PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE LOS DIFERENTES SIGNIFICADOS DE LA IGUALDAD EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA EN EL NIVEL SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

RUBÉN EVERT JARA SÁNCHEZ

Dirigido por

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2015

A mis hijos Jean, Verónica y Giovanni, que son el motor de mi vida.

A mi esposa Verónica, quien me enseñó que con Amor todo es posible.

A mis padres Aquiles, Elena, Juan y Justina por hacerme quien soy.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme volver a él y darme la fuerza para seguir adelante.

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo - PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A mi familia por brindarme todo el apoyo y comprensión durante toda esta etapa, dura y a la vez gratificante, de aprendizaje.

A mi Asesora y profesora, Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre por su dedicación, paciencia y apoyo constante durante todo este periodo de aprendizaje e investigación.

A los miembros de mí jurado Dr. Francisco Ugarte y Dr. Saddo Ag Almoloud, gracias por sus observaciones y sugerencias que me han permitido mejorar mi trabajo de investigación y mis conocimientos.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de la matemática de la PUCP, quienes con su enseñanza, volvieron a despertar en mí, el entusiasmo por aprender, en especial a Dra. Jesús Flores, Dr. Cesar Carranza, Dr. Uldarico Malaspina, Dra. Norma Rubio, Dra. Katia Vigo, Mg. Nélida Medina, Mg. Mariano Gonzalez, Mg. Augusta Osorio, Mg. Carolina Reaño, Mg Flor Carrillo, Mg. Rocío Figueroa.

A todos mis compañeros, docentes de primaria y secundaria, alumnos de la maestría en enseñanza de la matemática, con quienes hemos compartido expectativas, esfuerzo y dedicación.

RESUMEN

El presente trabajo emplea algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), para identificar los diferentes significados de la igualdad, que surgen de su uso en la solución de problemas en el contexto de la Geometría.

Para ello se han analizado algunos textos clásicos, que son un referente importante en Geometría y otros textos que se usan en la enseñanza de esta materia. El diseño de las configuraciones epistémicas permite comprender la ontología establecida entre las definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas con procedimientos y argumentos que los justifican, haciendo uso de la terminología que le es inherente en la institución matemática, de donde emerge cada significado del objeto matemático.

Se han identificado tres significados que se asignan a la igualdad en Geometría, estos son: identidad Geométrica, Congruencia e Igualdad de áreas y volúmenes

A continuación se ha analizado el libro oficial de matemática del tercer año de secundaria con el objetivo de identificar los significados que se han definido, sin embargo, en este libro solo se verificó el uso del significado congruencia.

Palabras Clave: Igualdad, igualdad geométrica, significado, identidad geométrica.

ABSTRACT

This paper uses some theoretical and methodological tools from the Onto-semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction (EOS), to identify the different meanings of equality that emerge from its use in solving problems in the context of Geometry.

This has been analyzed in some classical texts, which are an important benchmark in Geometry, and other texts used in the teaching of this subject. The design of the epistemic configurations allow us to understand the ontology established between the definitions and properties, while problems are solved with geometrical procedures and arguments that justify them, by using terminology that is inherent within the mathematical institution, from where each meaning of mathematical object emerges.

We have identified three meanings assigned to equality in geometry, these are: Geometric identity, congruence and Equality of areas and volumes.

Later we analyzed the official mathematics book of third year of secondary school with the purpose of identifying the meanings defined, however, in this book, only the meaning congruence is verified.

Key words: equality, equal geometry, meaning, geometric identity.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia que se caracteriza por definir los objetos que emplea; sin embargo, existen investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática que demuestran que la cuestión del significado de un objeto matemático es un asunto complejo y no se restringe a dar una definición.

Es posible asumir que el significado de un objeto matemático depende de los conocimientos matemáticos que tiene la persona que manipula el objeto.

Esta profundidad de conocimientos está influenciada por la amplitud de problemas que resuelve, la amplitud del lenguaje que emplea, sea este verbal, simbólico o gráfico, la amplitud, profundidad y formalidad de los conceptos y propiedades que emplea, así como los diferentes procedimientos involucrados y los argumentos que le permite, justificar estos.

La complejidad de elementos que intervienen en el proceso de construir el significado de un objeto matemático se da a nivel personal y luego a nivel institucional, con el fin de contar con un significado “consensuado”, es decir, que sea aceptado por los integrantes de la institución.

En particular, la comprensión del objeto matemático *igualdad* no es una cuestión simple, requiere de identificar la mayor cantidad de significados que esta tiene en los distintos contextos matemáticos donde se la usa, además de considerar su evolución a través de la historia.

En los contextos algebraicos y aritméticos se han realizado algunas investigaciones que nos han permitido percibir la complejidad de la igualdad, sin embargo no hemos podido acceder a investigaciones en el contexto de la geometría. Por ello, una de las motivaciones para la realización de nuestro trabajo, fue identificar los significados de la igualdad en geometría y como estos se encuentran presentes en el ámbito de la educación secundaria peruana.

La presente investigación se ha estructurado en seis capítulos.

En el Capítulo 1 caracterizamos nuestro problema de investigación, presentando la justificación de la pertinencia de esta investigación desde diversos puntos de vista, así como los antecedentes que respaldan el trabajo, cuya finalidad es determinar los significados de la igualdad en el contexto de la geometría, lo cual planteamos en los objetivos de investigación.

En el Capítulo 2 presentamos la metodología de investigación que nos permite establecer el procedimiento que seguiremos para dar solución al problema planteado y lograr los objetivos propuestos, en nuestro caso empleamos una metodología cualitativa de corte bibliográfica.

En el Capítulo 3 mostramos los elementos teóricos que le dan sustento a nuestro trabajo, en esta sección consideramos aspectos relativos a la noción de significado de un objeto matemático, y como lo define el Enfoque Ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática (EOS), el cual constituye el marco teórico que nos brinda herramientas, teóricas y metodológicas, que nos permitirán alcanzar los objetivos propuestos. Asimismo se presentan los significados de la igualdad de números reales en los contextos algebraicos y aritméticos, que han sido reconocidos en otras investigaciones, significados que presentamos empleando las configuraciones epistémicas.

En el Capítulo 4 presentamos el estudio matemático de diversos libros de nivel superior, históricos como el de Euclides y el de Hilbert, y otros que son empleados para el estudio de la Geometría en el nivel superior, los cuales nos han permitido identificar tres significados para la igualdad en Geometría. Estos se identifican a partir del análisis de las situaciones problemas que hacen emerger los distintos objetos primarios que constituyen cada significado, los cuales son resumidos en configuraciones epistémicas que los describen.

En el Capítulo 5 realizamos el análisis del libro oficial de matemática del tercer año de secundaria, con la finalidad de identificar problemas, que permitan emerger los significados de la igualdad en geometría identificados en el capítulo anterior. Observaremos que este texto solo presenta situaciones relativas a uno de los significados de la igualdad en Geometría.

Finalmente presentamos las conclusiones de nuestra investigación, que dan respuesta a nuestra pregunta de investigación y a los objetivos, así como algunas sugerencias, como resultado de nuestro trabajo.

CAPITULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos el problema que da origen a nuestra investigación y que expresamos como una pregunta, además de los objetivos que guiarán el trabajo para dar respuesta a la pregunta planteada.

Asimismo, presentamos los antecedentes de nuestra investigación, para ello hacemos una recopilación de los aportes teóricos que hacen referencia a nuestro objeto de estudio, así como aspectos relacionados al mismo en investigaciones previas.

De la misma manera, presentaremos otros argumentos que sustentan el trabajo y que justifican la necesidad de realizar la investigación que proponemos, teniendo en consideración que constituye un aporte significativo para la didáctica de la matemática, debido a que permitirá hacer visible la complejidad del objeto matemático *igualdad* en el campo de la geometría euclidiana.

1.1 ANTECEDENTES

Empezaremos indicando que para Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004) uno de los grandes problemas de la didáctica de la matemática es determinar los significados que están asociados a los diferentes objetos matemáticos que surgen de los sistemas de prácticas matemáticas; tal es el caso de la noción de igualdad, que es considerada a priori como un objeto matemático bien definido. Frente a esto, ellos concluyen que:

> La noción de igualdad no puede ser restringida a un dominio matemático único. En efecto, el signo "=" viene determinado por el conjunto de relaciones que se establecen entre los modelos asociados a él y que emergen de las practicas usuales en las instituciones educativas actuales. (Whilhelmi, Godino y Lacasta, 2004, p. 21)

Para luego agregar que:

> Con relación a la noción de igualdad, el objetivo consistiría en establecer un sistema de prácticas institucionales que posibilite la interacción explicita del modelo aritmético de igualdad con el resto de modelos y, muy en particular, con el modelo analítico de tal forma que la noción de igualdad, comprendida como sistema, reequilibre los pesos que los modelos tienen con relación al significado personal que los sujetos le atribuyen. (Whilhelmi, Godino y Lacasta, 2004, p. 23)

Los mismos autores identifican diferentes definiciones de la igualdad, que surgen en el contexto del estudio de los números reales, y establecer sus relaciones.

Por otra parte, Molina (2006) indica que en muchas ocasiones, la igualdad es considerada como sinónimo de equivalencia o de identidad, pero para fines de su investigación define igualdad como “el modo gráfico de relacionar en la escritura dos expresiones o representaciones que refieren a un mismo objeto, escribiendo entre ellos un signo igual” (Molina, 2006, p.115).

Para la autora, la dificultad de comprender las igualdades que se plantean cuando se desarrollan problemas que involucran su uso, pone de manifiesto múltiples significados del signo igual. La investigadora llega a identificar hasta once distintos significados del signo igual que surgen de su uso en contextos aritméticos y algebraicos.

En particular, en el marco de una investigación experimental, concluye que los alumnos del tercer grado de primaria, sujetos de su estudio, asignan hasta cuatro de dichos significados, al signo igual, al resolver problemas.

Para Godino y Font (2003) un signo se emplea para representar un objeto matemático o situación y no puede ser confundido con el objeto al cual representa.

Por ello, no es lo mismo referirse a la igualdad que al signo igual, la igualdad es el objeto matemático al cual hace referencia el signo igual cuando es empleado.

Adicionalmente, Puig (2003) sostiene que el estudio de la semiótica permite afirmar que un objeto puede ser representado mediante un signo, al cual se le asigna significados propios del objeto y es esto lo que sucede con la igualdad y su signo “=”.

En esta línea, D’Amore, Fandiño y Lori (2013) indican que al signo “=”, de la igualdad, se le asignan diferentes significados, que surgen de los distintos usos que se le da. Por ejemplo, un niño le atribuye la indicación de un procedimiento cuando se encuentra frente a una expresión como, $4 + 2 =$ ___, el signo de la igualdad indica que hay que obtener la suma de 4 y 2, y escribirla sobre la línea a la derecha del “=”.

De modo que, siendo la igualdad el objeto matemático y su signo “=”, no hay un único significado que se le asigna a la igualdad y a su signo, sino diversos:

> El objeto matemático es el mismo, las facetas del significado son tantas y todas diversas, pero todas juntas contribuyen, o deberían contribuir, a dar un sentido general a la idea de igualdad. La univocidad del signo (representamen) usado para todos estos

> significados no ayuda al estudiante en la construcción cognitiva correcta de este objeto matemático. (D'Amore, Fandiño y Lori, 2013, p.145)

Asimismo, Godino y Font (2003) indican que el signo igual expresa que, lo que se encuentra a ambos lados de él, son dos formas de escribir lo mismo; sin embargo, establecen tres formas de igualdad: identidad, cuando se emplean variables y ambos miembros son siempre iguales para cualquier valor que tomen las variables, por ejemplo $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; ecuación, cuando la igualdad es verdadera para ciertos valores de la variable, por ejemplo a+5=12, es verdadera si a tiene valor 7; y relación de dependencia entre dos o más variables, por ejemplo en una fórmula.

Asimismo, Ceballos (2012) indica que una igualdad es una proposición que tiene la forma a=b, donde, según los valores que tomen a y b, se puede afirmar si la proposición es verdadera o falsa, también refiere que una ecuación es una igualdad que contiene términos, cuyo valor no es conocido, llamados variables y que es verdadera para determinados valores de las variables dentro de un conjunto numérico, asimismo una identidad es una igualdad que es verdadera para cualquier valor que se le asigne a sus variables.

De otro lado Ramírez y Rodríguez (2011), definen signo como “cualquier cosa, acción o suceso que, por una relación natural o convencional, evoca a otra o la representa” (p. 42) a continuación indican que un símbolo es un tipo de signo, en el que la relación con el objeto es arbitraria y es establecida por convención, indicando que el aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos, y en especial el del signo igual, es vital para poder comprender las expresiones algebraicas y aritméticas, pero que se hace difícil al tener significados asignados por convención.

Por consiguiente, la noción de igualdad no es trivial; en realidad, es un concepto cuyo significado es complejo y por eso es considerado como objeto de estudio.

Estas autoras realizan un estudio descriptivo de algunos libros de matemática del primer ciclo de primaria, empleados en España, para determinar en qué contextos se encuentra al signo igual. Concluyen que este es empleado en mayor proporción en contextos aritméticos, para indicar el resultado de realizar operaciones a un lado de la igualdad o en ambos, lo cual le da un sentido operativo al signo igual, mientras que, las mismas autoras sostienen que, el signo igual debe expresar una relación de equivalencia, que no priorice los cálculos sino la comprensión de los principios, propiedades y relaciones generales propios del pensamiento algebraico.

Por su parte, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los Estados Unidos, promueve que el Algebra sea abordada desde edades tempranas con el fin de promover el desarrollo del pensamiento algebraico, en particular, el uso del signo igual, contribuye al desarrollo de nociones algebraicas tales como, la equivalencia y el equilibrio.

> La noción de igualdad debería también desarrollarse a lo largo del currículo. Como consecuencia de la enseñanza recibida, los niños perciben generalmente el signo igual desde un punto de vista operativo, es decir, como una señal para "hacer algo". [...] Deberían llegar a verlo como un símbolo de equivalencia y equilibrio. (España, 2003, p. 41).

Desde esa óptica, el Algebra es más que la manipulación de signos y todos los estudiantes deben aprenderla, ya que necesitan comprender sus conceptos, estructuras y principios, para poder desarrollar un sólido fundamento conceptual para su trabajo con notación simbólica que no sea solo mecánico.

De todo lo considerado, se puede concluir que la igualdad no tiene un único significado, sino que por el contrario, estos son diversos y surgen del uso que se hace de ella, por ello es necesario identificar la mayor cantidad de estos significados en diferentes contextos matemáticos, tales como el aritmético, algebraico, geométrico o algún otro, para poder llegar a una mejor comprensión del mismo.

En esta investigación pretendemos identificar la mayor cantidad de significados que la igualdad tiene, en el contexto geométrico y establecer algunas relaciones entre los significados de la igualdad en el contexto geométrico y los contextos algebraico y aritmético.

Además, parte de nuestro problema consistirá en determinar los significados de referencia de la igualdad en el contexto de la Geometría para luego contrastarlos con los significados pretendidos establecidos en el libro a analizar.

De esta manera se pretende contribuir con la formación de los docentes de matemática ya que permitirá hacer explícitos los diferentes contextos en los que aparece la igualdad y los diferentes significados asociados a ella, de modo que el docente tenga esto en cuenta, durante el proceso de instrucción matemática.

En particular, nuestra finalidad es describir y analizar los diferentes significados que adopta la igualdad cuando es empleada en el libro oficial de matemática del tercer año de secundaria, al plantear conceptos, definiciones, propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas en el contexto geométrico, para, de esta manera, reconocer su complejidad.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Según Carranza (1965) la relación de igualdad que se establece entre elementos o entre conjuntos, es representada por =, que se lee "igual" y se indica entre dos elementos o conjuntos para indicar que son iguales, de modo que la expresión a = b, se lee como "a es igual a b" y significa que el elemento o conjunto representado por "a" es el mismo elemento o conjunto que hemos representado por "b", de manera que es posible sustituir a por b en una expresión que los relaciona.

Sin embargo existen investigaciones que identifican otros significados que se le asigna a la igualdad, tanto en el contexto de la aritmética como en el del álgebra.

La presente investigación está motivada por el deseo de poder alcanzar una mejor comprensión de la igualdad, comprender su complejidad y entender el origen de las dificultades derivadas de su uso.

1.2.1 IMPORTANCIA DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN EN EL CONTEXTO EDUCATIVO PERUANO.

En el Diseño Curricular Nacional (DCN) se encuentran establecidos los propósitos de la Educación Básica Regular peruana, de entre ellos, el quinto indica que un propósito es el "desarrollo del pensamiento matemático y de la cultura científica y tecnológica para comprender y actuar en el mundo, y (...) el aprendizaje de conceptos matemáticos (...) teniendo como sustento conceptual el dominio de la matemática como ciencia formal" (Perú, 2009, p. 25).

En este mismo documento se establecen las competencias por ciclos de la educación secundaria, las competencias y las capacidades específicas para los organizadores del área de matemática y los contenidos matemáticos asociados a ellos. El área de matemática tiene como organizadores los siguientes: números, relaciones y funciones; geometría y medición; y estadística y probabilidad.

Aunque se tratan de distintos contenidos, incluso asociados a organizadores diferentes, en todos ellos se hace referencia implícita a la igualdad ya que los ejemplos, ejercicios y problemas que se emplean en los textos, para concretizar lo establecido por el Diseño Curricular Nacional peruano en las clases de matemática, usan la relación de igualdad o el "=" al establecer las relaciones entre los números o magnitudes con los que se trabaja.

1.2.2 SOBRE LOS DIFERENTES SIGNIFICADOS DE LA IGUALDAD

La definición más empleada de igualdad nos refiere que lo que se encuentra en cada miembro de la igualdad son dos maneras de designar lo mismo, “cuando se escribe a=b, esto significa que a y b son símbolos usados para designar el mismo objeto” (Lima, Carvalho, Wagner y Morgado, 2000, p. 16).

Sin embargo, Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004) indican que esa no es la única definición que se puede dar a la igualdad. Los autores muestran que los distintos sistemas de prácticas determinan un modelo de la noción de igualdad que es asumido como una definición. En particular, solo en el conjunto de los números reales, ellos muestran ocho definiciones distintas de igualdad que surgen precisamente de su uso en distintas situaciones.

Los mismos autores indican que, dos números reales a y b serán iguales, a = b, si y solo si, a ≤ b y b ≤ a; esta es una igualdad basada en el concepto de orden (≤) en R. Como se observa, en esta definición no se hace referencia a que la expresión a la izquierda del “=” se refiere a lo mismo que la expresión de la derecha.

En ese mismo sentido, pero en un contexto topológico, los mismos autores señalan que dos números reales a y b serán iguales, si la distancia entre ellos es cero, es decir, a=b si y solo sí $d(a,b) = |a - b| = 0$; de la misma manera que en el caso anterior, en esta definición no se hace referencia a que las expresiones de ambos lados del “=” se refieren a lo mismo.

Esta diversidad de definiciones de la igualdad, permite percibir una característica propia de los objetos matemáticos, tal como plantean Godino y Batanero (1994), a los objetos matemáticos se les puede atribuir diferentes significados los cuales son condicionados de manera institucional, personal o temporal.

1.2.3 SOBRE LOS DIFERENTES SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL

En relación a los distintos significados del signo igual como signo asociado a la igualdad, Molina (2006) realiza un estudio motivada por el papel que cumple la comprensión del signo igual en la transición de la aritmética al álgebra, describiendo los distintos significados que posee y los que los alumnos manifiestan al resolver algunos tipos de sentencias.

Para ello, la autora busca analizar y evaluar la comprensión del signo igual que ponen de manifiesto un grupo de alumnos cuando resuelven problemas sobre igualdades y sentencias numéricas, planteándose preguntas como: "¿Adoptarán los alumnos multiplicidad de significados para este símbolo o exigirán unicidad de significado? ¿Qué tipo de dificultades manifestarán los alumnos en el desarrollo de su comprensión del signo igual?" (Molina, 2006, p.15)

La autora hace una recopilación de distintos significados del signo igual que ha encontrado en investigaciones previas y denomina, *propuesta de actividad de cálculo, operador, separador, expresión de una acción, expresión de una equivalencia condicionada, expresión de una equivalencia, definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional o de dependencia*, pero se centra en identificar lo que los sujetos de estudio emplearán en su comprensión del signo igual.

Por otra parte, Ramírez y Rodríguez (2011) indican que uno de los objetivos del currículo de matemática es, aprender el significado de los símbolos matemáticos, en especial, el del signo igual ya que es necesario para la comprensión de expresiones aritméticas y algebraicas. Al realizar el estudio descriptivo de los usos que se le da al signo igual en cuatro libros de primer ciclo de educación primaria de España, de distintas editoriales españolas, concluyen que el signo igual se emplea en mayor medida en contextos aritméticos. Puede ser indicador de la obtención de un resultado, como cuando se resuelve para hallar el resultado de una o más operaciones, manualmente o con calculadora, o para indicar la realización de operaciones a ambos lados del signo, y en una menor proporción en contextos no aritméticos, dotándolo solo de un significado operacional.

De esta manera, se confirma que el signo igual posee múltiples significados aunque se suele emplear como si tuviese solo uno.

Cabe mencionar que las investigaciones sobre el estudio del signo igual que se han realizado, han estado orientadas a los contextos aritméticos y algebraicos, desarrolladas en el nivel primario, pero no al contexto geométrico. En particular, será relevante realizar una investigación que permita identificar algunos de los distintos significados de la igualdad en el contexto geométrico, específicamente, en el nivel secundaria.

1.3 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los estudios revisados nos permiten suponer que, al igual que en los contextos del Álgebra y la Aritmética, en el ámbito de la Geometría, la igualdad tendrá diferentes significados.

Asimismo, estos significados se pondrán de manifiesto según el uso que se hace de ellos en las definiciones, propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas en los que está involucrada la igualdad.

Específicamente, realizaremos un análisis de la sección correspondiente a Geometría en el texto oficial de matemática del tercer año de educación secundaria que es empleado en las Instituciones Educativas Públicas peruanas.

Para ello formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los significados que surgen del empleo de la igualdad, en el contexto de la Geometría euclidiana en los libros oficiales de matemática del tercer año de secundaria distribuido en las instituciones educativas públicas del Perú?

1.4 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación está centrado en el estudio de la igualdad como objeto matemático, así como en los diferentes significados que esta adquiere según su uso.

Para dar respuesta a la pregunta planteada nos formulamos los siguientes objetivos:

OBJETIVO GENERAL:

De acuerdo a lo planteado en la sección anterior, este trabajo tiene como objetivo general, identificar los significados que surgen del empleo de la igualdad, en el contexto de la Geometría en el libro oficial de matemática del tercer año del nivel secundaria usado en las instituciones educativas públicas del Perú.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

El objetivo general se particulariza en los siguientes objetivos específicos:

1.- Identificar y clasificar los significados de referencia de la igualdad en el contexto de la Geometría.

2.- Identificar los diferentes significados pretendidos de la igualdad en el contexto de la Geometría en el libro oficial de matemática del tercer año de secundaria que es usado en las instituciones educativas públicas del Perú.

3.- Valorar la idoneidad epistémica y ecológica del libro oficial del tercer año de secundaria, respecto de los significados identificados de la igualdad en Geometría.

CAPITULO 2: ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo está orientado a presentar los principales aspectos metodológicos de nuestra investigación. Para ello, haremos una presentación de las características de la metodología que hemos seleccionado para cumplir con nuestros objetivos y dar solución a la problemática planteada.

Nuestra investigación se encuadra dentro de las investigaciones basadas en un enfoque cualitativo, debido a que sus características particulares se corresponden con las propias de este enfoque.

Específicamente, para las investigaciones en educación matemática, Borba y Araujo (2004) indican que la investigación cualitativa se caracteriza por que sus datos provienen del ambiente natural donde se presentan y es el investigador el principal instrumento de investigación, por lo que la investigación cualitativa es descriptiva. Además, el interés del investigador no está solo en los resultados o productos, sino en todo el proceso seguido para la recolección y análisis de los datos, que se realiza de forma inductiva (de lo particular a lo general) estableciendo significados a todo lo obtenido.

Para poder desarrollar nuestra investigación, obtendremos datos de diferentes fuentes.

En primer lugar recogeremos toda la información que brindan las investigaciones sobre nuestro objeto de estudio.

A continuación analizaremos un grupo de libros de Matemáticas, en particular de Geometría, que son empleados para la enseñanza de esta materia en instituciones de nivel superior, los cuales serán estudiados a profundidad en los aspectos relacionados al surgimiento e identificación de los significados de la igualdad en Geometría.

Por último, realizaremos el análisis del libro oficial de tercer año de secundaria que es empleado en los colegios estatales del Perú, con la finalidad de determinar su idoneidad respecto de la información obtenida en los libros de Geometría.

Todo ello nos obliga a emplear procesos inductivos y recurrentes durante el desarrollo de nuestra investigación, sin seguir una secuencia lineal, en búsqueda de amplitud y profundidad de significados de nuestro objeto de estudio.

Nuestro objeto de estudio es identificado en distintos contextos matemáticos, ello con el fin de contar con una riqueza interpretativa que nos permita lograr los objetivos planteados en la investigación, sin perder de vista el contexto didáctico en el que nos desenvolvemos.

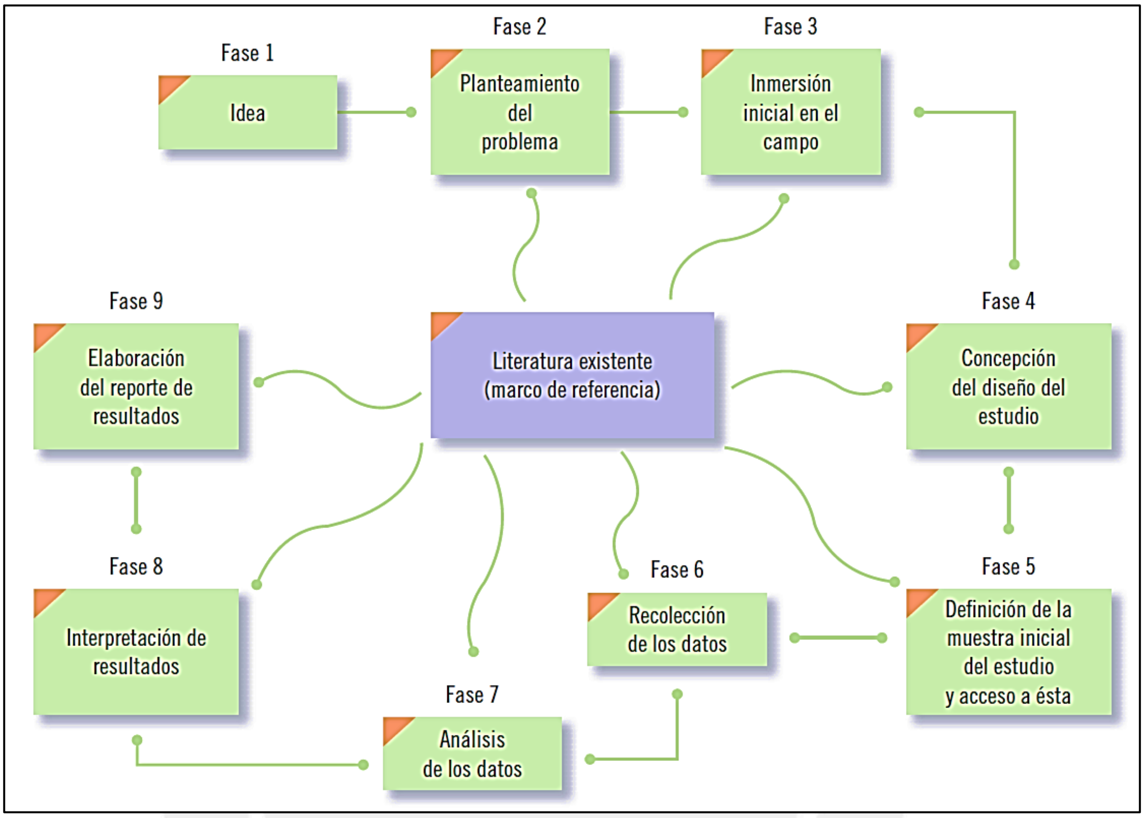


Figura 1. Proceso cualitativo
Fuente: Hernández, Fernández y Baptista (2010, p. 8)

La Figura 1 muestra las fases presentes en el proceso de investigación cualitativa, este proceso se inicia con una idea inicial de investigación que en nuestro caso es el estudio de los significados de la igualdad. Esta idea inicial es expresada luego en términos del problema, que requiere de la revisión de información relacionada con los aspectos de este objeto, que nos permita tener una idea para su solución, esto se traduce en los objetivos de investigación.

A continuación, es necesario esbozar una secuencia o camino que seguirá el estudio. Esto permite determinar cada una de las etapas que debemos seguir, como seleccionar los textos que serán sujetos de nuestro estudio, el enfoque teórico que emplearemos para la investigación, la forma de acceder a la información, los instrumentos de recolección, análisis y organización de la información, la interpretación de los resultados y la elaboración del reporte de los resultados obtenidos.

Estas fases no constituyen un esquema rígido de etapas secuenciales sino solo “un intento, porque su complejidad y flexibilidad son mayores” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 7).

En el caso particular de nuestra investigación, la etapa central será la revisión de la literatura que nos permita identificar los significados que se le puede atribuir a la igualdad en Geometría.

Todas las características mencionadas hasta aquí, están presentes en nuestra investigación, ya que, luego de revisar la información que existe sobre la igualdad en la literatura a la que hemos tenido acceso, hemos identificado sus significados en los contextos aritméticos y algebraicos, y obtenido datos que nos permiten describir otros significados en el contexto de la geometría.

En referencia al proceso técnico seguido para la recolección de datos Gil (2002) indica que, el procedimiento de recolección es el que nos permite identificar el diseño o delineamiento de la investigación, Uno de estos diseños es el que el autor denomina investigación bibliográfica.

Para Gil (2002) la investigación bibliográfica se define como aquella que es desarrollada en base al estudio de textos ya elaborados, como libros o artículos científicos y es esta la que vamos a emplear para realizar nuestro estudio.

En primer lugar debemos distinguir entre la revisión bibliográfica que se hace en toda investigación y la investigación bibliográfica propiamente dicha, tal como hacen notar Lima y Mioto (2007):

> Não é raro que a pesquisa bibliográfica apareça caracterizada como revisão de literatura ou revisão bibliográfica. Isto acontece porque falta compreensão de que a revisão de literatura é apenas um prérequisito para a realização de toda e qualquer pesquisa, ao passo que a pesquisa bibliográfica implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório. (Lima y Mioto, 2007, p. 38)

Los mismos autores resaltan la necesidad de búsqueda de información, por parte del investigador, que le permita una aproximación sucesiva al objeto de estudio, pues lo que se busca es la fundamentación teórica del mismo. Además, esta aproximación sucesiva permite una mayor flexibilidad en la obtención de los datos, pero a su vez requiere una gran disciplina y atención del proceso metodológico diseñado y el cronograma de investigación.

De la misma manera, la investigación bibliográfica hace uso de la revisión bibliográfica para la obtención de información y datos, sin embargo no se queda en la acumulación de estos, sino, en realizar una comprensión crítica de ellos en base a los aspectos teóricos determinados.

Nuestra investigación se corresponde con una del tipo bibliográfica, ya que está basada en el análisis de libros, tesis y artículos científicos que se han enfocado en el estudio de los significados de la igualdad, esto nos permitirá identificar los significados institucionales de referencia de este objeto matemático, en el contexto de la geometría.

Posteriormente podremos analizar el libro oficial de matemática del tercer año de secundaria, con la finalidad de identificar los significados institucionales pretendidos de la igualdad en contextos geométricos.

Asimismo, Gil (2002) establece una serie de etapas, para el proceso de investigación bibliográfica, las cuales hemos adaptado a nuestra investigación, tal como mostramos a continuación:

Etapa 1: Se selecciona el tema. Dicha elección se basa en el interés del investigador y en sus conocimientos, además de la orientación de su asesor.

Etapa 2: Levantamiento bibliográfico preliminar, o estudio exploratorio. Este permite al investigador familiarizarse con su área de estudio y con los principales aspectos relacionados con el objeto de investigación. Como resultado final, debe incluir los principales antecedentes y la justificación de la investigación.

Etapa 3: Formulación del problema y establecimiento de los objetivos de investigación. Esta permite delimitar el trabajo a realizar y tener un foco orientador claro para todas las acciones realizadas.

Etapa 4: Elaboración del plan provisional de trabajo. Que da como resultado la estructura lógica del trabajo, el cual se ha ido modificando según se ha ido avanzando en la investigación, al profundizar en los estudios e ir profundizando en la observación, además, en esta etapa se considera la elaboración de los criterios de análisis del texto de tercero de secundaria, que constituye el instrumento de investigación.

Etapa 5: Identificación, localización y obtención de las fuentes bibliográficas adecuadas a la investigación. En el caso de esta investigación, estos son artículos de revistas científicas, tesis y libros de referencia, entre otros, que se van revisando continuamente durante todo el proceso de investigación con el fin de recabar mayor información y datos que permitan el logro de los objetivos, asimismo hemos realizado la selección del texto de matemática de secundaria a analizar.

Etapa 6: Lectura del material. Este se realiza tomando en cuenta la identificación de las informaciones y datos, estableciendo relaciones entre estos y analizando la consistencia entre los datos e informaciones dadas por los diversos autores, por ello la lectura tiene que ser exploratoria, selectiva, analítica e interpretativa, en esta etapa se incluye el proceso de análisis del texto de matemática de tercero de secundaria, con los instrumentos de investigación que contienen los criterios de análisis.

Etapa 7: *Fichamiento*. Este tiene la finalidad de organizar toda la información y los datos recogidos, de manera que puedan servir como fuente de análisis.

Etapa 8: Organización lógica del tema o de toda la información recogida. En esta etapa se incluyen todos los momentos que permiten ir estructurando y ampliando la investigación, dándole forma y *puliéndola*, hasta la obtención de la estructura final que constituye la tesis, propiamente dicha.

Etapa 9: Redacción del texto. Esta depende del estilo de quien lo redacta y constituye el documento final que es presentado como resultado de la investigación, en el que se deben mostrar los resultados de la misma.

Debemos hacer notar que el orden de estas etapas no es rígido, pues como ya hemos indicado, al ser una investigación cualitativa, se ha ido revisando información de manera permanente, y esto ha repercutido en la reformulación de cada etapa.

CAPITULO 3: ELEMENTOS TEÓRICOS CONSIDERADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo tiene por finalidad establecer los elementos teóricos que enmarcan nuestra investigación. Para ello haremos una breve exploración de los aspectos teóricos que contribuirán con la delimitación de nuestro objeto de investigación. Iniciamos haciendo una exploración acerca de la noción de significado, para luego definirla a partir del Enfoque Ontosemiotico (EOS), estableciendo los elementos y características que la conforman.

Finalmente aplicaremos esta definición para realizar un primer análisis de los significados identificados en otras investigaciones, expresándolos en términos del EOS.

3.1 NOCIÓN DE SIGNIFICADO

La noción de significado es crucial en nuestra investigación por ello consideramos necesario realizar una exploración sobre cómo es caracterizada actualmente en distintos ámbitos.

La Real Academia de la lengua Española define significado como “la significación o sentido de una palabra o frase, como una cosa que se significa de algún modo y en lingüística como el contenido semántico de cualquier signo, condicionado por un sistema y contexto” (Real Academia Española, 2014) .

Desde la filosofía, Abagnano (1998) indica que este término se refiere a una dimensión del procedimiento semiológico, es decir a la posibilidad de un signo de referirse a un objeto, siendo los aspectos o condiciones fundamentales del significado: un nombre, concepto o esencia que es usado para delimitar y orientar la referencia, y el objeto al cual el nombre, concepto o esencia se refiere.

Desde la Lógica, Frege (1984) no explicita el término significado. Sin embargo, al referirse al *sentido* de un nombre propio, indica que incluye al modo de darse y puede ser comprendido por aquel que conoce el lenguaje o conjunto de designaciones al cual pertenece un signo, de modo que, a un signo le corresponde un determinado *sentido* y este *sentido* le corresponde a una determinada referencia u objeto, además el mismo *sentido* puede expresarse de diversas maneras según su contexto, de manera que, *sentido* es tomado como significado.

Por otra parte, Eco (1994) indica que desde hace mucho tiempo, los signos son clasificados, según la cantidad de significados que poseen, en, signos unívocos, cuando solo tienen un significado como los signos numéricos; signos equívocos, cuando pueden tener distintos significados tal es el caso de la homonimia; signos plurales, cuando un significado origina otro como en las metáforas; y, los signos vagos o símbolos que tienen una relación vaga o imprecisa de significados.

En didáctica de la matemática, Godino y Llinares (2000) concluyen que el significado se desarrolla a partir de la interacción e interpretación entre los miembros de una cultura, basados en el hecho de que el hombre orienta sus actos hacia las cosas, según el significado que estas tienen para él.

El significado surge de la interacción social que cada uno mantiene con su prójimo y los significados se modifican en procesos interpretativos desarrollados por cada persona a lo largo de su vida.

Esta perspectiva lleva a un ámbito más personal la génesis de los significados, es decir la construcción de los significados es una acción individual que se produce en interacción con la cultura de un grupo y a su vez contribuye a la formación de esta cultura. Entonces, el aprendizaje es este proceso personal de formación, de adaptación interactiva a una cultura por medio de la participación activa en dicha cultura y la enseñanza está formada por los intentos de organizar un proceso interactivo que permita establecer y mantener esta cultura.

Si se desea llegar a un único significado adoptado por toda la comunidad o institución, se genera un problema, que solo podrá ser resuelto mediante la negociación, para estar de acuerdo sobre convenciones en la interpretación de signos, situaciones y conductas. Esto desafía la creencia de que los signos, objetos, símbolos, etc., tienen significados bien definidos y claros en las matemáticas. Toda la explicación anterior, pone de manifiesto el papel que cumple la idea de significado para la Didáctica de la Matemática.

Godino y Batanero (1994) realizan un amplio estudio sobre los principales investigadores que han dedicado su esfuerzo a lograr caracterizar el significado de los objetos matemáticos, poniendo en primera línea la necesidad del desarrollo de investigaciones en este sentido.

Por ello sostienen la existencia de dos teorías del significado en el ámbito de la didáctica de la matemática:

1.- Realismo, que se manifiesta cuando se asume que el significado de una expresión no depende de su uso en situaciones concretas, sino que su uso depende de su significado, por ejemplo cuando las expresiones o palabras designan, según convenciones, a ciertas entidades u objetos, es decir se convierten en significados de un objeto.

2.- Pragmatismo, que sostiene que el significado de una expresion depende del contexto en el que es usado y el significado de los objetos solo se puede inferir a partir de su uso.

Los mismos autores, sostienen que esta última teoría del significado es más afín a los supuestos del constructivismo y permite asumir que los objetos matemáticos son símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos relacionados con las acciones de resolución de problemas que realizan grupos de personas y que evolucionan con el tiempo, y los significados de estos objetos emergentes están íntimamente ligados a los problemas y actividades realizadas para su solución, no pudiendo reducir estos significados solo a la definición matemática de estos objetos.

En estos últimos párrafos hemos presentado algunos principios del Enfoque ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática (EOS), por considerarlo afín a los propósitos de nuestra investigación ya que cuenta con herramientas teóricas que nos permitirán el logro de nuestros objetivos.

3.2 ELEMENTOS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA CONSIDERADOS EN ESTA INVESTIGACIÓN

Lo presentado en la sección previa, nos permite afirmar que el Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) es el que nos brinda las herramientas teóricas y metodológicas que nos permitirán resolver nuestra pregunta de investigación, por ello haremos una exploración acerca de sus principales características.

El EOS tiene su origen en la pretensión de dar una respuesta precisa a una serie de cuestionamientos que originan las diversas teorías sobre la didáctica de la matemática:

> "¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media,…) en un contexto o marco institucional determinado? (…) ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?" (Godino, 2012, p.52).

Estos cuestionamientos son considerados de tipo onto-semióticos en el sentido que se originan en el estudio conjunto del pensamiento matemático, los emergentes que acompañan a los objetos matemáticos, las situaciones problema y los factores que los condicionan, y en ese sentido, el EOS define al objeto matemático como: "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas" (Godino, 2002, p. 5), por ejemplo, operaciones, algoritmos, conceptos, enunciados, términos, etc.

Según los mismos autores los objetos matemáticos pueden ser agrupados o clasificados de distintas formas, en particular, proponen clasificarlos en categorías, o tipos de entidades matemáticas primarias, según la función que desempeñan en el trabajo matemático, estas categorías son lenguaje, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos.

Dado que nuestra investigación tiene como foco identificar los significados de la igualdad en contextos geométricos y desde la perspectiva del EOS esto requerirá identificar los conceptos, algoritmos, argumentos, procedimientos y el lenguaje matemático, que están involucrados al enfrentar situaciones problema, la identificación de estos objetos primarios es fundamental para lograr los objetivos que nos hemos propuesto.

Para el EOS, estos elementos son conocidos como objetos matemáticos primarios ya que son los constituyentes de otros objetos matemáticos más complejos.

Además, y tal como indican Pino-Fan, Godino y Font (2011), el objeto matemático alcanza su significado cuando es considerado junto con todos estos objetos emergentes primarios propios, en este caso solo se puede comprender el significado del objeto matemático si es que se comprenden sus definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas de un tipo en particular, con procedimientos de solución propios y argumentos que justifiquen estos procedimientos, empleando la terminología que le es inherente.

De acuerdo con el EOS "los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo" (Godino y Batanero, 1994, p. 5). De lo anterior, se tiene que la actividad matemática de resolución de problemas es central y es a partir de ella de donde emergen los objetos primarios que permiten construir el significado del objeto.

> En el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas, lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. (Godino y Batanero, 1994, p. 5).

En este fragmento se introducen una serie de términos que consideramos importante definir.

En la línea del EOS, un problema es asumido como "toda situación que requiera analizar la información, establecer relaciones lógicas y obtener conclusiones" (Malaspina, 2007, pp. 369-370). En los problemas matemáticos, en particular, intervienen objetos matemáticos o símbolos que están explícitos o implícitos en el enunciado del problema o en las tareas que se realizan para su solución.

Para el EOS se define practica como la actividad de matematizar, es decir: "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 8). Esta definición implica que, es una actividad personal, que se hace significativa en la medida que permite lograr resolver el problema que la origina, o comunicar, validar y generalizar la solución.

El EOS define institución como "las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas" (Godino y Batanero, 1994, p. 9). Se puede identificar a la institución como una comunidad de prácticas donde sus miembros se encuentran comprometidos con los mismos problemas y esto es lo que promueve la realización de prácticas sociales similares pero condicionadas por los instrumentos con los que cuentan, sus reglas y modo de funcionamiento, por ejemplo, un grupo de alumnos que conforma una clase de matemática y resuelve un problema, puede ser considerado como una institución.

En base a esta definición de institución, el EOS define un sistema de prácticas institucionales como, el conjunto de "las practicas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I" (Godino y Batanero, 1994, p.10). Este sistema de prácticas institucionales siempre estará asociada a un campo de problemas y es de carácter social, lo que permite que sea observable en su dimensión no interiorizada.

El objeto matemático institucional se diferencia del objeto matemático personal por el hecho de que el primero será un emergente de las prácticas institucionales que están asociadas a un determinado campo de problemas, mientras el segundo será un emergente de las prácticas personales.

Todas estas definiciones permiten al EOS definir el significado de un objeto matemático institucional OI como "el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge OI en un momento dado" (Godino y Batanero, 1994, p. 13). En esta definición se debe considerar que el significado del objeto matemático está referido a la acción que se realiza con el objeto matemático por lo que su significado depende de la institución, así como de su evolución temporal.

Adicionalmente, indican que se alcanza a comprender el significado de un objeto matemático cuando se es capaz de "reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente" (Godino y Batanero, 1994, p. 14).

Debemos hacer notar que los problemas o situaciones problemas, constituyen el origen de la actividad, mientras el lenguaje sirve como instrumento para realizar las acciones necesarias para su resolución.

La cuestión del significado de un objeto matemático es importante para el EOS y en este sentido se asume que el sistema de prácticas, que incluye componentes operativos y discursivos, se constituye en el significado sistémico o praxeológico del objeto matemático. Se puede afirmar que el significado abarca todo el contenido asignado a una expresión y es aquello a lo que hace referencia un sujeto en un lugar y tiempo determinado.

Los objetos matemáticos primarios son precisamente los que permitirán determinar el significado de un objeto matemático, estos son:

> 1.- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual)
>
> 2.- Situaciones problemas (aplicaciones intra o extra matemáticas, ejercicios)
>
> 3.- Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) como recta, punto, numero, media función.
>
> 4.- Proposiciones (enunciados sobre conceptos)
>
> 5.- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo)
>
> 6.- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones, deductivos a de otro tipo). (Malaspina, 2007, p. 371)

Estos objetos primarios son estructurados en un esquema denominado Configuración epistémica, donde se puede apreciar a todos los objetos primarios que están involucrados en la asignación del significado del objeto. El EOS propone el esquema que mostramos en la Figura 2, para la configuración epistémica de un objeto matemático.

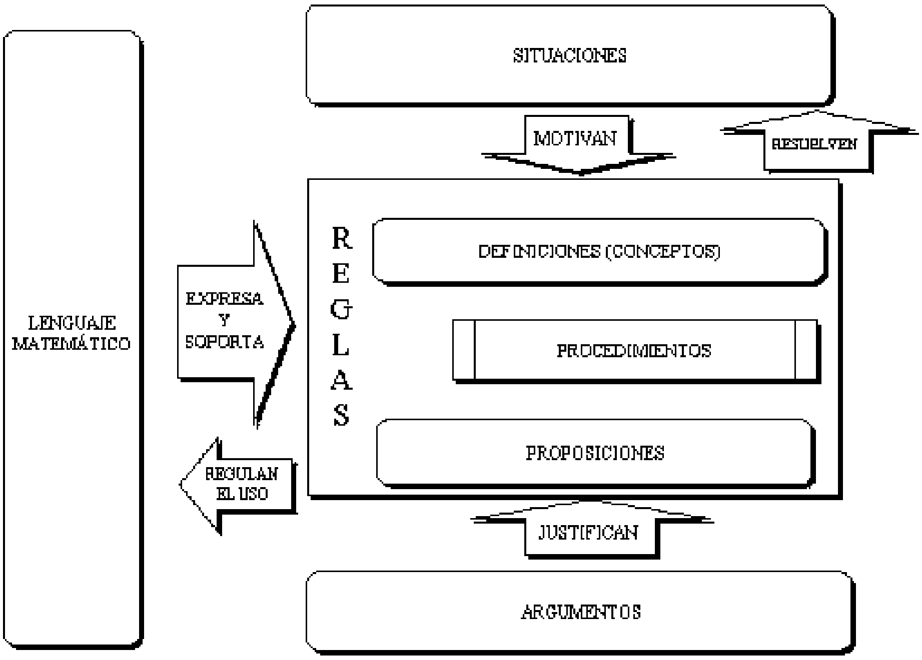


Figura 2. Componentes y relaciones en una configuración epistémica
Fuente: Font y Godino (2006. p.69)

La Figura 2 nos muestra que las situaciones problema requieren el uso de definiciones, procedimientos y proposiciones que conforman las reglas para resolver el problema, estas están expresadas en lenguaje matemático y regulan el uso de este lenguaje, además se observa que los argumentos son los que justifican el empleo de estas definiciones, procedimientos y proposiciones.

Esta configuración es epistémica cuando es compartida o surge de una institución, además de que nos permite identificar un significado asociado al objeto matemático emergente de la situación problema, de modo que se constituirá en nuestra unidad de análisis.

Como este significado es el que surge en una institución, se le conoce como significado institucional del objeto matemático; este significado institucional es tipificado según su utilización para el análisis didáctico de la siguiente manera:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.

- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. (Godino y Font, 2007, p.2)

Estos tipos de significados institucionales y la relación entre ellos son visibles en un esquema que se muestra en la Figura 3.

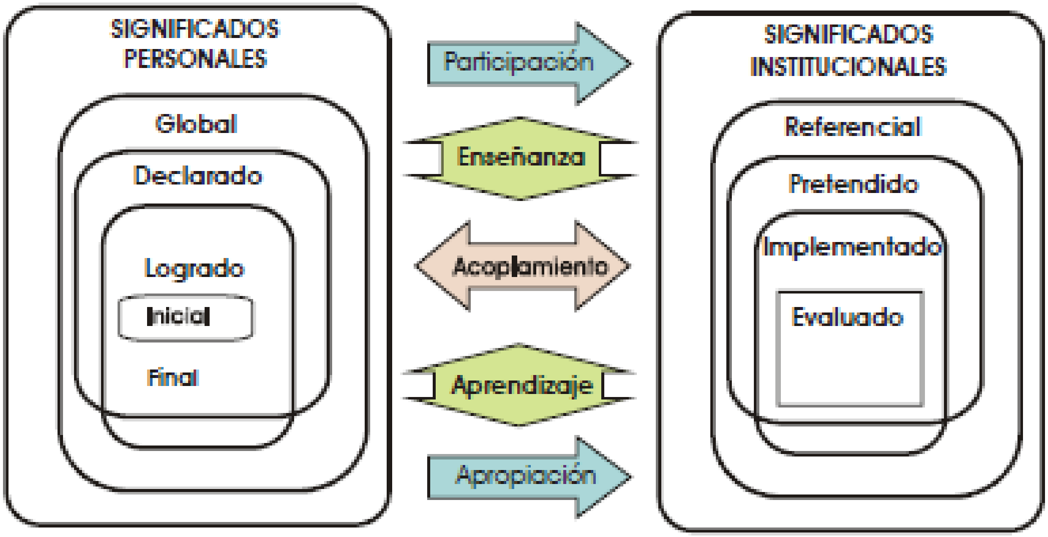


Figura 3. Tipos de significados institucionales y personales
Fuente: Godino y Font (2007, p.3)

El significado institucional de referencia es el que construye el investigador a partir de los textos de matemática especializados o de otros que lo emplean, además de investigaciones y artículos científicos que permiten generar un significado que es parte del Holo significado de la igualdad y servirá como referente para realizar el posterior análisis que se realizará en la investigación.

El significado institucional pretendido es el que, en una determinada institución, se aspira lograr, este se hace patente en los documentos y textos hechos por las instituciones encargadas del sistema educativo, los programas de estudio, los planes curriculares, sesiones de clase y material elaborado por los docentes para desarrollar sus clases.

En particular, se concretizan en los libros que se emplean como material de aprendizaje de los estudiantes de secundaria, en nuestro caso, en el libro oficial de matemática del tercer año de secundaria. En este se identificarán los significados que dan a la igualdad en contextos geométricos.

Como el objetivo general es identificar los significados de la igualdad que emergen de su empleo en la sección correspondiente a Geometría en el libro oficial de matemática del tercer año de educación secundaria, entonces, solo se requiere de dos herramientas teóricas propuestas por el EOS: el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido.

Los significados institucionales implementado y evaluado escapan del objetivo de investigación de nuestro estudio debido a que no pretendemos realizar ninguna actividad docente o de evaluación y estos no serán objeto de nuestro estudio.

Otro de los elementos teóricos que presenta el EOS corresponde a la idoneidad epistémica. Es uno de los criterios que permite valorar la idoneidad global de un proceso de enseñanza aprendizaje, en nuestro caso específico será uno de los criterios que nos permite valorar la idoneidad de un texto matemático escolar.

En términos de Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) "se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos) respecto de un significado de referencia" (p.4).

En otras palabras este criterio nos permite valorar si las matemáticas que se enseñan son "buenas" matemáticas, es decir el grado de representatividad de la matemática a enseñar, respecto del significado holístico del objeto matemático que se va a enseñar.

En algunas investigaciones hechas considerando esta herramienta teórica del EOS se han establecido una serie de indicadores de idoneidad epistémica.

> Muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; presentación de los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; establecimiento de relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado. (Font, Adan y Ferreres, 2015, Pp. 3-4).

En nuestro caso, la idoneidad epistémica será valorada entre, el significado pretendido de la igualdad, que está presente en el libro del tercer año de secundaria, y el significado de referencia, que es construido en base al análisis de los textos de matemática que serán seleccionados para este fin.

Adicionalmente, otra de las herramientas teóricas que el EOS propone es el de la idoneidad ecológica, que es el "grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla" (Godino, 2011, p. 6). Esto quiere decir que el proceso de estudio está condicionado por el contexto donde se desarrolla, ya que este fija los fines y valores para la educación de las personas.

Los indicadores de idoneidad ecológica propuestos por Godino (2011) son: si la implementación y evaluación de los contenidos, corresponden a lo establecido en el currículo; si la investigación promueve una práctica docente reflexiva e innovadora; si se integran las nuevas tecnologías en el desarrollo curricular; si los contenidos contribuyen al desarrollo social y profesional de los estudiantes; si se contempla la educación en valores y el pensamiento crítico; si los contenidos están relacionados con otros contenidos de la matemática y de otras áreas.

Estos indicadores nos permiten valorar la idoneidad ecológica del texto de secundaria.

Finalmente, es necesaria la construcción de la configuración epistémica de cada significado, pues es esta la que muestra los objetos primarios que nos permiten describir el significado del objeto matemático, tanto los de referencia como los pretendidos.

3.3 ESTUDIO DEL SIGNO IGUAL EN CONTEXTOS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS DESDE LA PERSPECTIVA DEL EOS

Con respecto a los diferentes significados que se le atribuyen al signo igual tomaremos como referencia a Molina (2006) quien, como parte de una investigación, recoge los diversos significados, que se le atribuyen al signo igual, en contextos Aritméticos y Algebraicos.

La Figura 4 muestra cada uno de los significados que la autora identifica luego de una exploración de investigaciones que han tenido como objeto de estudio al signo igual y los significados que se le asigna a este, cuando es empleado al resolver problemas de contextos aritméticos o algebraicos. Los ejemplos ilustran el uso del signo igual, con un determinado significado, en estos contextos.

Sin embargo, es necesario hacer hincapié en que estos significados son los que asignan los sujetos, cuando se encuentran frente a un problema que requiere de su uso, sin considerar si su uso es matemáticamente correcto, es decir, en algunas ocasiones el signo igual es empleado de maneras que no tienen un sustento en conceptos o propiedades matemáticas.

SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL		Ejemplos (clasificados según el tipo de expresiones que contienen)	
		Aritméticos	**Algebraicos**
Propuesta de actividad de cálculo		$16 \div 3 =$	$x(x + 1) - 3x(x + 5)=$
Operador		$4 \times 5 = 20$	$x(x-2) + 3x^2= 4x^2 + 2x$
Separador		(No existe)	$f(x) = x^2= f^2(x)=x^4$
Expresión de una acción		$24 = 12 + 12$ $12 + 12 = 24$	$2x = x(x-2) - x^2 + 4x$ $x(x-2) - x^2 + 4x = 2x$
Expresión de una equivalencia condicionada (Ecuación)		(No existe)	$x^2 + 4x = 5x - 6$
Expresión de una equivalencia	*Equivalencia Numérica*	$4 + 5 = 3 + 6$ $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ $2/3 = 4/6$	(No existe)
	Equivalencia Simbólica	(No existe)	$x^2 + 2x = x(x-2)$ $(a + b)^2= a^2 + b^2 + 2ab$ $a + b = b + a$
	Identidad estricta	$3 = 3$	$x = x$
	Equivalencia por definición o por notación	$3/4= 6/8$ $7/5 = 7:5$ $100\ cm = 1m$	$a/b = ab^{-1}$
Definición de un objeto matemático		$1^0=0$	$a^0= 1,\ a \neq 0$ $r = ax - by + c = 0$ $f(x) = 3x + 2$ $c = a + b$ (Definidos a y b se introduce el valor de una nueva variable)
Expresión de una relación funcional o de dependencia		(No existe)	$c = 2\pi r$ $y = 3x - 2$ (cuando la variable "y" ha sido definida a priori)
Indicador de cierta conexión o correspondencia		Una bici = 50€	Una bici = 3x + 5
		= 3	
Aproximación		$1/3 = 0.33$	(No existe)
Asignación de un valor numérico		(No existe)	$x = 4$ $a = 30\ cm^2$

Figura 4. Ejemplos de los diferentes significados del signo igual identificados en el contexto de la aritmética y el álgebra.
Fuente: Molina (2006, p. 153)

A continuación, haciendo uso de las herramientas metodológicas de investigación propuestas por el EOS, empleamos las configuraciones epistémicas para describir los diferentes significados que se le asignan al signo igual en los contextos algebraicos y aritméticos.

La construcción de estas configuraciones nos permitirá identificar los objetos primarios constituyentes del significado de la igualdad, que surgen mientras se da solución a situaciones problema, que involucran el uso del signo de la igualdad.

Dos de los significados considerados por Molina (2006) y que son denominados como, *signo igual entendido como separador* y *signo igual entendido como indicador de una cierta conexión o correspondencia*, describen situaciones donde el signo igual es empleado de manera errónea o imprecisa, en términos matemáticos, por los estudiantes o docentes en sus actividades de estudio de las matemáticas.

La descripción de estos significados correspondería, en términos del EOS, a la descripción de las configuraciones cognitivas; dado que ello escapa de los objetivos de este trabajo, no serán considerados entre los significados para los que se construirá la configuración epistémica.

Nosotros nos remitiremos a presentar las configuraciones epistémicas de los otros nueve significados que Molina (2006) presenta, los cuales hemos agrupado debido a sus similitudes respecto de los objetos primarios que los caracterizan, es decir, al construir las configuraciones epistémicas de estos significados se han encontrado significados que poseen objetos primarios similares.

A continuación, presentamos las configuraciones epistémicas de los significados agrupados del signo igual, que hemos construido a partir de los significados identificados por Molina (2006),

Propuesta de actividad de cálculo, equivalencia condicional o ecuación, equivalencia (numérica, simbólica, identidad o por definición), operador, expresión de una acción, definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional, aproximación y asignación de una valor numérico.

En primer lugar se presenta el campo de problemas en los cuales se usa el signo igual, para indicar que se requiere determinar el resultado de una secuencia de operaciones entre números o variables, dispuestos a la izquierda, derecha o ambos miembros del signo, este es el denominado *Propuesta de actividad de cálculo*.

En ese caso el signo igual se emplea como un símbolo que indica que la secuencia de operaciones que está a un lado del signo debe ser simplificada, esto implica hacer uso de las propiedades del cuerpo de los números reales o las del anillo de los polinomios.

Cerradura: Para todo a, b $\in$ R entonces, a+b y a.b $\in$ R.

Asociativa: Para todo a, b, c $\in$ R entonces a+(b+c)=(a+b)+c y a.(b.c)=(a.b).c

Conmutativa: Para todo a, b $\in$ R entonces, a+b=b+a y a.b=b.a

Elemento neutro: existe 0$\in$R tal que, para todo a$\in$R, entonces a+0=0+a=a; existe 1$\in$R tal que, para todo a$\in$R, entonces a.1=1.a=a

Elemento opuesto: Para cada a$\in$R, existe un elemento –a $\in$R, tal que a+(–a)=0.

Elemento inverso: Para cada a ≠ 0 en R, existe un elemento a^{-1}ϵR, tal que $a.a^{-1}= 1$.

Distributiva: Para todo a, b, c ϵ R entonces a.(b+c)=a.b+a.c

Si a, b, c son polinomios, estos cumplen todas las propiedades anteriores menos la existencia del elemento inverso del producto.

Estas propiedades son usadas para obtener el resultado de las operaciones indicadas en cada problema, para lo cual se emplea un método algorítmico de solución llamado simplificación de expresiones numéricas o simplificación de términos semejantes.

La Tabla 1 muestra la configuración epistémica que describe los objetos primarios relacionados con el significado del signo igual que Molina (2006) denomina, *propuesta de actividad de cálculo*.

Tabla 1. Configuración epistémica del significado del signo igual, *propuesta de actividad de cálculo*.

Problemas	Esta configuración abarca problemas como el siguiente: Problemas donde se requiere determinar el resultado de una secuencia de operaciones entre números o variables, dispuestos a la izquierda, derecha o ambos miembros del signo igual. • 16:3=__. • x(x+1) – 3x(x+5)= __. • __ = 12+6 • __ = x(x-10) + 5x(x+2)
Lenguaje	Verbal: • simplificación, expresiones, igual, operaciones, polinomio, secuencia, números, variables, suma, resta, producto, cociente, etc. Simbólico • :=, +, -, . , :, (),x, y, z, 1, 2, 3, etc.
Definiciones, conceptos	Igual.- es un símbolo que se emplea para indicar que la secuencia de operaciones que está a un lado del signo debe ser simplificada. Adición, Sustracción, Multiplicación, división, etc. Constante, variable, termino, expresión algebraica, polinomio
Proposiciones	Propiedades del cuerpo de los números reales: Propiedades de la estructura de anillo de polinomios.
Procedimientos	Reducción de términos semejantes.
Argumentos	Los procedimientos se basan en propiedades de la estructura de cuerpo de los números reales.

En segundo lugar, otro significado que es presentado por Molina (2006) es denominado, *signo igual como expresión de una equivalencia condicional o ecuación*, el cual abarca situaciones problema en las que se emplea el signo de la igualdad, de manera que, la verdad de la expresión que la contiene está condicionada por el valor que se le asigna a su variable o incógnita, de modo que, una ecuación se define como un enunciado en el que se indica que dos expresiones de la misma variable son iguales.

Aquí se emplean toda la terminología que le corresponde a la teoría de ecuaciones, que en el caso de los estudiantes de secundaria, está restringida a las ecuaciones de primer y segundo grado.

Todo ello requiere el conocimiento de los métodos de solución de ecuaciones basados en las propiedades del anillo de polinomios, así como el conocimiento de la definición de, solución de una ecuación, conjunto solución de una ecuación, ecuaciones equivalentes como aquellas que tienen las mismas soluciones, las propiedades del cuerpo de los números reales y las propiedades del anillo de polinomios; que junto con la aplicación correcta de los diferentes métodos de solución de ecuaciones y el uso del valor numérico obtenido en la expresión de la ecuación para la verificación de la solución, sirven de fundamento de la adecuada resolución de la ecuación.

La Tabla 2 muestra la configuración epistémica que sintetiza estas características

Tabla 2. Configuración epistémica de la igualdad como una *equivalencia condicional o ecuación*.

Problemas	Esta configuración abarca problemas como los siguientes: P. 1. Problemas donde se requiere la solución de ecuaciones (lineales o cuadráticas), por ejemplo: • Halle la solución de la ecuación: x(x-10) = 5x(x+2) • El área de un terreno rectangular es numéricamente equivalente a su perímetro, si un lado mide el doble que el otro ¿Cuál es la medida de su diagonal?
Lenguaje	Verbal: • Ecuación, simplificación, igual, solución, raíz, conjunto solución, polinomio, operaciones, números, variables, suma, resta, producto, cociente, etc. Simbólico • :=, +, -, . , :, (),x, y, z, 1, 2, 3, ax+b=0, $ax^2+bx+c=0$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, etc
Definiciones, conceptos	Igual.- es un símbolo que indica que la expresión que está a la izquierda de este, se refiere al mismo objeto que la expresión que está a su derecha, para determinados valores que asume la variable que emplea. Ecuación, ecuaciones equivalentes, solución, conjunto solución, etc
Proposiciones	Propiedades del cuerpo de los números reales: Propiedades del anillo de polinomios. Teorema fundamental del algebra, teorema del factor, naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática, etc.

Procedimientos	Simplificación.- es el proceso por el cual una expresión es sustituida por otra equivalente más simple, al resolver operaciones entre sus términos. En el caso de las ecuaciones lineales se busca transformar la ecuación original ax+b=0 en otra de la forma x= –b/a. En el caso de las cuadráticas es frecuente buscar factores lineales para obtener las raíces del polinomio o emplear la formula cuadrática $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Métodos de solución de ecuaciones.- existen distintos métodos para resolver ecuaciones.
Argumentos	Los procedimientos de simplificación aritmética se basan en propiedades de la estructura de cuerpo de los números reales. Los procedimientos de simplificación algebraica se basan en propiedades de la estructura de anillo de los polinomios. La solución de ecuaciones depende de la concepción (histórica, cultural, pedagógica o matemática) de los sistemas numéricos y las propiedades que se emplean.

En tercer lugar, Molina (2006) presenta como distintos los significados que denomina, *equivalencia numérica, equivalencia simbólica, equivalencia por notación e identidad estricta*, sin embargo, desde el enfoque adoptado, estos se refieren a un mismo tipo de situaciones problemas, aquellas donde el signo igual relaciona dos expresiones que son iguales.

La igualdad, en este sentido, se presenta en problemas donde se relacionan dos expresiones aritméticas o algebraicas con el signo igual, o donde el signo se utiliza para establecer que una expresión es la definición de otra.

El significado del signo igual es el de la identidad, es decir cuando un objeto es igual a sí mismo, la cual es evidente como cuando se indica que, a=a, o la igualdad está dada por una relación o definición establecida por alguna causa, como sucede en las fórmulas matemáticas.

En este caso se emplean las propiedades del cuerpo de los números reales para justificar las operaciones que se establecen y la lógica deductiva para la justificación de las deducciones de estas expresiones.

En la Tabla 3 se muestra la configuración epistémica de los significados que muestran una equivalencia entre objetos matemáticos.

Tabla 3. Configuración epistémica agrupada del signo igual como *expresión de una equivalencia numérica, equivalencia simbólica, identidad estricta, equivalencia por definición o notación, operador y expresión de una acción*.

Problemas	Esta configuración abarca problemas como los siguientes: Problemas donde el signo igual relaciona dos expresiones aritméticas distintas de un mismo objeto matemático. • 4+12=17-1 • $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ Problemas donde se requiere comprobar que dos expresiones escritas una a la derecha y otra a la izquierda del signo igual efectivamente son lo mismo. • 4x5=20, • $x(x-2) + 3x^2= 4x^2-2x$ Problemas donde el signo igual relaciona dos expresiones algebraicas de un mismo objeto matemático, una fórmula que indica una propiedad. • $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ • a+b=b+a. El signo igual une dos notaciones alternativas de un mismo objeto, que son equivalentes por una definición. • $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, • $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
Lenguaje	Verbal: Fórmula, identidad, simplificación, igual, solución, raíz, conjunto solución, polinomio, operaciones, números, variables, suma, resta, producto, cociente, demostración, etc. Simbólico: =, +, -, . , :, (),x, y, z, 1, 2, 3, a, b, c, etc.
Definiciones, conceptos	Igual.- es un símbolo que se emplea para indicar que la expresión que está a la izquierda de este, se refiere al mismo objeto que la expresión que está a su derecha. Adición, multiplicación, sustracción, división, potenciación, radicación, etc. Constante, variable, expresión algebraica, término, ecuación, identidad, equivalencia, reflexiva, simétrica, transitiva, etc.
Proposiciones	Propiedades del cuerpo de los números reales: Propiedades del anillo de polinomios.
Procedimientos	Simplificación Métodos de solución de ecuaciones. Deducción lógica. Métodos de demostración
Argumentos	Los procedimientos de simplificación aritmética se basan en propiedades de la estructura de cuerpo de los números reales. Los procedimientos de simplificación algebraica se basan en propiedades de la estructura de anillo de los polinomios. La relación de igualdad es una relación de equivalencia

Finalmente, los significados que Molina (2006) denomina *definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional o dependencia*, *aproximación y asignación de un valor numérico*, también pueden ser expresados mediante una sola configuración epistémica.

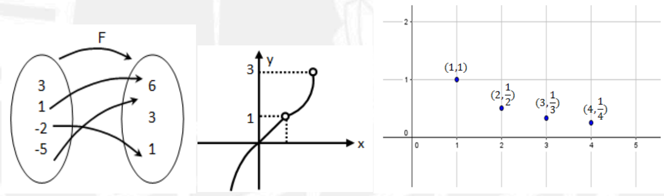
En estos casos, se parte de emplear el signo igual como un símbolo que indica una correspondencia entre un objeto matemático y otro, correspondencia que se expresa mediante una expresión que relaciona uno con otro, en estos casos las dos expresiones a ambos lados de la igualdad no son iguales de manera evidente, la igualdad se establece como una correspondencia entre dos expresiones.

En algunas de estas correspondencias, se le llama regla de correspondencia a la fórmula o expresión algebraica que establece la correspondencia entre variables, en donde es posible hacerlo de esta manera.

Además es necesario observar que se establece la igualdad entre un objeto matemático y una expresión numérica, algebraica o de otro tipo.

La Tabla 4 muestra los elementos primarios que constituyen la configuración epistémica del signo igual que se emplea en estos casos.

Tabla 4 Configuración epistémica agrupada del signo igual como *definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional o dependencia, aproximación y asignación de un valor numérico.*

Problemas	Esta configuración abarca problemas como los siguientes: Problemas donde el signo igual asigna una expresión o valor numérico a un objeto matemático. • f(x)=2x+3 Problemas donde se establece una relación de dependencia entre variables o parámetros. • $l_c = 2\pi R$, Situaciones donde el signo igual se emplea para asignar un valor numérico a una variable. • Si x=3, entonces, $y=x^2-1$ Problemas en los que se establece una igualdad entre un número y otro mediante una aproximación de sus valores. • $0{,}3333\ldots. = 0{,}3$
Lenguaje	Verbal: Formula, función, simplificación, igual, números, variables, parámetro, suma, resta, producto, cociente, dominio, rango, gráfica, valor numérico, dependiente, independiente sucesión, parámetro, límite, etc. Simbólico: =, +, -, . , :, (), x, y, f(x), 1, 2, a, b, f(x), f(x)=ax+b, Dom(f), $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ... etc. Gráfico: 
Definiciones, conceptos	Igual.- es un símbolo que se emplea para indicar que existe una correspondencia entre un objeto matemático y otro, correspondencia que se expresa mediante una expresión que relaciona uno con otro. Adición, multiplicación, división, sustracción, potenciación, radicación, etc. Constante, variable, expresión algebraica, término, formula, regla de correspondencia, dominio, rango, gráfica de una función, sucesión, limite.
Proposiciones	Propiedades del cuerpo de los números reales, propiedades del anillo de polinomios, propiedades de la solución de ecuaciones, propiedades de la teoría de funciones
Procedimientos	Simplificación, métodos de solución de ecuaciones, tabulación, determinación del dominio y rango, grafica de una función aproximación.
Argumentos	Los procedimientos de simplificación aritmética se basan en propiedades de la estructura de cuerpo de los números reales. Los procedimientos de simplificación algebraica se basan en propiedades de la estructura de anillo de los polinomios. La relación de igualdad es una relación de equivalencia. La noción de función como la expresión de una correspondencia y toda la teoría de funciones permiten establecer relaciones entre objetos distintos.

En esta sección hemos presentado las configuraciones epistémicas que hemos construido con el fin de mostrar los objetos primarios que emergen al resolver situaciones problemas que permiten comprender cada uno de los significados del signo igual presentados por Molina (2006).

3.4 ESTUDIO DE LA IGUALDAD DE NÚMEROS REALES DESDE LA PERSPECTIVA DEL EOS

Respecto de la igualdad, existe un estudio realizado por Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004) en el que, basados en la construcción de las configuraciones epistémicas para cada significado que presenta la igualdad entre números reales, pretenden construir el holo significado de la igualdad, de modo que este objeto sea descrito como un todo complejo y coherente.

> Con relación a la noción de igualdad, el objetivo de este trabajo es mostrar como los diferentes contextos de uso delimitan significados específicos, que se sintetizan en distintas definiciones de la noción de igualdad, no siendo posible privilegiar ninguna de ellas. (Whilhelmi, Godino y Lacasta, 2004, p.3)

Como resultado, Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004) identifican ocho diferentes significados de la igualdad que clasifican según el dominio matemático en el que se encuentran, estos son: *igualdad como equivalencia, igualdad de orden, igualdad métrica, igualdad conectiva, igualdad algebraica, igualdad funcional, igualdad como proceso de paso al límite, igualdad numérica.*

Asimismo, remarcan que estas definiciones no están jerarquizadas, es decir no se puede afirmar que una sea superior a otra, su uso depende del contexto en el cual se desenvuelve la solución de un problema, o en general, de su uso.

La Figura 5 muestra la clasificación hecha de las definiciones de igualdad, que surgen de su uso, en diferentes dominios de la matemática, tomando como referencia el conjunto de números reales, se indica también su descripción formal y una representación gráfica que pretende ayudar a identificar cada definición.

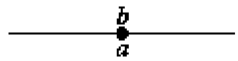
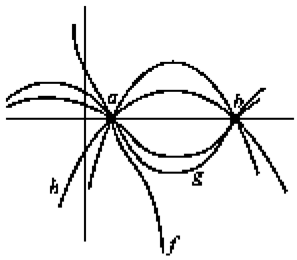
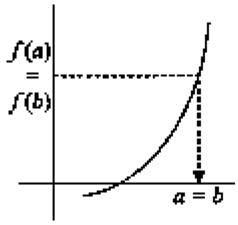
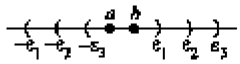
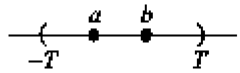
Definición	Descripción ($a = b \iff$)	Representación
Equivalencia	$\{a\} \equiv \{b\}$	
De orden	$\lvert a \leq b \wedge b \leq a \rvert$	
Métrica	$d(a;b) = \lvert a - b \rvert = 0$	
Conectiva	$\{a;b\}$ conexo	
Algebraica	$[\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 1]$	De la negación 
Funcional	$\exists f \in F_t(D), \{a,b\} \subseteq D$, f no lineal, tal que $f(a) = f(b)$	
Proceso límite	$\lvert a - b \rvert < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$	
Numérica	$T > 0$ (arbitrario, pero fijo): $\lvert a - b \rvert < T$	

Figura 5. Definiciones de la noción de igualdad.
Fuente: Wilhelmi, Godino y Lacasta (2004, p. 7)

Los autores hacen notar que cada definición se puede considerar como un objeto emergente de un determinado sistema de prácticas y son estas quienes definen un modelo de la noción de igualdad, de manera que cada significado tiene una configuración epistémica que está constituida por los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que se deben emplear cuando se pretende resolver una situación problema que implica el uso de estos objetos primarios emergentes, los cuales requieren de un lenguaje particular que lo diferencia de los otros tipos de problemas y por lo tanto se considera como un significado distinto.

Para nuestra investigación, presentamos las configuraciones epistémicas de los significados de igualdad en IR que se corresponden con el nivel educativo al que nos dirigimos, para ello tomamos como referencia los contenidos establecidos en el DCN (Perú, 2008, Pp. 316-339) para el área de matemática y que se organizan en función del estudio de Números, relaciones y funciones; Geometría y medida; y Estadística y probabilidad.

De manera que solo hemos descrito los objetos primarios de los significados que presentamos en las siguientes tablas, que muestran la configuración epistémica respectiva, con la finalidad de describir los constituyentes primarios de los significados de la igualdad de números reales, que se corresponden con los organizadores de la matemática del nivel secundaria.

El primer significado de la igualdad de números reales es denominado *Igualdad como equivalencia*.

Según los autores, la igualdad es una relación de equivalencia que particiona al conjunto de los números reales en clases de equivalencia, donde cada clase es representada por un número, si tenemos dos representantes de la misma clase de equivalencia, estos dos serán iguales, de modo que no importa el representante sino el valor que representa. Esto se corresponde con una identidad de nombre, de modo que es posible realizar transformaciones al representante de una clase de equivalencia, mediante operaciones aritméticas, manteniéndose la igualdad durante todo el proceso. El uso de las propiedades del cuerpo de los números reales y el correcto empleo de estos, justifica la validez del procedimiento que se sigue en la solución de los problemas.

La Tabla 5 muestra los objetos primarios presentes cuando se hace uso de la igualdad en este sentido.

Tabla 5. Configuración epistémica de la *igualdad como equivalencia*

Problemas	Probar que dos representaciones del mismo número son iguales. En particular, demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
Lenguaje	Verbal: • Igualdad, objeto matemático, representante, unidad, producto, potencia. Simbólico: a=b ⇔ {a}≡{b} $\sqrt{2} \overset{(1)}{=} \sqrt{2}\cdot 1 \overset{(2)}{=} \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \overset{(3)}{=} \frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \overset{(4)}{=} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \overset{(5)}{=} \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \overset{(6)}{=} \frac{2}{\sqrt{2}}$
Definiciones, conceptos	Número real, operaciones aritméticas. La igualdad se define como una identidad de nombre o de representante
Proposiciones	Propiedades del cuerpo de los números reales. Propiedades de la adición, multiplicación, sustracción, división, potenciación y radicación de números reales.
Procedimientos	Se hacen transformaciones de las expresiones, que conserven la igualdad, hasta la obtención de una tautología semántica, esto es, del mismo representante para ambos números
Argumentos	Los procedimientos de simplificación aritmética se basan en propiedades de la estructura de cuerpo de los números reales. La relación de igualdad es una relación de equivalencia.

Los autores indican que esta igualdad es una igualdad semántica, ya que solo se cambia el representante y no el objeto al cual estos se refieren.

Asimismo, se establece la igualdad, haciendo uso de la relación de orden en los reales, menor o igual que (≤), de modo que si se toma dos números reales a y b y se cumple que a≤b y también b≤a, esto solo es posible si, a=b, y es así, debido a que el conjunto de números reales es ordenado.

La Tabla 6 muestra los objetos primarios que surgen del uso de la igualdad en este sentido.

Tabla 6. Configuración epistémica de la *igualdad de orden*

Problemas	Probar que dos representaciones del mismo número son iguales. En particular, demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
Lenguaje	Verbal: • Igualdad, objeto matemático, orden en IR, propiedad anti simétrica. Simbólico: a=b ⇔ [a≤b ∧b≤a], a=b ⇔ (a∊(-∞; b] ∧b∊(-∞;a])
Definiciones, conceptos	Número real, operaciones aritméticas, valor numérico, operaciones. Dos números reales a y b son iguales, a = b, si la relación de orden en IR, cumple para ellos, la propiedad anti simétrica.
Proposiciones	La igualdad entre dos números reales a y b puede también establecerse por doble desigualdad; IR, dotado de las operaciones suma (+) y producto (.) y de la relación de orden menor o igual (≤), es un cuerpo ordenado
Procedimientos	La demostración se hace por el método de reducción al absurdo. Sean A=(-∞;$\sqrt{2}$] ∧ B=[$\sqrt{2}$,+∞) por tricotomía $\frac{2}{\sqrt{2}}$∊ A; o bien $\frac{2}{\sqrt{2}}$∊ B; o bien $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ Si $\frac{2}{\sqrt{2}}$∊ A entonces $\frac{2}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$, como $\sqrt{2}$>0, se cumple que $\frac{2}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} < \sqrt{2}.\sqrt{2}$ y, por lo tanto 2<2 que es absurdo, entonces $\frac{2}{\sqrt{2}} \notin$ A. De la misma manera se prueba que $\frac{2}{\sqrt{2}} \notin$ B. Por lo que se concluye que $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
Argumentos	Interpretación de la definición aritmética en función de ciertas características atribuibles a IR (cuerpo ordenado).

Esta configuración nos muestra que, teóricamente, para la discriminación de números reales se procede en dos pasos: se dota al conjunto de números reales de una propiedad de orden y se establece en función de ésta la igualdad o no de dos números.

Por otra parte, haciendo uso de la definición de valor absoluto, es posible definir la distancia entre dos números reales como el valor absoluto de la diferencia de ambos, de manera que dados dos números reales a y b, ambos serán iguales si la distancia entre ellos es cero.

La Tabla 7 muestra los objetos primarios que emergen del uso de la igualdad en este sentido.

Tabla 7. Configuración epistémica de la *igualdad métrica*.

Problemas	Probar que dos representaciones del mismo número son iguales. En particular, demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
Lenguaje	Verbal: • Igualdad, objeto matemático, representante, distancia. Simbólico: a=b $\Leftrightarrow$d(a,b)=|a-b|=0
Definiciones, conceptos	Número real, operaciones aritméticas, valor numérico, operaciones. Dos números reales a y b son iguales, a = b, si la distancia entre ambos es nula
Proposiciones	El valor absoluto dota al conjunto de los números reales de una métrica (estándar). Se define la distancia entre dos números a y b, se denota d(a; b), como el valor absoluto de la diferencia (|a-b|)
Procedimientos	Suponiendo que ε=d$\left(\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$=$\left\lvert\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right\rvert$>0 En este caso puede suceder que $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$, o bien que $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} < 0$. Si $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$ entonces 0< ε=d$\left(\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$=$\left\lvert\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right\rvert = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = \frac{2-2}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}}$=0, de donde se tiene que 0<0 lo cual es absurdo. Del mismo modo se prueba lo absurdo de asumir $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} < 0$, entonces no es posible asumir que ε>0 por lo tanto, ε=0, lo cual implica que $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
Argumentos	Interpretación de la definición aritmética en función de ciertas características atribuibles a IR (espacio métrico).

Esta configuración epistémica nos muestra que, al igual que en el significado anterior, para la discriminación de números reales se dota al conjunto de números reales de una métrica y se establece, en función de ésta, la igualdad o no, de dos números.

Una definición algebraica de la igualdad, hace uso del concepto de ecuación para la definición de la igualdad, para ello se parte de asumir que existe una función d, que asigna el valor 1 a los enunciados verdaderos y 0 a los enunciados falsos, de manera que, la expresión d(E(a))=1 significa que la ecuación E evaluada en a, es un enunciado verdadero o a es la solución de la ecuación E; del mismo modo la expresión d(E(b))=0 significa que la ecuación E evaluada en b es falsa, lo que implica que b no es solución de la ecuación E.

Haciendo uso de esta función, los autores, definen la igualdad algebraica indicando que dos números reales a y b son iguales si ambos son solución de la misma clase de ecuaciones, esto debido a que infinitas ecuaciones pueden tener como solución a un mismo número real.

Sin embargo, los mismos autores remarcan que es más operativa la negación de esta definición, de modo que, dos números son diferentes si existe una ecuación tal que, uno de los números sea solución de esta y el otro no.

Los objetos primarios que emergen cuando se emplea la igualdad en este sentido se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. Configuración epistémica de la *igualdad algebraica o de ecuaciones*

Problemas	Probar que dos representaciones del mismo número son iguales. En particular, demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
Lenguaje	Verbal: Igualdad, objeto matemático, ecuación, igualdad condicional, variable, valor numérico, solución, conjunto solución, clase de ecuaciones. Simbólico: a=b ⇔[d(E(a))=1 y d(E(b))=1]
Definiciones, conceptos	Número real, operaciones aritméticas, valor numérico, operaciones. la igualdad solo se cumple para determinados valores de la variable, de modo que se asocia a cada ecuación, el conjunto de valores que hacen cierta la igualdad y se puede definir un numero como la solución de una clase de ecuaciones d(E(a))=1 indica que, a es solución de la ecuación E y d(E(a))=0, indica que a, no es solución de la ecuación E.
Proposiciones	Propiedades del cuerpo de los números reales. Propiedades del anillo de polinomios
Procedimientos	Dada la ecuación polinómica E, si x=$\sqrt{2}$ es solución de la ecuación E, entonces d(E($\sqrt{2}$))=1, como E es polinómica entonces, $-\sqrt{2}$ también debe ser solución de E, por lo tanto E puede ser escrita como E=p(x)(x-$\sqrt{2}$)(x+$\sqrt{2}$)=p(x)($x^2 - \sqrt{2}^2$)=p(x)(x^2-2)=0. De la misma manera, si x=$\frac{2}{\sqrt{2}}$ es solución de la ecuación E', entonces d(E'($\frac{2}{\sqrt{2}}$))=1, asumiendo que E' es polinómica, entonces $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ tambien debe ser solución de E', por lo tanto E' puede ser escrita como E'=p(x)(x-$\frac{2}{\sqrt{2}}$)(x+$\frac{2}{\sqrt{2}}$)=p(x)($x^2 -$ ($\frac{2}{\sqrt{2}}$)^2)=p(x)(x^2-$\frac{4}{2}$) =p(x)(x-2)=0. Además se observa que x= $\sqrt{2}$ es condición suficiente y necesaria para que x=$\frac{2}{\sqrt{2}}$ sea solución de la misma ecuación. Entonces $\forall E, \delta\left(E(\sqrt{2})\right) = 1 \Leftrightarrow \delta\left(E\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1$
Argumentos	Se asocia a cada ecuación el conjunto de soluciones o valores que hacen cierta la igualdad y se define un número como la solución de una clase de ecuaciones. Infinitas ecuaciones tienen por solución un determinado número real y sólo dicho conjunto puede discriminar al número real. La ecuación se ha denominado tradicionalmente igualdad condicional.

Esta configuración nos muestra que, la ecuación es una igualdad condicional, en el sentido de que el igual solo es verdadero para algunos valores.

El uso de la teoría de funciones permite obtener otro significado de la igualdad de números reales, de modo que si tenemos una función inyectiva f, dos números son iguales si sus imágenes respecto de la función F, son iguales.

En este caso, si tomamos el conjunto Fi (D) de todas las funciones inyectivas, de variable real con dominio D, entonces, dos números reales a y b son iguales, si existe una función inyectiva f, que pertenece al conjunto Fi de dominio D, y un conjunto {a,b} que está incluido en este dominio, en la que se cumple que f(a)=f(b).

La Tabla 9 muestra los objetos primarios que emergen cuando se hace uso de la igualdad con este significado.

Tabla 9. Configuración epistémica de la *igualdad funcional*

Problemas	Probar que dos representaciones del mismo número son iguales. En particular, demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$
Lenguaje	Verbal: Igualdad, objeto matemático, función, función real, variable, función inyectiva, número real, imagen, lineal, inecuación, etc. Simbólico: a=b $\Leftrightarrow \exists f \in F_1(D)$, {a,b}c$D_1$, no lineal/ f(a)=f(b)
Definiciones, conceptos	Número real, operaciones aritméticas, valor numérico, función, función inyectiva, dominio, rango. Dos números serán iguales si sus imágenes en una función inyectiva son iguales.
Proposiciones	Propiedades del cuerpo de los números reales. Propiedades de la adición, multiplicación, sustracción, división, potenciación y radicación de números reales. sea f una función inyectiva y consideremos la ecuación f(x) = h; entonces, si a y b son soluciones de la ecuación, esto es, las relaciones f(a) = h y f(b) = h son ciertas, necesariamente a = b.
Procedimientos	Asumiendo que $f(x)=x^2$ en $[0;+\infty)$, se cumple: $f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{2} = 2$ $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$ Como f es inyectiva, se concluye que $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ También se puede asumir que $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ es el resultado de la búsqueda del punto de corte de las funciones h(x)=x y g(x)=$\frac{2}{x}$ en $[1;+\infty)$, de donde h(x)=g(x) implica que $x = \frac{2}{x} \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \sqrt{2}$ de donde reemplazando en h(x)=x se obtiene que h($\sqrt{2}$)= $\sqrt{2}$ y reemplazando en g(x)=$\frac{2}{x}$ se obtiene que g($\sqrt{2}$) $= \frac{2}{\sqrt{2}}$ y h(x)=g(x) implica que $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.
Argumentos	La práctica discursiva participa principalmente de la Teoría de funciones, mientras que la práctica operatoria puede ser asimilada a la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Esta configuración muestra que la igualdad puede ser establecida como una correspondencia que es verdadera para un dominio determinado.

En este capítulo hemos presentado las configuraciones epistémicas de los distintos significados que se atribuyen a la igualdad y al signo igual, como signo de la igualdad, en los contextos aritméticos y algebraicos. Estas configuraciones nos permiten identificar los emergentes primarios que describen cada significado y caracterizarlos, para poder observar aquellos que se correspondan con los significados que se identificaran en el contexto de la geometría, que es uno de los objetivos de nuestro trabajo.

CAPITULO 4: CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE REFERENCIA PARA LA IGUALDAD EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA

Luego de haber establecido los fundamentos teóricos que sustentarán nuestro trabajo de investigación y haber empleado algunas de sus herramientas teóricas para describir el significado de la igualdad de números reales en contextos algebraicos y aritméticos, pasaremos a la recolección y análisis de datos que permitirán construir el significado de referencia para la igualdad en el contexto de la geometría.

Para ello analizaremos un conjunto de textos de geometría de nivel superior, en los que identificaremos situaciones que nos permitan reconocer los campos de problemas que otorgan significado a la igualdad.

En este punto podemos plantearnos una pregunta ¿Cuándo dos objetos geométricos son iguales? La respuesta a esta pregunta nos permitirá aproximarnos a la solución de nuestro problema de investigación.

Con la finalidad de contar con una referencia matemática adecuada hemos hecho una selección de libros que incluyen textos clásicos de Geometría que se han constituido en los referentes históricos de la misma, "Elementos" de Euclides y "Fundamentos de Geometría" de Hilbert, La Tabla 10 muestra una breve descripción de los mismos.

Tabla 10. Descripción de los textos empleados para la construcción del significado de referencia.

TITULO	AUTORES	año	Descripción
Elementos	Euclides	1991	Esta es una edición en castellano del más famoso libro de Matemática donde se presenta por primera vez a la geometría como un sistema estructurado de axiomas, postulados y teoremas.
Fundamentos de la Geometría	David Hilbert	1953	Esta es una traducción al castellano, de la séptima edición alemana, del ensayo donde se establece un Sistema completo y sencillo de axiomas (los cinco grupos de axiomas), que permiten deducir los teoremas de la Geometría.

Asimismo, hemos hecho la revisión de otro grupo de textos de Geometría, que son empleados en diversos ámbitos académicos en la actualidad y que también contribuyen en la identificación de los campos de problemas que nos permitirán identificar los significados de la igualdad, estos libros se muestran en la Tabla 11.

Tabla 11 Descripción de los textos empleados para la construcción del significado de referencia.

TITULO	AUTORES	año	Descripción
Matemática para la escuela secundaria	Frank B. Allen, Edwin C. Douglas, Donald E. Richmond, Charles E. Rickart, Henry Swain y Robert J. Walker	1965	Este texto es un manual elaborado para apoyar a los docentes de matemática de las escuelas de estados Unidos con aspectos metodológicos y matemáticos sobre la enseñanza de Geometría.
Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança.	Elon Lages Lima	1991	Este texto fue elaborado como apoyo de un curso de formación de docentes de secundaria de Rio de Janeiro
Geometría Básica. Curso 1	Teódulo Verástegui Ch.	2003	Este texto es elaborado para apoyar la enseñanza de Geometría en alumnos universitarios empleando el método axiomático.
Geometría Moderna	Edwin E. Moise y Floyd L. Downs Jr.	1986	Este texto está dirigido a estudiantes que requieren "leer" matemáticas, está redactado en un lenguaje directo y sencillo empleando figuras o gráficos y ejemplos concretos de los teoremas.
Geometría con Aplicaciones y solución de problemas	Stanley R. Clemens, Phares G. Odaffer, Thomas J. Cooney	1989	Este texto está dirigido a estudiantes de todo nivel que requieren aprender los principios de la Geometría básica partiendo de su aplicación en la solución de situaciones concretas

En estos textos identificamos las situaciones problemas y los objetos primarios que surgen cuando se da solución a los mismos, los cuales nos permitirán construir el significado de referencia de la igualdad en el contexto de la Geometría.

Estas situaciones problema requieren del uso de la igualdad con diferentes significados, además, cada una de estas situaciones problema requieren del uso de propiedades y conceptos particulares, empleando un lenguaje propio, de manera que es posible asumir que estamos frente a tres significados diferentes de igualdad que requieren de la identificación de sus objetos emergentes primarios para poder reconocerlos y así poder caracterizar cada significado.

4.1 SIGNIFICADOS DE LA IGUALDAD IDENTIFICADOS EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA

En el contexto de la Geometría la expresión “es igual a” es empleada con diferentes significados, existen diferencias que inicialmente son muy sutiles y que son planteadas por Allen, Douglas, Richmond, Rickart, Swain y Walker (1965) a través de ejemplos como los siguientes:

1. Si tenemos que 5+7 = 8+4, el “=” puede interpretarse como “es lo mismo que” ya que 5+7 y 8+4 hacen referencia al mismo número, siendo este el significado más extendido de la igualdad en matemáticas.
2. Si decimos que dos ángulos son iguales, lo que queremos indicar es que ambos ángulos tienen la misma medida, de igual manera, cuando decimos que dos segmentos son iguales, estamos afirmando que tienen la misma longitud o si dos circunferencias son iguales nos estamos refiriendo a que tiene el mismo radio, sin embargo, se hace presente una característica que suele pasar desapercibida, el hecho de que la igualdad, en estos casos, significa que una figura (un ángulo, un segmento o una circunferencia) puede sufrir una transformación (un movimiento rígido) que la haga coincidir con su par respectivo, esta “movilidad” es la que establece una diferencia entre este tipo de igualdad y la del ejemplo anterior, la cual justifica el empleo de la congruencia en lugar de la igualdad al tratar con objetos geométricos.
3. Adicionalmente, se suele afirmar que dos triángulos son iguales cuando tiene la misma área, o dos poliedros son iguales si tienen el mismo volumen, en este caso una interpretación plausible de la igualdad hace referencia a la “cantidad de materia” que contienen los triángulos o los poliedros respectivos, esta igualdad es de naturaleza distinta a las de los ejemplos anteriores ya que no implica la “movilidad” de la congruencia, ni la igualdad del primer caso.

Los mismos autores hacen notar que para la igualdad a la que se refiere el primer ejemplo se emplea el “=” que se puede entender como “es lo mismo que” o como la igualdad numérica que es empleada en casi toda la matemática, para el 2do caso de igualdad es preferible emplear otro signo, el “≡”, que se lee como “es congruente a”, lo cual, intuitivamente, se puede entender como que una de las figuras puede “moverse” hasta coincidir con la otra, mientras que para el tercer caso de igualdad se seguirá empleando la expresión que describe la igualdad, es decir, igualdad de área, igualdad de volumen, sin emplear un signo especifico.

De manera que los autores plantean tres significados distintos que se puede atribuir a la igualdad en Geometría:

La que se corresponde con la igualdad numérica que es la misma que la igualdad en el sentido amplio en el que se emplea en los contextos aritméticos y algebraicos, en este caso empleamos el "=".

La congruencia, cuando las figuras tienen la misma medida y se requiere de una transformación rígida, que verifique que una coincide con la otra sin alguna deformación, para esto empleamos "≡".

Un tercer caso, cuando se quiere dar a entender que dos triángulos tienen la misma área o dos poliedros tienen el mismo volumen, entonces se emplean simplemente la misma expresión, "igualdad de área", "igualdad de volumen", etc.

En los casos 1 y 3 se continúan empleando expresiones muy similares a las empleadas para indicar la igualdad, sin embargo no sucede lo mismo en el caso 2, donde se emplea un signo específico "≡" para indicar el sentido que asume la igualdad, por ello debemos dedicar más espacio al estudio de esta relación, que es llamada congruencia.

A continuación presentaremos una caracterización de estos significados.

4.1.1 IGUALDAD COMO IDENTIDAD

Un tipo de situaciones problemas es aquel en el que se puede decir que dos objetos geométricos son iguales, cuando son el mismo objeto.

Esto se refiere a situaciones en las que es necesario establecer una igualdad entre un objeto geométrico y el mismo; es semejante a la igualdad numérica, en la que, la expresión a=b, significa que los símbolos a y b hacen referencia al mismo número.

En el caso de la geometría tendremos dos objetos geométricos que son conjuntos de puntos formados por los mismos puntos, es en este sentido que esta igualdad es semejante a la igualdad de conjuntos en algebra.

En este caso, la igualdad se define como una relación de equivalencia entre conjuntos, en términos de pertenencia de conjuntos, donde, dados dos conjuntos A y B, se cumple que, A=B solamente si, dado un x que pertenece a A, entonces x pertenece a B y dado un x que pertenece a B, entonces x pertenece a A, y esto se cumple para todo elemento de A y B.

El problema propuesto en la figura 6 nos permitirá visualizar este tipo de situaciones.

9. (a) ¿Es $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$? ¿Por qué?

Figura 6. Problema sobre la igualdad como identidad en Geometría
Fuente: Moise & Downs (1986, p. 44)

Para dar solución a este problema, partimos de definir la recta como un conjunto de puntos, de modo que la recta que contiene a los puntos A y B es la misma que contiene a los puntos B y A, de tal manera que, las dos formas de representar a la recta hacen referencia al mismo conjunto.

Lo mismo sucede con la situación que se muestra en la Figura 7 que es presentada por Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000), “si a es la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$, levantada a partir de su propio medio y b es el conjunto de los puntos equidistantes de A y B, entonces a=b” (p. 10).

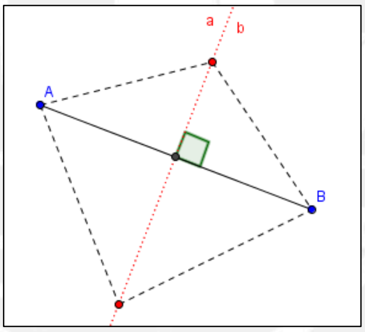


Figura 7. Mediatriz de un segmento.

Aquí se tiene dos rectas que se forman a partir de condiciones diferentes, pero que están formadas por los mismos puntos, de tal manera que tanto a como b hacen referencia al mismo conjunto, por lo que a=b.

Esta última situación es similar a los problemas sobre la determinación de un lugar geométrico.

La Figura 8 muestra un problema planteado en términos de la obtención del lugar geométrico.

3.- Un segmento, de longitud m, se mueve entre los lados de un ángulo recto, deslizándose sus extremos por los lados del ángulo. Hallar el **L.G.** del punto medio del segmento, en su deslizamiento.

Figura 8. Problema sobre un Lugar Geométrico
Fuente: Pérez (2001, p. 18)

La solución requiere obtener un conjunto de puntos que cumplen con la condición indicada, pero este conjunto de puntos es igual a un arco de un cuarto de circunferencia de radio $\frac{m}{2}$.

Estos problemas justifican que definamos un primer tipo de igualdad entre objetos geométricos que denominamos Identidad Geométrica.

Es decir, dos objetos geométricos A y B, son iguales y lo denotamos por A=B, si y solo si son iguales como conjuntos de puntos.

A continuación es necesario identificar los conceptos, definiciones y propiedades que surgen al dar solución a estos tipos de problemas.

Empecemos por recordar la explicación hecha por Hilbert (1953) al iniciar su propuesta sobre los elementos de Geometría y los cinco grupos de axiomas:

> Pensemos tres distintos sistemas de entes: a los entes del primer sistema los llamamos puntos y los designamos con A, B, C,…, a los entes del segundo sistema los nombramos rectas y los designamos con a, b, c, …, a los entes del tercer sistema, los llamamos planos, y los designamos con α, β, γ, …, los puntos reciben también el nombre de elementos de la Geometría Lineal, los puntos y rectas el de elementos de la Geometría Plana, y los puntos, rectas y planos, el de elementos de la Geometría Espacial o del espacio. (Hilbert, 1953, p.3)

En este párrafo, el autor hace referencia a los entes u objetos que constituyen los elementos de una Geometría.

Posteriormente, al plantear sus axiomas de enlace, Hilbert (1953, p. 4) establece una correspondencia biunivoca entre puntos y rectas, de modo que un punto A es un punto de una recta a. Esto se puede traducir como que, el punto A esta situado sobre la recta a, existe el punto A sobre la recta a, etc. Asimismo, establece que si dos puntos de una recta a, están en un plano α, entonces todo punto de la recta a esta situado en el plano α.

De lo anterior se puede concluir que las rectas y los planos están constituidos por puntos.

Partiendo de esta conclusión es posible definir recta, ángulo, polígono, circunferencia, región poligonal, circulo y sólido como conjuntos de puntos.

Al entender un objeto geométrico como un conjunto de puntos, es posible definir una igualdad en Geometría, en términos de la igualdad de conjuntos.

De manera que, como indican Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000), “una cosa solamente es igual a sí misma” (p. 16).

Lo anterior nos muestra que es posible indicar que los objetos geométricos a y b son iguales, porque los puntos que conforman el objeto geométrico a, son los mismos que conforman el objeto geométrico b, lo cual equivale a afirmar que un objeto geométrico es igual a sí mismo.

Este tipo de igualdad se corresponde con una igualdad numérica, o una aplicación de la propiedad reflexiva, o la identidad.

Podemos, finalmente, proponer un uso de la igualdad en el contexto de la Geometría, en el mismo sentido en el que se emplea en los contextos algebraico y aritmético, cuando se afirma que dos objetos geométricos son iguales, si son el mismo objeto geométrico, esto es, en el sentido de una identidad, en el que se pueden emplear símbolos diferentes para referirse a un mismo objeto.

La definición de relación de equivalencia nos permitirá caracterizar esta igualdad de una manera precisa.

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Según Munkres (2002) una relación en un conjunto M es un subconjunto R del producto cartesiano M x M.

El mismo autor define una relación de equivalencia en un conjunto M como aquella relación R que verifica las propiedades:

Reflexiva; $(x,x) \in R; \forall x \in M$

Simétrica; si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \in R$

Transitiva; si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$ entonces $(x,z) \in R$

Aplicando estas propiedades a una relación tal que, a cada conjunto de puntos que forman un segmento o ángulo o polígono, le hace corresponder el mismo segmento, ángulo o polígono, es posible demostrar que una relación definida de esta manera, es una relación de equivalencia.

Sea X un conjunto de puntos definido en un universo de puntos, entonces, es evidente que el conjunto X está formado por los mismos puntos que el conjunto X, de manera que X=X.

Si ahora tenemos dos conjuntos de puntos X e Y, definidos en el mismo universo, tales que, el conjunto X está formado por todos los puntos del conjunto Y entonces, X=Y, luego es posible afirmar que el conjunto Y también está formado por todos los puntos de X, lo que implica Y=X.

Por último, si se tienen tres conjuntos de puntos X, Y, Z, definidos en el mismo universo de puntos, tales que, se cumple que X e Y están formados por los mismos puntos, lo cual se indica como X=Y; además, Y y Z también están formados por los mismos puntos, es decir Y=Z; entonces es posible afirmar que X y Z están formados por los mismos puntos, X=Z.

De esta misma manera Allen y otros (1965) establecen que la relación de igualdad expresada como “es lo mismo que” o “es igual”, que es representada por el signo “=”, empleada en el contexto de la Geometría, es una relación de equivalencia, ya que verifica las tres propiedades que la definen como tal.

Existen matemáticos como Rey Pastor, Calleja & Trejo (1952) que no hacen distinción entre relación de equivalencia y relación de igualdad: “Diremos que una relación binaria E entre elementos de un conjunto M, es una relación de igualdad o equivalencia” (p. 8). Porque el signo = representa una relación de equivalencia, lo que amplía el significado inicial según el cual una cosa es igual a sí misma.

Asimismo, Lentin & Rivaud (1970) afirman que “desde un punto de vista formal, toda relación de equivalencia Ɛ generaliza, pues, las propiedades de la igualdad” (p. 15). En el sentido que además de la reflexividad, simetría y transitividad, puede tener otras propiedades.

Adicionalmente, Robledo (1972) indica que, “El concepto de relación de equivalencia que es una generalización del de igualdad, desempeña un papel importantísimo en matemáticas” (p. 115). Sin embargo, va más allá cuando indica que las relaciones de equivalencia pueden ser consideradas como igualdades, como muestra la figura 9.

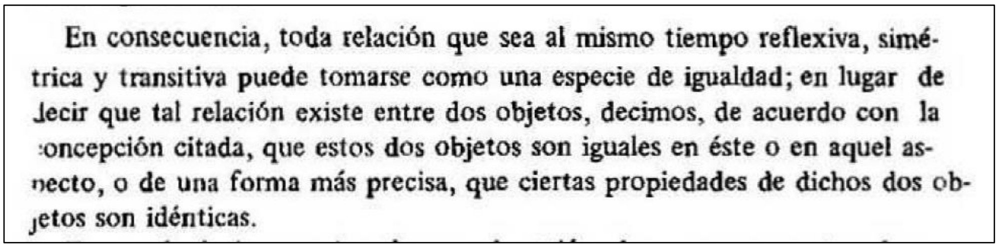

En consecuencia, toda relación que sea al mismo tiempo reflexiva, simétrica y transitiva puede tomarse como una especie de igualdad; en lugar de decir que tal relación existe entre dos objetos, decimos, de acuerdo con la concepción citada, que estos dos objetos son iguales en éste o en aquel aspecto, o de una forma más precisa, que ciertas propiedades de dichos dos objetos son idénticas.

Figura 9. Las relaciones de equivalencia son un tipo de igualdad.
Fuente: Robledo (1972, p. 115)

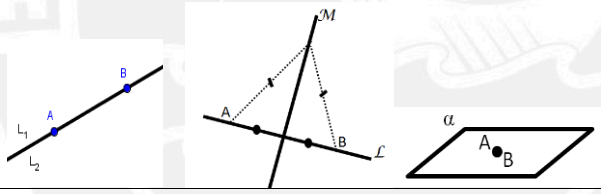
Una relación de equivalencia define una igualdad, lo que implica que basta con demostrar que una relación es de equivalencia para asumir que estamos frente a una igualdad.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA PARA EL CAMPO DE PROBLEMAS DE LA IGUALDAD COMO IDENTIDAD GEOMÉTRICA

En la sección anterior indicamos que dos objetos geométricos son iguales cuando se reconoce que están formados por los mismos puntos, de manera que es necesario establecer de alguna manera que los diferentes símbolos empleados para nombrar a un objeto geométrico en realidad hacen referencia a un mismo objeto, a pesar de poder ser símbolos diferentes, en este caso es necesario el uso de los postulados y teoremas propios de la geometría y los del álgebra que justifiquen que se hace referencia al mismo objeto.

La Tabla 12 presenta la configuración epistémica de las situaciones problemas de las que surge la igualdad como identidad geométrica.

Tabla 12. Configuración epistémica de la igualdad como identidad

Lenguaje	Verbal: igualdad, igual, identidad, equivalencia, punto, recta, plano, segmento, ángulo, triángulo, cuadrilátero, polígono, poliedro, conjunto, lugar geométrico, definición, propiedad, circunferencia, radio. Simbólico: =, P, AB, $\overline{AB}$, $L_1=L_2$, $\angle ABC$, etc. Gráfico: 
Situaciones problemas	Problemas descontextualizados que implican la igualdad de una figura geométrica consigo misma. Problemas de construcción geométrica en el que se obtiene un lugar geométrico y se le relaciona con una figura geométrica conocida
Conceptos-definición	Previos: conjunto, elemento, conjuntos iguales, punto, recta, plano, segmento, punto medio, figura geométrica, polígono, región geométrica, espacio, poliedro, solido, relación de equivalencia, etc. Emergentes: igualdad, como igualdad de conjuntos de puntos.
Proposiciones – propiedades.	Espacio es el conjunto de todos los puntos. Todo cuerpo, superficie o línea es un conjunto de puntos. Figura es un conjunto de puntos o una parte del espacio. Recta es un conjunto de puntos.
Procedimientos	Identificar y aplicar los axiomas y teoremas de la geometría sintética. Aplicar las definiciones de objetos geométricos distintos. Justificar lo hecho a partir de teoremas o axiomas.
Argumentos	Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Demostración deductiva.

En esta configuración presentamos de manera resumida, los objetos primarios que surgen al dar solución a las situaciones problemas que nos permiten dar el significado de identidad geométrica a la igualdad.

4.1.2 LA CONGRUENCIA

Otro tipo de situaciones problema es para el caso de la igualdad como congruencia.

Es posible afirmar que dos objetos geométricos son iguales cuando es posible hacer coincidir uno de ellos sobre el otro, mediante un movimiento. En este caso nos estamos refiriendo a aquellas situaciones que implican la congruencia, que puede ser de segmentos, de ángulos, de triángulos, de polígonos en general o de circunferencias.

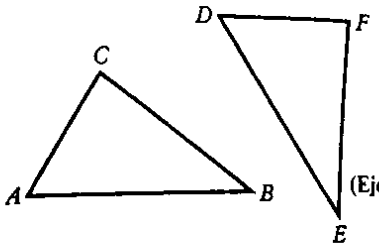
La Figura 10 muestra una situación en la que se tiene dos triángulos, ΔABC y ΔDFE que son congruentes, esto implica asumir que sus lados correspondientes tiene la misma medida y también los ángulos correspondientes tienen la misma medida, de manera que es posible hacer coincidir uno con otro, si se aplica una transformación.

9. Dado que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, selecciónese la proposición falsa en cada parte.

a. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$, $\angle C \cong \angle F$.

b. $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$, $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

c. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{FE}$, $\angle C \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.



(Ejercicio 9)

Figura 10. Problema sobre congruencia de triángulos
Fuente: Clemens, O'Daffer, Cooney (1989, p. 86)

Otro tipo de situaciones que implican el uso de la igualdad como una congruencia, se presenta en la Figura 11 donde se muestra un problema en el que es necesario hacer uso del concepto de congruencia como un tipo de igualdad entre objetos geométricos distintos.

7. ¿En qué condiciones serían congruentes los siguientes pares de figuras?

(a) Dos segmentos. (b) Dos rectas. (c) Dos ángulos.
(d) Dos circunferencias. (e) Dos cuadrados. (f) Dos triángulos.

Figura 11. Situación problema que muestra la congruencia entre objetos geométricos
Fuente: Moise y Downs (1986, p. 110)

Otra situación en la que es posible identificar la igualdad como una congruencia se da en los problemas que implican un conjunto de transformaciones rígidas o isometrías, la Figura 12 muestra un caso referido a la obtención de un triángulo congruente mediante una rotación.

7. Dibújese un triángulo ABC y un punto O en una hoja de papel. Con un transportador y un compás, dibújese la imagen de $\triangle ABC$ en una rotación de 50° en la dirección de las manecillas del reloj.

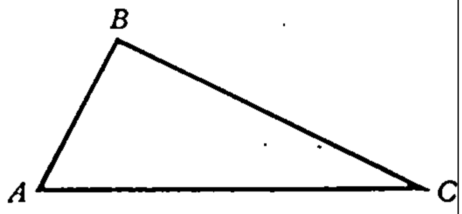


Figura 12. Problema sobre rotación
Fuente: Clemens, O'Daffer, Cooney (1989, p. 490)

Los problemas que se han presentado tienen en común que se emplea la congruencia para obtener figuras geométricas que tienen las mismas medidas de segmentos que la original.

A continuación presentaremos como ha ido evolucionando la noción de congruencia a lo largo del tiempo, hasta llegar a la que se tiene actualmente, que es presentada en la parte final de esta sección.

A Euclides (1991) se le atribuye la primera sistematización de los conocimientos geométricos de la antigüedad y él emplea en sus elementos la expresión "igual" para establecer relaciones entre distintos elementos geométricos de idéntica naturaleza, como segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, etc., tal como se muestra en la Figura 13.

NOCIONES COMUNES

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí [18].
2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales [19].
7. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
8. Y el todo es mayor que la parte [20].

Figura 13. Axiomas de Euclides.
Fuente: Euclides (1991, p. 199)

Estos axiomas, llamados nociones comunes, se encuentran establecidos en el Tomo I de los elementos de Euclides, donde se puede notar que no se consideran los axiomas 4, 5 y 6, que mostramos en la Figura 14.

4. «Y si se añaden cosas iguales a cosas desiguales los totales son desiguales».
5. «Y los dobles de una misma cosa son iguales entre sí».
6. «Y las mitades de una misma cosa son iguales entre sí».

Figura 14. Axiomas de Euclides rechazados por Proclo.
Fuente: Euclides (1991, p. 200)

En Euclides (1991) se hace notar que el filósofo y matemático griego, Proclo, en sus comentarios acerca del Libro I de los Elementos de Euclides indica que los axiomas que pueden ser deducidos de otros deben ser rechazados, ya que se desvirtúa la naturaleza de estos, que por definición no pueden ser deducidos o demostrados, sino, se asumen como verdaderos. Lo mismo se aplica para un 9° axioma que tampoco se considera como tal.

En el caso del séptimo axioma, se comenta en Euclides (1991), que es escrito por otros traductores, reemplazando *coinciden* por *superponer*, sin que esto afecte el sentido del enunciado, para que implícitamente haga referencia a lo que actualmente llamamos congruencia.

Sin embargo en el mismo texto se señala que, para Platón, no se podía agregar el desplazamiento o movimiento a una definición matemática, tal como se muestra en la Figura 15.

da a entender que responde al procedimiento tradicional de superposición de figuras por desplazamiento de una y su colocación sobre la otra. A juicio de Platón, este recurso era uno de los que descalificaban a los geómetras de su tiempo por contaminar el pensamiento geométrico con la manipulación y el movimiento de objetos, pero ni antes ni después de Euclides dejó de aplicarse. Se suponía tácticamente que el movimiento no deforma los objetos así tratados.

Figura 15. Crítica de Plafón al axioma 7 de Euclides.
Fuente: Euclides (1991, p. 61)

De la misma manera, en Euclides (1991) se hace notar que el axioma 7 representa un axioma de congruencia, en términos de una coincidencia intuitiva, con el fin de notarse como una aplicación de la igualdad.

En términos de Hernández, Rojo, Rabuffetti y Hernandez (1966) estos axiomas son “enunciados inherentes a los conceptos de igualdad, desigualdad, suma, etc., de ciertos entes o cosas que hoy llamamos cantidades y constituyen el fundamento para el estudio de las relaciones de congruencia y equivalencia de figuras” (p. 174).

La función que corresponde a estas nociones comunes se advierte inmediatamente. Aparecen como enunciados inherentes a los conceptos de igualdad, desigualdad, suma, etc., de ciertos entes o cosas que hoy llamamos cantidades y constituyen el fundamento para el estudio de las relaciones de congruencia y equivalencia de figuras.

El conjunto de postulados y nociones comunes de Euclides constituyen, pues, tres tipos de axiomas según el sistema moderno de Hilbert: de enlace o incidencia, de paralelismo y de congruencia. Faltan los de continuidad y de orden, aunque la sistematización euclídea los considera implícitamente.

Figura 16. Interpretación de los axiomas de Euclides.
Fuente: Hernández Rojo, Rabuffetti y Hernández (1966, p. 174)

Debemos observar en la Figura 16, que el conjunto de axiomas y propiedades que Euclides establece, son equivalentes a algunos de los que en épocas más modernas han sido propuestos por Hilbert.

A principios del siglo XX. Hilbert realiza una reestructuración de los fundamentos de la geometría y establece cinco sistemas de axiomas en base a los cuales reconstruye la Geometría, uno de ellos es denominado *Axiomas de Congruencia*, en donde caracteriza la relación de congruencia entre segmentos de rectas y la de congruencia de ángulos, además de establecer que la relación *congruencia de segmentos* es una relación de equivalencia. Y son estos sistemas axiomáticos los que fundamentan la geometría euclidiana tridimensional entre otros.

En el primer axioma, que mostramos en la Figura 17, Hilbert establece un símil entre las expresiones congruente e igual ya que no distingue entre estos, sin embargo, emplea un signo distinto al que se emplea para el igual, para expresarla, este signo es “≡” que se lee como congruente.

III-1. *Si* A, B *son dos puntos de una recta* a *y además es* A′ *otro punto de la misma o distinta recta* a′, *puede encontrarse siempre sobre uno de los lados de* a′, *determinados por* A′, *un solo punto* B′ *tal, que los segmentos* AB *y* A′B′ *sean congruentes o iguales. Lo que se expresa con signos:*

$$AB \equiv A'B'$$

Figura 17. Primer Axioma de congruencia de segmentos.
Fuente: Hilbert (1953, p. 13)

Hilbert aclara que este primer axioma proporciona la posibilidad de transporte de segmentos.

El axioma II expresa la transitividad de la congruencia y el axioma III permite la adición de segmentos.

De la misma manera, la Figura 18 muestra cómo se establecen axiomas para la congruencia de ángulos.

III-4. *Dados un ángulo* ∢ (h, k) *en un plano* α, *una recta* a′ *en un plano* α′ *y una de las regiones de* α′ *determinadas por* a′ ; *representemos por* h′ *un semirrayo de* a′ *que parte de* O′. *Existe, entonces, en el plano* α′ *uno y solo un semirrayo* k′ *tal, que el ángulo* ∢ (h, k) *es congruente o igual al* ∢ (h′, k′) *y, a la vez, todos los puntos interiores del ángulo* ∢ (h′, k′) *están situados en la región dada con respecto a* a′. *Simbólicamente* :

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$$

Figura 18. Cuarto Axioma de congruencia, congruencia de ángulos.
Fuente: Hilbert (1953, p.15)

Debemos notar que aquí también se emplean los términos congruente o igual como sinónimos aunque se vuelve a emplear el signo “≡” para indicar la congruencia que permite el transporte del ángulo.

Como hemos visto, Euclides no emplea la expresión *Congruente*, sino emplea directamente la expresión *igual*, para referirse a objetos geométricos que no están en el mismo lugar pero tienen la misma medida de segmentos o ángulos.

Al emplear la palabra “congruencia”, no se establece una diferencia clara entre la congruencia y la igualdad, tanto que se puede sustituir la expresión “es igual a” por “es congruente a”, tal como hace Hilbert (1912) cuando establece los axiomas de congruencia, al parecer podría tratarse solo de un cambio de términos.

Sin embargo, más recientemente y con respecto a la congruencia entre ángulos y entre segmentos, Moise y Downs (1986) define estas, en los términos siguientes:

Definiciones

Dos ángulos son *congruentes*, si tienen la misma medida. Dos segmentos son *congruentes*, si tienen la misma longitud.

Figura 19. Definición de congruencia de segmentos y ángulos.
Fuente: Moise y Downs (1986, p.112)

Las definiciones de la Figura 19, son empleadas también para afirmar que "en el lenguaje corriente, diríamos que dos figuras son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño" (Moise y Downs 1986, p. 105) y esta es una noción intuitiva y común que actualmente se tiene de congruencia.

Sin embargo, para Allen, Douglas, Richmond, Rickart, Swain y Walker (1965), otro significado intuitivo de congruencia entre dos figuras es que, existe una manera particular de mover una de las figuras de manera que coincida con la otra.

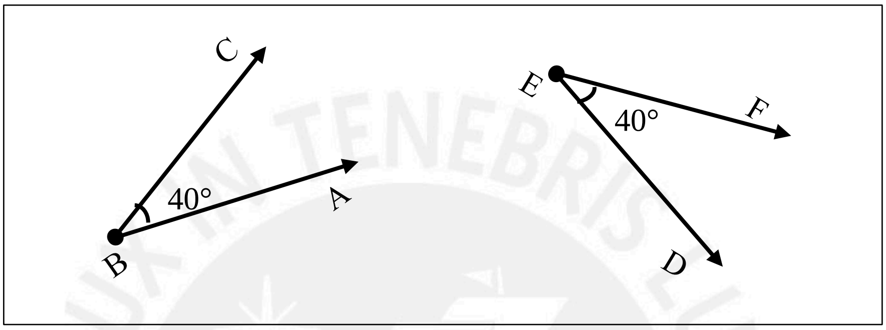


Figura 20. Representación de ángulos congruentes.

La Figura 20 muestra que los ángulos ABC y DEF tienen la misma medida, sin embargo no son el mismo ángulo ya que los puntos que los conforman no son los mismos, por ello lo apropiado es indicar que ambos ángulos son congruentes, $\angle ABC \equiv \angle DEF$, sin embargo se debe hacer notar que las medidas de los ángulos sí son iguales.

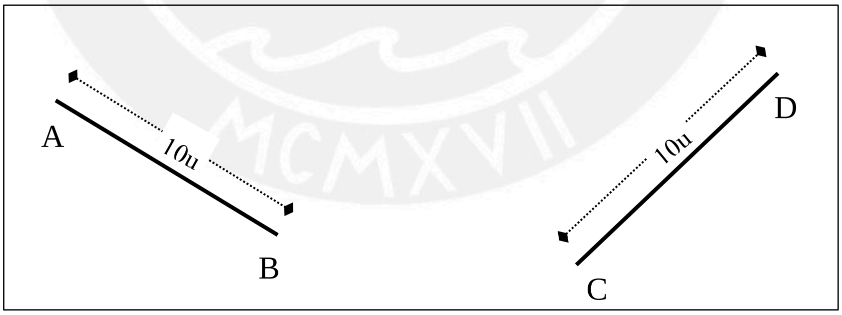


Figura 21. Representación de segmentos congruentes.

La Figura 21 muestra dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ los cuales tienen la misma medida (10u), sin embargo los segmentos son distintos ya que los puntos que conforman cada segmento no son los mismos, de manera que no podemos afirmar que ambos segmentos son iguales, lo único que tienen en común o igual es su medida, en esta situación lo que corresponde es afirmar que ambos segmentos son congruentes y en símbolos $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Sin embargo, como hacen notar Allen y otros (1965), la definición formal de congruencia debe ser expresada en términos precisos y no basarse en conceptos como tamaño, forma o movimiento, ya que estos no son precisos, sino por el contrario, resultan ser más complejos que el concepto de congruencia y requieren de este para ser definidos.

Si tenemos el conjunto M de todos los ángulos y una relación R según la cual dos ángulos se relacionan si tienen la misma medida; entonces, si tomamos un ángulo *x*, este ángulo *x* se relaciona consigo mismo, ya que su medida es la misma, sí tomamos dos ángulos *x* e *y*, se cumple que *x* tiene la misma medida que *y*, entonces, *y* tiene la misma medida que *x*; y sí ahora tomamos tres ángulos *x, y, z*; y se cumple que *x* tiene la misma medida que *y*, además que *y* tiene la misma medida que *z*, entonces es lógico asumir que *x* tiene la misma medida que *z*.

Todo esto nos prueba que la relación definida de esta manera es una relación de equivalencia y esta relación es precisamente la que hemos denominado relación de congruencia entre ángulos o congruencia de ángulos.

Sin embargo esta definición ha sido construida sobre la base de la existencia de la medida del ángulo, tal como Allen y otros (1965) hacen notar, si no se emplea el concepto de medida se hace necesario asumir que la relación de congruencia es de equivalencia, lo cual implica asumir como postulados las tres propiedades que hacen que una relación sea de equivalencia.

En particular se afirma que la congruencia expresada por “≡” es una relación fundamental que no se define, sino que se acepta que cumple las propiedades que la hacen una relación de equivalencia.

Además la noción de congruencia está íntimamente ligada a otra, la de medida.

FUNCIÓN MEDIDA:

Este concepto es crucial en la construcción de la geometría ya que se convierte en un enlace entre esta y el álgebra. En este sentido, Allen y otros (1965) la definen como la función que, dado un segmento $\overline{UV}$ llamado unidad de medida, a cada segmento $\overline{AB}$ le asigna un único número real positivo m($\overline{AB}$) llamado medida del segmento $\overline{AB}$, que satisface las siguientes propiedades:

i. $m(\overline{AB}) = m(\overline{MN})$ si y solo si $\overline{AB} \equiv \overline{MN}$, es decir solo segmentos congruentes tienen medidas iguales.

ii. Dados $\overline{AC}$ y el punto B que se encuentra entre A y C, entonces $m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) = m(\overline{AC})$ lo cual implica la adición de las medidas de segmentos.

iii. $m(\overline{UV}) = 1$, lo que significa que la medida del segmento unidad es uno.

Los mismos autores indican que la medida del segmento $\overline{AB}$ se puede indicar como el numero AB que también se denomina longitud del segmento.

Esta misma función se generaliza para hacer una correspondencia biunívoca entre un conjunto de elementos geométricos y el conjunto de números reales, de tal manera que a cada objeto geométrico se le hace corresponder un número real que lo caracteriza, tal es el caso de la longitud para un segmento, la medida del ángulo en el caso de un ángulo, el área en el caso de una región plana o el volumen en el caso de un sólido.

Empleando el concepto de función, se puede comprender la definición de medida, como el único número real positivo que se le hace corresponder a un objeto geométrico.

En palabras de Moise y Downs (1986) “a cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único” (p.31), esto constituye lo que denomina Postulado de la distancia, pasando a definir distancia entre dos puntos como el número obtenido por la aplicación del postulado de la distancia a ambos puntos.

Los mismos Moise y Downs (1986) agregan a este postulado, otro postulado que llama el postulado de la regla, en el que establece que, a cada punto de una recta se le hace corresponder un número real y viceversa, a cada número real se le hace corresponder exactamente un punto de la recta, definiendo finalmente, la distancia entre dos puntos cualquiera como el valor absoluto de la diferencia de los números reales que le corresponden a cada punto.

Respecto a la notación, para Moise y Downs (1986), el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de todos los puntos que pertenecen a una recta y que están entre los puntos A y B incluidos estos, de modo que la expresión $\overline{AB}$ se refiere al segmento, mientras que la expresión AB, es el número que da la medida de la distancia entre los puntos A y B.

Definición

El número AB se llama la *longitud* del segmento $\overline{AB}$.

Figura 22. Definición de longitud de un segmento.
Fuente: Moise y Downs (1986, p.42)

De la definición planteada en la Figura 22, se desprende que podemos llamar longitud a la medida de un segmento.

Asimismo, en el caso de los ángulos se presenta una situación similar. En primer lugar el ángulo es definido como la unión de dos rayos (considerados como conjuntos de puntos) que tienen el mismo origen y no están en una misma recta, tal como se muestra en la Figura 23.

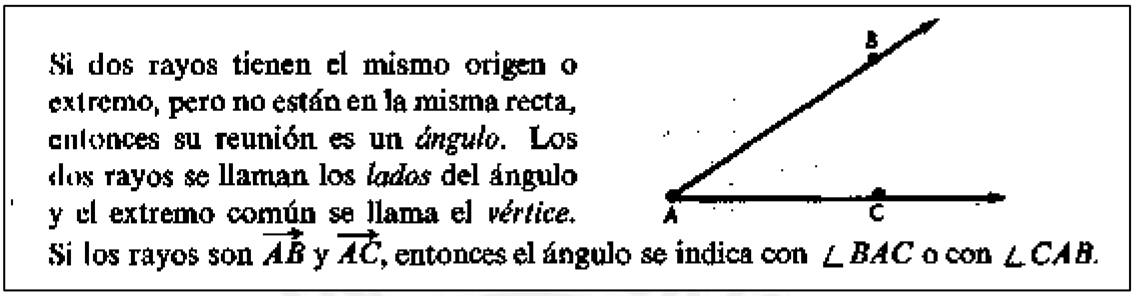
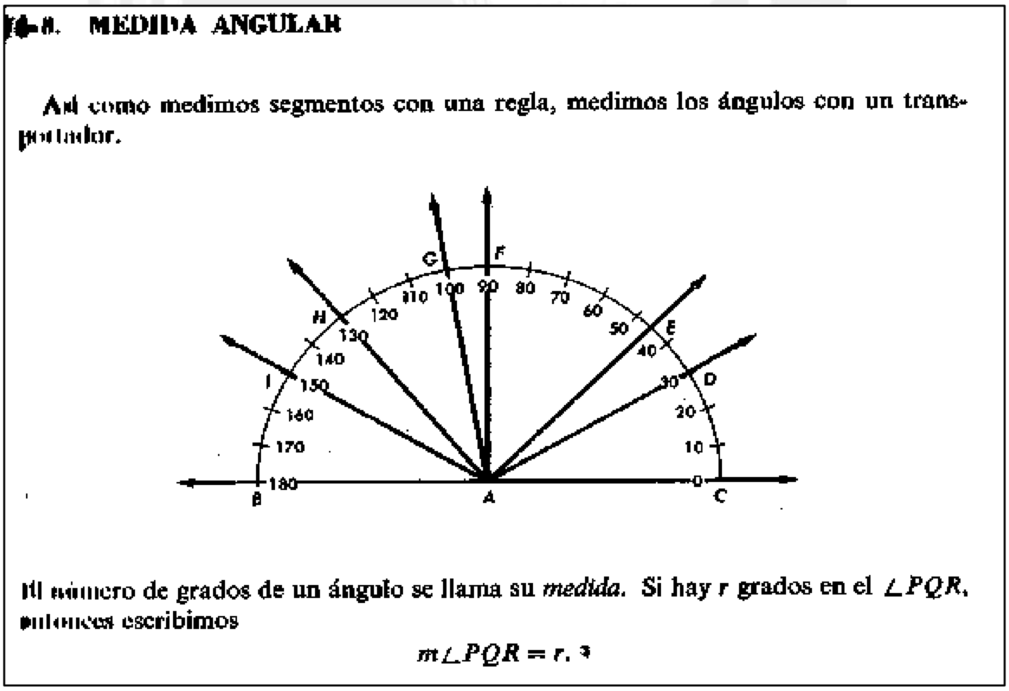

Si dos rayos tienen el mismo origen o extremo, pero no están en la misma recta, entonces su reunión es un *ángulo*. Los dos rayos se llaman los *lados* del ángulo y el extremo común se llama el *vértice*.
Si los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, entonces el ángulo se indica con $\angle BAC$ o con $\angle CAB$.

Figura 23. Definición de ángulo.
Fuente: Moise y Downs (1986, p.75)

El transportador es empleado para determinar la medida de un ángulo, tal como se muestra en la Figura 24, y en el mismo sentido en el que se emplea la regla para determinar la medida de un segmento.


14-8. MEDIDA ANGULAR

Así como medimos segmentos con una regla, medimos los ángulos con un transportador.

El número de grados de un ángulo se llama su *medida*. Si hay r grados en el $\angle PQR$, entonces escribimos

$$m\angle PQR = r.$$

Figura 24. Medida de ángulos
Fuente: Moise y Downs (1986, p.81)

Los diversos postulados que se definen para la medida de ángulos se pueden resumir indicando que: la medida del ángulo es un número real de 0 a 180 que se hace corresponder a cada ángulo llamándole a este número la medida del ángulo y recíprocamente para cada número real entre 0 y 180 se puede tener un ángulo.

Finalmente, con respecto a la notación, la expresión $\angle PQR$ representa al ángulo de lados $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ con vértice Q, y $m\angle PQR$ indica la medida del mencionado ángulo, siendo r este número.

Esta presentación de la medida nos introduce al ámbito de lo que se conoce como teoría de la medida cuyo estudio no constituye una finalidad de nuestro trabajo, ya que abarca aspectos de matemática superior que no corresponden al nivel educativo en el cual se desarrolla nuestra investigación.

En términos de nuestro interés, la noción de medida se restringe al ámbito de las longitudes de segmentos, amplitud de ángulos, áreas y volúmenes, los cuales son tratados como coincidentes con números racionales y en objetos geométricos específicos, de los cuales se puede emplear relaciones métricas expresadas mediante fórmulas y en casos muy especiales, empleando algunos números también especiales como π.

La asociación de una unidad a la medida de un segmento, es realizada debido a una convención necesaria por la utilidad concreta que se le da a las medidas, y es un resultado de la aplicación del postulado de la regla en la realidad, de modo que se justifica indicar que un segmento tiene una medida de 5 centímetros o 5 metros o 5 pulgadas en lugar de solo 5.

El empleo de estas unidades se ha agrupado en sistemas de medidas que emplean unidades de medición específicas para aquel elemento geométrico que se desea medir contándose incluso con múltiplos y submúltiplos y toda una teoría de equivalencias y conversiones.

En el caso de los ángulos se emplea el sistema sexagesimal de medidas angulares, que no es el único, pero si el más difundido.

Mientras que para las longitudes se emplea el metro como unidad de medida de longitudes y sus derivados para medir áreas y volúmenes, estableciéndose toda una escala de múltiplos y submúltiplos, de equivalencias entre unidades y de reglas de equivalencias.

Esta convención en el empleo de unidades es establecida por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (BIPM) que organizan el Sistema Internacional de Medidas (SI) y establecen las magnitudes y unidades que se muestran en la Figura 25.

Magnitudes básicas		Unidades SI básicas		
Nombre	Símbolo	Nombre	Símbolo	
longitud	*l, x, r*, etc.	metro	m	Los símbolos de las magnitudes generalmente son letras solas, de los alfabetos griego o latino, impresas en cursiva. Se trata de *recomendaciones*. Los símbolos de la s unidades son *obligatorios*, véase el capítulo 5.
masa	*m*	kilogramo	kg	
tiempo, duración	*t*	segundo	s	
corriente eléctrica	*I, i*	amperio	A	
temperatura termodinámica	*T*	kelvin	K	
cantidad de sustancia	*n*	mol	mol	
intensidad luminosa	I_v	candela	cd	

Figura 25. Unidades básicas del SI.
Fuente: BIPM (2008, p.21)

Asimismo, la BIPM establece que las medidas de áreas y volúmenes son magnitudes derivadas de la longitud y sus unidades son obtenidas mediante el empleo de las fórmulas propias de estas.

Además, indica que las medidas de ángulos en grados, no son propias del SI sin embargo se recomienda su uso.

Las equivalencias entre unidades fundamentales y sus múltiplos y submúltiplos son hechas tomando la base 10.

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Figura 26. Prefijos del SI.
Fuente: BIPM (2008, p.21)

La Figura 26 muestra una tabla de equivalencias que se aplica a todas las unidades del SI y son empleadas para establecer equivalencias entre distintas unidades de medición de magnitudes.

El impacto de la aplicación de la función medida es tal, que se suele confundir el objeto geométrico con su número medida asignado mediante esta función, tal como Allen y otros

(1965) hacen notar, cuando indican que AB es un número mientras que $\overline{AB}$ es un segmento de recta.

Al ser la medida un número real se justifica su manipulación como tal, en el sentido en que cumple los axiomas, postulados, teoremas y operaciones de los números reales. Aquí debemos notar que la igualdad numérica y el signo igual son empleados de manera adecuada ya que estamos en contextos aritméticos y algebraicos.

Pasaremos a describir las congruencias que se da entre diferentes tipos de objetos geométricos planos.

CONGRUENCIA DE SEGMENTOS:

Tal como plantean Allen y otros (1965), la congruencia de segmentos cumple que:

(1) $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (reflexiva),

(2) sí $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ entonces $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ (simétrica); y

(3) sí $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ y $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ (Transitiva),

Sin embargo "≡" no es una identidad ya que dos segmentos diferentes pueden ser congruentes. Sin embargo si es una relación de equivalencia y por lo tanto una igualdad en términos de Robledo (1972).

Adicionalmente se agregan:

(4) "postulado de ubicación" según el cual dado un rayo $\overrightarrow{AB}$ y un segmento $\overline{CD}$ entonces, existe un único punto P tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$; y

(5) "postulado de adición" según el cual si $\overline{AB} \equiv \overline{MN}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{NP}$, además B está entre A y C, y N está entre M y P, entonces $\overline{AC} \equiv \overline{MP}$.

Por otra parte, los mismos autores indican que los segmentos son figuras geométricas y no números, sin embargo pueden ser medidos y para ello se hace necesario el empleo de una función llamada función medida que ya ha sido presentada en la sección anterior.

Empleando la función medida, se puede definir segmentos congruentes como aquellos cuyas longitudes son iguales:

m($\overline{AB}$) = m($\overline{BC}$) si y solo si $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$

Esta es la definición generalizada de la relación de congruencia entre segmentos basada en la definición de medida de un segmento.

CONGRUENCIA DE ÁNGULOS:

Al igual que en el caso de los segmentos, Allen y otros (1965) indican que la congruencia de ángulos se asume como una relación de equivalencia que cumple las siguientes propiedades:

(1) $\angle ABC \equiv \angle ABC$ (reflexiva),

(2) Sí $\angle ABC \equiv \angle PQR$ entonces $\angle PQR \equiv \angle ABC$ (simétrica); y

(3) Sí $\angle ABC \equiv \angle PQR$ y $\angle PQR \equiv \angle XYZ$ entonces $\angle ABC \equiv \angle XYZ$ (Transitiva),

(4) "Postulado de colocación angular" según el cual dado $\angle XYZ$ y un rayo $\overrightarrow{AB}$ sobre la arista de un semiplano H, entonces existe un rayo $\overrightarrow{AP}$ con P en H tal que $\angle PAB \equiv \angle XYZ$; y

(5) "Postulado de adición" según el cual si $\angle ABC \equiv \angle MNP$, $\angle CBD \equiv \angle PNQ$, además C está en el interior del $\angle ABD$ y P está en el interior del $\angle MNQ$, entonces $\angle ABD \equiv \angle MNQ$.

Las tres primeras propiedades nos garantizan que estamos frente a una relación de equivalencia o una igualdad de ángulos basada en su medida.

De la misma manera que en el caso de los segmentos, se hace necesario establecer un proceso de medición que permita asignar a cada ángulo, un único número real que será su medida, es decir, dado un $\angle ABC$ existe un único número real $m\angle ABC$, De manera que se cumple que:

i. $m\angle ABC = m\angle MNP$ si y solo si, $\angle ABC \equiv \angle MNP$

ii. Si C es un punto interior al $\angle ABD$, entonces $m\angle ABC + m\angle CBD = m\angle ABD$

Sin embargo los autores hacen notar que existen propiedades exclusivas para las medidas angulares:

iii. Existe un número real b que es un extremo superior para las medidas S de todos los ángulos, cuando se emplea la medida en grados b=180.

iv. La suma de las medidas de un "par lineal" (ángulos adyacentes suplementarios) siempre es una suma constante que es precisamente el extremo superior b.

POSTULADO DE LA MEDIDA DE ÁNGULOS:

Como plantean Allen y otros (1965) el postulado de la medida de ángulos se refiere a que a cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180, sin existir un ángulo cuya medida sea 0, ni uno cuya medida sea 180, ya que si un ángulo tuviese medida 0 no se podría diferenciar de un rayo y si su medida fuese 180 no se le podría diferenciar de una recta, además en ambos casos no se podría distinguir el interior del exterior del ángulo.

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Intuitivamente, se ha entendido que si un triángulo puede trasladarse sin sufrir modificaciones y coincide sobre otro, entonces ambos triángulos son congruentes o iguales. Esta idea intuitiva es formalizada mediante una definición geométrica que permite explicar este "movimiento" del triángulo, esta es la Isometría.

ISOMETRÍA

Según Verástegui (2003), dado un plano π, y una función $\varphi:\pi\rightarrow\pi$, φ es una isometría, si φ es una función biyectiva (correspondencia biunívoca) en la que si P y Q son puntos del plano π, entonces $d(\varphi(P),\varphi(Q)) = d(P,Q)$.

Una Isometría también es llamada movimiento rígido, Transformación rígida, transformación ortogonal, o simplemente transformación.

Según Allen y otros (1965) dos conjuntos de puntos F y F', son congruentes, si y solo si, existe una isometría o transformación entre ellas, es decir un movimiento rígido, que transforma F en F'.

Los mismos autores indican que las isometrías más simples son:

(1) Traslaciones o deslizamientos.
(2) Simetrías o reflexiones
(3) Rotaciones

A partir de la definición de Isometría Verástegui (2003) da una definición de congruencia de triángulos, la cual se muestra en la Figura 27.

DEFINICIÓN 35: En el plano π, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son ***congruentes***, si existe una correspondencia biunívoca φ: $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$, tal que $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$ y φ preserva distancias entre puntos correspondientes: $A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $B'C' = BC$, $m(B\widehat{A}C) = m(B'\widehat{A'}C')$, $m(A\widehat{B}C) = m(A'\widehat{B'}C')$ y $m(A\widehat{C}B) = m(A'\widehat{C'}B')$; es decir, φ es una congruencia en π tal que $\varphi(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$.

Figura 27. Congruencia de triángulos.
Fuente: Verástegui (2003, p.65)

Basados en esta definición podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los vértices de los triángulos que fue representada por Allen y otros (1965) de la siguiente manera:

A↔A’ B↔B’ C↔C’

La cual preserva las distancias entre dos vértices y sus respectivas correspondientes, de modo que:

AB = A’B’ AC=A’C’ BC=B’C’

Por otra parte, para establecer la congruencia entre dos triángulos no es necesario determinar que los tres ángulos correspondientes y los tres lados correspondientes sean congruentes, ya se han establecido una serie de criterios mínimos y suficientes que permiten la construcción de un triángulo congruente a otro.

El criterio fundamental fue establecido por Hilbert (1953) como el quinto axioma de congruencia según el cual si dos triángulos ABC y A’B’C’ verifican que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ entonces también quedan satisfechas las congruencias $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

En base a este axioma establece los tres teoremas de congruencia de triángulos, los cuales son conocidos actualmente por las iniciales de los objetos geométricos del triángulo que se emplean:

(1) Primer Teorema de congruencia de triángulos o Criterio LAL: un triángulo ABC es congruente con un triángulo A‘B’C’ si son válidas las congruencias: $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$.

(2) Segundo Teorema de congruencia de triángulos o criterio ALA: un triángulo ABC es congruente con un triángulo A‘B’C’ si son válidas las congruencias: $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ y $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$.

(3) Tercer Teorema de congruencia de triángulos o criterio LLL: un triángulo ABC es congruente a un triángulo A'B'C' si los lados correspondientes son congruentes, es decir; si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, entonces los triángulos son congruentes.

CONGRUENCIA DE POLÍGONOS

Tal como hacen notar Allen y otros (1965) para establecer la congruencia entre cuadriláteros se debe asegurar que los lados correspondientes sean congruentes, pero esto no asegura la congruencia entre cuadriláteros, ya que un rombo y un cuadrado de lados congruentes no son congruentes.

Sin embargo los mismos autores indican que se puede establecer la congruencia entre cuadriláteros sin necesidad de exigir la congruencia de ángulos, para ello es necesario establecer una correspondencia biunívoca entre los vértices de los cuadriláteros y las longitudes de los segmentos que determinan estos puntos en ambos cuadriláteros.

En el caso de los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D', si tenemos una correspondencia biunívoca:

A↔A' B↔B' C↔C' D↔D'

Y las distancias correspondientes se mantienen, es decir:

AB = A'B' BC=B'C' CD=C'D' DA = D'A' AC=A'C' BD=B'D'

Entonces decimos que esta correspondencia biunívoca es una congruencia y podemos escribir ABCD ≡ A'B'C'D'.

Los mismos autores generalizan este principio para cualquier par de polígonos de modo que plantean la siguiente definición:

> Sea X↔X' una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de puntos F y F' tal que P↔P', Q↔Q' implique siempre PQ = P'Q', entonces, decimos que F es congruente a F' y escribimos F≡F'. Además, llamamos congruencia entre F y F' a dicha correspondencia biunívoca. (Allen y otros, 1965, p. 617)

Y hacen notar que la congruencia tomada de esta manera, solo requiere de la medida de la longitud de segmentos para ser definida, es decir, solo se requiere probar que la distancia entre dos puntos de un objeto geométrico es la misma que la de los puntos correspondientes en el otro objeto geométrico, y que esto se cumplirá para cualquier par de puntos tomados en ambos objetos geométricos, para establecer que ambos objetos geométricos son congruentes. Esta constituye la noción matemática actual de congruencia.

CONGRUENCIA DE CIRCUNFERENCIAS

Según Moise y Downs (1986) una circunferencia es el conjunto de todos los puntos en el plano que están a una distancia r, llamada radio, de un punto P llamado centro de la circunferencia.

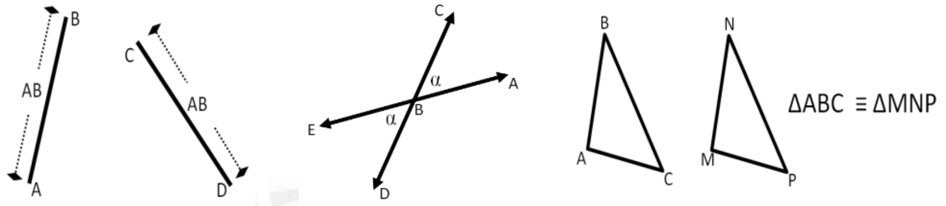
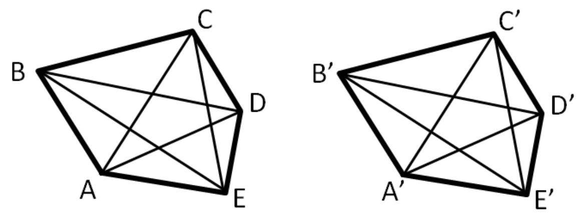
Los mismos autores indican que "dos o más circunferencias con radios congruentes se llaman congruentes" (Moise y Downs, 1986, p.430). De manera que dos circunferencias son congruentes si sus radios tienen la misma medida.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA PARA EL CAMPO DE PROBLEMAS DE CONGRUENCIA

La congruencia entre dos objetos geométricos se sustenta en la definición de la medida de segmentos, de modo que tomados dos puntos de un objeto si se toman los puntos correspondientes a estos en el otro objeto, y estos tienen la misma medida, y esto se cumple para cualquier par de puntos, entonces, los dos objetos son congruentes.

Esto requiere identificar los elementos primarios que se presentan en la configuración epistémica que se muestra en la Tabla 13.

Tabla 13. Configuración epistémica de la igualdad como congruencia.

Lenguaje	Verbal: punto, recta, plano, espacio, segmento, punto entre otros dos, punto medio, longitud del segmento, igualdad, congruencia, transformación, simetría, traslación, rotación, ángulo, bisectriz, medida de ángulos, ángulo recto, ángulo agudo, grado, ángulos opuestos, ángulos alternos igualdad, triángulo, lado, criterios, isósceles, equilátero, correspondencia biunívoca, polígono, vértice, etc. Simbólico: =, ≡, P, AB, $\overline{AB}$, m(A,B), $\angle$ABC, $\widehat{ABC}$, m($\widehat{ABC}$), $\overrightarrow{AB}$, ABC, ALA, LAL, LLL, A↔A' Gráfico:  A↔A', B↔B', C↔C', D↔D', E↔E'  AB=A'B', AC=A'C', AD=A'D', AE=A'E', BC=B'C', BD=B'D', BE=B'E', CD=C'D', CE =C'E', DE=D'E'
Situaciones problemas	Problemas donde se debe determinar la congruencia de figuras geométricas, en particular segmentos, ángulos y polígonos o circunferencias.
Conceptos-definición.	Previos: punto, recta, plano, espacio, segmento, punto medio, medida de segmentos, unidad de medida, longitud, vértices, etc. Si los vértices de un polígono determinan segmentos que tienen la misma longitud que los generados por los vértices de otro polígono, entonces se dice que los vértices se corresponden de manera biunívoca. Emergentes: congruencia de segmentos, igualdad de medida de segmentos, ángulos congruentes, igualdad de medida de ángulos, ángulos opuestos por el vértice, bisectriz, ángulos alternos, Triángulos congruentes, Criterios de congruencia Lado-Ángulo-Lado, Lado-Ángulo-Lado, Lado-Lado-Lado, Correspondencia biunívoca de puntos, Transformación rígida, polígonos congruentes, objetos geométricos congruentes.
Proposiciones – propiedades.	Propiedades de la geometría plana y del espacio
Procedimientos.	Establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de puntos (figuras geométricas) en el plano. Emplear la definición de longitud de un segmento para determinar si son congruentes. Aplicar transformaciones rígidas a segmentos. Justificar lo hecho a partir de teoremas o axiomas.
Argumentos	Dos segmentos congruentes tienen la misma medida. Demostración deductiva.

Esta configuración epistémica presenta brevemente los principales objetos primarios que surgen cuando se resuelven problemas que emplean la congruencia para ser resueltos.

4.1.3 IGUALDAD DE ÁREAS Y VOLÚMENES

Otro tipo de situación problema se da cuando se requiere emplear la igualdad de áreas y de volúmenes.

Si bien es poco frecuente en la actualidad afirmar que dos polígonos son iguales porque tienen la misma área, o que dos só lidos son iguales porque tienen el mismo volumen, la revisión de los "Elementos" de Euclides nos permite asumir que esto era común en la antigüedad, más aún si es un uso que se sigue presentando.

Un problema que hace referencia a este uso de la igualdad es el que muestra la Figura 28.

dado un pentágono regular, construir un hexágono regular igual al pentágono.

Figura 28. Problema sobre igualdad de polígonos.
Fuente: Agudelo y Escobar (2013, p.556)

La solución de este problema requiere modificar un pentágono para obtener un hexágono, manteniéndose la misma medida del área. Esto implica que dos polígonos que tienen la misma área son considerados iguales a pesar de no ser congruentes o ser el mismo polígono.

Algunas proposiciones que plantea Euclides y que son demostradas en su texto emplean claramente la igualdad en este sentido, en la Figura 29 se presenta la proposición 35 del libro I de los Elementos.

PROPOSICIÓN 35

Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Figura 29. Proposición sobre paralelogramos iguales por su área.
Fuente: Euclides (1991, p. 245)

Algo similar ocurre con los volúmenes, el mismo Euclides presenta una situación en la que se presentan dos sólidos que son considerados iguales debido a que tienen el mismo volumen, la Figura 30 nos muestra la proposición 31 del libro XIII de los Elementos.

PROPOSICIÓN 31

Los sólidos paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí.

Figura 30. Proposición 31 Libro 13, paralelepípedos iguales por su volumen.
Fuente: Euclides (1996, p. 246)

Adicionalmente, uno de los problemas clásicos de la antigüedad también ha sido expresado asumiendo la igualdad de dos objetos geométricos distintos, “construir un cuadrado igual a un círculo" (Bell, 1948, p. 35), este problema también es conocido como el de la cuadratura del circulo.

A continuación trataremos sobre este significado que se puede atribuir a la igualdad en contextos geométricos, este significado surge de la asignación de una medida al área de un polígono o al volumen de un sólido. Y se sustenta en asumir que si dos polígonos tienen la misma área entonces es posible modificarlos hasta obtener una misma figura, lo cual implica que son iguales. De la misma manera si dos solidos tienen el mismo volumen, es posible modificarlos hasta obtener el mismo sólido, esto implica que también se pueden asumir como iguales.

Esta igualdad podría ser rechazada en círculos matemáticos formales sin embargo históricamente se ha empleado y su uso en la actualidad no debería generar ningún problema si se entiende que se refiere a una igualdad basada en una medida y en el cambio de forma hasta obtener objetos congruentes.

La igualdad de objetos geométricos, basada en la medida de su área o volumen, es una relación de equivalencia.

Sea P el conjunto de todos los polígonos, asumiremos que existe una relación R que relaciona todos los polígonos de manera que, si dos polígonos tienen la misma área, están relacionados.

Si X es un polígono que tiene un área determinada, entonces el polígono X tiene la misma área que el polígono X, es decir X=X.

Si ahora tenemos dos polígonos X y Y, y estos tienen la misma área, entonces X=Y, lo cual a su vez implica que el polígono Y tiene la misma área que X, entonces Y=X.

Por último, si se tiene tres polígonos X, Y, Z, tales que X tiene la misma área que Y, es decir X=Y; y Y tiene la misma área que Z, es decir Y=Z, entonces X tendrá la misma área que Z, es decir X=Z.

De manera que la relación que establece que dos polígonos que tienen la misma área, son iguales, es una relación de equivalencia, y esto implica, en términos de Robledo (1972), que estamos frente a una igualdad.

IGUALDAD DE ÁREAS

En el libro I de los elementos, Euclides (1991) plantea las proposiciones de la 35 a la 38 en donde establece que dos triángulos o dos paralelogramos con bases iguales y situados entre las mismas paralelas, son iguales.

Esto nos muestra que para Euclides esta igualdad no estaba condicionada por la forma de los polígonos, pues en la proposición 42 del libro I trata sobre la construcción de un paralelogramo igual a un triángulo, como se muestra en la figura 31.

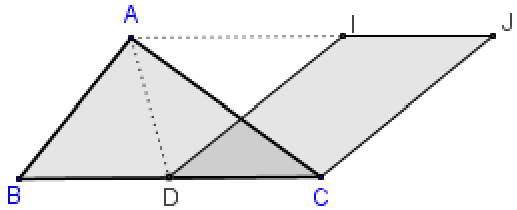


Figura 31. Paralelogramo DIJC igual al triangulo ABC

Aunque Euclides no llega a definir la congruencia, emplea la expresión igual en esos términos, lo mismo sucede para lo que denomina “igualdad de contenido” cuando se refiere a figuras geométricas que tienen la misma área o volumen, esto podemos observarlo en la Figura 32.

que en I, 35, donde se establecen las condiciones de igualdad entre paralelogramos, los *Elementos* introducen subrepticiamente una noción nueva de igualdad. Hasta entonces, la igualdad se venía entendiendo como coincidencia de formas y de figuras, como *congruencia geométrica*. A partir del I, 35, también se entenderá como igualdad de contenido o áreas, como *equivalencia geométrica*. En I, 44 («Apli-

Figura 32. Congruencia geométrica en los Elementos de Euclides.
Fuente: Euclides (1991, p. 66)

Y como se puede observar en la Figura 33, emplea también la expresión “igual” para referirse a la equivalencia de dos paralelogramos debido a que tienen la misma medida de área.

PROPOSICIÓN 35

Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Figura 33. Proposición 35 de Euclides.
Fuente: Euclides (1991, p. 245)

Asimismo, en la proposición 14 del libro II indica cómo es posible construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada, figura que podría ser entendida como cualquier polígono, tal como se muestra en la Figura 34.

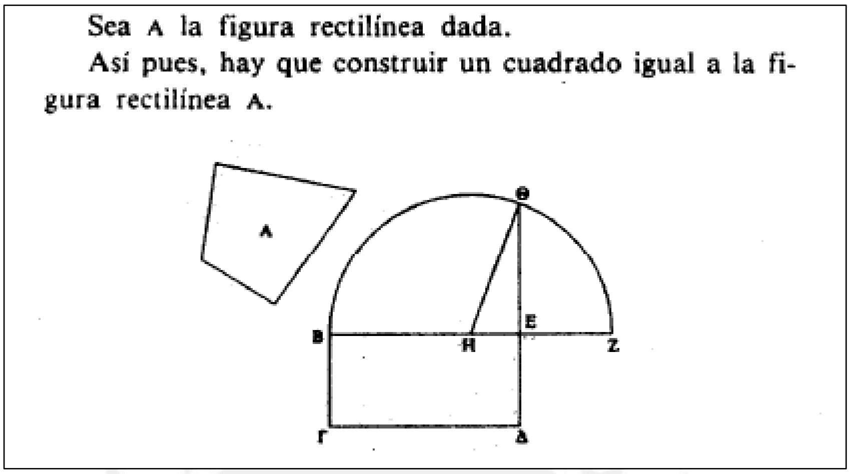

Sea A la figura rectilínea dada.
Así pues, hay que construir un cuadrado igual a la figura rectilínea A.

Figura 34. Proposición 14, Libro II, de Euclides.
Fuente: Euclides (1991, p. 288)

Lo anterior implica la posibilidad de construir un cuadrado igual a un polígono cualquiera. En este caso, tal como sostiene Lima (1991), la expresión “igual” se refiere a que ambas regiones poligonales tienen la misma área y la igualdad se debe comprender en este sentido.

Sin embargo es posible seguir empleando esta forma de concebir la igualdad entre polígonos con la finalidad de establecer la posibilidad de cambiar la “forma” de un polígono en otro, mediante adición y sustracción de áreas, esto se sustenta en las nociones comunes 2 y 3 propuestas por Euclides en el libro I de sus Elementos: “Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales (...) si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales” (Euclides, 1991, p.201).

Posteriormente, luego de la revisión hecha por Hilbert, se emplean conceptos como el de función, número real y otros, para reformular la Geometría de modo que se llega al planteamiento que actualmente se tiene sobre este tipo de igualdad geométrica, en el sentido de que no se emplea la expresión “igual” para referirse a esta, al estar restringida a solo una característica, la medida del área o del volumen, empleando en su lugar términos como equivalentes, equidescomponibles o equicompuestas.

Sin embargo en términos didácticos, es útil emplear esta forma de referirse a esta “igualdad” de objetos geométricos, tal como hace notar Agudelo (2013) en la Figura 35.

dos? El proceso realizado por el curso de "problemas del álgebra y a geometría" en la resolución del problema del hexágono igual un pentágono, puede evidenciar la posibilidad de realizar suma de figuras planas no cuadradas mediante la transformación de éstas en cuadrados y viceversa bajo el criterio de igualdad de polígonos respecto a sus áreas, trabajado por Euclides. También puede llenar de sentido y conocimiento formal a los futuros docentes de matemáticas, la posibilidad de realizar mediciones de superficies con unidades no cuadradas,

Figura 35. Reflexiones finales de una experiencia de aula.
Fuente: Agudelo y Escobar (2013, p. 558)

Según Allen y otros (1965) una "región" o "figura" es el nombre que se le asigna a un conjunto de puntos en el plano.

En ese sentido, Verástegui (2003) define región poligonal como la unión del interior de un polígono y su frontera (el polígono propiamente).

El área es definida por Allen y otros (1965) como la función que asigna un número real único a un conjunto de puntos en el plano, siendo el dominio de esta función el conjunto de todas las regiones acotadas o limitadas o encerradas en un polígono o circunferencia.

Con el uso de esta definición es posible plantear una serie de postulados que nos permiten desarrollar toda la teoría de áreas de regiones de frontera poligonal y también de regiones de frontera curva.

(1) Postulado 1 (postulado del Área): existe una función A llamada Área, definida para todos los conjuntos acotados en el plano de modo que, a cada conjunto acotado S se le asigna un número no negativo A(S).
    Tanto un punto como un segmento son conjuntos acotados a quienes les corresponde Área 0.
(2) Postulado 2 (suma de áreas): dados dos conjuntos S y T del plano, que no tienen punto en común, entonces, el área de la reunión de S y T es igual a la suma de las áreas de S y T.
(3) Postulado 3 (postulado de la congruencia): si S es un conjunto de puntos del plano, S es acotado y $S \equiv T$ entonces el área de S es igual al área de T.
(4) Postulado 4 (postulado de la unidad): si S es el conjunto formado por un cuadrado de lado 1 y su interior, entonces el área de S es uno.

Es importante remarcar que dos polígonos son congruentes si es que existe un movimiento del plano que transforme uno en otro (Isometría).

Además estos postulados permiten obtener las fórmulas conocidas para hallar el área del triángulo, los cuadriláteros y los polígonos en general, y también las de las áreas de regiones no poligonales.

Adicionalmente se define la descomposición de un polígono tal como se muestra en la Figura 36.

DEFINICIÓN 58: Una región poligonal $R(\mathrm{P}_n)$ se *descompone* en las regiones poligonales (en particular, regiones triangulares) $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_k$, si:

i) $R(\mathrm{P}_n) = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \ldots \cup R_k$; y

ii) Dos regiones distintas R_i y R_j, para $i \neq j$ de tal descomposición, son disjuntas o se interceptan en un punto o en un segmento de recta.

Figura 36. Descomposición de regiones poligonales.
Fuente: Verástegui (2003, p.172)

A partir de la definición de descomposición de polígonos, es posible asumir que dos polígonos son descompuestos en regiones poligonales congruentes, asumiendo esto es posible establecer la definición de polígonos equivalentes, tal como se presenta en la Figura 37.

DEFINICIÓN 59: Dos regiones poligonales $R(\mathrm{P}_1)$ y $R(\mathrm{P}_2)$ se llaman regiones ***equidescomponibles*** o ***equicompuestas*** o simplemente ***equivalentes***, si ambas regiones son ***descompuestas*** en igual número de regiones congruentes, correspondientemente; es decir, $R(\mathrm{P}_1) = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \ldots \cup R_k$ y $R(\mathrm{P}_2) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_k$, donde las regiones poligonales correspondientes (en particular regiones triangulares) R_i y S_i son congruentes, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Figura 37. Regiones equivalentes.
Fuente: Verástegui (2003, p.172)

Intuitivamente, se puede asumir que, si se tiene un polígono P_1 y este puede ser descompuesto en un número finito de regiones poligonales congruentes, si con todas estas, poniéndolas juntas y sin sobreponerlas, podemos componer el polígono P_2, entonces los polígonos son equivalentes. Esto quiere decir que dos polígonos equivalentes, o equicompuestos, o equidescomponibles, tendrán la misma área

El teorema de Bolyai-Gerwien que se presenta en la figura 38, establece que si dos polígonos tiene la misma área entonces son equivalentes.

TEOREMA DE BOLYAI–GERWIEN. *Dos polígonos de iguales áreas son equicompuestos.*

Figura 38. Teorema de Bolyai-Gerwein para áreas.
Fuente: Boltianski (1981, p.15)

La equivalencia de polígonos, definida de esta manera, es una relación de equivalencia.

IGUALDAD DE VOLÚMENES:

El tratamiento del caso del volumen se origina de una noción intuitiva de volumen que es formulada por Lima (1991) cuando indica que “o volumen de um solido é a quantidade de espaço por ele ocupada” (p. 61).

La forma de tratar el volumen es propuesta por Clemens, O’Daffer y Cooney (1989) quienes parten de definir poliedro como la unión de “un número finito de regiones poligonales donde cada arista de una región, es la arista de otra región, y si dos regiones se intersecan lo hacen en una arista o en un vértice” (p.434).

A continuación definen pirámide como el poliedro cuyas caras, menos una, tienen un vértice común y la cara que no contienen al vértice es la base. Y luego prisma, como el poliedro que tiene un par de caras congruentes sobre planos paralelos y todas sus demás caras son paralelogramos.

Debemos observar que en estas definiciones no se hace referencia al interior del poliedro, de modo que se puede afirmar que el poliedro está conformado por toda la superficie sin el interior.

Sin embargo, Moise y Downs (1986) indican que, dado un polígono P en un plano α, otro plano β paralelo al plano α y una recta L perpendicular a ambos planos, si por cada punto en el interior del polígono P se traza un segmento paralelo a la recta L, que une ambos planos, la reunión de todos los segmentos formados de esta manera se conoce como prisma.

Luego afirman que un prisma recto es, el cuerpo sólido engendrado por la base al moverse verticalmente desde un plano al otro, adicionalmente se define pirámide como el cuerpo sólido generado por todos los segmentos que pertenecen a una polígono y unen el plano que contiene al polígono, con un punto exterior a este plano, si se sustituye el polígono por una circunferencia en ambos casos se tiene la forma de construir un cilindro y un cono.

Todo esto nos permite definir un cuerpo sólido como el conjunto de todos los puntos que se encuentran en la superficie y al interior de un poliedro.

Ahora volviendo a emplear la definición de volumen como la cantidad de espacio ocupado por un sólido y estableciendo algunos postulados, será posible obtener las fórmulas para hallar el volumen de algunos cuerpos sólidos.

Según Clemens, O'Daffer y Cooney (1989) esos postulados son:

(1) Postulado del volumen: a cada sólido se le asigna un único número positivo llamado volumen.

(2) Postulado del volumen de un sólido rectangular o paralelepípedo: el volumen de un sólido rectangular o paralelepípedo es el producto de su longitud, ancho y altura, o en términos más conocidos el producto del área de su base, por su altura.

(3) Postulado de la suma de volúmenes: si un sólido es la unión de dos sólidos que no tienen puntos interiores comunes, entonces. su volumen es la suma de los dos volúmenes.

(4) El principio de Cavalieri: según el cual dados dos cuerpos sólidos S y T sobre un plano X, si todo plano paralelo al plano X, interseca a ambos sólidos en secciones transversales que tienen la misma área, entonces ambos sólidos tienen el mismo volumen, tal como se muestra en la Figura 39.

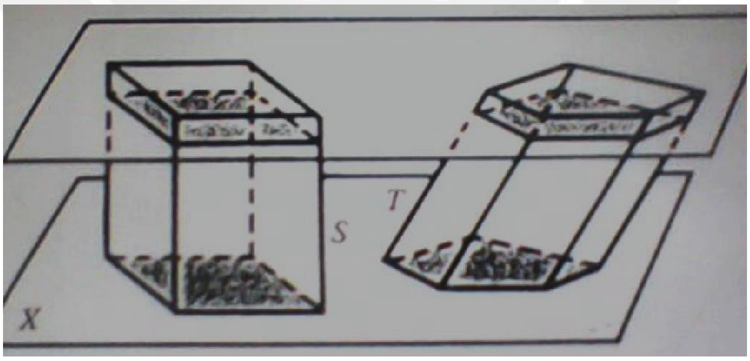


Figura 39. Principio de Cavalieri
Fuente: Clemens, O'Daffer y Cooney (1989, p.445)

La igualdad de volúmenes se puede entender en el mismo sentido que la igualdad de áreas, ya que si bien dos sólidos pueden tener el mismo volumen esto no implica que tengan la misma forma, tal como se desprende del principio de Cavalieri.
Además, así como en el caso del área de los polígonos, es posible establecer la equicomposición de poliedros.

Intuitivamente diremos que, si es posible cortar uno de los poliedros en un número finito de partes y con todas estas se puede componer el otro poliedro, entonces ambos poliedros son equicompuestos o equivalentes, lo cual significa que tienen el mismo volumen.
Sin embargo no es posible establecer lo contrario, es decir, todos los poliedros que tienen igual volumen son equicompuestos o equivalentes, tal como se indica en la Figura 40.

Hablando de otro modo, ciertos poliedros de igual volumen son equicompuestos (por ejemplo, prismas), sin embargo, *pueden hallarse también tales poliedros, que tienen igual volumen, pero no son equicompuestos*. Por primera vez este hecho fue demostrado por el matemático alemán Dehn (1901). El estableció que el cubo y la pirámide triangular regular (tetraedro) de igual volumen no son equicompuestos. Naturalmente, se puede también hallar otros poliedros que tienen igual volumen, pero no son equicompuestos.

Figura 40. Teorema de Bolyai-Gerwein para volumen.
Fuente: Boltianski (1981, p.47)

De manera que el tratamiento en el caso del volumen no es el mismo que en el caso del área, nuestro estudio se hace restringiéndonos a aquellos poliedros para quienes es posible afirmar que, si tiene el mismo volumen son equicompuestos.

Las proposiciones de la 28 a la 32 del libro XI de los Elementos de Euclides (1996), tratan sobre la posibilidad de obtener sólidos iguales debido a que tienen el mismo volumen, la Figura 41 muestra uno de estos casos.

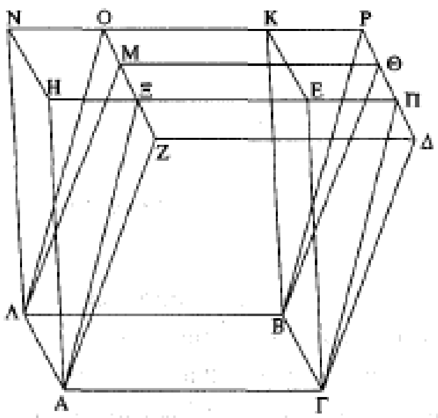
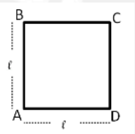
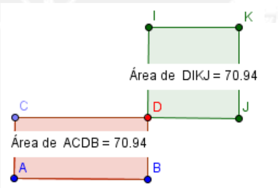
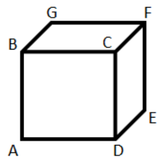
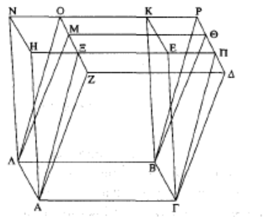


Figura 41. Proposición 30 libro XI, sólidos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales
Fuente: Euclides (1996, p. 245)

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA PARA EL CAMPO DE PROBLEMAS DE IGUALDAD DE AREAS Y VOLÚMENES

Asumir que dos objetos geométricos planos son iguales si tienen la misma área, o dos objetos sólidos son iguales si tienen el mismo volumen, se puede caracterizar como una igualdad en potencia, en el sentido de que existe la posibilidad de cambiar la forma de uno de los objetos para obtener otro objeto congruente con el segundo, entonces es necesario el uso de definiciones, conceptos y propiedades que nos permitan hacer estos cambios y obtener las medidas de área o volumen requeridas. Esto se presenta en la Tabla 14.

Tabla 14. Configuración epistémica de la igualdad como asignación de una medida.

Lenguaje	Verbal: región, área, base, altura, cuadrado, suma de áreas, resta de áreas, igual, congruente, descomposición, arista, volumen, suma de volúmenes, resta de volúmenes, espacio, poliedro, sólido, etc. Simbólico: =, ≡, R(ΔABC), A(P), V(P), etc. Gráfico:    
Situaciones problemas.	Problemas de determinación del área de una región poligonal o del volumen de un sólido. Problemas que implican la transformación de un polígono en otro con la misma área o de un sólido en otro con el mismo volumen.
Conceptos-definición.	Previos: punto, plano, segmento, figura geométrica, polígono, región geométrica, función área, función volumen, espacio, congruencia. Emergentes: composición y descomposición de regiones poligonales, suma de áreas, resta de áreas, composición y descomposición de sólidos, suma de volúmenes, resta de volúmenes.
Proposiciones.	Propiedades geométricas de las regiones planas y del espacio. Fórmulas para obtener el área de regiones geométricas planas. Propiedades de áreas de regiones geométricas. Fórmulas para la obtención del volumen de sólidos particulares. Propiedades de sólidos de uso común. Principio de Cavalieri.
Procedimientos.	Deducir fórmulas que permitan obtener el área de cuadriláteros a partir de su descomposición en triángulos o cuadrados. Emplear las fórmulas de áreas. Componer y descomponer regiones poligonales en triángulos o cuadrados. Realizar operaciones numéricas.
Argumentos	El área de un cuadrado es la medida de su lado al cuadrado. El volumen de un cubo es igual a la medida de la longitud de su lado al cubo. Si dos figuras planas tienen la misma área entonces se puede cambiar su forma hasta obtener figuras congruentes. Si dos sólidos tienen el mismo volumen, se puede cambiar su forma hasta obtener solidos congruentes. Demostración deductiva.

Este capítulo ha sido dedicado a la construcción del significado de referencia de la igualdad en Geometría, como consecuencia, hemos identificado tres distintas formas de uso que tiene la igualdad en este contexto, los cuales originan tres diferentes significados que se le da a la igualdad cuando se emplea en este contexto. Estos son la igualdad como identidad geométrica, la igualdad como congruencia y la igualdad de áreas y volúmenes.

CAPITULO 5: IDENTIFICACIÓN DEL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO

El significado institucional pretendido es el que se encuentra plasmado en documentos oficiales y textos, en los cuales se pone de manifiesto la forma como se organizan los conocimientos a ser alcanzados en las instituciones.

En el caso particular de nuestra investigación este significado está presente en los libros oficiales de secundaria que constituyen la muestra de lo que se "pretende" lograr en las aulas.

Identificaremos los objetos primarios asociados a la igualdad en el libro del tercero de secundaria, que se emplea en las escuelas públicas peruanas, para responder al segundo objetivo específico de nuestra investigación.

5.1 SIGNIFICADOS PRETENDIDOS DE LA IGUALDAD EN EL LIBRO OFICIAL DEL TERCER AÑO DE SECUNDARIA

Dedicaremos esta sección a la identificación de los significados pretendidos de la igualdad en el contexto de la geometría en el libro oficial de matemática del Tercer año de secundaria del Perú.

Para el análisis tendremos en cuenta los significados de referencia que se han determinado para la igualdad en el contexto de la geometría en el capítulo IV.

El procedimiento de análisis lo iniciaremos reconociendo los problemas que requieran del uso de la igualdad en el sentido de los significados ya identificados, es decir identificaremos problemas que empleen a la igualdad como, identidad, congruencia o igualdad de áreas o volúmenes. A continuación, identificaremos los conceptos, definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje asociados a la solución de estos problemas.

5.1.1 IGUALDAD COMO IDENTIDAD

Hemos denominado así a la igualdad empleada en el mismo sentido en la que se le emplea en contextos algebraicos y aritméticos, es decir, cuando la igualdad expresa la relación de equivalencia en la que decimos que a=b significa que tanto a como b se refieren al mismo objeto, en particular, en el caso de los objetos geométricos se asumen que al ser conjuntos de puntos, estos son iguales si los objetos geométricos están formados por los mismos puntos (igualdad de conjuntos).

Al realizar el análisis del texto de tercer año de secundaria, no se han encontrado problemas que requieran del uso de este significado de la igualdad que si ha sido encontrado en los textos de nivel superior.

5.1.2 IGUALDAD COMO CONGRUENCIA

La igualdad como congruencia se define haciendo uso de la definición de correspondencia biunívoca entre dos conjuntos, de manera que "cada elemento del primer conjunto se corresponde con solo un elemento del segundo conjunto y cada elemento del segundo conjunto se corresponde con solo un elemento del primer conjunto" (Perú, 2012a, p. 143).

Al establecer esta correspondencia entre los puntos que forman dos figuras se pueden establecer correspondencias entre los vértices de dos polígonos, esta correspondencia es representada por ↔, la Figura 42 muestra las correspondencias biunívocas que se establecen entre dos triángulos, en el libro del tercer año de secundaria.

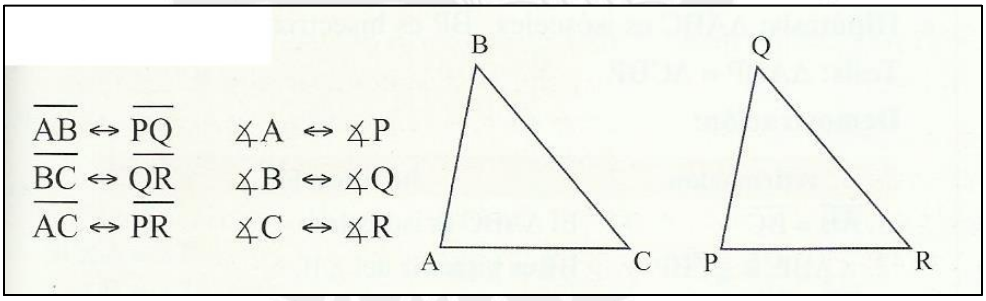


Figura 42: Correspondencia biunívoca y elementos homólogos
Fuente: Perú (2012a, p. 143)

Se debe notar que llaman homólogos a los lados o ángulos correspondientes.

A partir de la definición de correspondencia biunívoca, se define la congruencia de triángulos de la siguiente manera "dos triángulos son congruentes si al establecer una correspondencia biunívoca entre sus vértices, los elementos homólogos son congruentes" (Perú, 2012a, p. 144).

La Figura 43 muestra dos ejemplos descontextualizados, que para ser desarrollados necesitan del reconocimiento de la congruencia de ángulos.

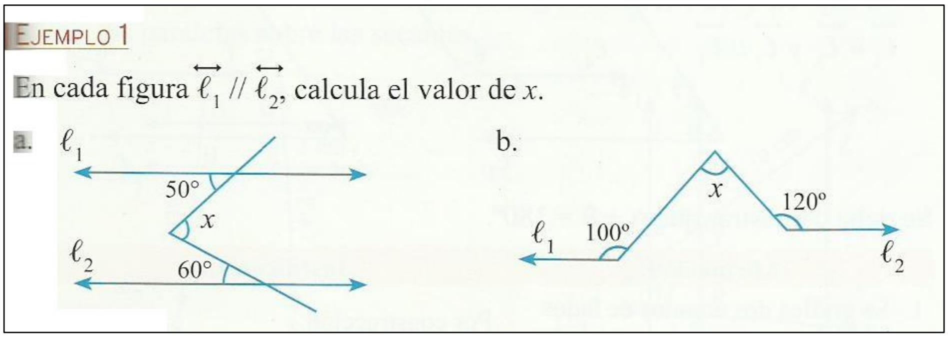


Figura 43. Ejemplos sobre ángulos congruentes formados por rectas paralelas cortadas por secantes
Fuente: Perú (2012a, p. 135)

La solución de este problema requiere del trazo de unas rectas auxiliares para luego reconocer los ángulos congruentes que se forman y establecer sus medidas, a continuación, mediante el empleo de propiedades de ángulos y operaciones aritméticas, obtener la medida del ángulo que se pide determinar.

La Figura 44 muestra dos problemas, de contexto matemático, que para ser resueltos también requieren de la identificación de ángulos congruentes.

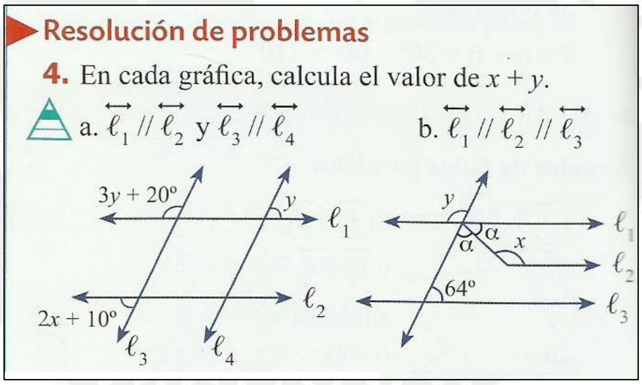


Figura 44. Problemas sobre ángulos congruentes formados por rectas paralelas cortadas por secantes.
Fuente: Perú (2012a, p. 136)

El problema a. solo requiere reconocer que los ángulos congruentes tienen la misma medida, puede ser identificado con la aplicación de un algoritmo, en el sentido de que basta identificar la presencia de una propiedad, el problema b. requiere del trazo de una recta adicional para poder identificar la presencia de ángulos congruentes, en ambos casos se iguala las medidas de los ángulos congruentes y se desarrollan las ecuaciones que se obtienen mediante cálculos numéricos, para obtener la respuesta que se requiere.

La Figura 45 muestra otro uso que se hace de los ángulos congruentes, en este caso se define la bisectriz como la recta que biseca un ángulo en dos ángulos congruentes lo que se indica con el uso del mismo símbolo como medida de los ángulos congruentes.

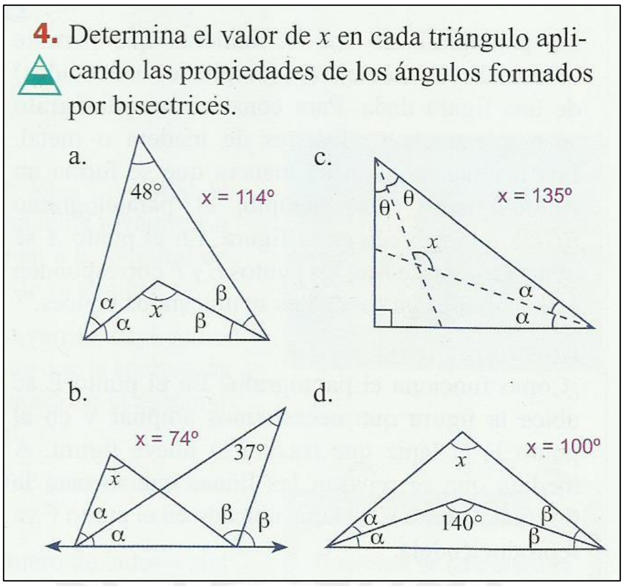


Figura 45. Propiedades de las bisectrices de ángulos en triángulos.
Fuente: Perú (2012a, p. 141)

Estos problemas son resueltos aplicando las propiedades que se deducen de la presencia de las bisectrices de los ángulos, en triángulos.

La Figura 46 presenta dos problemas para demostrar que se tienen triángulos congruentes para lo cual es necesario probar que se cumple alguno de los casos de congruencia.

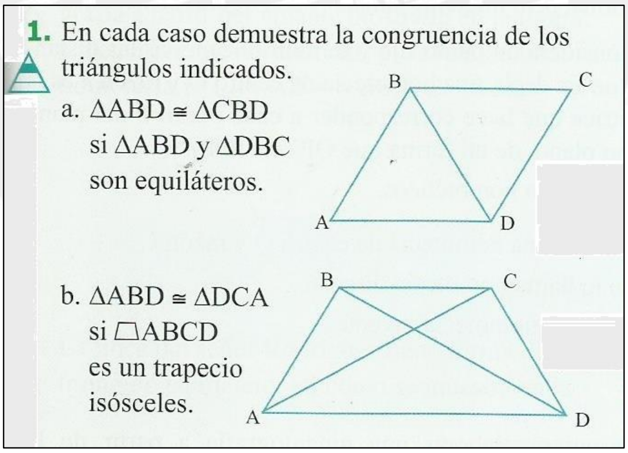


Figura 46. Aplicación de casos de congruencia de triángulos.
Fuente: Perú (2012a, p. 147)

En el problema a. se puede demostrar que los triángulos ABD y BCD son congruentes porque sus lados son congruentes, entonces se aplica el caso LLL (Lado, Lado, Lado). En el problema b. la demostración se hace por el caso LAL (Lado, ángulo, lado).

El grupo de problemas que se presentan en la Figura 47 son de naturaleza intra matemática y son desarrollados identificando que hay triángulos congruentes, para ello se requiere reconocer que se cumple algunos de los casos para la congruencia de triángulos, de manera que luego se pueden igualar las medidas de ángulos o lados para obtener lo que se pide.

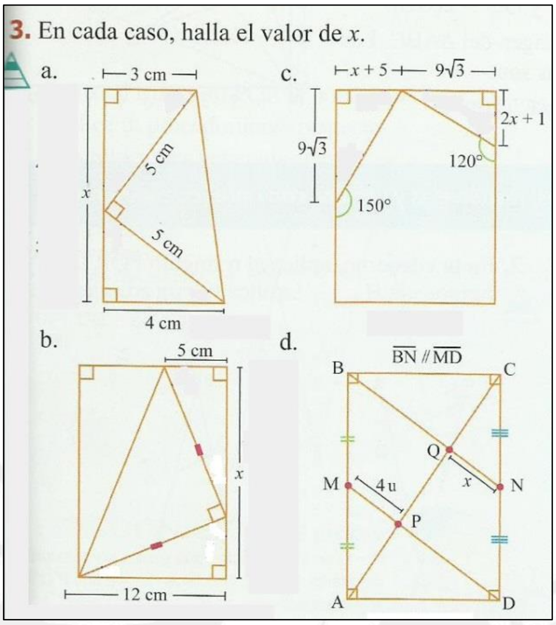


Figura 47. Problemas que requieren del uso de la congruencia de triángulos.
Fuente: Perú (2012a, 147)

En la Figura 48 presentamos dos problemas que para ser desarrollados requieren de la semejanza de triángulos, la cual se establece luego de reconocer la existencia de ángulos congruentes y lados proporcionales, por lo tanto se aplica la definición de proporcionalidad de lados de triángulos semejantes para dar solución a los problemas.

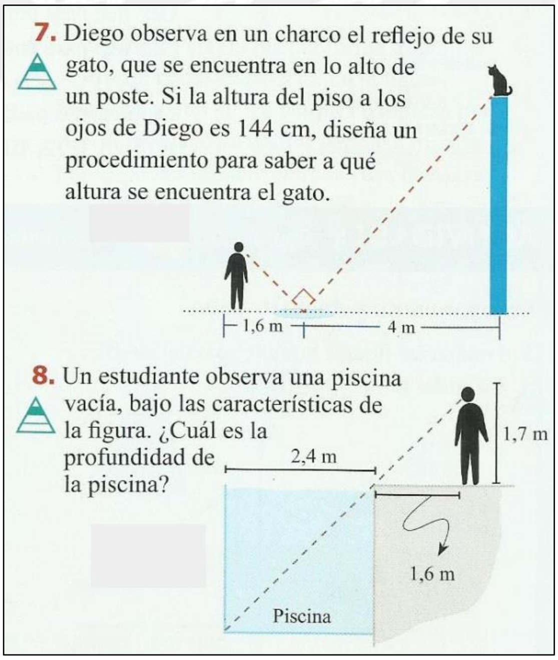


Figura 48. Problemas contextualizados sobre semejanza de triángulos
Fuente: Perú (2012a, p.147)

En los problemas mostrados se requiere hacer uso de la congruencia de segmentos, de ángulos o de triángulos, para su solución.

En la Tabla 15 presentamos la configuración epistémica conformada por los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos, que se movilizan al resolver problemas sobre congruencia, con un lenguaje particular, que se muestra en el texto analizado.

Tabla 15. Configuración epistémica pretendida de la igualdad como congruencia.

Lenguaje	Verbal: punto, segmento, ángulo, perpendicular, paralelo, recto, correspondencia biunívoca, medida, lados homólogos, congruentes, igual. Simbólico: =, ≡, P, AB, $\overline{AB}$, m($\overline{AB}$), $\angle ABC$, $\widehat{ABC}$, m($\widehat{ABC}$), $\overrightarrow{AB}$, ABC, ALA, LAL, LLL, A↔A', x, +, - , °, $\mathbf{9\sqrt{3}}$. Gráfico: 
Situaciones Problemas	Se presentan situaciones problemas de naturaleza intra matemática o extra matemática que requieran del uso de la congruencia de segmentos, angulos o triángulos, para su solución.
Conceptos, Definiciones.	Previos: punto, recta, plano, espacio, segmento, punto medio, medida de segmentos, unidad de medida, ángulo, suma de ángulos, perímetro. La igualdad como congruencia se define por correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos. Dos segmentos son congruentes si tienen igual longitud. Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida Emergentes: ángulos opuestos por el vértice, bisectriz, ángulos alternos, Triángulos congruentes, Criterios de congruencia Lado-Ángulo-Lado, Lado-Ángulo-Lado, Lado-Lado-Lado, triángulos semejantes
Proposiciones	Un triángulo ABC es congruente con un triángulo A'B'C' Si: $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. (LAL) Si: $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ y $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$. (ALA) Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. (LLL) y son semejantes Si $\measuredangle A \equiv \measuredangle A', \measuredangle B \equiv \measuredangle B', \measuredangle C \equiv \measuredangle C'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$
Procedimientos	Trazar segmentos auxiliares. Se establecen relaciones entre los segmentos como paralelismo, perpendicularidad, congruencia de ángulos, proporcionalidad de medidas de segmentos. Se emplean operaciones aritméticas para obtener lo que se pide en el problema.
Argumentos	Hay diferentes tipos de isometrías o movimientos rígidos y estos originan objetos geométricos congruentes.

Los elementos primarios presentados corresponden a los que se observan en el libro analizado.

Es necesario observar que el campo de problemas que se presentan en el texto, respecto de la congruencia, involucran la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos, sin embargo no se presentan problemas sobre congruencia de otros polígonos o circunferencias.

Respecto de las definiciones, propiedades y proposiciones, estos son los mismos que hemos identificado para la congruencia en el significado de referencia, pero restringidos a la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos.

Lo mismo sucede con los procedimientos y los argumentos que se requieren para la solución de estos problemas.

Finalmente el lenguaje empleado es similar al que se emplea en el significado de referencia.

5.1.3 IGUALDAD DE ÁREAS Y VOLUMENES

En el texto se define el área como la medida de la superficie limitada por un polígono, la cual se mide en unidades como el milímetro cuadrado, metro cuadrado, etc. La Figura 49 nos muestra la definición de área y perímetro que se asume.

> Los polígonos, como los cuadriláteros y triángulos, limitan una superficie a la que se denomina región poligonal. A la medida de esta región se le llama **área** y a la medida longitudinal del contorno de la figura se le llama **perímetro**.

Figura 49. Definición de área y perímetro de una región poligonal
Fuente: Perú (2012a, p. 163)

Las áreas de algunos cuadriláteros y triángulos cuentan con fórmulas que permiten obtener esta medida, relacionando la medida de sus lados u otros elementos de estos, la Figura 50 nos muestra un grupo de problemas que requieren de la aplicación de estas fórmulas para obtener la medida del área de cada uno de los polígonos mostrados.

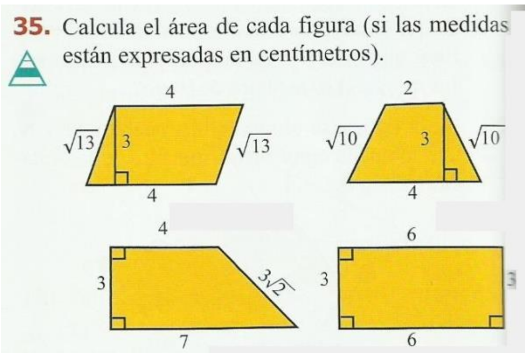


Figura 50. Problemas sobre áreas de polígonos.
Fuente: Perú (2012a, p. 172)

Por otra parte definen sólidos como, figuras en tres dimensiones que están limitadas por poliedros cuyas superficies son polígonos o por una superficie curva generada por el giro de una figura plana. En la Figura 51 se define el volumen de un sólido como la medida del espacio que ocupa esta figura de tres dimensiones.

Volumen (V)	**Es la medida del espacio que ocupa el prisma y se calcula multiplicando el área de la base por la altura:** $V = A_B \times h$.

Figura 51. Definición de volumen de un prisma
Fuente: Perú (2012a, p. 186)

En el libro de tercer año, solo se define área y volumen, y se presentan fórmulas para determinar estas medidas en objetos geométricos particulares, presentando algunos ejemplos y problemas que requieren de la aplicación de estas fórmulas tal como se muestra en la Figura 52.

8. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular regular de $\sqrt{28}$ cm^2 de área lateral si sus aristas laterales forman un ángulo de 60° con el plano de la base.

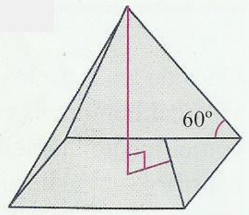


Figura 52. Problema sobre volumen de un sólido.
Fuente: Perú (2012a, p. 193)

Sin embargo, no hemos identificado problemas que requieran el uso de la equivalencia de áreas o volúmenes, es decir aquellos en los que se presenta el uso de la igualdad de objetos geométricos debido a su medida de área o volumen.

DISCUSIÓN DEL ANÁLISIS DEL LIBRO

En este capítulo hemos identificado los significados de la igualdad presentes en el libro oficial de matemática del tercer año de secundaria del Perú, con la finalidad de identificar el significado pretendido de la igualdad en el contexto de la Geometría.

Para ello buscamos identificar problemas que permitan emerger o empleen los significados de la igualdad en Geometría que ya hemos caracterizado en el capítulo anterior y que constituyen los significados de referencia.

En primer lugar, solo hemos identificado que los problemas presentados en el libro hacen uso de uno de los significados, el de congruencia. Sin embargo, esta congruencia solo es empleada entre segmentos, ángulos o triángulos, o para la definición de la semejanza de triángulos. No se ha observado la presencia de algún problema que requiera del uso de la congruencia de polígonos en general o de la congruencia de circunferencias, o de la congruencia de otros objetos geométricos.

En segundo lugar, no se ha podido identificar situaciones que requiera el uso de la identidad de objetos geométricos.

En tercer lugar, tampoco se han identificado situaciones que permitan reconocer que dos figuras planas son iguales si tienen la misma medida de área o dos cuerpos sólidos son iguales si tienen el mismo volumen. Si bien el texto incluye situaciones que requieren el uso de los conceptos de área y volumen, estos están restringidos a la obtención de estas magnitudes.

Finalmente, la Tabla 16 muestra los significados de la igualdad en Geometría que constituyen el significado de referencia y el pretendido.

Tabla 16. Significados de referencia y pretendido de la igualdad en Geometría

	Significados de referencia de la igualdad	Significados pretendidos de la igualdad en el libro del tercer año de secundaria
Igualdad en Geometría	➢ Igualdad como Identidad	
	➢ Congruencia	➢ Congruencia de segmentos, ángulos y triángulos.
	➢ Igualdad de Áreas y Volúmenes	

Esta tabla muestra un paralelo de la presencia de los significados de la igualdad en Geometría, que se han identificado, tanto en el estudio del significado de referencia, como el del identificado en el libro del tercer año de secundaria.

El significado pretendido solo incluye la congruencia como significado de la igualdad, y solo de tres objetos geométricos, los segmentos, los ángulos y los triángulos, de manera que aun la congruencia es tratada de manera parcial, ya que no se llega a su generalización para polígonos, circunferencias o cualquier otro objeto geométrico.

CAPITULO 6: ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA DEL LIBRO OFICIAL DEL TERCER AÑO DE SECUNDARIA EN RELACIÓN A LOS SIGNIFICADOS DE LA IGUALDAD EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA

El Enfoque Ontosemiotico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) brinda herramientas teóricas que nos permiten realizar un análisis de la idoneidad de un texto y luego poder realizar una valoración del mismo. En el caso particular de nuestra investigación, es posible hacer dos tipos de análisis, el análisis de la idoneidad epistémica y el análisis de la idoneidad ecológica.

6.1 ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD EPISTÉMICA

Este instrumento nos permite valorar el grado de representatividad de los significados de la igualdad, que están presentes en el libro oficial del tercer año de secundaria, respecto de los significados de la igualdad en Geometría que constituye su significado de referencia.

En primer lugar, se emplea la Tabla 17, que nos muestra una primera aproximación de cómo es tratado nuestro objeto de estudio en el texto analizado, es decir, podemos observar que la igualdad en contextos geométricos, empleada en el libro del tercero de secundaria está restringida a la congruencia, no encontrando alguna situación que permita identificar que se use la igualdad como identidad o la igualdad de áreas y volúmenes.

Adicionalmente, es necesario observar que la congruencia está referida solo a tres casos, la congruencia de segmentos, la congruencia de ángulos y la congruencia de triángulos, no haciéndose mención a otros casos de congruencia, como la de cuadriláteros o polígonos en general.

Asimismo, el análisis de la idoneidad epistémica es realizado, tomando como referencia los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por Godino (2011) que han permitido a Garcés (2013) elaborar unas tablas de indicadores de idoneidad epistémica que, con algunas modificaciones con el fin de adaptarla a los objetivos de nuestro trabajo, nos sirve como base para elaborar la Tabla 17.

Tabla 17. Indicadores de idoneidad epistémica de la congruencia como significado de la igualdad.

COMPONENTE	INDICADORES	CUMPLE SI	CUMPLE Parcialmente	CUMPLE NO	OBSERVACIÓN
SITUACIONES PROBLEMA	Se presentan varios problemas contextualizados que requieren del uso de la congruencia.			X	Están restringidos a la congruencia de triángulos.
	Se ejemplifica con ejercicios que requieren del uso de la congruencia.		X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos sobre congruencia.		X		
	Se proponen situaciones de problematización que requieren del uso de la congruencia.		X		
LENGUAJES	Uso del modo de expresión verbal en las actividades sobre congruencia.			X	
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de congruencia.		X		
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de congruencias.		X		Se restringe a las definiciones.
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con congruencias.	X			
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X			
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico)		X		Con énfasis en la expresión gráfica.
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X		
REGLAS (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y conceptos de congruencia son claros y correctos.		X		Respecto de la congruencia de triángulos.
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos		X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria		X		
	Se presentan los enunciados principales de congruencia.		X		Respecto de la congruencia de triángulos
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básicos para resolver estos problemas con congruencias.		X		
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de congruencias.			X	
	Se proponen situaciones de congruencia donde los alumnos tengan que generar o negociar			X	

	procedimientos.			
ARGUMENTOS	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes son adecuadas al nivel educativo secundario.	X		
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las congruencias son adecuadas desde la matemática.	X		
	Se promueven situaciones-problemas de congruencia para que el alumno argumente.	X		Respecto de la congruencia de triángulos
RELACIONES	Los objetos matemáticos primarios (problemas, definiciones proposiciones, etc.) se relacionan entre sí.	X		
	Se identifican y articulas los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.		X	

En esta tabla presentamos resumidos los resultados de la identificación del significado pretendido de la congruencia como significado de la igualdad en geometría.

Pero, es necesario remarcar que el estudio de la congruencia, en el libro del tercer año de secundaria, está restringido a la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos y no a la congruencia en general.

Si solo nos referimos a la congruencia de triángulos es posible afirmar que la valoración de la idoneidad epistémica es alta, ya que cumple con la mayor parte de los indicadores propuestos para su valoración.

Sin embargo, en nuestro trabajo no pretendemos restringirnos solo a este caso de congruencia, sino pretendemos emplear su significado general, para cualquier tipo de objeto geométrico, en este caso, el libro dista mucho de llegar a ser apropiado para lograr este nivel de estudio de la congruencia, ya que no va más allá de la congruencia de triángulos.

Por ello es que nuestra valoración es, que el texto tiene una idoneidad epistémica media, debido precisamente a que no abarca toda la amplitud de casos que se da para la congruencia y por el contrario, se restringe a unos casos específicos.

Respecto de los otros significados de la igualdad en Geometría, que hemos identificado y forman parte del significado de referencia de la igualdad, no se han identificado situaciones problemas que permitan su uso en la sección correspondiente a Geometría del libro del tercer año de secundaria, es por ello que no es posible realizar algún análisis y valoración de ellos.

6.2 ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD ECOLÓGICA

La Idoneidad ecológica se refiere al grado en que el libro de matemática del tercer año de secundaria resulta adecuado respecto de lo que se propone en el Diseño Curricular Nacional (Perú, 2009), que es el marco curricular de la educación peruana, en relación al estudio de la igualdad en Geometría.

6.2.1 CONTEXTO EN EL QUE SE SITUA EL TEXTO

En este punto es necesario observar algunos aspectos generales del currículo de matemática peruano de manera que se pueda entender la organización de los contenidos de los libros oficiales de matemática del nivel secundaria de las escuelas públicas del Perú.

En el Diseño Curricular Nacional (DCN) se establecen los siguientes lineamientos para el área de Matemática en el nivel secundario:

> En el nivel de Educación Secundaria se busca que cada estudiante desarrolle su pensamiento matemático con el dominio progresivo de los procesos de Razonamiento y demostración, Comunicación matemática y Resolución de problemas, conjuntamente con el dominio creciente de los conocimientos relativos a Número, relaciones y funciones, Geometría y medición, y Estadística y probabilidad. (Perú, 2009, p. 317)

En el párrafo anterior se indica que Geometría constituye uno de los componentes en los que se organiza el área de matemática, este componente es caracterizado de la siguiente manera:

> Se relaciona con el análisis de las propiedades, los atributos y las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones. Se trata de establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de los otros; comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones con objetos en el plano de coordenadas cartesianas; visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones trasversales. La Medida le permite comprender los atributos o cualidades mensurables de los objetos, así como las unidades, sistemas y procesos de medida mediante la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas. (Perú, 2009, p. 318)

Las competencias para el componente geometría y medida en el VI y VII ciclos de la educación secundaria se muestran en la Figura 53.

GEOMETRÍA Y MEDICIÓN	Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos geométricos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.	Resuelve problemas que requieren de razones trigonométricas, superficies de revolución y elementos de Geometría Analítica; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.

Figura 53. Competencias de Geometría y medida en el nivel secundaria de la educación básica regular del Perú.
Fuente: Perú (2009, p. 318)

Del mismo modo en el DCN peruano se establecen los conocimientos de la componente Geometría, que, para el tercer año de secundaria se muestran en la Tabla 18.

Tabla 18. Conocimientos específicos del componente de Geometría establecidos en el Diseño Curricular Nacional para el tercer año de secundaria.

CICLO	VII
Grado	Tercero
Conocimientos	**Geometría plana** • Área de regiones poligonales y relación entre el área y el perímetro de figuras planas. • Relaciones de las medidas de lados y ángulos en los triángulos isósceles y equilátero. • Congruencia y semejanza de triángulos. • Relación entre los ángulos formados por dos rectas paralelas y una tercera que las corta. • Bisectrices de un triángulo. • Convexidad y dilataciones de figuras geométricas. **Medida** • Sistemas radial y sexagesimal de medida de ángulos. **Geometría del espacio** • Volumen de poliedros: prisma, cilindro, cubo y pirámide. **Trigonometría** • Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. • Ángulos de elevación y depresión. • Identidades trigonométricas elementales.

Estos conocimientos deben estar presentes en los libros que emplean los estudiantes de secundaria de las escuelas públicas peruanas, de modo que, deben presentar la disciplina, buscando el desarrollo de las competencias, capacidades, conocimientos y valores establecidos en el DCN.

En este sentido el Ministerio de Educación del Perú ha establecido una serie de criterios para la evaluación de la calidad de estos textos, algunos de estos son:

> 1.- Los contenidos y tratamiento pedagógico deben estar alineados con el Currículo Nacional y ser apropiados para el grado escolar y enfoque pedagógico del área curricular (...).
> 3.- La información contenida debe presentar claridad conceptual y precisión, estar explicada con una estructura sintáctica sencilla, adecuadamente dosificada, articulada y jerarquizada, considerando una paulatina graduación de complejidad y esclareciendo o definiendo términos complejos para asegurar su comprensión (...).
> 5.- El texto debe señalar los contenidos a desarrollar y estar estructurado en capítulos o unidades secuenciales, que se inician informando a los estudiantes sobre los aprendizajes esperados. (Perú, 2012, pp. 36-39)

Estos criterios constituyen las características fundamentales que tienen los textos oficiales usados en la educación secundaria, en particular, el libro oficial del tercer año de secundaria, que hemos seleccionado para ser analizado con la finalidad de determinar el significado institucional pretendido de la igualdad en el contexto de la geometría.

Este libro lleva como título *3 Matemática* y ha sido editado por la editorial Norma en el año 2012, con la finalidad de servir de consulta y apoyo al estudiante en su proceso de aprendizaje de la matemática a lo largo de su desarrollo durante el año escolar, abarca todos los conocimientos especificados para el grado al que está dirigido y cuenta con actividades a desarrollar durante las clases, que son propuestas como actividades para los alumnos y actividades de contexto extra matemático basadas en la resolución de problemas como fuente del aprendizaje. Cuenta con una sección para explicar el uso del software Geogebra en el trabajo con triángulos.

Adicionalmente, al final de cada capítulo presenta una sección de proyectos que pretenden llevar a la práctica lo aprendido, mediante su uso en el estudio de situaciones problemáticas y otra sección de evaluación de los aprendizajes

En una primera exploración del libro oficial de matemática del tercer año de secundaria analizado, hemos observado que, en el contexto geométrico, la matemática presentada se caracteriza por el establecimiento de relaciones que son expresadas mediante fórmulas. Estas fórmulas a su vez son expresiones algebraicas o aritméticas que relacionan características medibles de objetos geométricos tales como longitud de segmentos (medida de lados polígonos), medida de ángulos, medida de áreas o de volumen o relaciones entre estas medidas.

Cuando una relación o propiedad es expresada mediante una fórmula y esta se emplea para la solución de un problema, se realiza el trabajo con la característica medible en términos de la propiedad o relación que le es aplicable, empleando números o variables que representan a las características a ser empleadas en la solución del problema, es decir se pasa del contexto geométrico, al contexto algebraico o aritmético, donde se emplea la fórmula adecuada y así obtener un resultado, para luego volver al contexto geométrico y dar una interpretación geométrica del resultado obtenido.

6.2.2 VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD ECOLÓGICA DE LA SECCIÓN DE GEOMETRÍA DEL LIBRO DE MATEMÁTICA DEL TERCER AÑO DE SECUNDARIA

Los indicadores que permiten valorar la idoneidad ecológica del libro del tercer año de secundaria en relación a los significados de la igualdad en geometría presentes en este texto, son los presentados por Godino (2011).

La Tabla 19 muestra de manera resumida la valoración de los indicadores de Idoneidad ecológica de la sección de Geometría del libro del tercer año de secundaria, cuyo análisis se hizo en el Capítulo V.

Tabla 19. Indicadores de Idoneidad ecológica de la congruencia como significado de la igualdad.

COMPONENTE	INDICADORES	CUMPLE SI	CUMPLE NO	OBSERVACIÓN
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares	X		
Apertura hacia la innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la practica reflexiva	X		
	Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo	X		
Adaptación socio-profesional y cultural.	Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes	X		
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico	X		
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares	X		

Adicionalmente, es necesario remarcar que, nuestro análisis es solo de algunas secciones del texto, no hemos realizado un análisis de todo el texto, de manera que nuestras conclusiones están restringidas a las secciones correspondientes al organizador *Geometría* del Área de Matemática, incluso, dentro de este organizador, no hemos considerado la sección correspondiente a trigonometría, sino solo la referida a aspectos de Geometría plana y del espacio. Asimismo no se ha realizado ninguna actividad con alumnos o docentes que nos permitan realizar otras afirmaciones.

CONCLUSIONES

Basados en el estudio que hemos presentado en los capítulos anteriores, pasaremos a presentar las conclusiones de nuestra investigación, las cuales se presentan tomando en consideración nuestros objetivos de investigación.

Objetivo 1. Identificar y clasificar los significados de referencia de la igualdad en el contexto de la Geometría.

Para alcanzar este objetivo se realizó el análisis de un conjunto de textos de matemática de nivel superior, con la finalidad de identificar los significados de referencia de la igualdad en contextos geométricos.

Asumimos que el significado de un objeto matemático está dado por cada uno de los usos que se le da a este, cuando se resuelven problemas que requieren de su empleo.

El significado de la igualdad en Geometría es el resultado de los usos que se hacen de este, es el conjunto de todos los emergentes primarios que surgen cuando se pretende dar solución a situaciones problema que involucran este objeto matemático, estos emergentes forman una ontología que es representada mediante una configuración epistémica, que nos describe el significado del objeto estudiado.

Cada significado obtenido de esta manera constituye un significado de referencia de la igualdad.

Nuestra investigación nos ha permitido identificar tres significados de referencia para la igualdad en contextos geométricos, que hemos denominado de la siguiente manera:

1. Identidad Geométrica; que surge de asumir que un objeto geométrico es un conjunto de puntos de modo que dos objetos geométricos son iguales si hacen referencia al mismo conjunto de puntos. Por ser equivalente a la igualdad de conjuntos y solo implicar la diferencia de representante del mismo conjunto, es que la hemos denominado identidad. Este significado es equivalente al que se da a la igualdad en contextos algebraicos y aritméticos y emplea el mismo signo “=” para hacer referencia al mismo.

2. Congruencia; que se sustenta en le definición de congruencia como una isometría, es decir que si una figura es el resultado de una transformación o isometría que se le hace a otro objeto, entonces son congruentes o "iguales", en este caso, además de una expresión propia para referirse a esta igualdad, también se emplea un signo propio "≡", sin embargo muchos de los autores a quienes se ha acudido indican que es posible cambiar *congruente* por *igual* y ello no genera ningún problema, si es que se tiene clara la definición de esta igualdad.

   Este significado para la igualdad es particularmente empleado en Geometría y se establece entre objetos geométricos.
3. Igualdad de Áreas y volúmenes. es otro significado de la igualdad, que actualmente se nombra como igualdad con poca frecuencia. Se sustenta en asumir que si dos objetos geométricos tienen la misma medida de área o volumen, entonces, es posible realizar cambios en estos, mediante composición o descomposición en objetos elementales de manera que se obtienen objetos congruentes. La geometría Euclidiana consideraba que si existía esta posibilidad entre dos objetos geométricos, entonces se les llamaba iguales, para cuestiones didácticas es posible emplear esta forma de igualdad, sin embargo en este caso no parece apropiado emplear el signo de la igualdad y en su lugar se prefiere usar la expresión, "igualdad de áreas" o "igualdad de volumen", este tipo de igualdad se sustenta en la definición de medida de área o volumen como una función que asigna a cada polígono un área y a cada solido un volumen, por ello es que consideramos que es un significado que es similar al que se da en el contexto del algebra, llamado igualdad funcional.

Adicionalmente, es posible indicar que si bien se puede identificar la igualdad, esta relación no implica el uso del signo "=", este es usado cuando se está ante la identidad de objetos geométricos.

Objetivo 2. Identificar los diferentes significados pretendidos de la igualdad en el contexto de la Geometría en el libro oficial de matemática del tercer año de secundaria que es usado en las instituciones educativas públicas del Perú.

El significado pretendido es el que está presente en los libros de texto que se utilizan para la enseñanza. En nuestro caso, una vez establecidos los significados de referencia, hemos buscado la presencia de estos en el libro de matemática del tercer año de secundaria.

Al hacer el análisis del texto de tercer año de secundaria, se han encontrado situaciones problema que requieren del uso de solo uno de los significados de la igualdad, la congruencia.

Los problemas que se presentan en el texto no motivan el uso de los otros dos significados de la igualdad, ni la identidad geométrica, ni la igualdad de áreas o volúmenes.

Además, en el caso del significado de la congruencia, se ha observado que en el texto solo se resuelven problemas que implican la congruencia de segmentos, ángulos o triángulos, pero no se encontraron problemas que impliquen la congruencia de polígonos, circunferencias u otros objetos geométricos.

Objetivo 3. Valorar la idoneidad epistémica y ecológica del libro del tercer año de secundaria.

El análisis de la idoneidad epistémica del significado pretendido de igualdad en geometría, respecto del significado de referencia de la igualdad en geometría, que hemos construido, indica que el texto es parcialmente idóneo para la enseñanza y aprendizaje de la congruencia. Debido a que solo abarca situaciones problema que involucran la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos, pero no incluye situaciones que permitan el surgimiento de un significado más amplio de igualdad, en el sentido que abarque la congruencia de otros objetos geométricos.

El análisis de la idoneidad ecológica nos muestra que el texto ha sido desarrollado según lo establecido en el Diseño Curricular Peruano y la legislación peruana que regula la estructura que deben tener los textos oficiales.

Sin embargo, se deben analizar los otros libros para poder dar una valoración más amplia, ya que, solo se ha hecho el análisis de la sección correspondiente a Geometría, del libro del tercer año de secundaria, se debería hacer un análisis de los otros libros de matemática de educación secundaria para determinar la presencia de los otros significados y su tratamiento.

Por otra parte, luego del análisis de las configuraciones epistémicas de la igualdad en los diferentes contextos, consideramos que es posible afirmar que la identidad geométrica es el equivalente a la identidad algebraica o aritmética, en el sentido que se emplean formas diferentes de representar a un mismo objeto, es decir a=b si a y b son solo nombres de un mismo objeto, de manera que este significado es común a los tres contextos matemáticos.

Asimismo, el caso de la congruencia es propio del contexto geométrico porque se da entre objetos geométricos.

La igualdad de áreas y volúmenes es una consecuencia del uso de las funciones, tanto la asignación de una medida, como la justificación de los procesos de composición y descomposición de objetos geométricos, requiere de los conceptos, definiciones y propiedades que han derivado del uso de la teoría de conjuntos y funciones, es por ello que este significado está más próximo a la igualdad en contextos algebraicos denominada igualdad funcional.

Respecto del marco teórico que hemos empleado, consideramos que la elección del Enfoque ontosemiotico fue acertada ya que nos ha permitido contar con herramientas teóricas que han permitido el recojo, organización y análisis de información que nos ha permitido llegar a las conclusiones que hemos indicado.

Respecto de la metodología de investigación esta nos permitió establecer los pasos a seguir para llevar adelante la investigación por lo que consideramos que se ajustó a nuestros objetivos y propósitos de investigación.

SUGERENCIAS

Es posible hacer un estudio acerca del uso de los significados que se le asignan al signo igual cuando se resuelven problemas de contexto geométrico.

Asimismo, consideramos que otro estudio relevante, podría estar dirigido a establecer alguna relación entre los significados de la igualdad en los diferentes contextos matemáticos, no solo los aritméticos, algebraicos y geométricos.

Finalmente, consideramos que es relevante estudiar las implicaciones, en la práctica docente, de la diversidad de significados que se puede asignar a un objeto matemático.

REFERENCIAS

Abagnano, N. (1998). *Diccionario de Filosofía*, Sao Paulo: Editorial Martins Fontes. Recuperado de http://docente.ifrn.edu.br/avelinolima/disciplinas/filosofia-da-mente/dicionario-de-filosofia-nicola-abbagnano/view

Agudelo, N. y Escobar, D. (2013). Resolución de un problema geométrico en torno a la noción de igualdad respecto a áreas. *Revista Científica, Número especial*, pp. 555-558. Recuperado de http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/7724/9534

Allen, F., Douglas, E., Richmond, D., Rickart, Ch., Swain, H. y Walker, R. (1965); *Matemática Para la Escuela Secundaria Geometría (Parte 2) Comentario*; USA.

Bell, E. (1948) *Los grandes Matemáticos (Desde Zenón a Poincare) Su vida y obras*. Buenos Aires.

Boltianski, V. (1981). *Figuras Equivalentes y equicompuestas*. Moscú. Recuperado de http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/figuras_equivalentes_y_equicompuestas.pdf

Borba, M. y Araújo, J. (2004) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte.

Carranza, C. (1965). *Álgebra*. Lima.

Ceballos, L. (2012). Matemáticas para todos: la relación de igualdad y sus implicaciones en la solución de ecuaciones. *Cuaderno Activa*, (2), pp. 79-81. Recuperado de http://ojs.tdea.edu.co/index.php/cuadernoactiva/issue/view/7/showToc

Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1989). Geometría con Aplicaciones y solución de problemas. USA.

D'Amore, B., Fandiño, M. y Lori, M. (2013). La semiótica en la didáctica de la Matemática. Italia.

Eco, U. (1994) *Signo*. Colombia.

España, Sociedad Andaluza de educación Matemática (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada.

Euclides. (1991). *Elementos Libros I-IV*. Madrid.

Euclides. (1996). *Elementos Libros X – XIII*. Madrid

Frege, G. (1984). *Estudios sobre Semántica*. Barcelona.

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educ. Mst. Pesqui., 8(1), 67-98. Sao Paulo.

Font, V., Adán, M. y Ferreres, S. (2015). Valoración de la idoneidad de las matemáticas enseñadas. XIV CIAEM-IACME. México. Recuperado de http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/356/179

Garcés, W. (2013). *Análisis Didáctico como Herramienta para determinar el Grado de Idoneidad de las Tareas sobre Ecuaciones Lineales entre La Educación Secundaria y la Educación Superior Tecnológica*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/5149/GARCES_CORDOVA_ANALISIS_IDONEIDAD.pdf?sequence=1

Gil, A. (2002). *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. 4ta Edición, Sao Paulo.

Godino, J. (2002). Un enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 22, nº 2.3, pp.237-284*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME). Brasil. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiotica de investigación en didáctica de la Matemática, *Investigación en Educación Matemática XVI, 49-68.* Jaén: SEIEM. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,14(3), 325-355*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma, 27(2), 221-252. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica Para Maestros*. Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Godino, J. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Anexo al artículo, "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3): 325-355.* Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática,* 12 (1), 70-92. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/Godino_Llinares_Interaccionismo.PDF

Hernandez, R., Rojo, A., Rabuffetti, H. y Hernandez, M. (1966). *Conceptos Básicos de Matemática Moderna*. Buenos Aires.

Hernandez, R., Fernandez, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. 5ta edición. México.

Hilbert, D. (1953). *Fundamentos de la Geometría*. Madrid

Lentin, A. y Rivaud, J. (1970). *Algebra Moderna*. Madrid.

Lima, E. (1991). *Medida y Forma en Geometría*. Rio de Janeiro

Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media Volumen 1*. Lima.

Lima, T. y Mioto, R. (2007) Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. *Rev. Katál, Florianópolis, v. 10 n. esp., 37-45*. Recuperado de http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1414-49802007000300004&script=sci_arttext

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 10, núm. 3, noviembre, 2007, pp. 365-399.* Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/335/33500304.pdf

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. México.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del Pensamiento Relacional y Comprensión del signo Igual por Alumnos de Tercero de educación Primaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de la Rioja. Granada, España. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Munkres, J., (2002). *Topología*. España.

Oficina Internacional de pesos y medidas. (2008). *El sistema Internacional de Medidas SI*. Madrid.

Pérez, J., (2001). *Lugares Geométricos*. Venezuela. Recuperado de http://www.ciencias.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/perez_sanchez_jesus/lugares_geometricos.pdf

Perú, Ministerio de educación. (2009). *Diseño Curricular nacional de educación básica regular*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf

Perú, Ministerio de educación. (2012a). *3 Matemática*. Lima: Editorial Norma.

Perú, Ministerio de educación. (2012b). *4 Matemática*. Lima: Editorial Santillana.

Perú, Ministerio de Educación. (2003). Resolución Ministerial N° 0304: *Criterios pedagógicos e indicadores de calidad para la evaluación de textos escolares de educación primaria y secundaria.*

Pino Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educ. Matem.* Pesq. 13(1), 142-178. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Pino-Fan_Mat_Pesquisa%202011.pdf

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV: México, DF. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/mexico00.pdf

Ramírez, M. y Rodríguez, P. (2011). Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de Texto. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION, 26*, pp.41-55. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/26/archivo_7_de_volumen_26.pdf

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la Lengua Española* (23ª ed.) Madrid, España: Autor.

Rey Pastor, J., Calleja, P. y Trejo, C. (1952). *Análisis Matemático*. Buenos aires.

Robledo, A. (1972). *Lecciones de Algebra Elemental Moderna* I. Chile.

Verástegui, T. (2003). *Geometria Básica Curso 1*, Perú.

Wilhelmi, M., Godino, J. y Lacasta, E. (2004). *Configuraciones Epistémicas asociadas a la noción de Igualdad*. Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf