PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA DESDE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, MEDIADO POR EL GEOGEBRA, CON ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

JULIO ANTONIO ECHEVARRÍA ANAYA

Dirigido por

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2015

A mi madrecita Tula Anaya que goza del esplendor de Dios y guía mi camino.
A mi hijo Luis Antonio en quien veo la prolongación de mi vida y mi éxito.
A mi novia Mirian Ramirez por su amor y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por haberme permitido culminar con satisfacción esta maestria, por haber puesto en mi camino a personas de grandioso corazón, por brindarme las fuerzas para seguir adelante y por cumplir con las metas trazadas en mi vida.

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada "Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014".

A la Maestría Enseñanza de la Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por haber contribuido en mi formación académica.

A mi asesora Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre por todo su apoyo y comprensión, brindándome su profesionalismo, haciendome dar cuenta de que todo cuanto puedo ser capaz de hacer con mucho esfuerzo y perseverancia se logrará, por su preocupación en que todo salga bien, por sus enseñanzas, sus muestras de respeto, el saber escuchar cuando las circunstancias de la vida me pusieron a prueba y la energía parecía abandonarme. Dios la bendiga

A la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar por su calidad de profesionalismo y ser humano, por brindarnos la confianza, el aliento de realizar correctamente todo en cuanto a nuestro trabajo y en la vida con vocación de docente y lider pedagógico para las nuevas generaciones de estudiantes del Perú. Por su tiempo brindado para la revisión y jurado de la presente tesis. Dios ilumine su camino.

A la Mg. Elizabeth Milagro Advincula Clemente por darse el tiempo de ser jurado y poder revisar la presente tesis, brindándome sugerencias para mejorar el mismo que fue producto de un trabajo minusioso y laborioso, con el simple afán de mejor los aprendizajes de nuestros jóvenes estudiantes en nuetro país.

A mi madrecita Tula Anaya, por inculcarme siempre el deseo de superación, compartir mis sueños y alegrias que marcaron mi camino profesional. Sin su apoyo y dedicación, mi vida hubiese sido diferente, seguramente no tan grata y llena de emociones como las que vivo en estos momentos. Dios la tenga en su gloria.

A mi hijo Luis Antonio por su apoyo incondicional, por valorarme y entenderme que dejamos de estar juntos para seguir nuestra meta profesional; por su confianza y palabras de

aliento constantes que hacen que llegue a cumplir mis metas y me permitiran vivir día a día con la esperanza de un mañana mejor, siendo ciudadanos del mundo que construimos llevando de la mano a las personas que amamos, siendo un ejemplo a seguir para él, contando siempre con Dios en nuestro Corazon.

A mi novia Mirian Ramirez por su paciencia, comprensión, apoyo incondicional en los momentos dificiles que me tocó vivir, donde verdaderamente se conoce el amor verdadero y nuestro corazón se llena de emoción al saber que no este solo, que siempre me acompañará alguien que me entiende y escucha con la bendición de Dios.

A todos mis profesores de la PUCP, por enseñarnos a conocer y querer más la Matemática para compartirla con nuestros estudiantes; su entrega, su profesionalismo, su comprensión, su apoyo y preparación nos dejó como mejor enseñanza que la vocación va más allá de las aulas y la vida misma. Dios los bendiga.

A mis buenos amigos integrantes de la maestria en enseñanza de las matemáticas, puesto que, sin ellos la travesía no hubiese sido tan enriquecedora y fructifera. Por todas las conversaciones interesantes, la complicidad, la lealtad, la amistad y cada uno de los momentos compartidos que se quedan en nuestros corazónes para toda la vida. Desde ahora y para siempre nos identificaremos con un solo corazón PUCP. Dios ilumine sus caminos.

Finalmente, quiero agradecer a todos quienes hicieron posible nuestra permanencia adecuada en la PUCP y pudieramos estudiar esta Maestría en Enseñanza de las Matemáticas sin ningun inconveniente. Dios los proteja siempre.

RESUMEN

La presente tesis tiene como objetivo analizar los resultados que se tiene en los aprendizajes al abordar un problema sobre circunferencia desde los cuadros de la geometría sintética y geometría analítica. Se espera que el tránsito entre estos dos cuadros favorezca la comprensión del objeto. Para el estudio se ha tomado como base la Teoria de Juego de cuadros, en donde se describen fases por las cuales los estudiantes deben transitar para que las interacciones entre cuadros permitan el progreso de los conocimientos. De otro lado, como referencial metodológico se han considerado aspectos del Estudio de Casos.

Así, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué resultados se tendrá en los aprendizajes de los estudiantes el abordar problemas sobre circunferencia desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica, y de qué manera el uso del GeoGebra contribuirá a que los estudiantes establezcan conexiones entre estos dos cuadros de la matemática?

Con esta investigación se logró identificar una actividad sobre circunferencia que podía ser abordada desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica. En cada uno de dichos cuadros, se tendría que hacer uso de procedimientos propios particulares; así, mientras que desde la geometría sin coordenadas prevalecerían las construcciones exactas, desde la geometría analítica, la solución del problema se basaría en resolver sistemas de ecuaciones.

Así mismo, el empleo del software GeoGebra permitió que los estudiantes pudieran comprobar los resultados obtenidos en ambos cuadros, logrando que se centraran en las ideas centrales y no se perdieran con los cálculos.

De otro lado, también se confirmaron las fases propuestas en la teoría de juego de cuadros durante el proceso de cambio de cuadros. Así, se produjeron desequilibrios al no tener la seguridad de resolver un problema, y luego se recurrió a la ayuda de otro cuadro, produciendose un reequilibrio de lo aprendido; dicha acción que realizan produce una conexión entre cuadros llamado también juego de cuadros que le ayudan a tener seguridad en resolver problemas de geometría.

Se puede concluir que esta investigación contribuyó a que los estudiantes establecieran conexiones entre los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica.

PALABRAS CLAVES: Circunferencia, Geometría Sintética, Geometría Analítica.

ABSTRACT

This thesis aims to analyze the results you have in learning to address a problem about boxes circumference from synthetic geometry and analytic geometry. It is expected that the transition between these two pictures fosters an understanding of the object. For the study has been based on game theory frame, where phases through which students must travel to interactions between frames allow the progress of knowledge is described. On the other hand, as methodological reference they have been considered aspects of the case study.

So, we have the following research question: What results will have on student learning the circumference address problems from synthetic geometry and analytic geometry from, and how the use of GeoGebra help students establish connections between these two pictures of mathematics?

With this research we were able to identify an activity on circumference it could be approached from synthetic geometry and also from analytical geometry. In each of these tables, it would have to make use of particular own procedures; So while no coordinate geometry from the exact construction prevail from analytic geometry, the solution would be based on solving systems of equations.

Likewise, the use of GeoGebra software enabled the students to check the results obtained in both boxes, getting them to focus on the central ideas and not be lost with the calculations.

On the other hand, the stages proposed in the theory of game tables during the process of changing tables are also confirmed. So, there were imbalances to be sure not solve a problem, then enlisted the help of another box, resulting in a rebalancing of learning; performing such action produces a connection between tables also called set of charts that help you be confident in solving geometry problems.

It can be concluded that this research helped students establish connections between the frames of synthetic geometry and analytic geometry

KEYWORDS: Circumference, Synthetic Geometry, Analytic Geometry.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En esta investigación se propone identificar actividades que posibiliten reconocer a la circunferencia como un objeto matemático de la geometría que puede abordarse desde la geometrtía sintética (sin coordenadas) y también desde la geometría analítica (con coordenadas). En particular, se pretende establecer conexiones entre estos dos cuadros de la matemática y en ese proceso se recurrirá al empleo del software GeoGebra. Esto se hará con la finalidad de analizar los efectos que tendrán en los aprendizajes de los estudiantes el abordar problemas sobre circunferencia desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica; además se buscará identificar de qué manera el uso del GeoGebra contribuirá a que los estudiantes establezcan conexiones entre estos dos cuadros de la matemática. Si bien, dada la naturaleza de cada cuadro, los procedimientos que se realzian en cada uno de ellos son distitnos, partimos del prinicpio que estudiar un mismo objeto matemático desde distintas perspectivas, contribuirá a su comprensión.

En el Capítulo 1 se presenta el problema de investigación, la justificación de la misma, así como trabajos previos relaiconados con el tema y una descripción de las principales características del software GeoGebra. Se presentará también el análisis y el tratamiento de la circunferencia en el currículo oficial peruano DCN y en el texto oficial de matemática del 5° grado de secundaria del MINEDU, así como los objetivos de investigación.

El Capítulo 2 se describen algunos elementos del marco teórico seleccionado para la presente investigación, el Juego de cuadros, así como la metodologia de investigación que es el estudio de casos. Con estos elementos, se describe la teoría en la que fundamentamos el estudio y el procedimiento que seguiremos para cumplir los objetivos propuestos.

El Capítulo 3 se presenta un estudio formal de la circunferencia, vista desde los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica, donde se establecen las diferencias más resaltantes entre ambos cuadros, en particular en relación al objeto circunferencia.

En el Capítulo 4 se presenta la actividad seleccionada sobre circunferencia que permite ser abordada desde los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica, además de las actividades diseñadas con el uso del software GeoGebra. Adicionalmente, se presnetan las respuestas esperadas de los estudiantes a las actividades propuestas.

En el Capítulo 5 describimos cómo se llevó a cabo la fase experimental, partiendo de la descripción del escenario y los sujetos de investigación, culminado con el análisis de las respuestas que los estudiantes brindaron a los problemas planteados, haciendo notar el trabajo de cada uno de ellos en los cuadros de la geometría sintética y analítica.

Por último se establece la concreción de nuestros objetivos, habiendo identificado las actividades sobre circunferencia con las cuales se da sentido al uso de ambos cuadros de la geometría. Se describen también los resultados que tendrá la aplicación de los problemas que permitieron transitar a los estudiantes por la geometría sintética y la geometría analítica, además, se pudo identificar el resultado de emplear el software GeoGebra como una herramienta de apoyo para poder confirmar los resultados de los estudiantes del quinto grado de educación secundaria.

Debemos resaltar que la presente tesis de maestría forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación *DIMAT* de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP/PERÚ y *PEA-MAT* de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, PUC-SP/ BRASIL, titulado: *"Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT"* y aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP) processo 2013/23228-7 y PI0272 (PUCP).

CAPÍTULO 1: DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación tiene como finalidad estudiar a la circunferencia en contextos geométricos y de la geometría analítica. Para ello, las actividades diseñadas serán mediadas por el software GeoGebra. Dichas actividades estan dirigidas para estudiantes de quinto grado de educación secundaria que fructuan entre los 15, 16 y 17 años de edad.

En primer lugar, se hará un estudio de trabajos realizados que brindan aportes para el desarrollo de esta investigación. Posteriormente, justificaremos nuestro estudio analizando el Diseño Curricular Nacional (DCN), los Mapas de Progreso (MP), los textos del Ministerio de Educación (MINEDU) y la manera como estos documentos enfocan el objeto circunferencia. Finalmente, en este capítulo definiremos el problema de investigación y los objetivos que se pretenden alcanzar con este trabajo.

1.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En esta sección presentamos los resultados de algunos trabajos relacionados con el estudio de la circunferencia en contextos de la geometría euclidiana y la geometría analítica, determinando su relevancia al estudiar la noción de lugar geométrico. Así mismo, se revisarán algunos trabajos en donde se señala la importancia del uso de la tecnología, en particular utilizando el software GeoGebra, para realizar actividades que requieran construcciones y elaborar conjeturas.

En relación al objeto matemático seleccionado, la circunferencia, encontramos diversas investigaciones cuyo foco de atención ha sido su aprendizaje en niveles equivalentes a aquel en el que se realizará este estudio. Una de ellas corresponde al trabajo realizado por Carmona (2011), en donde se planteó como objetivo general "revisar conceptos, relaciones y propiedades básicas de la circunferencia desde la geometría euclidiana diseñando una unidad didáctica fundamentada en el modelo de Van Hiele y el uso de geometría dinámica" (p. 4).

En dicha investigación, se adoptó como cuadro teórico el modelo Van Hiele y el uso de la tecnología, a través del software Regla y Compás, que fue empleado para realizar construcciones geométricas en el computador. La ventaja de este programa, frente a la construcción con papel y lápiz, consiste en la posibilidad de modificar la construcción. Así, al mover un punto, toda la construcción cambiará, y durante el desplazamiento del punto se irá actualizando. También se pueden dibujar lugares geométricos generados por puntos que se desplzan siguiendo una condición. Otra actividad que puede hacerse con el programa, pero no con papel y lápiz, es una variación rápida de los puntos de base para observar cómo cambia la construcción.

Carmona (2011) sostiene que en la enseñanza de los elementos de la circunferencia los estudiantes presentan dificultades para su apropiación y vinculación en diferentes contextos matemáticos. La metodología utilizada en la enseñanza tradicional produce errores que se traducen en dificultades en el momento de estudiar dicho concepto en geometría analítica.

El mencionado autor llega a la conclusión de que apoyarse en los recursos informáticos da relevancia a los aspectos visuales, lo que contribuye con el proceso de visualización. Ello permite además que la actividad didáctica potencie habilidades y competencias matemáticas de los estudiantes.

Por otro lado, para futuras investigaciones el autor recomienda la implementación de un eje temático transversal de geometría dinámica que permita la modificación y manejo de conceptos geométricos no sólo en la circunferencia, sino también en diferentes conceptos elementales de la geometría plana.

Al concluir, el autor manifiesta que al utilizar la geometría dinámica se puede acercar el conocimiento geométrico a los estudiantes, desarrollando adecuadamente los contenidos curriculares, resolviendo situaciones problemas e inclusive profundizando los conocimientos que permitan el desarrollo de habilidades y competencias no solo argumentativas sino también propositivas.

También tomamos en cuenta el trabajo de Diaz (2014) en el cual se estudió la circunferencia desde un enfoque de la geometría analítica y tiene como objetivo analizar, a través de una serie de actividades que siguen las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y es mediada por el software GeoGebra, la construcción del concepto de circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en estudiantes del quinto de secundaria. Para este estudio, el autor emplea como marco la teoría de la Dialéctica Herramienta-Objeto, que propone un enfoque cognitivo para estudiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El principio básico de este cuadro es que, para construir una noción matemática, se debe hacer uso o movilizar conocimientos antiguos como herramientas para desarrollar nuevos conocimientos que se denominan objetos matemáticos. Una vez que estos han sido desarrollados, se utilizan como herramientas en nuevas situaciones de aprendizaje.

Bajo este principio, en el estudio realizado, consiguieron verificar que los alumnos del quinto de secundaria lograran construir el concepto de circunferencia a través de una secuencia de actividades. Este proceso de construcción del objeto circunferencia permitió a los estudiantes mejorar y organizar su estructura cognitiva sobre este concepto, lo que favoreció su aprendizaje.

Asimismo, el GeoGebra como instrumento mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje fue muy importante debido al empleo de algunas herramientas de este software, los estudiantes lograron consolidar la definición de la circunferencia como lugar geométrico a través de la percepción dinámica de los infinitos puntos que constituyen una circunferencia, y de sus representaciones gráfica y algebraica. Además, permitió a los estudiantes, a través de la secuencia de actividades, desarrollar autonomía para expresar y verificar sus conjeturas sobre las propiedades del objeto circunferencia.

Díaz (2014) resaltó que los estudiantes lograron construir el concepto circunferencia desde su concepción como lugar geométrico, representación gráfica en el sistema del plano cartesiano y también como una representación algebraica. Se creó la necesidad de emplear el software para la construcción del objeto circunferencia, ya que las preguntas planteadas por el investigador invitaron al estudiante a hacer uso de la función de arrastre.

Por otro lado, en relación a la pertinencia para estudiar el objeto circunferencia como lugar geométrico, se cuenta con el trabajo de Oller (2009) que propuso como objetivo principal que los estudiantes manejen distintas herramientas de la geometría, tanto analíticas como sintéticas. Éstas últimas, pese a su riqueza, están siendo olvidadas cada vez más en el aula (p. 57).

El autor señala que la noción de lugar geométrico es una de la más interesante e importante dentro de la geometría plana. Manifiesta que en España se introduce la idea de lugar geométrico en el primer curso de bachillerato (16-17 años), tras presentar la geometría analítica, haber deducido las ecuaciones de la recta y haber introducido las nociones básicas de incidencia (distancias y ángulos, siempre analíticamente, basados en el producto escalar de vectores). Propone también un conjunto de actividades para estudiar la circunferencia de modo que se complemente el tratamiento usual que suele dársele en geometría analítica en términos de distancia entre puntos.

En su investigación, Oller (2009) delimita los objetivos que persigue con las actividades propuestas, siendo estos: primero, manejar distintas herramientas de la geometría, tanto analítica como sintética; segundo, afianzar el concepto de lugar geométrico; tercero, presentar las nociones de cuaterna armónica y circunferencias ortogonales; cuarto, introducir el problema de la constructibilidad de los números reales y quinto, mostrar que un mismo problema admite distintos enfoques a la hora de su resolución.

El autor manifiesta que la doble forma de abordar el problema culmina con la obtención del lugar geométrico buscado: una circunferencia, a partir de dos conjuntos de datos diferentes. Mientras que en el enfoque analítico se obtiene el centro y el radio, en el enfoque sintético, se obtiene el diámetro. Esta dicotomía puede servir como inicio de una discusión sobre qué es necesario para definir la figura circunferencia.

En este trabajo el autor concluye que, a partir de una actividad aparentemente restringida en cuanto a su temática, podemos no sólo trabajar dentro de su ámbito temático inicial, sino también abarcar muchos otros aspectos, aparentemente alejados. De esta manera se puede también ejemplificar la interconexión entre distintas ramas de la Matemática. Una interconexión que a menudo se pasa por alto y que, sin embargo, constituye una de las mayores riquezas de esta ciencia. Señala también que se podrían construir actividades que demanden obtener la circunferencia a través de distintas condiciones en donde intervengan la geometría euclidiana y geometría analítica.

1.2 EL EMPLEO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA Y LA GEOMETRÍA

Una vez fijado nuestro objeto matemático de estudio, la cinrcunferencia, nos planteamos abordarlo desde las perspectivas sintética y analítica, mediado por el programa GeoGebra que nos brinda elementos para establecer conexiones.

Teniendo en cuenta todo ello, se optó por considerar el software GeoGebra pues, tal como lo señala Gutiérrez (2006) brinda interesantes posibilidades para que los estudiantes comprueben resultados y hagan conjeturas. Señala también que al analizar demostraciones deductivas elaboradas usando GeoGebra, se pone en cuestión la diferencia entre demostraciones deductivas del tipo experimento mental, que son las acciones interiorizadas y disociadas de una representación particular de los tipos analíticos, que son las que realizan deducciones lógicas abstractas.

Así, el autor manifiesta que la principal ventaja de usar la tecnología, y en particular un software sobre los materiales didácticos tradicionales, es que estos permitirán que los estudiantes puedan transformar las construcciones hechas en la pantalla, realizar mediciones y emplear el arrastre para verificar sus construcciones. Es debido a ello que la geometría dinámica contribuye a una mejor comprensión de las propiedades y relaciones entre objetos geométricos.

Por todo lo anterior, en nuestra investigación vemos la ocasión para seguir trabajando con el software GeoGebra, puesto que contribuye a desarrollar cierta autonomía para experimentar y validar conjeturas elaboradas por los estudiantes. De esta manera, los estudiantes se convertirán en actores principales de su propio aprendizaje y el docente en mediador o facilitador.

Por otro lado, en relación a la enseñanza de la geometría, Rodríguez (2011) manifiesta que es importante buscar estrategias que permitan a los estudiantes desarrollar las competencias y habilidades necesarias para su desenvolvimiento en la vida cotidiana y sustenta la efectividad de su propuesta en el uso de la tecnología, especialmente en el software GeoGebra. Para el desarrollo de su investigación, el autor toma como cuadro teórico el enfoque constructivista, la resolución de problemas, la teoría de campos conceptuales y la teoría de situaciones didácticas. Todos estos cuadros coinciden en reconocer que los estudiantes requieren explorar para descubrir nuevos conocimientos geométricos. Los aportes del autor son enfocados al nivel de educación básica regular.

En esa línea, también considera importante buscar estrategias que permitan a los estudiantes desarrollar las competencias y habilidades necesarias para su desenvolvimiento en la vida cotidiana; además, basa la efectividad de su propuesta en el uso de la tecnología, especialmente del software GeoGebra.

El GeoGebra es un programa con el que pueden realizarse construcciones a partir de la adquisición de objetos predifinidos como punto, recta, semirrecta, segmento, entre otros; de modo que, a partir de la manipulación de las herramientas del programa, se manipulen también construcciones geométricas (Rodriguez, 2011).

Al revisar el software GeoGebra se encuentra que este programa ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas, organización en tablas y planillas, y por último hojas de datos dinámicamente vinculadas.

La característica destacable de este programa es el doble cuadro de los objetos matemáticos, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una en la Vista Gráfica (Geometría Analítica) y otra en la Vista Algebraica (Álgebra) como se puede apreciar en la figura 1 (Interfaz del programa GeoGebra) que presentamos a continuación. Con estos elementos, se propicia una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas.

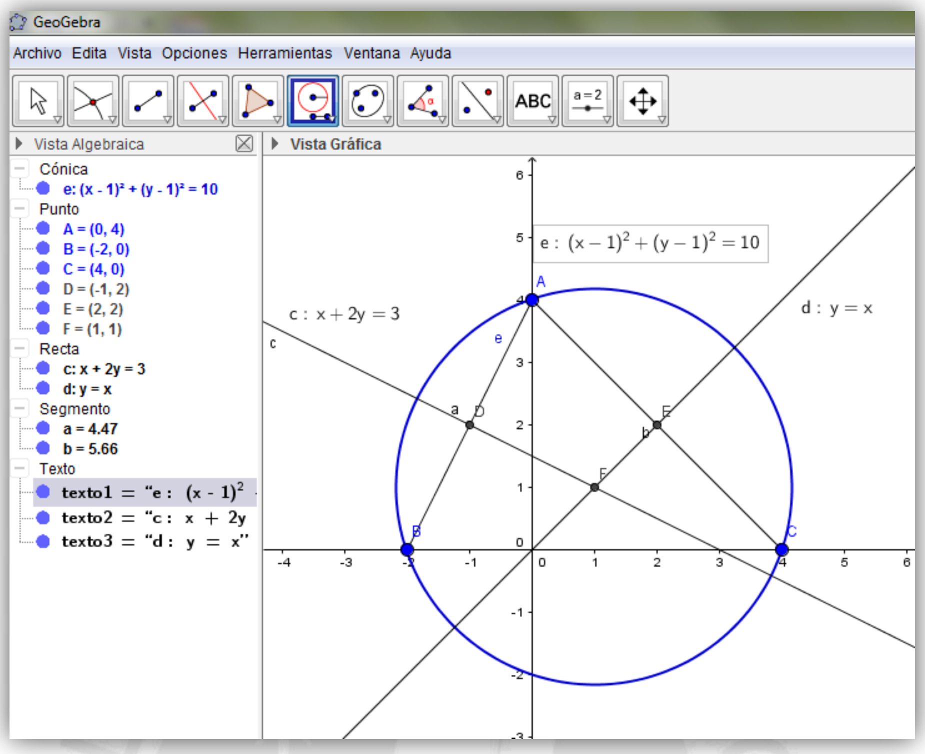


Figura 1. Interfaz del programa Geogebra

A todos los objetos que vayamos incorporando en la zona gráfica le corresponderán una expresión en la ventana algebraica y viceversa.

En la figura 2. se muestra una representación del punto en el plano cartesiano, así como a través de la asignación de un par ordenado.

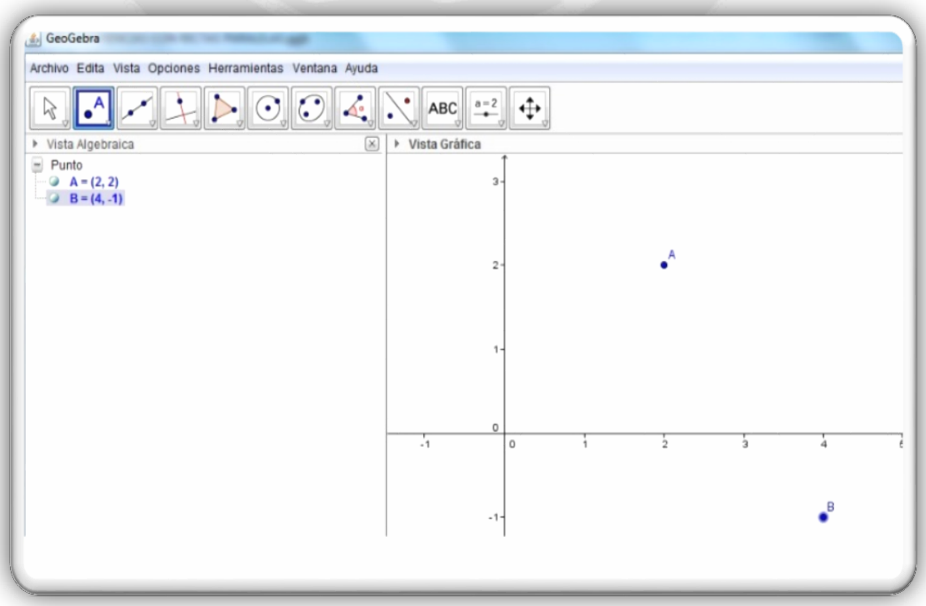


Figura 2. Dos puntos cualesquiera ubicados en el plano

En la figura 3 presentamos la circunferencia vista desde el cuadro geométrico, logrando distinguirse su representación grafica sin coordenadas.

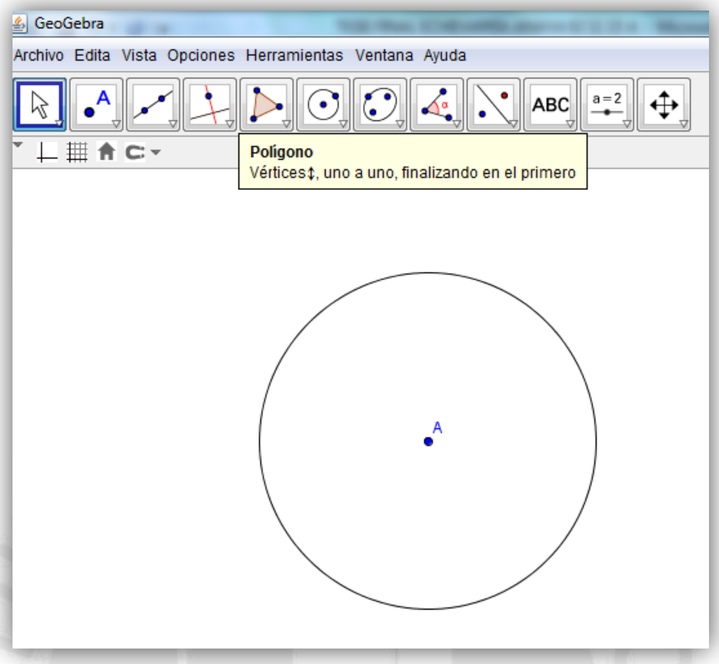


Figura 3. Vista del cuadro Geometrico de una circunferencia

En la figura 4 presentamos la circunferencia vista desde el cuadro geométrico analítico, logrando distinguirse su representación gráfica y su ecuación, respectivamente. En geometría analítica requiere ubicar a la circunferencia en el plano cartesiano y dar su ecuación.

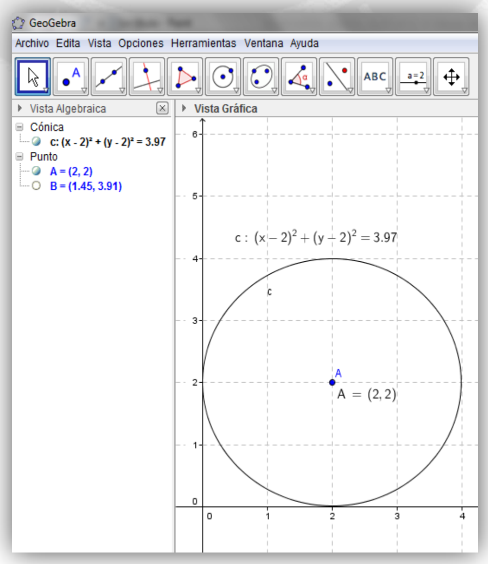


Figura 4. Vista del cuadro de la Geometría Analítica de una circunferencia

En la figura 5 presentamos una circunferencia con dos rectas tangentes a la misma trazadas desde el punto B; la información se presenta en términos gráficos y algebraicos. Si se quiere poner énfasis en el tratamiento geométrico, se debería incluir las construcciones exactas con regla y compás que permiten trazar dichas tangentes. En la ventana algebraica se muestran las ecuaciones de dichas rectas, pero no el procedimiento geométrico que es muy importante considerarlo.

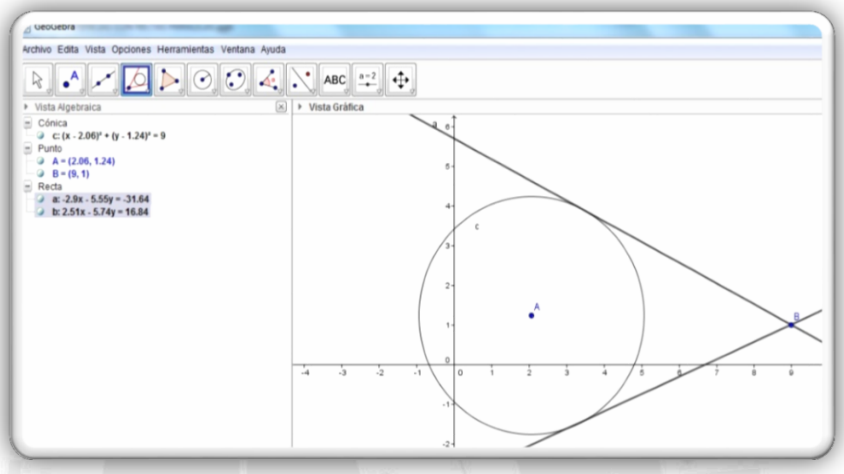


Figura 5. Una circunferencia con dos rectas tangentes

Las rectas tangentes con el GeoGebra se trazan tomando en cuenta los radios de A a un extremo de la circunferencia, las cuales deberán ser perpendiculares a las rectas trazadas desde un punto exteriora la circunferencia.

Si se desactiva la opción que permite mostrar los ejes de coordenadas, se estaría trabajando en el contexto geométrico. Así, el GeoGebra permite estudiar los objetos geométricos en dos campos de la matemática: la geometría analítica y la geometría.

En relación a las ventajas que presenta la utilización del programa de geometría dinámica como un medio didáctico en la enseñanza de las matemáticas, el programa GeoGebra permite lo siguiente:

a) Permite al estudiante interactuar con objetos matemáticos de forma simple y natural, lo que favorece su autonomía en el aprendizaje, además de tener un mayor acercamiento a la matemática, siéndole este más familiar.

b) Facilita la representación gráfica y de forma dinámica de los conceptos y procedimientos matemáticos.

c) Facilita la construcción de objetos matemáticos, conjeturar hipótesis, comparar propiedades, simular y descubrir regularidades.

d) Facilita el tratamiento de muchos temas sin exigir al estudiante grandes esfuerzos matemáticos favoreciendo una metodología en la que participen de forma activa en su aprendizaje.

e) Permite combinar los datos de forma numérica, simbólica y gráfica, tratando a las matemáticas de manera global.

En particular, en lo que se refiere a la circunferencia, el GeoGebra presenta las opciones mostradas en la figura 6.

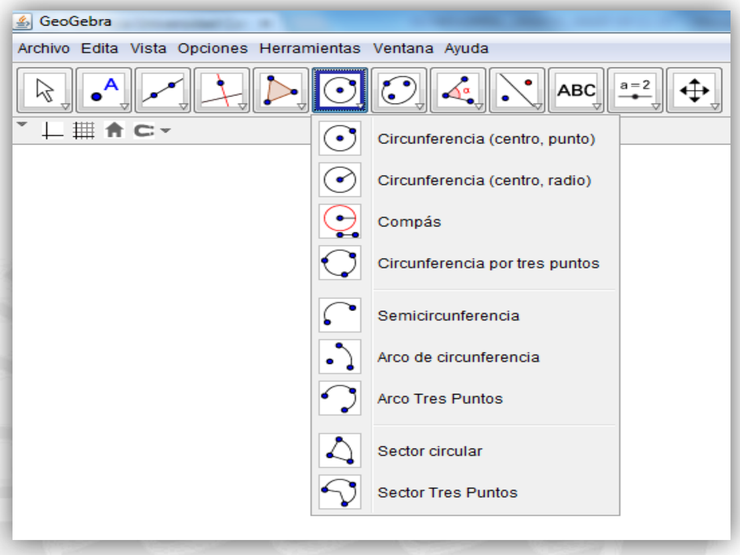
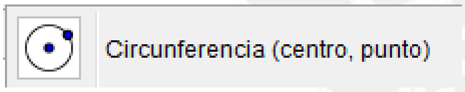
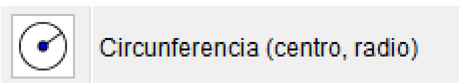


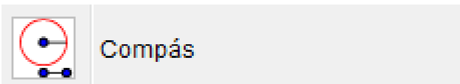
Figura 6. Aplicaciones de la Circunferencia



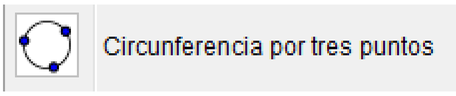
Esta primera aplicación nos permite hacer una construcción de la circunferencia conociendo solo su centro y un punto indistintamente. Al seleccionar un punto M y un punto P, queda definida una circunferencia con centro en M que pasa por P. El radio del círculo es la distancia MP.



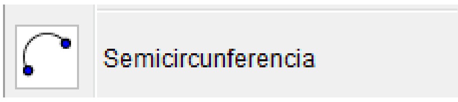
Esta segunda aplicación de la circunferencia se determina teniendo como datos el valor del radio y el centro. Tras seleccionar un punto M como centro, se despliega la ventana para ingresar el valor del radio.



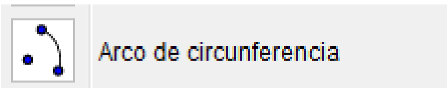
La tercera aplicación nos permite seleccionar un segmento o dos puntos, con lo cual queda especificado el radio y un clic posterior sobre un punto, lo marca como centro de la circunferencia a trazar.



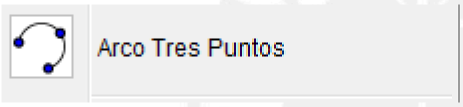
Esta cuarta aplicación nos permite obtener una circunferencia teniendo como base tres puntos en el plano, que pertenecen a ella. Al seleccionar tres puntos A, B y C queda definida una circunferencia que los cruza. Si los tres puntos estuvieran alineados, la circunferencia quedaría reducida a una recta.



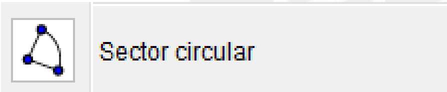
Esta quinta aplicación se obtiene conociendo dos puntos creados o no previamente, los cuales determinan un diámetro de la circunferencia. Al seleccionar dos puntos A y B, se traza una semicircunferencia por encima del segmento AB.



En la sexta aplicación se deben seleccionarse tres puntos: en primer lugar, M, que será su centro; luego A, el extremo inicial del arco y finalmente B que determinará la longitud del arco.



Esta séptima aplicación se obtiene al marcar tres puntos, A, B, y C, se traza un arco de circunferencia cuyo extremo inicial es A; el final es C y B pertenece al arco tendido entre A y C.



La octava aplicación se obtiene al conocer tres puntos, uno de ellos es el centro y los otros dos que se unen con un arco de circunferencia. Deben marcarse tres puntos: primero M, que será su centro; luego A, extremo inicial de su arco y finalmente B de modo que el sector circular quede bien definido.

Esta última aplicación de la circunferencia se obtiene al marcar tres puntos, A, B, y C, se produce un sector circular en cuyo arco el extremo inicial es A; el final es C y B pertenece al arco tendido entre A y C.

Por los argumentos dados previamente se ha optado por emplear el GeoGebra pues permite el estudio de la circunferencia, desde las perspectivas de la geometría sintética y analítica.

1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La Geometría ha sido el mecanismo utilizado para encontrar soluciones a diversos problemas de mediciones de diversas estructuras, tanto tridimensionales, así como de superficies planas. Por otro lado, respecto a la relevancia del tema matemático seleccionado, se tiene que en la estructura curricular peruana se contempla el estudio del objeto circunferencia. Esto se hace en términos de conocimientos, capacidades y competencias; el detalle de estos aspectos, específicamente para los grados 2°, 4° y 5° de secundaria se presenta a continuación.

1.3.1 ANALISIS DEL TRATAMIENTO DE LA CIRCUNFERENCIA EN EL CURRICULO OFICIAL

En Perú (2009) se describe la componente Geometría y Medición en los siguientes términos: Se relaciona con el análisis de las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones, además de ello trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros; comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales. (p.318).

Se señala también como competencia a desarrollar en el ciclo VI, correspondiente a 1° y 2° grados de secundaria, lo siguiente: "Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos geométricos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático". (Perú 2009, p.318).

Sobre los conocimientos específicos que se deben abordar en el segundo grado, en relación al objeto circunferencia, se señala: "Perímetros y áreas de figuras geométricas planas, longitud de la circunferencia, área del círculo y líneas notables de un círculo". (p.326).

Mientras que, respecto a la resolución de problemas en el segundo grado, se plantea que el estudiante: "Resuelve problemas que implican el cálculo sistemático o con fórmulas del perímetro o del área de figuras geométricas planas, resuelve problemas que involucran el cálculo de la circunferencia de un círculo" (Perú 2009, p.326).

De otro lado, según Perú (2009), en el tercer grado de secundaria hemos podido comprobar mediante el análisis de los libros del MINEDU que no existe la continuidad del tema circunferencia, dejando un vació en el estudio de dicho objeto. El tema se retoma en el cuarto grado, pero solo se estudia a la circunferencia inscrita y circunscrita, a un polígono y el cálculo de áreas de regiones determinadas por estas figuras. Así que la capacidad se describe en términos de: "resuelve problemas que implican el cálculo de regiones poligonales formadas por una circunferencia inscrita o circunscrita en un polígono" (p.326).

En lo que respecta al tratamiento de la circunferencia se hace desde la geometría analítica.

En el Diseño Cucrricular Nacional en cuanto a las capacidades que se toman en cuenta en 5°

grado de secundaria son: Resuelven problemas que implican la ecuación de la circunferencia, resuelve problemas que implican la recta tangente a la circunferencia y resuelve problemas de posiciones relativas de dos circunferencias no concéntricas.

Así, en quinto grado se estudia la circunferencia desde la perspectiva de la geometría analítica, introduciendo nuevos elementos y propiedades, pero sin relacionarlos con los elementos anteriores.

En los mapas de progreso, por su parte, se encuentra que para el VII nivel, correspondiente al finalizar 5° de secundaria se manifiesta lo siguiente:

> **Construye y representa formas bidimensionales y tridimensionales considerando propiedades, relaciones métricas, relaciones de semejanza y congruencia entre formas.** Clasifica formas geométricas estableciendo relaciones de inclusión entre clases y las argumenta. **Estima y calcula áreas de superficies compuestas que incluyen formas circulares** y no poligonales, volúmenes de cuerpos de revolución y distancias inaccesibles usando relaciones métricas y razones trigonométricas, evaluando la pertinencia de realizar una medida exacta o estimada. Interpreta y evalúa rutas en mapas y planos para optimizar trayectorias de desplazamiento. Formula y comprueba conjeturas relacionadas con el efecto de aplicar dos transformaciones sobre una forma bidimensional. **Interpreta movimientos** rectos, **circulares** y parabólicos **mediante modelos algebraicos y los representa en el plano cartesiano**. (Perú, SINEACE 2013, p.9) (resaltado en negrita por nosotros)

Observamos que en el apartado: “Estima y calcula áreas de superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales” e “Interpreta movimientos rectos, circulares y parabólicos mediante modelos algebraicos y los representa en el plano cartesiano”, no figura específicamente el objeto circunferencia y sus diversas aplicaciones; aparece como parte de otros temas.

De otro lado, en Perú (2013) se señala que se hace necesario el desarrollo progresivo de la competencia para describir objetos, sus atributos medibles y su posición en el espacio utilizando un lenguaje geométrico; comparar, y clasificar formas y magnitudes; graficar el desplazamiento de un objeto en sistemas de referencia; componer y descomponer formas; estimar medidas y utilizar instrumentos de medición; y resolver situaciones problemáticas mediante diversas estrategias.

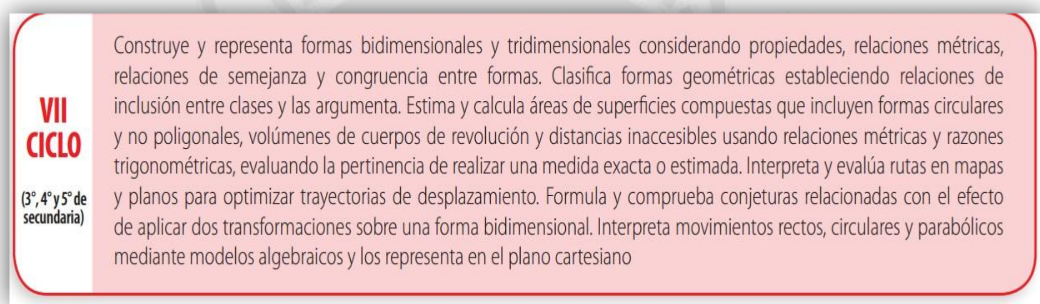
En nuestros mapas de progreso se manifiesta que la descripción del progreso del aprendizaje en esta competencia se realiza en base a dos aspectos los cuales mencionaremos a continuación:

a) Visualización e interpretación de propiedades y relaciones de formas geométricas.

Implica el desarrollo de capacidades para visualizar, representar y describir formas geométricas, sus propiedades y atributos medibles; estimar y medir magnitudes utilizando unidades arbitrarias y convencionales; formular y argumentar conjeturas a partir de las relaciones que encuentra entre las formas, sus propiedades y atributos medibles para resolver y modelar situaciones reales. (Perú, SINEACE 2013, p.8)

b) **Orientación y movimiento en el espacio.** Implica el desarrollo de capacidades para orientarse en el espacio; visualizar, representar y describir posiciones y transformaciones; formular y justificar conjeturas sobre los resultados de dichas transformaciones y comprobarlas para resolver y modelar situaciones reales. (Perú, SINEACE 2013, p.8)

En la figura 7 se puede apreciar los niveles mínimos que deben alcanzar los estudiantes del quinto grado de educación secundaria específicamente en Geometría.


VII CICLO (3°, 4° y 5° de secundaria)

Construye y representa formas bidimensionales y tridimensionales considerando propiedades, relaciones métricas, relaciones de semejanza y congruencia entre formas. Clasifica formas geométricas estableciendo relaciones de inclusión entre clases y las argumenta. Estima y calcula áreas de superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales, volúmenes de cuerpos de revolución y distancias inaccesibles usando relaciones métricas y razones trigonométricas, evaluando la pertinencia de realizar una medida exacta o estimada. Interpreta y evalúa rutas en mapas y planos para optimizar trayectorias de desplazamiento. Formula y comprueba conjeturas relacionadas con el efecto de aplicar dos transformaciones sobre una forma bidimensional. Interpreta movimientos rectos, circulares y parabólicos mediante modelos algebraicos y los representa en el plano cartesiano

Figura 7. Descripción de los niveles de Mapa de Progreso de Geometría
Fuente: Perú (2013, p. 9)

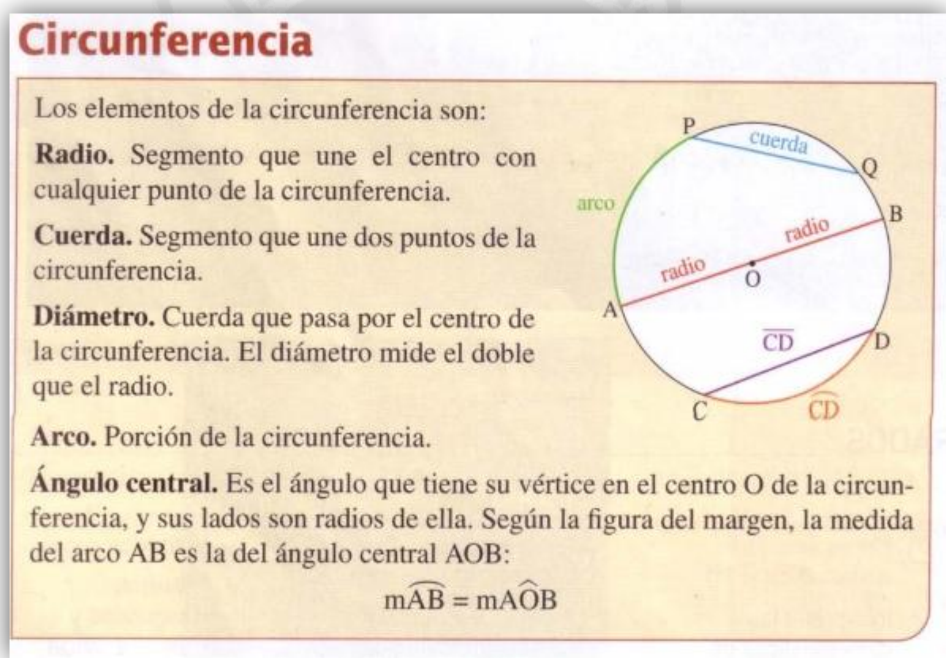
Sin embargo, se nota la ausencia del estudio de la circunferencia específicamente mediante construcciones con regla y compas. Se sugiere enfatizar que el estudiante pueda identificar y representar los elementos que son necesarios para construir una circunferencia como el lugar geométrico y luego describir gráficamente como se obtiene dicha figura dentro y fuera del plano.

1.3.2 ANALISIS DEL TRATAMIENTO QUE SE BRINDA AL OBJETO CIRCUNFERENCIA EN EL TEXTO OFICIAL DEL 5° GRADO DE SECUNDARIA

En esta parte de nuestra investigación presentamos los resultados obtenidos al revisar el texto de Matemática del Ministerio de Educación del 5° grado de educación secundaria, en particular a lo que se refiere al tratamiento que brinda a la circunferencia ya que es un material importante en el que se apoya el desarrollo de las programaciones, unidades y sesiones de clases del profesor. Estos documentos, que los estudiantes toman como referencia y material de consulta deben tener una secuencia lógica y ejemplos de aplicación a la vida diaria, dosificando adecuadamente la forma de llevarlo a la práctica.

Se ha realizado una revisión tanto del tratamiento teórico del tema, así como de los ejercicios y problemas que se plantean. Para dicho análisis se han identificado los contextos en los que se aborda la circunferencia: contexto geométrico o contexto de geometría analítica, y también de los procedimientos que se emplean al resolver los problemas.

Se ha encontrado que en el libro del quinto grado de matemáticas de educación secundaria no se presenta una definición para circunferencia; solo se señalan algunos de sus elementos (radio, cuerda, diámetro, etc.) pero en un contexto de geometría sin coordenadas, tal como se muestra en la figura 8.


Circunferencia

Los elementos de la circunferencia son:

Radio. Segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.

Cuerda. Segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro. Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. El diámetro mide el doble que el radio.

Arco. Porción de la circunferencia.

Ángulo central. Es el ángulo que tiene su vértice en el centro O de la circunferencia, y sus lados son radios de ella. Según la figura del margen, la medida del arco AB es la del ángulo central AOB:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{AOB}$$

Figura 8. Circunferencia y sus elementos
Fuente: Perú (2012c, p.168)

De otro lado, tampoco se justifica la introducción de un sistema de coordenadas cartesianas y, sin embargo, inmediatamente después se propone una actividad para cuya solución sí se requiere de un sistema de coordenadas, tal como se muestra en la figura 9.

2. **Dibuja** en un sistema de ejes cartesianos una circunferencia cuyo centro coincida con el origen de coordenadas O y tenga 5 u de radio. Luego, ubica un punto P, perteneciente a la circunferencia, a 3 u del eje X.

a) ¿A cuántas unidades del eje Y se encuentra el punto P? 4 u

b) ¿Cuánto mide el segmento OP? **¿Qué podrías afirmar** respecto a su medida si P está en algún otro lugar de la circunferencia?

c) **Ubica** el punto Q en (5; 0). ¿Cuánto mide el ángulo QOP? ¿Y el arco QP? 53°

d) Considera sobre la circunferencia un punto R a 1,5 unidades del eje Y. **¿Cuántas posibilidades** de ubicación para el punto R existen?

Figura 9. Ejercicios de circunferencia y sus elementos.
Fuente: Perú (2012c, p.168)

Para resolver este problema el estudiante debe graficar una circunferencia con centro en el origen y radio de 5 unidades; posteriormente en el gráfico tendrá que ubicar un punto P que pertenece a la circunferencia a 3 unidades del eje x. Es decir, para dar respuesta a las preguntas necesariamente debe considerar el cuadro de la geometría analítica y además deberá emplear conocimientos geométricos tales como el teorema de Pitágoras.

En la figura 10 se presenta la ecuación canónica, donde el punto medio de la circunferencia se encuentra en el (0,0) origen de las coordenadas.

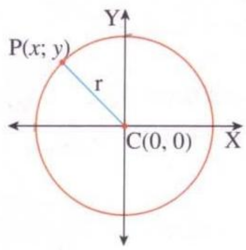
Ecuaciones de la circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (C).

Ecuación con centro en el origen

Para obtener la ecuación canónica de la circunferencia, con centro en el origen, ubicamos un punto cualquiera P(x; y) de la circunferencia con centro C(0; 0) y calculamos la distancia entre ambos. Es decir:

$$d_{(C,P)} = r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ecuación canónica: $r^2 = x^2 + y^2$

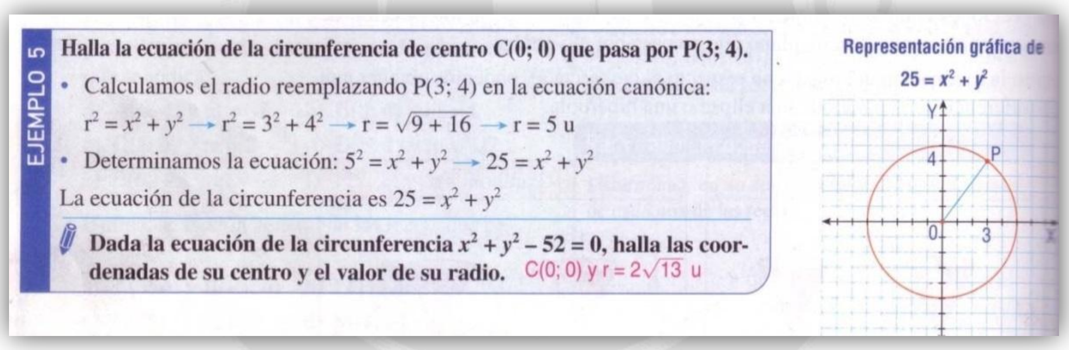
Figura 10. Ecuación canónica de la circunferencia
Fuente: Perú (2012c, p. 210)

Así, por ejemplo, para determinar la ecuación canónica de la circunferencia se ha empleado la expresión algebraica que corresponde a la distancia entre dos puntos del plano; este procedimiento se basa en la aplicación del teorema de Pitágoras. Dicha expresión se estudió en el cuarto grado de educación secundaria y se asume como saber previo. Sin embargo, en la figura 10 no se muestra de manera explícita un triángulo rectángulo.

Pensamos que esto demandará del estudiante el reconocer procedimientos en el cuadro geométrico que deben abordarse luego en el cuadro de la geometría analítica.

También se observa en la misma figura pese a que se señala que se calculará una distancia entre puntos, el procedimiento que se muestra no corresponde a ello si no a la búsqueda de una ecuación que relacione la abscisa y la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia.

En la figura 11 se muestra un problema para cuya solución se deben realizar cálculos en el cuadro de la geometría analítica. En el texto se acompaña la solución algebraica con un gráfico que no era indispensable para responder a la pregunta.



EJEMPLO 5

Halla la ecuación de la circunferencia de centro C(0; 0) que pasa por P(3; 4).

- Calculamos el radio reemplazando P(3; 4) en la ecuación canónica:
  $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow r = \sqrt{9 + 16} \rightarrow r = 5$ u
- Determinamos la ecuación: $5^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 25 = x^2 + y^2$

La ecuación de la circunferencia es $25 = x^2 + y^2$

Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 52 = 0$, halla las coordenadas de su centro y el valor de su radio. C(0; 0) y $r = 2\sqrt{13}$ u

Figura 11. Ejemplo de aplicación de la ecuación canónica
Fuente: Perú (2012c, p. 210)

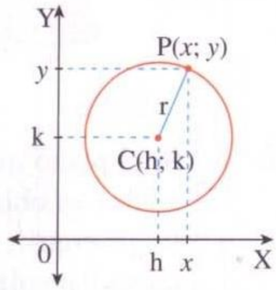
Posteriormente se presenta un ejemplo en donde se pide hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia, es decir, es una pregunta inversa a la anterior puesto que el dato ahora será la ecuación de la circunferencia se pide realizar la deducción para obtener las coordenadas del centro y el respectivo radio. Para la respuesta a ello hay que recurrir a la definición de circunferencia y emplear la formula de distancia entre 2 puntos.

En la figura 12 se observa la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el punto C (h, k), es decir en un punto genérico. Los procedimientos involucrados son similares a los anteriores.

Ecuación con centro en el punto C(h, k)

Para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro C(h; k), identificamos un punto cualquiera P(x; y) de la circunferencia y calculamos su distancia al centro C. Es decir:

$$d_{(C,P)} = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$



Ecuación ordinaria: $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

Figura 12. Ecuación con centro en el punto C (h, k)
Fuente: Perú (2012c, p. 210)

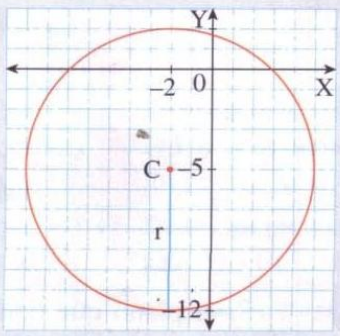
En la figura 13 se muestra el enunciado de un problema para cuya solución se debe reconocer los elementos de la circunferencia en la expresión algebraica y luego graficar la solución; se recurre solo a procedimientos propios de la geometría analítica.

EJEMPLO 6

Sea la circunferencia de ecuación $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 49$. Halla las coordenadas de su centro, el radio y grafícala.

- Identificamos las coordenadas del centro C(h, k) de la circunferencia: h = –2, k = –5 ⟶ C(–2; –5)
- Calculamos el radio: $r^2 = 49 \longrightarrow r = 7$ u

El centro de la circunferencia es C(–2; –5) y el radio mide 7 u.



Grafica la circunferencia de ecuación $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 81$. Halla las coordenadas del centro y determina su radio. C(5; –8) y r = 9 u

Figura 13. Ejemplo de aplicación de la ecuación ordinaria de la circunferencia
Fuente: Perú (2012c, p. 210)

En la figura 14 se prioriza el trabajo algebraico y se encuentra una ecuación equivalente a la original.

Ecuación general de la circunferencia

Para hallar la ecuación general de la circunferencia, desarrollamos los binomios de su ecuación ordinaria.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x^2 - 2xh + h^2) + (y^2 - 2yk + k^2) = r^2$

$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

Denotamos por $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$ para obtener la expresión que corresponde a la ecuación general de la circunferencia:

Ecuación general: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Figura 14. Ecuación General de la Circunferencias
Fuente: Perú (2012c, p. 211)

En la figura 15 se presenta el problema de hallar la ecuación de la circunferencia conociendo 3 puntos de paso. La solución propuesta recurre directamente a procedimientos algebraicos generando un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incognitas. La solución genera una solución parcial pues luego se debe completar cuadrados para identificar el centro y radio de la circunferencia.

EJEMPLO 7

Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos P(4; 7), Q(0; 9) y R(3; 0). Identifica su centro y calcula su radio.

- Como P, Q y R pertenecen a la circunferencia, deben satisfacer su ecuación. Reemplazamos cada par ordenado (x, y) en la ecuación general:

P(4; 7): $(4)^2 + (7)^2 + D(4) + E(7) + F = 0$ | $4D + 7E + F + 65 = 0$

Q(0; 9): $(0)^2 + (9)^2 + D(0) + E(9) + F = 0$ | $9E + F + 81 = 0$

R(3; 0): $(3)^2 + (0)^2 + D(3) + E(0) + F = 0$ | $3D + F + 9 = 0$

- Luego de resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen $D = 0$, $E = -8$ y $F = -9$, valores que reemplazamos en la ecuación general:

$x^2 + y^2 + (0)x + (-8)y + (-9) = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$

- Para determinar el centro (C) y el radio (r), llevamos a la forma ordinaria completando cuadrados y factorizando:

$x^2 + y^2 - 8y - 9 - 16 + 16 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 8y - 25 + 16 = 0$

$x^2 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow x^2 + (y-4)^2 = 5^2$

La ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$, su centro es C(0; 4) y su radio mide 5 u.

Representación gráfica de $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$

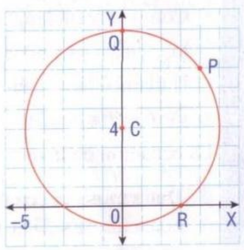


Figura 15. Ejemplos de aplicación de la ecuación general de la Circunferencias
Fuente: Perú (2012c, p. 211)

En la figura 16, se muestra la recta tangente a una circunferencia en un contexto geométrico.

Recta tangente a una circunferencia

Una recta es tangente a una circunferencia si la recta corta a esta en un solo punto. La recta tangente a una circunferencia tiene la propiedad de que es perpendicular al radio que une al centro del círculo con el punto de tangencia. Esta propiedad nos permite encontrar la ecuación de la recta tangente.

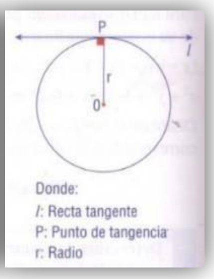


Figura 16. Recta tangente a una circunferencia
Fuente: Perú (2012c, p. 212)

Luego de presentar la definición de recta tangente a una circunferencia, el libro presenta dos ejemplos en los que se pide determinar la ecuación de la recta tangente a una circunferencia. En la solución presentada en la figura 17 se identifica el uso de propiedades de la geometría analítica, pero estas no se encuentran en forma explícita.

EJEMPLO 9

Determina la ecuación de la recta tangente a una circunferencia de ecuación $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 36$ en el punto P(–3; 6).

- Hallamos las coordenadas del centro de la circunferencia: C(4; 5)
- Hallamos la pendiente del radio que une P(–3; 6) con el centro de la circunferencia C(4; 5):

$$m_{\overline{PC}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-6}{4+3} = -\frac{1}{7}$$

- Como la recta tangente es perpendicular al radio, entonces:

$$m_{\overline{PC}} \cdot m_1 = -1 \rightarrow -\frac{1}{7} \cdot m_1 = -1 \rightarrow m_1 = 7$$

- Hallamos la ecuación de la recta tangente con P(–3; 6) y $m_1 = 7$:

$$y - 6 = 7(x - (-3)) \rightarrow y - 6 = 7x + 21 \rightarrow 7x - y + 27 = 0$$

La ecuación de la recta tangente es $7x - y + 27 = 0$

Determina la ecuación de la recta tangente a una circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ en el punto P(–2; 4). $4x - y + 12 = 0$

Figura 17. Ejemplos de aplicación de la recta tangente a una circunferencia
Fuente: Perú (2012c, p. 212)

En la figura 18 se muestran las posiciones relativas que pueden presentar dos circunferencias no concéntricas. Estas han sido representadas en un plano sin coordenadas y de manera simbólica se muestra la relación que debe existir entre sus radios y la distancia entre sus centros.

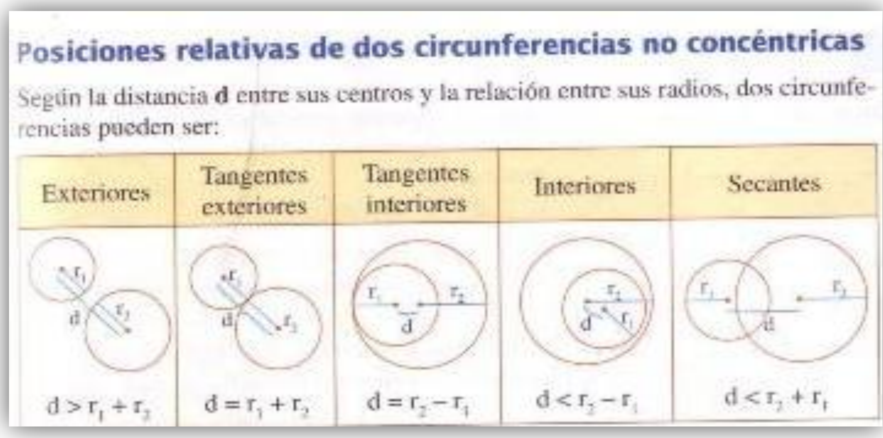
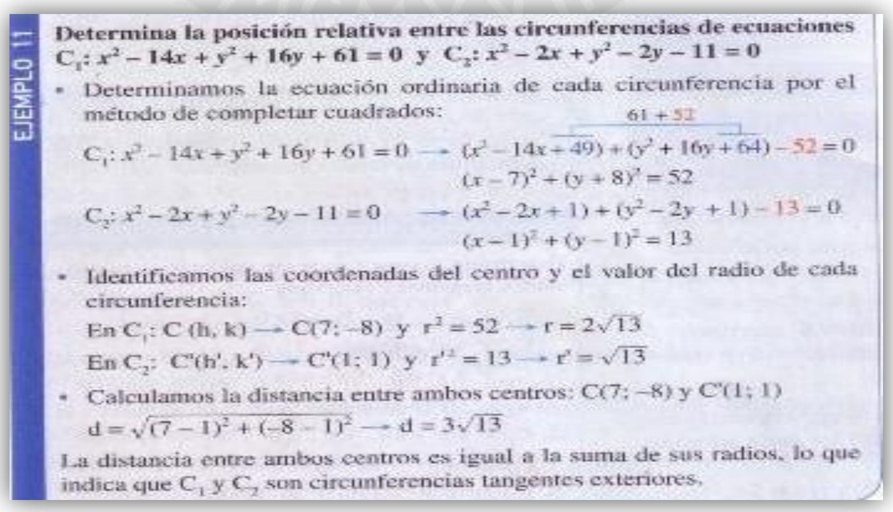


Figura 18. Posiciones relativas de dos circunferencias no concéntricas
Fuente: Perú (2012c, p. 213)

No se encuentran en el texto problemas que consideren las posiciones relativas entre dos circunferencias en contexto propio de la geometría sintética. Sin embargo, sí se encuentran problemas en donde se pide que analicen la posición relativa, pero a partir de las ecuaciones de las circunferencias y de calcular la distancia entre los centros y compararla con los radios.

En la figura 19 se presenta un problema para cuya solución se hace necesario el uso de procedimientos algebraicos para determinar la posición relativa entre las circunferencias sin graficarlas. Luego de completar cuadrados, se hace necesario reconocer en las expresiones algebraicas los elementos geométricos como el centro y el valor del radio. Lo mismo sucede al hallar la distancia entre los centros de las circunferencias.


EJEMPLO 11

Determina la posición relativa entre las circunferencias de ecuaciones $C_1: x^2 - 14x + y^2 + 16y + 61 = 0$ y $C_2: x^2 - 2x + y^2 - 2y - 11 = 0$

- Determinamos la ecuación ordinaria de cada circunferencia por el método de completar cuadrados:

$$C_1: x^2 - 14x + y^2 + 16y + 61 = 0 \longrightarrow (x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 16y + 64) - 52 = 0$$
$$61 + 52$$
$$(x-7)^2 + (y+8)^2 = 52$$
$$C_2: x^2 - 2x + y^2 - 2y - 11 = 0 \longrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 13 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13$$

- Identificamos las coordenadas del centro y el valor del radio de cada circunferencia:

En C_1: $C(h, k) \longrightarrow C(7; -8)$ y $r^2 = 52 \longrightarrow r = 2\sqrt{13}$
En C_2: $C'(h', k') \longrightarrow C'(1; 1)$ y $r'^2 = 13 \longrightarrow r' = \sqrt{13}$

- Calculamos la distancia entre ambos centros: $C(7; -8)$ y $C'(1; 1)$

$$d = \sqrt{(7-1)^2 + (-8-1)^2} \longrightarrow d = 3\sqrt{13}$$

La distancia entre ambos centros es igual a la suma de sus radios, lo que indica que C_1 y C_2 son circunferencias tangentes exteriores.

Figura 19. Posiciones relativas dos circunferencias no concéntricas.
Fuente: Perú (2012c, p. 213)

Con los resultados obtenidos de los ejemplos del libro del MINEDU, se concluye que la posición relativa entre las circunferencias es que son tangentes exteriores.

Si la solución se hubiera centrado en un trabajo algebraico, se habría tenido que resolver un sistema de 2 ecuaciones cuadráticas con 2 incógnitas y, dependiendo de la cantidad de soluciones, se habría concluido si eran tangentes, secantes o si no se cortan. Sin embargo, en el caso de que haya solución única, ese procedimiento no sería suficiente pues habría 2 posibilidades y en el caso que no existiera solución también se tendría que completar el análisis con el estudio de los radios.

Las actividades de este tipo muestran que, a veces, recurrir a resultados de la geometría evita hacer cálculos algebraicos que pueden ser muy trabajosos. Específicamente este es un ejemplo de la superioridad de los métodos geométricos sobre los analíticos.

Regresando a los ejemplos que aparecen en el texto de 5° grado de secundaria sobre circunferencia, en la figura 20, se presentan actividades propuestas para el estudiante. Para la solución de la primera pregunta se hace necesario identificar los centros y radios en el gráfico, luego identificar los centros y radios en las expresiones algebraicas, para finalmente establecer relaciones entre las curvas y las ecuaciones mostradas.

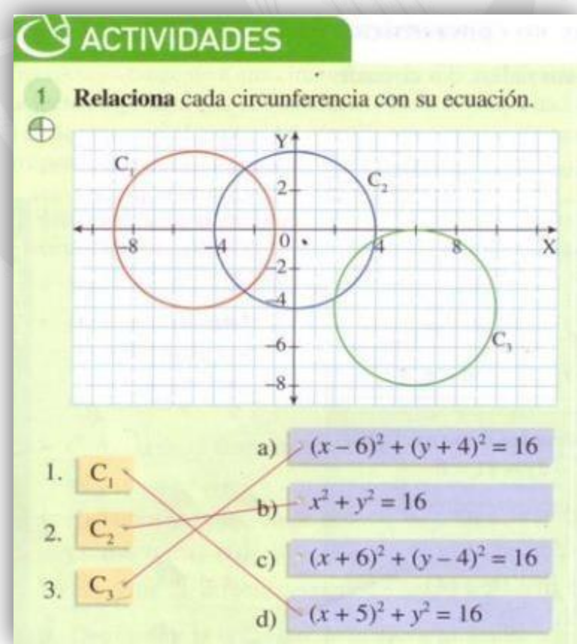


Figura 20. Actividades de relación entre gráfico y la fórmula
Fuente: Perú (2012c, p. 214)

Para la solución de la actividad mostrada en la figura 21, se requiere de métodos propios de la geometría analítica.

2 **Halla** la ecuación canónica de la circunferencia.

a) De centro C(0; 0) y que pasa por el punto (−3; 5). $x^2 + y^2 = 34$

b) De centro C(0; 0) y r = 4 u. $x^2 + y^2 = 16$

c) De centro en el eje positivo X, que pasa por el origen de coordenadas, y cuyo radio mide 2 u. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

3 **Representa** gráficamente la circunferencia en los siguientes casos, usando los datos adecuadamente:

a) Centro en el punto (3; 2) y radio 5 u.

b) Centro en el punto (−4; −2) y diámetro 8 u.

c) Centro en el punto (3; 4) y tangente al eje X.

d) Centro en el punto (0; 3) y tangente a la recta $x = 7$.

Figura 21. Actividades para hallar la ecuación y representación grafica
Fuente: Perú (2012c, p. 214)

En las siguientes actividades, presentadas en la figura 22 y 23 se pide hallar la ecuación general de la circunferencia, así como su gráfica a partir de tres puntos dados. Igual que antes, la solución que propone el texto se basa en resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incognitas. Sin embargo, una solución que se base en el uso de propiedades geométricas dotaría de mayor significado a los procedimientos.

4 **Halla** la ecuación general de la circunferencia que contiene los puntos indicados. Luego, **grafica**:

a) A(−7; 2), B(1; −2) y C(−2; −3)

b) A(−6; 9), B(6; 1) y C(6; −9)

c) A(9; −10), B(3; 8) y C(−3; 6)

Figura 22. Actividades para hallar la ecuación general y su gráfica
Fuente: Perú (2012c, p. 214)

De otro lado, en la figura 23, se presenta un problema para cuya solución se requiere emplear propiedades geométricas e interpretarlas en términos analíticos. Por ejemplo, se debe asociar el que dos rectas sean perpendiculares a que el producto de sus pendientes sea -1.

5 **Determina** la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$; P(2; 2)

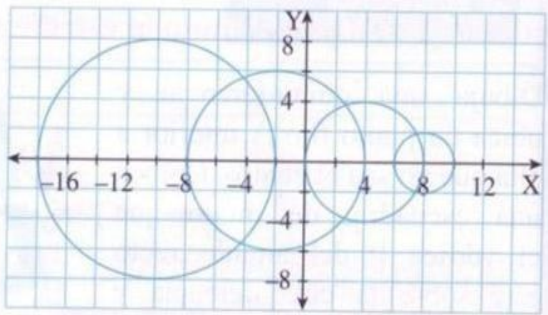
b) $x^2 + y^2 + 125x - 7y = 314$; P(2; –8)

c) $7x^2 + 7y^2 + 54x + 108y = 467$; P(–3; 4)

Figura 23. Actividades para hallar la ecuación de la recta tangente
Fuente: Perú (2012c, p. 214)

Las actividades de la figura 24 requieren que el estudiante desarrolle los problemas partiendo de la ubicación de las coordenadas de los centros, para luego hallar la longitud de un diámetro. Finalmente reemplazará esa información en la ecuación ordinaria de la circunferencia.

7 **Obtén** las ecuaciones de las circunferencias mostradas a continuación.



8 Sea la circunferencia de ecuación $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$. **Halla** las coordenadas de su centro, el radio y **grafícala**.

Figura 24. Ecuaciones de las circunferencias mostradas
Fuente: Perú (2012c, p. 226)

A partir de la descripción realizada se concluye que la mayoría de problemas presentados en el contexto de la geometría analítica requieren procedimientos algebraicos e identificaciones directas en el plano cartesiano para ser resueltas. Son muy pocos los que recurren al empleo y aplicación de propiedades geométricas. Ademas, la moyoria de problemas no tiene un equivalente en el contexto geométrico. En el mejor de los casos aquellos problemas en los que se pide hallar una ecuación, podrían asociarse con la construcción de una figura.

En esta investigación se plantea realizar actividades que pueden ser abordados desde los cuadros geométricos y de la geometría analítica con apoyo del GeoGebra. En particular, se busca explorar si los estudiantes reconocen la utilidad de la geométrica sintética en determinados problemas que involucran al objeto circunferencia.

1.4 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En esta investigación se propone identificar actividades que posibiliten reconocer a la circunferencia como un objeto matemático de la geometría euclidiana que puede abordarse desde la geometrtía sintética (sin coordenadas) y también desde la geometría analítica. De esa manera se podrán establecer conexiones entre estas dos ramas de la matemática; en ese proceso se recurrirá al empleo del software GeoGebra.

El problema se podrá enunciar de la siguiente manera:

¿Qué resultados se tendrá en los aprendizajes de los estudiantes el abordar problemas sobre circunferencia desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica, y de qué manera el uso del GeoGebra contribuirá a que los estudiantes establezcan conexiones entre estos dos cuadros de la matemática?

1.5 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Analizar como los estudiantes del quinto grado de secundaria realizan el cambio de cuadros desde la geometría sintética a la geometría analítica, cuando estudian el objeto matemático circunferencia y utilizan el GeoGebra.

Los objetivos específicos son los siguientes:

- Identificar actividades sobre circunferencias que tengan sentido en los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica, que correspondan al quinto grado de educación secundaria.
- Describir los resultados que tendrá la aplicación de problemas sobre circunferencia que exijan establecer conexiones entre los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica en los aprendizajes de los estudiantes del quinto grado de educación secundaria.
- Identificar el resultado de emplear el software GeoGebra como mediador en el aprendizaje de la circunferencia para los estudiantes del quinto grado de secundaria.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo presentaremos los elementos teóricos de la didáctica de la matemática en los que nos basamos para poder hacer nuestra investigación. Así mismo, presentaremos nuestro objeto matemático y sus conceptos fundamentales en el cuadro de la Geometría Sintética y de la Geometría Analítica, ya que es desde estas dos perspectivas es que se aborda dicho tema en el quinto grado de educación secundaria en el Perú. Esto permitirá comprender mejor el objeto circunferencia, así como los procedimientos y representaciones involucrados cuando es abordado desde algunos de esos cuadros. Se buscarán actividades que pueden ser abordadas en ambos contextos y se analizará las ventajas que ofrece uno sobre otro.

Dada la naturaleza del problema, se adoptará como marco teórico el juego de cuadros, desarrollado por Douady (1999). La idea que se propone para cuadro es la de un dominio de las matemáticas que esté bien identificado por sus objetos, por las relaciones que sostienen y por los tipos de representaciones y de tratamientos que movilizan. La autora parte de los dos siguientes postulados los cuales son:

- Todo concepto matemático está asociado a varios cuadros que pueden ser relacionados por medio de sistemas de representación.
- Los diferentes cuadros no coinciden, primero porque no movilizan las mismas propiedades y teoremas, y segundo debido a las diferencias de valor ostensivo de los sistemas de representación que producen. Esta última particularidad hace del juego de cuadros un método efectivo de construcción de situaciones pertinentes que favorezcan el aprendizaje.

Según Balacheff (2004), Douady plantea que: “Para asegurar las relaciones entre el estudiante y el problema es necesario expresar las condiciones sobre los problemas, que hacen que la dialéctica herramienta-objeto y el juego de cuadros sean posibles” (p.319)

La elección de este enfoque denominado juego de cuadros hará que las unidades de enseñanza se organicen de acuerdo con los campos matemáticos descritos anteriormente y puedan brindar al estudiante una mejor opción en el estudio del objeto circunferencia cuando es abordada desde los cuadros geométrico sintético y geométrico analítico.

2.1. JUEGO DE CUADROS

Douady 1986 (citado por Balacheff 2005) propuso el juego de cuadros como medio para hacer evolucionar las concepciones de los estudiantes de matemáticas. La autora hace la distinción y señala que un cuadro está constituido de objetos de un campo de la matemática, de las relaciones entre esos objetos, de sus formulaciones eventualmente diferentes, y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Así, un cambio de cuadro es el paso de un cuadro a otro para obtener diferentes formulaciones de un problema.

El juego de cuadros lo provoca el profesor en las actividades o problemas que se plantea a los estudiantes y traduce la intención de explotar el hecho de que la mayoría de los conceptos matemáticos pueden estudiarse desde distintos cuadros. Para cada uno de ellos se traduce un concepto en términos de objetos y relaciones que podemos llamar los significados del concepto en el cuadro. Así por ejemplo, las funciones pueden estudiarse en el cuadro de la geometría analítica pero también en el cuadro algebraico o topológico.

Douady (1992) manifiesta que esto se obtiene, por un lado, de las correspondencias entre significados de un mismo concepto en cuadros diferentes, y también entre significados de conceptos diferentes representados en el mismo cuadro por los mismos significantes.

Pero, en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, los conceptos funcionan de manera parcial y diferente según los cuadros. Por consiguiente, las correspondencias están incompletas. Además, ese estado heterogéneo de los conocimientos varía según el estudiante. Para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos se deben escoger problemas donde aquellos intervienen en dos cuadros como mínimo. Se debe privilegiar los cuadros en los que la imperfección de correspondencias creará desequilibrios que se tratarán de compensar.

En esta investigación consideraremos problemas que exijan que intervengan los cuadros de la geométria sintética y geometría analítica, reconociendo las ventajas de uno sobre el otro.

Douady (1999) manifiesta que las implicaciones que tienen los juegos de cuadros, y que se evidencia en los objetos de aprendizaje creados en esta investigación es que se pueden obtener formulaciones diferentes de un problema que, sin ser necesariamente equivalentes por completo, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y la puesta en acción de herramientas y técnicas que no se imponían en la primera formulación, y que logran en el estudiante encontrar una adecuada solución a la situación problema que se hallan enfrentado. Así, las interacciones entre los cuadros pueden hacer avanzar el conocimiento en cada uno de ellos.

Siguiendo a Douady (1986), en el juego de cuadros se distinguen tres fases:

1. **Transferencia e interpretación:** Los estudiantes son enfrentados a un problema formulado en un determinado cuadro. Considerando sus conocimientos, el análisis que hacen del problema los conduce a traducir todo o parte del problema para otro cuadro. Asi, ellos establecen correspondencias entre cuadros diferentes.
2. **Correspondencias imperfectas:** Las correspondencias son imperfectas sea por razones matemáticas o por insuficiencia de conocimientos de los estudiantes. Dicha situación constituye una fuente de desequilibrio.
3. **Mejora de la correspondencia y progreso del conocimiento:** La comunicación entre cuadros y, en particular, la comunicación con un cuadro auxiliar de representación es un factor de reequilibrio.

La autora afirma que las interacciones entre cuadros permiten el progreso de los conocimientos de los estudiantes. Así, mientras que los estudiantes consigan realizar pasajes entre cuadros, habrá mayor garantia de éxito.

Es importante que la enseñanza proponga situaciones que favorezcan cambios de cuadros; el estudiante debe conseguir leer el problema en un determinado cuadro y resolverlo o interpretarlo, en otro cuadro.

En esta investigación se trata de relacionar dos campos de la matemática: la geometría analítica y la geometría sintética, a través de la noción de circunferencia.

Los conocimientos previos necesarios sobre circunferencia en el cuadro geométrico son la noción de punto, de distancia entre dos puntos, segmento, punto medio de un segmento, mediatriz, intersección de rectas.

Mientras que, en el cuadro de la geometría analítica, se requerirá vincular el lugar geométrico de un conjunto de puntos con la ecuación que lo representa en un sistema de coordenadas cartesianas. En particular, los conocimientos previos que se requieren serán el sistema de coordenadas, coordenadas de un punto, ecuación de una recta, intersección de rectas, pendiente de una recta, ecuación de la circunferencia y sistema de ecuaciones.

Benzaquen y otros (2008) manifiestan que, desde la perspectiva de la enseñanza en educación secundaria, los programas de estudio y los libros de textos, en general, nos ofrecen, para el tratamiento de temas matemáticos, un predominio del escenario del cuadro algebraico con algunos indicios de enfoques numéricos y cuadro geométrico. Esto se evidencia en el análisis que hicimos anteriormente del texto de quinto de secundaria, editado por el Ministerio de Educación.

Para reforzar esta idea, mencionaremos el aporte de Lacasta (2000), según el cual el concepto de cuadro se da en el sentido usual que se tiene, cuando hablamos del cuadro algebraico, del cuadro geométrico, etc. El objetivo que se persigue es trabajar con distintos cuadros para un mismo problema. En tal sentido el autor afirma que el trabajo con ostensivos distintos, realizando cambios entre los mismos, posibilita que el estudiante avance en las fases del problema y que sus concepciones evolucionen.

En esta investigación se realiza el análisis de actividades propuestas para el quinto grado de educación secundaria, donde los estudiantes verifiquen los cuadros predominantes y la utilización de los mismos por las que tienen que transitar para resolver un problema.

En esta sección se presentarán problemas sobre circunferencias que pueden ser abordados en el cuadro geométrico y también en el cuadro de la geometría analítica. Algunos de ellos formarán parte de las actividades que se trabajarán con los estudiantes del 5° grado de secundaria.

Por este motivo presentamos algunas características propias de cada uno de los cuadros estudiados en la presente tesis:

En la Tabla 1 presentamos algunas características propias de la geometría sintética.

Tabla 1. Caracterìsticas del cuadro de la geometría sintètica

GEOMETRIA SINTÉTICA
Estudia las figuras geométricas sin coordenadas y resuelve los problemas geométricos por axiomas, postulados y teoremas.
Se encarga de estudiar y construir de manera sintética las formas y lugares geométricos. Se comienza a construir y demostrar proposiciones lógicas; que se sustentan como en una especie de eslabones de una cadena de razonamiento. Propicia el desarrollo de un razonamiento lógico deductivo

Como se puede ver en la geometría sintética no se necesita conocer las cordenadas para poder proceder a la solución de un problema, solo se procede a su construcción y posterior demostración tomamndo en cuenta los axiomas, postulados y teoremas básicos de la geometría.

En la Tabla 2 presentamos algunas características propias de la geometría analítica.

Tabla 2. Caracterìsticas del cuadro de la geometría analìtica.

GEOMETRÍA ANALÍTICA
Estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenadas y resuelve los problemas por métodos algebraicos; las coordenadas se representan por pares ordenados y las figuras por ecuaciones
Los problemas plantean asignar ecuaciones a curvas geométricas en un plano de coordenadas. Propicia el establecimiento de conexiones entre las representaciones geométricas en un plano de coordenadas y sus representaciones algebraicas

Como vemos en la geometría analítica es muy necesario trabajar con coordenadas (pares ordenados), donde es necesario la utilización de métodos algebraicos para llegar a establecer ecuaciones y llegar a realizar cálculos detallados y operativos que permitan llegar a las respuestas esperadas mediante un proceso que requiere mas tiempo y precisión. Estos cálculos se podrían establecer para poder comprobar si las construcciones geométricas y los cálculos algebraicos son correctos.

2.2. COMPARACIÓN ENTRE LOS CUADROS DE LA GEOMETRIA SINTÉTICA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

En este apartado se presenta la comparación de actividades desarrolladas desde la geometría sintética y la geometría analítica; también se comparan los procedimientos y conocimientos que se movilizan cuando se abordan problemas en ambos cuadros. Esto permitirá encontrar diferencias y semejanzas en el tratamiento de un problema que tenga sentido en los dos cuadros. También permitirá identificar en cuál de los dos cuadros los procedimientos son más sencillos y eficientes. En la Tabla 3 se consideran los aspectos mencionados.

Tabla 3. Tareas propias de los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica

GEOMETRIA SINTÉTICA	GEOMETRÍA ANALÍTICA
Construir los lugares geométricos: la solución depende de la determinación de los puntos que tienen dos o más propiedades explicitas en el enunciado o que se deducen del mismo. Se trata de	En geometría analítica plana se estudian aquellas curvas tales que las coordenadas de sus puntos, según un sistema de coordenadas prefijado, satisfacen una ecuación o un sistema de ecuaciones. El

considerar por separado las condiciones que determinan la posición exacta del punto buscado. El conjunto de todos los puntos que cumplen una de las condiciones es un lugar geométrico. Los puntos solución del problema serán aquellos que satisfacen todas las condiciones es decir que se encuentran en la intersección de los lugares geométricos previamente identificados.	vínculo que se establece entre la geometría y el álgebra por medio de la ecuación, abarca también las relaciones y operaciones entre los elementos de ambas ya que las propiedades geométricas de una curva pueden ser estudiadas a partir del comportamiento algebraico de su ecuación.
No tiene un equivalente	Dada una ecuación, se debe reconocer la curva que esta representa
No tiene un equivalente	En una ecuación se requiere realizar procedimientos algebraicos, por ejemplo, completar cuadrados, para reconocer elementos claves en la figura que hay que gráficar.
Dadas las figuras se pide construir los puntos de intersección. Estas son las que tienen un punto en común.	Dadas las ecuaciones de varias cuirvas (circunferencias, rectas, etc) se deben resolver sistema de ecuaciones para hallar las coordenadas de los puntos de intersección.
Se reconoce la figura tomando sus puntos de referencia y recordando las características de cada uno, se verifican sus elementos una vez representada la figura final.	Dadas las gráficas de curvas en un sistema de coordenadas se debe reconocer sus principales elementos y luego reemplazarlos en las ecuaciones canónicas u ordinarias.
Dados los puntos de una figura se pide dibujarlas tomando en cuenta sus características elementales.	Dados los elementos de una curva, se pide graficarla en un sistema de coordenadas.

Podemos afirmar entonces que al realizar las tareas en cada cuadro varia sustancialmente y la forma de tratarlas matemáticamente tiene otro proceso, esto quiere decir que los tratamientos son diferentes tanto para el cuadro de la geometría sintética y el cuadro de la geometría analítica. Observamos también que en alguna de las tareas no se tiene un equivalente en cuanto a su desarrollo y por ello existen diferencias marcadas entre ambos cuadros.

Los elementos teóricos presentados servirán para predecir y analizar los resultados que se obtengan cuando se apliquen las actividades.

2.3. METODOLOGÍA EMPLEADA EN LA INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación está enmarcada dentro del campo de la metodología cualitativa ya que pretendemos conocer, a través de las observaciones, las acciones de los estudiantes cuando se enfrentan a una actividad diseñada bajo el cuadro de la geometría analítica.

Según Flick (2007) la metodología cualitativa orienta a analizar casos concretos en su particularidad de un tiempo y espacio, y a partir de las expresiones y actividades de las personas en los contextos locales que se desarrollan.

Por lo tanto la metodología cualitativa diseña el camino de la investigación, estudia la complejidad de las personas, cosa o fenómenos que tienen ciertas particularidades y que lo hacen único e irrepetible.

Por ello en cuanto a la metodología se puede hacer una distinción a lo que dice Hernández y otros (2010) la metodología cualitativa utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación (p.7).

Características del enfoque cualitativo:

- El enfoque cualitativo se basa en la lógica y procesos inductivos (explorar y describir, genera perspectiva teórica) por ejemplo el investigador entrevista a una persona, analiza los datos que obtuvo y saca las conclusiones.
- Durante el proceso se va refinando la investigación conforme se van recabando más datos o son resultados de estudio.
- Los estudios cualitativos se basan en la recolección de datos, descripción detallada de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones.
- Se utilizan técnicas para recolectar datos como la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusiones en grupo evaluaciones de experiencias personales, registro de historia de vida, e interacción e introspección con grupos o comunidades.
- Evalúa el desarrollo de los sucesos no hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad.

Estas características nos ayudarán en la forma de recoger la información de las actividades propuestas para los estudiantes del quinto de secundaria y a definir nuestra metodología experimental cualitativa.

Existen diversos estudios sobre investigación cualitativa; en nuestro estudio emplearemos la definición de Flick (2007) quien manifiesta que la investigación cualitativa estudia el conocimiento y las prácticas de los participantes. Analizan y describen interrelaciones en el contexto concreto del caso y se explican en relación con él. La investigación cualitativa toma en consideración que los puntos de vista y las prácticas en el campo son diferentes a causa de las distintas perspectivas subjetivas y los ambientes sociales relacionados con ellas.

2.4. PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

Nuestra investigación se centrará en la metodología de estudio de casos que es de gran relevancia para comprender con profundidad los fenómenos educativos que se producen al realizar las actividades para los estudiantes y al verificar lo que contestan en cada una de ellas. El estudio de casos, según Yin (1994), corresponde a una investigación empírica que estudia un fenómeno dentro de un contexto real. En esta misma línea, Stake (1998) define el estudio de casos como el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas.

Este método de investigación se caracteriza por el estudio intensivo y profundo de uno o varios casos basados en la indagación en torno a problemas o actividades. También se caracteriza por la comprensión holística de un sistema cultural en acción. Esta metodología tiene ventajas y también limitaciones con lo que debemos contar, un estudio de casos abre enormes posibilidades a la investigación.

Yin (1989) distingue tres tipos de objetivos diferentes:

Exploratorio: los resultados pueden ser usados como base para la pregunta de investigación.

Descriptivo: describe lo que sucede en un caso particular.

Explicativo: facilita la interpretación.

Es muy útil para estudiar problemas prácticos o situaciones determinadas de un contexto particular o grupal. Para nuestra investigación lo tomaremos en cuenta en la aplicación de problemas que nos servirán para realizar el cambio de cuadros que tendrán que realizar los estudiantes.

2.4.1. PROCESOS DE INVESTIGACIÓN DE UN ESTUDIO DE CASOS

Para establecer los procesos recojo de información de nuestra investigación nos basaremos en Stake (1998), quien señala que, por sus características, el estudio de caso en su estructura cumple con pasos delimitados y gracias a la propuesta de Montero y León (2002) desarrollan este método en cinco fases presentadas a continuación.

1. Proponer actividades sobre circunferencia que puedan ser abordados desde los

cuadros de la geometría y geometría analítica, así como los procedimientos involucrados en cada caso y analizar el efecto de abordar un problema sobre circunferencia desde los cuadros de la geométria sintética y geometría analítica, mediado por el GeoGebra.

2. Para la investigación planteamos las siguientes actividades que desarrollaran los estudiantes la cual les permitirá reconocer a la circunferencia como objeto matemático que puede ser estudiado desde la geometría sintética y desde la geometría analítica, y de qué manera el uso del GeoGebra contribuirá a establecer conexiones entre estos 2 cuadros matemáticos.

   Presentamos entonces los 4 problemas considerados para el desarrollo de los estudiantes:

Problema 1: Dados 3 puntos no alineados A, B y C en el plano, dibuja una circunferencia que pase por ellos. (Sin cordenadas).

En esta actividad los estudiantes son confrontados a un problema formulado en el cuadro geométrico sintético. Utilizando el software GeoGebra. Consta de 5 preguntas de procesos a seguir.

Problema 2: Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A 2,3), B (6,11) y C (12,5). (Con coordenadas).

Esta actividad tiene por objetivo realizar una circunferencia partiendo desde 3 puntos conocidos no colineales, utilizando el cuadro de la geometría analítica y recordando la ecuación de la circunferencia. Cosnta de 8 preguntas de proceso.

Problema 3: Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (2,3), B (6,11), C (12, 5). (Con coordenadas).

Esta actividad tiene por objetivo realizar una circunferencia partiendo de tres puntos conocidos, utilizando la geometría analítica y recordando la obtención de punto medio, pendiente, distancia entre dos puntos, ecuación de una recta, ecuación de la circunferencia y sistema de ecuaciones. Consta de 7 preguntas de proceso.

Problema 4: Reproducen la secuencia de solución anterior pero esta vez usando el software GeoGebra. (Con coodenadas)

Esta actividad tiene por objetivo realizar la secuencia del problema 1 hecha con el software GeoGebra, confirmando los puntos tomados en el problema 3 y verificando su secuencia para la obtención final de la circunferencia (solución ideal). Consta de 5 preguntas.

Los problemas seleccionados fueron elaborados en cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica, se escogio la obtención de la circunferencia partiendo de 3 puntos no colineales ya que este problema puede ser visto en los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica.

Por ello al presentar la justificación de nuestra investigación realizamos el análisis del libro del 5ª grado de educación secundaria del MINEDU, además de otros libros donde se realizar ejercicios en los cuadros de geometría sintética y geometría analítica.

El escenario de nuestra investigación donde se aplicarán los cuatro problemas será un aula de clases con estudiantes del quinto grado de educación secundaria del turno tarde, de la I.E.I. “Santo Domingo Savio”. Los estudiantes que participarán tienen edades que bordean en promedio los quince a diecisiete años. No hay alumnos repitentes y la mayoría de ellos son estudiantes matriculados en el plantel desde el primer grado de educación secundaria e inclusive alguno de ellos desde el nivel primario puesto que, la Institución es integrada. A estos estudiantes se les pidirá que trabajen las actividades construidas previamente y se recogerán luego sus respuestas.

3. En la presente investigación analizaremos cuatro problemas las cuales se recogerán de los estudiantes. En primer lugar la aplicación del problema 1 esta en el cuadro de geometría sintética sin coordenadas y con ayuda de GeoGebra, en el problema 2 se plantearán las preguntas de acuerdo al cuadro de la geometría analítica con coordenadas, en el problema 3 se establece el desarrollo en el cuadro de la geometría analítica con cordenadas, pero solicitando un esfuerzo mayor al realizar operaciones más complejas y en el problema 4 la aplicacion de la geometría analítica comprobada con el software Geogebra. Esto nos permitirá realizar el análisis con detalle y más ampliamente en el Capitulo V de Implementación y Analisis de las respuestas de los estudiantes, donde confrontaremos lo diseñado previamente con los resultados de los estudiantes.
4. Se tomará en cuenta el análisis de resultados y se podrá confrontar con lo que se esperaba lograr de los estudiantes. Las observaciones se detallarán minuciosamente en el capitulo V.

CAPÍTULO 3: UN ESTUDIO FORMAL DE LA CIRCUNFERENCIA

En este capítulo describiremos nuestro objeto matemático de estudio, la circunferencia. Para ello se hará referencia a conceptos fundamentales que aprecen en los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica.

3.1. LA CIRCUNFERENCIA DESDE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA

Delimitaremos inicialmente la geometría sintética como aquella que utiliza los métodos de Euclides, Apolonio y sus sucesores, para abordar problemas de construcción geométrica sin representación en coordenadas y con la regla y el compás como principales herramientas. La determinación de los lugares geométricos aparece como una técnica básica de estas construcciones, al lado de las transformaciones del plano (Ancochea 2011, p.538).

Para ello, tomaremos en cuenta algunos autores que a continuación mencionaremos, según Escobar (1992), en su libro Elementos de la Geometría define la circunferencia de la siguiente manera, adicionando a ello otras definiciones importantes:

Definición: Es el conjunto de puntos (o lugar geométrico de los puntos) del plano que equidistan de un punto fijo en el mismo plano, al punto fijo se le llama el centro de la circunferencia y a la distancia de cada punto al centro se le llama radio de la circunferencia.

Notación: La circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r (ver figura 25), se denota por C (O, r), en la notación de conjuntos es:

$$C(O,r) = \{X \in \pi / OX = r,\ O, X \in \pi\}$$

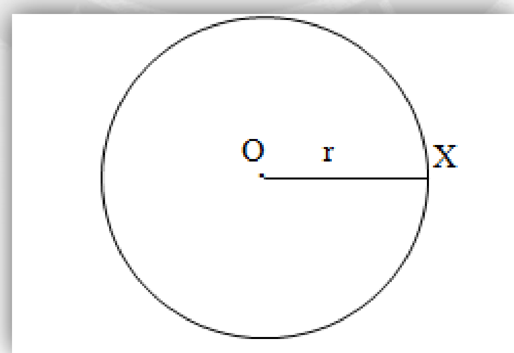


Figura 25. La Circunferencia en el plano
Fuente: Escobar (1992, p. 152)

De manera similar, Verástegui (2003) presenta la siguiente definición de circunferencia.

Definición.- Fijados 0 un punto en el plano π y $r \geq 0$ en **R**, el conjunto de los puntos P del plano π cuyas distancias al punto 0 es r se llama circunferencia de centro 0 y radio r, y se denota por **C** (0,r) la figura 26, presentada a continuación, representa a dicho conjunto.

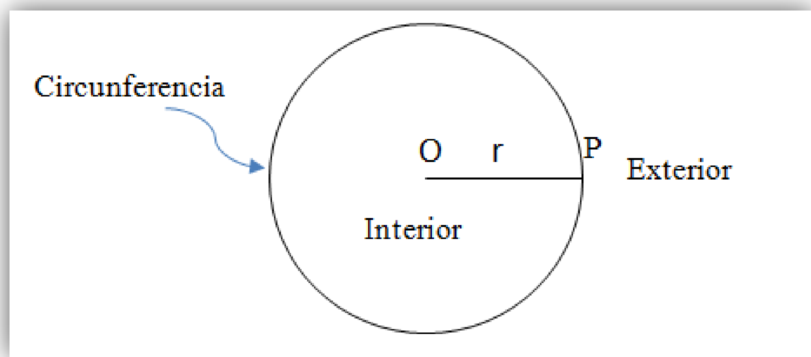


Figura 26.La Circunferencia y sus secciones
Fuente: Verástegui (2003, p. 133)

Formalmente: $\mathbf{C}_{(0,r)} = \{P/P \in \pi \text{ y } d(P,0) = r\} \subset \pi$; y, de esto, para puntos P del plano π, $P \in \mathbf{C}_{(0,r)} \leftrightarrow d(P,0)=r$

De esta definición, dados el centro 0, un punto P en π y r = 0P, la circunferencia $\mathbf{C}_{(0,r)}$. De esto para definir una circunferencia es suficiente tener el centro 0 y el radio r, se ubica un punto P en π con OP = r: o es suficiente tener el centro O y punto P por donde pasa $\mathbf{C}_{(0,r)}$, siendo r = 0P.

Como sucede con una recta ubicada en el plano, que divide al plano en dos regiones disjuntas, la circunferencia tambien la cual nos divide al plano en dos regiones, una de ellas la llamamos el interior y la otra el exterior de la circunferencia.

Definición: (Tangente). Si una recta en el plano de la circunferencia la intercepta en un único punto, entonces decimos que la recta es tangente a la circunferencia; al punto de contacto entre la recta y la circunferencia se le llama punto de tangencia.

Teorema: Por tres puntos distintos, no colineales, pasa una y solo una circunferencia.

Demostración: Existencia. Sean **A, B, C** tres puntos distintos y no colineales (ver figura 27); sean **m** y **m′** las mediatrices de los segmentos **AC** y **AB** respectivamente.

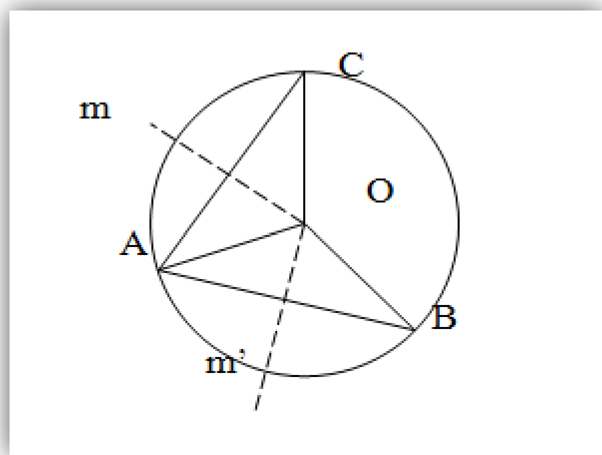


Figura 27. Existencia y unicidad de la circunferencia
Fuente: Escobar (1992,p. 156)

Existe un único punto {O} = m ∩ m′. Por las propiedades de la mediatriz se tiene que, como O ∈ m entonces OA = OC y similarmente, como O ∈ m′ entonces OA = OB, por lo tanto OA = OB = OC

Luego, O es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos A, B, C, llamémosla C (O, r).

Unicidad: Supongamos que por los puntos A, B, C pasa otra circunferencia C (O′, r′); como O′A = O′B entonces por las propiedades de la mediatriz O′ ∈ m′ y como O′A = O′C entonces O′ ∈ m, luego {O′} = m ∩ m′ y como {O} = m ∩ m′ entonces O′≡ O y por tanto r′ = r. De esta manera hemos concluído que C (O, r) ≡ C
(O′, r′)

Construcción básica: por tres puntos dados, distintos y no colineales, trazar con regla y compás, una circunferencia.

Para la construcción de la figura 27, seguiremos los siguientes pasos:

- Trazo mediatriz m´ de AB
- Trazo mediatriz m de AC, la cual corta a m´ en O.
- Con centro en O y radio $\overline{OA}$ trazo una circunferencia, esta es la circunferencia pedida.

Justificación: Como O pertenece a las mediatrices m´y m, entonces $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

3.2. LA CIRCUNFERENCIA DESDE EL CUADRO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría analítica surge de la necesidad de resolver problemas para los que no bastaba la aplicación aislada de las herramientas del álgebra y de la geometría euclidiana, pero cuya solución se encontraba en el uso combinado de ambas. En este sentido, podemos entender a la geometría analítica como la parte de las matemáticas que relaciona y fusiona el álgebra con la geometría euclidiana para crear una nueva rama que estudia las figuras geométricas, referidas a un sistema de coordenadas, por métodos algebraicos.

La geometría analítica se entiende como "la aplicación del álgebra simbólica al estudio de problemas geométricos mediante la asociación de curvas y ecuaciones indeterminadas en un sistema de coordenadas" (González 2007, p.207)

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro. La distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia es el radio. Se dan coordenadas, se ubica el punto medio de un segmento (dos puntos), se halla la distancia entre dos puntos, se considera tambien la perpendicular de una recta y se busca la ecuación de la circunferencia

Para la definición de nuestro objeto de estudio circunferencia desde la geometría analítica tomaremos en cuenta el texto de Vera (2003):

Definición.- Dado el punto C (h, k) y la distancia $r > 0$, la circunferencia de centro C y radio r es el conjunto de puntos P(x, y) del plano que satisface la condición distancia (P, C) = r, condición que se expresa a través de la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Dicha ecuación es1a ecuación cartesiana de 1a circunferencia de centro e1 origen y radio *r*.

Desarrollando la ecuación, vemos que las circunferencias están formadas por los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, donde $A = -2a$, $B = -2b$, $C = a^2 + b^2 - r^2$.

Las circunferencias pueden ser reconocidas inmediatamente de la ecuación general de una cónica cuando los coeficientes de x^2 e y^2 son del mismo signo y el mismo valor y se satisface una condición para C de modo que se garantiza que no s etrata de un punto ni del conjunto vacío.

Es decir, esa ecuación podría corresponder a la representación del vacío, si por ejemplo se tiene lo siguiente:

$x^2 + y^2 + 8 = 0$ que equivale a decir $x^2 + y^2 = -8$

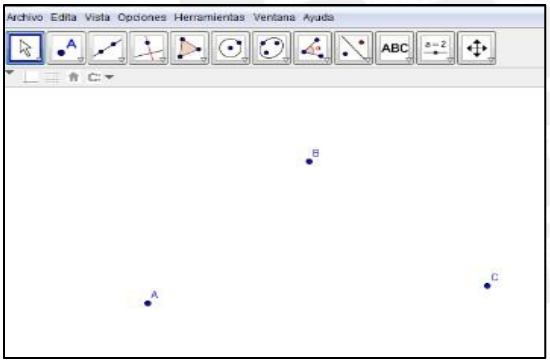
En la geometría analítica se trabaja con valores reales y se realizan cálculos algebraicos que complementan las representaciones en el plano, teniendo en cuenta algunas fórmulas que simplifican los cálculos como la fórmula de distancia entre puntos, punto medio, etc.

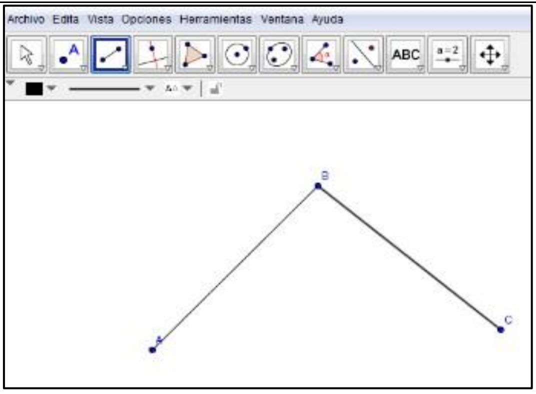
3.3. ALGUNOS EJEMPLOS DE PROBLEMAS SOBRE CIRCUNFERENCIAS QUE PUEDEN DESARROLLARSE EN AMBOS CUADROS

En esta parte de nuestra investigación presentaremos algunos problemas sobre circunferencia que pueden abordarse desde la geométria sin coordenadas (sintética) y la geometría con coodenadas (analítica). Esto permitirá encontrar similitudes y diferencias.

Algunos de estos ejemplos serán considerados como parte de las actividades de la experimentación que se llevará cabo con estudiantes del quinto grado de secundaria.

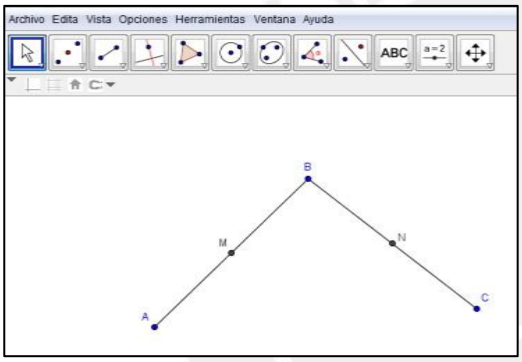
Tabla 4. Ejemplos de problemas desarrollados en Geometría Sintética y Analítica

GEOMETRIA SINTÉTICA	GEOMETRÍA ANALÍTICA
Enunciado del problema 1: Dados 3 puntos construir la circunferencia que pasa por ellos. **Paso 1:** Grafica 3 puntos cualesquiera en el plano identificándolos como corresponde.  **Paso 2:** Une los puntos A y B con un segmento. Haz lo mismo con los puntos B y C	**Enunciado del problema 1:** Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos distintos, no colineales en el plano Supongamos que la circunferencia a describir pasa por los puntos (0,0), (3,1) y (5,7). Sustituimos para cada uno x e y en la ecuación general de la circunferencia: $x^2+ y^2+Dx+Ex+F = 0$ $(0,0)\Rightarrow 0^2+0^2+A.0+B.0+C=0$ $(3,1)\Rightarrow 3^2+1^2+A.3+B.1+C=0$ $(5,7)\Rightarrow 5^2+7^2+A.5+B.7+C=0$ Debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones para incógnitas A, B y C. $C=0$ $9+1+A.3+B.1+C=0$ $25+49+A.5+B.7+C=0$ Primero sustituimos el valor de C en las

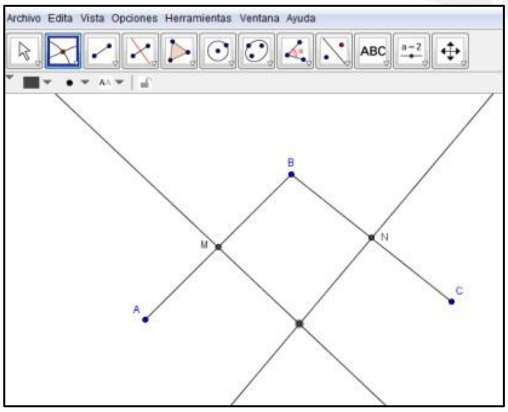


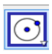
.

Paso 3: Ubica el punto medio del segmento AB utilizando las herramientas del GeoGebra. Haz lo mismo para ubicar el punto medio BC



Paso 4: Traza la mediatriz de AB y BC utilizando la herramienta  marca la intersección de la dos mediatrices. Circuncentro



Paso 5: Utilizando la herramienta centro y punto  dibuja una circunferencia con demás ecuaciones y resolvemos un sistema de dos ecuaciones lineales

10+3A+B=0

74+5A+7B=0

$A=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

Entonces sustituimos el valor de A obtenido en la expresión

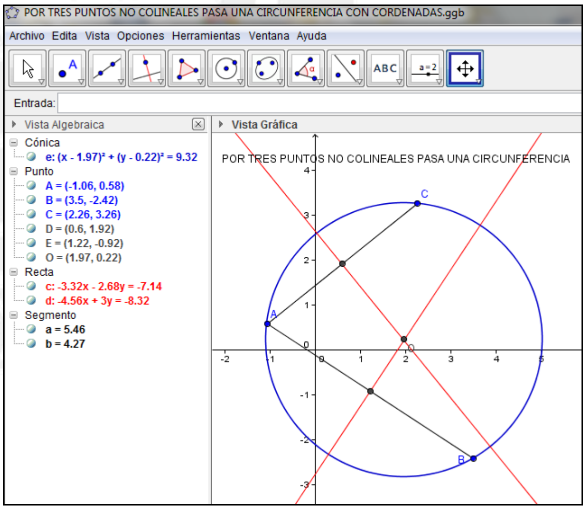
B=−10−3A

y obtendremos que:

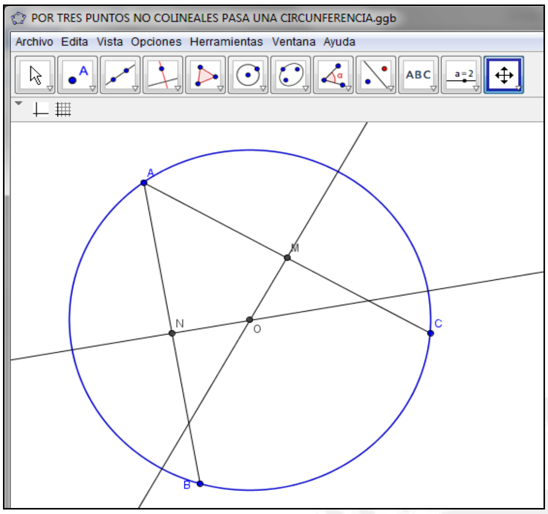
$B=-\frac{43}{4}$

Así pues ya conocemos cada uno de los parámetros que nos determinan la circunferencia, por lo tanto podemos escribir la ecuación:

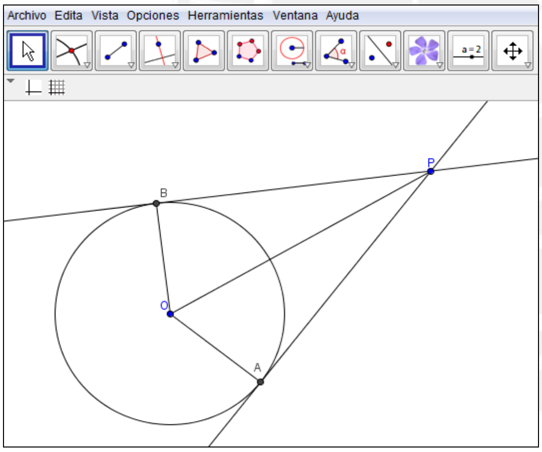
$$\mathbf{x^2+y^2+\frac{1}{4}x-\frac{4}{43}=0}$$



centro en la intersección de las mediatrices y que pase por el punto A.



Enunciado del problema 2: Dada una circunferencia y un punto exterior sobre ella, se pide construir las rectas tangentes a la circunferencia por dicho punto.



Hipotesis: O es el centro de la circunferencia PB y PA son tangentes.

Tesis: 1) PB ≈ PA

2) < BPO ≈ <APO

Demostración:

1. **Hipótesis:** Los radios son perpendiculares a las tangentes en su punto de tangencia.

   OB⊥PB y OA ⊥ PA

Enunciado del problema 2: Dada la ecuación de una circunferencia y las coordenadas de un punto exterior sobre ella. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia por dicho punto.

Paso 1: De la ecuación de la circunferencia y de la recta tenemos lo siguiente:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots.(1)$$

$$y = mx + b\ldots....(2)$$

Paso 2: Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$x^2 + (mx + b)^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2 x^2 + 2mbx + b^2 = r^2$$

$$(1+ m^2)x^2 + 2mbx + (b^2 - r^2) = 0\ldots.(3)$$

Paso 3: Resolviendo con la ecuación cuadrática tenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(2mb) \pm \sqrt{(2mb)^2 - 4(1+m^2)(b^2 - r^2)}}{2(1+m^2)}$$

Paso 4: Para que la ecuación anterior de un solo valor para "x", y por lo tanto un único punto de tangencia, se debe cumplir:

2. Por ser radios de la misma circunferecia OA ≈ OB 3. Propiedad reflexiva OP ≈ OP 4. De 1,2,3 cateto – hipotenusa ΔPBO ≈ ΔPAO 5. De 4 por ser lados correspondientes en triángulos congruentes PB ≈ PA 6. De 4 por ser ángulos correspondientes en triángulos correspondientes < BPO ≈ <APO	$(2mb)^2 - 4(1 + m^2)(b^2 - r^2) = 0$ $4m^2b^2 - 4(b^2 - r^2 + m^2b^2 - m^2r^2) = 0$ $4m^2b^2 - 4b^2 - 4r^2 + 4m^2b^2 - 4m^2r^2 = 0$ $-4b^2 + 4r^2 + 4m^2b^2 = 0$ $-4b^2 + 4r^2(1 + m^2) = 0$ $-b^2 + r^2(1 + m^2) = 0$ $b^2 - r^2(1 + m^2) = 0$ **Paso 5:** Esta última ecuación es la condición que toda recta de la forma y = mx + b debe cumplir para ser una recta tangente a una circunferencia con centro en el origen. Determinando “b”: $b^2 - r^2(1 + m^2) = 0$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $\sqrt{b^2} = \sqrt{r^2(1+m^2)}$ $b = \sqrt{r^2}\sqrt{(1+m^2)}$ $b = r\sqrt{(1+m^2)}$ **Paso 6:** Por diferencia de cuadrados tenemos lo siguiente: $(b + r\sqrt{(1+m^2)})(b - r\sqrt{(1+m^2)} = 0$ $(b + r\sqrt{(1+m^2)}=0$ ó $(b - r\sqrt{(1+m^2)}=0$ $b = -r\sqrt{(1+m^2)}$ ó $b = +r\sqrt{(1+m^2)}$ Por lo tanto las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia : $x^2+y^2= r^2$ son: $y= mx-r\sqrt{(1+m^2)}$; $y= mx+r\sqrt{(1+m^2}$

Los ejemplos presentados en la tabla 4 tienen sentido en ambos cuadros, sin embargo, se pueden apreciar que los procedimientos de solución son de naturaleza es distinta. Así, mientras que en el cuadro de la geometría analítica se desarrollan los problemas recurriendo a nuevos procedimientos algebraicos y a las representaciones algebraicas adecuadas a punto medio, mediatriz, intersección de rectas, ecuación de rectas, ecuación de la circunferencia, sistema de ecuaciones y de pendiente, en la geometría sintética se requiere los conocimientos básicos de geometría plana, definiciones, axiomas y postulados y se recurre a procedimientos geométricos para los problemas en la tabla 6 se puede notar que, si bien los procedimientos empleados en geometría sintética son mas breves, requieren de una mayor comprensión de cada paso que se realiza.

Por nuestra parte podemos sugerir que seria muy interesante combinar los procedimientos para poder crear desequilibrios en los estudiantes de manera que realicen la transferencia e interpretación en un cuadro y sea necesario reequilibrarlos con la ayuda de otro cuadro. De esta manera podemos abordar un problema de geometría analítica donde sea necesario hacer uso de la geometría sintética para su comprobación, hechos que deberían dar más sentido a lo que los estudiantes realicen y confirmar su aprendizaje adecuadamente.

De otro lado, consideramos que el GeoGebra podría jugar un papel muy importante, pues permitiría confirmar que las construcciones realizadas cumplen las condiciones dadas.

A través de la presente investigación se explorará de qué manera se ven influenciados los aprendizajes de los estudiantes cuando abordan los mismos problemas sobre circunferencias en cuadros distitntos y cuando además se complementan los procedimeintos empleados en ellos.

CAPÍTULO 4: DISEÑO DE ACTIVIDADES DESDE LOS CUADROS DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTTICA

En esta parte de la tesis responderemos a la pregunta qué actividades sobre circunferencia tienen sentido en los cuadros de la geometría sintética y de la geometría analítica y pueden abordarse con estudiantes de quinto grado de educación secundaria.

Para ello, debemos considerar los prerequisitos para el nuevo aprendizaje, por lo que se considerará una sesión previa en la que se revisarán temas necesarios para abordar los problemas sobre circunferencias.

4.1. DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES Y USO DEL SOFWARE GEOGEBRA

Nuestras actividades serán diseñadas de acuerdo a nuestro objetivo de investigación:

En la sesión 1 se tendrán que recordar algunos saberes previos que deberían tener los estudiantes los cuales implementaremos en esta primera sesión sobre los temas de: distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, ecuaciones de la recta: punto medio, pendiente, ordenada en el origen y ecuaciones de la circunferencia. Estos temas serán pre requisitos para el desarrollo de las actividades planteadas.

Por otro lado, los estudiantes deberán familiarizarse con el uso del software GeoGebra y en la sesión 2 se presentará el programa GeoGebra, los procedimientos básicos que ofrece y se incidirá en las herramientas que ofrece para tratar a las circunferencias.

La sesión 3 es la sesión central de la experimentación pues en ella los estudiantes desarrollarán las actividades planteadas. Se enfentarán a 4 problemas que han sido diseñados.

Finalmente, en la última sesión, se aplicarán las actividades sobre circunferencia diseñadas con la intención que los estudiantes establezcan conexiones entre los cuadros de la geometría sintética y geometría analítica; algunas de ellas se abordarán con apoyo del software GeGebra.

Analizaremos el efecto que tendrá la aplicación de actividades sobre circunferencias que exijan establecer conexiones entre los cuadros de la geométria sintética y la geometría analítica.

Tambien analizaremos el efecto de emplear el software GeoGebra como mediador en el aprendizaje del objeto circunferencia en los estudiantes del quinto grado de educación secundaria.

En base a nuestra metodología seleccionamos el caso y en torno a este, se cosntruyen cuatro 4 problemas que serán desarrolladas por los estudiantes.

La primera actividad se desarrollará únicamente en el cuadro geométrico con ayuda del software GeoGebra; la segunda actividad corresponderá al problema equivalente al de la actividad 1 pero será planteada en el cuadro de geometría analítica. La tercera actividad se desarrollará también en el cuadro de geometría analítica, pero empleando resultados y métodos geométricos, además de los algebraicos. Finalmente la cuarta actividad permitirá que los estudiantes refuercen los procedimientos empleados en la actividad 3 pero ahora con apoyo del programa de geometría dinámica.

Los problemas diseñadas para los estudiantes del 5ª grado de secundaria fueron elaboradas en base a la teoría de juego de cuadros en la que se establece que los estudiantes pueden realizar un mejor aprendizaje si se les hace transitar por cuadros matemáticos diferentes; asì mismo, el docente debe tener la habilidad de provocar o presentar problemas donde su resolución debe tener en su desarrollo el juego de cuadros. De esta manera se espera que reconozcan la ventaja al emplear algunos métodos geométricos en contextos de la geometría analítica ya que de esa manera los procedimientos seguidos adquirirían mayor significado y relevancia en su aprendizaje.

A continuación se muestra los problemas que desarrollaran los estudiantes:

Problema 1: Dados 3 puntos no alineados A, B y C en el plano, dibuja una circunferencia que pase por ellos. Utilizando el software GeoGebra.

En este problema los estudiantes son confrontados al cuadro de la geometría sintética que les permitirá recordar cuales son los procedimientos propios de este cuadro como son la construcción de: segmentos, punto medio de segmetos, rectas perpendiculares, mediatrices, intersección de mediatrices y el ortocentro respectivamente. En este problema se utiliza el software GeoGebra y consta de 5 pasos a seguir para construir la circunferencia finalmente.

Problema 2: Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A (2,3), B (6,11) y C (12,5). Con coordenadas.

Este problema tiene por objetivo realizar una circunferencia partiendo desde 3 puntos conocidos no colineales, este problema es equivalente al problema anterior, pero su procedimiento es propio de la geometría analítica, utilizando lápiz y papel realizan sus calculos correspondientes, el cual demandara un trabajo algebraico, la solución se realiza tomando encuenta 8 preguntas para la obtención de la ecuación de la circunferencia.

Problema 3: Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (2,3), B (6,11), C (12, 5). Con coordenadas

En este problema los estudiantes son confrontados al cuadro de la geometría analítica, el problema es idéntico al anterior lo que varia es la secuencia de los pasos seguidos que serán de acuerdo al problema 1, ahora los estudiantes son obligados a realizar el juego de cuadros entre la geometría sintética y la geometría analítica, los procesos son equivalentes pero se sirven del primer cuadro para llegar a la respuesta en otro cuadro, para esta resolución debo tomar en cuenta 7 preguntas de proceso, con los cuales deben llegar a establecer sus respuestas correctas. Teniendo en cuenta que no todos llegaran a la respuesta final puesto que deberan seguir una secuencia lógica y habra algunos que no lleguen a culminar adecuadamente todo el procedimiento.

Problema 4: Estimado estudiante, reproduce la secuencia de solución que acabas de hacer en el problema 3 pero esta vez usando el software GeoGebra.

Este problema esta previsto para confirmar si los estudiantes tuvieron algunos errores en el problema anterior, los estudiantes son confrontados con el software GeoGebra y lo desarrollado en el problema 3, con lo cual estarían confirmando los puntos tomados en el problema 3 y corroborando la secuencia lógica para la obtención final de la circunferencia (solución ideal). Consta de 5 pasos a seguir.

4.2. RESPUESTAS ESPERADAS A LAS ACTIVIDADES DISEÑADAS

El primer problema se pretende que los estudiantes realicen todo el proceso con puntos sin coordenadas es decir en la geometría sintética, rescatando en ellos los conocimientos básicos de geometría como son construcción de: segmentos, punto medio, perpendicularidad, mediatriz y ortocentro.

Luego se espera que establezcan correspondencias imperfectas al producirse algunos desequilibrios ya que su resolución implica recordar algunos fundamentos básicos de la geometría, por ejemplo en la pregunta 2 de esta actividad recordar la unión de 2 puntos generan un segmento, desde los puntos extremos de referencia se pueden determinar sus puntos medios, el trazado de las mediatrices y la intersección entre ellas con la cual estarían originado el circuncentro.

Se espera una mejora en las correspondencias y un progreso de su conocimiento al trabajar con el GeoGebra ya que con esta herramienta los estudiantes podrán confirmar sus resultados. En ese proceso, el programa les debe servir como un cuadro auxiliar, como factor de reequilibrio que les permita comprender lo que están realizando. En particular, al utilizar las herramientas del programa y obtener la circunferencia que pasa por los tres puntos no colineales basándose en propiedades geométricas.

Al realizar el problema 2 los estudiantes tiene que recurrir necesariamente al plano cartesiano donde pueden identificar las coordenadas de los tres puntos, aquí se poducirá la transeferencia e interpretación haciendo todo ello con lápiz y papel (dibujando el eje de coordenadas) en el cuadro geométrico. En la pregunta 2 de este problema se recuerdan la ecuación de la circunferencia en sus tres formas: canónica, ordinaria y general. Puesto que los estudiantes tendrán algunos conocimientos insuficientes (correspondencias imperfectas), para luego mejorar sus conocimientos recurriendo con ello al cuadro algebraico donde los estudiantes experimentan un reequilibrio en las preguntas 3, 4 y 5 donde se les pide que reemplacen las coordenadas graficas anterioemente en la ecuación ordinaria de la circunferencia. Aquí el estudiante también tendrá que tener el factor de reequilibrio puesto que recurrirá al cuadro algebraico y realizar los calculos respectivos en las preguntas 6 y 7 específicamente. Luego en la pregunta 8 llegará a reestructurar sus conocimientos para poder determinar la solución produciéndose a la mejora de sus correspondencias con reequilibrios y el progreso de sus conocimientos.

En el problema 3 se empieza a tomar en cuenta el cuadro de lña geometría analítica con lo que los estudiantes estarían realizando un correcto cuadro y verificando la tranferencia e interpretación de sus conocimientos en: ecuación de una recta en las preguntas 1 y 2; luego, los estudiantes hallan las coordenadas del punto medio, la ecuación de la mediatriz y la intersección de sus puntos medios.

Por otro lado, esperamos ocurran las correspondencias imperefectas (intentos fallidos o no) creando desequilibrios en las convicciones de los estudiantes con lo que ellos saben. Esperamos que alguno de ellos se apoye en cuadros auxiliares para poder desarrollar las preguntas 3, 4, 5 y 6 respectivamente.

Mejorando con ello sus conocimientos y determinar al final cual será la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.

En el último problema lo que pretendemos es que los estudiantes comprueben sus resultados de una manera grafica y con la ayuda del programa GeoGebra, lo que les permitirá a ellos realizar una correcta transferecia e interpretación de sus conocimientos y mediante ello provocarles algunos desequilibrios que puedan encontrar de manera gráfica e interactiva, verificando sus respuestas correctas, en esta parte los estudiantes transitaran por cuadros axiliares que los apoyaran en realizar una correcta interpretación en el cuadro geométrico sintético y el cuadro geométrico analítico.

Esperamos que los 4 problemas planteados produzcan interacciones entre cuadros y permitan el progreso de los conocimientos de los estudiantes, realizando correctamente las fases de nuestra teoria de juego de cuadros: Transferencia e interpretación, correspondencias imperfectas y con ello el progreso de sus conocimientos. Mientras mas los estudiantes consigan realizar pasajes entre cuadros diversos, más garantizamos el éxito de sus aprendizajes.

Es importante en el área de matemática que su enseñanza proponga situaciones que favorezacan cambios de cuadros en el estudiante y con ello deba conseguir leer los problemas en un determinado cuadro interpretandolo, resolviéndolo y pensando en cuadros diferentes.

Debemos considerar que las actividades están también girando en la metodología utilizada que viene a ser el estudio de casos y la secuencia de las mismas están en base a las etapas de recojo de información que realizamos al proponerlas a los estudiantes del quinto grado de secundaria de la I.E.I. Santo Domingo Savio del distrito de San Ramón, provincia de Chanchamayo, región Junín donde aplicamos nuestros instrumentos.

4.2.1. DESCRIPCIÓN DEL CASO Y LO QUE SE ESPERA DE LOS ESTUDIANTE

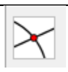
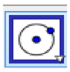
En la siguiente sección presentamos los problemas propuestos para los estudiantes del 5° grado de educación secundaria en los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica. En el problema 1 se desarrollara en el cuadro de la geometría sintética (sin coordenadas) mediado por el software GeoGebra, en el problema 2 y 3 se desarrolla en el cuadro de la geometría analítica, finalmente en el problema 4 se presenta la verificación del problema 3 mediado por el software GeoGebra.

Problema 1: Dados 3 puntos no alineados A, B y C en el plano, dibuja una circunferencia que pase por ellos. Sin cordenadas

En esta actividad los estudiantes son confrontados a un problema formulado en el cuadro de la geometría sintética. Utilizando el software GeoGebra llegarán a construir la circunferencia.

Tabla 5. Dados 3 puntos no alineados A, B y C obtener una circunferencia

PASOS A SEGUIR EN LA SOLUCION	RESULTADOS ESPERADOS
Paso 1: Grafica 3 puntos cualesquiera en el plano identificándolos como corresponde. **Paso 2:** Une los puntos A y B con un segmento. Haz lo mismo con los puntos B y C. **Paso 3:** Ubica el punto medio del segmento AB utilizando las herramientas del GeoGebra. Haz lo mismo para ubicar el punto medio BC **Paso 4:** Traza la mediatriz de AB y BC	Conocimiento de las herramientas punto medio, mediatriz, intersección, centro y punto en la gráfica final del GeoGebra. Se esta trabajando solo en un cuadro (geometriá sintética) Los estudiantes realizan correctamente la transferencia e interpretación de conocmientos. En esta parte, el estudiante genera una fuente de equilibrio con lo que sabe,

utilizando la herramienta  marca la intersección de la dos mediatrices. ¿Cómo se llama la intersección de las mediatrices de un triángulo ABC?.. ¿Por qué se llama así a la intersección de dichas mediatrices?……………………………… **Paso 5:** Utilizando la herramienta centro y punto  dibuja una circunferencia con centro en la intersección de las mediatrices y que pase por el punto A. ¿Esta circunferencia será la solución del problema?	puesto que solo se esta trabajando en el cuadro de la geometría sintética, es decir, no es necesario llegar a las correspondencias imperfectas, porque solo tendrá que recurrir a sus conocimientos de base. A hacer uso de las herramientas del GeoGebra, creemos que los estudiantes realizarán la reequilibración que ayudará a la mejora de sus aprendizajes y, por ende, al progreso de su conocimientlo. Los estudiantes estarían en un correcto cuadro, determinando para ello sus conocimientos previos y mejorando el mismo con la ayuda de las herramientas del software Geogebra. Las interacciones entre cuadros auxiliares como el GeoGebra permitirán el progreso de los aprendizajes de los estudiantes.

Problema 2: Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A (2,3), B (6,11) y C (12,5) Con coordenadas

Esta actividad tiene por objetivo realizar una circunferencia partiendo desde 3 puntos conocidos no colineales (ubicando sus coordenadas respectivas), utilizando la resolución en el cuadro de la geometría analítica y recordando los tipos de ecuación de la circunferencia.

Tabla 6. Ecuación de la circunferencia que pase por A (2,3), B (6,11) y C (12,5)

PASOS A SEGUIR EN LA SOLUCION	RESULTADOS ESPERADOS
Paso 1: Ubica los tres puntos en el plano cartesiano. **Paso 2:** Recuerda la forma que tiene la ecuación de una circunferencia **Paso 3:** ¿Qué faltaría hallar para que esa ecuación esté bien definida? **Paso 4:** ¿Es cierto que el punto A satisface la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$?	Los estudiantes ubican correctamente los puntos en el eje de coordenadas y siguen con los pasos establecidos, produciendose la fase de transferencia e interpretación de conocimientos. Los estudiantes trabajarán en el cuadro de la geometría analítica (Transferencia e interpretación). En los pasos 2 y 3 se recuerda la ecuación de la circunferencia desde el cuadro algebraico, los estudiantes se

Paso 5: ¿Cómo se reemplazarián las coordenadas de A en la ecuación? Paso 6.- Procede de manera similar con B y C **Paso 7:** ¿Qué deberías hacer para hallar los valores de h, k, r? **Paso 8:** ¿En esta solución se han usado propiedades geométricas?	encontrarán trabajando en el cuadro de la geometría analítica. 4, 5, 6 y 7 se producen las correspondencias imperfestas logrando el desequilibrio en su conocimiento. Pero una vez que ellos reemplazan las coordenadas de cada punto en la ecuación de la circunferencia con lo cual se esta trabajando en el cuadro de la geometría analítica, generando desequilibrios en los conocimientos de los estudiantes para poder ubicarlos adecuadamente. Los estudiantes en esta actividad estarían recurriendo a los cuadros algebraicos y de la geometría analítica con lo que mejorarían las correspondencias y el progreso de su conocimiento. Este último permitirá ser un factor de reequilibrio para lograr mejora de las correspondencias. Mientras los estudiantes consigan realizar pasajes entre cuadros, mas garantizados de conseguir el éxito en sus aprendizajes se tendrá

Problema 3: Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (2,3), B (6,11), C (12, 5)

Esta actividad tiene por objetivo realizar una circunferencia partiendo de tres puntos conocidos, utilizando la geometría analítica y recordando la obtención de punto medio, pendiente, distancia entre dos puntos, ecuación de una recta, ecuación de la circunferencia y sistema de ecuaciones.

Tabla 7. Ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A (2,3), B (6,11) y C (12,5) en el cuadro de geometría analítica

PASOS A SEGUIR EN LA SOLUCION	RESULTADOS ESPERADOS
Paso 1: Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y B **Paso 2:** Hallar la ecuación de la recta que pasa por B y C	En 1, 2 y 3 los estudiantes al hallar las ecuaciones de la recta y las coordenadas del punto medio estarían trabajando en el cuadro de geometría analítica lo cual

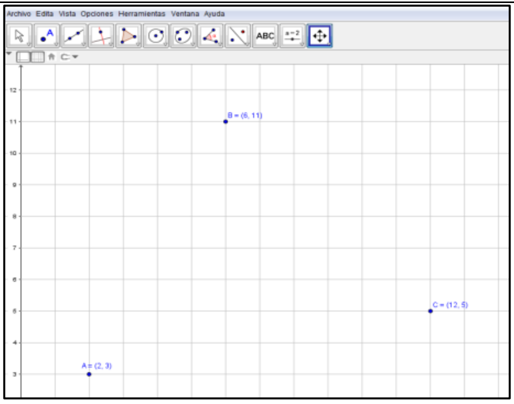
Paso 3: Hallar las coordenadas del punto medio de AB. Hacer lo mismo para hallar las coordenadas del punto medio de BC. **Paso 4:** Hallar la ecuación de la mediatriz de AB y la ecuación de la mediatriz de BC. **Paso 5:** Encontrar las coordenadas del punto de intersección de ambas mediatrices **Paso 6:** Hallar la distancia de A al punto encontrado en el paso anterior **Paso 7:** ¿Cuál será la ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y C.	seria la fases de transferencia e interpretación adecuada. En 4, 5 y 6 los estudiantes recordarían temas nuevos con lo cual estarían generando un desequilibrio en sus conocimientos, lo que daría origen a las correspondencias imperfectas. En la pregunta 7 se pretende generar un reequelibrio utilizando el sistema de ecuaciones en el mismo cuadro de la geometría analítica. Nos parece trascendental e importante que la enseñanza proponga situaciones que favorezcan cambios de cuadros y reequilibrios con actividades que ayuden a resolver, pensar e interpretar un problema.

Problema N° 4: Reproduce la secuencia de solución que acabas de hacer en el problema anterior pero esta vez usando el software GeoGebra

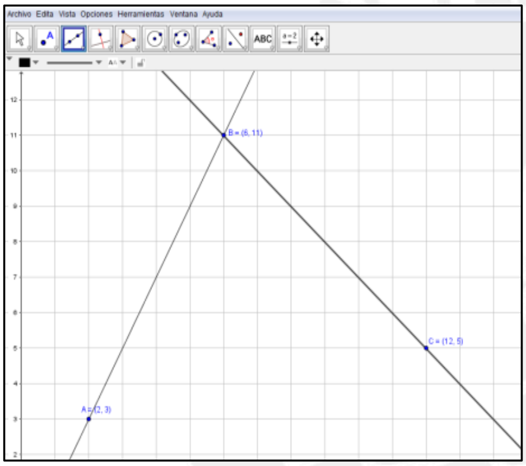
Esta actividad tiene por objetivo realizar la secuencia del problema 1 hecha con el software GeoGebra, confirmando los puntos tomados en el problema 3 y verificando su secuencia para la obtención final de la ecuación de la circunferencia (solución ideal).

Tabla 8. Ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A (2,3), B (6,11) y C (12,5) usando el software GeoGebra

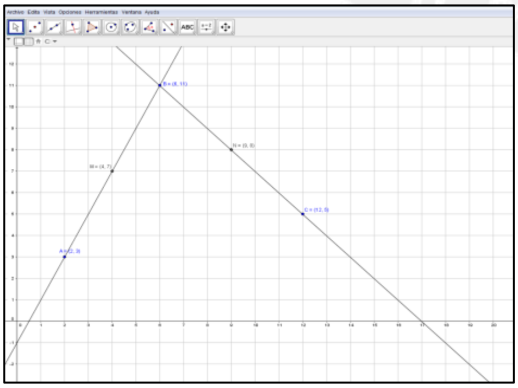
PASOS A SEGUIR EN LA SOLUCION	RESULTADOS ESPERADOS
Paso 1: Grafica 3 puntos cualesquiera en el plano cartesiano identificándolos como se muestra en la figura A (2,3) B (6,11), C (12,5)	**1.-** Los estudiantes deben tener conocimientos del cuadro geométrico analítico. Realizando la correcta transferencia e interpretación puesto que ello se ve mejorada con las herramientas del GeoGebra donde se reflejan los



Paso 2: Une los puntos A y B con una recta. Haz lo mismo con los puntos BC determinados anteriormente



Paso 3: Ubica el punto medio del segmento AB. Haz lo mismo para ubicar el punto medio de BC.



Paso 4: Traza la mediatriz de AB y de BC. Utilizando la herramienta  marca intersección de las 2 mediatrices.

conocimientos básicos en el cuadro geométrico analítico y geométrico sintético.

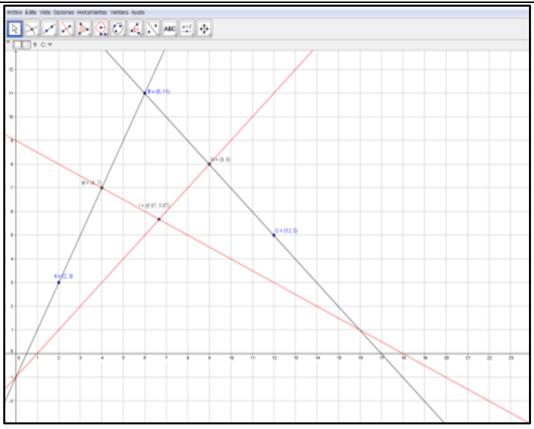
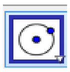
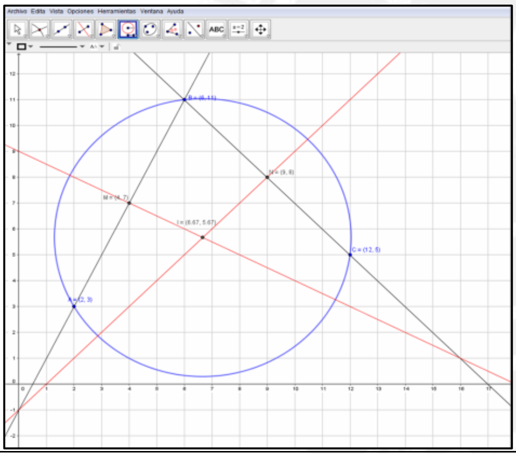
2.- Al unir los puntos con rectas se trabaja en el cuadro algebraico y geométrico, puesto que se tuvo que hallar ecuaciones y luego graficarlos, esto se realizará mas fácil con el software GeoGebra mejorando los desequilibrios y con la ayuda de estas herramientas auxiliares se vuelven a reequilibrar para lograr resolver el problema.

En **3** y **4**.-La ubicación de los puntos medios y las mediatrices se realizará de manera sencilla con las herramientas del GeoGebra, sin dejar de lado la ubicación gráfica y sus ecuaciones respectivas.

5.- Al producirse los desequlibrios de los estudiantes por algún aspecto que no hayan entendido se estaría hablando de las correspondencias imperfectas, las que se ven reforzadas con el uso de un cuadro auxiliar el software GeoGebra, volviendo al reequilibro y por ende la mejora de las coorespondencias, determinándose con ello el progreso del conocimiento.

Las interpretaciones geométricas, algebraicas y sus interacciones entre los cuadros garantizan el éxito de la tarea.

Es muy importante que la enseñanza proponga situaciones que favorezcan estos cambios de cuadros para que el

 **Paso 5:** Utilizando la herramienta centro y punto  de una circunferencia con centro en la intersección de las mediatrices y que pase por los puntos A, B y C. 	estudiante pueda transitar, pensar, interpretar, resolver en uno y otro cuadro problemas con lo cual garantiza el éxito de las actividades propuestas para esta ocasión.

Estas preguntas son parte de las actividad 4, con la cual se realiza una reflexión de análisis en los estudiantes y ellos deberián responder de la siguiente manera:

¿Cuántos problemas has resuelto realmente? ¿Cuáles?

Respuesta esperada: Uno solo presentada en geometría sin coordenadas y geometría con cordenadas o Uno solo con diferentes maneras de resolverlos.

¿Encuentras alguna relación entre el procedimiento que empleaste en el problema 4 y el 2? ¿Por qué?

Respuesta esperada: Los cálculos realizados en el problema 2 se pueden comprobar con el problema 4.

Porque los pasos se refieren a un mismo problema visto que se encuentran trabajando solo en el cuadro algebraico.

¿Encuentras alguna relación entre el procedimiento que empleaste en el problema 2 y el 3? ¿Por qué?

Respuesta esperada: Si en ambos se utilizan calculos algebraicos y se desarrollan recordando temas de geometría analítica, el proceso es más tedioso e implica recordar saberes anteriores para su desarrollo. Porque ambos están trabajando en el cuadro de la geometría analítica.

¿Encuentras alguna relación entre el procedimiento que empleaste en el problema 1 y el 3? ¿Por qué?

Respuesta esperada: No porque en el problema 1 no se utilizan coordenadas y en el problema 3 si es necesario las coordenadas y calculos para llegar a la respuesta final.

Con el programa GeoGebra se realizan los problemas 1 y 4 de manera práctica como se haría utilizando herramientas tradicionales como son la regla y el compás, o con papel y lápiz. De tal manera que el estudiante pueda verificar sus construcciones hechas e inclusive poder visualizar moviendo los puntos de referencia.

Estas preguntas son para observar la diferencia entre objetos dependientes e independientes entre ambos cuadros.

Los estudiantes del quinto grado trabajan la geometría analítica como una rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas.

CAPÍTULO 5: IMPLEMENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

La experiencia se ha desarrollado con estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Integrada "Santo Domingo Savio" de la zona urbana de la ciudad de San Ramón, perteneciente a la provincia de Chanchamayo. En la presente se indica la descripción del escenario a través de las personas con quienes se aplicó la presente tesis, el diseño de actividades y se describe brevemente los instrumentos de la investigación, las características de su entorno y los instrumentos de recolección de datos.

5.1. DESCRIPCIÓN DEL ESCENARIO Y LOS SUJETOS

La Institución elegida para nuestra investigación fue la I.E.I. Santo Domingo Savio, es de gestión estatal, se encuentra en zona urbana de El Milagro y se encuentra ubicada en el distrito de San Ramón, perteneciente a la provincia de Chanchamayo, región Junín, Perú. Está institución es integrada y trabaja con dos niveles de Primaria por las mañanas y Secundaria por las tardes, con siete horas pedagógicas de lunes a viernes, la hora pedagógica considerada es de 45 minutos. La institución cuenta con dos aulas de innovación pedagógica: la primera con seis computadoras que no están operativas y la segunda que cuenta con 20 equipos XO donadas por el gobierno regional de Junín. El trabajo se realizo en el primer centro de cómputo, puesto que, cuenta con enchufes y es apropiado para el trabajo con laptops, ya que a los estudiantes se les grabó el programa GeoGebra para poder desarrollar nuestras actividades. Es bueno precisar que los estudiantes tuvieron sesiones de clases para establecer los conocimientos previos de geometría analítica y otro para que puedan familiarizarse con el software GeoGebra.

Características generales de los estudiantes

La investigación se aplicó a los estudiantes del quinto grado de educación secundaria del turno tarde, de la I.E.I. "Santo Domingo Savio". Las edades de los estudiantes fluctúan entre quince y decisiete años. No hay alumnos repitentes y la mayoría de ellos son estudiantes matriculados en el plantel desde el primer grado de educación secundaria e inclusive alguno de ellos desde el nivel primario puesto que, la institución es integrada.

Hay una única sección de quinto de secundaria.

En la Tabla 4 presentamos las características de los estudiantes de dicha clase.

Tabla 9. Estudiantes por género del 5° grado de secundaria de la I.E.I. “SDS”

	Mujeres	Porcentaje de mujeres	Hombres	Porcentaje de hombres	Total
Participaron de la implementación	06	18,75	04	12,5	10
No participaron de la implementación	06	18,75	16	50	22
Total	12	37.5	20	62,5	32

Los estudiantes no habían trabajado previamente con el tema circunferencia, ni el tema de pendientes y punto medio desde la Geometría Analítica. De otro lado, los docentes del curso manifiestan que no emplean el libro distribuido por el MINEDU con frecuencia y que en su lugar, utilizan textos de otros autores. En cuanto al software GeoGebra manifiestan que no lo conocen y por lo tanto no lo utilizan para su trabajo en el área de matemática.

Características académicas de los estudiantes

Los estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria, sujetos de nuestra investigación, sólo revisaron algunos temas de circunferencia como definición y elementos en el segundo grado de secundaria pero desde la perspectiva de la geometría sin coordenadas. De otro lado, el tema de rectas y segmentos fue estudiado en tercero de secundaria, es decir, hace ya bastante tiempo, lo que no pemritirá enlazar los prerrequisitos del tema circunferencia que se abordarán en quinto grado. Ahora, en quinto grado de E.S., los estudiantes han trabajado trigonometría y van a iniciar con el tema de geometría analítica, pero no con el tema de circunferencia.

Por lo expuesto, consideramos una sesión para desarrollar los pre-requisitos y una segunda sesión de familiarización con el software GeoGebra.

Los estudiantes seleccionados para nuestra investigación, fueron 04 de la zona urbana los que asistieron los días 11, 12 y 13 de agosto en la aplicación de los instrumentos, posteriormente para complementar se culminó el 24 de agosto con las actividades 1, 2, 3 y 4.

Tenemos que precisar que los estudiantes trajeron sus laptops a las clases y en sus computadoras se les uinstaló el programa Geogebra.

Por otro lado, se optó por un trabajo individual para algunas actividades y otras en parejas.

Características del docente investigador

El profesor investigador, que realizó la experiencia, es egresado de la Universidad Nacional Federico Villareal y tiene la especialidad de Matemática y Física. Trabajó en la I.E.I.”Santo Domingo Savio” desde el año 2008 hasta el 2014 y en el año 2015 fue nombrado Director de la I.E.I. “Uchubamaba”. Posee estudios de postgrado en Administración de la Educación y lo que es aún más importante ganador de la beca “Presidente de la República” para realizar sus estudios de posgrado en la mejor Universidad del país Pontificia Universidad Católica del Perú en la mención de Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas por la cual presenta la presente tesis y su respectiva aplicación.

Actividades que se implementaron

Las actividades han sido graduadas desde los conocimientos básicos de la geometría, esto a su vez ha sido relacionado con nuestro objeto de estudio la circunferencia, al mismo tiempo se pudo tener como herramienta de apoyo el software GeoGebra para realizar las confirmaciones de las construcciones hechas por los estudiantes en el cuadro de la geometría sintética y lageometría analítica.

Los estudiantes al culminar de resolver los cuatro problemas planteados realizan en la última parte las preguntas de reflexión de las actividades desarrolladas. Al finalizar todo ello se les agradece por su participación activa y su dedicación demostrada.

Instrumentos que se utilizaron

Los instrumentos empleados para el recojo de la información fueron las hojas entregadas a los estudiantes con las indicaciones escritas de los problemas planteados, las preguntas realizadas al momento de realizar cada uno de los problemas, también las grabaciones hechas durante la clase, así como también las construcciones realizadas con el programa GeoGebra, ya que nos permitieron verificar las construcciones realizadas por los estudiantes.

5.2. DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

En esta parte presentamos los resultados de la investigación realizada, describiendo lo ocurrido en cada problema planteado. Se desarrollaron tres sesiones de aprendizaje con los estudiantes. En la primera se realizó una revisión de los prerrequisitos que necesitaban para el estudio de la circunferencia y en la sesión siguiente se familiarizaron con el programa GeoGebra. En ese proceso, los estudiantes tuvieron que establecer relaciones entre sus conocimientos previos y el uso del software GeoGebra.

Tabla 10. Distribución del tiempo por actividad.

DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO POR ACTIVIDAD		
N° DE SESIONES	**DIAS**	**HORAS**
Sesión 1	Martes (11-08-15)	(4pm - 5:30pm)
Sesión 2	Miercoles (12-08-15)	(1:30pm – 3pm)
Sesión 3	Jueves (13-08-15)	(2:15pm - 3:45pm)

5.3. ANALISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

A continuación, se presentan las respuestas de los estudiantes a los problemas 1, 2, 3 y 4. Acompaña a esta descripción un cuadro en donde se presentan descriptores para cada pregunta.

El caso: "Construir la circunferencia/ Obtener la ecuación de la circunferencia teniendo como datos tres puntos de paso no colineales".

Problema 1: Dados 3 puntos no alineados A, B y C en el plano, dibuja una circunferencia que pase por ellos. (Geometría sin coordenadas).

En esta actividad los estudiantes son confrontados a un problema formulado en el cuadro geométrico. Utilizando el software GeoGebra llegan a determinar la circunferencia.

Analisis de las respuestas de los estudiantes al problema 1

Se tomaron en cuenta las respuestas de cuatro estudiantes de todos los que participaron en las actividades. Ninguno mostró dificualtdes para seguir los **pasos 1, 2** y **3** puesto que se apoyaron en el sofware GeoGebra, y recordaron conceptos básicos de geometría sintética como: punto, segmento, punto medio y mediatrices.

En el **paso 4**, los cuatro estudiantes pudieron trazar las mediatrices y con la ayuda de la herramienta intersección ubicaron el CIRCUNCENTRO definiéndola adecuadamente. Señalaron que dicho punto es el centro de la circunferencia y se obtiene como intersección de las mediatrices.

En el **paso 5** al usar la herramienta centro y punto, construyeron la circunferencia que pasaba por los tres puntos no colineales y cuyo centro era exactamente la intersección de las mediatrices trazadas.

En la figura 28 se presenta la solución del estudiante XXX, en donde se observa que logró trasladar el procedimeinto realizado con el programa GeoGebra a un procedimiento de construcción con lápiz y papel.

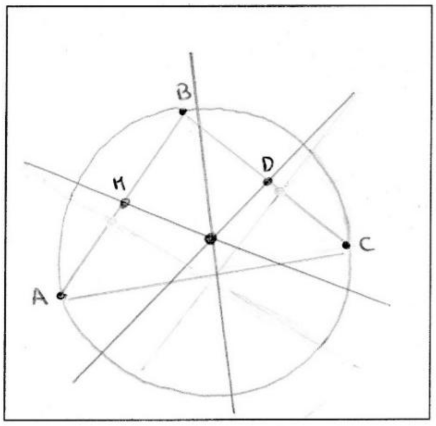


Figura 28. Resultado final de la construcciòn

Casi todos los estudiantes siguieron los pasos establecidos en la ficha de aplicación, salvo uno de ellos que no logró graficar la circunferencia adecuadamente como s emuestra en la figura 29.

Como podemos apreciar en la figura 29 uno de los estudiantes no logró realizar el correcto gráfico del resultado final utilizando lápiz y papel, pues no ubicó el centro de la circunferencia adecuadmente.
El estudiante no tiene bien graficado las medaitrices que deben formar ángulos rectos a sus lados y por tanto su respuesta no es la adecuada.

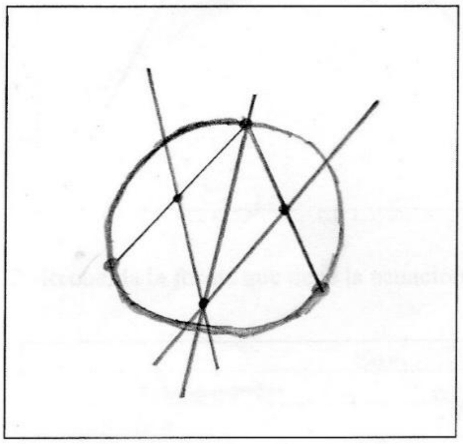


Figura 29. Resultado erróneo de la construcción

Además sólo uno de ellos logró explicar adecuadamente el procedimiento seguido. Se aprecia en la figura 30 la respuesta a la pregunta: ¿Esta circunferencia será la solución del problema? El estudiante respondió. *Sí porque hemos obtenido la circunferencia con tres puntos cualquiera trazando mediatrices*. En esta parte el estudiante debió precisar que la intersección de las mediatrices da origen al circuncentro, que viene a ser el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos no colineales.

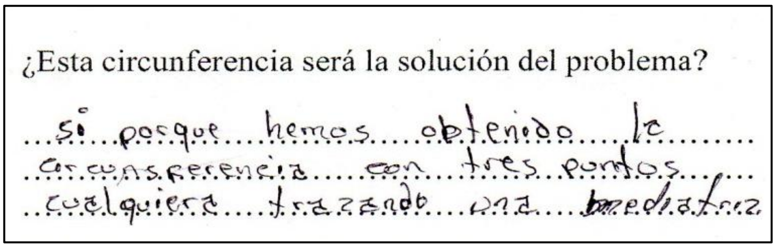


Figura 30. Respuesta final a la solución del problema 1

Al resolver este problema los estudiantes trabajaron en el cuadro de la geometría sintética (geometría sin coordenadas). De acuerdo al enfoque teórico adoptado, los proceidmientos realizados los ubican en la fase de transferencia e interpretación, puesto que utilizaron sus conocimientos geométricos y trabajaron solo en dicho cuadro.

Problema 2: Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A(2,3), B(6,11) y C(12,5). (Geometría analítica).

Esta actividad tenía por objetivo que los estudiantes obtuvieron la ecuación de una circunferencia a partir de 3 puntos de paso conocidos y no colineales. Para ello debían recurrir a una solución en el cuadro algebraico y recordar la ecuación de la circunferencia.

Análisis de las respuestas de los estudiantes al problema 2

En el **paso 1** fueron tres estudiantes los que lograron ubicar exactamente los puntos A, B y C con sus respectivas coordenadas, identificando que en este problema se trabaja con datos precisos.

Como podemos apreciar en la figura 31 los estudiantes lograron realizar la ubicación correcta en el plano cartesiano, precisando los valores con los que trabajarán, es decir no ubico el centro de la circunferencia adecuadmente y por lo tanto su respuesta no es la adecuada.

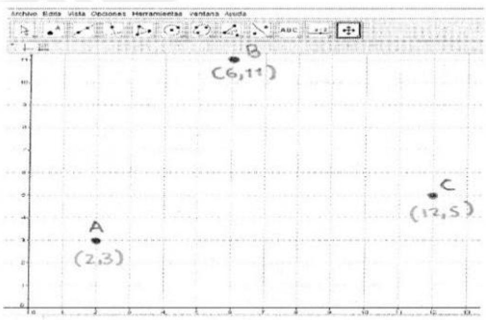
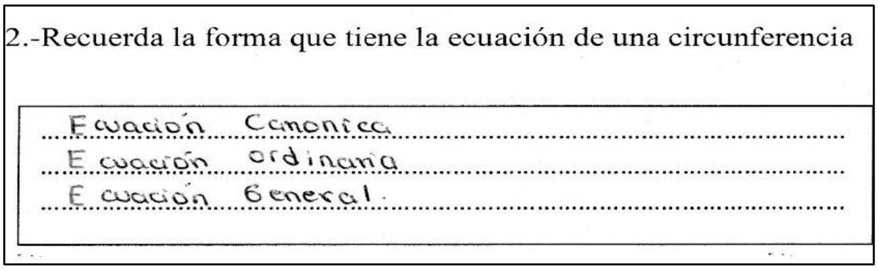


Figura 31. Ubicación adecuada de las coordenadas

Debemos mecionar que uno de los estudiantes no ubicó adecuadamente las coordenadas de los puntos soliccitados.

Para el **paso 2** fueron los cuatro estudiantes que solo mencionaron los tipos de ecuación de la circunferencia pero no lo representaron algebraicamente.

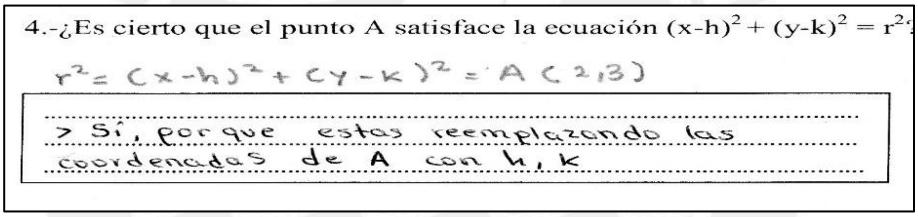

2.-Recuerda la forma que tiene la ecuación de una circunferencia

Ecuación Canonica
Ecuación ordinaria
Ecuación General.

Figura 32. Tipo de ecuación de la circunferencia

Para el **paso 3** respondieron que se debería reemplazar las coordenadas de los puntos en la ecuación ordinartia de la circunferencia.

Para el **paso 4** los estudiantes respondieron que sí; solo tendría que realizarse los calculos y reemplazarlos adecuadamente. En esta parte se tendría que recurrir al cuadro algebraico para llegar a la respuesta ideal.


4.-¿Es cierto que el punto A satisface la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 = A(2,3)$

> Sí, porque estas reemplazando las coordenadas de A con h, k

Figura 33. Reemplazando el punto A en la ecuación ordinaria

Paso 5 y **6** los estudiantes reemplazaron las coordenadas de A, B y C en la ecuación ordinaria de la circunferencia y pudieron optener la respuesta. Los estudiantes realizaron sus calculos algebraicos en algunos casos no llegaron a concretar la respuesta ideal, pero aquí presentamos e la figura 35 a una de las estudiantes que logro reemplazar las cordenadas de A en la ecuación de la circunferencia logrando obtener la ecuación general de la circunferencia e indico que los otros dos puntos se obtiene de la misma manera.

¿Cómo se reemplazarían las coordenadas de A en la ecuación?

reemplazando :

$r^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$

$r^2 = x^2 - 2(x)2 + 2^2 + y^2 - 2(y)3 + 3^2$

$r^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

6.- Procede de manera similar con B y C

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 = B(6;11)$

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 = C(12,5)$

Figura 34. Reemplazando el punto A, B y C en la ecuación ordinaria

Paso 7 los estudiantes respondieron que se reemplaza los valores correspondientes como en las anteriores ecuaciones pero esta vez con h, k y r. En la figura 36 observamos que los estudiantes reemplazaron los valores de las coordenadas de B y C, pero no lograron responder a la pregunta adecuadamente, solo lograron hallar ecuaciones generales de la circunferencias que pasan por puntos B y C

Paso 8 los estudiantes respondieron que si se usaron propiedades geométricas. Pero no tuvieron los suficientes argumentos para poder realizar adecuadamente sus calculos, podemos afirmar que la gran mayoría de estudiantes tienen problemas al realizar claculos en el cuadro de la geometría analítica porque implica recordar, conceptos básicos y realizar calculos precisos y razonar adecuadmaente para llegar a la respuesta

8.- ¿En esta solución se han usado propiedades geométricas?

> Sí, por que usamos las ecuaciones canonica, ordinaria y general.

Figura 35. Propiedades geometricas utilizadas

De acuerdo a nuestra teoría los estudiantes estuvieron trabajando en un primer cuadro de la geometría analítica y tuvieron que apoyarse con los calculos algebraico, pero tuvieron muchas dificultades al tratar de llegar a las respuestas realizando calculos analíticos por ello consideramos que los estudiantes tuvieron aquí desequilibrios al no recordar algunas de las formulas de geometría para luego mediante un reequilibro y retroalimentación de saberes previos poder solucionar el problema planteado lográndose establecer un juego de cuadros por la necesidad de resolver el problema.

Problema 3: Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (2,3), B (6,11), C (12, 5).

Esta actividad tiene por objetivo realizar una circunferencia partiendo de tres puntos conocidos, utilizando la geometría analítica y recordando la obtención de punto medio, pendiente, distancia entre dos puntos, ecuación de una recta, ecuación de la circunferencia y sistema de ecuaciones.

Analisis de las respuestas de los estudiantes al problema 3

La ubicación de los tres puntos con sus respectivas coordenadas fue desarrollada sin problemas.

Paso 1 y 2 los estudiantes desarrollaron las ecuaciones que pasan por los puntos A y B sin ningún inconveniente, solo se produjo desequilibrios al recordar las ecuaciones de la recta, pendiente, ecuación para hallar el punto medio, ecuación para hallar las mediatrices y sistema de ecuciones para hallar el punto de intersección de las mediatrices.

Paso 1: Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y B

Ecu. L1

$m = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow m = 2$

$y = 2x + b$ $\quad -12 + 11 = b \Rightarrow b - 1$

$11 = 2(6) + b$

$11 = 12 + b$ $\quad L1 = y = 2x - 1 \Rightarrow -2x + y = -1$

Paso 2: Hallar la ecuación de la recta que pasa por B y C

Ecu. L2

$m = \frac{-6}{6} = m = -1$

$x + y = 17$

$y = -x + b$ $\quad b = 17$ $\quad y = -x + 17$

$5 = -12 + b$

Figura 36. Ecuaciones de las rectas que pasan por A, B y C

Paso 3, 4, 5 y **6** los estudiantes hallaron las coordenadas de los puntos pedidos, así como las ecuaciones de las mediatrices, las coordenadas del punto de intersección de las mismas y las distancias entre los puntos recurriendo a los conocimientos recordados en las sesiones previas. Propiciandose un reequilibrio entre los conceptos adquiridos y los existentes al momento de resolver los problemas para poder llegar a la solución final

Paso 3: Hallar las coordenadas del punto medio de AB.

Hacer lo mismo para hallar las coordenadas del punto medio de BC.

$L_3 : y = mx + b$

$7 = \frac{1}{2}(4) + b$

$7 + 2 = b$

$b = 9$

$y = -\frac{1}{2}x + 9$

Paso 4: Hallar la ecuación de la mediatriz de AB y la ecuación de la mediatriz de BC.

$L_4 : y = mx + b$ $\quad$ $m_4 \cdot m_1 = -1$

$8 = 1(9) + b$ $\quad$ $m_4 \cdot -1 = -1$

$8 - 9 = b \Rightarrow b = -1$ $\quad$ $m_4 = 1$

$y = x - 1$

Figura 37. Coordenadas del punto medio y ecuaciones de mediatrices

Paso 5: Encontrar las coordenadas del punto de intersección de ambas mediatrices

Sistema de Ecuación

$y = -\frac{1}{2}x + 9$ $\quad$ $-\frac{1}{2}x + 9 = x - 1 \; (2)$

$y = x - 1$ $\quad$ $-x + 18 = 2x - 2$

$18 + 2 = 3x$

$20 - 3x$

$x = \frac{20}{3}$

$x = 6{,}67$

$y = \frac{20}{3} - 1$

$y = \frac{17}{3} = 5{,}6$

Paso 6: Hallar la distancia de A al punto encontrado en el paso anterior

$\text{distancia} = \sqrt{\left(12 - \frac{20}{3}\right)^2 + \left(5 - \frac{17}{3}\right)^2}$

$d\,(o,c)$

$d\,(o,c) = \sqrt{\frac{260}{9}} = \sqrt{28{,}89}$

Figura 38. Coordenadas de intersección de las mediatrices y la distancia de A

Paso 7 los estudiantes pudieron hallar la ecuación de la circunferencia que pasaba que pasa por los puntos A, B y C. No todos llegar a culminar en indicar la ecuación general de la circunferencia. Presentamos a una de las estudiantes que si logro la ecuación final.

Paso 7: ¿Cuál será la ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y C?

$$\left(x-\frac{20}{3}\right)^2+\left(y-\frac{17}{3}\right)=28,89$$

Figura 39. Ecuación de la circunferencia que pasa por los 3 puntos no colineales

Los cálculos fueron tediosos no lográndose uniformidad en los estudiantes puesto que cada uno llega a seguir su secuencia de aprendizaje de acuerdo a su nivel de comprensión. Los estudiantes tienen problemas a realizar cálculos tediosos seguidos de recordar formulas y demás argumentos para resolver un problema. Nosotros como investigadores vemos la gran necesidad que tienen ellos al para poder tener practica de transitar por cuadros diferentes y poder dar sentrido a lo que realizan, esta vez se tuvo que recurrir a los cuadros de la geometría analítica y sintética también al realizar los graficos, provocando un juego de cuadros en la resolución del problema que pudo servir a los estudiantes para realizar el reequilibrio respectivo y conseguir la respuesta correcta, se requeria un poco mas de tiempo del previsto, pero los estudiantes lograron resolverlos, emitiendo la ecuación final de la circunferencia.

$$\mathbf{\left(x-\frac{20}{3}\right)^2+\left(y-\frac{17}{3}\right)^2=28,89}$$

Problema N° 4: Reproduce la secuencia de solución que acabas de hacer en el problema anterior pero esta vez usando el software GeoGebra.

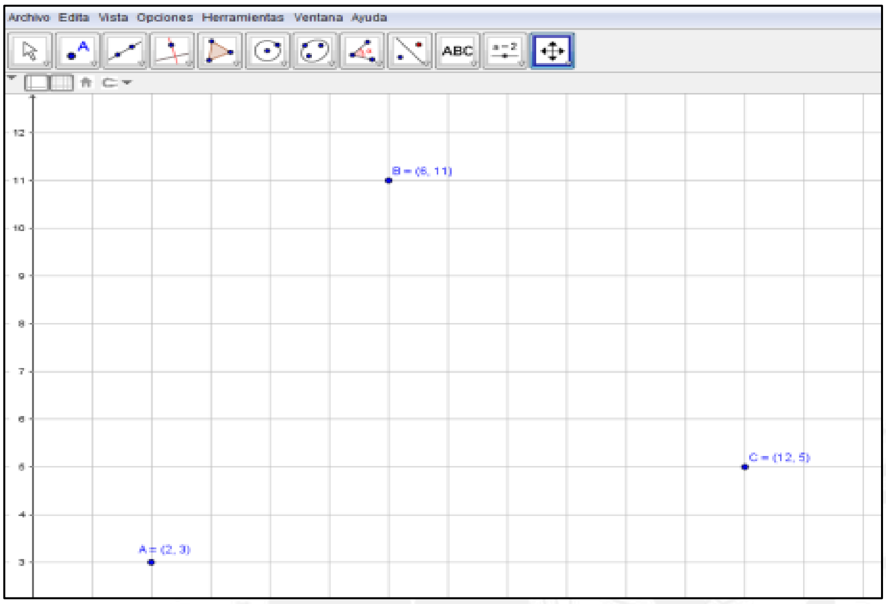
Esta actividad tiene por objetivo realizar la secuencia del problema 1 hecha con el software GeoGebra, confirmando los puntos tomados en el problema 3 y verificando su secuencia para la obtención final de la circunferencia (solución ideal).

Analisis de las respuestas de los estudiantes al problema 4

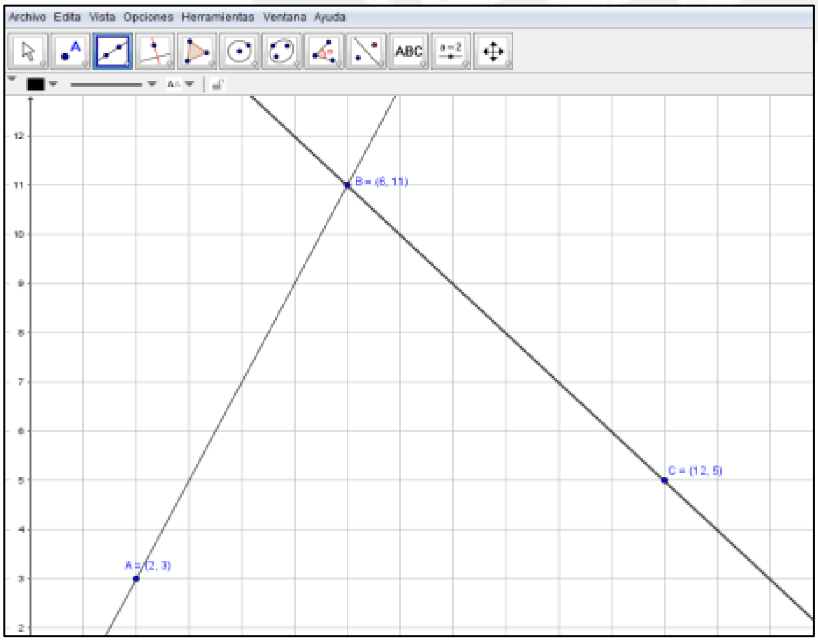
Tabla 11. Analisis de las respuestas de los estudiantes con el software GeoGebra.

Una vez que los estudiantes tuvieron que trabajar en la problema 1 sin cordenadas con el cuadro de la geometría sintética (software GeoGebra) se verifico la facilidad con la que ellos lo hicieron en un tiempo menor que los hechos en los problemas 2 y 3, la mayoría no tuvo problemas al realizar la ubicación de las coordenadas de los puntos según el **paso 1** y lo hicieron con el sofware GeoGebra para confirmar dichos puntos. En esta parte los estudiantes tuvieron que realizar el trabajo con la ayuda de un cuadro auxiliar que para la geometría es de gran ayuda, es decir el empleo del GeoGebra

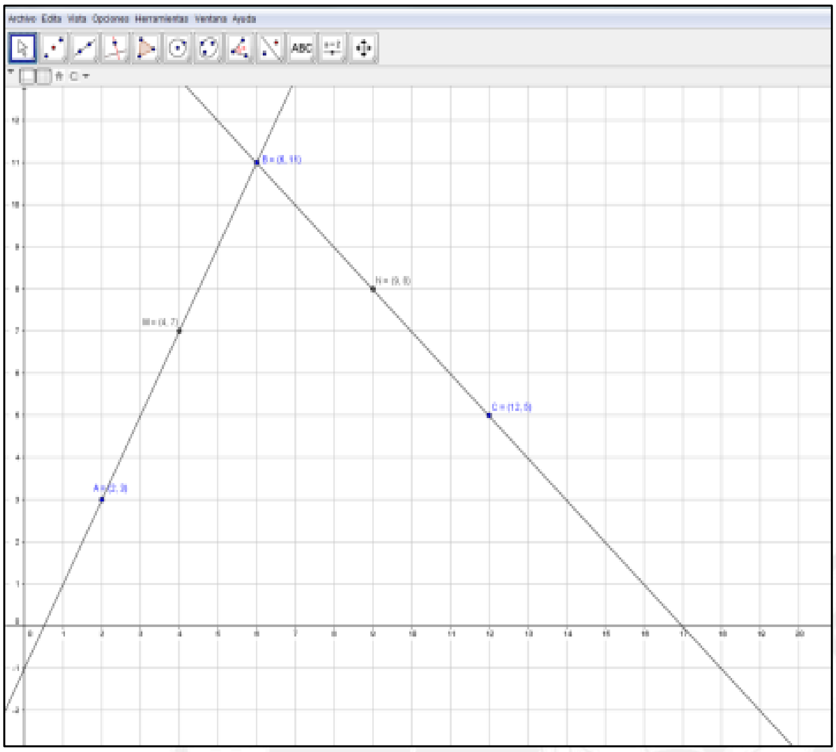
produciéndose también una reequilibración en el conocimiento ya establecido. Nuestra investigación confirmo que al existir el juego de cuadros entre la geometría analítica, las geometrías sintéticas y apoyadas por un cuadro auxiliar (Geogebra) llegan a verificar mejor sus respuestas y confirmar otros posibles ejercicios solo con trasladar los puntos establecidos en la figura inicial.



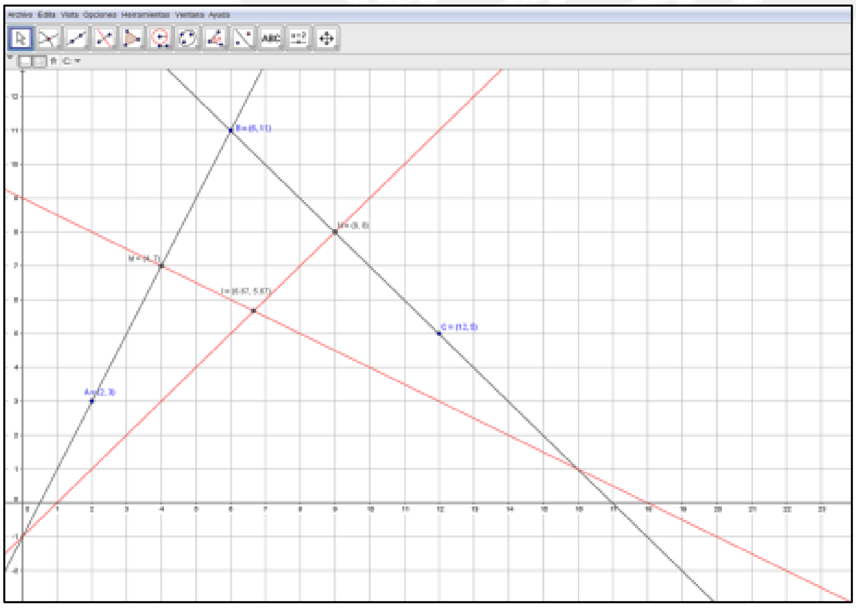
El **paso 2** donde tenían que unir los puntos A y B con la recta tampoco fue ningún problema para ellos, puesto que conocían el manejo de programa y lo realizaron como se muestra a continuación.



El **paso 3** Ubicaron el punto medio adecuadamente y en forma rápida para ellos y lo pudieron realizar en forma sencilla con el GeoGebra.

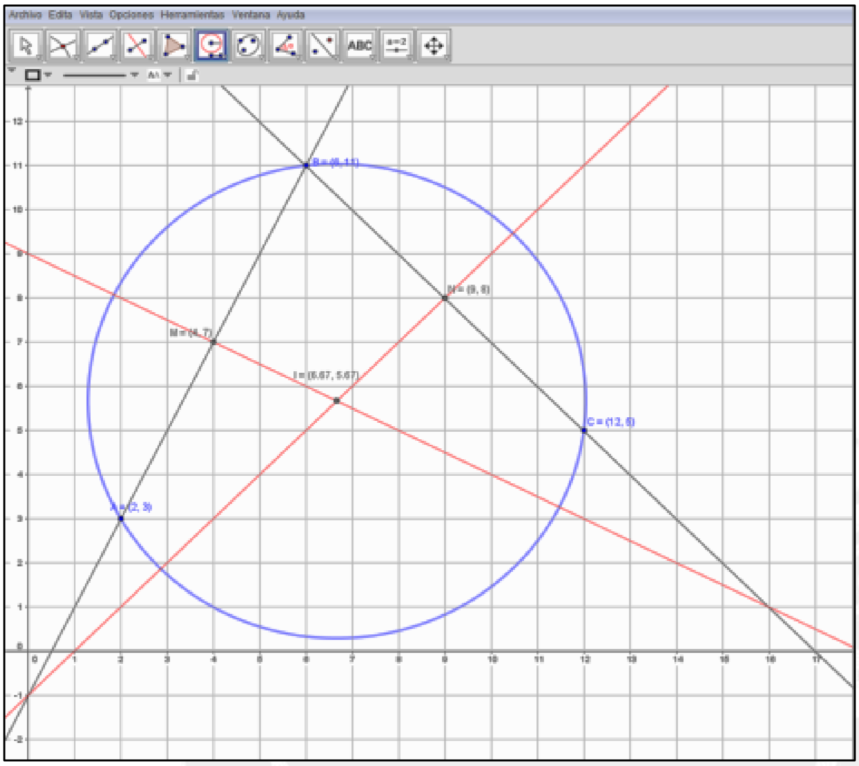


El **paso 4** luego de haber verificado en el cuadro de la geometría analítica también fue sencillo con el GeoGebra y pudieron verificarlo con el problema 3 realizado anteriormente.



Paso 5 los estudiantes confirmaron las ecuaciones que se obtuvieron en la parte

algebraico con lo que desarrollaron en el problema 3 y constataron la certeza de sus operaciones realizadas en el cuadro de la geometría analítica, confirmando con el programa GeoGebra los resultados y la ecuación de la circunferencia objetivo final de esta actividad.



CONCLUSIONES

1. Se logró identificar una actividad sobre circunferencia que podía ser abordada desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica. En cada uno de dichos cuadros, se tendría que hacer uso de procedimientos propios particulares; así, mientras que desde la geometría sin coordenadas prevalecerían las construcciones exactas, desde la geometría analítica, la solución del problema se basaría en resolver sistemas de ecuaciones.
2. Se consiguió que los estudiantes relacionaran procedimientos propios de la geometría sintética pero en el contexto de la geometría analítica; de esta manera, el trabajo algebraico adquirió sentido para ellos ya que cada paso analítico provenía de una acción geométrica.
3. El empleo del software GeoGebra permitió que los estudiantes pudieran comprobar los resultados obtenidos en ambos cuadros, logrando que se centraran en las ideas principales y no se perdieran con los cálculos.
4. Se verificó que era necesario que los estudiantes poseyeran conocimientos básicos de geometría para poder establecer relaciones entre los cuadros de la geometría sintética y de la geometría analítica.
5. De otro lado, también se confirmaron las fases propuestas en la teoría de juego de cuadros durante le proceso de cambio de cuadros. Así, se produjeron desequilibrios al no tener la seguridad de resolver un problema, y luego se recurrió a la ayuda de otro cuadro, produceindose un reequilibrio de lo aprendido; dicha acción que realizan produce una conexión entre cuadros llamado también juego de cuadros que le ayudan a tener seguridad en resolver problemas de geometría.
6. En relación a los aprendizajes de los estudiantes al abordar problemas sobre circunferencia desde la geometría sintética y también desde la geometría analítica, y el uso del GeoGebra, se puede concluir que esto contribuyó a que los estudiantes establecieran conexiones entre los cuadros de la geometría sintética y la geometría analítica.

RECOMENDACIONES FINALES

1. Creo que se puede seguir trabajando con la geometría dinámica y el objeto circunferencia puesto que vemos que se pueden realizar más actividades con el uso del GeoGebra y con estudiantes del quinto grado de secundaria de la EBR. Esta tesis puede servir de antecedente para futuras investigaciones en las que se considere trabajar con el objeto circunferencia y el uso del software GeoGebra con aplicaciones en los cuadros de geometría sintética sin coordenadas y la geometría analítica con coordenadas.
2. Podemos afirmar que los estudiantes se familiarizan adecuadamente con los temas matemáticos si se utiliza la tecnología combinada con los cálculos analíticos, los conceptos geométricos y las construcciones adecuadas, es decir ellos pueden transitar adecuadamente por diversos cuadros para lograr desarrollar mejor problemas de construcción de circunferencias y otros objetos matemáticos, los estudiantes al resolver ejercicios de geometría analítica y geometría sintética pueden hacer uso de un cuadro auxiliar que para nuestro caso es el software GeGebra y lograr el juego de cuadros, para estar seguros de sus respuestas, incentivando que el estudiante construya con el uso de la tecnología figuras geométricas diversas.
3. Los temas de geometría se podrían realizar adecuadamente utilizando diversos cuadros, los cuales nos permitirán tener éxito en el aprendizaje con los estudiantes, puesto que con esta experiencia se pudo verificar que los jóvenes toman mayor interés si se trabaja con tecnología y se realizan cambios de cuadros para ello.
4. Sugiero que las siguientes investigaciones en geometría tomen en cuenta a la teoría tomada para nuestra investigación denominada Juego de cuadros de Regine Douady, con la cual se pueden seguir produciendo mas investigaciones en diferentes cuadros de la matemática, esto permitirá tener éxito en los aprendizajes de los estudiantes.
5. En cuanto al uso del software GeoGebra lo podemos utilizar en nuestras sesiones de clase, puesto que seria de gran ayuda para realizar las construcciones diversas de los objetos matemáticos y poder verificar si nuestros cálculos nos permitieron llegar a la respuesta ideal comprobada en su construcción y en su desarrollo algebraico.

REFERENCIAS

Ancochea, B. (2011). *Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria*. Barcelona: CRM Documents.

Balacheff, N. (2004). Cuadro, registro y concepción. *Revista EMA*. 9(3), pp. 181-204. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005CUADRO_RevEMA.pdf

Benzaquen, P. & Gorrochategui, M. & Oviedo, L. (2008). El juego CUADROs en el análisis de un problema. Enseñanza media. *II REPEM memorias*. Argentina.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001-2002). Propuesta Didáctica. *Visualización y Pensamiento Matemático.* Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. Centro de investigación y de estudios Avanzados del IPN, México.

Carmona, J. (2011). *La Circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de Van Hiele y Geometría dinámica*. (Tesis de Maestría en Didáctica de Matemáticas). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/8855/1/01186517.2011.pdf.

Diaz, R. (2014). *La construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta-objeto con el apoyo del software GeoGebra en estudiantes de quinto de secundaria.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio.

Douady, R. (1986). Jeux des cadres et dialectique outil-objet. Trad.: Marilena Bittar. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2), pp. 5-31. La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1992). Des Apports de la didactique des Mathematiques Al L´enseignement. *Revista Reperes-IREM*/6, pp. 132-158. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/6_article_40.pdf.

Douady, R. (1998). La didáctica de las matemáticas en la actualidad. 6 IREM. Universidad de Paris VII. Traducción del francés al español: Gloria Castrillón. Instituto de Educación y Pedagogía. Cali, Abril 1998, segunda versión. P. 104-156.

Douady, R. (1999). *Juegos de cuadros y Dialéctica Herramienta-Objeto en Recherche en Didactique de la Mathématiques- Grenoble*. Le Pensé Sauvage. 7(2), pp. 5- 31.

Escobar, J. (1992). *Elementos de Geometría*. Colombia: Universidad de Antioquia Departamento de Matemáticas.

http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometria/pdf/elementos%20de%20geometria1.pdf.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid, España: Morata.

Franco, M. (2005). Pedagogia da Pesquisa-Ação. Universidade Católica de Santos. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31(3). 483-502. Recuperado de http://www.scielo.br/

GeoGebra. (2013). Página web de GeoGebra. Recuperado el 18 de febrero 2013 de, http://www.geogebra.org/cms/.

González, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica. *SIGMA (30)*, 205-236. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *AG Rodríguez-Geometría para el siglo XXI*, Síntesis, Madrid-España. Recuperado de www.altascapacidades.org/.../6/.../ensenanza_aprendizaje_geometria.pdf.

Helfgott, M. (2009). *La Geometría Plana*. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Editorial Escuela Activa.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de ña investigación*.México: McGraww-Hill.

Ivorra, C. (1990). *Geometria.* Recuperado http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria.pdf.

Lacasta, E. & Pascual¸ J. (1998). Las Funciones en los Gráficos Cartesianos. Editorial: Síntesis, España.

Lehmann, C. (1989), Geometría Analítica. México. Editorial Limusa-Noriega Editores.

Leithold, L. (1994). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. OXFORD University Press. Editorial Mexicana. México.

Montero, I. y León, O. (2002). Clasificación y descripción de las metodologías de investigación en psicología. *International Journal of Clinical and Health Psychology, 2*, 505-510.

Oller, A. (2009). Otra manera de ver la circunferencia. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números,* 72, pp. 57-62. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros.

Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. I. Métodos.Madrid: La Muralla.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de la educación básica regular.* Lima. Recuperado de http//www.minedu.gob.pe.

Perú, Ministerio de Educación (2012a). *Libros Matemática del 2° secundaria.* Lima. Editorial Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Libros Matemática del 4° secundaria.* Lima. Editorial Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2012c). *Libros Matemática del 5° secundaria*. Lima.Editorial Santillana.

Perú, SINEACE (2013). *Mapas de Progreso.* Lima. Recuperado de http://www.ipeba.gob.pe/estandares/Mapasprogreso_Matematica_Geometria.pdf

Puig Adam, P. (1986). Geometría Métrica. *Tomo I-Fundamentos.* (16ª Ed). Madrid: Euler Editorial S.A.

Rodríguez, C. (2011). Construcción de polígonos regulares y cálculo de áreas de superficies planas utilizando el programa GeoGebra: una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/5849/1/8410010.2012.pdf.

Santivañez, J. (1982) *Geometría*. Lima: Universidad Nacional Ingeniería Editorial TECNIA. Colección Euclides CPU.

Santos, E. (2014) *El Modelo Van Hiele para el aprendizaje de los elementos de la circunferencia en estudiantes del segundo grado haciendo uso del GeoGebra*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio.

Segal,S. (2009). *Action research in Mathematics Education: a study of a master's program for teachers.* Tesis doctoral, Montana State University, Bozeman, Montana, Estados Unidos.

Stake, R.E. (1998) *Investigar con estudios de caso*. Madrid: Morata

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.10, pp. 275-300. Recuperado de file:///C:/Users/i411.IDP/Downloads/Coordinacion%20de%20procesos%20cognitivos%20en%20geometria%20(1).pdf.

Tripp, D. (2005). Pesquisa- ação: uma introdução metodológica. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31, 3, 443-466.

Verástegui, T. (2003) *Geometría Básica*. Curso 1. Editorial MOSHERA S.R.L. Lima-Perú.

Yin, R. (1984). Case study research: Design and methods. Newbury Park, CA: Sage. Vera, C. (2003). *Matemática Básica.* Editorial MOSHERA. Lima Perú

ANEXOS

I.E.I. "SANTO DOMINGO SAVIO" **Docente: Julio Antonio Echevarría Anaya**

Nombre del estudiante:……………………………………………… Fecha:……………….

PROBLEMA Nª 1

Estimado estudiante, tienes una hora pedagógica para realizar este trabajo de forma adecuada y siguiendo las instrucciones correspondientes, esta actividad la trabajaras con el software GeoGebra. Muchas gracias por tu participación.

Problema 1: Dados 3 puntos no alineados A, B y C en el plano, dibuja una circunferencia que pase por ellos.

Paso 1: Grafica 3 puntos cualesquiera en el plano identificándolos como corresponde.

…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Paso 2: Une los puntos A y B con un segmento. Haz lo mismo con los puntos B y C.

…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

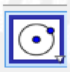
Paso 3: Ubica el punto medio del segmento AB utilizando las herramientas del GeoGebra. Haz lo mismo para ubicar el punto medio BC

…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Paso 4: Traza la mediatriz de AB y BC utilizando la herramienta  marca la intersección de la dos mediatrices.

¿Cómo se llama la intersección de las mediatrices de un triángulo ABC?..

¿Por qué se llama así a la intersección de dichas mediatrices?……………………

Paso 5: Utilizando la herramienta centro y punto  dibuja una circunferencia con centro en la intersección de las mediatrices y que pase por el punto A.

¿Esta circunferencia será la solución del problema?..
....
....
....
....
....

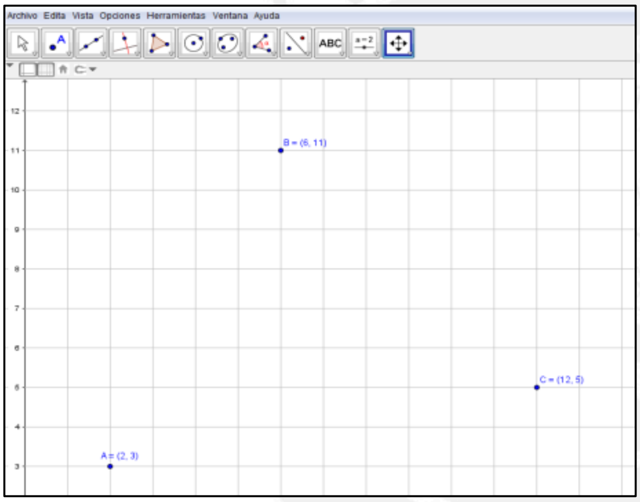
Nombre del estudiante:……………………………………………… Fecha:………………..

PROBLEMA Nª 2

Estimado estudiante, tienes una hora pedagógica para realizar este trabajo de forma adecuada y siguiendo la secuencia operativa que corresponde. Muchas gracias por tu participación.

Problema 2: Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A (2,3), B (6,11) y C (12,5) Con coordenadas.

Paso 1: Ubica los tres puntos en el plano cartesiano.



Paso 2: Recuerda la forma que tiene la ecuación de una circunferencia

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Paso 3: ¿Qué faltaría hallar para que esa ecuación esté bien definida?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Paso 4: ¿Es cierto que el punto A satisface la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$?

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 5: ¿Cómo se reemplazarián las coordenadas de A en la ecuación?

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 6: Procede de manera similar con B y C

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 7: ¿Qué deberías hacer para hallar los valores de h, k, r?

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 8: ¿En esta solución se han usado propiedades geométricas?

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

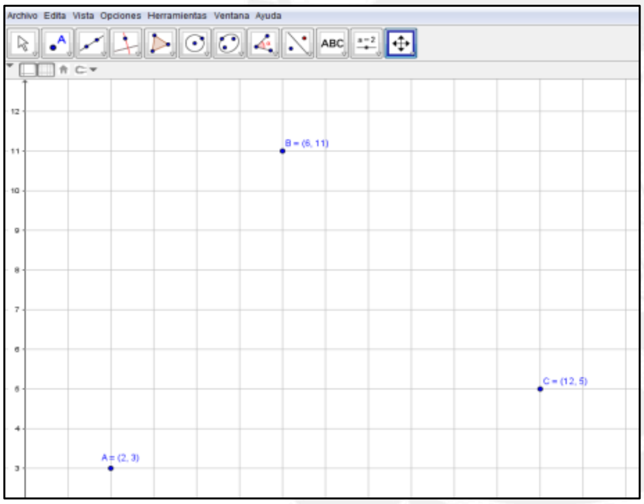
I.E.I. "SANTO DOMINGO SAVIO" **Docente: Julio Antonio Echevarría Anaya**

Nombre del estudiante:………………………………………… Fecha:…………………..

PROBLEMA Nª 3

Estimado estudiante, tienes una hora pedagógica para realizar este trabajo de forma adecuada y siguiendo la secuencia operativa de la geometría analítica que corresponde. Muchas gracias por tu participación.

Problema 3: Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (2,3), B (6,11), C (12, 5).



Paso 1: Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y B

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 2: Hallar la ecuación de la recta que pasa por B y C

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 3: Hallar las coordenadas del punto medio de AB. Hacer lo mismo para hallar las coordenadas del punto medio de BC.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 4: Hallar la ecuación de la mediatriz de AB y la ecuación de la mediatriz de BC.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 5: Encontrar las coordenadas del punto de intersección de ambas mediatrices

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 6: Hallar la distancia de A al punto encontrado en el paso anterior

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

Paso 7: ¿Cuál será la ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y C.

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

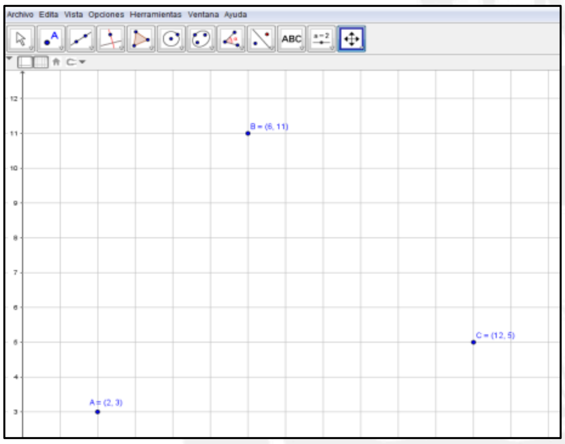
I.E.I. "SANTO DOMINGO SAVIO" **Docente: Julio Antonio Echevarría Anaya**

Nombre del estudiante:………………………………………… Fecha:………………….

PROBLEMA Nº 4

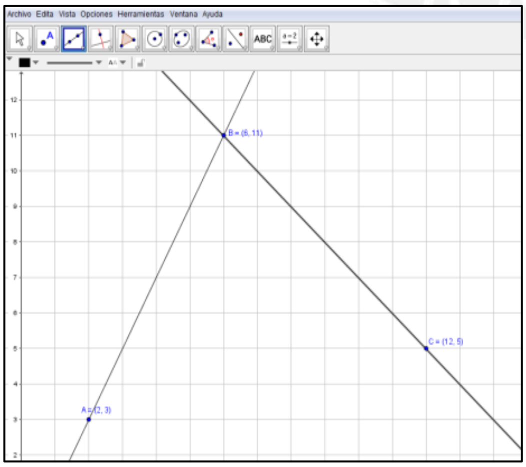
Estimado estudiante, reproduce la secuencia de solución que acabas de hacer en el problema anterior pero esta vez usando el software GeoGebra.

Paso 1: Grafica 3 puntos cualesquiera en el plano cartesiano identificándolos como se muestra en la figura A (2,3) B (6,11), C (12,5)



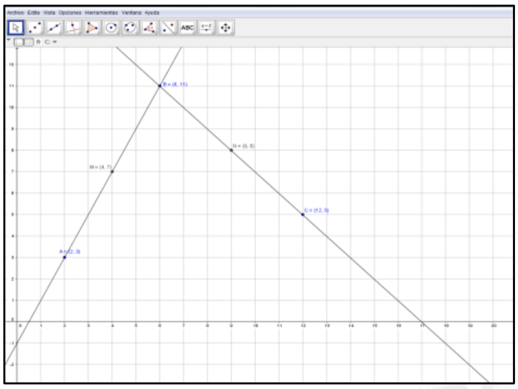
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Paso 2: Une los puntos A y B con una recta. Haz lo mismo con los puntos BC determinados anteriormente



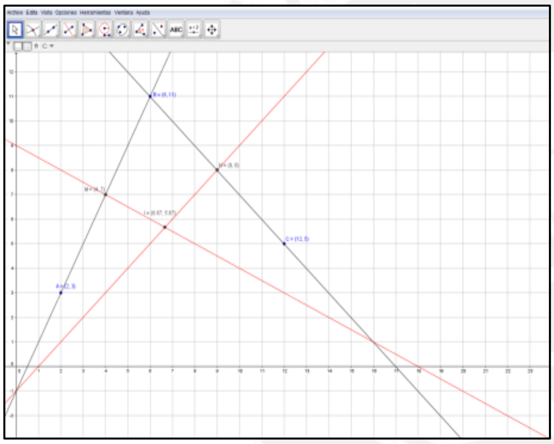
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Paso 3: Ubica el punto medio del segmento AB. Haz lo mismo para ubicar el punto medio de BC.

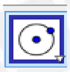


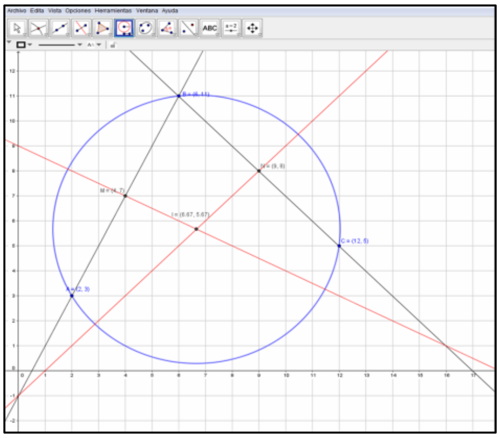
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Paso 4: Traza la mediatriz de AB y de BC. Utilizando la herramienta  marca intersección de las 2 mediatrices.



…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

Paso 5: Utilizando la herramienta centro y punto  de una circunferencia con centro en la intersección de las mediatrices y que pase por los puntos A, B y C.



…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN:

¿Cuántos problemas has resuelto realmente? ¿Cuáles?

…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

¿Encuentras alguna relación entre el procedimiento que empleaste en el problema 4 y el 2? ¿Por qué?

…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

¿Encuentras alguna relación entre el procedimiento que empleaste en el problema 2 y el 3? ¿Por qué?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

¿Encuentras alguna relación entre el procedimiento que empleaste en el problema 1 y el 3? ¿Por qué?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………