PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta

Isabel Mercedes Lara Torres

Dirigida por

Jesús Victoria Flores Salazar

San Miguel, 2016

DEDICATORIA

A mi padre Enrique
Mi padre, que gracias a sus valores y entrega total a la familia supo enseñarme que para alcanzar mis sueños debo de ser perseverante, paciente y constante. Gracias por inculcarme la Fe en Dios, mostrarme el amor infinito de nuestro Dios pues sin Él tampoco lo hubiera logrado.

A mi madre Claudia
Gracias, mami por todo tu apoyo, tus valores, tus palabras sinceras, tu entrega total a la familia, tus experiencias compartidas que lograron calar en mi para ser una mujer perseverante y trabajadora para alcanzar todo lo que me propusiese en esta vida pero sobre todo ser una mujer de valores.

A mis hermanos
Gracias a Claudia, Elvira, José, David, Gladys y Danielito, que con su apoyo, compañía y todos sus ánimos me empujaron a seguir adelante para culminar mi tesis.

A mi novio
Pedro que con cariño y experiencia supo darme ánimos y fortaleza para concluirla.

A mis amigos
Daysi, Roxana, Anita y Luis que con sus ánimos y oraciones me apoyaron durante todo este tiempo para seguir adelante en la culminación de mi tesis.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Pontificia Universidad Católica del Perú, por brindarme la oportunidad de pertenecer a esta comunidad educativa como estudiante de posgrado y hacerme parte del prestigio que goza.

Así mismo, agradezco a todos los profesores de la Escuela de Posgrado, en especial a los profesores que conformaron la plana docente de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas, por el empeño y dedicación en sus enseñanzas y la exigencia permanente en todos estos años de estudio en que fui parte.

Un agradecimiento especial a mi asesora, Profesora Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por todo su apoyo, acompañamiento, comprensión, guía, exigencia constante y por su valiosa colaboración durante toda la elaboración de mi investigación y en todos los cursos en que fue mi profesora.

A la Profesora Dra. Katia Vigo, por sus contribuciones para la evolución de la presente tesis y por sus aportes para el análisis de las actividades propuestas en esta investigación.

Al Profesor Mg. Miguel Gonzaga, por su colaboración en la revisión de nuestra investigación desde un punto de vista matemático, su apoyo en los análisis de la tesis y por su constante apoyo en los cursos en que fue mi profesor.

A mis profesores y profesoras de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por contribuir en mi formación académica y personal.

A los quince becarios de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, convenio Pronabec que amablemente participaron en esta investigación.

Finalmente, a mis padres por el apoyo constante y comprensión durante todos estos años.

La autora

RESUMEN

La presente investigación aborda la parábola como lugar geométrico en una formación continua de profesores de matemáticas por medio de una secuencia de actividades con el uso del Geogebra y que toma la Teoría de Registros de Representación Semiótica como base teórica. Por ello, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo profesores de matemática movilizan la noción de parábola como lugar geométrico cuando coordinan diferentes registros de representación semiótica?* La metodología de investigación es cualitativa y el método es la Ingeniería Didáctica, específicamente en nuestra investigación utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica. En cuanto al marco teórico, particularmente nos centramos la coordinación de los registros figural, gráfico, lengua natural y algebraico, y sus transformaciones: tratamientos y conversiones. En la parte experimental, trabajamos cuatro actividades con el uso del software Geogebra como herramienta tecnológica, especialmente usamos la herramienta de animación, lugar geométrico, rastro y la función arrastre para generar la representación gráfica de la parábola de forma dinámica y así poder generar relaciones entre los elementos y propiedades de la parábola. Los resultados de la investigación muestran que los profesores coordinan los registros figural, de lengua natural, gráfico y algebraico. Sin embargo, consiguieron, de manera parcial, movilizar estos registros al resolver el problema planteado en la última actividad. Por otro lado, consideremos que el Geogebra favoreció la movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico, en las diversas actividades, y la coordinación de los diferentes registros antes mencionados

Palabras clave: Parábola; Lugar Geométrico, Registros de Representación Semiótica, Geogebra.

ABSTRACT

The present investigation addresses the parabola as a locus in continuous math teacher training through a sequence of activities using the Geogebra and taking the Theory of Registers of Semiotic Representation as theoretical basis. Therefore, we posed the following research question: *how do math teachers mobilize the notion of parabola as a locus when coordinating different registers of semiotic representation?* We used the qualitative research methodology and Didactic Engineering as a method. Regarding the theoretical framework, we particularly focused on the figural, graphic, natural language and algebraic registers and their transformations: treatments and conversions. In the experimental part, we did four activities using the Geogebra software as technological tool. We especially used the animation tool, locus, trace and drag function to create the graphic representation of the parabola in a dynamic way, thus being able to create relations between the elements and properties of the parabola. The results of the investigation show teachers coordinate the figural, natural language, graphic and algebraic registers. However, they managed to partially mobilize these registers by solving the problem posed in the last activity. On the other hand, we have to consider that the Geogebra favored the mobilization of the notions of the parabola as a locus in the different activities, as well as the coordination of the different registers aforementioned.

Key words: parabola, locus, Registers of Semiotic Representation, Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

INDICE

CONSIDERACIONES INICIALES

Debemos resaltar que la presente tesis forma parte del proyecto internacional *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT* desarrollado entre la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y la Pontificia Universidad Católica del Sao Paulo (PUC-SP) de Brasil. Este proyecto cuenta con el apoyo del *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) y *la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Sao Paulo* (FAPESP) y Proceso: 2013/23228-7(FAPESP) y por PI0272 (IREM-PUCP).

La presente investigación aborda la parábola como lugar geométrico en una formación continua con profesores de matemáticas por medio de una secuencia de actividades con el uso del Geogebra y que toma la Teoría de Registros de Representación Semiótica como base teórica. A continuación presentamos nuestro trabajo, que se desarrolla en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, presentamos investigaciones de Fernández (2011), López y Aldana (2013), Moncayo y Pantoja (2012), Lopes (2014), León (2014) y Laborde (1997), relacionadas con el aprendizaje de la parábola como lugar geométrico, el uso de los ambientes de geometría dinámica en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática. También presentamos el software Geogebra, herramienta esencial que utilizamos para el estudio de la parábola. También procedemos a formular la pregunta y los objetivos trazados para efectos de la investigación.

En el segundo capítulo, presentamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como método de nuestra investigación.

En el tercer capítulo, hacemos un estudio de la parábola, primero describimos su aspecto histórico, luego profundizaremos en el estudio de la parábola como lugar geométrico. Realizamos también la descripción de las características del software Geogebra que permite obtener las gráficas de la parábola. A su vez, presentamos el objeto matemático desde el punto de vista cognitivo a través de elementos que conciernen a la temática en estudio y finalmente realizamos un estudio desde el punto de vista didáctico a través del estudio de libros de 5to de secundaria, año en que se enseña a la parábola.

En el último capítulo, caracterizamos a nuestro escenario y nuestros sujetos de investigación. Así mismo, procedemos a presentar las actividades propuestas, describimos y realizamos el análisis a priori, a posteriori y la validación de la ingeniería.

Finalmente, presentamos las consideraciones finales del trabajo de investigación.

CAPÍTULO I – PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos la problemática de la investigación, para ello mostramos algunas investigaciones u otros documentos vinculados al estudio de la temática de nuestro trabajo que forman los antecedentes, además mostramos investigaciones relacionadas al uso de Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), ambientes que estamos interesados en utilizar, a su vez presentamos al software Geogebra y las herramientas que utilizaremos para efectos de nuestro estudio. Así mismo, presentamos la justificación del tema de estudio, la pregunta de investigación y sus respectivos objetivos.

1.1 ANTECEDENTES

En investigaciones de Educación Matemática concernientes al estudio de la parábola como lugar geométrico, hemos encontrado investigaciones como las de Fernández (2011), López y Aldana (2013), Moncayo y Pantoja (2012), Lopes (2014) y León (2014) quienes estudian la comprensión del concepto de parábola como una cónica en Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) así como la investigación de Laborde (1997) que realiza estudios sobres los AGD, investigaciones que aportan a nuestro estudio, las cuales pasaremos a presentar.

A continuación detallamos las investigaciones mencionadas:

La investigación de Fernández (2011), realiza un estudio sobre los fenómenos didácticos que emergen cuando los estudiantes del programa de la Licenciatura en Matemáticas del curso de geometría analítica realizan construcciones geométricas de las cónicas como lugares geométricos desde la perspectiva global (en la geometría sintética) y puntual (en una interpretación funcional), realizando relaciones entre estos dos aspectos para la comprensión de las cónicas y teniendo como referente a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).

El investigador, realiza la presentación de la problemática desde diversas perspectivas como la histórica, la cognitiva, la tecnológica en AGD y didáctica, las cuales fueron agrupadas en categorías, dentro de las cuales hace mención a las concepciones erróneas que los estudiantes tienen acerca de las cónicas como por ejemplo la tendencia a marginar curricularmente el estudio de las cónicas y la escasez de estudios sobre los lugares geométricos. Así también, el tecnológico para el estudio de los lugares geométricos con el uso de AGD en ese sentido, afirma que es el complemento de los enfoques sintético y analítico. Con respecto a los errores que los estudiantes tienen sobre nociones matemáticas Fernández (2011) afirma que es el profesor quien debe explicar por medio de procedimientos, ejemplos u otras estrategias para que los estudiantes superen aquellas concepciones erróneas.

De esta manera, el autor afirma que cuando el profesor conoce las concepciones e ideas que los estudiantes tienen acerca de diferentes nociones matemáticas, específicamente sobre las cónicas, permite explicar los procedimientos, definiciones, ejemplos y errores que realizan. Luego, el profesor buscará a través de situaciones de enseñanza favorecer la comprensión de las cónicas.

En la investigación, el autor explica que el 68% de un total de 25 participantes del curso de geometría analítica, afirmaron que un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, como el de la figura 1, es una elipse.

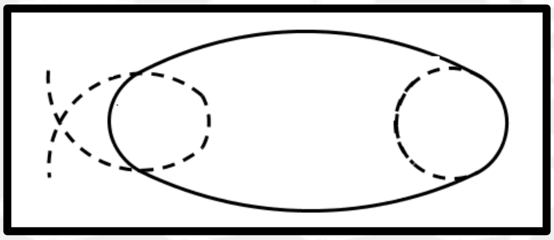


Figura 1: Un óvalo como elipse
Fuente: Adaptado de Fernández (2011, p. 78)

El 52% de un total de 25 estudiantes participantes en el estudio respondieron que se trataba de una parábola. Que un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos, como muestra la figura 2, forman una parábola.

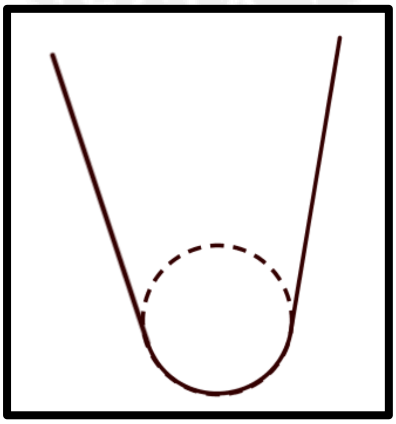


Figura 2: Una parábola construida de un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes
Fuente: Adaptado de Fernández (2011, p. 78)

Que una curva ligeramente inclinada como la que se muestra en la figura 3 no es una parábola.

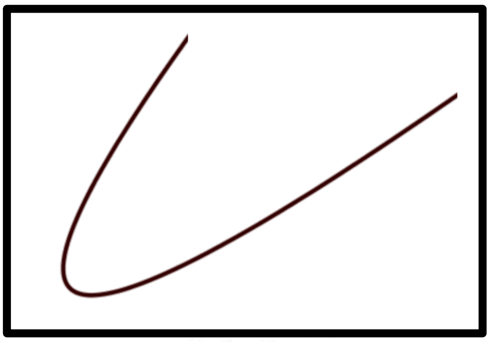


Figura 3: Esta figura no es una parábola
Fuente: Adaptado de Fernández (2011, p. 79)

Lo que se puede decir acerca de la parábola, de acuerdo a Fernández (2011) es que la mayoría de los encuestados conocen la representación gráfica de una parábola, porque están acostumbrados a verla abriéndose hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo pero, en ningún momento pueden ser rotadas alrededor de un punto. En consecuencia cuando se les presentó de este tipo, los estudiantes afirmaron que no era la representación de la parábola.

Con respecto a la tendencia a marginar curricularmente las cónicas como contenido geométrico, el investigador, afirma que si bien los métodos de la geometría analítica son aspectos claves en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en distintos niveles de escolaridad, es lamentable que en el currículo colombiano brinde poco espacio a la enseñanza de la geometría y al exagerado tratamiento algebraico de las ecuaciones de segundo grado que representan las cónicas. Estas circunstancias se traducen en la pérdida gradual del conocimiento de las propiedades intrínsecas de las cónicas. Considera a su vez, que el enfoque tradicional basado en las descripciones algebraicas de las cónicas, ha hecho que su tratamiento sea artificial y muy remoto en aplicaciones.

Con respecto a la escasez del estudio del lugar geométrico, los investigadores Río – Sánchez (1996) menciona que en el currículo escolar de España se observa la ausencia de la noción de lugar geométrico cuando se estudian las cónicas pero que aparece cuando se estudian las mediatrices, bisectrices y circunferencias. Esta noción solo logra extenderse a las cónicas en los currículos para estudiantes en la modalidad de bachillerato científico donde los contenidos matemáticos son estudiados con mayor profundidad y rigor.

En lo que se refiere al uso de AGD para el estudio de los lugares geométricos y cónicas, Fernández (2011) propone en su estudio explorar sus propiedades por medio de una secuencia de enseñanza. Muestra que el estudio fue aplicado a 25 estudiantes de 18 años del segundo semestre de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de la ciudad de Pasto, Colombia quienes cursaban el curso de geometría analítica. Así mismo, los estudiantes trabajaron, previo a la experimentación, algunas nociones de parábola desde el enfoque analítico, tal como se estila en el curso tradicional de geometría analítica. La pregunta de investigación está relacionada a los fenómenos didácticos que genera la mediación del Cabri II Plus en la actividad matemática de los estudiantes que se inician en un curso de geometría analítica cuando realizan construcciones geométricas de las cónicas desde lo puntual (en una interpretación funcional) y global (en la geometría sintética). La base Teórica y metodológica en la que se base esta investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería didáctica respectivamente. En las conclusiones, el autor indica que la determinación de los puntos de una curva, sobre la base de ciertas construcciones geométricas, posibilita el trazo global influenciado por el Cabri II y en algunos casos, el estudiante consigue además la representación algebraica cuando emplea un sistema de ejes coordenados, revelando así la posibilidad de la integración sintética y analítica.

También, resalta la importancia del diseño de una secuencia didáctica que posibilite promover las características puntuales y globales de las cónicas. Además, señala la necesidad de integrar la visión sintética y la analítica para el estudio de las cónicas, para lo cual se puede hacer uso de AGD.

Esta investigación es importante para nuestro estudio porque brinda un panorama sobre la enseñanza de las cónicas, en particular de la parábola de los errores comunes que presentan los estudiantes en su aprendizaje. Así mismo, el investigador manifiesta que hay escasas investigaciones referentes al estudio de las cónicas como lugar geométrico. Además, presenta actividades que podremos tomar en cuenta para la elaboración de la secuencia de enseñanza.

Con respecto a la comprensión del concepto de parábola, presentamos la investigación de López y Aldana (2013) que tiene por objetivo analizar cómo los estudiantes pueden comprender y construir el concepto de parábola como una cónica desde las dimensiones epistemológicas, didácticas y cognitivas; Para ello se basa en la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica como método de investigación. López y Aldana (2013) explican que la experimentación la realizaron con 25 estudiantes de ingeniería de Sistemas del primer semestre de la Universidad del Quindío de Colombia, algunos repitentes, cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años.

El estudio se desarrolla en varias fases: (a) elaboración de situaciones a- didácticas, (b) validación de las tareas por juicio de expertos, (c) aplicación de las situaciones a-didácticas, (d) confrontación de la validación por juicio de expertos y los resultados alcanzados por los sujetos, (e) análisis a priori de la situación a-didáctica, modificación y elaboración de las situaciones didácticas, (f) aplicación de algunas situaciones didácticas, (g) análisis a posteriori, (h) realización de entrevistas, (i) triangulación de la información. Los investigadores utilizaron el Geogebra, aplicaron cuestionarios, entrevistas, observación en el aula y video grabaciones y finalmente realizaron el análisis mediante triangulación de la información.

En la investigación, los autores mencionan que cuando se propone actividades sobre cónicas que involucran la movilización de representaciones, características y propiedades se evidencian dificultades de interpretación y de reconocimiento de sus elementos. Así mismo, aseveran que los estudiantes aprenden de memoria las ecuaciones y tienen dificultad en relacionar las diversas representaciones (algebraica, geométrica, gráfica).

De las conclusiones de esta investigación, podemos resaltar que en la secuencia de enseñanza el uso del Geogebra permitió que los estudiantes movilicen las nociones de parábola. Otra de las conclusiones, referente a la comprensión y la construcción del concepto parábola, en la fase a-didáctica de la investigación, se refiere a que los estudiantes muestran concepciones erróneas que son frecuentes en la solución de tareas, sobre todo la falta de conocimiento en la construcción del lugar geométrico y el desconocimiento de algunas características y propiedades de la cónica. En la fase didáctica, las secuencias didácticas permiten el reconocimiento y estudio de nociones básicas que implican ecuaciones de segundo grado, el concepto de función, de distancia y simetrías, y de esta forma establecer patrones en los elementos de la parábola, en la construcción de las ecuaciones canónicas de la parábola, realizar transformaciones de ecuaciones en el mismo sistema de representación y lograr la coordinación entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico, donde intervienen procesos de inferencia, generalización, síntesis, definición, que son la base de la construcción del concepto matemático

Resaltamos que López y Aldana (2013) utilizan el software Geogebra, como medio para la comprensión de la noción de parábola. En cuanto a la secuencia de actividades de esta investigación estas servirán de base para las actividades que trabajaremos en la parte experimental de la tesis.

Otra de las investigaciones que la hemos considerado en nuestro estudio corresponde Moncayo y Pantoja (2012) que trata sobre la conceptualización de la parábola como lugar geométrico con el uso del Cabri II. Dicho estudio tiene por objetivo lograr que los estudiantes de noveno grado del Colegio Gimnasio Bet-El en Colombia comprendan el significado de la parábola como lugar geométrico mediante el diseño de estrategias e implementación de una estrategia basada en el uso e integración del ambiente de geometría dinámica Cabri II a través de una propuesta didáctica.

Las investigadoras, utilizan la ingeniería didáctica como método pues realizaron: análisis preliminar, planeación del estudio, diseño de actividades y análisis de resultados. Este método sirvió como base para el diseño de las situaciones didácticas en la medida en que proporcionan un fundamento teórico basado en tres dimensiones de análisis como la histórico-epistemológica, la cognitiva y la didáctica.

Las autoras mencionan que la investigación permitió constatar que el progreso en el desempeño matemático de los estudiantes se hace factible por la mediación del Cabri II Plus. Tal interacción se evidenció a través de cuatro actividades específicas como, la construcción geométrica de la parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta, construcción de una parábola como configuración geométrica, construcción geométrica de la parábola con base en la propiedad de la circunferencia, construcción de una parábola como lugar geométrico.

En la investigación, los autores mencionan que los estudiantes fueron avanzando en la comprensión de parábola como lugar geométrico y pasaron de la simple “visualización” de la representación gráfica, a la utilización de la propiedad foco-directriz, y más tarde esta se transformó en una herramienta conceptual para la validación de representaciones de parábolas y para la identificación de sus elementos más representativos. Las autoras expresan en una de sus conclusiones lo siguiente:

> Las actividades propuestas permitieron a los estudiantes identificar fenómenos visuales, donde se observó un punto moviéndose bajo las condiciones pedidas, al tiempo que pudo ir dibujando su trayectoria, identificándola como un conjunto de puntos sucesivos no colineales relacionados por la propiedad foco-directriz y cuya posición dependía de otro punto que se movía sobre una recta; esto permitió al estudiante llegar a la noción de parábola como lugar geométrico desde un perspectiva dinámica (Moncayo y Pantoja, 2012 p. 271).

A su vez, Moncayo y Pantoja (2012) mencionan que las situaciones provocaron que los estudiantes interactuaran con relaciones geométricas y otros conceptos, desde una perspectiva dinámica, permitiendo el paso de la percepción visual a la parte teórica.

En las conclusiones, referente a la integración de Cabri II Plus en la enseñanza de la parábola, mencionan que al crear situaciones con Cabri II, los estudiantes pudieron manipular, mover, medir, trazar, diferentes elementos geométricos, los cuales permitieron llegar a la construcción de la parábola como lugar geométrico.

Además las actividades con AGD estimularon procesos cognitivos en los estudiantes como la exploración, observación, realizar conjeturas y la verificación de las propiedades como equidistancia, perpendicularidad, rectas tangentes, propiedad foco – directriz entre otras, que facilitaron la conceptualización de la parábola como lugar geométrico. También señalan que los estudiantes pudieron a su vez conectar las representaciones algebraicas y gráficas a las representaciones geométricas.

Consideramos también la investigación de León (2014), porque realizó un estudio sobre los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra con estudiantes de Arquitectura y Gestión de proyectos. Uno de los objetivos que el investigador se planteó es el de propiciar la instrumentalización de la elipse cuando los estudiantes trabajan una secuencia de actividades mediadas por el Geogebra. Entre sus principales conclusiones, el autor señala que: Se logró responder a la pregunta de investigación ya que se encuentran indicios que las actividades propuestas permitieron el surgimiento y el enriquecimiento progresivo de las propiedades de la elipse influenciado por el Geogebra.

Respecto a lo descrito, León (2014) afirma que:

> El aspecto dinámico del Geogebra como herramienta integradora en la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos y el conocimiento progresivo de las potencialidades de las herramientas y comandos, permitieron a los estudiantes interactuar con la elipse, observar resultados y validar conjeturas, lo que permitió al Geogebra influir en el surgimiento y enriquecimiento de las propiedades de la elipse (León, 2014, p.271).

Por otra parte, Laborde (1997) afirma que con las características de un AGD favorecen la comprensión de un objeto matemático que con el solo uso del lápiz y papel. Pues, con la manipulación directa en un AGD, respeta las propiedades geométricas del objeto representado aún si el dibujo se deforma por la manipulación, así como el de las propiedades espaciales al desplazar el objeto geométrico. Un AGD, permite al estudiante la experiencia de crear, experimentar, manipular así como la construcción de significados de los objetos. Respecto a lo descrito, la autora expresa lo siguiente:

> El entorno responde pues a la intención de ofrecer un sistema de significantes que tenga un dominio mayor de funcionamiento en relación con la geometría y que haga más evidentes los límites del dominio de interpretación. […] El campo de experimentación ofrecido por el dibujo en los dibujos con lápiz y papel está limitado por razones materiales (imprecisión del trazado, imposibilidad de hacer temporalmente invisible una parte del dibujo, limitación del número de elementos que hay que gestionar). […] Ahora bien, tanto las acciones posibles como los retornos correspondientes, no sólo se amplían, sino que resultan ser de naturaleza diferente al estar basados en conocimientos geométricos. El tipo de representación gráfica que da el entorno es distinto, por tanto, del dibujo con lápiz y papel. Podemos esperar nuevas posibilidades de organización de las situaciones de aprendizaje y cambios en la conducta de los estudiantes. (Laborde, 1997, p.39)

Destacamos entonces, la importancia de utilizar los AGD para la comprensión de la parábola como lugar geométrico porque los estudios antes mencionados así lo demuestran ya que favorece la enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos porque permite que los estudiantes manipulen sus representaciones de manera dinámica.

Si bien es cierto, estos estudios nos permiten justificar la elección de la parábola como lugar geométrico con el uso de las tecnologías, específicamente el Geogebra, cabe señalar que en nuestra investigación consideramos la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), pues va a permitir lograr que los profesores se apropien del concepto matemático, al realizar los tratamientos y conversiones de la parábola como lugar geométrico, aspectos que son esenciales en toda actividad matemática.

> En primer lugar, en matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. En efecto, la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. (Duval, 1995, p.15)

En cuanto a las investigaciones que usan la Teoría de Registro de Representación Semiótica, hemos considerado a la investigación de Lopes (2014). La autora realizó un estudio sobre la apropiación de las definiciones de la parábola como lugar geométrico con los estudiantes de 2do de secundaria en Sao Paulo/Brasil a partir de una secuencia didáctica en la cual los estudiantes realizaron tratamientos y conversiones en los registros que emplearon para resolver situaciones que envuelven nociones de la parábola como lugar geométrico.

El estudio de Lopes (2014) busca responder a la pregunta: ¿Una secuencia de enseñanza que articula las conversiones de registros a partir de la noción de lugar geométrico resulta en apropiación de los conocimientos de la parábola por parte de los estudiantes?

El objetivo principal esta investigación es mediar la apropiación de los estudiantes en la definición de la parábola como lugar geométrico a partir de una secuencia de enseñanza.

Entre sus principales conclusiones, la autora señala que:

Las situaciones posibilitaron que los sujetos de investigación aprendan sobre las diferentes formas de obtener una curva en el dominio de la geometría por que propiciaron la coordinación entre los registros de lengua materna y figural. Así mismo, las situaciones permitieron que los sujetos de investigación se apropiaran de la noción de la parábola como lugar geométrico en dominio de la geometría analítica.

En la conclusión, la autora señala que los sujetos de la investigación se apropiaron del concepto de parábola a partir de la noción como lugar geométrico ya que realizaron conversiones de registro figural al registro gráfico y/o al algebraico.

La investigación de Lopes (2014) es importante para nuestro estudio pues que se basa en la teoría de registros de representación semiótica, considera a la parábola como lugar geométrico, así como brinda un panorama sobre la enseñanza de la parábola, las dificultades en su aprendizaje, de igual forma utiliza a la ingeniería didáctica, método que también consideramos en nuestro estudio.

También podemos resaltar que en la investigación trabaja con un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), es decir, con el software Geogebra que también estamos interesados en utilizar para la movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico.

Cabe resaltar que consideraremos algunas de las actividades de la investigación de Lopes (2014) para nuestro estudia a las que pensamos hacer las respectivas adaptaciones.

1.2 JUSTIFICACIÓN

En nuestra experiencia profesional como profesora de matemáticas hemos observado problemas en la enseñanza de las cónicas, específicamente la parábola, porque advertimos que cuando se trabaja con los estudiantes esta noción y solo se muestra su representación algebraica, los estudiantes tienden trabajar a nivel algorítmico o apoyados en procesos algebraicos memorísticos pero no consiguen hacer lo mismo cuando están involucradas las relaciones de sus propiedades, otras representaciones, etc.

Al respecto, Fernández (2011), menciona que los estudiantes muestran dificultades para interpretar las figuras geométricas o las representaciones algebraicas y viceversa. También, afirma que acuden a la memorización y por ello, las definiciones resultan ser carentes de sentidos y significados lo que no contribuye a desarrollar sus habilidades matemáticas como: comprender, visualizar y comunicar.

En el mismo sentido, López y Aldana (2013) señalan que los estudiantes aprenden de memoria las ecuaciones, no realizan procesos de análisis y tienen dificultad en relacionar representaciones algebraicas y geométricas. También en esa misma línea de pensamiento, Moncayo y Pantoja (2012) exponen que los estudiantes poseen ideas erróneas sobre la parábola porque la consideran como un arco de circunferencia y dos semirrectas y a su vez aseguran que el error más frecuente en el aprendizaje de la geometría, coincidente con lo que afirma Duval, consiste en confundir el objeto parábola con su representación (figural, gráfica o algebraica).

Ello, mencionan los autores, debido a que las cónicas y en particular la parábola está siendo enseñada de una manera algorítmica y memorística en la que prevalece lo algebraico. También los investigadores afirman que gran parte de los profesores enseñan la parábola de la misma forma como aparece este contenido en los libros de texto, es decir, reducida a su representación algebraica.

Lopes (2014) menciona que los estudiantes de secundaria por lo general confunden la parábola con la función cuadrática. Menciona a su vez, que si bien la función cuadrática se representa de diferentes formas a través de una expresión algebraica, gráficos cartesianos, etc., no significa de que los estudiantes conociendo la función cuadrática puedan entender las propiedades de la parábola.

Con respecto a la forma de enseñanza de las cónicas, Fernández (2011) y Moncayo y Pantoja (2012) señalan que la orientación tradicional basada en las descripciones algebraicas de las cónicas, ha hecho que su tratamiento sea artificial, porque como señalan es enseñada de manera algebraica es decir, es enseñada a partir del estudio de las ecuaciones polinómicas de segundo grado y desde el punto de vista de funciones por lo que la noción de parábola como lugar geométrico no es trabajada a profundidad.

Por otro lado, Fernández (2011) y Moncayo y Pantoja (2012) aseguran que los AGD permiten a los estudiantes la posibilidad de representar un objeto matemático de manera dinámica, examinando sus relaciones desde diversas perspectivas, éstas a su vez promueven condiciones a los estudiantes para plantear preguntas, identificar conjeturas, reconocer, construir acceder a las relaciones y propiedades del objeto en cuestión.

De esta manera, para estudiar la parábola como lugar geométrico el uso de AGD se hace necesario.

Ante tales evidencias, nosotros consideramos importante enfocar la enseñanza de las cónicas, específicamente de la parábola una manera apropiada desde el punto de vista didáctico, donde se promueva las construcciones geométricas, favorezca la intuición en el estudio de las propiedades, las relaciones espaciales y por estimule las competencias matemáticas haciendo uso de los AGD.

Por otro lado, el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) documento oficial que todos los docentes peruanos utilizan que sintetiza y representa las intenciones educativas y sociales del Perú, plantea la secuencialidad de los aprendizajes y desarrollo de competencias que todo estudiante de Educación Regular Básica (EBR) debe tener; expresa en cada uno de sus apartados, la prioridad de responder a las necesidades actuales de los estudiantes favoreciendo el desarrollo de capacidades, conocimientos con el uso de tecnologías que permitieran los aprendizajes. Sobre esto, DCN lo expresa a través del tercer objetivo de la educación Peruana:

> Desarrollar aprendizajes en los campos de las ciencias, las humanidades, la técnica, la cultura, el arte, la educación física y los deportes, así como aquellos que permitan al educando un buen uso y usufructo de las nuevas tecnologías. Ley General de Educación (Art. 9°). (p. 10)

Entre los desafíos que la realidad educativa demanda, señalamos que el DCN muestra dentro del quinto propósito de la Educación Básica Regular, el desarrollo del pensamiento matemático y la cultura científica y tecnológica debe favorecer el rigor intelectual, el aprendizaje de conceptos matemáticos los cuales requieren de una cultura científica y tecnológica.

Es por ello, que pensamos que los docentes de matemáticas podríamos incorporar el uso de software educativos, como el Geogebra, en la enseñanza de diferentes temas, especialmente en la enseñanza de la parábola y, generar situaciones de enseñanza que permita a los estudiantes acceder esta noción de manera atractiva, novedosa, interactiva. Sobre estos aspectos el DCN (2009) en el quinto propósito de la Educación Básica Regular al 2021 que,

> El razonamiento lógico, el aprendizaje de conceptos matemáticos, los métodos de resolución de problemas y el pensamiento científico son desarrollos imprescindibles para los estudiantes, quienes requieren una cultura científica y tecnológica para la comprensión del mundo que los rodea y sus transformaciones […] La institución educativa, mediante las matemáticas, las ciencias y la tecnología, favorece el rigor intelectual propio del razonamiento y la investigación. Ofrece a los estudiantes experiencias enriquecedoras para el desarrollo de sus capacidades y actitudes científicas, así como la adquisición y aplicación de conocimientos científicos naturales y tecnológicos, teniendo como sustento conceptual el dominio de la matemática como ciencia formal. […] El desarrollo del pensamiento matemático y el aprendizaje de las ciencias naturales contribuyen decisivamente al planteamiento y solución de problemas de la vida. (p.25)

Con respecto al área de Geometría y Medición en 5to de secundaria, año en que se enseña la parábola, el DCN (2009) muestra sus intenciones a través del programa curricular de la siguiente manera:

> Se relaciona con el análisis de las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros; comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales. La Medida le permite comprender los atributos o cualidades mensurables de los objetos, así como las unidades, sistemas y procesos de medida mediante la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas (p. 318).

A su vez en el cuadro de competencias de Geometría y Medición del ciclo VII, correspondiente (3ro a 5to de secundaria) el DCN menciona lo siguiente: Resuelven problemas que requieren de razones trigonométricas, superficies de revolución y elementos de Geometría Analítica; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático (p. 318).

Por otra parte, el documento considera la enseñanza de la parábola, a partir de las ecuaciones polinómicas de segundo grado y desde el punto de vista de las funciones, ello se encuentra plasmado dentro del cuadro de capacidades y conocimientos de número, relaciones y funciones del tercer grado de educación secundaria.

Por otro lado, los resultados que se obtuvo en la última evaluación nacional por la Unidad de la Medición de la Calidad (UMC) del Ministerio de Educación del Perú en el 2004, revelan que el 2,9% de los estudiantes de 5to de secundaria se encontraban en el nivel suficiente en el componente de geometría y medición, nivel esperado para los estudiantes de dicho grado.

Las capacidades evaluadas en la Evaluación Nacional del 2004, han sido la capacidad de resolución de problemas, comunicación matemática y aplicación de algoritmo; en esta última capacidad se ha considerado a la ecuación de una cónica y sus elementos.

Respecto del pensamiento geométrico, sólo el 2,9% de los estudiantes manejan los procedimientos y los conceptos básicos de la geometría analítica, identifican y grafican ecuaciones de rectas y resuelven problemas que demandan el empleo de triángulos notables y de razones trigonométricas (seno, coseno y tangente).

A su vez los estudiantes que obtuvieron el nivel suficiente, cabe resaltar que sólo fue el 2, 9%, podían realizar tareas como la de identificar la ecuación de rectas o cónicas y su respectiva denominación (circunferencia, parábola y recta). Interpretar y resuelve situaciones problemáticas elementales y rutinarias que involucran el uso de la ecuación de circunferencia.

Según los resultados mencionados anteriormente, ello nos indica que la prioridad se le da al cálculo y no a la geometría, quien se encuentra relegada y más aún la enseñanza de las cónicas, específicamente la parábola, que pese a ser considerada de manera algebraica y vista como parte de las funciones, los estudiantes de 5to de secundaria no obtienen los mejores resultados.

En esa evaluación nacional, en cuanto a las cónicas, específicamente a la parábola, observamos que es considerada como una temática meramente algébrica, situación reduccionista y sintética como también lo mencionaba, Fernández (2011) en su investigación.

Consideramos que los resultados obtenidos hacen mención a que la enseñanza de las cónicas, específicamente la parábola, está siendo enseñada de manera mecánica y sin sentido, es decir, la noción de parábola desde una perspectiva funcional, su representación algebraica, su tratamiento meramente algorítmico y su representación gráfica a lápiz y papel por lo que pensamos que a los estudiantes les resulta fácil de olvidar y no se desarrollar capacidades espaciales donde el estudiante puedan apreciar las relaciones entre sus elementos y propiedades para su aprendizaje.

Como hemos observado en las investigaciones, la existencia de problemas con respecto a la comprensión de la parábola como lugar geométrico por parte de los estudiantes pero también creemos que ello es resultado y consecuencia de la forma en que se enseña, pensamos que los profesores no tienen conocimientos básicos sobre esta noción, pensamos que los profesores no utilizan, por ejemplo, el Geogebra porque podría ser que no lo conocen o que simplemente lo conocen pero lo usan en sus clases de matemáticas, es por ello, que pensamos en la formación continua de profesores de matemáticas es necesario que los profesores movilicen sus conocimientos relacionados a la parábola como lugar geométrico y que para ello utilicen el Geogebra.

Creemos también, que con la utilización del Geogebra los profesores podrían trabajar con sus estudiantes y crear situaciones o actividades en los cuales se movilizan estos conocimientos.

Es por ello, que ante estas evidencias observadas y las necesidades actuales en didáctica de la matemática, pensamos que es importante realizar una investigación que involucre el objeto matemático parábola con el uso de ambientes de geometría dinámica (Geogebra) en una formación continua de profesores de matemáticas.

Por ello, presentamos a continuación el Geogebra.

1.3 EL GEOGEBRA

El Geogebra es un software libre de geometría dinámica creado por, Markus Hohenwarte en el 2002, para todos los niveles de educación que interactúa y combina la geometría, el álgebra, las estadísticas y el cálculo. Está escrito en Java y por tanto disponible en múltiples plataformas.

Las tecnologías de la información y comunicación (TIC) están inmersas en diversos ámbitos como el laboral, el cultural, el social y el educativo. En el ámbito educativo, las TIC generan nuevas formas de trabajo, recursos y procesos de enseñanza y de aprendizaje.

A continuación presentamos aspectos del Geogebra que utilizaremos en nuestra investigación.

Al abrir el Geogebra (ver figura 4), el usuario encuentra la barra de herramientas, la vista algebraica, gráfica y la barra de entrada. Para efectos de nuestra investigación utilizaremos las vistas antes mencionadas y la vista de geometría que presentamos a sguir:

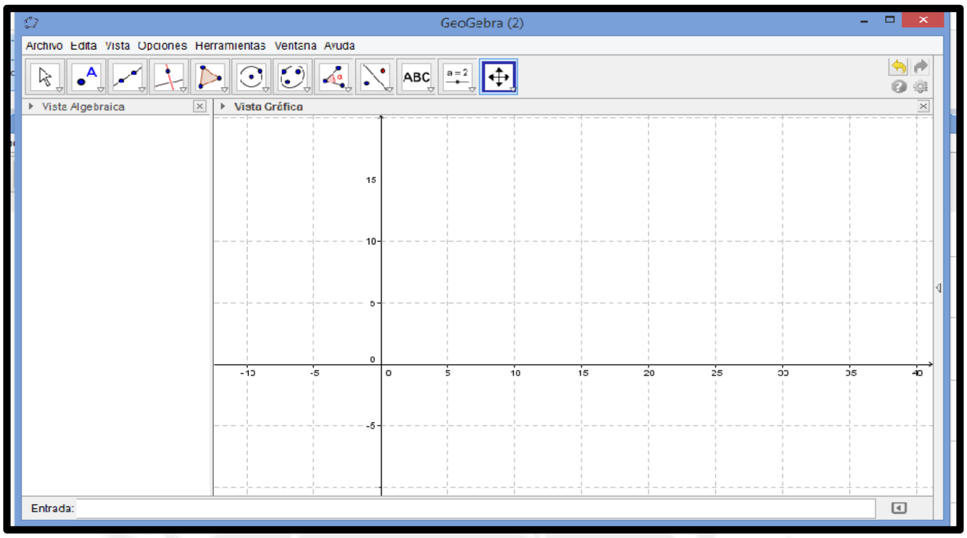


Figura 4: Imagen Inicial del Geogebra

En la parte superior, observamos una barra de herramientas la cual nos permitirá construir la representación de la parábola.

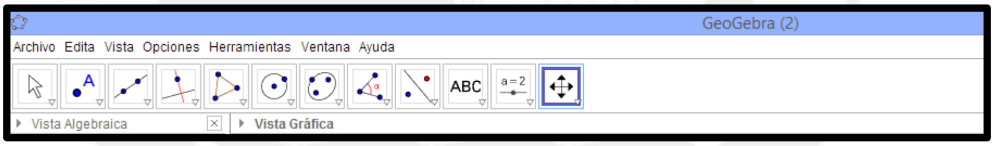
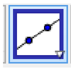
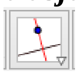
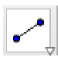


Figura 5: Barra de herramientas del software Geogebra

En seguida, presentamos algunos pasos para la construcción de la parábola como lugar geométrico con el auxilio de las herramientas del software Geogebra:

1. Trace una recta d 
2. Marque el punto F que no pertenece a la recta d 
3. Coloque un punto Q sobre la recta d con la opción ***punto sobre objeto*** 
4. Trace una recta perpendicular n en la recta d en el punto Q 
5. Trace el segmento QF con la opción segmento 
6. Trace la mediatriz m del segmento QF 
7. Marque el punto de intersección de la recta n con la mediatriz y renómbrelo como punto P

8. Active la función rastro en el punto P y arrastre el punto Q. Si observamos la figura 6 el rastro permite ver la representación de una parábola.

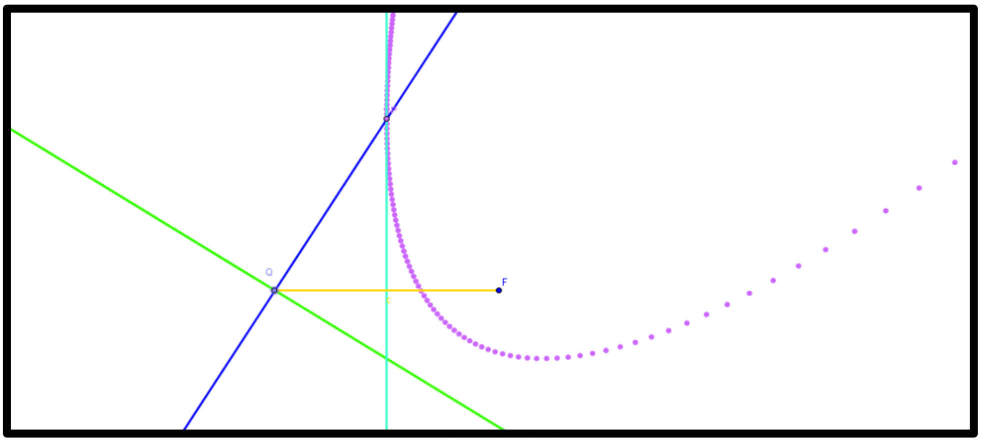


Figura 6: Esbozo de la parábola con la activación de la herramienta rastro del software Geogebra
Fuente: Producción de la autora

Otra herramienta del software con la que se puede representar la parábola es la herramienta lugar geométrico.

9. En base a lo realizado antes, active la herramienta lugar geométrico en el punto P y luego seleccione el punto Q.

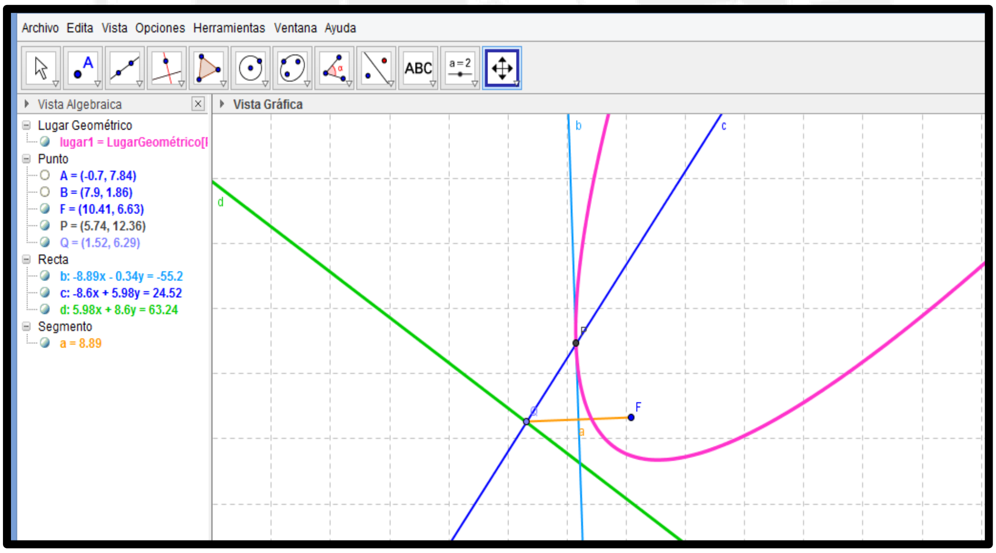


Figura 7: Construcción de la parábola como Lugar Geométrico con el Geogebra

Hemos planificado actividades que permitan a su vez poder utilizar la herramienta cónica – parábola con la intención de que los participantes transiten entre dos registros (figural y algebraico). Utilizamos también esta herramienta para realizar una comparación de la construcción geométrica.

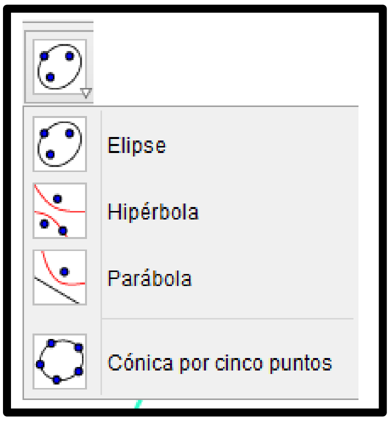


Figura 8: Ícono de la herramienta cónica – parábola

Para utilizar esta herramienta, es necesario construir una recta, que será la directriz d y un punto fijo F fuera de la recta llamado Foco, teniendo esos elementos se procede a realizar la construcción haciendo clic en la herramienta cónica parábola clicando primero en el punto F (foco) y luego en la recta fija (directriz).

A continuación, la figura 9, muestra esta construcción en la vista gráfica (que ha sido modificada- se ha ocultado la cuadricula y los ejes cartesianos)

Ecuación algebraica de la parábola

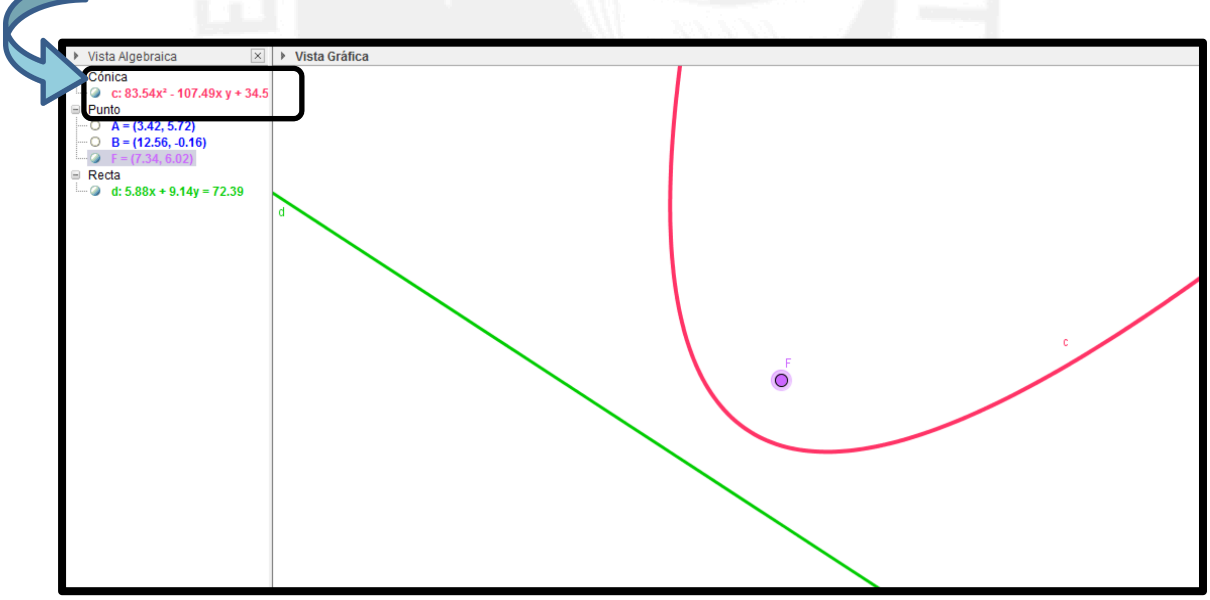


Figura 9: Construcción de la parábola con la herramienta – parábola

Consideramos también en la figura 10, otra forma de construcción de la parábola como lugar geométrico basado en la propiedad de la circunferencia. Para ello, usamos las siguientes herramientas del Geogebra.

1. Trace una recta d
2. Marque el punto F que no pertenece a la recta d
3. Coloque un punto Q sobre la recta d con la opción punto sobre objeto
4. Grafique una circunferencia de centro C, que pase por los punto F y que sea tangente a la recta d en el punto Q.

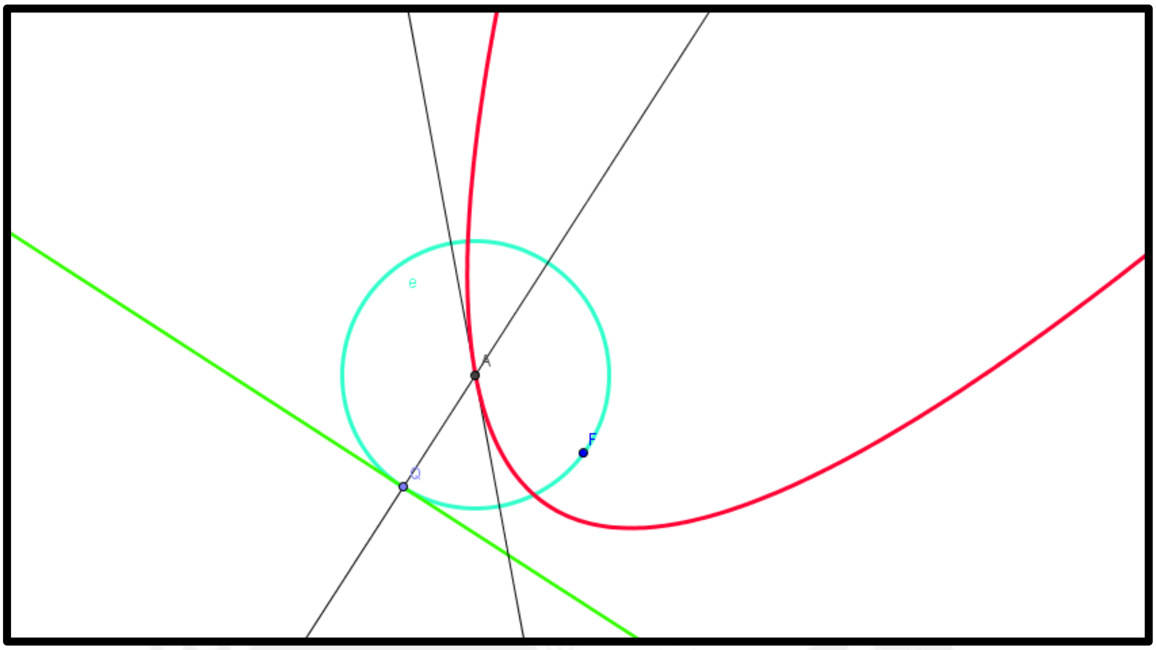


Figura 10: Construcción de la parábola con el software Geogebra
Fuente: Adaptado de Lopes (2014, p. 51)

Por lo mostrado, el Geogebra permite una construcción dinámica de la parábola con el uso del arrastre, y otras herramientas que permiten conjeturar y evidenciar propiedades intrínsecas de la parábola. Respecto a lo descrito, Laborde (1997) expresa lo siguiente:

> El entorno responde pues a la intención de ofrecer un sistema de significantes que tenga un dominio mayor de funcionamiento en relación con la geometría y que haga más evidentes los límites del dominio de interpretación. […] El campo de experimentación ofrecido por el dibujo en los dibujos con lápiz y papel está limitado por razones materiales (imprecisión del trazado, imposibilidad de hacer temporalmente invisible una parte del dibujo, limitación del número de elementos que hay que gestionar). […] El tipo de representación gráfica que da el entorno es distinto, por tanto, del dibujo con lápiz y papel. Podemos esperar nuevas posibilidades de organización de las situaciones de aprendizaje y cambios en la conducta de los estudiantes (p.39).

Por ello, creemos que el Geogebra aporta en nuestro trabajo múltiples beneficios para los participantes movilicen la noción de parábola como lugar geométrico, por las particularidades antes ya mencionadas y por las diversas investigaciones como las de Fernández (2012), León (2014), Lopes (2014) que muestran la pertinencia de este AGD. Por otro lado, como estamos interesados en analizar las acciones de los participantes, profesores de matemáticas en formación continua, cuando movilizan las nociones de la parábola como lugar geométrico presentamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995).

1.4 TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

En este capítulo presentamos solamente los aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1995) que consideramos indispensables para nuestra investigación.

El investigador afirma que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de las matemáticas como la conceptualización, razonamiento y resolución de problema, requieren del uso de sistemas de expresión y representación.

Por ello, los sistemas de comunicación y de representación son indispensables para los procesos de comprensión en términos de integración y estructuración de las representaciones mentales.

Representaciones Semióticas

El autor establece que por medio de las actividades asociadas a los sistemas de representación se puede caracterizar la comprensión que los estudiantes tienen acerca de un objeto matemático. Además, el autor afirma que los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción, por ello es indispensable representarlos mediante representaciones semióticas, como gráficos, figuras, números, etc., es decir, que se requiere de las representaciones semióticas para la actividad propia de la matemática.

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (Duval, 1995, p.14)

Así mismo, Duval (1995) clasifica las representaciones semióticas dentro de las representaciones conscientes y externas y que en esencia conforman un sistema particular de signos. Además, el autor, considera que los elementos estructurales de toda representación son el contenido de la representación, el objeto representado y la forma de la representación. También, considera importante tener en claro que el contenido de una representación nunca delimitará completamente el objeto representado, también afirma que es necesario diferenciar el contenido de una representación del objeto representado.

Duval (2004), señala que una representación semiótica no puede entenderse de forma independiente del sistema que la produce. Los elementos del sistema semiótico constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…) permiten la producción de una representación y son las que determinan la relación entre el contenido de la representación y el objeto representado.

En ese sentido, el autor afirma que existe una interacción de las representaciones semióticas y mentales. Las representaciones semióticas son manifestación de las representaciones mentales y dan una idea de lo que el sujeto ha representado internamente. Las representaciones semióticas cumplen con la realización de diferentes funciones cognitivas y la producción del conocimiento. Al respecto, el investigador, menciona lo siguiente,

> Las representaciones externas son, por naturaleza, representaciones semióticas. Estas representaciones están por tanto estrechamente ligadas a un estado de desarrollo y de dominio de un sistema semiótico. Son accesibles a todos los sujetos que han aprendido el sistema semiótico utilizado. (Duval, 1995, p.34)

El autor afirma que los sistemas semióticos (las figuras geométricas, el lenguaje algebraico, gráfico, y la lengua natural, son sistemas diferentes), serán **registros de representación semiótica** si cumplen con las tres actividades cognitivas indispensables a toda representación: formación, tratamiento y conversión. A continuación, explicamos las tres actividades cognitivas:

- **Formación:** la formación de representaciones hace referencia a la expresión mental, es expresar un objeto real en un registro semiótico, lo cual implica la selección una marca o conjunto de caracteres, selección de las relaciones y datos que permite constituir lo que representamos.

Por ejemplo, la formación relacionada con la ecuación de la parábola con vértice en el origen, donde su eje coincide con el eje Y, el foco es el punto $(0, p)$ y $p > 0$, se puede representar así:

$$x^2 = 4py$$

Otra de las actividades cognitivas que debe cumplir todo registro de representación semiótica según Duval (1995) es el tratamiento que pasamos a explicar:

- **Tratamiento:** consiste en la transformación interna de la representación dentro del mismo sistema semiótico, es decir que una representación (inicial) es transformada en otra representación (final) en relación a un mismo objeto.

Como una transformación interna de una representación, en palabras de Duval (2004),

> El tratamiento es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. El tratamiento es, pues una transformación estrictamente interna a un registro: utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propio al sistema; así la paráfrasis o las reformulaciones en lengua natural, el cálculo con un sistema de escritura de los números, las anamorfosis con las representaciones icónicas, las reconfiguraciones con el registro de las figuras geométricas (Duval, 2004, p.44).

Por ejemplo, presentamos la representación algebraica de la parábola de forma simplificada para que luego del tratamiento quede expresada en una ecuación desarrollada:

$$(x-3)^2 = -4(y-3)$$

$$x^2 - 6x + 9 = -4y + 12$$

$$x^2 = 6x - 4y + 3$$

- **La Conversión:** es cuando la transformación produce una representación en otro sistema semiótico distinto al de la representación inicial. La conversión, es una transformación externa que hace pasar de una representación a otra. Requiere de la coordinación de representaciones en el individuo que la efectúa.

Duval (2004) explica,

> La conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro P en otra representación del mismo objeto en un registro L. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación…), pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto (Duval, 2004, p.44).

Por otro lado, al autor, manifiesta que las transformaciones de los sistemas semióticos permiten tener una variedad de representaciones de un objeto matemático para favorecer el aprendizaje del mismo. Así mismo, afirma que la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los estudiantes.

Es por ello, que para efectos de nuestra investigación hemos considerado actividades que permitan a los profesores participantes realizar los tratamientos y conversiones de registros de representación semiótica con respecto a la parábola como lugar geométrico.

Tipos de Registros de Representación

Duval (2004) considera que un objeto matemático puede representarse en diferentes registros y tipifica los siguientes Registros de Representación Semiótica:

Registro Figural: Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.

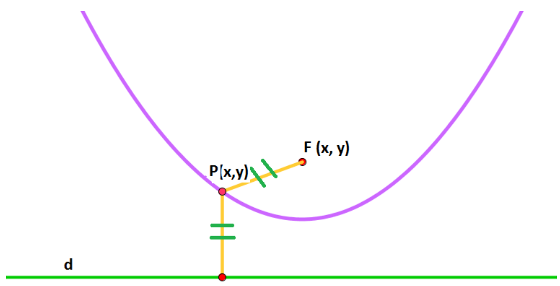
Registro de lengua Natural: En este registro admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere modelar un fenómeno, se debe partir de una descripción del mismo ya sea de tipo verbal o escrito.

Registro gráfico: En este registro se puede representar por medio de una curva (continua o no) en el plano cartesiano. Se pone en juego la noción de gráfica del objeto matemático.

Registro algebraico: En este registro, se puede representar por medio de expresiones algebraicas.

A continuación mostraremos en la tabla 1, la parábola como lugar geométrico en dos diferentes tipos de registros.

Tabla 1. Registro de una representación Semiótica de una parábola

Registro de Lengua Natural	La parábola es el lugar geométrico formado por los puntos del plano que equidistan de una recta fija (d), llamada directriz y de un punto (F), que no pertenece a la directriz, llamado foco.
Registro Figural	

Por ejemplo, la tabla 1 muestra la representación del objeto matemático, parábola en dos registros de representación diferentes (registro de lengua natural y registro figural).

Pensamos que la movilización de registros en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es importante porque nos permite indagar por los procesos de conceptualización y/o movilización de nociones sobre la parábola como lugar geométrico en profesores en formación continua; ello implica también la realización de tratamientos y conversiones de registros.

Por este motivo, nuestro estudio pretende que profesores en formación continua movilicen la noción de parábola como lugar geométrico por medio de diferentes registros de representación semiótica por medio de los tratamientos y conversiones a través de una secuencia de actividades en las que utilizamos el Geogebra.

1.5 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

Después de haber presentado los antecedentes, la justificación, así como también el Geogebra y el marco teórico de nuestra investigación, a continuación presentamos la pregunta de investigación y los objetivos de la misma.

¿Cómo profesores de matemática movilizan la noción de parábola como lugar geométrico, cuando desarrollan una secuencia en la que utilizan diferentes registros de representación semiótica?

Es por ello, que en nuestra investigación se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo General:

Analizar cómo profesores de matemática movilizan la noción de parábola como lugar geométrico, cuando desarrollan una secuencia en la que utilizan diferentes registros de representación semiótica.

Objetivos Específicos:

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr con los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los registros de representación semiótica que utilizan los profesores en formación continua cuando movilizan la noción de la parábola como lugar geométrico con el uso del Geogebra.

- Estudiar los tratamientos y las conversiones en los registros de lengua natural figural, gráfico, y algebraico que utilizan los profesores en formación continua al desarrollar la secuencia de actividades que movilizan la noción de parábola como lugar geométrico.

A continuación presentamos la metodología de nuestra investigación.

1.6 ASPECTOS DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA E INSTRUMENTOS

Para orientar nuestro estudio utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). A continuación, describiremos brevemente algunas características de nuestra metodología de investigación considerada en este trabajo:

Artigue (1995) manifiesta que la Ingeniería Didáctica, como método de investigación, se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase; es decir sobre la concepción, realización, observación, análisis de secuencias de enseñanza y su validación es en esencia interna, pues está basada en la confrontación entre lo que se planificó (a priori) y lo que realmente sucedió en clase (posteriori).

La investigadora señala que en la Ingeniería Didáctica se distinguen las siguientes fases:

Fase 1: Análisis Preliminar

Según Artigue (1995), en esta fase se requiere efectuar análisis en los siguientes aspectos:

- *El análisis epistemológico* de los contenidos contemplados en la enseñanza
- *El análisis didáctico*, referente a la enseñanza y sus efectos.
- *El análisis cognitivo*, referente a de las concepciones, errores comunes, las dificultades que tienen los sujetos concernientes al objeto matemático.

En nuestra investigación, el **aspecto epistemológico** se basa en el estudio del objeto matemático parábola bajo la mirada del saber formal en la geometría analítica (lugar geométrico), así mismo presentaremos una breve reseña histórica del objeto matemático, ambos se encuentran desarrollados ampliamente en el capítulo de la Parábola.

En el **aspecto cognitivo**, en los antecedentes hemos presentamos investigaciones como las de Fernández (2011), López y Aldana (2013), Moncayo y Pantoja (2012), Lopes (2014), León (2014) y Laborde (1997) que tienen relación con nuestro estudio sobre la comprensión del concepto y las nociones de parábola, sus limitaciones, y los entornos de geometría dinámica como mediadores entre el conocimiento geométrico y el sujeto.

Así mismo, en el **aspecto didáctico,** describimos el tratamiento que se da a la parábola, en los libros de consulta que manejan los profesores de secundaria, como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Documentos de Consulta

Autor	Unidad	Páginas	Título
Libro de Matemáticas del Ministerio	Unidad 7 Geometría Analítica	220 - 224	Manual para el Docente
Libro Norma	Unidad 9 – Tema 4 Geometría Analítica	404 - 409	Manuel para el Docente

De esta manera, hemos considerado los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos de la parábola como lugar geométrico.

Fase 2: Concepción y análisis a priori

Después de la primera fase, el análisis preliminar, que es la que permitirá utilizar las herramientas necesarias para diseñar la secuencia de actividades podremos realizar un análisis previo de cada una de las actividades que nos permitirán, a priori, predecir las acciones y estrategias que los profesores en formación continua desarrollarán en cada una de las actividades creadas teniendo en cuenta aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Según Artigue (1995), en esta fase el investigador toma la decisión de actuar sobre determinadas variables del sistema que no están fijadas por las restricciones. A estas variables se les llama las variables de comando (micro y macro didácticas).

La autora, distingue dos tipos de variables potenciales manipuladas por el investigador:

- Variables macro-didácticas o globales son las asociadas con la organización y gestión del medio, se dice que son concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Variables micro-didácticas o locales son las asociadas a la organización local de la ingeniería, o sea la organización de una secuencia o fase dependiente del contenido didáctico en que se enfoca la enseñanza.

Para nuestro trabajo, utilizaremos variables micro-didácticas ya que a pesar que se trate de una formación contunua de profesores, estamos interesados en la movilización de la noción de parábola y en su estudio como lugar geométrico.

Resaltamos que en la secuencia de actividades utilizaremos el software Geogebra y al realizar el análisis a priori de la secuencia también predeciremos su influencia en el desarrollo de la misma.

Fase 3: Experimentación

Esta fase, de acuerdo con Artigue (1995), se caracteriza por la ejecución, desarrollo y aplicación de la secuencia de actividades planificadas y se inicia con el primer contacto entre el investigador, profesor y los sujetos participantes, que en nuestro caso son profesores de matemáticas en formación continua.

Así mismo, realizamos la explicitación de las condiciones de cómo se realiza la investigación con el grupo seleccionado y finalmente aplicamos los instrumentos elaborados y realizamos el registro de los documentos generados en el Geogebra.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

La investigadora menciona que esta fase se caracteriza por el análisis de los datos recogidos a lo largo del proceso de la experimentación a través de observaciones, producciones de los profesores en clase, observaciones de las secuencias de las actividades y cuestionarios.

En palabras de Artigue,

> El análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso (p.48).

Una vez realizado el análisis *posteriori*, de acuerdo con la autora, se procede a la confrontación de los dos análisis, el *a priori* y *a posteriori* y es allí que se logra la validación.

En esta fase, analizamos los datos recolectados en los dos encuentros realizados con los profesores en formación continua y los contrastamos con el análisis a priori para validar la ingeniera de la investigación.

Instrumentos y procedimientos

Para recolectar la información para nuestra investigación, utilizamos: Fichas de la secuencia de las actividades, laboratorio de cómputo con el programa del Geogebra instalado en todas las computadoras, grabaciones de los archivos de las actividades hechas por cada uno de los profesores de secundaria.

Para el caso de investigación, realizamos los siguientes pasos:

- Elaboración de la secuencia de cuatro actividades que propiciaran la movilización de la noción de parábola como lugar geométrico en los profesores en formación continua con el uso del software Geogebra.
- Explicitación de las condiciones de realización de la investigación a los profesores en formación continua seleccionados.
- Aplicación de las secuencias de actividades.
- Recojo y organización de la información de las fichas de la secuencia de actividades y también de las producciones de los profesores participantes, generadas en los archivos del Geogebra. Estos archivos son grabados por los participantes en una carpeta.
- Análisis de la secuencia en base a los aspectos teóricos de la tesis.
- Elaboración de las consideraciones finales y perspectivas futuras de la investigación.

A continuación en el capítulo 3, presentamos la parábola como lugar geométrico, desde las 3 dimensiones: epistémico, cognitivo y didáctico.

CAPÍTULO II – PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

En el presente capítulo realizamos el estudio de la parábola como lugar geométrico desde tres aspectos: histórico, por medio de una breve reseña histórica del surgimiento de la parábola, asociada a las características de la evolución del saber matemático; cognitivo, relacionado a las dificultades referente a la parábola como lugar geométrico y finalmente, el aspecto didáctico en el que presentamos dos libros utilizados en 5to grado de educación secundaria en la enseñanza de la parábola, el manual para el profesor ya que la investigación tiene como sujetos a profesores en formación continua y uno de los libros más utilizados por ellos.

2.1 BREVE RESEÑA HISTÓRICA

En esta breve reseña histórica nos basamos en Boyer (1996) que evidencia la naturaleza de la parábola como lugar geométrico y su evolución.

En este sentido, mencionaremos cómo surgió la noción de la parábola como lugar geométrico caracterizado por la propiedad foco – directriz. Para ello, el historiados menciona trabajos de Menecmo (375-325), Arquímedes (287-212 a. C.), Apolonio de Perga (262-190 a.C.), Papus (S. IV d. C.), Descartes (1596- 1650) y Lebesgue (1875 – 1941).

Con respecto a Menecmo, el historiador afirma que, fue matemático y geómetra, se le atribuye el descubrimiento y el estudio teórico de las secciones cónicas, fue célebre en la antigüedad, por eso estas curvas tuvieron el nombre de curvas de Menecmo. Así mismo trató de resolver el problema de la duplicación del cubo, utilizando la parábola y la hipérbola, donde muestra la existencia de una solución mediante el corte de una parábola con una hipérbola.

Según el autor, Arquímedes, en su búsqueda de una solución para la cuadratura del círculo, hace un gran aporte a través de su obra: La Cuadratura de la Parábola, se especializó en sus propiedades y probó que el área definida por una parábola y una recta (segmento parabólico) equivale exactamente a $\frac{3}{4}$ de un triángulo inscrito ABC. Para ello desarrolló una serie geométrica infinita con una razón común de $\frac{1}{4}$ (Ver figura 11)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots . = \frac{4}{3}$$

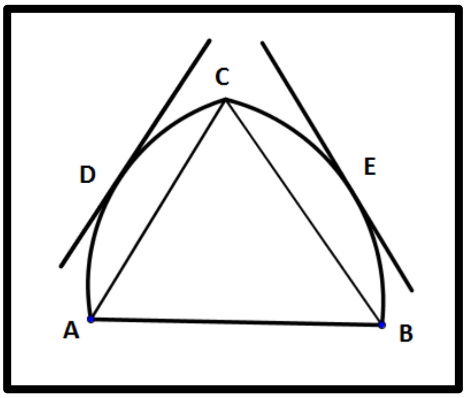


Figura 11: Triángulo ABC inscrito en un segmento parabólico ADCEB
Fuente: Adaptado de Moncayo – Pantoja (2012, p. 36)

La figura 11, representa el triángulo ABC inscrito en un segmento parabólico ADCEB, Arquímedes compara por un razonamiento que utiliza el método de exhaución las áreas de estas dos figuras.

Este concepto permitió, de acuerdo con Boyer (1996) obtener por primera vez la cuadratura del espacio comprendido entre una curva y líneas rectas. Para su demostración, se aplica el método, llamado, exhaución a la cuadradura de la parábola. A su vez Apolonio de Perga, fue el primer geómetra que usó el término parábola en su tratado de Cónicas, considerado obra cumbre y donde se desarrolló el estudio de las tangentes a secciones cónicas, así no solo aportó una gran cantidad de resultados nuevos para la época, sino también metodología y una renovación conceptual en las cuales se puede encontrar el germen lejano de la Geometría Analítica del siglo XVII, según el autor. Apolonio, fue el primero en demostrar que en un solo cono circular recto se pueden obtener los tres tipos de secciones cónicas (elipse, parábola e hipérbola), sin importar el ángulo que forman la generatriz y el eje tal como proponía Menecmo; solo haciendo la inclinación del plano secante con el eje que corta al cono; inclusive fue más allá de ello, ya que también planteó que la construcción de estas secciones cónicas, eran independientes del tipo de cono utilizado, es decir, podría ser un cono circular recto u oblicuo. Así mismo sustituye el cono de una hoja por el cono de dos hojas o dos conos orientados en sentidos opuestos, los que conllevaría posteriormente a observar que la hipérbola es una curva de dos ramas.

También Boyer (1996) señala que Apolonio fue quien puso el nombre actual a las cónicas. Particularmente, la parábola fue definida como la intersección de un cono circular oblicuo de dos hojas con un plano paralelo a una sola generatriz o arista. (Ver figura 12).

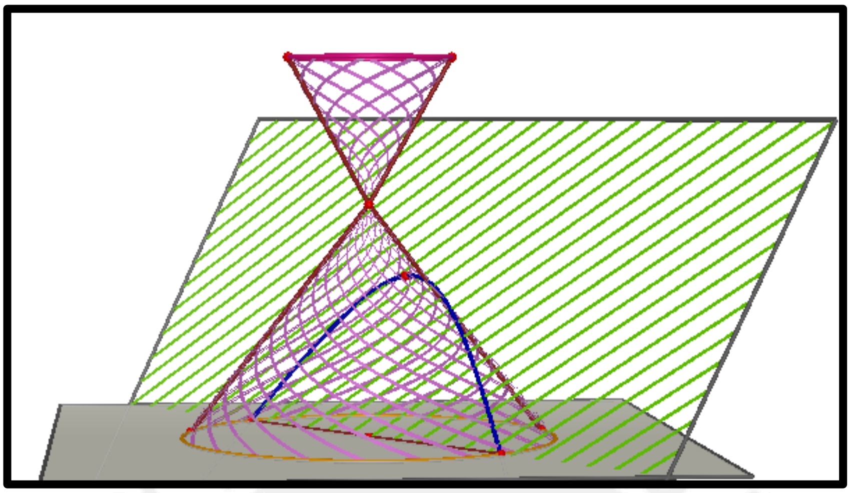


Figura 12: Parábola como sección cónica generada por el corte que hace el plano paralelo a una de las generatrices del cono, que no contiene al vértice del cono
Fuente: Adaptado de Moncayo – Pantoja (2012, p. 37)

Por otro lado, Apolonio consiguió definir las cónicas como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada. Esta definición deja de lado la manera de concebirlas como secciones determinadas por un plano al cortar una figura tridimensional. Apolonio al igual que sus predecesores, obtenía las curvas a partir de un cono en el espacio tridimensional, pero luego logró prescindir del cono, no sin antes haber deducido una propiedad fundamental, que vendría ser una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre la curva.

En las Cónicas, la noción de foco se refiere de manera indirecta y la de directriz, es omitida completamente. Según Boyer (1996) es muy probable que la propiedad foco – directriz fuese utilizada en ese entonces para el trazado de parábolas.

Según Moncayo y Pantoja (2012), expresa que:

> Pappus de Alejandría, quien en su Colección Matemática expone la propiedad monofocal de las cónicas, fue el primero en teorizar sobre la propiedad (p.38).

El filósofo y matemático francés René Descartes, desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones y los puntos en el plano con pares de números. Este método es ahora denominado Geometría Analítica. En esta Geometría Cartesiana, las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables con algunas condiciones sobre sus coeficientes representan cónicas.

Según Moncayo y Pantoja (2012), luego de varios siglos y a raíz de un artículo que publicara en 1993 el matemático francés Henri Léon Lebesgue, cuyo título traducido es Las Cónicas en la Enseñanza Secundaria, la propiedad foco – directriz es considerada nuevamente por los matemáticos para el estudio de la parábola, así como de la hipérbola y la elipse.

2. 2 LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Para esta parte nos basamos en la investigación de Lopes (2014) quien señala que para hablar de la parábola como lugar geométrico debemos remontamos a los siglos XVII, donde Pierre de Fermat (1601 – 1665) fue uno de los precursores de la Geometría Analítica, quien a su vez describió las ecuaciones de la elipse, parábola e hipérbola.

A su vez, la autora, menciona que Fermat supo de finir a las cónicas (elipse, hipérbola y parábola) como lugar geométrico "de todos los puntos de una región (plano) que satisfacen una cierta propiedad".

Para efectos de nuestra investigación, nos centraremos en el estudio de la parábola, para ello hemos considerados dos definiciones de la parábola como lugar geométrico.

Primera definición: "Lugar de los puntos de un plano es una parábola, si y solo sólo si estos puntos son equidistantes de una recta y de un punto que no pertenece a esta recta"

Segunda definición: "El lugar de los puntos de un plano es una parábola, si y sólo si, los puntos son centros de los círculos que pasan por F (foco) y son tangentes a la recta directriz r".

Nosotros, coincidimos con la investigadora en considerar el uso de la bisectriz y la simetría de un punto con respecto a una recta para nuestro estudio, como elementos importantes en la construcción de la parábola como lugar geométrico. Además, consideramos que para la caracterización de las definiciones de la parábola, es necesario el uso de los registros de representación semióticas, tales como el registro figural, registro, gráfico, registro de lengua natural y el registro algebraico para mayor comprensión del objeto de estudio.

Para efectos de nuestra investigación, hemos considerado la construcción de la parábola referida a la primera definición que Lopes (2014) consideró en su estudio. Por lo que nuestros sujetos de estudio deberían movilizar la propiedad del triángulo isósceles con respecto a la parábola como lugar geométrico. A continuación presentamos la figura 13 relacionada con la primera definición de la parábola.

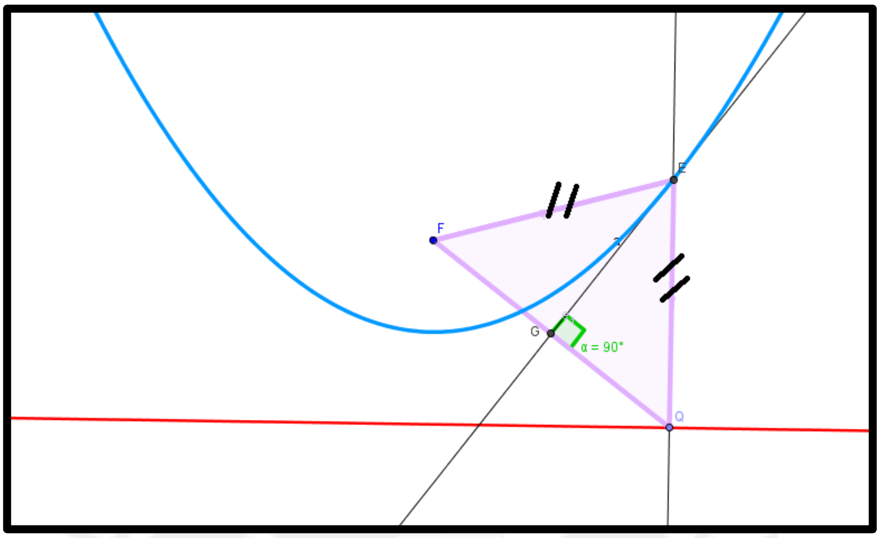


Figura 13: Registro figural de una parábola a partir de la primera definición
Fuente: Adaptado de Lopes (2014, p.40)

También, para efectos de nuestro estudio, hemos considerado también la construcción de la parábola referida a la segunda definición que la investigadora consideró en su estudio. Por lo que pensamos que los profesores en formación continua movilizaran la propiedad de la circunferencia con respecto a la parábola como lugar geométrico. A continuación presentamos la figura 14 relacionada con la segunda definición de la parábola.

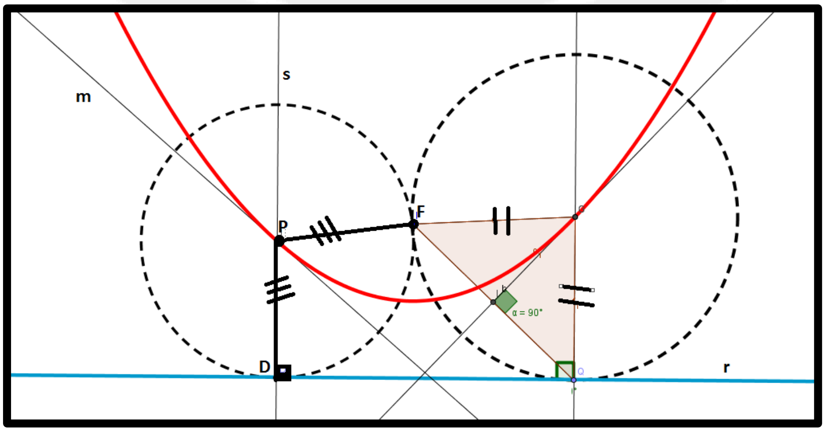


Figura 14: Registro figural de una parábola a partir de la segunda definición
Fuente: Adaptado de Lopes (2014, p. 40)

De la figura, se puede observar que si P es un punto de la parábola $\mathcal{P}$ con foco F y recta directriz r, entonces P es el centro de una circunferencia $\mathcal{C}$ que pasa por F y es tangente a r.

A continuación, haremos la demostración matemática que justifica que si el punto P es el centro de una circunferencia $\mathcal{C}$ que pasa por F y es tangente a una recta r (F no pertenece a r), entonces P es un punto de una parábola.

Sean F y D dos puntos distintos de un plano, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de F y D se llama la mediatriz del segmento $\overline{FD}$, se tiene que para cada punto P perteneciente a m se cumple la igualdad $\overline{\mathbf{PD}} = \overline{\mathbf{PF}}$.

Sea s la recta que pasa por P e intercepta perpendicularmente a la recta r en el punto **D**, entonces la distancia de P a r, que denotamos por d (P, r) coincide con la longitud del segmento $\overline{PD}$.

Si P es el centro de $\mathcal{C}$, entonces P pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{FD}$ y se tiene $\overline{\mathbf{PD}} = \overline{\mathbf{PF}} = d(P, r)$. Por lo tanto, P pertenece a la parábola de foco F y directriz r.

Con respecto al estudio de la simetría, Lopes (2014, p.41) explica considerando dos puntos **P** y **P'** simétricos con respecto a la recta m, que contiene el sí y sólo si a la recta m es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

Se dice que el punto **P´** es el simétrico de P con respecto a la recta m, si la recta m es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. (Ver figura 15).

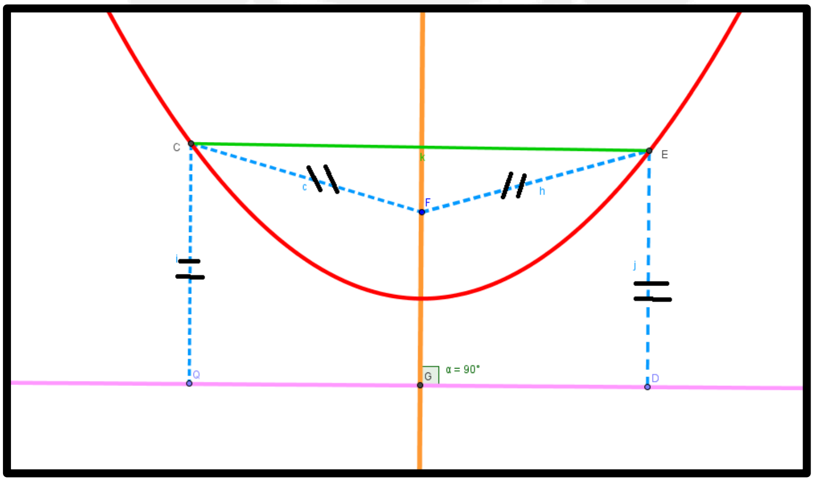


Figura 15: Registro figural de la parábola con el eje de simetría
Fuente: Adaptado de Lopes (2014, p. 41)

La recta perpendicular a la directriz de la parábola que pasa por el foco se llama eje de la parábola y se demuestra que es un eje de simetría de ella.

Para efectos de nuestra investigación, hemos considerado las dos definiciones pues relaciona varios conceptos y procedimientos. Así mismo mencionamos que la propiedad foco - directriz involucra una serie de conceptos geométricos tales como la mediatriz, segmento, circunferencia y recta tangente. A su vez comprende diferentes relaciones espaciales como la simetría, perpendicularidad y paralelismo que consideramos en nuestro estudio.

Para efectos de nuestro estudio, hemos seleccionado como referencia al libro de Geometría Analítica, Lemhann (2003), libro que contiene una variedad de temas que son incluidos en la mayoría de textos de la Geometría Analítica plana y del espacio. Nosotros nos focalizaremos en los temas relacionados con la parábola como lugar geométrico, el cual se encuentra en el capítulo VI del libro.

El capítulo de la parábola se inicia con la definición de la parábola como lugar geométrico y con la descripción de todos los elementos que intervienen en el objeto matemático, así mismo presenta la representación gráfica de la parábola. El autor expresa así mismo la ecuación de la parábola desde la forma más simple, ecuación de la parábola de vértice en el origen y coincidente con un eje coordenado, hasta la ecuación de la parábola de vértice V(h, k) y eje paralelo a un eje coordenado.

Creemos conveniente tomar como referencia la definición que presenta el autor acerca de la ecuación como lugar geométrico:

> La ecuación del lugar geométrico es aquella que tiene la forma $f(x,y) = 0$, cuyas soluciones reales para los valores correspondientes de x, y son todas coordenadas de aquellos puntos que satisfacen las condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico (pp. 50 -51)

También tomamos como referencia a la definición que el autor expresa con respecto a la definición de la parábola:

> Una parábola es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija , situada en el plano, es siempre igual a la distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama foco y la recta fija, directriz de la parábola. (p.149)

Lemhann (2003), designa por F como el foco y a l como la recta directriz de una parábola. De igual forma, indica que la recta ***a*** que pasa por F y es perpendicular a ***l*** se llama eje de la parábola.

Así mismo, define el punto A, punto de intersección del eje y la directriz. El punto V, punto medio del segmento AF, está por definición, sobre la parábola; este punto se llama vértice.

Señala que el segmento que une dos puntos diferentes de la parábola se llama cuerda, de esta manera el segmento de la recta, tal BB´, que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola sería cuerda y en particular, una cuerda que pasa por el foco como CC´, se llama cuerda focal.

Finalmente, indica que la cuerda focal $\overline{\mathbf{LL'}}$ perpendicular al eje se llama lado recto y que si P es un punto cualquiera de la parábola, el segmento de recta $\overline{\mathbf{FP}}$ que une el foco **F** con el punto **P** se llama radio focal de **P**, o radio vector.

Para determinar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y un eje coincidente con el eje coordenado, considera que el vértice está en el origen y un eje coincide con uno de los ejes coordenados. El autor considera que el vértice de la parábola está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X. Entonces el foco F está sobre el eje X; (p, 0) son sus coordenadas.

En seguida se obtiene la ecuación de la parábola, considerando el punto arbitrario P(x, y) de la parábola cuya directriz ***l*** es x = -p. Sea P(x, y). Por P se traza el segmento $\overline{\mathbf{PA}}$ perpendicular a *l*. Entonces, por la definición de parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica $|\overline{\mathrm{FP}}| = |\overline{\mathrm{PA}}|$

En el texto se aprecia una representación geométrica de la parábola. Se muestra dicha representación en la figura 16.

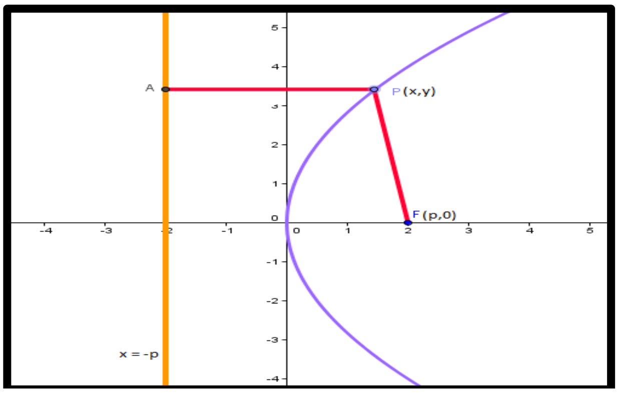


Figura 16: Parábola de vértice en el origen y eje coordenado
Fuente: Adaptado de Lehmann (2003, p. 150)

De acuerdo con Lemhann (2003), sea P(x,y) cualquier punto de la parábola y F (p, 0) el foco. La condición geométrica $|\overline{\mathrm{FP}}| = |\overline{\mathrm{PA}}|$, se expresa de la siguiente forma:

$|\overline{\mathrm{FP}}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$, tenemos de esta manera $|\overline{\mathrm{PA}}| = |x+p|$

Por lo tanto, la condición geométrica está expresada analíticamente por la siguiente ecuación: $\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$.

Luego de elevar al cuadrado y realizar las simplificaciones, se tiene:

$$y^2 = 4px$$

Para el recíproco, el autor considera a $P_1\,(x_1\,,y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfagan la ecuación anterior, por lo que se obtiene:

$${y_1}^2 = 4px_1$$

Se suma $(x_1 - p)^2$ a ambos miembros de la ecuación y se extrae la raíz cuadrada, obteniendo una raíz positiva.

$$\sqrt{(x_1-p)^2 + {y_1}^2} = |x_1 + p|$$

Siendo ésta la expresión analítica de la condición geométrica aplicada al punto P_1. Por lo que P_1 está sobre la parábola cuya ecuación está dada por ${y_1}^2 = 4px_1$.

De esta manera la curva pasa por el origen y no tiene ninguna otra intersección con los ejes coordenados. La única simetría que posee el lugar geométrico es con respecto al eje X, despejando *y* de la ecuación ${y_1}^2 = 4px_1$ tenemos lo siguiente:

$$y = \pm 2\sqrt{px}$$

Por lo tanto, para los valores de y reales y diferentes de cero, p y x deben ser del mismo signo. Según ello se considera dos casos: $p > 0$ y $p < 0$

Si $p > 0$, se excluyen todos los valores negativos de x y todo el lugar geométrico se encuentra a la derecha del eje Y. Considerando ello, no se excluye ningún valor positivo de x, y como y puede tomar todos los valores reales, por lo que el lugar geométrico sería una curva vierta extendida hacia la derecha del eje Y y hacia arriba y abajo del eje X. Esta forma está representada en la figura 16, en la cual se dice que se abre hacia la derecha.

Así mismo, si $p < 0$, todos los valores positivos de x deben de excluirse de la ecuación y todo el lugar geométrico estaría a la izquierda del eje Y. Esta forma está representada en la figura 17, en la cual se dice que se abre hacia la izquierda.

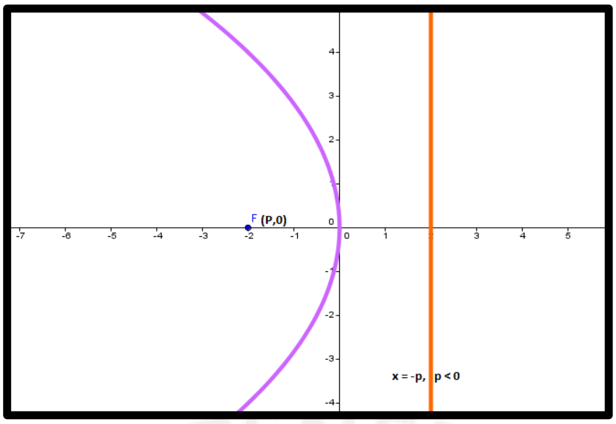


Figura 17: Parábola de vértice en el origen y eje coordenado, abierta hacia la izquierda
Fuente: Adaptado de Lehmann (2003, p. 51)

Según la ecuación $y = \pm 2\sqrt{px}$ hay dos puntos sobre la parábola que tienen abscisa igual a p; uno de ellos tiene la ordenada 2p y el otro la ordenada - 2p. Como la abscisa del foco es p, se sigue que la longitud del lado recto es igual al valor absoluto de la cantidad 4p.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y, se demuestra que la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4py$$

Donde el foco es el punto $(0, p)$. Dándose dos casos, el primero si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba, (Figura 18)

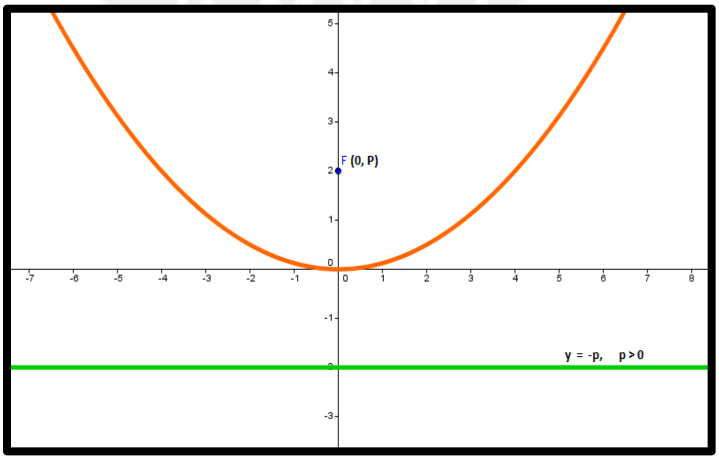


Figura 18: Parábola de vértice en el origen y su eje coincide con el eje Y, abierta hacia arriba
Fuente: Adaptado de Lehmann (2003, p. 152)

Y si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (Figura 19).

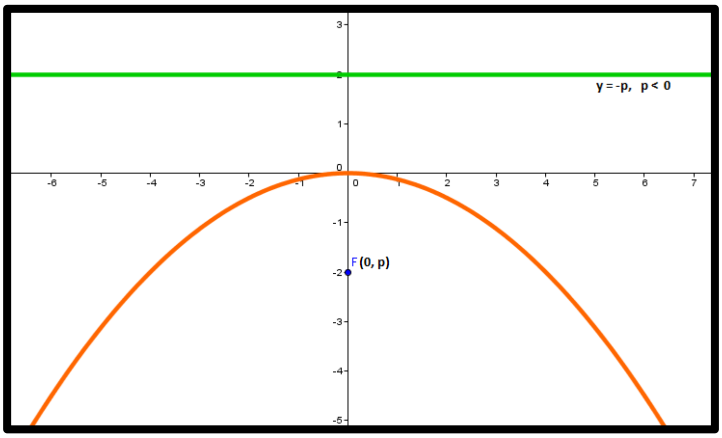


Figura 19: Parábola de vértice en el origen y su eje Y, abierta hacia abajo
Fuente: Adaptado de Lehmann (2003, p. 152)

En el texto, Lehmann (2003) hace referencia a las ecuaciones canónicas:

Ambas ecuaciones: $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$ reciben por nombre primera ecuación ordinaria de la parábola, también refiere que estas ecuaciones son las más simples de la parábola, refiriéndonos también a ellas como las formas canónicas.

Los resultados precedentes, se resumen de la siguiente manera:

> **Teorema 1.** La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje el eje X, es:
>
> $$y^2 = 4px$$
>
> en donde el foco es el punto $(p, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$.
>
> Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre a la izquierda.
>
> Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, y el vértice está en el origen, su ecuación es:
>
> $$x^2 = 4py$$
>
> en donde el foco es el punto $(0, p)$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$.
>
> Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
>
> En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de 4p, que es el coeficiente del término de primer grado. (p.152)

Sin embargo, también es posible hallar la ecuación de la parábola cuando el vértice está fuera del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados.

En la figura 20, se muestra la parábola con vértice *(h, k)*, y cuyo eje es paralelo a un eje X. La ecuación de la parábola, con referencia a los nuevos ejes está dada por $y'^2 = 4px'$

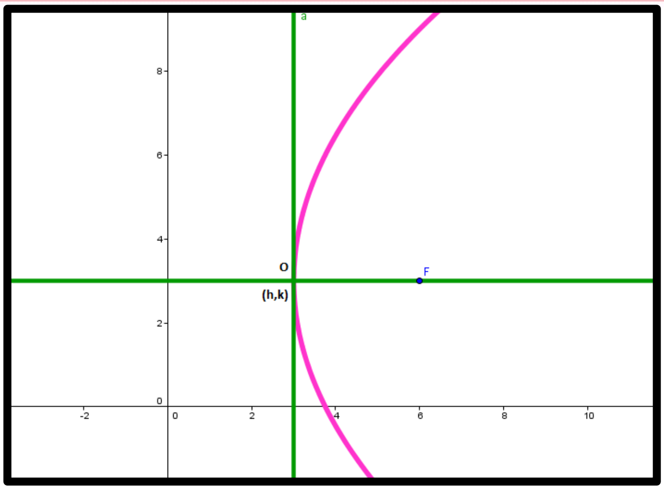


Figura 20: Parábola de vértice en (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje Y
Fuente: Adaptado de Lehmann (2003, p. 155)

En el texto, Lehmann (2003) hace referencia a las ecuaciones de transformación que expresa como: $x = x' + h$, $y = y' + k$. A continuación sustituye los valores

$x' = x - h$, $y' = y - k$ en la ecuación por $y'^2 = 4px'$, se obtiene

$$(y-k)^2 = 4p(x-k)$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje Y tiene por ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

En donde $|p|$ es la longitud de aquella porción del eje comprendida entre el foco y el vértice.

Los resultados precedentes, se resumen de la siguiente manera:

> Las ecuaciones $(y-k)^2 = 4p(x-k)$ y $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, se llaman generalmente segunda ecuación ordinaria de la parábola.
>
> Teorema 2. La ecuación de una parábola con vértice (h, k) y eje paralelo al eje X, es de la forma:
>
> $$(y-k)^2 = 4p(x-k)$$
>
> Siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.
>
> Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia l izquierda.
>
> Si el vértice es el punto (h, k) y el eje de la parábola es paralelo al eje Y, su ecuación es de la forma
>
> $$(x-h)^2 = 4p(y-k),$$
>
> Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo. (p. 155)

Otras de las propiedades de la parábola, está basada en la ecuación de la recta tangente y recta normal. Esta propiedad llamada Propiedad Focal de la parábola, no será incluida dentro de nuestras actividades porque nuestra investigación está basada en el proceso de la movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico. Sin embargo debido a que esta propiedad tiene aplicaciones en el campo de la ciencia la incluimos en la parte teórica del estudio de la parábola.

Al respecto, Lemhann (2003), enuncia el teorema 7: La normal a la parábola en un punto $\mathbf{P_1}\ (\mathbf{x_1},\ \mathbf{y_1})$ cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de P_1 y la recta que pasa por P_1 y es paralela al eje de la parábola.

En la figura 21, se observa la normal a una parábola por un punto $\mathbf{P}\ (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de la curva.

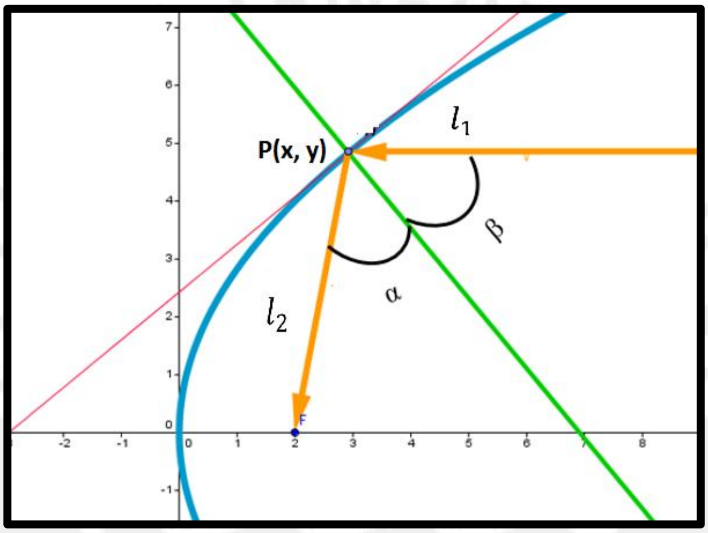


Figura 21. Normal de una parábola por un punto de la curva
Fuente: Adaptado de Lehmann (2003, p. 169)

El autor indica que el teorema anterior está basado en la ley de la reflexión. Si consideramos un rayo de luz l_1 que toca una superficie pulida m en el punto P, es reflejado a lo largo de otra recta, digamos l_2.

El ángulo β formado por el rayo incidente l_1 y n se llama ángulo de incidencia, el ángulo α formado por el rayo reflejado l_2 y n se llama ángulo de reflexión.

Por ello, si un foco luminoso se coloca en el foco F de una parábola, los rayos inciden sobre la parábola, y se reflejan según las rectas paralelas al eje de la parábola.

Sobre la base de este principio del reflector parabólico, se basan las locomotoras y automóviles en los faros buscadores.

Otra aplicación de la parábola que también es observada, según Lemhann (2003), el telescopio de reflexión, en el cual los rayos paralelos de luz procedentes de las estrellas se concentran en el foco.

2.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Sobre este análisis didáctico, hemos seleccionado dos libros de secundaria de las editoriales con más presencia en las aulas de 5to de secundaria en el Perú y que son utilizados por los profesores en formación continua. Luego pasaremos a realizar el estudio de los libros, enfocándonos en el tema de la parábola como lugar geométrico para tener una referencia sobre cómo se desarrolla el tema de la parábola como lugar geométrico en las escuelas. Estos libros son: Matemática para pensar 5 de la editorial Norma edición 2013 y Matemática 5to grado de educación secundaria – Manual para el docente brindado a los docentes por el Ministerio de educación del Perú edición 2008.

Pasaremos a continuación a la revisión y estudio de los libros ya mencionados con respecto a la noción y al tratamiento que se da a la parábola como lugar geométrico:

Tabla 3. Documentos de Consulta

Autor	Unidad	Páginas	Título
Libro de Matemáticas del Ministerio	Unidad 7 Geometría Analítica	220 - 224	Manual para el Docente
Libro Norma	Unidad 9 – Tema 4 Geometría Analítica	404 - 409	Manual para el Docente

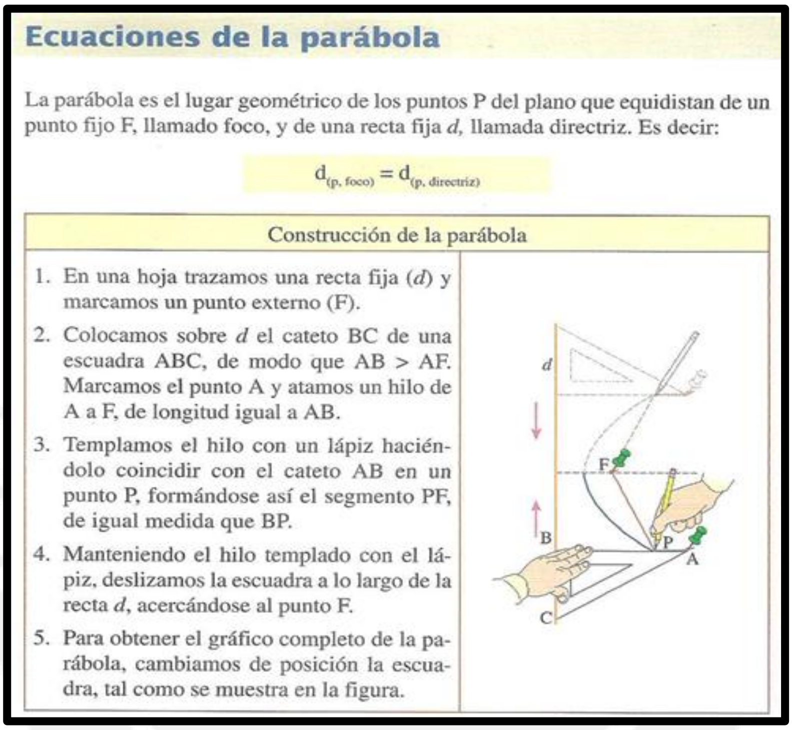
Hemos realizado una revisión de las unidades que han sido consignados en el cuadro anterior. En cada caso haremos mención a los aspectos relevantes relacionados a nuestro trabajo de investigación. En el tabla 3, se muestra el primer texto de consulta Manual para docentes de Matemáticas (2011), por el MINEDU

Tabla 4. Geometría Analítica, manual para el docente

Geometría Analítica		
Manual para el Docente de Matemáticas. MINEDU		
Unidad	**Sección**	**Temas**
Unidad: 7 Páginas: 220 – 224 Tema de	La Parábola	• Definición de la Parábola • Construcción de la Parábola • Elementos de la Parábola • Ecuación de la Parábola con vértice en el origen

Geometría Analítica		• Ejemplos resueltos • Ecuación de la Parábola con centro en el punto V(h, k) • Ejercicios resueltos • Ecuación general de la Parábola • Ejercicios resueltos • Ejercicios propuestos

En el libro Manual para docentes de Matemáticas (2011), por el MINEDU, presenta las siguientes actividades introductorias al estudio de la parábola (ver fig. 22)



Ecuaciones de la parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija *d*, llamada directriz. Es decir:

$$d_{(p,\ foco)} = d_{(p,\ directriz)}$$

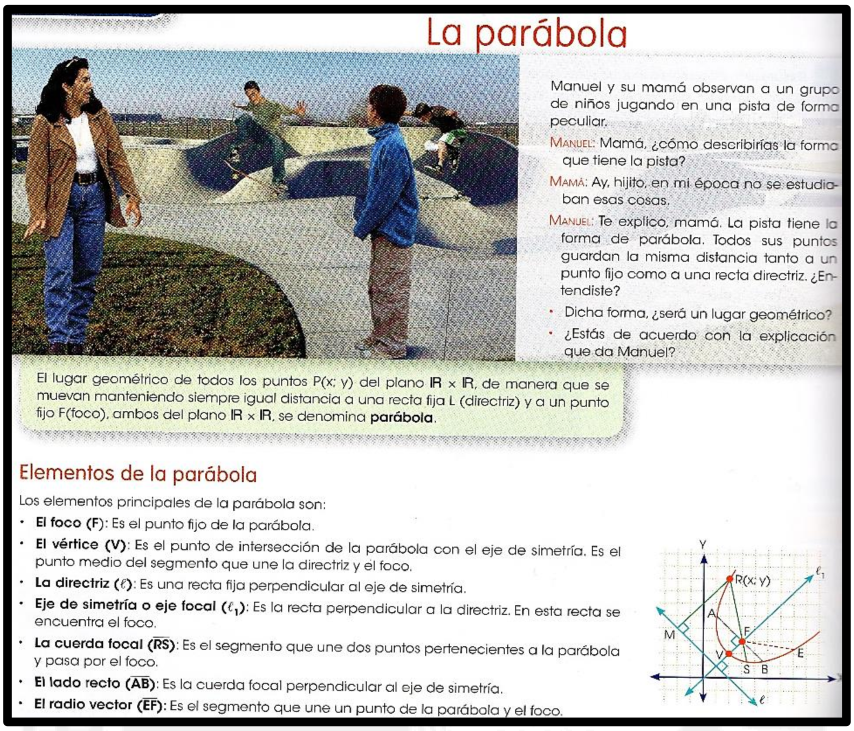
Construcción de la parábola
1. En una hoja trazamos una recta fija (*d*) y marcamos un punto externo (F). 2. Colocamos sobre *d* el cateto BC de una escuadra ABC, de modo que AB > AF. Marcamos el punto A y atamos un hilo de A a F, de longitud igual a AB. 3. Templamos el hilo con un lápiz haciéndolo coincidir con el cateto AB en un punto P, formándose así el segmento PF, de igual medida que BP. 4. Manteniendo el hilo templado con el lápiz, deslizamos la escuadra a lo largo de la recta *d*, acercándose al punto F. 5. Para obtener el gráfico completo de la parábola, cambiamos de posición la escuadra, tal como se muestra en la figura.

Figura 22. Parábola como lugar geométrico.
Fuente: Matemática 5to de secundaria, MINEDU (2011, p. 221)

En la figura 22 del libro Manual para docentes de Matemáticas (2011), por el MINEDU, los autores, empiezan directamente presentando el concepto de la parábola bajo el título Ecuaciones de la Parábola, por lo que se puede entender la parábola es presentada sin realizar actividades que permitan deducir, analizar, verificar y descubrir estos conceptos, sino que el concepto de la parábola la presentan como algo acabado.

Posteriormente, proceden a describir los pasos para encontrar la construcción de la parábola, por lo que la construcción de la parábola está diseñada para comprobar la definición. Observamos así mismo que tales actividades no generan ningún cambio de registro, no realizan tratamientos, pero consideramos que se evidencia de alguna manera en la parte de la actividad de la construcción de la parábola una conversión de lengua natural por los pasos que se indican en la construcción y la representación gráfica que realizan.

Otro libro revisado es el de Matemática de 5to (2013) Norma. Éste presenta las siguientes actividades introductorias a la tema de la parábola:



La parábola

Manuel y su mamá observan a un grupo de niños jugando en una pista de forma peculiar.

MANUEL: Mamá, ¿cómo describirías la forma que tiene la pista?

MAMÁ: Ay, hijito, en mi época no se estudiaban esas cosas.

MANUEL: Te explico, mamá. La pista tiene la forma de parábola. Todos sus puntos guardan la misma distancia tanto a un punto fijo como a una recta directriz. ¿Entendiste?

- Dicha forma, ¿será un lugar geométrico?
- ¿Estás de acuerdo con la explicación que da Manuel?

El lugar geométrico de todos los puntos P(x; y) del plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de manera que se muevan manteniendo siempre igual distancia a una recta fija L (directriz) y a un punto fijo F(foco), ambos del plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se denomina **parábola**.

Elementos de la parábola

Los elementos principales de la parábola son:

- **El foco (F)**: Es el punto fijo de la parábola.
- **El vértice (V)**: Es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría. Es el punto medio del segmento que une la directriz y el foco.
- **La directriz (ℓ)**: Es una recta fija perpendicular al eje de simetría.
- **Eje de simetría o eje focal (ℓ_1)**: Es la recta perpendicular a la directriz. En esta recta se encuentra el foco.
- **La cuerda focal ($\overline{RS}$)**: Es el segmento que une dos puntos pertenecientes a la parábola y pasa por el foco.
- **El lado recto ($\overline{AB}$)**: Es la cuerda focal perpendicular al eje de simetría.
- **El radio vector ($\overline{EF}$)**: Es el segmento que une un punto de la parábola y el foco.

Figura 23. Parábola como lugar geométrico
Fuente: Matemática 5to de secundaria. Editorial Norma (2011, p. 404)

En la figura 23 del libro Matemática para Pensar de 5to de secundaria, Editorial Norma Manual para docentes (2011), los autores empiezan relatando una conversación entre madre e hijo dentro de una situación real cuya intención es reconocer la parábola. A nuestro parecer la presentación es pobre puesto que no va más allá del simple reconocimiento de la forma de la parábola e inmediatamente presentan el concepto de la parábola. La parte introductoria del tema carece de una actividad que permitan a los estudiantes a deducir, analizar, verificar y descubrir el concepto de la parábola.

Posteriormente, proceden a describir los elementos de la parábola y luego proceden a presentar dos actividades cuyo objetivo es reconocer los elementos, por lo que la parte introductoria de la presentación del tema, no permite ahondar en las propiedades de la parábola, tampoco permite que el alumno realice la construcción del concepto de la parábola a través de actividades que la desarrollen.

Como se puede apreciar en los textos analizados, el concepto y las propiedades de la parábola se presentan sin dejar al estudiante deducirlas, también se puede observar que son pocas actividades y la mayoría tiene tienen un carácter netamente algebraico, se enfoca en la parte mecánica del álgebra sin buscar desarrollar capacidades, dado que dan ejemplos que dan ejemplos de solución a las actividades que se proponen.

A continuación analizaremos las actividades en cada uno de los libros de textos, mencionados anteriormente.

En el libro de texto Manual para el docente del Ministerio de educación del Perú, podemos observar las siguientes actividades:

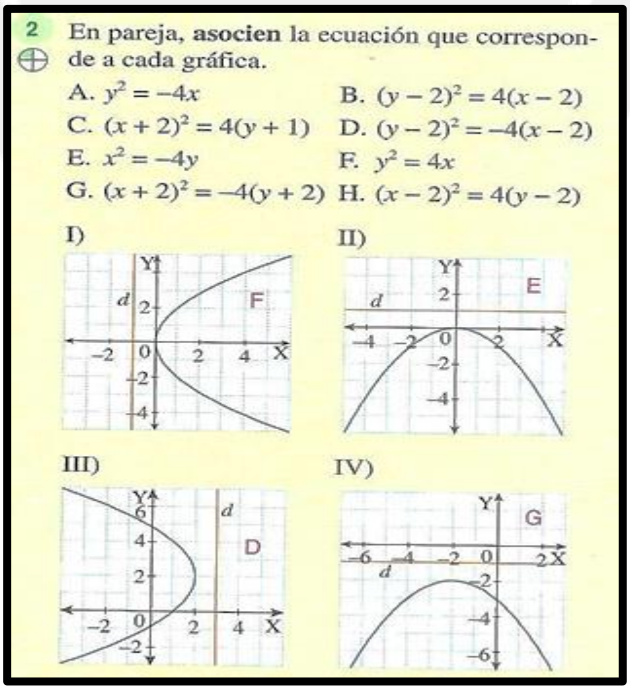
1 **Determina** la ecuación de la parábola con $V(0; 0)$ y directriz d: $x = 3$.

a) $y^2 = -4x$ b) $y^2 = -12x$

c) $y^2 = 4x$ d) $y^2 = 12x$

Figura 24. Actividades presentes en el libro de Matemática para pensar 5 MINEDU
Fuente: Matemática 5to de secundaria, MINEDU (2011, p.221)

Como se puede observar en la figura 24 de la actividad 1 se le pone énfasis a encontrar la ecuación de la parábola, dado algunos elementos como el vértice y la ecuación de la directriz, ello permite realizar un cálculo algebraico para encontrar la ecuación de la parábola. Aquí el predomino es analítico usando las representaciones algébricas.


2 En pareja, **asocien** la ecuación que correspon- de a cada gráfica.

A. $y^2 = -4x$ B. $(y-2)^2 = 4(x-2)$

C. $(x+2)^2 = 4(y+1)$ D. $(y-2)^2 = -4(x-2)$

E. $x^2 = -4y$ F. $y^2 = 4x$

G. $(x+2)^2 = -4(y+2)$ H. $(x-2)^2 = 4(y-2)$

Figura 25. Actividades presentes en el libro Matemática para pensar 5 MINEDU
Fuente: Matemática 5to de secundaria, MINEDU (2011, p. 221)

Como se puede observar en la figura 25, la actividad 2 pone énfasis en buscar la relación de la ecuación de la parábola con su gráfica correspondiente, para realizar ello, los estudiantes deberán considerar la ecuación general de la parábola para realizar la ubicación de sus elementos. Aquí el predomino es analítico usando las representaciones algébricas.

Observamos así mismo que tales actividades no generan tratamiento pero si propicia un cambio de registro con respecto a la representación canónica y la representación gráfica de manera mecánica.

3 **Determina** la ecuación de cada parábola que tiene vértice en el origen y que satisface la condición dada.

a) F(3; 0) $y^2 = 12x$ b) d: $x = -3/5$ $y^2 = 12x$

c) F(0; −2/3) $x^2 = -8y/3$ d) d: $y = 7/3$ $x^2 = -28y/3$

Figura 26. Actividades presentes en el libro Matemática para pensar 5 MINEDU
Fuente: Matemática 5to de secundaria, MINEDU (2011, p. 221)

Como se puede observar en la figura 26, la actividad 3 se avoca a encontrar la ecuación de la parábola a partir del conocimiento de sus elementos como las coordenadas del foco y el vértice en el origen. Para ello los estudiantes deberán realizar simples cálculos algebraicos. Aquí el predomino es analítico usando las representaciones algébricas.

En la sección denominada "Actividades" presenta 9 ejercicios de la parábola referidas a aspectos mecánicos como de determinar la ecuación de la parábola a partir de sus elementos y viceversa, más no se da énfasis en reconocer las propiedades de la parábola, debido a que ya la dan por entendidas al momento de dar el concepto. No toman en cuenta el concepto de la parábola para la solución de problemas contextualizados o de situaciones reales. Se observa que las actividades que se plantean sobre la parábola buscan una reproducción o memorización de los ejemplos que se presentan en un inicio ya que los ejercicios propuestos son muy parecidos a ellos.

A continuación analizaremos las actividades presentes en cada uno de los libros de textos, mencionados anteriormente.

Relaciona correctamente ambas columnas.

a. Las coordenadas del vértice de la parábola $x^2 = 15y$. • (0; 3)

b. Las coordenadas del foco de la parábola $y^2 = 4x$. • (2; −3)

c. Las coordenadas del foco de la parábola $x^2 = 12y$. • $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$

d. Las coordenadas del foco de la parábola $x^2 = -2y$. • (0; 0)

e. Las coordenadas del vértice de la parábola $(x-2)^2 = 10(y+3)$. • (1; 0)

Figura 27. Actividades presentes en el libro de 5to de Secundaria
Fuente: Matemática 5to de secundaria, Editorial Norma (2011, p. 404)

Como se puede observar en la figura 27, la actividad se avoca a relacionar la ecuación de la parábola con sus elementos, ello por medio de un cálculo algebraico para ubicar las coordenadas de los elementos de la parábola ya sea vértice o para el foco. Aquí el predomino es analítico usando las representaciones algébricas.

Completa la tabla.

Vértice	p	Eje paralelo al eje focal	Foco	Ecuación de la directriz	Ecuación ordinaria de la parábola	Ecuación general de la parábola
(−2; 2)	3	Y	(−2; 5)	$y + 1 = 0$	$(x + 2)^2 = 12(y - 2)$	$x^2 + 4x - 12y + 28 = 0$
(−3; −4)	−2	Y	(−3; −6)	$y + 2 = 0$	$(x + 3)^2 = -8(y + 4)$	$x^2 + 6x + 8y + 41 = 0$
(−4; −4)	3	Y	(−4; −1)	$y + 7 = 0$	$(x + 4)^2 = 12(y + 4)$	$x^2 + 8x - 12y - 32 = 0$
(0; −1)	−3	X	(−3; −1)	$x - 3 = 0$	$-12x = (y + 1)^2$	$y^2 + 12x + 2y + 1 = 0$

Figura 28. Actividades presentes en el libro de 5to de secundaria
Fuente: Matemática 5to de secundaria, Editorial Norma (2011, p. 404)

Como se puede observar en la figura 28, la actividad pone énfasis en el desarrollo de las operaciones algebraicas a partir del conocimiento de las coordenadas del vértice y el valor de "p" para encontrar las coordenadas del foco, la ecuación ordinaria y la ecuación general.

Como se evidencia, en esta tarea también se observa que el predomino es analítico usando las representaciones algébricas.

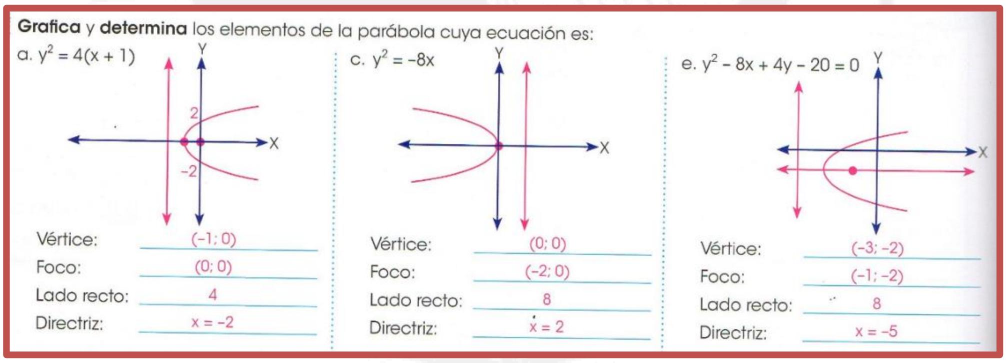


Figura 29. Tipo de tareas presentes en el libro de 5to de secundaria.
Fuente: Matemática 5to de secundaria, Editorial Norma (2011, p. 404)

Como se puede observar en la figura 29, la actividad pone énfasis en el reconocimiento de los elementos de la parábola a partir de la ecuación de la misma, luego el estudiante deberá graficar la parábola conociendo sus elementos. También, se observa el predomino de lo analítico usando las representaciones algébricas.

En la sección denominada "Actividades" presenta 9 ejercicios de la parábola referidas a aspectos mecánicos como de determinar la ecuación de la parábola a partir de sus elementos y viceversa, más no se da énfasis en reconocer las propiedades de la parábola, debido a que ya la dan por entendidas al momento de dar el concepto. No toman en cuenta el concepto de la parábola para la solución de problemas contextualizados o de situaciones reales. Se observa que las actividades que se plantean sobre la parábola son netamente algebraicas pues buscan los simples cálculos algebraicos por las observaciones que realizamos a los ejercicios propuestos. Así mismo, consideramos que la forma de tratamiento que desarrollan los libros es tradicional, formalista; la parábola es reducida a una simple manipulación de símbolos algebraicos. Estos tipos de actividades no propician las diferentes conversiones y se avocan más a los tratamientos algebraicos.

Por otro lado, las ideas erróneas se pueden considerar parte del proceso de construcción del conocimiento matemático y pueden ser el insumo que provoque un cambio en el aprendizaje del estudiante.

CAPÍTULO IV – EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo caracterizamos a los sujetos de la investigación, la descripción de las actividades propuestas, con sus respectivos análisis *a priori* y *a posteriori* basados en los aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y en aspectos de la Ingeniería Didáctica adoptados en la presente tesis.

4.1 SUJETOS DE INVESTIGACIÓN

En la investigación participaron quince profesores de la Carrera Pública Magisterial de la Modalidad de Educación Básica Regular, en formación continua (estudiantes de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP) y en el marco del curso de Geometría plana y del Espacio (en hora de clase) de dicha maestría.

Para efectos de la investigación, se realizó la selección de tres profesores del total de quince participantes, quienes mostraron durante los encuentros dedicación y sobre todo estuvieron presentes en los tres encuentros. Llamaremos a los tres profesores participantes en la investigación de: Armando, Alberto y Carlos para salvaguardar su identidad.

El experimento se llevó a cabo en un laboratorio de informática de la universidad, en un laboratorio de informática en el que se emplean los siguientes recursos: una pizarra acrílica y proyector, una computadora en aula disponible para la profesora formadora de del curso de geometría euclidiana plana y del espacio, computadoras en aula de uso disponibles para cada uno de los profesores participantes, el software Geogebra versión 4.2.57.0 de libre distribución.

Para la recolección de datos, utilizamos los siguientes instrumentos: fichas de trabajo de las actividades propuestas y grabación de los archivos que contienen tolas construcciones elaborados por los profesores participantes.

4.2 DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Elaboramos una secuencia compuesta por cuatro actividades específicas sobre la parábola como lugar geométrico. La tabla 5 muestra las actividades propuestas que serán realizadas en dos encuentros en la sala de informática.

Tabla 5. Descripción de las actividades aplicadas en los dos encuentros planificados

Encuentro	Actividad	Contenido	Descripción
1	**Actividad 1:** Parábola como lugar geométrico	Parábola en base a la propiedad foco - directriz	En la primera actividad movilizaron los conocimientos previos como la distancia de un punto a una recta, mediatriz de un segmento y la propiedad foco directriz por medio de construcciones geométricas fundamentales para el desarrollo de la siguiente actividad. A su vez se plantean preguntas que permiten visualizar y conjeturar sobre el comportamiento de los elementos de la parábola y propiedades con la utilización del Geogebra.
	Actividad 2: Parábola como lugar geométrico	Parábola como lugar geométrico en base a la propiedad de la circunferencia	En la segunda actividad movilizaron los conocimientos previos como la circunferencia, recta tangente y la propiedad de la circunferencia por medio de construcciones geométricas fundamentales para el desarrollo de la siguiente actividad. A su vez se plantean preguntas que permiten visualizar y conjeturar sobre el comportamiento de los elementos de la parábola y propiedades con la utilización del Geogebra.
2	**Actividad 3:** Parábola en dominio de la geometría analítica	Parábola como lugar geométrico en el plano cartesiano	En la tercera actividad movilizaron las propiedades de la parábola y con puntos y elementos específicos para realizar la construcción geométrica. A su vez se plantean preguntas que permiten realizar tratamientos y conversiones entre registros gráfico y algebraico.
	Actividad 4: Aplicación de la parábola	Parábola como lugar geométrico en el plano cartesiano	En la cuarta actividad modelizaron el problema planteado y movilizaron las propiedades de la parábola para realizar la construcción geométrica. A su vez se plantean preguntas que permiten realizar tratamientos y conversiones entre registros.

Diseñamos cuatro actividades relacionadas con la parábola como lugar geométrico. En cada una de ellas, se plantean construcciones con el uso del software Geogebra.

En el primer encuentro se desarrollarán las actividades 1 y 2, en el segundo encuentro se realizará la actividad 3 y 4 (las actividades se encuentran en el Anexo 1).

Las actividades fueron planificadas para ser desarrolladas de manera individual en una computadora en una sala de informática, además los participantes deben anotar sus observaciones y conclusiones en la ficha de actividades.

Durante la aplicación de la secuencia de actividades participan la investigadora (observadora) y la profesora formadora y caso sea necesario, pueden hacer breves intervenciones cuando los profesores participantes lo soliciten o para que no se bloquee el desarrollo de la actividad.

Además, los participantes deben guardar las construcciones realizadas con Geogebra en las carpetas creadas por la profesora formadora a cargo del curso al finalizar las actividades.

4.3 LAS ACTIVIDADES

Cabe resaltar que las actividades 1 y 2 son actividades adaptadas de la investigación de Moncayo y Pantoja (2012), mientras que la actividad 3, es una actividad adaptada de la investigación de Lopes (2014) y la actividad 4, es la adaptación de un archivo parábola y su ecuación cartesiana.

De acuerdo con los aspectos del método de Ingeniería Didáctica que utilizamos en la tesis, presentamos y describimos cada una de las actividades con sus respectivos análisis a *priori* y en los análisis a *posteriori* presentamos primero el análisis del grupo y después el análisis a *posteriori* de manera detallada de los tres profesores en formación continua que seleccionamos: Armando, Alberto y Carlos.

ACTIVIDAD 1: PARÁBOLA EN BASE A LA PROPIEDAD FOCO - DIRECTRIZ

El objetivo de esta actividad es propiciar que los profesores movilicen la noción de la parábola como lugar geométrico mediante la utilización de los conceptos mediatriz y equidistancia haciendo uso del Geogebra. También la actividad propicia que los profesores realicen conversiones y tratamientos en los registros de representación semiótica que utilizan al responder a cada una de las preguntas. En el (Anexo 1) presentamos la actividad 1 que consta de dos partes:

Parte I - La Construcción: La primera parte corresponde a la construcción geométrica de la parábola como lugar geométrico haciendo uso de la propiedad del foco directriz por medio de 6 pasos.

Parte II – Las Preguntas: La segunda parte consta de cuatro ítems que corresponde a preguntas que propician la movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *a priori* de la Actividad 1

Deseamos que los profesores participantes movilicen saberes previos como la mediatriz de un segmento, definida en términos de lugar geométrico como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento, así como la distancia de un punto a la recta, entendida como longitud.

A continuación describimos el análisis *a priori* de las dos partes:

Parte I: Construcción de la parábola en base a la propiedad Foco Directriz con Geogebra

***Análisis a priori* de la construcción:**

En esta primera parte de la actividad se requiere que los profesores utilicen la apariencia Geometría del software Geogebra ya que en esta actividad no se requiere de la parte algébrica ni de los ejes coordenados pues solo nos interesa las construcciones de los elementos geométricos de la parábola y aprovechar la definición puramente geométrica con lo cual favorecerá es estudio de las propiedades intrínsecas.

En esta parte, pensamos *a priori* que los quince profesores participantes lograrán realizar la construcción en Geogebra ya que tienen las herramientas y suponemos que han seguido la serie de pasos que se les ha planteado.

Esperamos *a priori* que los profesores tracen una recta cualquiera d, marquen un punto F y un punto Q en cualquier lugar de la recta d, tracen un segmento del punto F al punto Q y tracen la mediatriz del segmento $\overline{QF}$, luego, tracen una recta perpendicular interceptando al punto Q en la recta d, marcar el punto P de intercepción entre la recta mediatriz y la recta perpendicular.

El punto P, que pertenece a la parábola deberá ser utilizado por los profesores con la herramienta lugar geométrico del software Geogebra para esbozar la parábola. Finalmente, los profesores participantes deben explicar por medio de un registro en lengua natural la construcción considerando las etapas, las relaciones, propiedades pertenecientes a la parábola.

Así mismo, esperamos que los profesores muestren que P es un punto equidistante de la recta d y del punto F, concluirán que P está en la mediatriz del segmento QF, porque asocia el concepto de equidistancia con el de la mediatriz.

Deseamos, así mismo que definan la parábola como: el conjunto de puntos equidistantes de una recta d llamada directriz y del punto fijo F, exterior a ella, llamada foco.

Esperamos *a priori* que los profesores participantes movilicen las nociones de la parábola como lugar geométrico coordinen el registro de lengua natural con el registro figural cuando realicen la construcción con el uso del Geogebra. A continuación, mostramos en la figura 30 los seis pasos de la construcción de la figura como parte de la actividad 1.

Construya con Geogebra sin utilizar ninguna herramienta "Cónica – Parábola":

Enunciado:

Encuentre el **punto P** que equidista tanto de la ***recta d*** como del punto exterior ***F.***

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya una ***recta d*** como objeto fijo.
2. Coloque un ***punto F*** que no pertenezca a la ***recta d*** como objeto fijo coloque un ***punto Q*** sobre la recta d con la opción ***punto en objeto.***
3. Trace una ***recta perpendicular n*** a la ***recta d*** y que pase por el ***punto Q.***
4. Trace el ***segmento QF.***
5. Construya la ***mediatriz m*** del ***segmento QF.***
6. Crea el ***punto de intersección P*** entre la recta ***perpendicular n*** con la ***mediatriz m.***

Nota: En esta actividad no se requiere de ejes ni de cuadrículas.

Objeto fijo: Clic derecho – propiedades – check en cuadrito de objeto fijo.

Figura 30. Actividad 1

Mostramos a continuación la figura 31 la representación gráfica de la Actividad 1

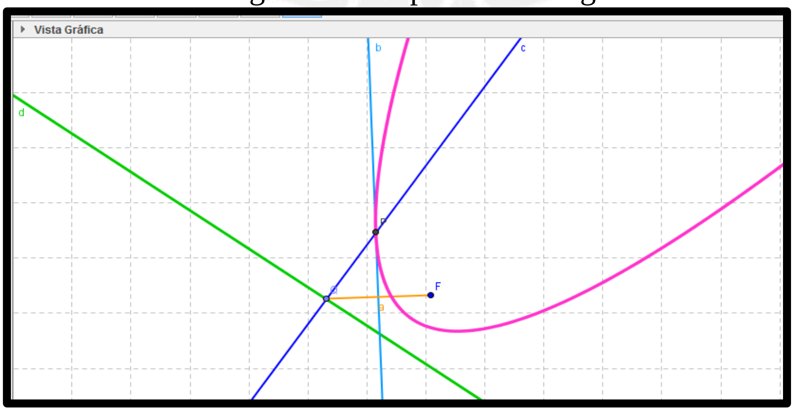


Figura 31. Representación figural – Actividad 1

La representación geométrica del Foco directriz de la Parábola es la construcción que pensamos que los profesores participantes realizarán utilizando estas herramientas como muestra la figura y consigan hacer la construcción en esta parte de la actividad ya que suponemos que han seguido una secuencia de pasos que se les ha planteado. En esta parte de la actividad *a priori* esperamos que los participantes realicen la construcción geométrica en el registro figural.

Análisis a *posteriori* de la construcción – Grupal:

En la primera actividad, como lo habíamos previsto en el *análisis a priori*, se observó que los quince profesores participantes movilizaron los conocimientos previos acerca de la parábola como lugar geométrico haciendo uso del software Geogebra, en el entorno utilizaron la apariencia de geometría pues en esta actividad se resaltó las construcciones de los elementos geométricos de la parábola. Observamos que todos los profesores siguieron los pasos que se habían planteado a través del registro de lengua natural coordinando con el registro figural por medio de las construcciones realizadas en el Geogebra donde fueron movilizados elementos de la parábola, de esta manera, todos los profesores participantes llegaron a construir exitosamente la parábola, a través de la propiedad foco directriz.

***Análisis a posteriori* de la construcción del profesor Armando:**

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Armando con el uso del Geogebra (Fig. 32), realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* por medio de los conceptos de mediatriz y distancia de un punto a una recta.

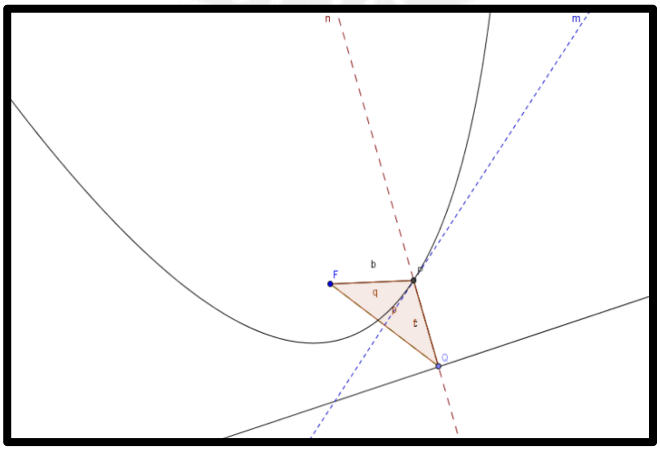


Figura 32. Actividad 1 – Profesor Armando

Observamos que el participante utiliza el registro figural de la construcción geométrica de la parábola por medio de los conceptos de mediatriz y distancia de un punto a una recta. (Ver figura 32).

Análisis a *posteriori* de la construcción del profesor Alberto:

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Alberto con el uso del Geogebra, observamos que en la figura 33, se realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de los conceptos de mediatriz y distancia de un punto a una recta.

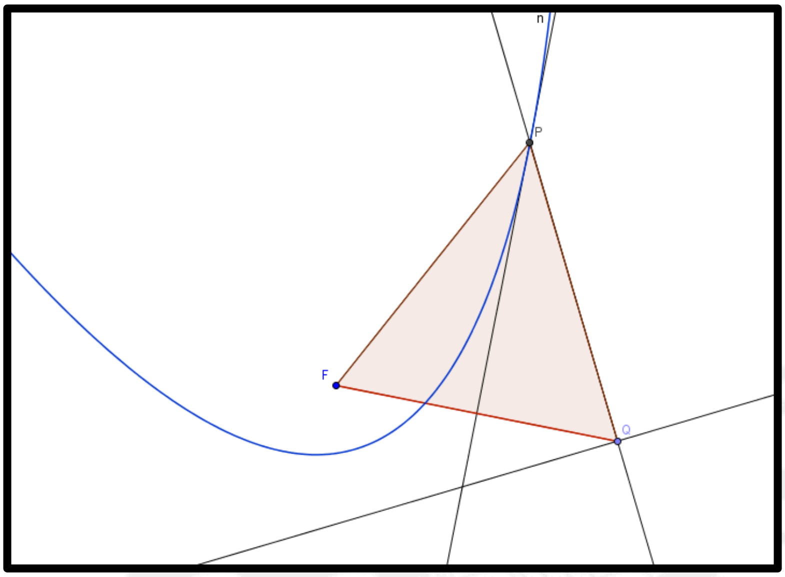


Figura 33. Actividad 1 – Profesor Alberto

Observamos que el registro figural es desarrollado por medio de los conceptos de mediatriz y distancia de un punto a una recta. (Ver figura 33).

Análisis a *posteriori* de la construcción del profesor Carlos:

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Carlos con el uso del Geogebra, se observa en la Figura 34, realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de los conceptos de mediatriz, distancia de un punto a una recta además de utilizar la herramienta medidas para cerciorarse de que se trate de la misma longitud.

A continuación mostramos la construcción geométrica de la parábola en el registro figural realizada por el profesor Carlos.

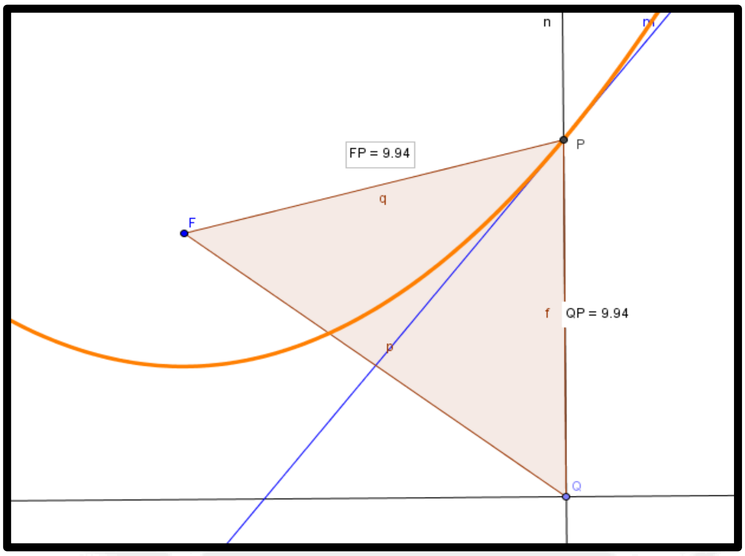


Figura 34. Actividad 1 – Profesor Carlos

Observamos la construcción geométrica de la parábola en el registro figural que moviliza las nociones de mediatriz y distancia de un punto a una recta. (Ver figura 34).

Parte II: Preguntas

En esta parte se plantean cuatro ítems A, B, C y D.

Ítem A)

Si P es un punto que equidista tanto de la ***recta d*** como del punto F. ¿Dicho punto P, pertenecerá en la mediatriz del segmento QF? Justifique su respuesta.

Figura 35. Ítem A – Pregunta de la Actividad 1

Análisis *a priori* del Ítem A:

Pensamos *a priori* que los profesores participantes realizarán acciones que les permitan obtener una estrategia válida para responder al ítem A como la de aplicar la herramienta “distancia longitud” para medir las respectivas distancias entre el *punto Q* sobre la *recta d* y entre el punto P y el punto F y poder así comprobar que conservan la misma distancia.

Luego para responder a la pregunta: *Dicho punto P, pertenecerá en la mediatriz del segmento* $\overline{QF}$*?* Esperamos que los profesores participantes regresen a la construcción de la figura del software Geogebra y utilicen el arrastre de uno de los puntos para comprobar que P es un punto equidistante de la *recta d* y del punto F y esperamos que concluyan que el punto P se encuentra en la mediatriz del segmento QF, porque asocia el concepto de equidistancia con el de la mediatriz. Si P es un punto de equidistancia entonces es uno de los puntos de la recta mediatriz. Pensamos que los participantes coordinaran el registro figural con el registro de lengua natural, movilizando las nociones de la parábola como lugar geométrico cuando interactúan con las propiedades geométricas foco directriz de la parábola al responder la pregunta del ítem A.

Análisis a *posteriori* del ítem A - Grupal:

En la primera situación, como era previsible a *priori* todos los profesores movilizaron los conocimientos previos acerca de la parábola como lugar geométrico, afirmando que el punto P pertenece a la mediatriz porque todos los puntos que pertenecen a la mediatriz son equidistantes de los puntos Q y F.

Cabe señalar, que el uso del Geogebra en la construcción favoreció la coordinación entre el registro figural y el de lengua natural y permitió que perciban la equidistancia del punto móvil con respecto a una recta y un punto fijo por lo que a través del registro de lengua natural, los participantes expresaron la condición de la parábola como lugar geométrico.

Análisis a *posteriori* del ítem A por el profesor Armando:

El profesor Armando, afirmó lo siguiente: la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de Q y F.

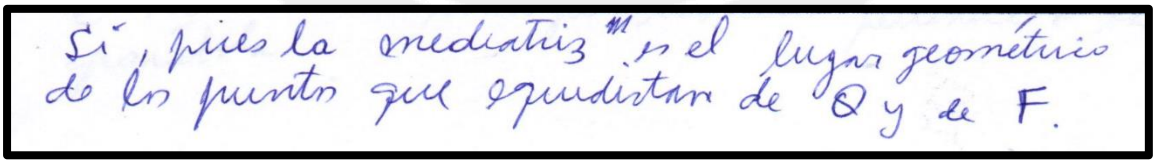

Sí, pues la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de Q y de F.

Figura 36. Ítem A – Actividad 1 – Profesor Armando

Luego de realizado la construcción, el profesor Armando movió el punto Q por medio del arrastre, observamos que el profesor Armando encontró la relación métrica que existe entre la distancia comprendida por un punto que pertenece a una parábola y la directriz, con la distancia entre el mismo punto y el foco.

Por otro lado, la coordinación entre el registro de lengua natural y el registro figural permitió que el profesor Armando realizó, dio cuenta de la equidistancia del punto móvil con respecto a una recta y un punto fijo por lo que a través del registro de lengua natural, el docente expresó la propiedad de la parábola como lugar geométrico.

Análisis a *posteriori* del ítem A por el profesor Alberto:

El profesor Alberto, afirmó lo siguiente: *Por el punto P equidista tanto de la recta d como del punto fijo F.* (ver figura 37).

La mediatriz de $\overline{FQ}$ se corta en el punto P de intersección con su perpendicular a uno de los lado del Triángulo FPQ.
recta n: $10.28x - -2.02y = 141.9$
recta d: $-3,7x + 12,59y = -70.08$
recta a: $-12.59x - 2.02y = 141.9$

Figura 37. Ítem A – Actividad 1 – Profesor Alberto

A continuación presentamos la justificación del profesor Alberto (registro de lengua natural) a través del texto en Geogebra:

JUSTIFICACIÓN
*Se traza la recta d luego se ubica el punto F fuera de la recta
*Se traza una recta perpendicular que pasa por el punto en objeto Q
*Se traza el segmento que une a QF.
*Se crea el punto de interssección entre la mediatriz de FQ el cual es el punto P
Se puede afirmar que por el punto P que es mediatriz del segmento FQ equidista tantoa al recta d como al punto fijo F
ya que el luigar geométrico pasa por ese punto y la parábola formada describe la distancia entre los puntos del lugar geométrico

Figura 38. Registro de lengua natural– ítem A – Actividad 1 – Profesor Alberto

Luego de haber realizado la construcción, el profesor Alberto, mencionó que el lugar geométrico que pasa por el punto P y la parábola formada describe la distancia entre los puntos del lugar geométrico. Así mismo, el profesor Alberto, realizó la coordinación entre el registro figural a través de la construcción en Geogebra y el registro de lengua natural a través de sus respuestas.

***Análisis a posteriori* del ítem A por el profesor Carlos:**

El profesor Carlos, afirmó lo siguiente: *Los puntos P se obtienen como la intersección de la mediatriz m y la perpendicular n, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos, Q y F.*

A continuación presentamos en la figura 34, que muestra el registro de lengua natural que realizó el profesor Carlos:

el punto P se ha obtenido como la intersección de la mediatriz m y la perpendicular n entonces pertenece a ambas rectas, es decir si pertenece a la recta mediatriz de $\overline{QF}$, además por ser punto de la mediatriz P equidista de F y de Q.

Figura 39. Lengua natural – ítem A – Actividad 1 – Profesor Carlos

Presentamos también, el texto producido en el registro de lengua natural en el Geogebra por el profesor Carlos:

A) el punto P se ha obtenido como la interseccion
de la mediatriz m y la perpendicular n a la recta d,
entonces el punto pertenece a ambas rectas, es decir,
P si pertenece a la recta mediatriz de QF, ademas por ser
un punto de la mediatriz, equidista de F y de Q

Figura 40. Registro de lengua natural – ítem A – Actividad 1 – Profesor Carlos

Así mismo, el profesor Carlos realizó la coordinación entre el registro figural realizada en el Geogebra y el registro de lengua natural, afirmando que el punto P se ha obtenido como la intersección de la mediatriz m y la perpendicular n en la recta d, es decir, afirma que P si pertenece a la recta mediatriz de QF, además por ser un punto de la mediatriz, equidista de F y de Q.

Por otro lado, la coordinación entre el registro de lengua natural y el registro figural fueron de importancia pues permitió dar cuenta de la equidistancia del punto móvil con respecto a una recta y un punto fijo y a través del registro de lengua natural, el docente expresa la propiedad de la parábola como lugar geométrico. A continuación presentamos el **ítem B**:

¿Cómo podrías determinar otros puntos equidistantes de la ***recta d*** y del punto ***F***? Explique

Habilite **el rastro** en el punto P y mueva Q. Luego represente la trayectoria que genera P cuando se mueve Q, utilizando la ***herramienta lugar geométrico.***

Figura 41. Ítem B – Pregunta de la Actividad 1

Análisis *a priori* del Ítem B:

En este ítem, esperamos *a priori* que los profesores participantes realicen interacciones con el Geogebra para que puedan retomar la construcción ya elaborada y en ella tomaron otros puntos Q_1, Q_2 sobre la recta d y sigan con los pasos dados en la situación para obtener sus respectivos puntos $P_{1,}$ P_2.

La construcción promueve la noción de puntos equidistantes, mediatriz de un segmento. Así mismo, pensamos que los profesores participantes coordinarán el registro figural con el registro de lengua natural al movilizar las nociones de la parábola como lugar geométrico.

Con estas construcciones, los profesores participantes también podrían evidenciar que al escoger un punto $Q_{1,}$ en la recta d, este tendrá otra mediatriz y en consecuencia otro punto que se intercepta con la perpendicular n, el punto P_1 es punto de que equidista de la recta d y del punto F.

También pensamos a *priori* que los profesores participantes, podrían crear un punto P_1, fuera de la recta d y medir sus respectivas distancias con los puntos Q y F y por medio de la herramienta elige y lo moverán hasta sobreponerlo en la recta mediatriz.

Suponemos también que los profesores participantes resolverán la actividad tanto de la primera manera como la segunda y esperamos que concluyan que todos los puntos pertenecen a recta mediatriz y que se cumple con la propiedad de equidistancia de la recta d y el punto F.

Análisis a *posteriori* del Ítem B – Grupal:

En este ítem, los profesores participantes retomaron la interacción con el Geogebra en la construcción ya elaborada en el item A, realizando la coordinación del registro figural de la construcción inicial con el registro de lengua natural al responder a la pregunta del Ítem B.

De esta manera, observamos que cuatro del grupo de quince profesores realizaron la justificación de acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori*, porque los cuatro profesores tomaron un punto distinto al punto Q en la recta d y concluyeron que se forma la misma parábola y lograron coordinar el registro figural al retomar la construcción con el registro de lengua natural.

Así mismo, otros cuatro profesores logran responder a la pregunta del ítem B, previsto en el a *priori* y determinaron otros puntos equidistantes de la recta d y del punto f, cuando con la función arrastre del Geogebra movieron el punto Q sobre la recta d, generando el lugar geométrico de la parábola de todos los puntos y concluyeron que se trata de una parábola, logrando de esta manera, coordinar el registro figural al retomar la construcción de la parábola, movilizando algunos elementos de la misma parábola y el registro de lengua natural.

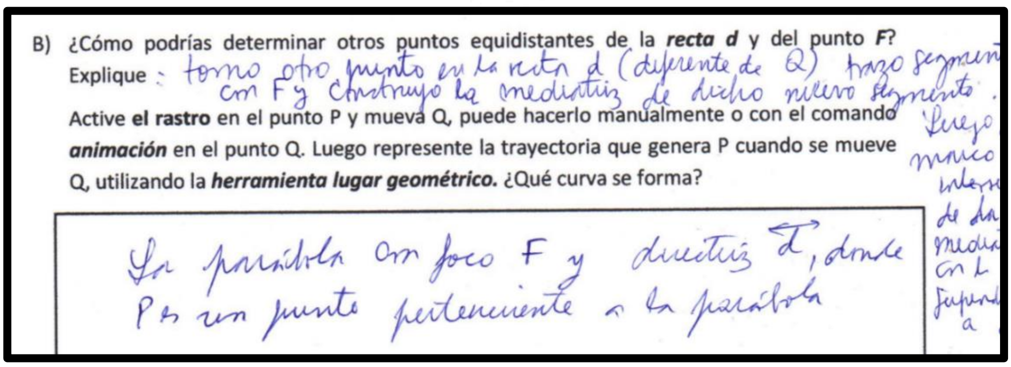
Posteriormente, observamos que siete profesores participantes no lograron justificar sus respuestas pero afirmaron que se trata de una parábola, siendo P un punto ubicado en la parábola, quien equidista a su vez del punto F y de la recta d, generada por la herramienta Lugar geométrico. Creemos que lograron coordinar el registro figural con el registro de lengua natural pero no realizaron el tratamiento respectivo en el registro figural para generar la justificación en el registro de lengua natural.

Después de lo presentado, observamos que los procedimientos de los profesores participantes fueron diferentes, sin embargo lograron articular el registro figural con el registro de lengua natural.

En cuanto al Geogebra como mediador, pensamos que el dinamismo del software contribuyó a la coordinación del registro figural con el registro de lengua natural. También el tratamiento en el registro de lengua natural favoreció la movilización de los elementos y propiedades de la parábola y permitió la reflexión de la complejidad del objeto matemático parábola en los profesores participantes.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Armando:

La figura 42 muestra continuación la respuesta del profesor Armando:


B) ¿Cómo podrías determinar otros puntos equidistantes de la **recta *d*** y del punto ***F***?
Explique : tomo otro punto en la recta d (diferente de Q) trazo segmento con F y construyo la mediatriz de dicho nuevo segmento. Luego marco intersección de la mediatriz con L perpendicular a
Active **el rastro** en el punto P y mueva Q, puede hacerlo manualmente o con el comando ***animación*** en el punto Q. Luego represente la trayectoria que genera P cuando se mueve Q, utilizando la ***herramienta lugar geométrico.*** ¿Qué curva se forma?

La parábola con foco F y directriz L, donde P es un punto perteneciente a la parábola

Figura 42. Registro de lengua natural – ítem B – Actividad 1 – Profesor Armando

En el caso del profesor Armando, observamos que responde de a acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori*, puesto que el profesor toma otro punto distinto de Q en la recta d para generar otros puntos equidistantes de la recta d y del punto F, para ello el profesor tomó otro punto en la recta y trazó un segmento con F, realizó la misma operación anterior a la construcción inicial, para finalmente concluir que se trata de la misma parábola, primero efectuó el tratamiento del registro figural para luego coordinar el registro figural con el registro de lengua natural al movilizar las propiedades de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Alberto:

A continuación, la figura 43, presenta la respuesta del profesor Alberto:

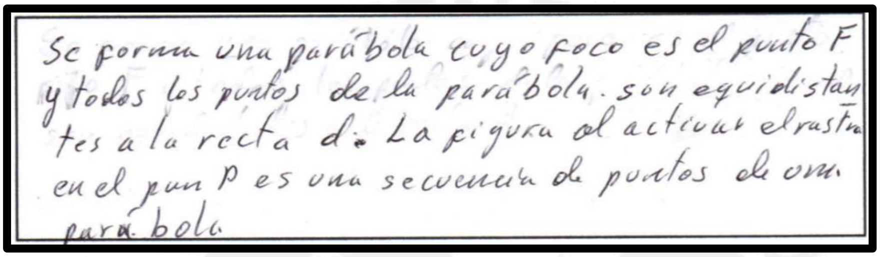

Se forma una parábola cuyo foco es el punto F
y todos los puntos de la parábola. son equidistan
tes a la recta d. La figura al activar el rastro
en el pun P es una secuencia de puntos de una
parábola

Figura 43. Registro de lengua natural – ítem B – Actividad 1 – Profesor Alberto

En el caso del profesor Alberto, notamos que respondió a la pregunta del ítem B, según lo previsto en el análisis *a priori*, pues luego de haber realizado la construcción, efectuó el tratamiento en el registro figural al retomar la construcción inicial y realizar el arrastre del punto Q para verificar que los puntos que se generan al movilizar el punto Q son equidistantes de la recta d y del punto F. Concluyó finalmente que se trata de la parábola, con los puntos generados por la herramienta activar rastro porque cumple la propiedad de equidistancia de la recta d y del punto F. Se evidenció tanto el tratamiento dentro del registro figural como la coordinación del registro figural con el registro de lengua natural.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Carlos:

En la figura 44 mostramos la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural:

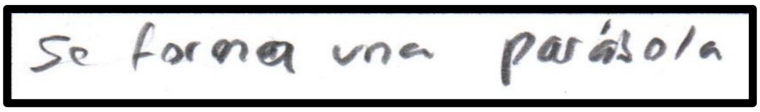

Se forma una parábola

Figura 44. Registro de lengua natural – ítem B – Actividad 1 – Profesor Carlos

En el caso del profesor Carlos, observamos que no responde de acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori*, puesto que el profesor no justifica su proceso pero expresa que la representación tiene la forma de una parábola. Observamos que en la construcción de la parábola, el profesor Carlos hizo uso de la función arrastre, la cual permitió generar todos los puntos equidistantes. Creemos que por observación de los puntos equidistantes (percepción) que se formaron con el rastro, el profesor haya podido concluir que se trata de la parábola sin necesidad de recurrir a otros elementos. Entendemos que el profesor Carlos, logró coordinar el registro figural con el registro de lengua natural pero no realizaron el tratamiento respectivo en el registro figural para generar la justificación en el registro de lengua natural.

Ítem C)

Dado el punto P, perteneciente a la parábola. Trace los segmentos PF y PQ que representan las distancias del punto P al foco F y a la ***recta d*** respectivamente. Construya el triángulo de vértices P, Q, F y desplace el punto Q. ¿Cómo clasificarías al triángulo ∆ PQF cuando

Figura 45. Ítem C – Pregunta de la Actividad 1

Análisis *a priori* del Ítem C:

En el ítem C, pensamos a *priori* que los profesores participantes realizaran los trazos de los segmentos y lograrán construir el triángulo y que además, con la herramienta distancia longitud para medir las longitudes, moverán el punto P para determinar de que se trate de un triángulo isósceles ya que sus lados PF = PQ y que al superponer F sobre la directriz, la mediatriz se hace paralela a la perpendicular. Los profesores participantes concluyen que se trata de un triángulo isósceles.

A continuación presentamos los análisis *a posteriori:*

Análisis a *posteriori* del Ítem C - Grupal

En este ítem, los profesores participantes retomaron la interacción con el ambiente dinámico de la construcción ya elaborada y realizaron la articulación del registro figural de la construcción inicial realizando algunas construcciones adicionales correspondientes a la propiedad de la equidistancia con el registro de lengua natural al responder a la pregunta del Ítem B.

De esta manera, observamos que doce profesores del grupo de quince realizaron la justificación de acuerdo a lo previsto al del análisis *a priori*, donde observamos que los doce profesores participantes realizaron las construcciones adicionales en el registro figural por medio de Geogebra y respondieron por medio del registro de lengua natural que el triángulo PQF será siempre isósceles porque sus lados $\overline{\mathbf{PF}} = \overline{\mathbf{PQ}}$ tienen la misma longitud, concluyendo que sus lados son congruentes, lograron coordinar el registro figural al retomar la construcción con el registro de lengua natural al responder a la pregunta. Podemos notar que para justificar la pregunta tuvieron que realizar el arrastre del punto P para para determinar de que se trate de un triángulo isósceles ya que sus lados $\overline{\mathbf{PF}} = \overline{\mathbf{PQ}}$

Así mismo, un profesor de los quince logró responder a la pregunta del ítem C, previsto en el a *priori*, donde el profesor participante, afirmó que se trata de un triángulo isósceles ya que el punto P está en la mediatriz de FQ y por la definición de la mediatriz, el triángulo es isósceles, aunque en algún punto de la parábola el triángulo PQF va a ser equilátero, para ello suponemos que han realizado el arrastre del punto P.

Finalmente, observamos que dos profesores participantes no lograron justificar sus respuestas pero afirman que el triángulo PQF es triángulo isósceles. Observamos que los dos profesores realizaron las construcciones adicionales, que lograron coordinar el registro figural con el registro de lengua natural pero no realizaron el tratamiento respectivo en el registro figural para generar la justificación en el registro de lengua natural.

Observamos que los procedimientos de los tres grupos de los profesores participantes fueron diferentes, sin embargo lograron coordinar el registro figural con el registro de lengua natural. El Geogebra como mediador contribuyó el tratamiento en el registro figural así como la coordinación del registro figural al movilizar propiedades y poder responder la pregunta del ítem C a través del registro de lengua natural o registro discursivo.

Análisis *posteriori* del Ítem C realizado por el profesor Armando

A continuación presentamos, en la figura 46, la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural:

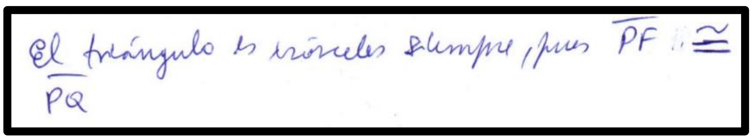

El triángulo es isósceles siempre, pues $\overline{PF} \cong \overline{PQ}$

Figura 46. Registro de lengua natural – ítem C – Actividad 1 – Profesor Armando

Luego de realizar haber realizado la construcción del triángulo, el profesor expresó en registro discursivo que se trata de un triángulo isósceles realizando una expresión de: $\overline{PF} = \overline{PQ}$

Lo cual significa que $\overline{PF}$, $\overline{PQ}$ tienen el mismo valor.

Para llegar a esta conclusión, el profesor participante tuvo que recurrir a la construcción por medio del uso del software Geogebra para realizar la construcción y realizar tratamientos dentro del registro figural para finalmente expresar a través del registro de lengua natural que se trataba de un triángulo isósceles.

Análisis *posteriori* del Ítem C realizado por el profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural (ver figura 47):

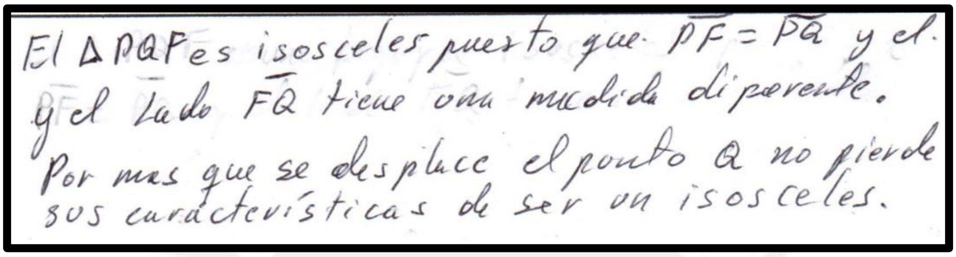

El ΔPQF es isosceles puesto que PF = PQ y el.
y el lado FQ tiene una medida diferente.
Por mas que se desplace el punto Q no pierde
sus caracteristicas de ser un isosceles.

Figura 47. Registro de lengua natural – ítem C - Actividad 1 – Profesor Alberto

En el caso del profesor Alberto, se observa que realizó las construcciones adicionales en el registro figural, luego afirma a través del registro de lengua natural que el triángulo PQF es isósceles, por más que el punto Q sea arrastrado, el triángulo isósceles no pierde sus característica.

Análisis *posteriori* del Ítem C realizado por el profesor Carlos:

A continuación, en la figura 48, presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural:

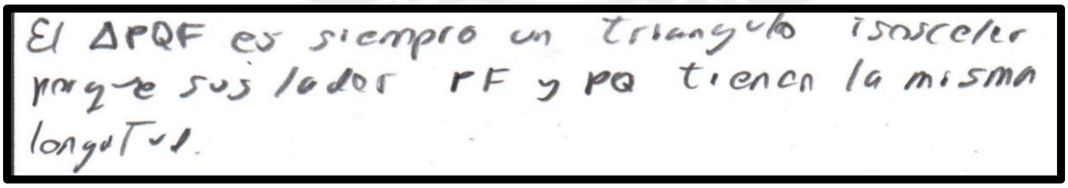

El ΔPQF es siempre un triangulo isosceles
porque sus lados PF y PQ tienen la misma
longitud.

Figura 48. Registro de lengua natural – ítem C – Actividad 1 – Profesor Carlos

En el caso del profesor Carlos, observamos que realizó las construcciones adicionales en el registro figural, luego afirma a través del registro de lengua natural que el triángulo PQF es isósceles, porque sus lados PF = PQ y tienen la misma longitud.

Para llegar a esta conclusión, el profesor Carlos tuvo que recurrir a la construcción por medio del uso del software Geogebra para realizar la construcción y realizar tratamientos dentro del registro figural para finalmente expresar a través del registro de lengua natural que se trataba de un triángulo isósceles.

A continuación presentamos el ítem D:

Existe alguna relación entre el lugar geométrico de la curva con la construcción del triángulo?

Figura 49. Ítem D – Pregunta de la Actividad 1

Ítem D)

Análisis a *priori*

En el último ítem, adivinamos a *priori* que los profesores participantes argumentarán que como se trata de un triángulo isósceles, las medidas de sus lados cambian simultáneamente cuando mueven el punto P pero mantienen las mismas medidas, ello hace posible la construcción de la parábola y corresponde a la definición de la parábola como lugar geométrico. Creemos que los profesores participantes coordinarán el registro figural con el registro de lengua natural al movilizar las nociones de la parábola cuando interactúan con las propiedades geométricas de la parábola por medio del Geogebra.

Análisis a *posteriori* del Ítem D - Grupal

En este ítem, los quince profesores participantes justificaron la relación que existe entre el triángulo isósceles y la propiedad de la parábola como lugar geométrico, retomaron la interacción con el Geogebra de la construcción ya elaborada, realizando la coordinación del registro figural con el registro de lengua natural.

De esta manera, observamos que cuatro profesores del grupo de quince realizaron la justificación de acuerdo a lo previsto al del análisis *a priori*, donde observamos que los cuatro profesores participantes expresaron a través del registro de lengua natural que existe la relación entre el lugar geométrico de la curva con el triángulo isósceles cuando se desplaza el punto Q, el punto P siempre está siempre en la curva y en el triángulo isósceles porque la distancia de P a F es la misma distancia de P a Q, logrando coordinar el registro figural al retomar la construcción con el registro de lengua natural al responder a la pregunta. Podemos observar que para justificar la respuesta tuvieron que realizar el arrastre del punto P para para determinar la relación que existe y que mantienen las mismas medidas.

Así mismo, tres profesores lograron responder a la pregunta del ítem D, previsto en el a *priori*, donde los profesores afirmaron que el punto P pertenece a la curva y al vértice P del triángulo isósceles FQP y que está siempre en la curva pero no justifican sus respuestas. Así mismo, cinco de los profesores del grupo de quince, contestaron que existía la relación y que el vértice P del triángulo isósceles FPQ genera el lugar geométrico denominado parábola cuando Q es arrastrado.

Ambos grupos realizaron tratamientos en el registro figural en la construcción en el Geogebra, además realizaron la coordinación entre el registro figural y el registro de lengua natural.

También, observamos que un profesor participante respondió fuera de la predicción realizada por el análisis a *priori*, pues indicó afirmativamente que si existe la relación y expresó por medio del registro de lengua natural que cuando el punto Q es perpendicular el foco F el triángulo FQP se convierte en un segmento sin medidas ni existe la representación figural del triángulo.

Observamos que los procedimientos de los tres primeros grupos de los profesores participantes fueron diferentes, sin embargo lograron coordinar el registro figural con el registro de lengua natural.

El Geogebra como mediador contribuyó el tratamiento en el registro figural así como la coordinación del registro figural al movilizar propiedades y poder responder la pregunta del ítem D a través del registro de lengua natural. Así mismo hubo un único caso que no respondió a la pregunta del ítem D.

Análisis *posteriori* del Ítem D realizado por el profesor Armando:

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando (ver figura 50) a través del registro de lengua natural:

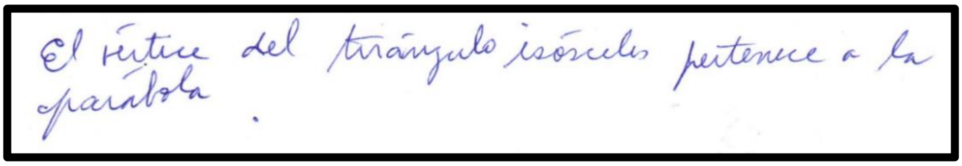

El vértice del triángulo isósceles pertenece a la parábola.

Figura 50. Registro de lengua natural – ítem D – Actividad 1 – Profesor Armando

Luego de haber realizado la construcción del triángulo, el profesor Armando expresó en registro de lengua natural que el vértice P del triángulo isósceles pertenece a la parábola estableciendo como relación pero no justificó su respuesta.

Para llegar a esta conclusión, el profesor participante tuvo que recurrir a la construcción de la representación figural de la parábola por medio del uso del software Geogebra realizando tratamientos en el mismo registro figural ejecutando la función arrastre para movilizar el punto P y evidenciar que las medidas de los lados del triángulo cambian simultáneamente en igual medida para luego expresar las conclusiones a través del registro de lengua natural.

Análisis *posteriori* del Ítem D realizado por el profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural:

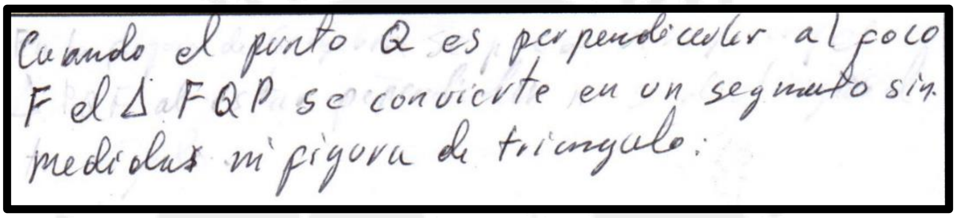

Cuando el punto Q es perpendicular al foco F el Δ FQP se convierte en un segmento sin medidas ni figura de triangulo:

Figura 51. Registro de lengua natural – ítem D – Actividad 1 – Profesor Armando

En el caso del profesor Alberto (ver figura 51) realizó la justificación fuera de lo previsto al del análisis *a priori*, observamos que el profesor Alberto expresa a través de registro de lengua natural que el punto P será perpendicular al foco F y que el triángulo FQP se convertirá en un segmento sin medidas y el triángulo se convertirá en segmento cuando se desplaza Q.

Para llegar a esta conclusión, el profesor Alberto tuvo que recurrir a la construcción de la representación figural de la parábola por medio del uso del software Geogebra realizando tratamientos en el mismo registro figural ejecutando la función arrastre para movilizar el del punto P y evidenciar que el triángulo se convierte en segmento cuando el punto Q es perpendicular al foco F.

Análisis *posteriori* del Ítem D realizado por el profesor Carlos:

A continuación presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural:

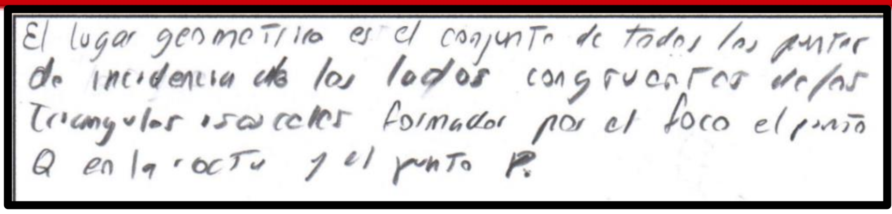

El lugar geometrico es el conjunto de todos los puntos de incidencia de los lados congruentes de los triangulos isosceles formados por el foco el punto Q en la recta y el punto P.

Figura 52. Registro de lengua natural – ítem D – Actividad 1 – Profesor Carlos

Luego de haber realizado la construcción del triángulo, el profesor Carlos expresó en registro de lengua natural que el vértice P pertenece a la parábola estableciendo como relación pero no justifica su respuesta.

Observamos que no realiza la justificación de acuerdo a lo previsto al del análisis *a priori,* observamos que el profesor expresa a través de registro de lengua natural que la relación que existe entre el lugar geométrico de la curva y la construcción del triángulo es que el lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos de incidencia de los lados congruentes del triángulos isósceles pero no menciona la propiedad de equidistancia como se suponía en el a priori. Podemos asumir que el profesor, Carlos se valió de la función arrastre para evidencia la relación existente de los puntos generados por la movilización del punto Q.

Para llegar a esta conclusión, el profesor Carlos tuvo que recurrir a la construcción de la representación figural de la parábola por medio del uso del software Geogebra realizando tratamientos en el mismo registro figural, ejecutando la función arrastre para movilizar el del punto P y evidenciar los puntos que conforman a la parábola como lugar geométrico.

ACTIVIDAD 2: PARÁBOLA CON BASE A LA PROPIEDAD DE LA CIRCUNFERENCIA

Proponemos una actividad que lleve a los profesores a movilizar la noción de la parábola mediante la utilización de los conceptos de circunferencia haciendo uso del Geogebra. A su vez, la secuencia de actividades propicia la conversión de registro gráfico al registro de lengua natural que realizan los profesores al responder a cada una de los ítems de la actividad dos.

En el Anexo B, presentamos la actividad 2 que consta de dos partes:

Parte I - La Construcción: La primera parte empieza con una actividad que requiere la construcción geométrica de la figura a través de 3 pasos, favoreciendo el uso de la propiedad de la circunferencia

Parte II – Las Preguntas: La segunda parte consta de tres ítems referentes a pregunta que requiere la interacción de los elementos de la parábola por medio del uso del Geogebra y que propician los análisis concernientes a las nociones de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *a priori* de la Actividad 2

Al igual que en la situación anterior, deseamos que los profesores participantes partan de una situación que les permita construir a la parábola, a partir de las propiedades inmersas en ella para luego abordar las preguntas que propician en los profesores participantes procesos de exploración con la representación gráfica de la construcción de la parábola a través del Geogebra que permitan responder a las preguntas planteadas.

Para ello, los profesores participantes deben explicar por medio de un registro en lengua natural la construcción considerando las etapas, las relaciones, propiedades pertenecientes a la parábola.

Pensamos a *priori* que los profesores participantes movilicen las nociones de la parábola como lugar geométrico coordinado el registro figural con el registro de lengua natural realizando conversiones congruentes entre los dos registros y los tratamientos con referencia al registro figural del entorno Geogebra cuando interactúan los profesores con la representación gráfica.

Parte I: Construcción de la Parábola con base a la propiedad de la Circunferencia

Análisis a *priori* de la construcción:

En esta primera parte de la actividad se requiere que los profesores utilicen la apariencia Geometría del Geogebra ya que en esta actividad no se requiere de la parte algébrica ni de los ejes coordenados pues solo nos interesa las construcciones de los elementos geométricos de la parábola para favorecer la propiedades de la misma.

En esta primera parte, brindamos a los profesores participantes tres pasos, para la construcción de la parábola en Geogebra, los cuales favorecerán la movilización de la propiedad de la circunferencia, definida como todos los puntos que están a igual distancia de otro punto llamado centro, la recta tangente si tiene en común uno y solo un punto de la circunferencia y la propiedad de la tangente expresada como toda perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia.

A continuación presentamos la figura 53, en la cual se muestra los tres pasos para la construcción de la parábola.

ACTIVIDAD 2

Construya con Geogebra sin utilizar ninguna herramienta "Cónica – Parábola":

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya una ***recta d.*** (Objeto fijo)
2. Coloque un ***punto A*** que no pertenezca a la ***recta d***. (Objeto fijo)
3. Coloque un ***punto B*** que pertenezca a la ***recta d***.
3. Grafique una ***circunferencia de centro C***, que pase por los ***punto*** A y que sea tangente a la ***recta d*** en el ***punto B***.

Figura 53. Actividad 2

Mostramos a continuación se muestra la figura 54, quien nos representa la posible construcción en Geogebra que los profesores realizarán con los tres pasos antes mencionados.

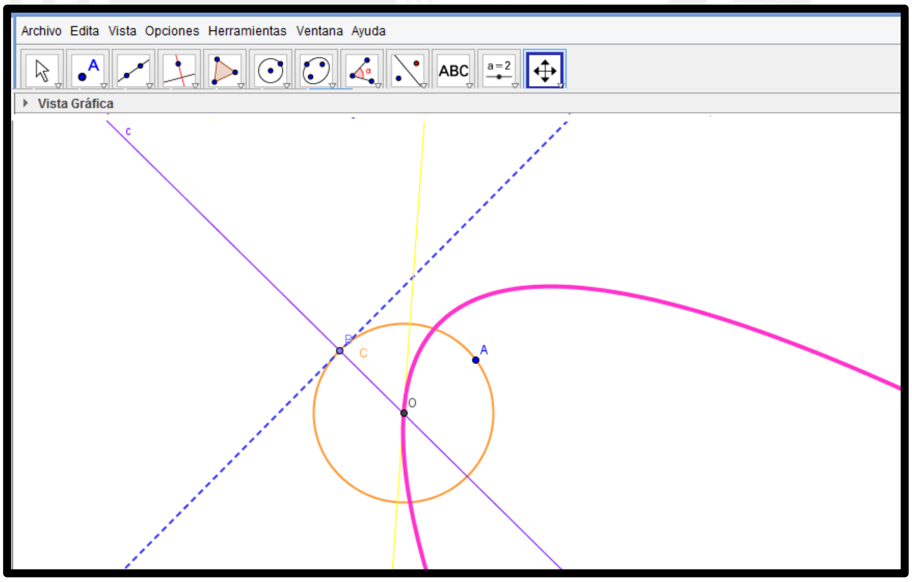


Figura 54. Registro Figural de la construcción de la Actividad 2

La representación geométrica de la propiedad de la circunferencia de la Parábola es la construcción que pensamos a priori que los profesores participantes realizarán utilizando el registro figural así como las herramientas como muestra la figura y consigan hacer la construcción en esta parte de la actividad ya que suponemos que han seguido una secuencia de pasos que se les ha planteado.

Análisis a *posteriori* de la Construcción de la Actividad 2 -Grupal

En la segunda situación, como lo habíamos previsto en el análisis *a priori*, se observó todo el grupo de los 15 profesores participantes movilizaron los conocimientos previos acerca de la parábola como lugar geométrico haciendo uso del software Geogebra y en la apariencia de geometría pues en esta actividad favoreció las construcciones de los elementos geométricos de la parábola a través de la propiedad de la circunferencia. Observamos que todos los profesores siguieron los pasos que se habían planteado a través del registro de lengua natural para luego coordinar con el registro figural por medio de las construcciones realizadas en el Geogebra donde fueron movilizados elementos de la parábola. Es así como llegaron todos los profesores participantes a construir exitosamente la parábola a través de la propiedad de la circunferencia.

***Análisis a posteriori* de la construcción del profesor Armando:**

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Armando el uso del Geogebra, se observa en la Figura 55, realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de la propiedad de la circunferencia.

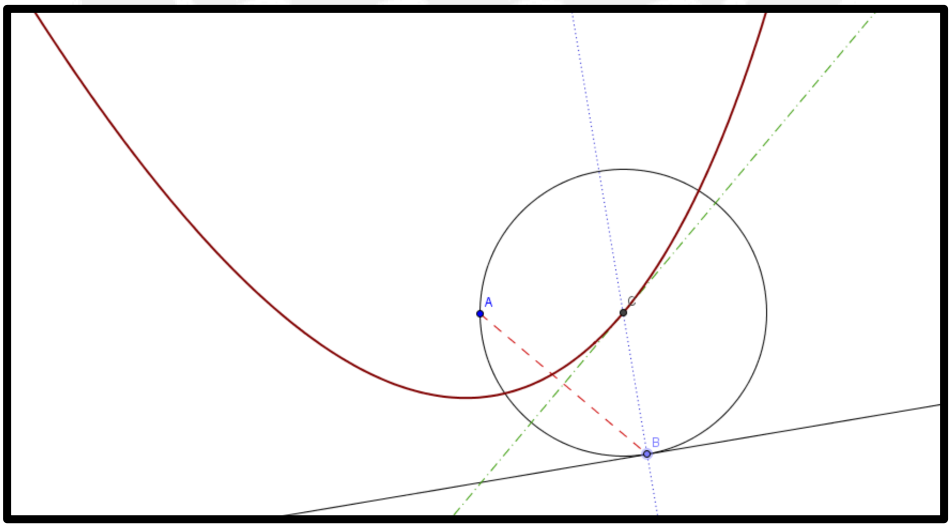


Figura 55. Representación figural – Actividad 2 – Profesor Armando

Observamos el registro figural de la construcción geométrica de la parábola a través de la propiedad de la circunferencia.

Análisis a *posteriori* de la construcción del profesor Alberto:

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Beto con el uso del Geogebra, se observa en la Figura 56, realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de la propiedad de la circunferencia.

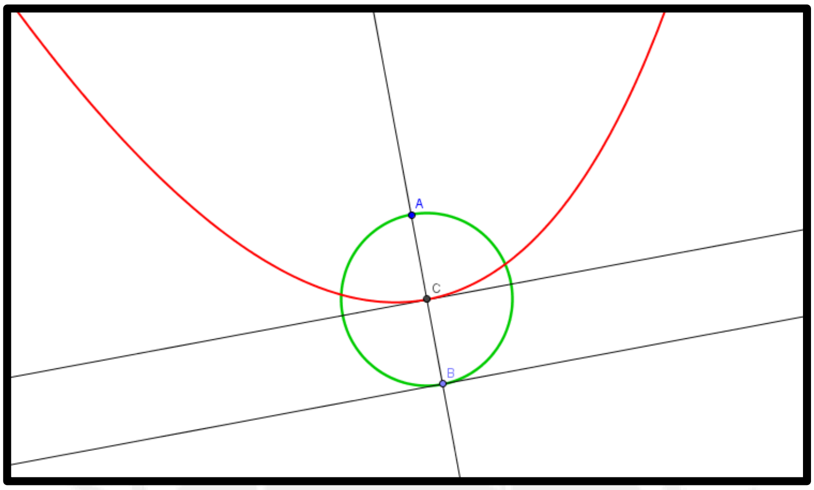


Figura 56. Representación figural – Actividad 2 – Profesor Alberto

Observamos el registro figural de la construcción geométrica de la parábola a través de la propiedad de la circunferencia.

***Análisis a posteriori* de la construcción del profesor Carlos:**

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Carlos con el uso del Geogebra, se observa en la figura 57, realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de la propiedad de la circunferencia.

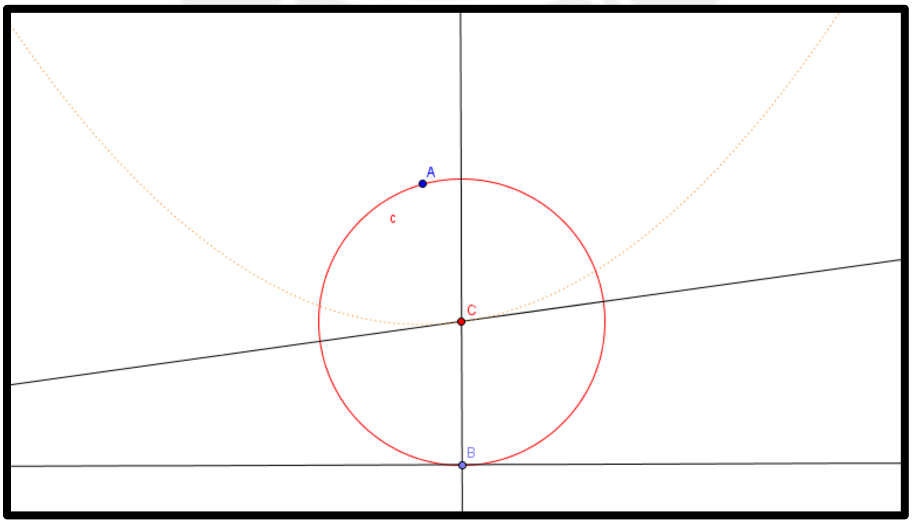


Figura 57. Representación figural – Actividad 2 – Profesor Carlos

Observamos el registro figural de la construcción geométrica de la parábola a través de la propiedad de la circunferencia. (Ver figura 57).

Parte II: Preguntas

En esta parte se plantean tres ítems A, B y C.

Describa cómo construyó la ***circunferencia de centro en C*** indicando las propiedades geométricas que fueron movilizadas

Figura 58. Ítem A – Pregunta de la Actividad 2

Ítem A)

Análisis *a priori*

En esta parte, pensamos a *priori* que los profesores participantes deberían empezar por establecer la ubicación del centro C y para ello tendrían que trazar una recta perpendicular n a la recta d que pasa por B y conjeturar que al ser n recta perpendicular a la recta d, ésta debe contener el radio y en su defecto al centro C de la circunferencia.

Suponemos a *priori* que los profesores participantes podrían encontrar el punto exacto donde se encuentra situado el centro. Para ello, tendrían que recurrir a la herramienta mediatriz de los puntos A y B, luego señalarán el punto de intersección entre la recta perpendicular y la recta mediatriz; tal punto será el centro de la circunferencia y deberá nombrarlo C. Deseamos que los profesores participantes movilicen las nociones de la parábola como lugar geométrico coordinado el registro figural con el registro de lengua natural realizando conversiones entre ambos registros y los tratamientos pertinentes en el mismo registro figural cuando interactúan con Geogebra.

Análisis a *posteriori* del ítem A de la Actividad 2 -Grupal

En este ítem, los profesores participantes construyeron la parábola como lugar geométrico con la propiedad de la circunferencia, realizaron la coordinación entre el registro figural con el registro de lengua natural al responder la pregunta del Ítem A.

De esta manera, observamos que la totalidad de los profesores realizaron la construcción de la parábola con la propiedad de la circunferencia a través del registro figural y además los profesores expresaron los pasos para la construcción de la parábola a través del registro de lengua natural.

Observamos que los procedimientos de todos los profesores en la explicación de los pasos tomados para la construcción de la parábola fueron previstos según los análisis a priori logrando coordinar el registro figural con el registro de lengua natural. El Geogebra como mediador contribuyó a la articulación del registro figural con el registro de lengua natural, así como el tratamiento en el mismo registro de lengua natural para favorecer la movilización de los elementos y la propiedad de la circunferencia.

Análisis *posteriori* del Ítem A de la Actividad 2 por el profesor Armando

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando (ver figura 59) a través del registro de lengua natural en la ficha de actividades.

1/ Perpendicular $\overleftrightarrow{a}$ a $\overleftrightarrow{d}$ por B.
2/ Segmento AB. Mediatriz $\overleftrightarrow{c}$ de AB
3/ C es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{c}$.
4/ Con centro en C y radio $\overline{CA}$ trazo la circunferencia tangente a $\overleftrightarrow{d}$ en B..

Figura 59. Registro de lengua natural – ítem A - Actividad 2 – Profesor Armando

A continuación, en la figura 60, presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural en el texto de Geogebra:

En el paso 1 empleé la propiedad que afirma que el radio de la circunferencia es perpendicular a la recta tangente.
En el 2, AB es una cuerda de la futura circunferencia, así que en su mediatriz se encuentra el centro C.
En el 3, establecí que el centro de la circunferencia se encuentra en la intersección de la perpendicular a d y la mediatriz c.

Figura 60. Texto en Geogebra – ítem A – Actividad 2 – Profesor Armando

En esta actividad 2, el profesor Armando, construyó la actividad considerando todas las condiciones pedidas. Luego de haber realizado la construcción de la parábola en base a la propiedad de la circunferencia con el uso del software Geogebra por medio del registro figural, el profesor Armando expresó por medio del registro de lengua natural todos los pasos realizados para la construcción de la parábola en base a la propiedad de la circunferencia utilizando diversas herramientas que el software ofrece.

Tal como se había mencionado en el análisis a *priori*, el profesor Armando, empezó a movilizar las nociones de la parábola, lo cual se evidencia cuando el profesor realizó el trazo de una recta perpendicular a d pasando por B, luego hizo uso de la herramienta segmento para unir los puntos A y B, luego utilizó la herramienta mediatriz c en el segmento AB para ubicar el punto de intersección C entre la recta a y la recta c, finalmente construyó la circunferencia utilizando la herramienta circunferencia del Geogebra con centro en C y tangente a la recta d pasando por el punto B y con radio $\overline{CA}$.

Por otro lado, el profesor Amando, realizó la coordinación entre el registro de lengua de las condiciones pedidas con el registro figural, realizó los tratamientos pertinentes en el mismo registro figural cuando interactúan con Geogebra, lo cual permitió a su vez dar cuenta de la movilización de algunos elementos geométricos para la construcción de la parábola y realizar la conversión del registro figural al del registro de lengua natural a través de sus respuestas.

Análisis *posteriori* del Ítem A de la Actividad 2 por el profesor Alberto

En la figura 61, a continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural en la ficha de actividades:

Se ubica un punto A fuera de la recta d y luego se ubica el punto B en la recta d. Se utiliza punto medio de los puntos A y B. La intersección de la mediatriz y la perpendicular es el punto C que viene a ser el centro de la circunferencia que a su vez pasa por el punto B (tangente a la recta d).

Figura 61. Registro de lengua natural – ítem A – Actividad 2 – Profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural escrita en el texto de Geogebra (ver figura 62):

JUSTIFICACIÓN
*Se traza la recta d y se grafica el punto A fuera de la recta fija d
*Se coloca el punto B en la recta d
*Se traza la recta perpendicular a d que pasa por el punto B
*Se establece la mediatriz de los puntos A y B.
*La intersección de ls mediatriz y la perpendicular es el punto C
*El punto C viene a ser el centro de la circunferencia , que es a la vez tangente a la recta d
*Al determinar el lugar geometrico con respecto a C se obtiene una parábola, la cual indica la trayectoria de C
*Esto a su vez es equidistantes a los punto a y B

Figura 62. Texto en Geogebra – ítem A – Actividad 2 – Profesor Alberto

En el caso del profesor Alberto, construyó la actividad considerando todas las condiciones pedidas y de acuerdo a lo establecido en el análisis a priori. Luego de haber realizado la construcción de la parábola en base a la propiedad de la circunferencia con el uso del software Geogebra por medio del registro figural, el profesor Alberto, expresa por medio del registro de lengua natural todos los pasos realizados para la construcción de la parábola en base a la propiedad de la circunferencia utilizando diversas herramientas.

En esta parte, tal como lo habíamos previsto en el análisis *a priori*, el profesor Alberto, establece la ubicación del centro C, luego traza una recta perpendicular n en la recta d que pasa por B, establece la mediatriz de los puntos A y B, ubica el punto C a través de la intersección de la mediatriz y la perpendicular, donde C es el centro de la circunferencia.

Por otro lado, la conexión realizada entre el registro de lengua natural de las condiciones pedidas fueron articuladas en el registro figural, realizando los tratamientos pertinentes en el mismo registro figural cuando interactúan con Geogebra, lo cual permitió a su vez dar cuenta de la movilización de algunos elementos geométricos para la construcción de la parábola con la propiedad de la circunferencia y realizar la conversión del registro figural al del registro de lengua natural a través de sus respuestas.

Análisis a *posteriori* del Ítem A de la Actividad 2 por el profesor Carlos

A continuación presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural:

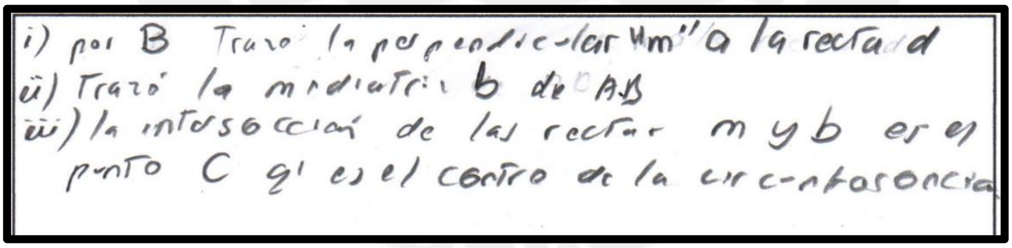

i) por B Trazó la perpendicular "m" a la recta d
ii) Trazó la mediatriz b de AB
iii) la intersección de las rectas m y b es el punto C q' es el centro de la circunferencia

Figura 63. Registro de lengua natural – ítem A – Actividad 2 – Profesor Carlos

En el caso del profesor Carlos (ver figura 63) construyó la actividad considerando todas las condiciones pedidas y de acuerdo a lo establecido en el análisis a *priori*. Luego de haber realizado la construcción de la parábola en base a la propiedad de la circunferencia con el uso del software Geogebra por medio del registro figural, el profesor Carlos, expresó por medio del registro de lengua natural todos los pasos realizados para la construcción de la parábola en base a la propiedad de la circunferencia utilizando diversas herramientas.

En esta parte, tal como lo habíamos previsto en el *a priori*, el profesor Carlos, por B trazó una perpendicular m a la recta d, luego traza la mediatriz del segmento AB y finalmente ubicó el punto C centro de la circunferencia, generado por la intersección de las rectas m y b.

Por otro lado, la conexión realizada entre el registro de lengua de las condiciones pedidas fueron coordinadas en el registro figural, realizando los tratamientos pertinentes en el mismo registro figural cuando interactúan con Geogebra, lo cual permitió a su vez dar cuenta de la movilización de algunos elementos geométricos para la construcción de la parábola con la propiedad de la circunferencia y realizar la conversión del registro figural al del registro de lengua natural a través de sus respuestas.

Si desplaza el punto B sobre la recta d ¿qué relación existe entre los segmentos CA y CB? Justifique su respuesta

Figura 64. Ítem B – Pregunta de la Actividad 2

Ítem B)

Análisis a *priori*

En esta parte, pensamos que los profesores participantes realizarán varias acciones que le permitan obtener una estrategia válida para resolver esta pregunta, una de ellas sería aplicar la herramienta "distancia longitud" para medir las respectivas distancias entre el *punto B* sobre la *recta d* y entre el punto A y C poder así comprobar que conservan la misma distancia.

Así mismo, si el punto B es arrastrado hasta hacer coincidir el punto C con el vértice de la parábola, la circunferencia toma un mínimo. Ahora, si la posición de B continúa moviéndose, la longitud del radio puede aumentar o disminuir dependiendo de la dirección que tome el punto B. Ello se debe a que el segmento $\overline{CB}$ es un radio de la circunferencia.

Pensamos que los profesores participantes concluirán que las medidas de los segmentos son iguales porque el punto C pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$

Análisis a *posteriori* del Ítem B de la Actividad 2 – Grupal

En este ítem, los quince participantes respondieron la pregunta justificando sus respuestas como lo habíamos previsto en el análisis a priori, expresando que las longitudes de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ siempre van a ser iguales, puesto que los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ siempre serán iguales por ser radios de la circunferencia

Para ello, los profesores participantes volvieron a retomar la construcción de la figura inicial y tuvieron que realizar alguna construcción adicional así como la utilización del arrastre de un punto para evidenciar la propiedad de la circunferencia inmersa en la parábola. Todos los profesores participantes realizaron el tratamiento en el registro figural para luego pasar por la coordinación del registro figural al registro de lengua natural al responder a la pregunta del Ítem B.

Observamos que los procedimientos de todos los profesores en la explicación de los pasos tomados para la construcción de la parábola fueron previstos según los análisis a priori logrando coordinar el registro figural con el registro de lengua natural. El Geogebra como mediador contribuyó a la coordinación del registro figural con el registro de lengua natural así como el tratamiento en el mismo registro de lengua natural para favorecer la movilización de los elementos y propiedad de la circunferencia de la parábola.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Armando

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural escrito en la ficha de actividades (ver figura 65).

$\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son los lados del triángulo isóseles ACB, por lo tanto tienen igual longitud

Figura 65. Registro de lengua natural – ítem B – Actividad 2 – Profesor Armando

A continuación, en la figura 66, presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural, escrito en el texto de Geogebra.

B) CA y CB son los lados del triángulo isósceles ACB, por lo tanto tienen igual longitud. Además, CA y CB constituyen radios de la circunferencia. El lugar geométrico generado por el punto C cuando B es móvil es la parábola con foco en A, directriz d y punto de paso C.

Figura 66. Texto en Geogebra – ítem B – Actividad 2 – Profesor Armando

Luego de haber realizado la construcción a través del registro figural y realizado el tratamiento dentro del mismo registro a través del arrastre generado por la movilización del punto B, el profesor Armando, contestando la pregunta a través del registro de lengua natural, afirmando que existe la relación entre la parábola y el triángulo isósceles cuyos lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son iguales y conservan las mismas distancias a pesar de que se desplace el punto B. A su vez hace mención de que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, son radios de la circunferencia y finalmente expresa que el punto C genera la parábola con foco en A y directriz D, cuando el punto B se moviliza.

Cabe destacar, que los tratamientos realizados dentro del registro figural a través del Geogebra, permitieron la coordinación con el registro de lengua natural para expresar la relación encontrada, tanto por del triángulo isósceles como por la propiedad de la circunferencia.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto (ver figura 67) a través del registro de lengua natural, escrito en la ficha de actividades:

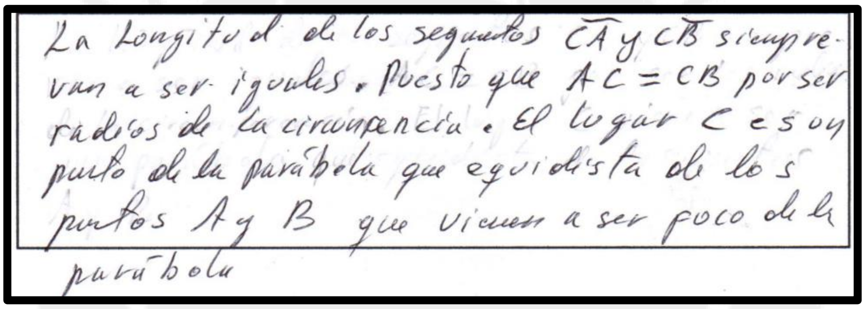

La Longitud de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ siempre van a ser iguales. Puesto que AC = CB por ser radios de la circunferencia. El lugar C es un punto de la parábola que equidista de los puntos A y B que vienen a ser foco de la parábola

Figura 67. Registro de lengua natural – ítem B – Actividad 2 – Profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto (ver figura 68) a través del registro de lengua natural, escrito en el texto de Geogebra.


*Al determinar el lugar geometrico con respecto a C se obtiene una parábola, la cual indica la trayectoria de C
*Esto a su vez es equidistantes a los punto a y B

Figura 68. Registro de lengua natural (Texto en Geogebra) – ítem B – Actividad 2 – Profesor Alberto

En el caso del profesor Alberto, luego de realizado la construcción a través del registro figural y realizado el tratamiento dentro del mismo registro a través del arrastre generado la movilización del punto B, el profesor Alberto, procedió a coordinar los registros contestando la pregunta en registro de lengua natural que los segmentos $\overline{CA} = \overline{CB}$ son iguales puesto que se trata de los radios de la circunferencia y conservan las mismas distancias a pesar de que se desplace el punto B.

Cabe destacar, que los tratamientos realizados dentro del registro figural a través del Geogebra, permitieron la coordinación con el registro de lengua natural para expresar la relación encontrada por la propiedad de la circunferencia.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Carlos

A continuación presentamos en la figura 69, la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural:

Como C es el centro de la circunferencia que pasa por A y B, la distancia de C a A y C a B es la misma, el radio de la circunferencia

Figura 69. Registro de lengua natural – ítem B – Actividad 2 – Profesor Carlos

En el caso del profesor Carlos, luego de realizar la construcción a través del registro figural y realizar el tratamiento dentro del mismo registro a través del arrastre generado por la movilización del punto B, procedió a realizar la coordinación entre el registro figural y el registro de lengua natural expresando que la distancia de A a C es la misma que la distancia que de C a B, es decir que $\overline{CA} = \overline{CB}$ son iguales puesto que se trata de los radios de la circunferencia y conservan las mismas distancias.

Cabe destacar, que los tratamientos realizados dentro del registro figural a través del Geogebra, permitieron la coordinación con el registro de lengua natural para expresar la relación encontrada por la propiedad de la circunferencia.

Ítem C)

C) La relación hallada en el ítem B), ¿permite ser vinculada al lugar geométrico de la parábola? Justifique su respuesta ¿Qué elementos de la parábola se asocian a los puntos A y cuando los puntos B, A y C son colineales?

Figura 70. Ítem C – Pregunta de la Actividad 2

Análisis a priori

En esta parte (ver figura 70) pensamos a *priori* que los profesores participantes pueden concluir que *sí existe una relación*, porque cumple con las condiciones del lugar geométrico de una parábola ya que el punto C al ser centro de una circunferencia equidista de A y B siendo el punto A el foco de la parábola y A, B y C son puntos del eje focal. De esta manera estos puntos A y B mantienen las mismas medidas cuando se desplaza B. A continuación presentamos los análisis a *posteriori:*

Análisis a *posteriori* del Ítem C de la Actividad 2 - Grupal

En este ítem, los quince participantes respondieron la pregunta justificando sus respuestas como lo habíamos previsto en el análisis a priori, expresando de manera afirmativa que sí existe una relación, porque cumple con las condiciones del lugar geométrico de una parábola ya que el punto C al ser centro de una circunferencia equidista de A y B siendo el punto A el foco de la parábola y A, B y C forman el eje focal. De esta manera estos puntos A y B mantienen las mismas medidas cuando se desplaza B.

Para ello, los profesores participantes retomaron la construcción de la figura inicial y tuvieron que realizar alguna construcción adicional así como la utilización del arrastre de un punto para evidenciar la propiedad de la circunferencia inmersa en la parábola. Todos los profesores participantes realizaron el tratamiento en el registro figural para luego realizar la coordinación entre el registro figural con el registro de lengua natural al responder a la pregunta del Ítem C.

Observamos que los procedimientos de todos los profesores en la explicación de los pasos tomados para la construcción de la parábola fueron previstos según los análisis a priori logrando la coordinación entre el registro figural con el registro de lengua natural. El Geogebra como mediador contribuyó a la coordinación del registro figural con el registro de lengua natural así como el tratamiento en el mismo registro de lengua natural para favorecer la movilización de los elementos y propiedad de la circunferencia de la parábola.

Análisis *posteriori* del Ítem C realizado por el profesor Armando

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando (ver figura 71) a través del registro de lengua natural, escrito en la ficha de actividades:

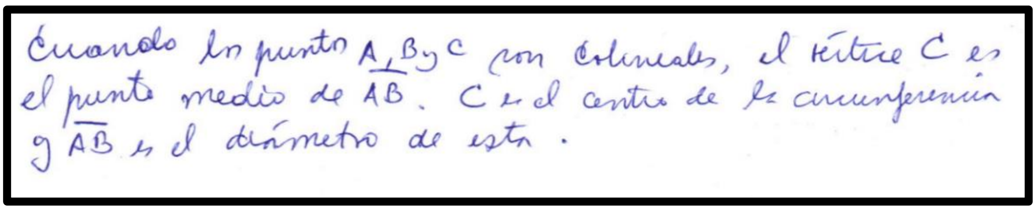

Cuando los puntos A, B y C son colineales, el vértice C es el punto medio de AB. C es el centro de la circunferencia y AB es el diámetro de esta.

Figura 71. Registro de lengua natural – ítem C – Actividad 2 – Profesor Armando

La figura 72 muestra la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural, escrito en el texto del Geogebra:

C)
La relación anteriormente encontrada es, precisamente, la que permite la construcción de la parábola: un punto equidistante de otro (foco) y de una recta (directriz).
Cuando los puntos A, B y C son colineales, el vértice C es el punto medio de AB. C es el centro de la circunferencia y AB es el diámetro de esta.

Figura 72. Registro de lengua natural (Texto en Geogebra) – Ítem C – Actividad 2 – Profesor Armando

En esta pregunta, el profesor Armando, coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde expresa que la relación encontrada le permitió realizar la construcción de la parábola, así mismo reconoce algunos elementos correspondientes a la misma tales como es el foco, la recta directriz, el punto C es punto medio del segmento $\overline{AB}$, el cual menciona que se trataría del diámetro, a su vez menciona que el punto C vendría a ser centro de la circunferencia.
Cabe mencionar, que los tratamientos realizados dentro del registro figural a través del Geogebra, permitieron realizar la coordinación con el registro de lengua natural para expresar que la relación encontrada le permitió realizar la construcción de la parábola así como el reconocimientos de algunos elementos asociados a ella.

Análisis *posteriori* del Ítem C realizado por el profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural, escrito en la ficha de actividades (ver figura 73).

Los puntos A, B y C son colineales, se cortan en la recta perpendicular que pasa por el punto B. AC = CB y AD es el diámetro de la circunferencia.

Figura 73. Registro de lengua natural – Ítem c – Actividad 2 – Profesor Alberto

A continuación, en la figura 74, presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural, escrito en el texto de Geogebra:

*Cuando los puntoA,B,y c son colineales se forman entre todas las lineas el diámetro de la circunferencia
*Por lo tanto podemos afirmar que AC= CB y el segmento AB es el diametro de la circunferencia

Figura 74. Registro de lengua natural (Texto en Geogebra) – ítem C – Actividad 2 – Profesor Alberto

En esta pregunta notamos que el profesor Alberto coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde expresa que la relación encontrada le permitió realizar la construcción de la parábola, así mismo reconoce algunos elementos correspondientes a la misma tales como es el foco, diámetro. Expresa que cuando los puntos A, B, C son colineales, ellos son elementos del diámetro de la circunferencia; en verdad esto es el eje de focal de la parábola, donde AC = CB y AD (Quiso decir AB) es el diámetro de la circunferencia.

Cabe mencionar, que los tratamientos realizados dentro del registro figural a través del Geogebra, permitieron la coordinación con el registro de lengua natural para expresar la que la relación encontrada le permitió realizar la construcción de la parábola así como el reconocimientos de algunos elementos asociados a ella.

Análisis *posteriori* del Ítem C realizado por el profesor Carlos

Presentamos en la figura 75 la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural, escrito en la ficha de actividades:

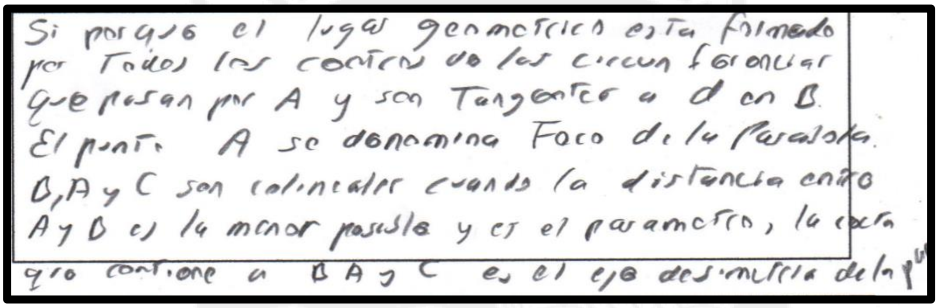

Si porque el lugar geometrico esta formado
por todos los centros de las circunferencias
que pasan por A y son tangentes a d en B.
El punto A se denomina Foco de la Parabola.
B, A y C son colineales cuando la distancia entre
A y B es la menor posible y es el parametro, la recta
que contiene a B A y C es el eje de simetria de la p

Figura 75. Registro de lengua natural – ítem C – Actividad 2 – Profesor Carlos

A continuación en la figura 76 presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural, escrito en el texto de Geogebra:

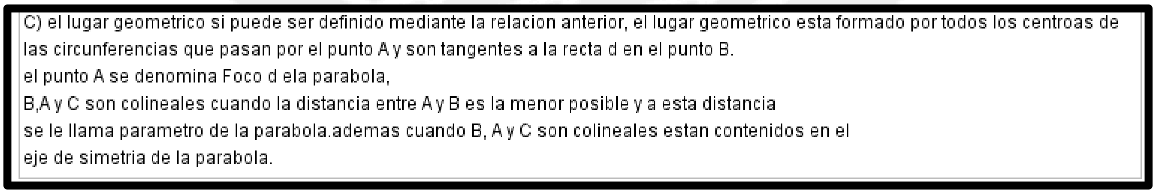

C) el lugar geometrico si puede ser definido mediante la relacion anterior, el lugar geometrico esta formado por todos los centroas de las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta d en el punto B.
el punto A se denomina Foco d ela parabola,
B,A y C son colineales cuando la distancia entre A y B es la menor posible y a esta distancia
se le llama parametro de la parabola.ademas cuando B, A y C son colineales estan contenidos en el
eje de simetria de la parabola.

Figura 76. Registro de lengua natural (Texto en Geogebra) – ítem C- Actividad 2 – Profesor Carlos

En esta pregunta, el profesor Carlos, realizó la coordinación entre el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con el registro de lengua natural en donde expresa que la relación encontrada del lugar geométrico está formada por todos los centros de las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta en el punto B, así mismo reconoció algunos elementos correspondientes a la misma tales como el foco siendo correspondiente al punto A. También, el profesor Carlos expresó que cuando arrastró el punto B y logró alinear los puntos A, B y C, éstos pertenecen al eje de la parábola (eje de simetría).

Cabe mencionar, que los tratamientos realizados dentro del registro figural con el uso del Geogebra, permitieron la coordinación con el registro de lengua natural para expresar la relación encontrada que le permitió realizar la construcción de la parábola así como el reconocimientos de algunos elementos asociados a ella.

ACTIVIDAD 3: LA PARÁBOLA EN DOMINIO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Proponemos una actividad que lleve a los profesores participantes a encontrar la expresión algebraica de la parábola como lugar geométrico y en el dominio de la geometría analítica utilizando el software Geogebra. A su vez la secuencia de actividades propicia las conversiones del registro geométrico al registro algebraico y tratamientos en el registro algebraico que realizan los profesores al responder a cada una de las actividades.

En el Anexo 1, presentamos la actividad uno que consta de dos partes:

Parte I - La Construcción: La primera parte empieza con una actividad que requiere la construcción geométrica de la figura, favoreciendo la aplicación de las propiedades y en registro gráfico.

Parte II – Las Preguntas: La segunda parte consta de luego de dos ítems referentes a pregunta que requiere la interacción de los elementos de la parábola por medio del uso del Geogebra y que propician los análisis concernientes a las nociones de la parábola como lugar geométrico.

Análisis a *priori* de la actividad 3

Esperamos a priori que los profesores participantes movilicen las propiedades de la parábola como lugar geométrico. Esperamos que los profesores participantes construyan un registro gráfico, para ello es necesario que utilicen el software Geogebra, accionen el ícono de ejes y cuadrícula y marquen los puntos F (2,3) y el punto A (0,-2), tracen la recta d, tracen la mediatriz de un segmento FP, en seguida trace una recta perpendicular a la directriz en el punto P. Así mismo esperamos que los profesores participantes accionen la herramienta lugar geométrico para construir la parábola.

Finalmente, los profesores participantes deben explicar por medio de un registro de lengua natural la construcción, considerando las relaciones y propiedades pertenecientes a la parábola.

Así mismo, esperamos que los profesores comprueben que P es un punto equidistante de la recta d y del punto F, concluirán que P está en la mediatriz del segmento QF, porque asocia el concepto de equidistancia con el de la mediatriz.

Esperamos así mismo, que definan la parábola como: es el conjunto de puntos equidistantes de una recta d llamada directriz y del punto fijo F, exterior a ella, llamada foco.

Pensamos a *priori* que los profesores participantes movilicen las nociones de la parábola como lugar geométrico haciendo uso de los registros de representación semiótica realizando conversiones de registro gráfico al registro algebraico y tratamientos con el registro algebraico.

Parte I: Construcción Geométrica de la Parábola con Geogebra

Análisis a *priori* de la construcción:

En esta primera parte de la actividad se requiere que los profesores utilicen la apariencia Álgebra y Gráficas del software Geogebra ya que en esta actividad estamos introduciendo puntos y coordenadas del foco y de la directriz para poder construir la figura.

En esta actividad propiciamos que los profesores participantes realicen la construcción de la parábola con los puntos F (2,3) y el punto A (0,-2), tracen la recta d, trace la mediatriz de un segmento FP, en seguida trace una recta perpendicular a la directriz en el punto P. Así mismo esperamos que los profesores participantes accionen la herramienta lugar geométrico para encontrar la parábola, todo ello con la ayuda del software Geogebra.

La parte I es importante porque la construcción geométrica de la actividad va a permitir a los profesores responder a las preguntas planteadas por la actividad, haciendo que los profesores vuelvan a la construcción geométrica para seguir interactuando con la construcción en Geogebra y con el dominio de las propiedades de la parábola como lugar geométrico, permitirán resolver las interrogantes de cada actividad.

A continuación, en la figura 77, presentamos la Actividad 3:

ACTIVIDAD 3

Construya con Geogebra:

Construya la representación gráfica de la parábola utilizando las propiedades en la actividad 1 y 2 con foco en el punto F (2,3) y cuya recta directriz es paralela al eje de abscisas, que pasa por el punto A (0, -2). Tome un punto P en la recta d y determine un punto Q de la parábola. No debe usar la herramienta *"Cónica - Parábola"* del Geogebra.

Figura 77. Actividad 3

Mostramos a continuación la figura 78, referida a la representación gráfica de la Actividad 3

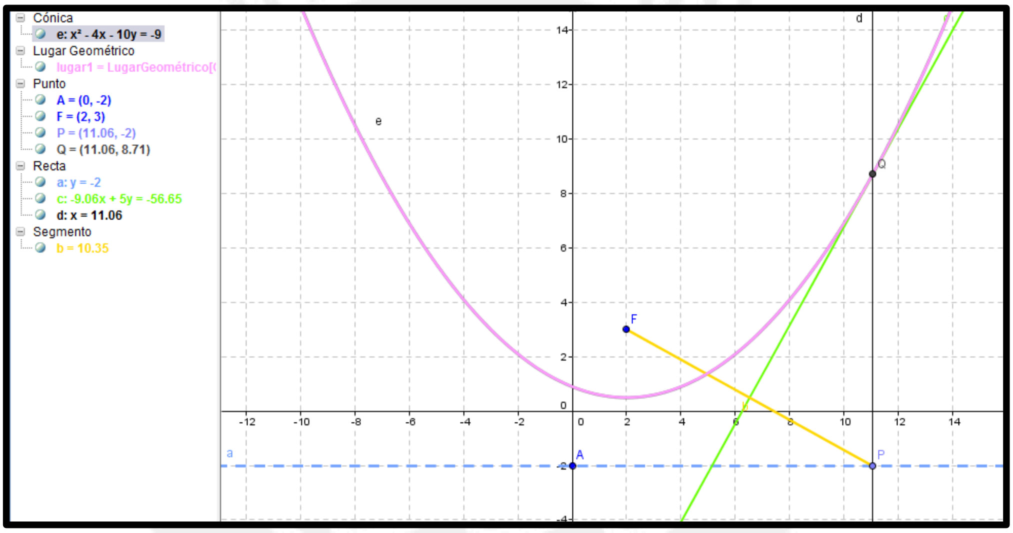


Figura 78. Registro Gráfico de la construcción de la Actividad 3

En el análisis a *priori*, la representación de la parábola como lugar geométrico con las coordenadas de su foco y ecuación de la directriz, es la construcción que pensamos que los profesores participantes realizarán utilizando el registro gráfico así como las herramientas como se muestra en la figura y consigan hacer la construcción ya que las indicaciones y condiciones son claras e intuimos que no tendrán ningún problema en poder representarla.

Análisis a *posteriori* de la construcción de la Actividad 3 - Grupal

En la tercera situación, como lo habíamos previsto en el *análisis a priori*, observamos que todo el grupo de profesores participantes movilizaron los conocimientos previos acerca de la parábola como lugar geométrico haciendo uso del software Geogebra y en la apariencia de álgebra y gráficas pues en esta actividad se vieron resaltados las construcciones de los elementos geométricos y algebraicos de la parábola a través de la movilización de las propiedades de la parábola como lugar geométrico.

Hemos percibido que todos los profesores participantes lograron realizar la construcción de la actividad propuesta aplicando y movilizando las propiedades de la parábola antes vista por la actividad 1 y 2. De esta manera, todos los profesores participantes lograron realizar tratamientos en el registro gráfico como la coordinación entre el registro gráfico con el registro algebraico.

Análisis a *posteriori* de la construcción del profesor Armando:

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Armando con el uso del Geogebra, se observa en la figura 79, realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de la movilización de las propiedades de la parábola antes vistas.

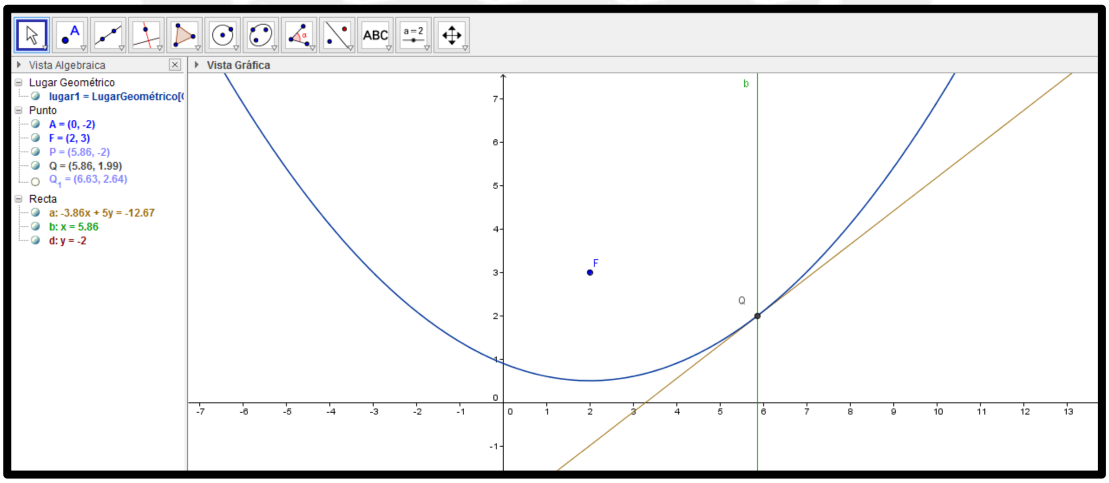


Figura 79. Representación del registro gráfico Actividad 3 – Profesor Armando

Observamos la construcción geométrica de la parábola a través del registro gráfico.

Análisis a posteriori de la construcción del profesor Alberto:

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Alberto con el uso del Geogebra, se observa en la figura 80, realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de la movilización de las propiedades de la parábola antes vistas.

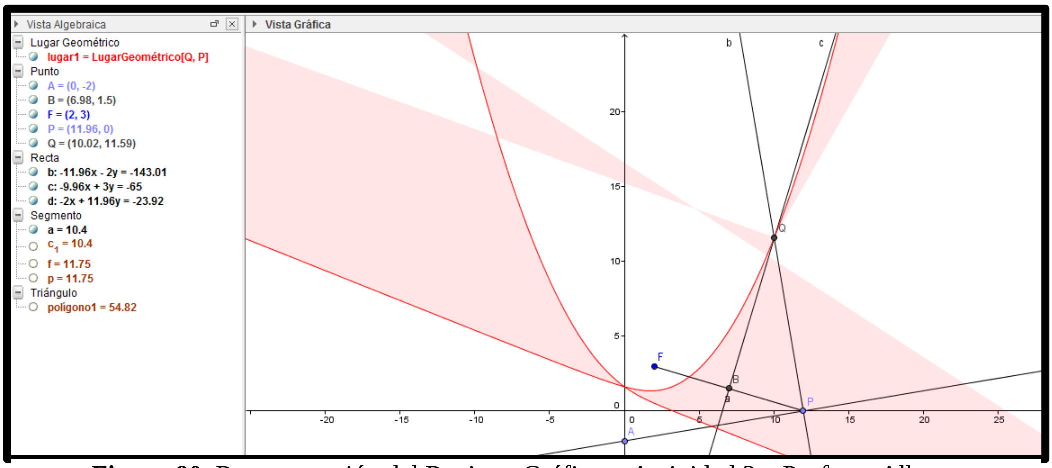


Figura 80. Representación del Registro Gráfico – Actividad 3 – Profesor Alberto

Observamos la construcción geométrica de la parábola a través del registro gráfico.

Análisis a *posteriori* de la construcción del profesor Carlos:

De acuerdo a la construcción de la parábola como lugar geométrico, realizada por el profesor Carlos con el uso del Geogebra, notamos en la figura 81 que el profesor realizó la construcción de la parábola como lo habíamos previsto en el análisis *a priori* a través de la movilización de las propiedades de la parábola antes vistas.

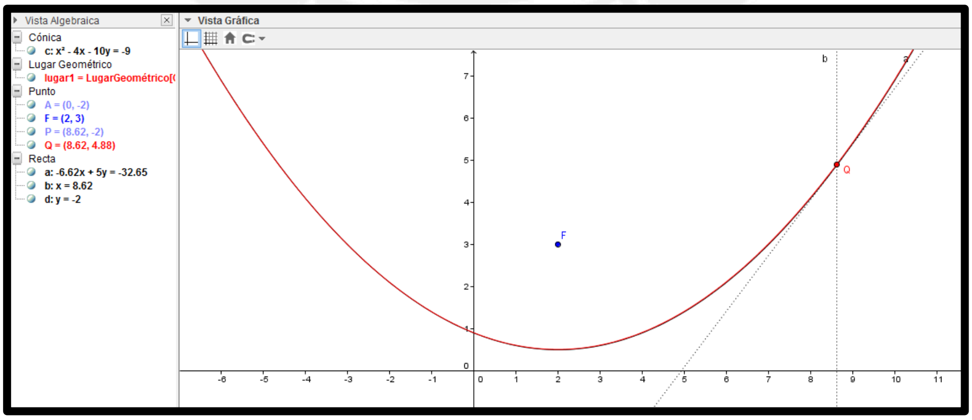


Figura 81. Representación del registro gráfico – Actividad 3 – Profesor Carlos

Observamos el registro gráfico de la construcción geométrica de la parábola.

Parte II: Preguntas

En esta parte se plantean tres ítems A y B.

Determine los puntos P, Q y la expresión algebraica de la parábola en la forma general, haciendo uso de la definición del lugar geométrico de dicha curva. Luego, utilizando la herramienta *"Parábola"* del Geogebra compruebe su respuesta en la *vista gráfica*.

Figura 82. Ítem A – Pregunta de la Actividad 3

Ítem A)

Análisis *a priori* del Ítem A

Pensamos a *priori* que las respuestas de los profesores participantes se expresarán en registro algebraico por los puntos P (x, -2) como representante de los infinitos puntos pertenecientes a la recta directriz y Q (x, y) como representante de los infinitos puntos que pertenecen a la parábola.

La actividad que está en registro de lengua natural direcciona al profesor para que realice una conversión al registro algebraico en el desarrollo del ítem, utilizando la definición de la parábola como lugar geométrico.

De esta manera, podemos esperar a priori que los profesores participantes realicen la conversión mencionada y el tratamiento algebraico como el ejemplo mostrado a continuación:

d (F, Q) = d (Q, P) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-x)^2+\ (y+2)^2} = \sqrt{\left((x-2)\right)^2+\ (y-3)^2}$

$$\Leftrightarrow\ 4y =\ x^2-4x-6y+9\ \ \Leftrightarrow y = \frac{x^2-4x+9}{10}$$

Análisis a *posteriori* del Ítem A - Grupal

De acuerdo a lo analizado, diez de la totalidad de quince profesores participantes lograron resolver el ítem A, llegando a la respuesta algebraica, es decir que realizaron tratamientos en el registro algebraico.

Los profesores que llegaron a resolver a través del registro algebraico llegaron a expresar los puntos P (x, -2) como representante de los infinitos puntos pertenecientes a la recta directriz y Q (x, y) como representante de los infinitos puntos que pertenecen a la parábola.

La actividad que está en registro de lengua natural direccionó a los profesores realizar una conversión al registro algebraico y en este registro debieron realizar tratamientos en el desarrollo del ítem utilizando la definición de la parábola como lugar geométrico.

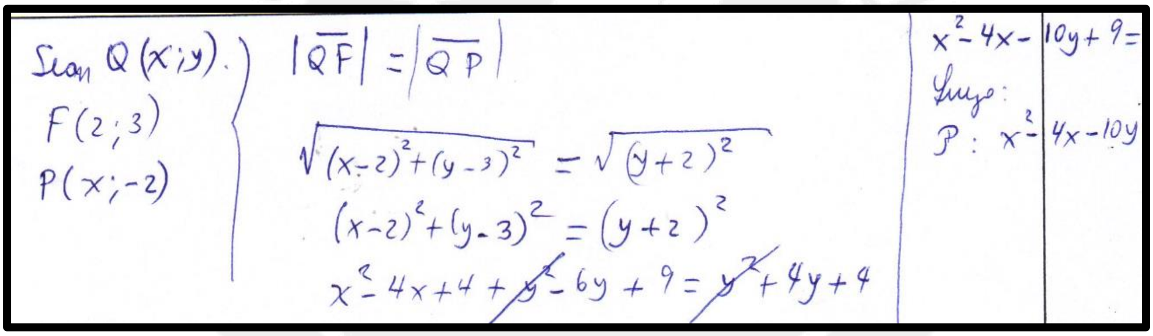
Los profesores participantes realizaron la conversión mencionada y el tratamiento algebraico de la siguiente forma:

$$\text{d (F, Q)} = \text{d (Q, P)} \;\Leftrightarrow \sqrt{(x-x)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{\left((x-2)\right)^2 + (y-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4y = x^2 - 4x - 6y + 9 \;\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 4x + 9}{10}$$

Análisis a *posteriori* del Ítem A profesor Armando:

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando (ver figura 83) a través del registro algebraico:


Sean $Q(x;y)$. $F(2;3)$ $P(x;-2)$

$|\overline{QF}| = |\overline{QP}|$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(y+2)^2}$

$(x-2)^2+(y-3)^2 = (y+2)^2$

$x^2-4x+4+\cancel{y^2}-6y+9 = \cancel{y^2}+4y+4$

$x^2-4x-10y+9=$

Luego:

$P: x^2-4x-10y$

Figura 83. Representación del registro Algebraico – ítem A – Actividad 3 – Profesor Armando

En esta pregunta, el profesor Armando realizó la coordinación entre el registro gráfico de la construcción de la parábola como lugar geométrico utilizando los elementos geométricos ya trabajados en la actividad 1y 2 realizada en Geogebra con el registro algebraico realizando la conversión pertinente. Así mismo, realizada la conversión del registro gráfico al registro algebraico se realiza en el mismo registro algebraico los tratamientos pertinentes para representar la ecuación de la parábola por lo que el profesor participante realiza como primer paso el de identificar los puntos que se piden de manera general, de esta manera logra identificar los puntos P (x, -2) como representante de los infinitos puntos pertenecientes a la recta directriz y Q (x, y) como representante de los infinitos puntos que pertenecen a la parábola y el punto F (2,3) ya mencionado en el problema.

De esta manera el profesor Armando realiza el tratamiento algebraico como podemos evidenciar a continuación:

$$|\overline{QF}| = |\overline{QP}| \Leftrightarrow \sqrt{\left((x-2)\right)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4y = x^2 - 4x - 6y + 9$$

Finaliza expresando que la ecuación de la parábola está formada por todos los puntos P: $x^2 - 4x - 10y - 9 = 0$

Consideramos que nuestra actividad propuesta a través del registro de lengua natural, direccionó al profesor para que realice una conversión al registro algebraico y luego dentro del registro algebraico realizó los tratamientos en el desarrollo del ítem, utilizando la definición de la parábola como lugar geométrico.

Análisis a *posteriori* del Ítem A profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro algebraico:

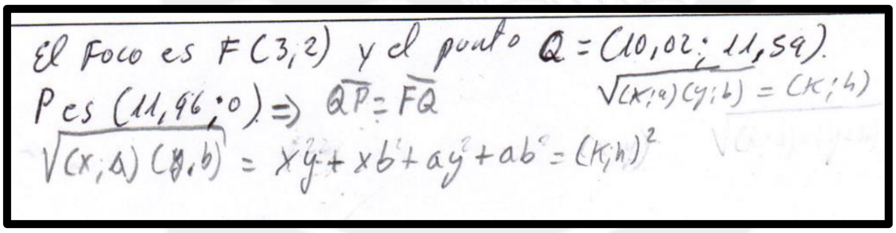

El Foco es F(3,2) y el punto Q = (10,02; 11,59).
P es (11,96; 0) ⇒ $\overline{QP} = \overline{FQ}$ $\sqrt{(x;a)(y;b)} = (K;h)$
$\sqrt{(x;a)(y,b)} = xy + xb + ay + ab = (K;h)^2$

Figura 84. Representación del registro Algebraico – ítem A – Actividad 3 – Profesor Alberto

En esta pregunta, el profesor Alberto, no logró coordinar el registro de lengua natural con el registro gráfico de la construcción de la parábola como lugar geométrico pese a que utilizó los elementos geométricos ya trabajados en la actividad 1 y 2 realizada en Geogebra. Observamos que no realiza la conversión de los elementos de la parábola del registro geométrico al registro algebraico pues no logra identificar los puntos P (x, -2) como representante de los infinitos puntos pertenecientes a la recta directriz y Q (x, y) como representante de los infinitos puntos que pertenecen a la parábola y el punto F (2,3) ya mencionado en el problema. De esta manera se hace posible realizar el tratamiento a nivel de registro algebraico por lo que se queda sin completar la solución pese a que tiene muy claro la propiedad de la parábola como lugar geométrico como lo expresa que QF = FQ.

Consideramos que nuestra actividad propuesta a través del registro de lengua natural, direccionó al profesor para que realice una conversión al registro algebraico y luego dentro del registro algebraico realizó los tratamientos, pero en este caso no lo logró pues tuvo una equivocación cuando realizaba el tratamiento algebraico.

Análisis a *posteriori* del Ítem A profesor Carlos

A continuación presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro algebraico:

$$d(\overline{FQ}) = d(\overline{QP})$$
$$F(2,3),\ P(x,y),\ P(x,-2)$$
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+2)^2}$$
$$x^2-4x+\cancel{4} = \cancel{y^2}+4y+\cancel{4}-\cancel{y^2}+6y-9$$
$$x^2-4x+9 = 10y \qquad x^2-4x-10y=-9$$

Figura 85. Representación del registro Algebraico – ítem A – Actividad 3 – Profesor Carlos

En esta pregunta, el profesor Carlos, realizó la coordinación del registro de lengua natural con el registro gráfico de la construcción de la parábola como lugar geométrico utilizando los elementos geométricos ya trabajados en la actividad 1 y 2 realizada en Geogebra con el registro algebraico realizando la conversión pertinente. Así mismo, realizada la conversión del registro gráfico al registro algebraico se realiza en el mismo registro algebraico los tratamientos pertinentes para representar la ecuación de la parábola por lo que el profesor participante realiza como primer paso el de identificar los puntos que se piden de manera general, de esta manera logra identificar los puntos P (x, -2) como representante de los infinitos puntos pertenecientes a la recta directriz y Q (x, y) como representante de los infinitos puntos que pertenecen a la parábola y el punto F (2,3) ya mencionado en el problema.

De esta manera el profesor Carlos realiza el tratamiento algebraico como podemos evidenciar a continuación:

$$|\overline{QF}| = |\overline{QP}| \Leftrightarrow \sqrt{\left((x-2)\right)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ 4y = x^2 - 4x - 6y + 9$$

Finaliza expresando que la ecuación de la parábola está formada por todos los puntos P: $x^2 - 4x - 10y - 9 = 0$

Consideramos que nuestra actividad propuesta a través del registro discursivo, direccionó al profesor para que realice una conversión al registro algebraico y luego dentro del registro algebraico realizó los tratamientos en el desarrollo del ítem A, utilizando la definición de la parábola como lugar geométrico.

Determine la expresión algebraica de la parábola con foco en el punto F (0, d), recta directriz con ecuación y =- d, siendo *P(x, y)* un punto perteneciente a la parábola y *d* un número real distinto de cero

Figura 86. Ítem B – Pregunta de la Actividad 3

Ítem B)

Análisis *a priori*

En la siguiente pregunta, esperamos a priori que los profesores responderán al ítem B realizando una conversión del registro discursivo al registro algebraico movilizando conocimientos y aplicando la distancia entre dos puntos, así mismo realicen tratamiento para determinar la expresión algébrica de la parábola considerando como foco al punto ***F (0, d)*** y a la recta directriz ***r*** con ecuación **y = - d**; y ***Q (x, y)*** un punto arbitrario de ***P***.

Esperamos a priori la conversión del registro de lengua natural al registro algebraico que los profesores podrían realizar:

Sean $\mathcal{P}$ la parábola con foco ***F (0, d)*** y directriz ***r*** con ecuación **y = - d**; y ***Q (x, y)*** un punto arbitrario de ***P***.

d (Q, F) = d (Q, r) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-d)^2}$

Esperamos a priori que los profesores realicen los tratamientos en registro algebraico. Mostramos a continuación los tratamientos que podrían realizar los profesores participantes:

d (Q, F) = d (Q, r) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-d)^2}$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + (y-d)^2 = (y+d)^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 2dy + d^2 = y^2 + 2dy + d^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4dy$$

Creemos a priori que los profesores participantes realicen los tratamientos en registro algebraico sin ninguna dificultad aplicando la propiedad de la parábola.

Análisis a *posteriori* del Ítem B - Grupal

De acuerdo a lo analizado, 6 de la totalidad de los 15 profesores participantes lograron resolver el ítem B, llegando a la respuesta algebraica $x^2 = 4yd$.

6 Aplicaron de manera correcta la propiedad de la parábola como lugar geométrico, desarrollaron de manera correcta las distancias entre puntos como la suma de los cuadrados de las diferencias de sus coordenadas, llegando a la correcta expresión de la ecuación algébrica.

Un profesor participante, realizó el planteo de la actividad del ítem B en el cual realizó de manera correcta pero se confunde en la parte algebraica de la última parte al despejar para determinar la expresión algebraica, suponemos que el profesor tiene problemas en realizar tratamientos en el registro algebraico.

Un profesor, aplicó de manera correcta la propiedad de la parábola como lugar geométrico pero se confunden al realizar la sustracción de las coordenadas de los puntos del foco F (0, d) a un punto de la parábola P (x, y) de la parábola a un punto de la directriz Q (x, -d). Consideremos que tiene dificultades en realizar tratamientos en el registro algebraico debido a que se confunde en los signos de las coordenadas del foco y de la parábola.

2 profesores participantes, aplicaron de manera correcta la propiedad de la parábola como lugar geométrico pero se confunden en la parte del desarrollo $(y – d)^2$, omitiendo el valor de y cuando operaba el doble del primero por el segundo cuadrado, es decir el desarrollo lo expresaron así: $y^2 – 2d + d^2$. Consideramos que los profesores tienen problemas en realizar tratamientos en el registro algebraico.

Una persona aplicó de manera correcta la propiedad de la parábola como lugar geométrico pero se confunden en la identificación del signo de la primera coordenada para la aplicación de la diferencia de cuadrados $(- d – y)^2 = d^2 - 2dy + y^2$ de tal manera que no llega a la respuesta correcta. Consideramos que el profesor participante tiene dificultad en realizar tratamientos en el mismo registro algebraico.

4 profesores no lograron resolver el ítem B. Consideramos que los profesores tienen problemas con realizar la conversión del registro de lengua natural al registro algebraico.

Los profesores que llegaron a resolver a través del registro algebraico llegaron a expresar los puntos F (0, d) como representante del foco, el punto Q (x, d) un punto de la directriz y P(x, y) los infinitos puntos pertenecientes a la parábola. De esta manera los profesores desarrollaron de la siguiente manera:

d (P, F) = d (P, Q) $\Leftrightarrow \sqrt{(0-x)^2 + (d-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (-d-y)^2}$

Mostramos a continuación los tratamientos que podrían realizar los profesores participantes:

d (P, F) = d (P, Q) $\Leftrightarrow \sqrt{(0-x)^2 + (d-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (-d-y)^2}$

$$\sqrt{x^2 + d^2 - 2dy + y^2} = \sqrt{[-(d+y)]^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4yd$$

La actividad que está en registro de lengua natural direccionó a los profesores realizar una conversión al registro algebraico en el desarrollo del ítem B, utilizando la definición de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Armando

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro algebraico:

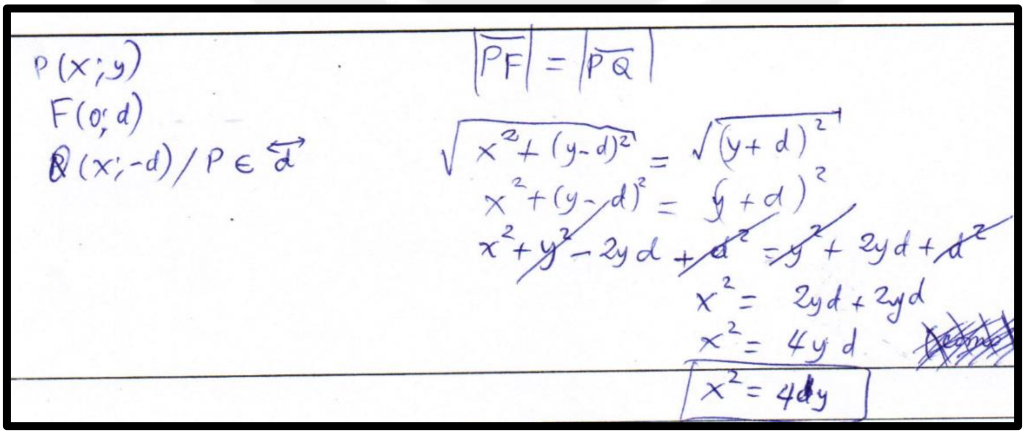


Figura 87. Representación del registro Algebraico – ítem B – Actividad 3 – Profesor Armando

En esta pregunta, el profesor Armando realizó la coordinación del registro de lengua natural del enunciado con el registro algebraico, realizando la conversión pertinente. Así mismo, el profesor participante realizó los tratamientos en el mismo registro algebraico pertinente para representar la ecuación de la parábola por lo que el profesor participante realiza como primer paso el de movilizar los conocimientos de la parábola como lugar geométrico, aplicando la distancia entre dos puntos e identifica los puntos P, F y Q. De esta manera lo expresa así:

El profesor Armando considera a los puntos P, F y Q de manera general, de esta manera logra identificar los puntos P (x, y) como representante de los infinitos puntos pertenecientes a la recta directriz y Q (x, -d) como representante de los infinitos puntos que pertenecen a la parábola y el punto F (0, d) ya mencionado en el problema.

Así mismo, observamos en el registro algebraico que el profesor Armando realizó el siguiente tratamiento considerando la propiedad de la parábola como lugar geométrico:

$$|\overline{PF}| = |\overline{PQ}| \Leftrightarrow \sqrt{(x)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(y+d)^2} =$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-d)^2 = (y+d)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2yd + d^2 = y^2 + 2yd + d^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4dy$$

Finaliza expresando que la ecuación de la parábola es $x^2 = 4dy$

Consideramos que la actividad propuesta a través del registro de lengua natural, direccionó al profesor Armando para que realice una conversión al registro discursivo al algebraico y luego dentro del registro algebraico pues el profesor Armando realizó los tratamientos en el desarrollo del ítem, utilizando la definición de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Alberto

A continuación presentamos el registro algebraico vacío por el profesor Alberto:

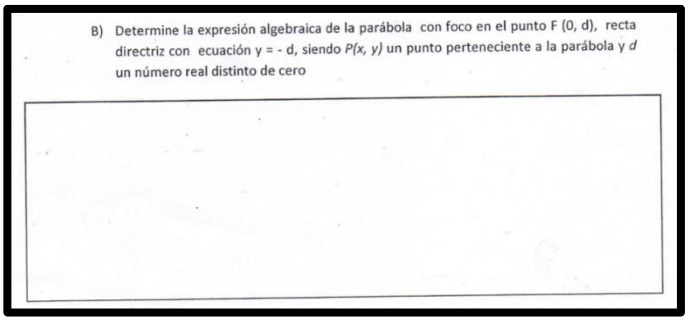

B) Determine la expresión algebraica de la parábola con foco en el punto F (0, d), recta directriz con ecuación y = - d, siendo *P(x, y)* un punto perteneciente a la parábola y *d* un número real distinto de cero

Figura 88. Registro vacío – Ítem B – Actividad 3 – Profesor Alberto

En esta pregunta, el profesor participante no logró responder a la pregunta.

Análisis *posteriori* del Ítem B realizado por el profesor Carlos

A continuación presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro algebraico (ver figura 89):

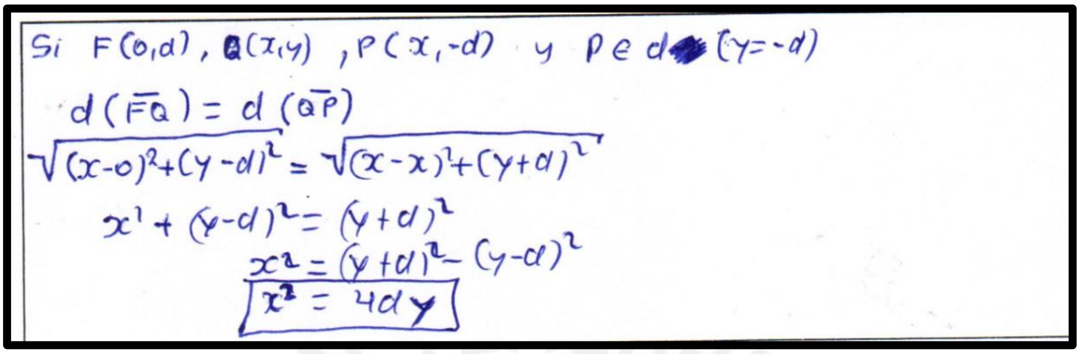


Figura 89. Registro Algebraico – ítem B – Actividad 3 – Profesor Carlos

En esta pregunta, el profesor Carlos coordinó el registro de lengua natural del enunciado con el registro algebraico realizando la conversión pertinente. Así mismo, el profesor Carlos realizó los tratamientos en el mismo registro algebraico pertinente para representar la ecuación de la parábola por lo que el profesor participante movilizó los conocimientos de la parábola como lugar geométrico, aplicando la distancia entre dos puntos e identifica los puntos P, F y Q. De esta manera lo expresó así:

El profesor participante consideró a los puntos P, F y Q de manera general, de esta manera logró identificar los puntos Q (x, y) como representante de los infinitos puntos pertenecientes a la recta directriz y P (x, -d) como representante de los infinitos puntos que pertenecen a la parábola y el punto F (0, d) ya mencionado en el problema.

Así mismo, observamos en el registro algebraico que el profesor realizó el siguiente tratamiento considerando la propiedad de la parábola como lugar geométrico:

$$\text{d } |\overline{FQ}| = d|\overline{QP}| \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x-0)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+d)^2} =$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-d)^2 = (y+d)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (y+d)^2 - (y-d)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4dy$$

Finalizó expresando que la ecuación de la parábola es $x^2 = 4dy$

Consideramos que la actividad propuesta a través del registro de lengua natural, direccionó al profesor Carlos para que realice una conversión al registro discursivo al algebraico y luego dentro del registro algebraico, el profesor realizó los tratamientos en el desarrollo del ítem, utilizando la definición de la parábola como lugar geométrico.

ACTIVIDAD 4: PROBLEMA

Análisis de la actividad 4: Actividad de Cierre

Proponemos un problema que lleve a los profesores participantes modelizar el problema haciendo uso del software Geogebra y que movilice la noción de parábola como lugar geométrico.

Esperamos que los profesores participantes respondan las diversas preguntas que los llevará a identificar la propiedad de simetría de la parábola y encontrarán la expresión algebraica de la parábola como lugar geométrico. A su vez, pensamos que las actividades propician las conversiones del registro figural al registro algebraico y tratamientos en el registro algebraico que realizan los profesores al responder a cada uno de los ítems.

En el Anexo 1, presentamos la actividad cuatro que consta de 2 partes; la primera parte empieza con la presentación de un problema la cual requiere la modelización a través de una construcción geométrica el uso del Geogebra. En esta misma parte presentamos tres preguntas que los obligue a interactuar con la construcción del Geogebra y responder a las preguntas por medio del registro de lengua natural. Luego presentamos la segunda parte que consta de dos preguntas, la cual involucra la modelización en la dimensión de la geometría analítica y la mención de las restricciones de la construcción.

Análisis a *priori* de la Actividad de Cierre:

En esta última actividad, deseamos que los profesores participantes modelicen la situación y logren identificar el modelo matemático implícito en el problema, el cual se trata de una parábola que involucra a su vez la propiedad de la simetría. Para realizar la construcción de dicha parábola, los profesores participantes movilizarán las nociones de la parábola como lugar geométrico, y lo plasmarán en el registro figural a través del software Geogebra en el aspecto de la geometría para la construcción y esperamos que utilicen todas las herramientas excepto la herramienta cónica – parábola para modelizar el problema.

Esperamos que los profesores participantes representen dicho modelo por medio del registro figural y realicen la coordinación entre éste registro con el registro de lengua natural al contestar las preguntas que enfatizan aspectos de lugar geométrico y que son parte de la primera parte de esta actividad. Para contestar las preguntas, los profesores participantes tendrán que realizar volver a la representación gráfica en el Geogebra para realizar exploraciones y manipulaciones en la misma y poder así responder a las preguntas planteadas en esta primera parte.

En la segunda parte, lo que planteamos es que en la misma representación gráfica del problema modelizado en Geogebra se cambie a la apariencia algebraica y gráficos, de esta manera estando la representación gráfica en el dominio de la geometría analítica, los profesores participantes realizarán la coordinación en entre el registro gráfico de la situación con el registro algebraico, pues en éste último los profesores plasmarán el modelo matemático de las condiciones que satisfacen el problema a través del registro algebraico. Luego, describan el modelo matemático a través del registro de lengua natural y expresen las conclusiones a que se llegan también en el registro de lengua natural.

También, deseamos que los profesores participantes escriban las restricciones del problema usando el registro de lengua natural. Cabe resaltar que para ello, los profesores participantes deben realizar coordinaciones entre los diferentes registros como el registro en lengua natural, registro figural, y registro algebraico realizando conversiones y tratamientos.

Parte I: Construcción de la Modelización del Problema con base a la propiedad de la Simetría

Análisis a *priori* de la construcción:

En la primera parte, pedimos a los profesores participantes que modelicen el problema planteado haciendo uso del software Geogebra y logren identificar el modelo matemático implícito en el problema, el cual se trata de una parábola que involucra a su vez la propiedad de la simetría. Para realizar la construcción de dicha parábola, los profesores participantes movilizarán las nociones de la parábola como lugar geométrico, y lo plasmarán en el registro figural a través del software Geogebra en el aspecto de la geometría para la construcción y esperamos que utilicen todas las herramientas excepto la herramienta cónica – parábola para modelizar el problema.

En la figura 90 presentamos la actividad 4:

ACTIVIDAD 4

Construya con Geogebra:

En la ciudad de Lima viven dos profesores colegas de Matemática, el profesor Hernández y el profesor Román, quienes trabajan en el mismo colegio particular "Pirámide" y que se encuentran cansados de que les descuenten todos los días por llegar tarde a su centro de labores debido al tránsito caótico que existe en Lima. Ellos desean mudarse por las condiciones caóticas de la ciudad por eso estuvieron buscando departamentos que sean cercanos a su centro de trabajo y a la av. Principal. Ambos profesores buscaron y encontraron en las mejores ubicaciones; ya que dichos departamentos se ubican en el centro del colegio y de la av. Principal. Ahora ambos colegas viven tranquilos porque ya no les descuentan y casi siempre llegan a la misma hora pues el profesor Hernández vive al frente del profesor Román. (Según la figura de abajo)

Figura 90. Actividad 4

Presentamos a continuación la figura referencial al problema planteado (ver figura 91) para que los profesores tomen en consideración en el momento de la construcción de la modelización en Geogebra.

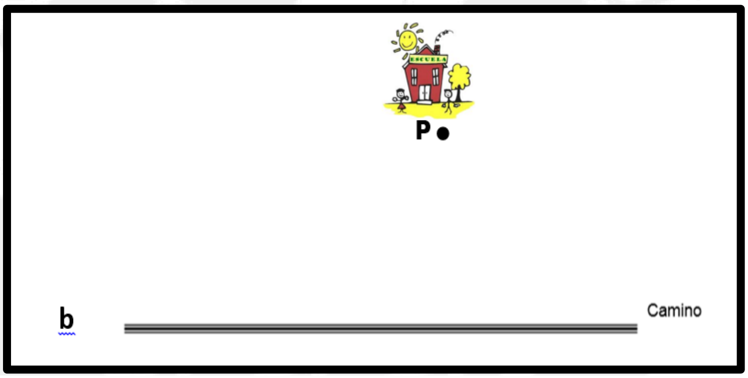


Figura 91. Gráfico referencial de la Actividad 4

A continuación presentamos en la figura 92 la representación gráfica del problema modelizado con el uso del Geogebra.

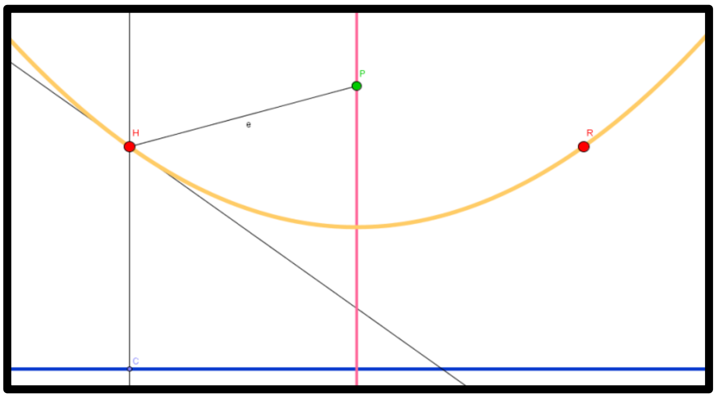


Figura 92. Representación Figural del problema planteado – Actividad 4

La figura 92 muestra una posible construcción que los profesores podrían realizar a priori cuando utilicen el Geogebra y coordinen el registro de lengua natural (a través del enunciado del problema) con el registro figural (construcción del problema en Geogebra) Para ello, los profesores participantes deberán interpretar el problema y pensamos que utilizarán las herramientas de la recta perpendicular, los puntos, mediatriz, circunferencia, etc. del Geogebra, cumpliendo con todas las condiciones del problema.

Análisis a *posteriori* de la Modelización del problema de la Actividad 4 – Grupal

En la cuarta situación, como lo habíamos previsto en el análisis a *priori*, percibimos que los todos los profesores participantes lograron realizar la construcción de la parábola como lugar geométrico movilizando las propiedades utilizadas en la actividad 1 y 2 como parte de la modelización del problema pero no todos los profesores participantes lograron modelizar en su totalidad considerando todas las condiciones explícitas del problema planteado.

De esta manera, de los quince profesores participantes, seis lograron modelizar el problema planteado conforme a las condiciones deseadas, cuatro profesores participantes no lograron modelizar pues consideraron solo una posibilidad de ubicación de los departamentos del Señor Hernández y el profesor Román, tres profesores participantes consideraron una sola ubicación de los departamentos del señor Hernández y Román y de manera errónea puesto que consideró uno de los puntos, casa del Señor Román ubicados en la recta directriz, por lo que no se está considerando todas las condiciones del problema. Siendo uno de ellos, el de encontrar los departamentos del señor Hernández y Román a la misma distancia del colegio y de la avenida principal, pero no se cumple. Así mismo, hubo un profesor participante al que le faltó considerar la ubicación del señor Román, un profesor modelizó pero las ubicaciones de los profesores fuera de la parábola.

En esta parte de la actividad, los profesores participantes movilizaron los conocimientos previos acerca de la parábola como lugar geométrico haciendo uso del software Geogebra en la apariencia de geometría pues en esta actividad se vieron resaltados las construcciones de los elementos geométricos de la parábola a través de la movilización de las propiedades de la parábola como lugar geométrico, realizando tratamientos en el registro figural.

Análisis *posteriori* de la Modelización del problema en el Ítem A realizado por el profesor Armando

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Armando con el uso del Geogebra, se advertimos en la figura 93, que realizó la coordinación del registro de lengua natural dado por el problema con el registro figural que es la modelización de la construcción planteada. Notamos que el profesor Armando realizó la construcción del problema planteado como lo podemos evidenciar en la construcción hecha de la parábola movilizando la propiedad foco – directriz como se había previsto a *priori*.

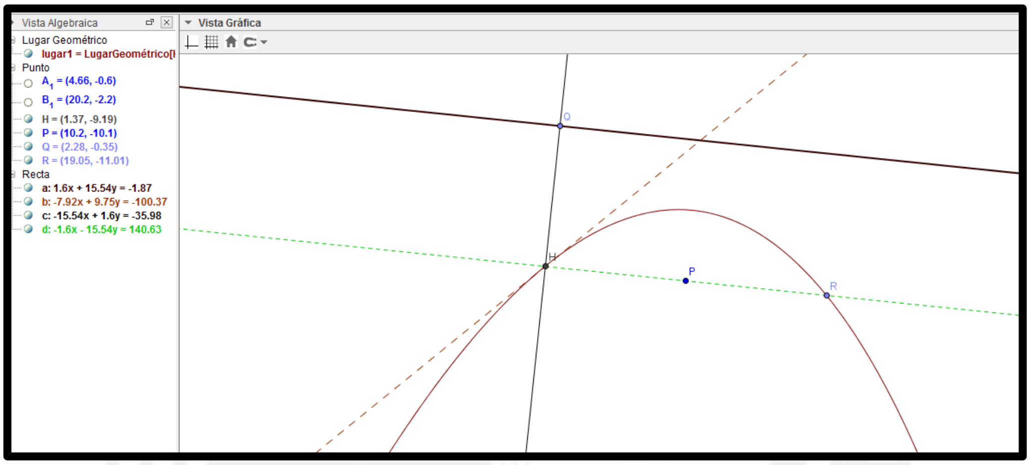


Figura 93. Representación figural del problema plateado – Actividad 4 – Profesor Armando

Observamos la modelización de la situación planteada a través del registro figural que realizó el profesor Armando movilizando la propiedad foco – directriz de la parábola con el uso del Geogebra.

Análisis a *posteriori* de la Modelización del problema del Ítem A realizado por el profesor Alberto:

De acuerdo a la construcción geométrica de la parábola realizada por el profesor Alberto con el uso del Geogebra, observamos en la figura 94, que el profesor Alberto realizó la coordinación del registro de lengua natural dado por el enunciado del problema con el registro figural que es la modelización de la construcción planteada. Notamos también que el profesor Alberto realizó la construcción del problema planteado como lo podemos evidenciar en la construcción hecha de la parábola movilizando la propiedad de la circunferencia a través del registro figural que es la modelización de la construcción planteada.

Además, que la construcción de la parábola como parte de la modelización del problema lo realiza de manera correcta pero que las ubicaciones de los departamentos del profesor Hernández y del profesor Román lo realiza en la recta directriz, no pertenecientes a la parábola, por lo que no se estaría cumpliendo con todas las condiciones del problema planteado, en este caso que la distancia de la Av. Principal sea igual a la distancia de los departamentos y de éstos al colegio; ello de manera. No se cumplió con lo previsto en el análisis a *priori* y suponemos que el profesor Alberto no logró comprender todo el problema planteado porque podría haber confundido la propiedad de la circunferencia al construir la parábola.

Observamos que la ubicación del colegio es el foco de la parábola y un punto de la circunferencia, por lo que pensamos que el profesor Alberto confundió la propiedad de la circunferencia, porque ubicó los puntos H y R en la misma circunferencia pero no pertenecientes a la parábola por lo que incurrió en un error por interpretación u omitió la propiedad de la parábola como lugar geométrico.

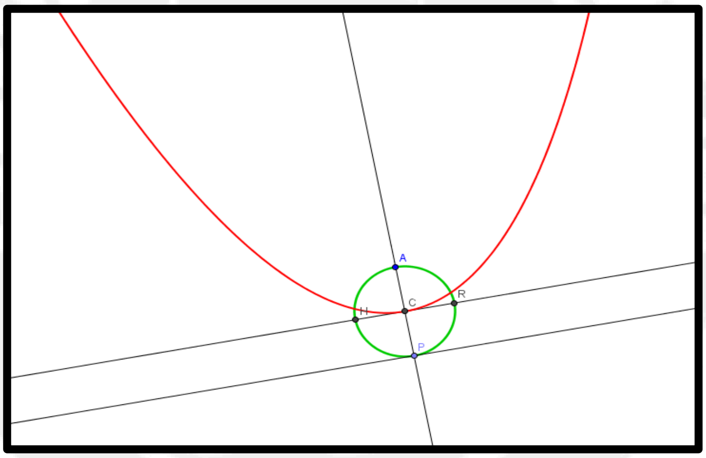


Figura 94. Representación Figural del problema planteado – Actividad 4 – Profesor Alberto

Percibimos, en la figura 94, que la modelización realizada por el profesor Alberto de la situación planteada a través del registro figural con el uso del Geogebra le permitió movilizar la parábola como lugar geométrico en base a la propiedad de la circunferencia.

Análisis *posteriori* de la Modelización del problema del Ítem A realizado por el profesor Carlos

De acuerdo a la construcción geométrica la modelización del problema planteado realizada por el profesor Carlos con el uso del Geogebra, que presentamos en la figura 95, que el profesor realizó la coordinación del registro de lengua natural dado por el enunciado del problema con el registro figural a través de la construcción geométrica de la modelización del problema planteado.

Observamos que la construcción de la parábola como parte de la construcción de la situación planteada con las ubicaciones de los departamentos del profesor Hernández y el profesor Román son correctas pues cumplen con todas las condiciones del problema pero en el caso de la simulación de todas las ubicaciones posibles de los departamentos del profesor Hernández y Román no se cumple, pero consideramos que ello podría ser por una mala interpretación del profesor Carlos con respecto al problema pues cumple con la condición de que cada departamento tiene que estar ubicado uno frente al otro pero omiten las demás condiciones donde las ubicaciones de los departamentos deberían estar a la misma distancia del colegio y de la av. Principal, ello hace referencia a la definición de la parábola como lugar geométrico.

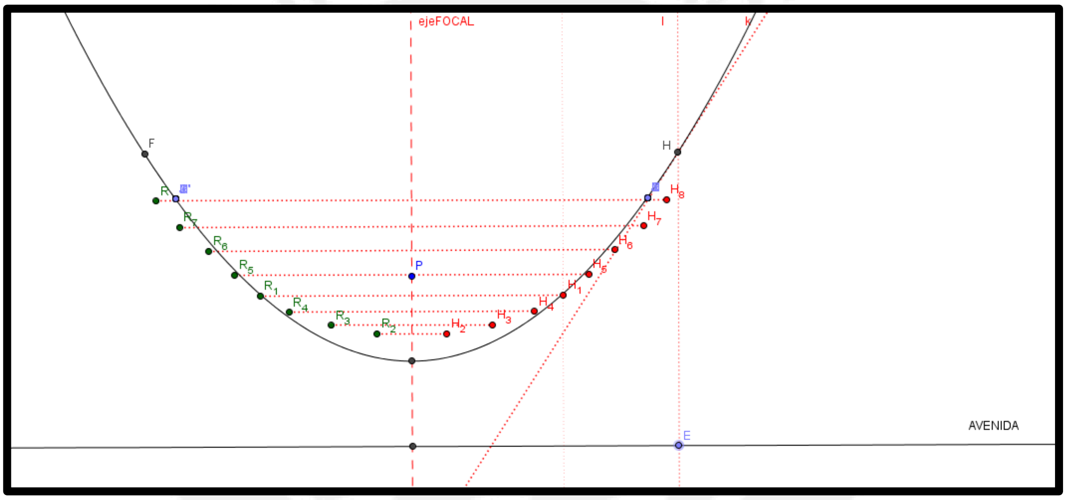


Figura 95. Representación Figural del problema plateado – Actividad 4 – Profesor Carlos

Notamos, en la figura 95, que la modelización realizada por el profesor Carlos es diferente que la del profesor Alberto a pesar de haber utilizado el registro figural con el uso del Geogebra movilizando la propiedad foco - directriz de la parábola.

Parte II: Preguntas

En la segunda parte, presentamos tres preguntas correspondientes a los aspectos de lugar geométrico, así mismo las preguntas implican volver a la construcción para realizar manipulaciones y utilizar la función arrastre para poder a las preguntas. Es decir, realizamos tratamientos en el registro figural y conversiones del registro de lengua natural al registro figural y viceversa.

Ítem A)

A) Utilizando la apariencia geometría del Geogebra y modelice el problema utilizando las propiedades antes vistas. Representa la construcción de los puntos H (Hernández) y R (Román), puntos de las ubicaciones de la casas y el punto P (Colegio). Considere restricciones para construir la representación geométrica y responda a las siguientes preguntas justificando sus respuestas:

1) ¿Se pueden construir ambas casas considerando todas las condiciones? Justifique su respuesta.
2) ¿Existe otras posibles ubicaciones de las casas del Señor Hernández y del Señor Román? Explique.
3) Determine gráficamente todas las posibles ubicaciones de los puntos H y R considerando todas las condiciones mencionadas. ¿Cómo se llama la gráfica construida?

Figura 96. Ítem A – Actividad 4

Análisis a *priori* del Ítem A

Para responder la primera pregunta de la de la segunda parte, creemos que los profesores participantes responderán de manera afirmativa a la primera pregunta haciendo uso del registro de lengua natural, puesto que lograrán construir la ubicación del departamento del profesor Hernández para ello pensamos que los profesores participantes harán uso de la construcción de la parábola puesto que cumplen con todas las condiciones planteadas en el problema. Para ubicar el departamento del profesor Román, consideramos que los profesores participantes harán uso de la herramienta simetría Axial del Geogebra.

Cuando se plantea la pregunta: *¿Existe otras posibles ubicaciones de las casas del Señor Hernández y del Señor Román?* Entendemos que los profesores participantes responderán de manera afirmativa, mediante el registro de lengua natural, pero antes tendrán que volver a la construcción realizada en el Geogebra y mediante el uso de la función arrastre del punto sobre la recta, evidenciarán que la ubicación de los departamentos del profesor Hernández y del profesor Román tiene infinitas posibilidades de ubicación considerando todas las condiciones.

Análisis *a priori* del ítem A-1

Para responder a la primera pregunta de la de la segunda parte, consideramos que los profesores participantes responderán de manera afirmativa a la primera pregunta a través del registro de lengua natural, puesto que lograrán construir la ubicación del departamento del profesor Hernández; para ello esperamos que los profesores participantes harán uso de la construcción de la parábola, modelo matemático que cumple con todas las condiciones del problema planteado. Al ubicar el departamento del profesor Hernández en cualquier punto de la parábola pensamos que los profesores participantes harán uso de la herramienta simetría axial del Geogebra para ubicar el departamento del profesor Román, ya que esta herramienta permite ubicar cualquier punto frente a ella considerando un eje de referencia, para ello, el eje de referencia sería el eje focal de la parábola.

Análisis *posteriori* del Ítem A realizado por el profesor Armando

A continuación presentamos, en la figura 97, la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural:

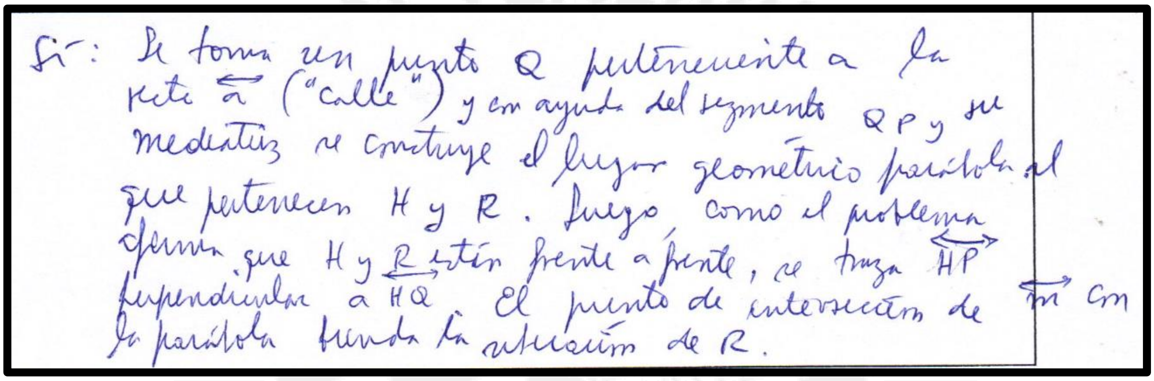

Sí: Se toma un punto Q perteneciente a la recta $\overleftrightarrow{a}$ ("calle") y con ayuda del segmento QP y su mediatriz se construye el lugar geométrico parábola al que pertenecen H y R. Luego, como el problema afirma que H y R están frente a frente, se traza $\overleftrightarrow{HP}$ perpendicular a HQ. El punto de intersección de $\overleftrightarrow{m}$ con la parábola brinda la ubicación de R.

Figura 97. Registro de lengua natural - ítem A - Actividad 4 – Profesor Armando

Luego de la modelización realizada por el profesor Armando a través de la conversión del registro de lengua natural al registro figural, el profesor procedió a realizar la coordinación del registro figural con el registro de lengua natural para responder a la interrogante de la pregunta del ítem A, en la cual el profesor Armando expresa que si es posible dichas ubicaciones de los departamentos considerando todas las condiciones del problema y justifica explicando a través de los pasos de construcción que realizó en el registro figural por medio del uso del Geogebra. Así mismo observamos que el profesor Armando movilizó las nociones de la parábola como lugar geométrico para realizar dicha construcción con las condiciones señaladas por el problema plateado.

El profesor Armando, logró construir la ubicación del departamento del profesor Hernández para ello el docente hizo uso de la construcción de la parábola puesto que cumplían con todas las condiciones planteadas en el problema. Para ubicar el departamento del profesor Román, consideró ubicar una recta HR perpendicular a HQ.

Consideramos que nuestra actividad propuesta a través del registro de lengua natural, direccionó al profesor Armando para que realice una conversión al registro de lengua natural al registro figural y del registro figural al registro discursivo para contestar la pregunta planteada en el desarrollo del ítem A, movilizando nociones de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *posteriori* del Ítem A – 1 realizado por el profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural (ver figura 98):

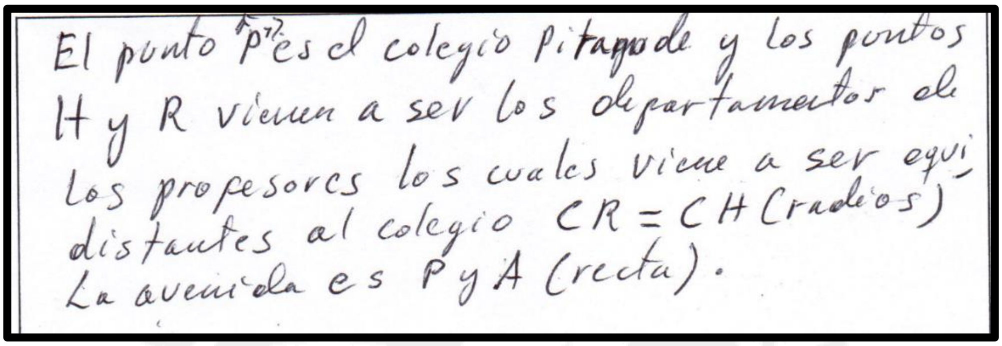

El punto "P" es el colegio Pitagoras y los puntos H y R vienen a ser los departamentos de los profesores los cuales viene a ser equidistantes al colegio CR = CH (radios) La avenida es P y A (recta).

Figura 98. Registro de lengua natural – ítem A – Actividad 4 – Profesor Alberto

Luego de la modelización realizada por el profesor Alberto a través de la conversión del registro de lengua natural a través del enunciado del problema al registro figural a través de la construcción en Geogebra; el profesor procedió a realizar la conversión del registro figural al registro de lengua para responder a la pregunta del ítem A, en el cual el profesor Alberto expresó que si es posible ubicar los departamentos H y R. Pero percibimos que el profesor Alberto relacionó la pregunta con la propiedad de la parábola en base a la propiedad de la circunferencia donde el colegio es el foco de la parábola y un punto de la circunferencia, por lo que el profesor Alberto confundió la propiedad de la circunferencia, ubicando los puntos H y R en la circunferencia pero no pertenecientes a la parábola por lo que incurre a un error por interpretación u omite la propiedad de la parábola como lugar geométrico, asumiendo que las ubicaciones H y R son equidistantes del colegio y de la av. Principal, pero confundió el término distancia puesto que las ubicaciones de H y R hacia la av. Principal es una recta perpendicular. Concluimos que el profesor Alberto movilizó las nociones de la parábola como lugar geométrico en la construcción pero no de manera completa como parte del problema contextualizado sin considerar todas las condiciones señaladas por el problema planteado.

Consideramos que nuestra actividad propuesta a través del registro de lengua natural, direccionó al profesor Alberto para que realice una conversión al registro de lengua natural al registro figural y del registro figural al registro de lengua natural para contestar la pregunta planteada en el desarrollo del ítem A - 1, movilizando nociones de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *posteriori* del Ítem A - 1realizado por el profesor Carlos

La figura 99 mostrada a continuación presenta la respuesta del profesor Carlos:

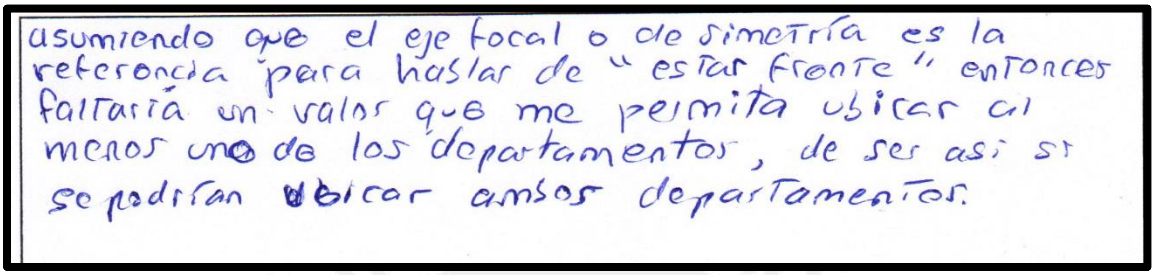

asumiendo que el eje focal o de simetría es la referencia para hablar de "estar frente" entonces faltaría un valor que me permita ubicar al menos uno de los departamentos, de ser así si se podrían ubicar ambos departamentos.

Figura 99. Registro de lengua natural – ítem A – Actividad 4 – Profesor Carlos

Luego de la modelización realizada por el profesor Carlos a través de la conversión del registro de lengua natural al registro figural, el profesor coordinó el registro figural con el registro de lengua natural para responder a la pregunta del ítem A -1, en la que el profesor Carlos expresó que si es posible dichas ubicar los departamentos H y R considerando todas las condiciones del problema y justifica explicando a través del registro de lengua natural los pasos de construcción que realizó en el registro figural por medio del uso del Geogebra. Así mismo, observamos que el profesor Carlos movilizó las nociones de la parábola como lugar geométrico para realizar dicha construcción con las condiciones señaladas así como hizo uso de la herramienta simetría para la ubicación de R, esto significa que alude a la propiedad de la simetría de la parábola.

Consideramos que el problema propuesto en el registro de lengua natural direccionó al profesor Carlos para que realice una conversión al registro figural y del registro figural al registro de lengua natural para responder a la pregunta planteada en el desarrollo del ítem A, movilizando nociones de la parábola como lugar geométrico como la propiedad de la simetría.

***Análisis a priori* del ítem A-2**

Cuando se plantea la pregunta: *¿Existe otras posibles ubicaciones de las casas del Señor Hernández y del Señor Román?* Opinamos que los profesores participantes responderán de manera afirmativa, mediante el registro de lengua natural, puesto que harán uso de la función arrastre para mover el punto móvil sobre la recta directriz y evidenciarán que la ubicación de los departamentos del profesor Hernández y del profesor Román tiene infinitas posibilidades de ubicación considerando todas las condiciones.

Análisis *posteriori* del Ítem A-2 realizado por el profesor Armando

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural:

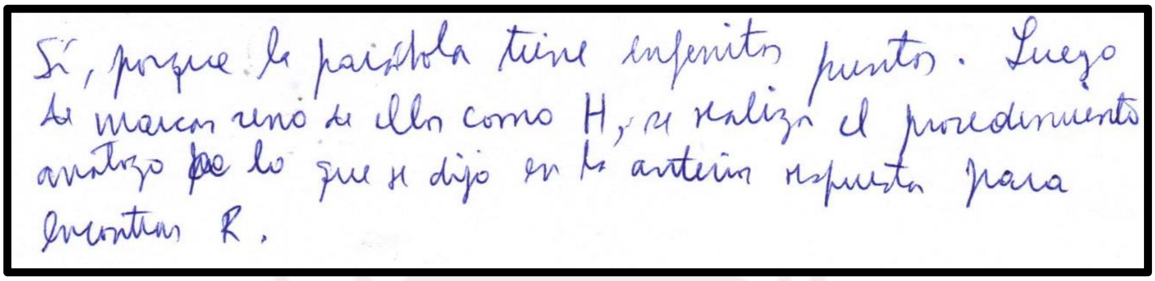

Sí, porque la parábola tiene infinitos puntos. Luego se marcan uno de ellos como H, se realizó el procedimiento análogo por lo que se dijo en la anterior respuesta para encontrar R.

Figura 100. Registro de lengua natural – ítem B – Profesor Armando

En esta pregunta (ver figura 100) el profesor Armando, realizó la coordinación del registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde afirma que si pudo encontrar otras posibles ubicaciones de los departamentos del Señor Hernández y el Señor Román ya que la parábola tiene infinitos puntos. El profesor participante relacionó la pregunta con la propiedad de la parábola para la ubicación de todas las posibles ubicaciones de los departamentos de H y R. Luego procedió a explicar también en el registro de lengua natural cómo encontró los puntos H y R realizando el mismo procedimiento para encontrar otros puntos.

La pregunta: *¿Existe otras ubicaciones de los departamentos del profesor Hernández y del profesor Román?* Direccionó a que el profesor Armando volviera a la construcción del problema en Geogebra a través del registro figural para realizar tratamientos y coordinar éste con el registro de lengua natural para responder a la pregunta, afirmando que si es posible tener otras ubicaciones de los departamentos del profesor Hernández y Román. Observamos que el profesor Armando reconoció la propiedad de la parábola como lugar geométrico y la propiedad de la simetría de la parábola cuando afirma la posibilidad de infinitas ubicaciones de los departamentos H y R.

De esta manera, el profesor Armando ha respondido a la pregunta ya que ha realizado una construcción no prevista a *priori*, pero que es acorde a lo que se pidió de tal manera que logró ubicar que los departamentos del profesor Hernández y del profesor Román, concluyendo que tiene infinitas posibilidades de ubicación considerando todas las condiciones.

Análisis *posteriori* del Ítem A - 2 realizado por el profesor Alberto

A continuación presentamos la respuesta del profesor Alberto, en la figura 101, a través del registro de lengua natural:

Si porque la parabola que pasa por el punto C es el centro de la circunferencia y la intersección de la circunferencia con la parábola son otros 2 puntos que tienen la misma distancia. al colegio Piramide

Figura 101. Registro de lengua natural – Ítem B - Actividad 4 – Profesor Alberto

Para responder a esta pregunta el profesor Alberto, coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde afirma que si es posible encontrar otros 2 puntos referentes a las ubicaciones de los departamentos del profesor Hernández y Román. Como ya lo habíamos mencionado en el análisis anterior, observamos que el profesor Alberto desde la parte de la construcción del modelo matemático del problema, parábola como lugar geométrico, ubica los puntos H y R de manera errónea puesto que no considera las ubicaciones de los departamentos a la misma distancia del colegio y de la av. Principal, pues toma como referencia los puntos H y R como parte de la circunferencia asumiendo se ubican a las misma distancia del colegio y de la av. Principal, esto lo podemos evidenciar a través del registro figural. Por ello, en la pregunta A – 2 el profesor Alberto ubica otros dos puntos en la misma circunferencia interceptándose con la parábola y asume que hay otros dos puntos que cumplen con las condiciones continuando con el error y ello lo podemos evidenciar a través del registro de lengua natural.

De esta manera, el profesor Alberto ha respondido a la pregunta según lo previsto a *priori*, pero que en la fundamentación evidenciamos errores en cuanto a las ubicaciones de los puntos H y R que no es acorde a la fundamentación que habíamos previsto pues no se consideró de manera correcta con todas las condiciones establecidas por el problema planteado.

Análisis *posteriori* del Ítem A - 2 realizado por el profesor Carlos

A continuación presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural:

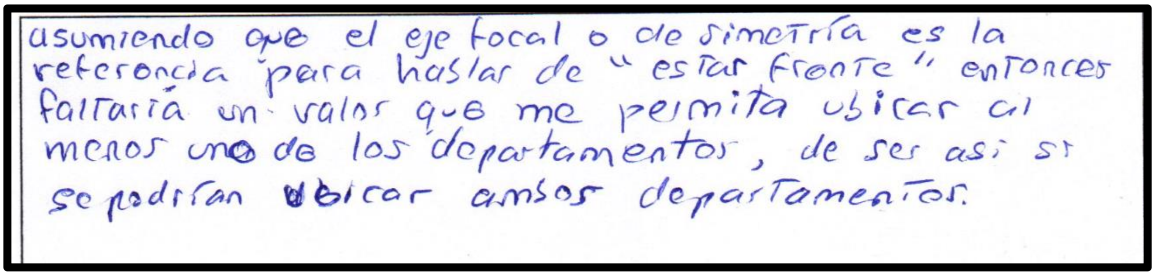

asumiendo que el eje focal o de simetría es la referencia para hablar de "estar frente" entonces faltaría un valor que me permita ubicar al menos uno de los departamentos, de ser así si se podrían ubicar ambos departamentos.

Figura 102. Registro de lengua natural – ítem B – Actividad 4 – Profesor Carlos

En esta pregunta (ver figura 102) el profesor Carlos, coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde afirma que si es posible la ubicación de los departamentos del profesor Hernández y el Señor Román ya que asume que el eje focal o de simetría que tiene la parábola le permite ubicar el punto H y el punto R frente a H, ello en otras palabras por la propiedad de la simetría de la parábola.

El profesor Carlos relacionó la pregunta con la propiedad de la simetría de la parábola para la ubicación de todas las posibles ubicaciones de los departamentos de H y R. Luego procedió a explicar también en el registro de lengua natural el proceso de cómo encontrar los puntos H y R, realizando el mismo procedimiento para encontrar otros puntos.

Cabe mencionar, que los tratamientos realizados dentro del registro figural en la construcción de la figura del problema permitieron articular con el registro de lengua natural al responder la pregunta, relacionado las ubicaciones de los departamentos de H y R con la propiedad de la simetría de la parábola.

De esta manera, el profesor Carlos ha respondido a la pregunta realizando para ello construcciones adicionales no correspondiente a lo previsto *a priori*, pero que es acorde a lo que se pidió de tal manera que logró ubicar que los departamentos del profesor Hernández y del profesor Román, concluyendo que tiene infinitas posibilidades de ubicación considerando todas las condiciones, ello por las construcciones realizadas de otros puntos posibles referidas a la ubicaciones de H y R.

Análisis *a priori* del ítem A-3

Cuando se plantea la pregunta: *Determine gráficamente todas las posibles ubicaciones de los puntos H y R considerando todas las condiciones mencionadas. ¿Cómo se llama la gráfica construida?*

Creemos que los profesores participantes responderán mediante la gráfica completa de todas las posibles ubicaciones de los puntos H y R, para ello los profesores participantes evidenciarán que se trata de la gráfica de la parábola puesto que cumple con todas las condiciones planteadas en el problema. Los profesores participantes representarán la situación mediante el uso del registro figural y responderán de que se trata de una parábola a través del registro de lengua natural.

Análisis *posteriori* del Ítem A - 3 realizado por el profesor Armando

A continuación , en la figura 103, presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural:

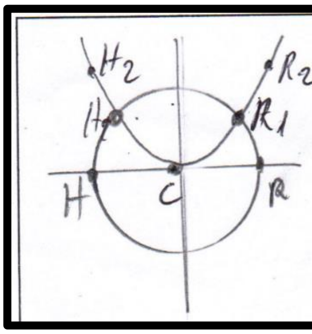
Parábola con foco en P y directriz a.

Figura 103. Registro de lengua natural – ítem C – Profesor Armando

En la pregunta A - 3, el profesor Armando coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde afirma que se trata de una parábola con foco P y directriz a, ello según lo previsto *a priori*.

Análisis *posteriori* del Ítem A - 3 realizado por el profesor Alberto

La figura 104 a continuación muestra la respuesta del profesor Alberto a través del registro figural y el registro de lengua natural:



Los puntos H y R se ubican en la circunferencia y en los puntos equidistantes a la parábola

$HC = CR \Rightarrow H_1C = CR_1 \Rightarrow$

$H_2C = CR_2 \Rightarrow H_3C = CR_3$.

Figura 104. Registro gráfico y registro de lengua natural – ítem C – Profesor Alberto

En esta pregunta, el profesor Alberto coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde afirma que los puntos H y R se ubican en la circunferencia y otros dos puntos equidistantes en la parábola. Aunque el profesor Alberto no hizo mención de que se trata de una parábola, la construcción realizada por él hace referencia implícita de que se trata de una parábola respondiendo de manera afirmativa a la pregunta propuesta.

Análisis *posteriori* del Ítem 3 realizado por el profesor Carlos

Presentamos en la figura 105, la respuesta del profesor Carlos a través del registro figural y del registro de lengua natural:

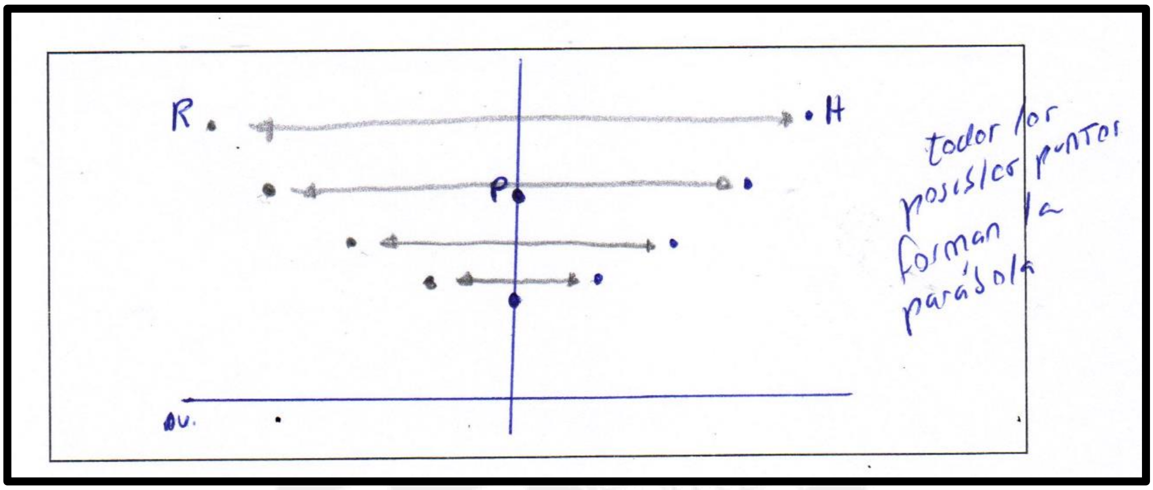


Figura 105. Registro figural – ítem C – Actividad 4 – Profesor Carlos

En esta pregunta, el profesor Carlos coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde afirma que todos los puntos de H y R forman una parábola, respondiendo según lo previsto en el análisis a priori. Observamos en su respuesta que representa todos los posibles puntos de H y R a través de un registro figural.

Análisis a *priori* del Ítem B de la Actividad 4

Ítem B)

B) Ahora active en la misma ventana la apariencia al de algebra y gráficos y modele matemáticamente las condiciones que satisfacen el problema utilizando las nociones trabajadas en las actividades 1 y 2.
1) Describa el modelo matemático. ¿A qué conclusiones puede llegar?

Figura 106. Ítem B – Actividad 4

En esta pregunta, esperamos que los profesores participantes activen la ventana de la apariencia de álgebra y gráficos de la construcción del modelo matemático del problema realizada anteriormente para que puedan modelar matemáticamente el problema planteado, es decir puedan encontrar la ecuación de la parábola y de las coordenadas de los puntos de ubicación de los departamentos del profesor Hernández y el profesor Román así como el colegio y la ecuación de la av. Principal, ello a través del registro gráfico en la dimensión de la geometría analítica y también esperamos que los profesores participantes mencionen algunas conclusiones con respecto al modelo matemático a través de lengua natural.

Presumimos que los profesores participantes puedan pasar de la dimensión de geometría a la dimensión de geometría analítica sin ninguna dificultad así como puedan realizar conversiones y tratamientos dentro de la geometría analítica.

A *priori*, esperamos que los profesores participantes encuentren la distancia del departamento del colegio hacia el departamento del profesor Hernández y del departamento del profesor Hernández hasta la av. Principal, lo cual generará diferentes resultados ya que cada profesor participante ha colocado en diferentes posiciones los puntos que representa el colegio y los departamentos así como la av. Principal y obtendrán diferentes soluciones pero los procesos tienen que ser los mismos

Creemos que cada uno de los profesores participantes determinará su propia ecuación de la parábola según la ubicación de la recta b (Av. Principal) y el punto P (representación como punto de ubicación del colegio).

De esta manera para nuestro ejemplo, nosotros hemos tomado como la recta b, y = 1 y el punto A (1,3) por lo que la representación canónica de la parábola es:

$$(x-1)^2 = 4(y-2)$$

Al final suponemos que los profesores participantes formalizarán todas las nociones trabajadas durante las actividades 1 y 2, es decir, explicamos matemáticamente a partir de las conclusiones de los estudiantes. Colocamos o escribimos matemáticamente todas las condiciones de la parábola como lugar geométrico, es decir, foco eje directriz, propiedad de la parábola, etc Además los profesores entendieron porque al resolver el último problema utilizaron todas las condiciones matemáticas y además las restricciones propias de un problema real.

Análisis *posteriori* del Ítem 1-B realizado por el profesor Armando:

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro de lengua natural:

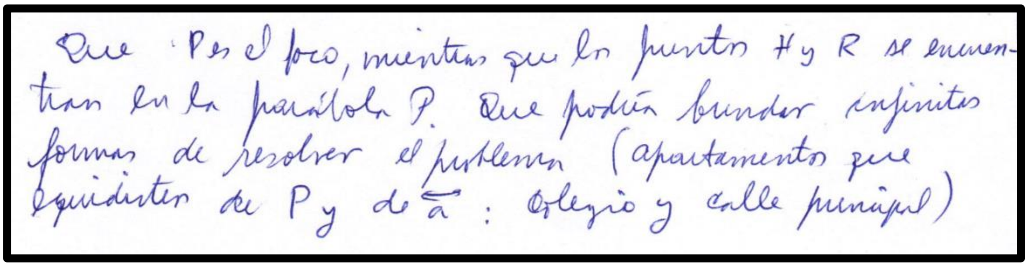

Que Pes el foco, mientras que los puntos H y R se encuentran en la parábola P. Que podrían brindar infinitas formas de resolver el problema (apartamentos que equidisten de P y de $\overline{a}$: Colegio y calle principal)

Figura 107. Registro de lengua natural – ítem 1 b – Actividad 4 – Profesor Armando

En esta pregunta, el profesor Armando (ver figura 107) no modelizó el problema en el registro gráfico, tampoco determinó la ecuación de la parábola por medio del registro algebraico pero concluye a través del registro de lengua natural que P sería el foco y que los puntos H y R pertenecen a la parábola P. Manifestó a su vez, como esperábamos en el análisis a *priori*, que existen infinitas formas de resolver el problema considerando todas las condiciones.

Concluimos que el profesor Armando, no llegó a responder la pregunta como esperábamos a *priori* y solo consideró algunas conclusiones ya mencionadas anteriormente a través del registro de lengua natural, las cuales hacen referencia a la ubicación de los departamentos en la misma parábola y que éstas a su vez podrán ser infinitas dado que cumplen con las condiciones que para nosotros es la propiedad de la parábola como lugar geométrico.

Análisis *posteriori* del Ítem 1-B realizado por el profesor Alberto

A continuación, en la figura 108 presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural:

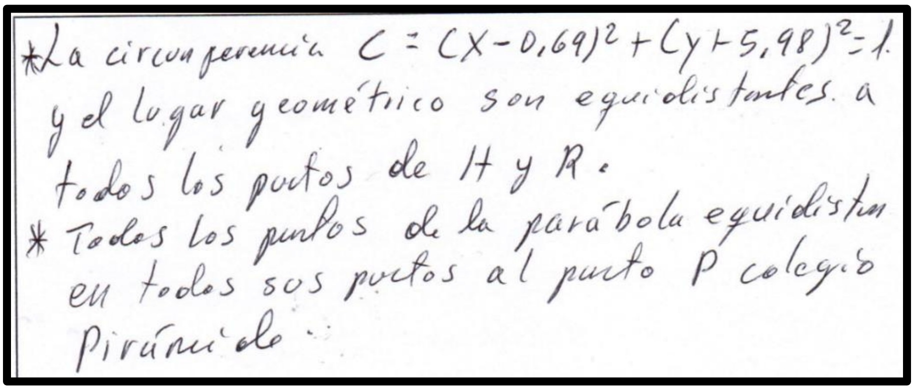

*La circunferencia $C = (X-0,69)^2 + (y+5,98)^2 = 1$.
y el lugar geométrico son equidistantes a todos los puntos de H y R.
* Todos los puntos de la parábola equidistan en todos sus puntos al punto P colegio Pirámide.

Figura 108. Registro de lengua natural – ítem 1B – Actividad 4 – Profesor Alberto

En esta pregunta, el profesor Alberto, no modelizó el problema en el registro gráfico, tampoco generó la ecuación de la parábola a través del registro algebraico, pero si determinó la ecuación de la circunferencia donde el profesor Alberto ubica los puntos H y R ubicaciones de los departamentos de los profesores Hernández y Román. Recordemos que el profesor Alberto ubica los puntos H y R en la circunferencia no pertenecientes a la parábola lo cual hemos evidenciado que es incorrecto y en la pregunta 1 – B afirma que las ubicaciones H y R pertenecen a la circunferencia incurriendo en el mismo error, eso significa que el modelo matemático del profesor Alberto no logró cumplir con todas las condiciones establecidas en el problema porque suponemos que no tomó en cuenta todas las condiciones del problema por una mala interpretación o por una no recuerda la propiedad de la parábola como lugar geométrico.

Concluimos que el profesor Alberto, no llegó a responder la pregunta como esperábamos a *priori* y solo consideró algunas conclusiones ya mencionadas anteriormente a través del registro de lengua natural, las cuales hacen referencia a la ubicación de los puntos H y R y a la equidistancia entre ellos por la propiedad de la circunferencia. A su vez hizo mención de que la ubicación del punto P, referida a la ubicación del colegio equidista con todos los puntos de la parábola, pero no enlaza ello con el problema y sus condiciones, suponemos ello por una mala comprensión del problema.

Análisis *posteriori* del Ítem 1-B realizado por el profesor Carlos

presentamos en la figura 109 la respuesta del profesor Carlos a través del registro gráfico, registro algebraico y el registro de lengua natural:

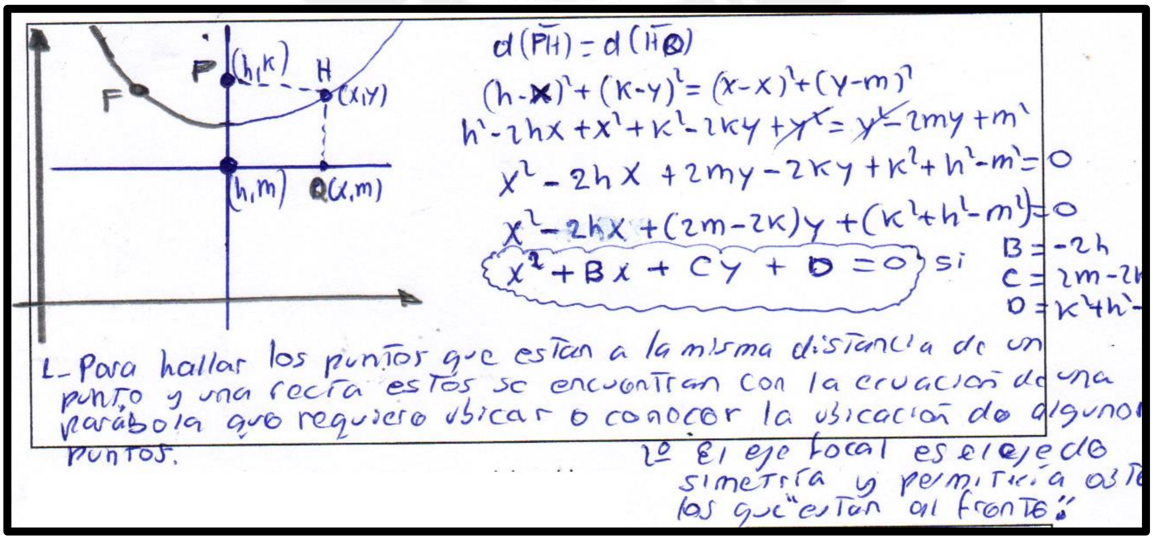


Figura 109. Registro gráfico, algebraico y de lengua natural- ítem 1B – Actividad 4 – Profesor Carlos

En esta pregunta, el profesor Carlos llegó a modelizar el problema y los describe a través del registro gráfico, determinó la ecuación de la parábola a través del registro algebraico y concluyó que para hallar los puntos ubicados a la misma distancia de un punto y de una recta, éstos deben pertenecer a una parábola pues se cumple con la propiedad de la parábola como lugar geométrico. Así mismo el profesor Carlos hizo referencia a la propiedad de la simetría para la ubicación del departamento del profesor Román frente al departamento del profesor Hernández.

Concluimos que el profesor Carlos, llegó a responder la pregunta como esperábamos a priori a través del registro de lengua natural y a través del registro gráfico realizando tratamientos en el registro gráfico y conversiones del registro gráfico al registro de lengua natural.

Análisis a *priori* del Ítem 2 - B de la Actividad 4

Ítem B)

2) Escriba matemáticamente las restricciones del problema.

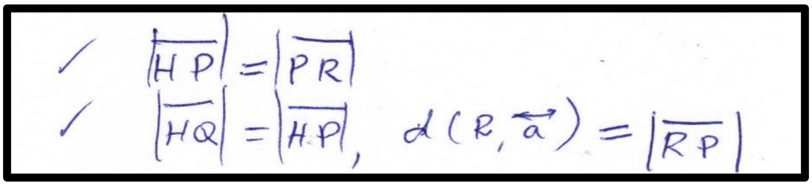
Figura 110. Ítem B 2 – Actividad 4

Para responder a la pregunta B 2 de la actividad 4, nosotros pensamos que los profesores participantes responderán todas las restricciones del problema para que sea una modelización matemática contextualizada a la realidad a través del registro de lengua natural con respecto a la gráfica del registro gráfico construido con el uso del Geogebra.

Creemos que cada uno de los profesores participantes describirán a través del registro de lengua natural diferentes restricciones puesto que ellos han realizado construcciones distintas a la modelización del problema a través del registro gráfico con el uso del Geogebra y en el dominio de la geometría Analítica.

Análisis *posteriori* del Ítem 2-B realizado por el profesor Armando

A continuación presentamos la respuesta del profesor Armando a través del registro algebraico.


✓ $|\overline{HP}| = |\overline{PR}|$

✓ $|\overline{HQ}| = |\overline{HP}|$, $d(R, \vec{a}) = |\overline{RP}|$

Figura 111. Registro de lengua algebraico – ítem 2B – Actividad 4 – Profesor Armando

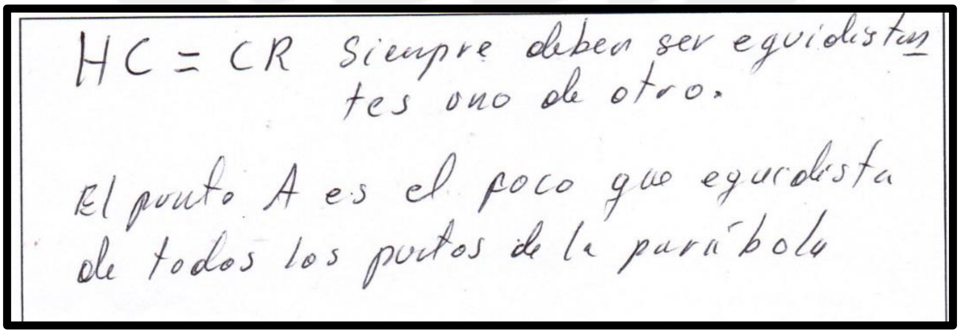
En esta pregunta (ver figura 111) el profesor Armando coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde expresa algunas las propiedades encontradas en su construcción concerniente a la parábola.

Como se evidencia el profesor Armando expresó como restricciones del modelo matemático a la relación de igualdad entre la distancia $|\overline{HP}|$ de un punto H de la parábola, ubicación del departamento del profesor Hernández hacia el foco P y del foco P hacia otro punto de la parábola R, donde $|\overline{HP}| = |\overline{PR}|$

En esta actividad, el profesor Armando, movilizó nociones matemáticas de foco directriz, así como la definición de la parábola como lugar geométrico y las relaciones métricas entre sus elementos realizando cambios de registro entre el figural y el de lengua natural.

Análisis *posteriori* del Ítem 2-B realizado por el profesor Alberto

A continuación, en la figura 112, presentamos la respuesta del profesor Alberto a través del registro de lengua natural:


HC = CR Siempre deben ser equidistantes uno de otro.

El punto A es el foco que equidista de todos los puntos de la parábola

Figura 112. Registro de lengua natural – ítem 2B – Actividad 4 – Profesor Alberto

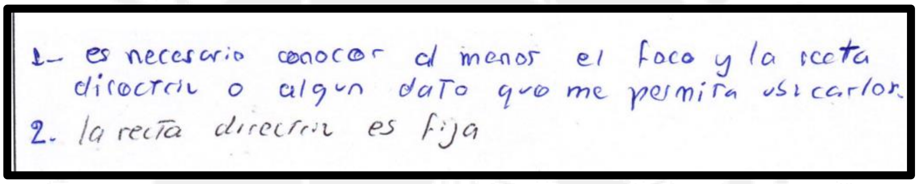
En esta pregunta, el profesor Alberto, coordinó el registro figural de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde expresa algunas de las propiedades encontradas en su construcción concerniente a la parábola consideradas como restricciones del modelo matemático del problema.

El profesor Alberto expresó como restricciones del modelo matemático a la relación de igualdad entre $|\overline{HC}| = \overline{CR}$, relación de equidistancia por la propiedad de la circunferencia ya mencionada en las preguntas anteriores. También hizo mención de que el punto A es el foco que equidista de todos los puntos de la parábola, pero no establece relación con las dos restricciones mencionadas dado que el profesor Alberto se equivocó desde un inicio, suponemos por motivos de interpretación del problema.

En esta actividad, el profesor Alberto, movilizó nociones de la parábola como lugar geométrico, específicamente la parábola en base a la propiedad de la circunferencia pero de manera sesgada pues no establece relación con el problema considerando todas las condiciones planteadas.

Análisis *posteriori* del Ítem 2-B realizado por el profesor Carlos

En la figura 113 a continuación presentamos la respuesta del profesor Carlos a través del registro de lengua natural:



1.- es necesario conocer el menor el foco y la recta directriz o algun dato que me permita ubicarlos

2. la recta directriz es fija

Figura 113. Registro de lengua natural – ítem 2B – Actividad 4 – Profesor Carlos

En la pregunta B – 2, el profesor Carlos, coordina el registro gráfico de la construcción realizada en Geogebra con registro de lengua natural en donde expresa algunas restricciones a través de algunas de las propiedades encontradas en su construcción concerniente a la parábola.

Como se evidencia en la figura 113, el profesor Carlos expresó como restricciones del modelo matemático a la necesidad de conocer el menor valor del foco y la recta directriz o un dato que le permita ubicarlos. Así mismo, destacó que es necesario establecer que la recta directriz debe ser fija, suponemos que para que el modelo matemático sea más real al no movilizarse por el espacio.

CONSIDERACIONES FINALES

Como hemos visto en las investigaciones, la existencia de problemas con respecto a la comprensión de la parábola como lugar geométrico; creemos que esta problemática podría ser resultado de la forma como se enseña por parte de los profesores y pensamos que se debe a que no tienen conocimientos básicos, o porque no conocen la tecnología o que simplemente la conocen pero no la saben utilizar para sus clases de matemáticas. Es por ello, que pensamos que en la formación continua de los profesores se hace necesario trabajar nuevamente estos conceptos matemáticos, como la parábola, con Geogebra.

A continuación presentamos algunos aspectos que juzgamos importantes en la tesis como: marco teórico y metodológico utilizando la parte experimental, los principales resultados y nuevas perspectivas de investigación.

Marco teórico y metodológico

Consideramos que los aspectos utilizados en nuestro referencial teórico, Registro de Representación Semiótica sustentado por Duval (1999) para efectos de nuestra investigación fue crucial porque nos ayudó a comprender cómo los profesores movilizaban las nociones de la parábola como lugar geométrico y en el proceso de analizar la coordinación entre los registro de lengua natural y figural así como entre los registros gráfico y algebraico como también sus respectivos tratamientos. Por otro lado, empleamos la metodología de investigación la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), porque nos ofreció subsidios para orientar nuestra investigación.

Desarrollamos las cuatro fases que la metodología propone: Análisis preliminar, concepción y análisis *a priori*, experimentación y análisis *posteriori* y validación. Los estudios preliminares nos dieron referencia sobre la interferencia entre el significado y significante y la importancia de los AGD que posibilita la movilización de los conocimientos preliminares de manera dinámica, según lo afirma Laborde (1994).

Las actividades planteadas en la experimentación fueron diseñadas para observar y analizar la coordinación entre los tratamientos y conversiones de los registro figural, el registro de lengua natural, registro gráfico y registro algebraico; aunque en general se evidenció que dicha coordinación está en proceso.

Se empleó como recurso el Geogebra para las construcciones de la parábola como lugar geométrico de cada una de las actividades que se planteó. Podemos concluir que dichas actividades con Geogebra favorecieron la movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico, así como en los análisis de sus respuestas en cada una de las preguntas planteadas de cada actividad.

Principales resultados de la investigación:

Con respecto a la pregunta y objetivos de investigación, a continuación presentamos los principales resultados de la pregunta de la investigación: *¿Cómo profesores de matemática movilizan la noción de parábola como lugar geométrico, cuando desarrollan una secuencia en la que utilizan diferentes registros de representación semiótica?*

El proceso de movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico se dio en forma parcial porque solo se evidencia la coordinación entre los registros figural y lengua natural y los registros gráficos con el algebraico, mediado por el Geogebra. Los profesores mostraron alguna deficiencia en la coordinación del registro de lengua natural con el registro figural y el registro gráfico sobre todo en la última actividad sobre la modelización del problema, lo que no permitió una conversión entre registros.

Con respecto al cumplimiento de nuestro objetivo general, *Analizar cómo profesores de matemática movilizan la noción de parábola como lugar geométrico, cuando desarrollan una secuencia en la que utilizan diferentes registros de representación semiótica* podemos decir lo siguiente:

En el análisis del proceso de movilización de las nociones de la parábola como lugar geométrico pudimos observar que la mayoría de los profesores, coordinan mejor el registro figural de la construcción de la parábola con el registro de lengua natural, realizando tratamientos y conversiones en los mencionados registros.

Con respecto a los objetivos específicos, nosotros hemos diseñado cuatro actividades que permitieron la movilización de los diferentes tipos de registros por lo que hemos logrado identificar los registros de representación semiótica que utilizan los profesores cuando movilizan la noción de la parábola como lugar geométrico con el Geogebra.

Con respecto al primer objetivo específico, nosotros hemos logrado *identificar los registros de representación semiótica que utilizan los profesores en formación continua cuando movilizan la noción de la parábola como lugar geométrico con el uso del Geogebra.* Hemos observado que los profesores participantes utilizaron al menos dos tipos de registros de representación semiótica para un mismo objeto, la parábola como lugar geométrico, para cada una de las actividades planteadas. Específicamente, para la actividad 1 y 2 utilizaron los registros de lengua natural y el registro figural y en la actividad 3 y 4 utilizaron los registros de lengua natural, el registro gráfico y el registro algebraico. Por lo que podemos decir también, que ello favoreció el funcionamiento del pensamiento evidenciándose en los tratamientos y conversiones entre los diferentes registros mencionados que realizaron los profesores participantes.

Con respecto al segundo objetivo específico, nosotros hemos logrado *estudiar los tratamientos y las conversiones en los registros de lengua natural figural, gráfico, y algebraico que utilizan los profesores en formación continua al desarrollar la secuencia de actividades que movilizan la noción de parábola como lugar geométrico.* Hemos observado que los profesores participantes lograron una mayor comprensión de la parábola como lugar geométrico cuando movilizaban las nociones en cuanto a las construcciones a través del registro de figural y gráfico pero había dificultad en realizar conversiones con los registros de lengua natural.

Hemos evidenciado que los profesores participantes lograron realizar las conversiones del registro de lengua natural al registro figural mientras que tenían mayor dificultad la conversión del registro gráfico con el registro algebraico.

También, hemos logrado que nuestros profesores representen la parábola como lugar geométrico en diferentes registros de representación semiótica y hacer que realicen los tratamientos y conversiones en registros de representación semiótica

En cuanto al diseño de actividades sobre la parábola como lugar geométrico en situaciones que no necesitan de un sistema de coordenadas notamos que favoreció el reconocimiento y comprensión de la definición puramente geométrica y al estudio de las propiedades intrínsecas.

Consideramos que la secuencia de cuatro actividades favoreció la movilización de los diversos saberes geométricos desde una perspectiva distinta al enfoque algebraico y que ello permitió que los profesores comprendieran mejor las relaciones que hay en las propiedades de la parábola como lugar geométrico.

La secuencia de actividades planteadas posibilitaron que los profesores participantes de nuestra investigación comprendieran las diferentes formas de obtener una parábola en el dominio de la geometría, propiciando la coordinación entre registros de lengua natural al registro figural. Así como la tercera actividad de nuestra investigación permitió relacionar la noción de la parábola como lugar geométrico en el dominio de la geometría analítica favoreciendo la conversión del registro gráfico con el registro algebraico, lo cual posibilitó una mayor comprensión del objeto matemático puesto que al trabajar con por lo menos dos registros de representación semiótica realizando tratamientos y conversiones avalamos una mayor comprensión del objeto matemático al realizar la movilización de las nociones de la parábola según Duval (2009).

Además, las actividades propuestas con el uso del Geogebra favorecieron que los profesores participantes movilizaran las nociones de la parábola como lugar geométrico tanto en el dominio de la geometría y el dominio de la geometría analítica realizando conversiones y tratamientos. Es decir, los profesores trabajaron las nociones de la parábola como lugar geométrico en el dominio de la geometría, enlazando a su vez en el dominio de la geometría analítica para que los profesores pudieran analizar al objeto mencionado realizando los tratamientos y conversiones lo cual implica una mayor comprensión del objeto matemático.

Observamos también que las fundamentaciones en sus tratamientos a través de los registros de lengua natural en su mayoría son correctas pero que algunos casos lo expresan como una descripción. Evidenciamos a su vez que algunos profesores tienen mayor dificultad en realizar conversiones del registro gráfico al algebraico debido a que se requiere realizar mayor coordinación entre sus elementos de distintos registros, el cual se encuentra en proceso.

Hemos observado que cuando los profesores realizaban tratamientos en registro algebraico no conseguían el resultado correcto, suponemos al hecho de no relacionar sus conocimientos previos sobre el álgebra.

En la parte experimental de la tesis, observamos que los profesores no consiguen movilizar porque algunos de ellos no tienen la noción de la parábola como lugar geométrico ellos piensan que la representación de la función cuadrática es una parábola pues la representación es similar a la representación de la parábola como lugar geométrico, ellos confunden la representación con el objeto.

Hemos observado también que algunos profesores no consiguen relacionar la definición de la parábola como lugar geométrico “distancia del punto al foco es igual a la distancia del punto a la directriz”, puesto que en una de las actividades planteadas, específicamente la primera parte de la actividad 3, se les pedía que encontraran la ecuación de la parábola como lugar geométrico luego de haber generado la gráfica representativa, pero algunos docentes no podían realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

Pensamos que nuestros sujetos de estudio a pesar de su formación como profesores de Matemática, nos hace reflexionar que algunos profesores de Matemáticas no tienen un manejo claro sobre las nociones de la parábola y confunden muchas veces con la gráfica de la función cuadrática puesto que le dan mayor énfasis a la parte algébrica.

El uso del Geogebra cumplió un rol importante en el desarrollo de las construcciones dinámicas, pues al interactuar con las herramientas del software para el desarrollo de la construcción de la parábola, los profesores lograron movilizar las nociones de la parábola como lugar geométrico de una manera dinámica, comprendiendo el concepto, elementos y propiedades de la misma.

Así mismo cabe resaltar, que el Geogebra ha cumplido su papel mediador como herramienta dinámica en la construcción de la parábola como lugar geométrico, los profesores participantes pudieron observar, reconocer, movilizar propiedades y elementos geométricos que se utilizaron para la construcción de la parábola. Las actividades planificadas estimularon a que los profesores participantes realicen la coordinación del registro figural con el registro de lengua natural y la coordinación del registro gráfico con el registro algebraico.

Cabe resaltar que las actividades planificadas permitieron que la mayoría de los profesores participantes movilizaran las nociones de la parábola como lugar geométrico en el dominio de la geometría y en el dominio de la geometría analítica. Ellos pudieron pasar del domino de la geometría al dominio de la geometría analítica sin darse cuenta del cambio del dominio, realizando la coordinación de al menos dos registros de representación del objeto matemático. De esta manera, en el dominio de la geometría realizaron la coordinación del natural con el registro figural con sus tratamientos respectivos y en el domino de la geometría analítica realizaron la coordinación del registro geométrico al algebraico con sus tratamientos respectivos.

Perspectivas futuras

Pensamos que para futuras investigaciones dejamos abiertas la posibilidad de estudios como: investigar sobre la movilización de las nociones de parábola como lugar geométrico en problemas contextualizados utilizando tecnología en una formación de profesores de matemáticas; Investigar sobre el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de otros lugares geométricos también en una formación continua de profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Chumpitaz, D. (2013*) La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediados por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería*. [Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas]. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Duval R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Colombia: Grupo editorial Merlín I.D.

Duval, R. (2009). *Semiosis e pensamento humano*: *Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira-São (Trad.). Paulo: Editora Livraria da Física.

Editorial Norma (2013). *Matemática para pensar 1*. Lima: Grupo editorial Norma S.A.C.

Editorial Santillana (2013). *Matemática- Hipervinculos1*. Lima: Santillana S.A.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus.* [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strasser, R. (2006*). Teaching and Learning Geometry with Technology*. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers.* Recuperado de https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-researchon-the-psychology-of-mathematics-educationa.pdf.

Lehmann, Ch. (2003). *Geometría Analítica*. Versión en español por R. García. México, D.F: Editorial LIMUSA, S.A. Trigésimo quinta impresión.

León, J. y otros (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en estudiantes de arquitectura y gestión de proyectos.* [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

López, J. y otros (2013). *La comprensión del concepto de parábola: Un estudio de caso.* [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Lopes, S. (2014). *Una secuencia didáctica para la enseñanza de la parábola en como lugar geométrico.* [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Pontificia Universidad Catolica de Sao Paulo.

Moncayo, C. y otros (2012). *Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Geometre II Plus.* [Tesis de Licenciatura]. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Perú, Ministerio de Educación del Perú (2008). *Matemática para el quinto grado de educación secundaria.* Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de EBR.* Lima. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2005). Unidad de Medición de la Calidad. Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. *Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria.* Recuperado de: http://www2.minedu.gob.pe/.

Perú, Ministerio de Educación (2007). Orientaciones para el trabajo Pedagógico (OTP). Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2013). PISA 2012: *Primeros resultados. Informe Nacional del Perú*. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc

ANEXOS

Parábola como Lugar Geométrico

Nombres y apellidos: ____

Fecha: 09 /02 /15

ACTIVIDAD 1

Construya con Geogebra sin utilizar ninguna herramienta "Cónica – Parábola":

Nota: En esta actividad no se requiere de ejes ni de cuadrículas.

Objeto fijo: Clic derecho – propiedades – check en cuadrito de objeto fijo.

Enunciado:

Encuentre el **punto P** que equidista tanto de la ***recta d*** como al punto exterior a ***F.***

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya una ***recta d***. (Objeto fijo)
2. Coloque un ***punto F*** que no pertenezca a la ***recta d***. (Objeto fijo)
3. Coloque un ***punto Q*** sobre la recta d con la opción ***punto en objeto.***
4. Trace una ***recta perpendicular n*** a la ***recta d*** y que pase por el ***punto Q.***
5. Trace el ***segmento QF.***

Luego, responda las siguientes preguntas:

A) Si P es un punto que equidista tanto de la ***recta d*** como del punto F. Dicho punto P, pertenecerá en la mediatriz del segmento QF? Justifique su respuesta.

B) ¿Cómo podrías determinar otros puntos equidistantes de la ***recta d*** y del punto ***F***? Explique

Habilite **el rastro** en el punto P y mueva Q. Luego represente la trayectoria que genera P cuando se mueve Q, utilizando la ***herramienta lugar geométrico.***

C) Dado el punto P, perteneciente a la parábola. Trace los segmentos PF y PQ que representan las distancias del punto P al foco F y a la ***recta d*** respectivamente. Construya el triángulo de vértices P, Q, F y desplace el punto Q. ¿Cómo clasificarías al triángulo Δ PQF cuando desplazas el ***punto Q*** sobre la ***recta d***? Justifique.

D) Existe alguna relación entre el lugar geométrico de la curva con la construcción del triángulo? Justifique su respuesta.

Coloque en la carpeta del curso de **teorías de la enseñanza** (carpeta: **SECUENCIA DE ACTIVIDADES-ISABEL LARA**) sus respuestas en texto, en el archivo Geogebra y guarde la **Actividad _1 < ACT_1_APELLIDOS >**

<u>ACTIVIDAD 2</u>

Construya con Geogebra sin utilizar ninguna herramienta "Cónica – Parábola":

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya una ***recta d.*** (Objeto fijo)

2. Coloque un ***punto A*** que no pertenezca a la ***recta d***. (Objeto fijo)

3. Coloque un ***punto B*** que pertenezca a la ***recta d***.

3. Grafique una ***circunferencia de centro C***, que pase por los ***punto*** A y que sea tangente a la

Luego, responda las siguientes preguntas:

A) Describa cómo construyó la ***circunferencia de centro en C*** indicando las propiedades geométricas que fueron movilizadas.

B) Si desplaza el punto B sobre la recta d ¿qué relación existe entre la longitud de los segmentos CA y CB? Justifique su respuesta. Encuentre el lugar geométrico generado por el punto C.

C) La relación hallada en el ítem B), ¿permite ser vinculada al lugar geométrico de la parábola? Justifique su respuesta ¿Qué elementos de la parábola se asocian a los puntos A y B de la actividad 2?

Coloque en la carpeta del curso de teorías de la enseñanza (carpeta: SECUENCIA DE ACTIVIDADES-ISABEL LARA) sus respuestas en texto, en el archivo Geogebra y guarde la Actividad _2 < ACT_2_APELLIDOS >

ACTIVIDAD 3

Construya la representación gráfica de la parábola utilizando las propiedades en la actividad 1 y 2 con foco en el punto F (2,3) y cuya recta directriz es paralela al eje de abscisas, que pasa por el punto A (0, -2). Tome un punto P en la recta d y determine un punto Q de la parábola. No debe usar la

A) Determine los puntos P, Q y la expresión algebraica de la parábola en la forma general, haciendo uso de la definición del lugar geométrico de dicha curva. Luego, utilizando la herramienta *"Parábola"* del Geogebra compruebe su respuesta en la vista gráfica.

B) Determine la expresión algebraica de la parábola con foco en el punto F (0, d), recta directriz con ecuación y =- d, siendo P(x, y) un punto perteneciente a la parábola y d un número real distinto de cero.

Coloque en la carpeta del curso de **teorías de la enseñanza** (carpeta: **SECUENCIA DE ACTIVIDADES-ISABEL LARA**) sus respuestas en texto, en el archivo Geogebra y guarde la **Actividad _3 < ACT_3_APELLIDOS >**

ACTIVIDAD 4

Construya con Geogebra:

En la ciudad de Lima, viven los profesores colegas de Matemática: el profesor Hernández y el profesor Román, quienes trabajan en el mismo colegio particular “Pirámide” y que se encuentran cansados de que les descuenten todos los días por llegar tarde a su centro de labores debido al tránsito caótico que existe en Lima.

Por eso, desean mudarse y estuvieron buscando departamentos que sean cercanos a su centro de trabajo y a la av. Principal. Ambos profesores buscaron y encontraron excelentes ubicaciones de dos departamentos; ya que dichos departamentos se ubican en a la misma distancia del centro del colegio y de la av. Principal. Ahora ambos colegas viven tranquilos porque ya no les descuentan y casi siempre llegan a la misma hora pues el profesor Hernández vive al frente del profesor Román.

A. Utilizando la apariencia geometría del Geogebra y modelice el problema utilizando las propiedades antes vistas. Representa la construcción de los puntos H (Hernández) y R (Román), puntos de las ubicaciones de la casas y el punto P (Colegio). Considere restricciones para construir la representación geométrica y responda a las siguientes preguntas justificando sus respuestas:
   1. ¿Se pueden construir ambas casas considerando todas las condiciones? Justifique.
   2. ¿Existe otras posibles ubicaciones de las casas del Señor Hernández y del Señor Román? Explique.

3. Determine gráficamente todas las posibles ubicaciones de los puntos H y R considerando todas las condiciones mencionadas. ¿Cómo se llama la gráfica construida?

B. Ahora active en la misma ventana la apariencia al de algebra y gráficos y modele matemáticamente las condiciones que satisfacen el problema utilizando las nociones trabajadas en las actividades 1 y 2.

1. Describa el modelo matemático. ¿A qué conclusiones puede llegar?
2. Escriba matemáticamente las restricciones del problema.

Coloque en la carpeta del curso de **teorías de la enseñanza** (carpeta: **SECUENCIA DE ACTIVIDADES-ISABEL LARA**) sus respuestas en texto, en el archivo Geogebra y guarde la **Actividad _4 < ACT_4_APELLIDOS >**