

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



PUCP

**PROCESO DE VISUALIZACIÓN DEL PARABOLOIDE EN
ESTUDIANTES DE ARQUITECTURA MEDIADO POR EL GEOGEBRA**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

TITO NELSON PEÑALOZA VARA

Dirigida por

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

San Miguel, 2016





The more I learn, the more I realize how much I don't know

Albert Einstein

DEDICATORIA

A mis padres, por estar siempre presentes en todos mis proyectos de formación profesional y académica, particularmente en la realización de esta nueva aventura en el campo de la investigación en didáctica de la matemática, apoyándome con sus sabios consejos y motivaciones para la conclusión de la misma.



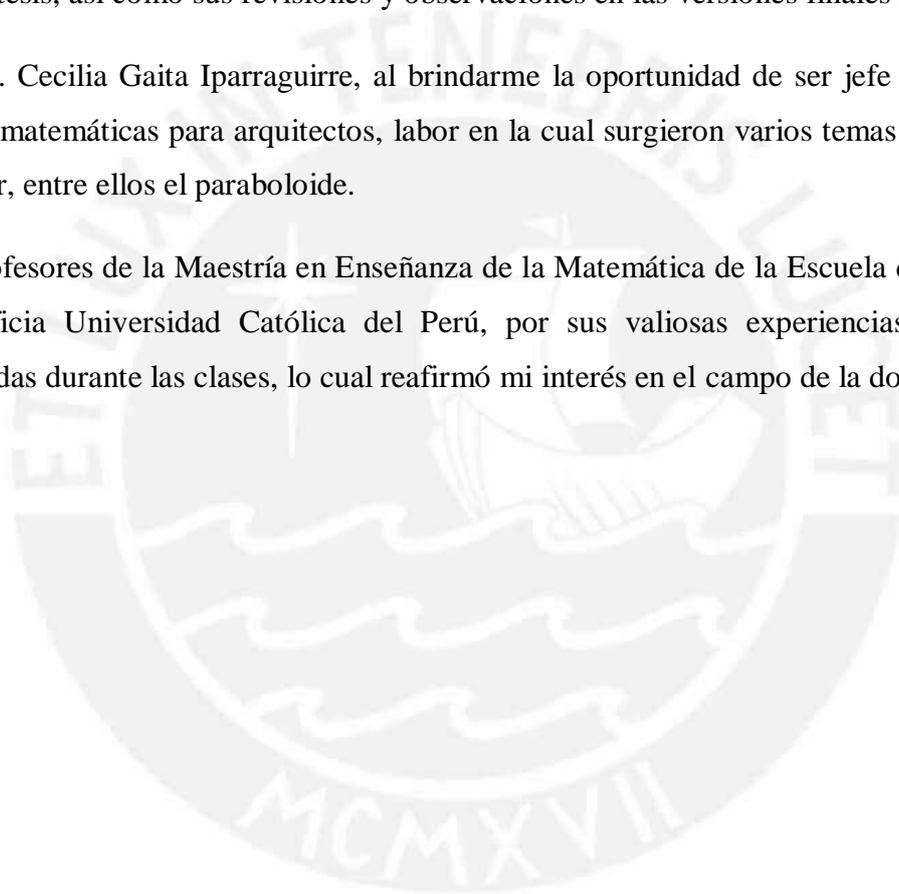
AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su apoyo permanente en la investigación, revisión y sugerencias oportunas, que permitieron mejorar todas las versiones preliminares y la versión final de la presente investigación.

A los miembros del jurado, Dra. Katia Vigo Ingar y Dra. Maria José Ferreira da Silva, por sus valiosas contribuciones y sugerencias realizadas en las exposiciones de los avances de la presente tesis, así como sus revisiones y observaciones en las versiones finales de la misma.

A la Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, al brindarme la oportunidad de ser jefe de práctica del curso de matemáticas para arquitectos, labor en la cual surgieron varios temas de interés para investigar, entre ellos el paraboloides.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por sus valiosas experiencias profesionales transmitidas durante las clases, lo cual reafirmó mi interés en el campo de la docencia.



RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo analizar el proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura de una universidad privada en Lima, Perú, mediante una secuencia didáctica mediada por el Geogebra. Para dicha labor, hemos revisado antecedentes de investigación los cuales tienen como objeto matemático superficies cuádricas y figuras tri-dimensionales de la geometría espacial elemental, así como el uso de la tecnología para representarlos, y su aplicación en la parte experimental de sus instrumentos de recolección de datos, lo cual nos puede inspirar en el diseño de nuestras actividades. Así mismo, hemos justificado la realización de nuestra tesis en aspectos académicos, personales y profesionales para indicar la importancia de la ejecución de nuestro trabajo. El marco teórico de la visualización de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1995), nos da las herramientas necesarias para comprender e interpretar el proceso de visualización del paraboloides. La metodología para lograr el objetivo general de nuestra investigación, dada su naturaleza cualitativa experimental, lo hemos tomado de aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), cuyos lineamientos estructuran la forma de nuestro trabajo. Para la experimentación, hemos seleccionado dos estudiantes quienes participaron en tres actividades, dos de ellas mediadas por el software Geogebra 3D.

Finalmente, hemos concluido que las herramientas del software Geogebra 3D, favorecen el desarrollo de aprehensiones de los estudiantes en el registro gráfico del paraboloides, y el marco teórico de la TRRS nos permite explicar cómo se desarrolla el proceso de visualización, así como la identificación de las dificultades por las cuales los estudiantes no visualizan.

Palabras clave: Visualización, Paraboloides, Registro Gráfico, Geogebra 3D

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Esferas de Dandelín.....	18
Figura 2. Elipse k como proyección en un plano de una circunferencia k'	18
Figura 3. Transformación de una Representación Semiótica en otra.....	28
Figura 4. Clasificación de variables visuales del paraboloides.....	38
Figura 5. Variables visuales de un paraboloides con eje paralelo al eje X	40
Figura 6. Vistas por defecto de la ventana principal de <i>Geogebra</i>	49
Figura 7. Ventana principal de <i>Geogebra 3D</i>	50
Figura 8. Ingreso de puntos en la vista gráfica 3D de <i>Geogebra 3D</i>	53
Figura 9. Rectas en <i>Geogebra 3D</i>	54
Figura 10. Planos en <i>Geogebra 3D</i>	54
Figura 11. Deslizadores en <i>Geogebra</i>	55
Figura 12. Ecuación del plano $z = 1$, para $k = 1$	56
Figura 13. Planos paralelos al plano XY	56
Figura 14. Ingreso a Preferencias de la Vista Gráfica 3D.....	57
Figura 15. Rotulación del eje X	57
Figura 16. Ejes cartesianos con vista principal el cuarto octante.....	58
Figura 17. Rotación de la vista gráfica 3D.....	59
Figura 18. Íconos para acercar / alejar la vista gráfica 3D.....	59
Figura 19. Ocultamiento de la Caja de Recorte de la Vista Gráfica 3D.....	60
Figura 20. Gráfico del paraboloides $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$	60
Figura 21. Ventana de Preferencias.....	61
Figura 22. Gráfica de un paraboloides en <i>Geogebra 3D</i> representado por trazas.....	62
Figura 23. Gráfica del paraboloides $S : z = \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9}$ por defecto.....	63
Figura 24. Gráfica del paraboloides $S : z = \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9}$ rotado y desplazado.....	64

Figura 25. Clasificación de las cuádricas.	72
Figura 26. Ejercicio desarrollado del paraboloides $16x^2 + 25z^2 = 400y$	78
Figura 27. Representación gráfica de la superficie $z = 4x^2 + y^2$ por trazas.....	80
Figura 28. Intersecciones entre los planos $x = k$ con la traza del paraboloides con el plano $z = 0$	81
Figura 29. Correspondencia entre puntos de curvas abiertas y cerradas.	82
Figura 30. Representación gráfica de la parábola $y^2 = 9z, x = 0$ en el plano y el espacio.....	91
Figura 31. Representación gráfica de la parábola $x^2 = 4z, y = 0$ en el plano y el espacio.....	92
Figura 32. Representación gráfica del corte de S con el plano $z = 0$	93
Figura 33. Corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Jacinta.....	93
Figura 34. Gráfica del corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Jacinta.....	94
Figura 35. Corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Jacinta.....	94
Figura 36. Gráfica del corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Jacinta.....	95
Figura 37. Registro algebraico y gráfico del corte de S con el plano $z = 0$, realizado por Jacinta.....	95
Figura 38. Corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Alexandra.	96
Figura 39. Gráfica del corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Alexandra.	97
Figura 40. Corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Alexandra.	97
Figura 41. Gráfica del corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Alexandra.	97
Figura 42. Registro algebraico y gráfico del corte de S con el plano $z = 0$, realizado por Alexandra....	98
Figura 43. Gráfica de los cortes elípticos proyectados en el plano XY y en el espacio.....	101
Figura 44. Cortes de S con dos planos paralelos al plano $z = 0$, realizado por Jacinta.....	102
Figura 45. Gráfico de los cortes de S con los planos $z = 1, z = 2$ realizado por Jacinta.	102
Figura 46. Cortes de S con dos planos paralelos al plano $z = 0$, realizado por Alexandra.	103
Figura 47. Gráfico de los cortes de S con los planos $z = 1, z = 2$ realizado por Alexandra.....	104
Figura 48. Gráfica de la superficie S	105
Figura 49. Representación gráfica de la superficie S realizado por Jacinta.....	106
Figura 50. Gráfica de la superficie S realizado por Alexandra.	107
Figura 51. Restricciones de la variable cartesiana z en la superficie S obtenido por Jacinta.	109

Figura 52. Restricciones de la variable z en la superficie S obtenido por Alexandra.	110
Figura 53. Archivo en Geogebra 3D para la actividad 2.	112
Figura 54. Rotaciones en la representación gráfica del paraboloides.	113
Figura 55. Forma de las curvas cerradas $T1$ y $T2$	114
Figura 56. Coordenadas de los puntos A y B obtenidas por Jacinta.	116
Figura 57. Ecuaciones de las curvas $T1$ y $T2$ obtenidas por Jacinta.	117
Figura 58. Procedimiento realizado por Jacinta para obtener los radios de $T1$ y $T2$	117
Figura 59. Coordenadas de los puntos A y B obtenidas por Alexandra.	118
Figura 60. Ecuaciones de las curvas $T1$ y $T2$ obtenidas realizado por Alexandra.	118
Figura 61. Error en reconocimiento de los radios de $T1$ y $T2$ realizado por Alexandra.	119
Figura 62. Cortes de S con los planos $x=0$, $y=0$ realizado por Jacinta.	123
Figura 63. Identificación por medio de Geogebra del corte de S con el plano $x=0$	123
Figura 64. Ecuaciones de los cortes de S con los planos $x=0$, $y=0$ realizado por Jacinta.	124
Figura 65. Cortes de S con los planos $x=0$, $y=0$ realizado por Alexandra.	124
Figura 66. Cortes de S con los planos XY , YZ , XZ , $y = 4$, $y = 8$	130
Figura 67. Cortes de S' con los planos XY , YZ , XZ , $y=4$	131
Figura 68. Cortes de S con los planos indicados realizado por las estudiantes.	132
Figura 69. Identificación de los cortes por las estudiantes.	133
Figura 70. Vértices y centros de las elipses realizado por las estudiantes.	135
Figura 71. Procedimiento del ítem (b) realizado por Jacinta.	135
Figura 72. Procedimiento del ítem (b) realizado por Alexandra.	136
Figura 73. Gráfico de los planos $z=4$, $x=3$, realizado por Jacinta y Alexandra.	136
Figura 74. Plano $z=4$ proyectado como un segmento, realizado por Jacinta y Alexandra.	137
Figura 75. El eje del paraboloides (recta L).	139
Figura 76. Eje y vértice del paraboloides identificados por Jacinta.	140
Figura 77. Interpretación gráfica del término (-12) realizado por Jacinta.	140
Figura 78. Eje y vértice del paraboloides identificados por Alexandra.	141
Figura 79. Interpretación gráfica del término (-12) realizado por Alexandra.	141

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Registros de representación semiótica del paraboloides.....	27
Cuadro 2. Aprehensión perceptiva del paraboloides.....	30
Cuadro 3. Aprehensión secuencial del paraboloides mediante Geogebra 3D.....	30
Cuadro 4. Aprehensión discursiva de un paraboloides elíptico.	31
Cuadro 5. Modificación óptica en la representación gráfica del paraboloides S.....	33
Cuadro 6. Modificación posicional del paraboloides.	33
Cuadro 7. Deconstrucción dimensional del paraboloides.	35
Cuadro 8. Variables visuales y unidades significantes del paraboloides.	41
Cuadro 9. Unidades significantes del paraboloides.	44
Cuadro 10. Plan de estudios de Arquitectura de la PUCP, niveles 1 y 2	65
Cuadro 11. Plan de estudios de Arquitectura de la UL, niveles 1 al 4.	66
Cuadro 12. Plan de estudios de Arquitectura de la UPC, niveles 1 y 2.....	67
Cuadro 13. Textos de Consulta.....	75
Cuadro 14. Actividades de la parte experimental de la presente investigación.....	86

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES.....	11
CAPITULO I: PROBLEMÁTICA.....	13
1.1 Antecedentes.....	13
1.2 Justificación.....	21
1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.....	25
1.4 Pregunta y Objetivos de la Investigación.....	45
1.5 Aspectos de Ingeniería Didáctica.....	45
CAPITULO II: ANÁLISIS PRELIMINAR.....	49
2.1 Superficies Cuádricas en el Geogebra.....	49
2.2 Superficies Cuádricas en cursos de Arquitectura.....	65
2.3 Reseña Histórica de las Superficies Cuádricas.....	68
2.4 El Paraboloide.....	70
2.5 Revisión de Libros Didácticos.....	75
CAPITULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS.....	83
3.1 Escenario donde se desarrolla la Experimentación.....	83
3.2 Análisis de las actividades.....	85
CONSIDERACIONES FINALES.....	145
REFERENCIAS.....	150
ANEXOS.....	153
1 Ficha de la Actividad Introdutoria al Software Geogebra 3D.....	154
2 Fichas de las Actividades de la Experimentación.....	155
3 Fichas de preguntas para la Entrevista a los estudiantes.....	162

CONSIDERACIONES INICIALES

Nuestro interés por analizar el proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura, surgió a raíz de observar que, estudiantes del primer curso de matemáticas de la carrera de arquitectura, manifiestan dificultades en graficar superficies cuádricas dada su ecuación en tres variables. Creemos que los aspectos teóricos y metodológicos de la didáctica de las matemáticas, nos brindan herramientas necesarias para realizar nuestro análisis.

La presente tesis tiene como objetivo general analizar el proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura en una secuencia didáctica mediada por el Geogebra, y para ello debemos analizar cómo se desarrolla el proceso de visualización del paraboloides, por ello es importante establecer el marco teórico para identificar aspectos de visualización en el registro gráfico del paraboloides, así como el marco metodológico para lograr alcanzar nuestro objetivo general.

Para todo ello, hemos considerado estructurar la tesis en capítulos, de la siguiente manera:

El primer capítulo aborda la problemática de investigación, en la cual hemos realizado una revisión de antecedentes de investigaciones en torno al paraboloides u objetos espaciales, la justificación de nuestra investigación, el marco teórico tomando como referente aspectos de visualización de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), y los aspectos metodológicos tomados de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) lo cual establecerá la estructura de nuestra tesis.

El segundo capítulo trata sobre el análisis preliminar, y reúne aspectos relacionados con el paraboloides: su representación en la vista gráfica de Geogebra 3D, cursos de Arquitectura en los cuales se estudia al paraboloides, reseña histórica de las superficies cuádricas para situar al paraboloides en el campo del conocimiento humano, estudio matemático del paraboloides, y una revisión de libros didácticos que son de consulta para los estudiantes de Arquitectura.

Finalmente, el tercer capítulo trata sobre el experimento y análisis, en el cual se describe el escenario donde se realiza la investigación: descripción de los sujetos de investigación, recursos e instrumentos a ser utilizados, la descripción de las actividades y, finalmente, un análisis a priori y posteriori de dichas actividades mediante el análisis de los datos recolectados, y la respectiva confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori según la Ingeniería Didáctica para validación.

Debemos resaltar que la presente tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación *DIMAT* de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP/PERÚ y *PEA-MAT* de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, PUC-SP/ BRASIL, titulado: “*Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT*” y aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP) proceso: 2013/23228-7 y por PI0272 (PUCP).



CAPITULO I: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo, exponemos los antecedentes de investigación, la justificación para realizar nuestra tesis, el marco teórico y metodológico, así como la pregunta y objetivos de investigación.

A continuación, presentamos cinco antecedentes en torno a investigaciones relacionadas directa e indirectamente con el objeto matemático paraboloides.

1.1 Antecedentes

Consideramos importante revisar la bibliografía de investigaciones sobre las superficies cuádricas, con la finalidad de identificar parte del conocimiento actual que se dispone sobre estudios de visualización del paraboloides, y justificar cuál es el aporte de nuestra tesis ante tal conocimiento. Para ello, hemos seleccionado cinco publicaciones entre artículos, tesis y reportes de investigación, los cuales se relacionan directa o indirectamente con nuestro objeto matemático.

En esta parte del trabajo, presentamos investigaciones realizadas en el área de Educación Matemática como las de Ingar (2014); Salazar, Gaita y Saravia (2013); Schumann (2005); López y Anido (2004); Gutiérrez y Jaime (2015); las cuales guardan estrecha relación con el marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), el objeto matemático Paraboloides (la superficie o sus cortes), y la utilización de recursos tecnológicos para proponer actividades que permitan a los estudiantes realizar conversiones entre los registros gráfico y algebraico del paraboloides, y tratamientos en dichos registros. En nuestro caso, estamos interesados en estudiar cómo se desarrolla el proceso de visualización en los estudiantes al movilizar la noción de paraboloides.

Ingar (2014) tomó la noción de visualización en el registro figural definida por Duval (1995), para definir el marco teórico de visualización en el registro gráfico de los valores máximos y mínimos locales en una función real de dos variables reales, estudio el cual realizó con estudiantes del curso Matemáticas III de la Universidad Nacional del Callao (UNAC), Facultad de Ingeniería Pesquera y Alimentos, Perú, el cual es dictado durante el tercer semestre de estudios de todas las carreras de Ingeniería de dicha universidad, en particular la especialidad de Ingeniería de Alimentos. La autora observó diversos aspectos presentes

durante la enseñanza de las funciones reales de dos variables, siendo los más relevantes para nuestros propósitos los siguientes:

- Los ejercicios del tema *funciones reales de varias variables* desarrollados en clase por los docentes, son aplicaciones algorítmicas puntuales de teoremas y definiciones precisas, sin tomar en consideración los registros gráficos ligados a dicho objeto. Las representaciones gráficas son empleadas en las definiciones de manera icónica (Ingar, 2014, p. 19), y no permite al estudiante realizar tratamiento alguno en dichos registros.
- Los docentes no utilizan el software *Mathematica* en el dictado de clases, el cual está disponible en el laboratorio informático de la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos. Dicho software podría contribuir con la construcción de significados en los estudiantes.

Dada la naturaleza cualitativa de dicha investigación, la metodología de investigación utilizada por Ingar (2014) fue la Ingeniería Didáctica (ID). La estructura del trabajo fue la siguiente: estudio de investigaciones en torno a la enseñanza de funciones reales de dos variables reales; análisis preliminar mediante una reseña histórica del cálculo de funciones de varias variables, análisis de textos empleados en el dictado del curso Matemáticas III en la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos de la UNAC, y descripción de aspectos básicos del *software Mathematica* para el diseño de los instrumentos de la fase experimental.

La fase experimental y de análisis se llevó a cabo en el laboratorio informático de la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos, en la cual se trabajó con diez estudiantes agrupados en cinco duplas quienes cursaban el curso Matemáticas III por primera vez, y tenían conocimientos básicos del *software Mathematica CAS*. El equipo de observadores participantes, estuvo conformado por el docente del curso Matemáticas III y cuatro colegas de la autora quien también es docente de dicha asignatura.

La primera situación didáctica en la fase experimental, consistió en inducir a los estudiantes a percibir la existencia de valores máximos y mínimos locales de una función de dos variables de la forma $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$ a partir de nociones básicas de economía, ya que dichos estudiantes llevan el curso Ingeniería Económica y Financiera durante el mismo semestre (Ingar, 2014, p. 114). La representación gráfica de dicha función f en la cual, los coeficientes a y b son de signo negativo e iguales, corresponde a un paraboloide circular que se abre hacia el semieje negativo del eje Z , superficie previamente estudiada por los alumnos. Los estudiantes de uno de los grupos consiguieron desarrollar el proceso de visualización,

porque en la representación de la función lineal *demanda*, establecieron relaciones entre las variables visuales para representar la gráfica de dicha función y sus variables significantes en el registro algebraico, ya que mediante tratamientos en el registro algebraico al hallar la pendiente, interceptos y puntos de paso, obtienen las variables visuales definidas por Duval (1995) de la función lineal afín que les permitirán realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico.

Así mismo, la función *lucro* la cual depende de dos variables reales, al ser expresada por los estudiantes en la forma canónica: $L = -(q_1 - 480)^2 - (q_2 - 400)^2 + 390340$, lograron identificar el tipo de superficie y el valor máximo de la función, lo cual les permitió representarla en el registro gráfico, es decir, han visualizado. Esta situación a–didáctica propuesta por la autora, se relaciona con el reconocimiento de coordenadas de puntos importantes para poder representar curvas en el registro gráfico, la cual conjuntamente con otros elementos tales como ejes focales, dirección en que se extienden las curvas abiertas, puntos de paso, vértices, etc., facilitarán al estudiante la representación gráfica del paraboloides.

Entre las conclusiones obtenidas en la investigación de Ingar (2014), destaca el hecho que el software *Mathematica CAS* contribuyó al aprendizaje de los valores máximo y mínimo locales de funciones reales de dos variables reales, ya que permite a los estudiantes reconocer, manipular, construir significados y establecer conjeturas en representaciones gráficas de funciones reales de dos variables definidas algebraicamente, en particular aquellas que no son reconocidas por el estudiante. (p. 177).

Otro aspecto importante a considerar en esta investigación, es que es la primera tesis que encontramos que estudia el proceso de visualización de los valores máximos y mínimos locales de funciones reales de dos variables reales, con la utilización de tecnologías y recursos informáticos.

En cuanto al estudio de superficies en el que se utiliza la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) como referencial teórico, presentamos un estudio de superficies realizado por Salazar, Gaita y Saravia (2013) el cual se realizó con estudiantes de un primer curso de Matemáticas I de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Facultad de Arquitectura y Urbanismo (FAU). Las investigadoras observaron los errores cometidos por los estudiantes al representar gráficamente las superficies cuadráticas generadas por los puntos $P = (x; y; z)$ de una ecuación en tres variables a partir de sus trazas con planos paralelos a los planos: $x = 0$; $y = 0$; y $z = 0$, respectivamente, por lo cual las autoras

formularon la siguiente pregunta: ¿El software *Mathematica* puede ser utilizado como mediador en la enseñanza y aprendizaje de diferentes contenidos matemáticos, en particular el tema de superficies? Para responder a esta pregunta de investigación, Salazar et al, utilizaron como marco teórico aspectos de la TRRS relacionados con visualización.

Además Salazar et al, tomaron como base investigaciones que muestran “como estudiantes construyen significados mediados por ambientes tecnológicos, específicamente por ambientes de geometría dinámica” (p. 7168).

En la fase experimental, las autoras diseñaron una secuencia de actividades divididas en dos etapas: una etapa realizada a lápiz y papel, y luego el empleo del software *Mathematica* para contrastar lo realizado en la primera etapa. Para ello, veinte estudiantes en calidad de ingresantes, quienes cursaban un primer curso de matemáticas en la FAU de la PUCP, realizaron tratamientos en el registro algebraico de una superficie cuádrica determinada, para obtener los cortes de dicha superficie con los planos: $x = 0$; $y = 0$; y $z = 0$, respectivamente; dichos cortes, corresponden a las secciones cónicas previamente estudiadas. Seguidamente, los estudiantes realizaron cortes con planos paralelos a los planos mencionados para, finalmente, realizar una representación gráfica de la superficie requerida por medio de los cortes obtenidos.

En la segunda etapa, los estudiantes emplearon el software *Mathematica*, mediante el ingreso de los parámetros en la sintaxis del comando `ContourPlot3D`, para graficar la superficie propuesta e identificar las secciones generadas en los planos de corte. En el artículo se evidencia el trabajo realizado por un estudiante en torno al paraboloide circular, el cual mediante tratamientos en el registro gráfico, identificó la forma de los cortes de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados con lo cual “se apropió del comando y además que consiguió relacionar la actividad que había desarrollado con lápiz y papel con la que trabajó usando el Mathematica” (Salazar et al, 2013, p. 7175).

Luego de la parte experimental y del análisis de las actividades con base en la TRRS y su ampliación a la visualización, las autoras señalaron que el software *Mathematica* ayudó a validar o refutar las conjeturas de los estudiantes al enfrentarse a situaciones de cambios de dimensión, de 2D a 3D, por medio de tratamientos en el registro gráfico y el desarrollo del proceso de visualización.

Pensamos que las actividades para la fase experimental de nuestra investigación, deberían ser diseñadas de manera análoga a las realizadas por las autoras en su investigación, en nuestro

caso, con el paraboloides circular y elíptico por medio del software *Geogebra 5.0*, el cual cuenta con las herramientas requeridas para nuestros propósitos.

La tercera investigación que presentamos tiene relación directa con los cortes del paraboloides con planos secantes, ya que el estudio de las cónicas es la base para movilizar la noción de paraboloides. El trabajo de Schumann (2005) el cual sintetizamos, establece que el estudio de las secciones cónicas se ha limitado al tratamiento de dicho objeto en dos dimensiones “lo cual es una paradoja en vista de la naturaleza del objeto e incluso de su propio nombre” (Schumann, 2005, p. 25), lo cual puede ser causado, de acuerdo con el investigador, por falta de métodos convencionales que no brindan un ambiente en tres dimensiones para la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas por medio de sus representaciones gráficas.

Además, al ser el software *Cabri 3D V2* (desarrollado en el año 2004) el primero en su género en proporcionar un ambiente de trabajo en geometría dinámica, con posibilidad de manipular directamente las representaciones de figuras y objetos geométricos, y dado el creciente interés por incorporar sistemas de geometría dinámica en la enseñanza y aprendizaje de objetos representados en 3D, el autor propone una introducción adecuada al estudio de las secciones cónicas por medio de un conjunto de actividades en el software *Cabri 3D*. En el artículo no se menciona el nivel educativo a quienes va dirigido la secuencia de actividades, pero dado el nivel requerido para ejecutar las construcciones, consideramos que el nivel académico es de Formación de Profesores.

Las actividades propuestas por el autor, comprenden desde la construcción de un cono circular recto hasta cortes de dicha superficie con planos en distintas posiciones relativas al eje del cono, para reconocer las secciones cónicas por intersección. Luego, para el reconocimiento de cada sección por su definición, el autor utiliza las Esferas de Dandelín, las cuales ayudan a determinar por tangencia de superficies las posiciones de los focos de cada cónica. Las esferas de Dandelín son dos esferas, tangentes interiormente a un cono circular recto y a un plano secante al cono, por ambos lados del plano. Cada esfera, a su vez, intersecta al cono en una circunferencia. Cualquier recta generatriz del cono al intersectar a las dos circunferencias y a la curva de intersección del plano con el cono (cónica), obteniéndose puntos y segmentos, permite comprobar la condición geométrica de la cónica.

En la figura 1, mostramos las esferas de Dandelín tangentes al cono y al plano secante a dicho cono.

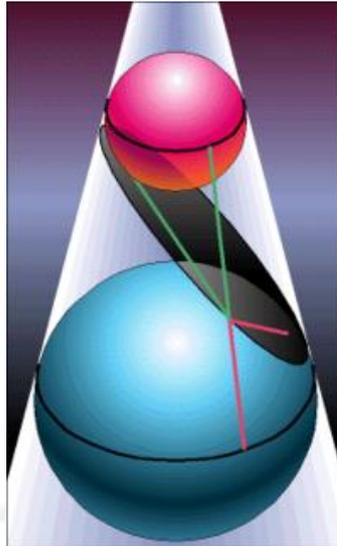


Figura 1. Esferas de Dandelin.

Fuente: https://pt.wikipedia.org/wiki/Esferas_de_Dandelin

Los puntos de tangencia de las esferas con el plano, son los focos de la curva resultante de la intersección del plano con el cono. En la figura 1 tal curva corresponde a una elipse.

Finalmente, Schumann (2005) utiliza un plano de proyección perpendicular a la base de un cono oblicuo para representar en dicho plano (rebatido) las secciones cónicas desplazando la posición del vértice del cono, realizándose estas construcciones en un mismo plano de proyección. En la figura 2, mostramos una elipse k como la proyección en un plano objetivo (object plane) de una circunferencia k' , obtenida mediante intersección del plano de proyección (projection plane) con un cono oblicuo.

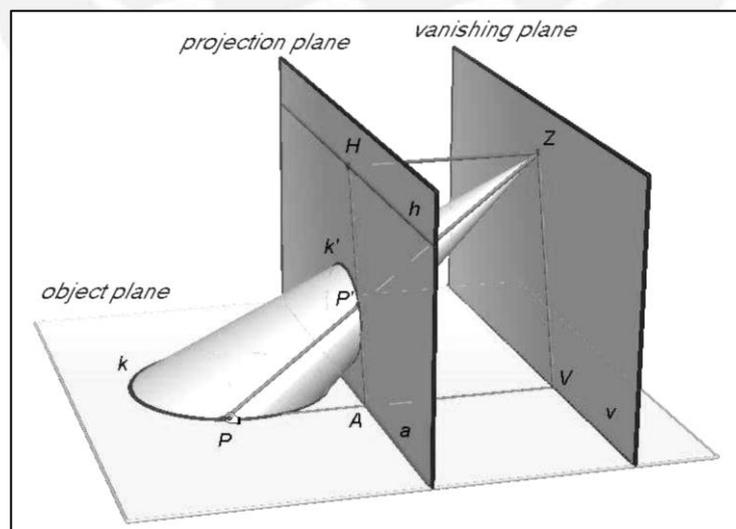


Figura 2. Elipse k como proyección en un plano de una circunferencia k' .

Fuente: Schumann (2005, p. 34)

En la figura 2, si un observador estuviese situado en el punto Z , vería ambas curvas cerradas, k y k' como elipses superpuestas, pero al ser representadas ambas curvas en el plano de proyección (projection plane), la circunferencia k' se mostraría en verdadera magnitud, mientras que la elipse k se representaría como un segmento, dado que los planos objetivos y de proyección son perpendiculares.

Schumann (2005) concluye que, por medio del software *Cabri 3D*, el usuario podrá estudiar de manera óptima en un entorno virtual, las representaciones de las secciones cónicas que se generan, al intersectar un cono con planos secantes en distintas posiciones relativas respecto de su eje.

López y Anido (2004) afirman que: “una variedad de estudios y nuestra experiencia directa, revelan que el conocimiento de la Geometría demostrado no solo por los estudiantes sino incluso por graduados en Arquitectura e Ingeniería es deficiente” (López y Anido, 2004, p. 1). El objetivo de esta investigación es determinar, en una etapa introductoria, cómo los estudiantes interpretan situaciones que involucran objetos representados en el espacio, y relacionan las representaciones de dichos objetos en tres dimensiones, y sus cortes representados en dos dimensiones.

La investigación se dirigió a estudiantes del primer año de estudios de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario – Argentina, y estuvo orientada a profundizar el conocimiento geométrico “identificando su génesis, estructura y modificaciones en el contexto social y cultural en el que se desarrolla” (López y Anido, 2004, p. 3) desde una perspectiva epistemológica, con fundamentos teóricos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y las fases de aprendizaje del Modelo de Pensamiento Geométrico de Van Hiele, tomando como mediador cognitivo un asistente matemático, en este caso el software *MAPLE V – Herramienta CAS*, para el desarrollo de las situaciones a–didácticas entre los estudiantes y el profesor.

Dada la dificultad de los estudiantes en esbozar la gráfica del paraboloides hiperbólico comúnmente denominado “silla de montar”, el cual tiene una gran variedad de aplicaciones en el campo de las estructuras, construcción civil y arquitectura entre otros, los autores proponen a los estudiantes analizar intersecciones, proyecciones, rotaciones, entre otros, intercambiando las variables x , y , z de la siguiente ecuación ordinaria de dicha superficie:

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$$

Luego, en la etapa experimental de la investigación de López y Anido (2004), los estudiantes deben esbozar la gráfica de la superficie correspondiente a la ecuación propuesta, para ello, deben realizar tareas tales como reconocer cortes con planos paralelos que se alejan/acercan a los planos coordenados, entre otros, los cuales conllevarán al reconocimiento de dicha superficie. Se evidencia el diálogo entre un profesor y algunos estudiantes, en el análisis de estos diálogos, los investigadores sitúan los alcances de dichos estudiantes en las situaciones a–didácticas de acción, formulación, e incluso en la situación a–didáctica de validación (tercer momento).

Los autores concluyen que, el trabajo realizado con ayuda del software *MAPLE V – Herramienta CAS*, facilita el nivel de pensamiento geométrico desarrollado por los estudiantes en las diversas actividades ubicándolos en las fases de aprendizaje de Van Hiele, para obtener el diagnóstico respectivo con miras a replantear los métodos de enseñanza desde los primeros años de las carreras de Ciencias e Ingeniería, controlar y reducir las deficiencias presentes en los egresados de dichas formaciones profesionales.

Por otro lado, Gutiérrez y Jaime (2015) llevaron a cabo una investigación experimental en geometría espacial mediado por el software *Cabri 3D*, realizada con un estudiante del segundo curso de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO), destacado en habilidades matemáticas (considerado como superdotado) quien no poseía instrucción alguna ni conocimientos en geometría espacial, y utilizaba únicamente conceptos de geometría plana para la justificación de sus conjeturas. La problemática surge a raíz de la escasez de contenidos de geometría en la educación primaria de España, acrecentándose esta situación en temas de geometría del espacio en la ESO. Dado el reciente desarrollo de software de geometría dinámica y por ende la aparición de nuevas herramientas didácticas, se ha logrado incrementar el reconocimiento de la importancia de la geometría lo cual permite realizar experimentos, estudios y exploraciones en la forma cómo se logran dichos aprendizajes.

Los objetivos de tal investigación fueron: primero, aportar información sobre los procesos de aprendizaje de conceptos de geometría del espacio; y segundo, aportar información sobre la viabilidad de los entornos de enseñanza de geometría del espacio basados únicamente en el uso de programas de geometría dinámica 3–dimensional. El marco teórico empleado se fundamentó en el modelo de las imágenes conceptuales de Vinner y el modelo de los niveles de razonamiento y pensamiento geométrico de Van Hiele. La metodología utilizada fue el Estudio de Casos dada la escasez de investigaciones en el nivel indicado.

La parte experimental estuvo conformada por treinta y cuatro actividades, las cuales a su vez, se subdividieron en dos etapas: la primera por un cuestionario escrito a lápiz y papel con el fin de reafirmar conocimientos matemáticos previos, luego la segunda etapa comprende un conjunto de actividades realizadas en el software *Cabri 3D* las cuales son monitoreadas por el investigador (profesor) quién durante el desarrollo de las actividades constantemente formuló preguntas de razonamiento tipo deductivo. Luego, se retomó la primera etapa a lápiz y papel, se analizó las estrategias utilizadas por el estudiante quien ya tuvo una interacción previa con el software *Cabri 3D*, y se midió en qué grado el software permitió sentar las bases del nuevo conocimiento sobre geometría espacial (evolución de los conocimientos del estudiante).

Los resultados de la parte experimental de la investigación de Gutiérrez y Jaime (2015), mostraron que el estudiante sentó paulatinamente las bases para el aprendizaje de la geometría del espacio, en la medida que su capacidad de visualización se desarrollaba, elevando su nivel de razonamiento de Van Hiele de 2 al nivel 3. Creemos que, la principal limitación de esta metodología es que se diseñó exclusivamente para estudiantes sobresalientes y destacados, lo cual excluye al estudiante promedio como foco de futuras exploraciones con la parte experimental de esta investigación. Sin embargo, los autores sugieren diseñar otro tipo de actividades para estudiantes de distintas capacidades y llegar “tan lejos en el aprendizaje como se pueda” (Gutiérrez y Jaime, 2015, p. 79).

En las investigaciones, artículos y publicaciones revisadas, se evidencian aprendizajes logrados por estudiantes de diversos grados de instrucción, apropiándose éstos, en algunos casos, de la herramienta tecnológica nueva empleada en la fase experimental de cada investigación, y en otros lográndose el aprendizaje del objeto matemático tratado en cada investigación. En nuestro caso, pretendemos que sea el estudiante quien desarrolle sus aprehensiones al proponérsele situaciones problema en torno a representaciones del paraboloides, en las cuales deba utilizar las propiedades y el conocimiento en general aprendido, y así, analizar los resultados con fundamentos teóricos y metodológicos que permitan dar respuesta a la pregunta de investigación.

A continuación presentamos aspectos relacionados con la justificación de nuestra tesis.

1.2 Justificación

En nuestra labor docente, hemos percibido que los estudiantes, al iniciar estudios de geometría analítica plana, presentan dificultades de naturaleza algebraica. Los errores en las

transformaciones realizadas en el registro algebraico para obtener la ecuación de un lugar geométrico determinado, corresponden a errores secuenciales en las operaciones de suma, resta, multiplicación, reducción de términos semejantes, entre otros, debido a “la abstracción y generalización de las matemáticas” (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 74).

Hemos observado dificultades en los procedimientos de resolución de los estudiantes respecto a preguntas y problemas propuestos del tema *Gráfica de una ecuación en tres variables*, en donde los tipos de preguntas más representativos son los siguientes:

- Dada la ecuación cartesiana en tres variables, graficar la superficie.
- Dadas las formas de las trazas de la superficie con determinados planos de corte, determinar la ecuación de dicha superficie y graficarla.
- Dada una representación gráfica de una superficie cuádrada, establecer una posible ecuación de dicha superficie y luego graficarla.

En el estudio de las superficies cuádradas, el concepto de simetría es fundamental para la representación gráfica del paraboloides, dado que las secciones cónicas poseen: primero, el caso de la hipérbola y elipse, dos ejes de simetría mutuamente perpendiculares; segundo, el caso de la parábola, posee un solo eje de simetría (el eje focal). Dicha propiedad, facilita la representación gráfica de la superficie mencionada; por este motivo, las ecuaciones correspondientes a las trazas de dicha superficie con planos paralelos a los ejes coordenados, no deben poseer errores en operaciones algebraicas ni aritméticas durante sus tratamientos.

Pensamos que los estudiantes, al graficar una superficie dada su ecuación cartesiana por medio de trazas o cortes (siendo éstas las secciones cónicas estudiadas previamente), no incluyen información pertinente en sus procedimientos, sobre las estrategias y procesos de abstracción mentales utilizados para graficar curvas, y establecer conexiones entre dichas curvas y la superficie; en la mayoría de situaciones, esta información no forma parte de sus respuestas en las evaluaciones.

Nuestro interés es obtener dicha información no presentada por los estudiantes de forma tangible en torno al paraboloides, cuya representación gráfica es una superficie de suma importancia y aplicación, tanto en modelización y optimización de valores de funciones de varias variables como en situaciones reales de aplicación en los campos de la ciencia y tecnología, tales como las telecomunicaciones (antenas satelitales), energía (paneles solares, hornos), iluminación (reflectores, linternas), entre otros. Creemos que, con este estudio, podemos identificar las posibles causas del bajo rendimiento académico de los estudiantes al

resolver problemas relacionados con la gráfica de ecuaciones en tres variables, resultados que podrían ser de interés para futuras investigaciones.

Por otra parte, Salazar et al (2013), evidencian estudios en torno a “preocupaciones cognitivas con relación a la matemática o a los significados construidos para su enseñanza cuando se desarrollan actividades medidas por ambientes tecnológicos” (p. 7168). En nuestro medio, dichas investigaciones son de escasa difusión y/o inéditas por lo cual con la presente deseamos contribuir con un estudio de visualización del paraboloides en estudiantes que llevan un primer curso de matemática, mediado con el software *Geogebra 5.0*.

Señalamos que el presente estudio puede ser dirigido a estudiantes de ciencias e ingeniería, ya que el estudio de las superficies cuádricas forma parte de cursos de matemática en esas especialidades, tal como se evidencia en el sílabo del curso Matemáticas III de la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos de la UNAC (Ingar, 2014, p. 194) dada su importancia en el estudio de la gráfica de funciones multivariantes.

Las propiedades geométricas de los elementos de la representación gráfica del paraboloides y, en general, de las superficies cuádricas, son conocidas por el hombre desde los albores de la civilización, y se evidencia su aplicación en obras arquitectónicas antiguas.

Al respecto, Ibáñez (2009) asegura que:

[...] La Geometría, y más generalmente la Matemática, ha estado presente en la Arquitectura desde el momento en el que el hombre siente la necesidad de construir un hogar donde guarecerse de las inclemencias de la naturaleza, descansar o mantenerse alejado de sus enemigos, ya sea excavando en cuevas, construyendo chozas o montando tiendas, y siente además la necesidad de construir lugares especiales para enterrar y venerar a los muertos o adorar a los dioses. [...] Parece evidente para cualquiera que siendo la forma y la estructura tan importantes en el diseño de las obras arquitectónicas, la Geometría y las Matemáticas sean una parte fundamental de la Arquitectura. (p. 155).

Por ello, consideramos que el estudio de las superficies cuádricas, en particular el caso del paraboloides, es importante en la formación profesional de un estudiante de Arquitectura, dado que las formas de las superficies de construcciones arquitectónicas clásicas y modernas tales como cúpulas, represas, ambientes acústicos, domos, etc., pueden ser modelizados matemáticamente por medio de la ecuación del paraboloides (cartesiana o paramétrica), y así lograr un mayor rigor en la forma y diseño de aquellas construcciones dado que, al obtener la ecuación de una superficie en particular, puede conocerse la posición de cualquier punto de dicha superficie respecto a un sistema de referencia y determinarse propiedades físicas y

tecnológicas de puntos críticos tales como esfuerzos, cargas críticas, momentos flectores, entre otros, los cuales permitirán garantizar la solidez y durabilidad de dichas construcciones.

En nuestra labor docente, empleamos en ciertas circunstancias dichos tipos de software para mostrar a los estudiantes el comportamiento de las propiedades entre los elementos de un lugar geométrico determinado, al variar algunos de los parámetros de su ecuación cartesiana, ya sean coeficientes, signos, distancias, etc., habiéndose obtenido resultados más que satisfactorios dada la correspondencia dinámica que brinda el software utilizado entre las vistas algebraica y gráfica del lugar geométrico en cuestión, lo cual no es factible de ser realizado en pizarra, ni mucho menos, con intervenciones de los estudiantes.

Pensamos que los estudios relativos a la enseñanza y aprendizaje de superficies cuádricas, mediados por un ambiente de geometría dinámica, aún son escasos, por ello también consideramos pertinente realizar nuestra investigación con el uso del Geogebra 3D.

Como es sabido, durante la primera mitad de la década pasada, se desarrolló el software Cabri 3D, el cual es el primero en su género en ofrecer una presentación virtual (simulación) tri-dimensional de representación de objetos espaciales en una interfaz de pantalla plana, y surgieron varias propuestas didácticas para representar y realizar tratamientos de representaciones de las secciones cónicas por medio de herramientas y comandos de Cabri 3D. Como consecuencia de lo expuesto, surgen investigaciones en torno a las etapas o fases del aprendizaje del estudiante con el objeto matemático superficie cuádrica, y cómo los medios tecnológicos pueden favorecer en el desarrollo de tal tarea.

Nosotros estamos interesados en el proceso de visualización del paraboloides que representa gráficamente a una función real de dos variables reales, siendo algunas de las formas de su representación algebraica las siguientes:

$$z = f(x, y) = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + w; \forall a, b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

cuya gráfica corresponde a un paraboloides elíptico ($a \neq b$) o circular ($a = b$) el cual se extiende indefinidamente desde el punto (h, k, w) hacia el semieje positivo del eje Z, o bien:

$$z = f(x, y) = \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + w; \forall a, b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

expresión cuya gráfica corresponde a un paraboloides hiperbólico el cual no forma parte de nuestra investigación.

Es por esta razón que proponemos utilizar el software *Geogebra 5.0* para la fase experimental de nuestro trabajo, porque pensamos que los estudiantes de un primer curso de matemática (Matemáticas I) de la carrera de Arquitectura, manifiestan en el aprendizaje de las superficies cuádricas dificultades análogas a las de los estudiantes del curso Matemáticas III de la Facultad de Ingeniería Pesquera y de Alimentos, ambos fenómenos están relacionados con el paso de representaciones de objetos estudiados en el plano (R^2) hacia el espacio (R^3). Así mismo, los estudiantes de Matemáticas I de Arquitectura cuentan con laboratorios informáticos para la utilización de un software mediador en la fase experimental.

La elección de *Geogebra 5.0*, a diferencia del software *Mathematica* utilizado por Ingar (2014), es por ser un software de geometría dinámica de uso libre (descarga gratuita) y de menores requisitos de hardware para instalación y ejecución. Así mismo, puede descargarse la versión portable de Geogebra 5.0 desde su página principal, la cual no requiere instalación y puede ejecutarse desde un dispositivo de almacenamiento externo en diversas máquinas y sistemas operativos.

En líneas anteriores, se ha evidenciado que los aspectos didácticos y cognitivos relacionados con la enseñanza de las superficies cuádricas en diversos grados de instrucción, específicamente el estudio de superficies de Salazar et al. (2013) realizada en un nivel educativo análogo al del presente trabajo, muestran que los recursos tecnológicos utilizados actualmente en educación matemática, en particular el software de geometría dinámica, pueden contribuir a diseñar actividades bajo una cierta postura epistemológica y metodológica que permitan dar respuestas ante una problemática en el aprendizaje de los estudiantes respecto al objeto matemático superficies cuádricas.

Al haber justificado la realización del presente estudio por medio de la relevancia histórica, académica, personal y profesional, presentamos a continuación el marco teórico para la investigación el cual toma aspectos básicos de visualización de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995).

1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Según Duval (1993) “no es posible estudiar los fenómenos relacionados al conocimiento sin recurrir a la noción de representación”. Así mismo, las representaciones se clasifican en dos oposiciones: la oposición interno/externo y la oposición consciente/no-consciente.

Según Duval (1993), “La oposición consciente/no–consciente, es la oposición entre, de una parte, lo que aparece ante un sujeto y él observa y, de otra, lo que a él se le escapa y no puede observar” (p. 33). De esta manera, el paso de lo no–consciente a lo consciente es un proceso de objetivación para el sujeto que toma consciencia. En este sentido las representaciones de tipo consciente presentan un carácter intencional y cumplen una función de objetivación.

Así mismo, el autor sostiene que “la oposición externo/interno es la oposición entre lo que de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente visible y observable y lo que, al contrario, no lo es” (pp. 33–34). Las representaciones internas pertenecen a un sujeto y no son comunicadas, mientras que las representaciones externas son producidas por la aplicación de un sistema semiótico y son entendibles por todos aquellos quienes han aprendido el sistema semiótico aplicado.

Las representaciones semióticas según el autor, se consideran generalmente como un simple medio de exteriorización de representaciones mentales para fines de comunicación, pero también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento al desempeñar un papel primordial: desenvolvimiento de representaciones mentales, realización de diferentes funciones cognitivas, y producción de conocimientos.

Para el autor, el aprendizaje en matemática está relacionado a los procesos de semiosis y noesis. Denomina “semiosis” a la aprehensión o producción de una representación semiótica, y “noesis”, a la aprehensión conceptual de un objeto. Es preciso afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis. Para que ocurra la aprehensión de un objeto matemático es necesario que la noesis (conceptualización) ocurra por medio de semiosis (representaciones).

En este sentido, el autor afirma lo siguiente:

[...] la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación, ya que no hay otra manera de tener acceso al objeto matemático directamente por la percepción, siendo los estudiantes capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos y utilizarlos. (1995a, p. 144).

En cuanto a Representaciones semióticas, el autor expone lo siguiente,

[...] son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación los cuales tienen sus propias dificultades de significado y de funcionamiento. [...] las representaciones (semióticas) no son solamente necesarias para fines de comunicación, ellas son igualmente esenciales para las actividades cognitivas del pensamiento (1993, pp. 39 –40).

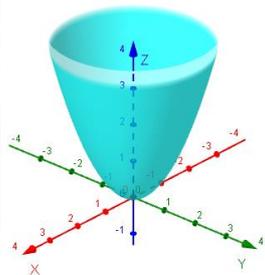
Todo registro de representación semiótica posee tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiósis, sin las cuales sería únicamente un sistema de signos o una simple representación. Según Duval (1995b), dichas actividades son:

[...] La *formación* de representaciones en un registro semiótico particular, bien sea para “expresar” una representación mental, o para “evocar” un objeto real. [...] Hablaremos de “*tratamiento*” cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro. Y hablaremos de “*conversión*” cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial. (p. 42).

El autor distingue cuatro tipos de registros de representación semiótica: *lenguaje natural*, *algebraico*, *gráfico* y *figural*. Dado que el estudio de las superficies cuádricas requiere de la utilización de un sistema de coordenadas cartesianas tri-dimensionales, para nuestro estudio de visualización del paraboloides, por ejemplo, utilizaremos los registros lenguaje natural, algebraico y gráfico.

En el cuadro 1 mostramos ejemplos de Registros de Representación Semiótica para el objeto matemático paraboloides.

Cuadro 1. Registros de representación semiótica del paraboloides

Registro de lenguaje natural	Registro algebraico	Registro gráfico
Paraboloides Circular cuyo eje es el eje Z, vértice el origen de coordenadas, se abre en la dirección positiva del eje Z y pasa por el punto (1, 1, 2)	$z = x^2 + y^2$	

En el cuadro 1 observamos que en el registro de lenguaje natural, ha sido necesario indicar el punto de paso (1, 1, 2) para representar un único paraboloides circular, ya que existen infinitas posibilidades. Mediante tratamientos en el registro algebraico se obtiene la ecuación del paraboloides $z = x^2 + y^2$, el mismo que está representado en el registro gráfico. Cabe indicar que entre dichos registros se han realizado cierto tipo de transformaciones, las cuales obedecen a ciertas reglas establecidas por el autor.

Según Duval (2006), los requisitos cognitivos que deben poseer los registros de representación son:

- Propiedad de transformación, dado que el *procesamiento matemático* siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas.
- Empleo de diversos sistemas de representación semiótica según una coordinación interna establecida por el sujeto y dependiente del tipo de actividad.

Al respecto, Duval (2006) afirma que para que un conocimiento o un saber matemático pueda ser puesto en funcionamiento, es necesario que el sujeto coordine por lo menos dos registros de representación semiótica.

Estos dos aspectos no pueden ser considerados separadamente el uno respecto del otro ya que proporcionan la “idea clave” para la comprensión de los problemas de aprendizaje y los procesos cognitivos del sujeto en el pensamiento matemático. Las clases de transformaciones de los registros de representación semiótica, según el autor, son la *conversión* y el *tratamiento*. El tratamiento corresponde a las reglas de transformación realizadas en el mismo registro, mientras que la conversión es un cambio de representación entre dos registros diferentes.

En la figura 3 mostramos los dos tipos de transformaciones (conversión y tratamiento) de un paraboloides circular entre sus tres tipos de registros de representación semiótica.

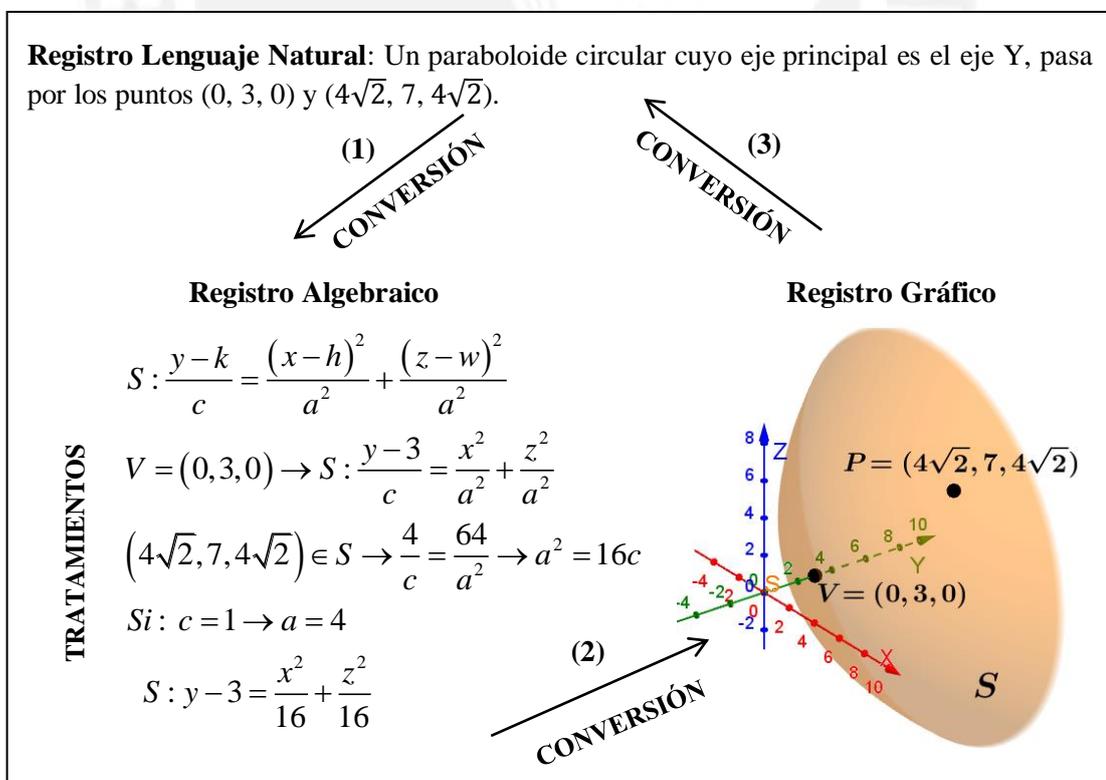


Figura 3. Transformación de una Representación Semiótica en otra.

Fuente: Adaptado de Duval (2006, p.146)

En la figura 3 observamos que la conversión entre los registros lenguaje natural y gráfico no se realiza en forma inmediata, ya que es necesario obtener la ecuación del paraboloides para representarlo gráficamente. Bajo esta consideración, es necesario realizar la conversión del registro lenguaje natural al registro algebraico (1), mediante tratamientos en este último registro se obtiene la representación algebraica de la superficie S la cual puede ser representada en el registro gráfico (2) mediante lápiz y papel o algún software de representación gráfica, y al representar todos los datos en dicho registro (vértice, punto de paso), es factible realizar la conversión del registro gráfico al registro de lenguaje natural (3).

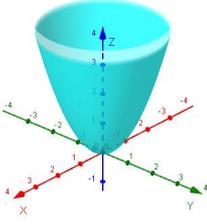
Creemos que en el trabajo a lápiz y papel, el tipo de conversión más frecuente es del registro algebraico al registro gráfico (en esa dirección), ya que los mayores tratamientos se realizan en el registro algebraico. Nuestro interés es, además de la conversión del registro algebraico al gráfico, la conversión en el sentido inverso, y para ello los estudiantes deben realizar tratamientos en el registro gráfico.

Cada situación gráfica planteada a un sujeto en particular, debe permitir desarrollar en ellos las *aprehensiones*, las cuales en el sentido de Duval (1995) una *aprehensión* es la acción de *aprehender*, es decir, la comprensión conjunta de un objeto por medio de sus representaciones y propiedades en un registro determinado, los cuales por medio de reglas propias de dicho registro, permite inferir otras propiedades y aplicar lo *aprehendido* en otras situaciones y contextos.

En la presente investigación, tomaremos como modelo el estudio de visualización de valores máximos y mínimos locales de funciones reales de dos variables reales realizado por Ingar (2014), quien ejemplificó las *aprehensiones* en el registro gráfico del paraboloides a partir de las nociones de Duval (1995a) para el registro figural, es decir, presentaremos los ejemplos de las *aprehensiones* en el registro gráfico del paraboloides mediado por el software Geogebra 3D.

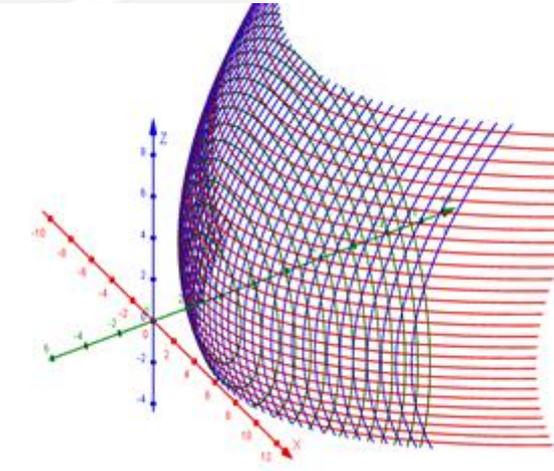
Si el sujeto está en condiciones de identificar el paraboloides en el registro gráfico, es decir que percibe algunos elementos constitutivos pero indicados en forma explícita, entonces podemos afirmar que ha desarrollado una *aprehensión perceptiva*. En el cuadro 2, el sujeto puede reconocer de forma inmediata que el objeto representado en el registro gráfico corresponde a un paraboloides, sin embargo, no podría precisar si es del tipo elíptico o circular, lo cual implica un mayor análisis posterior y por ende, desarrollar otro tipo de *aprehensiones*.

Cuadro 2. Aprehensión perceptiva del paraboloido

Objeto representado en el registro gráfico	Aprehensión perceptiva
	<p>El objeto es un paraboloido</p>

Dado el caso que, un sujeto deba realizar una representación gráfica del paraboloido en Geogebra por medio de su ecuación cartesiana, dicho sujeto reconoce la necesidad de describir los pasos necesarios (procedimiento) para realizar tal representación. Podemos afirmar que el sujeto ha desarrollado la *aprehensión secuencial* del paraboloido. En este tipo de aprehensión es sumamente conveniente la utilización de una secuencia de pasos de construcción mediante sintaxis de comandos y herramientas e íconos del software *Geogebra 3D*, para graficar al paraboloido por medio de sus trazas. En el cuadro 3 detallamos la aprehensión secuencial desarrollada por un sujeto para graficar el paraboloido representado por $S : 16y = x^2 + z^2 + 48$ en la vista gráfica de Geogebra 3D.

Cuadro 3. Aprehensión secuencial del paraboloido mediante Geogebra 3D

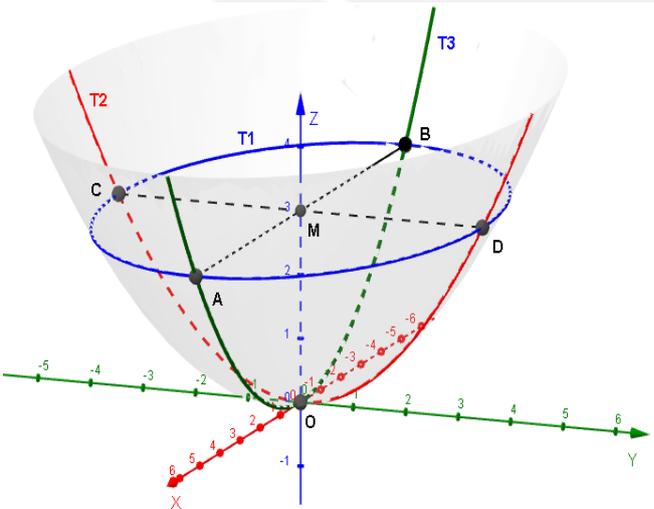
Aprehensión secuencial del paraboloido $S : 16y = x^2 + z^2 + 48$ por medio de Geogebra 3D	
<p>Paso 1: Crear deslizador k Valor mínimo: -10, Valor máximo: 10, Incremento: 0.5</p> <p>Paso 2: Ingresar la ecuación del paraboloido S: Barra de Entrada: $S : 16y = x^2 + z^2 + 48$</p> <p>Paso 3: Cortes de S con planos paralelos al plano $x = 0$: IntersecaCónica[$x=k$, S]</p> <p>Paso 4: Cortes de S con planos paralelos al plano $y = 0$: IntersecaCónica[$y=k$, S]</p> <p>Paso 5: Cortes de S con planos paralelos al plano $z = 0$: IntersecaCónica[$z=k$, S]</p> <p>Paso 6: Activar rastro de los primeros cortes visibles: Clic derecho del mouse + Rastro.</p> <p>Paso 7: Graficar la superficie: Deslizar el dial del deslizador k.</p>	

Si la representación gráfica del paraboloides S fuese realizado a lápiz y papel, la aprehensión secuencial desarrollada por el estudiante equivaldría a que realice cortes con planos paralelos a los planos coordenados en el registro algebraico, y realice la conversión al registro gráfico de cada corte para representar la superficie del paraboloides.

Si el sujeto desarrolla una **aprehensión discursiva**, está en capacidad de reconocer otras propiedades matemáticas intrínsecas del paraboloides, no indicadas en forma explícita en su representación gráfica tales como el tipo de paraboloides, eje coordenado al cual son paralelos los ejes focales de los cortes elípticos, el vértice de la superficie, etc. En este tipo de aprehensión, la forma de los cortes de planos paralelos a los planos coordenados con el paraboloides son identificados por el sujeto, quien reconoce la pertinencia de dicha información tal como la forma de sus ecuaciones y elementos principales (centro, vértices, focos, etc.), los cuales son reconocidas y nombrados.

En el cuadro 4 mostramos la aprehensión discursiva del paraboloides desarrollada por un sujeto, lo cual le permite identificar si el paraboloides representado gráficamente es del tipo circular o elíptico.

Cuadro 4. Aprehensión discursiva de un paraboloides elíptico.

Paraboloides representado en el registro gráfico	Aprehensión discursiva
	<p>T2 y T3: Parábolas en los planos $x = 0$, $y = 0$ T2 y T3 se intersectan en el origen de coordenadas (O) AB y CD se intersectan en M, M pertenece al eje Z $AM = MB$, $CM = MD$, M: Centro de T1</p> <p>El eje de la superficie es el eje Z</p> <p>La abscisa de A es mayor que 4, la ordenada de D es menor que 4, entonces el eje focal de T1 es paralelo al eje X</p> <p>La superficie es un paraboloides elíptico con vértice el origen de coordenadas, cuyo eje es el eje Z y se expande hacia el semieje positivo del eje Z</p>

Si el sujeto manifiesta la necesidad de realizar transformaciones en el registro gráfico de un paraboloides, para obtener información que le permita identificar formas y valores de los elementos que lo constituyen tales como curvas abiertas, curvas cerradas, el vértice, distancias, etc. y las realiza, podemos afirmar que el sujeto ha desarrollado la **aprehensión operatoria** del paraboloides para lo cual, según la necesidad, debe realizar ciertas **modificaciones** en el registro gráfico.

Duval (1993) ha definido los tipos de modificaciones en el registro figural, para el desarrollo de la aprehensión operatoria que deben lograr los estudiantes en el aprendizaje de la geometría euclidiana, con las nociones de longitud y perímetro, área y volúmenes de figuras geométricas, mientras que Ingar (2014) realizó una adaptación de dichas modificaciones para su estudio en el registro gráfico de los máximos y mínimos locales de funciones multivariadas.

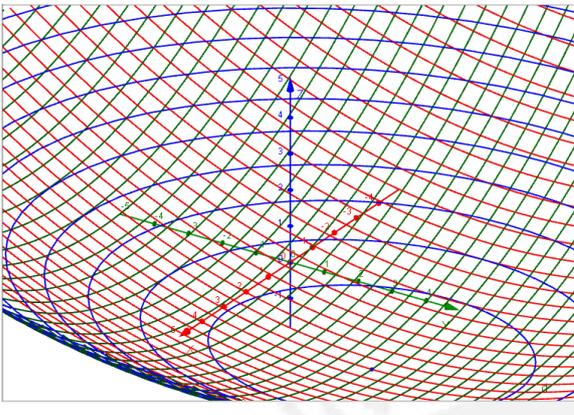
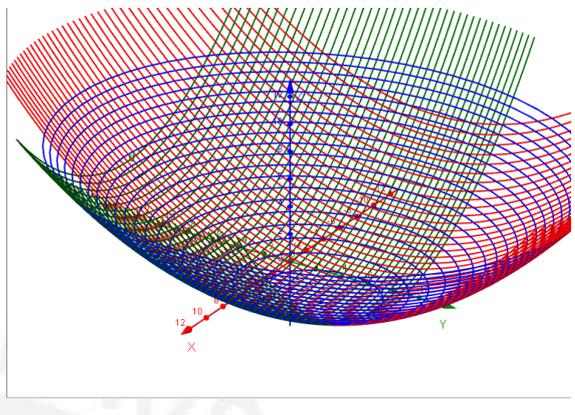
Para nuestro estudio, consideramos que las modificaciones en el registro gráfico del paraboloides son las siguientes:

El sujeto realiza una **modificación óptica** al utilizar las herramienta *Alejar y Aproximar* en *Geogebra 3D*, con el propósito de que los elementos y características de la representación gráfica del paraboloides puedan ser reconocidos y estudiados con mayor detenimiento mediante acercamientos o alejamientos.

Por ejemplo, esto se presenta cuando los valores de a , b y $|c|$ en la representación algebraica del paraboloides cuya ecuación es: $\frac{z-w}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$, son relativamente mayores en comparación a la escala de los ejes cartesianos, por lo que es necesario alejar la vista resultante para estudiar su forma y reconocer sus principales elementos.

En el cuadro 5 se ha realizado una modificación óptica de tipo alejamiento para reconocer la forma de la representación gráfica del paraboloides S cuya representación algebraica viene dada por la ecuación: $S: z = \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{36}$. En el primer caso, la superficie abarca prácticamente toda la *Vista Gráfica 3D* por lo cual fue necesario realizar dicha modificación.

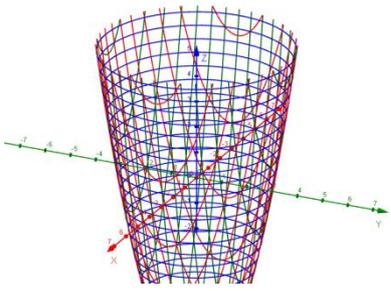
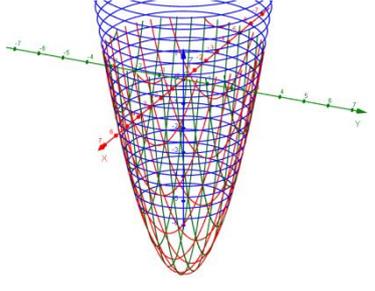
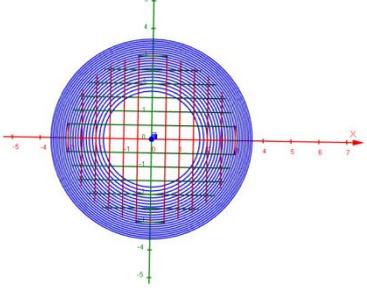
Cuadro 5. Modificación óptica en la representación gráfica del paraboloides S

Representación gráfica del paraboloides S	Modificación óptica de la representación gráfica del paraboloides S mediante la herramienta <i>Alejar</i>
	

La **modificación posicional** corresponde a traslaciones y rotaciones de la vista gráfica donde está representado el paraboloides, manteniéndose la forma de dicha superficie cambiando únicamente su posición respecto del *observador*. En *Geogebra 3D*, por ejemplo, esta modificación se realiza mediante las herramientas *Rota la Vista Gráfica 3D*  y *Desplaza Vista Gráfica* , cuando es necesario realizar dichas modificaciones a la representación gráfica del paraboloides para reconocer formas y tipos de curvas abiertas y cerradas. En este caso particular, la *aprehensión perceptiva* se desarrolla sólo si se desarrolla la *aprehensión operatoria*.

En el cuadro 6 se han realizado dos modificaciones posicionales a la representación gráfica del paraboloides S cuya ecuación algebraica es: $z + 8 = x^2 + y^2$ (traslación y rotación).

Cuadro 6. Modificación posicional del paraboloides.

Representación gráfica de $S : z + 8 = x^2 + y^2$	Traslación	Rotación
		

Duval (1995b) establece que la descomposición de una figura geométrica en sus unidades elementales 0D, 1D y 2D, permite establecer discursos matemáticos e inferencias para obtener otras figuras que ayuden a resolver una situación problemática determinada. A este tipo de modificación el autor denomina *deconstrucción dimensional de la forma*.

Nosotros afirmamos en nuestro estudio que la **deconstrucción dimensional** de un paraboloides *primario*, permite descomponerlo en puntos, curvas, rectas y planos los cuales, mediante condiciones previamente establecidas, permiten representar gráficamente un paraboloides *secundario*, cuyos parámetros y constantes de cada una de las secciones cónicas que representan al paraboloides primario, pueden ser de formas iguales o proporcionales. Este principio permite, mediante tratamientos en el registro gráfico, realizar representaciones gráficas sin realizar rigurosos tratamientos en el registro algebraico.

Si los parámetros (en valor absoluto) y demás constantes de las secciones cónicas (obtenidas por cortes) son iguales, la representación gráfica del paraboloides secundario puede interpretarse como una traslación y/o rotación del paraboloides primario

Por ejemplo, en el cuadro 7 mostramos las representaciones gráficas de los elementos de la representación gráfica del paraboloides S_1 cuya representación algebraica es

$$S_1 : \frac{y-2}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(z+1)^2}{9}, \text{ para graficar la superficie } S_2 \text{ cuya representación algebraica es}$$

$$S_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{16} \text{ al utilizar las representaciones gráficas de los elementos de la}$$

gráfica de S_1 , ya que las representaciones gráficas de ambas superficies poseen *la misma forma* y por ende, los mismos elementos representados, pero localizados en distintas posiciones en el espacio.

Cuadro 7. Deconstrucción dimensional del paraboloides.

Descomposición de la gráfica de la superficie S1 para graficar la superficie S2	
	<p>Elementos de S1 representados por:</p> <p>V1: Vértice, Eje de S1 paralelo al eje Y</p> <p>T1: Curva cerrada (Elipse) en un plano paralelo al plano XZ, centro: O1, eje focal paralelo al eje X</p> <p>T2: Curva cerrada (Elipse) en un plano paralelo al plano XZ, centro O2, eje focal paralelo al eje X</p> <p>T3: Curva abierta (Parábola) en un plano paralelo al plano YZ, y se extiende hacia el semieje positivo del eje Y</p> <p>T4: Curva abierta (Parábola) en un plano paralelo al plano XY, y se extiende hacia el semieje positivo del eje Y</p>
	<p>Composición de la gráfica de S2 a partir de los elementos representados de S1:</p> <p>El vértice V1 es común para las representaciones gráficas de ambas superficies S1 y S2.</p> <p>La curva T3' de S2 se obtuvo a partir de la curva T3 de S1, la cual pasa por el mismo vértice V1 y está contenida en un plano paralelo al plano XY, y se extiende hacia el semieje positivo del eje X</p> <p>El centro O1' de T1' está ubicado en la recta paralela al eje X y que pasa por V1, y la distancia de O1' a V1 es la misma que la distancia de O1 a V1</p> <p>La curva T1' de S2 con centro en O1' y eje focal paralelo al eje Z, se obtuvo a partir de la curva T1 de S1, y está contenida en un plano paralelo al plano YZ</p>
	<p>Al trasladar las curvas T2 y T4 de S1 a sus nuevas posiciones en el registro gráfico, se ha compuesto la gráfica de S2 a partir de la descomposición de la gráfica de S1.</p> <p>Elementos de S2 representados por:</p> <p>V1: Vértice, Eje de S2 paralelo al eje X</p> <p>T1': Curva cerrada (Elipse) en un plano paralelo al plano YZ, centro O1', eje focal paralelo al eje Z</p> <p>T2': Curva cerrada (Elipse) en un plano paralelo al plano YZ, centro O2', eje focal paralelo al eje Z</p> <p>T3': Curva abierta (Parábola) en un plano paralelo al plano XY, y se extiende hacia el semieje positivo del eje X</p> <p>T4': Curva abierta (Parábola) en un plano paralelo al plano XZ, y se extiende hacia el semieje positivo del eje X</p>

Según el cuadro 7, las modificaciones en el registro gráfico requieren que el sujeto desarrolle todas las aprehensiones y a su vez, identifique puntos de paso, ejes, vértices, entre otros, los cuales corresponden a las variables visuales del paraboloides, y es necesario identificarlas.

Al haber identificado las aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico del paraboloides, debemos analizar cómo se da el proceso de visualización del paraboloides, y cuál es la información relevante que puede obtenerse de dicho registro.

Proceso de Visualización

Duval (2002) establece la relación entre la visión y visualización como partes componentes de la percepción visual del sujeto respecto al objeto en estudio, donde la visión cumple una función epistemológica (acceso directo al objeto) y una función sinóptica (aprehensión simultánea de diferentes elementos constitutivos de un todo). Al respecto, el autor establece lo siguiente:

[...] la visión provee un acceso directo al objeto, mientras que la visualización está basada en la producción de representaciones semióticas y por ello requiere de reglas que orienten la combinación de signos, de manera que el producto obtenido de la representación tenga sentido. Esas posibilidades de combinación de los sistemas de representación conceden a la visualización un potencial heurístico. [...] (p. 321).

Según el autor, la función sinóptica de la percepción visual es imperfecta por dos razones: Primero, las personas vivimos en un mundo tri-dimensional por lo que solo un lado de las cosas pueden ser vistas, y para tener una aprehensión completa se requiere movimiento ya sea del objeto o del sujeto que percibe el objeto; y segundo, la percepción visual siempre se centra en una parte específica de un todo y puede saltar de una parte a otra parte. En este sentido, no puede haber percepción visual sin una exploración de por medio.

En este sentido, una representación semiótica no muestra los objetos tal como son en un ambiente tri-dimensional o como podrían ser físicamente proyectados en un pequeño soporte material bi-dimensional. Una representación semiótica muestra la organización de las relaciones entre las unidades representativas, siendo estas expresadas en formas unidimensionales o bi-dimensionales (figuras geométricas), coordenadas, proposiciones o palabras. Según Duval (1995b), todas estas unidades representativas deben estar conectadas bi-dimensionalmente porque cualquier organización requiere al menos dos dimensiones para poder ser obvias. Por esta razón, no hay entendimiento sin visualización y es por ello que la

visualización no debe ser confundida con visión ya que la visualización hace visible todo lo que no es accesible con solo la visión.

En el aprendizaje de la geometría euclidiana (registro figural), la visualización, según el autor, es la articulación entre las aprehensiones perceptiva y operatoria, es decir, si el sujeto reconoce e identifica representaciones de unidades elementales en el registro figural así como sus propiedades geométricas, y realiza modificaciones de dichos elementos en el mismo registro y los relaciona entre sí, entonces el sujeto visualiza. Ingar (2014), amplía la noción de visualización establecida por Duval para el registro gráfico, y establece que la visualización de objetos representados en dicho registro, es la articulación entre todas las aprehensiones que se desarrollen en la situación planteada.

Duval (1999) establece que, para construir una representación gráfica por medio de unidades elementales, se requiere solamente calcular algunas coordenadas y trazar la recta o curva correspondiente, en nuestro caso dichas coordenadas corresponden a las unidades elementales de dimensión 0 (vértices, centros, puntos de paso) para graficar las curvas abiertas y cerradas. Las representaciones gráficas, según el autor, llevan relaciones entre sus unidades significantes de representación y sus correspondientes representaciones en los registros simbólicos y algebraicos. Estas unidades propias de las representaciones gráficas son las *variables visuales*, las cuales deben ser reconocidas para poder realizar la conversión del registro gráfico a otros tipos de registros.

El autor realizó un estudio de visualización con la recta en el plano cartesiano XY , su conversión a ecuaciones de la forma pendiente-intercepto: $y = ax + b$ y sostiene que dicha conversión se relaciona con la habilidad para reconocer e identificar las *variables visuales* que entran en juego durante este cambio de registro. Dichas variables visuales para la recta referida son: el sentido de inclinación de la recta en el plano, los ángulos que forma la recta con los ejes cartesianos y los interceptos de la recta con el eje de ordenadas.

En nuestro estudio, la representación gráfica del paraboloides se realiza mediante la gráfica de los siguientes elementos: el vértice de la superficie, curvas abiertas (parábolas), curvas cerradas (circunferencias o elipses), los puntos de intersección entre las curvas abiertas y cerradas representadas (obtenidos por intersección entre arcos parabólicos, circulares y/o elípticos), y la misma superficie en conjunto.

Para nuestro estudio, dichos objetos constituyen *las variables visuales* del paraboloides. En la figura 4 presentamos la clasificación de dichas variables visuales, según el número de

dimensiones que posee cada una de ellas sin considerar longitudes ni áreas, ya que nuestro objetivo es representar gráficamente al paraboloides, y no realizar cálculos ni medidas. Para ello, tomamos las nociones de Duval (1995b, p. 159) quien realizó una tipificación de las unidades figurales en el registro figural para el aprendizaje de la geometría plana elemental, y el estudio de visualización del icosaedro realizado por Molina (2013), quien completó la tipificación de Duval al presentar un cuadro adicional para la clasificación de las unidades figurales de dimensión 3 en el registro figural, tales como formas rectilíneas y curvas, alabeadas y abiertas, poliedros convexos y no convexos.

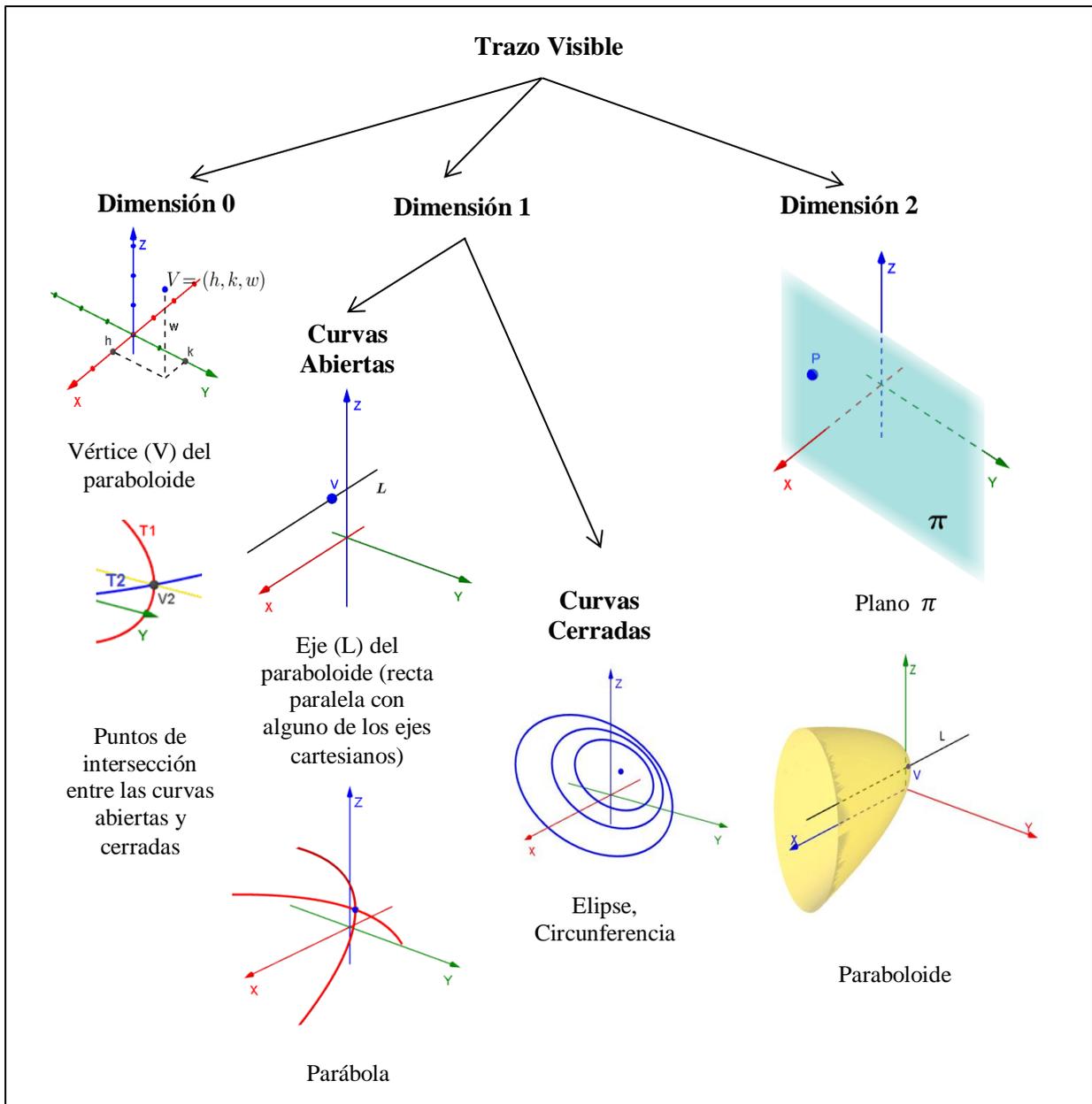


Figura 4. Clasificación de variables visuales del paraboloides.

Fuente: Adaptado de Duval (1995b, p. 159) y Molina (2013, p. 41)

En la figura 4, los trazos visibles de las variables visuales que pueden ser realizados en medios tangibles (papel y lápiz) o a través de la Vista Gráfica 3D del software Geogebra se han clasificado de la siguiente manera:

Dimensión 0: *Puntos*, los cuales corresponden a la representación del vértice (V) del paraboloides, el cual puede ser representado algebraicamente mediante sus componentes cartesianas (h, k, w) , y a los puntos de intersección (V2) entre las curvas abiertas y cerradas (T1 y T2). Cabe resaltar que los puntos, a pesar de tener dimensión 0 se obtienen por intersección de variables visuales de dimensión mayor a 0, tales como segmentos proyectados y planos.

Dimensión 1. Pueden ser de dos tipos:

Curvas abiertas:

Recta. La recta asociada a la orientación de la representación de la superficie es su eje, (recta L), el cual tiene como punto de paso el vértice V de la superficie y es paralela, en el caso mostrado en la figura 4, al eje X.

Parábola. Las parábolas representan los cortes de la superficie del paraboloides con planos paralelos al eje (recta L) y a los planos coordenados.

Curvas cerradas:

Circunferencias o Elipses. Dichas curvas representan los cortes de la superficie del paraboloides con planos perpendiculares al eje (recta L) y en la región del espacio donde exista intersección.

Dimensión 2. Pueden ser planos y superficies:

Planos. La representación del plano π en la figura 4, el cual es perpendicular al eje X y pasa por el punto P, es la variable visual que nos permite realizar cortes a la superficie para obtener las curvas abiertas y cerradas, y así poder representarla mediante cortes o trazas, las cuales son secciones cónicas.

Superficie. La variable visual “superficie” está constituida por la representación en el registro gráfico de todas las variables visuales anteriores en conjunto.

Para Duval (1995b), representar un objeto matemático en el registro gráfico no es trivial, pero es factible representar dicho objeto mediante unidades visuales de dimensión menor denominadas *variables visuales*, cuyas representaciones en el registro algebraico se

denominan *unidades significantes*. Dichas unidades significantes pueden, a su vez ser expresadas por medio de *unidades simbólicas* tales como: signos (+, -), símbolos relacionales (>, <, =, ≥, ≤, ≠), valores numéricos (coeficientes, exponentes, constantes), valores literales (*a*, *x*, *p*, *h*, *k*), o la combinación de cualesquiera de ellas.

Por ejemplo, la representación gráfica del paraboloides mostrado en la figura 5, cuya representación cartesiana viene dada por la forma:

$$\frac{x-h}{c} = \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}$$

se reconocen las siguientes unidades significantes en el registro algebraico:

Eje cartesiano al cual es paralelo el eje del paraboloides: *eje X*

Orientación de la superficie: se extiende hacia el semieje negativo del eje X, lo que equivale a: $c < 0$

Vértice de la superficie: $V(h, k, w)$

Restricción para alguna de las variables cartesianas: $x \leq h$

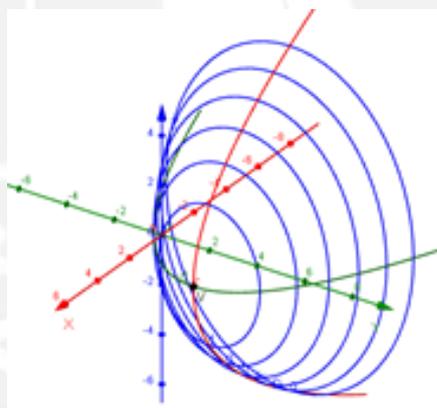


Figura 5. Variables visuales de un paraboloides con eje paralelo al eje X

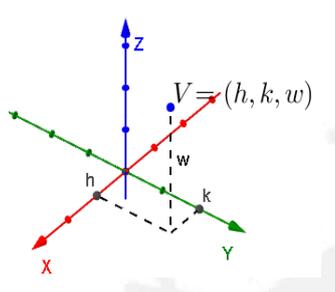
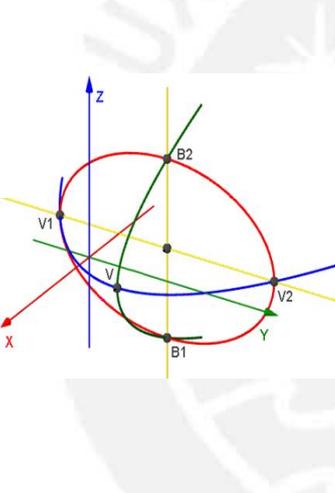
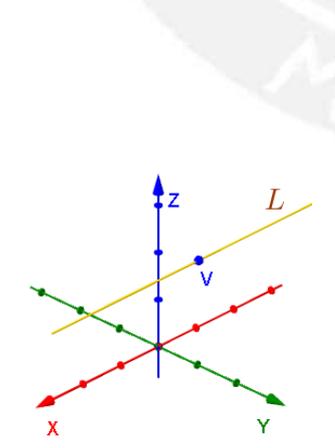
Para determinar las unidades simbólicas correspondientes al vértice representado por el punto $V(h, k, w)$, y los valores de las constantes *a*, *b*, *c*, es necesario realizar tratamientos en el registro gráfico. La ecuación del paraboloides representado gráficamente en la figura 5 es:

$$S: \frac{x-1}{-2} = \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{16}$$

Cabe resaltar que los símbolos relacionales (>, <, ≥, ≤) no tienen representación en el registro gráfico, pero en el registro algebraico restringen los valores que toman algunas de las variables cartesianas, así como la dirección en la cual se extiende la gráfica de la superficie.

Duval (1995b), identificó las variables visuales y unidades significantes en la recta del plano cartesiano y la función cuadrática. Para nuestro estudio, en el cuadro 8 detallamos las variables visuales del paraboloides y sus correspondientes unidades significantes.

Cuadro 8. Variables visuales y unidades significantes del paraboloides.

VARIABLES VISUALES		UNIDADES SIGNIFICANTES		
DIMENSIÓN 0: EL PUNTO		Vértice del paraboloides (Punto V)	$V = (h, k, w)$ $h, k, w \in \mathbb{R}$	Terna de números reales
		<p>Puntos de intersección entre las curvas abiertas y curvas cerradas:</p> <p>Vértices (parábola y elipse), extremos del eje menor (elipse), puntos de paso (parábola, elipse y circunferencia).</p>	$V = (h, k, w)$ $V1 = (h_1, k_1, w_1)$ $V2 = (h_2, k_2, w_2)$ $B1 = (h_3, k_3, w_3)$ $B2 = (h_4, k_4, w_4)$ $h_i, k_i, w_i \in \mathbb{R}$	Terna de números reales
DIMENSIÓN 1: LA RECTA		Eje del Paraboloides (recta L), la cual es paralela con alguno de los ejes cartesianos y pasa por el vértice V	$L: \begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases}$	Ecuación cartesiana de la recta L, expresada como la intersección de dos planos que pasan por el vértice V, perpendiculares entre sí, y paralelos a los planos coordenados.
			$L: \begin{cases} y = k \\ z = w \end{cases}$	
			$L: \begin{cases} x = h \\ z = w \end{cases}$	

VARIABLES VISUALES		UNIDADES SIGNIFICANTES		
DIMENSIÓN 1: LA PARÁBOLA		Vértice V	$V = (h, k, w)$	Terna de números reales
		Punto de Paso P	$P = (h_1, k_1, w_1)$ $h_i, k_i, w_i \in \mathbb{R}$	
		Eje focal M de la parábola	$M: \begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases}$ $M: \begin{cases} y = k \\ z = w \end{cases}$ $M: \begin{cases} x = h \\ z = w \end{cases}$	Ecuación de la recta M, expresada como la intersección de dos planos que pasan por el vértice de la parábola, perpendiculares entre sí, y paralelos a los planos coordenados.
		Plano π paralelo a los planos coordenados al cual pertenece la parábola	$\pi: x = h$ $\pi: y = k$ $\pi: z = w$	Ecuación cartesiana del plano π
	Parámetro p, el cual indica hacia qué dirección y sentido de los ejes coordenados se abre la parábola	$T: \begin{cases} (y-k)^2 = 4p(x-h) \\ z = w \end{cases}$ $T: \begin{cases} (z-w)^2 = 4p(x-h) \\ y = k \end{cases}$ $T: \begin{cases} (x-h)^2 = 4p(y-k) \\ z = w \end{cases}$ $T: \begin{cases} (z-w)^2 = 4p(y-k) \\ x = h \end{cases}$ $T: \begin{cases} (x-h)^2 = 4p(z-w) \\ y = k \end{cases}$ $T: \begin{cases} (y-k)^2 = 4p(z-w) \\ x = h \end{cases}$	Signo del parámetro p en la ecuación cartesiana de la parábola T	

VARIABLES VISUALES		UNIDADES SIGNIFICANTES		
DIMENSIÓN 1: LA ELIPSE		Centro, Vértices, Extremos del eje menor	$V = (h, k, w)$ $h, k, w \in \mathbb{R}$	Terna de números reales
		Eje cartesiano al cual es paralelo el eje focal de la elipse	X Y Z	Representación simbólica del eje cartesiano
		Plano π paralelo a los planos coordenados al cual pertenece la elipse	$\pi: x = h$ $\pi: y = k$ $\pi: z = w$	Ecuación cartesiana del plano π
DIMENSIÓN 1: LA CIRCUNFERENCIA		Centro	$V = (h, k, w)$ $h, k, w \in \mathbb{R}$	Terna de números reales
		Radio de la circunferencia T	$T: \begin{cases} (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \\ z = w \end{cases}$ $T: \begin{cases} (y-k)^2 + (z-w)^2 = r^2 \\ x = h \end{cases}$ $T: \begin{cases} (x-h)^2 + (z-w)^2 = r^2 \\ y = k \end{cases}$	Valor de r en la ecuación cartesiana de la circunferencia T
		Plano π al cual pertenece la circunferencia T	$\pi: x = h$ $\pi: y = k$ $\pi: z = w$	Ecuación cartesiana del plano π

Fuente: Elaboración propia

En el cuadro 9 mostramos las unidades significantes de las variables visuales del paraboloides (Dimensión 2), según la forma de su representación algebraica, y sus unidades simbólicas correspondientes.

Cuadro 9. Unidades significantes del paraboloides.

UNIDADES SIGNIFICANTES DEL PARABOLOIDE			
FORMA DE LA ECUACIÓN	$\frac{z-w}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$	$\frac{y-k}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}$	$\frac{x-h}{c} = \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}$
Eje coordenado al cual es paralelo el eje del paraboloides	<i>eje Z</i>	<i>eje Y</i>	<i>eje X</i>
Orientación de la superficie	Si $c > 0$, se abre hacia el semieje positivo del eje Z Si $c < 0$, se abre hacia el semieje negativo del eje Z	Si $c > 0$, se abre hacia el semieje positivo del eje Y Si $c < 0$, se abre hacia el semieje negativo del eje Y	Si $c > 0$, se abre hacia el semieje positivo del eje X Si $c < 0$, se abre hacia el semieje negativo del eje X
Tipo de paraboloides	Si $\frac{a}{b} \neq 1$, es un paraboloides elíptico Si $\frac{a}{b} = 1$, es un paraboloides circular		
Restricción para alguna de las variables cartesianas	Si $c > 0$, $z \geq w$ Si $c < 0$, $z \leq w$	Si $c > 0$, $y \geq k$ Si $c < 0$, $y \leq k$	Si $c > 0$, $x \geq h$ Si $c < 0$, $x \leq h$

Fuente: Elaboración propia.

En la página 40 se mostró un ejemplo de las unidades significantes para el paraboloides representado en la figura 5, el cual es de la forma $\frac{x-h}{c} = \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}$, cuyas posibles unidades significantes están indicadas en la última columna del cuadro 9.

El reconocimiento de las variables visuales del paraboloides en el registro gráfico, así como sus unidades significantes en el registro algebraico, permite a los estudiantes obtener información pertinente para realizar la conversión entre ambos registros, articular aprehensiones (aquellas que se desarrollen en la actividad propuesta a los estudiantes), y así, visualizar al paraboloides.

Al haber definido el marco teórico del estudio de visualización del paraboloides, procedemos a continuación a enunciar la pregunta y objetivo general y específicos de investigación.

1.4 Pregunta y Objetivos de la Investigación

Pregunta de investigación:

¿Cómo se realiza el proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura en una secuencia didáctica mediada por el Geogebra?

Para responder la pregunta de investigación, planteamos el siguiente objetivo general:

Analizar el proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura en una secuencia didáctica mediada por el Geogebra.

Con el propósito de lograr el objetivo general, establecemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las variables visuales del paraboloides y sus correspondientes unidades significantes.
- Identificar las aprehensiones en el registro gráfico que desarrollan los estudiantes.
- Analizar en el registro gráfico las articulaciones entre las aprehensiones que desarrollan los estudiantes.

La sección siguiente abordará los aspectos metodológicos necesarios para establecer las directrices que permitirán responder nuestra pregunta de investigación.

1.5 Aspectos de Ingeniería Didáctica

La metodología que emplearemos en nuestra investigación presenta características de una investigación cualitativa, en este sentido Hernández, Fernández y Baptista (2010) definen investigación cualitativa como “La recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación”.

Para los autores, los datos cualitativos son las “descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones” (p.9).

Una de las actitudes con las que debe proceder el investigador cualitativo según Knapp es: “Un enfoque inicial exploratorio y de apertura mental ante el problema a investigar” (1986, citado en Martínez, M., 2006, p. 143).

En el mismo sentido, Taylor y Bogdan (1986) consideran en un sentido amplio, la investigación cualitativa como “aquello que produce datos descriptivos: con las propias palabras de las personas habladas o escritas y la conducta observable”

Nosotros tomaremos dentro de la investigación cualitativa aspectos de la Ingeniería Didáctica (ID) como metodología de investigación porque según Artigue (1995), “La ingeniería didáctica como Metodología de investigación, se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de enseñanza” (p.36). En este sentido, nosotros desarrollaremos un trabajo experimental en el estudio de visualización del paraboloides en estudiantes de un primer curso de matemáticas de la carrera de Arquitectura en una universidad privada, mediado por el software *Geogebra 3D*.

De acuerdo con Artigue (1995), la ingeniería didáctica tiene las siguientes fases:

Análisis preliminar. En esta fase, la autora considera el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza del objeto matemático. En nuestra investigación hemos realizado un estudio del objeto matemático paraboloides considerando tres aspectos fundamentales:

- El *aspecto cognitivo* (asociado a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza), el cual se apoya en el levantamiento de antecedentes (investigaciones de referencia) que tienen relación directa o indirecta con el estudio del paraboloides, y con sujetos implicados de nivel similar al de nuestra investigación.
- El *aspecto epistemológico* (asociado a las características del saber en juego) el cual, en nuestra investigación está constituido por aspectos históricos y matemáticos del paraboloides. Creemos que el estudio del desarrollo de nuestro objeto matemático (el paraboloides) a lo largo de la historia, nos permite tener una comprensión de las consideraciones, alcances, restricciones y dificultades que afrontaron los hombres de ciencia desde los albores de la civilización para sentar las bases del estudio de dicho objeto matemático, lo cual nos inspiró en la preparación de la fase experimental de nuestra investigación.
- El *aspecto didáctico* (asociado a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza) el cual, en nuestro estudio, consiste en una revisión de textos utilizados por los estudiantes, para analizar la forma en la cual el conocimiento del objeto matemático es transmitido hacia los estudiantes.

Concepción y análisis a priori. En esta fase consideramos los antecedentes, el estudio del objeto matemático, los aspectos que delimitan el marco teórico necesario para el estudio de la visualización de tal objeto matemático, así como las tareas para lograr los objetivos

específicos de nuestra investigación. Se establece, según la autora, la *concepción*, en la cual se toman en cuenta las restricciones cognitivas de los estudiantes, sus errores más frecuentes y dificultades. El diseño de los instrumentos de la parte experimental de nuestra investigación debe contemplar tales supuestos y tener relación directa con los objetivos de investigación.

La forma en la cual el investigador controla las actividades, es por medio de *variables de comando* (Artigue 1995, p. 42). La autora, establece dos tipos de variables que guardan relación con el objeto estudiado: variables macro didácticas o globales, y variables micro didácticas o locales. Estas variables definen el nivel de complejidad de las actividades presentadas a los estudiantes tales como la utilización o no de los recursos informáticos, el número de pasos o acciones que deben realizar los estudiantes en una secuencia determinada, entre otros. Dichas variables pueden ser manipuladas según la necesidad del investigador y en la medida de lo requerido.

En nuestra investigación, tomaremos las variables micro didácticas para el diseño de las actividades de recopilación de datos, y serán establecidas en cada actividad.

Para la autora:

[...] el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (p. 45).

En este sentido, los resultados esperados o ideales (hipótesis) deben estar conectados con los objetivos específicos de investigación, los cuales son controlados mediante las variables micro didácticas las cuales se definen en esta etapa de concepción.

Experimentación. En esta fase según la autora, se realiza el acercamiento o contacto entre el docente investigador y los sujetos implicados en la investigación, asimismo se aplicarán las actividades elaboradas dependiendo del tipo de instrumento, medio y modo de realización, y se llevará a cabo un registro de observación de la experiencia.

La experimentación comprende, en nuestro estudio:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de los instrumentos de recolección de datos a estudiantes que llevan por primera vez un curso de matemática, quienes participarán en la investigación de manera voluntaria.
- Aplicación de los instrumentos de investigación, los cuales comprenden un conjunto de actividades diseñadas para ser trabajadas en encuentros de aplicación, mediante el

software *Geogebra 3D* y el trabajo a lápiz y papel, con apoyo del marco teórico de la presente investigación y los objetivos específicos.

Los instrumentos de recolección de datos serán fichas impresas con las actividades a ser desarrolladas y preguntas para ser completadas, archivos de *Geogebra 3D*, una grabadora de sonidos para una entrevista, y un software de captura de pantalla para el análisis posterior de una actividad a ser realizada con *Geogebra 3D*.

En el caso de la actividad diseñada a lápiz y papel, consideramos pertinente realizar una entrevista posterior a los estudiantes, con la finalidad de recolectar información no presentada en la ficha de la actividad propuesta, así como la justificación de algunas acciones de interés las cuales, según nuestra experiencia docente, no forman parte del procedimiento de resolución de preguntas en las evaluaciones.

Análisis a posteriori y validación

Según Artigue (1995), esta fase se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella, y la confrontación del análisis a priori y a posteriori, es donde se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

En nuestro estudio, dicha confrontación corresponde al análisis de resultados de la fase experimental realizada en base al marco teórico (aspectos de la TRRS) y a la problemática de la investigación la cual está constituida por: antecedentes, justificación de la investigación, pregunta y objetivos de investigación.

En el siguiente capítulo realizaremos un estudio del paraboloides de acuerdo al análisis preliminar de la Ingeniería Didáctica.

CAPITULO II: ANÁLISIS PRELIMINAR

El presente capítulo aborda el origen y estudio del paraboloides, su enseñanza en los estudiantes de arquitectura, así como aspectos básicos del Geogebra para representarlo.

2.1 Superficies Cuádricas en el Geogebra

Geogebra es un software de geometría dinámica de uso libre utilizado para la enseñanza y aprendizaje de temas diversos de la matemática. Acorde con nuestra experiencia con la utilización del software como recurso didáctico, consideramos que los niveles educativos en los que *Geogebra* puede ser aplicado, abarcan desde la educación básica regular, hasta investigaciones de carácter científico en el campo de la educación matemática.

La elección del software Geogebra como mediador en la parte experimental de nuestra investigación, se debe a que en la actualidad es el único software de uso libre el cual, además de trabajar en un entorno de geometría dinámica, posee herramientas tales como el deslizador, función de arrastre, botón de animaciones y selección por medio del mouse de objetos en las diferentes vistas, lo cual permite tener manipulación directa de las representaciones gráficas de objetos matemáticos según la necesidad y el tipo de actividad a ser realizado, dándole a dichas representaciones un carácter dinámico.

El software Geogebra en su presentación estándar, muestra las distintas herramientas y zonas de trabajo tal como observamos en la figura 6.

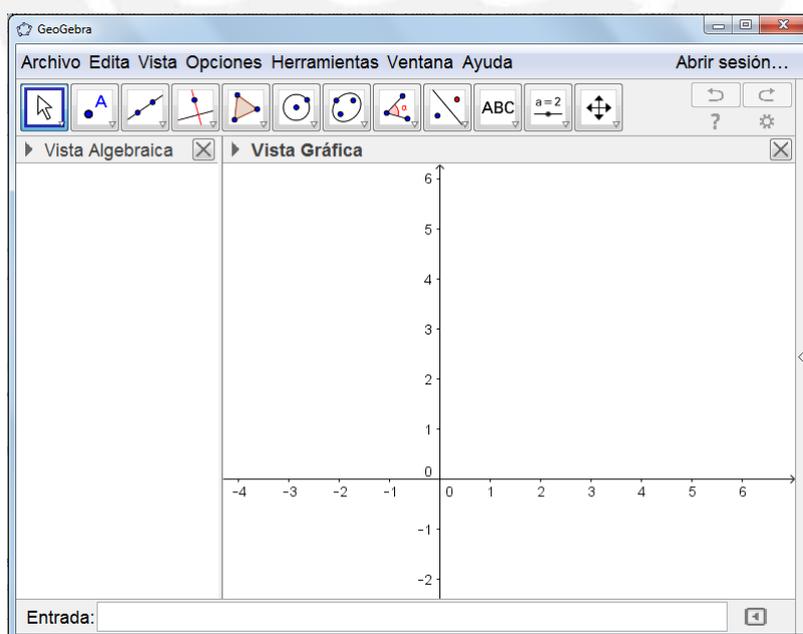


Figura 6. Vistas por defecto de la ventana principal de *Geogebra*.

En la figura 6 identificamos las siguientes vistas y áreas de trabajo:

- La Vista Gráfica, ubicada en la zona derecha, en la cual se representan en el registro gráfico objetos en el plano cartesiano XY tales como puntos, rectas, gráficas de ecuaciones, lugares geométricos, funciones, entre otros.
- La Barra de Herramientas, ubicada en la zona superior horizontal, la cual agrupa los íconos de construcción y modificación de objetos en la Vista Gráfica.
- La Barra de Entrada, ubicada en la zona inferior, por medio del cual puede ingresarse la representación algebraica (ecuación o coordenadas) de un punto, recta, plano, superficie, entre otros. También puede construirse objetos por medio de la sintaxis respectiva, como también realizar ediciones entre dichos objetos.
- La Vista Algebraica, ubicada en la zona izquierda, es donde se reconoce la representación algebraica de algún objeto previamente construido tal como una *ecuación, coordenadas, reglas de correspondencia de funciones, etc.*

Cualquiera de estas cuatro vistas puede ser ocultada, activada y/o desactivada, según la necesidad del usuario y el tipo de situación propuesta.

El software *Geogebra* en su versión 5.0 tiene incorporado la Vista Gráfica 3D para la representación de objetos en un sistema tri-dimensional de coordenadas cartesianas XYZ, por lo que en adelante nos referiremos al software *Geogebra 3D* como el software *Geogebra 5.0* con la vista gráfica 3D activada, tal como mostramos en la figura 7.

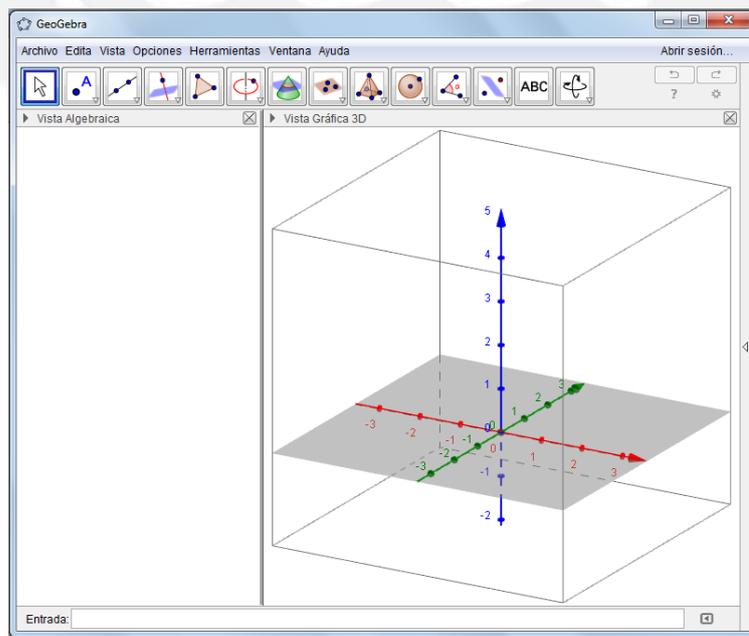


Figura 7. Ventana principal de *Geogebra 3D*.

En la figura 7 podemos apreciar las siguientes barras y vistas del software *Geogebra 3D*:

- La Barra de Herramientas 3D ubicada en la zona superior, la cual contiene las herramientas de construcción representados mediante íconos de acceso por medio del mouse. Puede representarse objetos tales como: *punto, recta, plano, poliedro, etc.* También incluye herramientas de edición de objetos previamente representados tales como *recta perpendicular a un plano, objeto simétrico de otro objeto respecto de un plano, curva de intersección entre dos superficies, etc.*
- La Vista Gráfica 3D, ubicada en la zona derecha, donde se representan los objetos en tres dimensiones en un paralelepípedo rectangular transparente denominado *caja de recorte* (el cual puede desactivarse), que contiene a los ejes *X, Y* y *Z*. Dicho paralelepípedo, delimita los bordes o márgenes de presentación de los elementos representados en la vista gráfica 3D, y por medio de los iconos *Alejar* y *Aproximar* podemos modificar la escala del objeto representado. Esta operación, también puede realizarse por medio del giro de la rueda del mouse. La vista gráfica 3D también puede desplazarse y rotarse.

Además de las vistas mencionadas, *Geogebra 3D* presenta otras vistas tales como *Hoja de Cálculo, Cálculo Simbólico (CAS), Protocolo de construcción, etc.*

Es importante indicar que *Geogebra 5.0* posee ciertas limitaciones en representación de objetos 3D en la Vista Gráfica 3D, así como la disponibilidad de sus herramientas e íconos en las distintas vistas.

Entre las ventajas, alcances y limitaciones del software *Geogebra*, según nuestra experiencia en la utilización de dicho software, destacan las siguientes:

- Actualmente, *Geogebra 5.0* puede graficar todo tipo de superficies cuádricas, en particular, el paraboloide. Para representar solo cortes de planos paralelos con el paraboloide, podemos ocultar la superficie mediante la herramienta *Objeto Visible*, lo cual permite el diseño de actividades en las cuales no se requiere la representación gráfica de la superficie. En nuestro estudio, hemos utilizado la actualización disponible más reciente de *GeoGebra 5.0.56.0*, la cual no grafica cuádricas, por lo cual hemos representado gráficamente el paraboloide mediante cortes.
- Para renombrar los objetos construidos con nombres que están restringidos a ciertos caracteres mediante la opción “renombrar”, puede utilizarse la opción “mostrar título”, el cual acepta símbolos insertados desde el mapa de caracteres inclusive. Otra

alternativa es la utilización de la herramienta *Texto* con la condición de que siempre ocupa una posición absoluta en pantalla, es decir, al girar los objetos no gira el texto.

- El deslizador y el botón de iniciar/detener animaciones están disponibles sólo en la Vista Gráfica estándar de Geogebra. Dichas herramientas permiten realizar con rapidez, eficacia y precisión, construcciones iterativas. Para representar cortes en la Vista Gráfica 3D por medio del deslizador, es necesario tener ambas vistas visibles, caso similar al realizar animaciones.
- Debe tenerse presente que Geogebra expresa las ecuaciones de las curvas abiertas y cerradas, en forma paramétrica.
- Las curvas abiertas (parábolas) se representan mediante el trazo de la curva y la región interna sombreada, delimitada por el plano al cual pertenece la parábola y su contorno. Esta región facilita el reconocimiento del plano de corte, en caso de ser necesario utilizar únicamente la curva plana, Geogebra presenta las opciones de edición de objetos por medio de la Barra de Estilo, y para ello se debe fijar la opacidad de la región a cero.
- El uso no apropiado de las herramientas Acercar/Alejar, pueden ocasionar inconvenientes en los estudiantes al no estar ubicada en pantalla los objetos de interés. Para realizar alejamientos o acercamientos, el puntero del mouse debe estar situado aproximadamente en el centro de la zona de interés del objeto, dicha posición determina el centro del “zoom”.
- Para otro tipo de acciones, el software Geogebra cuenta con herramientas de ayuda de comandos y ayuda en línea vía internet, lo cual facilita la realización de nuestros propósitos.

Los puntos en *Geogebra 3D*, se pueden ingresar al área de trabajo mediante sus coordenadas (x, y, z) a través de la Barra de entrada, o mediante la herramienta *Punto* ubicada en la barra de herramientas—segundo grupo, primer ícono, y seleccionar con el mouse en un objeto previamente construido que contenga a dicho punto. Los ejes X , Y y Z son representados en la vista gráfica 3D de color rojo, verde y azul, respectivamente.

En la figura 8, el punto B se ha ingresado por medio de la barra de entrada al digitar la sintaxis mostrada; de forma análoga se ha ingresado el punto A el cual pertenece al eje X . El punto C que está ubicado en el plano XY se ha ingresado con el ícono *Punto* el cual está activado, y el puntero del mouse adopta la forma de una cruz paralela al plano al cual pertenece dicho punto, en este caso el plano de referencia es el plano base XY .

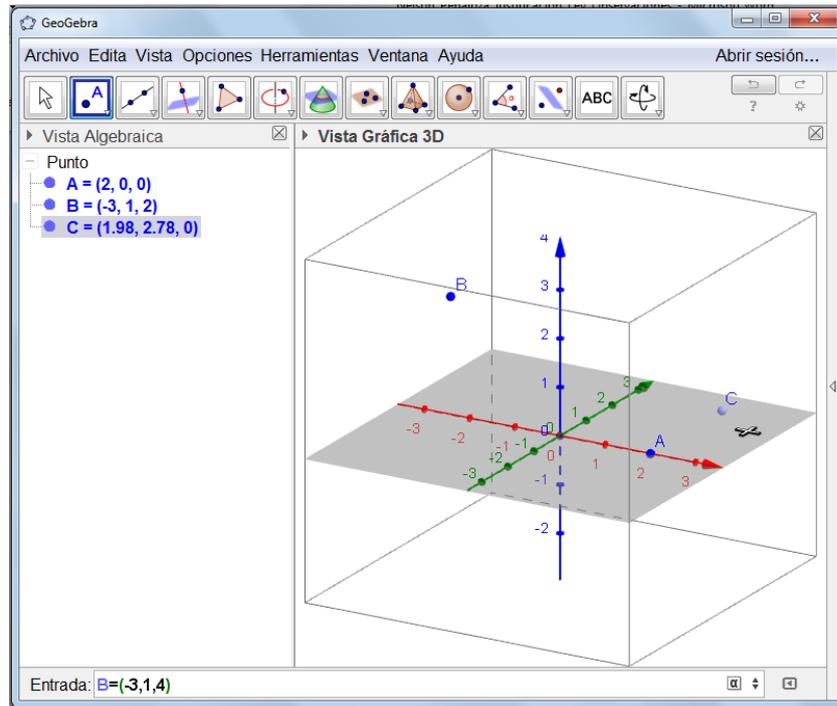


Figura 8. Ingreso de puntos en la vista gráfica 3D de *Geogebra 3D*.

Los puntos también pueden ingresarse por medio de coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) , pero para nuestros propósitos emplearemos la forma cartesiana (x, y, z) . Los puntos tales como centros, vértices y focos de secciones cónicas, los cuales constituyen las formas de los cortes del paraboloides con planos paralelos a los planos coordenados, se determinan mediante el ingreso a la Barra de Entrada de los siguientes comandos y sus sintaxis respectivas:

Vértices[<Cónica>]

Centro[<Cónica>]

Foco[<Cónica>]

donde: <Cónica>: Ecuación o nombre de la sección cónica representada gráficamente.

Las rectas en *Geogebra 3D* pueden representarse por dos puntos de paso previamente construidos. En la figura 9 se ha representado la recta a , la cual pasa por los puntos A y B previamente representados. La ecuación de dicha recta se reconoce en la vista algebraica en su forma vectorial, siendo el punto de paso $B = (-3, 1, 2)$, y vector direccional $\overrightarrow{BA} = (5, -1, -2)$.

En los comandos de edición ubicados en la barra de herramientas, cuarta columna, puede representarse una recta paralela a una dirección previamente construida y que pase por un punto dado, rectas perpendiculares a un plano, rectas tangentes, entre otros. En la figura 9, la recta b es paralela a la recta a y se ha construido mediante el ícono *Paralela* el cual está activado, siendo C el punto de paso de la recta b .

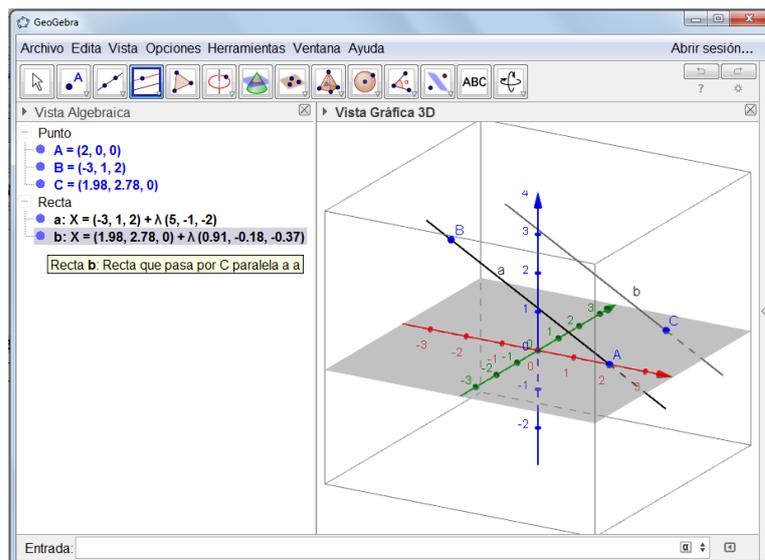


Figura 9. Rectas en *Geogebra 3D*.

Los planos en *Geogebra 3D* pueden ser representados en la vista gráfica 3D mediante: tres puntos de paso no colineales; una recta y un punto exterior a ella; dos rectas secantes o paralelas; un polígono; un punto de paso y un plano paralelo; una recta perpendicular y un punto de paso, entre otros. El plano representado, se extiende hasta los bordes de la representación del paralelepípedo rectangular que delimita la exposición de los objetos representados en dicha vista. En la figura 10, se ha representado el plano oblicuo *c* el cual contiene a las rectas paralelas *a* y *b*. La ecuación de dicho plano esta expresado en forma cartesiana y puede reconocerse en la vista algebraica. Así mismo, los planos también pueden ser representados al ingresar la ecuación cartesiana del plano en la barra de entrada.

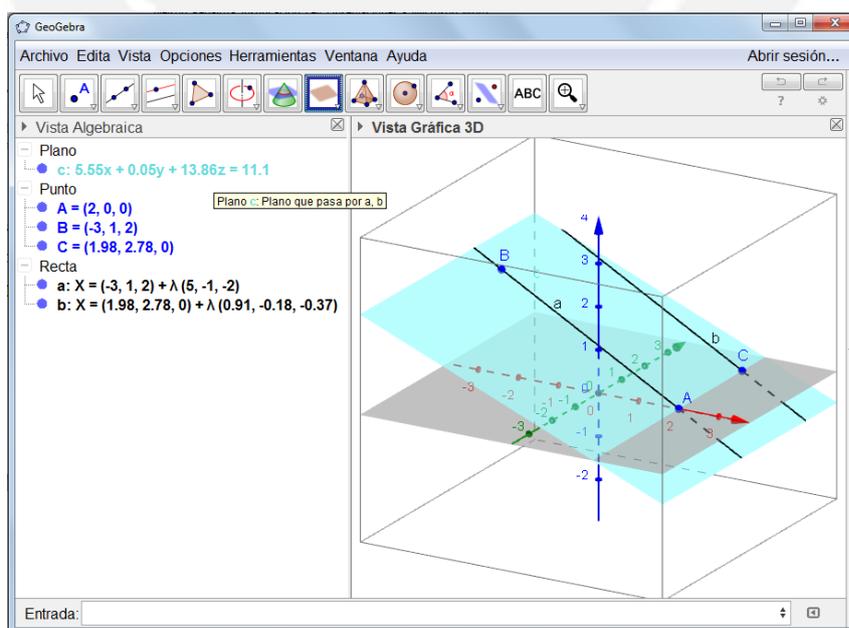


Figura 10. Planos en *Geogebra 3D*.

Nuestro interés es representar planos paralelos a los planos coordenados. Para representar varios de estos planos paralelos entre sí y equidistantes, una herramienta eficaz es el uso del deslizador el cual permite asignar valores numéricos para alguna variable ingresada. Los deslizadores solo están disponibles en la Vista Gráfica. Al estar activada dicha vista, el ícono predeterminado para construir un deslizador se sitúa en la décimo primera casilla de la barra de herramientas de *Geogebra*, tal como mostramos en la figura 11, en la cual aparece una ventana emergente para asignar características al deslizador tales como: nombre, tipo de valor (número, ángulo, entero), intervalo (mínimo, máximo), incremento, entre otros.

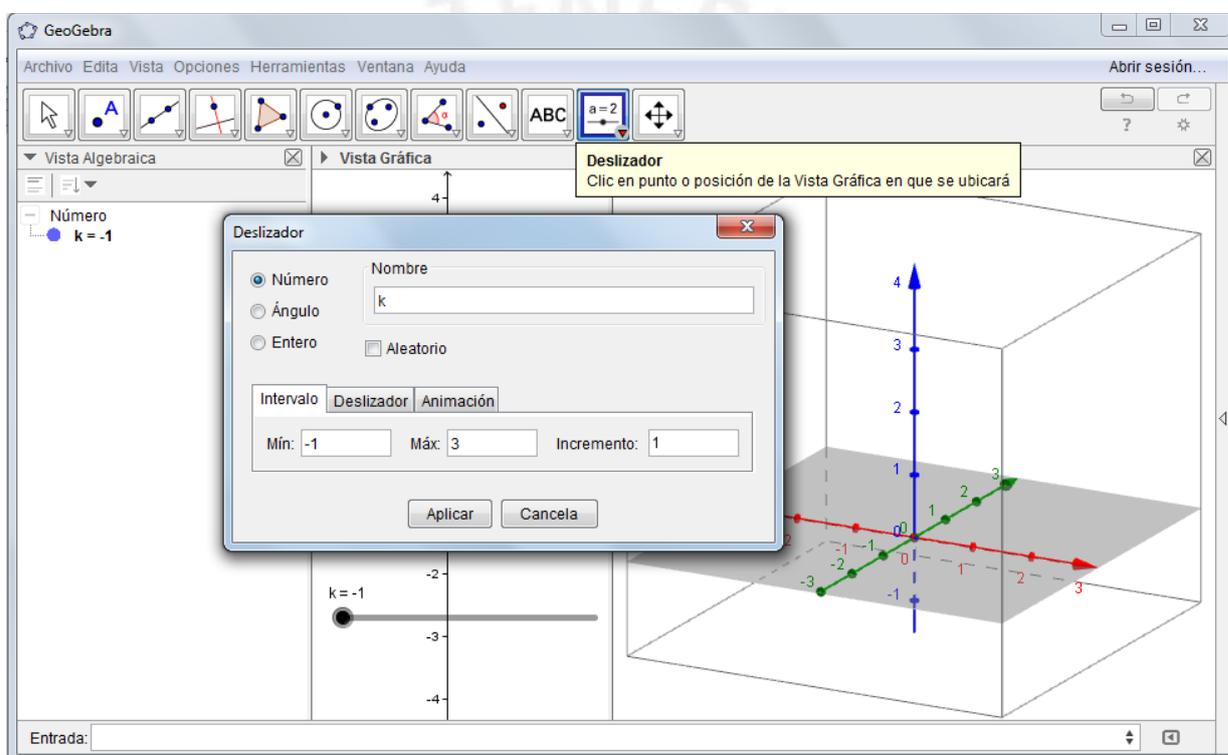


Figura 11. Deslizadores en *Geogebra*

En la figura 11 se ha ingresado el deslizador k con valores numéricos entre -1 y 3 , e incremento 1 .

Para representar planos paralelos al plano XY digitamos $z = k$ en la barra de entrada, seguidamente activamos el rastro al plano $z = 1$ (clic derecho del mouse sobre el plano $z = k$ representado en la vista gráfica 3D), tal como mostramos en la figura 12.

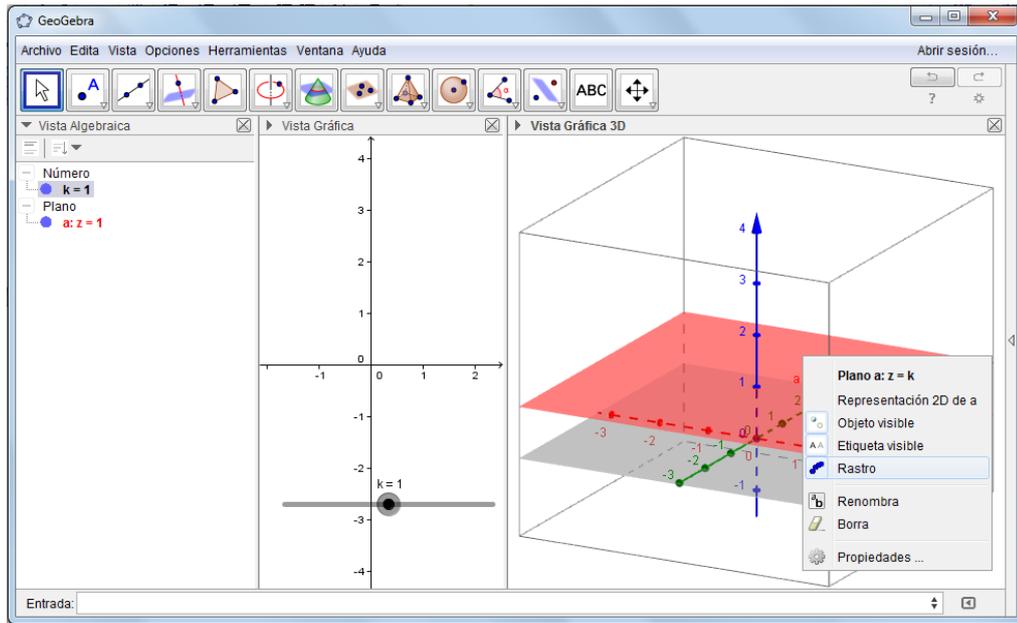


Figura 12. Ecuación del plano $z = 1$, para $k = 1$.

Al variar de posición el deslizador k , se representan en la vista gráfica 3D los planos de la forma $z = k$ para valores enteros de k entre -1 y 3 , tal como mostramos en la figura 13. Esta técnica puede ser utilizada para representar varios cortes del paraboloides con planos paralelos a los planos coordenados.

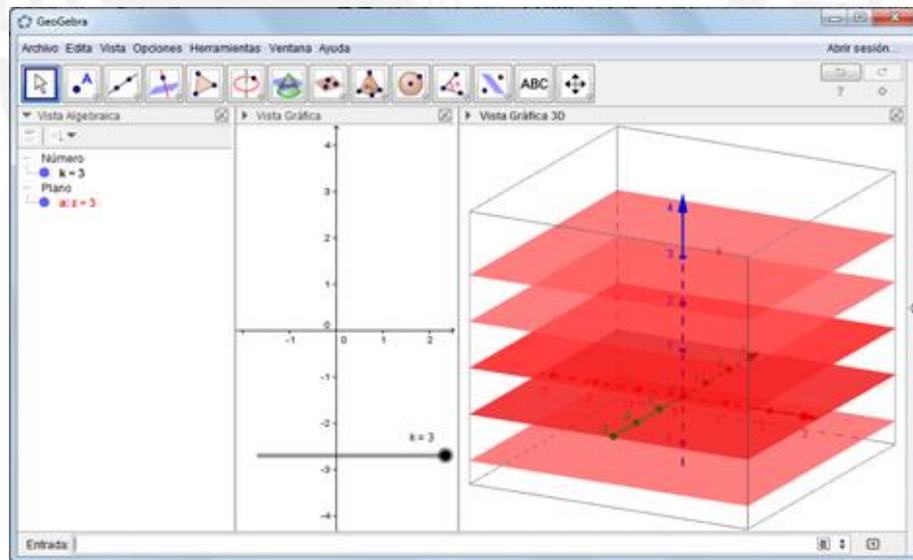


Figura 13. Planos paralelos al plano XY .

Al iniciar *Geogebra 3D* por defecto, los ejes cartesianos no están rotulados y están orientados de forma que el cuarto octante apunta hacia el observador, tal como mostramos en la figura 14. Al ser de nuestro interés identificar los ejes cartesianos y realizar traslaciones, rotaciones, alejamientos, acercamientos, entre otros, describiremos los comandos necesarios para tales fines.

Los ejes cartesianos pueden rotularse mediante la secuencia de comandos: *Preferencias* → *Vista Gráfica 3D*, tal como mostramos en la figura 14.

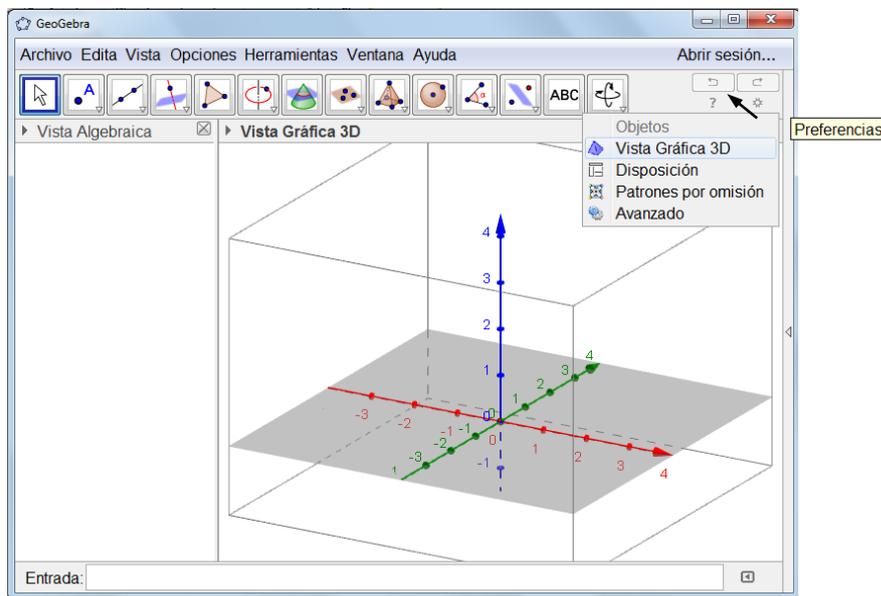


Figura 14. Ingreso a Preferencias de la Vista Gráfica 3D.

Seguidamente, en la ventana *Preferencias*, ingresamos a la ficha *EjeX* y en la casilla inferior *Rótulo*, digitamos “X”, y el eje X queda rotulado, tal como mostramos en la figura 15. En las opciones por defecto de la viñeta de dicha casilla, también figura el rótulo “x”, pero por *notación conjuntista*, preferimos designar los nombres de los ejes en mayúsculas por lo cual es *necesario* digitarlo de esa manera desde el teclado.

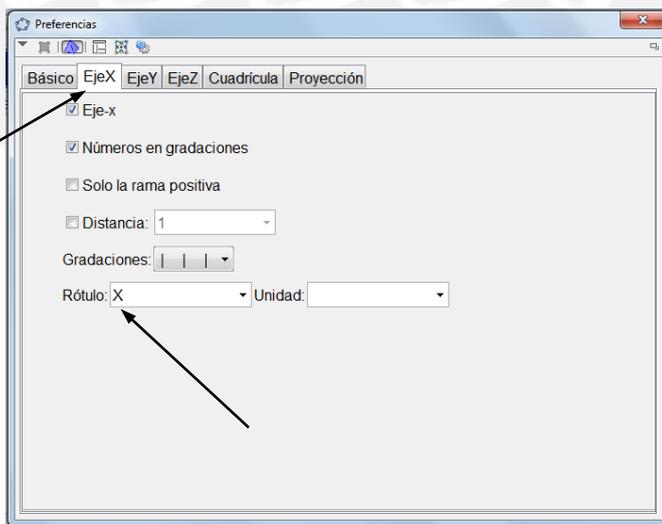


Figura 15. Rotulación del eje X.

De manera análoga, puede identificarse los ejes Y y Z al ingresar a las fichas *EjeY* y *EjeZ* de la ventana *Preferencias*, respectivamente, tal como mostramos en la figura 16 donde los ejes

cartesianos están debidamente identificados. Observamos que el eje X está representado de color rojo, el eje Y de color verde, y el eje Z en color azul y en posición vertical.

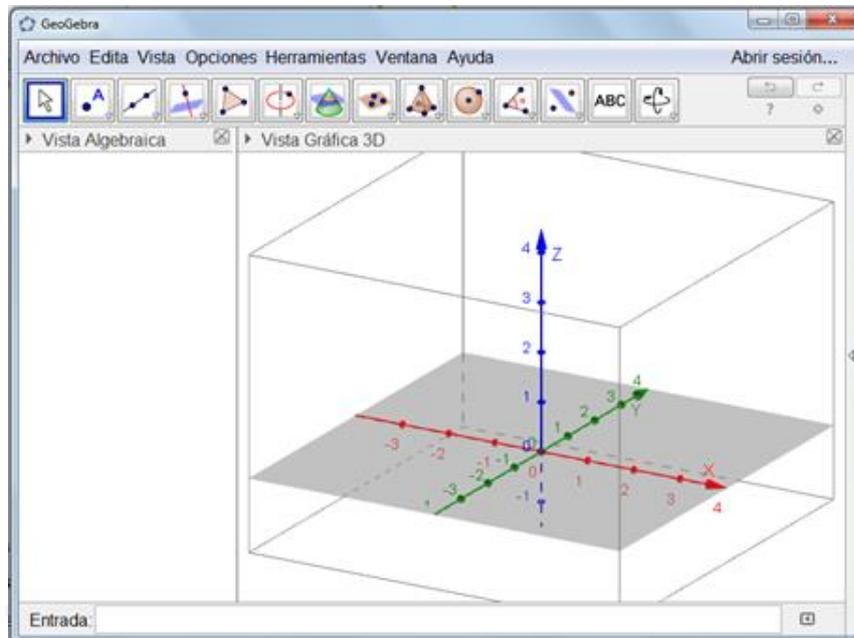


Figura 16. Ejes cartesianos con vista principal el cuarto octante.

La orientación de los ejes por defecto en *Geogebra 3D* es, como ya se ha mencionado, con vista principal el cuarto octante, en la cual el semieje positivo del eje X está orientado hacia la derecha del observador. Para rotar la vista gráfica 3D y por ende los ejes cartesianos, utilizamos la herramienta *Rota la Vista Gráfica 3D*  situado en la decimocuarta posición de la barra de herramientas, tal como mostramos en la figura 17. Al estar activado dicho ícono y tener presionado el botón derecho del mouse en cualquier zona de la vista gráfica 3D, la dirección del desplazamiento del mouse proporciona la rotación deseada de la vista gráfica 3D y cualquier objeto representado en ella. Al estar definida la posición de la vista rotada, el mouse debe estar en reposo antes de soltarse el botón derecho, caso contrario se dotará a la vista gráfica con un giro permanente.

En la figura 17 mostramos que se ha activado el ícono referido, y al mantener presionado el botón derecho del mouse se ha desplazado ligeramente el mouse hacia la izquierda, lográndose obtener la orientación de los ejes con el primer octante XYZ hacia el observador (posición canónica), ya que esta disposición de la vista de los ejes cartesianos es la más común y familiar para los estudiantes en sus estudios de representaciones gráficas de objetos en un sistema de coordenadas tri-dimensionales.

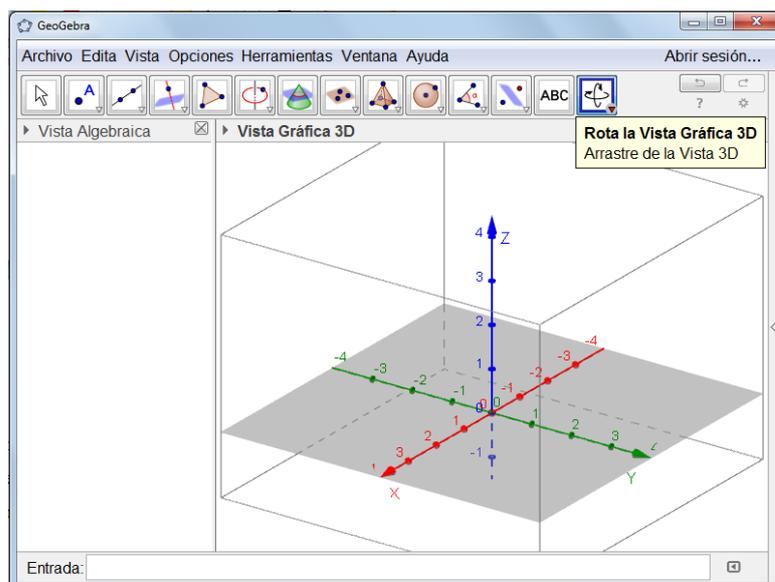


Figura 17. Rotación de la vista gráfica 3D.

Los alejamientos / acercamientos de la vista gráfica 3D pueden lograrse mediante el giro de la rueda del mouse. También puede utilizarse los íconos *Aproximar* y *Alejar* de la barra de herramientas para acercar o alejar objetos representados en la vista gráfica 3D respecto del observador. Dichos íconos se ubican en el grupo de íconos de la decimocuarta posición de la barra de herramientas (ver figura 18).

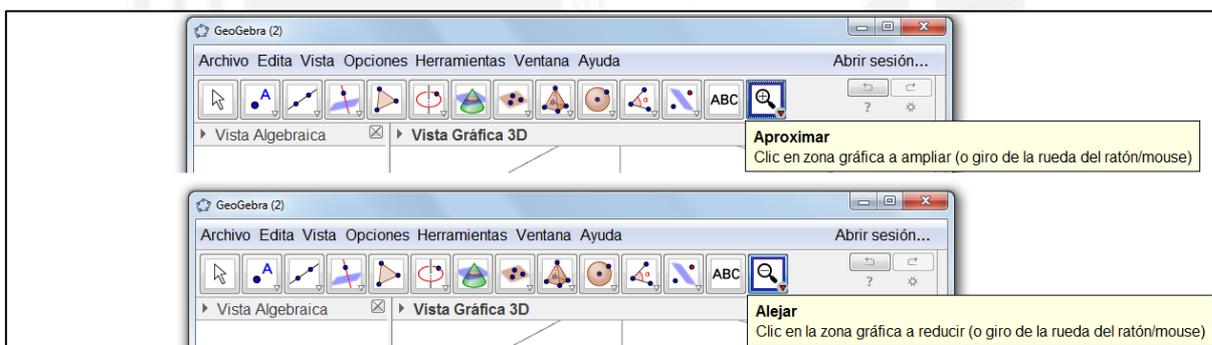


Figura 18. Íconos para acercar / alejar la vista gráfica 3D.

Debe tenerse en cuenta la posición del puntero del mouse en la vista gráfica para realizar el acercamiento o alejamiento mediante el giro de la rueda del mouse, actuando dicha posición referida como un “punto de fuga”.

No es necesario que todas las herramientas del software Geogebra estén visibles, por lo cual algunas pueden ser ocultadas o desactivadas. Por ejemplo, si no se necesita utilizar el deslizador, podemos ocultar la Vista Gráfica estándar, el plano base y la caja de recorte. En la figura 19 mostramos la ventana *Preferencias* de Geogebra, ficha *Básico* para desactivar la opción *Mostrar el recorte*, lo cual ocultará la Caja de Recorte.

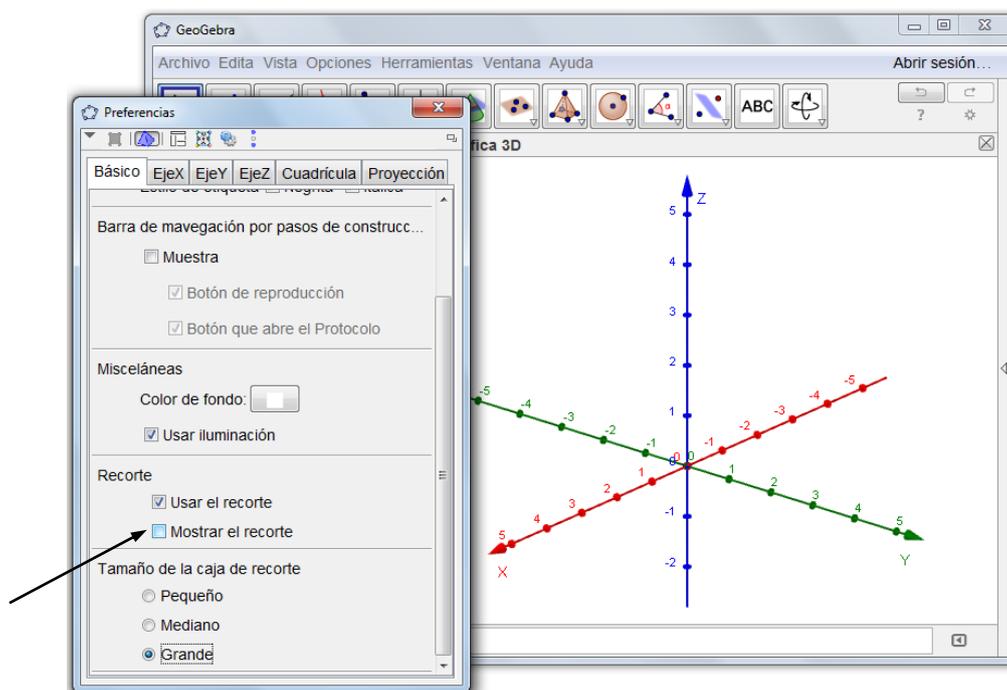


Figura 19. Ocultamiento de la Caja de Recorte de la Vista Gráfica 3D.

Al digitar en la barra de entrada la ecuación cartesiana de un paraboloides elíptico representado

por $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, el Geogebra grafica la superficie, tal como mostramos en la figura 20.

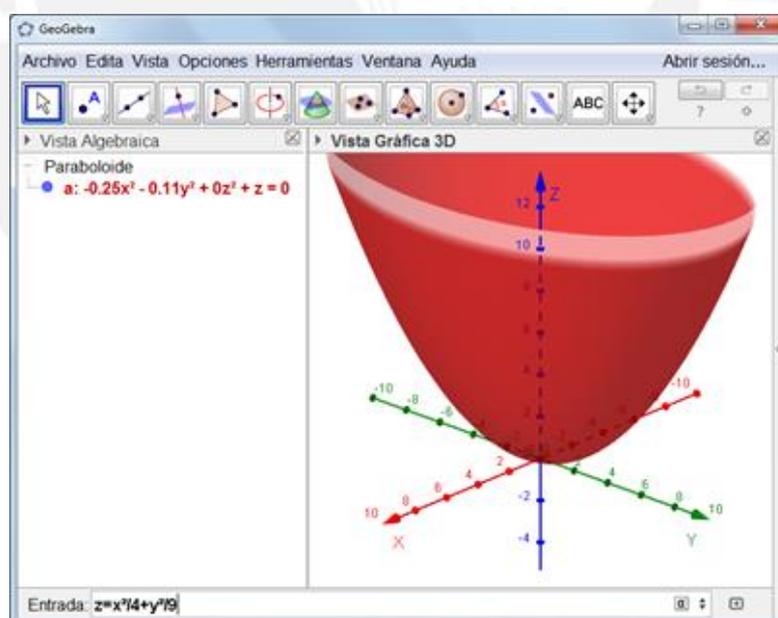


Figura 20. Gráfico del paraboloides $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

Como podemos observar en la figura 20, la ecuación del paraboloides representado en la Vista Algebraica no se muestra en la forma ingresada en la Barra de Entrada. Para realizar cambios

en los términos de la ecuación del paraboloides, hacemos clic derecho en algún punto de la representación gráfica de la superficie, luego elegimos la opción “propiedades” y aparece la ventana *Preferencias*, la cual mostramos en la figura 21. En la línea “Valor”, aparece la ecuación del paraboloides, tal cual ha sido ingresado, por lo cual la vista algebraica no es imprescindible y se ocultará.

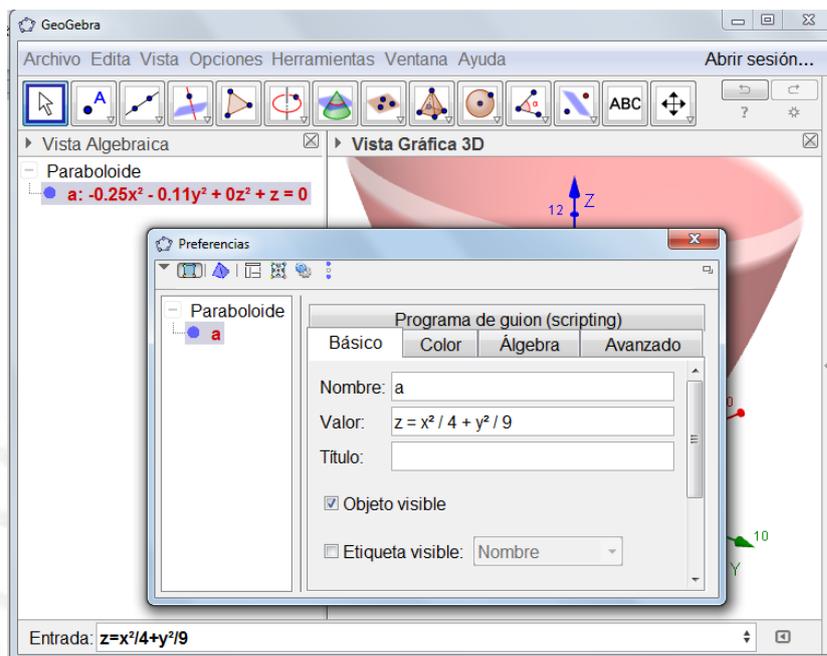


Figura 21. Ventana de Preferencias

Para representar gráficamente una superficie cuádrica S en *Geogebra 3D*, se utilizarán las trazas de dicha superficie con planos paralelos a los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ya que según Stewart:

La idea de usar trazas para dibujar una superficie se emplea en software de graficación tridimensional para computadoras. En la mayor parte de esta clase de software, las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores igualmente espaciados de k , y partes de la gráfica se eliminan por medio de la eliminación de líneas ocultas. (Stewart, 2012, p. 830).

Las trazas de una superficie cuádrica S con un plano π , pueden representarse por medio del comando *IntersecaCónica*, cuya sintaxis es:

$$\text{IntersecaCónica[<Plano>, <Cuadrica>]}$$

Donde:

<Plano>: es la ecuación cartesiana del plano π secante a la superficie S . Para el ingreso de la ecuación del plano en la sintaxis, previamente debe estar activada la vista gráfica 3D.

<Cuadrica>: es la ecuación o nombre de la superficie cuádrica S

Para representar gráficamente la superficie $S: z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ por trazas, se ocultará la representación gráfica de la superficie, luego se representarán los cortes de dicha superficie S con los planos: $x = 0$, $y = 0$, y los planos $z = k$ generados por el deslizador k que varía entre 0 y 5 con incremento 1, cuyos rastros están activados. En la figura 22, mostramos la representación gráfica del paraboloides S por trazas.

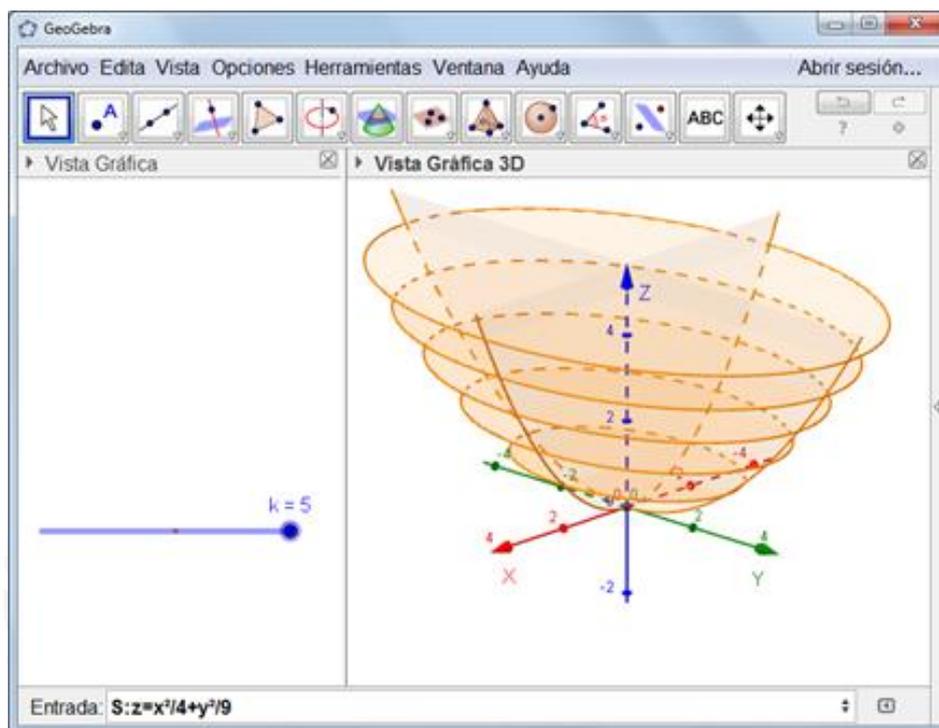


Figura 22. Gráfica de un paraboloides en *Geogebra 3D* representado por trazas

En la figura 22, observamos que el deslizador k está en la posición 5, lo cual indica que en esa posición en particular, sólo se ha representado el corte del paraboloides S con el plano $z = 5$, los demás cortes son únicamente rastros de dicho “plano móvil”, y no puede realizárseles algún tipo de tratamiento, ya que al acercarse o alejarse la vista gráfica 3D, éstos rastros desaparecerán. En caso de ser necesario representar elementos de alguno de esos cortes, deberá representarse previamente cada uno de ellos mediante el comando *IntersecaCónica*.

En *Geogebra 3D*, por defecto y al mantener el tamaño de la ventana sin maximizar, la vista gráfica de los ejes cartesianos presenta una graduación de -5 a 5 para el eje X , -5 a 5 para el eje Y , y -2 a 5 para el eje Z , fuera de estos límites no es posible representar objetos en su totalidad en la vista Gráfica 3D. En la figura 23 hemos representado el paraboloides

$S: z = \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9}$ mediante cortes con los planos $x = 0$, $y = 0$, y seis cortes con planos

paralelos al plano $z = 0$ (sin la utilización del deslizador), observándose que no han sido representados en su totalidad todos los cortes de S debido a la ubicación del vértice de la superficie, el cual no aparece representado en la disposición por defecto de la vista gráfica 3D.

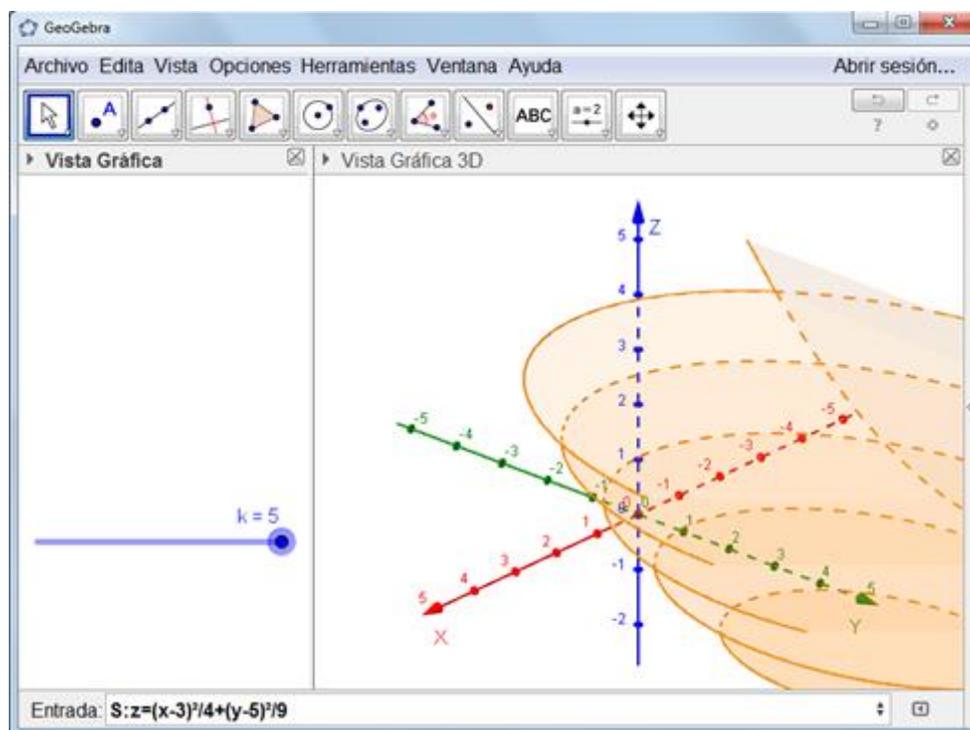


Figura 23. Gráfica del paraboloido $S : z = \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9}$ por defecto

Conjuntamente con el comando “Alejar” al utilizar la rueda del mouse o el ícono *Alejar* , puede utilizarse el comando *Desplaza Vista Gráfica*  ubicado en el grupo de íconos de la decimocuarta posición de la barra de herramientas, el cual permite desplazar la vista gráfica 3D o modificar la escala de los ejes cartesianos. Mediante el clic izquierdo del mouse puede cambiarse la dirección del desplazamiento siendo esta en dirección paralela al plano XY con puntero el forma de cruz, o en dirección paralela al eje Z adoptando el puntero del mouse la forma de doble flecha. Si la superficie ha sido representada mediante la función *Rastro* de cortes por medio del deslizador, al rotar o trasladar dicha superficie se pierden los rastros, por lo cual debe volver a realizarse este último paso. En la figura 24 mostramos la gráfica del paraboloido $S : z = \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9}$ el cual mediante traslación, alejamiento y rotación, se muestra en una disposición más conveniente, ya que podemos percibir la forma de la superficie, así como la ubicación de su vértice.

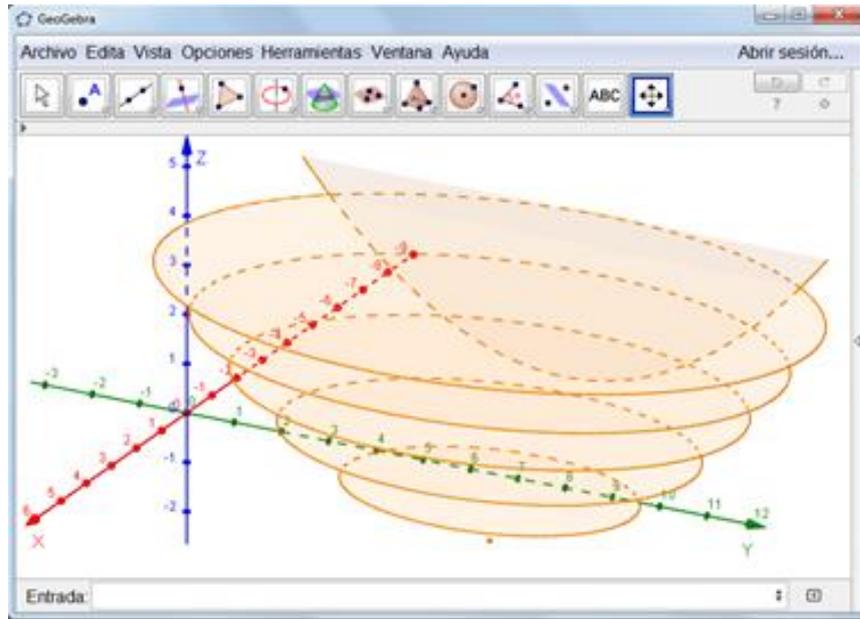


Figura 24. Gráfica del paraboloides $S : z = \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9}$ rotado y desplazado.

En caso de ser presentada la gráfica de cierto paraboloides en Geogebra 3D desconociéndose su ecuación cartesiana, y con la finalidad de que los estudiantes obtengan dicha ecuación por medio del reconocimiento de atributos intrínsecos que poseen sus cortes, tales como coordenadas de centros, vértices, focos, puntos de paso o la ecuación del plano al cual pertenecen dichos cortes, es conveniente mantener visible únicamente la *Vista Gráfica 3D*, con la finalidad que los estudiantes utilicen las herramientas de rotación, acercamiento / alejamiento y desplazamientos para poder obtener valores numéricos o simbólicos que permitan realizar conversiones del registro gráfico al algebraico.

Así mismo, algunos comandos y herramientas disponibles en la versión estándar de Geogebra también pueden utilizarse en objetos representados en la *Vista Gráfica 3D* tales como *Intersección*, *Texto*, *Distancia o Longitud*, *Medio o Centro*, *Mostrar u Ocultar objeto*, etc., así como las herramientas para modificación de atributos de objetos tales como nombre, valor, color, estilo de línea, tamaño de letra, redondeo, etc.

Con la finalidad de evidenciar la importancia de la enseñanza de las superficies cuádricas en las carreras de Arquitectura, se hará una revisión de dicho tema en algunas universidades privadas de Lima, Perú, las cuales tienen la carrera profesional de Arquitectura, y evidenciar en tres de ellas el estudio del paraboloides en sus correspondientes planes de estudio.

2.2 Superficies Cuádricas en cursos de Arquitectura

Dada la necesidad del estudio de las superficies cuádricas para el diseño de formas estructurales arquitectónicas tales como cúpulas, represas, ambientes acústicos, domos, etc., creemos que dicho tema debe formar parte de los cursos de matemática de los planes de estudios de universidades que forman arquitectos.

En primer lugar, el curso Matemáticas 1 se dicta en la PUCP y forma parte del plan de estudios de pregrado de la carrera profesional de Arquitectura de la FAU. En la cuarta unidad del curso Matemáticas 1, se trata el tema *Geometría en el espacio, vectores*, donde se estudian las representaciones gráficas de ecuaciones de 2do grado en tres variables a partir de las trazas de dichas superficies con planos paralelos a los planos coordenados. En el curso Matemáticas 2, se realiza una revisión de los elementos de geometría del espacio, incluyéndose el estudio de las superficies cuádricas; de esta manera, el tema superficies cuádricas se estudia en dos cursos secuenciales, de ahí su relevancia en el plan de estudios de Arquitectura. En el cuadro 10 observamos la posición de los cursos Matemáticas 1 y Matemáticas 2 en los niveles 1 y 2 (primer año) del plan de estudios de Arquitectura.

Cuadro 10. Plan de estudios de Arquitectura de la PUCP, niveles 1 y 2

INICIAL 1 AÑO	
NIVEL 1	NIVEL 2
TALLER 1 ARC-121 8	TALLER 2 ARC-122 8
MATEMÁTICAS 1 MAT-116 4	MATEMÁTICAS 2 MAT-127 5
POBLACIÓN Y TERRITORIO URB-103 3	
DIBUJO ARQUITECTÓNICO 1 ARC-131 3	DIBUJO 2 ARC-132 3
ARGUMENTACIÓN HUM-113 3	
TOTAL DE CRÉDITOS POR NIVEL 21	GEOMETRÍA DESCRIPTIVA ARC-124 3
	FUNDAMENTOS DE INGENIERIA CIV-140 3
	TOTAL DE CRÉDITOS POR NIVEL 22

Fuente: Plan de estudios de Arquitectura, Pontificia Universidad Católica del Perú

A continuación, la Universidad de Lima (UL), Facultad de Ingeniería Industrial, ofrece la carrera de Arquitectura en la cual, según el Cuadro 11, se dicta el curso Matemática para Arquitectos en un 2do nivel, pero también correspondiente al 1er año de estudios. En el sílabo de dicho curso, en la cuarta y última unidad se estudia el sistema tri–dimensional y superficies cuádricas, y finalmente la gráfica por medio de cortes de dichas superficies con planos, entre ellas el paraboloide.

Cuadro 11. Plan de estudios de Arquitectura de la UL, niveles 1 al 4.

PLAN DE ESTUDIOS 2013-2									
(Plan vigente desde el periodo 2013-1)									
PRIMER NIVEL									
DEP.	COD.	ASIGNATURA	REQUISITO	COD.	CRED	CAR	HORAS		
							TEO	PRA	TOT
5111	6381	LENGUAJE I	-----		5	0	3	3	6
5111	6323	PSICOLOGÍA	-----		3	0	2	2	4
5111	6382	MATEMÁTICA BÁSICA	-----		5	0	3	3	6
7001	700001	PROYECTO DE ARQUITECTURA I	-----		5	0	2	7	9
7001	700002	DIBUJO I	-----		4	0	2	4	6
TOTAL					22	0	12	19	31
SEGUNDO NIVEL									
DEP.	COD.	ASIGNATURA	REQUISITO	COD.	CRED	CAR	HORAS		
							TEO	PRA	TOT
5111	6327	ECONOMÍA GENERAL	-----		3	0	2	2	4
5111	6328	LENGUAJE II	LENGUAJE I	6381	3	0	1	3	4
5111	6329	INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS SOCIALES	-----		3	0	2	2	4
5111	6337	MATEMÁTICA PARA ARQUITECTOS	MATEMÁTICA BÁSICA	6382	4	0	3	2	5
7001	700003	PROYECTO DE ARQUITECTURA II	PROYECTO DE ARQUITECTURA I	700001	5	0	2	7	9
7001	700004	DIBUJO II	DIBUJO I	700002	4	0	2	4	6
TOTAL					22	0	12	20	32
TERCER NIVEL									
DEP.	COD.	ASIGNATURA	REQUISITO	COD.	CRED	CAR	HORAS		
							TEO	PRA	TOT
7001	700055	PROYECTO DE ARQUITECTURA III	PROYECTO DE ARQUITECTURA II	700003	8	0	7	2	9
7001	700056	DIBUJO III	DIBUJO II	700004	3	0	1	4	5
7001	700057	HISTORIA DEL ARTE	LENGUAJE II	6328	3	0	2	2	4
7001	700058	ESTADÍSTICA	ECONOMÍA GENERAL	6327	3	0	2	2	4
7001	700059	CONSTRUCCIÓN I	-----		3	0	2	2	4
7001	700060	FÍSICA	MATEMÁTICA PARA ARQUITECTOS	6377	3	0	2	2	4
TOTAL					23	0			
CUARTO NIVEL									
DEP.	COD.	ASIGNATURA	REQUISITO	COD.	CRED	CAR	HORAS		
							TEO	PRA	TOT
7001	700061	PROYECTO DE ARQUITECTURA IV	PROYECTO DE ARQUITECTURA III	700055	8	0	7	2	9
7001	700062	COMUNICACIONES I	DIBUJO III	700056	3	0	2	2	4
7001	700063	HISTORIA Y TEORÍA DE LA ARQUITECTURA I	HISTORIA DEL ARTE	700057	3	0	2	2	4
7001	700064	MEDIO AMBIENTE Y RECURSOS NATURALES	INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS SOCIALES	6329	3	0	2	2	4
7001	700065	CONSTRUCCIÓN II	CONSTRUCCIÓN I	700059	3	0	2	2	4
7001	700066	ORIENTACIÓN ESTRUCTURAL	FÍSICA	700060	3	0	2	2	4
TOTAL					23	0			

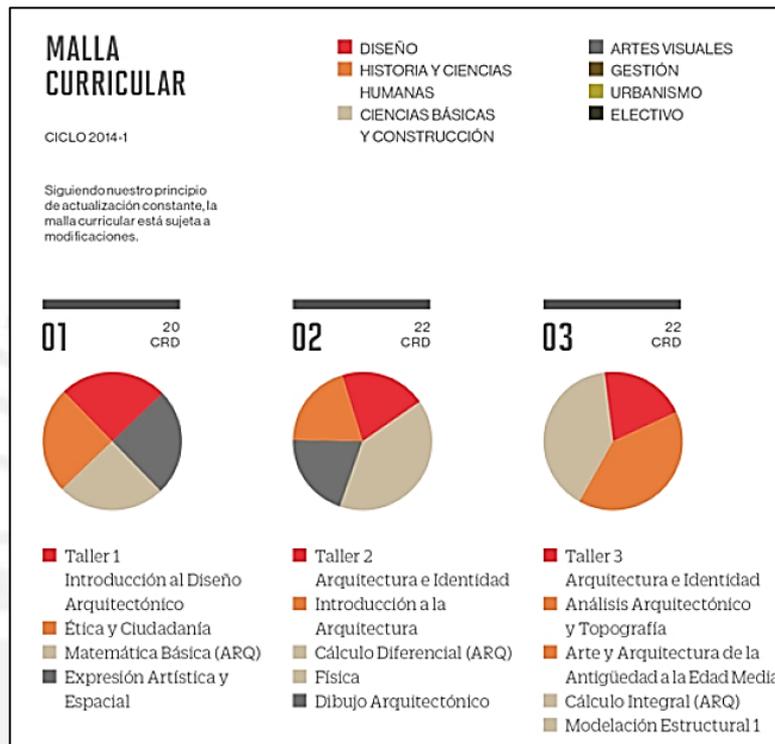
Fuente: Plan de estudios de Arquitectura, Universidad de Lima (recuperado de <http://www.ulima.edu.pe>)

En el cuadro 11 observamos la trazabilidad del curso Matemáticas para Arquitectos respecto a cursos prerrequisitos y secuenciales. Dicho curso es requisito para el curso Física el cual, a su vez, es requisito para el curso Orientación Estructural correspondiente al cuarto nivel de estudios. Esta organización de tipo vertical reafirma la importancia del estudio de las superficies cuádricas para el diseño y cálculo estructural de las formas arquitectónicas.

Por otro lado, en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC), Facultad de Arquitectura, el curso Matemática Básica (ARQ) corresponde al 1er ciclo del plan de estudios

de Arquitectura. En el sílabo del curso Matemática Básica (ARQ), la unidad 2 Geometría Analítica trata entre otros temas el estudio de las secciones cónicas, en particular el estudio de la parábola y la elipse son los lugares geométricos directamente relacionados a las trazas de la superficie del paraboloides con planos cortantes en diversas posiciones, cuyo estudio se realiza al culminar el curso. La posición relativa de dicho curso se sitúa en el Cuadro 12.

Cuadro 12. Plan de estudios de Arquitectura de la UPC, niveles 1 y 2.



Fuente: Malla curricular de Arquitectura, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (recuperado de <http://www.upc.edu.pe>)

En el cuadro 12, el curso Matemática Básica (ARQ) cubre aproximadamente el 25% del peso académico del 1er ciclo, este curso es prerrequisito para Cálculo Diferencial (ARQ) y Física, correspondientes al 2do ciclo de estudios los cuales, a su vez, son prerrequisitos para el curso Cálculo Integral (ARQ) y Modelación Estructural, todos ellos cursos del área de ciencias básicas y construcción, reafirmando la relevancia de los modelos matemáticos en el cálculo estructural.

Habiéndose indicado la importancia de la enseñanza del tema superficies cuádricas, en las carreras de Arquitectura de tres universidades privadas de nuestra capital, presentaremos brevemente los orígenes del estudio de las superficies cuádricas en el desarrollo histórico de la humanidad.

2.3 Reseña Histórica de las Superficies Cuádricas

Los orígenes del estudio de las superficies cuádricas se remontan a la antigua Grecia, donde los matemáticos griegos estudiaron los cortes bi-dimensionales producidos entre un plano y un cono denominándose *cónicas* a las secciones generadas. En esta etapa inicial no se emplearon ecuaciones para describir la propiedad común entre los puntos de una superficie cuádrica ya que el álgebra no se había formalizado sino hasta muchos siglos más tarde, la geometría analítica estaba naciente y todos los objetos matemáticos y elementos constitutivos en estudio pertenecían a un mismo plano.

Menecmo (aproximadamente 350 A.C.), notable astrónomo y geómetra griego, fue el descubridor de las secciones cónicas, las cuales le permitieron resolver uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad: La duplicación del cubo (los otros dos problemas fueron la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo). Ninguno de estos tres problemas pudo ni puede resolverse al utilizar únicamente la regla y el compás, pero Menecmo desarrolló una metodología gráfica y analítica para resolver la duplicación del cubo por medio de curvas las cuales se obtuvieron a partir de ecuaciones. Menecmo logró obtener las ecuaciones de tales cónicas, para lo cual según Ortiz (2005):

[...] las cónicas eran el lugar geométrico de los puntos de intersección de la superficie de un cono (acutángulo, obtusángulo o rectángulo) con un plano perpendicular a una de las generatrices del cono. Las secciones cónicas tuvieron un equivalente con las ecuaciones algebraicas. (p. 291).

Menecmo obtuvo las ecuaciones de la parábola y la hipérbola equilátera a partir de un problema de Hipócrates de Quíos (470–410 a. C.) el cual buscaba dos medias proporcionales entre dos rectas a y b , pero fue Apolonio de Pérgamo (Perge, c. 262 – Alejandría, c. 190 a. C.) quien en su obra cumbre *Cónicas* establece los principios de la teoría de la geometría analítica de manera formal. Al respecto, Ortiz (2005) señala lo siguiente:

[...] con él se inicia la importante teoría de la geometría analítica de un modo formal; esto en una época en que no existía el álgebra de un modo organizado que le hubiera sugerido, posiblemente, algebrizar a la geometría de las cónicas, como lo hicieron muchos siglos después, Kepler, Cavalieri y sobre todo Descartes. (p. 290).

Leonhard Euler (1707–1783) publicó en 1748 *Introducción al análisis de los infinitos* en dos volúmenes, el segundo tomo es el más importante para el desarrollo del estudio de las superficies cuádricas porque utilizaba sistemas de coordenadas en dos y tres dimensiones, lo cual estableció las bases para el estudio sistemático de curvas y superficies, la cual es prácticamente la primera publicación en su género que trata sobre la geometría analítica sólida.

Carl Boyer en su publicación *A History Of Mathematics* (1968) escribe sobre Euler:

[...] Aquí encontramos, evidentemente por vez primera que, la noción de superficies de segundo grado constituye una familia de cuádricas en el espacio análoga a la de las secciones cónicas en geometría plana. Iniciando con la ecuación cuadrática general de diez términos $f(x, y, z) = 0$, Euler señaló que la suma de los términos de segundo grado cuando la ecuación es igualada a cero, resulta en la ecuación del cono asintótico, real o imaginario. Más importante aún, Euler utilizó las ecuaciones para la traslación y rotación de los ejes cartesianos [...] para reducir la ecuación de una superficie cuádrica no singular a una de las formas canónicas correspondientes a los cinco tipos fundamentales: el verdadero elipsoide, los hiperboloides de una y dos hojas, y los paraboloides elípticos e hiperbólicos. (Traducción nuestra, p. 521).

En este sentido, Euler clasifica las superficies cuádricas no singulares en cinco tipos fundamentales, entre los que se ubican los dos tipos de paraboloides, circular y elíptico, el cual es nuestro objeto matemático en estudio.

Gaspard Monge (1746–1818) conjuntamente con su colaborador Jean Nicolas Pierre Hachette (1769 – 1834), probaron rigurosamente que los cortes generados por planos paralelos en las superficies cuádricas que no poseen centro (paraboloides), son homotéticos y representan secciones cónicas. Posteriormente, Augustin–Louis Cauchy (1789–1857) continuó con el estudio y clasificación de las superficies cuádricas, mediante un estudio completo sobre los planos diametrales y el problema de encontrar el centro, y completó los trabajos de Euler, Monge y Hachette.

Es el gran matemático francés Cauchy quien estableció los fundamentos del estudio matemático de las superficies cuádricas como lugar geométrico tal y como es transmitido y enseñado en la actualidad, y su propuesta realizada a más de 150 años de su partida aún perdura, denominándose con justicia al siglo XIX la edad de oro de la geometría analítica.

En esta breve reseña histórica, evidenciamos la necesidad de la geometría analítica para la representación algebraica de los cortes de planos secantes a una superficie cuádrica, así como la formalización del estudio y clasificación de las superficies cuádricas, y su representación gráfica mediante cortes. Todo ello permite situar históricamente al objeto matemático paraboloides en el campo del conocimiento, para comprender la noción de paraboloides, y estructurar mejor nuestra tesis.

Seguidamente, se mostrarán aspectos matemáticos del paraboloides, y tomaremos como referencia bibliográfica para tal fin el texto de Lehmann (1953).

2.4 El Paraboloide

El estudio del paraboloides, nos permite identificar sus representaciones en los registros gráfico y algebraico, además de las transformaciones realizadas en el registro algebraico, para transformar la expresión algebraica de su forma general a una en particular (forma canónica), y realizar tratamientos en dicho registro para la conversión al registro gráfico y representar gráficamente dicha superficie, por medio de los cortes, los cuales en este estudio, son secciones cónicas.

Lehmann (1953), realizó un análisis de la ecuación general de segundo grado en tres variables, la cual consta de diez términos, expresión a la cual denomina *superficie cuádrica*, si dicha expresión algebraica representa a una superficie.

De considerable importancia en la Geometría analítica de tres dimensiones es la ecuación general de segundo grado con tres variables,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \quad (1)$$

en donde uno, por lo menos, de los seis coeficientes A, B, C, D, E y F es diferente de cero. Una superficie cuya ecuación es de la forma (1), es decir, de segundo grado, se llama, apropiadamente, *superficie cuádrica* o simplemente una *cuádrica*. [...]Supongamos que cortamos la cuádrica (1) por un plano cualquiera paralelo al plano XY , es decir, el plano $z = k$, en donde k es una constante real cualquiera. Las ecuaciones de la curva de intersección se obtienen sustituyendo z por k en la ecuación (1); éstas son:

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Ik + K = 0, \quad z = k$$

Por nuestro estudio previo de la ecuación plana general de segundo grado con dos variables, reconocemos esta curva como una sección cónica, o una forma límite de una sección cónica, contenida en el plano $z = k$. Más generalmente, podemos demostrar que, *si una superficie cuádrica es cortada por un plano cualquiera, la curva de intersección es una sección cónica o una forma límite de una sección cónica.* (p. 425).

El autor, realiza en el registro algebraico un corte de la cuádrica con el plano $z = k$, obteniéndose la representación algebraica de una sección cónica, o una de sus formas degeneradas, lo cual queda determinado por los valores de sus coeficientes. En dicha expresión, el autor realiza tratamientos en el registro algebraico mediante sustitución de dichos coeficientes por otros, obteniéndose una expresión de seis términos más compacta, la cual define analíticamente como una sección cónica:

La ecuación general (1) de una cuádrica ocupa entre las superficies, en Geometría analítica del espacio, un lugar análogo al ocupado entre las curvas planas, en Geometría analítica plana, por la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2)$$

que es la definición analítica de una sección cónica. (p. 425).

Lehmann (1953), señala la analogía entre las representaciones algebraicas de las secciones cónicas, con la representación algebraica de la superficie cuádrica, lo cual permite, mediante transformaciones en el registro algebraico y con las debidas restricciones, obtener casos particulares y, de esta manera, clasificar las superficies cuádricas.

El autor, transforma la ecuación (1) en dos formas particulares:

Se demuestra en tratados avanzados que mediante una transformación apropiada de coordenadas, se puede transformar la ecuación (1) de manera que tome una de las formas tipo:

$$(I) \quad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R,$$

$$(II) \quad Mx^2 + Ny^2 = Sz,$$

Las superficies del tipo (I) tienen un centro de simetría, el origen, y por eso se llaman *cuádricas con centro*. Las superficies del tipo (II) no tienen centro de simetría y se llaman, por lo tanto, *cuádricas sin centro*. (p. 426).

El autor, para transformar la ecuación (1) en las formas (I) y (II), realizó tratamientos en el registro algebraico de tipo *traslación y rotación de coordenadas*, con la finalidad de eliminar los coeficientes D , E y F de los términos rectangulares y los coeficientes G , H , e I de los términos lineales para obtener la forma (I). En forma análoga, y al eliminar el coeficiente del término cuadrático en la variable cartesiana z , el autor obtuvo la forma (II).

En la figura 25, mostramos la clasificación de las cuádricas realizado por el autor, tanto para las ecuaciones de la forma (I) como para la forma (II), según los valores y signos que adoptan los coeficientes para cada forma.

Clasificación de las cuádricas		
TIPO (I). $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$		
COEFICIENTES		LUGAR GEOMETRICO
R^*	M, N, P	
> 0	Todos positivos Todos negativos Dos positivos, uno negativo Uno positivo, dos negativos Uno cero, dos positivos Uno cero, dos negativos Uno cero, uno positivo, uno negativo	Elipsoide Ningún lugar geométrico Hiperboloide de una hoja Hiperboloide de dos hojas Cilindro elíptico (o circular) recto Ningún lugar geométrico
	Dos cero, uno positivo Dos cero, uno negativo	Cilindro hiperbólico recto Dos planos paralelos diferentes Ningún lugar geométrico
$= 0$	Todos del mismo signo Dos positivos, uno negativo Uno cero, dos del mismo signo	Un solo punto, el origen Cono recto Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Uno cero, dos de signos contrarios Dos cero	Dos planos que se cortan Un plano coordenado (dos planos coincidentes).
* Cuando $R < 0$, se invierten los signos de los coeficientes M, N y P ; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $R > 0$.		
TIPO (II). $Mx^2 + Ny^2 = Sz$		
COEFICIENTES		LUGAR GEOMETRICO
S^{**}	M, N	
> 0	Del mismo signo Signos opuestos Uno cero	Paraboloide elíptico Paraboloide hiperbólico Cilindro parabólico recto
	Del mismo signo Signos opuestos Uno cero	Todos los puntos sobre un eje coordenado Dos planos que se cortan Un plano coordenado (dos planos coincidentes)
** Cuando $S < 0$, se invierten los signos de los coeficientes M y N ; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $S > 0$.		

Figura 25. Clasificación de las cuádricas.

Fuente: Lehmann (1953, p. 427)

En la figura 25, el paraboloide elíptico corresponde a la ecuación de una cuádrica del tipo (II) y, según Lehmann (1953), es una cuádrica sin centro, por lo cual únicamente expondremos la parte teórica de éste tipo de superficie.

Cuádricas sin centro. En este artículo consideramos las cuádricas sin centro representadas por la ecuación

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz,$$

en donde todos los coeficientes son diferentes de cero. Podemos entonces escribir esta ecuación en la forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (1)$$

llamada *forma ordinaria o canónica de una superficie cuádrica sin centro*. De la ecuación (1) se deduce que las cuádricas sin centro tienen dos planos de simetría (los planos YZ y XZ) llamados *planos principales*, un eje de simetría (el eje Z) llamado *eje principal*, pero ningún centro de simetría. (p. 433).

Lehmann (1953), en la ecuación $\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$, identifica una de las representaciones simbólicas de las superficies cuádricas sin centro: *el eje Z*, el cual, en el registro gráfico, corresponde al eje principal o de simetría (eje de la cuádrica). Según los signos de los términos del primer miembro en dicha ecuación, el autor clasifica la superficie resultante:

Atendiendo a las diversas combinaciones posibles de signos en la ecuación (1), se deduce que, en esencia, existen solamente dos tipos diferentes de superficies, a saber:

- a) Paraboloides elípticos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son del mismo signo)
- b) Paraboloides hiperbólicos (aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son de signos contrarios). (p. 433).

Nuestra tesis está dirigido al estudio de visualización del paraboloides elíptico, por lo cual mostramos exclusivamente el análisis realizado por el autor para el caso (a):

- a) *Paraboloides elíptico*. Una forma canónica de la ecuación del paraboloides elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (2)$$

Las otras dos formas canónicas son $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy$ y $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$. [...] La superficie pasa por el origen. No hay otras intercepciones con los ejes coordenados.

Las trazas sobre los planos XY , XZ y YZ son, respectivamente, el origen, la parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz, y = 0$, y la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz, x = 0$.

La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y con respecto al eje Z .

Las secciones de las superficies por planos paralelos al XY son las curvas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, z = k \quad (3)$$

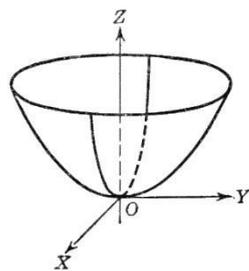


Fig. 191

Estas curvas son elipses si c y k son del mismo signo; si c y k tienen signos contrarios, no hay lugar geométrico. Si tomamos c como positivo, k debe ser positivo, y a medida que k aumenta de valor, las elipses (3) crecen en tamaño a medida que los planos de corte se alejan más y más del plano XY . Evidentemente, pues, la superficie no es cerrada sino que se extiende indefinidamente, alejándose del plano XY . Se ve fácilmente que las secciones de la superficie por planos paralelos a los planos XZ y YZ son parábolas cuyos vértices se alejan del plano XY a medida que se toman los planos de corte más y más lejos de estos planos

coordenados.

Una porción de la superficie, en el caso de ser c positivo, aparece en la figura 191. Si c es negativo la superficie está en su totalidad abajo del plano XY . Se dice de cada superficie que se extiende a lo largo del eje Z . Cualquier paraboloides elíptico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (2) es $a = b$, la superficie es un *paraboloides de revolución* que puede engendrarse haciendo girar la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz, x = 0$, en torno del eje Z . (Lehmann, 1953, pp. 433 – 434).

Lehmann (1953), identifica las formas de los cortes del paraboloides de la ecuación (2) con los planos coordenados, y con los planos paralelos al plano XY siempre que c y k sean del mismo signo. Así mismo, el autor señala las propiedades de simetría de la representación gráfica del paraboloides respecto a planos perpendiculares a su eje, y su orientación.

Según el autor, el paraboloides circular o de revolución es un caso particular del paraboloides elíptico, y puede generarse por rotación de una parábola alrededor de su eje focal.

El estudio del paraboloides realizado por el autor, nos permite identificar en términos del marco teórico las unidades significantes en las representaciones algebraicas de las variables visuales tales como vértice, eje de la superficie, plano de corte y de simetría, parábola, elipse, entre otros, lo cual habíamos considerado en nuestro estudio. Así mismo, el signo del valor numérico c determina la orientación de la superficie, lo cual remarca la necesidad de utilizar los símbolos relacionales ($>$, $<$) en los tratamientos del registro algebraico.

Sin perder generalidad, las formas citadas por el autor: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy$, y

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$, para nuestro estudio, podemos modificarlas en las tres formas siguientes:

$$\frac{z-w}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}, \text{ eje paralelo al eje } Z$$

$$\frac{y-k}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}, \text{ eje paralelo al eje } Y$$

$$\frac{x-h}{c} = \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}, \text{ eje paralelo al eje } X$$

expresiones algebraicas en la cual el vértice del paraboloide elíptico está representado por el punto $V(h, k, w)$, es decir, el vértice no coincide con el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$, pero el eje de la superficie es paralelo con alguno de los ejes cartesianos. Así mismo, hemos considerado por conveniencia situar al valor c en el denominador, ya que es un valor no nulo.

A continuación, presentamos una revisión de dos textos didácticos utilizados en la enseñanza de las superficies cuádricas en estudiantes de Arquitectura.

2.5 Revisión de Libros Didácticos

Una de las etapas del análisis preliminar de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como marco metodológico utilizado en nuestra investigación, es el estudio de aspectos didácticos y corresponde a la forma en la cual, el objeto matemático paraboloide es enseñado en los sujetos implicados en nuestro estudio, quienes son estudiantes de un primer curso de matemáticas de la carrera de Arquitectura.

Bajo esta consideración, hemos seleccionado dos libros de consulta, con el propósito de revisar cómo es abordado el objeto matemático paraboloide en el nivel de instrucción indicado.

En el cuadro 13, detallamos la información respecto a estos dos textos de consulta.

Cuadro 13. Textos de Consulta.

Autor (es)	Capítulo	Páginas	Título
Ugarte, Francisco y Yucra, Janet (2011).	4	239–283	Matemáticas para Arquitectos. 1ra edición.
Stewart, James (2006).	12	827–836	Cálculo de Varias Variables. Trascendentes Tempranas. 7ma edición.

Los dos textos de consulta, abordan el objeto matemático paraboloides como parte de un estudio más completo dedicado a las superficies cuadráticas, incluyéndose además del paraboloides: la esfera, el cilindro, el elipsoide, el hiperboloides de una y dos hojas, y el cono.

De acuerdo con los conocimientos previos relacionados con el estudio de las superficies cuadráticas, los estudiantes deben graficar las ecuaciones en tres variables de dichas superficies a partir de sus cortes con planos paralelos a los planos coordenados, así como determinar su ecuación cartesiana, si es que se les brinda una representación gráfica de la misma. Para los propósitos de la presente investigación, revisaremos únicamente los contenidos de cada texto citado concernientes a la enseñanza del paraboloides (circular y elíptico), y comprobar de qué forma dichos textos contribuyen a que los estudiantes logren el aprendizaje de dicho tema.

En la introducción al capítulo 4 del texto *Matemáticas para Arquitectos* de Ugarte y Yucra (2011), se hace referencia en capítulos anteriores a la interpretación geométrica en coordenadas cartesianas de las soluciones de una ecuación en una o dos variables reales, los cuales pueden ser puntos en la recta real, el plano XY o curvas en el plano cartesiano, en este sentido, se obtiene la representación gráfica de un objeto matemático en el registro gráfico por medio de una conversión desde el registro algebraico.

También se evidencia la obtención de la ecuación en dos variables a partir de una condición geométrica previamente establecida, así, los lugares geométricos estudiados son la recta, la circunferencia y las secciones cónicas. Finalmente, se propone esbozar la representación gráfica de ecuaciones de primer y segundo grado en tres variables (superficies) mediante tratamientos en sus registros algebraicos para realizar la conversión al registro gráfico. Así mismo, se muestra cómo obtener esas ecuaciones a partir de la descripción geométrica de puntos de la superficie mediante la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

Los autores, realizan una breve descripción del sistema coordenado rectangular XYZ , la representación de puntos en el espacio como ternas de números reales, y seguidamente se describe el objeto matemático superficie:

[...] y llamaremos superficie S a todo subconjunto no vacío del espacio, cuya descripción algebraica está dada por una relación entre las coordenadas de sus puntos: en símbolos, la superficie S es un subconjunto tal que $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / E(x, y, z) = 0\}$, donde $E(x, y, z)$ es una expresión algebraica en las variables x, y, z . (p. 240).

Los autores, emplean en la descripción del objeto superficie un lenguaje formal utilizando un registro de representación semiótica del tipo lenguaje natural y algebraico, el cual es

apropiado para relacionar los elementos del conjunto S conformado por puntos de \mathbb{R}^3 , y la relación entre las coordenadas de dichos puntos mediante una expresión algebraica, la cual, para el caso particular del estudio de las superficies cuádricas mediante tratamientos algebraicos, permiten realizar conversiones del registro algebraico al registro gráfico y poder así representar en el registro gráfico una superficie en particular.

En la sección 4.2. *Gráfica de ecuaciones en tres variables* del texto referido, Ugarte y Yucra (2011) afirman que para bosquejar la gráfica de una superficie S se *tabula*, indicándose con esto asignar valores a una de las variables y luego graficar la ecuación resultante. Esta técnica corresponde a realizar cortes de la superficie S con planos paralelos a los planos coordenados, y luego reconstruirla: “dicho de otro modo, para graficar una superficie la rebanamos y, a partir de estas piezas, la reconstruimos” (p. 245).

Los autores, presentan en su texto, ejemplos resueltos y propuestos con relación a problemas de superficies cuádricas que implican:

- Graficar la superficie cuádrica dada su representación algebraica mediante tabulaciones.
- Expresar la ecuación de la superficie cuádrica en su forma canónica mediante tratamientos en el registro algebraico, ya sea al completar cuadrados o mediante otros métodos,
- Determinar los valores de coordenadas desconocidas de una terna que representan puntos, los cuales pertenecen a la superficie,
- Determinar si un punto, cuya representación algebraica está dada, pertenece o no a una superficie cuádrica,
- Establecer la correspondencia entre la representación gráfica de tres superficies dadas y sus respectivas representaciones algebraicas.

En la figura 26 mostramos el enunciado de un ejemplo resuelto por los autores, en el cual la superficie en estudio es un paraboloides elíptico, en cuya representación gráfica su eje de simetría es el eje Y , vértice el origen de coordenadas, y la gráfica de la superficie se extiende hacia el semieje positivo del eje Y .

Ejemplo 160. Considere la superficie S de ecuación $16x^2 + 25z^2 = 400y$.

- a. Si es posible, halle los valores z para los cuales:
 - i. $x = -5, y = 1$
 - ii. $x = 5\sqrt{3}, y = -1$
- b. Determine las intersecciones de S con por lo menos cuatro planos coincidentes o paralelos a los planos coordenados. En caso de obtener cónicas, grafique las proyecciones de cada una de estas sobre el plano coordenado paralelo al plano de intersección, señale su nombre, las coordenadas de sus centros o vértices y , según sea el caso, el radio o las distancias del centro a los extremos del eje mayor y menor.
- c. A partir de las intersecciones obtenidas en el ítem b., bosqueje la gráfica de la superficie S ; y señale los ejes coordenados.

Figura 26. Ejercicio desarrollado del paraboloides $16x^2 + 25z^2 = 400y$

Fuente: Ugarte y Yucra (2011, p. 265)

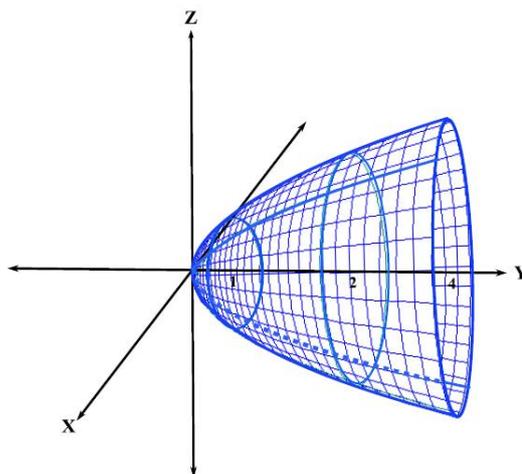
En el ítem (a), Ugarte y Yucra (2011) realizan tratamientos en el registro algebraico, para transformar la ecuación de la superficie a su forma canónica. Luego, los autores, al asignar los valores numéricos a cada par de variables cartesianas, x e y , en la ecuación de la superficie, hallan los valores reales de la variable cartesiana z , expresando en lenguaje natural la imposibilidad de poder obtener el valor de z en el caso (ii).

En el ítem (b), los autores realizan tratamientos en el registro algebraico, para obtener ecuaciones en dos variables las cuales identifican e indican sus principales elementos. Cabe indicar que, los planos de corte son paralelos al plano $y = k$, y los valores de k son enteros y positivos. Los autores no indican, en el procedimiento de resolución del problema, el motivo por el cual no se asignan valores negativos a k .

Los autores, realizan representaciones gráficas de cada curva obtenida, proyectándolas paralelamente en los planos coordenados mediante conexiones entre las unidades significantes del registro algebraico y sus correspondientes variables visuales en el registro gráfico, tales como las representaciones gráficas de centros, vértices y ejes focales, con excepción de la parábola representada por $\frac{z^2}{16} = y, x = 0$, en la cual no se consideran ningún punto de paso ni el signo del parámetro de la parábola para poder graficarla.

Finalmente, los autores muestran la solución del ítem (c):

c. A continuación, mostramos un bosquejo de la gráfica de la superficie S :



(Ugarte y Yucra, 2011, p. 268)

El desarrollo del ítem (c) del problema, muestra en forma directa la gráfica de la superficie S , pero los autores, no indican qué tipo de tratamientos en el registro gráfico han hecho factible la representación de dicho objeto tri-dimensional a partir de las curvas planas graficadas en el ítem (b). Tampoco se hace una identificación de cada curva plana del ítem anterior en la gráfica resultante, ni se identifica el tipo de superficie.

Cabe destacar que el problema 160 del texto de los autores, trata exclusivamente sobre la conversión del registro algebraico al registro gráfico, y no en el sentido inverso.

Un segundo texto de consulta, Stewart, J. (2006), *Cálculo de Varias Variables: Trascendentes Tempranas*, presenta un ejemplo resuelto para graficar la superficie cuádrlica representada por la ecuación $z = 4x^2 + y^2$.

Mediante tratamientos en el registro algebraico, en su descripción, el autor utiliza registros de lenguaje natural y algebraico para explicar la secuencia de *tabulación* de los planos de corte con la superficie, de manera análoga a la metodología realizada por Ugarte y Yucra (2011). El autor identifica la representación algebraica de cada corte obtenido, e inclusive identifica las variables visuales asociadas a sus respectivas representaciones algebraicas, pero a diferencia del texto de Ugarte y Yucra (2011), la conversión se realiza directamente del registro algebraico al registro gráfico, sin realizar previamente representaciones gráficas en el plano de cada corte ni identificándolos, tal como mostramos en la figura 27 (paraboloide elíptico).

EJEMPLO 4 Use trazas para bosquejar la superficie $z = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Si se escribe $x = 0$, se obtiene $z = y^2$, de modo que el plano yz corta a la superficie en una parábola. Si se escribe $x = k$ (una constante), se obtiene $z = y^2 + 4k^2$. Esto significa que si se corta a la gráfica en secciones con cualquier plano paralelo al plano yz , se obtiene una parábola que abre hacia arriba. De manera similar, si $y = k$, la traza es $z = 4x^2 + k^2$, que es de nuevo una parábola que abre hacia arriba. Si se escribe $z = k$, se obtienen las trazas horizontales $4x^2 + y^2 = k$, que se reconocen como una familia de elipses. Al conocer las formas de las trazas, se puede bosquejar la gráfica de la figura 5. Como resultado de las trazas elípticas y parabólicas, la superficie cuádrica $z = 4x^2 + y^2$ se llama **paraboloide elíptico**.

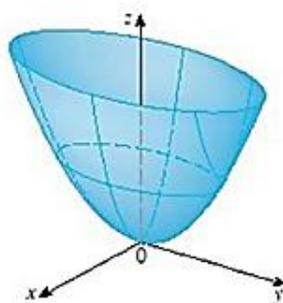


Figura 27. Representación gráfica de la superficie $z = 4x^2 + y^2$ por trazas.

Fuente: Stewart (2006, p. 828)

Como podemos observar en la figura 27, Stewart (2006) identifica la superficie resultante, apoyándose en la forma de las trazas, denominándola paraboloide elíptico.

Hemos notado que en nuestra labor docente, durante las asesorías y consultas realizadas por los estudiantes, una de las preguntas con mayor frecuencia es, precisamente, la cantidad de cortes necesarios entre planos paralelos entre sí, que debe realizarse a una superficie para poder graficarla. Creemos que tal número de cortes es relativo y depende del tipo de superficie cuádrica, en el caso del paraboloide elíptico, consideramos que son tres el número de planos perpendiculares al eje del paraboloide, y uno de ellos debe pasar (convenientemente) por el vértice de la superficie.

La justificación de tal afirmación se sustenta en que, el número mínimo de puntos para poder graficar una sección cónica en el plano XY es cinco. La ecuación general de segundo grado en dos variables, según Lehmann (1953), tiene la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al considerar que el coeficiente A es distinto de cero (el análisis no pierde generalidad si se elige cualquier otro coeficiente), la ecuación anterior puede ser dividida entre A , la cual quedaría expresada de la siguiente manera:

$$x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Esta última ecuación consta de cinco coeficientes desconocidos, y para poder determinarlos, es necesario obtener cinco ecuaciones, lo cual equivale a dar cinco puntos de paso de dicha curva plana.

Dado que en nuestro estudio, las secciones cónicas no presentan rotaciones, y además puede conocerse las coordenadas del (los) vértice (s), y utilizarse, además, la propiedad de simetría de las secciones cónicas respecto del eje focal el cual también puede determinarse, el número de puntos necesarios se reduce de cinco a tres. En la figura 28 mostramos los cinco puntos de paso obtenidos a partir de los puntos V , P y Q , y los planos $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ perpendiculares al eje focal de la gráfica de la parábola. Los puntos P' y Q' son simétricos de los puntos P y Q , respectivamente, respecto al eje focal de la gráfica de la parábola. En este sentido, cada plano de corte $x = k$ con la superficie representada por $S: x = y^2 + z^2$, genera dos puntos de corte en la sección cónica perpendicular a dicho plano, con excepción del vértice que es un punto de corte, así resulta en total tres el número de planos de corte necesarios para determinar los cinco puntos de paso requeridos.

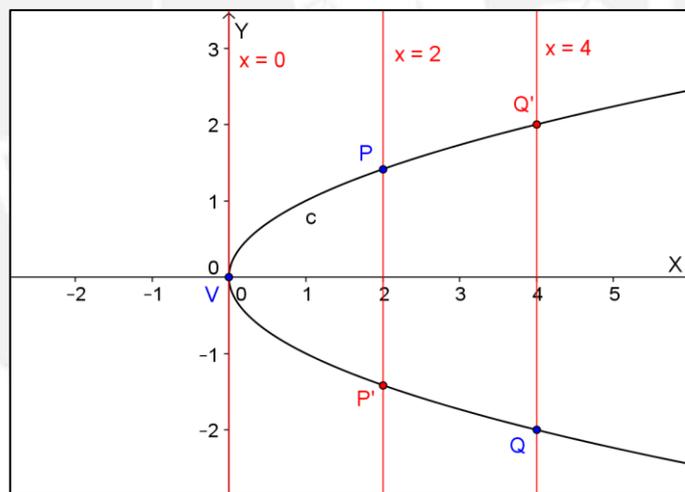


Figura 28. Intersecciones entre los planos $x = k$ con la traza del paraboloides con el plano $z = 0$.

Sin embargo, al conocer las coordenadas del vértice $V(h, k)$ de la parábola representada por $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, cuya forma corresponde al de la figura 28 con vértice el origen de coordenadas, es suficiente ingresar en dicha ecuación las coordenadas de un punto de paso P para determinar el valor del parámetro p , obteniéndose por simetría respecto al eje focal el otro punto P' . Consideramos que para esbozar con *más eficiencia* la gráfica de la parábola, *podría considerarse* un segundo punto de paso en cada rama de la gráfica de la parábola, donde dichos puntos son Q y Q' , los cuales pertenecen al plano $x = 4$.

Este principio, también establece la correspondencia entre los puntos de corte de los planos con las trazas, y los puntos de paso de las secciones elípticas o circulares que deben pasar necesariamente por dichos puntos, tal como mostramos en la figura 29. Dado que el paraboloides representado por $S: x = y^2 + z^2$, es de tipo circular, bastará trazar dos rectas paralelas al eje Z que pasen por los centros de los cortes de S con los planos $x = 2$ y $x = 4$ representados como circunferencias, las intersecciones de dichas rectas con las circunferencias generarán cuatro puntos los cuales, conjuntamente con el origen de coordenadas, serán puntos de paso de la traza de la superficie S con el plano $y = 0$, resultando ser una parábola. El procedimiento es análogo si el paraboloides S fuese elíptico.

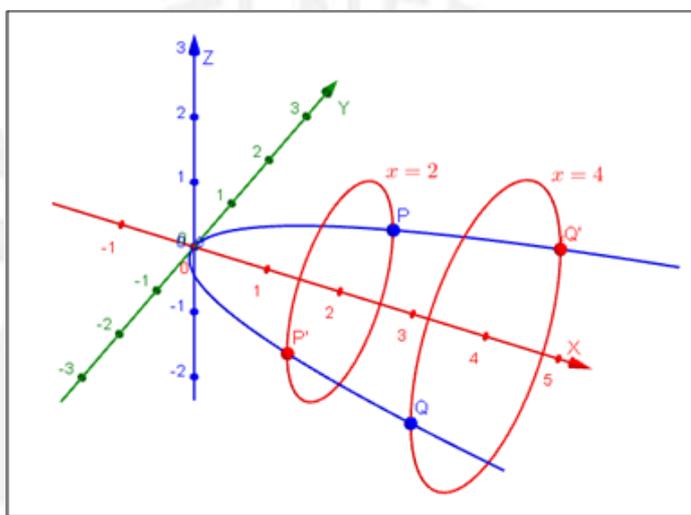


Figura 29. Correspondencia entre puntos de curvas abiertas y cerradas.

La correspondencia entre los puntos de intersección de las gráficas de las elipses o circunferencias (lo cual depende del tipo de paraboloides) y las parábolas, permitirán que el estudiante pueda graficar la superficie a lápiz y papel, y presentar la simetría en ella. En la fase experimental de la presente investigación, se realizarán actividades por medio de Geogebra 3D que permitan a los sujetos de investigación relacionar estos puntos, y qué desempeño pueden tener para la resolución de una situación planteada.

Al finalizar el estudio del objeto matemático paraboloides mediante tres aspectos a ser considerados: histórico, matemático y didáctico, hemos observado que los registros utilizados para la enseñanza de tal objeto son tres: lenguaje natural, algebraico, y gráfico, corroborándose los tipos de registros establecidos en nuestros objetivos específicos de investigación, y la delimitación de los elementos necesarios de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para establecer la fase experimental que conllevarán a lograr nuestros objetivos secundarios y así, dar respuesta a la pregunta de investigación.

CAPITULO III: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En esta parte de la investigación describiremos las características de los sujetos de investigación, los recursos disponibles para la realización de las actividades de la fase experimental, la descripción de los instrumentos de recolección de datos, y finalmente realizaremos el análisis a priori, a posteriori y la validación de la ingeniería, según la metodología de Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

3.1 Escenario donde se desarrolla la Experimentación

La parte experimental de la presente investigación está dirigida a estudiantes matriculados por vez primera en el curso Matemáticas 1, asignatura dictada en la Facultad de Arquitectura de una universidad privada de Lima, durante el semestre académico 2015–2. Dicha asignatura está conformada por veinte estudiantes entre varones y mujeres, cuyas edades fluctúan entre los 17 y 19 años. Dichos estudiantes, además de haber estudiado las superficies cuádricas, tienen conocimientos previos de construcciones con regla y compás, cálculo de dominio, rango y gráfica de funciones reales de variable real, simetrías respecto a puntos y rectas, y estudio de ecuaciones y gráficas de lugares geométricos en el plano cartesiano destacando entre ellos la recta, circunferencia, parábola y elipse, curvas imprescindibles para el paraboloides, objeto de nuestro estudio de visualización.

Del curso Matemáticas 1, un primer grupo conformado por seis estudiantes cursan la asignatura por primera vez, un segundo grupo de catorce estudiantes cursan por segunda vez, y de ellos hemos elegido a dos estudiantes voluntarios, un estudiante de cada grupo: Jacinta y Alexandra, quienes serán los sujetos de nuestra investigación. Los criterios de selección de dichos estudiantes se fundamentan en el desempeño académico logrado en el curso, asistencia permanente a clases, interés y participación constante durante las actividades que forman parte del curso, así como la predisposición para participar en actividades extracurriculares, dado que una de las actividades será realizada exclusivamente con los sujetos de investigación (esto debido a que será realizada en un encuentro fuera de clases), mientras que las demás actividades, previa coordinación con los docentes del curso, serán aplicadas a los veinte estudiantes.

Así mismo, dichos estudiantes cuentan con conocimientos previos del software Geogebra ya que han desarrollado previamente un primer laboratorio con el estudio de la función definida

por tramos por medio del software mencionado. De esta manera, los estudiantes están familiarizados con la utilización de la vista gráfica y la barra de herramientas de Geogebra, así como en el uso del deslizador como instrumento y los comandos de Geogebra:

Función[<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>]

Si[<Condición>, <Entonces>, <Si no>]

comandos que permiten obtener la gráfica y regla de correspondencia de una función definida por tramos, dado que es indispensable la utilización de comandos para graficar los cortes del paraboloides en la vista gráfica 3D.

La aplicación de los instrumentos de recopilación de datos en los dos estudiantes, requiere de recursos tales como ambientes adecuados y disponibilidad de los estudiantes para llevar a cabo la experimentación. Para ello, se cuenta con el apoyo académico y administrativo de los profesores del curso Matemáticas 1 de la Facultad de Arquitectura de la universidad privada mencionada, con la finalidad de adecuar nuestros instrumentos de recolección de datos con los contenidos del curso, así como también la disponibilidad de las aulas informáticas para las actividades por medio del software Geogebra 3D.

Para las actividades a ser desarrolladas por lápiz y papel, se dispone de un aula tipo taller con capacidad para veinte estudiantes. El aula posee, además, pizarras acrílicas, plumones, regla, en caso de ser necesario realizar algunas anotaciones e indicaciones aclaratorias durante el desarrollo de las actividades.

Para las actividades a realizarse por medio del software Geogebra 3D, se cuenta con un laboratorio informático con capacidad de veinte personas (se incluye una máquina conectada a un proyector multimedia para el docente a cargo). Dichas máquinas tienen instalado el Geogebra y cuentan además de los periféricos (teclado y mouse), con servicio de intranet para acceso al campus virtual, el mismo que se utilizará para la descarga y transferencia de los archivos a ser trabajados en este encuentro.

Para ambos tipos de actividades, cada sujeto recibirá una ficha de actividades con indicaciones para ser desarrolladas, tanto a lápiz y papel como con el uso del Geogebra 3D.

Consideramos realizar tres actividades en la parte experimental de la presente investigación, para que los estudiantes desarrollen dichas actividades a lápiz y papel y con el software Geogebra en tres encuentros de aplicación.

El primer encuentro se realizará en el aula tipo taller descrito, donde se desarrollará una actividad a ser realizada a lápiz y papel por medio de una ficha proporcionada a los estudiantes (ver anexo), el segundo y tercer encuentro de aplicación serán realizados en Geogebra también con una ficha de por medio (ver anexo). En el caso del tercer y último encuentro (Geogebra), será realizado exclusivamente con las dos estudiantes participantes, y su trabajo en máquina será capturado en video para un análisis posterior, mediante la opción “screen record” del software de uso libre *aTube Catcher 4*.

Las actividades se desarrollarán durante tres semanas (una actividad por semana) y de manera secuencial, cada actividad tiene una duración estimada de 40 minutos.

La actividad 1 (lápiz y papel) será realizada por Alexandra y Jacinta en horario de clase, conjuntamente con el resto de los estudiantes, previa coordinación con los profesores del curso. Posteriormente al desarrollo de la actividad 1, se realizará una entrevista de 20 minutos de duración a los dos estudiantes (fuera de horas de clase), con la finalidad de recopilar información que no haya sido escrita en la ficha de dicha actividad, la cual también será analizada en caso de ser necesario (ver anexos). El cuestionario de preguntas para la entrevista, será diferente para cada estudiante según las respuestas dadas en la ficha por cada uno de ellos.

Previamente a la realización de la actividad 2 (primer encuentro con el software Geogebra), consideramos preparar una actividad introductoria a la utilización de las herramientas del software Geogebra 3D, cuyos objetos matemáticos a estudiar son el cilindro, plano y un cono elíptico, así como cortes entre planos y dichas superficies, y la sintaxis para realizarlos. La ficha de dicha actividad está incluida en los anexos, y no será analizada en la presente tesis.

3.2 Análisis de las actividades

En esta parte, presentamos los análisis a priori y a posteriori de cada una de las actividades propuestas de acuerdo a la metodología de nuestra investigación. En el cuadro 14 mostramos la estructura del desarrollo de las actividades de manera secuencial.

Cuadro 14. Actividades de la parte experimental de la presente investigación.

Actividad	Medio	Descripción
1	Lápiz y papel	Dada la representación algebraica de un paraboloides, representarlo en el registro gráfico mediante una secuencia indicada, de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 .
	Grabadora de sonidos	Entrevista a los estudiantes sobre aspectos relacionados con sus respuestas en la actividad 1
2	Geogebra 3D	Dada la representación gráfica de un paraboloides circular en el cual se representan su vértice en el origen de coordenadas, las representaciones de su superficie y dos curvas cerradas, realizar tratamientos en el registro gráfico para determinar su representación algebraica.
3	Geogebra 3D	Dada la ecuación cartesiana de un paraboloides elíptico con vértice distinto al origen de coordenadas, realizar tratamientos en el registro gráfico para identificar las variables visuales y unidades significantes de la representación gráfica del paraboloides.

Según el orden establecido en el cuadro 14, hemos considerado que la primera actividad debe ser realizada a lápiz y papel, ya que nuestro interés es analizar la forma en la cual, los estudiantes realizan tratamientos en el registro gráfico de curvas abiertas o cerradas, del plano al espacio, es decir de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 , así como los tratamientos en el registro algebraico para obtener las representaciones algebraicas de dichas curvas. Dichos tratamientos en el registro algebraico no pueden ser realizados mediante el software Geogebra. Para tales propósitos, creemos que no es indispensable la utilización de algún tipo de software; los estudiantes con sus conocimientos previos adquiridos en el curso (Matemáticas I), pueden graficar dichas curvas a lápiz y papel. La actividad 1 será realizada sin intervención del investigador ni del profesor de clase, con excepción de presentarse alguna consulta solicitada por los estudiantes.

Consideramos así mismo que, el software Geogebra es indispensable en aquellas situaciones en las cuales, los estudiantes necesiten realizar transformaciones en las representaciones

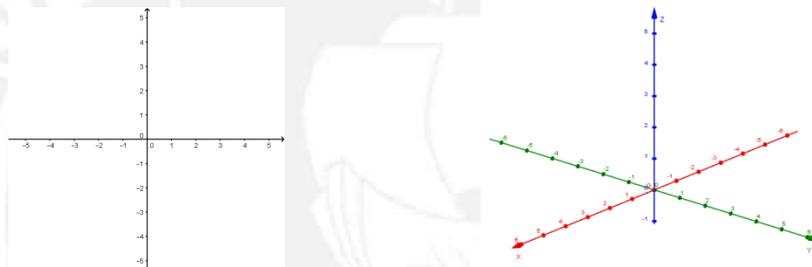
gráficas de objetos en el registro gráfico, por ello en las actividades 2 y 3, al requerirse modificaciones en el registro gráfico del paraboloides, es necesario un software de geometría dinámica como mediador, y para ello hemos seleccionado el software Geogebra.

A continuación presentamos cada actividad y su correspondiente análisis a priori y posteriori.

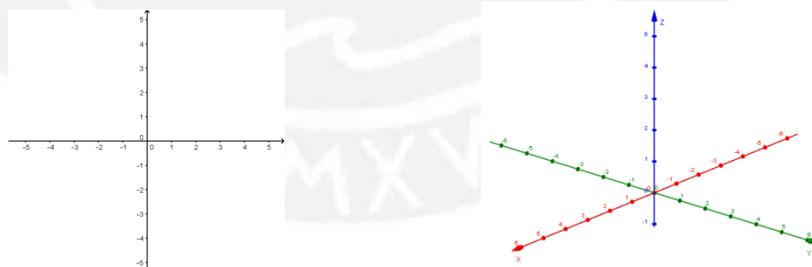
ACTIVIDAD 1:

Grafique la superficie S representada por la ecuación $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, realizando previamente para ello cortes de S con los planos coordenados XY , XZ , YZ , y luego cortes con dos planos distintos a los indicados y paralelos entre sí elegidos por Ud.

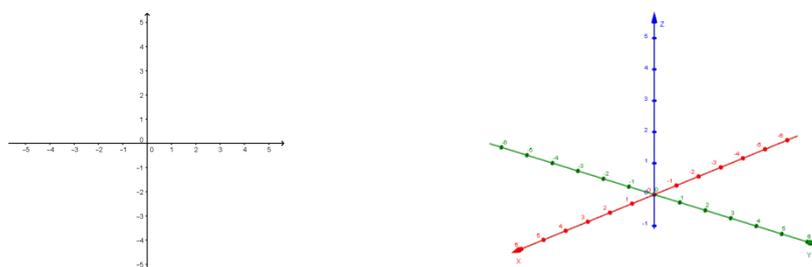
- a) Corte de S con el plano $x = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados.



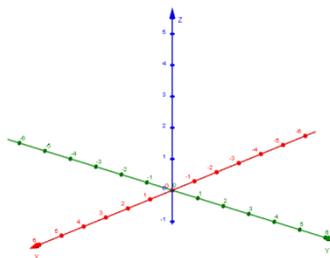
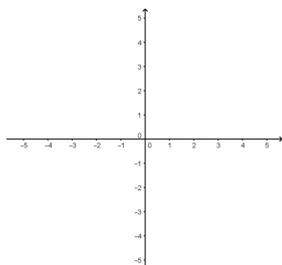
Corte de S con el plano $y = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados.



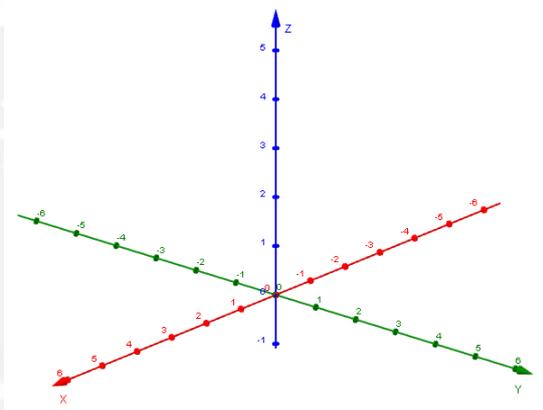
Corte de S con el plano $z = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados.



- b) Cortes de S con **dos planos diferentes** a los indicados en (a). Luego grafique dichos cortes en los sistemas coordenados dados.



- c) A partir de las representaciones gráficas de los cortes de la superficie S con los planos indicados en los ítems anteriores, bosqueje la gráfica de dicha superficie e indique a qué plano pertenece cada corte. Identifique dicha superficie.



- d) ¿Existen restricciones para alguna(s) de las variables de la ecuación de la superficie S ? Justifique su respuesta.

Nota: En los anexos se muestra la secuencia en forma íntegra.

Los objetivos de esta actividad es que los estudiantes logren:

Representar en el registro gráfico, las curvas que se obtienen al intersectar el paraboloides con planos de corte paralelos y perpendiculares a su eje.

Realizar transformaciones en el registro gráfico de representaciones de curvas planas, y graficarlas de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 .

Identificar en el registro gráfico, las zonas del espacio (\mathbb{R}^3) donde no existe superficie.

Esta actividad consta de cuatro ítems a , b , c , d , los cuales serán analizados de manera independiente debido a que el ítem a debe realizarse según indicaciones explícitas, el ítem b posee únicamente una condición por lo que se espera más de una solución presentada por los estudiantes, el ítem c depende de los resultados de los ítems a y b , y el ítem d tiene varias posibilidades de presentación en su resolución.

Las variables micro–didácticas asociadas a esta actividad son:

Ecuación cartesiana del paraboloides

Posición relativa entre el plano de corte y el eje del paraboloides.

Análisis a priori del ítem (a)

Este ítem, tiene por finalidad que los estudiantes, mediante tratamientos en el registro algebraico, puedan identificar las variables visuales de dimensión 0 (vértice) y dimensión 1 (parábolas), para representarlas en el registro gráfico.

Grafique la superficie S representada por la ecuación $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, realizando previamente para ello cortes de S con los planos coordenados XY , XZ , YZ , y luego cortes con dos planos distintos a los indicados y paralelos entre sí elegidos por Ud.

- a) Corte de S con el plano $x = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados
- Corte de S con el plano $y = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados
- Corte de S con el plano $z = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados

Esperamos a priori que los estudiantes, para poder graficar los cortes pedidos, realicen tratamientos en el registro algebraico al reemplazar las letras x , y , z de cada ecuación con el valor de la ecuación del plano, obtener ecuaciones en dos variables cartesianas e identificarlas. Así mismo, esperamos que identifiquen las variables visuales de dichas curvas (puntos de paso, vértices, ejes, etc.) los cuales permitirán a los estudiantes representarlas en el registro gráfico.

También suponemos que los estudiantes utilizarán las propiedades de simetría de los puntos de la gráfica de la parábola respecto a su eje focal.

Dado que la técnica estudiada por los estudiantes para obtener las representaciones algebraicas de cada corte requerido es la tabulación, es decir, reemplazar la variable cartesiana con el valor de la ecuación del plano de corte en la ecuación del paraboloides, consideramos

que los estudiantes realizarán el siguiente tratamiento en el registro algebraico, y no puede haber más posibilidades de resolución:

Representación algebraica del corte de la superficie S con el plano $x = 0$:

$$z = \frac{0^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$
$$y^2 = 9z$$

Pensamos que los estudiantes pueden identificar las unidades significantes correspondientes a las variables visuales de dimensión 0, 1 y 2, a partir de la representación algebraica de la parábola $y^2 = 9z, x = 0$, la cual está contenida en el plano $x = 0$, tales como las coordenadas del vértice, el eje cartesiano al cual es paralelo el eje focal y su orientación según el valor del parámetro p , de forma similar al siguiente procedimiento:

Eje focal: coincidente con el eje Z

Vértice: $V(0, 0, 0)$

Orientación de la curva: $y^2 = 9z$

$$4p = 9 \rightarrow p = \frac{9}{4}$$

Como $p > 0$, la gráfica de la parábola se extiende hacia el semieje positivo del eje Z

Creemos que los estudiantes deberían determinar las coordenadas de un punto de paso distinto al vértice para representar la parábola en el registro gráfico. Otra posibilidad, sería considerar que, a partir del valor del parámetro p obtenido por los estudiantes en el registro algebraico, utilicen los extremos del lado recto de longitud $4|p|$ para representar un punto de paso en la representación gráfica de la parábola, dado que es uno de los métodos aprendidos para graficar dichas curvas en el curso Matemáticas I.

En cualquiera de los dos casos, según Duval (1995), la representación gráfica de la variable visual de dimensión 1 (parábola) debe realizarse a partir de sus variables visuales de dimensión menor, ya sea por las representaciones del vértice y un punto de paso, el vértice, foco y un extremo del lado recto, o cualquier combinación de ellos.

En caso los estudiantes opten por el primer criterio, consideramos que podrían utilizar un la representación de un punto de paso distinto al vértice para graficar la parábola: Punto de paso distinto al vértice: $A(0, 3, 1)$. Por propiedad de simetría de representaciones de puntos de la parábola respecto de su eje focal, se obtiene el punto simétrico A' . La representación gráfica de dicha parábola en los dos sistemas cartesianos se muestra en la figura 30a.

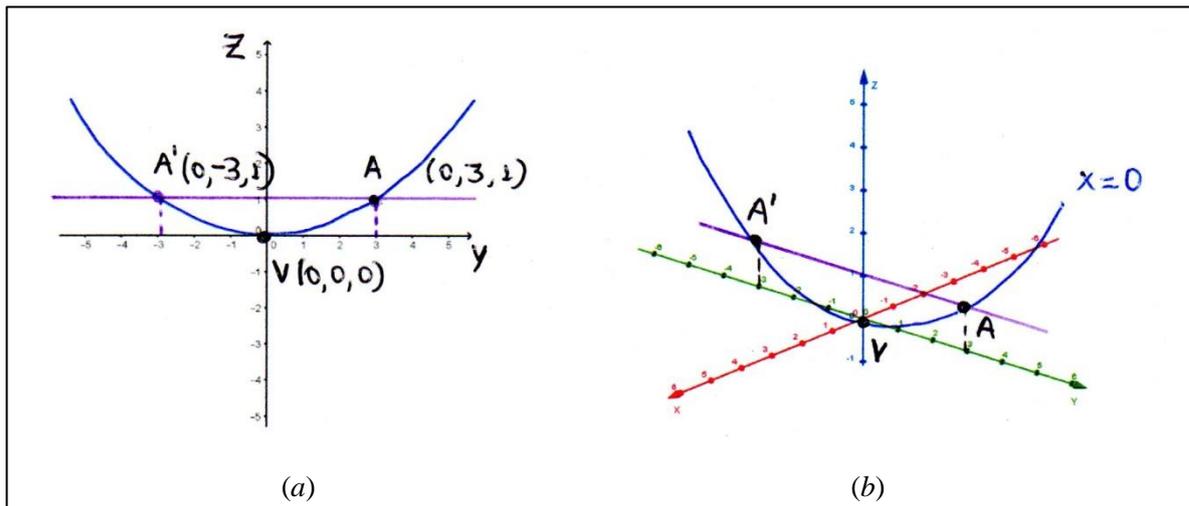


Figura 30. Representación gráfica de la parábola $y^2 = 9z, x = 0$ en el plano y el espacio

En la figura 30b, mostramos la gráfica de la parábola cuya representación algebraica está dada por $y^2 = 9z, x = 0$, en el sistema cartesiano canónico, a diferencia de la figura 30a en la cual el eje X está proyectado perpendicularmente al plano YZ y se representa en forma coincidente con la intersección de los ejes Y y Z. Esperamos que los estudiantes sitúen el vértice del gráfico de la parábola, el punto de paso representado por $A(0, 3, 1)$ en el registro gráfico de la figura 30b, la representación del correspondiente punto simétrico A' por la propiedad del eje focal (eje de simetría) y realicen la representación gráfica de la parábola $y^2 = 9z, x = 0$.

Para graficar el corte de la superficie S con el plano $y = 0$, esperamos que los estudiantes realicen un procedimiento análogo al paso anterior:

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{0^2}{9} = \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 = 4z$$

La ecuación resultante es la representación algebraica de una parábola contenida en el plano $y = 0$, cuyo eje focal coincide con el eje Z, Vértice: $V(0, 0, 0)$

Orientación de la curva:

$$x^2 = 4z$$

$$4p = 4 \rightarrow p = 1$$

Como $p > 0$, la gráfica de la parábola se extiende hacia el semieje positivo del eje Z

Representación del punto de paso distinto al vértice: $B = (2, 0, 1)$.

En la figura 31, mostramos la gráfica de la parábola representada algebraicamente por $x^2 = 4z, y = 0$.

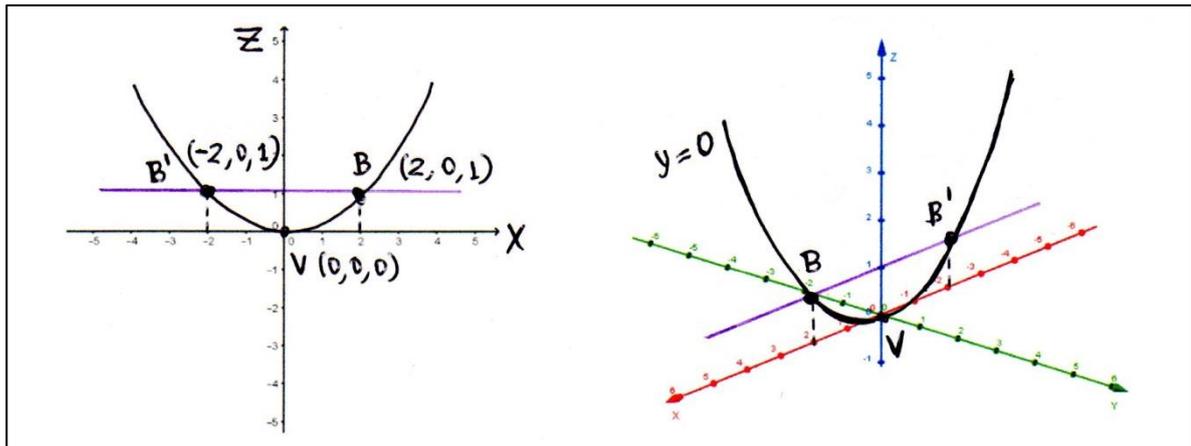


Figura 31. Representación gráfica de la parábola $x^2 = 4z, y = 0$ en el plano y el espacio

Según Duval (2006), el tratamiento en la representación gráfica de una variable visual de un objeto determinado, para graficarla del plano al espacio no es un proceso trivial, por ello consideramos que el tratamiento realizado en el registro gráfico de las parábolas representadas algebraicamente por $y^2 = 9z, x = 0$ y $x^2 = 4z, y = 0$, permiten desarrollar la aprehensión perceptiva de los estudiantes, dado que las representaciones gráficas de dichas curvas se realizan en el plano XY para luego graficarlas en el espacio. A partir de dicha representación, los estudiantes pueden establecer conexiones entre las unidades significantes identificadas en el registro algebraico del paraboloides, y sus correspondientes variables visuales representadas en el registro gráfico.

Pensamos que los estudiantes, por medio de tratamientos en el registro algebraico, realizan el corte de la superficie S con el plano $z = 0$, pueden reconocer que, si el corte obtenido es un único punto, dicho punto corresponde al vértice de la superficie S . Para ello, se espera que los estudiantes realicen un tratamiento en el registro algebraico similar al que se muestra:

$$0 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

$$x = 0, y = 0$$

El corte resultante es el origen de coordenadas representado por $O(0, 0, 0)$, y creemos que los estudiantes pueden establecer la conexión entre las representaciones de este punto y los vértices de las dos parábolas graficadas previamente (es el mismo punto), lo cual puede facilitar la representación gráfica de la superficie S .

Los estudiantes deben realizar un tratamiento en el registro gráfico similar al de los dos casos anteriores y ubicar el punto obtenido en el origen de coordenadas. En la figura 32, mostramos la gráfica del corte de S con el plano $z = 0$.

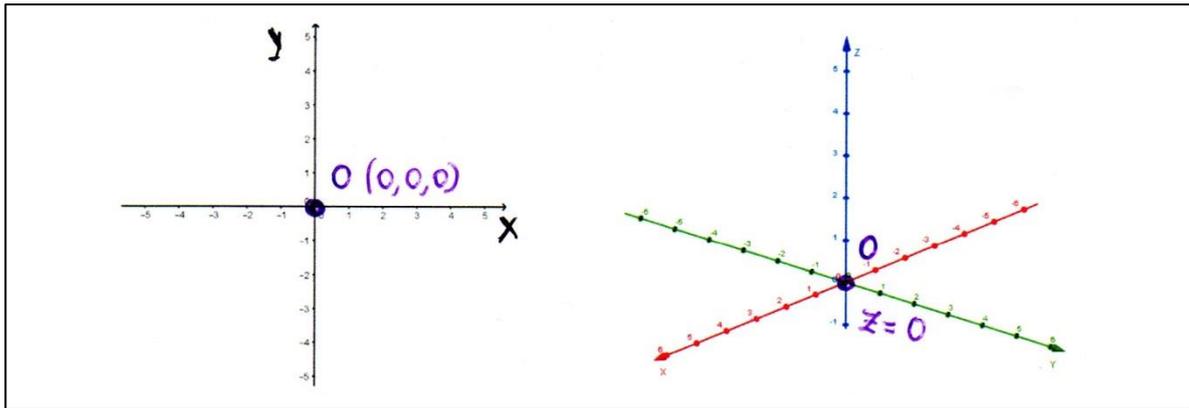


Figura 32. Representación gráfica del corte de S con el plano $z = 0$

Podría suceder que alguno de los estudiantes no reconozca el origen de coordenadas como el corte obtenido de la superficie con el plano $z = 0$, y lo relacione con alguna de las representaciones de las curvas cerradas, sea una elipse o una circunferencia, ya que la expresión algebraica $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0$, podría ser tratada de la misma manera que la expresión $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, la cual sí representa a una elipse. En esta situación, el estudiante trataría de identificar erróneamente los principales elementos de dicha curva tales como coordenadas del centro, vértices, longitudes de ejes, entre otros.

Análisis a posteriori del ítem (a)

Estudiante Jacinta

Para representar la gráfica del corte de la superficie S representada por $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ con el plano $x = 0$, Jacinta previamente realizó tratamientos en el registro algebraico para identificar las variables visuales que le permitirán graficar la curva obtenida, la cual representa a una parábola. Para ello, Jacinta obtuvo las coordenadas del vértice, dirección en las cuales se extiende la curva, y puntos de paso. En la figura 33 mostramos el procedimiento realizado por Jacinta.

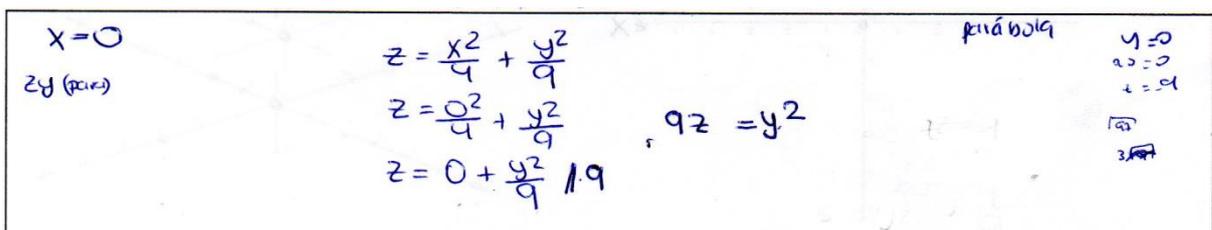


Figura 33. Corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Jacinta.

En la figura 33, Jacinta obtuvo una ecuación en dos variables: $9z = y^2$ en el plano $x = 0$. Ella identificó la forma de la curva resultante, la cual para nuestro estudio constituye la variable visual parábola. Jacinta tabuló las coordenadas de dos puntos de paso de la curva obtenida, lo cual se evidencia en el margen derecho de la figura 34, ya que le permitiría representar gráficamente dicha curva.

En la figura 34, Jacinta representó gráficamente la parábola en el registro gráfico, para lo cual se proporcionó dos ejes perpendiculares en un plano (no rotulados), los cuales ella identificó como los ejes Y y Z , y los ejes cartesianos X , Y , Z dispuestos en forma canónica.

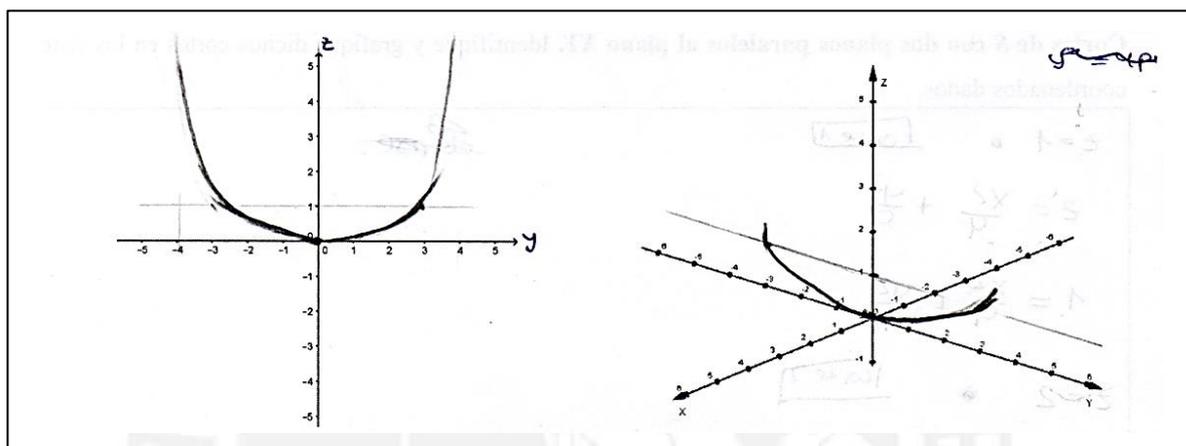


Figura 34. Gráfica del corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Jacinta

Jacinta puso en evidencia que, conoce la propiedad de simetría de los puntos de la representación de la gráfica de la parábola respecto al eje focal, ya que representó en el registro gráfico dos puntos de paso contenidos en la representación de una recta paralela al eje Y en el plano YZ , dicha recta se presenta también paralela al eje Y en el espacio.

En la figura 35 observamos el tratamiento en el registro algebraico realizado por Jacinta al cortar la superficie S con el plano $y = 0$. De forma similar al tratamiento realizado en el análisis anterior, Jacinta reconoce que se trata de la representación de una parábola e identificó la forma del corte a partir de la ecuación resultante (lo cual se observa en la esquina superior derecha), y a diferencia del trabajo anterior (figura 33), Jacinta no presentó errores en su procedimiento.

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{9} \quad y = 0 \quad xz \quad z = \frac{x^2}{4} + \frac{0}{9} \quad z = \frac{x^2}{4} \quad \text{parábola}$$

$$4z = x^2$$

Figura 35. Corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Jacinta

En la figura 36, observamos la representación gráfica del corte de S con el plano $y = 0$ realizado por Jacinta. Ella graficó dos rectas paralelas al eje X las cuales pasan por los puntos representados por $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, 4)$, respectivamente. Las coordenadas de dichos puntos de paso, se obtuvieron por tabulación de valores de la variable z en la ecuación, para obtener los correspondientes valores de x .

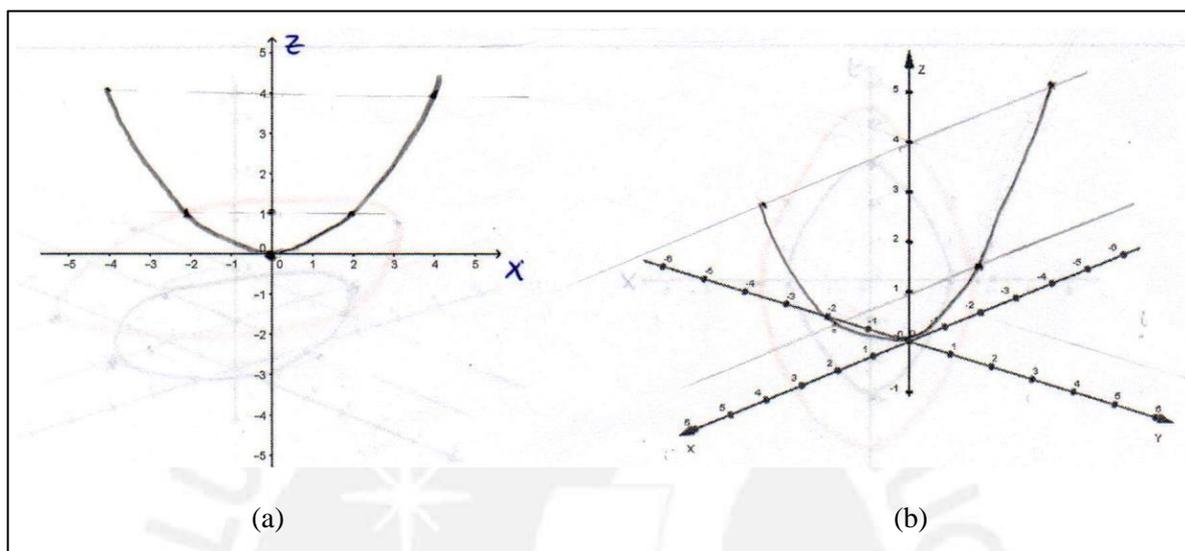


Figura 36. Gráfica del corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Jacinta.

En la figura 37 observamos los tratamientos en el registro algebraico y gráfico realizado por Jacinta para representar el corte de S con el plano $z = 0$.

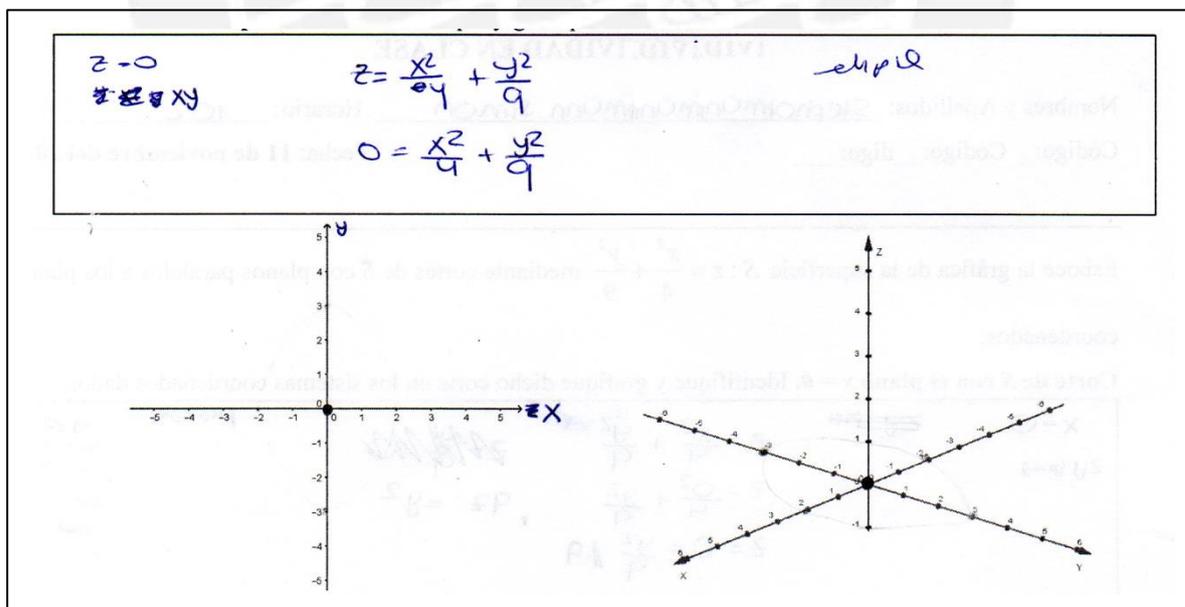


Figura 37. Registro algebraico y gráfico del corte de S con el plano $z = 0$, realizado por Jacinta.

Podemos afirmar que Jacinta desarrolló exitosamente el ítem (a) en su totalidad, y no posee dificultades para representar gráficamente las parábolas obtenidas por cortes de la superficie S con los planos coordenados, y el vértice de la superficie S en el registro gráfico, lo cual

implica que, al establecer conexiones entre las variables visuales de la parábola (vértice, eje focal, punto de paso, plano al cual pertenece) y sus correspondientes unidades significantes (coordenadas, ecuaciones cartesianas), pudo realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico y, por ende, articuló sus aprehensiones perceptiva y operatoria y visualizó.

Estudiante Alexandra

A continuación, presentamos en la figura 38 el tratamiento en el registro algebraico realizado por Alexandra para obtener la representación algebraica del corte de S con el plano $x = 0$

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

$$z = \frac{y^2}{9}$$

$$y^2 = 9z$$

$$4p = 9$$

$$p = 9/4$$

$$C = (0,0)$$

Figura 38. Corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Alexandra.

Alexandra realizó un tratamiento en el registro algebraico similar al de Jacinta y obtuvo la misma ecuación en dos variables. A diferencia de Jacinta, Alexandra no indicó explícitamente que dicha ecuación representa una parábola, pero reconoció dos variables visuales y sus correspondientes unidades significantes: el parámetro p en la ecuación de la parábola, la cual corresponde a la variable visual “orientación de la parábola”; y el punto $C = (0, 0)$, el cual corresponde a la variable visual “vértice de la parábola”.

En la entrevista posterior a la realización de la actividad 1, Alexandra afirmó que por medio de la ecuación obtenida en la cual, una de las variables cartesianas (y) está elevada al cuadrado y la otra variable cartesiana (z) como término de primer grado, pudo reconocer que se trata de una parábola en las variables y, z . De esta manera, Alexandra obtuvo el valor numérico del parámetro p y las coordenadas del vértice, por lo que no fue necesario realizar un mayor análisis.

En la figura 39 mostramos la representación gráfica de la parábola realizado por Alexandra. Puede notarse que Alexandra no utiliza puntos de paso, no aplica la propiedad de simetría de los puntos de la parábola respecto a su eje focal, e inclina una de las ramas hacia el semieje positivo del eje Y debido a que Alexandra, según la entrevista realizada, afirmó que “al representarse una curva en el espacio, su gráfica se deforma”.

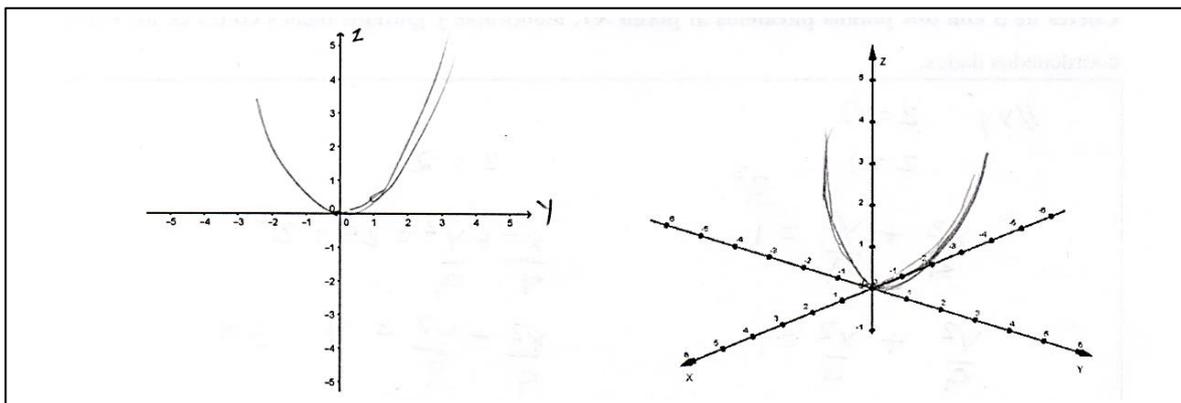


Figura 39. Gráfica del corte de S con el plano $x = 0$, realizado por Alexandra.

En la figura 40 mostramos el tratamiento en el registro algebraico realizado por Alexandra para determinar la ecuación del corte de S con el plano $y = 0$. De forma similar al análisis anterior, Alexandra identificó dos unidades significantes correspondientes a las variables visuales parámetro y vértice de la parábola y obtuvo en el registro algebraico, sus correspondientes unidades simbólicas.

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{0^2}{9}$$

$$x^2 = 4z \quad c(0,0)$$

$$4p = 4$$

$$p = 1$$

Figura 40. Corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Alexandra.

En la figura 41 mostramos la representación gráfica del corte de S con el plano $y = 0$ realizado por Alexandra en el cual, tampoco consideró algún punto de paso para poder graficarla. En la representación gráfica de dicha parábola, una de sus ramas se inclinó hacia el semieje positivo del eje X . Tampoco se evidencia que Alexandra haya utilizado la propiedad de simetría de los puntos de la representación gráfica de la parábola respecto a su eje focal.

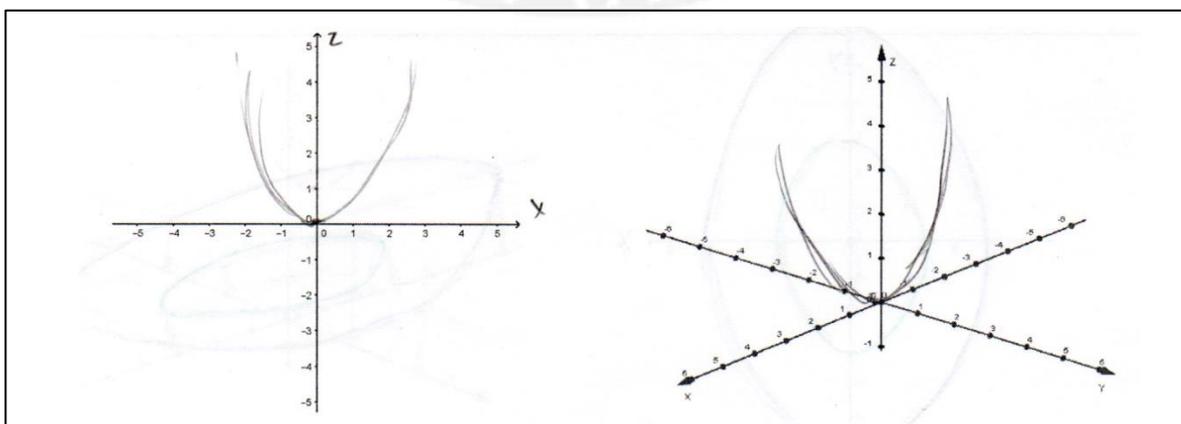


Figura 41. Gráfica del corte de S con el plano $y = 0$, realizado por Alexandra.

En la figura 42 observamos el tratamiento en el registro algebraico y gráfico realizado por Alexandra para representar el corte de S con el plano $z = 0$. Se observa que Alexandra no escribió de forma correcta la ecuación de la superficie S , lo cual se evidencia al notarse el valor de $z = 0$ elevado al cuadrado. De forma análoga a los casos anteriores, Alexandra determinó un centro representado por $C(0, 0, 0)$ y el valor de un radio $r = 0$, lo cual podría corresponder al análisis de un problema anterior relacionado con la circunferencia como lugar geométrico. Alexandra en realidad obtuvo la intersección del cono representado por $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ con el plano $z = 0$, en cuyo caso coincide con el corte de la superficie S con dicho plano al ser la intersección el origen de coordenadas.

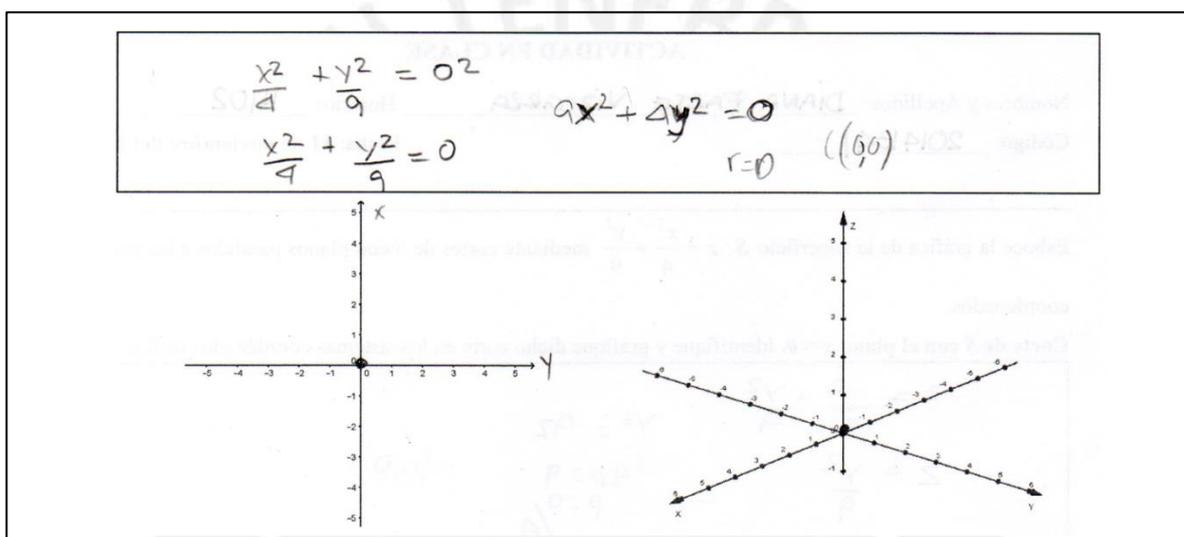


Figura 42. Registro algebraico y gráfico del corte de S con el plano $z = 0$, realizado por Alexandra.

De acuerdo al análisis a priori del ítem (a), los estudiantes obtuvieron las unidades significantes de las variables visuales de dimensión 1 correspondientes a curvas abiertas (parábolas) y de dimensión 0 (vértice de la superficie), lo cual les permitió realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico. Sin embargo, las representaciones gráficas de las parábolas realizado por Alexandra no fueron realizadas de forma correcta, ya que no consideró algún punto de paso distinto al vértice para representarlas gráficamente, lo cual pudo haberle permitido realizar conexiones posteriores entre la representación gráfica de dichas variables visuales (parábolas) con otras (elipses), y finalmente con la representación gráfica de la superficie S . Así mismo, ninguno de los estudiantes indicó en sus procedimientos que el corte de S con el plano $z = 0$ representa al vértice común de las representaciones de ambas parábolas, ni indicaron que los vértices de las representaciones de ambas parábolas son concurrentes en un mismo punto: el vértice del paraboloides.

Cabe resaltar el hecho que Jacinta haya representado gráficamente, rectas paralelas a los ejes cartesianos para representar puntos de paso en el sistema coordenado canónico, lo cual no estuvo contemplado en nuestro análisis a priori.

Ítem (b)

b) Cortes de S con dos planos diferentes a los indicados en (a). Luego grafique dichos cortes en los sistemas coordenados dados.

El objetivo de este ítem es lograr que los estudiantes, mediante tratamientos en el registro algebraico de la superficie S , obtengan las representaciones algebraicas de dos curvas cerradas, las cuales deberán representar en el registro gráfico, y mediante modificaciones posicionales de rotación, deben representar las curvas en el plano (\mathbb{R}^2) y el espacio (\mathbb{R}^3).

Análisis a priori del ítem (b)

Consideramos a priori que los estudiantes, previamente, deben reconocer que los dos planos de corte pedidos deben ser paralelos al plano $z = 0$, y deben alejarse de dicho plano en el sentido del semieje positivo del eje Z . Para ello, pueden considerar alguno de los siguientes dos argumentos:

- Al notar las representaciones gráficas de las curvas abiertas (parábolas) realizadas en el ítem (a), puede percibirse que los puntos de la superficie se alejan del plano $z = 0$, por lo cual los planos de corte deben tener la forma $z = k$, donde $k > 0$.
- Dado que el segundo miembro de la ecuación de la superficie S representado por $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, es una cantidad positiva para cualquier valor de x e y , la variable cartesiana z sólo puede tomar valores positivos, por lo cual los planos de corte deben tener la forma $z = k$, donde $k > 0$.

En virtud a lo expuesto, esperamos que los estudiantes elijan por conveniencia el plano de corte $z = 1$ para realizar uno de los cortes pedidos, ya que dicho plano contiene a los puntos representados por $A(0, 3, 1)$ y $B(2, 0, 1)$, los cuales son puntos de paso de las representaciones de las dos parábolas previamente graficadas, y así poder realizar la correspondencia entre los puntos comunes que deben tener las representaciones gráficas de ambas curvas.

El segundo plano de corte puede ser $z = 2$, pudiendo ser cualquier otro de la forma $z = k$, donde $k > 0$, ya que las parábolas previamente graficadas se extienden alejándose del origen de coordenadas y en la dirección del semieje positivo del eje Z .

Podría ocurrir que, los estudiantes no consideren las representaciones gráficas del ítem (a) para seleccionar los planos de corte, ni las propiedades de los números reales para los valores de la variable cartesiana z . Al no tener restricciones sobre los valores de k , podrían también ser negativos y al realizar los cortes con planos por debajo del semieje positivo del eje Z , no obtendrían puntos de la superficie (conjunto vacío), por lo cual tendrían que elegir otro(s) plano(s) de la forma $z = k$, con valores de $k > 0$.

Esperamos que los estudiantes, al considerar los planos de corte $z = 1$, y $z = 2$, realicen los siguientes tratamientos en el registro algebraico:

Representación algebraica del corte de la superficie S con el plano $z = 1$:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Lo cual corresponde a la representación gráfica de una elipse contenida en el plano $z = 1$, con centro en $C(0, 0, 1)$, y cuyo eje focal es paralelo al eje Y .

Coordenadas de los vértices:

$$V1 = (0, -3, 1), V2 = (0, 3, 1)$$

Coordenadas de los extremos del eje menor:

$$B1 = (-2, 0, 1), B2 = (2, 0, 1)$$

Creemos que los estudiantes, deberían percibir que los puntos representados por $V2$ y A son coincidentes, del mismo modo que los puntos $B2$ y B . Los puntos A y B son representaciones de puntos de paso de las parábolas graficadas en el ítem (a), con lo cual se espera que los estudiantes reconozcan que los vértices y los extremos del eje menor de la elipse son puntos de paso de las gráficas de las parábolas, lo cual corresponde al desarrollo de la aprehensión discursiva del paraboloides.

Representación algebraica del corte de la superficie S con el plano $z = 2$:

$$2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$$

Ecuación que corresponde a la representación algebraica de una elipse contenida en el plano $z = 2$, cuyo centro es representado por $C(0, 0, 2)$, y eje focal paralelo al eje Y .

Coordenadas de los vértices:

$$V_1 = (0, -3\sqrt{2}, 2), V_2 = (0, 3\sqrt{2}, 2)$$

Coordenadas de los extremos del eje menor:

$$B_1 = (-2\sqrt{2}, 0, 2), B_2 = (2\sqrt{2}, 0, 2)$$

En la figura 43, mostramos las representaciones gráficas de las dos variables visuales de dimensión 1 (elipses) que se espera los estudiantes deberían poder graficar.

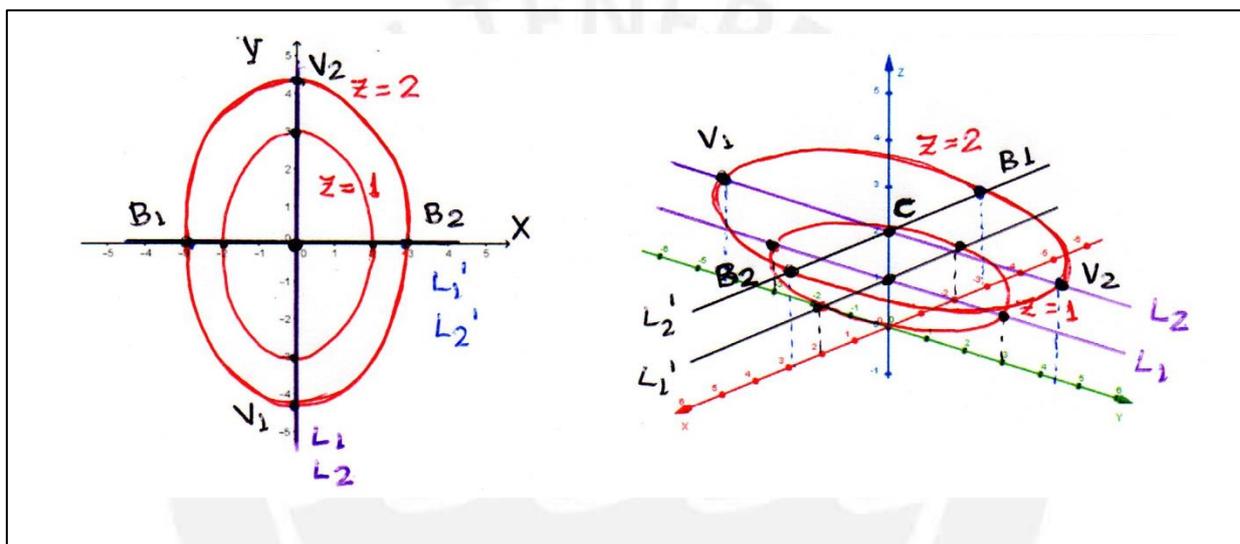


Figura 43. Gráfica de los cortes elípticos proyectados en el plano XY y en el espacio

En la figura 43 observamos que las representaciones de los ejes focales de las elipses proyectadas en el plano XY son paralelas al eje Y , propiedad la cual también debe mantenerse en la gráfica de dichas rectas en el espacio, representadas por las rectas L_1 y L_2 .

Análisis a posteriori

Ítem (b)

Estudiante Jacinta

En la figura 44 observamos los tratamientos en el registro algebraico realizados por Jacinta para representar los cortes de la superficie S con los planos $z = 1$ y $z = 2$, identificó los cortes obtenidos como representaciones algebraicas de elipses con ejes focales paralelos al eje Y , y obtuvo los valores de las constantes a y b para uno de ellos, los cuales facilitarían su representación gráfica.

$z=1$ • Corte 1
 $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
 $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

$z=2$ • Corte 2
 $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
 $\frac{z}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

$1 = \frac{x^2}{4 \cdot 2} + \frac{y^2}{9 \cdot 2}$
 $1 = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18}$

$a = 3\sqrt{2}$
 $b = 2\sqrt{2}$

Figura 44. Cortes de S con dos planos paralelos al plano $z = 0$, realizado por Jacinta.

En la figura 45 observamos que Jacinta ha reconocido las unidades significativas correspondientes a las variables visuales vértices, extremos del eje menor, centro y eje focal, de la variable visual elipse, lo cual le permitió realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico, y representar en el registro gráfico los cortes elípticos en el plano cartesiano y en el espacio. Lo más resaltante es que Jacinta utilizó el eje focal y normal de cada elipse para poder trazar cada curva cerrada, así como el uso de colores diferentes en su representación gráfica.

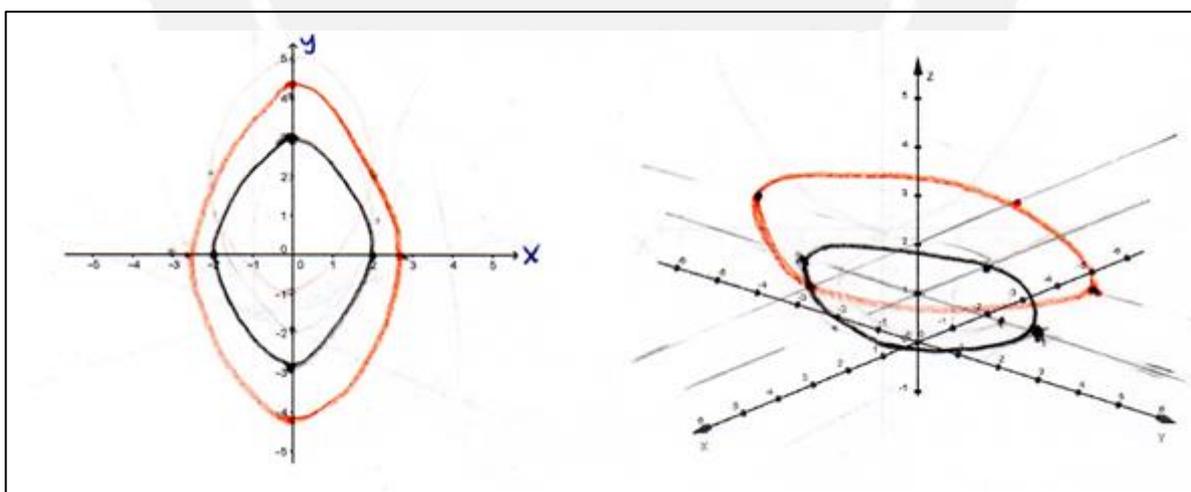


Figura 45. Gráfico de los cortes de S con los planos $z = 1$, $z = 2$ realizado por Jacinta.

Como apreciamos en la figura 45, Jacinta graficó los ejes focales y normales de cada una de las elipses en el espacio, y en cada uno de ellos y desde sus centros midió las distancias a y b para representar los vértices y extremos del eje menor en dichos ejes, dichos puntos constituyen las variables visuales que le permitieron graficar cada elipse en el espacio.

Estudiante Alexandra

En la figura 46 mostramos el tratamiento en el registro algebraico realizado por Alexandra para representar los cortes de los planos $z = 1$, $z = 2$ con la superficie representada por $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, la cual es la representación algebraica de un *cono elíptico*. La representación del corte del cono con el plano $z = 1$, coincide con el obtenido por Jacinta, pero en la representación del corte del cono con el plano $z = 2$, se obtiene una elipse con dimensiones mayores que el obtenido por Jacinta, debido a que el factor que afecta a las longitudes de los ejes mayor y menor de cada corte es $|z|$ en lugar de \sqrt{z} .

The image shows handwritten algebraic work for two cases: $z=1$ and $z=2$. For $z=1$, the student starts with the equation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ and identifies the semi-axes as $a=3$ and $b=2$, with the center at $(0,0)$. For $z=2$, the student starts with $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2^2 = 4$, then divides both sides by 4 to get $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$, and identifies the semi-axes as $a=6$ and $b=4$, with the center at $(0,0)$. The word "elipse" is written next to the final equation for $z=2$.

Figura 46. Cortes de S con dos planos paralelos al plano $z = 0$, realizado por Alexandra.

Como apreciamos en la figura 46, las longitudes de los semiejes mayor y menor de la elipse obtenida del corte de S con el plano $z = 2$ son $a = 6$ y $b = 4$, en lugar de $a = 3\sqrt{2}$ y $b = 2\sqrt{2}$. Posteriormente, Alexandra explicó que transcribió, de forma incorrecta, la ecuación de la superficie S la cual estaba en el reverso de la ficha de actividades. Cabe indicar que Alexandra sólo tabuló valores de z positivos en su ecuación, ya que al estar dicha variable elevada al cuadrado, no existirían restricciones para z .

En la figura 47 apreciamos la representación de los cortes de la superficie S con los planos paralelos al plano $z = 0$, los cuales son los mismos planos que escogió Jacinta. Sin embargo, es notoria en dicha representación gráfica el contraste entre las dimensiones de la representación del corte elíptico de S con el plano $z = 2$ graficado por Alexandra en comparación al obtenido por Jacinta (figura 45), lo cual podría generar dificultades a la estudiante Alexandra al graficar la superficie S , ya que las representaciones gráficas de las

parábolas podrían no intersectar a las representaciones gráficas de las elipses. Si los términos de la representación algebraica de una variable visual cambian, la representación gráfica también varía, y en el caso de Alexandra, la elipse representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1; z = 2, \text{ no es una variable visual de la representación gráfica de la superficie } S.$$

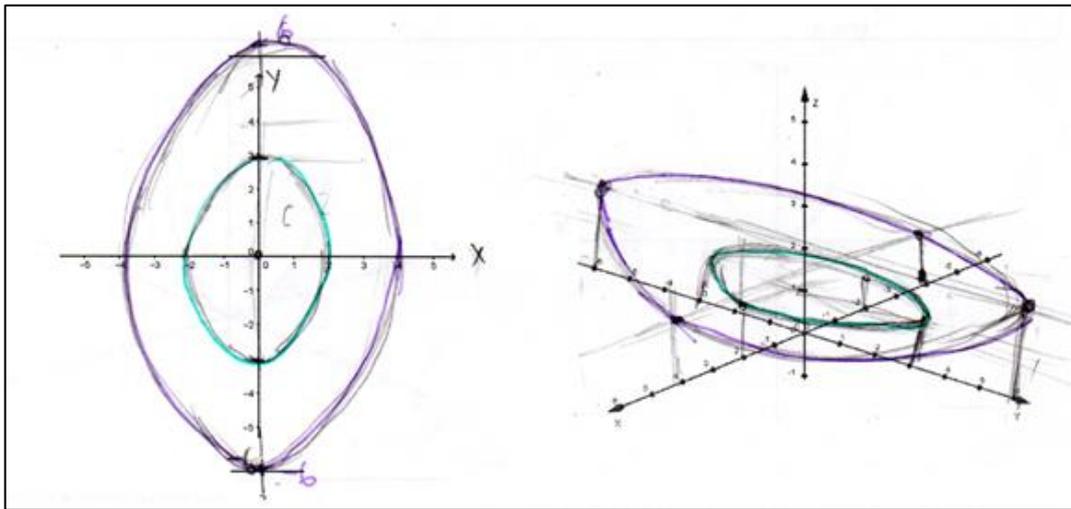


Figura 47. Gráfico de los cortes de S con los planos $z = 1$, $z = 2$ realizado por Alexandra.

En el análisis a priori hemos previsto que los estudiantes deberían obtener las coordenadas de los vértices y los extremos del eje menor para luego graficar la curva que pase por dichos puntos, los cuales en nuestro estudio constituyen las variables visuales de las curvas cerradas, pero Alexandra y Jacinta optaron por representar los puntos de intersección de las elipses con el eje focal y el eje normal por medio de los valores de a y b medidos desde el centro de la elipse, lo cual es un procedimiento equivalente y no contemplado en nuestro análisis a priori.

Ítem (c)

- c) A partir de las representaciones gráficas de los cortes de la superficie S con los planos indicados en los ítems anteriores, bosqueje la gráfica de dicha superficie e indique a qué plano pertenece cada corte. Identifique dicha superficie.

El objetivo de este ítem es que los estudiantes representen gráficamente el paraboloides S a partir de sus variables visuales de dimensión 0 (vértice) y dimensión 1 (curvas abiertas y cerradas) y dimensión 2 (los planos de corte) los cuales contienen a las curvas abiertas y cerradas. Para ello, es necesario que los estudiantes hayan desarrollado todos los ítems

anteriores, y consideren las propiedades de simetría de las representaciones gráficas de las secciones cónicas respecto a sus ejes focales, así como los puntos de intersección entre las curvas abiertas y cerradas.

Análisis a priori del ítem (c)

A priori, creemos que las posibles soluciones que los estudiantes realizarían son:

El orden en el cual los estudiantes grafican las variables visuales (seis posibilidades):

Graficar las parábolas, el vértice y las elipses en el registro gráfico.

Graficar las parábolas, las elipses y el vértice en el registro gráfico.

Graficar el vértice, las parábolas y las elipses en el registro gráfico.

Graficar el vértice, las elipses y las parábolas en el registro gráfico.

Graficar las elipses, el vértice y las parábolas en el registro gráfico.

Graficar las elipses, las parábolas y el vértice en el registro gráfico.

Así mismo, el orden de las representaciones gráficas entre cada par de parábolas y cada par de elipses puede variar. Creemos que los estudiantes graficarían las variables visuales en el orden establecido en la actividad:

Graficar las parábolas, el vértice y las elipses en el registro gráfico.

Así mismo, pensamos que los estudiantes identificarían las representaciones de los puntos de intersección entre las curvas abiertas y cerradas, los cuales representarían el vértice del paraboloides y los extremos de los ejes mayor y menor de la representación gráfica de cada elipse.

Luego, esperamos que los estudiantes identifiquen la representación de la superficie resultante como un paraboloides elíptico, tal como se muestra en la figura 48.

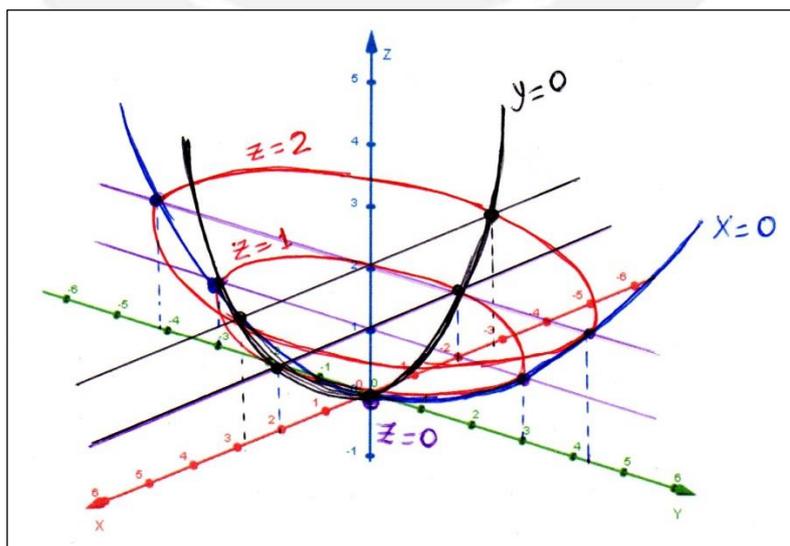


Figura 48. Gráfica de la superficie S

En la figura 48, notamos que las representaciones gráficas de las curvas abiertas (parábolas) y cerradas (elipses) deben intersectarse en puntos, de lo contrario, no podría representarse la superficie S , y menos aún, poder identificarla.

Análisis a posteriori

Ítem (c)

Estudiante Jacinta

En la figura 49 observamos la representación gráfica de la superficie S , realizado por Jacinta por medio de las variables visuales graficadas en los ítems anteriores. Sin embargo, Jacinta no identificó dicha superficie de forma escrita en la ficha, pero si en la entrevista realizada posteriormente a la actividad, en la cual ella afirmó que se trata de un “paraboloide”.

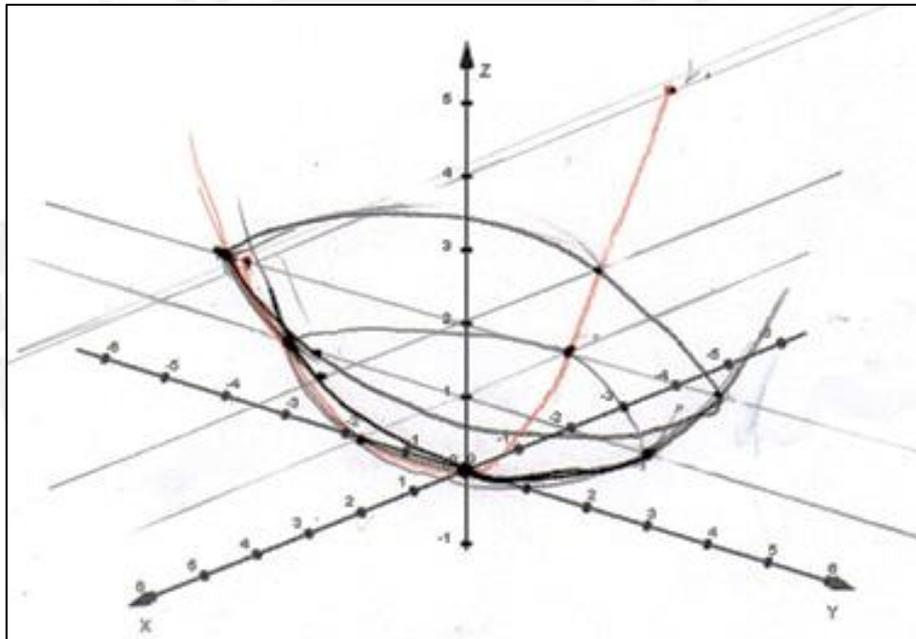


Figura 49. Representación gráfica de la superficie S realizado por Jacinta.

Como observamos en la figura 49, la representación gráfica de la superficie S realizada por Jacinta es muy similar al establecido en nuestro análisis a priori, la diferencia es el uso de representaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados y puntos de intersección entre las curvas abiertas y cerradas.

En la entrevista, se preguntó a Jacinta si al no haber considerado en la gráfica dichos puntos de intersección, hubiera sido posible representar la superficie, por lo que Jacinta no pudo explicar la razón de su procedimiento. Tampoco indicó el orden en la que fueron representadas las curvas abiertas y cerradas.

Estudiante Alexandra

Dado que Alexandra representó gráficamente un corte elíptico de dimensiones mayores, tuvo dificultades para graficar la superficie (figura 50) ya que al no contar con representaciones de puntos de paso (variables visuales) para realizar las representaciones gráficas de las parábolas, no pudo establecer conexiones entre las representaciones de las curvas abiertas (parábolas) y las curvas cerradas (elipses).

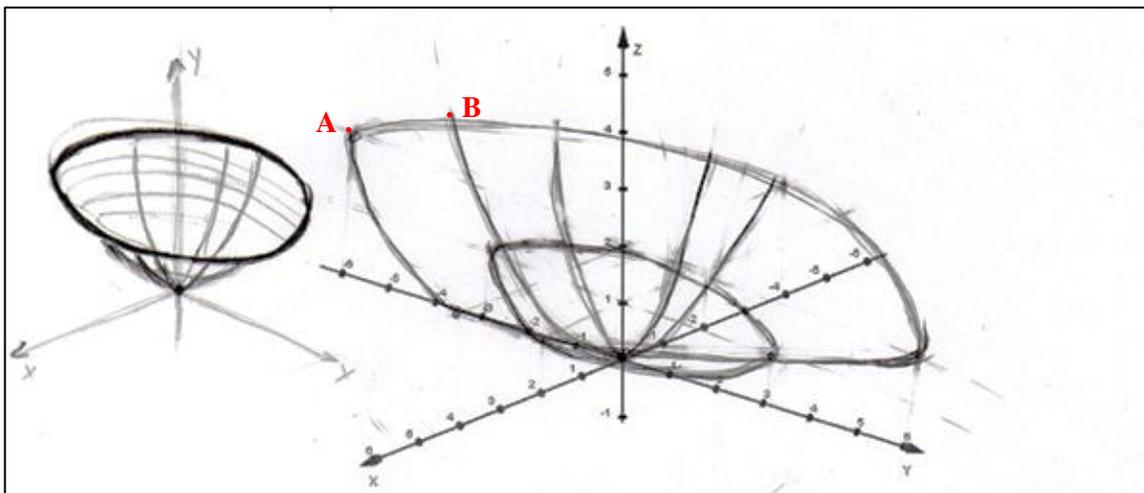


Figura 50. Gráfica de la superficie S realizado por Alexandra.

En la zona izquierda de la figura 50, observamos un esbozo previo de la superficie. En la entrevista posterior al desarrollo de la actividad, Alexandra afirmó que, debido a la orientación de las representaciones de las parábolas, la superficie representada debía tener la forma de un “tazón”, lo cual le permitió graficarla, pero no pudo identificarla en forma apropiada.

Así mismo, vemos que sólo las curvas cerradas presentan propiedades de simetría respecto a sus ejes focales y normales. Las curvas abiertas no intersectan a las curvas cerradas, lo cual es evidente en el punto B de la gráfica de la parábola contenida en el plano $x = 0$, con respecto al punto A de la gráfica de la elipse contenida en el plano $z = 2$, por lo tanto concluimos que Alexandra no graficó superficie alguna.

Ítem (d)

- d) ¿Existen restricciones para alguna(s) de las variables de la ecuación de la superficie S ? Justifique su respuesta.

El objetivo de este ítem es que los estudiantes, al tener las representaciones algebraicas y gráficas de la superficie S y sus variables visuales, desarrollen sus aprehensiones para identificar la variable cartesiana sujeta a restricciones, e indicar los valores que puede tomar dicha variable cartesiana.

Análisis a priori del ítem (d)

Esperamos a priori, que los estudiantes consideren dos alternativas para responder la pregunta de este ítem: interpretar mediante *lengua natural* las zonas del espacio (\mathbb{R}^3) donde no existe superficie por medio de restricciones a una de las variables x , y , z ; la otra posibilidad es realizar tratamientos en el *registro algebraico* al aplicar propiedades de los números reales y determinar, mediante solución de desigualdades e inequaciones, las restricciones respectivas.

Esperamos que los estudiantes expresen sus respuestas de forma similar a cualquiera de los siguientes registros:

Registro en lengua natural:

En la representación gráfica del paraboloides, se observa que posee un vértice en el origen de coordenadas, y por debajo del plano $z = 0$ no existe puntos en la representación de la superficie, ya que cualquier plano de la forma $z = w$, donde $w < 0$ no la intersectará. Por lo tanto: $z \geq 0$.

Registro algebraico: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \geq 0 \quad \therefore z \geq 0$

Para que los estudiantes respondan esta pregunta, creemos que deben haber articulado sus aprehensiones *perceptiva* por medio del reconocimiento de la variable visual Región de \mathbb{R}^3 donde existe superficie, y *operatoria* al realizar tratamientos en el registro gráfico al indicar qué planos de corte no generan intersecciones, por lo cual concluimos al indicar que, si se logra todo esto, los estudiantes han visualizado al paraboloides.

Podría darse el caso que los estudiantes, en lugar de utilizar propiedades de los números reales, verifiquen que si la ecuación de la superficie S para valores puntuales (enteros) y positivos de z , se obtiene:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \geq 0, \text{ entonces } z \geq 0,$$

es decir, parten de lo particular a lo general, lo cual sería una *verificación o comprobación*, lo cual es aceptable ya que no se les exige realizar una demostración rigurosa.

Análisis a posteriori

Ítem (d)

Estudiante Jacinta

En la figura 51, mostramos el registro de lenguaje natural utilizado por Jacinta para determinar las restricciones de la variable z en la ecuación del paraboloides S .

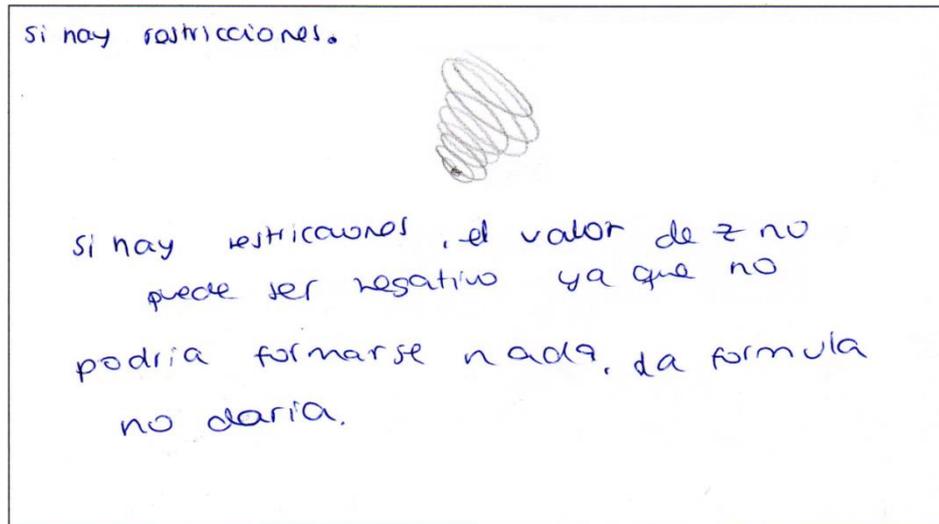


Figura 51. Restricciones de la variable cartesiana z en la superficie S obtenido por Jacinta.

Jacinta se apoyó en el registro gráfico de la superficie para responder la pregunta propuesta, al no ver representaciones de curvas por debajo del plano XY , expresó en lenguaje natural que la variable z no puede adoptar valores negativos ya que “no podría formarse nada”. Jacinta desarrolló su aprehensión perceptiva al reconocer las restricciones de z a partir de la representación gráfica del paraboloides, incluso realizó un bosquejo de la superficie en su procedimiento, pero no desarrolló una justificación formal, por lo cual podemos afirmar que Jacinta estuvo en proceso de visualización.

Estudiante Alexandra

Alexandra, en contraste con Jacinta, realizó tratamientos en el registro algebraico del cono elíptico representado por $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, al tabular solo valores negativos puntuales para realizar cortes del cono con los planos $z = -1$ y $z = -2$, ya que los planos de corte de la forma $z = k$ considerados en el ítem (b) (los planos $z = 1$ y $z = 2$) y el valor nulo tabulado en el ítem a (el plano $z = 0$) no le generaron restricción alguna para la variable z en su ecuación. Sin embargo, pensamos que el análisis realizado por tabulación de valores puntuales y enteros, no

es totalmente válido para todo tipo de expresiones algebraicas, y hubiese sido más conveniente utilizar propiedades de los números reales en los tratamientos del registro algebraico. Alexandra afirmó que “z puede ser cualquier número”, tal como se muestra en la figura 52.

cuando $z=1$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = (1)^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

cuando $z=-2$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = (-2)^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

no hay restricciones para z, z puede ser cualquier número

Figura 52. Restricciones de la variable z en la superficie S obtenido por Alexandra.

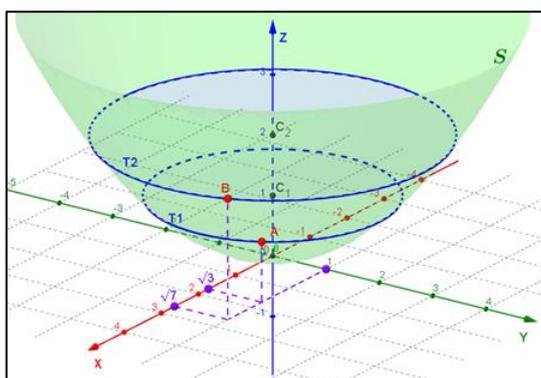
Dado que Alexandra no articuló sus apprehensiones perceptiva y operatoria, concluimos que en esta actividad en particular, Alexandra no visualizó al paraboloides representado por $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, ni al cono elíptico representado por $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

De acuerdo al procedimiento realizado por Alexandra, creemos que en réplicas futuras de la actividad 1, la ecuación del paraboloides debe estar presente en todas las páginas de la ficha de la actividad, o en caso de ser realizada en un aula, debería ser escrita en la pizarra para evitar dificultades en sus transcripciones.

ACTIVIDAD 2:

Obtención de la ecuación de un paraboloides dada su representación gráfica.

Abra el archivo: *Actividad_2.ggb*



<p>a) Los puntos C_1 y C_2 son centros de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, respectivamente. Escriba las coordenadas de los puntos A y B (valores exactos), y explique su procedimiento.</p>
<input type="text"/>
<p>b) Identifique la forma de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, y luego escriba sus ecuaciones. Justifique su procedimiento.</p>
<input type="text"/>
<p>c) Realice cortes de S con los planos $x = 0$, $y = 0$, e indique qué herramienta de Geogebra utilizó. ¿Qué forma tienen los cortes obtenidos? Explique.</p>
<input type="text"/>
<p>d) Escriba las ecuaciones de los dos cortes obtenidos en la parte (c). Explique su procedimiento. Sugerencia: Para obtener puntos de paso de cada corte pedido, puede utilizar los puntos de intersección de dichos cortes con las curvas $T1$ o $T2$.</p>
<input type="text"/>
<p>e) Con las ecuaciones de los dos cortes obtenidos en la parte d) y una de las ecuaciones de las curvas cerradas ($T1$ o $T2$) obtenidas en la parte b), obtenga la ecuación de la superficie cuádrica S.</p>
<input type="text"/>
<p>Nota: En los anexos se encuentra la secuencia en forma íntegra</p>

Esta actividad consta de cinco ítems a , b , c , d , e , los cuales serán analizados en tres bloques I, II y III, dado que los ítems a y b (bloque I) son secuenciales del mismo modo que los ítems c y d (bloque II). El bloque III está conformado únicamente por el ítem e .

La finalidad de esta actividad consiste en que los estudiantes realicen una secuencia de tratamientos y modificaciones en el registro gráfico del paraboloides, para desarrollar sus aprehensiones perceptiva, secuencial y operatoria, las cuales les permitirán identificar variables visuales y sus correspondientes unidades significantes, realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico y obtener la ecuación del paraboloides.

De esta manera, esta actividad busca lograr los objetivos específicos de nuestra investigación:

Identificar las variables visuales del paraboloides y sus correspondientes unidades significantes.

Identificar las aprehensiones en el registro gráfico que desarrollan los estudiantes.

Analizar en el registro gráfico las articulaciones entre las aprehensiones que desarrollan los estudiantes.

Las variables micro–didácticas asociadas a esta actividad son:

Representación gráfica de la superficie.

Representación de variables visuales de la superficie

Posición relativa entre el plano de corte y el eje del paraboloides.

Bloque I

Abra el archivo: *Actividad_2.ggb* (ver figura 53)

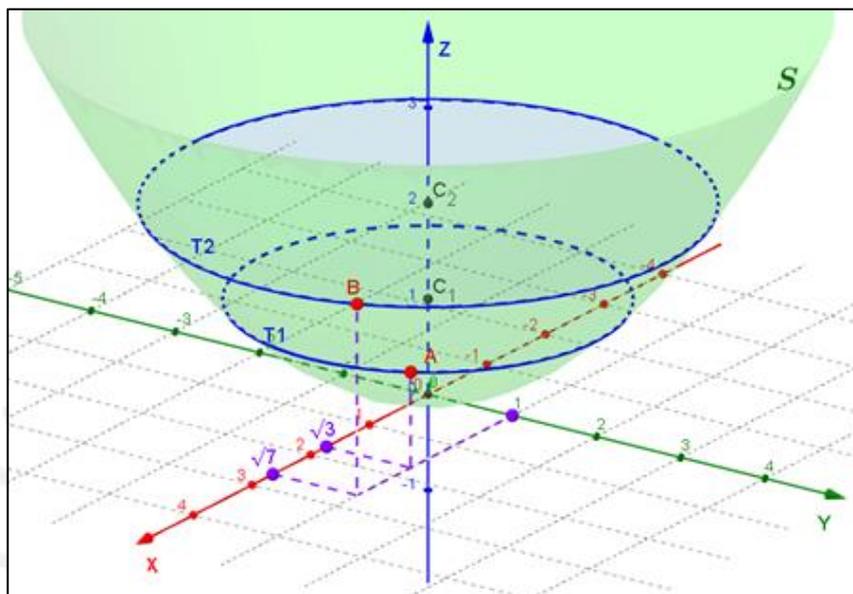


Figura 53. Archivo en Geogebra 3D para la actividad 2.

- Los puntos C_1 y C_2 son centros de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, respectivamente. Escriba las coordenadas de los puntos A y B (valores exactos), y explique su procedimiento.
- Identifique la forma de las secciones $T1$ y $T2$, y luego escriba sus ecuaciones. Justifique su procedimiento

La finalidad de este bloque es que los estudiantes puedan identificar las variables visuales del paraboloides representados por los cortes $T1$ y $T2$, así como obtener las coordenadas de los dos puntos de paso A y B en la vista gráfica de Geogebra 3D, para determinar sus respectivas representaciones en el registro algebraico, y así analizar cómo los estudiantes realizan la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

Las herramientas del *software Geogebra 3D*, permitirán a los estudiantes realizar tratamientos y modificaciones en la representación gráfica del paraboloides ya que, el desarrollo de la aprehensión perceptiva, no es suficiente para identificar la forma de las representaciones de las curvas $T1$ y $T2$, por lo cual es necesario que los estudiantes desarrollen otras aprehensiones.

Análisis a priori del bloque I

Pensamos a priori que en el bloque I, los estudiantes al abrir el archivo *Actividad_2.ggb* en Geogebra 3D, reconocerán que las representaciones de los puntos *A* y *B* están situados en los planos $z = 1$ y $z = 2$, respectivamente. Para ello, deben realizar modificaciones posicionales de rotación de la *Vista Gráfica 3D* al utilizar la herramienta *Rota la Vista Gráfica 3D* , tal como mostramos en la figura 54.

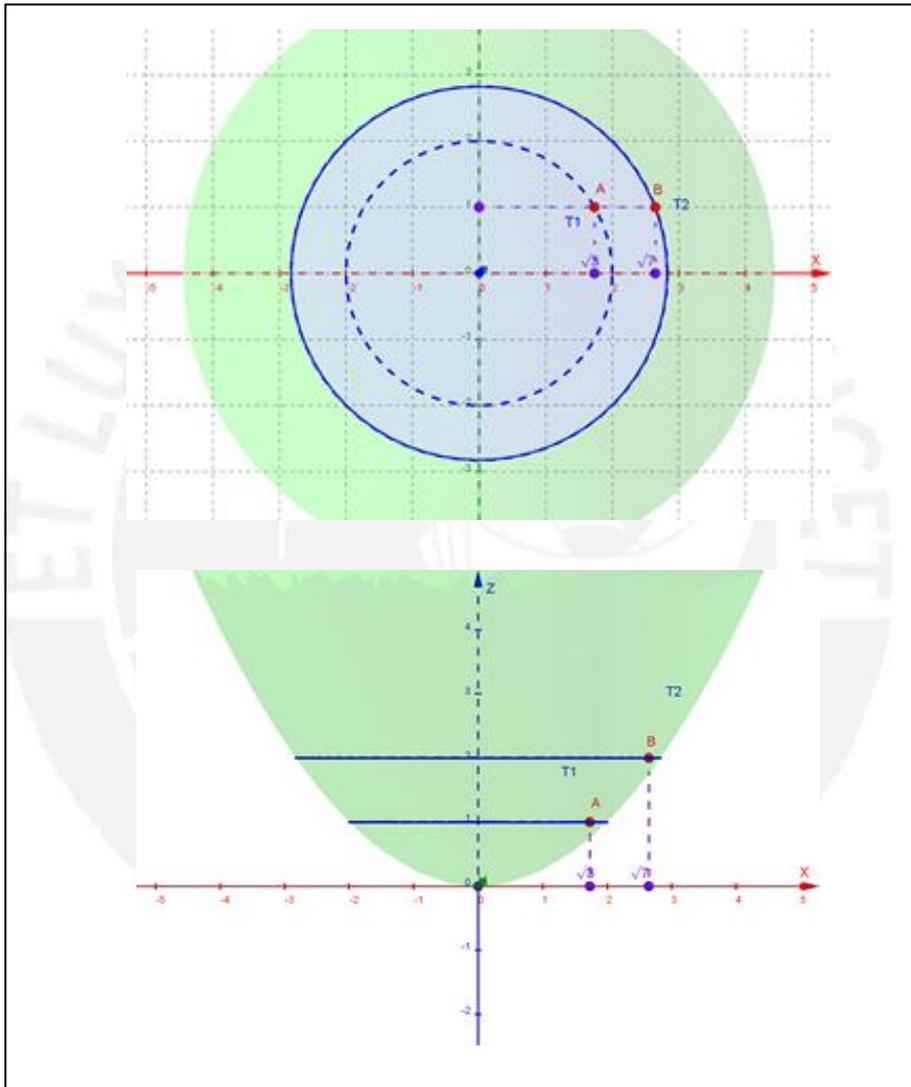


Figura 54. Rotaciones en la representación gráfica del paraboloido.

Así mismo, las componentes x e y de cada punto *A* y *B* están representados en la vista gráfica por medio de sus respectivas proyecciones sobre los ejes cartesianos X e Y , por lo cual esperamos que las unidades significantes (coordenadas) de cada una de esas variables visuales (puntos *A* y *B*) obtenidas por los estudiantes sean las siguientes:

$$A = (\sqrt{3}, 1, 1), \quad B = (\sqrt{7}, 1, 2)$$

Podría ocurrir que los estudiantes obtengan en forma directa las coordenadas de los puntos A y B , sin realizar algún tipo de tratamiento ni modificación en el registro gráfico, ya sea por medio de la opción *valor* de cada punto A y B con la opción para mostrar las coordenadas mediante el clic derecho del mouse en cada punto, o a través de las opciones de la *Barra de Estilo*. Sin embargo, el *software Geogebra* no expresa en forma indicada las raíces cuadradas como notación simbólica, por lo cual las coordenadas de los puntos A y B obtenidas por esta modalidad quedarían expresadas de la siguiente forma:

$$A = (1.73, 1, 1), \quad B = (2.65, 1, 2)$$

Dado que se les pide valores exactos en las componentes de cada punto A y B , el método indicado no es apropiado para la ejecución de la tarea solicitada.

En el ítem (b), a priori, esperamos que los estudiantes roten la *Vista Gráfica 3D* y puedan reconocer que las curvas cerradas $T1$ y $T2$, corresponden a circunferencias cuyos centros están representados por los puntos $C_1(0,0,1)$ y $C_2(0,0,2)$, respectivamente, cada una de ellas contenidas en los planos $z = 1$ y $z = 2$.

En la figura 55 mostramos que la representación del plano XY , se proyecta en forma paralela al plano de la *Vista Gráfica 3D*, y podemos identificar las formas de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, ya que sus proyecciones en dicho plano se muestran en verdadera magnitud, son concéntricas y cualquier punto de cada curva equidista del centro.

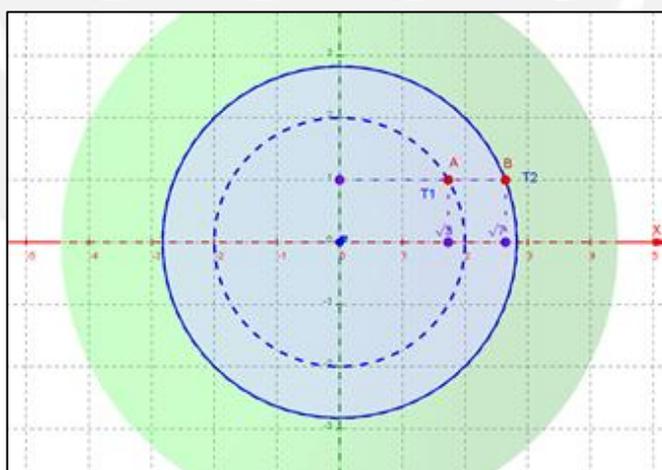


Figura 55. Forma de las curvas cerradas $T1$ y $T2$.

A todo esto, podemos añadir un carácter dinámico a la disposición mostrada en la figura 55 al rotar toda la vista gráfica en torno al centro y alrededor del eje Z (proyectado en forma perpendicular al plano), lo que equivale a trazar una circunferencia en un papel manteniéndose fijo el compás y rotar el papel alrededor del centro, procedimiento el cual es fácilmente reconocido por los estudiantes.

Luego, al conocer las coordenadas de los centros de cada circunferencia, creemos que los estudiantes pueden considerar como puntos de paso a los puntos A y B con la finalidad de obtener el radio de cada circunferencia y, por medio del plano al cual pertenecen cada uno de los cortes, los estudiantes estarían en condiciones de poder determinar las ecuaciones de cada una de dichas circunferencias, para lo cual creemos que ellos deberían realizar el siguiente tratamiento en el registro algebraico:

Ecuación de $T1$:

Forma de la ecuación de $T1$ expresada como la intersección de un cilindro circular recto representado por $S_1 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, con un plano π perpendicular al eje del cilindro representado por $\pi : z = w$

$$T1: \begin{cases} (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \\ z = w \end{cases}$$

$$\text{Radio de } T1: r = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = 2.$$

de donde:

$$T1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ecuación de $T2$:

Forma de la ecuación de $T2$ expresada como la intersección de un cilindro circular recto representado por $S_2 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, con un plano π perpendicular al eje del cilindro representado por $\pi : z = w$

$$T2: \begin{cases} (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \\ z = w \end{cases}$$

$$\text{Radio de } T2: r = \sqrt{(\sqrt{7}-0)^2 + (1-0)^2 + (2-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

de donde:

$$T2: \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ z = 2 \end{cases}$$

En este sentido, esperamos que los estudiantes obtengan las representaciones cartesianas de las curvas cerradas $T1$ y $T2$ mediante la conversión del registro gráfico al algebraico, lo cual permitirá que, conjuntamente con las ecuaciones de las curvas abiertas del bloque II, tengan información pertinente para poder obtener la ecuación de la superficie S .

Pensamos que, durante los tratamientos en el registro algebraico, los estudiantes podrían presentar dificultades en torno al cálculo del radio de cada circunferencia, representadas por

$T1$ y $T2$, ya que si las coordenadas del centro y un punto de paso de cada curva no están expresados de forma correcta, los radios también podrían resultar incorrectos.

Creemos además, que las representaciones algebraicas de cada una de las circunferencias representadas por $T1$ y $T2$, debe ser expresada como la intersección de las representaciones algebraicas de dos superficies, en nuestro caso, la intersección de un cilindro circular recto con un plano perpendicular a su eje, por lo cual podría ocurrir que los estudiantes, den como respuesta la ecuación de un cilindro en lugar de la ecuación de una circunferencia.

Análisis a posteriori del Bloque I

Estudiante Jacinta

En la figura 56 presentamos el procedimiento realizado por Jacinta para obtener las coordenadas de los puntos A y B .

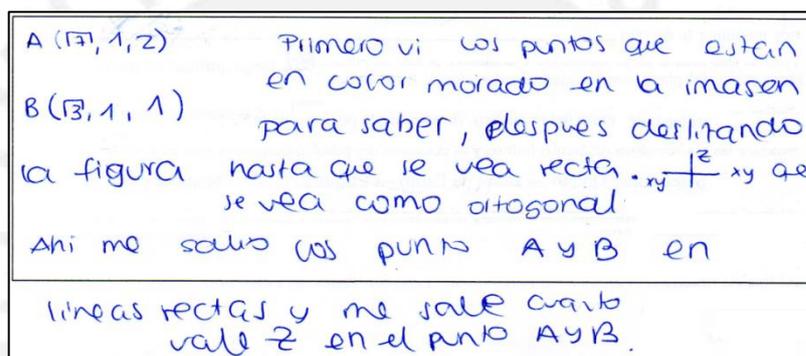


Figura 56. Coordenadas de los puntos A y B obtenidas por Jacinta.

Jacinta realizó modificaciones posicionales de tipo rotación en la Vista Gráfica 3D mediante la herramienta *Rota la vista gráfica 3D* de Geogebra. Al indicar en la figura 56 “*me salió los puntos A y B en líneas rectas y me sale cuánto vale z en el punto A y B* ”, quiso decir que giró los ejes cartesianos de tal manera que el plano YZ se vea en forma paralela a la pantalla del monitor, y el eje X se proyecte en forma perpendicular, en esa disposición, las representaciones gráficas de las circunferencias representadas por $T1$ y $T2$ están proyectadas como *segmentos paralelos*, de esta manera sus respectivos diámetros (a los cuales Jacinta denomina *líneas*) están en verdadera magnitud. La intersección de las representaciones gráficas de dichos diámetros con el eje Z , son los centros de cada circunferencia, lo cual pudo deducir Jacinta en su procedimiento.

En la figura 57 mostramos el reconocimiento de las curvas representadas por $T1$ y $T2$, realizado por Jacinta, las cuales representan circunferencias, y las expresa como la representación algebraica de las intersecciones de cilindros circulares rectos o de revolución con los planos $z = 1$ y $z = 2$.

da forma de las curvas son circunferencias,
 que se intersecan en el
 plano $z=1$ y $z=2$ las formulas son
 $x^2+y^2=2^2$ $x^2+y^2=4$ $x^2+y^2=2,83^2$ $C(0,0,1)$

Figura 57. Ecuaciones de las curvas $T1$ y $T2$ obtenidas por Jacinta.

En la figura 58, Jacinta explicó el procedimiento para determinar los radios de cada circunferencia: representó en la Vista Gráfica de Geogebra 3D los planos $z = 1$ y $z = 2$, los cuales, pensamos que fueron realizados mediante la herramienta *Plano por tres puntos* , luego utilizó la herramienta *Representación 2D de un objeto* de Geogebra, y pudo obtener los radios. También afirma que representó un segmento desde el centro de la circunferencia hacia un punto de la misma, seleccionó dicho segmento, luego con la *Barra de Estilo* eligió la opción *Valor* y pudo obtener la medida del radio.

Reduje planos en la grafica
 $z=1$ y $z=2$, despues lo represente
 en un plano 2D y me salio las
 medidas del radio.
 Otro método que utilice fue realizar un
 segmento y seleccionar puntos para
 despues ponerle valor y nombre y
 me salio la medida del radio que necesitaba.

Figura 58. Procedimiento realizado por Jacinta para obtener los radios de $T1$ y $T2$.

Sin embargo, el software Geogebra no expresa valores exactos o en forma simbólica de números irracionales, por ello el radio de la circunferencia representada por $T2$, hallado por Jacinta es 2.83 (ver figura 57), que es el valor indicado por el *software Geogebra*, en lugar de $2\sqrt{2}$ que es el valor exacto esperado a priori, lo cual podría generar errores en la obtención de la ecuación de la superficie S por redondeo decimal. Es importante indicar que el valor obtenido es *teórico*, y en la realidad el trazado de una forma circular de $4\sqrt{2}$ m de diámetro se realiza con aproximación dependiendo del instrumento de medición y la necesidad requerida. Podemos afirmar que Jacinta, en este bloque de la actividad 2, desarrolló *aprehensiones perceptiva, operatoria y secuencial* de las variables visuales representadas por las curvas $T1$ y

T2. Podemos afirmar que Jacinta articuló dichas aprehensiones y estuvo en un proceso de visualización en avance.

Estudiante Alexandra

En la figura 59 mostramos el procedimiento realizado por Alexandra.

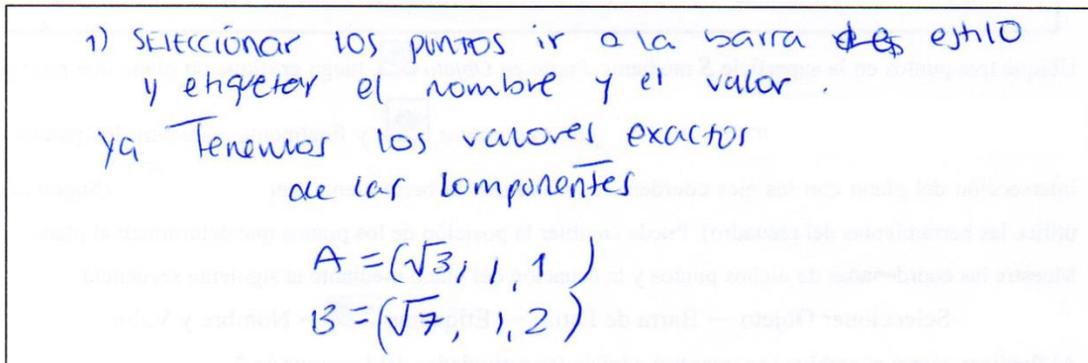


Figura 59. Coordenadas de los puntos A y B obtenidas por Alexandra.

Como observamos en la figura 59, Alexandra no realizó tratamientos en el registro gráfico ni modificaciones en la Vista Gráfica 3D para determinar la tercera componente de las coordenadas de los puntos A y B. Sin embargo, Alexandra explicó la secuencia a realizarse para obtener las coordenadas de los puntos requeridos, por lo que podemos afirmar que ella desarrolló una *aprehensión perceptiva*, ya que reconoció los valores de la primera y segunda componente de las coordenadas de cada punto, a partir de la información del archivo de la actividad 2, y una *aprehensión secuencial* en su procedimiento para obtener las unidades significantes pedidas (las coordenadas de los puntos A y B).

Sin embargo, Alexandra no pudo obtener las unidades simbólicas correspondientes a la unidad significativa *radio* de cada variable visual representada por las curvas T1 y T2, tal como se muestra en la figura 60.

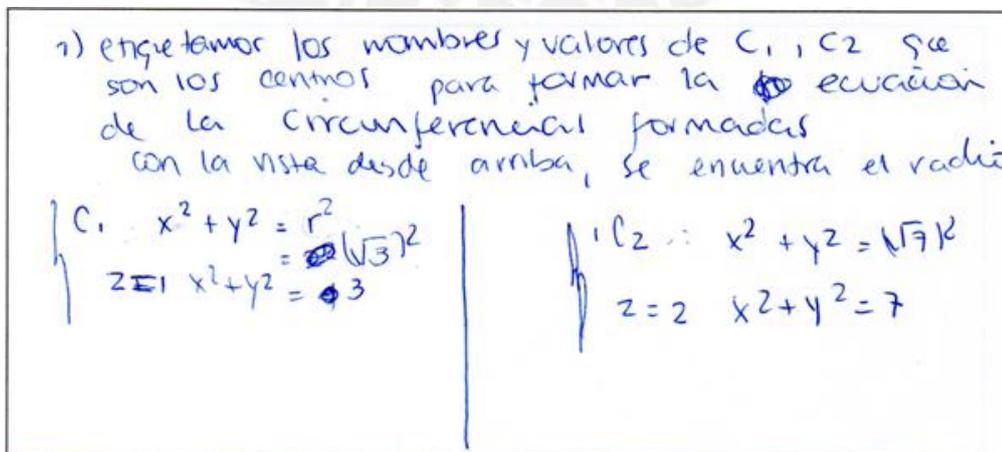


Figura 60. Ecuaciones de las curvas T1 y T2 obtenidas realizado por Alexandra.

Los valores numéricos $\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$ no corresponden a los radios de las circunferencias representadas por $T1$ ni $T2$, son las abscisas de las coordenadas de los puntos A y B , tal como apreciamos en la “vista desde arriba” (figura 61).

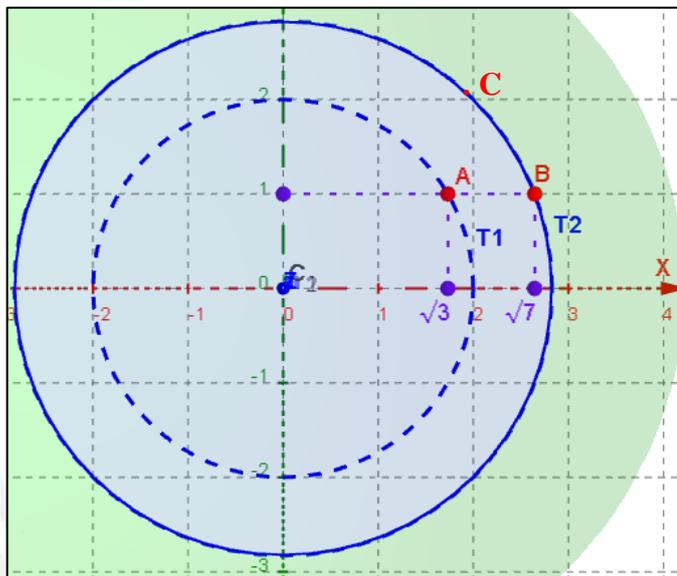


Figura 61. Error en reconocimiento de los radios de $T1$ y $T2$ realizado por Alexandra.

Vemos en la figura 61 que, el valor del radio de la circunferencia representada por $T1$ es 2, y puede obtenerse por medio de la intersección de la proyección de la representación de la circunferencia $T1$ con el eje X o el eje Y . En el caso de la circunferencia representada por $T2$, pudo haberse utilizado las componentes x e y de las coordenadas del punto C , las cuales, por ser iguales al valor 2, da como resultado el valor del radio igual a $2\sqrt{2}$.

Concluimos que, Alexandra no pudo obtener los valores del radio de cada circunferencia representada por $T1$ y $T2$, lo cual podría ocasionarle dificultades al tratar de hallar la representación cartesiana de la superficie S .

Bloque II

- c) Realice cortes de S con los planos $x = 0$, $y = 0$, e indique qué herramienta de Geogebra utilizó. ¿Qué forma tienen los cortes obtenidos? Explique.
- d) Escriba las ecuaciones de los cortes obtenidos en la parte (c). Explique su procedimiento. Sugerencia: Para obtener puntos de paso de cada corte pedido, puede utilizar los puntos de intersección de dichos cortes con las curvas $T1$ o $T2$.

Este bloque tiene por finalidad que los estudiantes, mediante la utilización del comando de Geogebra *IntersecaCónica*, puedan representar cortes en la representación gráfica de la superficie S con los planos $x = 0$, $y = 0$, para obtener otro tipo de variables visuales (curvas

abiertas: parábolas), identificar las variables visuales de dichas curvas abiertas (vértices, ejes focales, puntos de paso), y poder determinar la ecuación cartesiana de cada uno de dichas curvas. De esta manera, podríamos estudiar las aprehensiones secuencial y operatoria desarrolladas por los estudiantes, así como los registros de lenguaje natural y algebraico utilizados por ellos para realizar tratamientos en los registros gráfico y algebraico del paraboloides.

Análisis a priori del bloque II

A priori esperamos que en el ítem (c), los estudiantes utilicen el comando *IntersecaCónica* para representar gráficamente los cortes de la superficie S con los planos $x = 0$, $y = 0$, e identifiquen la forma de la representación de cada corte obtenido.

Para ello, creemos que los estudiantes podrían las siguientes acciones:

Ingresar en la Barra de Herramientas de Geogebra 3D: *IntersecaCónica*[$x=0$, S]

Forma del corte de S con el plano $x = 0$: Utilizar la herramienta *Rota la vista gráfica 3D*  (botón derecho del mouse sobre el corte obtenido) y girar la vista gráfica hasta que el plano YZ esté en posición paralela a la pantalla de los estudiantes. Luego los estudiantes podrían reconocer la forma de la representación del corte obtenido expresándolo de la siguiente manera:

Es una parábola con vértice el origen de coordenadas, y se extiende hacia el semieje positivo del eje Z .

Ingresar en la Barra de Herramientas de Geogebra 3D: *IntersecaCónica*[$y=0$, S]

Forma del corte de S con el plano $y = 0$: Utilizar la herramienta *Rota la vista gráfica 3D*  (botón derecho del mouse sobre el corte obtenido) y girar la vista gráfica hasta que la representación del plano XZ esté en posición paralela a la pantalla de los estudiantes. Luego, de manera similar al caso anterior, los estudiantes podrían expresar la forma de la representación del corte obtenido de la siguiente manera:

Es una parábola con vértice el origen de coordenadas, y se extiende hacia el semieje positivo del eje Z .

Consideramos que los estudiantes han desarrollado la aprehensión discursiva del paraboloides para afirmar que las representaciones de las parábolas se extienden en un sentido determinado, al haber reconocido las unidades significantes *Dirección del eje* y *Sentido de expansión de la superficie respecto de su vértice*, con sus correspondientes unidades simbólicas “eje Z ” y “ $c > 0$ ”, el cual debe tener correspondencia con las representaciones gráfica y algebraica de cada una de dichas parábolas.

A priori, esperamos que en el ítem (d), los estudiantes utilicen la herramienta *Intersección*  para representar puntos de paso de las representaciones gráficas de cada una de las dos parábolas obtenidas en el ítem (c), y los estudiantes puedan escribir sus ecuaciones cartesianas, de forma análoga al trabajo realizado en el bloque I. Para ello, pensamos que los estudiantes deberían realizar los siguientes tratamientos en el registro algebraico:

Representación algebraica del corte de S con el plano $x = 0$

Forma de la ecuación cartesiana de la parábola representada por P_1 , expresada como la intersección del cilindro parabólico representado por $S_1 : (y - k)^2 = 4p(z - w)$ con el plano $x = 0$:

$$P_1 : \begin{cases} (y - k)^2 = 4p(z - w) \\ x = 0 \end{cases}$$

Coordenadas del vértice: $V(0, 0, 0)$

Punto de paso: Los estudiantes al utilizar la herramienta *Intersección*  entre los cortes $T1$ y P_1 , obtienen las representaciones gráficas de dos puntos de paso. Creemos que los estudiantes pueden elegir cualquiera de las representaciones de dichos puntos de paso ya que, para determinar el valor del parámetro de una parábola, es necesario, además de conocer las coordenadas del vértice, las coordenadas de un punto de paso.

Por ejemplo, sea el punto representado por $Q = (0, 2, 1)$ el punto de paso elegido por los estudiantes.

Reemplazando valores en la forma de la ecuación cartesiana de P_1 :

$$\begin{aligned} (y - 0)^2 &= 4p(z - 0) \\ (2)^2 &= 4p(1) \rightarrow p = 1 \end{aligned}$$

Consideramos que, los estudiantes deberían expresar la variable z en forma explícita en la ecuación de la parábola P_1 , por lo cual su ecuación quedaría expresada en la forma siguiente:

$$P_1 : \begin{cases} z = \frac{y^2}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

Representación algebraica del corte de S con el plano $y = 0$

Forma de la ecuación cartesiana de la parábola representada por P_2 , expresada como la intersección del cilindro parabólico representado por $S_2 : (x-h)^2 = 4p(z-w)$ con el plano $y=0$:

$$P_2 : \begin{cases} (x-h)^2 = 4p(z-w) \\ y=0 \end{cases}$$

Vértice: $V(0, 0, 0)$

Punto de paso: Los estudiantes al utilizar la herramienta *Intersección*  entre las representaciones de los cortes $T1$ y P_2 obtienen las representaciones gráficas de dos puntos de paso. De forma análoga al caso anterior, pensamos que los estudiantes pueden elegir cualquiera de dichos puntos, por ejemplo el punto representado por $Q = (2,0,1)$ y deberían realizar la misma secuencia y consideraciones del caso anterior:

$$(x-0)^2 = 4p(z-0) \rightarrow (2)^2 = 4p(1) \rightarrow p=1$$

$$P_2 : \begin{cases} z = \frac{x^2}{4} \\ y=0 \end{cases}$$

Al obtener las representaciones algebraicas de las parábolas representadas gráficamente, esperamos que los estudiantes desarrollen las aprehensiones *perceptiva* al identificar las variables visuales representadas en el registro gráfico, *secuencial* al utilizar comandos y herramientas de Geogebra 3D para obtener las unidades significantes correspondientes a dichas variables visuales (signos y coordenadas), y *operatoria* al realizar tratamientos en el registro algebraico.

Mediante el análisis de las articulaciones entre las aprehensiones perceptiva, secuencial y operatoria en términos del marco teórico de nuestra investigación, podremos afirmar que la visualización del paraboloides está en progreso.

Análisis a posteriori del bloque II

Estudiante Jacinta

En la figura 62 mostramos el procedimiento realizado por Jacinta para reconocer la forma de las representaciones de los cortes de la superficie S con los planos $x=0$ e $y=0$.

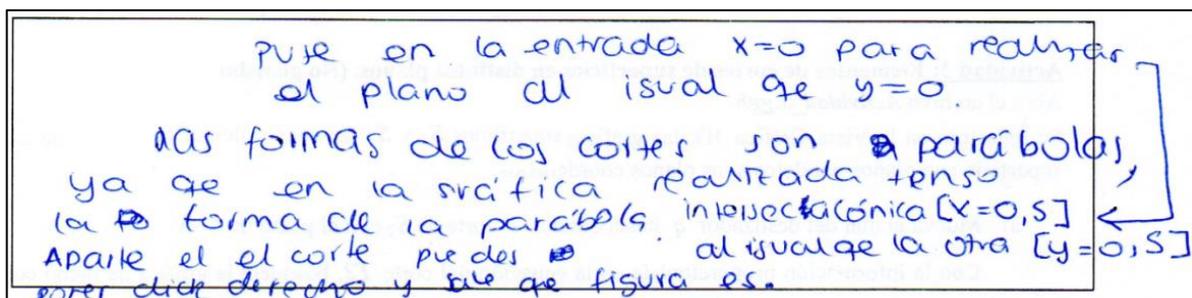


Figura 62. Cortes de S con los planos $x=0$, $y=0$ realizado por Jacinta.

Como mostramos en la figura 62, Jacinta previamente graficó los planos $x = 0$, $y = 0$, y mediante simple reconocimiento de las formas de las curvas que podrían obtenerse por intersección de superficies (aprehensión perceptiva), indicó que los cortes que pueden obtenerse son representaciones de parábolas. Seguidamente, Jacinta utilizó la herramienta de Geogebra 3D *IntersecaCónica* para graficar los cortes pedidos.

Al indicar “poner click derecho y sale que figura es” en su procedimiento (ver figura 62), vemos que Jacinta sabía que por esta acción, el software Geogebra 3D le proporcionaría en forma directa el tipo de curva graficada, tal como mostramos en la figura 63, lo cual confirmó su conjetura inicial. Esta acción no estaba contemplada en nuestro análisis a priori.

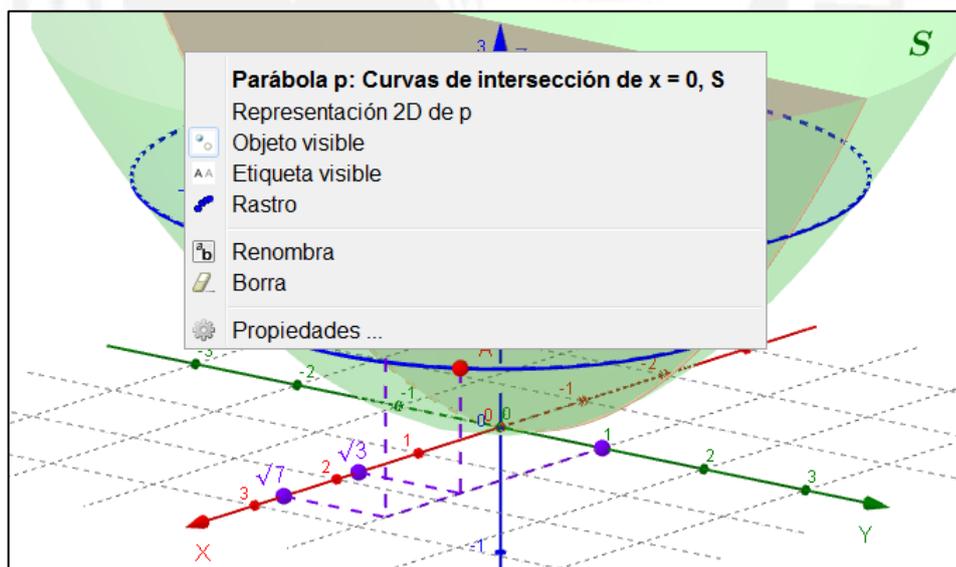


Figura 63. Identificación por medio de Geogebra del corte de S con el plano $x=0$

En la figura 64 mostramos el tratamiento en el registro algebraico realizado por Jacinta para obtener las ecuaciones de las parábolas. Como podemos observar, Jacinta no pudo identificar la variable visual *Eje focal* correspondiente a la variable visual *Parábola*, ya que los ejes focales de cada parábola son el eje Z , y por ende la variable z no debe estar elevada al cuadrado en sus representaciones algebraicas.

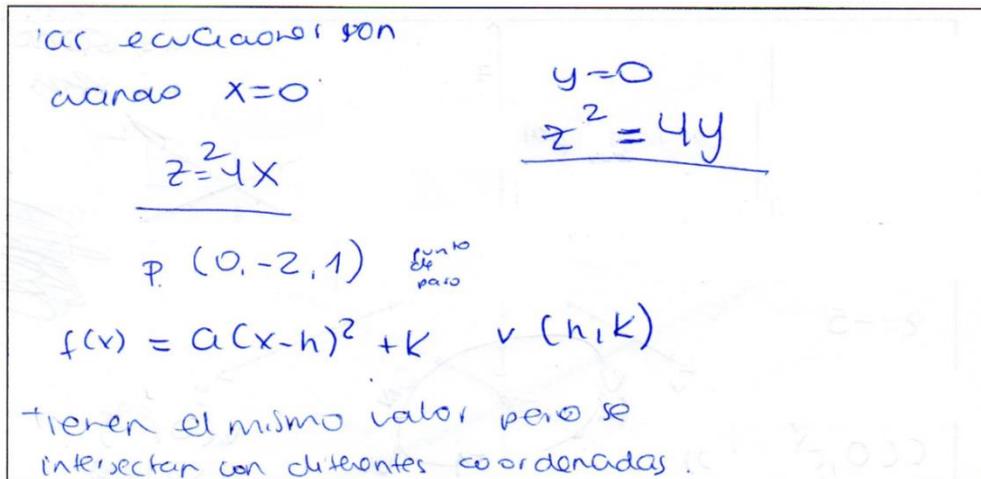


Figura 64. Ecuaciones de los cortes de S con los planos $x=0$, $y=0$ realizado por Jacinta.

Así mismo, vemos en la figura 64 que Jacinta en su procedimiento, escribió la regla de correspondencia de la función cuadrática, lo cual indica que ella trajo a escena otro objeto matemático el cual no tiene relación alguna con el objeto matemático superficie cuádrica.

Mediante tratamientos en el registro algebraico, Jacinta obtuvo las expresiones $z^2 = 4x$, $z^2 = 4y$, las cuales no forman parte de las representaciones algebraicas de las parábolas, así mismo, el procedimiento de Jacinta para obtener dichas ecuaciones no está completo, pero creemos que las coordenadas del punto representado por $P = (0, -2, 1)$, fue considerado como punto de paso para obtener las ecuaciones indicadas.

Al no obtener las ecuaciones correctas de las curvas abiertas, afirmamos que Jacinta podría tener dificultades en los tratamientos en el registro algebraico para obtener la ecuación de la superficie S, ya que el grado de la variable z es 1 según nuestro análisis a priori.

Estudiante Alexandra

En la figura 65 indicamos el procedimiento realizado por Alexandra para identificar la forma de los cortes de la representación de la superficie S con los planos $x = 0$ e $y = 0$.

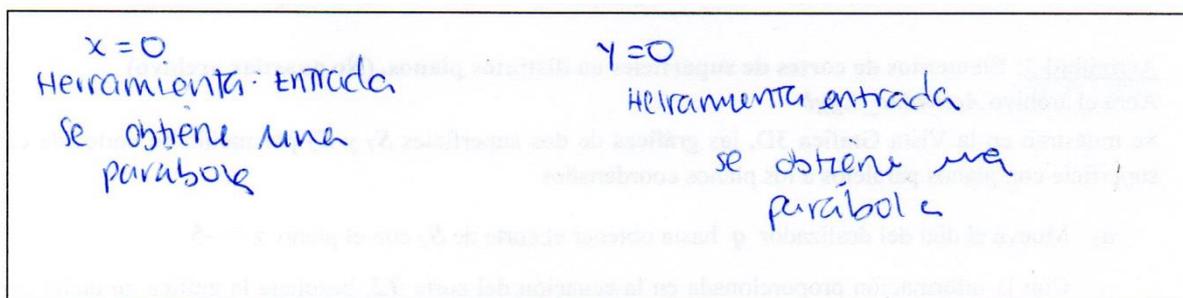


Figura 65. Cortes de S con los planos $x=0$, $y=0$ realizado por Alexandra.

Como observamos en la figura 65, Alexandra graficó los planos $x = 0$ e $y = 0$, y mediante un simple reconocimiento visual (aprehensión perceptiva), identificó la forma de las intersecciones de la representación de la superficie S con dichos planos. Creemos que, Alexandra realizó modificaciones posicionales de tipo rotación de la Vista Gráfica 3D para reafirmar su conjetura, sin embargo, no utilizó la herramienta *IntersecaCónica* para graficar dichos cortes.

Alexandra no realizó ninguna acción adicional en este bloque II, por lo cual pensamos que no pudo identificar ninguna variable visual de las representaciones de las parábolas, y como consecuencia, no pudo realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico.

Bloque III

e) Con la información obtenida en los pasos anteriores, escriba la ecuación de la superficie S

Este bloque tiene por objetivo lograr que los estudiantes obtengan la representación algebraica de la superficie S , al realizar tratamientos en el registro algebraico para tal finalidad, por medio del reconocimiento de las variables visuales y sus correspondientes unidades significantes de dicha superficie (dirección del eje de la superficie, sentido de expansión de la superficie, tipo de paraboloides, dirección del eje focal de las curvas abiertas), las cuales permitirán a los estudiantes expresar la ecuación de la superficie S con la forma de alguna de las tres representaciones algebraicas del paraboloides, las cuales en nuestro estudio son las siguientes:

$$\frac{z-w}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}, \text{ cuyo eje es paralelo al eje } Z$$

$$\frac{y-k}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}, \text{ cuyo eje es paralelo al eje } Y$$

$$\frac{x-h}{c} = \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(z-w)^2}{b^2}, \text{ cuyo eje es paralelo al eje } X$$

Análisis a priori del bloque III

Pensamos que los estudiantes, al despejar la variable z en las dos primeras ecuaciones, podrían plantear que la representación algebraica del paraboloides tiene la forma siguiente:

$$\frac{z-w}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

dado que en el registro gráfico la representación de la superficie presenta un vértice y no existen puntos por debajo del plano $z = 0$, al reconocer la unidad simbólica “ $z \geq 0$ ” correspondiente a la unidad significativa *Región de R^3 donde existe superficie*. Creemos además que, los estudiantes podrían reconocer que las curvas cerradas representadas por $T1$ y $T2$ son circunferencias, por lo cual la unidad significativa *Tipo de paraboloides* tiene como unidad simbólica $a / b = 1$, en consideración $a = b$ y el paraboloides es de tipo circular.

En virtud a nuestros supuestos, creemos que los estudiantes, para obtener la representación algebraica del paraboloides, deberían realizar tratamientos en el registro algebraico, para lo cual utilizarán, según las indicaciones de la ficha (ver anexo), las representaciones algebraicas de las variables visuales obtenidas en los bloques I y II. Para poder lograr nuestro propósito, esperamos que los estudiantes realicen un procedimiento similar al siguiente:

Representación del corte de S con el plano $x=0$: $z = \frac{y^2}{4}$

Representación del corte de S con el plano $y=0$: $z = \frac{x^2}{4}$

Representación del corte de S con el plano $z=1$: $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$

La forma de la ecuación en tres variables cartesianas x, y, z de la cual, mediante tabulación con los cortes indicados, pueden obtenerse las ecuaciones de las tres curvas indicadas previamente es:

$$\frac{z-w}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

Por lo cual, esperamos que la representación algebraica del paraboloides S obtenida por los estudiantes sea la siguiente:

$$S : z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

ya que es la ecuación en tres variables cartesianas x, y, z que satisface a las tres ecuaciones obtenidas en los bloques I y II. En términos de Duval (1995), se ha representado

algebraicamente una variable visual compleja a partir de representaciones algebraicas de variables visuales de dimensión menor o igual que la representada, y todo el proceso involucrado permite afirmar que, si los estudiantes logran obtener dicho registro algebraico, han visualizado al paraboloides.

Análisis a posteriori del bloque III

Ninguna de las dos estudiantes, Jacinta ni Alexandra, presentaron procedimiento alguno en este bloque III, y la razón ha sido identificada en el análisis a posteriori del bloque II, la cual es la siguiente:

No se identificaron las variables visuales de las representaciones gráficas de las parábolas. En el caso de Jacinta, ella sólo consideró erróneamente las siguientes variables visuales:

Punto de paso (Jacinta considera un punto de paso P, pero no se evidencia que lo haya utilizado en su procedimiento)

Eje cartesiano al cual es paralelo el eje focal (Jacinta no considera que sea el eje Z)

Parámetro p (Jacinta indica que es positivo y es la unidad 1, pero no detalla procedimiento para calcularlo)

Por ello, creemos que Jacinta presentó dificultades para realizar tratamientos en el registro algebraico, y por ende, dejó la ficha en blanco. Alexandra, al no tener información en el registro algebraico, tampoco aportó información alguna en su ficha.

Concluimos que, en esta actividad, Jacinta y Alexandra no visualizaron al paraboloides porque no desarrollaron la *aprehensión perceptiva* respecto a la variable visual parábola ya que, en el caso de Jacinta, intercambió entre si las variables cartesianas de la ecuación de los cilindros parabólicos $x^2 = 4z$, $y^2 = 4z$, lo cual no le permitió obtener una única ecuación en tres variables. El caso de la estudiante Alexandra fue de dificultades similares, por lo cual hemos considerado *rediseñar* la Actividad 3, ya que consistía en una modificación de la Actividad 2 para obtener la ecuación de un paraboloides con vértice distinto del origen de coordenadas.

ACTIVIDAD 3: Unidades significantes del Paraboloides.

Abra el archivo: *Superficie_S.ggb*

a) Digite en la *Barra de Entrada* la ecuación de la superficie $S: \frac{y-12}{-12} = \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z-4)^2}{16}$

El software Geogebra no grafica la superficie S . Vamos a representarla mediante cortes de S con planos paralelos a los planos coordenados por medio del comando *IntersecaCónica*.

Se pide realizar los siguientes cortes:

T1: Corte de S con el plano XY

T4: Corte de S con el plano $y = 4$

T2: Corte de S con el plano YZ

T5: Corte de S con el plano $y = 8$

T3: Corte de S con el plano XZ

¿Qué curvas se obtienen?

b) Determine los centros y vértices de las curvas cerradas, mediante los comandos:

Vértices[<Cónica>] Centro[<Cónica>]

Si se pretende realizar cortes de S con 2 planos paralelos a los planos coordenados, para obtener curvas abiertas que pasen por los vértices de las curvas cerradas, ¿cuáles serían las ecuaciones de dichos planos? Explique y grafique dichos cortes.

c) Trace la recta que pasa por los centros de las curvas cerradas mediante la herramienta *Recta*. ¿Dicha recta y las curvas abiertas graficadas en el paso anterior se intersectan?

¿Qué representan la recta y el punto de intersección obtenido para la superficie?

¿Podría interpretar el significado del término negativo (-12) que aparece en el denominador del primer miembro de la ecuación de la superficie S ?

Nota: La secuencia íntegra de la actividad se encuentra en los anexos.

Esta actividad consta de tres ítems a, b, c, los cuales abarcan un conjunto de tareas específicas mediante el software Geogebra 3D, y permite a los estudiantes establecer conexiones entre las variables visuales del paraboloides, y sus unidades significantes y simbólicas correspondientes.

En la actividad 2, las estudiantes Jacinta y Alexandra tuvieron dificultades en realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico, y la razón radica en no haber identificado las unidades significantes correspondientes a la variable visual parábola. Creemos que con esta actividad, los estudiantes podrán desarrollar sus aprehensiones perceptiva, secuencial, discursiva y operatoria, las cuales les permitirán construir significados entre los términos de la ecuación de la superficie cuadrada, en particular aquellas que guardan relación directa con las variables visuales del paraboloides, y su correspondiente representación gráfica.

De esta manera, pretendemos lograr el siguiente objetivo específico de investigación:

Identificar las variables visuales del paraboloides y sus correspondientes unidades significantes.

Las variables micro–didácticas asociadas a esta actividad son:

Ecuación cartesiana del paraboloides

Posición relativa entre el plano de corte y el eje del paraboloides

En esta actividad, los estudiantes deberán representar gráficamente al paraboloides mediante sus variables visuales: curvas abiertas, cerradas, vértice, eje del paraboloides, puntos de intersección entre las curvas abiertas y cerradas, por medio de las herramientas del *software Geogebra 3D*.

Ítem (a)

Abra el archivo: *Superficie_S.ggb*

a) Digite en la *Barra de Entrada* la ecuación de la superficie $S: \frac{y-12}{-12} = \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z-4)^2}{16}$

El software Geogebra no grafica la superficie S . Vamos a representarla mediante cortes de S con planos paralelos a los planos coordenados por medio del comando *IntersecaCónica*.

Se pide realizar los siguientes cortes:

T1: Corte de S con el plano XY

T4: Corte de S con el plano $y = 4$

T2: Corte de S con el plano YZ

T5: Corte de S con el plano $y = 8$

T3: Corte de S con el plano XZ

¿Qué curvas se obtienen?

En este ítem, los estudiantes representarán gráficamente la superficie del paraboloides en el registro gráfico por cortes, mediante curvas abiertas (parábolas) y curvas cerradas (elipses) con las herramientas del *software Geogebra 3D*, y posteriormente, identificarlas.

Se les proporcionará a los estudiantes un archivo en Geogebra 3D, en la cual se presenta únicamente la Vista Gráfica 3D visible y los ejes cartesianos X , Y , Z rotulados. Los demás elementos que Geogebra 3D presenta por defecto, han sido ocultados ya que no se utilizarán.

Análisis a priori del ítem (a)

Esperamos a priori que los estudiantes abran el archivo proporcionado, y en la *Barra de Entrada* digiten la ecuación que representa algebraicamente a la superficie S . Podría ocurrir que los estudiantes ingresen erróneamente los términos de la ecuación, por lo cual se les

recomendará que utilicen paréntesis en el caso de términos negativos, específicamente en el denominador del primer miembro (el binomio en la variable cartesiana y).

Seguidamente, se espera que los estudiantes, según lo indicado en la ficha (ver anexo), grafiquen los cortes de la superficie S con los cinco planos indicados en la Vista Gráfica 3D, al digitar la sintaxis en la *Barra de Entrada* de cada corte, de la siguiente manera:

T1: `IntersecaCónica[z=0, S]`

T2: `IntersecaCónica[x=0, S]`

T3: `IntersecaCónica[y=0, S]`

T4: `IntersecaCónica[y=4, S]`

T5: `IntersecaCónica[y=8, S]`

En la figura 66, mostramos las representaciones gráficas de las curvas resultantes

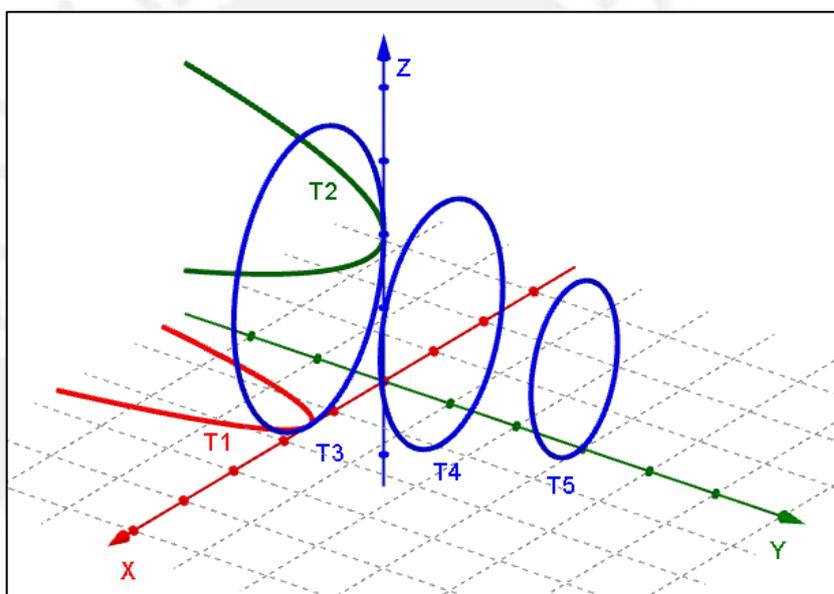


Figura 66. Cortes de S con los planos XY , YZ , XZ , $y = 4$, $y = 8$

Esperamos que los estudiantes, con los conocimientos relativos a las modificaciones en la Vista Gráfica 3D u otros no contemplados en nuestro análisis a priori de la actividad 2, realicen modificaciones posicionales de traslación y rotación para identificar la forma de cada curva obtenida.

No se requiere realizar tratamientos en el registro algebraico para validar las conjeturas producto de las aprehensiones perceptivas de los estudiantes, dicha labor ya se ha revisado en la actividad 1 (lápiz y papel) y han probado con eficacia que lo pueden realizar sin inconveniente alguno, por lo cual esperamos que las curvas sean identificadas de la siguiente manera:

T1 y T2: Representaciones de parábolas.

T3, T4 y T5: Representaciones de elipses.

De esta manera, creemos que los estudiantes pueden percibir que el vértice del paraboloides no está ubicado en el origen de coordenadas, debido al crecimiento de las dimensiones de las representaciones gráficas de las elipses a medida que los planos de corte se alejan del origen de coordenadas en dirección del semieje negativo del eje de ordenadas Y, lo cual indica que la superficie se extiende en esa dirección, entre otras consideraciones.

Dado que las estudiantes Jacinta y Alexandra trabajaron juntas la actividad 3 y en la misma máquina, el análisis será realizado en forma conjunta, con excepción de diferencias en los procedimientos de cada ficha, en cuyo caso el análisis será realizado de forma individual.

Análisis a posteriori del ítem (a)

Estudiantes Jacinta y Alexandra

Ambas estudiantes brindaron las mismas respuestas en este ítem, no obstante, el ingreso de la ecuación del paraboloides en la Barra de Entrada se realizó de forma incorrecta, por lo cual graficaron otra superficie S' , tal como se muestra en la figura 67. Cabe indicar que las estudiantes activaron la Vista algebraica, lo cual no interfirió en el desarrollo de la actividad.

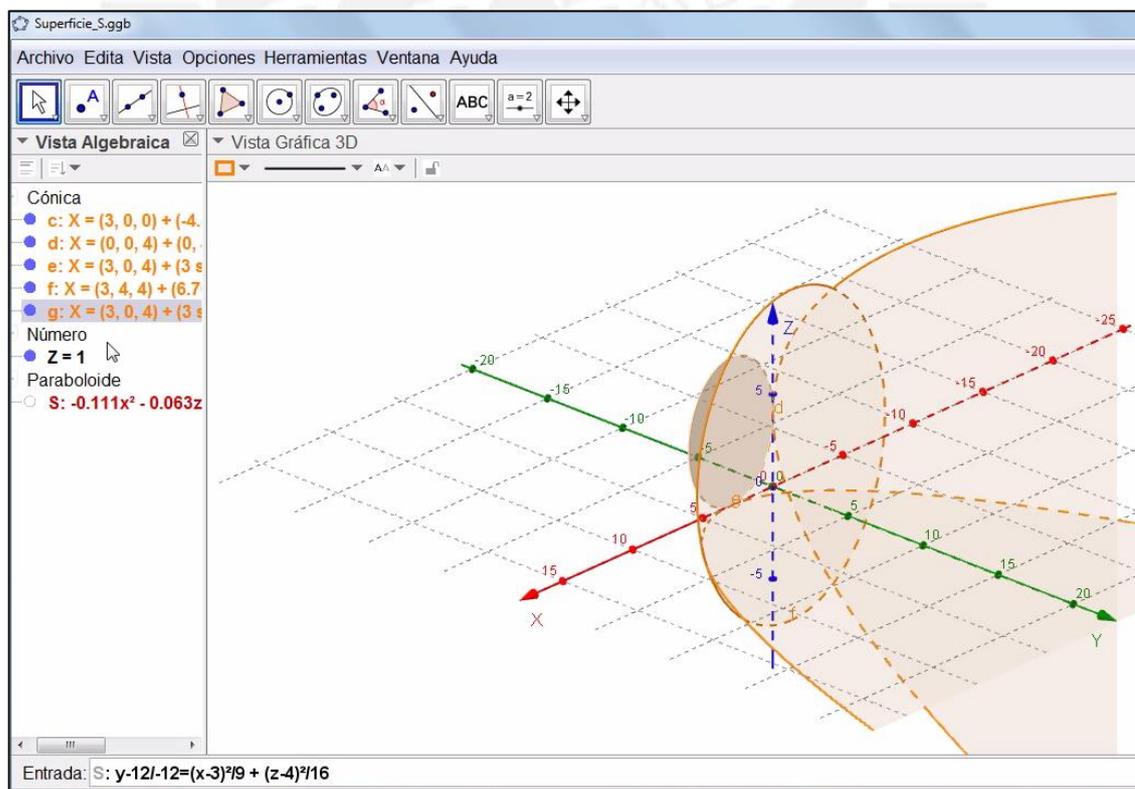


Figura 67. Cortes de S' con los planos XY, YZ, XZ, $y=4$

Dado que $-12/-12 = 1$, el paraboloides graficado por los estudiantes fue representado por:

$$S': y+1 = \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z-4)^2}{16}$$

por lo cual fue necesario modificar la sintaxis de la ecuación de la superficie S , en particular, el término del primer miembro de la ecuación por medio de paréntesis, tal como se había previsto en nuestro análisis a priori.

Cabe añadir que las representaciones de los cortes obtenidos por los estudiantes no han sido rotulados debidamente, por lo que el *software Geogebra 3D* los nombró por defecto como c , d , e , f , g , tal como se aprecia en la vista algebraica (ver figura 67). El corte g (correspondiente a la curva $T5$) es el mismo que el corte e (correspondiente a la curva $T3$), ya que los estudiantes realizaron nuevamente el corte de S con el plano $y = 0$, no con $y = 8$.

Las estudiantes se percataron de la falta de un corte, cerraron el archivo y lo reabrieron, e ingresaron esta vez la ecuación del paraboloides en la forma correcta, tal como mostramos en la figura 68. No obstante, el corte de S con el plano $z = 0$ se realizó dos veces.

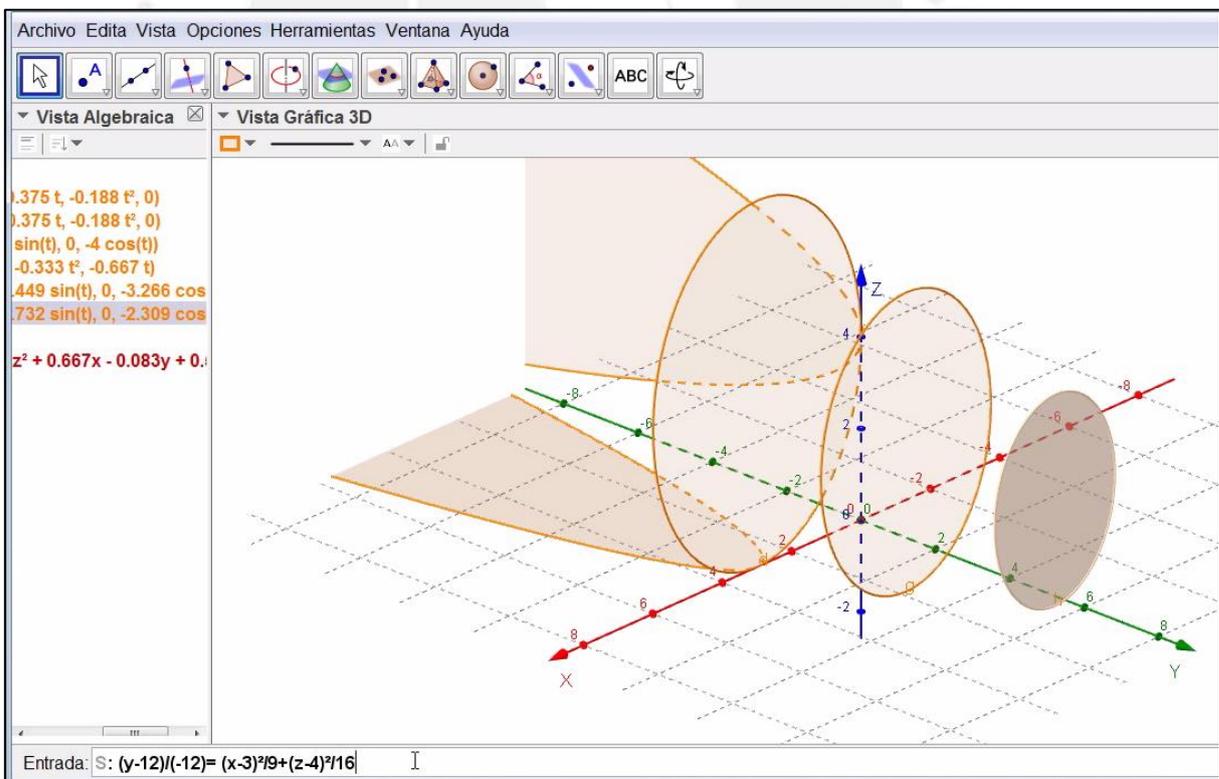


Figura 68. Cortes de S con los planos indicados realizado por las estudiantes.

En la figura 69, mostramos las formas de las curvas $T1$, $T2$, $T3$, $T4$ y $T5$, identificadas por las estudiantes se muestran.

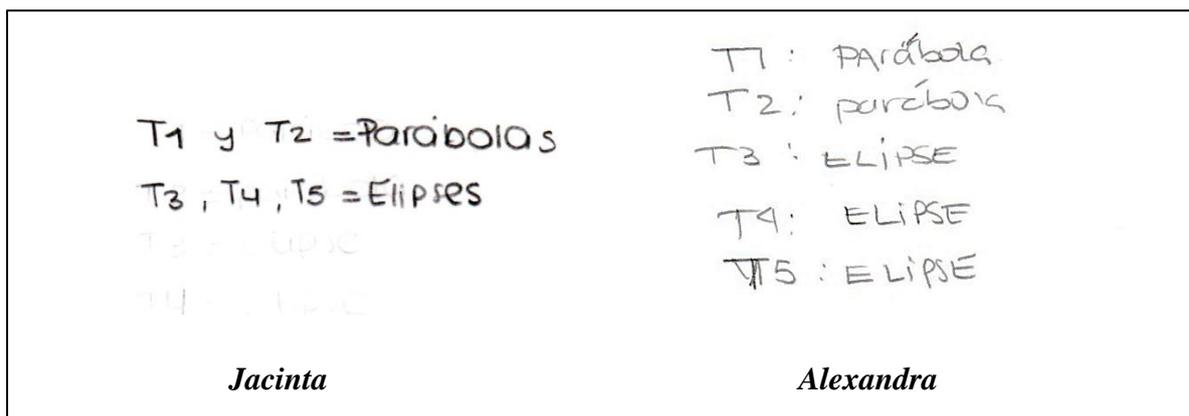


Figura 69. Identificación de los cortes por las estudiantes.

En esta actividad, las variables visuales del paraboloide han sido identificadas por los estudiantes en forma correcta, tal como se había previsto en el análisis a priori de este ítem.

Ítem (b)

En este ítem, pretendemos que los estudiantes determinen las representaciones algebraicas de los planos de corte del paraboloide, representen gráficamente parábolas que pasen por los vértices de las curvas cerradas (elipses), y comprueben que efectivamente, las curvas abiertas y cerradas se intersectan en puntos de la superficie. Los estudiantes deben representar en la Vista Gráfica 3D dichos cortes y explicar cómo los obtuvieron.

b) Determine los centros y vértices de las curvas cerradas, mediante los comandos:

Vértices[<Cónica>]

Centro[<Cónica>]

Si se pretende realizar cortes de S con 2 planos paralelos a los planos coordenados, para obtener curvas abiertas que pasen por los vértices de las curvas cerradas, ¿cuáles serían las ecuaciones de dichos planos? Explique y grafique dichos cortes.

Análisis a priori del ítem (b)

Pensamos a priori que, los estudiantes, de acuerdo a sus conocimientos adquiridos en el curso Matemáticas 1, conocen anticipadamente que la representación gráfica de la parábola presenta un solo vértice y no posee centro, por lo que no tendrá sentido utilizar el comando del Geogebra “Centro [<Cónica>]” para las representaciones de las parábolas, por esa razón, sólo se pide los elementos de las curvas cerradas. Creemos además que, los estudiantes, al utilizar el comando del Geogebra “Vértices [<Cónica>]” para una elipse, esperan obtener sólo dos vértices, sin embargo el *software Geogebra* también considera a los puntos extremos del eje menor de una elipse como vértices, por lo cual dicho comando les dará las

representaciones de cuatro puntos en lugar de dos. Esperamos que los estudiantes digiten las siguientes sintaxis en la Barra de Entrada, para obtener los centros y vértices de las curvas cerradas obtenidas en el ítem (a):

Centro[T3]

Centro[T4]

Centro[T5]

Vértices[T3]

Vértices[T4]

Vértices[T5]

Esperamos así mismo que, las representaciones algebraicas de los planos de corte con la superficie S que generan parábolas que pasen por los vértices y extremos del eje menor de cada elipse, sean factores que anulen cada término cuadrático de la ecuación del paraboloido, igualado a cero. Dichas ecuaciones son: $x = 3$ y $z = 4$, y para representar en el registro gráfico dichos cortes, esperamos que los estudiantes ingresen en la Barra de Entrada las siguientes sintaxis:

IntersecaCónica[x=3,S]

IntersecaCónica[z=4,S]

La explicación solicitada puede realizarse de diversas maneras, por ejemplo, sería mostrar mediante la *Barra de Estilo*, opción *valor*, las coordenadas de uno de los vértices de la representación de alguna elipse, e identificar cuál de las representaciones de los tres planos paralelos a los planos coordenados que pasan por dicho punto es el que genera la representación de una de las parábola pedidas. El proceso es análogo al analizar uno de los extremos del eje menor de alguna de las representaciones gráficas de las elipses para determinar el plano de corte que generaría la representación gráfica de la otra parábola.

Análisis a posteriori del ítem (b)

Ambas estudiantes obtuvieron las coordenadas de los vértices y centros de las elipses, y se evidencia que utilizaron la sintaxis descrita en nuestro análisis a priori, tal como podemos apreciar en la figura 70, la cual corresponde a una imagen de la captura de video realizado.

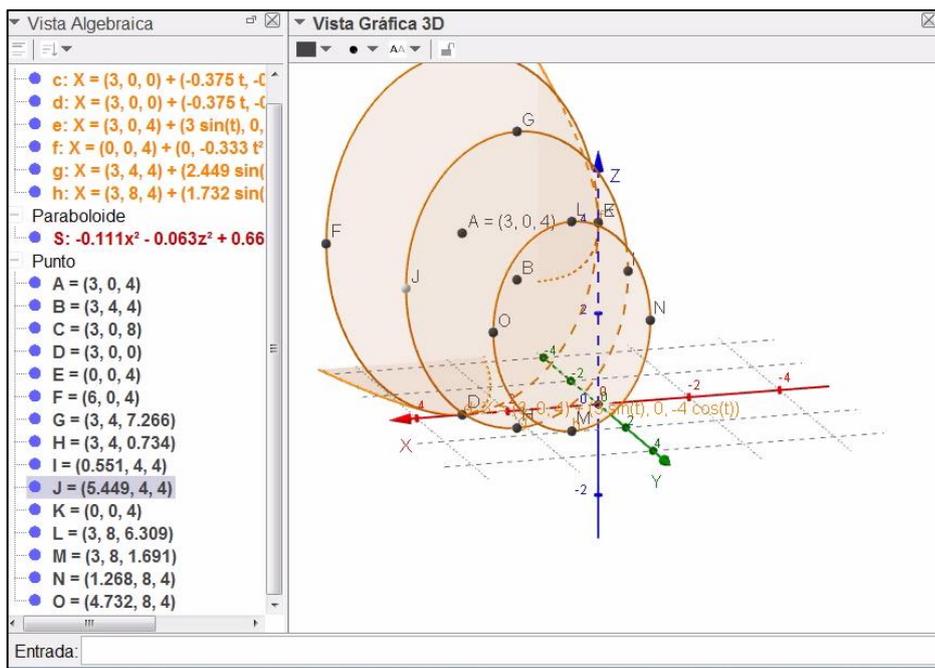


Figura 70. Vértices y centros de las elipses realizado por las estudiantes.

Tal como se observa en la figura 70, los estudiantes no tuvieron necesidad de utilizar las opciones de la Barra de Estilo para determinar las coordenadas de cada punto, ya que al tener visible la *Vista algebraica* tenían toda esa información disponible, lo cual no estaba contemplado en nuestro análisis a priori.

Estudiante Jacinta

En la figura 71 se muestra el procedimiento realizado por Jacinta para obtener las representaciones algebraicas de los planos de corte pedidos.

$$z=4 \quad \frac{y-12}{-12} = \frac{(x-3)^2}{a} + \frac{(z-4)^2}{16}$$

Señalan $x=4$ y $x=3$ ya que al sustituir estos puntos sale 0 y ahí tenemos, obtenemos dichos planos.

Figura 71. Procedimiento del ítem (b) realizado por Jacinta.

Tal como se observa en la figura 71, Jacinta obtiene expresiones que anulan los términos cuadráticos de la ecuación del paraboloides, tal como se había previsto en nuestro análisis a priori, sin embargo, no se detalla una explicación consistente del porqué de su elección de dichas expresiones, por lo cual pensamos que algún ejercicio o tarea tratado previamente en clase, la llevó a tomar esa decisión.

Estudiante Alexandra

La estudiante Alexandra indicó las representaciones algebraicas de los planos solicitados, tal como se muestra en la figura 72, sin embargo no realiza tratamiento alguno en el registro algebraico para justificar su elección, lo cual si fue realizado por Jacinta.

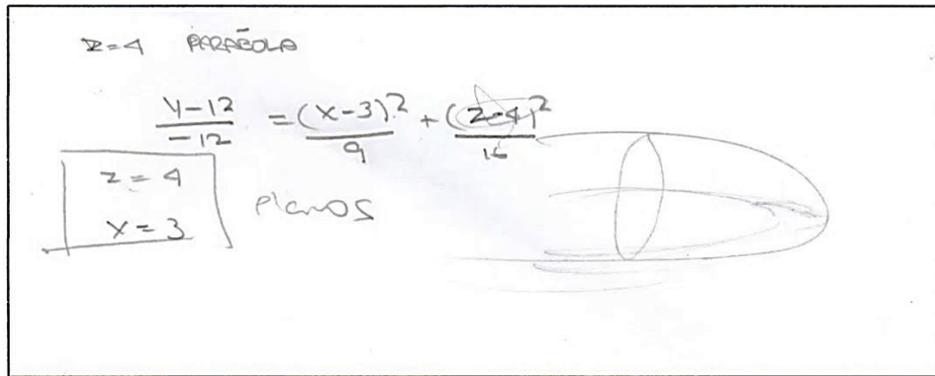


Figura 72. Procedimiento del ítem (b) realizado por Alexandra.

En el procedimiento realizado por Alexandra (ver figura 72), se observa el bosquejo de dos curvas abiertas que intersectan a una curva cerrada, por lo cual pensamos que Alexandra trató de explicar la situación en forma gráfica, por lo cual creemos que, tanto Jacinta como Alexandra estuvieron en una etapa inicial del desarrollo de su aprehensión discursiva.

Previo a la gráfica de las parábolas pedidas, ambas estudiantes representaron gráficamente los planos $z = 4$ y $x = 3$, tal como podemos observar en la figura 73.

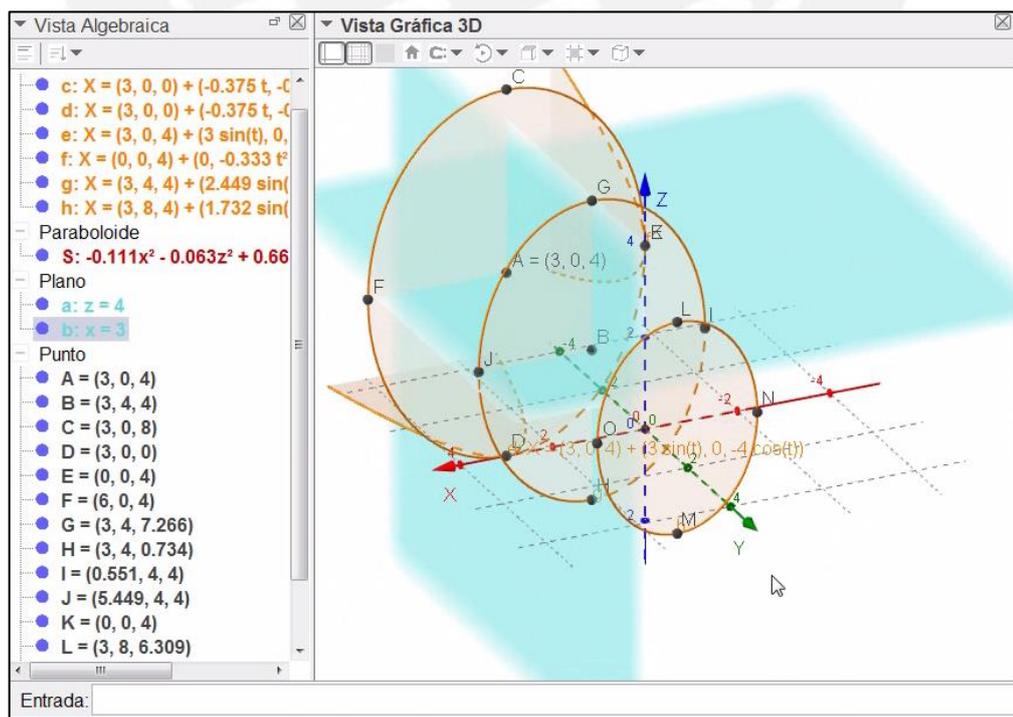


Figura 73. Gráfico de los planos $z=4$, $x=3$, realizado por Jacinta y Alexandra.

Además, se evidencia que los estudiantes han realizado modificaciones posicionales de tipo rotación de la Vista Gráfica 3D, para comprobar que las representaciones de los planos $x = 3$ y $z=4$, pasan por las representaciones de, los vértices y extremos del eje menor, respectivamente.

En la figura 74 podemos ver que la Vista Gráfica 3D ha sido rotada para posicionar la representación gráfica del plano $z = 4$ de canto, de tal manera que los extremos del eje menor de todas las elipses se proyecten en línea recta, lo que valida su elección, por lo cual pensamos que la justificación pedida se realizó en el software Geogebra 3D, pero no se indicó de manera escrita en la ficha de actividades.

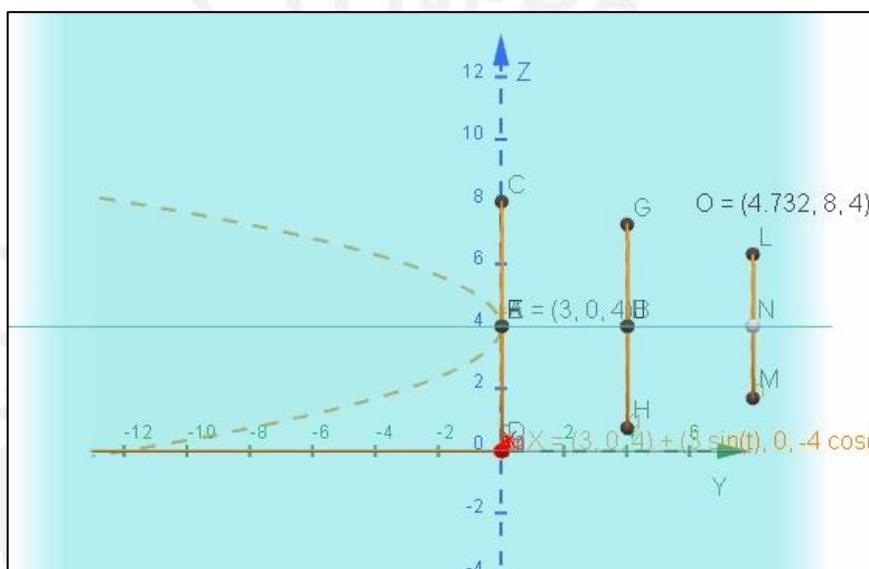


Figura 74. Plano $z=4$ proyectado como un segmento, realizado por Jacinta y Alexandra.

Ninguna de las estudiantes graficó los cortes de la superficie S con los planos $z = 4$, ni $x = 3$, es decir, las parábolas. Dada la falta de información para explicar el motivo por el cual no graficaron dichos cortes, suponemos que no fue necesario ya que era “evidente”. No obstante, dichas parábolas son representadas gráficamente en el ítem (c) (ver figuras 76 y 78).

En este ítem, se evidencia que Jacinta y Alexandra desarrollaron sus apprehensiones *perceptiva* al identificar las ecuaciones de los planos paralelos a los planos coordenados y que pasan por el centro y los vértices o extremos del eje menor de cada elipse, *operatoria* al realizar modificaciones posicionales de rotación en la Vista Gráfica 3D, *secuencial* al realizar tratamientos en el registro gráfico mediante los comandos *Vértices* y *Centro* de Geogebra 3D para obtener los centros y vértices de las elipses, y en menor medida la apprehensión *discursiva* ya que se evidenció una intencionalidad para justificar la elección de un plano determinado a partir de la ecuación del paraboloides y mediante el software Geogebra 3D.

Ítem (c)

c) Trace la recta que pasa por los centros de las curvas cerradas mediante la herramienta *Recta*. ¿Dicha recta y las curvas abiertas graficadas en el paso anterior se intersectan?

¿Qué representan la recta y el punto de intersección obtenido para la superficie?

¿Podría interpretar el significado del término negativo (-12) que aparece en el denominador del primer miembro de la ecuación de la superficie S ?

El objetivo de este ítem, es lograr que los estudiantes identifiquen las siguientes variables visuales del paraboloides: el eje de la superficie y el vértice del paraboloides, por medio de una secuencia indicada para realizar tratamientos en el registro gráfico, representar gráficamente dichas variables visuales e identificar en el registro algebraico, sus correspondientes unidades significativas

Las ecuaciones canónicas de las secciones cónicas (primera y segunda ecuación), según la forma y términos involucrados en cada ecuación, permiten identificar por percepción las coordenadas de centros, vértices, ejes focales, así como la orientación de la parábola por medio del signo del parámetro p . En el caso del estudio de las superficies cuadráticas, los estudiantes no tienen modelos para reconocer la forma de la gráfica de la superficie, ni las representaciones algebraicas de su centro, vértices, ejes de simetría, etc.

Según Lehmann (1953) “la ecuación general de una cuádrica ocupa entre las superficies, en Geometría analítica del espacio, un lugar análogo al ocupado entre las curvas planas” (p. 425). Así por ejemplo, el parámetro p de la representación algebraica de una parábola indica la orientación de su gráfica, por lo que creemos que la representación algebraica del paraboloides, expresado en una forma canónica, debe brindar información sobre la orientación de la gráfica de la superficie, y mediante este ítem, por medio del *software Geogebra 3D*, pretendemos construir significados en los estudiantes.

Análisis a priori del ítem (c)

Pensamos a priori que, Jacinta y Alexandra, de acuerdo a sus conocimientos previos, conocen que una recta se define por dos puntos de paso, y dado que se han graficado tres curvas cerradas (elipses), bastará con representar la recta que pase por los centros de las representaciones de dos elipses, para lo cual los estudiantes deberían utilizar la Herramienta

Recta  y seleccionar como puntos de paso los centros de dos elipses cualesquiera entre las curvas cerradas representadas por $T3$, $T4$ o $T5$.

En la figura 75, la representación de la recta L pasa por los centros representados por los puntos M y O de las elipses representadas por $T3$ y $T5$, respectivamente. Dado que los puntos representados por $M(3, 0, 4)$, $N(3, 4, 4)$, $O(3, 8, 4)$ poseen la misma primera y tercera componente, dichos puntos están en línea recta, es decir, la representación de la recta L pasa también por el punto N , el cual es centro de la elipse representada por $T4$.

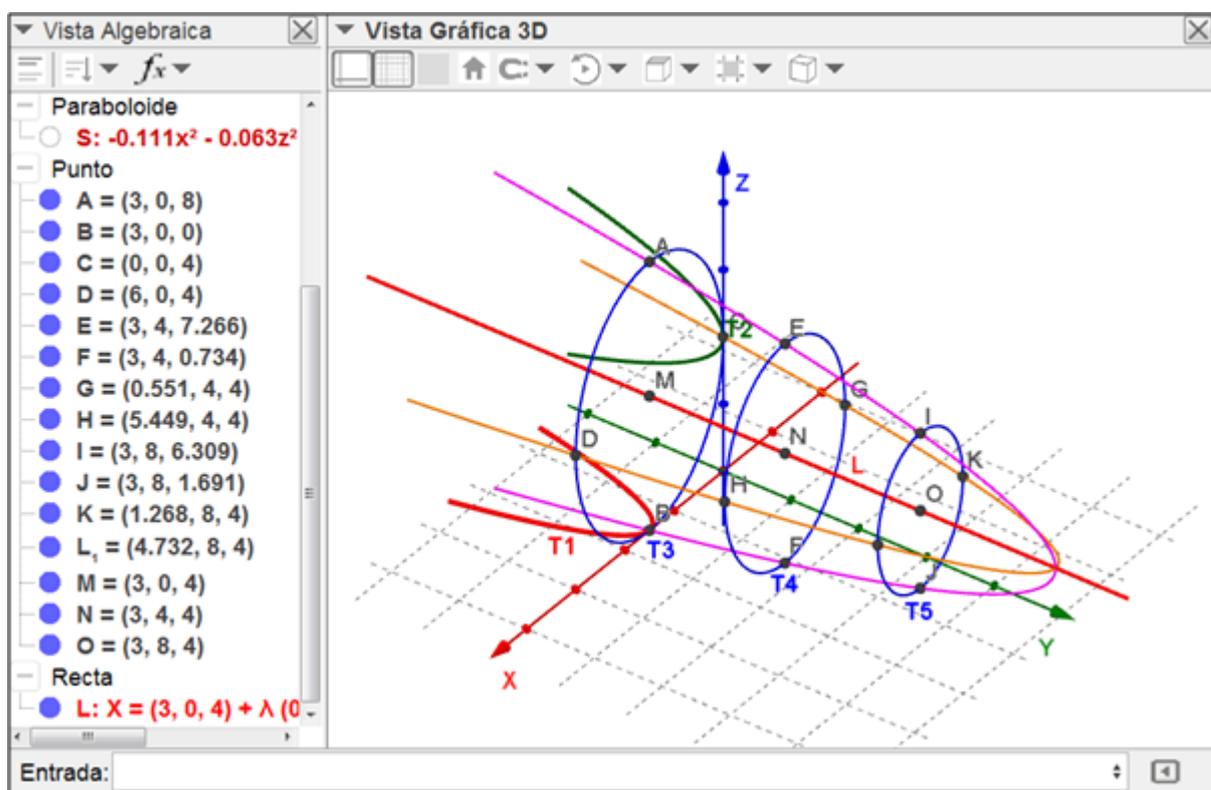


Figura 75. El eje del paraboloid (recta L).

Las representaciones de las parábolas que pasan por los vértices de cada elipse, se intersectan en un mismo punto el cual también es punto de paso de la representación de la recta L . De esta manera, se concluye que la representación de la recta L pasa por los centros de todas las elipses que se obtengan mediante cortes de S con planos paralelos al plano XZ , y dicha recta constituye el Eje de la superficie. El punto de intersección de las representaciones de las parábolas con la recta L viene a representar el vértice de la superficie. Así mismo, el término negativo (-12) explica la orientación del paraboloid hacia el semieje negativo del eje Y .

Análisis a posteriori del ítem (c)

Estudiante Jacinta

En la figura 76, mostramos el procedimiento descrito por Jacinta en la ficha de actividades. Como podemos observar, Jacinta erróneamente denominó a la expresión $x = 3$ como la representación algebraica de la recta \overline{PQ} , dado que dicha expresión corresponde a la ecuación de un plano.

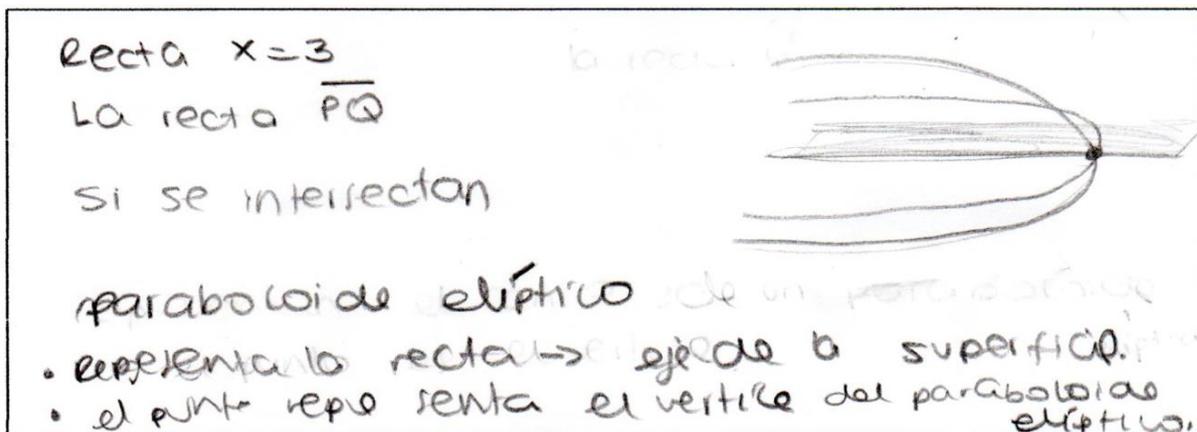


Figura 76. Eje y vértice del paraboloides identificado por Jacinta.

Observamos además que, Jacinta realizó una representación gráfica de la recta \overline{PQ} el cual, según Jacinta, es el “eje de la superficie”, la cual pasa por la intersección de las representaciones de dos parábolas. Dicho punto, el cual no está identificado, según Jacinta “representa el vértice del paraboloides elíptico” (ver figura 76).

En la figura 77 observamos la interpretación gráfica del término negativo (-12) en la ecuación del paraboloides, realizado por Jacinta.

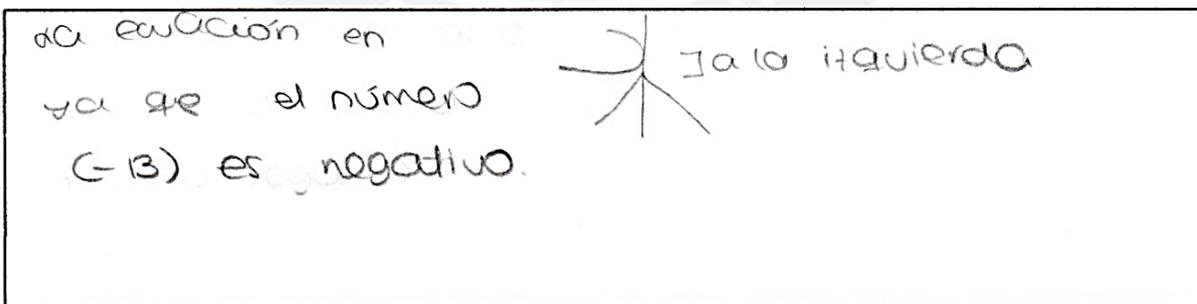


Figura 77. Interpretación gráfica del término (-12) realizado por Jacinta.

Podemos notar que Jacinta graficó sólo una parábola cuya orientación representa la orientación de toda la superficie del paraboloides elíptico. Creemos que la representación de dicha parábola, puede ser cualquiera que haya sido graficada en los ítems anteriores, y la

indicación “a la izquierda” hace suponer la analogía entre el término negativo (-12) y el valor negativo del parámetro p de la parábola.

Estudiante Alexandra

En la figura 78, mostramos el procedimiento realizado por Alexandra.

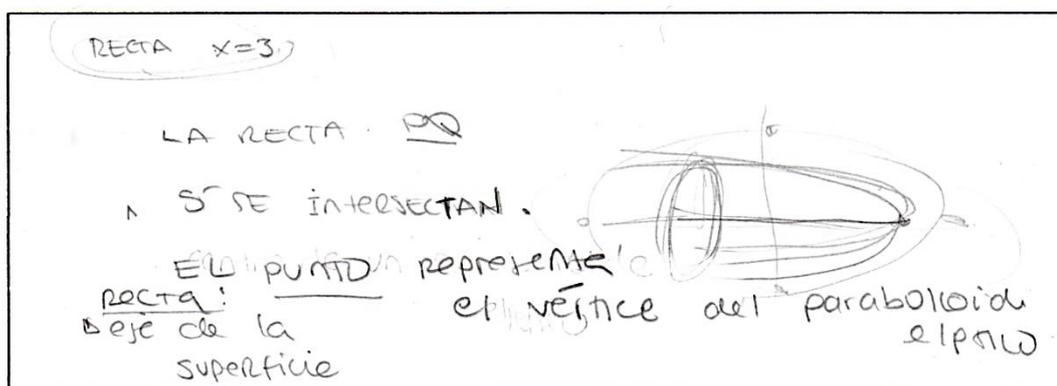


Figura 78. Eje y vértice del paraboloides identificados por Alexandra.

Como podemos observar en la figura 78, el procedimiento descrito por Alexandra es idéntico al realizado por Jacinta, con la única diferencia que Alexandra incluyó en su representación gráfica un corte elíptico, lo cual no realizó Jacinta, ya que la representación de dicha recta \overline{PQ} debía pasar por dos puntos: el punto de intersección de las representaciones de las parábolas que pasan por los vértices y extremos del eje menor de las elipses, y uno de los centros de las elipses.

En la figura 79, mostramos la interpretación gráfica del término (-12) realizado por Alexandra.

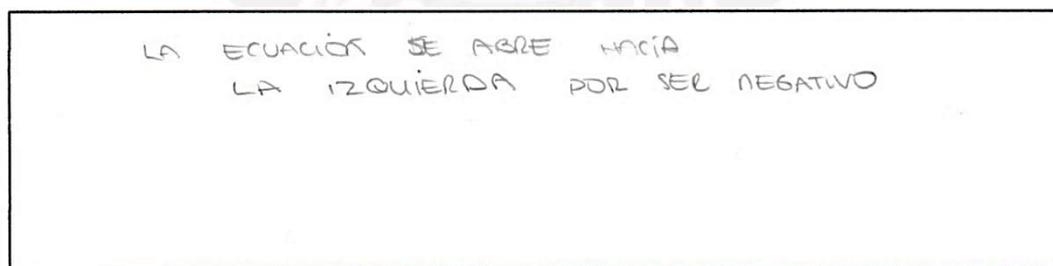


Figura 79. Interpretación gráfica del término (-12) realizado por Alexandra.

A diferencia de Jacinta, Alexandra sólo indicó que la ecuación (debió decir la superficie) se abre hacia la izquierda por el signo negativo del término (-12). No obstante, al igual que Jacinta, la referencia “izquierda” indicada por Alexandra no debe ser tomado en forma absoluta, ya que los ejes cartesianos pueden rotar.

En ese sentido, creemos que la representación gráfica de las variables visuales *Eje* y *Vértice* del paraboloides está mejor comprendido por Alexandra que por Jacinta ya que, para representar una recta se requieren representar gráficamente dos puntos de paso los cuales, según Duval (1995b) son las variables visuales de la recta, el mismo criterio se aplica para representar gráficamente las parábolas, ya que Jacinta solo consideró el vértice y ningún punto de paso.

Resultados de la Parte Experimental

Durante el transcurso de la parte experimental de nuestra investigación, pudimos comprobar que el marco teórico de los aspectos de Visualización de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), nos proporcionó las herramientas idóneas para el análisis de resultados realizados por los sujetos de investigación, tales como sus fortalezas, debilidades y dificultades que se presentaron en las actividades.

A medida que se llevó a cabo la experimentación, encontramos en el camino diversos factores de carácter dinámico que afectaron notablemente en el desempeño y la calidad de nuestros instrumentos de recolección de datos, y que no estuvieron contemplados inicialmente, entre los cuales destacan sin lugar a dudas el propio software Geogebra 5.0, ya que al estar en una versión inicial y en vías de desarrollo, se presentaron algunas limitaciones en cuanto a su aplicación en nuestro trabajo. Creemos que en las próximas actualizaciones del software, dichas limitaciones estarán mejoradas y las bondades del software Geogebra serán mayores para futuras investigaciones.

En la **actividad 1** la cual consistió en bosquejar a lápiz y papel la representación gráfica de un paraboloides dada su ecuación cartesiana, es decir, realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico mediante una secuencia didáctica, permitió en primer lugar seleccionar a los dos estudiantes que participarían en nuestra investigación, y analizar la coordinación entre los registros algebraico y gráfico del paraboloides mediante sus variables visuales de dimensión menor ya que, según Duval (1995b), permiten representar un conjunto más complejo y de difícil acceso hacia el estudiante el cual, en este caso, es una superficie cuádrica. El problema radica en el tratamiento de representaciones de objetos bi-dimensionales hacia un entorno tri-dimensional, el cual en nuestro estudio, consiste en una modificación posicional de tipo rotación de los ejes cartesianos.

Los tres objetivos específicos de investigación se han logrado por medio de esta actividad. Las variables visuales del paraboloides tales como curvas abiertas, curvas cerradas, vértice y puntos de intersección entre curvas abiertas y cerradas, han sido identificadas por los estudiantes, y realizaron sin inconveniente alguno la conversión del registro algebraico al registro gráfico de cada uno de ellos. Sin embargo, el error cometido por la estudiante Alexandra durante la transcripción de un término de la ecuación del paraboloides, no le permitió articular sus aprehensiones perceptiva y discursiva, motivo por el cual ella, en esta actividad en particular, no visualizó al paraboloides.

La **actividad 2**, en contraste con la actividad 1, buscaba realizar el sentido inverso de conversión: del registro gráfico al registro algebraico, ya que según Duval (1995) el aprendizaje, en caso particular de la geometría, se da cuando el estudiante realiza la conversión en al menos dos registros de representación semiótica distintos, pero no se indica el sentido de dirección de dicha conversión. En la revisión de los dos textos de consulta del curso Matemáticas I cursados por los estudiantes objetos de nuestra investigación, los dos problemas respecto al paraboloides, resueltos por los autores (un problema en cada texto), sólo presentaron la conversión del registro algebraico al registro gráfico y no en el sentido inverso.

Por ello, nuestra propuesta consiste en, por medio de las herramientas de modificación del software Geogebra en la Vista Gráfica 3D, diseñar una secuencia didáctica de actividades que permitan a los estudiantes desarrollar sus aprehensiones en el registro gráfico, para que puedan identificar las variables visuales representadas (dos circunferencias) u obtenidas por tratamientos en el registro gráfico (dos parábolas), y así realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico, y mediante tratamientos en el registro algebraico, obtener la ecuación en tres variables la cual representa al paraboloides.

Sin embargo, pudimos notar que los dos estudiantes presentaron dificultades en el reconocimiento de las variables visuales, las cuales permiten establecer e identificar la forma de la ecuación canónica de la parábola, lo cual impidió lograr la conversión en el sentido deseado entre los registros gráfico y algebraico. Nuestro interés no era lograr que los estudiantes resuelvan el problema, era identificar las causas que impedían lograr dicha tarea. Este último aspecto se logró concretar exitosamente, por lo que podemos afirmar que los resultados de la Actividad 2 permitieron primero, responder una interrogante que fue la que dio origen a nuestra investigación: ¿por qué los estudiantes tienen dificultades para graficar una superficie cuádrica?, y segundo, retroalimentar la secuencia de actividades ya que, al ser

la dificultad presente en los estudiantes la percepción de las variables visuales y sus correspondientes unidades significantes, la actividad siguiente tuvo que ser rediseñada para abordar en forma directa dichos elementos y por medio del software Geogebra 3D.

El desempeño de los estudiantes en la realización de la **actividad 3** fue mejor y óptima, ya que, al tener un mejor conocimiento del objeto matemático paraboloides y de las herramientas del software Geogebra 3D, pudieron relacionar elementos aprendidos en la geometría analítica plana, y cómo estas nociones se trasladan a la geometría analítica espacial, en nuestro caso al estudio del paraboloides.

Para perspectivas futuras, podemos sugerir en la actividad 3 que, la representación de los cortes perpendiculares al eje del paraboloides, los cuales se realizan con planos paralelos entre sí, sean realizados con las herramientas *deslizador* y la función *Rastro* de Geogebra, para de esta forma, aprovechar la potencialidad del software Geogebra en representaciones dinámicas de las variables visuales que ayudan a representar al paraboloides, y por extensión, a otro tipo de superficies.

La parte experimental de la presente investigación, puede ser realizada en otros niveles educativos: estudiantes de Ciencias e Ingeniería, estudiantes de Matemática Pura y Educación, Formación de Docentes, entre otros. Además, en futuras investigaciones, el eje del paraboloides podría no ser paralelo a ninguno de los ejes coordenados, por lo cual el software Geogebra 3D podría también ser de gran ayuda para las representaciones gráficas de la superficie y sus correspondientes variables visuales, del mismo modo, los planos de corte podrían no ser paralelos a los planos coordenados.

CONSIDERACIONES FINALES

El estudio de visualización del paraboloides, como está expreso en el título de la presente tesis es un *proceso*, ya que el marco teórico de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) no contempla las aprehensiones ni modificaciones en el registro gráfico del paraboloides, por ello, identificar dichas aprehensiones ha sido uno de los objetivos específicos de investigación, el cual hemos logrado concretar ya que permitió analizar cómo se desarrollan las aprehensiones en los estudiantes para que, mediante la articulación entre ellas, puedan visualizar el objeto matemático paraboloides. Cabe indicar que, el estudio de las aprehensiones y modificaciones realizado por Duval, está dirigido a la rama de la Geometría euclidiana y en el registro figural de las figuras geométricas, por lo que hemos tomado el ejemplo de la investigación realizada por Ingar (2014), quien adaptó las modificaciones y aprehensiones al registro gráfico del objeto matemático valores máximos y mínimos locales de funciones reales de dos variables reales, y por medio del *software Mathematica*.

En el análisis preliminar de nuestro estudio, según la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), teníamos la firme convicción que la utilización de los recursos tecnológicos, en nuestro caso particular el *software Geogebra*, puede permitir a los estudiantes realizar transformaciones en las representaciones de los diversos objetos matemáticos, en particular las superficies cuadráticas, ya que según Duval (1995) los objetos matemáticos no son accesibles ni manipulables por nuestros sentidos. Por ello, la elección de un software de geometría dinámica de uso libre como el Geogebra, en su versión 5.0, la cual incluye la Vista Gráfica 3D, implicó un conjunto de situaciones y decisiones, las cuales tuvieron como común denominador lograr alcanzar los objetivos específicos de investigación, los mismos que sentaron las directrices para la presente investigación, en particular las actividades de la etapa experimental.

Los tres objetivos específicos de investigación se lograron concretar por medio de las actividades de la experimentación:

Identificar las variables visuales del paraboloides y sus correspondientes unidades significantes. En la sección 1.3, Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, hemos identificado las variables visuales del paraboloides de acuerdo a su dimensión, y sus correspondientes unidades significantes y simbólicas expresadas en valores numéricos, signos, relaciones de igualdad o desigualdad y expresiones algebraicas, lo cual nos

permitió tener el fundamento teórico para el diseño de nuestras actividades de la experimentación, en las cuales en cada una de ellas han sido identificadas dichas variables visuales. Así mismo, hemos establecido las variables didácticas para cada actividad, según la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), las cuales nos permitieron controlar el alcance de cada situación propuesta. En las actividades, las estudiantes Jacinta y Alexandra, han reconocido las variables visuales (parábolas) y curvas cerradas (circunferencias y elipses), así como las variables visuales para poder representarlas gráficamente (vértices, centros, puntos de paso, planos a los cuales pertenecen, etc.), los cuales les permitieron realizar transformaciones (tratamiento y conversión) en los registros lenguaje natural, algebraico y gráfico del paraboloides.

En particular, el análisis de la actividad 3 permitió comprender la correspondencia entre las unidades significantes de la variable visual parábola, las cuales son estudiadas en la geometría analítica plana (vértice, eje focal, parámetro), y la ecuación de la superficie en tres variables, dada la analogía entre las unidades significantes del paraboloides (vértice, eje de la superficie, orientación de la superficie), por ejemplo, el *signo* del parámetro de una parábola reconocido en su ecuación cartesiana, tiene similitud con el signo del denominador del binomio de la variable que no está elevada al cuadrado en la ecuación del paraboloides, ya que ambos *deben ser iguales* y este hecho se comprueba en la Vista Gráfica 3D del software Geogebra, lo cual favorece al paso de representaciones de objetos en 2D a 3D, y viceversa.

Identificar las aprehensiones en el registro gráfico que desarrollan los estudiantes. De manera análoga al objetivo específico anterior, previamente en el estudio de los aspectos metodológicos de la presente investigación se identificaron las aprehensiones en el registro gráfico del paraboloides: perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva. En el análisis de cada una de las actividades de la experimentación, hemos identificado las aprehensiones en el registro gráfico del paraboloides: En las actividades 1 y 2 se han desarrollado las aprehensiones perceptiva (reconocimiento de las variables visuales curvas abiertas y cerradas), secuencial (al describir los pasos necesarios para graficar u obtener la ecuación de una determinada variable visual) y operatoria (al realizar tratamientos en el registro gráfico del paraboloides), las cuales se presentan de forma natural y simultánea, y no se evidencia que hayan sido descritas en un orden específico. En la actividad 3, además de las tres aprehensiones citadas, se desarrolló en menor intensidad la aprehensión discursiva, ya que se manifestó una intención por parte de las estudiantes de realizar demostraciones mediante un apoyo gráfico en sus fichas.

Analizar en el registro gráfico las articulaciones entre las aprehensiones que desarrollan los estudiantes. Según Duval (1995) e Ingar (2014), la articulación entre dichas aprehensiones es la visualización del objeto matemático estudiado, en nuestro caso el paraboloides. La actividad 1 realizada a lápiz y papel, la cual consideramos ser de carácter exploratorio respecto a conocimientos previos de los estudiantes en torno al bosquejo de la gráfica del paraboloides dada su ecuación cartesiana, nos permitió comprender los procesos cognitivos y mentales realizados por los estudiantes al representar el paraboloides en el registro gráfico por medio de sus variables visuales, así como las dificultades que impidieron realizar dicha labor, lo cual sucedió en el caso de la estudiante Alexandra ya que no logró articular sus aprehensiones perceptiva y operatoria, dado un error algebraico al copiar erróneamente los términos de la ecuación del paraboloides. Un fenómeno similar sucedió en el análisis de la actividad 2 mediada por el software Geogebra 3D, ya que ninguna de las estudiantes logró obtener la ecuación del paraboloides circular debido al no desarrollar la aprehensión perceptiva de la variable visual parábola, por ende no hubo visualización del paraboloides en dicha actividad en particular.

Al lograr los objetivos específicos de investigación, podemos afirmar que se logró concretar el objetivo general de investigación:

Analizar el proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura en una secuencia didáctica mediada por el Geogebra.

El análisis de las actividades de la experimentación se realizó mediante la confrontación entre el análisis a priori versus a posteriori de dichas actividades, de acuerdo a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

Al lograr el objetivo general de investigación pudimos responder la pregunta de investigación:

¿Cómo se realiza el proceso de visualización del paraboloides en estudiantes de Arquitectura en una secuencia didáctica mediada por el Geogebra?

De esta manera, hemos logrado comprender el proceso realizado por los estudiantes para graficar el paraboloides a partir de su representación algebraica, el cual es una de las competencias establecidas en los sílabos del curso Matemáticas 1 (cursado por las estudiantes Jacinta y Alexandra), así como las dificultades que se presentan al obtener la ecuación cartesiana a partir de su gráfica. A continuación presentamos las perspectivas futuras de nuestro trabajo.

Durante el desarrollo de la parte experimental, hemos percibido que los estudiantes tuvieron dificultades en reconocer las unidades significantes correspondientes a ciertas variables visuales, ya que se requirió un mayor esfuerzo cognitivo en desarrollar la aprehensión perceptiva para obtener distancias entre puntos del espacio, proyecciones y componentes de un punto en los ejes cartesianos, centro y punto de paso de una circunferencia en un plano distinto al plano XY , entre otros, lo cual afectó en el desempeño de los estudiantes, específicamente en el desarrollo de la actividad 2 mediada por el software Geogebra 3D.

Creemos que para futuras investigaciones en torno a superficies cuádricas representadas por medio de sus variables visuales, sería crucial e importante preparar actividades previas, además de una introducción al uso de herramientas y comandos del software Geogebra 3D, situaciones en las cuales los estudiantes deban resolver problemas relativos al cálculo e identificación de elementos de objetos tri-dimensionales representados en el registro gráfico, tales como puntos, recta, plano, y los lugares geométricos previamente estudiados en la geometría analítica plana, en distintos planos del espacio, con el fin de desarrollar la aprehensión perceptiva en un primer momento de aplicación, y luego la aprehensión operatoria en un segundo momento para nuestros propósitos, y en la medida del cumplimiento de dichas actividades tratar de lograr el desarrollo de la aprehensión discursiva en los estudiantes ya que, según nuestro criterio, exige una mayor demanda cognitiva y por consiguiente, un mayor logro en el aprendizaje.

El presente estudio se realizó con estudiantes de Arquitectura, ya que ellos cuentan con ambientes informáticos y laboratorios programados en el curso de Matemáticas 1; no obstante, en la revisión de antecedentes de investigación y nuestra propia experiencia, hemos verificado que el estudio de superficies cuádricas se trata en cursos de Matemática de las carreras de Ciencias e Ingeniería, tales como Matemáticas 3, Cálculo 3, Cálculo Multivariable, Análisis Matemático III, Matemáticas Básicas II, entre otros, por lo cual pensamos que el presente estudio de visualización del paraboloides podría también ser realizado en otras especialidades, y de manera prospectiva, con otros tipos de superficies cuádricas. Así mismo, creemos que es importante realizar un estudio de visualización de superficies dirigido a docentes de matemática de nivel universitario quienes enseñan estas nociones, y de esta manera reflexionar sobre la metodología utilizada por ellos.

En los aspectos didácticos del estudio del objeto matemático paraboloides mediante la revisión de dos textos de consulta del curso Matemáticas 1, hemos comprobado que la metodología

utilizada para la enseñanza de dicho tema se realiza mediante la conversión en un solo sentido: del registro algebraico al registro gráfico, y no en el sentido inverso ya que, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), no se indica que la conversión entre dichos registros debe ser realizado en ambos sentidos.

Apoyándonos en la importancia del estudio de superficies cuádricas en la Arquitectura según el estudio de Ibáñez (2004), creemos que la conversión del registro gráfico al registro algebraico es importante para los estudiantes de arquitectura, ya que en el proceso de planeamiento y diseño de formas estructurales, ellos cuentan únicamente con medidas geométricas (dimensiones de planta, altura, número de pisos/niveles, restricciones, etc.) para modelizar las formas solicitadas mediante levantamiento de planos y diseño de prototipos, modelos o maquetas, en nuestro caso el paraboloides, y en la práctica no se les brinda la ecuación de la superficie, son *ellos* quienes deben determinarlo.

En la actividad 2 de la experimentación, hemos diseñado una situación para abordar esta parte de la problemática, y fue justamente dicha actividad la que presentó mayor grado de dificultad en los estudiantes (Jacinta y Alexandra), ya que no habían tenido una experiencia previa con esa situación en particular: dada la gráfica, obtener la ecuación de la superficie, lo cual tampoco se presenta en los textos revisados. Creemos que, el presente estudio deja abierta la posibilidad para realizar investigaciones de tipo *Análisis de Textos* en torno al objeto matemático paraboloides y otros tipos de superficies cuádricas, con el fin de plantear situaciones en las cuales sea el estudiante quien determine las ecuaciones de superficies cuádricas y, de esta manera, logre visualizar dichos objetos matemáticos.

REFERENCIAS

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Boyer, C. (1968). *A History Of Mathematics*. Editorial Wiley. 2da ed., p. 521
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Université Louis Pasteur, I*. R. E. M. de Strasbourg, pp. 37- 64.
- Duval, R. (1995a). *Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings*. Université Louis Pasteur, I. R. E. M. de Strasbourg, pp. 142-157.
- Duval, R. (1995b). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Colombia, 2004.
- Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking*. Basic Issues for Learning. Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille. Recuperado de <http://pat-thompson.net/PDFversions/1999Duval.pdf>
- Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Representations and Mathematics Visualization. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cinvestav-IPN, Mexico, pp. 311-335.
- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *La Gaceta de la RSME*, 9.1, pp. 143-168. Recuperado de http://www.usc.es/dmle/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada, p. 74. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros>

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). *Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional*. *Revista PNA*, 9(2), pp. 53-83. Recuperado de [http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gutierrez2015PNA9\(2\)Analisis.pdf](http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gutierrez2015PNA9(2)Analisis.pdf)
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación*. Ed. Mc Graw-Hill Interamericana. 5ta ed., p. 9.
- Ibáñez, R. (2004). El vientre de un arquitecto (la búsqueda de la forma). En *Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas divulgaMAT*, Un paseo por la Geometría – Año 2003/2004, pp. 155-186. Recuperado de <http://imarrero.webs.ull.es/sctm04/modulo1/10/ribanez.pdf>
- Ingar, K. (2014). *A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais*. (Tesis doctoral inédita). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.
- Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. México, C. V. 7ma ed. Oxford University Press.
- Lehmann, C. (1953). *Geometría Analítica*. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, Mexico, pp. 425 – 428.
- López, N. y Anido, M. (2004). El medio Computacional como Material Didáctico en la Enseñanza Gráfico-Visual. *Actas del XVI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica – Zaragoza*. Recuperado de <http://www.egrafica.unizar.es/ingegraf/pdf/Comunicacion17117.pdf>
- Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). En *Revista IIPSI*, Facultad de Psicología, UNMSM, 9(1), p. 143. Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf
- Molina, C (2013). *Un Estudio del Icosaedro a partir de la Visualización en Geometría Dinámica*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil, p. 41.
- Ortiz, A. (2005). *Historia de la Matemática*. Volumen 1: La Matemática en la Antigüedad. Fondo editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, pp. 288-311. Recuperado de <http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf>
- Perú, Pontificia Universidad Católica del Perú (2015a). *Sílabo del curso Matemáticas 1*, Facultad de Arquitectura y Urbanismo.

- Perú, Pontificia Universidad Católica del Perú (2015b). *Sílabo del curso Matemáticas 2*, Facultad de Arquitectura y Urbanismo.
- Perú, Universidad de Lima (2014). *Plan de estudios de Arquitectura 2014-0*, Facultad de Ingeniería Industrial. Recuperado de http://www.ulima.edu.pe/sites/default/files/page/file/arquitectura_2014-0_plan_de_estudios.pdf
- Perú, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (2014). *Malla curricular*, Facultad de Arquitectura. Recuperado de <http://www.upc.edu.pe/sites/default/files/page/file/malla-arquitectura.pdf>
- Perú, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (2015). *Sílabo del curso Matemática Básica (ARQ) 2015-0*, Facultad de Arquitectura.
- Salazar, J., Gaita, C. y Saravia, N. (2013). Un Estudio de Superficies con Mathematica. Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática - VII CIBEM. Sociedad de Educación Matemática del Uruguay, pp. 7168 – 7175.
- Schumann, H. (2005). Introduction to Conics with Cabri 3D. *Revista EduMath* 20. Recuperado de http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd2/content/Edumath/v20/03Schumann_3D-dynamic.pdf
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de Varias variables. Trascendentes Tempranas*. México, D.F. 7ma ed. Cengage Learning.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación*. Barcelona. PAIDÓS.
- Ugarte, F. & Yucra, J. (2011). *Matemáticas para Arquitectos*. Lima, Pontificia Universidad Católica del Perú. 1ra edición, pp. 239-283.

ANEXOS

FICHA DE UNA ACTIVIDAD INTRODUCTORIA AL SOFTWARE

GEOGEBRA 3D

**FICHAS DE LAS TRES ACTIVIDADES REALIZADAS EN TRES
ENCUENTROS DE APLICACIÓN PARA LA FASE EXPERIMENTAL
DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN.**

CUESTIONARIOS PARA LAS ENTREVISTAS A LOS ESTUDIANTES

1 Ficha de la Actividad Introdutoria al Software Geogebra 3D

Gráfica y cortes de una superficie cuádrlica dada su ecuación.

Puede utilizar las herramientas: *Rota la vista gráfica 3D*  (botón derecho del mouse), *Aproximar*  y *Alejar*  (rueda del mouse y el cursor en el punto de interés), *Desplaza Vista Gráfica*  (clic izquierdo del mouse para indicar la dirección del desplazamiento).

Actividad 1: Gráfica y cortes de una superficie cuádrlica dada su ecuación.

- a) Abra el archivo *Actividad_1.ggb*

Digite en la *Barra de Entrada* la ecuación de la superficie: $S: \frac{y^2}{25} = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16}$

Grafique el plano: $z = -2$

¿Dicho plano intersecta a la superficie S ? ¿Qué curva se obtiene con la intersección de ambas superficies?

- b) Muestre la intersección de la superficie S con el plano $z = -2$

Para realizar cortes de una superficie cuádrlica (graficada o no por Geogebra) con un plano determinado, se utiliza el comando: *IntersecaCónica*, cuya sintaxis es:

$\text{IntersecaCónica}[\langle \text{Plano} \rangle, \langle \text{Cuádrlica} \rangle]$

donde: $\langle \text{Plano} \rangle$: Ecuación o nombre del plano de intersección con la superficie cuádrlica.

$\langle \text{Cuádrlica} \rangle$: Ecuación o nombre de la superficie cuádrlica.

Digite en la *Barra de Entrada*: $\text{IntersecaCónica}[z=-2, S]$

De ser necesario, modifique su respuesta de la parte (a)

Complete el siguiente cuadro:

PLANO DE INTERSECCIÓN	FORMA DEL CORTE
$z = 0$	
$y = -6$	
$x = 2$	
$y = \frac{5}{4}z + 2$	

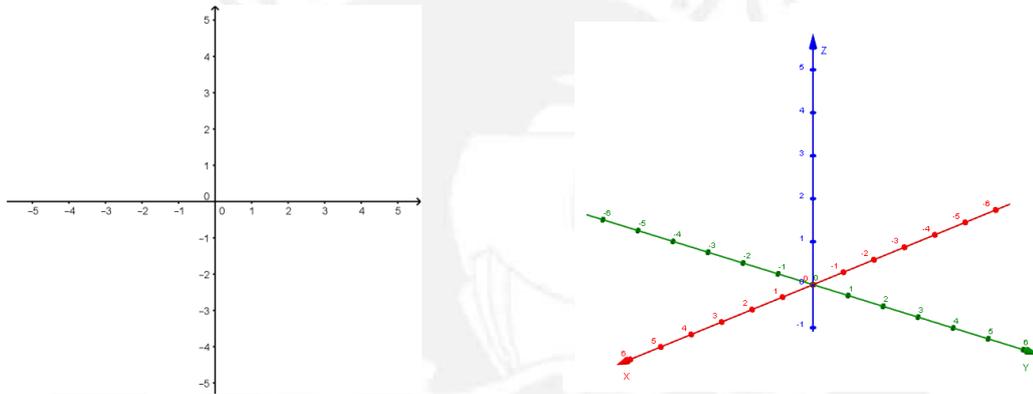
Guarde su archivo con el nombre **A1_APELLIDO_NOMBRE** en la carpeta indicada.

2 Fichas de las Actividades de la Experimentación

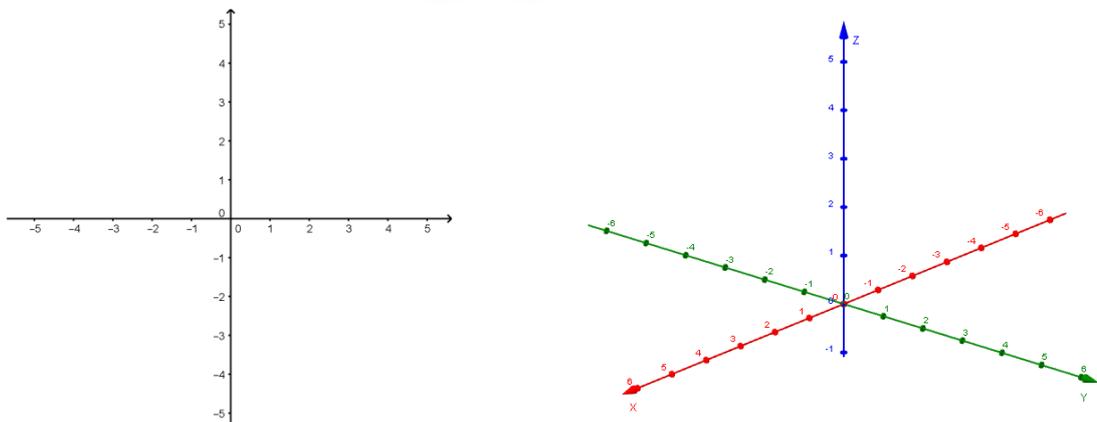
ACTIVIDAD 1

Grafique la superficie S representada por la ecuación $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, realizando previamente para ello cortes de S con los planos coordenados XY , XZ , YZ , y luego cortes con dos planos distintos a los indicados y paralelos entre sí elegidos por Ud.

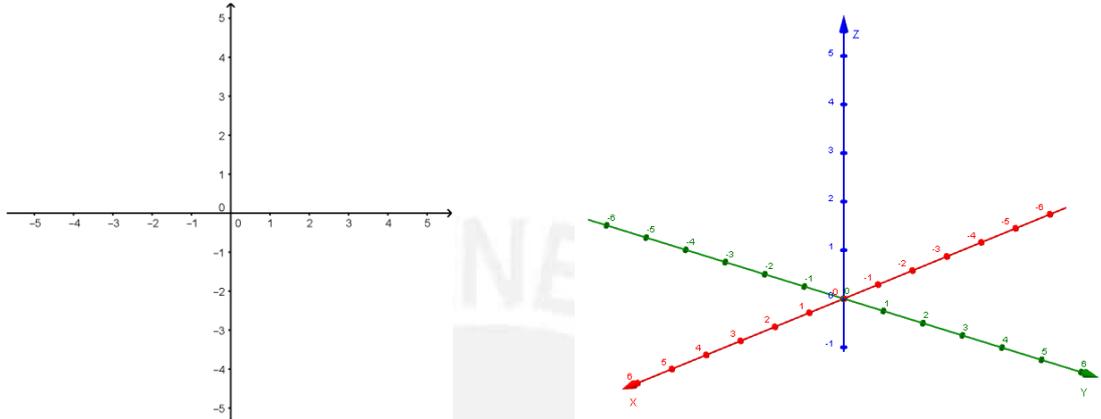
a) Corte de S con el plano $x = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados.



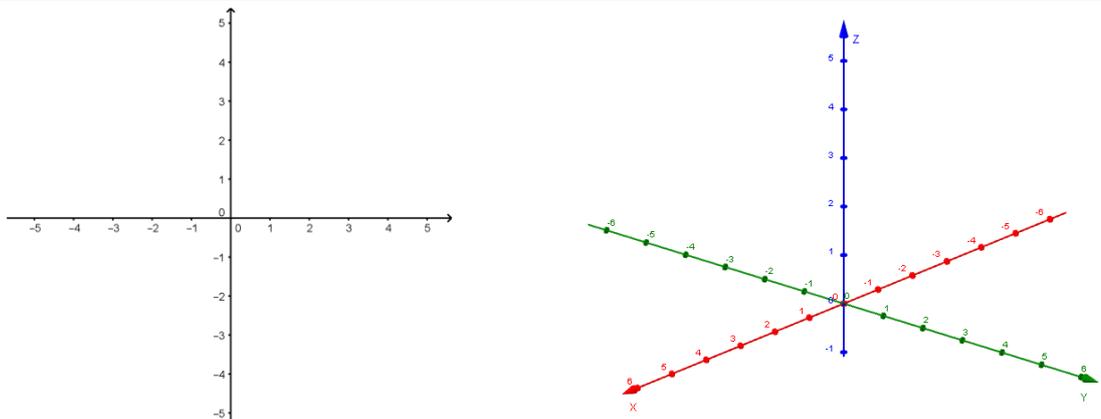
Corte de S con el plano $y = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados.



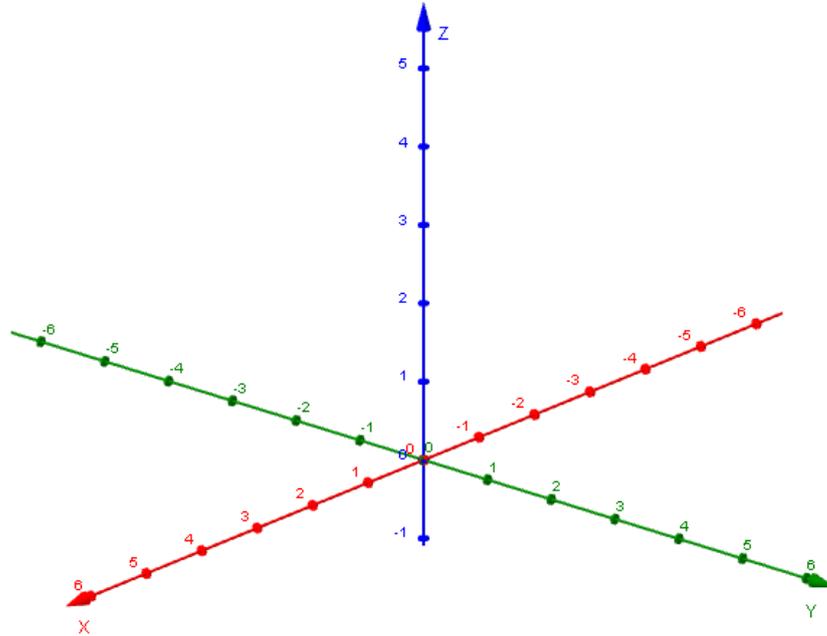
Corte de S con el plano $z = 0$. Luego grafique dicho corte en los sistemas coordenados dados.



b) Cortes de S con dos planos diferentes a los indicados en (a). Luego grafique dichos cortes en los sistemas coordenados dados.



- c) A partir de las representaciones gráficas de los cortes de la superficie S con los planos indicados en los ítems anteriores, bosqueje la gráfica de dicha superficie e indique a qué plano pertenece cada corte. Identifique dicha superficie.



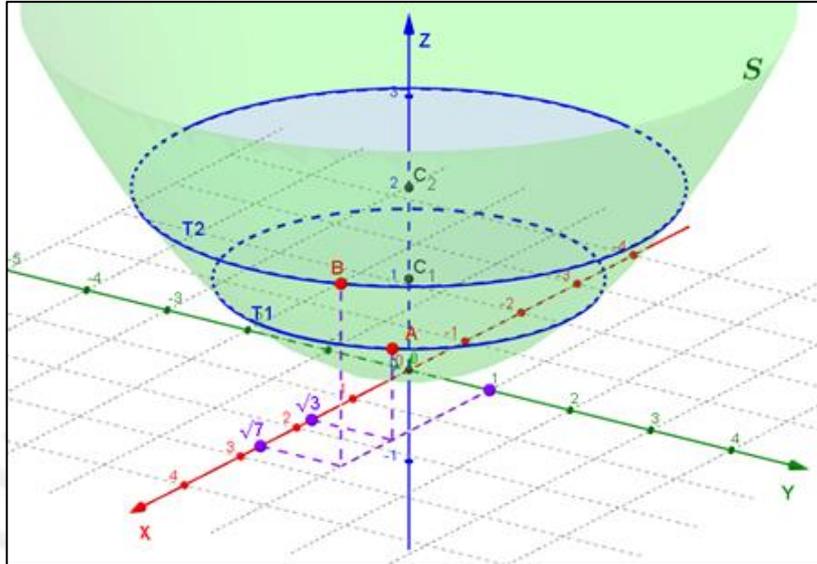
- d) ¿Existen restricciones para alguna(s) de las variables de la ecuación de la superficie S ? Justifique su respuesta.

ACTIVIDAD 2

GEOGEBRA 3D – Primera Sesión

Actividad 2: Obtención de la ecuación de un paraboloides dado su representación gráfica.

Abra el archivo: *Actividad_2.ggb*



- a) Los puntos C_1 y C_2 son centros de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, respectivamente. Escriba las coordenadas de los puntos A y B (valores exactos), y explique su procedimiento.

Blank area for the answer to question a).

- b) Identifique la forma de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, y luego escriba sus ecuaciones. Justifique su procedimiento.

Blank area for the answer to question b).

- c) Realice cortes de S con los planos $x = 0$, $y = 0$, e indique qué herramienta de Geogebra utilizó. ¿Qué forma tienen los cortes obtenidos? Explique.

- d) Escriba las ecuaciones de los dos cortes obtenidos en la parte (c). Explique su procedimiento.
Sugerencia: Para obtener puntos de paso de cada corte pedido, puede utilizar los puntos de intersección de dichos cortes con las curvas $T1$ o $T2$.



- e) Con las ecuaciones de los dos cortes obtenidos en la parte d) y una de las ecuaciones de las curvas cerradas ($T1$ o $T2$) obtenidas en la parte b), obtenga la ecuación de la superficie cuádrica S .

Guarde su archivo con el nombre **P2_APELLIDO_NOMBRE** en la carpeta indicada.

ACTIVIDAD 3

Actividad N° 3. Unidades significantes del Paraboloides.

Abra el archivo: *Superficie_S.ggb*

a) Digite en la *Barra de Entrada* la ecuación de la superficie $S: \frac{y-12}{-12} = \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z-4)^2}{16}$

El software Geogebra no grafica la superficie S . Vamos a representarla mediante cortes de S con planos paralelos a los planos coordenados por medio del comando *IntersecaCónica*.

Se pide realizar los siguientes cortes:

T1: Corte de S con el plano XY

T2: Corte de S con el plano YZ

T3: Corte de S con el plano XZ

T4: Corte de S con el plano $y = 4$

T5: Corte de S con el plano $y = 8$

¿Qué curvas se obtienen?

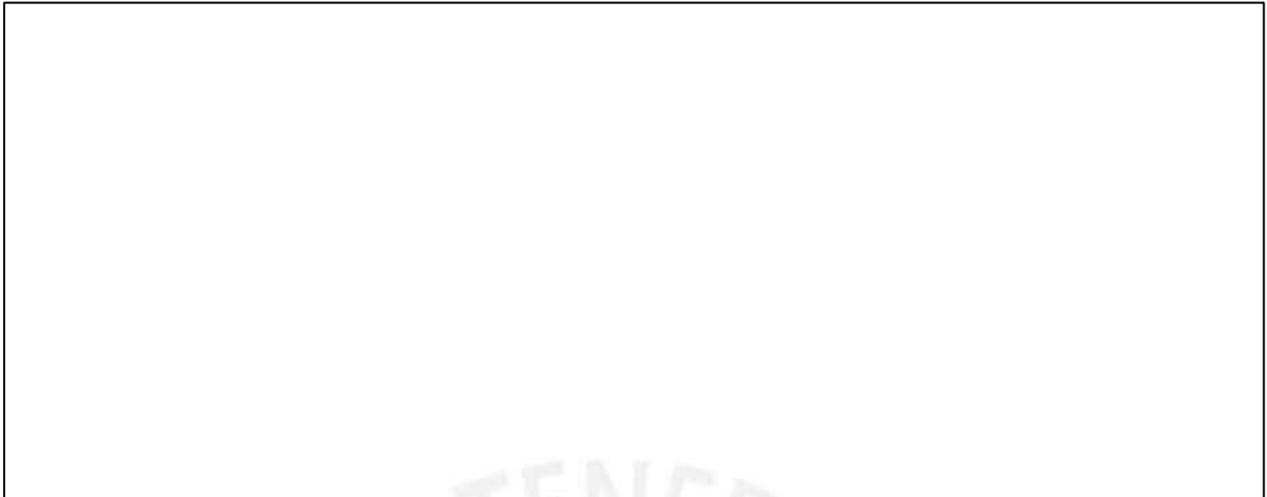


b) Determine los centros y vértices de las curvas cerradas, mediante los comandos:

Vértices[<Cónica>]

Centro[<Cónica>]

Si se pretende realizar cortes de S con 2 planos paralelos a los planos coordenados, para obtener curvas abiertas que pasen por los vértices de las curvas cerradas, ¿cuáles serían las ecuaciones de dichos planos? Explique y grafique dichos cortes.



c) Trace la recta que pasa por los centros de las curvas cerradas mediante la herramienta *Recta*. ¿Dicha recta y las curvas abiertas graficadas en el paso anterior se intersectan? ¿Qué representan la recta y el punto de intersección obtenido para la superficie?



¿Podría interpretar el significado del término negativo (-12) que aparece en el denominador del primer miembro de la ecuación de la superficie S ?



3 Fichas de preguntas para la Entrevista a los estudiantes

CUESTIONARIO - ESTUDIANTE JACINTA

Pregunta 1:

En los bosquejos de las representaciones gráficas en el plano y el espacio del corte de S con el plano $y = 0$:

¿Cómo llego a la conclusión de que la curva obtenida es una parábola?

¿Qué elementos de la ecuación de dicha curva le han permitido bosquejar la gráfica en el plano y el espacio, así como hacia dónde se extiende la gráfica de la curva?

En el bosquejo en el sistema coordenado XYZ canónico, se observan 2 líneas (rectas, segmentos). ¿Cómo se relacionan dichas líneas respecto al sistema coordenado XYZ ?

Pregunta 2:

En el corte de S con el plano $z = 0$, usted grafica un punto en ambos sistemas, bi-dimensional y tri-dimensional.

¿Por qué en su procedimiento indicó que el corte de S con el plano $z = 0$ es una elipse?

Pregunta 3:

¿Qué consideraciones ha tomado en cuenta para justificar que en su esbozo gráfico de la superficie S , las parábolas pasan por los vértices y extremos del eje menor de las dos elipses?

¿Cree usted que si no hubiese considerado dichos puntos de intersección, hubiese sido posible representar la superficie? Explique.

CUESTIONARIO - ESTUDIANTE ALEXANDRA

Pregunta 1:

En los bosquejos de las representaciones gráficas en el plano y el espacio del Corte de S con el plano $x = 0$:

¿Cómo llego a la conclusión de que la curva obtenida es una parábola?

¿Qué elementos de la ecuación de dicha curva le han permitido bosquejar la gráfica en el plano y el espacio, así como su orientación?

En el bosquejo en el sistema coordenado XYZ canónico de la gráfica de la parábola, una de las ramas de la curva está ligeramente inclinado hacia el semieje negativo del eje X . ¿Podría justificar por qué su gráfica presenta esa inclinación?

Pregunta 2:

En el procedimiento del corte de S con el plano $z = 0$, usted ha considerado de forma errónea la ecuación de la superficie ya que el exponente de la variable z no es 2. Además, indica $r = 0$

¿Podría explicar el significado de la notación $r = 0$? ¿Qué significa para Ud. la letra r ?

Pregunta 3:

En su esbozo de la gráfica de la superficie S en los ejes cartesianos, Ud. ha realizado un bosquejo previo

¿Ud. conocía de manera anticipada que la gráfica de la superficie S debería tener esa forma? Explique.

¿Por qué las gráficas de las parábolas se extienden hacia la parte posterior de la superficie respecto del observador?

¿Las gráficas de las parábolas se intersectan o se cruzan con las elipses? Explique.