a+(c4/gamma^2)*(N/T)
  d4<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
  w<-(1/gamma)*((T-N-2)/(T+1))*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)
  ER04.e<-(d4/gamma)*T*(T+1)*theta.2-((d4^2)/(2*gamma))*(((T^2)*(T-2)*(T-N-2))/((T+1)^2*(T-N-1)*(T-N-4))
  *(theta.2+(N/T)))+(1-d4)*t(Omega.e)%*mu-(((1-d4)^2)*gamma/2)*t(Omega.e)%*Sigma%*Omega.e-(gamma/2)*d4*(1-d4)*w%*Sigma%*Omega.e
  sim.ER04.e<-rbind(sim.ER04.e,ER04.e)
}

ER04.e.prom<-colMeans(sim.ER04.e)
ER04.e.prom

# CON EL PORTAFOLIO MK

sim.ER04.mk<-c()
for(i in 1:10000){
  N=10
  T=600
  gamma<-3
  Omega.mk<-t(cbind(0.17,0.13,0.10,0.09,0.09,0.09,0.09,0.08,0.08,0.08))
  require(MASS)
  r<-(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
  E.mu<-colMeans(r)
  require(MCMCpack)
  E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
  E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu

```



```

E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
c4<-((T^2)*(T-2)*(T-N-2))/((T+1)^2)*(T-N-1)*(T-N-4)
E.pi.1<-t(Omega.mk)%*%E.Sigma%*%Omega.mk-(2/gamma)*t(Omega.mk)%*%E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-((1/gamma^2)*(c4-(2*T/(T+1))+1)*E.theta2a+(c4/gamma^2)*(N/T))
d4<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
w<-(1/gamma)*((T-N-2)/(T+1))*t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)
ER04.mk<-(d4/gamma)*(T/(T+1))*theta.2-((d4^2)/(2*gamma))*(((T^2)*(T-2)*(T-N-2))/((T+1)^2)*(T-N-1)*(T-N-4))
*(theta.2+(N/T))+((1-d4)*t(Omega.mk)%*%mu-(((1-d4)^2))*gamma/2)*t(Omega.mk)%*%Sigma%*%Omega.mk-(gamma/2)*d4*(1-d4)*w)%*%Sigma%*%Omega.mk
sim.ER04.mk<-rbind(sim.ER04.mk,ER04.mk)
}

ER04.mk.prom<-colMeans(sim.ER04.mk)
ER04.mk.prom

# COMBINACIÓN REGLA 05 CON 1/N

sim.ER05.e<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
require(MASS)
E.mu<-colMeans(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
Omega.e<- rep(1/N, N)
E.theta2<-t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)%*%E.mu
E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
E.c<-drop(((T-N-1)*(T-N-4))/(T*(T-2))*t(E.theta2a/(E.theta2a+(N/T))))
c5<-((T-N-1)*(T-N-4))/((T-2)*(T-N-2))
E.pi.1<-t(Omega.e)%*%E.Sigma%*%Omega.e-(2/gamma)*t(Omega.e)%*%E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-((E.theta2a/gamma^2)*(1-c5*(E.theta2a/(E.theta2a+(N/T))))
d5<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
E.omega.5<-(((T-N-1)*(T-N-4))/(gamma*(T*(T-2)))*drop(E.theta2a/(E.theta2a + N/T))*ginv(E.Sigma)%*%E.mu
E.omega.f<-d5*E.omega.5
ER05.e<-((d5*E.c)/gamma)*(T/(T-N-2))*theta.2-(((d5*E.c)^2)/(2*gamma))*((theta.2+(N/T))
*((T^2)*(T-2))/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))+((1-d5)*t(Omega.e)%*%mu-(gamma/2)*((1-d5)*t(Omega.e))%*%Sigma%*%((1-d5)*Omega.e)
-(gamma/2)*d5*(1-d5)*t(E.omega.f)%*%Sigma%*%Omega.e
sim.ER05.e<-rbind(sim.ER05.e,ER05.e)
}

ER05.e.prom<-colMeans(sim.ER05.e)
ER05.e.prom

# COMBINACIÓN REGLA 05 CON MK

sim.ER05.mk<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
require(MASS)
E.mu<-colMeans(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma))
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
uno<-cbind(rep(1,10))
Omega.e<- rep(1/N, N)
E.theta2<-t(E.mu)%*%ginv(E.Sigma)%*%E.mu
E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
c5<-((T-N-1)*(T-N-4))/((T-2)*(T-N-2))
Omega.mk<-t(cbind(0.17,0.13,0.10,0.09,0.09,0.09,0.09,0.08,0.08,0.08))
E.pi.1<-t(Omega.mk)%*%E.Sigma%*%Omega.mk-(2/gamma)*t(Omega.mk)%*%E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-((E.theta2a/gamma^2)*(1-c5*(E.theta2a/(E.theta2a+(N/T))))
d5<-drop(E.pi.1/(E.pi.1+E.pi.2))
E.omega.2<-(((T-N-1)*(T-N-4))/(gamma*(T*(T-2)))*drop(E.theta2a/(E.theta2a + N/T))*ginv(E.Sigma)%*%E.mu
E.omega.f<-((d5)*E.omega.2
ER05.mk<-((d5*E.c)/gamma)*(T/(T-N-2))*theta.2-(((d5*E.c)^2)/(2*gamma))
*(theta.2+(N/T))*((T^2)*(T-2))/((T-N-1)*(T-N-2)*(T-N-4)))+((1-d5)*t(Omega.mk)%*%mu-(gamma/2)*
((1-d5)*t(Omega.mk))%*%Sigma%*%((1-d5)*Omega.mk)-(gamma/2)*d5*(1-d5)*t(E.omega.f)%*%Sigma%*%Omega.mk
sim.ER05.mk<-rbind(sim.ER05.mk,ER05.mk)
}

```

```

}

ER05.mk.prom<-colMeans(sim.ER05.mk)
ER05.mk.prom

# COMBINACIÓN REGLA 06 CON 1/N

sim.ER06.e<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
require(MASS)
E.mu<-cbind(colMeans(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma)))
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
uno<-cbind(rep(1,10))
Omega.e<- rep(1/N, N)
E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
E.mu.g<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*uno/(t(uno)%*ginv(E.Sigma)%*uno)
E.phi.2<-t(E.mu-drop(E.mu.g)*uno)%*ginv(E.Sigma)%*(E.mu-drop(E.mu.g)*uno)
E.n<-E.phi.2/(E.phi.2+(N/T))
E.pi.1<-t(Omega.e)%*E.Sigma%*Omega.e-(2/gamma)*t(Omega.e)%*E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-(1/gamma^2)*E.theta2a-(1/gamma)*t(Omega.e)%*E.mu+(1/gamma)*(((T-N-1)*(T-N-4))/(T-2)*(T-N-2))
*((drop(E.n)*t(Omega.e)%*E.mu+(1-drop(E.n))*E.mu.g%*t(Omega.e)%*uno)-(1/gamma)
*((T-N-2)/T)*drop(E.n)*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu+(1-drop(E.n))*((T-N-2)/T)*E.mu.g%*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*uno))
E.pi.3<-(1/gamma^2)*E.theta2a-(1/gamma^2)*(((T-N-1)*(T-N-4))/(T-2)*(T-N-2))*E.theta2a-(N/T)*drop(E.n)
d6<-(E.pi.1-E.pi.2)/(E.pi.1-2*E.pi.2+E.pi.3)
Int<-E.phi.2/(1+E.phi.2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, ((N-1)/2), ((T-N+1)/2))
E.phi.2a<-(((T-N-1)*E.phi.2-(N-1))/T)+((2*(E.phi.2^(N-1)/2))*((1+E.phi.2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
E.omega.3<-(((T-N-1)*(T-N-4))/(gamma*(T)*(T-2)))*(drop(E.phi.2a)/(E.phi.2a+(N/T)))
*ginv(E.Sigma)%*E.mu+drop((N/T)/(E.phi.2a+(N/T)))*drop(E.mu.g)*ginv(E.Sigma)%*uno)
E.omega.f<-(drop(d6))*E.omega.3
ER06.e<-t(E.omega.f)%*mu-(gamma/2)*t(E.omega.f)%*Sigma%*E.omega.f+((1-drop(d6))
*t(Omega.e)%*mu-(gamma/2)*((1-drop(d6))*t(Omega.e)%*Sigma%*((1-drop(d6))*Omega.e)
sim.ER06.e<-rbind(sim.ER06.e,ER06.e)
}

ER06.e.prom<-colMeans(sim.ER06.e)
ER06.e.prom

# COMBINACIÓN REGLA 06 CON MK

sim.ER06.mk<-c()
for(i in 1:10000){
N=10
T=600
gamma<-3
require(MASS)
E.mu<-cbind(colMeans(mvrnorm(T,mu,(1/T)*Sigma)))
require(MCMCpack)
E.Sigma<-(1/T)*rwish(T-1,Sigma)
uno<-cbind(rep(1,10))
Omega.e<- rep(1/N, N)
E.theta2<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
E.theta2u<-((T-N-2)*E.theta2-N)/T
Int<-E.theta2/(1+E.theta2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, (N/2), (T-N)/2)
E.theta2a<-E.theta2u+((2*(E.theta2^(N/2))*((1+E.theta2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))
E.mu.g<-t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*uno/(t(uno)%*ginv(E.Sigma)%*uno)
E.phi.2<-t(E.mu-drop(E.mu.g)*uno)%*ginv(E.Sigma)%*(E.mu-drop(E.mu.g)*uno)
E.n<-E.phi.2/(E.phi.2+(N/T))
Omega.mk<-t(cbind(0.17,0.13,0.10,0.09,0.09,0.09,0.08,0.08,0.08))
E.pi.1<-t(Omega.mk)%*E.Sigma%*Omega.mk-(2/gamma)*t(Omega.mk)%*E.mu+(1/gamma^2)*E.theta2a
E.pi.2<-(1/gamma^2)*E.theta2a-(1/gamma)*t(Omega.mk)%*E.mu+(1/gamma)
*((T-N-1)*(T-N-4))/(T-2)*(T-N-2))*((drop(E.n)*t(Omega.mk)%*E.mu+(1-drop(E.n)
*E.mu.g%*t(Omega.mk)%*uno)-(1/gamma)*((T-N-2)/T)*drop(E.n)*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*E.mu
+(1-drop(E.n))*((T-N-2)/T)*E.mu.g%*t(E.mu)%*ginv(E.Sigma)%*uno))
E.pi.3<-(1/gamma^2)*E.theta2a-(1/gamma^2)*(((T-N-1)*(T-N-4))/(T-2)*(T-N-2))*E.theta2a-(N/T)*drop(E.n)
d6<-(E.pi.1-E.pi.2)/(E.pi.1-2*E.pi.2+E.pi.3)
Int<-E.phi.2/(1+E.phi.2)
require(zipfR)
Beta<-Ibeta(Int, ((N-1)/2), ((T-N+1)/2))
E.phi.2a<-(((T-N-1)*E.phi.2-(N-1))/T)+((2*(E.phi.2^(N-1)/2))*((1+E.phi.2)^(-(T+2)/2)))/(T*Beta))

```

```

E.omega.3<-(((T-N-1)*(T-N-4))/(gamma*(T)*(T-2)))*(drop(E.phi.2a/(E.phi.2a+(N/T)))
*ginv(E.Sigma)%*%E.mu+drop((N/T)/(E.phi.2a+(N/T)))*drop(E.mu.g)*ginv(E.Sigma)%*%uno)
E.omega.f<-(drop(d6))*E.omega.3
ER06.mk<-t(E.omega.f)%*mu-(gamma/2)*t(E.omega.f)%*Sigma%*%E.omega.f+
((1-drop(d6))*t(Omega.mk))%*mu-(gamma/2)*((1-drop(d6))*t(Omega.mk))%*Sigma%*((1-drop(d6))*Omega.mk)
sim.ER06.mk<-rbind(sim.ER06.mk,ER06.mk)
}

ER06.mk.prom<-colMeans(sim.ER06.mk)

```



## Bibliografía

- Bawa, V. S., Brown, S. J. y Kleinl, R. W. (1979). Estimation risk and optimal portfolio choice, *Amsterdam: North-Holland* .
- Best, M. J. y Grauer, R. R. (1991). Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems, *Management Science* **37**(8): 980–989.
- Black, F. y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization, *Financial Analysts Journal* **48**(5): 28–43.
- Bodie, Z., Kane, A. y Marcus, A. J. (2008). *Investments*, McGraw-Hill.
- DeMiguel, V., Garlappi, L. y Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy?, *The Review of Financial Studies* **22** (5).
- Frost, P. y Savarino, J. (1986). An empirical bayes approach to efficient portfolio selection, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **21**: 293–305.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S. y Rubin, D. B. (2003). *Bayesian Data Analysis*, Chapman Hall.
- Haff, L. R. (1979). An identity for the wishart distribution with applications, *Journal of Multivariate Analysis* **9**: 531–544.
- Jorion, P. (1986). Bayes-stein estimation for portfolio analysis, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **21**(3): 279–292.
- Jun, T. y Zhou, G. (2011). Markowitz meets talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies, *Journal of Financial Economics* **99**: 204–215.
- Kan, R. y Zhou, G. (2007). Optimal portfolio choice with parameter uncertainty, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **3**: 621–656.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance* **7**: 77–91.
- Michaud, R. O. y Michaud, R. O. (2007). *Efficient Asset Management*, Oxford University Press.
- Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley and Sons, Inc.
- Rachev, S. T., Hsu, J. S., Bagasheva, B. S. y Fabozzi, F. J. (2008). *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley and Sons, Inc.
- Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio, *The Journal of Portfolio Management* **21**(1): 49–58.
- Stambaugh, R. F. (1997). Analyzing investments whose histories differ in lenght, *NBER Working Paper Series* **5918**.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavoir towards risk, *The Review of Economic Studies* **25** (2): 65–86.