

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



Regularidad y Estabilidad de Sistemas Lineales con Saltos Markovianos en Tiempo Discreto

Tesis para Optar
el Grado de
Magíster en Matemáticas

Presentado por:

Jorge Enrique Mayta Guillermo

Bajo la orientación de
Dr. Jorge Richard Chávez Fuentes
Miembros del Jurado

Dr. Eduardo Fontoura Costa - USP-ICMC (Brasil)

Dr. Rubén Angel Agapito Ruiz- PUCP (Perú)

Lima- Perú

2015



A mis padres, hermano y Lou.

Agradecimientos

Agradezco a mi orientador Dr. Jorge Richard Chávez Fuentes por la orientación recibida para elaboración de esta tesis agradezco también a los miembros del jurado, Dr. Rubén Angel Agapito Ruiz y Dr. Eduardo Fontoura Costa por sus valiosas sugerencias que han contribuido en mejorar este trabajo. De la misma manera agradezco a la Dirección General de Investigación de la Pontificia Universidad Católica del Perú (DGI-PUCP) por haber financiado gran parte de mis estudios de maestría a través de los proyectos DGI-2014-0019 y DGI 2015-0038.



Resumen

En este trabajo se analizan la regularidad y estabilidad de los sistemas lineales con saltos markovianos (SLSM). Se asume que la cadena de Markov que gobierna estos sistemas es homogénea y que su espacio de estados es finito. Por su novedad, importancia teórica y utilidad práctica, estamos particularmente interesados en los sistemas singulares, es decir, en aquellos SLSM donde aparece una matriz singular en el lado izquierdo de la ecuación dinámica. Si esta matriz no aparece, el sistema se conoce como no singular.

Varios conceptos de estabilidad estocástica son introducidos en el capítulo 1. Se prueba que ellos son equivalentes y se establecen resultados algebraicos implementables computacionalmente que permiten determinar la estabilidad de un SLSM no singular.

El capítulo 2 está dedicado a los sistemas singulares. La mayoría de los resultados obtenidos en el capítulo 1 son extendidos aquí. Vale la pena mencionar que esta extensión no es trivial, pues la singularidad representa una valla técnica que es muy difícil de superar.

La estabilidad casi segura, que es la noción más importante de estabilidad desde el punto de vista práctico, es analizada en el capítulo 3 para sistemas SLSM singulares.

Con el propósito de hacer este trabajo auto contenido, se ha añadido un anexo al final de la tesis.

Introducción

En muchas situaciones prácticas un sistema físico opera bajo condiciones adversas como en el caso de un avión que vuela en medio de una tormenta alterando abruptamente algunos de los parámetros del modelo. Lo mismo puede suceder con un modelo económico sujeto a alteraciones por el contexto exterior muchas veces incierto. Para modelar situaciones como estas se introducen los sistemas lineales con saltos markovianos. La cadena de Markov que gobierna el sistema muda de estado aleatoriamente a medida que transcurre el tiempo de manera que cada estado de la cadena representa un modo de operar distinto del sistema. Este modelo se ha venido utilizando en diversas áreas de investigación como, por ejemplo, sistemas económicos [16], sistemas eléctricos [17], sistemas robóticos [25], sistemas de control aéreo [18], [19], [20], etc. En este trabajo se estudian la regularidad y estabilidad de los sistemas lineales con saltos markovianos tanto no singulares como singulares. Los sistemas lineales con saltos markovianos vienen siendo estudiados desde la década de 1970, con los trabajos de Rosenbloom [8], Belmman [9], Bhuracha [10], Kats y Krasovskii [12], Morozan [13], Krtolica [14], Kozin [15], Ji y Chizeck [43], O. Costa y Fragosa [44], Fang, Loparo y Feng. [45], etc.

Ya en el plano de los sistemas singulares con saltos markovianos la literatura es más reciente, aunque viene incrementándose demasiado en los últimos años por su importancia práctica y teórica por ejemplo podrían citarse Boukas [46], Chávez [47].

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo uno se proporciona la teoría de sistemas lineales con saltos markovianos, se presenta algunos tipos de estabilidad los cuales serán equivalentes y además estos implican la estabilidad casi segura (CSE). Se proporcionará un test computacional el cual servirá para analizar si el sistema es EMC mediante el radio espectral de cierta matriz.

En el capítulo dos se presentará la teoría de sistemas lineales singulares con saltos markovianos el cual abordaremos el problema de la existencia y unicidad de soluciones, el cual se solucionará si se impone que el sistema sea regular modo a modo y bajo ciertas condiciones.

En el capítulo tres se analizará la estabilidad casi segura de un sistema lineal singular con saltos markovianos mediante un exponente de Lyapunov adecuado al sistema, el cual es un aporte a la literatura.

Capítulo 1

Sistemas Lineales con Saltos

Markovianos

Para comenzar a estudiar los sistemas, en primer lugar consideramos el concepto de señal. Si bien es un término de muy amplio alcance, en nuestro contexto consideramos como señal a toda variación de una cantidad física (por lo general con el tiempo) susceptible de ser representada matemáticamente y de la cual podemos obtener alguna información o realizar algún cambio.

Según su naturaleza podemos clasificar a las señales en dos grupos: las que pueden definirse en cada instante en un determinado intervalo, llamadas señales de tiempo continuo, y aquellas que pueden representarse como una sucesión de valores ordenados mediante un índice entero, llamadas señales de tiempo discreto.

Con esto, definamos como sistema a cualquier ente físico o proceso capaz de recibir una señal, denominada de entrada, o excitación y se transforma en otra señal que denominaremos de salida o respuesta. Puede aplicarse al estudio de una gran cantidad de problemas reales de muy diversa naturaleza física como: los sistemas físicos, sociales, procesar señales, etc. Un sistema en tiempo discreto es un operador matemático que transforma una señal en otra por medio de un conjunto fijo de reglas y funciones. Si un sistema no es estable él puede consumirse, desintegrarse o saturarse, un sistema inestable es inútil en la práctica y la estabilidad es un requerimiento básico. Algunos ejemplos de sistemas discretos son: tomógrafos, econógrafos, resonancia magnética, electrocardiógrafos, computadores, equipos industriales, equipos militares, etc.

1.1. Introducción

En esta sección se revisan brevemente algunos aspectos básicos de la teoría de estabilidad de los sistemas dinámicos de control clásicos, es decir, de aquellos sistemas lineales de control que no están sujetos a saltos. Nuestro propósito es que este breve resumen sirva para motivar la introducción de los sistemas dinámicos de control con saltos markovianos.

Muchos fenómenos dinámicos de la física, la biología, la ingeniería, la economía, etc, pueden ser modelados bajo la forma del sistema dinámico discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (1.1b)$$

donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$ son las matrices que almacenan los parámetros del modelo. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ es la variable de control, también llamada señal de entrada, e $y(k) \in \mathbb{R}$ es la respuesta del sistema excitada por la entrada $u(k)$. La variable $y(k)$ también se conoce como la señal de salida. Puesto que la salida no siempre es como el diseñador esperaría, entonces para controlarla se incorpora la variable $u(k)$. El modelo (1.1) configura lo que en la literatura se conoce como sistema (clásico) de control lineal. Cuando el fenómeno comienza a ser observado y controlado, él se encuentra en un estado determinado. El vector $x_0 = x(k_0)$ denota este estado y es llamado estado inicial del sistema, donde k_0 es el momento inicial. Por la linealidad del modelo, usualmente se considera $k_0 = 0$, por lo que se escribe $x(0) = x_0 = x(k_0)$.

Para cada estado inicial x_0 la solución de (1.1a) está dada por

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-\ell-1} B u(\ell). \quad (1.2)$$

A $x(k)$ se le llama también la trayectoria del sistema. Cuando se quiere especificar el estado inicial, la trayectoria suele escribirse como $x(k; x_0)$. Observe que la trayectoria (1.2) depende claramente de dos partes: el estado inicial del sistema y la variable de control. La primera parte es conocida como la parte no forzada y la segunda como la parte forzada (se entiende que por la variable de control). Si el sistema es no forzado, esto es, $u(k) = 0$ entonces la trayectoria se reduce simplemente a $x(k) = A^k x_0$, que es enteramente debida a las condiciones iniciales del fenómeno.

La “estabilidad” es una condición fundamental requerida en el diseño de todo sistema. Un sistema no estable podría salirse de control, perder rápidamente sus características esenciales, o simplemente no ser de utilidad práctica. En este capítulo se define y estudia el concepto de estabilidad para sistemas lineales.

Dos nociones de estabilidad que pueden ser asociadas al sistema (1.1) son la BIBO estabilidad y la estabilidad de Lyapunov. Si lo que se desea es estudiar la relación entre la señal de entrada y la señal de salida, entonces la BIBO estabilidad es la noción adecuada. BIBO son las siglas en inglés de la expresión *bounded input bounded output*, es decir, el interés es ver si la respuesta del sistema será acotada cuando se aplique una señal de entrada acotada. Si el sistema siempre responde de esta manera, él será BIBO estable. En este caso la parte no forzada de la trayectoria no juega ningún rol en el análisis de la estabilidad.

Por otro lado, si solo es de interés la estructura interna del sistema, esto es, si no se considera la señal de entrada, entonces la noción apropiada de estabilidad es la de Lyapunov. Se dice que la trayectoria $x(k; x_0)$ es estable o marginalmente estable (en el sentido de Lyapunov) si cualquier otra trayectoria que partiendo suficientemente cerca de ésta permanecerá por siempre cerca de ella. Formalmente se tiene

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / \left\| x'_0 - x_0 \right\| < \delta \Rightarrow \left\| x(k; x'_0) - x(k; x_0) \right\| < \epsilon, \quad k > k_0 \in \mathbb{Z}_+.$$

La trayectoria $x(k)$ puede ser entendida como un modo de operar del sistema. Suelen ser de interés los modos de operación en “equilibrio”. Recordemos que el punto $x_e \in \mathbb{R}^n$ es llamado punto de equilibrio del sistema no forzado (1.1a) si

$$Ax_e = x_e.$$

Un caso particular es cuando $x_e = 0$. En general $x_e \neq 0$, pero en este caso, por medio de un cambio de variable, éste punto puede transformarse en un punto nulo, por lo que solo $x_e = 0$ es considerado en el análisis. Un punto de equilibrio no solo puede mostrar estabilidad, sino también un comportamiento atractor, es decir, las trayectorias que parten cerca del equilibrio no solo permanecerán por siempre cerca de él, como se requiere en la estabilidad marginal, sino además el acercamiento es asintótico. A continuación definimos la estabilidad del punto de equilibrio $x_e = 0$.

Definición 1. Consideremos el sistema (1.1a) con $u(k) = 0$.

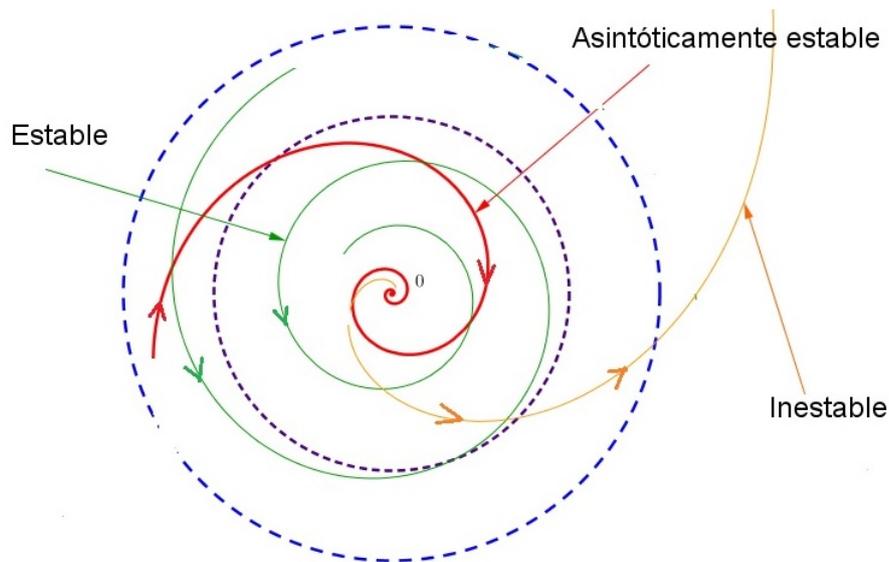
a) El punto de equilibrio $x_e = 0$ es estable si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(k)\| < \epsilon, k > k_0 \in \mathbb{Z}_+.$$

b) El punto de equilibrio $x_e = 0$ es asintóticamente estable si es estable y además

$$\exists \eta > 0 / \|x(0)\| < \eta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0.$$

La figura siguiente muestra estos conceptos.



El teorema 1 caracteriza la estabilidad de Lyapunov mediante el radio espectral de la matriz A . La demostración se basa en la forma canónica de Jordan de A .

Teorema 1. Consideremos el sistema (1.1a) con $u(k) = 0$. Entonces

a) Si $x_e = 0$ es un punto de equilibrio, entonces $\rho(A) \leq 1$.

b) El punto de equilibrio $x_e = 0$ es asintóticamente estable si y solo si $\rho(A) < 1$.

De ahora en adelante cuando se mencione que el sistema es estable o asintóticamente estable estaremos haciendo referencia a que el sistema es estable o asintóticamente estable en el punto de equilibrio $x_e = 0$.

El teorema 2 proporciona una caracterización algebraica de la estabilidad asintótica. La prueba puede ser encontrada, por ejemplo, en [2].

Teorema 2. *El sistema (1.1a) con $u(k) = 0$ es asintóticamente estable si y solo si para toda matriz simétrica positivo definida W , existe una única matriz simétrica positivo definida M tal que*

$$A^T M A - M = -W \quad (1.3)$$

La ecuación (1.3) es conocida como ecuación de Lyapunov.

1.2. Sistemas lineales con saltos markovianos

Aunque muchos procesos pueden ser modelados por el sistema (1.1a), éste no resulta útil en la modelización de fenómenos en los que por diversas circunstancias los parámetros cambian abrupta y significativamente. En efecto, en muchas situaciones prácticas el sistema opera bajo condiciones adversas como en el caso de un avión que vuela en medio de una tormenta recibiendo fuertes descargas eléctricas. Lo mismo puede suceder con un modelo económico sujeto a alteraciones adversas debido al contexto exterior muchas veces incierto o una central térmica solar sujeta a cambios de temperatura por las condiciones atmosféricas. A veces la alteración de los parámetros también es causada por fallas internas del sistema, por la interconexión de los componentes o la antigüedad de estos. Para modelar esta situación se introducen los sistemas dinámicos con saltos markovianos. Este modelo se ha venido utilizando desde la década de los 70 en diversas áreas de investigación como, por ejemplo, sistemas económicos [16], sistemas eléctricos [17], sistemas robóticos [25], sistemas de control aéreo [18], [19], [20], etc. La cadena de Markov asociada al sistema muda de estado aleatoriamente a medida que transcurre el tiempo. Cada estado de la cadena representa un modo de operar distinto del sistema. De esta manera, en lugar de un único sistema dinámico, se tienen en realidad muchos sistemas cambiando aleatoriamente y modelando todos ellos un mismo fenómeno. El modelo matemático resultante es un sistema dinámico estocástico conocido en la literatura como Sistemas lineales con saltos markovianos o, por sus siglas en inglés, MJLS (ver p.ej. [3]).

En vista que el fenómeno bajo estudio se torna aleatorio comenzamos el análisis introduciendo un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, donde Ω es el espacio muestral, \mathcal{F} es la σ -álgebra y \Pr es la medida de probabilidad. La cadena de Markov es denotada por $\theta(k) = \{\theta(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ y su espacio de estado por $\Sigma = \{1, \dots, L; L \in \mathbb{Z}_+\}$ (consideramos cadenas de Markov homogéneas con espacio de estados finito). El vector de distribución

de probabilidad inicial es denotado por π , donde $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_L)$, $\pi_i = \Pr(\boldsymbol{\theta}(0) = i)$. La matriz de transición de probabilidades es denotada por (p_{ij}) , donde $p_{ij} \triangleq \Pr(\boldsymbol{\theta}(k+1) = j | \boldsymbol{\theta}(k) = i)$. Tanto las transiciones de probabilidad como las diversas variables envueltas en el modelo se consideran variable observables.

Consideremos el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{\boldsymbol{\theta}(k)}\mathbf{x}(k) + B_{\boldsymbol{\theta}(k)}u(k), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

donde para todo $i \in \Sigma$, $A_i \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B_i \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$. Vamos a asumir que las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$ y $\boldsymbol{\theta}(0)$ son independientes, además $\mathbf{x}(0)$ es de primer y segundo momento finito, es decir, $E\{\|\mathbf{x}(0)\|\} < \infty$ y $E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\} < \infty$ respectivamente.

Cuando $u(k) = 0$, (1.4) se transforma en el siguiente sistema no forzado:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{\boldsymbol{\theta}(k)}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

Buena parte de los resultados de esta tesis están referidos al sistema (1.5), también llamado en la literatura sistema homogéneo.

Definición 2. Se dice que el proceso estocástico $\mathbf{x}(k) = \{\mathbf{x}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ es solución de (1.4) si para toda realización ω de $\boldsymbol{\theta}(k)$, la ecuación (1.4) es satisfecha puntualmente, esto es,

$$\mathbf{x}(k+1, \omega; \mathbf{x}(0)) = A_{\boldsymbol{\theta}(k, \omega)}\mathbf{x}(k, \omega; 0) + B_{\boldsymbol{\theta}(k, \omega)}u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

A la solución $\mathbf{x}(k)$ del sistema (1.4) se le llama también trayectoria solución.

Para cada condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ dada, la solución de (1.4) puede ser obtenida de forma recursiva como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= A_{\boldsymbol{\theta}(0)}\mathbf{x}(0) + B_{\boldsymbol{\theta}(0)}u(0) \\ \mathbf{x}(2) &= A_{\boldsymbol{\theta}(1)}\mathbf{x}(1) + B_{\boldsymbol{\theta}(1)}u(1) \\ &= A_{\boldsymbol{\theta}(1)}(A_{\boldsymbol{\theta}(0)}\mathbf{x}(0) + B_{\boldsymbol{\theta}(0)}u(0)) + B_{\boldsymbol{\theta}(1)}u(1) \\ &= A_{\boldsymbol{\theta}(1)}A_{\boldsymbol{\theta}(0)}\mathbf{x}(0) + A_{\boldsymbol{\theta}(1)}B_{\boldsymbol{\theta}(0)}u(0) + B_{\boldsymbol{\theta}(1)}u(1) \end{aligned}$$

procediendo de este modo por inducción se obtiene

$$\mathbf{x}(k) = \prod_{\ell=0}^{k-1} A_{\boldsymbol{\theta}(k-1-\ell)}\mathbf{x}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-2} \left(\prod_{l=\ell+1}^{k-1} A_{\boldsymbol{\theta}(k-l-l)} \right) B_{\boldsymbol{\theta}(\ell)}u(\ell) + B_{\boldsymbol{\theta}(k-1)}u(k-1). \quad (1.6)$$

Observe que si $u(k) = 0$, entonces la trayectoria se reduce a

$$\mathbf{x}(k) = A_{\theta(k-1)}A_{\theta(k-2)} \dots A_{\theta(0)}\mathbf{x}(0) = \prod_{\ell=0}^{k-1} A_{\theta(k-1-\ell)}\mathbf{x}(0), \quad (1.7)$$

que es la solución de (1.5).

Al conjunto de trayectorias $\mathbf{x}(k)$ que resuelven (1.4) se le denotará por Γ . El siguiente lema se usa frecuentemente en la literatura al momento de hacer derivaciones con esperanzas condicionadas. Ya que el autor de este trabajo no ha encontrado una prueba formal de él, aquí damos una demostración. Esencialmente se prueba que la variable aleatoria $E\{\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}|\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)\}$ definida en términos de $\mathbf{x}(k)$ y $\boldsymbol{\theta}(k)$, solo depende de $\boldsymbol{\theta}(k)$.

Para presentar el resultado, tengamos en cuenta la notación siguiente:

$$\Pr(\boldsymbol{\theta}(k+1) = j|\boldsymbol{\theta}(k)) = p_{\boldsymbol{\theta}(k)j},$$

donde para cada j fijo en Σ , $p_{\boldsymbol{\theta}(k)j}$ es una variable aleatoria cuyos valores son p_{ij} , $i \in \Sigma$.

Lema 1. Sea $\mathbf{x}(k)$ la trayectoria solución de (1.4) con $\mathbf{x}(0) = x_0$. Entonces

$$E\{\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}|\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)\} = p_{\boldsymbol{\theta}(k)j}$$

Demostración. Para los valores específicos $\mathbf{x}(k) = x_k$ y $\boldsymbol{\theta}(k) = i_k$ tenemos

$$\begin{aligned} & E\{\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}|\mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k\} \\ &= \sum_{z_i \in \{0,1\}} z_i \Pr\{\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} = z_i|\mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k\} \\ &= \sum_{z_i \in \{0,1\}} z_i \frac{\Pr(\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} = z_i, \mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k)}{\Pr(\mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k)} \\ &= \frac{\Pr(\boldsymbol{\theta}(k+1) = j, \mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k)}{\Pr(\mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k)} \\ &= \frac{\sum_{i_0, \dots, i_{k-1}=1}^L \Pr(\boldsymbol{\theta}(k+1) = j, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k, \boldsymbol{\theta}(k-1) = i_{k-1}, \dots, \boldsymbol{\theta}(0) = i_0, \mathbf{x}(0) = x_0)}{\sum_{i_0, \dots, i_{k-1}=1}^L \Pr(\boldsymbol{\theta}(k) = i_k, \boldsymbol{\theta}(k-1) = i_{k-1}, \dots, \boldsymbol{\theta}(0) = i_0, \mathbf{x}(0) = x_0)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como $\mathbf{x}(0)$ y $\boldsymbol{\theta}(0)$ son independientes entonces sus correspondientes sigmas álgebras generadas son independientes. Además como $\sigma(\{\boldsymbol{\theta}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k), \dots, \boldsymbol{\theta}(0)\}) \subset \sigma(\{\boldsymbol{\theta}(0)\})$

entonces $\sigma(\{\boldsymbol{\theta}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k), \dots, \boldsymbol{\theta}(0)\})$ y $\sigma(\{\mathbf{x}(0)\})$ son independientes. Luego cada evento $\{\boldsymbol{\theta}(k+1) = j, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k, \boldsymbol{\theta}(k-1) = i_{k-1}, \dots, \boldsymbol{\theta}(0) = i_0\}$ que pertenece a $\sigma(\{\boldsymbol{\theta}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k), \dots, \boldsymbol{\theta}(0)\})$ y el evento $\{\mathbf{x}(0) = x_0\}$ que pertenece a $\sigma(\{\mathbf{x}(0)\})$, son independientes. Por esto y la propiedad markoviana (1.8) se reduce a

$$E\{\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(k+1)=j\}} | \mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i_k\} = \frac{\sum_{i_0, \dots, i_{k-1}=1}^L p_{i_k j} p_{i_{k-1} i_k} \dots p_{i_0 i_1} \Pr(\boldsymbol{\theta}(0) = i_0)}{\sum_{i_0, \dots, i_{k-1}=1}^L p_{i_{k-1} i_k} \dots p_{i_0 i_1} \Pr(\boldsymbol{\theta}(0) = i_0)} = p_{i_k j}$$

lo que concluye la demostración. □

1.3. Las matrices \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C}

En esta sección se presentan las matrices \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} que serán de gran utilidad para analizar la estabilidad de (1.4). Para el caso no forzado la matriz \mathcal{A} hace las veces de la matriz A del sistema (1.1a). Por consiguiente, es de esperar que la estabilidad del sistema (1.5) pueda ser analizada a través del radio espectral de esta matriz. Esto es probado en la sección 1.5.

Para poder introducir estas matrices necesitamos previamente definir algunas matrices que están dadas en términos de la trayectoria solución del sistema. Estas matrices, que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, son consistentes con aquellas definidas en la literatura (ver p.ej. [3]).

Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \Sigma$, consideremos

$$Q(k) \triangleq E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\} \tag{1.9}$$

$$Q_i(k) \triangleq E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(k)=i\}}\} \tag{1.10}$$

$$q_i(k) \triangleq \text{vec}(Q_i(k)) \tag{1.11}$$

$$q(k) \triangleq \begin{pmatrix} q_1(k) \\ \vdots \\ q_L(k) \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

$$p_i(k) \triangleq \text{vec}(I_n)\pi_i(k) \tag{1.13}$$

$$p(k) \triangleq \begin{pmatrix} p_1(k) \\ \vdots \\ p_L(k) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$U(k) \triangleq E\{\mathbf{x}(k)\} \quad (1.15)$$

$$\mu_i(k) \triangleq E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}\} \quad (1.16)$$

$$\mu(k) \triangleq \begin{pmatrix} \mu_1(k) \\ \vdots \\ \mu_L(k) \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Observe que

$$Q(k) = E \left\{ \sum_{i=1}^L \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right\} = \sum_{i=1}^L E \left\{ \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right\} = \sum_{i=1}^L Q_i(k) \quad (1.18)$$

$$U(k) = E \left\{ \sum_{i=1}^L \mathbf{x}(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right\} = \sum_{i=1}^L E \left\{ \mathbf{x}(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right\} = \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \quad (1.19)$$

La demostración del lema 2 es una consecuencia directa de la definición de la norma siguiente :

$$\|A\|_{\text{máx}} \triangleq \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

Lema 2. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\text{tr}(A) \leq n\|A\|_{\text{máx}}$$

El lema 3 establece una ecuación recursiva para la matriz $Q_i(k)$, definida en (1.10). Esta ecuación es muy útil para la obtención de los principales resultados presentados en este trabajo (ver p.ej. Lema 5)

Lema 3 ([3]). Dado el sistema (1.5) con trayectoria solución $\mathbf{x}(k)$, la matriz $Q_j(k)$ definida en (1.18) satisface la siguiente ecuación recursiva:

$$Q_j(k+1) = \sum_{i=1}^L p_{ij} A_i Q_i(k) A_i^T, \quad k \in \mathbb{Z}_+, j \in \Sigma \quad (1.20)$$

Demostración. Para la demostración de este resultado utilizamos la recursividad del sistema y el lema 1.

$$\begin{aligned}
 Q_j(k+1) &\triangleq E \{ \mathbf{x}(k+1) \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \} \\
 &= E \{ A_{\theta(k)} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) A_{\theta(k)}^T \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \} \\
 &= E \left\{ \sum_{i=1}^L A_i \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) A_i^T \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^L A_i E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \} A_i^T
 \end{aligned}$$

Aplicando la proposición 2-8 del anexo y condicionado con respecto a $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)\}$ obtenemos:

$$Q_j(k+1) = \sum_{i=1}^L A_i E \{ E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} | \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k) \} \} A_i^T.$$

Debido a que $\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$ es medible con respecto a $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)\}$ entonces

$$Q_j(k+1) = \sum_{i=1}^L A_i E \left\{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} E \left\{ \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \middle| \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k) \right\} \right\} A_i^T$$

y por el lema 1 tenemos

$$\begin{aligned}
 Q_j(k+1) &= \sum_{i=1}^L A_i E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} p_{\theta(k),j} \} A_i^T \\
 &= \sum_{i=1}^L A_i E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} p_{ij} \} A_i^T \\
 &= \sum_{i=1}^L p_{ij} A_i E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \} A_i^T \\
 &= \sum_{i=1}^L p_{ij} A_i Q_i(k) A_i^T.
 \end{aligned}$$

□

El lema 4 establece una ecuación recursiva para el vector $u_i(k)$, definido en (1.16). La demostración es similar a la del lema 3.

Lema 4 ([3]). *Dado el sistema (1.5) con trayectoria solución $\mathbf{x}(k)$, el vector $\mu_j(k)$ definido en (1.16) satisface la siguiente ecuación recursiva :*

$$\mu_j(k+1) = \sum_{i=1}^L p_{ij} A_i \mu_i(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, j \in \Sigma \quad (1.21)$$

A continuación se introducen las matrices \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} que serán de fundamental importancia para establecer diferentes resultados relacionados con la estabilidad de los sistemas (1.4) y (1.5).

$$\mathcal{A} \triangleq (\Pi^T \otimes I_{n^2}) \text{diag}[A_1 \otimes A_1, \dots, A_L \otimes A_L] \quad (1.22)$$

$$\mathcal{B} \triangleq (\Pi^T \otimes I_{n^2}) \text{diag}[B_1 \otimes B_1, \dots, B_L \otimes B_L] \quad (1.23)$$

$$\mathcal{C} \triangleq (\Pi^T \otimes I_n) \text{diag}[A_1, \dots, A_L] \quad (1.24)$$

Note que estas matrices recogen la información de todos los parámetros del sistema y además guardan la información probabilística de la cadena de Markov. Enseguida se muestra que el sistema (1.5) puede ser transformado en una ecuación del tipo clásico mediante la matriz \mathcal{A} .

Lema 5 ([3],[42]). *Dado el sistema (1.5), el correspondiente vector columna $q(k)$, definido en (1.12), es una solución del sistema*

$$z(k+1) = \mathcal{A}z(k), \quad z(0) = q(0) \in \mathbb{R}^{n^2} \quad (1.25)$$

Demostración. Vectorizando ambos lados de (1.20) se obtiene

$$q_j(k+1) = \sum_{i=1}^L p_{ij} A_i \otimes A_i q_i(k), \quad j \in \Sigma$$

lo que se puede escribir matricialmente en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} q(k+1) &= \begin{pmatrix} p_{11}A_1 \otimes A_1 q_1(k) + \dots + p_{L1}A_L \otimes A_L q_L(k) \\ \vdots \\ p_{1L}A_1 \otimes A_1 q_1(k) + \dots + p_{LL}A_L \otimes A_L q_L(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}A_1 \otimes A_1 & \dots & p_{L1}A_L \otimes A_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1L}A_1 \otimes A_1 & \dots & p_{LL}A_L \otimes A_L \end{pmatrix} q(k) \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}I_{n^2} & \dots & p_{L1}I_{n^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1L}I_{n^2} & \dots & p_{LL}I_{n^2} \end{pmatrix} \text{diag}[A_1 \otimes A_1, \dots, A_L \otimes A_L] q(k) \\ &= (\Pi^T \otimes I_{n^2}) \text{diag}[A_1 \otimes A_1, \dots, A_L \otimes A_L] q(k) \\ q(k+1) &= \mathcal{A}q(k) \end{aligned} \quad (1.26)$$

□

Observe que la ecuación (1.26) tiene una forma clásica, de donde su solución es (ver (1.2))

$$q(k) = \mathcal{A}^k q(0) \quad (1.27)$$

Para el caso no homogéneo, asumimos que la cadena de Markov es ergódica, de manera que para cualquier $\theta(0)$ existen p_i (independiente de π) tal que $p_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_i(k)$. Además, la señal de entrada $u(k)$ es tomada como un proceso i.i.d. (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) con media cero, matriz de covarianza la matriz identidad I e independiente de $\theta(k)$ y $x(0)$.

Tomando en cuenta las condiciones impuestas sobre $u(k)$ y siguiendo procedimientos análogos a los del lema anterior, se pueden establecer los dos siguientes resultados.

Lema 6. *Dado sistema (1.4), el correspondiente vector columna $q(k)$, definido en (1.12), es una solución del sistema siguiente*

$$z(k+1) = \mathcal{A}z(k) + \mathcal{B}p(k), \quad z(0) = q(0), \quad (1.28)$$

donde $p(k)$ está definido en (1.14).

El siguiente lema nos servirá para la demostración para el lema 9.

Lema 7. *Dado el sistema (1.5), el correspondiente vector columna $\mu(k)$, definido en (1.17), es una solución del sistema siguiente:*

$$z(k+1) = \mathcal{C}z(k), \quad z(0) = \mu(0) \quad (1.29)$$

La ecuación (1.29) tiene una forma clásica cuya solución es (ver (1.2))

$$\mu(k) = \mathcal{C}^k \mu(0) \quad (1.30)$$

1.4. Estabilidad

El análisis de estabilidad de sistemas lineales con saltos markovianos por una cadena de Markov se remonta a la década de los 70 con Rosenbloom [8], que investigó las propiedades de estabilidad δ momento. Desde entonces la teoría a desarrollado abundantes resultantes de gran importancia teórica y práctica, como se mostro en la introducción de este trabajo. La naturaleza estocastica de un sistema con saltos markoavianos induce a considerar varios tipos de estabilidad. A continuación presentamos las definiciones de estabilidad para el sistema (1.5) dadas en la literatura [1], [37].

Definición 3. Se dice que el sistema (1.5) es

- a) *Estable en media cuadrática (EMC)* si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\boldsymbol{\theta}(0)$ se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(k) = 0,$$

donde $Q(k)$ está definido en (1.9).

- b) *Estocásticamente estable (EE)* si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\boldsymbol{\theta}(0)$ se tiene

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{x}(k)\|^2 \right\} < \infty$$

- c) *Exponencialmente estable (EXE)* si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\boldsymbol{\theta}(0)$ existen constantes $0 < \alpha < 1 \leq \beta$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ se tiene

$$E \{ \|\mathbf{x}(k)\|^2 \} \leq \beta \alpha^k E \{ \|\mathbf{x}(0)\|^2 \},$$

donde α y β son independientes de $\mathbf{x}(0)$ y $\boldsymbol{\theta}(0)$.

- d) *Segundo momento estable (SME)* si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\boldsymbol{\theta}(0)$ se tiene

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E \{ \|\mathbf{x}(k)\|^2 \} = 0$$

- e) *Casi seguramente estable (CSE)* si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\boldsymbol{\theta}(0)$ se tiene

$$\Pr \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k)\| = 0 \right\} = 1$$

Observación 1. En [3] los autores agregan la condición adicional $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\mathbf{x}(k)\} = 0$ en la definición de EMC (ver [3, Def. 3.8, Pag.36]). Sin embargo, esto no es necesario, como veremos en la siguiente sección.

Observación 2. Más adelante se probará que cuando Σ es un conjunto finito los conceptos de estabilidad dados en (a), (b), (c) y (d) son equivalentes y que todos estos implican la estabilidad dada en (e).

Observación 3. Si se consideran distribuciones iniciales diferentes en la cadena de Markov, las trayectorias del sistema pueden tener comportamientos completamente diferentes, como muestra el siguiente ejemplo. De aquí se desprende la importancia de considerar todas las distribuciones iniciales en la definición de estabilidad.

Ejemplo 1. Consideremos el sistema escalar

$$\mathbf{x}(k+1) = a_{\theta(k)}\mathbf{x}(k), \quad L = 2$$

donde $\sqrt{2} < a_1$ y $\frac{1}{2} < a_2 < 1$. Consideremos la matriz de transición de probabilidad siguiente:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y sea $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ el vector de distribución inicial de probabilidad. Denotamos la distribución inicial concentrada en el estado $i \in \Sigma$ por e_i , es decir, $\Pr(\boldsymbol{\theta}(0) = i) = 1$.

Analicemos un caso particular

$$\begin{aligned} E_{\pi} \{|\mathbf{x}(2)|^2\} &= E_{\pi} \{ |a_{\theta(1)}a_{\theta(0)}\mathbf{x}(0)|^2 \} \\ &= E_{\pi} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 |a_j|^2 |a_i|^2 |\mathbf{x}(0)|^2 \mathbf{1}_{\{\theta(1)=j, \theta(0)=i\}} \right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 |a_j|^2 |a_i|^2 E_{\pi} \{ |\mathbf{x}(0)|^2 \} E_{\pi} \{ \mathbf{1}_{\{\theta(1)=j, \theta(0)=i\}} \} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 |a_j|^2 |a_i|^2 E_{\pi} \{ |\mathbf{x}(0)|^2 \} \Pr(\boldsymbol{\theta}(1) = j, \boldsymbol{\theta}(0) = i) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 |a_j|^2 |a_i|^2 E_{\pi} \{ |\mathbf{x}(0)|^2 \} p_{ij} \pi_i \end{aligned} \tag{1.31}$$

procediendo de forma análoga se obtiene

$$E_{\pi} \{|\mathbf{x}(k)|^2\} = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}=1}^2 \pi_{i_0} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{k-2}, i_{k-1}} |a_{i_{k-1}}|^2 \dots |a_{i_1}|^2 |a_{i_0}|^2 E_{\pi} \{ |\mathbf{x}(0)|^2 \} \tag{1.32}$$

Si $\boldsymbol{\theta}(0) = 1$, se tiene que los $p_{ij} \geq \frac{1}{2}$ y además

$$\begin{aligned} E_{e_1} \{|\mathbf{x}(k)|^2\} &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^2 p_{1, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{k-2}, i_{k-1}} |a_{i_{k-1}}|^2 \dots |a_{i_1}|^2 |a_1|^2 E_{e_1} \{ |\mathbf{x}(0)|^2 \} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} a_1^{2(k-1)} E_{e_1} \{ |\mathbf{x}(0)|^2 \} \\ &= \left(\frac{a_1^2}{2}\right)^{k-1} E_{e_1} \{ |\mathbf{x}(0)|^2 \} \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_{e_1} \{|\mathbf{x}(0)|^2\} = +\infty. \quad (1.33)$$

Si $\theta(0) = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} E_{e_2} \{|\mathbf{x}(k)|^2\} &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^2 p_{2,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{k-2},i_{k-1}} |a_{i_{k-1}}|^2 \cdots |a_{i_1}|^2 |a_2|^2 E_{e_2} \{|\mathbf{x}(0)|^2\} \\ &= a_2^{2(k-1)} E_{e_2} \{|\mathbf{x}(0)|^2\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

De aquí se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_{e_2} \{|\mathbf{x}(k)|^2\} = 0 \quad (1.35)$$

De (1.33) y (1.35) notamos que aun partiendo del mismo estado inicial la trayectoria del sistema tiene un comportamiento diferente dependiendo de la distribución de probabilidad inicial que se considere. En un caso la trayectoria diverge y en otro no.

1.5. Estabilidad EMC y la matriz \mathcal{A}

En esta sección analizamos la estabilidad de (1.4) en términos del radio espectral de la matriz \mathcal{A} . El resultado que se presenta constituye un test fácilmente implementable, por ejemplo, en MATLAB, con el que se puede determinar la estabilidad del sistema.

1.5.1. Caso homogéneo

El lema 5 da una caracterización de la estabilidad EMC en términos de el vector $q(k)$ definido en (1.12).

Lema 8. *El sistema (1.5) es EMC si y solo si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $\theta(0)$ se cumple*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} q(k) = 0. \quad (1.36)$$

Demostración.

Asumamos que el sistema es EMC. De la desigualdad

$$\|Q_i(k)\| = \|E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}\}\| \leq \|E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\}\| = \|Q(k)\|$$

se sigue que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_i(k) = 0$ y como el operador vec es continuo entonces $\lim_{k \rightarrow +\infty} q_i(k) = 0$. De aquí se concluye inmediatamente (1.36).

Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(k) = 0$ entonces $\lim_{k \rightarrow +\infty} q_i(k) = 0$ lo que es equivalente a decir que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_i(k) = 0$. De (1.18) se concluye que el sistema (1.5) es EMC. \square

El teorema 3 provee una herramienta de fácil implementación computacional para analizar si el sistema (1.5) es EMC mediante el radio espectral de la matriz \mathcal{A} . El resultado es completamente análogo al establecido en el teorema 4.

Teorema 3. *El sistema (1.5) es EMC si y solo si $\rho(\mathcal{A}) < 1$.*

Demostración. Si el sistema es EMC, entonces por el lema 8 se tiene $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(k) = 0$. Como $\mathbf{x}(0)$ y $\boldsymbol{\theta}(0)$ son arbitrarios y teniendo en cuenta que

$$Q_i(0) = E \{ \mathbf{x}(0) \mathbf{x}^T(0) \} E \{ \mathbf{1}_{\{\theta(0)=i\}} \} = E \{ \mathbf{x}(0) \mathbf{x}^T(0) \} \pi_i,$$

entonces por (1.13) y (1.14) se ve que siempre es posible obtener $q(0)$ con componentes no nulas. Entonces por la descomposición de Jordan de \mathcal{A} y por (1.27) se deduce que $\rho(\mathcal{A}) < 1$.

Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ entonces tomando límite a ambos lados de (1.27) y por la proposición 1 del anexo se tiene $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(k) = 0$. De aquí, por el lema 8, se concluye que el sistema es EMC. \square

Antes hemos dicho que la condición $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\mathbf{x}(k)\} = 0$ en la definición de EMC no es necesaria, como a veces se establece en la literatura. El siguiente resultado permite probar esta afirmación.

Lema 9. *Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ entonces $\rho(\mathcal{C}) < 1$*

Demostración. Sean $\{e_i : i = 1, \dots, Ln\}$ y $\{v_i : i = 1, \dots, n\}$ las bases canónicas de \mathbb{R}^{Ln} y \mathbb{R}^n , respectivamente. Fijemos $t, l \in \mathbb{Z}_+$ tal que $1 \leq t \leq n$, $1 \leq l \leq L$ y definamos el sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{\theta(k)} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) = v_t, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = l$$

Tomemos $s = t + (l-1)n$.

$$\mu(0) = \begin{bmatrix} \mu_1(0) \\ \vdots \\ \mu_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{1}_{\{\theta(0)=1\}}\} \\ \vdots \\ E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{1}_{\{\theta(0)=L\}}\} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \left. \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} 1 \\ \vdots \\ \left. \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} l \\ \vdots \\ \left. \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} L \end{array} \right] = e_s$$

De (1.30) se sigue

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}^k e_s\|^2 &= \|\mathcal{C}^k \mu(0)\|^2 \\ &= \|\mu(k)\|^2 \\ &= \text{tr}(\mu(k)\mu^T(k)) \\ &= \text{tr} \begin{bmatrix} \mu_1(k)\mu_1^T(k) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ & & \mu_L(k)\mu_L^T(k) \end{bmatrix} \\ &= \text{tr}(\mu_1^T(k)\mu_1(k)) + \dots + \text{tr}(\mu_L(k)\mu_L^T(k)) \\ &= \|\mu_1(k)\|^2 + \dots + \|\mu_L(k)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^L \|\mu_i(k)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^L \|E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}\}\|^2 \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Jensen se sigue

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}^k e_s\|^2 &\leq \sum_{i=1}^L E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2 \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}\} \\ &= E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} \\ &\leq n \|Q(k)\|_{\text{máx}} \end{aligned} \tag{1.37}$$

Como $\rho(\mathcal{A}) < 1$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} Q(k) = 0$. De (1.37) se tiene $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{C}^k e_s = 0$ lo que implica que $\rho(\mathcal{C}) < 1$. \square

Observe que si el sistema es EMC entonces $\rho(\mathcal{A}) < 1$ lo que, por el lema 9, implica que $\rho(\mathcal{C}) < 1$. De la relación dada en (1.30), se concluye que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(k) = 0$, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\mathbf{x}(k)\} = 0$.

1.5.2. Caso no homogéneo

Comenzamos esta subsección definiendo la estabilidad en media cuadrática (EMC) para el sistema (1.4). Además, recordemos que en este caso consideramos que la cadena de Markov es ergódica, de manera que debido a (1.13) el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k)$ existe.

Definición 4. Se dice que el sistema (1.4) es estable en media cuadrática si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\theta(0)$ existe una matriz simétrica Q positivo semi-definida tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(k) = Q,$$

donde $Q(k)$ está definido en (1.9).

Lema 10. El sistema (1.4) es EMC si y solo si para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $\theta(0)$ existen las matrices simétricas Q_i positivo semi-definidas tal que

$$Q_i = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_i(k), \quad i \in \Sigma \quad (1.38)$$

Demostración. Si el sistema es EMC entonces existe una matriz simétrica Q positivo semi-definida tal que $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} Q(k)$. Para probar (1.38) mostremos que $\{Q_i(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ es una sucesión de Cauchy. Fijando $i \in \Sigma$ y tomando $n, m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $n > m$ tenemos

$$\begin{aligned} \|Q_i(n) - Q_i(m)\| &= \|E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}\} - E\{\mathbf{x}(m)\mathbf{x}^T(m)\mathbf{1}_{\{\theta(m)=i\}}\}\| \\ &= \|E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}\} - E\{Q\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}\}\} + E\{Q\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}\} \\ &\quad - E\{Q\mathbf{1}_{\{\theta(m)=i\}}\}\} + E\{Q\mathbf{1}_{\{\theta(m)=i\}}\}\} - E\{\mathbf{x}(m)\mathbf{x}^T(m)\mathbf{1}_{\{\theta(m)=i\}}\}\| \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular y del hecho que $\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}} \leq 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \|Q_i(m) - Q_i(n)\| &\leq \|E\{(\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) - Q)\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}\}\| + \|QE\{\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}\} - QE\{\mathbf{1}_{\{\theta(m)=i\}}\}\| \\ &\quad + \|E\{(\mathbf{x}(m)\mathbf{x}^T(m) - Q)\mathbf{1}_{\{\theta(m)=i\}}\}\| \\ &\leq \|E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\} - Q\| + \|Q\| |p_i(n) - p_i(m)| + \|E\{\mathbf{x}(m)\mathbf{x}^T(m)\} - Q\| \end{aligned} \quad (1.39)$$

como la sucesión $\{p_i(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ es convergente entonces es de Cauchy y como el sistema es EMC, (1.39) implica que $\{Q_i(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ es también una sucesión de Cauchy y, por lo tanto, convergente. Sea Q_i tal que $Q_i = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_i(k)$. Como $Q_i(k)$ es positivo semi-definida entonces Q_i también lo es.

Si $Q_i = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_i(k)$ tomando

$$Q \triangleq \sum_{i=1}^L Q_i$$

se deduce de (1.18) que $\lim_{k \rightarrow \infty} Q(k) = Q$. Debido a que Q_i es positivo semi-definida, Q también lo es. \square

Lema 11. *El sistema (1.4) es EMC si y solo si para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $\boldsymbol{\theta}(0)$ existe un vector $q \in \mathbb{R}^{n^2}$ tal que*

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} q(k), \quad (1.40)$$

donde $q(k)$ está definido en (1.12).

Demostración. El resultado se sigue de la Ecuación (1.38) y de la definiciones de $q_i(k)$ y $q(k)$ en (1.11) y (1.12), respectivamente. \square

Sabemos que si $\|A\| < 1$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, entonces $\rho(A) < 1$. El lema 12 establece que lo contrario también es cierto para una norma particular. Este resultado será usado en la demostración del teorema 4.

Lema 12. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\rho(A) < 1$. Entonces existe una norma $\|\cdot\|_*$ sobre $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $\|A\|_* < 1$.*

Demostración. Si $\rho(A) < 1$ entonces por la proposición 1 del anexo existe una matriz no singular P tal que $\|P^{-1}AP\| < 1$. Sea $H = P^{-T}P^{-1} > 0$ y consideremos la norma (definida en el lema 26 del anexo)

$$\|x\|_H^2 \triangleq x^T H x = x^T P^{-T} P^{-1} x = \|P^{-1}x\|^2$$

Con base en la norma vectorial “ H ”, podemos definir una norma inducida sobre el espacio de matrices, como sigue:

$$\|A\|_* \triangleq \sup_{\|x\|_H=1} \|Ax\|_H$$

Note que

$$\begin{aligned} \|A\|_* &= \sup_{\|P^{-1}x\|=1} \|P^{-1}Ax\| \\ &= \sup_{\|P^{-1}x\|=1} \|P^{-1}APP^{-1}x\| \\ &\leq \sup_{\|P^{-1}x\|=1} \|P^{-1}AP\| \|P^{-1}x\| \\ &= \|P^{-1}AP\| \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|A\|_* \leq \|P^{-1}AP\| < 1$. □

Teorema 4. *El sistema (1.4) es EMC si y solo si $\rho(\mathcal{A}) < 1$*

Demostración. Sea el sistema (1.4) EMC. Por inducción, de (1.28) se obtiene

$$q(k) = \mathcal{A}^k q(0) + \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{A}^{k-m-1} \mathcal{B}p(m), \quad (1.41)$$

que es una generalización de (1.2). Como el sistema es EMC entonces por (1.40) sabemos que $q = \lim_{k \rightarrow \infty} q(k)$. Como la definición de EMC es para toda condición inicial entonces podemos considerar $q(0) = 0$, de donde por (1.41) se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{A}^{k-m-1} \mathcal{B}p(m) = q$$

lo que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^k q(0) = 0$. Como $\mathbf{x}(0)$ y $\boldsymbol{\theta}(0)$ son arbitrarios, entonces $\rho(\mathcal{A}) < 1$.

Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^k q(0) = 0$. Probemos que la serie $\sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{A}^{k-m-1} \mathcal{B}p(m)$ converge. Puesto que la sucesión $\{p(m), m \in \mathbb{Z}_+\}$ es convergente entonces ella es acotada, es decir, existe $c > 0$ tal que $\|p(m)\|_H < c$. Luego

$$\sum_{m=0}^{k-1} \|\mathcal{A}^{k-m-1} \mathcal{B}p(m)\|_H \leq c \|\mathcal{B}\| \sum_{m=0}^{k-1} \|\mathcal{A}\|_*^{k-m-1} \quad (1.42)$$

Como $\rho(\mathcal{A}) < 1$ el lema 12 implica $\|\mathcal{A}\|_* < 1$, de donde la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \|\mathcal{A}\|_*^{k-m-1}$ es convergente. De (1.42) por el criterio de comparación se sigue que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \|\mathcal{A}^{k-m-1} \mathcal{B}p(m)\|_H$ también converge. Esto implica que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}^{k-m-1} \mathcal{B}p(m)$ converge. De aquí, por (1.41) se concluye que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q(k) = q$$

La EMC se concluye, entonces, del lema 8. □

1.5.3. Ejemplos

En esta sección se proporcionan diferentes ejemplos que ilustran los resultados presentados en las secciones previas. En particular se analiza la estabilidad del sistema estocástico en relación con la estabilidad de los subsistemas que lo conforman.

Ejemplo 2. Consideramos el sistema escalar con 2 modos, $a_1 = 0.5$ y $a_2 = 1.4$, y matriz de transición de probabilidad

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix},$$

En este caso la matriz \mathcal{A} es :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0.125 & 1.7644 \\ 0.125 & 0.196 \end{bmatrix}$$

y dado que $\rho(\mathcal{A}) = 0.6314 < 1$ entonces el sistema es EMC. Notemos que el modo a_1 es estable, mientras que el modo a_2 es inestable. Aun cuando el sistema tiende a quedarse en el modo a_2 , que es inestable, el sistema como un todo es estable.

Ejemplo 3. En este ejemplo se muestra un sistema con todos sus modos estables, sin embargo, el sistema no es EMC.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

En este caso la matriz \mathcal{A} es:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 22.5 & 0.064 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.036 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0.096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 2.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 2.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.004 & 60 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notamos que todos los modos son estables, pero como $\rho(\mathcal{A}) = 10.066 > 1$ el sistema no es EMC.

Ejemplo 4. En este ejemplo se muestra un sistema con todos sus modos inestables, sin embargo, el sistema es EMC.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.85 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Claramente los modos del sistema son inestables. La matriz \mathcal{A} es:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0.45 & -0.6 & -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 \\ 1.8 & -2.4 & -2.4 & 3.2 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Como $\rho(\mathcal{A}) = 0,6 < 1$ el sistema es EMC.

Los ejemplos presentados permiten concluir que no hay relación entre la estabilidad de los modos y la estabilidad del sistema visto como un todo.

1.6. Estabilidad estocástica mediante la ecuación de Lyapunov

En esta sección se presenta una caracterización algebraica para la estabilidad estocástica del sistema (1.5) mediante un conjunto de ecuaciones de tipo Lyapunov. Observe que cuando el espacio de estados se reduce al conjunto unitario $\Sigma = \{1\}$ la ecuación (1.43) se convierte en la ecuación de Lyapunov para sistemas lineales sin saltos. La ecuación de Lyapunov que proponemos para el sistema (1.5) es de la forma siguiente:

$$\sum_{j=1}^L p_{ij} A_i^T M_j A_i - M_i = -W_i, \quad i, j \in \Sigma, \quad (1.43)$$

en esta ecuación todas las matrices están en el espacio $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Para lo que sigue a continuación al conjunto de trayectorias $\mathbf{x}(k)$ que resuelven el sistema (1.5) será denotado por Γ . Recordemos que el sistema (1.5) es EE si para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\theta}(0)$, se tiene

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{x}(k)\|^2 \right\} < \infty \quad (1.44)$$

Sea $M_{\theta(k)}$ una matriz simétrica definida positiva y definamos una función de Lyapunov apropiada, como sigue:

$$V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) = \mathbf{x}^T(k) M_{\theta(k)} \mathbf{x}(k). \quad (1.45)$$

Observe que $V(\cdot, \cdot)$ es una función positivo definida. Enseguida se muestra que esta función es decreciente en media sobre Γ .

Lema 13. *Sea $\mathbf{x}(k)$ la trayectoria solución del sistema (1.5) y supongamos que dado el conjunto $\{W_i; i \in \Sigma\}$ de matrices simétricas positivo definidas existe un conjunto de matrices simétricas $\{M_i; i \in \Sigma\}$ positivo definidas que satisfacen (1.43). Entonces*

$$E\{V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\} = -E\{\mathbf{x}^T(k) W_{\theta(k)} \mathbf{x}(k)\}. \quad (1.46)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & E\{V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\} \\ &= E\{\mathbf{x}^T(k+1) M_{\theta(k+1)} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k) M_{\theta(k)} \mathbf{x}(k)\} \\ &= E\{\mathbf{x}^T(k) A_{\theta(k)}^T M_{\theta(k+1)} A_{\theta(k)} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k) M_{\theta(k)} \mathbf{x}(k)\} \\ &= E\left\{ \sum_{i,j=1}^L \mathbf{x}^T(k) A_i^T M_j A_i \mathbf{x}(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} - \sum_{i=1}^L \mathbf{x}^T(k) M_i \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \right\} \\ &= E\left\{ E\left\{ \sum_{i,j=1}^L \mathbf{x}^T(k) A_i^T M_j A_i \mathbf{x}(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} - \sum_{i=1}^L \mathbf{x}^T(k) M_i \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \mid \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k) \right\} \right\} \end{aligned}$$

Debido que $\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$ es medible con respecto a $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)\}$ la igualdad de arriba se puede escribir como

$$\begin{aligned} & E\{V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\} \\ &= E\left\{ \sum_{i,j=1}^L \mathbf{x}^T(k) A_i^T M_j A_i \mathbf{x}(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} E\{\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \mid \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)\} - \sum_{i=1}^L \mathbf{x}^T(k) M_i \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \right\} \end{aligned}$$

De aquí, por el lema 1 se sigue:

$$\begin{aligned}
 & E\{V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\} \\
 &= E\left\{ \sum_{i,j=1}^L \mathbf{x}^T(k) A_i^T M_j A_i \mathbf{x}(k) \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(k)=i\}} p_{\boldsymbol{\theta}(k)j} - \sum_{i=1}^L \mathbf{x}^T(k) M_i \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \right\} \\
 &= E\left\{ \sum_{i,j=1}^L \mathbf{x}^T(k) A_i^T M_j A_i \mathbf{x}(k) p_{ij} - \sum_{i=1}^L \mathbf{x}^T(k) M_i \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \right\} \\
 &= E\left\{ \sum_{i=1}^L \mathbf{x}^T(k) \left\{ \sum_{j=1}^L A_i^T M_j A_i p_{ij} - M_i \right\} \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \right\} \\
 &= E\left\{ -\mathbf{x}^T(k) \sum_{i=1}^L W_i \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(k)=i\}} \mathbf{x}(k) \right\} \\
 &= -E\left\{ \mathbf{x}^T(k) W_{\boldsymbol{\theta}(k)} \mathbf{x}(k) \right\}
 \end{aligned}$$

□

El resultado anterior implica inmediatamente la ecuación (1.47).

Corolario 1. *Bajo las hipótesis del lema 13 se sigue que*

$$\frac{E\{V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\}}{E\{V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\}} = -\frac{E\{\mathbf{x}^T(k) W_{\boldsymbol{\theta}(k)} \mathbf{x}(k)\}}{E\{\mathbf{x}^T(k) M_{\boldsymbol{\theta}(k)} \mathbf{x}(k)\}}, \quad \mathbf{x}(k) \neq 0 \quad (1.47)$$

Esta igualdad será utilizada en la demostración del resultado principal de la presente sección. Para presentar el siguiente lema, recordemos previamente la desigualdad de Rayleigh. Si $N \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica tal que λ_m y λ_M son los autovalores mínimo y máximo, respectivamente, entonces

$$\lambda_m \|x\|_2^2 \leq x^T N x \leq \lambda_M \|x\|_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (1.48)$$

La desigualdad de Rayleigh es aplicada reiteradamente para matrices simétricas definidas positivas, de manera que los valores propios λ_m y λ_M son estrictamente positivos.

Lema 14. *La función de Lyapunov $V(\cdot, \cdot)$ definida en (1.45) es decreciente exponencialmente en media sobre Γ , es decir, existe $\alpha > 0$, tal que*

$$E\{V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\} \leq \alpha^k E\{V(\mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0))\}, \quad (1.49)$$

Demostración. Para $\mathbf{x}(k) = 0$ la desigualdad es trivial.

Ahora para el caso $\mathbf{x}(k) \neq 0$, aplicando la desigualdad de Rayleigh a $W_{\theta(k)}$ y $M_{\theta(k)}$ se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}\{W_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\} &\leq E\{\mathbf{x}^T(k)W_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\} \\ &\leq \lambda_{\max}\{W_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\} \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}\{M_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\} &\leq E\{\mathbf{x}^T(k)M_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\} \\ &\leq \lambda_{\max}\{M_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Ahora de (1.50) y (1.51) se sigue

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\min}\{W_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\}}{\lambda_{\max}\{M_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\}} &\leq \frac{E\{\mathbf{x}^T(k)W_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\}}{E\{\mathbf{x}^T(k)M_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\}} \leq \frac{\lambda_{\max}\{W_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\}}{\lambda_{\min}\{M_{\theta(k)}\}E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\}} \\ \min_{\theta(k) \in \Sigma} \left\{ \frac{\lambda_{\min}\{W_{\theta(k)}\}}{\lambda_{\max}\{M_{\theta(k)}\}} \right\} &\leq \frac{\lambda_{\min}\{W_{\theta(k)}\}}{\lambda_{\max}\{M_{\theta(k)}\}} \leq \frac{E\{\mathbf{x}^T(k)W_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\}}{E\{\mathbf{x}^T(k)M_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\}} \end{aligned}$$

definiendo α por

$$\alpha \triangleq 1 - \min_{\theta(k) \in \Sigma} \left\{ \frac{\lambda_{\min}\{W_{\theta(k)}\}}{\lambda_{\max}\{M_{\theta(k)}\}} \right\} < 1$$

De aquí

$$-\frac{E\{\mathbf{x}^T(k)W_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\}}{E\{\mathbf{x}^T(k)M_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\}} \leq -\min_{\theta(k) \in \Sigma} \left\{ \frac{\lambda_{\min}\{W_{\theta(k)}\}}{\lambda_{\max}\{M_{\theta(k)}\}} \right\} = \alpha - 1$$

y teniendo en cuenta (1.47) tenemos

$$0 < \frac{E\{\mathbf{x}^T(k+1)M_{\theta(k+1)}\mathbf{x}(k+1)\}}{E\{\mathbf{x}^T(k)M_{\theta(k)}\mathbf{x}(k)\}} \leq \alpha,$$

de donde se sigue la desigualdad

$$E\{V(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\theta}(k+1))\} \leq \alpha E\{V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k))\}.$$

y de aquí, el resultado se concluye por inducción. \square

Teorema 5 ([1]). *El sistema (1.5) es EE si y solo si para cualquier conjunto de matrices simétricas $\{W_i; i \in \Sigma\}$ positivo definidas existe un conjunto de matrices simétricas $\{M_i; i \in \Sigma\}$ positivo definidas que satisfacen (1.43).*

Demostración. Asumamos que se cumple (1.43) y consideremos la función de Lyapunov definida en (1.46). Si $\mathbf{x}(k_0) = 0$ para algún $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, debido a la recurrencia de (1.5) tendremos que $\mathbf{x}(k) = 0$ para todo $k \geq k_0$ y por lo tanto la estabilidad estocástica de (1.5) es trivial. Asumamos, pues, que $\mathbf{x}(k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$ entonces de (1.49) se sigue:

$$\begin{aligned} E \left\{ \sum_{k=0}^n V(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k)) \right\} &\leq (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n) E\{V(\mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0))\} \\ &= \left(\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \right) E\{V(\mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0))\} \\ &= \left(\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \right) E\{\mathbf{x}^T(0) M_{\boldsymbol{\theta}(0)} \mathbf{x}(0)\} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Ahora definamos

$$\beta = \min_{\boldsymbol{\theta}(k) \in \Sigma} \{ \lambda_{\min}\{M_{\boldsymbol{\theta}(k)}\} \}$$

Como $M_{\boldsymbol{\theta}(k)}$ es una matriz positivo definida entonces $\beta > 0$ y (1.48) implica

$$\beta \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) \leq \lambda_{\min}\{M_{\boldsymbol{\theta}(k)}\} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) \leq \mathbf{x}^T(k) M_{\boldsymbol{\theta}(k)} \mathbf{x}(k) \quad (1.53)$$

De (1.52) y (1.53) se sigue

$$E \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) \right\} \leq \left(\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\beta(\alpha - 1)} \right) E\{\mathbf{x}^T(0) M_{\boldsymbol{\theta}(0)} \mathbf{x}(0)\}$$

Como $0 < \alpha < 1$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) \right\} \leq \left(\frac{1}{c(1 - \alpha)} \right) E\{\mathbf{x}^T(0) M_{\boldsymbol{\theta}(0)} \mathbf{x}(0)\} < \infty$$

lo que prueba que el sistema es EE.

Ahora asumamos que el sistemas (1.5) es EE y para comenzar definamos la matriz D_k^l , como sigue:

$$D_k^l \triangleq \prod_{s=k}^l A_{\boldsymbol{\theta}(l-s+k+1)} \quad (1.54)$$

Con base en D_k^l definamos ahora la sucesión de matrices aleatorias $\{M(n - k, \boldsymbol{\theta}(k)) : 0 \leq k \leq n\}$ de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} M(n - k, \boldsymbol{\theta}(k)) &\triangleq W_{\boldsymbol{\theta}(k)} + A_{\boldsymbol{\theta}(k)}^T E \left\{ W_{\boldsymbol{\theta}(k+1)} \middle| \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k) \right\} A_{\boldsymbol{\theta}(k)} \\ &\quad + \sum_{l=k}^{n-2} A_{\boldsymbol{\theta}(k)}^T E \left\{ (D_k^l)^T W_{\boldsymbol{\theta}(l+2)} (D_k^l) \middle| \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\theta}(k) \right\} A_{\boldsymbol{\theta}(k)} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Observe que debido a que $W_{\theta(l)}$ es simétrica y positivo definida entonces $M(n - k, \theta(k))$ es también simétrica y positivo definida.

A partir de (1.55) la sucesión escalar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(k)M(n - k, \theta(k))\mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}^T(k)W_{\theta(k)}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k)A_{\theta(k)}^T E \left\{ W_{\theta(k+1)} \middle| \mathbf{x}(k), \theta(k) \right\} A_{\theta(k)}\mathbf{x}(k) \\ &\quad + \sum_{l=k}^{n-2} \mathbf{x}^T(k)A_{\theta(k)}^T E \left\{ (D_k^l)^T W_{\theta(l+2)} (D_k^l) \middle| \mathbf{x}(k), \theta(k) \right\} A_{\theta(k)}\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}^T(k)M(n - k, \theta(k))\mathbf{x}(k) = E \left\{ \sum_{l=k}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\theta(l)}\mathbf{x}(l) \middle| \mathbf{x}(k), \theta(k) \right\} \quad (1.56)$$

Para $\mathbf{x}(k) = x_k$ y $\theta(k) = i$, de (1.56) se sigue que

$$x_k^T M(n - k, i)x_k = E \left\{ \sum_{l=k}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\theta(l)}\mathbf{x}(l) \middle| \mathbf{x}(k) = x_k, \theta(k) = i \right\} \quad (1.57)$$

lo que implica de inmediato que la sucesión es creciente puesto que $W_{\theta(l)}$ es positivo definida para todo $\theta(l) \in \Sigma$. Veamos enseguida que la sucesión también es acotada. Esto se sigue de la estabilidad estocástica del sistema. En efecto, por la desigualdad de Rayleigh tenemos:

$$\mathbf{x}^T(k)W_{\theta(k)}\mathbf{x}(k) \leq \lambda_{\max}\{W_{\theta(k)}\}\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) \leq d\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k), \quad (1.58)$$

donde γ está definido por

$$\gamma = \max_{\theta(k) \in \Sigma} \{\lambda_{\max}(W_{\theta(k)})\}.$$

Luego sustituyendo (1.58) en (1.56) tenemos

$$\begin{aligned}
 x_k^T M(n-k, i) x_k &= E \left\{ \sum_{l=k}^n \mathbf{x}^T(l) W_{\theta(l)} \mathbf{x}(l) \middle| \mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i \right\} \\
 &\leq \gamma E \left\{ \sum_{l=k}^n \mathbf{x}^T(l) \mathbf{x}(l) \middle| \mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i \right\} \\
 &\leq \gamma \frac{E \left\{ \sum_{l=k}^n \mathbf{x}^T(l) \mathbf{x}(l) \mathbf{1}_{\{\mathbf{x}(k)=x_k, \boldsymbol{\theta}(k)=i\}} \right\}}{\Pr(\mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i)} \\
 &\leq \gamma \frac{E \left\{ \sum_{l=k}^n \mathbf{x}^T(l) \mathbf{x}(l) \right\}}{\Pr(\mathbf{x}(k) = x_k, \boldsymbol{\theta}(k) = i)}
 \end{aligned}$$

Dado que el sistema es EE esta desigualdad implica que la sucesión de lado izquierdo es acotada superiormente. Lo anterior prueba que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^T M(n-k, i) x_k$ existe para todo $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Sea $M(n-k, i) = [m(n-k, i)_{jr}]$. Tomando $x_k = e_j$ entonces existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_j^T M(n-k, i) e_j = \lim_{n \rightarrow \infty} m(n-k, i)_{jj} = m(i)_{jj} \quad (1.59)$$

De otro lado, tomando $x_k = e_i + e_j$ se sigue

$$\begin{aligned}
 (e_j + e_r)^T M(n-k, i) (e_j + e_r) &= e_j^T M(n-k, i) e_j + e_r^T M(n-k, i) e_r \\
 &\quad + e_j^T M(n-k, i) e_r + e_r^T M(n-k, i) e_j
 \end{aligned} \quad (1.60)$$

Como $M(n-k, i)$ es simétrica entonces $e_j^T M(n-k, i) e_r = e_r^T M(n-k, i) e_j$. El límite de la izquierda de (1.60) existe y por (1.59) se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_j^T M(n-k, i) e_r = \lim_{n \rightarrow \infty} m(n-k, i)_{jr} = m(i)_{jr} \quad (1.61)$$

De (1.59) y (1.61) se concluye

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(n-k, i) = M_i, \quad (1.62)$$

donde $M_i = [m(i)_{jr}]$.

De (1.56) y de la proposición 2-7, 2-8 del anexo, se sigue:

$$\begin{aligned}
 & E \{ \mathbf{x}^T(0)M(n, \boldsymbol{\theta}(0))\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^T(1)M(n-1, \boldsymbol{\theta}(1))\mathbf{x}(1) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \} \\
 &= E \left\{ E \left\{ \sum_{l=0}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\boldsymbol{\theta}(l)}\mathbf{x}(l) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \right\} | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \right\} \\
 &- E \left\{ E \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\boldsymbol{\theta}(l)}\mathbf{x}(l) | \mathbf{x}(1), \boldsymbol{\theta}(1) \right\} | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \right\} \\
 &= E \left\{ \sum_{l=0}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\boldsymbol{\theta}(l)}\mathbf{x}(l) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \right\} \\
 &- E \left\{ E \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\boldsymbol{\theta}(l)}\mathbf{x}(l) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0), \mathbf{x}(1), \boldsymbol{\theta}(1) \right\} | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \right\} \\
 &= E \left\{ \sum_{l=0}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\boldsymbol{\theta}(l)}\mathbf{x}(l) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \right\} \\
 &- E \left\{ \sum_{l=1}^n \mathbf{x}^T(l)W_{\boldsymbol{\theta}(l)}\mathbf{x}(l) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \right\} = \mathbf{x}^T(0)W_{\boldsymbol{\theta}(0)}\mathbf{x}(0) \tag{1.63}
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 & E \{ \mathbf{x}^T(0)M(n, \boldsymbol{\theta}(0))\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^T(1)M(n-1, \boldsymbol{\theta}(1))\mathbf{x}(1) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \} \\
 &= \mathbf{x}^T(0)M(n, \boldsymbol{\theta}(0))\mathbf{x}(0) - E \{ \mathbf{x}^T(1)M(n-1, \boldsymbol{\theta}(1))\mathbf{x}(1) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \} \\
 &= \mathbf{x}^T(0)M(n, \boldsymbol{\theta}(0))\mathbf{x}(0) - E \{ \mathbf{x}^T(0)A_{\boldsymbol{\theta}(0)}^T M(n-1, \boldsymbol{\theta}(1))A_{\boldsymbol{\theta}(0)}\mathbf{x}(0) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \} \\
 &= \mathbf{x}^T(0)M(n, \boldsymbol{\theta}(0))\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^T(0)A_{\boldsymbol{\theta}(0)}^T E \{ M(n-1, \boldsymbol{\theta}(1)) | \mathbf{x}(0), \boldsymbol{\theta}(0) \} A_{\boldsymbol{\theta}(0)}\mathbf{x}(0) \tag{1.64}
 \end{aligned}$$

De (1.63) y (1.64) para $\boldsymbol{\theta}(0) = i$ y $\mathbf{x}(0) = x_0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 x_0^T W_i x_0 &= x_0^T M(n, i) x_0 - x_0^T A_i^T E \{ M(n-1, \boldsymbol{\theta}(1)) | \mathbf{x}(0) = x_0, \boldsymbol{\theta}(0) = i \} A_i x_0 \\
 &= x_0^T M(n, i) x_0 \\
 &- \sum_{j=1}^L x_0^T A_i^T E \{ \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(1)=j\}} M(n-1, j) | \mathbf{x}(0) = x_0, \boldsymbol{\theta}(0) = i \} A_i x_0 \\
 &= x_0^T M(n, i) x_0 \\
 &- \sum_{j=1}^L x_0^T A_i^T M(n-1, j) E \{ \mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\theta}(1)=j\}} | \mathbf{x}(0) = x_0, \boldsymbol{\theta}(0) = i \} A_i x_0 \\
 &= x_0^T M(n, i) x_0 \\
 &- \sum_{j=1}^L x_0^T A_i^T M(n-1, j) p_{ij} A_i x_0 \tag{1.65}
 \end{aligned}$$

Como (1.65) es válido para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, por lema 29 del anexo se tiene:

$$M(n, i) - \sum_{j=1}^L A_i^T M(n-1, j) A_i p_{ij} = W_i. \quad (1.66)$$

Finalmente, tomando límite a ambos lados de (1.66) cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\sum_{j=1}^L p_{ij} A_i^T M_j A_i - M_i = -W_i$$

□

1.7. Relaciones entre las diferentes nociones de estabilidad

En esta sección se establecen la relaciones entre los diferentes tipos de estabilidad introducidos en la sección 1.4. Se prueba que bajo la condición de ser Σ un espacio de estados finito, las nociones de estabilidad (a)-(d) son equivalentes y todas estas implican la estabilidad (e), no siendo necesariamente cierto lo contrario (ver [3, Ejem. 3.17, Pag.39]). Así pues, la estabilidad CSE es más débil que las demás. Comencemos por el lema siguiente:

Lema 15. Para la matriz $R_i(k)$, definida por

$$R_i(k) \triangleq \sum_{l=0}^k Q_i(l) = \sum_{l=0}^k E \{ \mathbf{x}(l) \mathbf{x}^T(l) \mathbf{1}_{\{\theta(l)=i\}} \}, \quad i \in \Sigma$$

se cumple:

$$\sum_{i=1}^L \text{tr}(R_i(k)) = \sum_{l=0}^k E \{ \|\mathbf{x}(l)\|^2 \} \quad (1.67)$$

Demostración. La prueba se sigue directamente de la definición de $R_i(k)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^L \text{tr}(R_i(k)) &= \sum_{i=1}^L \text{tr} \left(\sum_{l=0}^k E \{ \mathbf{x}(l) \mathbf{x}^T(l) \mathbf{1}_{\{\theta(l)=i\}} \} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^L \sum_{l=0}^k E \{ \text{tr}(\mathbf{x}(l) \mathbf{x}^T(l) \mathbf{1}_{\{\theta(l)=i\}}) \} \\
 &= \sum_{i=1}^L \sum_{l=0}^k E \{ \|\mathbf{x}(l)\|^2 \mathbf{1}_{\{\theta(l)=i\}} \} \\
 &= \sum_{l=0}^k E \left\{ \sum_{i=1}^L \|\mathbf{x}(l)\|^2 \mathbf{1}_{\{\theta(l)=i\}} \right\} \\
 &= \sum_{l=0}^k E \{ \|\mathbf{x}(l)\|^2 \}
 \end{aligned}$$

□

En el lema 16 se establecen dos desigualdades que van a ser útiles en la demostración de los teoremas 6 y 7.

Lema 16. *Sea $Q(k)$ la matriz definida en (1.9), entonces:*

$$\frac{1}{n} E \{ \|\mathbf{x}(k)\|^2 \} \leq \|Q(k)\|_{\text{máx}} \leq E \{ \|\mathbf{x}(k)\|^2 \} \quad (1.68)$$

Demostración. Del lema 2, se sigue

$$E \{ \|\mathbf{x}(k)\|^2 \} = E \{ \text{tr}(\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)) \} = \text{tr}(E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \}) = \text{tr}(Q(k)) \leq n \|Q(k)\|_{\text{máx}}$$

lo que prueba la desigualdad de la izquierda. La desigualdad de la derecha se obtiene a partir de la desigualdad de Jensen como sigue:

$$\begin{aligned}
 \|Q(k)\|_{\text{máx}} &= \|E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \} \|_{\text{máx}} \\
 &\leq E \{ \|\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\|_{\text{máx}} \} \\
 &= E \left\{ \max_{1 \leq i, j \leq n} |\mathbf{x}_i(k) \mathbf{x}_j(k)| \right\} \\
 &\leq \frac{1}{2} E \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} (\mathbf{x}_i^2(k) + \mathbf{x}_j^2(k)) \right\} \\
 &\leq E \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2(k) \right\} \\
 &= E \{ \|\mathbf{x}(k)\|^2 \}
 \end{aligned}$$

□

Los argumentos que se presentan en el siguiente teorema están basados fundamentalmente en [21], donde se presenta el mismo resultado, pero para sistemas singulares. Hemos preferido adaptar aquellos argumentos para dejar en evidencia que el caso singular, que se estudia en el próximo capítulo, es una generalización del caso no singular.

Teorema 6. *El sistema (1.5) es EMC si y solo si es EE.*

Demostración.

Sea el sistema (1.5) EMC. De (1.26) se sigue que

$$(I - \mathcal{A})q(k) = \mathcal{A}(q(k-1) - q(k)), \quad k \geq 1.$$

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})q(1) = \mathcal{A}(q(0) - q(1))$$

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})q(2) = \mathcal{A}(q(1) - q(2))$$

$$\vdots = \vdots$$

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})q(k-1) = \mathcal{A}(q(k-2) - q(k-1))$$

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})q(k) = \mathcal{A}(q(k-1) - q(k))$$

Sumando término a término se obtiene

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A}) \left(\sum_{l=1}^k q(l) \right) = \mathcal{A}(q(0) - q(k))$$

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A}) \left(\sum_{l=1}^k q(l) \right) = q(1) - \mathcal{A}q(k)$$

Puesto que el sistema es EMC entonces $\rho(\mathcal{A}) < 1$ lo que implica que la matriz $(\mathcal{I} - \mathcal{A})$ es inversible. Por consiguiente,

$$\sum_{l=1}^k q(l) = (I - \mathcal{A})^{-1}(q(1) - \mathcal{A}q(k))$$

y por (1.36), tomando límite a ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k q(l) = (\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}q(1)$$

Así pues la serie de vectores $\sum_{l=0}^{\infty} q(l)$ converge lo que implica que la serie de las componentes también converge. Entonces existen $T_i \in \mathbb{R}^{n^2}$, $i \in \Sigma$, tal que

$$T_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k q_i(l) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k \text{vec}(Q_i(l))$$

y tomando en cuenta que el operador vec es continuo, entonces

$$T_i = \text{vec} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k Q_i(l) \right)$$

De aquí y por la definición de $R_i(k)$ se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k Q_i(l) = \text{vec}^{-1}(T_i) \quad (1.69)$$

Finalmente, por (1.67)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k E\{\|\mathbf{x}(l)\|^2\} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^L \text{tr}(R_i(k)) \\ &= \sum_{i=1}^L \text{tr} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} R_i(k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^L \text{tr}(\text{vec}^{-1}(T_i)) < \infty \end{aligned}$$

lo que prueba que (1.5) es EE.

Si el sistema es EE entonces $\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} < \infty$ lo que implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} = 0$. La estabilidad EMC se sigue de (1.68). \square

El siguiente resultado se basa fundamentalmente en las desigualdades (1.68).

Teorema 7. *El sistema (1.5) es EE si y solo si es SME.*

Para establecer la equivalencia entre la EMC y ES, teorema 8, será de utilidad la desigualdad (1.70).

Lema 17. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\rho(A) < 1$ entonces existen $\beta \geq 1$ y $0 < \gamma < 1$ tal que*

$$\|A^k\|_1 \leq \beta \gamma^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.70)$$

Demostración. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \rho(A) < \gamma < 1$. Por La fórmula de Gelfand se tiene que

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_1^{\frac{1}{k}},$$

entonces para $\epsilon = \gamma - \rho(A)$ existe $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que si $k > k_0$ se tiene $\|A^k\|_1^{\frac{1}{k}} < \gamma$. Tomando $\beta \geq 1$ se obtiene

$$\|A^k\|_1 < \gamma^k \leq \beta \gamma^k$$

\square

Sea $V : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ el operador vec. Note que en este caso V es inversible, esto es, existe $V^{-1} : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ que regresa los vectores columna a sus correspondiente matrices cuadradas. Consideremos, además,

$$\|V\| \triangleq \sup_{\|Q\| \neq 0} \frac{\|V(Q)\|}{\|Q\|}$$

$$\|V^{-1}\|_{\text{máx}} \triangleq \sup_{\|q\| \neq 0} \frac{\|V^{-1}(q)\|_{\text{máx}}}{\|q\|}$$

Estamos listos para presentar la equivalencia entre EMC y EXE.

Teorema 8. *El sistema (1.5) es EMC si y solo si es EXE.*

Demostración. Si el sistema es EMC entonces $\rho(\mathcal{A}) < 1$. En este caso, por el lema 17 existen $\beta \geq 1$ y $0 < \gamma < 1$ tal que $\|\mathcal{A}^k\|_1 < \beta\gamma^k$.

De la definición del operador V , la desigualdad de Jensen y la desigualdad (1.68) se sigue:

$$\begin{aligned} \|q(0)\|_1 &\triangleq \sum_{i=1}^L \|q_i(0)\| \\ &= \sum_{i=1}^L \|V(Q_i(0))\| \\ &\leq \|V\| \sum_{i=1}^L \|E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{1}_{\{\theta(0)=i\}}\}\| \\ &\leq \|V\| E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\} \end{aligned} \tag{1.71}$$

Dado que

$$E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} = \sum_{i=1}^L \text{tr}(Q_i(k)) \leq n \sum_{i=1}^L \|Q_i(k)\|_{\text{máx}}$$

entonces por (1.70) y (1.71) tenemos

$$\begin{aligned}
 E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} &\leq n \sum_{i=1}^L \|Q_i(k)\|_{\text{máx}} \\
 &= n \sum_{i=1}^L \|V^{-1}(q_i(k))\|_{\text{máx}} \\
 &\leq n \sum_{i=1}^L \|V^{-1}\|_{\text{máx}} \|q_i(k)\| \\
 &= n \|V^{-1}\|_{\text{máx}} \|q(k)\|_1 \\
 &= n \|V^{-1}\|_{\text{máx}} \|\mathcal{A}^k q(0)\|_1 \\
 &\leq n \|V^{-1}\|_{\text{máx}} \|\mathcal{A}^k\|_1 \|q(0)\|_1 \\
 &\leq n \|V^{-1}\|_{\text{máx}} \|\mathcal{A}^k\|_1 \|V\| E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\} \\
 &\leq n \|V^{-1}\|_{\text{máx}} \|V\| \beta \gamma^k E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\},
 \end{aligned}$$

donde β y γ son las correspondientes constantes de la matriz \mathcal{A} estipuladas en el lema 17. Tomando $\beta_1 = n \|V\| \|V^{-1}\|_{\text{máx}} \beta \geq 1$, se obtiene $E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} \leq \beta_1 \gamma^k E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\}$.

Por otro lado, de la definición se sigue directamente que la EXE implica la EMC. \square

Teorema 9. *Si el sistema (1.5) es EMC entonces es CSE.*

Demostración. Del teorema anterior si el sistema es EMC entonces él es EXE, es decir, existen constantes $0 < \alpha < 1 \leq \beta$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ se tiene

$$E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} \leq \beta \alpha^k E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\},$$

Esta desigualdad implica

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} \leq \frac{\beta}{1-\alpha} E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\} \quad (1.72)$$

aplicando la desigualdad de Markov se sigue

$$\Pr\{\|\mathbf{x}(k)\| \geq \epsilon\} \leq \frac{E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\}}{\epsilon^2} \quad (1.73)$$

De (1.72) y (1.73) se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{\|\mathbf{x}(k)\| \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} \leq \frac{\beta}{\epsilon^2(1-\alpha)} E\{\|\mathbf{x}(0)\|^2\} \quad (1.74)$$

Definiendo la sucesión de eventos

$$A_k = \{\|\mathbf{x}(k)\| \geq \epsilon\}$$

se sigue de (1.74) y del lema de Borel-Cantelli que

$$\Pr \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \right\} = 0.$$

Tomando complemento en esta igualdad se obtiene $\Pr\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\} = 1$, de donde $\Pr\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k)\| = 0\right\} = 1$. \square



Capítulo 2

Regularidad y Estabilidad de Sistemas Lineales Singulares con Saltos Markovianos

En este capítulo se analizan los problemas de la regularidad y estabilidad de los sistemas lineales singulares con saltos markovianos, esto es, sistemas que tienen una matriz singular en el lado izquierdo de la ecuación dinámica. A diferencia lo que sucede en los sistemas lineales no singulares, estudiados en el capítulo 1, el problema de la regularidad, es decir, el problema de la existencia y unicidad de soluciones de un sistema singular no es trivial. Para abordar este problema se requiere condiciones adecuadas que serán presentadas más adelante. Por otro lado, muchos de los resultados concernientes a la estabilidad de sistemas lineales no singulares son extendidos aquí para sistemas lineales singulares. Esta extensión a requerido bastante esfuerzo técnico para superar las dificultades que ofrece la singularidad.

Debido a su importancia práctica y teórica, los sistemas lineales singulares vienen siendo extensamente estudiados a partir de la década de 1980 (p. ej. [5], [22], [39], [40]).

2.1. Introducción

En esta sección se revisan brevemente algunos conceptos básicos de la teoría de los sistemas lineales singulares de control clásico, es decir, de aquellos sistemas que no presentan saltos. Los resultados que se presentan en esta sección serán utilizados en los

sistemas singulares con saltos markovianos. Muchos procesos de las ciencias económicas [23], la ingeniería eléctrica [24], de la robótica [25], etc. pueden ser modelados por el siguiente sistema:

$$Sx(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{X}, \quad (2.1)$$

donde \mathbb{X} es un subconjunto de \mathbb{R}^n que será determinado más adelante. Lo fundamental en este modelo es que la matriz S se considera que es singular o más generalmente que $\text{rank}(S) \leq n$. Como siempre $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es una señal de entrada y las matrices $A, S \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ determinan los parámetros del sistema.

Cuando el rango de la matriz S es estrictamente menor que n , el sistema es llamado singular. En el caso contrario, es decir, cuando $\text{rank}(S) = n$, se trata de un sistema no singular y, en particular, cuando $S = I$, donde I es la matriz identidad, el sistema no singular se dice que está en su forma normal estándar. Los sistemas no singulares estándar fueron estudiados en el capítulo anterior. Si bien en este capítulo estamos interesados en el caso singular, los resultados presentados aquí son una extensión de los resultados conocidos de la teoría de sistemas no singulares estándar. Esta no es una tarea trivial, pues la singularidad de la matriz S no permite usar técnicas recursivas como en el caso anterior. Más aun, dado que la matriz S es singular la solución del sistema (2.1) podría no existir y, en el caso que exista, ésta podría no ser única. Este problema se conoce en la literatura como el problema de la regularidad (ver [41]). De manera pues que un primer problema por abordar es analizar bajo qué condiciones el sistema (2.1) posee solución única.

A continuación definimos el concepto de regularidad para el par de matrices (S, A) .

Definición 5 ([41]). *Se dice que el par de matrices (S, A) es regular si existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\det(\lambda S - A) \neq 0 \quad (2.2)$$

o equivalentemente, el polinomio $p(\lambda) = \det(\lambda S - A)$ no es idénticamente nulo. En este caso también se dice que el par de matrices (S, A) es regular.

Ejemplo 5. Consideremos las matrices :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$p(\lambda) = \det(\lambda S - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2.$$

Como $\det(\lambda S - A) \neq 0$ para todo $\lambda \neq 0$ entonces (S, A) es regular.

Ejemplo 6. Consideremos las matrices:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$p(\lambda) = \det(\lambda S - A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Como $\det(\lambda S - A) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces (S, A) no es regular.

Cuando el par de matrices (S, A) es regular, entonces, por extensión, se dice que el sistema (2.1) es regular.

El teorema 10 cumple un rol importante en la solución de los sistemas singulares porque nos permite a desacoplar el sistema (2.1) en dos subsistemas donde uno de ellos tiene la forma de los sistemas dinámicos de control clásico estudiado en el capítulo 1 y el otro es un sistema algebraico.

Teorema 10 ([41]). *El par de matrices (S, A) con $S, A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es regular si y solo si existen matrices no singulares $Q, P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que:*

$$QSP = \text{diag}(I_{n_1}, N) \quad (2.3a)$$

$$QAP = \text{diag}(J, I_{n_2}), \quad (2.3b)$$

donde $n_1 + n_2 = n$, $J \in \mathcal{M}_{n_1 \times n_1}(\mathbb{R})$ y $N \in \mathcal{M}_{n_2 \times n_2}(\mathbb{R})$ es una matriz nilpotente.

Demostración. Supongamos que existen $Q, P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ no singulares que cumplen las relaciones (2.3a) y (2.3b). Si $\lambda \notin \sigma(J)$ entonces por el lema 27 del anexo se sigue que

$$\begin{aligned} \det(Q) \det(\lambda S - A) \det(P) &= \det(\lambda QSP - QAP) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - J & 0 \\ 0 & \lambda N - I_{n_2} \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(\lambda I_{n_1} - J) \det(\lambda N - I_{n_2}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\det(\lambda S - A) \neq 0$, de donde (S, A) es regular.

Ahora supongamos que el par (S, A) es regular. Por definición, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\det(\lambda S - A) \neq 0$ lo que implica $(\lambda S - A)^{-1}$ existe. Definiendo las matrices

$$\widehat{S} = (\lambda S - A)^{-1} S$$

$$\widehat{A} = (\lambda S - A)^{-1} A$$

se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= (\lambda S - A)^{-1} (\lambda S + A - \lambda S) \\ &= \lambda (\lambda S - A)^{-1} S - I \\ &= \lambda \widehat{S} - I \end{aligned}$$

Por la descomposición de Jordan de \widehat{S} , existe una matriz no singular $T \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$T \widehat{S} T^{-1} = \text{diag}(\widehat{S}_1, \widehat{S}_2) \quad (2.4)$$

donde $\widehat{S}_1 \in \mathcal{M}_{n_1 \times n_1}(\mathbb{R})$ es una matriz no singular que contiene los bloques de Jordan generados por los autovalores no nulos de \widehat{S} y $\widehat{S}_2 \in \mathcal{M}_{n_2 \times n_2}(\mathbb{R})$ es una matriz nilpotente

que contiene los bloques de Jordan generada por los autovalores nulos de \widehat{S} . Además por el lema 27 del anexo la matriz $\lambda\widehat{S}_2 - I$ es no singular. Definiendo

$$Q = \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) T(\lambda S - A)^{-1}$$

$$P = T^{-1}$$

se tiene

$$\begin{aligned} QSP &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) T(\lambda S - A)^{-1} ST^{-1} \\ &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) T\widehat{S}T^{-1} \\ &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) \text{diag}(\widehat{S}_1, \widehat{S}_2) \\ &= \text{diag} \left(I_{n_1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \widehat{S}_2 \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} QAP &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) T(\lambda S - A)^{-1} AT^{-1} \\ &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) T\widehat{A}T^{-1} \\ &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) T \left(\lambda\widehat{S} - I \right) T^{-1} \\ &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) \left(\lambda T\widehat{S}T^{-1} - I \right) \\ &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) \left(\lambda \text{diag} \left(\widehat{S}_1, \widehat{S}_2 \right) - I \right) \\ &= \text{diag} \left(\widehat{S}_1^{-1}, (\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1} \right) \text{diag} \left(\lambda\widehat{S}_1 - I_{n_1}, \lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2} \right) \\ &= \text{diag} \left(\lambda I_{n_1} - \widehat{S}_1^{-1}, I_{n_2} \right), \end{aligned}$$

se define las matrices

$$J = \lambda I_{n_1} - \widehat{S}_1^{-1}$$

$$N = \left(\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2} \right)^{-1} \widehat{S}_2$$

Además

$$\left(\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2} \right) \widehat{S}_2 = \widehat{S}_2 \left(\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2} \right)$$

entonces

$$\left(\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2} \right)^{-1} \widehat{S}_2 = \widehat{S}_2 \left(\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2} \right)^{-1}$$

tenemos que \widehat{S}_2 es nilpotente y se tiene que \widehat{S}_2 y $(\lambda\widehat{S}_2 - I_{n_2})^{-1}$ son conmutables, por el lema 28 del anexo se concluye que N es una matriz nilpotente, lo que concluye la demostración. \square

El teorema 11 es muy importante, pues nos dice que la condición de regularidad es equivalente a la existencia y unicidad de soluciones de un SLS. Adelantamos que estas soluciones solo están dadas para un conjunto de condiciones iniciales llamadas consistentes (ver Observación.5 y Ecuación (2.16))

Teorema 11. *El sistema (2.1) es regular si y solo si tiene solución única para alguna condición inicial consistente.*

Demostración. Asumamos que el sistema (2.1) es regular. Para probar que el sistema tiene solución única, vamos a obtener ésta de forma explícita. Por el teorema 10 existen matrices no singulares $Q, P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que se cumplen (2.3a) y (2.3b). Escribiendo

$$QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

introduciendo el cambio de coordenadas

$$x(k) = P \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad x_1(k) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad x_2(k) \in \mathbb{R}^{n_2} \quad (2.5)$$

y multiplicando el sistema (2.1) por Q se obtiene

$$QSP \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = QAP \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

lo que es equivalente a

$$x_1(k+1) = Jx_1(k) + B_1u(k) \quad (2.6a)$$

$$Nx_2(k+1) = x_2(k) + B_2u(k). \quad (2.6b)$$

La descomposición (2.6a)-(2.6b) es conocida como la descomposición Weierstrass (ver[5]). Observe que el sistema (2.6a) tiene la forma del sistema (1.1) estudiado en el capítulo 1, de donde para cada estado inicial $x_1(0) \in \mathbb{R}^n$, la solución es de la forma:

$$x_1(k) = J^k x_1(0) + \sum_{l=0}^{k-1} J^{k-l-1} B_1 u(l) \quad (2.7)$$

Ahora la solución del sistema (2.6b) se obtiene de la forma siguiente. Fijando $k \in \mathbb{Z}_+$ y de la dinámica del sistema (2.6b) se sigue:

$$N x_2(k+1) = x_2(k) + B_2 u(k) \quad (2.8)$$

$$N x_2(k+2) = x_2(k+1) + B_2 u(k+1) \quad (2.8)$$

$$N x_2(k+3) = x_2(k+2) + B_2 u(k+2) \quad (2.9)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N x_2(k+h) = x_2(k+h-1) + B_2 u(k+h-1) \quad (2.10)$$

Multiplicando por N a (2.8), por N^2 a (2.9) y así sucesivamente hasta multiplicar por N^{h-1} a (2.10) se obtiene

$$N x_2(k+1) = x_2(k) + B_2 u(k)$$

$$N^2 x_2(k+2) = N x_2(k+1) + N B_2 u(k+1)$$

$$N^3 x_2(k+3) = N^2 x_2(k+2) + N^2 B_2 u(k+2)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N^h x_2(k+h) = N^{h-1} x_2(k+h-1) + N^{h-1} B_2 u(k+h-1)$$

Sumando miembro a miembro, simplificando términos comunes y teniendo en cuenta que $N^h = 0$ se concluye que

$$x_2(k) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u(k+i) \quad (2.11)$$

Entonces la solución de (2.1) es única y está dada por

$$x(k) = P \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Asumamos que el sistema tiene solución única, por el lema 30 del anexo existen matrices no singulares $Q, P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tales que

$$\hat{S} = QSP = \text{diag}(0_{n_0 \times n_0}, L_1, \dots, L_p, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_q, I, N) \quad (2.13)$$

$$\hat{A} = QAP = \text{diag}(0_{n_0 \times n_0}, J_1, \dots, J_p, \hat{J}_1, \dots, \hat{J}_q, J, I) \quad (2.14)$$

donde $J \in \mathcal{M}_{h \times h}(\mathbb{R})$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots \\ & & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(\tilde{n}_i) \times (\tilde{n}_i + 1)}(\mathbb{R}).$$

$$\hat{L}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(n_j + 1) \times (n_j)}(\mathbb{R}).$$

y

$$N = \text{diag}(N_1, \dots, N_t) \in \mathcal{M}_{g \times g}(\mathbb{R})$$

donde

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{k_i \times k_i}(\mathbb{R}).$$

y las dimensiones de las matrices anteriores satisfacen las relaciones

$$n = n_0 + \sum_{i=1}^p \tilde{n}_i + \sum_{j=1}^q (n_j + 1) + \sum_{i=1}^t k_i + h$$

$$n = n_0 + \sum_{j=1}^q n_j + \sum_{i=1}^p (\tilde{n}_i + 1) + \sum_{i=1}^t k_i + h$$

$$g = \sum_{i=1}^t k_i.$$

Escribiendo

$$QBu(k) = [u_{n_0}^T(k), u_{\tilde{n}_1}^T(k), \dots, u_{\tilde{n}_p}^T(k), u_{n_1}^T(k), \dots, u_{n_q}^T(k), u_h^T(k), u_{k_1}^T(k), \dots, u_{k_t}^T(k)]^T$$

introduciendo el cambio de coordenadas

$$P^{-1}x(k) = \tilde{x}(k) = [x_{n_0}^T(k), x_{\tilde{n}_1}^T(k), \dots, x_{\tilde{n}_p}^T(k), x_{n_1}^T(k), \dots, x_{n_q}^T(k), x_h^T(k), x_{k_1}^T(k), \dots, x_{k_t}^T(k)]^T$$

y luego multiplicando el sistema (2.1) por Q se obtiene

$$0_{n_0 \times n_0} \cdot x_{n_0}(k+1) = u_{n_0}(k) \quad (2.15a)$$

$$L_i x_{\tilde{n}_i}(k+1) = J_i x_{\tilde{n}_i}(k) + u_{\tilde{n}_i}(k) \quad (2.15b)$$

$$\hat{L}_j x_{n_j}(k+1) = \hat{J}_j x_{n_j}(k) + u_{n_j}(k) \quad (2.15c)$$

$$N_{k_i} x_{k_i}(k+1) = x_{k_i}(k) + u_{k_i}(k) \quad (2.15d)$$

$$x_h(k+1) = J x_h(k) + u_h(k) \quad (2.15e)$$

Para que (3.7) sea consistente debe cumplirse que $u_{n_0}(k) = 0$ y, en este caso, tendríamos que $x_{n_0}(k+1)$ puede tomar infinitos valores.

Ahora notando que $x_{\tilde{n}_i} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}_i+1}$ y escribiendo $x_{\tilde{n}_i}(k) = [z_1(k) \cdots z_{\tilde{n}_i+1}(k)]$, el sistema (3.8) se puede expresar como

$$\begin{cases} z_1(k+1) = z_2(k) + u_1(k) \\ z_2(k+1) = z_3(k) + u_2(k) \\ \vdots = \vdots \\ z_{\tilde{n}_i}(k+1) = z_{\tilde{n}_i+1}(k) + u_{\tilde{n}_i}(k) \end{cases}$$

que no tiene solución única ya que $z_{\tilde{n}_i+1}(k)$ puede tomarse arbitrariamente.

Por otro lado, notando que $x_{n_j} \in \mathbb{R}^{n_j}$ y escribiendo $x_{n_j}(k) = [z_1(k) \cdots z_{n_j}(k)]$, el sistema (3.9) se puede expresar como

$$\begin{cases} z_1(k+1) = u_1(k) \\ z_2(k+1) = z_1(k) + u_2(k) \\ \vdots = \vdots \\ z_{n_j}(k+1) = z_{n_j-1}(k) + u_{n_j}(k) \\ 0 = z_{n_j}(k) + u_{n_j+1}(k) \end{cases}$$

si solo analizamos

$$\begin{cases} z_1(k+1) = u_1(k) \\ z_2(k+1) = z_1(k) + u_2(k) \\ \vdots = \vdots \\ z_{n_j}(k+1) = z_{n_j-1}(k) + u_{n_j}(k) \end{cases}$$

es un sistema lineal no singular donde tiene solución única pero tiene que satisfacer $0 = z_{n_j}(k) + u_{n_j+1}(k)$ entonces en general no tiene solución.

Los sistemas (2.15d) y (2.15e) tienen la forma de los sistemas (2.6a) y (2.6b) el cual hemos visto que tiene solución única. Tenemos que los sistemas (3.7)-(3.8) poseen infinitas soluciones entonces estos sistemas tienen que ser suprimidos y también el sistema (3.9) por no tener solución, al final de (2.13) y (2.14) se obtiene.

$$QSP = \text{diag}(I, N)$$

$$QAP = \text{diag}(J, I)$$

por lo tanto el par (S, A) es regular. □

Observación 4. *Observe que la solución (2.11) depende de valores futuros de $u(k)$, lo que va contra el sentido común de la experiencia física. A este tipo de sistemas se le conoce como no causal porque la solución depende no sólo de las entradas pasadas y presentes sino también de las futuras. Es claro que en un sistema en tiempo real no se dispone de las entradas futuras de la señal y , por lo tanto, un sistema no causal no puede ser implementado físicamente.*

Observación 5. *Observe que mientras la condición inicial del sistema (2.6a) es arbitraria, la condición inicial del sistema (2.6b) no lo es, pues ella debe satisfacer la ecuación*

$$x_2(0) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u(i).$$

Esta ecuación se conoce en la literatura como condición de consistencia y, si ella no es satisfecha, el sistema no poseerá solución. Calculemos enseguida el conjunto de condiciones iniciales consistentes del sistema (2.1). De (2.5) se sigue

$$x(0) = P \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

lo que se puede escribir como

$$[0 \ I]P^{-1}x(0) = [0 \ I] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

o también

$$[0 \ I]P^{-1}x(0) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u(i)$$

Definición 6. Se dice que $x(0)$ es una condición inicial consistente si cumple la relación

$$[0 \ I]P^{-1}x(0) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u(i)$$

y el conjunto de condiciones iniciales consistentes está dado por

$$\Psi(u) \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid [0 \ I]P^{-1}x = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u(i) \right\} \quad (2.16)$$

donde N y P están definidas en el teorema 10, el orden de nilpotencia de N es h y la matriz $[0 \ I]$ es una matriz aumentada donde 0 es una matriz nula de orden $n_2 \times n_1$ y la matriz identidad I es de orden $n_2 \times n_2$.

El siguiente ejemplo muestra que el sistema lineal singular no puede tomar cualquier condición inicial, se necesita que las condiciones sean consistentes en el sentido definido arriba.

Ejemplo 7. Considere un sistema lineal singular:

$$Sx(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3 \quad (2.17)$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos las condiciones iniciales del (2.17). Para $k = 0$ se puede reescribir

$$\begin{aligned} x_1(1) + x_2(1) &= x_1(0) \\ x_2(1) &= 2x_2(0) \\ 0 &= x_3(0), \end{aligned}$$

para cualquier $x_1(0), x_2(0)$, se puede conocer $x_1(1)$ y $x_2(1)$ pero para evitar inconsistencias tenemos que imponer que $x_3(0) = 0$ entonces el conjunto de condiciones iniciales consistentes es de la siguiente forma

$$\Psi(u) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

El sistema tiene solución única con las condiciones iniciales mencionadas. Este ejemplo muestra que un sistema lineal singular no siempre tiene solución para una condición inicial arbitraria.

Una vez que hemos estudiado el problema de la regularidad, podemos pasar a estudiar otro aspecto importante de los sistemas de control, esto es, la estabilidad. Para esto consideremos el sistema regular no forzado

$$Sx(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{X}. \quad (2.18)$$

Por la regularidad del sistema, del teorema 11 sabemos que $x_2(k) = 0$, de donde la estabilidad del sistema solo depende del comportamiento de $x_1(k)$ cuya dinámica está dada por (2.6a).

Recordemos la definición del espectro generalizado. Dado el par (S, A) se define el espectro generalizado de la forma siguiente:

$$\sigma(S, A) \triangleq \{\lambda \in \mathbb{C}; \det(\lambda S - A) = 0\} \quad (2.19)$$

y el radio espectral generalizado por

$$\rho(S, A) \triangleq \max_{\lambda \in \sigma(S, A)} |\lambda|. \quad (2.20)$$

Note que cuando $S = I$ se obtiene $\sigma(I, A) = \sigma(A)$ y $\rho(I, A) = \rho(A)$, es decir, el espectro y el radio espectral se reducen al caso usual.

El teorema 12 caracteriza la estabilidad del sistema (2.18) mediante el radio espectral generalizado.

Teorema 12. *El sistema (2.18) es asintóticamente estable si y solo si $\rho(S, A) < 1$*

Demostración. Debido a que (2.18) es regular existen Q y $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ no singulares tales que cumplen (2.3a) y (2.3b). Por el lema 27 del anexo se obtiene

$$\det(Q) \det(\lambda S - A) \det(P) = (-1)^{n^2} \det(\lambda I_{n_1} - J).$$

Puesto que las matrices Q y P son no singulares, de esta relación se deduce que $\sigma(S, A) = \sigma(J)$. Ahora por (2.7) y (2.11), $x_1(k)$ y $x_2(k)$ están dadas por

$$x_1(k) = J^k x_1(0) \quad (2.21)$$

$$x_2(k) = 0 \quad (2.22)$$

y, por otro lado, de (2.12) se tiene que

$$\|x(k)\| \leq \|P\| \|x_1(k)\|. \quad (2.23)$$

Dado que $x_1(0)$ es arbitrario, de (2.21)-(2.23) se deduce que el sistema (2.18) es asintóticamente estable si y solo si $\sigma(S, A) = \sigma(J) < 1$, como queríamos. \square

2.2. Sistemas Singulares Lineales con Saltos Markovianos

El objetivo de este capítulo es estudiar los sistemas lineales singulares con saltos markovianos, esto es, sistemas de la forma

$$S_{\theta(k+1)} x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k), \quad x(0) \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.24)$$

donde $\text{rank}(S_i) < n$ para todo $i \in \Sigma$. En particular estamos interesados en extender los resultados de la teoría de sistemas no singulares al caso presente. Comenzamos estudiando el problema de la regularidad.

2.2.1. Regularidad

Como hemos visto para garantizar la existencia y unicidad de soluciones del sistema $Sx(k+1) = Ax(k)$ es equivalente a la regularidad del par (S, A) . Puesto que el sistema (2.24) es una extensión de un sistema singular sin saltos es natural preguntarse en qué medida la regularidad de cada par (S_j, A_i) , $i, j \in \Sigma$, está relacionada con la existencia de una única solución para el sistema (2.24). Veremos que la relación, en este caso, no es tan directa, sino que son necesarias además algunas condiciones adicionales. El primer paso en el estudio de la existencia de soluciones consiste en definir la regularidad modo a modo del sistema (2.24).

Definición 7. Consideremos el conjunto

$$\Sigma^+ \triangleq \{(i, j) \in \Sigma \times \Sigma; p_{ij} > 0\}$$

donde p_{ij} es la probabilidad de transición del estado i al estado j . Se dice que el sistema (2.24) es regular modo a modo si el par (S_j, A_i) es regular para todo $(i, j) \in \Sigma^+$.

Boukas y Xia en [40] introdujeron un concepto de regularidad para el sistema (2.24) que resulta limitado, pues éste solo toma en cuenta la regularidad del par (S_i, A_i) sin considerar que el lado izquierdo y derecho de la ecuación de estado pueden tomar modos diferentes en la medida que las matrices S y A no evolucionan de la misma manera para cada instante $k \in \mathbb{Z}_+$. Ciertamente la regularidad de Boukas y Xia representa una situación particular de nuestra definición de regularidad modo a modo. En nuestro enfoque, la regularidad modo a modo jugará un rol importante para garantizar la existencia y unicidad de soluciones del sistema (2.24).

Fijemos una realización $\omega \in \Omega$ tal que $\theta(k) = i, \theta(k+1) = j$ y $\theta(k+2) = r$, donde $(i, j), (j, r) \in \Sigma^+$. Aplicando argumentos similares a los utilizados en la demostración del teorema 10, para el periodo $[k, k+1]$ definamos

$$S_{i,j} = (\lambda S_j - A_i)^{-1} S_j, \quad (2.25)$$

donde $\lambda \notin \sigma(S_j, A_i)$. Por la descomposición de Jordan para $S_{i,j}$, existe una matriz no singular $T_{i,j}$ tal que

$$T_{i,j} S_{i,j} T_{i,j}^{-1} = \text{diag} \left(S_{i,j}^{(1)}, S_{i,j}^{(2)} \right) \quad (2.26a)$$

$$N_{i,j} = \left(\lambda S_{i,j}^{(2)} - I \right)^{-1} S_{i,j}^{(2)} \quad (2.26b)$$

$$J_{i,j} = \lambda I - S_{i,j}^{-(1)}, \quad (2.26c)$$

donde $S_{i,j}^{(1)}$ es una matriz no singular que contiene los bloques de Jordan generados por los autovalores no nulos de $S_{i,j}$, $S_{i,j}^{(2)}$ es una matriz nilpotente que contiene bloques de Jordan generados por los autovalores nulos de $S_{i,j}$ y $N_{i,j}$ es una matriz nilpotente.

Para el período $[k, k+1]$ el sistema es

$$S_j \mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k), \quad (2.27)$$

Ahora, escribiendo

$$Q_{i,j} B_i = \begin{bmatrix} B_{i,j}^{(1)} \\ B_{i,j}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

introduciendo el cambio de coordenadas

$$\mathbf{x}(k+1) = P_{i,j} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(i,j)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

y multiplicamos (2.27) por $Q_{i,j}$ se obtiene:

$$\mathbf{x}_{1(i,j)}(k+1) = J_{i,j} \mathbf{x}_{1(i,j)}(k) + B_{i,j}^{(1)} u(k) \quad (2.30)$$

$$N_{i,j} \mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1) = \mathbf{x}_{2(i,j)}(k) + B_{i,j}^{(2)} u(k), \quad (2.31)$$

donde los subíndices adicionales de las variables \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 se han colocado para distinguirlos de un periodo a otro.

Si se conocen $\mathbf{x}_{1(i,j)}(k)$ y $u(k)$, por la ecuación (2.30) podemos determinar el valor de $\mathbf{x}_{1(i,j)}(k+1)$. Por el contrario, si se conocen $\mathbf{x}_{2(i,j)}(k)$ y $u(k)$, de (2.31) no se puede determinar unívocamente el valor de $\mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1)$ debido a que $N_{i,j}$ es una matriz nilpotente. En adelante desarrollaremos argumentos para solucionar este problema.

Para el período $[k+1, k+2]$ el sistema es

$$S_j \mathbf{x}(k+1) = A_i \mathbf{x}(k)$$

y aplicando argumentos similares a los anteriores se tiene

$$\mathbf{x}(k+1) = P_{j,r} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Observamos que la matriz cambio de coordenadas $P_{i,j}$ se aplica para $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{x}(k+1)$ del periodo $[k, k+1]$ y la matriz cambio de coordenadas $P_{j,r}$ se aplica para $\mathbf{x}(k+1)$ y $\mathbf{x}(k+2)$ del periodo $[k+1, k+2]$. De (2.29) y (2.32) se obtiene una relación entre periodos consecutivos donde están involucradas las matrices cambios de coordenadas, como sigue:

$$P_{i,j} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(i,j)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1) \end{bmatrix} = P_{j,r} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Puesto que $P_{i,j}$ es inversible entonces de (2.33) se obtiene la siguiente relación fundamental:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(i,j)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1) \end{bmatrix} = P_{i,j}^{-1} P_{j,r} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

Nos gustaría descomponer la matriz $P_{i,j}^{-1} P_{j,r}$ en una matriz por bloques 2×2 para obtener dos ecuaciones matriciales una para \mathbf{x}_1 y otra, que no contenga la matriz

nilpotente, que involucre a \mathbf{x}_2 . Dado que \mathbf{x}_1 puede determinarse, según hemos visto arriba, la segunda ecuación podría ayudara para determinar \mathbf{x}_2 . Esta idea, sin embargo, tiene una dificultad. En efecto, notemos que $\mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1)$ y $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1)$ son las segundas componentes del mismo vector $\mathbf{x}(k+1)$ en distintos periodos y, por esta razón, sus dimensiones podrían ser diferentes. Para impedir esta contingencia, será necesario imponer condiciones adecuadas.

La ecuación (2.34) relaciona el estado final de un periodo con el estado inicial del periodo siguiente. Estos dos estados deben ser iguales, la asunción que impondremos tiene que estar relacionada a la matriz $P_{i,j}^{-1}P_{j,r}$ la cual nos servirá para obtener el valor de toda la información de $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1)$ para eso vemos la necesidad de denotar por $\alpha_{i,j}$ la multiplicidad algebraica del valor propio nulo de la matriz $S_{i,j}$.

Asunción 1. (\mathcal{P}_1) Para cada par de periodos consecutivos $[k, k+1]$ y $[k+1, k+2]$ se define

$$\mathcal{P}_{1(\theta(k),\theta(k+1),\theta(k+2))} \triangleq P_{\theta(k),\theta(k+1)}^{-1} P_{\theta(k+1),\theta(k+2)},$$

donde $P_{\theta(k),\theta(k+1)}$ y $P_{\theta(k+1),\theta(k+2)}$ son las matrices de cambio de coordenadas en su respectivos periodos. Supongamos que $\alpha_{i,j} = \beta$ para todo $(i,j) \in \Sigma^+$ y que $\mathcal{P}_{1(\theta(k),\theta(k+1),\theta(k+2))}$ es una matriz de bloques 2×2 con la siguiente estructura:

$$\mathcal{P}_{1(\theta(k),\theta(k+1),\theta(k+2))} = \begin{bmatrix} \star & \star \\ 0 & M_{\theta(k),\theta(k+1),\theta(k+2)} \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

donde la matriz $M_{\theta(k),\theta(k+1),\theta(k+2)}$ es de orden $\beta \times \beta$.

Observación 6. Como $\alpha_{i,j}$ es la multiplicidad algebraica del valor propio nulo de la matriz nilpotente $S_{i,j}^{(2)}$, entonces de (2.26b) se sigue que $\alpha_{i,j}$ es la dimensión de la matriz $N_{i,j}$. De otro lado, la condición $\alpha_{i,j} = \beta$ se impone para que las matrices nilpotentes $N_{i,j}$ sean de la misma dimensión para todo $(i,j) \in \Sigma^+$ lo que implica, debido a (2.31), que los vectores $\mathbf{x}_{2(i,j)}$ son todos de dimensión β y los vectores $\mathbf{x}_{1(i,j)}$ de dimensión $n - \beta$.

Observación 7. Observe que una vez que la realización ha sido fijada entonces $J_{i,j}$, $N_{i,j}$, $B_{i,j}^{(1)}$, $B_{i,j}^{(2)}$ y $M_{i,j,r}$ pueden ser calculadas a partir de las matrices que determinan los parámetros del sistema.

Teorema 13. Si el sistema (2.24) es regular modo a modo y se cumple \mathcal{P}_1 , entonces para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{X}$ el sistema tiene una única solución si para cada realización $\omega \in \Omega$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ existe $m_k = m(k, \omega)$ tal que

$$\left\{ \prod_{\ell=1}^{m_k-1} N_{\theta(k+\ell-1), \theta(k+\ell)} M_{\theta(k+\ell-1), \theta(k+\ell), \theta(k+\ell+1)} \right\} N_{\theta(k+m_k-1), \theta(k+m_k)} = 0. \quad (2.35)$$

Demostración. En primer lugar vamos a obtener la solución de la ecuación (2.31), fijemos una realización $\omega \in \Omega$ tal que $\theta(k) = i, \theta(k+1) = j, \theta(k+2) = r$ y $\theta(k+3) = s, \dots, \theta(k+m_{(k+1)}-1) = v, \theta(k+m_{(k+1)}) = w, \theta(k+m_{(k+1)}+1) = y$, donde $(i, j), (j, r), (r, s), \dots, (v, w), (w, y) \in \Sigma^+$. Para los períodos consecutivos $[k, k+1]$ y $[k+1, k+2]$ las matrices de cambio de coordenadas son $P_{i,j}$ y $P_{j,r}$, respectivamente. Entonces de (2.34) y la asunción \mathcal{P}_1 se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(i,j)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star & \star \\ 0 & M_{i,j,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

de donde

$$\mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1) = M_{i,j,r} \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1). \quad (2.37)$$

Ya que la matriz $M_{i,j,r}$ es conocida, la ecuación (2.37) permite calcular $\mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1)$ en base a $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1)$.

Aplicando argumentos similares a la demostración del teorema 11, se obtiene una expresión para $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1)$. En efecto de (2.31) se sigue

$$N_{j,r} \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+2) = \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) + B_{j,r}^{(2)} u(k+1) \quad (2.38)$$

$$N_{r,s} \mathbf{x}_{2(r,s)}(k+3) = \mathbf{x}_{2(r,s)}(k+2) + B_{r,s}^{(2)} u(k+2) \quad (2.39)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N_{v,w} \mathbf{x}_{2(v,w)}(k+m_{k+1}) = \mathbf{x}_{2(v,w)}(k+m_{k+1}-1) + B_{v,w}^{(2)} u(k+m_{k+1}-1) \quad (2.40)$$

$$N_{w,y} \mathbf{x}_{2(w,y)}(k+m_{k+1}+1) = \mathbf{x}_{2(w,y)}(k+m_{k+1}) + B_{w,y}^{(2)} u(k+m_{k+1}), \quad (2.41)$$

Ahora, vamos a hacer las siguientes multiplicaciones por la izquierda:

(2.39) por $N_{j,r} M_{j,r,s}$,

(2.40) por $N_{j,r} M_{j,r,s} N_{r,s} \cdots M_{\theta(k+m_{k+1}-3), \theta(k+m_{k+1}-2), \theta(k+m_{k+1}-1)} N_{\theta(k+m_{k+1}-2), \theta(k+m_{k+1}-1)} \times$
 $M_{\theta(k+m_{k+1}-2), \theta(k+m_{k+1}-1), \theta(k+m_{k+1})}$,

(2.41) por $N_{j,r} M_{j,r,s} N_{r,s} \cdots M_{\theta(k+m_{k+1}-2), \theta(k+m_{k+1}-1), \theta(k+m_{k+1})} N_{v,w} M_{\theta(k+m_{k+1}), \theta(k+m_{k+1}+1), \theta(k+m_{k+1}+2)}$.

sumando miembro a miembro, simplificando términos comunes y teniendo en cuenta que m_{k+1} cumple (2.35) (para el tiempo $k + 1$), esto es,

$$\left\{ \prod_{\ell=1}^{m_{k+1}-1} N_{\theta(k+\ell),\theta(k+\ell+1)} M_{\theta(k+\ell),\theta(k+\ell+1),\theta(k+\ell+2)} \right\} N_{\theta(k+m_{k+1}),\theta(k+m_{k+1}+1)} = 0. \quad (2.42)$$

se obtiene

$$\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) = -B_{j,r}^{(2)} u(k+1) - \sum_{t=0}^{m_{k+1}-2} \left(\prod_{\ell=0}^t N_{\theta(k+\ell+1),\theta(k+\ell+2)} M_{\theta(k+\ell+1),\theta(k+\ell+2),\theta(k+\ell+3)} \right) \times B_{\theta(k+t+2),\theta(k+t+3)}^{(2)} u(k+t+2). \quad (2.43)$$

Por último veamos que la solución del sistema (2.24) se puede obtener por inducción. Puesto que la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ es conocida, por (2.29) se sigue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0) \\ \mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(0) \end{bmatrix} = P_{\theta(0),\theta(1)}^{-1} \mathbf{x}(0),$$

de donde se obtienen los valores de $\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0)$ y $\mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(0)$. Luego de (2.30) se obtiene

$$\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(1) = J_{\theta(0),\theta(1)} \mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0) + B_{\theta(0),\theta(1)}^{(1)} u(0),$$

De (2.43) se obtiene

$$\mathbf{x}_{2(\theta(1),\theta(2))}(1) = -B_{1,2}^{(2)} u(1) - \sum_{t=0}^{m_1-2} \left(\prod_{\ell=0}^t N_{\theta(\ell+1),\theta(\ell+2)} M_{\theta(\ell+1),\theta(\ell+2),\theta(\ell+3)} \right) \times B_{\theta(t+2),\theta(t+3)}^{(2)} u(k+t+2). \quad (2.44)$$

y de (2.37) se sigue:

$$\mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(1) = M_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)} \mathbf{x}_{2(\theta(1),\theta(2))}(1). \quad (2.45)$$

Ahora reemplazando (2.44) en (2.45) se obtiene una forma cerrada para $\mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(1)$, como sigue:

$$\mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(1) = -M_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)} B_{1,2}^{(2)} u(1) - \sum_{t=0}^{m_1-2} \left(\prod_{\ell=0}^t N_{\theta(\ell+1),\theta(\ell+2)} M_{\theta(\ell+1),\theta(\ell+2),\theta(\ell+3)} \right) \times B_{\theta(t+2),\theta(t+3)}^{(2)} u(k+t+2).$$

Finalmente por (2.29) se tiene de manera única el valor de $\mathbf{x}(1)$ a partir de $\mathbf{x}(0)$, como sigue:

$$\mathbf{x}(1) = P_{\theta(0),\theta(1)} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(1) \\ \mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(1) \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis de inducción, se tiene que si $x(k)$ es dado se obtiene $x(k+1)$. Consideremos el período $[k+1, k+2]$, por (2.29) se sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) \end{bmatrix} = P_{j,r}^{-1} \mathbf{x}(k+1).$$

dado que $\mathbf{x}(k+1)$ es conocido entonces se determina los valores de $\mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1)$ y $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1)$ luego de (2.30) se obtiene

$$\mathbf{x}_{1(j,r)}(k+2) = J_{j,r} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) + B_{j,r}^{(1)} u(k+1),$$

De (2.37) se tiene

$$\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+2) = M_{j,r,s} \mathbf{x}_{2(r,s)}(k+2). \quad (2.46)$$

y de (2.43) se sigue

$$\mathbf{x}_{2(r,s)}(k+2) = -B_{r,s}^{(2)} u(k+2) - \sum_{t=0}^{m_{k+2}-2} \left(\prod_{\ell=0}^t N_{\theta(k+\ell+2),\theta(k+\ell+3)} M_{\theta(k+\ell+2),\theta(k+\ell+3),\theta(k+\ell+4)} \right) \times B_{\theta(k+t+3),\theta(k+t+4)}^{(2)} u(k+t+3). \quad (2.47)$$

Reemplazando (2.47) en (2.46) se obtiene una forma cerrada para $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+2)$, como sigue:

$$\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+2) = -M_{j,r,s} B_{r,s}^{(2)} u(k+2) - \sum_{t=0}^{m_{k+2}-2} \left(\prod_{\ell=0}^t N_{\theta(k+\ell+2),\theta(k+\ell+3)} M_{\theta(k+\ell+2),\theta(k+\ell+3),\theta(k+\ell+4)} \right) \times B_{\theta(k+t+3),\theta(k+t+4)}^{(2)} u(k+t+3). \quad (2.48)$$

Finalmente por el cambio de coordenadas se obtiene el valor de $\mathbf{x}(k+2)$ de la forma siguiente:

$$\mathbf{x}(k+2) = P_{j,r} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+2) \\ \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+2) \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

□

Notamos que la condición inicial $\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0)$ es arbitraria entonces la condición consistente para el sistema (2.24) sólo depende de la segunda componente $\mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(0)$, para evitar inconsistencias se necesita que la condición inicial sea de la forma siguiente:

$$\mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(0) = -B_{\theta(0),\theta(1)}^{(2)}u(0) - \sum_{t=0}^{m_0-2} \left(\prod_{\ell=0}^t N_{\theta(\ell),\theta(\ell+1)} M_{\theta(\ell),\theta(\ell+1),\theta(\ell+2)} \right) B_{\theta(t+1),\theta(t+2)}^{(2)}u(t+1).$$

La siguiente definición es una generalización del caso SLS (ver (2.16)).

Definición 8. El vector $\mathbf{x}(0)$ es una condición inicial consistente si cumple la relación :

$$[0 \ I]P_{\theta(0),\theta(1)}^{-1}\mathbf{x}(0) = -B_{\theta(0),\theta(1)}^{(2)}u(0) - \sum_{t=0}^{m_0-2} \left(\prod_{\ell=0}^t N_{\theta(\ell),\theta(\ell+1)} M_{\theta(\ell),\theta(\ell+1),\theta(\ell+2)} \right) B_{\theta(t+1),\theta(t+2)}^{(2)}u(t+1). \quad (2.50)$$

donde la matriz $[0 \ I]$ es una matriz aumentada donde 0 es una matriz nula de orden $\beta \times (n - \beta)$ y la matriz identidad I es de orden $\beta \times \beta$.

Observe que la condición inicial está en función de $\boldsymbol{\theta}(0), \dots, \boldsymbol{\theta}(m_0)$ y $u(0), \dots, u(m_0 - 1)$ entonces para calcular la condición inicial necesitamos llegar hasta el instante m_0 . Se define $\omega(m_0)$ como la realización ω truncando en m_0 , eso es,

$$\omega(m_0) \triangleq \{\boldsymbol{\theta}(0), \boldsymbol{\theta}(1), \dots, \boldsymbol{\theta}(m_0)\},$$

donde m_0 es definida en el teorema 13 y se define $\Psi(\omega(m_0), u)$ como el conjunto de condiciones iniciales consistentes con relación a $\omega(m_0)$. A continuación, el conjunto de todas las condiciones iniciales consistentes para el sistema (2.24) es dada por

$$\Psi(u) = \bigcup_{\omega(m_0) \in \Omega} \Psi(\omega(m_0), u). \quad (2.51)$$

A continuación presentamos unos ejemplos que ilustran la teoría.

Ejemplo 8. Consideremos las matrices siguientes:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = 0$$

y

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi = [0.5 \quad 0.5], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Debido a la matriz de transición de probabilidad y el vector de distribución inicial de la cadena de Markov hay dos posibles realizaciones, $\omega_1 = \{2,1,2, \dots\}$ y $\omega_2 = \{1,2,1, \dots\}$. Comprobemos que el ejemplo cumple todas las condiciones del teorema 13.

Regularidad

Tenemos que $\Sigma^+ = \{(1,2), (2,1)\}$. En efecto para comprobar la regularidad modo a modo sólo se necesita comprobar la regularidad de los pares (S_2, A_1) y (S_1, A_2) . Pero esto puede ser verificada inmediatamente tomando, por ejemplo, $\lambda = 1$.

Asunción \mathcal{P}_1

Ahora, para todo $(i,j) \in \Sigma^+$ la multiplicidad algebraica de $S_{i,j}$ es igual a $\alpha_{i,j} = 3$ y para todo $(i,j) \in \Sigma^+, P_{i,j} = I$ esto implica que \mathcal{P}_1 tiene la forma $P_{i,j}^{-1}P_{j,r} = I$ para todo $(i,j), (j,r) \in \Sigma^+$.

Condición inicial

Como $\beta = 3$ y $P_{\theta(0),\theta(1)} = I$ entonces por (2.50) se obtiene que las tres últimas componentes de la condición inicial son nulas. El conjunto de condiciones iniciales consistentes es de la forma siguiente

$$\Psi(u) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T ; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Para finalizar la verificación de la hipótesis del teorema 13, es necesario verificar (2.35). Tenemos que $M_{i,j,r} = I$, donde I es la matriz identidad. Para la realización ω_1 se tiene

$$N_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$N_{2,1}N_{1,2} = 0 \text{ y } m_k = 2, \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

Para la realización ω_2 se tiene

$$N_{1,2}N_{2,1}N_{1,2} = 0 \text{ y } m_k = 3 \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

Por el teorema 13 el sistema tiene una única solución, la cual puede ser verificada calculando las trayectorias del sistema.

$$\mathbf{x}(\omega_1, k) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{x}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{x}(\omega_2, k) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{x}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{x}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \end{array} \right\}.$$

Ahora impondremos una asunción similar a \mathcal{P}_1 e impondremos una condición más fuerte que (2.35), para eso vemos la necesidad de denotar la nulidad de la matriz $S_{i,j}$ por $\eta_{i,j}$.

Asunción 2. (\mathcal{P}_2) Para cada par de periodos consecutivos $[k, k+1]$ y $[k+1, k+2]$ se define

$$\mathcal{P}_{2(\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2))} \triangleq P_{\theta(k), \theta(k+1)}^{-1} P_{\theta(k+1), \theta(k+2)},$$

donde $P_{\theta(k), \theta(k+1)}$ y $P_{\theta(k+1), \theta(k+2)}$ son las matrices de cambio de coordenadas en su respectivos periodos. Supongamos que para todo $\alpha_{i,j} = \eta_{i,j} = \beta$ para todo $(i, j) \in \Sigma^+$ y que $\mathcal{P}_{2(\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2))}$ es una matriz de bloques 2×2 con la estructura siguiente:

$$\mathcal{P}_{2(\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2))} = \begin{bmatrix} L_{\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2)} & R_{\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2)} \\ \star & \star \end{bmatrix}_{n \times n},$$

donde la matriz $L_{\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2)}$ es una matriz no singular de orden $(n - \beta) \times (n - \beta)$ y la matriz $R_{\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2)}$ es de orden $(n - \beta) \times \beta$

Observación 8. La condición $\alpha_{i,j} = \eta_{i,j} = \beta$ implica que hay β autovalores nulos donde cada correspondiente bloque de Jordan es de orden 1×1 es decir la nilpotente $N_{i,j} = 0$

Teorema 14. Sea el sistema (2.24) regular modo a modo y supongamos que \mathcal{P}_2 cumple. Entonces para cualquier $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{X}$ el sistema tiene solución única.

Demostración. Fijemos una realización $\omega \in \Omega$ tal que $\theta(k) = i, \theta(k+1) = j, \theta(k+2) = r, \theta(k+3) = s$ de (2.31) se tiene

$$\mathbf{x}_{2(i,j)}(k) = -B_{i,j}^{(2)} u(k) \quad (2.52)$$

Por último veamos que la solución del sistema (2.24) se puede determinar, en efecto por inducción dado que la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ es conocida, por (2.29) se sigue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0) \\ \mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(0) \end{bmatrix} = P_{\theta(0),\theta(1)}^{-1} \mathbf{x}(0),$$

se obtiene el valor de $\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0)$ y $\mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(0)$, luego de (2.30) se obtiene:

$$\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(1) = J_{\theta(0),\theta(1)} \mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0) + B_{\theta(0),\theta(1)}^{(1)} u(0),$$

Por otro lado, de (2.34) y \mathcal{P}_2 se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(1) \\ \mathbf{x}_{2(\theta(0),\theta(1))}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)} & R_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(\theta(1),\theta(2))}(1) \\ \mathbf{x}_{2(\theta(1),\theta(2))}(1) \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

De (2.53) se tiene

$$\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(1) = L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)} \mathbf{x}_{1(\theta(1),\theta(2))}(1) + R_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)} \mathbf{x}_{2(\theta(1),\theta(2))}(1), \quad (2.54)$$

De (2.52) se tiene el valor de

$$\mathbf{x}_{2(\theta(1),\theta(2))}(1) = -B_{\theta(1),\theta(2)}^{(2)} u(1)$$

y debido que $L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}$ es una matriz no singular se obtiene

$$\mathbf{x}_{1(\theta(1),\theta(2))}(1) = L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1} (\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(1) - R_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)} \mathbf{x}_{2(\theta(1),\theta(2))}(1))$$

entonces $\mathbf{x}(1)$ se calcula de manera única a partir de $\mathbf{x}(0)$.

Por hipótesis de inducción, se supone que una vez que se conoce $x(k)$ se puede determinar $x(k+1)$. Dado que $\mathbf{x}(k+1)$ es conocida, por (2.29) se sigue

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) \\ \mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) \end{bmatrix} = P_{j,r}^{-1} \mathbf{x}(k+1),$$

de donde se obtiene $\mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1)$, $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1)$. Entonces por (2.30) se sigue

$$\mathbf{x}_{1(j,r)}(k+2) = J_{j,r} \mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) + B_{j,r}^{(1)} u(k+1),$$

Por otro lado, de (2.34) y \mathcal{P}_2 se tiene

$$\mathbf{x}_{1(j,r)}(k+1) = L_{j,r,s} \mathbf{x}_{1(r,s)}(k+2) + R_{j,r,s} \mathbf{x}_{2(r,s)}(k+2), \quad (2.55)$$

De (2.52) se tiene

$$\mathbf{x}_{2(r,s)}(k+2) = -B_{r,s}^{(2)} u(k+2), \quad (2.56)$$

reemplazando (2.56) en (2.55) y el hecho que $L_{j,r,s}$ es una matriz no singular se obtiene $\mathbf{x}_{1(r,s)}(k+2)$. Por el cambio de coordenadas se obtiene $\mathbf{x}(k+2)$ de manera única a partir de $\mathbf{x}(k+1)$. \square

Observemos puesto que en este caso $N_{i,j} = 0$ entonces la condición inicial consistente es de la forma siguiente:

$$[0 \ I] P_{\theta(0), \theta(1)}^{-1} \mathbf{x}(0) = -B_{\theta(0), \theta(1)}^{(2)} u(0).$$

donde notamos que la condición inicial está en función de $\theta(0)$ y $\theta(1)$.

Ejemplo 9. Considere las siguientes matrices:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = 0$$

y

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi = [0.5 \ 0.5], \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Debido a la matriz de transición y el vector de distribución inicial de la cadena de Markov entonces posee dos únicas realizaciones de la cadena de Markov que son $\omega_1 = \{1, 2, 1, 2, \dots\}$

y $\omega_2 = \{2,1,2,1,\dots\}$. Comprobemos que el ejemplo cumple todas las condiciones del teorema 14.

Regularidad

Tenemos que $\Sigma^+ = \{(1,2), (2,1)\}$. En efecto para comprobar que el sistema (2.24) es regular modo a modo, sólo se necesita comprobar la regularidad de los pares (S_1, A_2) y (S_2, A_1) pero esto se puede verificar inmediatamente tomando $\lambda = 0$.

Asunción \mathcal{P}_2

Como los autovalores nulos de $S_{i,j}$, $(i,j) \in \Sigma^+$, tienen exponente 1 entonces $\alpha_{i,j} = \eta_{i,j} = 1 = \beta$ y $n - \beta = 2$. Se puede comprobar que

$$P_{\theta(0)=1, \theta(1)=2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{\theta(0)=2, \theta(1)=1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y además

$$\mathcal{P}_{2(i,j,r)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \star \\ 1 & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix}$$

para todo $(i,j), (j,r) \in \Sigma^+$ y se observa que

$$L_{i,j,r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es no singular de orden 2×2 entonces se cumple \mathcal{P}_2 .

Condición inicial

Como las condiciones iniciales dependen del $\theta(0), \theta(1)$ entonces el conjunto de condiciones iniciales es de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \Psi(\theta(0) = 1, \theta(1) = 2, u) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3; [0 \ 0 \ 1] P_{\theta(0)=1, \theta(1)=2}^{-1} x = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 = x_2\} \\ \Psi(\theta(0) = 2, \theta(1) = 1, u) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3; [0 \ 0 \ 1] P_{\theta(0)=2, \theta(1)=1}^{-1} x = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 = x_3\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema 14, para cada realización de la cadena existe una trayectoria única $\mathbf{x}(k)$ que satisface el sistema. Mostremos los primeros pasos de la solución $\mathbf{x}(k)$ para cada realización.

$$\mathbf{x}(\omega_1, k) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \dots \right\}, \quad \mathbf{x}(\omega_2, k) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \dots \right\}.$$

En el ejemplo siguiente mostramos que la asunción \mathcal{P}_2 es necesaria para la unicidad de solución.

Ejemplo 10. Consideremos ahora

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = S_1, \quad A_2 = S_2, \quad B_1 = B_2 = 0$$

y

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi = [0.5 \quad 0.5], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dado la matriz de transición de probabilidad y vector de probabilidad inicial de la cadena de Markov el sistema tiene sólo dos realizaciones posibles, $\omega_1 = \{1,2,1,2, \dots\}$ y $\omega_2 = \{2,1,2,1, \dots\}$ y el sistema es regular modo a modo. Los valores propios nulos de $S_{i,j}$, $(i,j) \in \Sigma^+ = \{(1,2),(2,1)\}$, tienen exponente 1, entonces $\alpha_{i,j} = \eta_{i,j} = 1 = \beta$ y $n - \beta = 1$. Por otro lado,

$$P_{\theta(0)=1, \theta(1)=2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{\theta(0)=2, \theta(1)=1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\Psi(\theta(0) = 1, \theta(1) = 2, u) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; [0 \quad 1] P_{\theta(0)=1, \theta(1)=2}^{-1} x = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^2; x_2 = 0\}$$

$$\Psi(\theta(0) = 2, \theta(1) = 1, u) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; [0 \quad 1] P_{\theta(0)=2, \theta(1)=1}^{-1} x = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 = 0\},$$

es el conjunto de condiciones iniciales consistentes. Sin embargo

$$\mathcal{P}_{2(i,j,r)} = \begin{bmatrix} 0 & \star \\ \star & \star \end{bmatrix}$$

para todo $(i,j), (j,r) \in \Sigma^+$, entonces la asunción \mathcal{P}_2 no se cumple, con lo que el teorema 14 no se puede aplicar. De hecho, no existe una trayectoria única que satisfice el sistema.

Por ejemplo, para la realización ω_1 se obtiene

$$\mathbf{x}(\omega_1, k) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2(1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(2) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2(3) \end{bmatrix}, \dots \right\},$$

donde $\mathbf{x}_2(1)$, $\mathbf{x}_1(2)$ y $\mathbf{x}_2(3)$ son libres.

Observación 9. Notamos que las soluciones obtenidas en los teoremas 13 y 14 para el sistema (2.24) son anticipativas, es decir, con el fin de determinar el estado $\mathbf{x}(k+1)$ del periodo $[k, k+1]$, necesito los valores futuros de $\boldsymbol{\theta}(k)$ y $u(k)$. Para el teorema 13 de (2.43) observamos que necesitamos los valores de $u(k+1), \dots, u(k+m_{k+1})$ y $\theta(k+1), \dots, \theta(k+m_{k+1}+1)$, para el caso homogéneo se tiene que $\mathbf{x}_{2(j,r)}(k+1) = 0$ y por (2.37) se tiene $\mathbf{x}_{2(i,j)}(k+1) = 0$ en esta componente ya no depende de valores futuros de $\boldsymbol{\theta}(k)$ pero no se puede asegurar que el sistema no sea anticipativo porque para calcular el $\mathbf{x}_{1(i,j)}(k)$ necesito el paso siguiente. Ahora para el sistema homogéneo notamos que para determinar $\mathbf{x}(k)$ necesitamos $\boldsymbol{\theta}(k-1), \boldsymbol{\theta}(k), \boldsymbol{\theta}(k+1)$, si la asunción \mathcal{P}_2 se impone que $L_{i,j,r}$ es la matriz identidad el sistema es no anticipativo porque todas las primeras componentes van a ser iguales.

2.2.2. Las matrices $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{S}_1$ y \mathcal{S}_2

En esta sección se presentan las matrices $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{A}_1$ y \mathcal{A}_2 que servirán para analizar la estabilidad de (2.24), para el caso homogéneo las matrices $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ hacen las veces de la matriz S y las matrices $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ hacen las veces de la matriz A del sistema (2.1) vista en la sección anterior. Por consiguiente, es de esperar que la estabilidad del sistema (2.24) pueda ser analizada a través del radio espectral de estas matrices. Esto es probado en la sección 1.5.

Para introducir estas matrices necesitamos previamente definir algunas matrices que están dadas en términos de la trayectoria del sistema. Estas matrices serán de gran utilidad

a lo largo de este trabajo. Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $i, j \in \Sigma$.

$$Q_{i,j}(k) \triangleq E \left\{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \right\} \quad (2.57a)$$

$$q_{i,j}(k) \triangleq \text{vec}(Q_{i,j}(k)) \quad (2.57b)$$

$$Q_i(k) \triangleq E \left\{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right\} \quad (2.57c)$$

$$q_i(k) \triangleq \text{vec}(Q_i(k)) \quad (2.57d)$$

$$\tilde{q}_1(k) \triangleq [q_{11}^T(k) \dots q_{L1}^T(k) \dots q_{1L}^T(k) \dots q_{LL}^T(k)]^T \quad (2.57e)$$

$$\tilde{q}_2(k) \triangleq [q_1^T(k) \dots q_L^T(k)]^T. \quad (2.57f)$$

$$p(k) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{p}_1^T(k) & \dots & \bar{p}_N^T(k) \end{bmatrix}^T, \quad (2.57g)$$

donde $\tilde{q}_2(k)$ es el mismo que está definido en (1.12) del capítulo 1. Observe que

$$\begin{aligned} Q(k) &= E \left\{ \sum_{i,j=1}^L \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^L E \left\{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^L Q_{ij}(k) \end{aligned} \quad (2.58)$$

La notación $\text{diag}(\mathcal{B}; L)$ representa una matriz diagonal por bloques, donde \mathcal{B} se repite L veces. Definamos la matriz siguiente

$$\mathcal{E}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{L \times L} \rightarrow \text{i \acute{e}sima fila.} \quad (2.59)$$

A continuación se introducen las matrices $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{S}_1$ y \mathcal{S}_2 y además algunas matrices

auxiliares

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &\triangleq \text{diag}(A_1 \otimes A_1, \dots, A_L \otimes A_L) \\ \mathcal{A}_1 &\triangleq (\Pi^T \otimes I_{Ln^2}) \text{diag}(\mathcal{E}_1 \otimes I_{n^2}, \dots, \mathcal{E}_L \otimes I_{n^2}) \text{diag}(\mathcal{B}_1; L) \end{aligned} \quad (2.60a)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_j &\triangleq \text{diag}(S_1 \otimes S_1, \dots, S_L \otimes S_L), \quad j \in \Sigma \\ \mathcal{S}_1 &\triangleq \text{diag}(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_L) \end{aligned} \quad (2.60b)$$

$$\mathcal{A}_2 \triangleq (\Pi^T \otimes I_{n^2}) \text{diag}(A_1 \otimes A_1, \dots, A_L \otimes A_L) \quad (2.60c)$$

$$\mathcal{S}_2 \triangleq \text{diag}(S_1 \otimes S_1, \dots, S_L \otimes S_L). \quad (2.60d)$$

donde \mathcal{A}_2 es la misma matriz definida en (1.22) del capítulo 1.

2.2.3. Estabilidad

En esta sección analizaremos la estabilidad de los sistemas lineales singulares con saltos markovianos para eso nos concentraremos en el estabilidad interna del sistema, es decir, $u(k) = 0$

$$S_{\theta(k+1)} \mathbf{x}(k+1) = A_{\theta(k)} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{X}, \quad (2.61)$$

los tipo de estabilidad que analizaremos fueron expuestos en el capítulo 1, por ejemplo: EMC, EXE, EE, las cuales probaremos que son equivalentes en la sección 1.6.

El siguiente lema nos da una caracterización de EMC en términos del vector $\tilde{q}_1(k)$. Es claro que los mismos resultados se siguen para $\tilde{q}_2(k)$. La demostración es similar al lema 8 del capítulo 1.

Lema 18. *El sistema (2.61) es EMC si y solo si para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \Psi(u)$ y cualquier $\theta(0)$ se cumplen lo siguiente:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{q}_1(k) = 0, \quad (2.62)$$

donde $\tilde{q}_1(k)$ está dado por (2.57e).

Demostración.

Asumamos que el sistema es EMC. De la desigualdad

$$\|Q_{ij}(k)\| = \|E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}\mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}\}\| \leq \|E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\}\| = \|Q(k)\|$$

se sigue que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_{ij}(k) = 0$ y como el operador *vec* es continuo entonces $\lim_{k \rightarrow +\infty} q_{ij}(k) = 0$. De aquí se concluye inmediatamente (2.62).

Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{q}_1(k) = 0$ entonces $\lim_{k \rightarrow +\infty} q_{ij}(k) = 0$ lo que es equivalente a decir que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Q_{ij}(k) = 0$. De (2.58) se concluye que el sistema (2.61) es EMC. \square

2.2.4. Test para EMC

En esta subsección se presenta un test computacional que permite determinar si el sistema (2.61) es EMC mediante el radio espectral generalizado. Asumimos que se cumplen las condiciones de los teoremas 13 y 14 de manera que la trayectoria $\mathbf{x}(k)$ está bien determinada.

Lema 19. *Para el sistema (2.61), el correspondiente vector columna $\tilde{q}_1(k)$, definido en (2.57e), es una solución del SLS siguiente:*

$$\mathcal{S}_1 z(k+1) = \mathcal{A}_1 z(k), \quad z(0) = \tilde{q}_1(0). \quad (2.63)$$

Demostración. Definamos la matriz $W_{i,j}(k)$ por

$$W_{i,j}(k) \triangleq E \left\{ S_{\theta(k)} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) S_{\theta(k)}^T 1_{\{\theta(k)=i\}} 1_{\{\theta(k+1)=j\}} \right\}, \quad i, j \in \Sigma.$$

y aplicando (2.57a),

$$\begin{aligned} W_{j,r}(k+1) &= E \left\{ S_{\theta(k+1)} \mathbf{x}(k+1) \mathbf{x}^T(k+1) S_{\theta(k+1)}^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k+2)=r\}} \right\} \\ &= S_j E \left\{ \mathbf{x}(k+1) \mathbf{x}^T(k+1) 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k+2)=r\}} \right\} S_j^T \\ &= S_j Q_{j,r}(k+1) S_j^T, \quad j, r \in \Sigma. \end{aligned} \quad (2.64)$$

La ecuación (2.64) puede ser reescrita de manera compacta como una ecuación matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} W_{11}(k+1) & \dots & W_{1L}(k+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{L1}(k+1) & \dots & W_{LL}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 Q_{11}(k+1) S_1^T & \dots & S_1 Q_{1L}(k+1) S_1^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_L Q_{L1}(k+1) S_L^T & \dots & S_L Q_{LL}(k+1) S_L^T \end{bmatrix}.$$

vectorizando cada componente en ambos lados de esta ecuación tenemos

$$\begin{bmatrix} \text{vec}[W_{11}(k+1)] \\ \vdots \\ \text{vec}[W_{L1}(k+1)] \\ \vdots \\ \text{vec}[W_{1L}(k+1)] \\ \dots \\ \text{vec}[W_{LL}(k+1)] \end{bmatrix} = \mathcal{S}_1 \begin{bmatrix} q_{11}(k+1) \\ \vdots \\ q_{L1}(k+1) \\ \vdots \\ q_{1L}(k+1) \\ \dots \\ q_{LL}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

donde \mathcal{S}_1 está dado en (2.60b) y

$$q_{j,r}(k+1) = \text{vec}[Q_{j,r}(k+1)].$$

Por (2.57a) y (2.61), $W_{j,r}(k+1)$ puede ser reescrita como sigue:

$$\begin{aligned} W_{j,r}(k+1) &= E \{ A_{\theta(k)} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) A_{\theta(k)}^T 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k+2)=r\}} \} \\ &= \sum_{i=1}^L A_i E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) 1_{\{\theta(k)=i\}} 1_{\{\theta(k+1)=j\}} 1_{\{\theta(k+2)=r\}} \} A_i^T \\ &= \sum_{i=1}^L A_i E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) 1_{\{\theta(k)=i\}} 1_{\{\theta(k+1)=j\}} E \{ 1_{\{\theta(k+2)=r\}} | \boldsymbol{\theta}(k), \boldsymbol{\theta}(k+1) \} \} \\ &= \sum_{i=1}^L A_i Q_{i,j}(k) A_i^T p_{j,r}, \quad i, j, r \in \Sigma, \end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$\begin{bmatrix} W_{11}(k+1) & \dots & W_{1L}(k+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{L1}(k+1) & \dots & W_{LL}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \sum_{i=1}^L A_i Q_{i1}(k) A_i^T & \dots & p_{1L} \sum_{i=1}^L A_i Q_{i1}(k) A_i^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{L1} \sum_{i=1}^L A_i Q_{iL}(k) A_i^T & \dots & p_{LL} \sum_{i=1}^L A_i Q_{iL}(k) A_i^T \end{bmatrix}.$$

Vectorizando cada componente en ambos lados de esta ecuación y siguiendo el orden considerado en (2.65) se tiene

$$\begin{bmatrix} \text{vec}[W_{11}(k+1)] \\ \vdots \\ \text{vec}[W_{L1}(k+1)] \\ \vdots \\ \text{vec}[W_{1L}(k+1)] \\ \dots \\ \text{vec}[W_{LL}(k+1)] \end{bmatrix} = \mathcal{A}_1 \begin{bmatrix} q_{11}(k+1) \\ \vdots \\ q_{L1}(k+1) \\ \vdots \\ q_{1L}(k+1) \\ \dots \\ q_{LL}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

donde \mathcal{A}_1 es dado en (2.60a). De (2.65) y (2.66) se tiene

$$\mathcal{S}_1 \tilde{q}_1(k+1) = \mathcal{A}_1 \tilde{q}_1(k)$$

□

Vamos a explicar la lógica de la matriz \mathcal{A}_1 con $L = 2$. En este caso

$$\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{bmatrix} p_{11}A_1 \otimes A_1 & p_{11}A_2 \otimes A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{21}A_1 \otimes A_1 & p_{21}A_2 \otimes A_2 \\ p_{12}A_1 \otimes A_1 & p_{12}A_2 \otimes A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{22}A_1 \otimes A_1 & p_{22}A_2 \otimes A_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11}I_4 & p_{11}I_4 & 0I_4 & 0I_4 \\ 0I_4 & 0I_4 & p_{21}I_4 & p_{21}I_4 \\ p_{12}I_4 & p_{12}I_4 & 0I_4 & 0I_4 \\ 0I_4 & 0I_4 & p_{22}I_4 & p_{22}I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \otimes A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \otimes A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \otimes A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \otimes A_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{11}\mathcal{E}_1 \otimes I_4 & p_{21}\mathcal{E}_2 \otimes I_4 \\ p_{12}\mathcal{E}_1 \otimes I_4 & p_{22}\mathcal{E}_2 \otimes I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \otimes A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \otimes A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \otimes A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \otimes A_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} p_{11}I_8 & p_{21}I_8 \\ p_{12}I_8 & p_{22}I_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \otimes I_4 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 \otimes I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \otimes A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \otimes A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \otimes A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \otimes A_2 \end{bmatrix} \\
 &= (\Pi^T \otimes I_{2 \times 2^2}) \text{diag}(\mathcal{E}_1 \otimes I_{2^2}, \mathcal{E}_2 \otimes I_{2^2}) \text{diag}(A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2). \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

Basado en la asunción de que el par $(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1)$ es regular, el lema 19 implica el siguiente resultado .

Corolario 2. *Si el par $(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1)$ es regular entonces existe una matriz no singular \mathcal{P}_1 tal que*

$$\tilde{q}_1(k) = \mathcal{P}_1 \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^1(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

donde

$$\tilde{q}_1^1(k) = \mathcal{J}_1^k \tilde{q}_1^1(0), \quad (2.69)$$

y \mathcal{J}_1 es la matriz bloque de la forma de Jordan asociado con $(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1)$ a través de la descomposición de Weierstrass.

Notemos que el corolario 2 sigue siendo cierta para $\tilde{q}_2(k)$, definido en (2.57f). Para introducir el resultado principal de esta sección, hagamos una asunción.

Asunción 3. *Existe una condición inicial consistente $\mathbf{x}(0) \in \Psi(u)$ tal que para toda entrada de $\tilde{q}_1^1(0)(\tilde{q}_2^1(0))$ son diferentes de cero.*

El teorema siguiente es similar al teorema 3 del capítulo 1.

Teorema 15. *Si el par $(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1)$ es regular y se cumple la asunción 3, entonces el sistema (2.61) es EMC si y solo si $\rho(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1) < 1$.*

Demostración. Si el sistema (2.61) es EMC, entonces por el lema 19 y el corolario 2, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{q}_1^1(k) = 0$. Por lo tanto, debido a la asunción 3 y la relación (2.69) se tiene que $\rho(\mathcal{J}_1) < 1$, de donde por el teorema 12 se concluye que $\rho(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1) < 1$.

Si $\rho(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1) < 1$ por el teorema 12 entonces $\rho(\mathcal{J}_1) < 1$. En este caso, de (2.69), $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{q}_1^1(k) = 0$ y (2.68) implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{q}_1(k) = 0$ para cualquier $\mathbf{x}(0)$ y cualquier $\boldsymbol{\theta}(0)$. Entonces por el lema 18, el sistema (2.61) es EMC. \square

Cuando la trayectoria del sistema es no anticipativa, una prueba adecuada se da en el teorema 16. La prueba es similar al que se da en el teorema 15, teniendo en cuenta $\tilde{q}_2(k)$, en lugar de $\tilde{q}_1(k)$.

Teorema 16. *El sistema (2.61) es regular y se satisfacen \mathcal{P}_1 y la asunción 3. El sistema (2.61) es EMC si y solo si $\rho(\mathcal{S}_2, \mathcal{A}_2) < 1$.*

Se observa a partir de los teoremas 15 y 16 que los cálculos de $\tilde{q}_1(0)$ y $\tilde{q}_2(0)$ podría ser necesario para asegurarse de que un sistema no es EMC. Por ejemplo, a partir de (2.57), $\tilde{q}_2(0)$ pueden ser obtenidos calculando primero $Q_i(0), i \in \Sigma$ como sigue. Sea $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(i, j; 0)$ una condición inicial consistente, donde $\theta(0) = i$ y $\theta(1) = j$. Entonces

$$\begin{aligned}
 Q_i(0) &= E \{ \mathbf{x}^T(0) \mathbf{x}(0) \mathbf{1}_{\{\theta(0)=i\}} \} \\
 &= E \left\{ \sum_{j=1}^L x^T(i, j; 0) x(i, j; 0) \mathbf{1}_{\{\theta(1)=j\}} \mathbf{1}_{\{\theta(0)=i\}} \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^L x^T(i, j; 0) x(i, j; 0) E \{ \mathbf{1}_{\{\theta(1)=j\}} \mathbf{1}_{\{\theta(0)=i\}} \} \\
 &= \sum_{(i, j) \in \Sigma^+} x(i, j; 0) x^T(i, j; 0) p_{i, j} \pi_i.
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Este ejemplo siguiente muestra un sistema anticipativo que es EMC.

Ejemplo 11. *Consideramos las matrices siguientes*

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = 0$$

y

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobemos que el ejemplo cumple todas las condiciones del teorema 14.

Regularidad

Tenemos $\Sigma^+ = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$, en efecto para comprobar la regularidad modo a modo se necesita verificar la regularidad de $(S_1, A_1), (S_1, A_2), (S_2, A_1), (S_2, A_2)$ pero esto puede verificarse de forma inmediata tomando, por ejemplo, $\lambda = 1$.

Asunción \mathcal{P}_2

Ahora, para todo $(i,j) \in \Sigma^+$ la multiplicidad algebraica del valor propio nulo de $S_{i,j}$ es igual a $\alpha_{i,j} = 1$ y además $\eta_{i,j} = 1$. Por otro lado

$$P_{\theta(0)=2,\theta(1)=1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6731 & 1.3463 \\ 1.3976 & 0.5590 \end{bmatrix}, \quad P_{\theta(0)=2,\theta(1)=2}^{-1} = \begin{bmatrix} 3.0772 & 2.3079 \\ 3.5714 & 1.4286 \end{bmatrix},$$

se puede comprobar que el producto $P_{i,j}^{-1}P_{j,r}$ produce una matriz que tiene la estructura de $\mathcal{P}_{2(i,j,r)}$ par todo $i,j,r \in \Sigma$.

Condición inicial

Como $\beta = 1$ se obtiene el conjunto de condiciones iniciales consistentes

$$\Psi(\theta(0) = 2, \theta(1) = 1, u) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; [0 \ 1]P_{\theta(0)=2,\theta(1)=1}^{-1}x = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; 2.499x_1 = -x_2 \right\},$$

$$\Psi(\theta(0) = 2, \theta(1) = 2, u) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; [0 \ 1]P_{\theta(0)=2,\theta(1)=2}^{-1}x = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; 2.01x_1 = -x_2 \right\}.$$

Por lo tanto, por el teorema 14 entonces el sistema tiene una única solución para cualquier $x(0) \in \Psi(u)$.

Ahora como $\rho(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1) = 0.1627 < 1$ y el sistema es anticipativo, entonces por el teorema 15 el sistema es EMC. Observe, que en este caso no es necesario comprobar la suposición 3 para concluir la estabilidad del sistema.

El ejemplo siguiente muestra un sistema no anticipativo que no es EMC.

Ejemplo 12. Considere las siguientes matrices:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = 0$$

y

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi = [0.5 \ 0.5].$$

Debido a la matriz de transición y vector de distribución inicial de la cadena de Markov entonces posee dos únicas realizaciones que son $\omega_1 = \{1,2,1,2, \dots\}$ y $\omega_2 = \{2,1,2,1, \dots\}$. Comprobemos que el ejemplo cumple todas las condiciones del teorema 13.

Regularidad

En este caso $\Sigma^+ = \{(1,2),(2,1)\}$, en efecto para comprobar que el sistema es regular modo a modo sólo se necesita comprobar la regularidad de los pares $(S_1, A_2), (S_2, A_1)$ pero esto se puede verificar inmediatamente tomando $\lambda = 1$.

Asunción \mathcal{P}_1

Para todo $(i,j) \in \Sigma^+$ se tiene que los valores propios nulos de $S_{i,j}$, tienen exponente 1, entonces $\alpha_{i,j} = \eta_{i,j} = 1 = \beta$. Por otro lado,

$$P_{\theta(0)=1,\theta(1)=2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.41 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{\theta(0)=2,\theta(1)=1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.41 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo

$$\mathcal{P}_{1(i,j,r)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para todo $(i,j),(j,r) \in \Sigma^+$ entonces se cumple \mathcal{P}_1 .

Condición inicial

Como las condiciones iniciales depende de $\theta(0)$ y $\theta(1)$. Entonces el conjunto de condiciones iniciales consistentes es de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \Psi(\theta(0) = 1, \theta(1) = 2, u) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; [0 \ 1] P_{\theta(0)=1,\theta(1)=2}^{-1} x = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x_1 = -x_2 \right\} \\ \Psi(\theta(0) = 2, \theta(1) = 1, u) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; [0 \ 1] P_{\theta(0)=2,\theta(1)=1}^{-1} x = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x_1 = -x_2 \right\}. \end{aligned}$$

Entonces por el teorema 13 tiene solución única para todo $x(0) \in \Psi$. Debido a la naturaleza no anticipativa del sistema, la prueba de estabilidad adecuada es proporcionado por el teorema 16. Ya que $\rho(\mathcal{S}_2, \mathcal{A}_2) = 12 > 1$ el sistema no sería estable. Sin embargo, en este caso, es necesario comprobar la asunción 3. Tomando $x(1,2;0) = x(2,1;0) = [1 \ -1]^T$, se sigue de (2.70) que

$$Q_1(0) = Q_2(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$q_2(0) = [0.5 \ -0.5 \ -0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ -0.5 \ -0.5 \ 0.5]^T.$$

Para el par $(\mathcal{S}_2, \mathcal{A}_2)$, se obtiene

$$P_2 = \begin{bmatrix} -0.1581 & 0.1581 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1581 & -0.1581 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1581 & -0.1581 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1581 & 0.1581 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4743 & 0.4743 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4743 & -0.4743 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.4743 & -0.4743 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.4743 & 0.4743 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$P_2^{-1}q_2(0) = \begin{bmatrix} -1.0542 \\ 2.1082 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con $\alpha_{ij} = \eta_{ij} = 6$, este resultado es como se esperaba y la asunción 3 se cumple. Por lo tanto el sistema no es EMC. En este caso, se puede obtener las trayectorias

$$\mathbf{x}(\omega_1, k) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 72 \\ -72 \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

$$\mathbf{x}(\omega_2, k) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ -24 \end{bmatrix}, \dots \right\},$$

, donde observamos que el sistema no es EMC.

2.2.5. Equivalencia entre estabilidades

En esta sección se establece la relación entre diferentes conceptos de estabilidad. Se comprobará que en condiciones de regularidad, los tipos de estabilidad EMC, EE y EXE son equivalentes y todos ellos implican CSE. Este resultado generaliza la misma

relación que se establece en la literatura para sistemas lineales no singulares con saltos markovianos. En esta sección, se establece que la asunción 3 se cumple.

Definamos la matriz $M_{i,j}(k)$ como sigue:

$$M_{i,j}(k) \triangleq \sum_{\ell=0}^k Q_{i,j}(\ell) = \sum_{\ell=0}^k E \{ \mathbf{x}(\ell) \mathbf{x}^T(\ell) 1_{\{\theta(\ell)=i\}} 1_{\{\theta(\ell+1)=j\}} \}, \quad i, j \in \Sigma, k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.71)$$

La demostración del lema 20 es similar al lema 15 del capítulo 1.

Lema 20. *Sea $M_{i,j}(k)$ definido como en (2.71), entonces la siguiente desigualdad se cumple:*

$$\sum_{i,j=1}^L \text{tr} (M_{i,j}(k)) = \sum_{\ell=0}^k E \{ \|\mathbf{x}(\ell)\|^2 \}. \quad (2.72)$$

El siguiente teorema establece la equivalencia entre el EMC y EE. Los argumentos para la demostración son similares al teorema 6 del capítulo 1.

Teorema 17. *Sea el sistema (2.61) regular modo a modo y asumamos que el par $(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1)$ es regular. Entonces el sistema es EMC si y solo si es EE.*

El siguiente teorema establece la equivalencia entre el EMC y EXE. Los argumentos de la demostración son similares al lema 8 del capítulo 1.

Teorema 18. *Sea el sistema (2.61) es regular modo a modo y asumimos que el par $(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1)$ es regular. Entonces el sistema es EMC si y solo si es EXE.*

La demostración del teorema 19 es similar al teorema 9 del capítulo 1.

Teorema 19. *Sea el sistema (2.61) es regular modo a modo y asumimos que el par $(\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1)$ es regular. Si el sistema es EMC entonces es CSE.*

Capítulo 3

Exponente de Lyapunov y Estabilidad Casi Segura

3.1. Introducción

El matemático ruso Aleksandr Lyapunov elaboró rigurosamente la teoría moderna de la estabilidad de sistemas dinámicos en su famosa tesis doctoral en 1892 con el título “Problème générale de la stabilité du mouvement” [26] en donde definió la teoría de los exponentes característicos que llevan hoy su nombre.

El exponente de Lyapunov proporciona un criterio para asegurar si el sistema es estable en el sentido de Lyapunov. Según este criterio, el sistema es estable si y sólo si el exponente de Lyapunov superior es negativo. Este concepto se ha generalizado para el estudio de sistemas estocásticos. En 1960, H. Furstenberg y H. Kesten [27] presentaron un artículo que analiza los procesos estocásticos con valores matriciales y en 1963, H. Furstenberg [28] presenta un artículo que analiza el producto de matrices aleatorias. El primero en analizar los sistemas lineales estocásticos mediante la estabilidad casi segura fue R. Z. Khas'minskii [29], esto ocurrió en 1967.

La intensa investigación en esta área se evidenció en los trabajos presentados por Arnold y su escuela [30] y [36]. Este enfoque se puede utilizar con eficiencia para estudiar la estabilidad casi segura de los sistemas lineales cuyo proceso está gobernado por un proceso de Poisson, los primeros resultados fueron presentados por Arnold [36], Feng y Loparo [32], Loparo y Feng [33]. Cuando los sistemas lineales están gobernados por una

cadena de Markov con espacio de estado finito, Feng y Loparo [34] obtienen un teorema espectral. Este enfoque puede resolver por completo el problema de la estabilidad casi segura para los sistemas lineales con saltos con sólo determinando el signo del exponente superior.

Recordemos la definición de exponente de Lyapunov para la ecuación diferencial no lineal siguiente:

$$u' = f(u), u \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

con φ_t flujo asociado. El exponente de Lyapunov para el sistema (3.1) se define:

Definición 9. Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$, y φ_t la solución del sistema (3.1). Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo, el exponente de Lyapunov en ξ en la dirección v para el flujo φ_t es:

$$\chi(\xi, v) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|D\varphi_t(\xi)v\|}{\|v\|} \right) \quad (3.2)$$

Ahora para el caso si el sistema es lineal y periodico :

$$u' = A(t)u, u \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

con $\Phi(t)$ la matriz fundamental basada en $t = 0$. El exponente de Lyapunov respecto a $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo se define:

$$\chi(v) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\Phi(t)v\|}{\|v\|} \right) \quad (3.4)$$

El Exponente de Lyapunov o Exponente característico de Lyapunov de un sistema dinámico es una cantidad que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. El grado de separación puede ser distinto para diferentes orientaciones del vector de separación inicial. En la literatura es común referirse solo al más grande (top lyapunov), porque determina la predictibilidad de un sistema.

3.2. Caso Singular

El objetivo de esta sección es presentar un exponente de Lyapunov que sirva como herramienta de análisis para la estabilidad casi segura de un sistema singular con saltos markovianos. Basados en la teoría de exponentes de Lyapunov para sistemas no singulares,

desarrollada por Fang [37], definimos aquí un exponente de Lyapunov adecuado para el sistema singular

$$S_{\theta(k+1)}\mathbf{x}(k+1) = A_{\theta(k)}\mathbf{x}(k). \quad (3.5)$$

Recordemos que el sistema (3.5) es estable casi seguramente si su trayectoria converge en norma a cero para casi todas las realizaciones de la cadena de Markov, esto es, si para todo $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{X}$ y todo $\theta(0)$ ocurre que

$$\Pr \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(k)\| = 0 \right\} = 1 \quad (3.6)$$

Veremos que la condición de ser negativo el exponente de Lyapunov es suficiente para asegurar que se cumple (3.6), como ocurre en la teoría clásica. Comencemos por introducir algunas notaciones.

$$\Phi(k) = \begin{cases} \left\{ \prod_{l=0}^{k-1} J_{\theta(k-l), \theta(k-l+1)} L_{\theta(k-l-1), \theta(k-l), \theta(k-l+1)}^{-1} \right\} J_{\theta(0), \theta(1)}, & k \geq 1 \\ J_{\theta(0), \theta(1)}, & k = 0 \end{cases}$$

$$G_1 \triangleq \max_{\theta(k), \theta(k+1) \in \Sigma} \|J_{\theta(k), \theta(k+1)}\| \quad (3.7)$$

$$G_2 \triangleq \max_{\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2) \in \Sigma} \|L_{\theta(k), \theta(k+1), \theta(k+2)}^{-1}\| \quad (3.8)$$

Puesto que G_1 y G_2 son escalares positivos, el escalar M , dado en (3.9), está bien definido. Este escalar garantiza la existencia del valor esperado de las cantidades involucradas en nuestras derivaciones.

$$M = \ln G_1 + \ln G_2 \quad (3.9)$$

En este capítulo asumimos que la cadena de Markov $\theta(k)$ es irreducible, lo que implica que $\theta(k)$ tiene una única distribución invariante que será denotada por π . Recordemos que si tomamos $\pi(0) = \pi$, entonces la cadena de Markov $\theta(k)$ se vuelve estacionaria. Para enfatizar que un valor esperado se ha calculado asumiendo que la distribución inicial de la cadena de Markov se ha tomado como la distribución invariante, escribimos E_π . A continuación se define el exponente de Lyapunov.

Definición 10. *El exponente de Lyapunov asociado al sistema (3.5) está dado por*

$$\alpha_\pi \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} E_\pi \{ \ln \|\Phi(k)\| \}. \quad (3.10)$$

La primera cuestión que debemos aclarar respecto de la definición 10 es si el límite en (3.10) realmente existe. El primer paso para responder esta pregunta es el siguiente lema.

Lema 21. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión definida por

$$a_n = E_\pi \{ \ln \|\Phi(n-1)\| \}$$

entonces $a_{m+n} \leq a_m + a_n + E_\pi \left\{ \ln \left\| L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1} \right\| \right\}$.

Demostración. De la definición se sigue directamente lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_{m+n} &= E_\pi \left\{ \ln \left\| J_{\theta(m+n-1),\theta(m+n)} L_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1),\theta(m+n)}^{-1} J_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots J_{\theta(1),\theta(2)} L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1} J_{\theta(0),\theta(1)} \right\| \right\} \\ &\leq E_\pi \left\{ \ln \left\| J_{\theta(m+n-1),\theta(m+n)} L_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1),\theta(m+n)}^{-1} J_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots J_{\theta(m+1),\theta(m+2)} L_{\theta(m),\theta(m+1),\theta(m+2)}^{-1} J_{\theta(m),\theta(m+1)} \right\| \right\} \\ &\quad + E_\pi \left\{ \ln \left\| L_{\theta(m-1),\theta(m),\theta(m+1)}^{-1} \right\| \right\} \\ &\quad + E_\pi \left\{ \ln \left\| J_{\theta(m-1),\theta(m)} L_{\theta(m-2),\theta(m-1),\theta(m)}^{-1} J_{\theta(m-2),\theta(m-1)} \dots J_{\theta(1),\theta(2)} L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1} J_{\theta(0),\theta(1)} \right\| \right\} \\ &= E_\pi \left\{ \ln \left\| J_{\theta(m+n-1),\theta(m+n)} L_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1),\theta(m+n)}^{-1} J_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots J_{\theta(m+1),\theta(m+2)} L_{\theta(m),\theta(m+1),\theta(m+2)}^{-1} J_{\theta(m),\theta(m+1)} \right\| \right\} \\ &\quad + E_\pi \left\{ \ln \left\| L_{\theta(m-1),\theta(m),\theta(m+1)}^{-1} \right\| \right\} \\ &\quad + E_\pi \{ \ln \|\Phi(m-1)\| \}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dado que la cadena de Markov es estacionaria entonces

$$\begin{aligned} &E_\pi \left\{ \ln \left\| J_{\theta(m+n-1),\theta(m+n)} L_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1),\theta(m+n)}^{-1} J_{\theta(m+n-2),\theta(m+n-1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots J_{\theta(m+1),\theta(m+2)} L_{\theta(m),\theta(m+1),\theta(m+2)}^{-1} J_{\theta(m),\theta(m+1)} \right\| \right\} \\ &= E_\pi \left\{ \ln \left\| J_{\theta(n-1),\theta(n)} L_{\theta(n-2),\theta(n-1),\theta(n)}^{-1} J_{\theta(n-2),\theta(n-1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots J_{\theta(1),\theta(2)} L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1} J_{\theta(0),\theta(1)} \right\| \right\} \\ &= E_\pi \{ \ln \|\Phi(n-1)\| \}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

y además

$$E_\pi \left\{ \ln \left\| L_{\theta(m-1),\theta(m),\theta(m+1)}^{-1} \right\| \right\} = E_\pi \left\{ \ln \left\| L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1} \right\| \right\} \tag{3.13}$$

Reemplazando (3.12) y (3.13) en (3.11) se obtiene

$$\begin{aligned} a_{m+n} &\leq E_\pi \{ \ln \|\Phi(n-1)\| \} + E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\} + E_\pi \{ \ln \|\Phi(m-1)\| \} \\ &= a_m + a_n + E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\} \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Corolario 3. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión definida por

$$a_n = E_\pi \{ \ln \|\Phi(n-1)\| \}.$$

entonces

$$a_{mp} \leq pa_m + (p-1)E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Demostración. La prueba se basa en el principio de inducción matemática. Aplicando inducción sobre p , para $p = 1$ se cumple (3.14) de manera trivial. Suponiendo que (3.14) se cumple para $p = l$ tenemos que probar que cumple para $p = l + 1$. En efecto, por el lema 21 se obtiene :

$$\begin{aligned} a_{m(l+1)} &\leq a_{ml} + a_m + E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\} \\ &\leq la_m + (l-1)E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\} + a_m + E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\} \\ &\leq (l+1)a_m + (l)E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\} \end{aligned}$$

□

Lema 22. El exponente α_π , establecido en (3.10), está bien definido, esto es, el límite (3.10) existe.

Demostración. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, por el algoritmo de euclides se puede expresar $n + 1 = (m + 1)p + r, 0 \leq r < m + 1$. Por el lema 21 y el corolario 3 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{n} &= \frac{a_{(m+1)p+r}}{n} \\ &\leq \frac{a_{(m+1)p}}{n} + \frac{a_r}{n} + \frac{E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\}}{n} \\ &\leq \frac{p}{n}a_{m+1} + \frac{a_r}{n} + \frac{pE_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\}}{n} \\ &\leq \frac{a_{m+1}}{m} + \frac{a_r}{n} + \frac{E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\}}{m} \end{aligned}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n} \leq \frac{a_{m+1}}{m} + \frac{a_r}{n} + \frac{E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\}}{n} + \frac{E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\}}{m} \quad (3.15)$$

tomando límite superior cuando $n \rightarrow +\infty$ a ambos lados de (3.15) se obtiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} \leq \frac{a_{m+1}}{m} + \frac{E_\pi \left\{ \ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \right\}}{m}. \quad (3.16)$$

Y ahora tomando límite inferior cuando $m \rightarrow +\infty$ a ambos lados de (3.16) se obtiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{n} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{m} \quad (3.17)$$

Puesto que el límite inferior es siempre menor o igual que el límite superior, el resultado se concluye de (3.17). \square

Vamos a utilizar con frecuencia la Ley de los grandes números para ello necesitamos definir las siguientes cadenas de Markov irreducibles.

Lema 23. *Sea $\theta(l)$ una cadena de Markov irreducible con espacio de estados Σ . Entonces el proceso estocástico $\tilde{\theta}(l)$ definido por*

$$\tilde{\theta}(l) \triangleq \{((\theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m), (\theta((l+1)m-2), \theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m)), \dots, (\theta(lm-1), \theta(lm), \theta(lm+1)), (\theta(lm), \theta(lm+1)))\}_{l \in \mathbb{Z}_+, \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

es una cadena de Markov irreducible con espacio de estados Σ^{m+1} .

Demostración. Claramente el espacio de estados de $\tilde{\theta}(l)$ es Σ^{m+1} . Enseguida probaremos que $\tilde{\theta}(l)$ es una cadena de Markov. Para esto tomemos $\tilde{i}_0, \tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_{l+1}$ arbitrariamente en Σ^{m+1} . Puesto que $\theta(k)$ es irreducible, de la definición de $\tilde{\theta}(l)$ se sigue:

$$\begin{aligned} & \Pr \left(\tilde{\theta}(l+1) = \tilde{i}_{l+1} \mid \tilde{\theta}(l) = \tilde{i}_l \dots \tilde{\theta}(0) = \tilde{i}_0 \right) \\ &= \Pr \left(\theta_{(l+2)m} = i_{(l+2)m}, \dots, \theta_{(l+1)m} = i_{(l+1)m} \mid \theta_{(l+1)m} = i_{(l+1)m} \dots \theta_0 = i_0 \right) \\ &= \frac{P_{i_{(l+2)m-1}, i_{(l+2)m}} \dots P_{i_{(l+1)m}, i_{(l+1)m+1}}}{P_{i_{(l+1)m-1}, i_{(l+1)m}} \dots P_{i_{lm}, i_{lm+1}}} \Pr(\theta_{lm} = i_{lm}) \\ &= \Pr \left((\theta_{(l+2)m-1} = i_{(l+2)m-1}, \theta_{(l+2)m} = i_{(l+2)m}) \dots (\theta_{(l+1)m} = i_{(l+1)m}, \theta_{(l+1)m+1} = i_{(l+1)m+1}) \right. \\ & \quad \left. \mid (\theta_{(l+1)m-1} = i_{(l+1)m-1}, \theta_{(l+1)m} = i_{(l+1)m}) \dots (\theta_{lm} = i_{lm}, \theta_{lm+1} = i_{lm+1}) \right) \\ &= \Pr \left(\tilde{\theta}(l+1) = \tilde{i}_{l+1} \mid \tilde{\theta}(l) = \tilde{i}_l \right) \end{aligned}$$

Esto prueba la propiedad Markoviana de $\tilde{\theta}(l)$. Enseguida veamos que $\tilde{\theta}(l)$ es una cadena de Markov homogénea e irreducible. Sean \tilde{i} y \tilde{j} dos estados cualesquiera de $\tilde{\theta}(l)$. Por la definición de $\tilde{\theta}(l)$ y dado que $\tilde{\theta}(l)$ es irreducible se sigue que

$$\begin{aligned} p_{\tilde{i}\tilde{j}}(l) &= \Pr\left(\tilde{\theta}(l+1) = \tilde{j} \mid \tilde{\theta}(l) = \tilde{i}\right) \\ &= \frac{p_{i_{2m}, i_{2m+1}} \cdots p_{i_1, i_2} \Pr(\theta_{lm} = i_1)}{p_{i_m, i_{m+1}} \cdots p_{i_1, i_2} \Pr(\theta_{lm} = i_1)} \\ &= p_{i_{2m}, i_{2m+1}} \cdots p_{i_{m+1}, i_{m+2}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

□

Del lema 23, se desprende de inmediato el siguiente corolario.

Corolario 4. *Sea $\theta(l)$ una cadena de Markov irreducible con espacio de estados Σ . Entonces las cadenas de Markov $\hat{\theta}(l)$ y $\bar{\theta}(l)$ definidas por*

$$\hat{\theta}(l) \triangleq \{(\theta(l), \theta(l+1))\}_{l \in \mathbb{Z}_+} \quad \bar{\theta}(l) \triangleq \{(\theta(l), \theta(l+1), \theta(l+2))\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$$

son irreducibles con espacio de estados Σ^2 y Σ^3 , respectivamente.

Lema 24. *Sea $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión definida por*

$$v_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k \ln \|J_{\theta(l), \theta(l+1)}\| + \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \ln \|L_{\theta(l), \theta(l+1), \theta(l+2)}^{-1}\|.$$

Entonces $E_\pi\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_\pi\{v_k\} = E_\pi\{\ln \|J_{\theta(0), \theta(1)}\|\} + E_\pi\{\ln \|L_{\theta(0), \theta(1), \theta(2)}^{-1}\|\}. \quad (3.18)$$

Demostración. Aplicando la Ley de los grandes números para las cadenas de Markov $\hat{\theta}(l)$ y $\bar{\theta}(l)$ se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} v_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k \ln \|J_{\theta(l), \theta(l+1)}\| + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \ln \|L_{\theta(l), \theta(l+1), \theta(l+2)}^{-1}\| \\ &= E_\pi\{\ln \|J_{\theta(0), \theta(1)}\|\} + E_\pi\{\ln \|L_{\theta(0), \theta(1), \theta(2)}^{-1}\|\} \quad Pr_\pi\text{-c.s.} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Además, por (3.7) y (3.8) se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k \ln \|J_{\theta(l), \theta(l+1)}\| + \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \ln \|L_{\theta(l), \theta(l+1), \theta(l+2)}^{-1}\| &\leq \left(\frac{k+1}{k}\right) \ln G_1 + \left(\frac{k}{k}\right) \ln G_2 \\ &\leq 2 \ln G_1 + \ln G_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

La igualdad (3.18) se deduce de (3.19), (3.20) y el teorema de la convergencia dominada. \square

Lema 25. *El exponente de Lyapunov α_π cumple la siguiente igualdad:*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| = \alpha_\pi \quad Pr_\pi - c.s. \quad (3.21)$$

Demostración. Primero veamos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \leq \alpha_\pi \quad Pr_\pi - c.s.$$

En efecto, por la Ley de los grandes números para $\tilde{\theta}(l)$ tenemos

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \ln \|J_{\theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m)} L_{\theta((l+1)m-2), \theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m)}^{-1} J_{\theta((l+1)m-2), \theta((l+1)m-1)} \\ & \dots J_{\theta(lm+1), \theta(lm+2)} L_{\theta(lm), \theta(lm+1), \theta(lm+2)}^{-1} J_{\theta(lm), \theta(lm+1)} \| \\ & = E_\pi \{ \ln \|J_{\theta(m-1), \theta(m)} L_{\theta((m-2), \theta(m-1), \theta(m))}^{-1} J_{\theta(m-2), \theta(m-1)} \dots J_{\theta(1), \theta(2)} L_{\theta(0), \theta(1), \theta(2)}^{-1} J_{\theta(0), \theta(1)} \| \} \\ & = E_\pi \{ \ln \|\Phi(m-1)\| \} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dados $k, m \in \mathbb{N}$ por el algoritmo de euclides se puede expresar $k = mp + q$, donde $0 \leq q < m$. Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \\ & = \frac{1}{k} \ln \|J_{\theta(k), \theta(k+1)} L_{\theta(k-1), \theta(k), \theta(k+1)}^{-1} J_{\theta(k-1), \theta(k)} \dots J_{\theta(1), \theta(2)} L_{\theta(0), \theta(1), \theta(2)}^{-1} J_{\theta(0), \theta(1)} \| \\ & \leq \frac{1}{k} \ln \|J_{\theta(k), \theta(k+1)} L_{\theta(k-1), \theta(k), \theta(k+1)}^{-1} J_{\theta(k-1), \theta(k)} \\ & \dots J_{\theta(mp+2), \theta(mp+3)} L_{\theta(mp+1), \theta(mp+2), \theta(mp+3)}^{-1} J_{\theta(mp+1), \theta(mp+2)} \| \\ & + \frac{p}{k} \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \ln \|J_{\theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m)} L_{\theta((l+1)m-2), \theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m)}^{-1} J_{\theta((l+1)m-2), \theta((l+1)m-1)} \\ & \dots J_{\theta(lm+1), \theta(lm+2)} L_{\theta(lm), \theta(lm+1), \theta(lm+2)}^{-1} J_{\theta(lm), \theta(lm+1)} \| \\ & \leq \frac{1}{k} \ln \|J_{\theta(k), \theta(k+1)} L_{\theta(k-1), \theta(k), \theta(k+1)}^{-1} J_{\theta(k-1), \theta(k)} \dots \\ & J_{\theta(mp+2), \theta(mp+3)} L_{\theta(mp+1), \theta(mp+2), \theta(mp+3)}^{-1} J_{\theta(mp+1), \theta(mp+2)} \| \\ & + \frac{1}{m} \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \ln \|J_{\theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m)} L_{\theta((l+1)m-2), \theta((l+1)m-1), \theta((l+1)m)}^{-1} J_{\theta((l+1)m-2), \theta((l+1)m-1)} \\ & \dots J_{\theta(lm+1), \theta(lm+2)} L_{\theta(lm), \theta(lm+1), \theta(lm+2)}^{-1} J_{\theta(lm), \theta(lm+1)} \| \end{aligned} \quad (3.23)$$

Además por (3.7)-(3.9) se tiene

$$\ln \|J_{\theta(k),\theta(k+1)}L_{\theta(k-1),\theta(k),\theta(k+1)}^{-1}J_{\theta(k-1),\theta(k)} \cdots \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & J_{\theta(mp+2),\theta(mp+3)}L_{\theta(mp+1),\theta(mp+2),\theta(mp+3)}^{-1}J_{\theta(mp+1),\theta(mp+2)}\| \\ & \leq \sum_{s=mp+1}^k \ln \|J_{\theta(s),\theta(s+1)}\| + \sum_{s=mp+1}^{k-1} \ln \|L_{\theta(s),\theta(s+1),\theta(s+2)}^{-1}\| \\ & \leq q \ln(G_1) + (q-1) \log(G_2) \leq qM, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por otro lado, de (3.23) y (3.24) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| & \leq \frac{1}{m} \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \ln \|J_{\theta((l+1)m-1),\theta((l+1)m)}L_{\theta((l+1)m-2),\theta((l+1)m-1),\theta((l+1)m)}^{-1}J_{\theta((l+1)m-2),\theta((l+1)m-1)} \\ & \quad \cdots J_{\theta(lm+1),\theta(lm+2)}L_{\theta(lm),\theta(lm+1),\theta(lm+2)}^{-1}J_{\theta(lm),\theta(lm+1)}\| + \frac{Mq}{k} \end{aligned}$$

Fijando m y tomando el límite superior cuando $p \rightarrow +\infty$ a ambos lados de esta desigualdad se obtiene

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \leq \frac{1}{m} E_\pi \{\ln \|\Phi(m-1)\|\} \leq \frac{1}{m-1} E_\pi \{\ln \|\Phi(m-1)\|\}$$

Finalmente tomando el límite cuando $m \rightarrow +\infty$ se sigue que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \leq \alpha_\pi. \quad (3.26)$$

Ahora veamos que

$$\alpha_\pi \leq E_\pi \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \right\}. \quad (3.27)$$

Para esto comencemos por definir la sucesión $\{\gamma_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ como sigue:

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k \ln \|J_{\theta(l),\theta(l+1)}\| + \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \log \|L_{\theta(l),\theta(l+1),\theta(l+2)}^{-1}\| - \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \quad (3.28)$$

Observe que como

$$\|\Phi(k)\| \leq \|J_{\theta(k),\theta(k+1)}\| \|L_{\theta(k-1),\theta(k),\theta(k+1)}^{-1}\| \|J_{\theta(k-1),\theta(k)}\| \cdots \|J_{\theta(1),\theta(2)}\| \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\| \|J_{\theta(0),\theta(1)}\|,$$

entonces $\gamma_k \geq 0$.

Tomando límite inferior cuando $k \rightarrow +\infty$ a ambos lados de (3.28) y aplicando la Ley de los grandes números para $\hat{\theta}(l)$ y $\bar{\theta}(l)$ tenemos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = E_\pi \{\ln \|J_{\theta(0),\theta(1)}\|\} + E_\pi \{\ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\|\} - \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \quad (3.29)$$

Además de (3.28) se obtiene

$$E_\pi\{\gamma_k\} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k E_\pi\{\ln \|J_{\theta(l),\theta(l+1)}\|\} + \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} E_\pi\{\ln \|L_{\theta(l),\theta(l+1),\theta(l+2)}^{-1}\|\} - E_\pi\left\{\frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\|\right\}$$

Tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ a ambos lados de esta igualdad y teniendo en cuenta (3.18) se sigue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_\pi\{\gamma_k\} = E_\pi\{\ln \|J_{\theta(0),\theta(1)}\|\} + E_\pi\{\ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\|\} - \alpha_\pi \quad (3.30)$$

Por otro lado, de (3.29) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq E_\pi\left\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \gamma_k\right\} \\ &= E_\pi\{\ln \|J_{\theta(0),\theta(1)}\|\} + E_\pi\{\ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\|\} - E_\pi\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\|\right\}. \end{aligned}$$

Ahora por el lema de Fatou y (3.30) esta desigualdad se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &E_\pi\{\ln \|J_{\theta(0),\theta(1)}\|\} + E_\pi\{\ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\|\} \\ &- E_\pi\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\|\right\} \\ &= E_\pi\left\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \gamma_k\right\} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E_\pi\{\gamma_k\} \\ &= E_\pi\{\ln \|J_{\theta(0),\theta(1)}\|\} + E_\pi\{\ln \|L_{\theta(0),\theta(1),\theta(2)}^{-1}\|\} - \alpha_\pi, \end{aligned}$$

de donde

$$\alpha_\pi \leq E_\pi\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\|\right\}.$$

Ahora por (3.26) también se tiene la desigualdad en el otro sentido, esto es,

$$E_\pi\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\|\right\} \leq \alpha_\pi, \quad (3.31)$$

Luego (3.27) y (3.31) implican que

$$\alpha_\pi = E_\pi\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\|\right\}.$$

Finalmente de (3.26) y el teorema 21 del anexo se obtiene

$$\alpha_\pi = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| \quad Pr_\pi\text{-c.s.} \quad (3.32)$$

□

El siguiente teorema, que es el resultado principal de este capítulo, da condiciones bajo las cuales el sistema (3.5) es estable casi seguramente.

Teorema 20. *Si $\alpha_\pi < 0$ el sistema (3.5) es estable casi seguramente.*

Demostración. Dado que

$$\mathbf{x}_{1(\theta(k),\theta(k+1))}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0)$$

entonces

$$\|\mathbf{x}_{1(\theta(k),\theta(k+1))}(k+1)\| \leq \|\Phi(k)\| \|\mathbf{x}_{1(\theta(0),\theta(1))}(0)\|. \quad (3.33)$$

Por otro lado, por el lema 25

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| = \alpha_\pi < 0 \quad Pr_\pi - c.s.,$$

de donde

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que para } k \geq k_0 \Rightarrow \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k)\| - \alpha_\pi < \epsilon$$

Luego existe c , $\alpha_\pi < c < 0$, tal que tomando $\epsilon = c - \alpha_\pi$ se obtiene

$$0 \leq \|\Phi(k)\| \leq e^{kc},$$

de donde

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\Phi(k)\| = 0$$

De aquí, por (3.33) tenemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_{1(\theta(k),\theta(k+1))}(k+1)\| = 0 \quad Pr_\pi - c.s. \quad (3.34)$$

Además,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(k+1)\| &= \left\| P_{\theta(k),\theta(k+1)} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(\theta(k),\theta(k+1))}(k+1) \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \|P_{\theta(k),\theta(k+1)}\| \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1(\theta(k),\theta(k+1))}(k+1) \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \beta \|\mathbf{x}_{1(\theta(k),\theta(k+1))}(k+1)\|, \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde

$$\beta = \max_{\theta(k),\theta(k+1) \in \Sigma} \|P_{\theta(k),\theta(k+1)}\| \quad (3.36)$$

De (3.35) se concluye que el sistema (3.5) es estable casi seguramente. \square

Ejemplo 13. Consideremos un sistema con dos modos, donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Además consideremos la matriz de probabilidad y el vector de distribución inicial (la distribución invariante):

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi = [0.5 \quad 0.5].$$

Tenemos dos únicas posibles realizaciones, $\omega_1 = \{2,1,2,\dots\}$ y $\omega_2 = \{1,2,1,\dots\}$. Además $\Sigma^+ = \{(1,2), (2,1)\}$. El sistema es regular modo a modo regular, pues para $\lambda = 0$ se tiene

$$\det(\lambda S_2 - A_1) \neq 0$$

$$\det(\lambda S_1 - A_2) \neq 0.$$

Notemos que $\alpha_{ij} = 2$ para todo $(i,j) \in \Sigma^+$ y que se cumple la condición \mathcal{P}_2 , pues

$$\mathcal{P}_2 \triangleq P_{i,j}^{-1} P_{j,r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 1 & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

de donde

$$L_{i,j,r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente el sistema tiene una trayectoria bien definida. Ahora verifiquemos el Teorema 20. Para la realización ω_1 :

$$J_{2,1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad J_{1,2} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

y para la realización ω_2 :

$$J_{2,1} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad J_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$E_{\pi} \{\ln \|\Phi(k)\|\} = 0.5 \times E_{\pi} \left\{ \ln 2^{-\lceil \frac{k+2}{2} \rceil} \right\} + 0.5 \times E_{\pi} \left\{ \ln 2^{-\lceil \frac{k+1}{2} \rceil} \right\},$$

de donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} E_{\pi} \{\ln \|\Phi(k)\|\} = -0.345$$

En consecuencia por el teorema 20 el sistema (3.5) es estable casi seguramente. Podemos comprobar este resultado con las trayectorias:

$$x(\omega_1, k) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x_1 \\ -\frac{x_2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{2} \\ -\frac{x_2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2} \\ \frac{x_2}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

$$x(\omega_2, k) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{2} \\ \frac{2x_2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2} \\ -\frac{x_2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{4} \\ -\frac{2x_2}{9} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

Para el ejemplo tenemos dos únicas realizaciones donde cada una de ellas tiene probabilidad 0.5, claramente la trayectoria del sistema converge a cero en media.

3.3. Caso no singular

Para el sistema no singular

$$\mathbf{x}(k+1) = A_{\theta(k)} \mathbf{x}(k), \tag{3.37}$$

la matriz $\Phi(k)$ correspondiente es

$$\Phi(k) \triangleq A_{\theta(k)} A_{\theta(k-1)} \dots A_{\theta(0)} \tag{3.38}$$

El exponente de Lyapunov para (3.37) se define de la misma manera que en el caso singular, (3.10). De hecho, como fue dicho en la sección anterior, los diversos resultados presentados en la sección anterior son adaptaciones del caso no singular.

Observación 10. *En el caso no singular las matrices $A_{\theta(k)}$ hacen la función de las matrices $J_{\theta(k),\theta(k+1)}$ del caso singular. De otro lado, las matrices de cambio de base $P_{i,j}$ son matrices identidad lo que implica, a su vez, que $L_{\theta(k),\theta(k+1),\theta(k+2)} = I$, de donde $\ln \|L_{\theta(k),\theta(k+1),\theta(k+2)}^{-1}\| = 0$.*

Observación 11. *El teorema 20 es exactamente igual para el caso no singular.*



Anexo

Conceptos Básicos

Enseguida recordemos algunas definiciones y resultados fundamentales que serán de mucha utilidad para el desarrollo de este trabajo. Denotaremos el espacio de todas las matrices de orden $m \times n$ por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ donde sus componentes son números reales, por simplicidad denotaremos $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ por $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Además denotaremos a los valores propios de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la manera usual $\lambda \in \sigma(A)$, donde $\sigma(A)$ es el conjunto de valores propios de la matriz A . El radio espectral de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lo denotaremos por $\rho(A)$ y está definido de la forma siguiente

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

De forma estándar denotaremos a las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positivos semidefinidos de la forma siguiente $A \geq 0$, para los positivos definidos lo denotaremos como $A > 0$.

Definición 11. *El operador traza $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal definida de la forma siguiente:*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

con las propiedades siguientes:

1. $\forall K, L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), tr(KL) = tr(LK)$
2. Sean $M \geq 0$ y $P > 0$, donde $M, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\left(\min_{i=1, \dots, n} \lambda_i(P) \right) tr(M) \leq tr(MP) \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(P) \right) tr(M)$$

La primera propiedad de la traza se demuestra usando el hecho que las sumatorias finitas son conmutables debido a que la traza es la sumatoria de elementos de la diagonal principal de la matriz producto donde está también se expresa como una sumatoria. La segunda propiedad de la traza se demuestra usando el hecho de que las matrices tienen valores propios reales.

Nuestro análisis se va concentrar en espacios de dimension finita donde las normas son equivalentes, es decir sea dos normas $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ en un espacio de Banach X si existen $c_1 > 0, c_2 > 0$ tal que:

$$\|x\|_\alpha \leq c_2 \|x\|_\beta, \|x\|_\beta \leq c_1 \|x\|_\alpha, \forall x \in X$$

Definición 12. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times q}(\mathbb{R})$. La matriz de orden $mn \times pq$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1p}B \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{np}B \end{pmatrix}.$$

es llamada producto Kroneker de A en B . Algunas propiedades básicas y de mucha utilidad se se presenta a continuación :

1. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
2. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
3. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AB \otimes CD$
4. $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$
5. $tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B)$
6. $rank(A \otimes B) = rank(A)rank(B)$

Definición 13. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, el rango de A es el número máximo de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. El rango se denota como $rank(A)$. Algunas propiedades básicas y de mucha utilidad se se presenta a continuación :

1. $rank(AB) \leq \min(rank(A), rank(B))$

$$2. \text{rank}(A) = \text{rank}(A^*)$$

$$3. \text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

Definición 14. El operador vec es una transformación lineal que convierte la matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ en un vector columna, se define de la forma siguiente:

$$\text{vec}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Algunas propiedades básicas :

$$1. \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), \text{vec}(A + B) = \text{vec}(A) + \text{vec}(B)$$

$$2. \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{vec}(\alpha A) = \alpha \text{vec}(A)$$

La propiedad siguiente relaciona el producto Kronecker con el operador vec :

$$\text{vec}(LKM) = (M^T \otimes L)\text{vec}(K), \forall K, L, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (39)$$

La norma siguiente va ser utilizada en la propisición 1.

Lema 26. Sea $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y positiva definida entonces se define la norma siguiente.

$$\|x\|_H \triangleq \sqrt{x^T H x}$$

Demostración. Comprobaremos que $\|x\|_H$ es una norma, debido que $H > 0$ se tiene $H = S^{-T}S^{-1}$ donde la matriz S es no singular.

$$\|x\|_H^2 = x^T H x = x^T S^{-T} S^{-1} x = \|S^{-1}x\|^2$$

esto implica que $\|x\|_H = \|S^{-1}x\|$

a) $\forall x \neq 0, \|x\|_H = \sqrt{x^T H x} > 0.$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \beta \in \mathbb{R}, \|\beta x\|_H = \sqrt{\beta^2 x^T H x} = |\beta| \sqrt{x^T H x} = |\beta| \|x\|_H.$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_H &= \|S^{-1}(x + y)\| \\ &\leq \|S^{-1}x\| + \|S^{-1}y\| \\ &= \|x\|_H + \|y\|_H \end{aligned}$$

□

Proposición 1. *Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0.$

b) $\rho(A) < 1$

c) *Existe una matriz $H > 0$ tal que $A^T H A < H.$*

d) *Existe una matriz no singular S tal que $\|S^{-1} A S\|_2 < 1.$*

e) *Existe una norma $\|\cdot\|_*$ tal que $\|A\|_* < 1.$*

Demostración.

a) \rightarrow b) Sea $\lambda \in \sigma(A)$ y $v \neq 0$ el autovector asociado correspondiente. Se tiene $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k v = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k v = 0$ y esto implica $|\lambda| < 1.$

b) \rightarrow c) Como

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

donde es conocida en la literatura como "la fórmula de Gelfand", aplicando esta fórmula para A y A^T encontramos $0 < \rho(A) < \gamma_1 < 1$ y $0 < \rho(A^T) < \gamma_2 < 1$ tales que

$$\|A^k\| < \gamma_1^k, \|(A^T)^k\| < \gamma_2^k$$

Donde la siguiente serie es convergente

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k A^k$$

debido a que

$$\left\| \sum_{k=0}^n (A^T)^k A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|(A^T)^k A^k\| \leq \sum_{k=0}^n \gamma_1^k \gamma_2^k$$

la serie $\sum_{k=0}^n \gamma_1^k \gamma_2^k$ es convergente entonces por el criterio de la comparación se tiene que la serie $\sum_{k=0}^n (A^T)^k A^k$ es convergente esto implica que existe la matriz H .

Donde H es simétrica, dado que

$$H^T = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k A^k = H$$

además es una matriz positiva definida, en efecto

$$\forall x \neq 0, x^T H x = \sum_{k=0}^{\infty} x^T (A^T)^k A^k x = \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k x\|^2 > 0$$

por último obtenemos

$$H - A^T H A = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k A^k - \sum_{k=1}^{\infty} (A^T)^k A^k = I_n > 0$$

c) \rightarrow d) Se tiene que $H > 0$ entonces existe una matriz no singular tal que $H^{-1} = S S^T$. Con lo cual

$$\begin{aligned} \|S^{-1} A S\|_2^2 &= \rho((S^{-1} A S)^T S^{-1} A S) \\ &= \rho(S^T A^T S^{-T} S^{-1} A S) \\ &= \rho(S^T A^T H A S) \end{aligned} \tag{40}$$

De la desigualdad $A^T H A < H$ se tiene

$$\forall z \neq 0, z^T (H - A^T H A) z > 0$$

tomando $z = Sx$ tenemos

$$\begin{aligned} z^T (H - A^T H A) z &= x^T (S^T H S - S^T A^T H A S) x \\ &= x^T (I_n - S^T A^T H A S) x \end{aligned}$$

entonces

$$\forall x \neq 0, x^T (I_n - S^T A^T H A S) x > 0$$

tomando $x = v$ donde v es un autovector de la matriz $S^T A^T H A S$ y λ su respectivo autovalor.

$$\begin{aligned} v^T (I_n - S^T A^T H A S) v &= v^T I_n v - \lambda v^T v \\ &= \|v\|^2 - \lambda \|v\|^2 \\ &= \|v\|^2 (1 - \lambda) \end{aligned}$$

entonces $\lambda < 1$ y de (40) se concluye.

d) \rightarrow e) La demostración se presenta en el lema 12 del capítulo 2.

e) \rightarrow a) Podemos encontrar un γ tal que $\|A\|_* < \gamma < 1$, además se tiene que

$$0 \leq \|A^k\|_* \leq \|A\|_*^k < \gamma^k < 1$$

esto implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

□

Lema 27. Sea $N \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz nilpotente. Entonces

$$\det(\gamma N - I_n) = (-1)^n, \forall \gamma \in \mathbb{C}$$

Demostración. Por la descomposición de Jordan de N existe una matrix $R \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ no singular tal que $G = R^{-1} N R$, donde G es un bloque de Jordan de la forma

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det(\gamma N - I_n) &= \det(\gamma R G R^{-1} - R R^{-1}) \\ &= \det(R) \det(\gamma G - I_n) \det(R^{-1}) \\ &= \det(\gamma G - I_n) \\ &= (-1)^{n_2} \end{aligned}$$

□

Lema 28. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que B es una matriz nilpotente. Si $AB = BA$ entonces AB es una matriz nilpotente.

Demostración. Sea h el índice de nilpotencia de B , es decir, $B^h = 0$. Debido a la conmutatividad de A y B se tiene

$$\begin{aligned} (AB)^h &= (AB) \dots (AB) \\ &= A^h B^h \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lema 29. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Si para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $x^T A x = 0$ entonces $A = 0$.

Demostración. Tomando $x = e_i$ esto implica que $e_i^T A e_i = a_{ii} = 0$ y por último tomando $x = e_i + e_j$ se sigue

$$\begin{aligned} (e_i + e_j)^T A (e_i + e_j) &= e_i^T A e_i + e_j^T A e_j + e_i^T A e_j + e_j^T A e_i \\ &= e_i^T A e_j + e_j^T A e_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

y además A es simétrica esto implica que $e_i^T A e_j = e_j^T A e_i$ reemplazando se obtiene que $e_i^T A e_j = a_{ij} = 0$ lo que concluye que $A = 0$. □

Lema 30. Para cualquier matrices $S, A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, existen matrices singulares $Q, P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tales que

$$\begin{aligned} \hat{S} &= QSP = \text{diag}(0_{n_0 \times n_0}, L_1, \dots, L_p, \hat{L}_1, \dots, \hat{L}_q, I, N) \\ \hat{A} &= QAP = \text{diag}(0_{n_0 \times n_0}, J_1, \dots, J_p, \hat{J}_1, \dots, \hat{J}_q, J, I) \end{aligned} \tag{41}$$

donde $J \in \mathcal{M}_{h \times h}(\mathbb{R})$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(\tilde{n}_i) \times (\tilde{n}_i + 1)}(\mathbb{R}).$$

$$\hat{L}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix}, \hat{J}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(n_j+1) \times (n_j)}(\mathbb{R}).$$

y

$$N = \text{diag}(N_1, \dots, N_t) \in \mathcal{M}_{g \times g}(\mathbb{R})$$

donde

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{k_i \times k_i}(\mathbb{R}).$$

y dimensiones de las matrices anteriores satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \sum_{i=1}^p \tilde{n}_i + \sum_{j=1}^q (n_j + 1) + \sum_{i=1}^t k_i + h \\ n &= n_0 + \sum_{j=1}^q n_j + \sum_{i=1}^p (\tilde{n}_i + 1) + \sum_{i=1}^t k_i + h \\ g &= \sum_{i=1}^t k_i \end{aligned}$$

Demostración. Ver ([38])

□

Teoría de la probabilidad

Definición 15. *Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \text{Pr})$ es un espacio de medida tal que $\text{Pr}(\Omega) = 1$. En ese caso, se dirá que Pr es una medida de probabilidad y a los elementos de \mathcal{F} se les llamarán eventos.*

Definición 16. *Sea $A \in \mathcal{F}$, la función indicadora $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es definida de la siguiente manera, para cada $\omega \in \Omega$*

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \in A \\ 0 & , \omega \notin A \end{cases}$$

Definición 17. Sean $A, B \in \mathcal{F}$, donde B es un evento con probabilidad positiva. Se define la probabilidad condicional de A dado B como

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Definición 18. Una variable aleatoria real X es una función medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, y la esperanza de X se define como

$$E\{X\} = \int_{\Omega} X d\Pr$$

Teorema 21. Sean $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles e integrales tal que $0 \leq g \leq h$.

Si $E\{g\} = E\{h\}$ entonces $g = h$ Pr -c.s.

Demostración. Definamos para cada $n \geq 1$, $A_n = \{\omega \in \Omega / g(\omega) + \frac{1}{n} \leq h(\omega)\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{A_n} h d\Pr &\geq \int_{A_n} \left(g + \frac{1}{n}\right) d\Pr = \int_{A_n} g d\Pr + \int_{A_n} \frac{1}{n} d\Pr \\ &= \int_{A_n} g d\Pr + \frac{1}{n} \Pr(A_n) \end{aligned}$$

y además

$$\int_{A_n^c} h d\Pr \geq \int_{A_n^c} g d\Pr$$

luego para cada $n \in \mathbb{N}$, tendremos

$$\int h d\Pr \geq \int g d\Pr + \frac{1}{n} P(A_n) \text{ entonces } \Pr(A_n) = 0$$

Finalmente como $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ entonces

$$\Pr(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0, \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega / g(\omega) < h(\omega)\}$$

Por lo tanto $g = h$ Pr -c.s.

□

Teorema 22. [Teorema de convergencia dominada] Sea $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles tal que $f_n \rightarrow f$ u - c.s, supongamos que existen $g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrales tal que

a) $\forall n \geq 1, \|f_n\| \leq g_n$

b) $\forall \omega \in \Omega, g_n(\omega) \rightarrow g(\omega)$

c) $\int g_n du \rightarrow \int g du$

entonces

a) f_n, f son integrables

b) $\int \|f_n - f\| du \rightarrow 0$ en particular $\int f_n du \rightarrow \int f du$

Lema 31. [Lema de Fatou] Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles y positivas entonces

$$\int (\liminf f_n) du \leq \liminf \left(\int f_n du \right)$$

Definición 19. Dado \mathcal{G} un σ – subálgebra de \mathcal{F} , y X una variable aleatoria, se define la esperanza condicional de X dado \mathcal{G} , denotado por $E\{X|\mathcal{G}\}$, como una variable aleatoria que cumple lo siguiente:

i) $E\{X|\mathcal{G}\}$ es \mathcal{G} -medible

ii) $\forall A \in \mathcal{G}: \int_A X d\Pr = \int_A E\{X|\mathcal{G}\} d\Pr$

Cuando $\mathcal{G} = \sigma\langle Y \rangle$, el σ -álgebra generado por la variable Y , $E\{X|\mathcal{G}\}$ se reduce a $E\{X|Y\}$

La Esperanza condicional es una herramienta fundamental en nuestra teoría por tal motivo mencionaremos algunas propiedades de está.

Observe que si $A \in \mathcal{F}$ y $\Pr(A) \neq 0$ entonces :

$$E\{X|A\} = \sum_k x_k \Pr(\mathbf{X} = x_k|A) = \sum_k x_k \frac{\Pr(\mathbf{X} = x_k, A)}{\Pr(A)} = \frac{E\{X\mathbf{1}_A\}}{\Pr(A)}$$

Proposición 2. Sean a y b dos constantes , g una función medible de valor real y X , Y y Z son variables aleatorias. Entonces

1) $E\{a|X\} = a$

2) $E\{aX + bY|Z\} = aE\{X|Z\} + bE\{Y|Z\}$

3) $E\{X|Y\} \geq 0$, si $X \geq 0$.

4) $E\{X|Y\} = E\{X\}$, si X y Y son independientes.

$$5) E\{Xg(Y)|Y\} = g(Y)E\{X|Y\}$$

$$6) E\{X|Y,g(Y)\} = E\{X|Y\}$$

$$7) E\{E\{X|Y,Z\}|Y\} = E\{X|Y\}$$

$$8) E\{E\{Y|X\}\} = E\{Y\}$$

Cadena de Markov en tiempo discreto

Una cadena de Markov es un proceso estocástico que satisface la propiedad Markoviana, es decir, si se conoce la historia del proceso hasta el instante actual, su estado presente resume toda la información relevante para describir, en probabilidad, su estado futuro. En este anexo presentamos los aspectos teóricos básicos sobre cadenas de Markov que son necesarios conocer para el desarrollo de nuestro trabajo.

Una cadena de Markov puede ser de tiempo discreto o continuo. En ambos casos asumimos que el proceso toma valores en un conjunto finito Σ llamado espacio de estados:

$$\Sigma \triangleq \{1, 2, \dots, L, L \in \mathbb{N}\}$$

Sea $\theta(k)$ una cadena de Markov en tiempo discreto con matriz transición de probabilidad $\Pi(k) = [p_{ij}(k)] \in \mathcal{M}_{L \times L}(\mathbb{R})$, donde $p_{ij}(k)$ es la probabilidad de transición del estado i al estado j en el instante k , esto es, como en el caso continuo

$$p_{ij}(k) \triangleq \Pr(\theta(k+1) = j | \theta(k) = i), \quad i, j \in \Sigma,$$

donde $p_{ij}(k) \geq 0$ y $\sum_{j=1}^L p_{ij}(k) = 1$. La distribución de probabilidad de $\theta(0)$, llamada distribución inicial, la denotamos por $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_L)$, donde $\pi_i \triangleq \Pr(\theta(0) = i)$. Observe que $\sum_{i=1}^L \pi(i) = 1$. El vector de distribución de probabilidad en el instante k se define por

$$\pi(k) \triangleq (\Pr(\theta(k) = 1), \dots, \Pr(\theta(k) = L)).$$

Definiremos la distribución invariante de la cadena de Markov como $\bar{\pi}$, la cual cumple que $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$.

Denotaremos la matriz Π^n como aquella matriz que tiene entradas como probabilidad de transición del estado i al estado j en n pasos, esto es, $\Pi^n = [p_{ij}^{(n)}]$.

En nuestro trabajo consideraremos que la cadena de Markov es homogénea, es decir, las probabilidades de transición no depende de k , por lo que $p_{ij}(k) = p_{ij} \cdot \forall k \in \mathbb{Z}_+$. De la homogeneidad se sigue que

$$\pi(k) = \pi(0)\Pi^k$$

lo que significa que dados la distribución inicial y la matriz de transición de probabilidad el proceso queda completamente determinado, en términos probabilísticos.

Se dice que una cadena de Markov con espacio de estados finito es ergódica si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall j \in \Sigma \quad (42)$$

Donde π_j es positiva y son independientes de $i \in \Sigma$ y además $\sum_{j=1}^N \pi_j = 1$

Se dice que la matriz $A = (a_{ij})$ es casi positiva si sus entradas son no negativas, y

$$\exists n_0 \geq 1, n_0 \in \mathbb{N}, A^{n_0} = (b_{ij}), b_{ij} > 0$$

Teorema 23. *Una cadena de markov donde el espacio de estados es finito es ergódica si y solo si Π es una matriz casi positiva.*

Demostración. En primer lugar probaremos la necesidad. Debido a la existencia del límite (42) existe un número natural n_j tal que para cualquier i se tiene $p_{ij}^{(n_j)} > 0$.

Tomando

$$n_0 = \max_{j \in \Sigma} \{n_j\}$$

tenemos que $p_{ij}^{(n_0)} > 0$ entonces Π es una matriz casi positiva.

Ahora probaremos la suficiencia. Debido que Π es una matriz casi positiva entonces

$$\min_{i,j \in \Sigma} p_{ij}^{(n_0)} > 0$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, defino $m_j^{(n)} = \min_{i \in \Sigma} p_{ij}^{(n)}$ y de la propiedad $\Pi^{m+n} = \Pi^m \Pi^n$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{(n+1)} &= \sum_{k \in \Sigma} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \\
 m_j^{(n+1)} &= \min_{i \in \Sigma} p_{ij}^{(n+1)} \\
 &= \min_{i \in \Sigma} \left\{ \sum_{k \in \Sigma} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \right\} \\
 &\geq \min_{i \in \Sigma} \left\{ \sum_{k \in \Sigma} p_{ik} \left(\min_{k \in \Sigma} \{p_{kj}^{(n)}\} \right) \right\} \\
 &= \min_{i \in \Sigma} \left\{ \sum_{k \in \Sigma} p_{ik} \right\} \left(\min_{k \in \Sigma} \{p_{kj}^{(n)}\} \right) \\
 &= \min_{k \in \Sigma} p_{kj}^{(n)} \\
 &= m_j^{(n)}
 \end{aligned}$$

Tenemos que

$$m_j^{(n+1)} \geq m_j^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, defino $M_j^{(n)} = \max_{i \in \Sigma} p_{ij}^{(n)}$, de forma análoga a lo anterior obtenemos

$$M_j^{(n)} \geq M_j^{(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces tenemos $m_j^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)} \leq M_j^{(n)}$ lo cual vemos que la sucesión $m_j^{(n)}$ es acotada y creciente por lo tanto convergente, de forma similar la sucesión $M_j^{(n)}$ es convergente solo faltaría ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) = 0$.

Sea un $i_0, j_0 \in \Sigma$ fijos y arbitrarios, defino

$$E' = \left\{ k \in \Sigma : p_{i_0, k}^{(n_0)} \geq p_{j_0, k}^{(n_0)} \right\}$$

y

$$E'' = \Sigma \setminus E' = \left\{ k \in \Sigma : p_{i_0, k}^{(n_0)} < p_{j_0, k}^{(n_0)} \right\}$$

como $E' \cap E'' = \emptyset$ tenemos $\text{card}(E') + \text{card}(E'') = \text{card}(E) = l$ y sea $a = \min_{i, j \in \Sigma} (p_{ij}^{(n_0)})$ entonces

$$\sum_{k \in E''} p_{i_0 k}^{(n_0)} + \sum_{k \in E'} p_{j_0 k}^{(n_0)} \geq \text{card}(E'')a + \text{card}(E')a = la$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_{k \in E'} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) &= \sum_{k \in E'} p_{i_0k}^{(n_0)} - \sum_{k \in E'} p_{j_0k}^{(n_0)} \\ &= \left[\sum_{k \in \Sigma} p_{i_0k}^{(n_0)} - \sum_{k \in E''} p_{i_0k}^{(n_0)} \right] - \sum_{k \in E'} p_{j_0k}^{(n_0)} \\ &= 1 - \left(\sum_{k \in E''} p_{i_0k}^{(n_0)} + \sum_{k \in E'} p_{j_0k}^{(n_0)} \right) \\ &\leq 1 - la \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_{k \in E''} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) &= \sum_{k \in E''} p_{i_0k}^{(n_0)} - \sum_{k \in E'} p_{j_0k}^{(n_0)} \\ &= \left(1 - \sum_{k \in E'} p_{i_0k}^{(n_0)} \right) - \left(1 - \sum_{k \in E'} p_{j_0k}^{(n_0)} \right) \\ &= - \left(\sum_{k \in E'} p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)} \right) \end{aligned}$$

Ahora consideremos para cualquier arbitrario $n \geq 0$ y $j \in \Sigma$.

$$\begin{aligned} p_{i_0j}^{(n_0+n)} - p_{j_0j}^{(n_0+n)} &= \sum_{k \in \Sigma} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) p_{kj}^{(n)} \\ &= \sum_{k \in E'} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) p_{kj}^{(n)} + \sum_{k \in E''} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) p_{kj}^{(n)} \end{aligned}$$

nosotros podemos notar que

a) Si $k \in E'$ entonces $p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)} > 0$ entonces

$$\sum_{k \in E'} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) p_{kj}^{(n)} \leq \sum_{k \in E'} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) M_j^{(n)}$$

b) Si $k \in E''$ entonces $p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)} < 0$ entonces

$$\sum_{k \in E''} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) p_{kj}^{(n)} \leq \sum_{k \in E''} (p_{i_0k}^{(n_0)} - p_{j_0k}^{(n_0)}) m_j^{(n)}$$

Además

$$\begin{aligned} p_{i_0 j}^{(n_0+n)} - p_{j_0 j}^{(n_0+n)} &\leq \sum_{k \in E'} (p_{i_0 k}^{(n_0)} - p_{j_0 k}^{(n_0)}) M_j^{(n)} + \sum_{k \in E''} (p_{i_0 k}^{(n_0)} - p_{j_0 k}^{(n_0)}) m_j^{(n)} \\ &= \sum_{k \in E'} (p_{i_0 k}^{(n_0)} - p_{j_0 k}^{(n_0)}) M_j^{(n)} + \left(- \sum_{k \in E'} (p_{i_0 k}^{(n_0)} - p_{j_0 k}^{(n_0)}) \right) m_j^{(n)} \\ &= (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k \in E'} (p_{i_0 k}^{(n_0)} - p_{j_0 k}^{(n_0)}) \leq (1 - la)(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \end{aligned}$$

esto se cumple para todo $i_0, j_0 \in \Sigma$ en particular

$$M_j^{(n_0+n)} = p_{i_0 j}^{(n_0+n)}$$

y

$$m_j^{(n_0+n)} = p_{j_0 j}^{(n_0+n)}$$

tenemos

$$M_j^{(n_0+n)} - m_j^{(n_0+n)} \leq (1 - la)(M_j^{(n)} - m_j^{(n)})$$

por inducción obtenemos

$$M_j^{(kn_0+n)} - m_j^{(kn_0+n)} \leq (1 - la)^k (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})$$

tenemos que $0 < 1 - la < 1$ entonces

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M_j^{(kn_0+n)} - m_j^{(kn_0+n)} = 0$$

haciendo un cambio $p = kn_0 + n$ tenemos

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} M_j^{(p)} - m_j^{(p)} = 0$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

tenemos $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} m_j^{(n)} \geq m_j^{(n_0)} \geq a > 0$ y tenemos que

$$\sum_{j \in \Sigma} \pi_j = \sum_{j \in \Sigma} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in \Sigma} p_{ij}^{(n)} = 1$$

□

Teorema 24. [Ley de los grandes números] Sea una cadena de Markov $\theta(k)$ irreducible y f una función medible entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f(\theta_m) = E_{\bar{\pi}} \{f(\theta_1)\},$$

donde $\bar{\pi}$ es la distribución invariante de la cadena de Markov.

Demostración. Ver [6]

□



Conclusiones

A continuación presentamos unas conclusiones del siguiente trabajo:

- Los resultados fundamentales de la teoría clásica de sistemas lineales sin saltos pueden ser utilizados muy productivamente para el estudio de los sistemas lineales con saltos markovianos en particular, la noción de regularidad, la descomposición de Weierstrass.
- A pesar de la dificultad técnica que ofrece la singularidad, los resultados de regularidad y estabilidad han sido extendidos para los sistemas lineales singulares con saltos markovianos.
- Las asunciones \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 han sido de fundamental importancia para resolver el problema de la existencia y unicidad de soluciones de los sistemas lineales singulares con saltos markovianos. En un trabajo futuro se tratará de evitar las condiciones impuestas en estas asunciones.
- El problema de la estabilidad casi segura, que es la noción más práctica ha sido resuelto por medio de los exponentes de Lyapunov. Esta solución es nueva en la literatura.
- Muchos problemas de la teoría de control de sistemas físicos modelados por sistemas lineales singulares con saltos markovianos en tiempo discreto pueden ser abordados de ahora en adelante debido a que está garantizado la existencia y unicidad de soluciones para este sistema. Particularmente problemas relacionados con teoría de control óptimo, índices de desempeño, controlabilidad, observabilidad, diseño de sistemas.

Bibliografía

- [1] FENG XIANGBO. LOPARO KENNETH. & YUANDONG JI. CHIZECK HOWARD. *Stochastic Stability properties of Jump Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol 37 No.1, 1992 pp. 38-53.
- [2] CHI-TSONG CHEN. *Linear System Theory Design*, Oxford University Press No.3, 1999.
- [3] COSTA, OSWALDO LUIZ DO VALLE. *Discrete-time Markov jump linear systems*, Springer, London, 2005.
- [4] BOUKAS, EL-KEBIR. *Control of singular systems with random abrupt changes*, Springer, Berlin, 2008.
- [5] L.DAI. *Control Lectures notes in control and information sciencies*, Springer, London, 1998.
- [6] J.L.DOOB. *Stochastic Processes*, John Wiley, Canada, 1953.
- [7] FANG, Y. *Stability analysis of linear control systems with uncertain parameters* , Ph.D. Dissertation, Dept. of Systems, Control, and Industrial Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland, OH.Springer, London, 1998.
- [8] ROSENBLOOM, A. *Analysis of linear systems with randomly time-varying parameters*, IRE Convention Record 1955 pp.106.
- [9] BELLMAN, R. *Limit theorems for non-commutative operators*, Duke Math, vol 21, 1954 pp.491-500.
- [10] BHARUCHA, B. *On the stability of randomly varying systems* , Ph.D. Dissertation, Dept. of Elect. Eng., Univ. of Calif., Berkeley, 1961.

- [11] FANG, Y., LOPARO, K. , FENG, X.. *Stability of discrete time jump linear systems*, Journal of Mathematical Systems, Estimation , and Control, vol 5 No.3, 1995 pp.275-321.
- [12] I. KATS AND N. KRASOVSKII. *On the stability of systems with random parameters*, Journal of Mathematical Systems, Estimation , and Control, vol 24 No.5, 1960 pp.809-823.
- [13] T. MOROZAN. *Stabilization of some stochastic discrete-time control systems*, Stoch. Anal. Appl, vol 1 No.1, 1983 pp.89-116.
- [14] R. KRTOLOVA. *Stability of linear feedback systems with random communication delays*, Proc. 1991 ACC Boston 1991.
- [15] F. KOZIN. *A survey of stability of stochastic systems* , Automatica, vol 5 No.1, Boston, 1969 pp.95-112.
- [16] D.G. LUENBERGER AND A.ARBEL . *Singular Dynamic Leontief systems*, Econometrica, vol 45 No.4, 1977 pp.991-995.
- [17] R.W. NEWCOMB *The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits* , IEEE Trans. Autom. Control, vol CAS-28 No.1, 1981 pp.62-71.
- [18] B. L. STEVENS AND F.L. LEWIS . *Aircraft Modeling, Dynamics and Control*, New York, Wiley 1991.
- [19] H. ZHANG, W. S. GRAY, AND O. R. GONZÁLEZ. *Markov Jump-Linear Performance Models for Recoverable Flight Control Computers* , IEEE Southeastern Symposium on System Theory, 2004 pp.408-412.
- [20] R. WANG, W. S. GRAY, O. R. GONZÁLEZ, AND J. R. CHÁVEZ-FUENTES, *Tracking Performance of Recoverable Distributed Flight Control Systems Subject to High Intensity Radiated Fields*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol 49, No.1, 2013 pp. 521-542.
- [21] CHAVEZ, J. R.; COSTA, E. Y TERRA, M.. *Equivalence between mean square, exponential and stochastic stability of Markov singular jump linear systems*, Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2010 pp. 2877-2882.

- [22] D.G.LUEMBERGER. *Dynamic Equations in Descriptor Form* IEEE Trans. Automat. Control, vol AC-22, 1979 pp.312-321.
- [23] D.G.LUEMBERGER AND A. ARBEL. *Singular Dynamic Leontief systems* Econometrica, vol. 45, No. 4, 1977 pp. 991-995.
- [24] R. W. NEWCOMB. *The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits* IEEE Trans. Automat. Control, vol CAS-28, No 1, pp. 62-71 1981.
- [25] J. MILLS AND A. GOLDEMBERG. *Force and Position Control of Manipulator During Constrained Motion Tasks* IEEE Trans. Automat. Control, vol 5, No 1, pp. 30-46 1989.
- [26] LYAPUNOV, A.M. . *Problème général de la stabilité du mouvement*. Comm. Soc. Math. Kharkov 2 1892.
- [27] H. FURSTENBERG AND H. KESTEN. *Products of Random Matrices*. The Annals of Mathematical Statistics vol. 31, No. 2, 1960 pp. 457-469.
- [28] H. FURSTENBERG. *Noncommuting random products*. Trans. Amer. Math. Soc. 108, 1963 pp. 377-428
- [29] R. Z. KHAS'MINSKII. *Necessary and Sufficient Conditions for Asymptotic Stability of Linear Stochastic Systems* . Teor. Veroyatnost. i Primenen., 1967, vol 12, Issue 1, pp. 167-172.
- [30] L. ARNOLD AND V. WIHSTUTZ. *Lyapunov Exponents*. Lec. Notes on Math 1186, Springer-Verlag, N.Y. 1986.
- [31] L. ARNOLD, G. PAPANICOLAU AND V. WHISTUTZ. *Asymtotic analysis of the Lyapunov exponent and rotation number of the random oscilator and application* SIAM J. Appl. Math. 46, 1986 pp 427-450.
- [32] X. FENG AND K. A. LOPARO. *Almoust sure inestability of the random harmonic oscilator* SIAM J. Appl. Math. 50, 1990 pp 744-759.
- [33] K. A. LOPARO AND X. FENG. *Lyapunov exponent and rotation number of two-dimensional linear stochastic systems with telegraphic noise* SIAM J. Appl. Math.

- [34] X. FENG AND K. A. LOPARO . *A nonrandom spectrum theorem for products of random matrices and linear stochastic systems* Stoch. Anal. Appl. Math. vol 50, No 3, pp 774-759 1990.
- [35] LEIZAROWITZ . *On the Laypunov exponet of a harmonic oscilator driven by a finite state Markov processes* SIAM. J. Appl. Math. 49, vol 2,1989 pp.404-419.
- [36] L. ARNOLD H. CRAUEL AND J.P. ECKMANN. *Laypunov exponents* Lectures Notes in Math, Springer- Verlag. New York, 1991.
- [37] FANG, Y. *Stability analysis of linear control systems with uncertain parameters* . Ph.D. Dissertation, Deparment of Systems, Control, and Industrial Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland, OH.Springer, London, 1998.
- [38] GANTMACHER, F. R.. *The theory of matrices..* Chelsea, New York, 1974.
- [39] S. L. CAMPBELL. *Singular Systems of Differential Equations..* Pitman, Boston (1980).
- [40] E. K. BOUKAS, Y. XIA. *Descriptor Discrete-Time Systems With Random Abrupt Changes: Stability and Stabilisation.* International Journal of Control, 81(8), p. 1311-1318.
- [41] GUANG-REN DUAN. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems.* Springer, 2010.
- [42] TEJADA R. ARTURO. *Analysis of error recovery effects on digital flight control systems.* Ms Dissertation, Old Dominion University 2002.
- [43] YUANDONG JI. CHIZECK HOWARD. *Jump Linear Quadratic Gaussian Control: Steady-state Solution and Testable Conditions,* Control-Theory and Advanced Technology, vol. 6 No.3, 1990 pp. 289-319.
- [44] O. COSTA Y M. FRAGOSA. *Stability Results for Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumping Parameters* Journal of Mathematical Analysis and Applications 1993.

- [45] FANG. LOPARO. FENG. *Stability of discrte time jump linear systems* Journal of Mathematical Analysis and Applications 1993.
- [46] S. MA, E.K. BOUKAS *Stability and robust stabilisation for uncertain discrete stochastic hybrid singular systems with time delay* IET Control Theory and Applications, 3(9), p. 1217-1225.
- [47] CHAVEZ, J. R.; COSTA, E. Y TERRA, M Metrics of Performance for Discrete-time Descriptor Jump Linear Systems. AUTOMATICA, 50 (3), pp. 999-1002.

