PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

LOS POLIEDROS: ANÁLISIS DE UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA EN UN LIBRO DE TEXTO DE SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

que presenta

GLADYS MILAGROS RONDAN TROCONES

Dirigido por

FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA

San Miguel, 2015

Dedico el presente trabajo de investigación a mi madre, Angélica, por ser un ejemplo de bondad y generosidad, por inculcarme principios y valores que guían mi vida, por el gran amor y cuidado que le brinda a sus nietos; a mi precioso y querido hijo Fabrizio Daniel, por ser la gran bendición que Dios me dio en la vida; a mi sobrino Jheremy y a mis hermanos, Liz, Nancy, Evelyn, Luis y Joselyn, por el gran amor que me demuestran día a día y el gran apoyo incondicional que me han demostrado en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por brindarnos la gran calidad de docentes de prestigio.

Un agradecimiento especial a mi asesor el Dr. Francisco Ugarte, por demostrarme su gran calidad profesional y personal al enseñarme y guiarme en todo el proceso de construcción de la presente investigación, por sus sugerencias y correcciones, por la dedicación y paciencia hacia mi persona para desarrollar una investigación de calidad.

A la Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho y a la Dra. Katia Vigo por sus observaciones y sugerencias, las cuales me ayudaron a mejorar mi trabajo.

A la Directora de la Maestría la Dra. Jesús Flores, por los grandes consejos de superación y ánimo, por sus críticas constructivas y por el apoyo incondicional.

A Dios, porque cada día me bendice y guía mi camino.

A mi familia, por ser el gran soporte que día a día estuvo conmigo en este largo y difícil camino de estudios, por su confianza y amor en todo momento para lograr la presente investigación.

A mis compañeros de estudios, los profesores becarios de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas del convenio de Maestría - Pronabec por compartir grandes enseñanzas en las aulas de clases.

A mis compañeras Verónica, Elva y Catherina, por formar con ellas una gran amistad, por compartir alegrías y tristezas en este difícil camino de estudios, espero seguir contando con su amistad y cumplir las metas trazadas para el futuro.

A una persona especial, por su comprensión y apoyo incondicional, por los bellos momentos compartidos y por enseñarme que la vida es hermosa si existe el amor.

Finalmente, a mi pequeño hijo Fabrizio Daniel, porque comprendió que mamá no estuvo presente en momentos importantes para él, porque estaba estudiando, espero que entienda en un futuro que ser un gran profesional implica esfuerzo y sacrificio.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo analizar la organización matemática asociada a los poliedros que corresponde en la séptima unidad del libro de texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria, distribuido por el Ministerio de Educación. En este sentido, nuestra investigación responde a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el grado de completitud de la organización matemática que presenta el texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria en el capítulo correspondiente a los poliedros? Y, para responder a nuestra pregunta de investigación, desarrollamos una metodología cualitativa de tipo bibliográfica. Para la recolección de datos se utilizó los componentes de una organización matemática (los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías) utilizando como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico y, para el análisis de la organización matemática utilizamos los Indicadores de completitud de Fonseca. Los resultados obtenidos en nuestra investigación evidencian la presencia de 10 tipos de tareas, 32 tareas, 5 técnicas, 22 tecnologías y 1 teoría. Asimismo, en el análisis de los 7 indicadores de completitud de Fonseca, solo se observa mínimos rasgos de 4 indicadores (OML1, OML3, OML4 y OML6) y la ausencia total de 3 indicadores (OML2, OML5 y OML7); aspectos por los cuales concluimos que la organización matemática que presenta el libro de texto analizado en torno a la unidad séptima muestra un grado de completitud *menos completa*.

Palabras clave: Poliedro, Organización matemática, Indicadores de completitud

ABSTRACT

This research aims to analyze the mathematical organization associated with polyhedra corresponding unit in the seventh school textbook of mathematics sixth grade education, distributed by the Ministry of Education. In this regard, our research answers the following question: What is the degree of completeness of the mathematical organization submitting the math textbook sixth grade of primary education in the relevant chapter of the polyhedra? and to answer our research question, we developed a qualitative methodology of bibliographical type. Components of a mathematical organization (types of tasks, tasks, techniques, technologies and theories) using as approach the Anthropological Theory of Didactic and was used for the analysis of mathematical organization Indicators used for data collection completeness of Fonseca. The results of our investigation revealed the presence of 10 types of tasks, 32 tasks, 5 Technical, 22 technologies and one theory. Furthermore, the analysis of the 7 indicators completeness of Fonseca, only minimal features 4 indicators (OML1, OML3, OML4 and OML6) and the absence of 3-pointers (OML2, OML5 and OML7) is observed; aspects by which we conclude that the mathematical organization submitting the analyzed textbook around the seventh unit shows a degree of completion less complete.

Keywords: Polyhedron, Math organization, Completeness indicators

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación muestra el estudio de la organización matemática (OM) asociada al objeto matemático poliedros, desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En este sentido, consideramos que nuestra investigación permitirá analizar la organización matemática que tiene el libro de texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria que es distribuido por el Ministerio de Educación del Perú a todas las instituciones educativas públicas del nivel primario.

Asimismo, consideramos importante señalar que el tema de poliedros está propuesto en el Diseño Curricular Nacional del 2009, en el V ciclo que corresponde al sexto grado de educación primaria, en el cual los estudiantes deben resolver problemas que implican el cálculo del área lateral y total de los mismos. Asimismo, medir y comparar el volumen de los poliedros con unidades arbitrarias.

Es así que, a continuación, presentamos la estructura de la investigación, compuesta de seis capítulos:

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación en el que revisamos investigaciones relacionadas al análisis de organizaciones matemáticas desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico e investigaciones relacionadas a nuestro objeto matemático poliedros; asimismo, justificamos la problemática, formulamos nuestra pregunta de investigación, mencionamos los objetivos que van a guiar nuestra investigación y la metodología cualitativa de tipo bibliográfica.

En el segundo capítulo, presentamos los estudios preliminares de los poliedros, donde desarrollamos la presencia del objeto matemático en los diseños curriculares del Perú y en los libros de textos escolares desde el año 1965 hasta la actualidad.

En el tercer capítulo, tratamos el estudio del objeto matemático poliedros, en el cual presentamos las definiciones de los poliedros desde el punto de vista matemático.

En el cuarto capítulo, presentamos los principales aspectos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); propuesta por Yves Chevallard (1999) como los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías que se identifican en la organización matemática del libro de texto analizado.

En el quinto capítulo, presentamos de forma explícita la metodología que guiará nuestro trabajo de investigación que en nuestro caso es la metodología cualitativa de tipo bibliográfica. Del mismo modo, hacemos referencia a los instrumentos, los mismos que utilizaremos para el análisis de la organización matemática.

Finalmente en el último capítulo, presentamos el análisis del material didáctico, donde describimos la organización matemática que hemos identificado en el libro de texto y el análisis de la completitud de la organización matemática en base a los siete criterios de completitud de Fonseca (2004).

Concluimos nuestro trabajo de investigación presentando las consideraciones finales, sugerencias, referencias y anexos.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el presente capítulo explicaremos los antecedentes encontrados sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard, utilizada en el análisis de libros de textos; y el objeto matemático poliedros. Asimismo, presentamos el problema que motivó nuestro trabajo de investigación y describimos los argumentos que sustentan la justificación e importancia de realizar el análisis de la organización matemática presente en los libros de texto. Finalmente, planteamos el problema de investigación y formulamos los objetivos de la investigación.

1.1. Antecedentes

En esta sección, presentamos en primer lugar las investigaciones que hemos encontrado relacionados a la Teoría Antropológica de lo Didáctico que es el marco teórico elegido y en segundo lugar, presentamos investigaciones en el área de Educación Matemática relacionados al objeto matemático poliedros.

Investigaciones relacionadas con la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Con respecto al empleo de la teoría en la que se basará la presente investigación, para analizar la organización matemática de los libros de textos, tenemos las siguientes investigaciones:

Carrillo (2012) realizó una investigación cuyo objetivo fue analizar y describir la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar de matemática que corresponde al quinto grado de educación primaria. Para realizar el análisis de texto se basó en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) pues, según señala la autora, la TAD asume que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como producto de un proceso de estudio. Por ello, esta teoría es un referente adecuado para describir y analizar la organización matemática del objeto matemático. La investigadora, también señala que esta teoría supone que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse como un modelo único que se resume con la palabra praxeología. Es así que, los resultados obtenidos mostraron que la praxeología predominante en el texto analizado es la del saber hacer; la cual está constituida por tipos de tareas y técnicas. Asimismo, la investigadora afirma que a cada tarea determinada en un texto le corresponde una técnica. Por otro lado, el análisis de las concepciones de fracción como parte-todo, operador, cociente y razón; le permitió identificar las praxeologías (tipos de tareas y técnicas empleadas para resolver las tareas vinculadas a estos conceptos así como las tecnologías que justifican las técnicas utilizadas). Del mismo modo, Carrillo (2012) señala que las praxeologías presentes en el texto escolar pueden influir positiva o negativamente en el aprendizaje del objeto matemático. Asimismo, el uso de diversas representaciones figurales del objeto matemático ayudaría a un mejor entendimiento del mismo; por tanto, realizar una adecuada representación del objeto matemático favorecería en gran medida el aprendizaje de los alumnos porque ellos podrían visualizar correctamente el objeto matemático. En este sentido, la investigadora sugiere realizar estudios en otros textos escolares sobre la praxeología matemática relacionada a diversos objetos matemáticos. En relación a la metodología para el análisis de libros de textos cabe señalar que la autora realizó la definición de criterios que le permitió el análisis de la organización matemática presente en el libro de texto analizado. Asimismo, esta investigación es relevante porque la investigadora realizó el análisis de la organización matemática de un texto escolar distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación de nuestro país, puesto que nuestra investigación también se basará en el análisis de la organización matemática de un texto escolar de sexto grado distribuido por el Ministerio de Educación de nuestro país.

También, en la investigación realizada por Gonzales (2014), cuyo objetivo fue describir y analizar la Organización Matemática (OM) en torno a la noción de los conceptos de escala y proporción, presentes en un texto universitario de matemáticas para arquitectos desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la autora señala que esta teoría se enfoca en el estudio de las praxeologías y cuando el profesor decide escribir otra edición de un texto, o utilizar uno para preparar su curso, la transposición didáctica ya se ha realizado hace tiempo; en otras palabras el conocimiento matemático ha sufrido cambios en su estructura (paso del saber sabio al saber enseñado). Asimismo, la investigadora señala que la TAD; es pertinente para realizar el análisis de textos, pues brinda las herramientas para describir y analizar cuestiones relativas al estudio del objeto matemático; es decir, permite identificar las tareas, técnicas y discurso tecnológico teórico que justifican las técnicas que los autores del texto proponen en su acción para resolver las tareas presentadas y esto permitirá describir la organización matemática que está propuesta en un libro de texto e identificar el grado de completitud de dicha organización matemática. En este sentido, Gonzales (2014) identificó que el libro de texto analizado presentaba tres tipos de tareas, nueve tareas y once técnicas concluyendo que la praxeología presente en el libro de texto es local. Asimismo, cabe resaltar que la autora utilizó los indicadores de completitud de Fonseca (2004) que le permitió realizar la valoración del libro de texto e indicar la completitud de la organización matemática presentada en el mismo. Del mismo modo, con la identificación de la organización matemática que está inmersa en el contenido del objeto de estudio se puede encontrar o definir un conjunto de pasos que forman *La técnica*. Ello dará pistas de cómo mejorar la organización didáctica del libro, señalando qué tipos de tareas y técnicas no están presentes en el texto. En este sentido, esta investigación nos permitirá analizar la organización matemática presente en el texto teniendo en cuenta los elementos teóricos de la TAD como las tareas, tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías y al igual que la investigadora las técnicas que hemos propuesto en el análisis del libro de texto que hemos seleccionado estarán compuestas por pasos.

Otro de nuestros referentes es Carrillo (2013) quien realizó una investigación que tuvo como objetivo general describir y analizar las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto de enseñanza universitaria basándose en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999). En dicho estudio presentó la organización matemática de los textos analizados definiendo los elementos de una praxeología como: tareas, técnicas y tecnologías con respecto al objeto matemático. En este sentido, la investigadora indica que una organización matemática (OM) no puede concebirse separada de una organización didáctica (OD), ya que la OM constituye una herramienta fundamental para modelizar tanto la actividad matemática como la actividad humana en general y una OD constituye procesos de estudio que permiten detectar varios aspectos o tipos de situaciones que forman parte de un proceso matemático. Asimismo, la autora utiliza los indicadores de completitud de Fonseca (2004) y señala que la completitud de la organización matemática debe tener en cuenta tareas en las que se identifiquen la existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática; es decir, la necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas y la posibilidad de cambiar la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar los diferentes casos que permita completar y ampliar el proceso de estudio para tener una valoración positiva del texto que se analiza. Esta investigación nos servirá como ejemplo para analizar la praxeología del libro de texto seleccionado.

En esta presentación relacionada con la Teoría Antropológica de lo Didáctico solo se muestra las investigaciones que han utilizado como referencial teórico a dicha teoría para hacer el análisis de la organización matemática presente en los libros de textos analizados. En este sentido, cabe mencionar que en el capítulo IV se explicará los elementos teóricos de la TAD y los que se relacionan con la organización matemática.

Investigaciones realizadas sobre la enseñanza del objeto matemático: poliedros

Con respecto al objeto matemático del presente trabajo de investigación; se ha considerado como antecedente a las siguientes investigaciones:

Guillén (2010), quien realizó un estudio sobre la enseñanza de conceptos geométricos relativos a los sólidos que incluye a los poliedros realizado con alumnos de 12 años y con docentes en formación de educación primaria. El objetivo fue obtener información sobre cómo los estudiantes van construyendo ciertos objetos mentales de conceptos geométricos relacionados con los sólidos (familias de sólidos, propiedades, relaciones e ideas erróneas) y cómo van ampliándolos durante el proceso de enseñanza aprendizaje.

En este sentido, la investigadora señala que para la enseñanza de la geometría de los sólidos, (el cual incluye a los poliedros); se debe considerar que en los primeros niveles, los estudiantes necesitan representaciones físicas de los sólidos; por lo tanto, las actividades que se propongan para la enseñanza de los sólidos deben tener en cuenta los procedimientos de construcción o generar modelos de los mismos. Es así que, en el trabajo con niños pequeños, se debe mostrar las diferentes representaciones materiales de los sólidos geométricos con la finalidad de trabajar el tipo de propiedades que presenta este objeto matemático. Asimismo, el inicio del estudio de la geometría de los sólidos geométricos como los poliedros, debe estar basado en modelos que pueden ser macizos (de madera o plastilina) o huecos (construidos con cartulina a partir de sus desarrollos planos); ya que, los estudiantes deben integrar el objeto mental que van construyendo con todos los significados que provienen de los diferentes contextos en los que aparecen dichos objetos matemáticos.

Guillén (2010) señala que es aconsejable que se presenten los sólidos materializados de diferentes maneras; que lleven a los estudiantes a ideas diferentes (macizos, huecos con la superficie cubierta o sólo el armazón); de esta manera, si los estudiantes han incluido en su objeto mental una familia de sólidos (poliedros u otros) y sus atributos, las cuales provienen de las diferentes materializaciones pronto pueden llegar a prescindir del material concreto.

Por lo tanto, es necesario que en el diseño de tareas o actividades de introducción de los conceptos sobre sólidos se presenten diferentes ejemplos de cada uno de ellos; puesto que, estas tareas deben permitir a los estudiantes experimentar, reflexionar y comprender que las ideas de los conceptos se van precisando en la medida que se encuentren más ejemplos de los mismos; esto permitirá que los estudiantes puedan generalizar e incluyan el objeto mental de una determinada familia de sólidos como los poliedros todos los ejemplos de dichos objetos matemáticos, así como sus propiedades y relaciones de sus elementos.

Del mismo modo, Guillén (2010) señala cómo los estudiantes incorporan los objetos mentales que constituyen para determinadas familias de sólidos, propiedades, relaciones e ideas erróneas identificando tres aspectos:

1.- Las ocasionadas por las propias representaciones físicas de los sólidos con los que se trabaja.

2.- Las ocasionadas o fomentadas por el propio proceso de enseñanza, al introducir los conceptos a partir de familias específicas, como consecuencia de los modelos físicos empleados o por las sugerencias dadas.

3.- Las que pueden ocasionarse por el proceso de aprendizaje que tiene lugar; esto es, cuando surgen problemas de lenguaje, o los juicios para establecer las propiedades se basan en subfamilias, o se basan en parte de la figura cuando se debería tener en cuenta toda entera, etc.

También consideramos la investigación realizada por Blanco y Crespo (2007), la cual tuvo por objetivo determinar las dificultades que se observan en la enseñanza y aprendizaje de las representaciones de cuerpos geométricos en el plano que presentan los estudiantes de una escuela media de México. En este sentido, las investigadoras señalan que los estudiantes presentan serias dificultades para representar en el plano los cuerpos geométricos como cubos y pirámides debido a la influencia de los prototipos de representaciones geométricas que se utilizan en la enseñanza y que esto genera obstáculos para la construcción de la definición, elementos y propiedades del objeto matemático; pues se corre el riesgo que el estudiante tenga un único ejemplo válido del objeto matemático (por ejemplo, el cubo que se representa de la misma forma que el cuadrado o la pirámide de base cuadrada siempre apoyada sobre la misma base, entre otras).

Así también, Blanco y Crespo (2007) afirman que con la intención de mejorar la comprensión de ciertos conceptos; muchas veces se recurre a la enseñanza de ejemplos que modelizan el concepto, lo cual es necesario, pero como toda abstracción tiene sus ventajas y desventajas. Por ello, la incorporación de estos conceptos es tan firme que llegan en ocasiones a transformarse en obstáculos; ya que, los prototipos utilizados para modelizar conceptos ofrecen una visión más o menos completa del objeto matemático y el riesgo que se corre es que estos prototipos sean vistos por los estudiantes como el único ejemplo válido del objeto matemático; por ello, para evitar esto es necesario que los estudiantes logren una apropiada abstracción de las características del objeto matemático.

Del mismo modo, Blanco y Crespo (2007) señalan que en la representación de cuerpos geométricos como el cubo y la pirámide los alumnos zurdos dibujan estos poliedros con inclinación hacia la izquierda y la representación de los alumnos diestros lo hacían con inclinación hacia la derecha. Asimismo, se observó que algunos alumnos confundieron cuerpos geométricos con figuras en el plano. También señalan que la mayor parte de estudiantes dibujó una pirámide de base cuadrada y ninguna pirámide cuya base sea otro polígono. En este sentido, se evidencia la presencia de prototipos que son representaciones características de los libros de texto, como las posiciones de los cubos o pirámides con una base apoyada y en la presencia de cubos y pirámides transparentes en algunos casos. Es así que, las investigadoras indican que las representaciones gráficas que se muestren de los cuerpos geométricos como los poliedros no deben ser representaciones clásicas que aluden a un modelo único porque no permite a los estudiantes una verdadera comprensión del espacio y de sus representaciones bidimensionales sino que se debe presentar una variedad de representaciones sobre el objeto matemático tratado.

Por otro lado, Blanco (2009) en su investigación sobre la enseñanza que presentan los libros de textos de sexto grado de primaria de la escuela mexicana sobre el objeto matemático poliedros, señala que la presencia de prototipos se pone de manifiesto en las representaciones características que muestran los libros de textos que se analizaron. En el caso de cubos y pirámides que se representan con una base apoyada y esto dificulta la concepción que los estudiantes deben tener sobre los poliedros; ya que no permite que el estudiante pueda visualizar y representar otras posiciones del cubo y de la pirámide. En este sentido, la investigadora señala que los libros de textos deben presentar diferentes representaciones gráficas del objeto matemático poliedro con la finalidad de que los estudiantes puedan desarrollar definiciones y propiedades acordes con el objeto tratado.

1.2. Justificación del tema seleccionado

La presente investigación se sustenta en primer lugar en la importancia del por qué analizar los libros de textos y en segundo lugar la relevancia del objeto matemático poliedros.

Actualmente, desde el año 2012 el Ministerio de Educación del Perú, implementó una estrategia denominada “Buen Inicio del Año Escolar”, con la intención de promover una práctica institucional para establecer condiciones adecuadas y desarrollar acciones que permitan recibir a los estudiantes en escuelas preparadas y aptas desde el primer día de clases. Es así que, esta estrategia tiene como uno de sus componentes la distribución de materiales educativos y esto implica la distribución gratuita de textos escolares en todos los niveles de Educación Básica Regular en todo el Perú. En nuestra práctica docente, podemos observar que, muchos de los libros de textos del nivel primario, con los que hemos trabajado, los temas de Geometría del Espacio, se encuentran relegados a las últimas secciones de los textos. Este aspecto, también se evidencia en particular en el libro de texto de sexto grado que hemos seleccionado para el análisis, en el cual el tema de poliedros se ubica en la séptima unidad de ocho unidades que tiene el libro.

Asimismo, los docentes sabemos que el libro de texto se convierte en uno de los principales materiales didácticos, por lo tanto, la elección adecuada y pertinente del mismo va condicionar la actividad de enseñanza aprendizaje. Al respecto Godino, Font y Wilhemi (2006) señalan que el análisis de libros de textos es un componente importante del análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyéndose en la primera fuente para los docentes y esto se evidencia particularmente en el nivel primario, donde los alumnos no son autónomos en el uso del libro, ya que no afrontan solos el estudio de los contenidos curriculares. Por ello, el docente desempeña un papel mediador entre el libro de texto y el alumno y la elección de un texto adecuado facilitará la labor pedagógica del docente.

En esta misma línea, Jhonsen 1996 (citado en Calderero, 2012), al respecto indica que: “Los malos libros de textos educativos son una verdadera calamidad para cualquier nación; los buenos libros de textos, en cambio, producen un beneficio incalculable” (Jhonsen, 1996, p. 15).

En cuanto a la importancia de los textos escolares tenemos a Gómez (2009) quién señala que un libro de texto es una publicación especializada, reconocible por su contenido y constituyen la principal fuente de apoyo e información, indispensable e inseparable de los docentes y de los estudiantes, ya que los libros de textos son el saber institucionalizado del sistema educativo; del currículo realmente implementado y del modelo de organización y planificación de la enseñanza dominante en el tiempo en el que libro de texto está vigente.

Asimismo, el autor señala que los docentes son los que tienen que decidir qué libro de texto les parece el más adecuado, que parte o partes del libro de texto van a usar y finalmente como van a hacer para usar esas partes seleccionadas en función a las capacidades de sus alumnos y de los objetivos de su enseñanza. Es así que, en algunos casos los libros de texto son un buen medio de enseñanza que salva deficiencias formativas del profesorado y garantiza los soportes científicos de los conocimientos plasmados en ellos. Por ello, los docentes necesitan tener un buen conocimiento y comprensión de lo que aportan los libros de textos que ellos utilizarán; tanto en su contenido como en relación a las capacidades que deben desarrollar en sus estudiantes.

Gómez (2009) afirma que los libros de textos se convierten en documentos imprescindibles para indagar acerca de lo que es o ha sido la práctica real de la enseñanza, ya que los libros de texto son registros disponibles en los que se puede encontrar el conocimiento matemático que la institución escolar ha transmitido.

También cabe señalar los aportes de Vivas (2010) quién señala que el libro de texto constituye uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente, ya que es el referente exclusivo del saber científico, tanto para los profesores como para los alumnos, puesto que permiten estudiar los distintos enfoques que se le ha dado a una disciplina a lo largo de un período de tiempo. Asimismo, el libro de texto ejerce diferentes roles puede ser un objeto de estudio, un material de consulta, un registro de actividades del alumno, una recopilación de ejercicios propuestos y problemas para resolver, entre otros aspectos. Además, la elección de un libro de texto supone una decisión curricular importante del docente y la variedad, riqueza de sus contenidos, su incidencia en el aula y su función como transmisor de contenidos aceptados socialmente hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido los libros de texto en la educación matemática.

Del mismo modo, la investigadora señala que el libro de texto es un recurso didáctico básico del docente porque influye en la actividad que los docentes desarrollan en el aula; en otras palabras, los docentes sustentan su trabajo práctico, en los libros escolares de matemática que recomiendan a sus alumnos y que ellos mismos usan.

En relación al objeto matemático seleccionado, los poliedros, consideramos que es relevante porque el espacio que rodea al niño está formado en su mayor parte por objetos que tienen formas de poliedros y todos ellos forman parte de su mundo concreto. Así, según lo señala Piaget (citado en Godino y Ruiz, 2002) la mayoría de los alumnos a partir de los siete años se encuentran en una etapa concreta; de ahí la importancia de que los libros de textos desarrollen actividades que les permitan a los estudiantes manipular, elaborar plantillas, realizar construcciones; etc., de los poliedros; con la finalidad de que los estudiantes del nivel primario puedan tener experiencias de trabajo y manipulación con este objeto matemático de forma vivencial y concreta. Esto nos permite afirmar la necesidad de plantear tareas de manipulación y construcción de los poliedros para facilitar el aprendizaje de dicho objeto matemático.

Del mismo modo, Sardella, Berio y Mastucci (2002) afirman que desde los primeros momentos de nuestra infancia experimentamos con las formas de objetos tridimensionales y sus movimientos en el espacio, tomando posesión del espacio que nos rodea. Partiendo de ello, cabe resaltar la importancia que tiene trabajar con los poliedros desde la infancia.

Asimismo, Zapata y Cano (2008) afirman que los lineamientos curriculares de matemáticas, en la actualidad, sugieren que para una mejor percepción del espacio se requiere que el estudiante comunique y represente el espacio bidimensional (largo y ancho) a través de experiencias significativas con lo tridimensional (altura, ancho y profundidad) del mundo físico, ya que mucho de lo que lo rodea tiene forma de poliedro. Es así que, esta relación entre el espacio tridimensional con el plano puede desarrollarse a partir de la construcción de poliedros debido a que con estos se puede propiciar tres tipos de procesos cognitivos importantes para el desarrollo del pensamiento espacial: los procesos de visualización, los procesos de construcción y los procesos de razonamiento.

En esta misma línea, nuestro Diseño Curricular Nacional (2009), reconoce la importancia de aprender dicho concepto matemático; prueba de ello es que en el área de Geometría, se establece que los estudiantes de la Educación Básica Regular en el nivel primario deben examinar y analizar las formas, características y relaciones de figuras de tres dimensiones, interpretando sus relaciones espaciales.

En el primer grado, los estudiantes deben establecer relaciones entre objetos de su entorno como el cubo; en el segundo grado deben identificar las figuras planas en el prisma recto, cubo y pirámide; asimismo en tercer grado deben identificar rectas paralelas y perpendiculares en el cubo y prisma; mientras que en el cuarto grado deben identificar los elementos del cubo y de los prismas. Asimismo, en quinto grado, los alumnos deben identificar los prismas rectos de base regular y, por último, en sexto grado, los estudiantes deben identificar los elementos del prisma recto y de los poliedros, resolver problemas que implican el cálculo del área lateral y total de los mismos así como también medir y comparar el volumen de los sólidos (poliedros) en unidades arbitrarias de medida.

Asimismo, la competencia en el V ciclo que corresponden a los dos últimos grados de educación primaria (quinto y sexto grado) menciona que los estudiantes en este ciclo deben resolver y formular problemas del prisma recto y poliedros; argumentando con seguridad los procesos empleados en su solución y comunicándolos en un lenguaje matemático. A partir de esto podemos concluir la importancia de los poliedros en nuestras programaciones de aula, ya que este objeto matemático se enseña en todo el nivel primario con diversa complejidad según el grado correspondiente.

Cabe señalar que el documento de estándares de la *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM (2000) señala que durante los distintos niveles educativos (primaria-secundaria), los estudiantes se deben relacionar con la geometría bidimensional y tridimensional teniendo en cuenta la clasificación, propiedades, áreas, volúmenes, entre otros aspectos de poliedros como los prismas y las pirámides. Se plantea también que desarrollen discusiones sobre las distintas relaciones geométricas, llevando el conocimiento aprendido al ambiente físico; asimismo, señala como estándar general: analizar las características y propiedades de formas geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas; que deben ser desarrollados desde Pre-Kindergarten hasta el grado 12 (3 a 4 años hasta los 17 a 18 años)

En este sentido, consideramos de vital importancia realizar el análisis de la organización matemática que tiene en particular el libro de texto de sexto grado de educación primaria de la educación básica regular de nuestro país en el capítulo correspondiente a los poliedros.

Por otro lado, desde la Didáctica de la Matemática existen diversas teorías para realizar el análisis de libros de textos de matemática siendo una de ellas la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Chevallard (1999), quién señala que las praxeologías matemáticas están formadas por las tareas, tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías, que son elementos que permiten analizar la organización matemática de los libros de textos utilizados en determinada institución, es así, que la presente investigación se basará en dicha teoría para realizar el análisis del libro de texto seleccionado.

1.3. Problema de investigación

A partir de lo descrito y teniendo en cuenta las investigaciones previas, se observa la necesidad de analizar la forma en la que el libro de texto seleccionado aborda el tema de poliedros, en cuanto a la organización de la teoría, los tipos de problemas planteados y los procedimientos utilizados para resolver dichos problemas. Además, identificar la organización matemática presente en el libro de texto en base a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, realizar el análisis de la organización matemática y determinar el grado de completitud de la misma n base a los indicadores de completitud de Fonseca (2004).

Pregunta de investigación

En este sentido, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) proporciona herramientas adecuadas para analizar la organización matemática presente en los libros de texto: tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías; es así que, en esta investigación nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es el grado de completitud de la organización matemática que presenta el texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria en el capítulo correspondiente a los poliedros?

1.4. Objetivos de investigación

Para responder a nuestra pregunta de investigación nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo General

- ❖ Analizar la organización matemática asociada a los poliedros que se presenta en el texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria y determinar el grado de completitud de su organización matemática.

Objetivos específicos:

- ❖ Describir la organización matemática (tareas, tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías) relacionada a los poliedros que se presenta en el texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria desde la postura de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.
- ❖ Determinar el grado de completitud de la organización matemática que presenta el texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria con respecto al capítulo de poliedros.

A continuación, presentaremos el estudio preliminar del objeto matemático poliedro, que consiste en la presencia del objeto matemático en los diseños curriculares y libros de textos de nuestro país.

CAPÍTULO II: ESTUDIOS PRELIMINARES DEL OBJETO MATEMÁTICO

En este capítulo, se desarrollará los estudios preliminares de los poliedros; para lo cual tendremos en cuenta dos aspectos:

1. Presencia del objeto matemático poliedros en los diseños curriculares del Perú.
2. Presencia del objeto matemático poliedros en los libros de textos escolares del Perú desde 1965 hasta la actualidad.

2.1. Presencia del objeto matemático poliedros en los diseños curriculares del Perú.

En esta sección, presentamos las competencias y capacidades que involucran a nuestro objeto matemático poliedros, en los diseños curriculares de nuestro país de la siguiente manera:

1.- Programa Nacional de Emergencia Educativa (2004 - 2006)

Durante el bienio 2003- 2004 se declara en emergencia el Sistema Educativo Nacional mediante el Decreto Supremo N° 021-2003-ED; el cual le otorgó al Ministerio de Educación las facultades para elaborar el Programa Nacional de Emergencia Educativa 2004. Este programa se dio durante el gobierno del Presidente Alejandro Toledo Manrique; siendo Ministro de Educación, Javier Sota Nadal.

Es así que el Ministerio de Educación con la Resolución Ministerial N° 0853- 2003- ED, define las tareas, plazos y responsabilidades para la preparación de las actividades pertinentes.

El Programa de Emergencia Educativa en la educación básica regular duró desde abril del 2004 hasta diciembre del 2006 y su finalidad fue revertir el fracaso escolar, por lo que se puso énfasis en el desarrollo de las capacidades matemáticas para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas, razonar lógicamente y aplicar la matemática en su vida cotidiana.

El área de Matemática estaba organizada en tres componentes: Número, relaciones y funciones, Geometría y medida y Estadística y probabilidad y se priorizó tres capacidades: Resolución de problemas, Razonamiento y Demostración y Comunicación Matemática y en el caso del componente de Geometría y medida se puso énfasis en el desarrollo de actividades que posibiliten en los estudiantes la realización de: Analizar las características y propiedades de figuras geométricas en el plano y cuerpos geométricos en el espacio y que desarrollen razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.

A partir de ello, presentamos la presencia de nuestro objeto matemático poliedros en el componente de Geometría y medición:

Capacidades del nivel primario en el Plan de Emergencia Educativa

Capacidad de resolución de problemas

Perú (2005) señala que esta capacidad permitirá al estudiante manipular objetos, activar su capacidad mental. Ejercitar su creatividad, reflexionar y mejorar su proceso de pensamiento. De tal forma que el estudiante observe, organice datos, analice, formule hipótesis, reflexiones, experimente, empleando diversas estrategias para resolver problemas. Es así que, el Plan de Emergencia Educativa señala las siguientes capacidades que se deben desarrollar en el nivel primario:

En tercer grado señala que los estudiantes deben resolver problemas que involucran la noción de volumen de cuerpos geométricos en unidades arbitrarias de medida.

En cuarto grado, deben resolver problemas de medición y comparación de volúmenes de cubos en m^3, dm^3, cm^3.

En quinto grado la capacidad hace referencia a resolver problemas de medición y comparación de volúmenes de cubos y prismas, dm^3, cm^3.

Y por último, en sexto grado resuelven problemas sobre volúmenes de cubos y cilindros, en, dm^3 y cm^3.

Capacidad de razonamiento y demostración

Perú (2005) señala que esta capacidad implica desarrollar ideas, explorar fenómenos, justificar resultados, expresar conclusiones e interrelaciones entre variables. Asimismo, proporciona formas de argumentación basados en la lógica. Razonar y pensar analíticamente, implica identificar patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones del mundo real como en situaciones abstractas. En este sentido, el Plan de Emergencia Educativa señala las siguientes capacidades que se deben desarrollar en el nivel primario:

En primer grado señala que el estudiante debe relacionar objetos con formas geométricas: rectángulo, cuadrado, triángulo, círculo, cubo, cilindro y esfera.

En tercer grado deben identificar elementos esenciales de los cuerpos geométricos: prisma, cubo y cilindro.

Finalmente, en sexto grado los alumnos deben construir prismas y poliedros e identificar sus elementos característicos.

Capacidad de comunicación matemática

Perú (2005) señala que esta capacidad implica valorar la matemática entendiendo el rol que cumple en la sociedad, es decir, comprender e interpretar diagramas, gráficas y expresiones simbólicas, que evidencian las relaciones entre conceptos y variables matemáticas para darles significado, comunicar argumentos y conocimientos, así como para reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar la matemática a situaciones problemáticas reales. Es así que, el Plan de Emergencia Educativa señala las siguientes capacidades que se deben desarrollar en el nivel primario:

En quinto grado los estudiantes deben identificar y graficar polígonos; así como poliedros: prismas rectos y pirámides.

Es necesario señalar que en el caso de segundo grado no se trabajó ninguna capacidad que se relacione al objeto matemático poliedros en el Plan de Emergencia Educativa; del mismo modo, en algunos grados de educación primaria no se han trabajado todas las capacidades.

2.- Diseño Curricular Nacional – Proceso de articulación (2005)

Este Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular fue el inicio del proceso de articulación en todos los niveles educativos (inicial, primaria y secundaria), fue aprobado por el Decreto Supremo N° 013-2004- ED y mediante la Resolución Ministerial N° 0068-2005-ED y este Diseño Curricular se ejecutó en el gobierno del Presidente Alejandro Toledo Manrique, siendo Ministro de Educación, Javier Sota Nadal.

El área de Matemática se denominó Lógico Matemática y estaba organizada en tres componentes: Número, relaciones y funciones, Geometría y medida y Estadística y probabilidad. Asimismo, presentaba competencias, capacidades y actitudes para cada grado.

Del mismo modo, cabe mencionar que las capacidades que se señalan en este Diseño Curricular Nacional 2005 son las mismas que se presentan en las capacidades del Programa Nacional de Emergencia Educativa 2004- 2006 y que nuestro objeto matemático poliedro se encuentra presente en las capacidades de dicho programa y por ende en el Diseño Curricular Nacional 2005.

2.2. Presencia del objeto matemático poliedros en los libros de textos escolares del Perú desde 1965 hasta la actualidad.

En esta sección, presentamos los libros de textos del nivel primario que corresponden al 5° y 6° desde el año 1965 hasta la actualidad, en el cual se analiza la presencia del objeto matemático poliedros.

2.2.1. Libros de texto de quinto grado de educación primaria

En esta sección presentamos cuatro libros de texto de quinto grado de educación primaria que presentamos a continuación:

1.- Libro de texto Venciendo (quinto grado); en relación a este libro de texto presentamos los siguientes datos informativos:

Título del libro de texto: Venciendo

Autores: Rojas Portilla, Teodoro A., Faggioni Mallea, C. Alberto, La Torre Balza, Carlos A. y Cortijo Bustios, Rolando A.

Editorial: Universo S.A. (1965)

Este libro de texto presenta en el área de Matemática un total de 9 unidades de trabajo y cada unidad presenta los contenidos que se deben trabajar en cada mes del año. Nuestro objeto matemático poliedros, se encuentra presente en las unidades de trabajo que corresponden al mes de julio y agosto (cuarta y quinta unidad).

En la ***Figura 1*** se muestra los contenidos de la cuarta unidad que corresponde al mes de julio y se observa como contenidos el prisma (área lateral y total) y problemas sobre el prisma, siendo estos los únicos contenidos que se tratan en esta unidad del libro de texto.

CUARTA UNIDAD DE TRABAJO
MES DE JULIO

Propiedades de las fracciones: Suma y resta de fracciones y mixtos. Problemas.
Medidas de Superficie: Medidas agrarias, múltiplos y submúltiplos. Conversiones.
El prisma: Área lateral y total. Problemas.

Figura 1. Contenidos de la cuarta unidad de trabajo
Fuente: Texto 5° de primaria, Venciendo (1965, p.187)

En esta unidad de trabajo del libro de texto se define el prisma como un cuerpo geométrico y se distingue el área lateral (área de todas las caras) y el área total (área de las caras más el área de las dos bases).

Asimismo, el libro de texto solo presenta tres clases de prismas: prisma triangular, prisma rectangular y prisma pentagonal como se puede observar en la ***Figura 2***, y no se muestra las representaciones de otros prismas con otros polígonos como base.

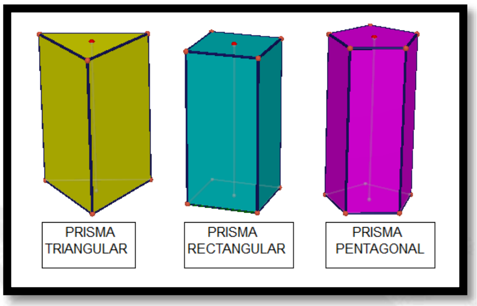


Figura 2. Clases de prismas
Fuente: Texto 5° de primaria, Venciendo (1965, p.195)

En la quinta unidad del libro de texto solo se trata los siguientes contenidos: el cubo (área lateral, área total y volumen) como se puede observar en la ***Figura 3***, y presenta problemas para los estudiantes relacionados al cubo.

QUINTA UNIDAD DE TRABAJO
MES DEAGOSTO
Multiplicación y división de fracciones mixtas. Solución de problemas.
Problemas con las cuatro operaciones de fracciones y mixtos.
Medidas de volumen: Múltiplos y submúltiplos.
El cubo: Área lateral y total. Volumen del cubo.

Figura 3. Contenidos de la quinta unidad de trabajo
Fuente: Texto 5° de primaria, Venciendo (1965, p.197)

En esta unidad se define al cubo como un cuerpo geométrico sólido, y se presenta fórmulas para hallar el área lateral, área total (se parte de que el área del cuadrado es l^2) y el volumen del cubo de la siguiente forma:

Área lateral: AL = l^2 x 4 (lados)   Área total: AT = l^2 x 6 (lados)

En el caso del volumen se parte de que la unidad es el m^3, si el cubo tiene un metro de arista, y se tiene en cuenta el largo, ancho y altura, presentando la siguiente fórmula: $V = l^3$. En este sentido, los problemas que se presentan en el libro de texto solo ameritan la aplicación de las fórmulas presentadas.

2.- Libro de texto Venciendo (quinto grado); en relación a este libro de texto presentamos los siguientes datos informativos:

Título del libro de texto: Venciendo

Autores: Rojas Portilla, Teodoro A., Faggioni Mallea, C. Alberto, La Torre Balza, Carlos A. y Cortijo Bustios, Rolando A.

Editorial: Universo S.A. (1976)

Este libro de texto presenta un total de ocho unidades en el área de Matemática y sugerencias didácticas. Nuestro objeto matemático poliedros se encuentra en la octava unidad, que es la última unidad que se denomina: "Describir características de figuras planas y sólidos geométricos; reproducir figuras en cuadriculados".

En esta unidad se presentan los siguientes contenidos: Definición del cubo, elementos del cubo, definición de prisma, elementos del prisma. Cabe resaltar que en este libro de texto solo se presenta una representación gráfica del cubo y una representación gráfica del prisma (prisma pentagonal).

3.- Libro de texto Saber (quinto grado); en relación a este libro de texto presentamos los siguientes datos informativos:

Título del libro: Saber

Autores: Capdevilla Teulé, Rafael, Chávez Jiménez, Bertha y Muñoz Loli, Jorge

Editorial: Bruño S.A. (1990)

Este libro de texto presenta un total de once unidades en el área de Matemática y nuestro objeto matemático poliedros se encuentra en la última unidad que se denomina: "Cuerpos geométricos" y trata los siguientes contenidos: Poliedros: el prisma, elementos y clases de prismas y las pirámides.

Además, presenta la definición de poliedros, como cuerpos cuyas superficies son figuras planas como se puede observar en la ***Figura 4.***

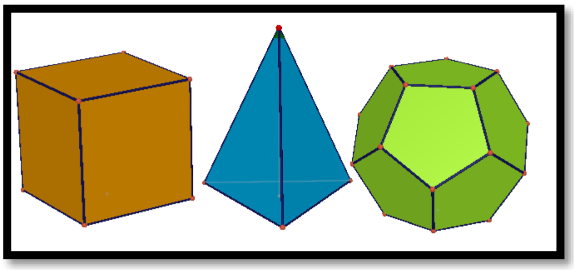


Figura 4. Poliedros
Fuente: Texto 5° de primaria, Saber (1990, p.277)

También presenta la definición de prisma como un poliedro, los elementos del prisma, las clases de prismas según la forma de sus bases (triangulares, cuadrangulares, etc.) y por último el desarrollo plano del prisma así como la definición de la pirámide como un poliedro.

4.- Libro de texto Escuela Nueva (quinto grado); en relación a este libro de texto presentamos los siguientes datos informativos:

Título del libro: Escuela Nueva

Autores: Benavides Estrada, J. Augusto, Marin Del Aguila, Angel, Díaz Alva, Oscar y Soto Sánchez, Alberto.

Editorial: Escuela Nueva S.A. (1993)

Este libro de texto, presenta en el área de Matemática un total de 11 unidades. También incluye el programa curricular que corresponde al quinto grado de educación primaria en el que se presenta los objetivos de aprendizaje y los contenidos correspondientes. En referencia al objeto matemático poliedros se presenta en la última unidad de trabajo cuyo objetivo de aprendizaje es: Reconocer cuerpos geométricos identificando sus elementos.

Los contenidos que se tratan en esta unidad son los siguientes: Prismas: el cubo y pirámides. Asimismo, el libro de texto presenta representaciones gráficas de figuras del espacio, construcciones del cubo, y de la pirámide; sin embargo no presenta la definición del cubo ni de la pirámide.

2.2.2. Libro de texto de sexto grado de educación primaria

En esta sección, presentamos tres libros de texto de sexto grado de educación primaria:

1.- Libro de texto Venciendo (sexto grado); en relación a este libro de texto presentamos los siguientes datos informativos:

Título del libro: Venciendo

Autores: Rojas Portilla, Teodoro A., Faggioni Mallea, C. Alberto, La Torre Balza, Carlos A. y Cortijo Bustios, Rolando A.

Editorial: Universo S.A. (1971)

Este libro de texto presenta en el área de Matemática un total de 9 unidades de trabajo y cada unidad presenta los contenidos que se deben trabajar en cada mes del año. En cuanto al objeto matemático poliedros, éste se encuentra presente en la última unidad de trabajo que corresponden a la novena unidad como se puede observar en la ***Figura 5***.

NOVENA UNIDAD DE TRABAJO
MES DE DICIEMBRE
Los polígonos y volumen de los cuerpos
a) Los polígonos, su construcción.
b) Objetivación de las áreas de algunos polígonos regulares. Problemas prácticos.
c) Volumen del cubo, el prisma y el cilindro.

Figura 5. Contenidos de la novena unidad de trabajo
Fuente: Texto 6° de primaria, Venciendo (1971, p.3)

En esta unidad se presenta la definición de cubo como un cuerpo geométrico sólido y los elementos del cubo (arista, vértice y cara); también se desarrolla el área lateral y el volumen del cubo en el que presenta la siguiente fórmula: $V = l^3$; donde l (lado del cubo) y por último, presenta problemas relacionados al volumen del cubo.

Asimismo, en esta unidad se presenta la definición de prisma como un cuerpo y las clases de prismas (rectos y oblicuos); así como el área lateral y volumen del prisma. Finalmente, presenta problemas asociados al área lateral y volumen del prisma.

También podemos observar en la ***Figura 6*** que el libro de texto presenta una fórmula para hallar el volumen del prisma.

Para hallar el volumen de un prisma, se multiplica el área de la base por la altura. Su fórmula es:

V = ab x h.

Figura 6. Fórmula del volumen del prisma
Fuente: Texto 6° de primaria, Venciendo (1971, p.197)

2.- Libro de texto Escuela Nueva (sexto grado); en relación a este libro de texto presentamos los siguientes datos informativos:

Título del libro de texto: Escuela Nueva

Autores: Benavides Estrada, J. Augusto, Marin Del Aguila, Angel, Díaz Alva, Oscar y Soto Sánchez, Alberto.

Editorial: Escuela Nueva S.A. (1982)

Este libro de texto presenta en el área de Matemática un total de 10 unidades y cada unidad presenta los contenidos que se deben trabajar en cada mes del año. El objeto matemático poliedros se encuentra presente en la décima unidad de trabajo que lleva por título: “Construcciones de figuras planas y cuerpos geométricos”; asimismo, presenta los objetivos de aprendizaje que corresponden al sexto grado de educación primaria, que en el caso de nuestro objeto matemático es el siguiente: “Calcular áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos”.

Además, el libro de texto presenta las representaciones gráficas de algunas figuras del espacio como el cubo, el prisma, la pirámide, tronco de la pirámide entre otros pero no presenta su definición.

En esta unidad presenta tres actividades:

1.- Una actividad para construir un cubo, muestra los elementos del cubo (arista, vértice, cara y ángulos) y luego se plantean preguntas relacionadas a la construcción del cubo.

2.- Una actividad para construir un prisma, señalando que es un poliedro, muestra los elementos del prisma (arista, vértice, cara y ángulos: diedro y triedro) y luego se plantean preguntas relacionadas a la construcción del prisma.

3.- Una actividad para construir una pirámide, señalando que es un poliedro y muestra los elementos de la pirámide (arista, vértice, cara y ángulos: diedro, triedro y tetraedro).

3.- Libro de texto Escuela Nueva (sexto grado); en relación a este libro de texto presentamos los siguientes datos informativos:

Título del libro de texto: Escuela Nueva.

Autores: Benavides Estrada, J. Augusto, Marin Del Aguila, Angel, Díaz Alva, Oscar y Soto Sánchez, Alberto.

Editorial: Escuela Nueva S.A. (1996).

Este libro de texto presenta en el área de Matemática un total de 10 unidades y cada unidad presenta los contenidos que se deben trabajar en cada mes del año. El objeto matemático poliedros se encuentra presente en la décima unidad de trabajo e incluye el programa curricular que corresponde al sexto grado de educación primaria el cual está dividido en objetivos de aprendizaje y sus correspondientes contenidos, en el caso de nuestro objeto matemático el objetivo de aprendizaje es el siguiente: Plantear y resolver situaciones problemáticas aplicando áreas y volúmenes de planos y sólidos geométricos.

Asimismo, los contenidos referentes a nuestro objeto matemático son los siguientes: Sólidos geométricos: clasificación, área lateral, área total y volumen del prisma, cubo y cilindro, área lateral, área total y volumen de la pirámide y el cono.

Además, el libro de texto menciona la definición de poliedro, como un cuerpo geométrico determinado por cuatro o más regiones poligonales no coplanares y presenta las representaciones gráficas de algunos poliedros (prismas, pirámides, octaedro entre otros).

También presenta la clasificación de los prismas según el número de lados de sus bases (triangulares, cuadrangulares, etc.), según la perpendicularidad de sus aristas (prismas rectos y oblicuos) y según la regularidad de los polígonos de sus bases (prismas regulares e irregulares).

Asimismo, trata la definición de paralelepípedo y su clasificación, también trata la definición, el área lateral, área total y volumen del prisma, del cubo y de la pirámide. Es necesario señalar que también se presentan los desarrollos planos de los poliedros como el prisma recto rectangular y la pirámide cuadrangular.

En este sentido, debemos señalar que en los libros de texto del nivel primario presentados en esta parte desde 1965 hasta 1996, podemos observar la presencia de nuestro objeto matemático: poliedros.

En los cuales, se presentan la definición de nuestro objeto matemático poliedros, las clases de prismas, los elementos de los prismas y pirámides, el volumen del cubo, desarrollos planos, etc. Además, los libros de textos proponen ejercicios y problemas que se relacionan con hallar el volumen del cubo, resolver problemas de área lateral y total de los poliedros, entre otros ejercicios planteados.

En el siguiente capítulo, abordaremos el estudio del objeto matemático poliedros (definiciones, elementos, clasificación entre otros aspectos).

CAPÍTULO III: ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En el presente capítulo trataremos la descripción del objeto matemático poliedros desde el punto de vista matemático.

Desde el punto de vista matemático

En este sentido, para realizar la descripción formal de nuestro objeto matemático poliedros; desde el punto de vista matemático, tendremos en cuenta la presentación de dicho tópico que dan los siguientes autores Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000), Puertas (1996), Moise & Downs (1989), Landaverde (2005), Rangel (1982), Fernández (2013), Helfgott (2009) y la RAE (2015).

3.1. Definición de poliedros

Antes de realizar la definición de poliedro es necesario definir ***polígono,*** porque los autores Lages, Pinto, Wagner & Morgado; realizan la definición de ***poliedro*** en función de ***polígono;*** sin embargo no definen ***polígono***. En ese sentido para los fines de nuestra investigación definiremos el objeto matemático ***polígono*** basados en la definición que realiza Helfgott (2009) el cual manifiesta lo siguiente sobre ***polígono***:

Sean $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ n puntos distintos del plano.

Construimos los segmentos $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3}, \ldots\ldots\ldots, \overline{A_{n-1} A_n}$ y $\overline{A_n A_1}$.

La unión de estos segmentos recibe el nombre de polígono si se cumplen dos propiedades:

1.- No es posible que descansen, sobre una misma recta, dos segmentos con un punto en común.

2.- Dos segmentos cualesquiera sólo pueden intersectarse en sus extremos.

Los vértices del polígono son los puntos $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$; mientras que sus lados son los segmentos $\overline{A_1 A_2}, \ldots\ldots\ldots\overline{A_{n-1} A_n}$ y $\overline{A_n A_1}$

Los ángulos del polígono son:

$\measuredangle A_1A_2A_3$, $\measuredangle A_2A_3A_4$, $\measuredangle A_{n-1}A_nA_1$, $\measuredangle A_nA_1A_2$.

Es así, que la ***Figura 7*** que mostramos a continuación permitirá aclarar la definición de ***polígono.***

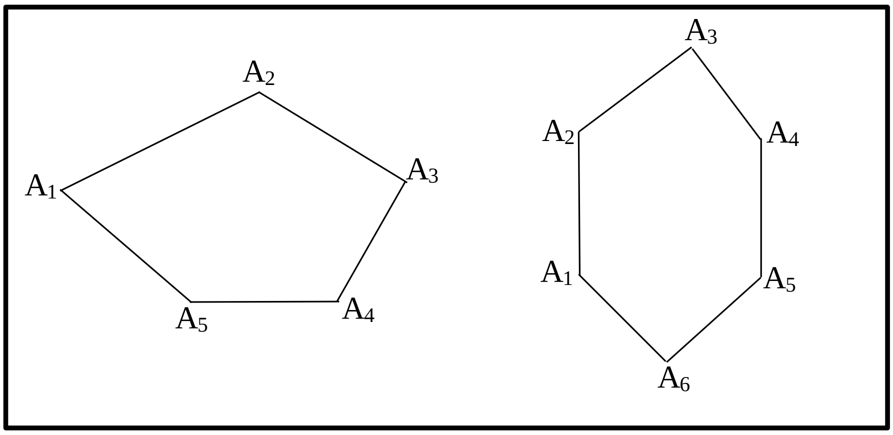


Figura 7. Polígonos
Fuente: Helfgott, M. (2009, p.177)

Teniendo en cuenta la definición de polígono para el análisis del objeto matemático ***poliedro*** tomaremos las definiciones de Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000) que definen ***poliedro*** como reunión de un número finito de ***polígonos*** planos llamados ***caras***. De modo que se cumplan las siguientes condiciones:

a) Cada lado de uno de esos polígonos es también lado de, un y sólo un, otro polígono.
b) La intersección de dos caras cualesquiera o es un lado común, o un vértice o un conjunto vacío.
c) Cada lado de un polígono común a exactamente dos caras, es llamado una ***arista*** del poliedro y cada vértice de una cara es un ***vértice*** del poliedro. (p. 217).

En este sentido, presentamos la ***Figura 8*;** en la cual se visualizan los poliedros como el cubo, el prisma triangular, la pirámide entre otros que nos permitirán aclarar la definición de poliedro.

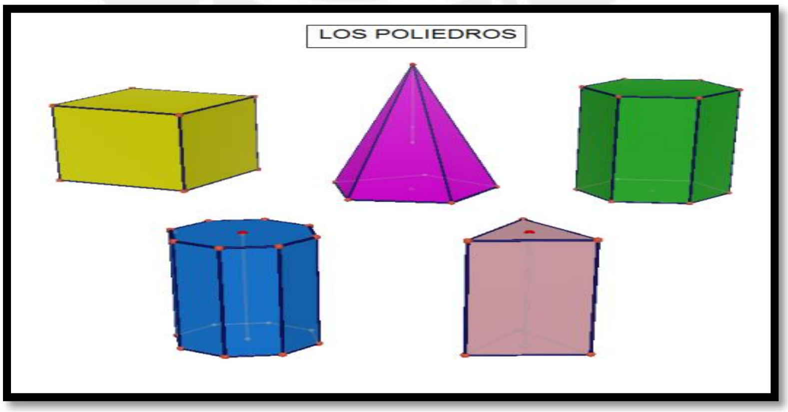


Figura 8. Poliedros
Fuente: García, A. (2009, p.133)

Asimismo, los autores señalan que un poliedro es ***convexo*** si su interior es convexo; es decir:

Un conjunto ***C***, del plano o del espacio, se le dice ***convexo***, cuando cualquier segmento de la recta que une dos puntos de ***C*** está totalmente contenido en ***C***.

Es así, que un poliedro es ***convexo*** si cualquier recta (no paralela a ninguna de sus caras) lo corta en, a lo más, dos puntos.

Para aclarar la definición dada sobre poliedro ***convexo*** presentamos la ***Figura 9***; que permitirá identificar un ***poliedro convexo*** y un ***poliedro no convexo***.

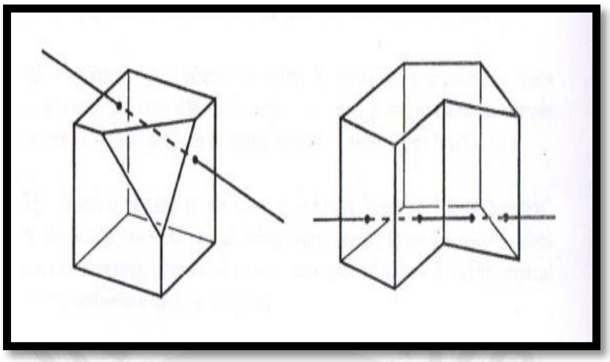


Figura 9. Poliedro convexo y poliedro no convexo
Fuente: Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000, p.216)

Para explicar los elementos del poliedro nos basaremos en los aportes de Fernández (2013, p. 44), en la que en base a la ***Figura 10*** que mostramos a continuación identificamos los siguientes elementos:

Vértices del poliedro: A, B, C, D, E, F, G, H

Aristas del poliedro: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{GC}$, $\overline{DH}$

Caras del poliedro: ABCD, EFBA, EFGH, DCGH, BCGH, ADHE

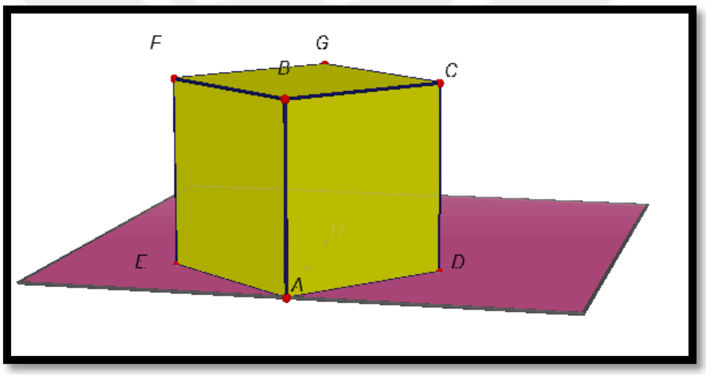


Figura 10. Elementos del poliedro
Fuente: Fernández (2013, p.44)

Asimismo, Rangel (1982) realiza una clasificación de los poliedros, que presentamos en la ***Figura 11*** que se muestra a continuación; que nos permitirá observar una presentación general de los poliedros y la ubicación de los poliedros regulares.

Classificação Geral dos Poliedros

- Regulares
  - Convexos
    - 1- Tetraedro
    - 1- Hexaedro (cubo)
    - 1- Octaedro
    - 1- Dodecaedro
    - 1- Icosaedro
  - Estrelados
    - 3- Dodecaedro
    - 1- Icosaedro
- Semi-regulares
  - Equiangulares
    - 1- Tetratroncoedro
    - 6- Cuboctatroncoedros
    - 6- Dodecaicositroncoedros
    - Grupo I- Prismas arquimedianos
    - Grupo II Antiprismas arquimedianos
  - Equifaciais
    - Conjugados perfeitos dos equiangulares
      - 1- Tetratroncoedro
      - 6- Cuboctatroncoedros
      - 6- Dodecaicositroncoedros
      - Grupo I - Pirámides duplas
      - Grupo II - Trapezoedros
    - Não são conjugados perfeitos dos equiangulares
- Multiformes
- Irregulares

Figura 11. Clasificación General de los poliedros
Fuente: Rangel (1982, p.12).

En la ***Figura 11***, podemos observar que Rangel (1982) ubica al tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro dentro de los poliedros regulares, y define poliedro como:

> ***Poliedro***, es toda superficie poliédrica cerrada. Y por lo tanto una superficie que puede ser extendida como un conjunto de polígonos tales que cada lado de una cara pertenece siempre como máximo a dos caras.
> ***Cara del poliedro convexo***, la cara de un poliedro se define como el polígono que limita entre lados poliedros, sin embargo una cara es definida como un polígono que supera en número a los límites, porque se puede también considerar un poliedro entrelado limitado por caras, que son polígonos que componen la cara y que son mucho mayor que el número de caras.
> ***Arista de un poliedro***, es un lado común a dos polígonos o caras.
> ***Vértice de un poliedro***, es un punto común a las aristas de un poliedro, vértices de las caras son como los vértices de los propios poliedros. (p. 6).

Es necesario tener en cuenta que los libros de texto de primer a quinto grado de educación primaria, en lo referente a nuestro objeto matemático poliedros, utilizan la palabra sólido en todas las unidades; sin embargo cabe mencionar que la representación de poliedros es utilizada como superficie en algunos ejercicios planteados. En este sentido, consideramos que debemos realizar la definición de sólido que trabajaremos durante el análisis de texto.

Sólido

Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (2015) que en adelante denominaremos RAE, la palabra sólido proviene del latín *solidus* y define al sólido en su primera acepción como "Firme, macizo, denso y fuerte", en su segunda acepción señala: "Dicho de un cuerpo: Que, debido a la gran cohesión de sus moléculas, mantiene forma y volumen constantes", y en su quinta acepción específicamente en Geometría menciona que es un "objeto que posee tres dimensiones principales, longitud, anchura y altura". En este sentido, podemos afirmar que la RAE (2015) señala que el sólido es un cuerpo firme, lleno, macizo, denso, con volumen y con tres dimensiones longitud, anchura y altura y que no es vacío, ni hueco.

Asimismo, es necesario tener en cuenta dos definiciones que presenta Euclides en el libro XI de los "Elementos" según la traducción de Puertas (1996) que son las siguientes:

Definición 1: Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.

Definición 2: Y el extremo de un sólido es una superficie.

Por otro lado es necesario dar la definición de cuerpo geométrico según Pogorelov (1974), ya que muchos libros de texto del Ministerio de Educación mencionan a los poliedros como sólidos y cuerpos geométricos:

> ***Cuerpo geométrico,*** Sea G una figura plana. El punto x de la figura G se llama punto *interior* si todos los puntos del plano suficientemente próximos al punto X pertenecen a la figura G. Esto significa que existe un número positivo E tal que los puntos del plano que están a una distancia menor que E del punto X pertenecen a la figura G. La figura G se denomina *recinto* si todos sus puntos son interiores y cualesquiera dos de sus puntos se pueden unir mediante una quebrada que pertenece íntegramente a la figura G. Por ejemplo, el círculo sin su circunferencia es un recinto.
> Sea G un recinto plano. El punto X del plano se denomina *punto* frontera del recinto G si tan cerca a X como se quiere existen puntos que pertenecen a la figura G y puntos que no le pertenecen. Esto significa que cualquiera que sea el número E > 0, existen a una distancia de X menor que E puntos que pertenecen a la figura G y puntos que no pertenecen. Los puntos frontera forman la *frontera* del recinto G. En el ejemplo antes citado la circunferencia del círculo consta de puntos frontera. Agregando al recinto G sus puntos fronteras obtenemos una nueva figura G. Se le llama *recinto cerrado*.

> Los puntos interiores del polígono convexo definidos en la planimetría constituyen un recinto [...] literalmente en igual que para las figuras planas, se definen los conceptos de punto interior de una figura espacial, de recinto espacial y de su frontera. Todo recinto espacial cerrado se denomina ***cuerpo***. El cuerpo cuya frontera consta de un número finito de polígonos se llama poliedro. Los polígonos que limitan el poliedro se denominan caras del mismo. El poliedro se llama convexo si se encuentra a un lado del plano de cada una de sus caras.

Para los fines de nuestra investigación, el estudio de los poliedros lo tomaremos como superficie plana, ya que es pertinente en el caso de algunas tareas propuestas en el libro de texto. Pero también en nuestro trabajo consideramos los poliedros como sólidos, es decir, cuerpos geométricos que tienen volumen, son macizos, densos, fuertes y que tienen tres dimensiones longitud, anchura y altura.

3.2. Poliedros regulares

En la definición de este tópico se tuvo en cuenta la traducción que realiza Puertas (1996) del Libro de los ***"Elementos"*** de Euclides.

En este sentido, Puertas (1996) señala que el libro XIII de los "Elementos" de Euclides (cerca de 300 a. C.), es uno de los libros más importantes que estudia los poliedros regulares; este libro contiene 18 proposiciones a través de las cuales Euclides explica cómo se inscriben los poliedros regulares en una esfera terminando con la proposición 18. Es así que, la última proposición, es a su vez, el teorema de clasificación de los poliedros, en el cual indica que sólo se pueden construir cinco poliedros regulares que son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro y que no hay otra figura que se pueda construir con figuras equiláteras y equiangulares.

Para explicar que solo existe cinco poliedros regulares Euclides en el libro de los Elementos XIII señala lo siguiente:

> […] aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por figuras equiláteras y equiangulares iguales entre sí. Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide (tetraedro) se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco. Y el (ángulo) del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque, serían cuatro rectos. Y el (ángulo) del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad. Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por figuras equiláteras y equiangulares.

Asimismo, Euclides en el libro XI de los "Elementos" presenta las definiciones de los siguientes poliedros regulares:

Definición 25: Un cubo es una figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.

Definición 26: Un octaedro es una figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.

Definición 27: Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte iguales y equiláteros.

Definición 28: Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.

Es necesario mencionar que Euclides no define el tetraedro porque lo considera como una pirámide triangular y la denomina solo ***"pirámide"*** en el libro XIII.

Rangel (1982) define los poliedros regulares de la siguiente forma: "Se puede concluir que en cualquier poliedro regular, las caras son polígonos regulares, las aristas son todas iguales, las diagonales son iguales, los ángulos diédricos son iguales"; presentando como hemos observado en la ***Figura 11*** la clasificación de los poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Desarrollo plano de los poliedros, según Leighton (1987) el desarrollo plano de una superficie es la figura plana que se obtiene al desdoblar su superficie total en un plano. En el caso del prisma si su cubierta se abriera a lo largo de las aristas se mostraría cada superficie plana desdoblada hacia abajo para situarla en un plano horizontal, entonces toda la envoltura de la figura quedaría extendida en un plano, lo cual sería el desarrollo del prisma; es decir, cada área rectangular tiene la misma forma y tamaño de la superficie correspondiente. No hay alargamientos ni deformaciones de la superficie en el proceso empleado para hacer el desarrollo.

3.3.Teorema de Euler

Para la definición, demostración del Teorema de Euler y comprobar la existencia de los cinco poliedros regulares se tomó en cuenta la definición que presentan Lages et al. (2000) quienes señalan lo siguiente con respecto a la definición de poliedro regular: "Un poliedro convexo es regular cuando todas las caras son polígonos regulares iguales y en todos los vértices concurren el mismo número de aristas". (Lages et al., 2000, p. 224).

Asimismo, los autores señalan que en los poliedros regulares se cumple el ***Teorema de Euler,*** en el cual se señala que existen sólo cinco poliedros regulares convexos.

La importancia de este teorema radica en que a través de la aplicación de este teorema se puede establecer la relación que existe entre las caras, aristas y vértices de los poliedros comprobando que dicha relación sólo permite la construcción de cinco poliedros regulares como son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

En este sentido, este teorema nos permitirá hallar el número de vértices, número de caras y números de aristas de los poliedros que se presentan en algunas tareas que presenta el libro de texto que estamos analizando como es el caso de la siguiente tarea:

($t_{6,1}$): Identificar el número de vértices y aristas en el icosaedro (p. 164)

¿Cuántos vértices tiene el icosaedro?

¿Cuántas aristas tiene el icosaedro?

Demostración del Teorema de Euler*:** Sea ***n el número de lados de cada cara y sea ***p*** el número de aristas que concurren en cada vértice.

Donde: ***A:*** aristas , ***C:*** caras y ***V:*** vértices

Tenemos entonces:

$$\boxed{2A = nC = pV \quad \text{ó} \quad A = \frac{nC}{2} \quad \text{y} \quad V = \frac{nC}{P}}$$

Sustituyendo en la relación de Euler, obtenemos:

$$\boxed{\text{N° de vértices} - \text{N° de aristas} + \text{N° de caras} = 2}$$

$$\boxed{\frac{nC}{p} - \frac{nC}{2} + C = 2}$$

De donde se obtiene lo siguiente:

$$C = \frac{4p}{2p+2n-pn}$$

$$\frac{2n}{n-2} > p$$

Debemos tener: $2p + 2n - pn > 0$, o sea se cumple que $p \geq 3$, llegamos a $n < 6$. Siendo las únicas posibilidades aquellas que se muestran en la ***Tabla 1*** que mostramos a continuación:

Tabla 1. Poliedros regulares

N° de lados de la cara	N° de caras del poliedro	N° de aristas que concurren en cada vértice	Nombre de los poliedros regulares
n=3	C= $\frac{4P}{6-P}$	p=3	C=4 (tetraedro)
		p=4	C=8 (octaedro)
		p=5	C=20 (icosaedro)
n=4	C= $\frac{2P}{4-P}$	p=3	C= 6 (cubo)
n=5	C= $\frac{4P}{10-3P}$	p=3	C= 12 (dodecaedro)

Fuente: Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000, p.225)

Asimismo, a continuación presentamos la representación gráfica de los poliedros regulares que se muestran en la ***Figura 12***.

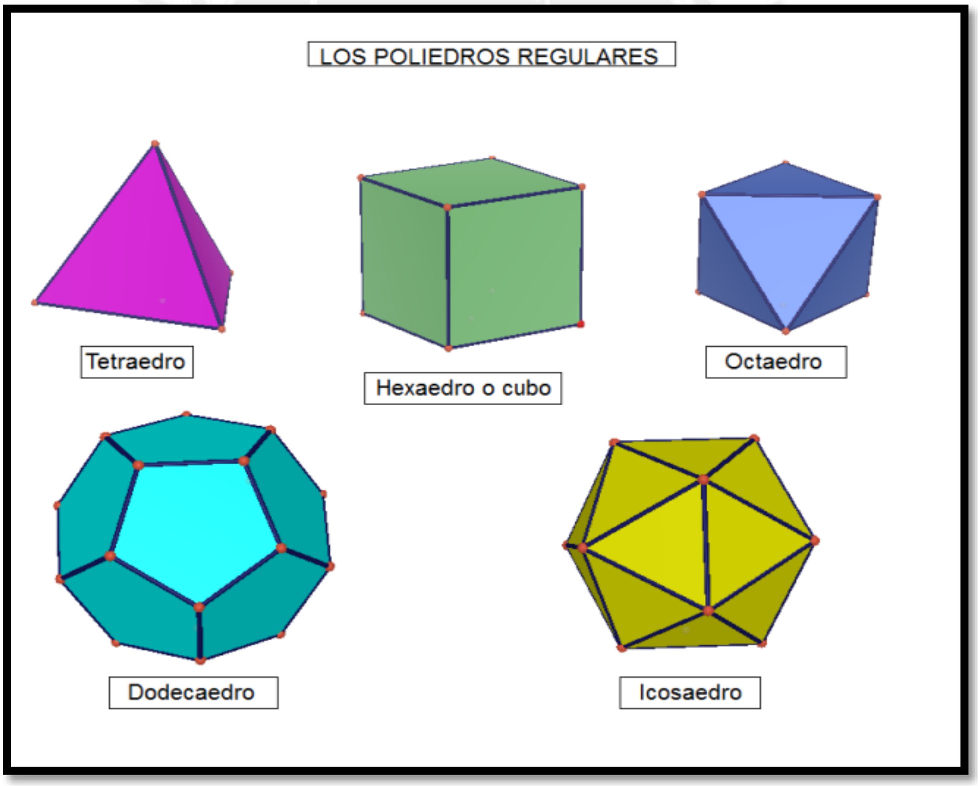


Figura 12. Poliedros regulares
Fuente: Pedrazuela, J. (2014, p.1)

3.4. Definición de prisma

Para los fines de nuestra investigación hemos tenido en cuenta la definición que realizan Moise & Downs (1989) sobre prisma y su clasificación. En este sentido, los autores definen prisma de la siguiente manera:

Sean E_1 y E_2 dos planos paralelos, R una región poligonal en E_1 y L una recta que interseque a E_1 y a E_2, pero no a R. Por cada punto P de R, sea $\overline{PP'}$ un segmento paralelo a L y que una el punto P con un punto P' de E_2. La reunión de todos los segmentos $\overline{PP'}$ se llama ***prisma.*** (p. 537)

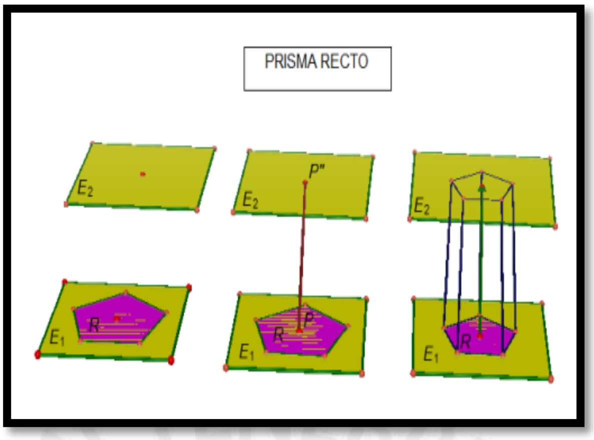


Figura 13. Prisma recto
Fuente: Moise & Downs (1989, p.537)

Asimismo, Moise & Downs (1989) definen el prisma recto de la siguiente manera:

La región poligonal R se llama ***base inferior*** o, simplemente, la ***base*** del prisma. La parte del prisma que está en E_2 se llama ***base superior***. La distancia entre E_1 y E_2 se llama altura del prisma. Si L es perpendicular a E_1 y E_2, entonces el prisma se llama ***prisma recto***. (p. 538).

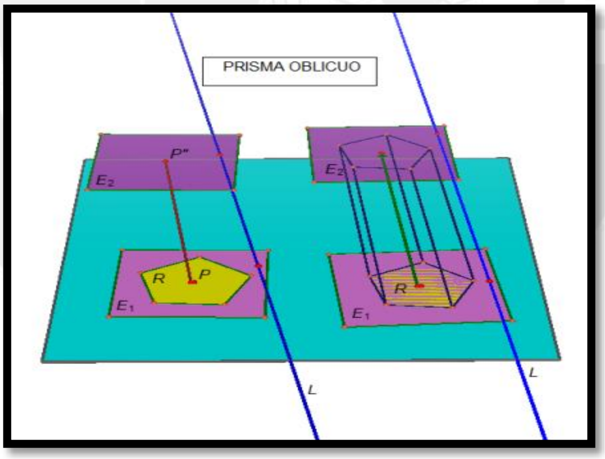


Figura 14. Prisma oblicuo
Fuente: Moise y Downs (1989, p.537)

Los mismos autores señalan lo siguiente sobre los prismas:

Observación: En los prismas rectos, la altura es la distancia $\overline{PP'}$, pero para los prismas no rectos, la altura es siempre menor que $\overline{PP'}$. (p. 538)

Del mismo modo, Moise & Downs (1989) señalan que los prismas se clasifican según sus bases:

Un ***prisma triangular*** es uno cuya base es una región triangular.

Un ***prisma cuadrangular*** es uno cuya base es una región cuadrangular.

Un ***prisma pentagonal*** es uno cuya base es una región pentagonal, y así sucesivamente. (p. 538)

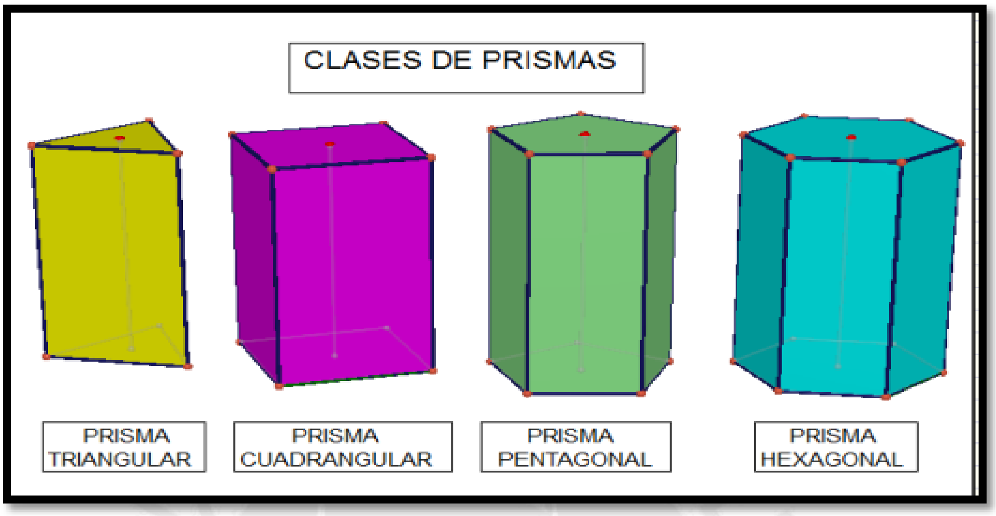


Figura 15. Clases de prismas
Fuente: Requena, L. (2013, p.1)

3.5. Definición de pirámide

En nuestra investigación hemos tenido en cuenta la definición de pirámide que hacen Moise & Downs (1989) quienes presentan la siguiente definición:

> Se da una región poligonal ***R*** en un plano ***E*** y un punto ***V*** que no está en ***E***. La pirámide con base ***R*** y vértice ***V*** es la reunión de todos los segmentos $\overline{VQ}$ para los cuales ***Q*** pertenece a ***R***. La altura de la pirámide es la distancia (perpendicular) desde ***V*** a ***E***. (p. 543).

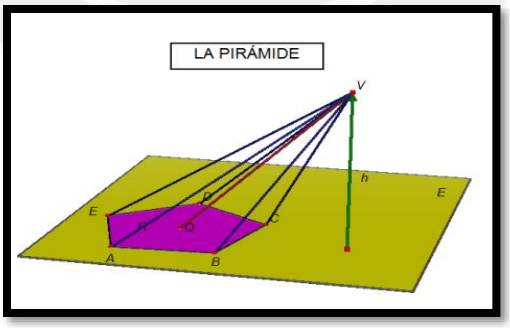


Figura 16. Pirámide
Fuente: Moise & Downs (1989, p.543)

Por otro lado, Landaverde (2005) afirma que la pirámide tiene los siguientes elementos:

Cúspide, es el vértice común de la pirámide.

Aristas laterales, son los lados de las caras laterales que concurren al vértice

Altura de una pirámide, es la perpendicular trazada desde el vértice a la base $\overline{\text{VO}}$ como muestra la ***Figura 17.*** (p. 293)

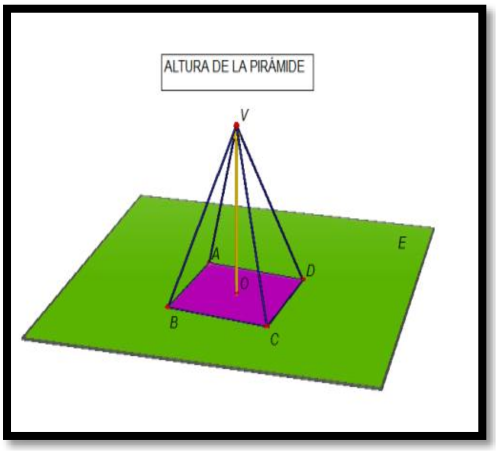


Figura 17. Altura de la pirámide
Fuente: Landaverde (2005, p.293)

El mismo autor indica la siguiente clasificación de las pirámides:

> Una ***pirámide triangular*** es uno cuya base es un triángulo.
>
> Una ***pirámide cuadrangular*** es uno cuya base es un cuadrilátero.
>
> Una ***pirámide pentagonal*** es uno cuya base es un pentágono, y así sucesivamente. (p. 293)

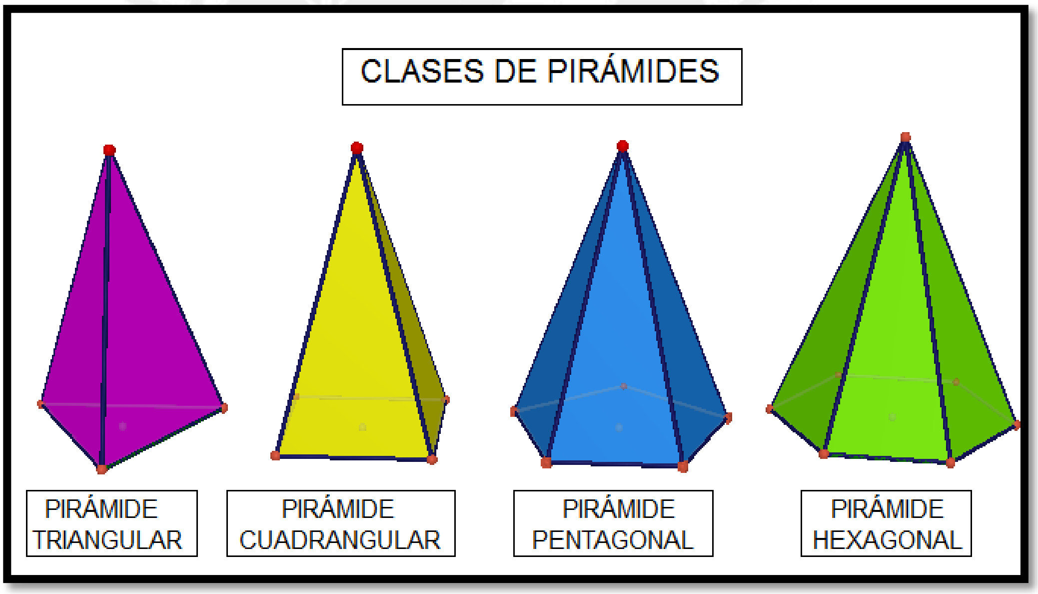


Figura 18. Clases de pirámides
Fuente: Requena (2014)

3.6. Volumen de los poliedros

Para la definición de volumen de los poliedros tendremos en cuenta a Lages et al. (2000) que afirman que “el volumen de un sólido es la cantidad de espacio ocupado por él. Para expresar esa “cantidad de espacio” a través de un número, debemos compararlo con una unidad; y el resultado de esa comparación será llamado volumen” (p. 235).

Los mismos autores señalan que:

> La unidad de volumen es el cubo de arista 1. Para cada unidad de longitud, tenemos una unidad correspondiente de volumen. Si, por ejemplo, la unidad de longitud fuera el centímetro (cm), entonces la unidad de volumen correspondiente será llamada centímetro cúbico (cm^3). Así, el volumen de un sólido ***S*** debe ser el número que exprese cuantas veces el sólido ***S*** contiene el cubo unitario. (p. 236).

Volumen del paralelelípedo rectangular

Según Lages et al. (2000) afirma que "el paralelelípedo rectangular (o simplemente un bloque rectangular) es un poliedro formado por 6 rectángulos. El que queda perfectamente determinado por tres medidas: largo (a), profundidad (b) y altura (c) por lo tanto el volumen es el producto de sus dimensiones" (p. 236 y p. 237).

$$\boxed{V = a \times b \times c}$$

Donde:

V: volumen, a: largo, b: profundidad y c: altura

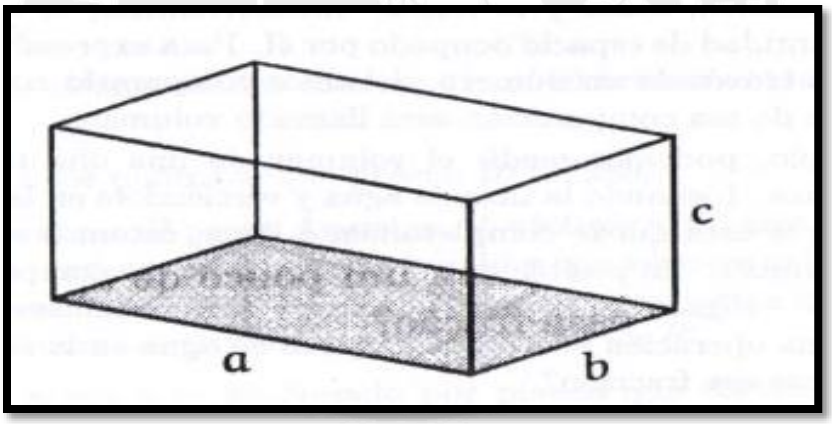


Figura 19. Paralelelípedo rectangular
Fuente: Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000, p.216)

En esta sección, consideramos importante explicar los aspectos que se relacionan con nuestro objeto matemático.

En el siguiente capítulo, trataremos sobre nuestro referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico y los elementos teóricos que componen la organización matemática.

CAPÍTULO IV: TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

4.1. Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico que en adelante denominaremos (TAD) fue propuesta por el investigador francés Yves Chevallard (1999) quién afirma:

> La etiqueta de enfoque o teoría antropológica parece proclamar una exclusividad que los demás enfoques, existentes o posibles, no merecerían ese calificativo de la que hay que decir enseguida que no es más que un efecto del lenguaje [...] pero hay razones para llamar antropológica a la teorización. (p. 221)

En otras palabras, el término *antropológico* no es exclusivo de la TAD; sino más bien es un término que identifica y distingue a la teoría; pero no tiene una correspondencia unívoca con la misma.

Por otro lado, Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006) señalan que la TAD aparece con las primeras formulaciones de la Teoría de la Transposición Didáctica del propio Yves Chevallard en 1985 y puede ser considerada como el desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas, con la que comparte sus principios fundamentales. Asimismo, estos autores refieren que el origen de la TAD pueden ser dos problemas básicos:

> Por una parte, la necesidad del investigador de emanciparse de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares (Chevallard, 2006), lo que implica que la TAD nos proporciona nociones para liberarnos de la manera en la que se consideran el conocimiento matemático y la actividad matemática en las instituciones escolares. Por otra parte, el cuestionamiento de las condiciones y restricciones que afectan a todo proceso de difusión del conocimiento matemático en la escuela (es decir, el estudio de lo que hace posible la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo que lo dificulta, etcétera). (p. 38).

Asimismo, Chevallard (1999) señala que la TAD asume una postura epistemológica al afirmar que "el punto crucial [...] es que la TAD sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales" (p. 221)

Del mismo modo, Lucas (2010) indica que la TAD tiene una postura epistemológica, ya que considera de manera exclusiva a la dimensión institucional del objeto matemático como el principal objeto de investigación generando desde la didáctica de la matemática la necesidad de construir modelos epistemológicos de esta actividad matemática institucional.

En este sentido, podemos afirmar que el eje principal de la TAD es el hombre que aprende y enseña Matemáticas a través de sus actividades humanas.

4.2. Elementos teóricos

La TAD tiene elementos teóricos que son característicos y propios de esta teoría; siendo necesario definir los siguientes:

4.2.1. Noción de praxeología

Lucas (2010) señala que Chevallard introdujo la noción de praxeología u organización matemática (OM) con el objetivo de encontrar la modelización de la actividad matemática dentro del conjunto de actividades humanas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones sociales.

En este sentido, Chevallard (1999) afirma que uno de los postulados básicos y principales de la TAD es la noción de praxeología en la que considera que toda actividad matemática es una actividad humana más, que puede describirse como un modelo único al que denomina praxeología.

Es así que, la TAD propone que toda actividad matemática puede ser modelada mediante las praxeologías, que se constituyen en la herramienta fundamental de esta teoría.

Al respecto Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan que:

> Una actividad matemática como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática o "praxis" que consta de tareas y técnicas, y el discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica que está constituido por tecnologías y teorías. No es posible, ni para el matemático profesional ni para los alumnos de una clase de secundaria, actuar matemáticamente con verdadera eficacia sin entender lo que se está haciendo. Pero tampoco se puede entender en profundidad una organización matemática determinada si no se lleva a cabo simultáneamente una práctica matemática eficaz. No hay praxis sin logos, pero tampoco hay logos sin praxis. Al unir las dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de praxeología. (p. 274)

En este sentido, podemos afirmar que la praxeología consta de dos niveles:

1.-El nivel de la praxis (saber hacer) que está formado por cierto tipos de tareas y las técnicas que se utilizan para resolverlas.

2.- El nivel del logos (saber) que está formado por las tecnologías que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan y la descripción, explicación y justificación de las tecnologías que son las teorías.

Chevallard, Bosch y Gascón 1997 (citado en Corica y Otero, 2009), afirman que el sistema de tareas de los docentes muestra dos grandes componentes asociados:

1.- Las organizaciones matemáticas o praxeologías matemáticas, que son las tareas de concepción y organización de mecanismos de estudio así como la gestión de su medio ambiente; es decir, es donde se estudia el objeto matemático.

2.- Las organizaciones didácticas o praxeologías didácticas, que son las tareas de ayuda al estudio, es decir, la dirección del estudio y enseñanza, en otras palabras, la puesta en práctica de la organización matemática que requiere de técnicas didácticas.

4.2.2. Organización matemática (OM)

Chevallard (1999) dice que una organización matemática (OM) está constituida por cuatro componentes principales: tipos de tareas ($\boldsymbol{T}$), técnicas ($\boldsymbol{\tau}$), tecnologías ($\boldsymbol{\theta}$) y teorías ($\boldsymbol{\Theta}$) y afirma que la organización matemática está constituida por dos bloques. El bloque práctico-técnico [$\boldsymbol{T}/\boldsymbol{\tau}$] que constituye el saber hacer y está formado por los tipos de tareas y las técnicas asociadas a ese tipo de tareas y el bloque tecnológico – teórico [$\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\Theta}$] que constituyen el saber; es así que una praxeología u organización matemática queda constituida por estos dos bloque o estos cuatro componentes con la que se puede describir la actividad matemática.

Asimismo, Fonseca, Bosch y Gascón (2010) afirman que entre estos cuatro componentes se establecen relaciones dinámicas con la finalidad de llevar a cabo la actividad matemática para responder a cuestiones problemáticas; es así que, la organización matemática está constituida por dos bloques inseparables: la práctica matemática o “praxis” [$\boldsymbol{T}/\ \boldsymbol{\tau}$] que está formado por los tipos de tareas ($\boldsymbol{T}$) y las técnicas ($\boldsymbol{\tau}$), y el “logos” [$\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\Theta}$] que está formado por las tecnologías ($\boldsymbol{\theta}$) y la teoría ($\boldsymbol{\Theta}$).

Del mismo modo, Chevallard, Bosch y Gascón 1997 (citado en Corica y Otero, 2009), señalan que una OM se constituye alrededor de uno o varios tipos de tareas matemáticas que conducen a la creación de técnicas matemáticas, las cuales se justifican por tecnologías matemáticas desarrolladas en el marco de una teoría matemática. Es así, que los términos tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría son doblemente relativos. En primer lugar, son relativos a la institución de referencia; es decir, lo que es considerado como un tipo de tarea, técnica, tecnología o teoría en una institución puede que no se considere en otra institución. En segundo lugar, las nociones de tipo de tarea, técnica, tecnología y teoría son relativas a la función que cumplen en una determinada actividad matemática.

Tabla 2. Componentes de una organización matemática

Elemento teórico	símbolo	bloque	Tipo de saber
Tipo de tarea	T	Práctico – técnico (praxis)	Saber hacer
Técnica	τ		
Tecnología	θ	Tecnológico-teórico (logos)	Saber
Teoría	Θ		

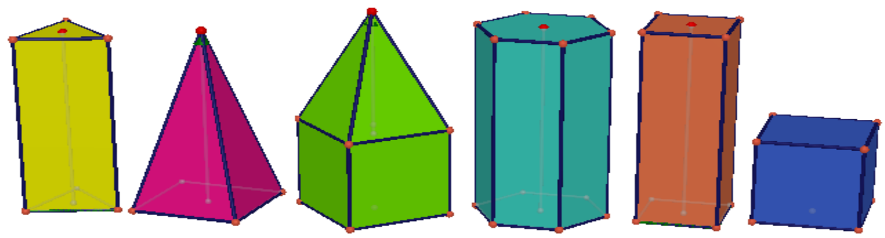
Fuente: Adaptado de Chevallard (1999, p.222)

En nuestra investigación, un ejemplo de organización matemática (OM) estaría formada por lo siguiente:

Tipo de tarea (T_2): Identificar características comunes de cuerpos geométricos y de objetos de su entorno

Tarea ($t_{2,1}$): Identificar las características de los cuerpos geométricos

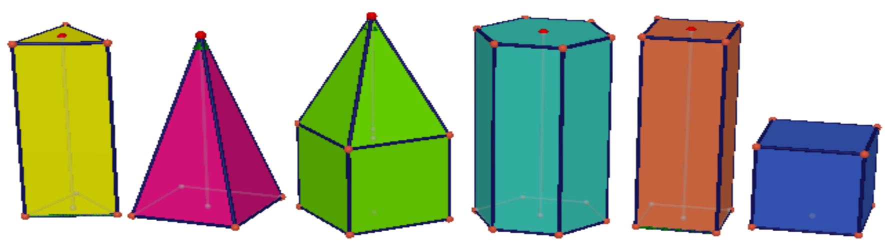
Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
¿En qué se parecen todos ellos?



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Tarea ($t_{2,2}$): Identificar cuerpos geométricos con objetos de su entorno

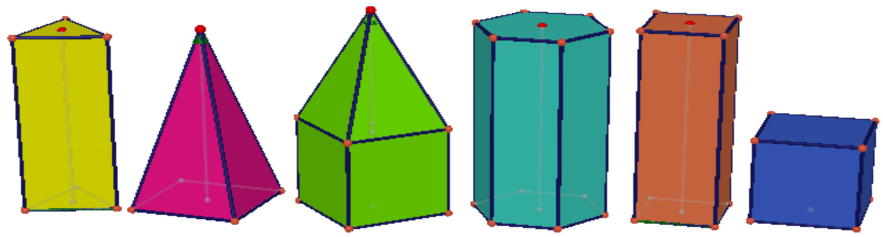
Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
Piensa en objetos reales a los que se parecen.



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Tarea ($t_{2,3}$): Identificar figuras que componen los cuerpos geométricos

Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
¿Por qué figuras están compuestas sus caras?



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Técnica **($\tau_{2,1,1}$):**

1. Observa las características que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos (aristas, caras, vértices).
2. Realiza un listado de las características que tiene cada cuerpo geométrico.
3. Compara el listado del conjunto de características que tiene cada cuerpo geométrico.
4. Identificar la característica común que presentan todos los cuerpos geométricos.

Tecnología **(θ)**: θ_4 Definición de cuerpo geométrico, θ_5 Elementos de los cuerpos geométricos y θ_6 Características de los cuerpos geométricos.

Técnica **($\tau_{2,2,1}$)**:

1. Observa las características que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos (aristas, caras, vértices).
2. Realiza un listado de las características que tiene cada cuerpo geométrico.
3. Compara el listado del conjunto de características que tiene cada cuerpo geométrico.
4. Visualiza objetos reales que comparten la mayor cantidad de características comunes que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos.

Tecnología **(θ)**: θ_4 Definición de cuerpo geométrico, θ_5 Elementos de los cuerpos geométricos y θ_6 Características de los cuerpos geométricos.

Técnica **($\tau_{2,3,1}$)**:

1. Observa las características que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos (aristas, caras, vértices).
2. Discrimina las caras que componen los cuerpos geométricos.
3. Nombra las figuras que componen las caras de los cuerpos geométricos.

Tecnología (**θ**): **θ** $_4$ Definición de cuerpo geométrico, **θ** $_5$ Elementos de los cuerpos geométricos, **θ** $_6$ Características de los cuerpos geométricos y **θ** $_7$ Definición de figuras.

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio

4.2.2.1. Tipos de tareas (T)

Chevallard (1999) señala que cuando una tarea (***t***) forma parte de un tipo de tareas (***T***), se afirmará que $t \in T$ y en este sentido indica que una tarea y el tipo de tareas asociadas a ella se expresan con un verbo; como: limpiar la habitación, desarrollar la expresión literal dada, dividir un número entero entre otro, etc.; pero señala que la noción de tarea o tipo de tareas supone un objeto relativamente preciso.

En este sentido, el autor explica que calcular la función en un punto es un tipo de tarea; sin embargo calcular no lo es; es ahí donde señala que esto es un género de tareas, que se desarrollará a través de la escolaridad con nuevos tipos de tareas que se le asigne al género calcular.

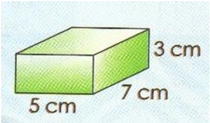
Al respecto, Fonseca (2011), señala que el tipo de tareas (***T***) es una noción muy general que incluye cualquier tipo de tareas que sean consideradas matemáticas en la institución de referencia.

En nuestra investigación algunos ejemplos de tipos de tareas (***T***) son:

Tipo de tarea (T_1): Identificar poliedros a partir de alguno de sus desarrollos planos.

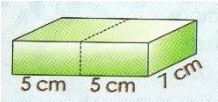
Tipo de tarea (T_7): Calcular el área total de los poliedros.

1.- Calculen el área total de este prisma rectangular, sin dibujar la plantilla.



2.- Dos prismas rectangulares como el del ejercicio anterior son pegados de tal modo que formen un solo prisma.

a) Calculen el área total del prisma, cuando tiene esta forma.



b) Calculen el área total del prisma cuando tiene esta forma:

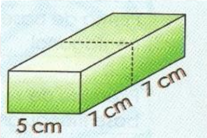


Figura 20. Tareas del T_7
Fuente: Texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.168)

4.2.2.2. Técnicas (τ)

Una técnica es la manera de hacer una tarea determinada; es decir, es la forma o procedimiento que se sigue para resolver las tareas. En este sentido, la técnica es un saber hacer y dentro de una organización matemática forma el bloque práctico-técnico.

Al respecto, Chevallard (1999) afirma lo siguiente:

> Sea ***T*** un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a ***T*** requiere (en principio) una manera de realizar las tareas ***t ϵ T***: a una determinada manera de hacer, **ô**, se le da aquí el nombre de técnica (del griego ***tekhnê***, saber hacer). Una praxeología relativa al tipo de tareas ***T*** contiene pues, en principio, una técnica **ô** relativa a ***T.*** Contiene así un "bloque" designado por [***T/ ô***], que se denomina bloque *práctico- técnico* y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina *un saber- hacer*: un determinado tipo de tareas, ***T*** y determinada manera, **ô,** de realizar las tareas de este tipo. (p. 223).

En este sentido, Fonseca (2011) menciona que realizar cualquier tipo de tareas ***T*** requiere poner en funcionamiento una técnica (***τ***), es decir, una "manera de hacer sistemática y compartida" que depende del tipo de tareas (***T***) y de la institución en que nos situemos. Es así que, se forma un bloque ***práctico-técnico*** **[*T/τ*]** que está formado por un tipo de tareas ***T***, y una técnica (***τ)*** que la institución considera pertinente para llevar a cabo las tareas de este tipo.

Asimismo, este autor afirma que cada técnica concreta sólo permite realizar un pequeño subconjunto de las tareas del tipo ***T*** de la cual es relativa y fracasa en la realización de las restantes tareas de ese tipo. Por ejemplo en nuestra investigación la técnica **($\tau_{2,2,1}$),** que está compuesta por los siguientes pasos:

1. Observa las características que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos (aristas, caras, vértices).
2. Realiza un listado de las características que tiene cada cuerpo geométrico.
3. Compara el listado del conjunto de características que tiene cada cuerpo geométrico.
4. Visualiza objetos reales que comparten la mayor cantidad de características comunes que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos.

Permite solo resolver la siguiente tarea: *Tarea ($t_{2,2}$): Identificar cuerpos geométricos con objetos de su entorno,* que pertenece al tipo de tarea T_2: Identificar características comunes de cuerpos geométricos y de objetos de su entorno; la cual está compuesta por 3 tareas. En este sentido, esta técnica solo permite resolver una tarea pero no permite resolver las otras dos tareas que pertenecen al mismo tipo de tarea.

Chevallard (1999) señala que una técnica no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica, es decir; no significa que cada tarea va tener una técnica exclusiva para resolverla, ya que en una institución cualquiera puede existir un tipo de tareas ***T*** y existir una sola técnica (***τ***), o un conjunto pequeño de técnicas reconocidas por la institución; con la exclusión de otras técnicas alternativas que pueden existir en otras instituciones.

Basados en la definición de técnica de Chevallard en nuestra investigación algunos ejemplos de técnicas son:

Técnica **($\tau_{1,1,1}$)**:

1. Dibujar el desarrollo plano del poliedro en un soporte de papel en una escala adecuada.
2. Medir $\frac{1}{2}$ centímetro para las pestañas en todo el contorno del desarrollo plano dibujado en el paso 1.
3. Recortar el contorno del desarrollo plano del poliedro con las pestañas dibujado en el paso 1 y paso 2.
4. Armar el desarrollo plano para construir el modelo correspondiente.
5. Determinar si el modelo armado corresponde a un poliedro.

Técnica **($\tau_{4,1,1}$)**:

1. Cortar por las pestañas los modelos de los tetraedros construidos.

2. Extender el desarrollo plano del tetraedro.
3. Recortar cada uno de los triángulos equiláteros que conforman el desarrollo plano del tetraedro.
4. Pegar el material velcro adhesivo en los bordes de los triángulos equiláteros que conforman el desarrollo plano del tetraedro.
5. Ubicar los triángulos equiláteros de distinta forma para formar diferentes desarrollos planos del tetraedro.
6. Armar el desarrollo plano para construir el modelo correspondiente.
7. Dibujar los diferentes desarrollos planos del tetraedro formados en el paso 5.

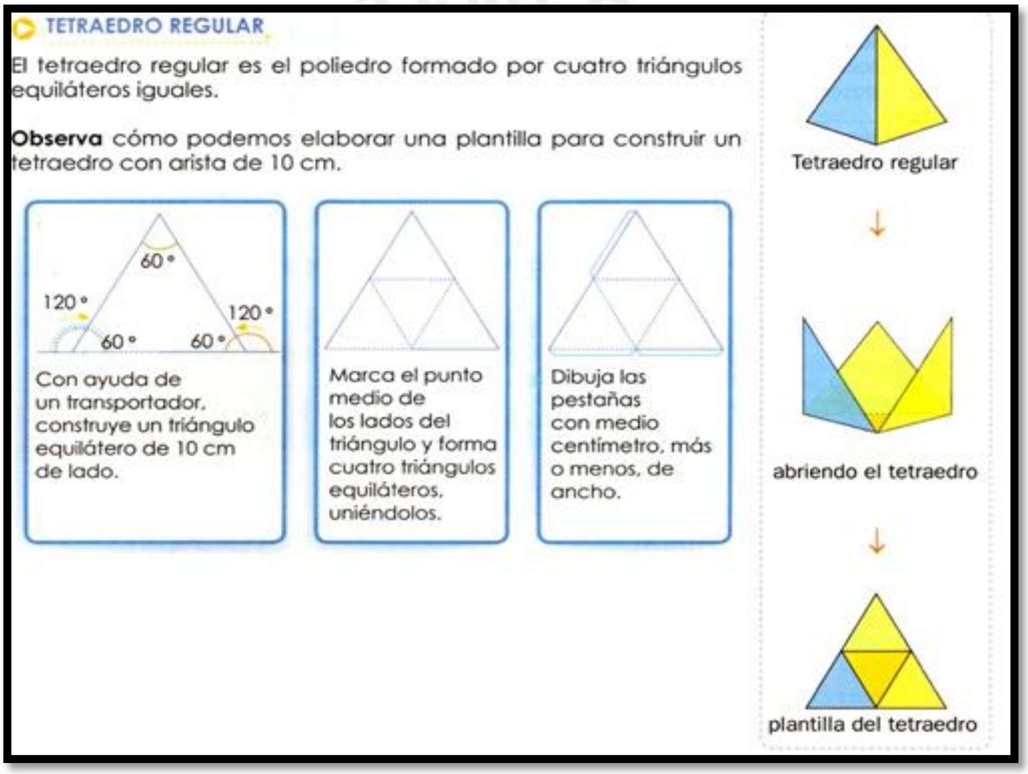


Figura 21. Ejemplo de técnica
Fuente: Fuente: Texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.163)

4.2.2.3. Tecnologías (θ)

La tecnología permite describir, explicar y justificar el funcionamiento de una técnica; es decir, son los conocimientos matemáticos (definiciones, axiomas y teoremas) los cuales justifican y validan la técnica. En este sentido, la utilización de tecnologías puede originar nuevas técnicas.

Al respecto, según Chevallard (1999) refiere que:

> Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por $\boldsymbol{\theta}$, un discurso racional (el logos) sobre la técnica – la *tekhnê-* $\boldsymbol{\hat{o}}$, discurso cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica $\boldsymbol{\hat{o}}$, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo $\boldsymbol{T}$, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer como poco racional en otra institución. (p. 224).

Del mismo modo, Chevallard (1999) menciona tres aspectos de la tecnología:

1.- En una institución I, cualquiera sea el tipo de tareas $\boldsymbol{T}$, la técnica asociada a $\boldsymbol{T}$ está siempre acompañada de al menos un embrión o vestigio de tecnología $\boldsymbol{\theta}$ y en muchos casos algunos elementos tecnológicos están integrados en la técnica.

2.- Del mismo modo, el autor señala que la segunda función de la tecnología es la de explicar, de hacer inteligible, de aclarar la técnica; es decir, que la primera función de la tecnología es justificar la técnica, la cual consiste en asegurar que la técnica logra lo que se pretende; mientras que la segunda función consiste en exponer por qué esa técnica es la correcta y apropiada para el desarrollo de un tipo de tareas.

3.- La tercera función corresponde a un empleo más actual del término tecnología que es la de producción de técnicas, ya que existen tecnologías potenciales a la espera de técnicas, que no son tecnologías de alguna técnica o que son tecnologías de muy pocas técnicas.

En la misma línea, Fonseca (2011) señala que el bloque práctico – técnico $\boldsymbol{[T/\tau]}$ no puede vivir sólo en una institución; en otros términos, requiere que exista el discurso racional (logos) que justifique la técnica y muestre la pertinencia de ésta para llevar a cabo el tipo de tareas $\boldsymbol{T}$; esto es lo que Fonseca define como tecnología, que es un discurso matemático. Otras funciones de la tecnología son: explicar y hacer inteligible el funcionamiento de la técnica, relacionarla con otras técnicas y, lo que es más importante, producir nuevas técnicas.

En nuestra investigación podemos mencionar los siguientes ejemplos de tecnología como:

- Fórmula para hallar el volumen de los prismas.
- Teorema de Euler

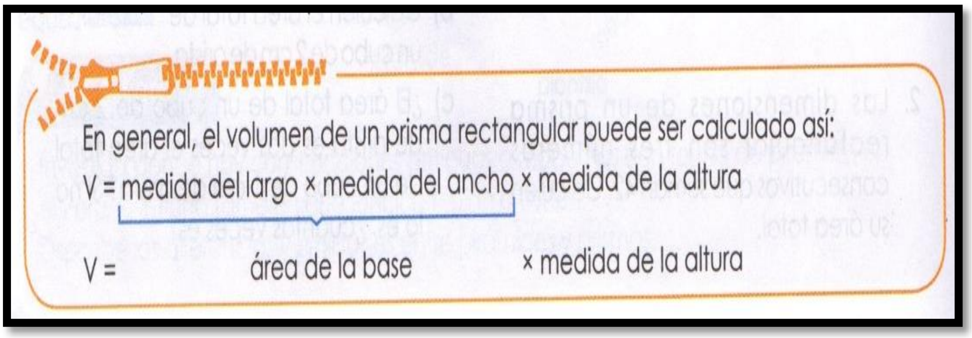


Figura 22. Ejemplo de tecnología
Fuente: Texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.172)

4.2.2.4. Teoría (Θ)

La teoría permite justificar y explicar la tecnología, es el discurso racional sobre la tecnología. La teoría cumple el mismo papel que cumple la tecnología para la técnica; es decir, la teoría justifica, explica y genera tecnologías que permiten la interpretación de las técnicas. Es considerado el más alto nivel de justificación y explicación de los conocimientos matemáticos; en otras palabras está relacionada en gran medida con el saber sabio.

En este sentido, Chevallard (1999) afirma:

> El discurso tecnológico contiene afirmaciones; más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación- explicación- producción, el de la *teoría*, **Θ**, que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica. (p. 225)

Asimismo, Fonseca (2011) afirma que la teoría desempeña, respecto de la tecnología, el mismo papel que ésta desempeñaba respecto de la técnica. En este sentido, el autor resume afirmando que junto al bloque práctico-técnico **[*T*/*τ*]** tenemos dentro de las organizaciones matemáticas institucionalizadas, un segundo bloque, el tecnológico-teórico [$\boldsymbol{\theta}$/**Θ**]. El sistema formado por los cuatro componentes constituye una praxeología (u organización) matemática que consideramos como la unidad mínima en que puede describirse la actividad matemática y que designaremos mediante OM = [$\boldsymbol{T/\tau}$; $\boldsymbol{\theta}$/**Θ**].

En nuestra investigación solo se presenta el siguiente ejemplo de teoría:

❖ Geometría plana y del espacio

Figura 23. Ejemplo de teoría
Fuente: Texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.166)

4.2.3. Clases de praxeologías

Chevallard (1999) con el objetivo de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales introdujo la distinción entre diferentes tipos de praxeologías señalando las siguientes:

Praxeologías puntuales:(u organizaciones matemática puntuales - OMP) alrededor de un tipo de tareas *T*, se encuentra una tripleta formada por una técnica (al menos), por una tecnología de la técnica y por una teoría de la tecnología. El total indicado por $[T/\tau/\theta/\Theta]$, es lo que constituye una praxeología puntual, es decir, significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, ***T***.

Praxeologías locales: (u organizaciones matemática locales - OML) cuando las organizaciones puntuales se combinan originan organizaciones locales $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, que están centradas en una tecnología determinada.

Praxeologías regionales: (u organizaciones matemáticas regionales - OMR) cuando las organizaciones locales se combinan originan organizaciones regionales $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j\ /\Theta]$, que están centradas en una teoría matemática común.

Por su parte Fonseca (2004), señala que para hacer referencia a una OMR bastará citar la teoría matemática en común.

Praxeologías globales: (u organizaciones matemática globales - OMG) es aquella que surge agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

Después de explicar los elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que nos servirá para describir la organización matemática presente en el libro de texto que hemos seleccionado.

A continuación, presentaremos la metodología de investigación que utilizaremos en nuestro trabajo, así como, los instrumentos que nos permitirán realizar el análisis de la organización matemática del libro de texto seleccionado.

CAPÍTULO V: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

5.1. Metodología de la investigación

La metodología a emplear en el presente trabajo es la ***cualitativa de tipo bibliográfica o documental.***

Según Hernández, Fernández y Baptista (2003) una investigación ***cualitativa*** utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación y puede o no probar hipótesis en su proceso de interpretación. Asimismo, los autores señalan que la investigación ***cualitativa*** busca principalmente "dispersión o expansión" de los datos o información; es decir, los estudios de investigación cualitativa no pretenden generalizar de manera intrínseca resultados a poblaciones más amplias, ni necesariamente obtener muestras representativas (bajo la ley de probabilidad); tampoco, buscan que sus estudios lleguen a replicarse y se fundamentan más en un proceso inductivo; en otras palabras, van de casos particulares a casos generales. (pág. 15)

En este sentido, nuestra investigación es ***cualitativa*** porque al analizar la unidad séptima titulada: “Exploramos los poliedros” del libro de texto, solo obtendremos conclusiones sobre el mismo que no se generalizarán a otros libros de textos. Además tiene un proceso inductivo, ya que en este caso analizaremos un libro de texto del Ministerio de Educación que corresponde al sexto grado de educación primaria; específicamente la séptima unidad para establecer una organización matemática (tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías) y los resultados obtenidos no pretenden ser generalizados a otras investigaciones; pero si ser un aporte a las mismas.

Martínez (2006) señala que la investigación ***cualitativa*** no se trata del estudio de cualidades separadas o separables; sino más bien se trata del estudio de un todo integrado que forma o constituye una unidad de análisis y que hace que algo sea lo que es: Una persona, una entidad étnica, social, empresarial, un producto determinado, etc., aunque también se podría estudiar una cualidad específica, siempre que se tengan en cuenta los nexos y relaciones que tiene con el todo, los cuales contribuyen a darle su significación propia. De esta manera, la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones. De aquí, que lo cualitativo (que es el todo integrado) no se opone a lo cuantitativo (que es sólo un aspecto), sino que lo implica e integra, especialmente donde sea importante.

En este sentido, podemos afirmar basados en el aporte de Martínez (2006) que nuestra investigación es **cualitativa,** porque se trata del estudio de un todo integrado que forma o constituye una unidad de análisis; en nuestra investigación el todo integrado se refiere al análisis de la presencia de los poliedros en los libros de textos desde el año 1965, del mismo modo la presencia de los poliedros en los diseños curriculares anteriores al diseño curricular actual de nuestro país y por último, nuestra unidad de análisis que es la séptima unidad del libro de texto de matemática de sexto grado de primaria, referente a los poliedros, el cual es distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación del Perú.

Asimismo, Taylor y Bogdan (1994) señalan que la investigación ***cualitativa*** es aquella que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable; es decir, consiste en más de un conjunto de técnicas para recoger datos. Los mismos autores señalan las siguientes características propias de la investigación ***cualitativa:***

1.- ***Es inductiva*** porque los investigadores desarrollan conceptos y comprensiones partiendo de los datos y no recogiendo los datos para evaluar modelos, hipótesis o teorías preconcebidas; en otras palabras, en los estudios cualitativos los investigadores siguen un diseño de investigación flexible y comienzan sus estudios con interrogantes formuladas vagamente. En este sentido, nuestra investigación es inductiva porque partimos de datos, como en este caso son los problemas y ejercicios del capítulo elegido del libro de texto y nos preguntamos inicialmente: ¿Cuáles serían los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías? que presenta nuestra unidad de análisis (libro de texto).

2.- El investigador ve al escenario y a las personas en una ***perspectiva holística;*** *las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo*; es decir, la investigación cualitativa estudia a las personas en el contexto de su pasado y de las situaciones en las que se hallan. En este caso, nuestra investigación tiene en cuenta el todo de nuestro objeto matemático poliedros; como por ejemplo, la presencia de los poliedros en los libros de textos antiguos distribuidos en nuestro país desde los años 1965, la presencia de los poliedros en los diseños curriculares de nuestro país y la presencia del objeto matemático en el resto de la colección de los libros de texto de matemática que se distribuyen gratuitamente en nuestro país.

3.- Los investigadores cualitativos ***tratan de comprender*** a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas; es decir, experimentar la realidad tal como otros la experimentan.

Asimismo, los investigadores cualitativos se identifican con las personas que estudian para poder comprender como ven las cosas. En este sentido, en nuestra investigación al describir las técnicas nos situamos en la posición del alumno al plantear las técnicas que utilizarían para resolver los tipos de tareas planteados en el libro de texto y en la posición del docente al plantear las técnicas que no aparecen en el libro de texto, pero que el docente plantearía teniendo en cuenta su conocimientos pedagógicos para resolver los tipos de tareas y tareas propuestas.

4.- El investigador cualitativo ***suspende o aparta sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones***; es decir, ve las cosas como si estuvieran ocurriendo por primera vez. Nada se da sobreentendido, todo es un tema de investigación. Es así que, en nuestra investigación al realizar el análisis de la séptima unidad del libro de texto, cada ejercicio propuesto y resuelto es considerado como un tipo de tarea y tarea que debe ser analizado, teniendo mucho cuidado al proponer los tipos de tareas, las tareas y sobre todo las técnicas, pues no se trata de cómo resolver nosotros las tareas sino de cómo se haría a partir de las técnicas presentadas en el libro analizado o en los libros anteriores de la colección.

5.- Para el investigador cualitativo, ***todas las perspectivas son valiosas;*** es decir, tiene en cuenta las perspectivas de todas las personas; en otras palabras, busca la comprensión detallada de las perspectivas de las personas y para él todas las personas se ven iguales. Es así que, en nuestra investigación tenemos en cuenta tanto la perspectiva del docente; es decir, la forma en la que el docente plantearía una técnica para resolver una tarea basado en los conocimientos previos de sus alumnos, así como desde la perspectiva del alumno teniendo en cuenta la forma en la que resolverían las tareas basados en sus conocimientos previos. Todas estas perspectivas la tomamos en cuenta en el momento que diseñamos técnicas que no están presentes en el libro de texto que analizamos.

6.- Los investigadores cualitativos ***dan énfasis a la validez*** en su investigación; porque consideran la investigación cualitativa como una pieza de investigación sistemática conducida con procedimientos rigurosos, aunque no necesariamente estandarizados. En este sentido, nuestra investigación será validada teniendo en cuenta una lista de criterios basadas en los indicadores de completitud de Fonseca (2004) para realizar el análisis de la organización matemática presente en la séptima unidad del libro de texto.

Por otro lado, en cuanto a la metodología cualitativa de tipo bibliográfica tenemos a los siguientes autores:

De Andrade y Lakatos (2003) afirman que la metodología cualitativa de tipo bibliográfica abarca toda la bibliografía hecha pública, es decir, publicaciones sueltas. Es así que, esta metodología tiene por finalidad colocar al investigador en contacto directo con todo lo que está escrito.

En este sentido, basados en los aportes De Andrade y Lakatos (2003) podemos afirmar que nuestra metodología es cualitativa de tipo bibliográfica porque nuestra unidad de análisis es la unidad séptima que trata de los poliedros presente en el libro de texto de sexto grado de educación primaria, que es un material hecho público porque se utiliza en todas las instituciones de nuestro país.

Según Fiorentini y Lorenzato (2006) la metodología cualitativa de tipo bibliográfica es llamada también de estudio documental, porque estudia los documentos escritos donde la recolección de información se hace a partir del fichamiento de lecturas que se organizan de manera sistemática, los cuales son estables en el tiempo y ricos como fuente de información; pues incluyen: libros, propuestas curriculares, pruebas (test), entre otros documentos. En este sentido, podemos afirmar que nuestra metodología es cualitativa de tipo bibliográfica porque nuestra unidad de análisis es un documento escrito que en este caso es un libro de texto de matemática. Asimismo, este documento escrito es estable en el tiempo porque el Ministerio de Educación ha establecido la distribución de libros de textos gratuitamente desde el año 2012 en que fue publicado.

Asimismo, Gil (2002) señala que la metodología cualitativa de tipo bibliográfica es aquella que se desarrolla sobre la base de materiales ya preparados y está constituida principalmente de libros y artículos científicos. También, el autor señala que los libros constituyen fuentes bibliográficas por excelencia y la principal ventaja de la metodología cualitativa de tipo bibliográfica es que permite al investigador cubrir una amplia gama de fenómenos y ésta se amplía mucho más porque se puede buscar directamente.

Basados en Gil (2002), podemos señalar que nuestra investigación adopta la metodología cualitativa de tipo bibliográfica; porque pretendemos analizar como el autor presenta la organización matemática del capítulo referente a los poliedros, en base al análisis de un libro de texto, para lo cual necesitamos conocer como es abordado este concepto desde otras perspectivas, aspectos que encontramos en libros e investigaciones.

5.2. Procedimientos metodológicos

En esta sección explicaremos los pasos que seguiremos para conseguir los objetivos de nuestra investigación basados en la metodología cualitativa de tipo bibliográfica que nos servirá de guía para enfocar nuestro problema de investigación y buscar las alternativas de solución.

Por ello, debemos enfocar dentro de que área se encuentra nuestra investigación, es así que, Villarreal (2002) indica que las actividades vinculadas al área de Educación Matemática están asociadas a tres acepciones:

1.- Como actividad de práctica relacionada con el propio acto de enseñar.

2.- Como actividad de desarrollo vinculada a la producción de materiales didácticos o textos, elaboración de propuestas curriculares, realización de experiencias innovadoras o alternativas, etc.

3.- Como área de investigación. (p. 60)

En este sentido, nuestra investigación se enmarca dentro del área de la Educación Matemática porque se relaciona con la segunda acepción; ya que nuestra unidad de análisis es la séptima unidad referente al objeto matemático poliedro que se encuentra en un libro de texto de matemática, que es un material didáctico que utilizan docentes y alumnos.

Es así que, en nuestra investigación de acuerdo con Gil (2002), es desarrollada basada en un material ya elaborado, establecido principalmente en los libros de texto, los cuales constituyen fuentes bibliográficas por excelencia (p. 44). Asimismo, el autor señala que las fuentes pueden ser clasificadas de acuerdo con la siguiente tabla:

Tabla 3. Clasificación de las fuentes bibliográficas

<table>
<tr><td rowspan="10">FUENTES BIBLIOGRÁFICAS</td><td rowspan="7">LIBROS</td><td rowspan="2">DE LECTURA ACTUAL</td><td colspan="2">OBRAS LITERARIAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">DIVULGACIÓN DE OBRAS</td></tr>
<tr><td rowspan="5">DE REFERENCIA</td><td rowspan="5">INFORMACIÓN DEL REMITENTE</td><td>DICCIONARIOS</td></tr>
<tr><td>ENCICLOPEDIAS</td></tr>
<tr><td>ANUARIOS</td></tr>
<tr><td>ALMANAQUES</td></tr>
<tr><td>LIBROS DE TEXTO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">PUBLICACIONES PERIÓDICAS</td><td colspan="3">PERIÓDICOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">REVISTAS</td></tr>
<tr><td colspan="4">DOCUMENTOS IMPRESOS</td></tr>
</table>

Fuente: Adaptado de Gil (2002, p.44)
Traducción propia

Gil (2002) señala que las investigaciones cualitativas de tipo bibliográfica siguen varias etapas, pero que estas etapas no son arbitrarias y dependerán de la naturaleza del problema, el grado de precisión que se pretende dar a la investigación, entre otros aspectos.

Los pasos que considera el autor en base a su experiencia son los siguientes:

a) Elección del tema: Esta etapa requiere de la energía y habilidad del investigador, está relacionado con la posibilidad de que el tema elegido sea factible de ser realizado y debe partir del interés del investigador. (p. 60)

En este sentido, nosotros decidimos realizar una investigación relacionada al análisis del libro de texto del área de Matemática en educación primaria; texto que es distribuido por el Ministerio de Educación; debido a que en nuestro quehacer pedagógico los libros de texto constituyen una herramienta fundamental tanto para el docente como para el estudiante. Es así que, Gonzáles y Sierra (2004); señalan que el libro de texto es un apoyo del saber en tanto que impone una distribución y jerarquía de los conocimientos y contribuye a formar andamios intelectuales tanto en alumnos como en profesores. Por ello, consideramos importante estudiar la contribución de los libros de texto en la educación matemática analizando la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula y su función como transmisor de contenidos. Es así que, analizaremos el siguiente libro de texto:

TÍTULO DEL TEXTO	AUTOR	AÑO
Matemática 6	Ministerio de Educación	2012

b) Levantamiento bibliográfico preliminar: Consiste en realizar un estudio exploratorio, cuya finalidad es familiarizar al investigador con el área de estudio que ha elegido a través de la búsqueda de trabajos de naturaleza teórica asociados al tema de investigación, así como, la búsqueda de investigaciones recientes con la finalidad de analizar cómo abordar el tema y es importante, porque permite al investigador formular su problema de investigación de forma clara y precisa (p. 61)

En nuestra investigación, después de elegir el tema de investigación realizamos un estudio exploratorio sobre las teorías que permiten el análisis de textos; así como, investigaciones relacionadas con el objeto matemático de nuestra investigación: los poliedros y luego de este análisis, optamos por utilizar la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999) para realizar el análisis de la organización matemática que presenta el libro de texto seleccionado.

Del mismo modo, realizamos un estudio más cuidadoso de nuestro objeto matemático poliedro; porque analizamos la presencia del objeto matemático en los libros de texto desde 1965, también la presencia de los poliedros como contenido en los diseños curriculares de nuestro país y por último realizamos la presentación de los poliedros desde el punto de vista matemático.

c) Formulación del problema: Se refiere a que el problema identificado debe corresponder a un vacío del área del conocimiento en el que se enfoca la investigación y el trabajo de la investigación debe ser inédito. En este sentido, podemos tener en cuenta ciertas preguntas de tal forma al investigador que permita saber en qué medida el problema propuesto está en condiciones de ser investigado; y estas preguntas son:

1.- ¿El tema le interesa al investigador?

2.- ¿El problema presenta relevancia teórica y práctica?

3.- ¿Existe material bibliográfico suficiente o disponible para su solución?, etc. (p.62)

En esta etapa en nuestra investigación formulamos la pregunta de investigación y los objetivos generales y específicos, los cuales nacen de nuestro interés basados en la relevancia teórica que ha sido expuesta en la justificación de nuestra investigación.

d) Elaboración del plan provisional: Es la organización sistemática de las diversas partes que componen el objeto de estudio; es decir, contiene los ítems o subítems ordenados en secciones correspondientes a la forma en que se va desarrollar la investigación basado en los objetivos; en otras palabras, podemos decir que es el índice del contenido de la investigación. (p.63)

Nuestra investigación estará organizada de acuerdo al siguiente índice que consta de seis capítulos que son los siguientes:

Capítulo I: Planteamiento del problema

Capítulo II: Estudios preliminares del objeto matemático

Capítulo III: Estudio del objeto matemático

Capítulo IV: Teoría Antropológica de lo Didáctico

Capítulo V: Metodología de la investigación

Capítulo VI: Análisis del material didáctico

e) Identificación de fuentes: Se refiere a la selección de fuentes adecuadas que permitan dar solución al problema propuesto en la investigación, es otras palabras, consiste en realizar una revisión bibliográfica preliminar (libros de lectura, obras de referencia, tesis, periódicos científicos, etc.). (p.64)

En esta etapa identificamos las herramientas que proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico para analizar la organización matemática que presenta un libro de texto como son: las tareas, tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría después de haber realizado la identificación de fuentes bibliográficas.

Del mismo modo, investigamos los indicadores de completitud propuesto por Fonseca (2004) para analizar el grado de completitud de la organización matemática presente en el libro de texto de Matemática del sexto grado de educación primaria que hemos seleccionado.

f) Lectura del material: En esta etapa se da inicio a la lectura de todo el material bibliográfico con el objetivo de aprender el contenido de dicho material que permita dar respuesta al problema de investigación planteado. (p.77)

En nuestra investigación hemos leído los artículos y textos relacionados a la Teoría Antropológica de lo Didáctico y a nuestro objeto matemático poliedros los cuales están referenciados en la bibliografía.

g) Fichamiento: Consiste en la confección de fichas de lectura; las cuales sirven para identificar las obras consultadas, registro del contenido de las obras, registro de comentarios de las obras y permite ordenar los registros de las obras consultadas. (p.81)

En el caso de nuestra investigación hicimos el registro de los documentos consultados sobre los antecedentes de la investigación, la Teoría Antropológica de lo Didáctico y de nuestro objeto matemático poliedros; organizando y ordenando la información relevante para el desarrollo de nuestra investigación.

h) Organización lógica del informe: Es la organización de ideas que permite responder a los objetivos propuestos en el inicio de la investigación. En esta etapa se reformula el contenido de la investigación con la finalidad de establecer la organización definitiva del trabajo de investigación. (p.84)

Con respecto a nuestra investigación, en esta etapa realizamos las siguientes actividades:

- ❖ Elección del capítulo presente en el libro de texto denominado: “Exploramos poliedros”, donde se encuentra nuestro objeto matemático.
- ❖ Resolver los ejercicios y problemas que se presentan en el capítulo del libro de texto que analizaremos.
- ❖ Identificar las tareas y los tipos de tarea referente a los poliedros que presenta el capítulo del libro de texto que analizaremos.
- ❖ Identificar las técnicas y tecnologías de estudio asociadas a las tareas y los tipos de tarea presentes en el capítulo del libro de texto analizado referente a los poliedros.
- ❖ Determinar el grado de completitud de la organización matemática, teniendo en cuenta los indicadoresde completitud de Fonseca.
- ❖ Elaborar el índice del contenido de nuestra investigación.

i) Redacción del informe: En esta etapa no existen reglas fijas acerca del procedimiento que debe seguirse para redactar la investigación; sino que depende del estilo que adopte el investigador. (p.85)

En esta etapa en nuestra investigación realizaremos la redacción del análisis de los resultados del capítulo del libro de texto elegido, así como las conclusiones y sugerencias de nuestro trabajo de investigación.

5.3. Instrumentos de la investigación

Hernández, Fernández & Baptista (2003) señalan que un instrumento de investigación es aquel que permite registrar datos observables que representan verdaderamente los conceptos o las variables que el investigador tiene en mente permitiéndole obtener la información que debe analizar. (p. 345).

En este caso para la construcción de la organización matemática, basados en los aportes teóricos de la TAD utilizaremos la ***Tabla 4, Análisis previo de la organización matemática de los libros de texto*****;** esta tabla nos permitirá la construcción de la organización matemática presente en el libro de texto seleccionado en función a las tareas ($\boldsymbol{t}$), tipos de tareas **(**$\boldsymbol{T}$**)**, técnicas **(**$\boldsymbol{\tau}$**)**, tecnologías **(**$\boldsymbol{\theta}$**) y** teorías **(**$\boldsymbol{\Theta}$), esto estará asociado a la noción de praxeología u organización praxeológica, es decir, tener en cuenta los dos bloques que se señalan en la TAD: el bloque práctico-técnico [$\boldsymbol{T}/\boldsymbol{\tau}$] que constituye el saber hacer conformado por los tipos de tareas y técnicas y por otro lado el bloque tecnológico-teórico [$\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\Theta}$] que constituye el saber conformado por la tecnología y la teoría.

Tabla 4. Análisis previo de la organización matemática del libro de texto

Bloque practico-técnico (praxis)			**Bloque tecnológico-teórico (logos)**	
Tipos de tareas(T)	**Tareas (t)**	**Técnicas (τ)**	**Tecnologías (θ)**	**Teorías (Θ)**
¿Cuáles son los tipos de tareas propuestas en el texto?	¿Cuáles son las tareas que pertenecen a un determinado tipo de tarea?	¿Cuáles son las técnicas que justifican las tareas presentadas en el libro de texto?	¿Cuáles son las tecnologías que justifican las técnicas aplicadas en el libro de texto?	¿Cuáles son las teorías que justifican las tecnologías presentes en el libro de texto?
T_1	$t_{1,1}$	$\tau_{1,1,1}$	θ_1 θ_2 θ_3	Θ
	$t_{1,2}$			
	$t_{1,3}$			
T_2	$t_{2,1}$	$\tau_{2,1,1}$	θ_4 θ_5 θ_6 θ_7	
	$t_{2,2}$	$\tau_{2,2,1}$		
	$t_{2,3}$	$\tau_{2,3,1}$		
T_n	$t_{n,n}$	$\tau_{n,n,n}$	θ_n	

Fuente: Adaptado de Chevallard (1999, p.226)

Asimismo, utilizaremos los indicadores de completitud de Fonseca (2004) que nos permitirán determinar el grado de completitud que presenta la organización matemática del libro de texto elegido referente a la séptima unidad que trata sobre los poliedros.

Es así que, a este instrumento lo denominaremos ***Lista de criterios*,** la cual está basada en los indicadores del grado de completitud de una praxeología local establecidos por Fonseca (2004); quién señala siete indicadores de completitud de una organización matemática local (OML), además cabe mencionar que en esta sección presentaremos algunos ejemplos asociados a estos criterios, ya que más adelante en el análisis de la organización matemática presentaremos el análisis más detallado del grado de completitud. En este sentido, los indicadores de completitud a los que hace referencia Fonseca (2004) son los siguientes:

OML1: Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

> En una OML convivirán necesariamente varios tipos de tareas problemáticas relacionadas entre sí mediante sucesivos desarrollos de las técnicas. El grado de completitud dependerá entonces del *grado de integración de todos los tipos de tareas*. Entre éstos deben aparecer tipos de tareas asociados al "*cuestionamiento tecnológico*" de las técnicas de la OML esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas. Una OML será menos *completa* cuantos más tipos de *tareas aisladas* (esto es, realizables mediante técnicas que no estén relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico) existan en OML. (p. 181)

En este sentido, en nuestra investigación este indicador hará referencia a los siguientes criterios:

- Los tipos de tareas (T_i) sobre los poliedros se relacionan entre sí, mediante el desarrollo sucesivo de sus técnicas.
- Los tipos de tareas (T_i) sobre poliedros hacen uso del cuestionamiento tecnológico de las técnicas (fórmulas, definiciones y propiedades) del objeto matemático poliedros que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía, el alcance y la comparación de las técnicas.

En nuestra investigación en el libro de texto que hemos analizado encontramos el siguiente ejemplo referente a este indicador:

En el caso de los tipos de tareas: T_1: Identificar poliedros a partir de alguno de sus desarrollos planos y T_4: Dibujar desarrollos planos de los poliedros, son resueltas con las técnicas $\boldsymbol{\tau}_{1,1,1}$ y $\boldsymbol{\tau}_{4,2,1}$ que se relacionan entre sí por el uso de las siguientes tecnologías $\boldsymbol{\theta}_1$: Desarrollo plano de los poliedros, $\boldsymbol{\theta}_2$: Definición de poliedros y $\boldsymbol{\theta}_3$: Elementos de los poliedros.

En la organización matemática del libro de texto que hemos analizado existen otros ejemplos que mencionaremos más adelante en el capítulo de análisis del material didáctico.

OML 2: Diferentes técnicas para cada tipo tareas y criterios para elegir entre ellas.

> Una OML será más completa en la medida que, dado un tipo concreto de tareas T_q de OML, *existan dos o más técnicas* (que pueden ser variaciones de una misma técnica) que permitan realizar algunas de las tareas concretas de ese tipo. Este indicador de la completitud comporta que en la OML existan, además, los *elementos tecnológicos que permiten discernir*, para cada tarea concreta, cuál es la técnica más fiable y económica para llevar a cabo dicha tarea. (p. 182)

Para los fines de nuestra investigación este indicador hará referencia a los siguientes criterios:

- Existen dos o más técnicas para resolver un tipo de tareas (T_i) asociadas al objeto matemático poliedros.
- El libro de texto presenta elementos tecnológicos que permiten analizar cuál es la técnica más fiable y económica para realizar una tarea ($t_{i,j}$).

En este sentido, Fonseca (2004) señala el siguiente tipo de tarea: Calcular la derivada de una función *f* dada mediante su expresión analítica y muestra que este tipo de tarea tiene más de dos técnicas entre las que podemos citar: la definición (que comporta calcular el límite del cociente incremental), la regla de la cadena (para derivar funciones compuestas) y la técnica de derivación logarítmica para derivar funciones potenciales-exponenciales.

OML 3: Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.

> La flexibilidad de las técnicas de una OML comporta, en particular, que éstas no se identifiquen rígidamente con los *objetos ostensivos* (en el sentido definido en Bosch, 1994) que las componen sino que, por el contrario, acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas y hasta de la tarea específica abordada dentro de un tipo de tareas. Esta independencia presupone, para comportar efectivamente una mayor eficacia de las técnicas, que en la OML existen criterios (más o menos explícitos) que permiten elegir adecuadamente la presentación ostensiva más adecuada de cada técnica para realizar cada tarea. (p. 182)

En nuestra investigación este indicador hará referencia al siguiente criterio:

- La técnica hace uso de distintas representaciones (palabras, expresiones, notaciones, escrituras, gráficos, etc.) que permite resolver un tipo de tarea (T_i).

Bosch (1994) señala que el adjetivo *ostensivo*, está formado a partir del sustantivo *ostensión* que proviene del latín *osténdere*, que significa “presentar con insistencia”; es decir, ostentar. Al sustantivo ostensión se le puede asociar dos adjetivos: ostensivo, entendido como “que se muestra”, y ostensible, “susceptible de ser ostentado o mostrado”. De acuerdo con esta distinción que registran un gran número de lenguas latinas, llamaremos objeto ostensivo a todo objeto dotado de una naturaleza sensible, de cierta materialidad, y que, por ello, puede presentarse al sujeto humano como una realidad perceptible. Será pues un objeto ostensivo cualquier objeto natural, y en particular, los sonidos (entre ellos los “morfemas” lingüísticos), los grafismos (entre los cuales se encuentran los “grafemas” que componen la escritura de las lenguas naturales o formales) y los gestos. También cabe señalar que el adjetivo ostensivo se relaciona con lo sensorial entonces cuando se hable de ostensividad nos referiremos al conjunto de los sentidos donde la vista y el oído desempeñan un papel principal, es decir, consideramos a los objetos ostensivos con el hecho de que estos son objetos manipulables por el sujeto humano. Es así que, el término genérico manipulación lo utilizaremos para designar los diferentes usos posibles que tengan los objetos ostensivos. Por ejemplo, la notación “log” es un objeto ostensivo (representación verbal, un grafismo). En cambio la definición de logaritmo es un objeto no ostensivo porque no se puede manipular, es decir, lo podemos manipular mediante la evocación de ciertos objetos ostensivos como la palabra “logaritmo”.

En el caso de nuestra investigación los objetos ostensivos serán todos aquellos objetos que pueden ser manipulables y ser observados por los sentidos: representaciones verbales, representaciones gráficas y representaciones numéricas; que son las representaciones que utiliza con frecuencia el libro de texto en la actividad matemática para representar a nuestro objeto matemático poliedros. En el caso de las dos primeras representaciones (verbales y gráficas) se observa una igualdad numérica y mientras que la última representación la verbal aparece en menor proporción. Por ejemplo, entre las representaciones verbales podemos mencionar las siguientes palabras: poliedros regulares, área total del prisma, polígonos entre otros.

OML 4: Existencia de tareas y técnicas "inversas".

> Otro indicador de la flexibilidad de las técnicas y, por lo tanto, del grado de completitud de la OML lo proporciona el hecho que existan en la OML *técnicas inversas de* algunas de las técnicas, es decir técnicas (no necesariamente únicas) que permiten realizar las tareas también "inversas", por ejemplo aquellas definidas intercambiando los datos y las incógnitas de la tarea inicial. (p. 182)

Para los fines de nuestra investigación este indicador hará referencia a los siguientes criterios:

- El libro de texto presenta tareas inversas asociadas al objeto matemático poliedros; es decir, tareas con los datos e incógnitas intercambiadas o tareas que parten de la respuesta y analizan la situación de partida.
- El libro de texto presenta técnicas reversibles para resolver tareas inversas asociadas al objeto matemático poliedros.

En nuestra investigación encontramos el siguiente ejemplo de tareas inversas que presentamos a continuación:

$t_{1,3}$: Identificar el tetraedro a partir de su desarrollo plano.

$t_{4.1}$: Dibujar desarrollos planos del tetraedro

Es necesario resaltar que la presencia de estas tareas permite que el estudiante pueda enfrentarse en la resolución de diversos ejercicios y problemas que puedan estar planteados en diversos libros de textos.

OML 5: Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.

> En la medida que una OML sea más completa, se cumplirá que, para cada técnica τ de OML, existirá en OML el tipo de tareas consistente en *interpretar el funcionamiento y el resultado* de aplicar $\boldsymbol{\tau}$ para realizar una tarea o un tipo de tareas de OML. Este aspecto de la completitud implica, de nuevo, que en OML existen los elementos tecnológicos necesarios para llevar a cabo esta tarea de interpretación. De hecho esta "interpretación" deberá hacerse en referencia a la OML en su conjunto, en términos de los componentes de la OML y, especialmente, usando la tecnología que la caracteriza. Cuando la citada interpretación no es una tarea que forma parte de OML (lo que significa que no existen técnicas matemáticas en OML para llevar a cabo dicha tarea), entonces la interpretación en cuestión se deja bajo la responsabilidad exclusiva del estudiante y, naturalmente, acaba desapareciendo del contrato didáctico. (p. 182)

En nuestra investigación este indicador hará referencia al siguiente criterio:

- El libro de texto presenta tipos de tareas que permitan al alumno interpretar el real funcionamiento de una técnica para percibir su beneficio matemático en relación con otras técnicas.

Cabe mencionar que no hemos encontrado un ejemplo de este indicador en la presente investigación

OML 6: Existencia de tareas matemáticas "abiertas"

> Una OM, será más completa en la medida que existan tipos de tareas matemáticas "abiertas", esto es, tipos de tareas matemáticas en la que los datos y las incógnitas no están prefijados completamente de antemano. En un primer nivel las tareas abiertas son aquellas en la que los datos son valores conocidos que se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son objetos matemáticos concretos (como, por ejemplo, valores numéricos) sino las relaciones que se establecen entre ellos en determinadas condiciones explicitadas en el enunciado de la tarea. Existe un segundo nivel de "tareas matemáticas abiertas" en las que el estudiante ha de decidir, ante una situación matemática o extramatemática determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas más pertinentes. En este segundo nivel se incluyen las tareas de *modelización matemática*. (p. 183)

En nuestra investigación este indicador hará referencia a los siguientes criterios:

- El libro de texto presenta tipos de tareas (T_i) en donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente.
- El libro de texto presenta tipos de tareas de modelización matemática asociadas a situaciones matemáticas o extramatemáticas relacionadas al objeto matemático poliedros.

En el libro de texto que hemos analizado encontramos el siguiente ejemplo referente al primer criterio donde los datos no están prefijados:

En el caso de la $t_{7,2}$ los datos para calcular el área total del prisma no están completos, como podemos observar a continuación:

$t_{7,2}$: Calcular el área total del prisma a partir de un dato dado.

Las dimensiones de un prisma rectangular son tres números consecutivos que suman 42. Calculen su área total. (p.171)

En esta tarea el estudiante tiene que buscar qué números podrían cumplir con la condición de ser números consecutivos por lo que los valores que pueden asumir son diversos.

OML 7: Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.

> Cada OML viene caracterizada por una tecnología, **θ,** El grado de completitud de OML dependerá también del grado de integración interna de los elementos tecnológicos (componentes de la **θ**) y de la incidencia efectiva de **θ** sobre la práctica matemática que se lleva acabo con las tareas y las técnicas de OML. En particular un indicador importante del grado de completitud de OML lo constituye la medida en que la **θ** permita construir técnicas nuevas (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas de OML. (p. 183)

En nuestra investigación este indicador hará referencia al siguiente criterio:

- La tecnología presente el libro de texto permite la construcción de técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

Cabe mencionar que en nuestra investigación no hemos encontrado un ejemplo de este indicador.

En esta sección, hemos explicado la metodología a emplear en nuestro trabajo de investigación, los procedimientos metodológicos y los instrumentos que utilizaremos para analizar la organización matemática que presenta el libro de texto seleccionado.

En el siguiente capítulo, trataremos el análisis de la organización matemática que presenta el libro de texto de sexto grado de educación primaria; es decir, las tareas, tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DEL MATERIAL DIDÁCTICO

En este capítulo presentaremos una descripción de la organización matemática que presenta el libro de texto de sexto grado de educación primaria, en el capítulo referente a los poliedros y el análisis respectivo de la organización matemática, del libro de texto seleccionado.

6.1. Descripción del texto

El libro de texto elegido tiene por título "Matemática 6", del sexto grado de educación primaria; este texto fue elaborado por el Ministerio de Educación del Perú y contempla ocho unidades; de los cuales analizaremos la unidad siete que lleva por título: "Exploramos poliedros". A continuación describiremos la estructura que presenta el libro de texto referente a nuestro objeto matemático los poliedros.

UNIDAD 7: "Exploramos poliedros"

Esta unidad se inicia con la presentación de una imagen de motivación en la que se encuentran niños y niñas jugando con poliedros en un salón de clases; en esa imagen arman maquetas de una ciudad, arman poliedros, dibujan poliedros, etc. En base a la imagen se realizan preguntas para recoger saberes previos de los estudiantes como: ¿Qué semejanzas observas entre el prisma de Roxana y la pirámide Juan?, asimismo, se presentan indicadores que se deben lograr en esta unidad como: Identifica elementos en el prisma recto y en el poliedro. También esta unidad presenta cuatro secciones: Exploro mis saberes, construyo mis aprendizajes, refuerzo lo aprendido y evalúo mis aprendizajes.

La primera sección: Exploro mis saberes; está compuesta por la subsección titulada "Conocemos los sólidos geométricos"; que se inicia con un juego de los poliedros que está compuesto por un conjunto de tarjetas que tienen el nombre del poliedro, la figura del poliedro, el desarrollo plano del poliedro y las características del poliedro; también presenta las reglas de juego y la puntuación. Asimismo, presenta dos ejercicios sobre el desarrollo plano del cubo y volumen de poliedros.

La segunda sección: Construyo mis aprendizajes; está compuesta por cinco subsecciones que presentamos a continuación:

-Exploramos poliedros, está subsección presenta la definición de poliedros, la definición de poliedros regulares y las características de los cinco poliedros regulares.

-Construimos modelos de poliedros, esta subsección presenta la definición del tetraedro regular, la técnica para construir un tetraedro, dos ejercicios relacionados a los desarrollos planos del tetraedro regular, definición del octaedro regular, la técnica para construir el octaedro, definición del hexaedro regular, la técnica para construir el hexaedro regular, elementos de los prismas, definición de prismas rectos, clasificación de los prismas rectos, definición de prisma recto de base triangular, definición de prisma recto de base cuadrangular. Del mismo modo, presenta una parte denominada trabajo individual donde se plantean diversos ejercicios relacionados a esta subsección.

-Determinamos el área total de un prisma rectangular, en esta subsección se presenta un ejercicio resuelto sobre el área lateral y total de un prisma, luego aparece una parte denominada trabajo en grupos pequeños donde se plantean cuatro ejercicios sobre el tema.

-Calculamos el área lateral y total de los poliedros, esta subsección presenta la definición del área lateral y total de un prisma, también presenta un ejercicio resuelto sobre el área lateral y total de un prisma y de una pirámide, definición de pirámide base cuadrada, definición de pirámide de base triangular regular, definición del área lateral y total de una pirámide y una parte denominada trabajo en parejas donde se proponen seis ejercicios sobre el tema.

-Medimos volumen, esta subsección presenta la definición de volumen de los poliedros, dos técnicas para hallar el volumen de un prisma rectangular, fórmula para hallar el volumen de un prisma rectangular y una parte denominada trabajo individual donde se proponen ejercicios relacionados al volumen de los prismas

La tercera sección se denomina: Refuerzo lo aprendido, donde se plantean ejercicios sobre el volumen de poliedros, área lateral y total de los prismas. Esta sección termina con la presentación de un mapa conceptual sobre los poliedros.

Finalmente la cuarta sección: Evalúo mis aprendizajes, en esta sección se plantean ejercicios relacionados a los conocimientos de los poliedros para señalar si son verdaderos o falsos, elementos de los poliedros en base a una figura y otros ejercicios relacionados a los poliedros.

6.2. Organización matemática del libro de texto en el capítulo: poliedros

En esta sección describiremos la organización matemática que presenta el libro de texto con referencia a la unidad siete, es así que, el libro de texto analizado presenta en total:

T_i: 10 $t_{i,j}$: 32 $\tau_{i,j,k}$: 5 θ_n: 22 Θ: 1

En este apartado presentaremos los tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías presentes en el libro de texto analizado:

6.2.1. Tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías del libro de texto seleccionado

Según Chevalard (1999) cada tipo de tarea **(T_i)** está formado por un conjunto de tareas, basados en este aspecto consideramos que la organización matemática que presenta el libro de texto que hemos analizado está compuesta por un total de 10 tipos de tareas. Donde definimos los tipos de tareas de la siguiente forma: **(T_i)**: $T_1, T_2, T_3,\ldots, T_{10}.$

Una vez definidos los tipos de tareas **(T_i)** podemos afirmar que las tareas que conforman los tipos de tareas presentes en el libro de texto que hemos analizado son un total de 32 tareas.

En este sentido, presentaremos la organización matemática que hemos identificado en el libro de texto analizado de la siguiente manera:

Primero presentaremos el tipo de tarea **(T_i),** luego la tarea o tareas asociadas al tipo; después el ejercicio o problema planteado en el libro de texto que hemos identificado como tarea, a continuación la técnica que resuelve la tarea; cabe mencionar que en nuestra investigación la técnica está conformada por pasos o un conjunto de pasos.

Luego presentaremos las tecnologías asociadas a las técnicas, entonces denotaremos las tecnologías $\boldsymbol{\theta}$ de las técnicas ($\boldsymbol{\tau}_{i,j,k}$); donde las tecnologías asumirán un número según la cantidad de pasos que tenga la técnica que le corresponde desde ($\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \ldots \boldsymbol{\theta}_n$). Finalmente, mencionaremos la teoría asociada a la tecnología de cada tarea.

Del mismo modo, presentaremos la segunda tarea asociada al tipo de tarea con todos los aspectos antes mencionados y en el caso de no existir más tareas asociadas al primer tipo continuaremos con el segundo tipo de tarea continuando con el mismo procedimiento hasta terminar con los 10 tipos de tareas que hemos identificado en el libro de texto analizado.

Por lo tanto, señalaremos lo siguiente:

T_i: Es el tipo de tarea *i*

$t_{i,j}$: Donde *i* indica el tipo de tarea a la que corresponde la tarea y *j* indica el número de tarea del tipo de tarea *i*.

$\boldsymbol{\tau}_{i,j,k}$: Donde *i* indica el tipo de tarea a la que corresponde a la técnica, *j* indica el número de tarea del tipo de tarea *i* y *k* indica el número de la técnica que le corresponde a la tarea *j*.

Asimismo:

$i \in \{1; 2;3;\ldots;10\}$

$j \in \{1; 2;3;\ldots;9\}$

$k \in \{1;2\}$

θ : Es la tecnología que justifica la técnica.

Θ: Es la teoría que justifica la tecnología.

Tabla 5: Tipos de tareas y tareas

Tipos de tareas (T_i)	**Tareas ($t_{i,j}$)**
T_1	$t_{1,1}$ $t_{1,2}$ $t_{1,3}$
T_2	$t_{2,1}$ $t_{2,2}$ $t_{2,3}$
T_3	$t_{3,1}$ $t_{3,2}$ $t_{3,3}$
T_4	$t_{4,1}$ $t_{4,2}$
T_5	$t_{5,1}$ $t_{5,2}$
T_6	$t_{6,1}$ $t_{6,2}$ $t_{6,3}$ $t_{6,4}$ $t_{6,5}$ $t_{6,6}$ $t_{6,7}$ $t_{6,8}$ $t_{6,9}$
T_7	$t_{7,1}$ $t_{7,2}$ $t_{7,3}$
T_8	$t_{8,1}$ $t_{8,2}$ $t_{8,3}$ $t_{8,4}$ $t_{8,5}$
T_9	$t_{9,1}$
T_{10}	$t_{10,1}$

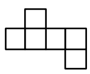
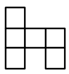
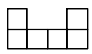
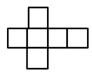
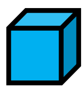
Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012)

Tipo de tarea (T_1): Identificar poliedros a partir de alguno de sus desarrollos planos.

Tarea ($t_{1,1}$): Identificar el cubo a partir de su desarrollo plano

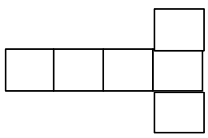
Esta tarea está conformada por dos ejercicios, el primer ejercicio propuesto en la sección: Conocemos los sólidos geométricos que se encuentra en la página 161 del libro de texto analizado y el segundo ejercicio está planteado en la sección: Trabajo en parejas que se encuentra en la página 171 del libro de texto analizado el cual corresponde al problema 1, ejercicio a. A continuación, transcribimos los ejemplos representativos de esta tarea.

Entre las siguientes figuras. ¿Cuáles son plantillas para armar un modelo de cubo?

a)  b)  c)  d)  

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p 161)

Identifiquen el prisma a partir de su desarrollo plano.

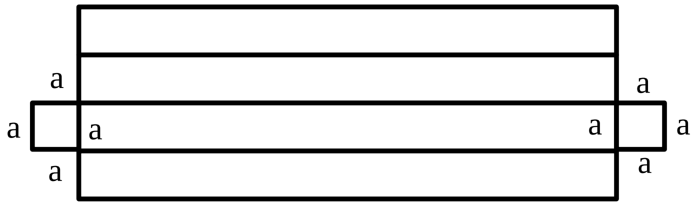


Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.171)

Tarea ($t_{1,2}$): Identificar el prisma a partir de su desarrollo plano.

Esta tarea está conformada por el problema propuesto en la página 171 del libro de texto que corresponde a la sección: Trabajo en parejas; el cual corresponde al problema 1, ejercicio b. En este sentido, presentamos la transcripción del problema propuesto:

Identifiquen el poliedro representado por cada plantilla

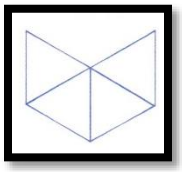


Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.171)

Tarea ($t_{1,3}$): Identificar el tetraedro a partir de su desarrollo plano.

Esta tarea está conformada por el problema de la página 163 del libro de texto que corresponde a la sección: Construimos modelos de poliedros que presenta un solo problema que es el siguiente:

¿Crees que la figura adjunta es el desarrollo de un tetraedro? Explica tu respuesta.



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p 163)

A continuación, presentamos la técnica que corresponde a las tareas presentadas, cabe mencionar que una sola técnica nos permite resolver las tres tareas presentadas.

Técnica **($\tau_{1,1,1}$)**:

1. Dibujar el desarrollo plano del poliedro en un soporte de papel en una escala adecuada.
2. Medir $\frac{1}{2}$ centímetro para las pestañas en todo el contorno del desarrollo plano dibujado en el paso 1.
3. Recortar el contorno del desarrollo plano del poliedro con las pestañas dibujado en el paso 1 y paso 2.
4. Armar el desarrollo plano para construir el modelo correspondiente.
5. Determinar si el modelo armado corresponde a un poliedro.

En nuestra investigación cuando utilizamos el paso Armar nos referimos a los siguientes pasos:

1. Realizar el doblez de las pestañas y aristas del desarrollo plano del poliedro.
2. Discriminar las pestañas de las aristas del desarrollo plano que van a formar el poliedro.

3. Unir las pestañas de las aristas del desarrollo plano del poliedro de dos en dos evitando la superposición de las caras del poliedro.
4. Pegar las pestañas de las aristas del desarrollo plano del poliedro unidas de dos en dos.
5. Cerrar completamente el poliedro sin dejar ninguna cara unida.

Tecnología **(θ)**: **θ_1** Definición de desarrollo plano de poliedros, **θ_2** Definición de poliedros y **θ_3** Elementos de poliedros

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

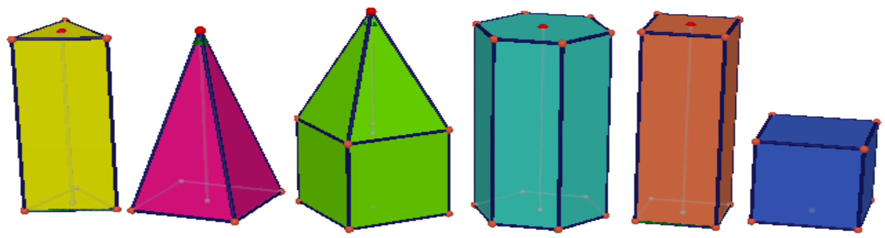
Observación: En nuestra investigación, el término *discriminar*, según la RAE (2015) significa en su primera acepción *seleccionar excluyendo*. Del mismo modo, Perú (2009) señala que discriminar es una capacidad que consiste en encontrar las diferencias esenciales entre dos o más elementos y esto se evidencia cuando el alumno explica de diferencias y elige algo sustancial de un conjunto de elementos.

Tipo de tarea (T_2): Identificar características comunes de cuerpos geométricos y de objetos de su entorno

Este tipo de tarea presenta tres tareas propuestas que están planteadas en la página 162 del libro de texto que corresponde a la sección: Exploramos poliedros. A continuación presentamos los problemas que corresponden a este tipo.

Tarea ($t_{2,1}$): Identificar las características de los cuerpos geométricos

Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
¿En qué se parecen todos ellos?



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Técnica **($\tau_{2,1,1}$):**

1. Observa las características que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos (aristas, caras, vértices).
2. Realiza un listado de las características que tiene cada cuerpo geométrico.
3. Compara el listado del conjunto de características que tiene cada cuerpo geométrico.
4. Identificar la característica común que presentan todos los cuerpos geométricos.

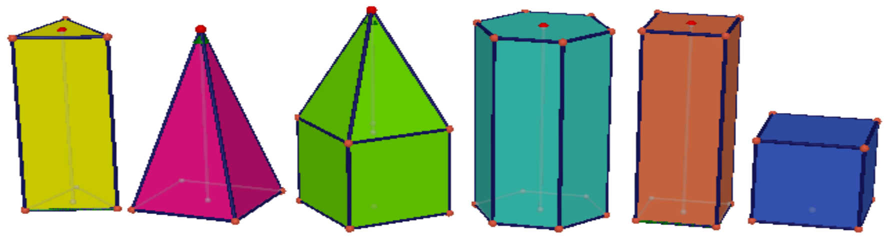
Observación: El último paso de la técnica es el término que se utiliza para nombrar la tarea que presenta el libro de texto.

Tecnología **(θ)**: $\boldsymbol{\theta}_4$ Definición de cuerpo geométrico, $\boldsymbol{\theta}_5$ Elementos de los cuerpos geométricos y $\boldsymbol{\theta}_6$ Características de los cuerpos geométricos.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{2,2}$): Identificar cuerpos geométricos con objetos de su entorno

Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
Piensa en objetos reales a los que se parecen.



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Técnica **($\tau_{2,2,1}$)**:

1. Observa las características que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos (aristas, caras, vértices).
2. Realiza un listado de las características que tiene cada cuerpo geométrico.
3. Compara el listado del conjunto de características que tiene cada cuerpo geométrico.
4. Visualiza objetos reales que comparten la mayor cantidad de características comunes que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos.

Tecnología **(θ)**: $\boldsymbol{\theta}_4$ Definición de cuerpo geométrico, $\boldsymbol{\theta}_5$ Elementos de los cuerpos geométricos y $\boldsymbol{\theta}_6$ Características de los cuerpos geométricos.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Observación: En nuestra investigación el término visualiza tiene la connotación que presenta Gutierrez (1991) quien señala que la percepción visual es un elemento importante en las actividades de la vida y es conocida con diversos nombres como percepción espacial, imaginación espacial o visualización. Sin embargo, en Didáctica de las Matemáticas, cuando nos centramos en el estudio de la geometría tridimensional, se emplea los términos equivalente de *visualización* o *visualización espacial*. Es así que, el autor señala que en la visualización como el elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las imágenes mentales, es decir, las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc., en el contexto de las matemáticas encontramos cinco tipos de imágenes mentales que son:

Imágenes concretas pictóricas: Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.

Imágenes de fórmulas: Es la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería, por ejemplo, en el libro de texto.

Imágenes de patrones: Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación de su significado.

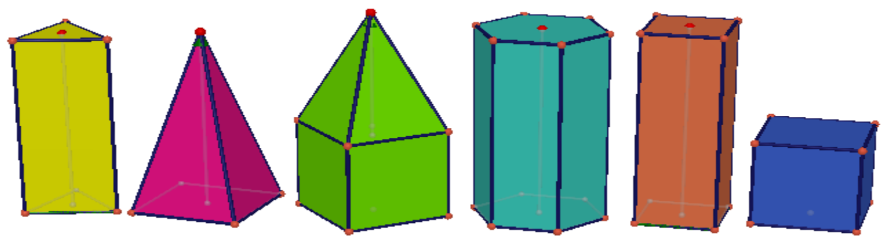
Imágenes cinéticas: Son imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de las manos, cabeza, etc.

Imágenes dinámicas: Son imágenes en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Según el autor una determinada imagen puede ser de dos tipos diferentes pues, su clasificación como cinética o dinámica es independiente de su clasificación como pictórica, fórmula o patrón.

Tarea ($t_{2,3}$): Identificar figuras que componen los cuerpos geométricos

Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
¿Por qué figuras están compuestas sus caras?



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Técnica **($\tau_{2,3,1}$)**:

1. Observa las características que presentan las representaciones de los cuerpos geométricos (aristas, caras, vértices).
2. Discrimina las caras que componen los cuerpos geométricos.
3. Nombra las figuras que componen las caras de los cuerpos geométricos.

Observación: En el caso de las técnicas de nuestra investigación utilizaremos como uno de los pasos la observación y obviaremos el paso de mirar; puesto que, los estudiantes cuando realizan el proceso de mirar solo dirigen la vista hacia un objeto por lo que no se considera como un paso importante en la técnica; a pesar que la Real Academia de la Lengua Española hace una diferencia entre estos términos; señalando que mirar en su primera acepción se refiere a: Dirigir la vista a un objeto, mientras que observar en su primera acepción significa: Examinar atentamente y en su cuarta acepción significa: Mirar con atención. Por ello, consideramos que la acción de mirar está incluida en la acción de observar.

Tecnología (**θ**): θ_4 Definición de cuerpo geométrico, θ_5 Elementos de los cuerpos geométricos, θ_6 Características de los cuerpos geométricos y θ_7 Definición de figuras.

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tipo de tarea (T_3): Identificar características de los poliedros

Este tipo de tarea está conformada por tres tareas, de la cuales las dos primeras ($t_{3,1}$ y $t_{3,2}$) están conformadas por 1 solo problema planteados en la página 162 del libro de texto que corresponde a la sección: Exploramos poliedros, en la subsección: Poliedros regulares. A continuación, presentamos la transcripción de los problemas propuestos en el libro de texto analizado:

Tarea ($t_{3,1}$): Identificar las características de los poliedros regulares

¿Cuáles son las características de los poliedros regulares?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Técnica (**$\tau_{3,1,1}$**):

1. Observa las características que presentan las representaciones de los poliedros regulares (aristas, caras, vértices).
2. Realiza un listado de las características que tiene cada poliedro regular.
3. Menciona las características que tiene cada poliedro regular.

Comentario: Las características de los poliedros están presentes en el libro de texto en la página 162 y estas características se relacionan con el número de caras, forma de las caras y la cantidad de caras que concurren en un vértice.

Tecnología (**θ**): θ_8 Definición de poliedros regulares, θ_9 Características de poliedros regulares y θ_{10} Elementos de poliedros regulares.

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{3,2}$): Menciona la cantidad de poliedros regulares que existen

¿Cuántos existen? (poliedros regulares)

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Técnica **($\tau_{3,2,1}$)**:

1. Observa las representaciones gráficas de los poliedros regulares.
2. Cuenta las representaciones de poliedros regulares que observó en el paso 1.
3. Menciona la cantidad de poliedros regulares que ha contado.

Comentario: El libro de texto no menciona que las representaciones de los cinco poliedros regulares que se muestran en la página 162 sean todos lo poliedros regulares que existen.

Observación: Consideramos que la tarea **$t_{3,2}$** debería ser propuesta de la siguiente manera:

Investiga cuántos poliedros regulares existen.

¿Cuántos son los poliedros regulares?

Tecnología **(θ)**: **θ_9** Definición de poliedros regulares.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{3,3}$): Identificar los polígonos que conforman un prisma

Esta tarea está conformada por 1 solo problema planteado en la página 166 del libro de texto que corresponde a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Elementos de los poliedros. A continuación, presentamos el problema propuesto en el libro de texto:

¿Qué polígono siempre es parte de un prisma? Explica tu respuesta

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.166)

Técnica **($\tau_{3,3,1}$)**:

1. Observa las características que presentan las representaciones de los prismas (aristas, caras, vértices).
2. Discrimina las caras que componen a cada uno de los prismas.
3. Nombra el polígono que siempre forma parte de un prisma. (se repite cada prisma)
4. Explica por qué cierto polígono forma parte de un prisma basado en la definición de la página 166 de los prismas.

Tecnología **(θ)**: **θ_{11}** Definición de prismas, **θ_{12}** Características de prismas, **θ_{13}** Elementos de los prismas, **θ_{14}** Definición de polígonos **y θ_{15}** Clasificación de polígonos.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tipo de tarea (T_4): Dibujar desarrollos planos de los poliedros

Tarea ($t_{4,1}$): Dibujar desarrollos planos del tetraedro

Conforma esta tarea el problema propuesto en la página 163 del libro de texto correspondiente a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Tetraedro regular. En este sentido, presentamos el problema propuesto que es el siguiente:

Intenta dibujar otros dos desarrollos diferentes del tetraedro.

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.163)

Técnica ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{4,1,1}}$):

1. Cortar por las pestañas los modelos de los tetraedros construidos.
2. Extender el desarrollo plano del tetraedro entregado.
3. Recortar cada uno de los triángulos equiláteros que conforman el desarrollo plano del tetraedro.
4. Pegar el material velcro adhesivo en los bordes de los triángulos equiláteros que conforman el desarrollo plano del tetraedro.
5. Ubicar los triángulos equiláteros de distinta forma para formar diferentes desarrollos planos del tetraedro.
6. Armar el desarrollo plano para construir el modelo correspondiente.
7. Dibujar los diferentes desarrollos planos del tetraedro formados en el paso 5.

Tecnología (**θ**): $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{16}}$ Definición del tetraedro regular, $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{17}}$ Elementos del tetraedro regular, $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{18}}$ Desarrollo plano del tetraedro regular y $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{19}}$ Definición de triángulo equilátero.

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{4,2}$): Dibujar desarrollos planos de poliedros con 6 triángulos

Esta tarea está conformada por el problema propuesto en la página 164 del libro de texto correspondiente a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Octaedro regular que corresponde a la parte de trabajo individual. En este sentido, presentamos el siguiente problema propuesto en el libro de texto:

Intenta elaborar plantillas para construir poliedros con 6 triángulos. Utiliza el mismo método para todos.

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.164)

Técnica ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{4,2,1}}$):

1. Cortar por las pestañas los modelos de los poliedros construidos con seis triángulos.
2. Extender el desarrollo plano de los poliedros construidos con seis triángulos.
3. Recortar cada uno de los triángulos que conforman el desarrollo plano de los poliedros construidos con seis triángulos.

4. Pegar el material velcro adhesivo en los bordes de los triángulos que conforman el desarrollo plano de los poliedros construidos con seis triángulos.
5. Ubicar los triángulos de distinta forma para formar diferentes desarrollos planos de los poliedros construidos con seis triángulos.
6. Armar el desarrollo plano para construir el modelo correspondiente.
7. Dibujar los diferentes desarrollos planos de los poliedros construidos con seis triángulos formados en el paso 5.

Comentario: Consideramos que en las tareas $t_{4,1}$ y $t_{4,2}$ debe modificarse la palabra intenta por investigar; porque según las RAE (2015) la palabra intenta proviene del verbo intentar que deriva de la palabra latín *intentare*, que significa "dirigir hacia" y tiene tres acepciones; siendo la primera: Tener ánimo de hacer algo, la segunda acepción, iniciar la ejecución de algo y la última acepción, procurar o pretender. En este sentido, consideramos que está palabra deja a libre disposición del estudiante de ejecutar la tarea o quizás de resolverla. Mientras que la palabra investigar según la RAE (2015) en su tercera acepción señala que esta palabra significa: Realizar actividades intelectuales y experimentales de modo sistemático con el propósito de aumentar los conocimientos sobre una determinada materia. E así que, está palabra si generaría la responsabilidad del estudiante por resolver la tarea planteada en el libro de texto.

Observación: Cabe resaltar que el libro de texto solo presenta un modelo del desarrollo plano del tetraedro. Sin embargo, consideramos que utilizar el software Cabri 3D u otro software de Geometría 3D sería beneficioso para obtener desarrollos planos de los poliedros; porque en el caso del Cabri 3D, éste ofrece diversas herramientas como la opción: Abrir poliedro; la cual permite observar el desarrollo plano de los poliedros.

Tecnología **(θ)**: $\boldsymbol{\theta}_{1}$ Desarrollo plano de poliedros, $\boldsymbol{\theta}_{2}$ Definición de poliedro, $\boldsymbol{\theta}_{3}$ Elementos de los poliedros y $\boldsymbol{\theta}_{20}$ Definición de triángulo.

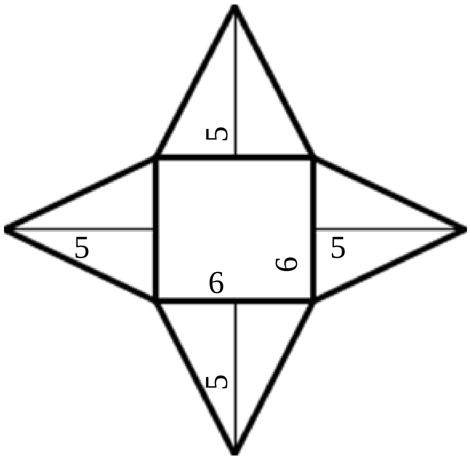
Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tipo de tarea T_5: Construir poliedros a partir de sus desarrollos planos

Tarea ($t_{5,1}$): Construir una pirámide cuadrangular partiendo de su desarrollo plano

Esta tarea está conformada por un problema de la página 171 del libro de texto; que corresponde a la sección: Calculamos el área lateral y total de los poliedros, en la subsección: Área lateral y total de una pirámide. Es así que, presentamos la transcripción del problema correspondiente.

Considera como ejemplo una pirámide cuadrangular cuyas medidas están dadas:
Dibuja esta plantilla y construye con ella una pirámide. No te olvides de agregar las pestañas para que este sólido quede bien armado.



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.171)

Técnica **($\tau_{5,1,1}$)**:

1. Dibujar el desarrollo plano de la página 171 de la pirámide cuadrangular teniendo en cuenta las medidas dadas en un soporte de papel.
2. Recortar el contorno del desarrollo plano de la pirámide cuadrangular.
3. Armar el desarrollo plano para construir la pirámide cuadrangular.

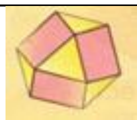
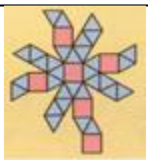
Tecnología **(θ)**: **θ_{21}** Definición de pirámide cuadrangular, **θ_{22}** Elementos de la pirámide cuadrangular y **θ_{23}** Desarrollo plano de la pirámide cuadrangular

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{5,2}$): Construir poliedros a partir de sus desarrollos planos en base a una figura modelo

Esta tarea corresponde a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Construimos poliedros con cuadrados y triángulos que se encuentra en la página 165 del libro y está constituida por 1 problema. A continuación, presentamos el problema que presenta el libro de texto.

❖ Intenta construir los poliedros cuyo desarrollo se muestra continuación.

PLANTILLAS	CARAS	POLIEDROS
	6 cuadrados 8 triángulos equiláteros	
	6 cuadrados 32 triángulos equiláteros	

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.165)

Técnica $(\tau_{5,2,1})$:

1. Dibujar los desarrollos planos de los poliedros de la página 165 en un soporte de papel en una escala adecuada.
2. Determinar la misma medida del lado de los cuadrados y triángulos del modelo dado.
3. Medir $\frac{1}{2}$ cm para las pestañas en todo el contorno del desarrollo plano de los poliedros dibujados en el paso 1.
4. Recortar el contorno del desarrollo plano de los poliedros con las pestañas dibujado en el paso 1 y 2.
5. Armar los desarrollos planos de los poliedros para construir el modelo correspondiente.

Tecnología **(θ)**: θ_1 Desarrollo plano de poliedros, θ_2 Definición de poliedro, θ_3 Elementos de los poliedros, θ_{24} Definición de cuadrado y θ_{20} Definición de triángulo.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tipo de tarea T_6: Identificar elementos de los poliedros

Tarea ($t_{6,1}$): Identificar el número de vértices y aristas en el icosaedro

Esta tarea está constituida por 1 problema correspondiente a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Trabajo individual, que se encuentra en la página 164 del libro. En este sentido, presentamos el problema que presenta el libro de texto.

¿Cuántos vértices tiene el icosaedro?

¿Cuántas aristas tiene el icosaedro?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.164)

Técnica **($\tau_{6,1,1}$):**

1. Observa la representación gráfica del icosaedro.
2. Menciona que el icosaedro tiene 20 caras.
3. Menciona la forma que tiene su cara (triángulo equilátero).
4. Menciona que en cada vértice concurren 5 caras.
5. Multiplica la cantidad de caras por la cantidad de los lados que tiene el triángulo equilátero. (20 x 3 = 60)
6. Divide la cantidad total entre 5 por el número de caras que concurren en un vértice. (60: 5 = 12).
7. Menciona la cantidad de vértices que tiene el icosaedro.
8. Discrimina la cantidad de aristas que concurren en un vértice.
9. Multiplica la cantidad de vértices por la cantidad de aristas que concurren en un solo vértice. (12 x 5 = 60)
10. Divide la cantidad total entre 2 porque las aristas se repiten de dos en dos. (60 : 2 = 30)
11. Menciona la cantidad de aristas que tiene el icosaedro.

Comentario: En el caso de la tarea $\boldsymbol{t}_{\mathbf{6,1}}$ el libro de texto analizado no presenta una técnica para esta tarea por lo que la técnica creada para esta tarea está basada en la definición que presenta el texto en la página 162. Sin embargo, cabe señalar que en este caso habría otras técnicas que no están propuestas en el libro de texto que podrían ser: dibujar el desarrollo plano del icosaedro o aplicando el Teorema de Euler.

Tecnología **(θ)**: $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{25}}$ Definición de icosaedro, $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{26}}$ Elementos del icosaedro y $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{19}}$ Definición de triángulo equilátero

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{6,2}$): Identificar el número de vértices que tiene los poliedros de 14 caras.

Esta tarea corresponde a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Trabajo individual que se encuentra en la página 167 del libro y está constituida por 1 problema. En este sentido, presentamos el problema propuesto en el libro de texto.

> Un poliedro de 14 caras tiene 6 caras cuadrangulares y 8 hexagonales. ¿Cuántos vértices tiene?
>
> **Fuente:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.167)

Técnica (**$\tau_{6,2,1}$**):

1. Observa las características que presenta el modelo construido del poliedro de 14 caras (6 caras cuadrangulares y 8 caras hexagonales).
2. Cuenta la cantidad de vértices que tiene el poliedro de 14 caras (6 caras cuadrangulares y 8 caras hexagonales).
3. Menciona la cantidad de vértices que tiene el poliedro de 14 caras (6 caras cuadrangulares y 8 caras hexagonales).

Tecnología (**θ**): **θ_1** Desarrollo plano de poliedros, **θ_2** Definición de poliedro y **θ_3** Elementos de los poliedros.

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{6,3}$): Identificar elementos en una pirámide pentagonal

La presente tarea está conformada por un problema de la página 174 del libro de texto; que corresponde a la sección: Calculamos el área lateral y total de los poliedros, en la subsección: Área lateral y total de una pirámide. Es así que, presentamos la transcripción del problema correspondiente.

> Si la base de una pirámide es un pentágono regular, ¿Cuántas caras tendría esa pirámide? ¿Sus caras laterales también serían triángulos?
>
> **Fuente:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.170)

Técnica (**$\tau_{6,3,1}$**):

1. Observa las características que presenta el modelo construido de una pirámide pentagonal.
2. Discrimina la forma que tienen las caras de la pirámide pentagonal.
3. Menciona la forma que tienen las caras laterales de la pirámide pentagonal.
4. Cuenta la cantidad de caras que tiene la pirámide pentagonal.

Tecnología (**θ**): **θ_{27}** Definición de pirámide pentagonal y **θ_{28}** Elementos de la pirámide pentagonal.

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tarea (t 6,4): Describir los poliedros teniendo en cuenta sus elementos

Con respecto a esta tarea cabe mencionar que está constituida por 1 problema correspondiente a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Trabajo individual, la cual se encuentra en la página 164 del libro. Por ello, presentamos el problema que está propuesto en el libro de texto.

Observa atentamente todos los poliedros que construiste y escribe en tu cuaderno una breve descripción de cada uno. Su nombre, cómo son sus caras, el número de caras, vértices y aristas. No olvides ilustrarlos de modo que se aprecien sus características.

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.164)

Observación: Cabe resaltar que todos los poliedros mostrados en el libro de texto son: Tetraedro regular, octaedro regular, hexaedro regular (cubo), prisma recto de base triangular, prisma recto de base cuadrangular, prisma recto de base hexagonal, pirámide de base triangular y pirámide de base cuadrada.

Técnica ($\boldsymbol{\tau}_{6,4,1}$):

1. Observa las características que presentan los poliedros construidos.
2. Realiza un listado de los elementos que presentan los poliedros construidos. (caras, vértices y aristas)
3. Dibuja las representaciones de los poliedros construidos.
4. Escribe el nombre de cada uno de los poliedros construidos.
5. Discrimina la forma que tienen las caras de cada uno de los poliedros construidos.
6. Escribe que forma tienen las caras de cada uno de los poliedros construidos.
7. Cuenta la cantidad de caras que tiene cada uno de los poliedros construidos.
8. Escribe la cantidad de caras que tiene cada uno de los poliedros construidos.
9. Cuenta la cantidad de vértices que tiene cada uno de los poliedros construidos.
10. Escribe la cantidad de vértices que tiene cada uno de los poliedros construidos.
11. Cuenta la cantidad de aristas que tiene cada uno de los poliedros construidos.
12. Escribe la cantidad de aristas que tiene cada uno de los poliedros construidos

Tecnología (**θ**): $\boldsymbol{\theta}_2$ Definición de poliedro y $\boldsymbol{\theta}_3$ Elementos de los poliedros

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{6,5}$): Completar en una tabla el número de elementos de los poliedros.

Esta tarea está conformada por 1 problema correspondiente a la sección: Construimos modelos de poliedros, en la subsección: Trabajo individual segunda parte, la cual se encuentra en la página 167 del libro. Es así que, presentamos el problema que propone el libro de texto.

Elabora una tabla como esta y complétala observando los poliedros que has elaborado.

Poliedro	**N° de vértices**	**N° de caras**	**N° de aristas**
Cubo	8	6	12
Tetraedro			
Prisma de base rectangular			
Prisma de base pentagonal			
………………..			
Pirámide base triangular			
………………..			

¿Qué observas? ¿Encuentras alguna relación entre el número de caras, el número de vértices y el número de aristas? Inténtalo con varios poliedros. ¿Te parece interesante?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.167)

Técnica (**$\tau_{6,5,1}$**):

1. Observa las características que presentan los poliedros construidos.
2. Realiza un listado de los elementos que presentan los poliedros construidos. (caras, vértices y aristas)
3. Escribe el nombre de cada uno de los poliedros construidos.
4. Cuenta la cantidad de vértices que tiene cada uno de los poliedros construidos.
5. Escribe la cantidad de vértices que tiene cada uno de los poliedros construidos.
6. Cuenta la cantidad de caras que tiene cada uno de los poliedros construidos.
7. Escribe la cantidad de caras que tiene cada uno de los poliedros construidos.
8. Cuenta la cantidad de aristas que tiene cada uno de los poliedros construidos.
9. Escribe la cantidad de aristas que tiene cada uno de los poliedros construidos.
10. Aplica el Teorema de Euler para relacionar el número de vértices, el número de caras y el número de aristas con cada uno de los poliedros construidos.

Observación: Las únicas tareas que el libro de texto presenta para utilizar el Teorema de Euler son: $t_{6,1}$, $t_{6,2}$ y $t_{6,6}$. En el caso de la tarea $t_{6,1}$, puede resolverse con la técnica **$\tau_{6,1,1}$** sin utilizar el Teorema de Euler, pero en el caso de la $t_{6,2}$ presenta una variedad de poliedros en las que piden encontrar el número de aristas, caras y vértices y encontrar la relación entre las mismas; por lo que consideramos que la aplicación del Teorema de Euler podría facilitar la resolución de esta tarea. Asimismo, en la tarea $t_{6,6}$ que presentamos líneas abajo la aplicación del Teorema de Euler permitirá al estudiante verificar los vértices, caras y aristas que tienen los poliedros para responder los enunciados planteados en esa tarea. Sin embargo, cabe mencionar que el libro de texto no presenta el Teorema de Euler para relacionar el número de vértices, el número de caras y el número de aristas.

Tecnología **(θ)**: $\boldsymbol{\theta_2}$ Definición de poliedro, $\boldsymbol{\theta_3}$ Elementos de los poliedros, $\boldsymbol{\theta_{29}}$ Características de los poliedros y $\boldsymbol{\theta_{30}}$ Teorema de Euler.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{6,6}$): Responde con V o F las afirmaciones relacionadas a los elementos de los poliedros.

La presente tarea está constituida por 7 problemas relacionados a contestar si cada uno de ellos es verdadero o falso; estos problemas corresponden a la sección: Refuerzo lo aprendido, en la subsección: Evalúo mis aprendizajes, la cual se encuentra en la página 177 del libro. En este sentido, presentamos la transcripción de los problemas que presenta el libro de texto.

> Explica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.
>
> -En un poliedro, el número de aristas que concurren en un mismo vértice son, como mínimo, 4.
>
> -Existen poliedros con tres caras.
>
> -Las caras de un poliedro son todas iguales.
>
> -En cada vértice de un poliedro, concurren siempre el mismo número de aristas.
>
> -Las caras de un poliedro han de ser forzosamente polígonos.
>
> -Todos los poliedros de cinco caras tienen 8 aristas y 5 vértices.
>
> -El número mínimo de caras que concurren en un vértice es 3.
>
> **Fuente:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica **($\boldsymbol{\tau_{6,6,1}}$)**:

1. Observan las representaciones gráficas de la página 162 del libro de texto.
2. Leen la información teórica que se presenta la página 162 del libro de texto.
3. Leen cada uno de los enunciados propuestos.
4. Aplican el Teorema de Euler (C + V – A =2)
5. Responden si son verdaderas o falsas cada uno de los enunciados propuestos.

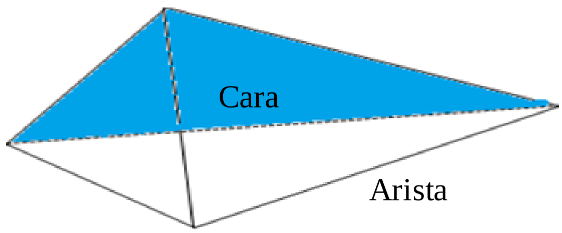
Tecnología **(θ)**: $\boldsymbol{\theta_2}$ Definición de poliedro y $\boldsymbol{\theta_3}$ Elementos de los poliedros,

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{6,7}$): Explica los elementos de un poliedro en función a un gráfico.

Esta tarea está constituida por 3 problemas correspondientes a la sección: Refuerzo lo aprendido, en la subsección: Evalúo mis aprendizajes, la cual se encuentra en la página 177 del libro. Por ello, presentamos la transcripción de los problemas que presenta el libro de texto.

En la siguiente figura, está dibujado un poliedro. En él se indican algunos de sus elementos característicos.



a) ¿Cómo definirías cada uno de estos elementos?
b) ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene este poliedro?
c) ¿Cuántas caras se juntarán en un vértice como mínimo?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica **($\tau_{6,7,1}$)**:

1. Observa las características de la representación gráfica del poliedro dibujado en la página 177. (caras, vértices y aristas)
2. Menciona cada uno de los elementos que tiene la representación gráfica del poliedro dibujado en la página 177.
3. Define cada uno de los elementos que tiene la representación gráfica del poliedro dibujado en la página 177.
4. Cuenta el número de caras, número de vértices y número de aristas.
5. Menciona la cantidad del número de caras, número de vértices y número de aristas.
6. Cuenta la cantidad de caras que coinciden en un vértice.
7. Menciona la cantidad de caras que coinciden en un vértice.

Tecnología **(θ)**: $\boldsymbol{\theta}_{14}$ Definición de polígonos, $\boldsymbol{\theta}_{15}$ Clasificación de polígonos, $\boldsymbol{\theta}_{2}$ Definición de poliedro, $\boldsymbol{\theta}_{3}$ Elementos de los poliedros, $\boldsymbol{\theta}_{29}$ Características de los poliedros.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{6,8}$): Identifica las caras de un cubo

Esta tarea está constituida por 1 problema correspondiente a la sección: Refuerzo lo aprendido, en la subsección: Evalúo mis aprendizajes, la cual se encuentra en la página 177 del libro. Es así que, presentamos la transcripción de los problemas que presenta el libro de texto.

¿Qué forma tiene cada una de las caras de un cubo?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica **($\tau_{6,8,1}$)**:

1. Observa las características de la representación gráfica del cubo (caras, vértices y aristas)
2. Discrimina las caras que conforman el cubo.
3. Menciona la forma que tienen las caras que conforman el cubo.

Tecnología **(θ)**: θ_{30} Definición de cubo, θ_{31} Elementos del cubo, θ_{14} Definición de polígonos y θ_{15} Clasificación de polígonos.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{6,9}$): Identifica las caras de un prisma rectangular

Esta tarea está constituida por 1 problema correspondiente a la sección: Refuerzo lo aprendido, en la subsección: Evalúo mis aprendizajes, la cual se encuentra en la página 177 del libro. A continuación, presentamos la transcripción de los problemas que presenta el libro de texto.

¿Cuántas caras tiene un prisma rectangular?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica **($\tau_{6,9,1}$)**:

1. Observa las características de la representación gráfica del prisma rectangular (caras, vértices y aristas).
2. Discrimina las caras que conforman el prisma rectangular.
3. Cuenta la cantidad de caras que conforman el prisma rectangular.
4. Menciona la cantidad de caras que conforman el prisma rectangular.

Tecnología **(θ)**: θ_{32} Definición de prisma rectangular, θ_{33} Elementos del prisma rectangular, θ_{14} Definición de polígonos y θ_{15} Clasificación de polígonos.

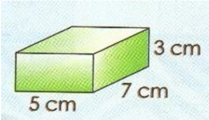
Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tipo de tarea (T_7): Calcular el área total de los poliedros

Tarea ($t_{7,1}$): Calcular el área total de los prismas a partir de dimensiones dadas.

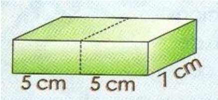
Esta tarea está constituida por 4 problemas que corresponden a la sección: Determinamos el área total de un prisma rectangular, en la subsección: Trabajo en grupos pequeños; que se encuentra en la página 168 del libro. Por ello, presentamos la transcripción de los problemas que presenta el libro de texto.

1.- Calculen el área total de este prisma rectangular, sin dibujar la plantilla.

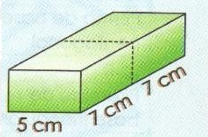


2.- Dos prismas rectangulares como el del ejercicio anterior son pegados de tal modo que formen un solo prisma.

a) Calculen el área total del prisma, cuando tiene esta forma.



b) Calculen el área total del prisma cuando tiene esta forma:



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.168)

Calculen el área total de un prisma rectangular cuyas dimensiones son 2 cm, 3 cm y 6 cm.

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.168)

Técnica **($\tau_{7,1,1}$)**:

1. Observa la representación gráfica del prisma rectangular.
2. Calcula el área lateral del prisma rectangular mostrado en la representación gráfica. (suma el área de todas sus caras laterales)
3. Calcula el área de la base del prisma rectangular mostrado en la representación gráfica.
4. Calcula el área total del prisma rectangular mostrado en la representación gráfica; aplicando la siguiente fórmula:

ÁREA TOTAL = Área lateral + Área de la base

5. Reemplaza los valores del área lateral y el área de la base hallados en el paso 1 y 2.
6. Escribe el área total del prisma rectangular.

Tecnología (**θ**): **θ** $_{32}$ Definición de prisma rectangular, **θ** $_{33}$ Elementos del prisma rectangular, **θ** $_{34}$ Área lateral de los prismas, **θ** $_{35}$ Definición del rectángulo, **θ** $_{36}$ Área del rectángulo y **θ** $_{37}$ Área total del prisma (fórmula)

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{7,2}$): Calcular el área total del prisma a partir de un dato dado.

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Calculamos el área lateral y total de poliedros, en la subsección: Trabajo en parejas; que se encuentra en la página 171 del libro. En este sentido, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

> Las dimensiones de un prisma rectangular son tres números consecutivos que suman 42. Calculen su área total.
>
> **Fuente:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.171)

Técnica (**$\tau_{7,2,1}$**):

1. Dibujar un prisma rectangular.
2. Asignar valores a las dimensiones del prisma rectangular (largo, ancho y altura) dibujado en el paso 1 que sean números consecutivos.
3. Elegir valores que sean números consecutivos y que cumplan con la condición de que sus valores sumen 42.
4. Escribimos los números consecutivos (13,14 y 15) en las dimensiones del prisma rectangular (largo, ancho y fondo) dibujado en el paso 1.
5. Observa la representación gráfica del prisma rectangular con las dimensiones propuestas.
6. Calcula el área lateral del prisma rectangular mostrado en la representación gráfica. (suma el área de todas sus caras laterales)
7. Calcula el área de la base del prisma rectangular mostrado en la representación gráfica.
8. Calcula el área total del prisma rectangular mostrado en la representación gráfica; aplicando la siguiente fórmula:

   ÁREA TOTAL = Área lateral + Área de la base
9. Reemplaza los valores del área lateral y el área de la base hallados en el paso 1 y 2.
10. Escribe el área total del prisma rectangular.

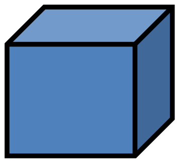
Tecnología (**θ**): **θ** $_{32}$ Definición de prisma rectangular, **θ** $_{33}$ Elementos del prisma rectangular, **θ** $_{38}$ Dimensiones del prisma rectangular (largo, ancho y altura), **θ** $_{39}$ Definición de números consecutivos, **θ** $_{34}$ Área lateral de los prismas, **θ** $_{35}$ Definición del rectángulo, **θ** $_{36}$ Área del rectángulo y **θ** $_{37}$ Área total del prisma (fórmula)

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{7,3}$): Calcular la relación entre el área total de dos prismas.

La presente tarea está conformada por 1 problema que corresponde a la sección: Calculamos el área lateral y total de poliedros, en la subsección: Trabajo en parejas; que se encuentra en la página 171 del libro. En este sentido, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

Relacionen las áreas:



a) Calculen el área total de un cubo de 1cm de arista.
b) Calculen el área total de un cubo de 2 cm de arista.
c) ¿El área total de un cubo de 2 cm de arista es dos veces el área total de un cubo de 1 cm de arista? Si no lo es, ¿Cuántas veces es?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p 171)

¿Cuál tiene la mayor área total, un cubo de arista de 8 m o un prisma rectangular, cuyas dimensiones son 6 m de longitud 5 m de largo y 12 m de alto?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.176)

Técnica (**τ** $_{7,3,1}$):

1. Observa la representación gráfica de los cubos.
2. Calcula el área lateral de los cubos de 2 cm y 1 cm de arista. (suma el área de todas sus caras laterales)
3. Calcula el área de la base de los cubos de 2 cm y 1 cm de arista
4. Calcula el área total de los cubos de 2 cm y 1 cm de arista; aplicando la siguiente fórmula:

   ÁREA TOTAL = Área lateral + Área de la base

5. Reemplaza los valores del área lateral y el área de la base hallados en el paso 2 y 3.
6. Escribe el área total de los cubos de 2 cm y 1 cm de arista.
7. Dividimos el área total del cubo de 2 cm de arista entre el área total del cubo de 1 cm de arista.
8. Menciona cual es la relación que presentan las áreas totales de los dos cubos.

Tecnología (**θ**): **θ** $_{30}$ Definición de cubo, **θ** $_{31}$ Elementos del cubo, **θ** $_{40}$ Área lateral del cubo, **θ** $_{24}$ Definición de cuadrado, **θ** $_{41}$ Área del cuadrado, **θ** $_{42}$ Área total del cubo (fórmula) y **θ** $_{43}$ Relación entre áreas.

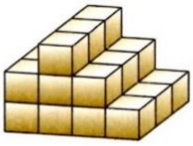
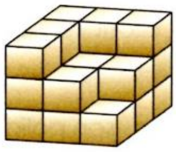
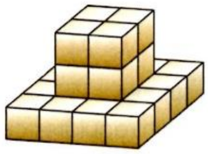
Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Tipo de tarea (T_8): Calcular el volumen de los poliedros

Tarea ($t_{8,1}$): Calcular el volumen de poliedros teniendo como unidad un cubo de u unidades

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Conocemos los sólidos geométricos; que se encuentra en la página 161 del libro. Es así que, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

Considerando el cubo **u** como unidad de volumen, calcula los volúmenes de los siguientes sólidos.  u

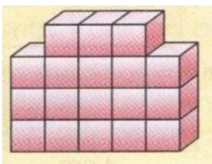
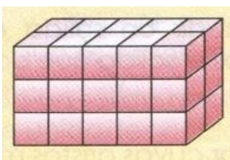
a)  b)  c) 

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p 161)

Tarea ($t_{8,2}$): Calcular el volumen de poliedros teniendo como unidad un cubo

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Medimos volumen, en la subsección: Trabajo individual; que se encuentra en la página 174 del libro. En este sentido, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

Con cubos iguales realizamos las siguientes construcciones:

a)  b) 

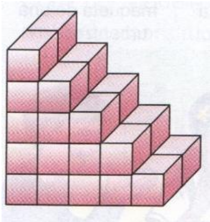
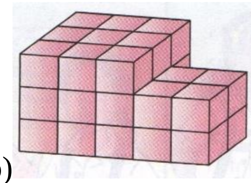
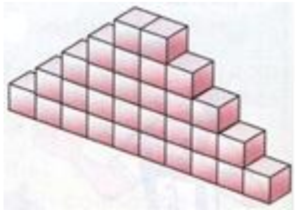
¿Cuál es el volumen de cada construcción?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.174)

Tarea ($t_{8,3}$): Calcular el volumen de poliedros teniendo como unidad un cubo de 1 cm de arista

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Refuerzo lo aprendido, que se encuentra en la página 176 del libro. A continuación, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

Calculamos el volumen:
Con cubos de 1 cm de arista, se construyeron las siguientes figuras. Determina el volumen de cada una de ellas.

a)  b)  c) 

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.176)

Técnica **($\tau_{8,1,1}$)**:

1. Se cuenta el número de cubos de una capa.
2. Enseguida, se suma el número de cubos que tiene cada capa.
3. Menciona el volumen del poliedro.

Técnica **($\tau_{8,1,2}$)**:

1. Se cuenta el número de cubos de una capa.
2. Enseguida, se multiplica por el número de capas.
3. Menciona el volumen del poliedro.

Tecnología **(θ)**: **θ_{30}** Definición de cubo, **θ_{44}** Definición de volumen de los poliedros y **θ_{45}** Fórmula del volumen de los poliedros

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{8,4}$): Calcular el volumen de un cubo con 20 cubos

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Medimos volumen, en la subsección: Trabajo individual; que se encuentra en la página 174 del libro. En este sentido, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

> Si tuvieras 20 cubitos, todos iguales. ¿Cuántos usarías para construir el mayor cubo posible? ¿Sobrarían cubitos? ¿Cuántos?
>
> **Fuente:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.174)

Técnica **($\tau_{8,4,1}$)**:

1. Dibuja 20 cubos de igual medida.
2. Coloca los cubos en el largo, ancho y altura para formar el mayor cubo posible.
3. Utiliza la fórmula de volumen:

V = medida del largo x medida del ancho x medida de la altura

4. Reemplaza la cantidad de cubos que contiene el largo, ancho y altura
5. Menciona el volumen que tiene el cubo formado en función a la cantidad de cubos.
6. Menciona si sobran cubos o no sobran.
7. Menciona la cantidad de cubos que sobran.

Tecnología **(θ)**: **θ $_{30}$** Definición de cubo, **θ $_{46}$** Dimensiones del cubo (largo, ancho y altura), **θ $_{44}$** Definición de volumen de los poliedros y **θ $_{45}$** Fórmula del volumen de los poliedros.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tarea ($t_{8,5}$): Calcular el volumen de los prismas teniendo en cuenta como unidad una caja de fósforos.

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Medimos volumen, en la subsección: Trabajo individual; que se encuentra en la página 174 del libro. En este sentido, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

Utiliza una cajita de fósforos como unidad de medida para determinar:

a) El volumen de una caja de zapatos.
b) El volumen de una caja de pasta de dientes.
c) El volumen de una caja de leche.

Explica el procedimiento que utilizaste para realizar estas medidas.

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.174)

Técnica **($\tau_{8,5,1}$)**:

1. Utiliza material concreto (caja de zapatos, caja de pasta dental, caja de leche y caja de fósforos).
2. Mide cuántas cajas de fósforos contiene el largo, ancho y altura de la caja de zapatos, caja de pasta dental y de la caja de leche.
3. Utiliza la fórmula de volumen:

V = medida del largo x medida del ancho x medida de la altura

4. Reemplaza la cantidad de cajas de fósforos que contiene el largo, ancho y altura de la caja de zapatos, caja de pasta dental y de la caja de leche.
5. Menciona el volumen que tiene la caja de zapatos, caja de pasta dental y de la caja de leche según la cantidad de caja de fósforos.

Tecnología **(θ)**: **θ $_{47}$** Dimensiones de los poliedros (largo, ancho y altura), **θ $_{44}$** Definición de volumen de los poliedros y **θ $_{45}$** Fórmula del volumen de los poliedros.

Teoría **(Θ)**: Geometría plana y del espacio.

Tipo de tarea (T_9): Calcular el volumen de los poliedros utilizando fórmulas

Tarea ($t_{9,1}$): Calcular el volumen de un prisma a partir de dimensiones dadas

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Medimos volumen, en la subsección: Trabajo individual; que se encuentra en la página 174 del libro. Es así que, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

> Una tableta de margarina tiene la forma de un prisma rectangular. Sus dimensiones son: 2 cm, 2 cm y 10 cm. Si en una caja de esa margarina vienen 4 tabletas. ¿Cuál es el volumen de esa caja?
>
> **Fuente:** Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{9,1,1}}$):

1. Utiliza la fórmula de volumen:

   V = medida del largo x medida del ancho x medida de la altura

2. Reemplaza las medidas que tienen las dimensiones del largo, ancho y altura de la tableta de margarina.
3. Menciona el volumen que tiene la tableta de margarina.
4. Suma cuatro veces el volumen de la tableta de margarina.
5. Menciona el volumen que tiene la caja que contiene las cuatro tabletas de margarina.

Tecnología ($\boldsymbol{\theta}$): $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{47}}$ Dimensiones de los poliedros (largo, ancho y altura), $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{44}}$ Definición de volumen de los poliedros y $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{45}}$ Fórmula del volumen de los poliedros.

Teoría ($\boldsymbol{\Theta}$): Geometría plana y del espacio.

Observación: En el libro de texto se distingue entre volumen y capacidad; en el cual señala que para medir el volumen de un sólido geométrico dado, hay que determinar el número de unidades cúbicas que son necesarias para llenar el sólido. Y en el caso de la capacidad, considera que la capacidad es un volumen (volumen interno de un recipiente); es decir, saber cuánto líquido o gas puede contener un recipiente.

El Diseño Curricular Nacional (2009) señala para el sexto grado de educación primaria en torno al volumen; en el área de Geometría y medición la siguiente capacidad:

- *Mide y compara el volumen de sólidos en unidades arbitrarias de medida.*

Y en el caso del conocimiento que se pide trabajar para el grado es: *Volumen de los sólidos en unidades arbitrarias de medida.*

Como podemos observar nuestro Diseño Curricular no distingue entre volumen y capacidad, porque la capacidad y el conocimiento están orientados a trabajar actividades para afianzar el volumen de los sólidos; sin embargo, el libro de texto si presenta una diferencia entre volumen y capacidad según lo presentado.

Tipo de tarea (T_{10}): Calcula la longitud de los elementos de los poliedros

Tarea ($t_{10,1}$): Determina la longitud de las aristas de un cubo a partir de un volumen dado

Esta tarea está constituida por 1 problema que corresponde a la sección: Medimos volumen, en la subsección: Trabajo individual; que se encuentra en la página 174 del libro. A continuación, presentamos el ejemplo del problema que presenta el libro de texto.

El volumen de un cubo es 729 m^3. Determina la longitud de sus aristas

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Técnica (**$\tau_{10,1,1}$**):

1. Utiliza la fórmula de volumen:

V = medida del largo x medida del ancho x medida de la altura

2. Reemplaza la medida del volumen del cubo en la fórmula.
3. Asigna el mismo valor al largo, ancho y altura del cubo.
4. Menciona el volumen que tiene el cubo.
5. Divide el volumen del cubo entre el valor asignado al largo, ancho y altura del cubo.
6. Menciona el resultado de la división que viene a ser la longitud de la arista del cubo.

Tecnología (**θ**): **θ_{47}** Dimensiones de los poliedros (largo, ancho y altura), **θ_{44}** Definición de volumen de los poliedros y **θ_{45}** Fórmula del volumen de los poliedros

Teoría (**Θ**): Geometría plana y del espacio.

Cabe señalar que el libro de texto analizado presenta algunas técnicas que no tienen tareas propuestas para ser resueltas con esta técnica como por ejemplo:

Técnica (τ): Construcción del desarrollo plano del octaedro regular

1. Con la ayuda del transportador, dibuja seis triángulos equiláteros en secuencia horizontal, yuxtapuestos entre sí por los lados.
2. Dibuja en los extremos, dos triángulos que completen ocho triángulos equiláteros.
3. Completa el dibujo colocando cinco pestañas con, más o menos, medio centímetro de ancho.

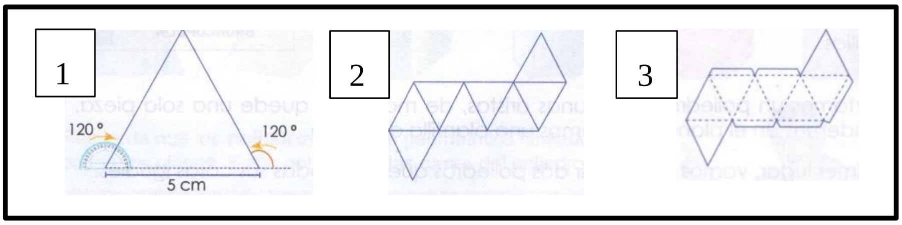


Figura 24. Pasos de la técnica del octaedro regular
Fuente: Texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.164)

Sin embargo, consideramos que se puede aprovechar el trabajo con esta técnica para responder preguntas relacionadas al octaedro regular como: ¿Qué forma tienen las caras del octaedro regular? , ¿Cuántos vértices tiene el octaedro regular?, entre otras.

Asimismo, la siguiente técnica tampoco presenta una tarea propuesta en el libro de texto:

Técnica (τ): Construcción del desarrollo plano del hexaedro regular

1. Traza un segmento AB de 5cm. Con ayuda de un transportador, con centro en B, se traza el lado que forma el ángulo externo de 90°.
2. Partiendo de las dos perpendiculares traza seis cuadrados con lado de 5 cm como se muestra.
3. Dibuja las pestañas con, más o menos, medio centímetro de ancho.

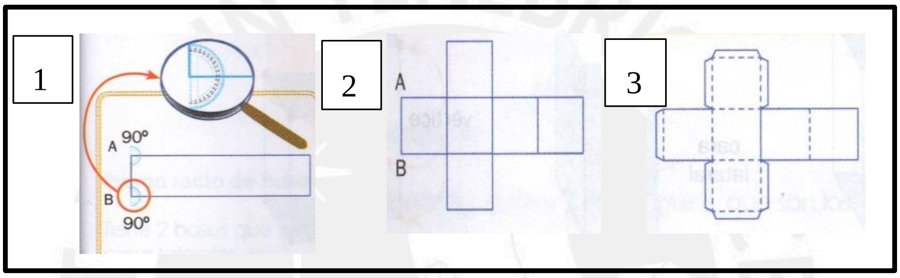
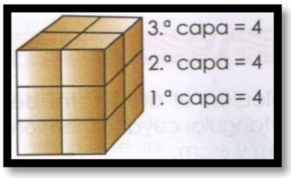


Figura 25. Pasos de la técnica del hexaedro regular
Fuente: Texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.165)

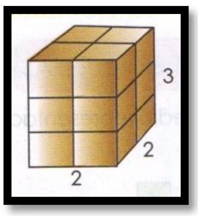
Esta técnica mencionada en el libro de texto no tiene ninguna tarea propuesta para ser resuelta con ella; sin embargo, cabe mencionar que esta técnica podría ser usada para resolver tareas asociadas al hexaedro regular como: ¿Cuántas caras tiene el hexaedro regular?, ¿Qué forma tienen las caras del hexaedro regular?, entre otras.

En el caso del volumen de los poliedros, el libro de texto presenta 2 técnicas que presentamos a continuación:



$\tau_{8,1,1}$: Volumen de los poliedros

1. Se cuenta el número de cubos de una capa.
2. Enseguida, se suma el número de cubos que tiene cada capa.
3. Menciona el volumen del poliedro.



$\tau_{8,1,2}$: Volumen de los poliedros

1. Se cuenta el número de cubos de una capa.
2. Enseguida, se multiplica por el número de capas.

3. Menciona el volumen del poliedro.

Este es el único caso en el cual el libro de texto presenta dos técnicas para poder resolver las tareas asociadas con el volumen de los poliedros; sin embargo, no permiten desarrollar el tipo de tarea T_8: Calcular el volumen de los poliedros; el cual está compuesto por 5 tareas; solo permitiría resolver 3 tareas que son las siguientes:

Tarea ($t_{8,1}$): Calcular el volumen de poliedros teniendo como unidad un cubo de u unidades.

Tarea ($t_{8,2}$): Calcular el volumen de poliedros teniendo como unidad un cubo.

Tarea ($t_{8,3}$): Calcular el volumen de poliedros teniendo como unidad un cubo de 1 cm de arista.

Asimismo, en relación a los libros de texto de matemática de primer grado a quinto grado de la misma colección que se utilizan en las instituciones educativas de nuestro país, es necesario mencionar que en el tema relacionado a los sólidos geométricos, estos textos no presentan ninguna técnica para resolver los problemas propuestos en estos libros de texto.

En relación a las tecnologías que presenta el libro de texto analizado son en total $\boldsymbol{\theta}_{n:}$ 22, las cuales mencionamos a continuación:

Tabla 6. Tecnologías del libro de texto de sexto grado de primaria

TECNOLOGÍAS ($\boldsymbol{\theta}_{n}$)	**DESCRIPCIÓN**
$\boldsymbol{\theta}_{1}$	Definición de poliedros
$\boldsymbol{\theta}_{2}$	Características de los poliedros regulares
$\boldsymbol{\theta}_{3}$	Definición de poliedros regulares
$\boldsymbol{\theta}_{4}$	Definición de tetraedro regular
$\boldsymbol{\theta}_{5}$	Definición de octaedro regular
$\boldsymbol{\theta}_{6}$	Definición de hexaedro regular
$\boldsymbol{\theta}_{7}$	Elementos de los poliedros
$\boldsymbol{\theta}_{8}$	Definición de prismas rectos
$\boldsymbol{\theta}_{9}$	Clasificación de prismas rectos
$\boldsymbol{\theta}_{10}$	Definición de prisma recto de base triangular
$\boldsymbol{\theta}_{11}$	Definición de prisma recto de base cuadrangular
$\boldsymbol{\theta}_{12}$	Área del rectángulo
$\boldsymbol{\theta}_{13}$	Área total del prisma rectangular
$\boldsymbol{\theta}_{14}$	Área total del prisma
$\boldsymbol{\theta}_{15}$	Área lateral del prisma
$\boldsymbol{\theta}_{16}$	Definición de pirámide de base triangular
$\boldsymbol{\theta}_{17}$	Definición de pirámide de base cuadrada
$\boldsymbol{\theta}_{18}$	Elementos de la pirámide
$\boldsymbol{\theta}_{19}$	Área lateral de la pirámide
$\boldsymbol{\theta}_{20}$	Área total de la pirámide
$\boldsymbol{\theta}_{21}$	Volumen del prisma
$\boldsymbol{\theta}_{22}$	Fórmula del volumen del prisma

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012)

En cuanto a las tecnologías presentes en el libro de texto, podemos mencionar que de las 22 tecnologías que presenta el libro de texto analizado solo se utilizan 12 en las técnicas propuestas para la resolución de las tareas que son las siguientes: ($\boldsymbol{\theta}_{1}$, $\boldsymbol{\theta}_{2}$, $\boldsymbol{\theta}_{3}$, $\boldsymbol{\theta}_{4}$, $\boldsymbol{\theta}_{7}$, $\boldsymbol{\theta}_{8}$, $\boldsymbol{\theta}_{14}$, $\boldsymbol{\theta}_{15}$, $\boldsymbol{\theta}_{16}$, $\boldsymbol{\theta}_{15}$, $\boldsymbol{\theta}_{21}$, $\boldsymbol{\theta}_{22}$). Del mismo modo, cabe mencionar que las tecnologías necesarias en las técnicas son un total de 47.

Asimismo, en relación a los libros de textos de primer grado a quinto grado pertenecientes a la misma colección a la que pertenece el libro de texto que hemos analizado es necesario mencionar lo siguiente en relación a las tecnologías presentes:

La colección de los libros de textos de matemática presenta el tema como sólidos geométricos; sin embargo, la definición de sólidos geométricos solo se presenta en el libro de texto de primer grado en la página 178 en la cual señala que: *"Un sólido geométrico es un cuerpo geométrico que tiene ancho, largo y alto. Ocupa un lugar en el espacio".*

En el caso del libro de texto de segundo grado, se presenta la definición de polígonos en la página 106 en la que señala que: *"Son figuras cerradas formadas por líneas rectas. Tienen lados y vértices"*. Del mismo modo, en la página 112 señala que: *"Las figuras planas son:*

rectángulo, cuadrado, triángulo y círculo". También en la página 166 menciona que: *"Los sólidos geométricos son: cubo, prisma y pirámide. Pueden tener caras planas".*

En relación al libro de texto de tercer grado, en la página 122 presenta la clasificación de los sólidos geométricos en cuerpos redondos y cuerpos no redondos (cubo, prisma y pirámide). También en la página 131 presenta la definición de triángulo: *"Son figuras geométricas que tienen tres lados"*.

El libro de texto de cuarto grado presenta en la página 96 los elementos del prisma de base triangular (cara lateral, arista, base y vértice).

En el libro de texto de quinto grado en la página 179 se presenta la definición de plantilla o desarrollo plano señalando lo siguiente: *"Una plantilla o desarrollo plano es una representación que, si se recorta, dobla y pliega, formará el sólido en cuestión"*. También presenta en la página 178 los elementos del prisma: aristas, caras, base, vértices y aristas. Asimismo, en la página 99 se menciona la definición de polígono y clasificación de polígonos, mientras que en la página 100 se presenta la clasificación de los triángulos y de los cuadriláteros. Finalmente, en la página 102 se presenta la definición de polígono regular (es aquel que tiene todos sus lados y ángulos congruentes) y características del polígono regular.

En este sentido, teniendo en cuenta las tecnologías presentes en la colección de los libros de primer grado a quinto grado podemos mencionar que 6 tecnologías (definición de triángulo, definición de plantilla o desarrollo plano, clasificación de los triángulos, la clasificación de los cuadriláteros, definición de polígono y clasificación de polígonos) son utilizadas en las técnicas propuestas en el análisis de la organización matemática del libro de texto de sexto grado que hemos analizado.

6.3. Completitud de las organizaciones matemáticas locales del libro de texto analizado

En esta sección, presentamos el análisis de los indicadores de completitud de las organizaciones matemáticas locales referente a la séptima unidad del libro de texto de matemática de sexto grado de educación primaria que analizamos, el cual incluye al objeto matemático poliedros. Para ello, tomamos en cuenta los trabajos de Fonseca (2004) y Lucas (2010).

En este sentido, cabe mencionar a Fonseca, Casas, Bosch y Gascón (2009) quienes señalan que el objetivo de los indicadores de completitud de las organizaciones matemáticas locales es analizar la calidad de la actividad matemática construida. Del mismo modo, Fonseca (2004) manifiesta que los indicadores de completitud (OML1, OML2, OML3 y OML4) se utilizan para medir el grado de completitud de aspectos específicos de la organización matemática; mientras que los indicadores de completitud (OML5, OML6 y OML7) se utilizan para medir el grado de completitud de aspectos globales de la organización matemática.

A continuación, presentaremos el análisis de la organización matemática basada en los siete indicadores de completitud de Fonseca (2004).

6.3.1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico (OML1)

La integración de los tipos de tareas es un aspecto importante en una OML; debido a que ello evitará la reiteración de tareas cuya ejecución requiere la ejecución de procedimientos mecánicos y nada significativos para el estudiante. En este sentido, analizamos los tipos de tareas que hemos identificado en el libro de texto analizado que nos pueda brindar información con respecto a este indicador de completitud.

Tabla 7. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

Criterios considerados	Cantidad	NO
Los tipos de tareas (T_i) sobre los poliedros se relacionan entre sí, mediante el desarrollo sucesivo de sus técnicas.	03	07
Los tipos de tareas (T_i) sobre poliedros hacen uso del cuestionamiento tecnológico de las técnicas (fórmulas, definiciones y propiedades) del objeto matemático poliedros que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía, el alcance y la comparación de las técnicas.	03	07

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

Es así, que con respecto al primer criterio, en el libro de texto analizado la mayoría de los tipos de tareas no se encuentran integradas unas con otras. Referente a ello, Lucas (2010) señala que “mayoritariamente las tareas aparecen aisladas, sin una articulación entre ellas y sin una posible razón de ser, lo que provoca que los problemas no tengan sentido para los estudiantes” (p. 53).

Por otro lado, con respecto al segundo criterio que hemos considerado para este indicador es que las tareas sobre poliedros hacen uso del cuestionamiento tecnológico de las técnicas en el cual se consideran varios aspectos como: interpretación, justificación, fiabilidad, economía, alcance y comparación. Con relación al análisis de nuestro libro de texto a continuación presentamos información con respecto es este criterio.

Tabla 8. Existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico

Aspectos considerados	Cantidad de tareas
Interpretación	03
Justificación	03
Economía	12
Alcance	--
Fiabilidad	--
Comparación	--

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

El libro de texto analizado presenta escasa cantidad de tareas donde se pueda realizar el cuestionamiento tecnológico a las técnicas que se usan para hacer las tareas. Este aspecto confirma lo que afirma Lucas (2010) que “pocas veces se cuestiona la necesidad de justificar la técnica utilizada para la actividad matemática, ni tampoco, cuál es su ámbito de actuación” (p. 53). Por ello, consideramos que este aspecto se puede deber a la poca importancia que se le da al bloque tecnológico-teórico en la enseñanza de la matemática en educación primaria, aspecto que queda totalmente confirmado con una escasa presentación de aspectos teóricos referentes a los poliedros abordados en el libro de texto analizado. En este sentido, Lucas (2010) sostiene que:

> Debido a la escasa incidencia del bloque tecnológico-teórico en las praxeologías matemáticas que se estudian (reconstruyen), en S [secundaria] no se exige interpretar adecuadamente el resultado de aplicar una técnica para considerar que dicha técnica ha estado “correctamente” utilizada. (p. 57)

Basados en Lucas (2010) consideramos que si en la secundaria sucede este aspecto, con mucha más razón sucede en el nivel primario, ya que por la edad de los niños se evita en muchos casos brindar mayor información teórica.

Es así que, presentamos un ejemplo que muestra la integración de los tipos de tareas que corresponden a los tipos T_1 y T_5.

Tipo de tarea (T_1): Identificar poliedros a partir de alguno de sus desarrollos planos

Tipo de tarea (T_5): Construir poliedros a partir de sus desarrollos planos

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

En cuanto a estos tipos de tareas podemos afirmar que existe la intención de integrar estos tipos de tareas mediante el desarrollo de sus técnicas; es así que estos tipos coinciden en 4 de los 5 pasos que tienen sus técnicas que mostramos a continuación:

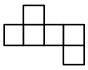
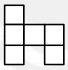
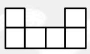
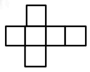
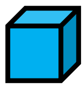
1. Dibujar los desarrollos planos de los poliedros de la página 165 en un soporte de papel en una escala adecuada.
2. Determinar la misma medida del lado de los cuadrados y triángulos del modelo dado.
3. Dejar $\frac{1}{2}$ cm para las pestañas en todo el contorno del desarrollo plano de los poliedros dibujados en el paso 1.
4. Recortar el contorno del desarrollo plano de los poliedros con las pestañas dibujado en el paso 1 y 2.

Asimismo, presentamos el tipo de tarea $T_{1,}$ que contiene 3 tareas y hacen referencia al uso de algunos elementos del cuestionamiento tecnológico:

Tipo de tarea (T_1): Identificar poliedros a partir de alguno de sus desarrollos planos

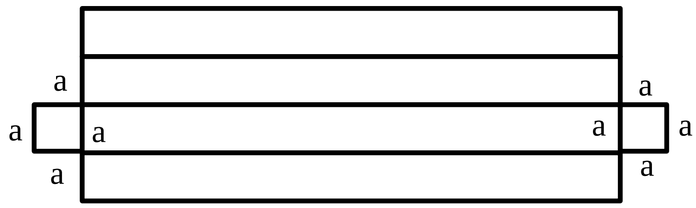
Tarea ($t_{1,1}$): Identificar el cubo a partir de su desarrollo plano

Entre las siguientes figuras. ¿Cuáles son plantillas para armar un modelo de cubo?

b)  b)  c)  d)  

Tarea ($t_{1,2}$): Identificar el prisma a partir de su desarrollo plano.

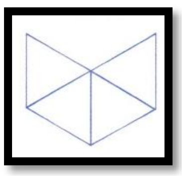
Identifiquen el poliedro representado por cada plantilla



Tarea ($t_{1,3}$): Identificar el tetraedro a partir de su desarrollo plano.

¿Crees que la figura adjunta es el desarrollo de un tetraedro?

Explica tu respuesta.



Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

En este tipo de tarea podemos observar la presencia de tres tareas que para su resolución hacen uso de una sola técnica; es decir, tienen los mismos pasos y los mismos elementos tecnológicos como: θ_1 Definición de desarrollo plano de poliedros, θ_2 Definición de poliedros y θ_3 Elementos de poliedros; este aspecto se relaciona con la economía que presentan las técnicas.

Del mismo modo, presentamos como ejemplo de justificación de respuesta la siguiente tarea que pertenece al tipo de tarea T_3:

Tarea ($t_{3,3}$): Identificar los polígonos que conforman un prisma

¿Qué polígono siempre es parte de un prisma? Explica tu respuesta

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.166)

En este problema se observa que el libro de texto presenta la identificación de los polígonos que conforman un prisma por lo que el estudiante debe identificar los elementos que tiene un prisma y reconocer específicamente sus caras e identificar qué tipo de polígono siempre forma parte de ellas y luego justificar su respuesta probablemente haciendo uso de una tecnología.

6.3.2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas (OML2)

Según Chevallard (1999) una técnica es la manera de hacer una determinada tarea. En este sentido, la técnica debe resolver la mayoría de las tareas que pertenecen al tipo de tarea. Es así que, en el libro de texto analizado se observa que en la mayoría de los tipos de tareas no existen técnicas para resolver cada tarea particular.

Tabla 9. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas

Criterios considerados	Cantidad de técnicas	Número de tipos de tareas
Existen dos o más técnicas para resolver un tipo de tarea (T_i) asociadas al objeto matemático poliedros.	--	--
El libro de texto elementos tecnológicos que permitan analizar cuál es la técnica más fiable y económica para realizar una tarea ($t_{i,j}$).	--	--

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

En el libro de texto analizado, hemos propuesto una técnica para todos los tipos de tareas y tareas. Es así que, en los problemas que propone el libro de texto no se evidencia la presencia de técnicas para resolver los tipos de tareas y por ende las tareas, el libro de texto solo presenta 5 técnicas de las cuales, solo 2 técnicas permiten resolver 4 de las tareas propuestas en el libro de texto. Por ello, las tareas son resueltas empleando una técnica que está predeterminada; que hace que los estudiantes resuelvan los tipos de tareas y las tareas de manera mecánica sin tener la posibilidad de contrastar o comparar cual es la técnica más eficiente para realizar un tipo de tarea o una tarea determinada, ya que no le ofrece al estudiante la posibilidad de elegir entre otras técnicas.

6.3.3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas (OML3)

En este indicador consideramos la posibilidad de hacer uso de varias representaciones en la ejecución de cada tipo de tarea, en otras palabras, que las tareas no hagan referencia a una determinada representación para hacer uso de la técnica en su ejecución; que no obligue al estudiante a usar una representación predeterminada para resolverla. Es así que, el criterio considerado es el siguiente:

La técnica hace uso de distintas representaciones (palabras, expresiones, notaciones, escrituras, representaciones gráficas, etc.) que permite resolver un tipo de tarea (T_i).

En este sentido, realizamos una revisión de las distintas representaciones que se emplea en las diferentes tareas que presenta el libro de texto y para realizar el conteo de las representaciones hemos considerado la representación que tiene más protagonismo en la tarea, ya que en algunas tareas se hace uso de más de una representación. Es así que, las representaciones que se emplean en el libro de texto son: gráfica, verbal y numérica.

Tabla 10. Objetos ostensivos que sirven para representar las tareas

Forma de representación	Cantidad de representaciones ostensivas
Gráfica	17
Verbal	15
Numérica	10
Total	42

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

En este sentido, podemos afirmar que en el libro de texto analizado existen diferentes representaciones ostensivas.

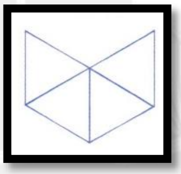
6.3.4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas" (OML4)

La existencia de tareas y técnicas inversas en el libro de texto, es importante porque este aspecto permitirá que el estudiante se enfrente a tareas de diferentes. Es así que, en la presente investigación hemos considerado los siguientes criterios para analizar la organización matemática presente en el libro de texto analizado:

- El libro de texto presenta tareas inversas asociadas al objeto matemático poliedros; es decir, tareas con los datos e incógnitas intercambiadas o tareas que parten de la respuesta y analizan la situación de partida.
- El libro de texto presenta técnicas reversibles para resolver tareas inversas asociadas al objeto matemático poliedros.

En cuanto al primer criterio presentamos la siguiente tabla:

Tabla 11. Existencia de tareas y de técnicas inversas

Tarea directa	Tarea inversa
¿Crees que la figura adjunta es el desarrollo de un tetraedro? Explica tu respuesta. 	Intenta dibujar otros dos desarrollos diferentes del tetraedro.

Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

Como podemos observar el libro de texto analizado solo presenta una tarea inversa.

En cuanto al segundo criterio, el libro de texto no presenta técnicas reversibles para resolver un tipo de tareas (T_i) asociadas al objeto matemático poliedros; es decir, no hay presencia de técnicas inversas.

6.3.5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas (OML5)

Para el análisis de este indicador hemos considerado el siguiente criterio:

- El libro de texto presenta tipos de tareas que permitan al alumno interpretar el real funcionamiento de una técnica para percibir su beneficio matemático en relación con otras técnicas.

En este sentido, basados en este criterio podemos afirmar que en la organización matemática del libro de texto analizado relacionado a los poliedros no se proponen tareas que incluyan la interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.

Las tareas presentadas en el libro de texto están orientadas a obtener respuestas específicas, no hemos identificado tareas asociadas a la comprobación o verificación de determinados resultados.

6.3.6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas” (OML6)

En este indicador hemos consideramos dos criterios para determinar la existencia de tareas matemáticas abiertas en la organización matemática correspondiente a los poliedros del libro de texto que analizamos.

Tabla 12. Existencia de tareas matemáticas abiertas

Criterios considerados	Situación matemática	Situación extramatemática
El libro de texto presenta tipos de tareas (T_i) en donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente.	04	01
El libro de texto presenta tipos de tareas de modelización matemática asociadas a situaciones matemáticas o extramatemáticas relacionadas al objeto matemático poliedros.	01	01

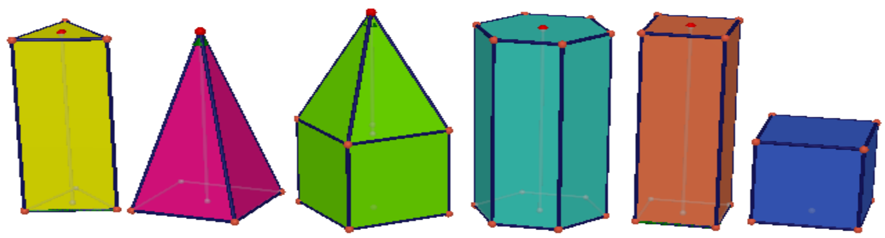
Fuente: Libro de texto Matemática 6 (Perú, 2012)

En los problemas que se presentan en las diferentes actividades y en la evaluación del libro de texto existen 5 tareas donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente, un ejemplo de este tipo de tarea es el siguiente:

Tipo de tarea (T_2): Identificar características comunes de cuerpos geométricos y de objetos de su entorno

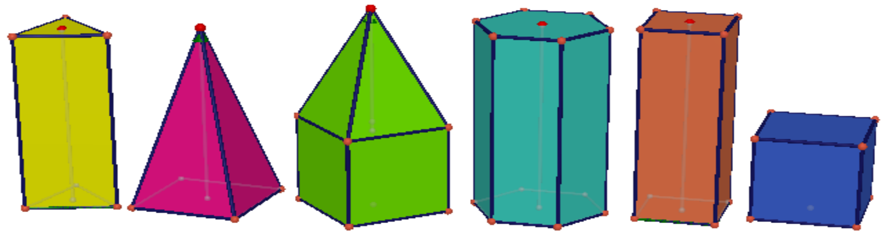
Tarea ($t_{2,1}$): Identificar las características de los cuerpos geométricos

Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
¿En qué se parecen todos ellos?



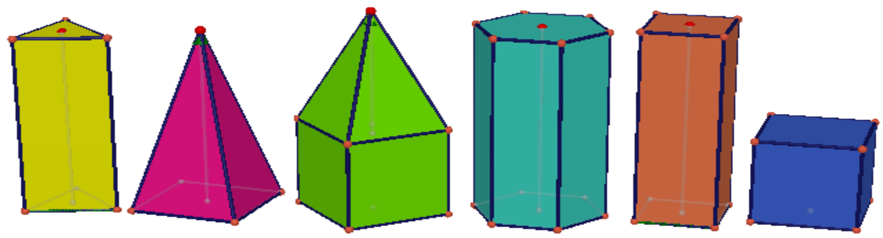
Tarea ($t_{2,2}$): Identificar cuerpos geométricos con objetos de su entorno

Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
Piensa en objetos reales a los que se parecen.



Tarea ($t_{2,3}$): Identificar figuras que componen los cuerpos geométricos

Observa estos cuerpos geométricos y luego responde:
¿Por qué figuras están compuestas sus caras?



Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.162)

Como podemos observar en este tipo de tarea no hay datos ni incógnitas prefijados. Por lo tanto, las respuestas de estas tareas pueden ser múltiples y variadas dependiendo del contexto y el conocimiento que tiene el estudiante.

En cuanto al segundo criterio que hemos considerado, es sobre la presencia de tipos de tareas de modelización matemática asociadas a situaciones matemáticas o extramatemáticas relacionadas al objeto matemático poliedros. En este sentido, presentamos la siguiente tarea de modelización matemática que hace referencia a una situación extramatemática:

Tarea ($t_{9,1}$): Calcular el volumen de un prisma a partir de dimensiones dadas

Una tableta de margarina tiene la forma de un prisma rectangular. Sus dimensiones son: 2 cm, 2 cm y 10 cm. Si en una caja de esa margarina vienen 4 tabletas. ¿Cuál es el volumen de esa caja?

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p.177)

Otro ejemplo de tarea de modelización matemática que no presenta datos ni incógnitas y además hace referencia a una situación extramatemática es la siguiente:

Tarea ($t_{8,5}$): Calcular el volumen de los prismas teniendo en cuenta como unidad una caja de fósforos.

Utiliza una cajita de fósforos como unidad de medida para determinar:

d) El volumen de una caja de zapatos.

e) El volumen de una caja de pasta de dientes.

f) El volumen de una caja de leche.

Explica el procedimiento que utilizaste para realizar estas medidas.

Fuente: Libro de texto de Matemática 6 (Perú, 2012, p 174)

En este sentido, podemos afirmar que el libro de texto que analizamos presenta una escasa cantidad de tareas de modelización matemática asociadas a situaciones extramatemáticas relacionadas al objeto matemático poliedros.

6.3.7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica (OML7)

Uno de los criterios considerados para este indicador es el siguiente:

- La tecnología presente el libro de texto permite la construcción de técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

En nuestra investigación podemos considerar que el único elemento tecnológico que podemos resaltar en este criterio es la definición de poliedros. Sin embargo, cabe mencionar que existen algunos pasos que se van repitiendo en la ejecución de algunas tareas y también existen algunas tecnologías que se usan en varios tipos de tareas.

Asimismo, Fonseca (2004) afirma que este indicador tiene un carácter global, quizá ese sea el motivo por el cual no se encuentra elementos tecnológicos referidos a este indicador en la séptima unidad del libro que hemos analizado.

CONSIDERACIONES FINALES

Teniendo en cuenta nuestros antecedentes así como los documentos que incluimos en nuestra investigación y marco teórico. A continuación presentamos las consideraciones finales que juzgamos importantes en relación al marco teórico, la pregunta de investigación y los objetivos planteados:

Con relación al marco teórico:

La Teoría Antropológica de lo Didáctico ha sido un referencial pertinente y adecuado, porque nos proporcionó los elementos teóricos para identificar y analizar la organización matemática (tareas, tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teoría) referente a la unidad séptima del libro de texto analizado; en el que se evidenció 10 tipos de tareas, 32 tareas, 5 técnicas, 22 tecnologías y 1 teoría.

Con relación a la pregunta de investigación:

Nuestra pregunta de investigación fue la siguiente: *¿Cuál es el grado de completitud de la organización matemática que presenta el texto escolar de matemática sexto grado de educación primaria en el capítulo correspondiente a los poliedros?*; cabe mencionar que después de haber identificado la organización matemática del libro de texto basados en la TAD (tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teoría), nuestra investigación nos permitió dar respuesta a nuestra pregunta de investigación basados en los 7 indicadores de completitud de Fonseca, a través del cual se observa muy poco grado de coincidencia en 4 indicadores (OML1, OML3, OML4 y OML6) y la ausencia total de 3 indicadores (OML2, OML5 y OML7); aspectos por los cuales concluimos que la organización matemática que presenta el libro de texto analizado en torno a la unidad séptima muestra un grado de completitud *menos completa*.

Con relación a los objetivos de la investigación:

En nuestra investigación se planteó el siguiente objetivo general: *Analizar la organización matemática asociada a los poliedros que se presenta en el texto escolar de matemática de sexto grado de educación primaria para determinar el grado de completitud de su organización matemática.* Este objetivo fue alcanzado porque hemos analizado la organización matemática que presenta el libro de texto en base a los elementos teóricos de la TAD; porque se identificó la organización matemática presente en el libro de texto analizado; es decir, tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías en el capítulo referente a los poliedros

En relación a los objetivos específicos describimos la organización matemática que presenta el libro de texto analizado teniendo en cuenta la cantidad de tareas, tipos de tareas, técnicas con pasos compartidos, tecnologías comunes y teoría. Por último, determinamos el grado de completitud que presenta la organización matemática del libro de texto analizado basados en los indicadores de completitud de Fonseca obteniendo como resultado un grado de completitud *menos completa*, debido a que muchos de los criterios tienen muy poco grado de coincidencia.

SUGERENCIAS

Respecto a las sugerencias que se desprenden de nuestro trabajo podemos mencionar las siguientes:

- Realizar investigaciones referentes al planteamiento de técnicas y tecnologías para obtener desarrollos planos de los poliedros; ya que muchos trabajos presentan modelos o plantillas ya establecidas; sin embargo no presentan el procedimiento para dibujar o construir desarrollos planos de los poliedros.
- Analizar la organización didáctica en una futura investigación a partir de la organización matemática analizada en el libro de texto de sexto grado de educación primaria.
- Conocer la influencia de la organización didáctica en la construcción de saberes de los estudiantes sean matemáticos o didácticos del objeto matemático poliedros.

REFERENCIAS

Benavides, J., Marin, A., Díaz, O. y Soto, A. (1982). *Escuela Nueva 6°*. Tercera edición. Perú: Editorial Escuela Nueva.

Benavides, J., Marin, A., Díaz, O. y Soto, A. (1993). *Escuela Nueva 5°*. Primera edición. Perú: Editorial Escuela Nueva.

Benavides, J., Marin, A., Díaz, O. y Soto, A. (1996). *Escuela Nueva 6°*. Segunda edición. Perú: Editorial Escuela Nueva.

Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones.* (Tesis de maestría en Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México. Recuperado de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/blanco_2009.pdf

Blanco, H. & Crespo, C. (2007). *Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemática.* Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/32%20Blanco.pdf

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* (Tesis de doctor en Matemática). Universidat Autónoma de Barcelona. Recuperado de: http://www.atd-tad.org/documentos/la-dimension-ostensiva-en-la-actividad-matematica-el-caso-de-la-proporcionalidad/

Calderero, J. (2012). *Estudio de libros de texto de ciencias de la naturaleza mediante análisis cuantitativo basado en la teoría de grafos*. (Tesis de doctor en Educación). Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España. Recuperado de http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t26700.pdf

Capdevilla, R., Chávez, B. y Muñoz, J. (1990). *Saber 5°*. Perú: Editorial Bruño.

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4634

Carrillo, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria*. (Tesis de maestría en Enseñanza de la Matemáticas). Pontificia Universidad

Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1547

Corica, A. y Otero, A. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (3), pp. 305 – 331. Recuperado de: http://ww.redalyc.org/articulo.oa?id=33511859002

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Francia: Editorial Aique.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), pp. 221-266. Recuperado de http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF

De Andrade, M. y Lakatos, E. (2003). *Fundamentos de la Metodología Científica*. 5ta. edicao. Brasil: Editorial Atlas. Recuperado de: http://es.slideshare.net/juliocezarsgt/fundamentos-de-metodologia-cientifica-lakatos-marconi

España, Organización Euclides (1997). *Elementos*. Libro XI y XIII. España. Recuperado de: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

Fernández, M. (2013). *La representación del cubo y el Cabri 3D: un estudio con alumnos del primer grado de educación secundaria*. (Tesis de maestría en Enseñanza de la Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4513

Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2006). *Investigacao em Educacao Matemática*. 2da. edicao. Brasil: Editora Autores Asociados. Recuperado de: https://books.google.com.pe/books?id=l89pPjS6OxQC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Fonseca, C. (2004). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria. (Tesis de doctorado en Ciencias Matemáticas).Universidad de Vigo. Vigo, España. Recuperado de: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf

Fonseca, C., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Revista electrónica Educación Matemática*. (22), 2, pp.

1-2. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000200002

Fonseca, C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas. Un estudio de los recorridos de estudio e investigación (REI). *Revista electrónica Educación Matemática*. (23), 1, pp. 97-121. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/405/40521127004.pdf

Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T. y Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM.* Santander.

García, A. (2009). *Módulo: Matemática II.* Consejería de Educación y Ciencia del Principado de Asturias. Recuperado de: http://web.educastur.princast.es/proyectos/formadultos/unidades/matematicas_2/creditos.html

Gil, A. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa.* 4ta. edicao. Brasil: Editorial Atlas. Recuperado de: http://www.academia.edu/4405328/GIL_Antonio_Carlos_COMO_ELABORAR_PROJETOS_DE_PESQUISA_Copia

Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. España: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Godino, J., Font, V. y Wilhemi, M. (2006). Análisis ontosemiótico sobre una lección de suma y resta. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*. *Relime*, número especial, pp. 131-155. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_textos_suma_resta.pdf

Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. En M. J. Gonzáles, M. T. Gonzáles y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. (21-35). Santander, España: SEIEM.

Gonzáles, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias*. (22), 3, pp. 389-408.

Gonzáles, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225

Gonzáles, P. (2000). *Los sólidos platónicos: Historia de los poliedros regulares*. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Recuperado de: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=3386%3Alos-sos-p&showall=1.

González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (3), pp. 389 – 408. Recuperado de: http: // file:///C:/Users/i411.IDP/Downloads/21990-21914-1-PB.pdf

Guillén, G. (2010). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didáctica,* 18 (1), pp. 35-53. Recuperado de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v18n1/02124521v18n1p35.pdf

Gutierrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación matemática.* Universidad de Valencia: España. Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/278785961_Procesos_y_habilidades_en_visualizacin_espacial

Helfgott, M. (2009). *Geometría Plana*. Perú: Escuela Activa.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la Investigación*. Tercera edición. México: Editorial McGraw-Hill Interamericana. Recuperado de: http://www.terras.edu.ar/aula/tecnicatura/15/biblio/SAMPIERI-HERNANDEZ-R-Cap-1-El-proceso-de-investigacion.pdf

Leighton, B. (1987). *Geometría Descriptiva*. España: Editorial Reverte S.A. Recuperado de: https://books.google.com.pe/books?id=Gv9Uqt2ppnMC&printsec=frontcover&dq=geometria+descriptiva&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=geometria%20descriptiva&f=false

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*. Volumen II. Perú: IMCA.

Landaverde, L. (2005).*Curso de Geometría*. Sexta edición. México: Editorial Progreso. Recuperado de: https://books.google.com.pe/books?id=CSVgfC9zVvIC&pg=PA283&dq=poliedros&hl=es&sa=X&ei=ihbxVPSoAujCsASQ3oGQDw&ved=0CEsQ6AEwCA#v=onepage&q=poliedros&f=false

Lanza, H. (2009). *Los cinco poliedros regulares convexos en el Timeo de Platón y en la Tradición Platónica matemática, Ontología, Dialéctica, Discurso y Divinidad*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, España. Recuperado de: https://repositorio.uam.es/bitstream/.../31359_lanza_gonzalez_henar.pdf

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas*. (Tesis de doctorado en Ciencias Matemáticas).Universidad de Vigo. Vigo, España. Recuperado de: http://www.atd-tad.org/documentos/organizaciones-matematicas-locales-relativamente-completas/

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI*, 9 (1), pp. 123 - 146.

Moise, E, & Downs, E. (1989). *Geometría Moderna*. México: Sistemas Técnicos de Edición.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. Reston, EEUU.

Pedrazuela, J. (1996). *Rincón Matemático: Curiosos y divertidos poliedros regulares*. CEIP. Valero Serrano. España. Recuperado de:http://arablogs.catedu.es/blog.php?id_blog=1064&id_articulo=176039.

Perú, Ministerio de Educación (2005). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular. Proceso de articulación*. Lima. Recuperado de http: http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional2005FINAL.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima. Recuperado de http://ebr.minedu.gob.pe/pdfs/dcn2009final.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 6*. Perú: Ediciones El Nocedal.

Pogorelov, A. (1974). *Geometría Elemental*. URSS. Mir Moscú. Recuperado de: https://geometriaunicaes.files.wordpress.com/2012/04/geometria_elemental_archivo1.pdf

Puertas, M. (1996). *Euclides: Elementos, traducción y notas.* Madrid: Gredos. Recuperado de: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=3386%3Alos-sos-p&showall=1

Rangel, A. (19829. *Poliedros*. Río de Janeiro: Editorial Libros Técnicos y Científicos S.A.

Realini, S. (2009). *Poliedros.* Plan Ceibal. Proyecto socioeducativo de Uruguay. Recuperado de: http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/111213_poliedros.elp/poliedros_regulares.html.

Requena, L. (2013). *Tipos de prismas.* Universo y fórmulas. Recuperado de: http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/tipos-prisma/

Rojas, T., Faggioni, C., La Torre, C. y Cortijo, R. (1965). *Venciendo 5°*. Perú: Editorial Universo.

Rojas, T., Faggioni, C., La Torre, C. y Cortijo, R. (1971). *Venciendo 6°*. Perú: Editorial Universo.

Rojas, T., Faggioni, C., La Torre, C. y Cortijo, R. (1976). *Venciendo 5°*. Perú: Editorial Universo.

Sardella, O.,Berio, A. y Mastucci, S. (2002) . Los poliedros en el aula. *Revista de didáctica de la Matemática Números*, 49, pp. 45-42. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/49/Articulo03.pdf

Taylor, S. y Bogdan, R. (1994). *Introducción a los métodos cualitativos de la investigación*. España: Ediciones Paidos.

Villareal, M, y Esteley, C. (2002). Una caracterización de la Educación Matemática en Argentina. *Revista de Educación Matemática*, 17 (2), pp. 18 - 43. Recuperado en: http: //cimm.ucr.ac.cr/.../La%20investigación%20en%20educación%20matemática

Vivas, D. (2010). *La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina.* (Tesis de Maestría en Didácticas Específicas). Universidad de Concepción de Uruguay. Concepción, Uruguay.

Zapata, F. y Cano, N. (2008). *El universo de los poliedros: experiencias significativas con el doblado de papel y las construcciones geométricas.* En *IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 148-151. Valledupar, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/942/1/11Taller.pdf

ANEXOS

ANEXO 1. Capacidades del nivel primario en el Plan de Emergencia Educativa

GRADO	COMPONENTE	CAPACIDADES		
		RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	COMUNICACIÓN MATEMÁTICA
1°	Geometría y medición		Relaciona objetos con formas geométricas: rectángulo, cuadrado, triángulo, círculo, cubo, cilindro y esfera.	
2°				
3°		Resuelve problemas que involucran la noción de volumen de cuerpos geométricos en unidades arbitrarias de medida.	Identifica elementos esenciales de los cuerpos geométricos: prisma, cubo y cilindro.	
4°		Resuelve problemas de medición y comparación de volúmenes de cubos en m^3, dm^3, cm^3.		
5°		Resuelve problemas de medición y comparación de volúmenes de cubos y prismas, dm^3, cm^3.		Identifica y grafica polígonos; así como poliedros: prismas rectos y pirámides.
6°		Resuelve problemas sobre volúmenes de cubos y cilindros, en, dm^3 y cm^3.	Construyen prisma y poliedros e identifican sus elementos característicos.	

Fuente: Plan de Emergencia Educativa (MINEDU; 2006, p. 42-47)