PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ANÁLISIS DE UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN Y LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA EN UN LIBRO DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

EDERD QUENTASI MAMANI

Dirigido por

FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA

San Miguel, 2015

A la memoria de mi padre.

A mi madre Marta Dolores.

A mis hermanos Ronald, Richard y Amelia.

A mis sobrinos Dubaly, Yackson, Deyvis, Kristhel y Cristian.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denomina “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su acogida y contribución en mi formación.

A mi asesor Dr. Francisco Ugarte Guerra, por sus correcciones y sugerencias realizadas.

A los jurados de esta investigación Dra. María José Ferreira da Silva y Dr. Fumikazu Saito, por las correcciones y sugerencias efectuadas.

A los profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP. En especial a la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, a la Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre, al Mg. Mariano Gonzales Ulloa y a la Mg. Flor Carrillo Lara, por haber compartido sus conocimientos y por haber contribuido en la concreción de uno de mis objetivos personales.

A mis compañeros de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP-PRONABEC, por su amistad, apoyo y aliento en los momentos difíciles de mi vida.

Al Dr. Josep Gascón Pérez, por la información proporcionada.

A la Unidad de Gestión Educativa de Melgar-Puno, por haberme concedido la licencia para realizar mis estudios.

A la Institución Educativa Fe y Alegría 27 de Macarí, por ofrecerme las facilidades del caso para continuar perfeccionándome.

Finalmente agradezco a los profesores y estudiantes de la Institución Educativa Fe y Alegría N° 27 de Macarí, por su aprecio y confianza brindada.

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo analizar la organización matemática de la unidad, que contiene los temas de función y proporcionalidad directa, de un libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria y, a partir de ello, establecer si existe articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa. El problema abordado se resume en la siguiente pregunta: ¿cuál es la organización matemática de la unidad, que contiene los temas de función y proporcionalidad directa, del libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria? Para responder a esta interrogante se utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard. La investigación es de corte cualitativo y de tipo bibliográfico. Para la organización del estudio, se usa los componentes de la organización matemática y, para el análisis, se emplea los indicadores de completitud de una organización matemática local de Fonseca y los niveles de algebrización, de la proporcionalidad de magnitudes, desarrollado por Bolea, Bosch y Gascón. Los resultados de la investigación evidencian 17 tipos de tareas, 42 tareas, 38 técnicas, 18 tecnologías y 2 teorías. Respecto al grado de completitud de la organización matemática, concluimos que es menos completa, pues no se verifica una clara presencia de los indicadores de completitud. Además, se ha verificado que en la unidad analizada no existe articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa.

PALABRAS CLAVE: Organización matemática, función, proporcionalidad directa.

ABSTRACT

This research aims to analyze the mathematical organization of a unit including function and direct proportionality in a textbook of mathematics for the first year of highschool, and to determine if there is an interaction between the linear function and the direct proportionality. The issue we address can be summed up in the following question: what is the mathematical organization of the unit including function and direct proportionality in a textbook of mathematics for the first year of highschool? To answer this question, we use Chevallard's Anthropological Theory of the Didactic as a basis. The research is bibliographical with a qualitative approach. To organize the study, we use Fonseca's components of mathematical organization, and for the analysis, we use his completeness indicators of a local mathematical organization, as well as the algebraization levels of the magnitude proportionality developed by Bolea, Bosch and Gascón. The results of the research show 17 types of tasks, 42 tasks, 38 techniques, 18 technologies and 2 theories. Regarding the level of completeness of the mathematical organization, we concluded that it is low, since a clear presence of the completeness indicators is not verified. In addition, it was verified that in the analyzed unit there is no interaction between the linear function and the direct proportionality.

KEY WORDS: Mathematical organization, function, direct proportionality.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este trabajo analiza la organización matemática presente en la unidad de *Funciones y álgebra* del libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria, que fue distribuido por el Ministerio de Educación del Perú en el año 2012. Dicho texto se usa en la actualidad como material didáctico del área de matemática por los profesores y estudiantes de las instituciones educativas secundarias públicas del Perú. El libro de texto analizado fue elaborado para estudiantes tienen entre 12 y 13 años de edad.

Por un lado, la Teoría Antropológica de lo Didáctico sostiene que uno de los factores que incide en el aprendizaje de la matemática es la actividad matemática que se presenta al estudiante. Por otro lado, el libro de texto es el principal referente del saber tanto para el docente del área de matemática como para el estudiante. Por ello, el problema de investigación de este estudio es sobre la organización matemática que se presenta en un libro de texto y se resume en la siguiente interrogante: ¿cuál es la organización matemática de la unidad, que contiene los temas de función y proporcionalidad directa, del libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria?

El objetivo de esta investigación es analizar la organización matemática de la unidad, que contiene los temas de función y proporcionalidad directa, de un libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria y, a partir de ello, establecer si existe articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa.

En el capítulo I, se presenta el planteamiento del problema de investigación; en la que abordamos los antecedentes, la justificación, la pregunta de investigación y los objetivos que orientan nuestra investigación.

En el capítulo II, desarrollamos el referente teórico que fundamenta nuestra investigación. En este capítulo, describimos algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999) y también abordamos los indicadores de completitud de las organizaciones matemáticas locales propuesto por Fonseca (2004).

En el capítulo III, realizamos un estudio de la función y la proporcionalidad directa desde dos perspectivas: matemática y didáctica. El estudio del objeto matemático se hace tomando como referente principal a Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000). En la perspectiva didáctica, primero, se hace una revisión de los programas curriculares del Perú desde el año 1998 hasta el 2009. Luego, se revisa los libros de texto del área de matemática que el Ministerio de

Educación del Perú distribuyó desde el año 2005 hasta el 2009. Finalmente, revisamos los niveles de algebrización de la proporcionalidad de las magnitudes propuesto por Bolea, Bosch y Gascón (2001).

En el capítulo IV, describimos la metodología de nuestra investigación y los instrumentos que se ha usado para recoger y analizar información sobre el libro de texto. Esta investigación se enmarca dentro de la metodología cualitativa de tipo bibliográfica. Para recoger información sobre la organización matemática de la función y la proporcionalidad directa, se ha utilizado los componentes de la organización matemática. Para analizar la calidad de la organización matemática en torno a la función y la proporcionalidad directa del libro de texto, se ha utilizado como herramienta los indicadores de completitud de las organizaciones matemáticas locales.

En el capítulo V, realizamos el análisis de la organización matemática del libro de texto. Primero, hacemos una descripción del libro de texto analizado; luego, presentamos la organización matemática de la función y proporcionalidad directa; en seguida, analizamos la organización matemática usando como herramienta los indicadores de completitud de Fonseca (2004); y, en la última sección abordamos el proceso de algebrización de la proporcionalidad directa empleando los niveles de algebrización planteados por Bosch, Gascón y Bolea (2001).

En la última sección, presentamos las consideraciones finales y las sugerencias.

En la parte final de este trabajo se presentan las referencias y los anexos de la investigación.

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, presentamos los antecedentes, la justificación, el problema que abordamos y los propósitos planteados en nuestra investigación.

1.1. Antecedentes de investigación

Los antecedentes de esta investigación han sido organizados teniendo en cuenta los siguientes criterios: investigaciones relacionadas con dificultades del aprendizaje del concepto función lineal, investigaciones referidas al análisis de libros de texto del objeto matemático función lineal y proporcionalidad usando diversos enfoques e investigaciones sobre el análisis de libros de texto del objeto matemático función desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Investigaciones relacionadas con dificultades del aprendizaje del concepto función lineal

Planchart (2000), en una investigación sobre la visualización y la modelización en la adquisición del concepto de función, con estudiantes de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, planteó como objetivo identificar y analizar las dificultades cognitivas de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto de función. Al respecto, manifiesta que los estudiantes tienen dificultades en el manejo de las distintas representaciones semióticas del objeto matemático función. En particular, los resultados muestran que los estudiantes tienen dificultades en la conversión del sistema gráfico al sistema algebraico y propone la modelación como una alternativa didáctica para que los estudiantes puedan coordinar los distintos sistemas de representación. Tomando como base este antecedente, nosotros indagaremos si la organización matemática del libro de texto que analizamos presenta tareas que incluyen las distintas representaciones de la función, las conversiones entre ellas y tareas sobre modelización matemática.

De otro lado, Ramos (2005), en una investigación referida a la contextualización de las funciones, en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo de Venezuela, analiza la competencia de los alumnos en la resolución de situaciones contextualizadas en las que intervienen las funciones. Para ello, usó como marco teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Esta investigación concluye que el significado global del objeto personal función de los alumnos que han cursado la asignatura de "Introducción a la Matemática" no incorpora prácticas que permitan resolver la mayoría de problemas contextualizados no rutinarios en los que interviene el objeto función, debido a que los profesores que enseñan esta asignatura también presentan las mismas dificultades. De esta investigación, tomaremos algunos elementos para analizar si el libro de texto presenta en su organización matemática tareas contextualizadas. Es decir, tareas que incluyan las situaciones cotidianas de la vida real.

También Cuesta (2007), en una investigación referida al proceso de aprendizaje de los conceptos de función y sus valores extremos en estudiantes de economía de la Universidad Veracruzana de México, corroboró que muchos estudiantes no son capaces de establecer la relación entre las variables de la función, otros estudiantes logran definir el concepto de función, pero fracasan en decidir si una gráfica representa o no una función. La investigación comprobó la existencia de dificultades en tareas de interpretación y construcción del concepto de función, producidas por el efecto combinado de los significados que poseen los estudiantes sobre este concepto y del conocimiento que se tiene sobre los contextos en que se deben realizar dichas tareas. En base a esta investigación, en las tareas del libro de texto analizado buscaremos tareas que estén orientadas a establecer relaciones entre magnitudes.

Por su parte, Ospina (2012), en una investigación sobre las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal que tuvo como objetivo comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal, arribó a la siguiente conclusión: “Los estudiantes muestran dificultades en la conversión al registro algebraico desde otro registro que no sea el gráfico, esto tiene que ver con la falta de congruencia entre las representaciones semióticas del concepto” (p. 158). Este antecedente nos permite indagar en el libro de texto que analizamos tareas referidas a la conversión de las diferentes representaciones de la función.

Las investigaciones antes citadas evidencian que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje del objeto matemático función y función lineal. Algunas de estas dificultades son que los estudiantes no manejan las distintas representaciones de la función, no están preparados para resolver problemas de la vida cotidiana que incluyen el objeto matemático función, no son capaces de establecer relaciones entre las variables de la función, etc. En la investigación que realizamos, buscaremos si la organización matemática del libro de texto que analizamos presenta tipos de tareas sobre las distintas representaciones de la función, problemas de la vida cotidiana que incluyen el objeto matemático función y sobre las relaciones entre las variables de la función.

Investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto del objeto función lineal y proporcionalidad con otros enfoques

Guacaneme (2001), en un estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad, realizó un análisis de tres textos escolares de matemáticas de Colombia para el séptimo grado que abordan el estudio de la proporcionalidad. En el trabajo, se identificó que, en los textos estudiados, existen dos bloques temáticos claramente disociados. Un primer bloque aborda la razón y la proporción en un contexto aritmético; el segundo aborda el estudio de la proporcionalidad en el contexto de las magnitudes. Entre estos bloques no se establecen relaciones conceptuales de manera explícita, más allá de una eventual aplicación de la propiedad fundamental de las series de razones iguales en los problemas de reparto proporcional o el cálculo de un término desconocido de una proporción en la solución de problemas de regla de tres. Esta investigación es tomada como antecedente, porque evidencia que los libros de texto que ha analizado abordan la razón y proporción desde la aritmética sin establecer relación con la proporcionalidad y menos aún con la función lineal.

Por otro lado, Gúmera (2011), en una investigación sobre los registros de representación semiótica que aparecen en el estudio de los capítulos de proporcionalidad y la función lineal en los textos de matemáticas distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile a los estudiantes de secundaria, manifiesta que en los textos analizados, se propone el uso de variados registros de representación, sin embargo, ni en las formalizaciones ni en las actividades, se abre espacio al análisis y discusión de los elementos que forman parte de cada una de las representaciones promovidas. Esto trae como consecuencia que el estudiante tenga dificultades en actividades que exijan la conversión de registros. A través de los resultados del análisis, estableció el bajo nivel de articulación entre los registros utilizados para la proporcionalidad y la función lineal. Además, esta investigación manifiesta que:

> La importancia del análisis de los libros de texto, es que a través de este es posible reconocer el conocimiento del significado que se da a la Matemática. Además, en los libros de texto se pone de manifiesto un alineamiento con el marco curricular vigente y un modo de concebir la relación entre el profesor y el estudiante. (p. 4)

Esta investigación forma parte de nuestros antecedentes de investigación, ya que analiza libros de texto sobre el objeto matemático de nuestro interés, aunque la teoría con la que lo aborda es la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. También, tomamos en cuenta el hecho de que esta investigación señala que existe una relación entre los libros de texto y el programa curricular vigente que propone el Ministerio de Educación.

Investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto del objeto función desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Santana, Januario, Costa, Possani y Amaral (2010) realizaron un análisis del contenido de tres libros didácticos de matemática para el noveno grado de enseñanza fundamental del Brasil; en este análisis buscan identificar de qué forma los autores de los libros de texto abordan la introducción al concepto de función. El criterio del análisis fue la organización praxeológica presente en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard. Los resultados de esta investigación mostraron que la organización praxeológica presente en los tres libros analizados, al tratar la introducción al concepto de función, contempla pocas situaciones-problemas que permitan al alumno trabajar de forma autónoma, construyendo su propio proceso de aprendizaje. Este antecedente nos permitirá indagar si en la organización matemática del libro de texto que nosotros estamos analizando existen tareas referidas a situaciones de la vida cotidiana, es decir, tareas de contexto extramatemático.

También, Hurtado y Zuñiga (2011), en una investigación sobre la función cuadrática en los textos escolares de grado noveno, de la educación básica de Colombia, analizaron dos textos escolares con el fin de reconocer la coherencia que guarda la propuesta educativa del texto con los lineamientos curriculares respecto al pensamiento variacional que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia establece. En esta investigación, se usó como herramienta para el análisis de los libros de texto la TAD. Los investigadores concluyeron que en ambos textos se presenta un alto grado de completitud de las praxeologías matemáticas. Esta investigación se considera como antecedente, porque compara el contenido del libro de texto escolar analizado con los Estándares Básicos en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, y también porque las tareas, técnicas y tecnologías identificadas en los libros de texto que analizaron nos sirven como ejemplos para establecer los componentes de la organización matemática que estamos analizando.

Carrillo (2013) realizó un estudio sobre las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior, desde el enfoque de la TAD. En él, se describe y analiza las organizaciones matemáticas en torno a la función cuadrática en los libros de texto de enseñanza universitaria en la Escuela de Economía de la Universidad Nacional del Callao. En este trabajo se concluye que los libros de texto analizados presentan en su organización matemática un mayor número de tareas de contexto matemático, enfatizando la expresión algebraica de la función cuadrática, básicamente en contextos puramente matemáticos. Esta investigación forma parte de nuestros antecedentes de investigación porque la metodología que ha usado coincide con la metodología de nuestra investigación.

Por otra parte, el trabajo de Mayorga (2013) tuvo como propósito analizar las organizaciones matemáticas en el libro de texto titulado “Supermat Matemática”, en torno a la función lineal del tercer año de Educación Media de Venezuela. Dicho análisis está fundamentado en la TAD de Chevallard. Se caracterizó la Organización Matemática considerando los componentes praxeológicos y los indicadores de completitud de Fonseca (2004). Para ello, se identificaron los tipos de tareas y se describieron las técnicas con las cuales son abordadas y su contribución en el aprendizaje. La investigación concluye que la obra matemática analizada aborda las tareas a través de una sola técnica de resolución, no se refleja elementos praxeológicos como la tecnología y la teoría; además, se evidencia escasa existencia de tareas y técnicas inversas e interpretación de los resultados. Así mismo, se comprobó que el nivel del libro de texto analizado según los criterios de completitud de Fonseca (2004) es bajo. De este trabajo, tomamos como ejemplo las tareas y técnicas identificadas en el libro de texto que ha analizado.

De otro lado, García (2005) realizó una investigación en la que analiza algunos de los componentes del proceso de transposición didáctica que se realiza en la Educación Secundaria Obligatoria de España, sobre el ámbito de la “proporcionalidad entre magnitudes” y las “relaciones funcionales”. Para ello, además de analizar siete libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria, realiza el estudio detallado del último programa curricular oficial de la Comunidad Autónoma de Andalucía y luego, lleva a cabo una experimentación con dos grupos de estudiantes donde usa los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como metodología. Una de las conclusiones de esta investigación señala que:

> En definitiva, el análisis de los libros de texto viene a confirmar, de manera irrefutable, la desarticulación tanto en el estudio de la relación de proporcionalidad […] como en el estudio de la proporcionalidad junto con el resto de relaciones funcionales en la Educación Secundaria Obligatoria, que ya postulamos a partir del análisis de los documentos curriculares. Este hecho justifica la necesidad de abordar el problema de la articulación del estudio de las relaciones entre magnitudes en la Educación Secundaria. (p. 521)

Está investigación, a diferencia de los otros trabajos que conforman nuestros antecedentes usa la TAD y la Teoría de la Transposición Didáctica. Para analizar los libros de texto y el programa curricular la investigación ha elaborado un modelo epistemológico de referencia del saber matemático en cuestión. A esta investigación la tomamos como antecedente porque pone en evidencia el fenómeno de la desarticulación del estudio de las relaciones funcionales entre magnitudes en la Educación Secundaria en la organización matemática a enseñar propuesta tanto por el currículo como por los libros de texto.

También Gonzales (2014), en una investigación referida a la praxeología matemática de proporción en un texto universitario que se usa en el primer ciclo de la carrera de Arquitectura y Urbanismo en la PUCP, tuvo como objetivo describir y analizar la organización matemática propuesta para la enseñanza de los conceptos de escala y proporción del texto. Este trabajo de investigación utiliza como marco teórico la TAD. Una de las conclusiones de este trabajo es la siguiente:

> En el texto analizado se ha identificado el uso de una concepción de proporción como modelización proporcional, dejando en claro que la modelización ecuacional y funcional no son considerados, con ello se observa que la organización matemática que presenta el texto separa el estudio de la proporcionalidad de las relaciones funcionales. (p. 97)

Así mismo, esta investigación sugiere la posibilidad de “articular la noción de proporción con la noción de función lineal en el texto analizado, mediante la creación de tareas donde se incluya el modelo ecuacional con el modelo funcional. (p. 98)

Los trabajos de investigación antes citados servirán de base para la investigación que pretendemos realizar, ya que muestran la vigencia e importancia del estudio de la función lineal y su relación con la proporcionalidad directa, bajo el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

1.2. Justificación de la investigación

En esta sección expondremos las razones por las cuales es necesario llevar a cabo una investigación como la que pretendemos realizar. Para ello, tomamos en cuenta los antecedentes consignados, el Diseño Curricular Nacional (2009) del Perú, los Principios y Estándares para la Educación Matemática de la NCTM (2000), las evaluaciones internacionales y nacionales, y la importancia de los libros de texto en la enseñanza de la matemática.

En principio debemos manifestar que las investigaciones de Planchart (2000), Cuesta (2007) y Ospina (2012) muestran que tanto los estudiantes de educación secundaria como los de educación superior tienen dificultades para el aprendizaje del objeto matemático función. De otro lado, Santana *et al.* (2010) sostienen que apropiarse del concepto de función es un factor importante para que los alumnos conduzcan sus estudios en matemática a otras áreas del saber por las diversas aplicaciones que posee. De igual forma, Thomas (2010) afirma que las "funciones son una herramienta para describir el mundo real en términos matemáticos" (p. 1).

En segundo lugar, de acuerdo al Diseño Curricular Nacional de la educación básica regular del Perú (Perú, 2009), el estudio de las funciones ocupa un lugar importante en la educación secundaria, ya que se estudia desde el primero al quinto grado. En el primer grado, se estudia la noción de dependencia, función, variables dependientes e independientes, representación tabular y gráfica de funciones, dominio y rango de funciones lineales y la proporcionalidad directa e inversa. En el segundo grado, se trata la función lineal, la función lineal afín, el dominio y el rango de una función lineal, la representación verbal, tabular y grafica de funciones lineales y la proporcionalidad directa e inversa. En los grados siguientes, se estudia las funciones cuadráticas, la función valor absoluto, la función raíz cuadrada, las funciones trigonométricas, la función logarítmica y la función exponencial. En el Diseño Curricular Nacional vigente, se observa que la función lineal y la proporcionalidad directa se encuentran dentro del bloque de funciones del organizador número, relaciones y funciones.

Además, *Los Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000), señala que en la etapa 6-8 los estudiantes deben comprender y utilizar razones y proporciones para representar relaciones cuantitativas. En sus palabras:

> La soltura con la proporcionalidad conlleva mucho más que establecer la igualdad de dos razones y calcular un término desconocido; supone reconocer cantidades que estén relacionadas proporcionalmente y utilizar números, tablas, gráficos y ecuaciones para pensar sobre las cantidades y sus relaciones. La proporcionalidad integra y conecta muchos de los temas estudiados en la etapa 6-8. Aparece al estudiar funciones lineales de la forma $y = kx$, al considerar la distancia existente entre dos puntos de un mapa hecho a escala y la correspondiente distancia real, al usar la relación entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro, y cuando se razona sobre los datos que presenta un histograma de frecuencias relativas. (p. 221)

Así mismo, este documento precisa que los estudiantes en la etapa 9-12 deben comprender patrones, relaciones y funciones. Para ello, deberían generalizar patrones usando funciones; comprender relaciones y funciones, seleccionar y utilizar varias formas de representarlas y pasar con flexibilidad de unas a otras; analizar funciones de una variable para investigar tasas de cambio; comprender y realizar transformaciones con funciones como combinarlas aritméticamente; comprender y comparar las propiedades de las clases de funciones; e interpretar representaciones de funciones de dos variables. En particular, los estudiantes "en el nivel 9, tendrán que representar funciones lineales con tablas, gráficas, reglas verbales y simbólicas, y trabajar con estas representaciones e interpretarlas. También, deberán explorar algunas relaciones no lineales" (p. 301).

Por otro lado, la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) en al año 2004 ha llevado a cabo una evaluación a los estudiantes de tercero y quinto grado de educación secundaria del Perú. El informe pedagógico de resultados (Perú, 2005) muestra que el 74,1 % de los estudiantes que culminan el tercer grado de secundaria no han desarrollado adecuadamente sus habilidades matemáticas, ni ha incorporado los contenidos matemáticos necesarios para iniciar el tercer grado de secundaria. Este informe también indica que el 86,1% de los estudiantes que culminan el quinto grado de secundaria muestra no haber desarrollado adecuadamente sus habilidades matemáticas, ni haber incorporado los contenidos necesarios para iniciar el quinto grado de secundaria. En quinto grado de secundaria, no se llega a desarrollar todo lo propuesto por el diseño curricular. Los contenidos menos desarrollados son los relacionados con las funciones. La principal razón señalada por los docentes para no haber trabajado las capacidades relacionadas con este contenido está referida a que estas ya habrían sido desarrolladas en grados anteriores; sin embargo, los estudiantes no son capaces de enfrentarse con éxito a las situaciones relacionadas con esta importantísima noción matemática. Además, la evaluación para los estudiantes de tercer grado ha incluido una pregunta referida a determinar la regla de correspondencia de una función lineal a partir de una tabla numérica. La evaluación para los estudiantes de quinto grado incluía tres preguntas sobre función: la primera consistía en determinar la regla de correspondencia de una función afín a partir de una situación extramatemática; en la segunda pregunta, se da la regla de correspondencia de una función lineal y se pide evaluar la función para dos valores y encontrar la diferencia; y la tercera pregunta es sobre la interpretación del gráfico de una función en el plano cartesiano.

Así mismo, en el año 2006 se llevó a cabo el *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo* (SERCE) con la finalidad de evaluar y comparar el desempeño alcanzado por los estudiantes latinoamericanos de primaria en las áreas de Lenguaje, Matemática y Ciencias Naturales, así como elaborar un modelo de los factores asociados a dichos logros. Esta prueba se basa en el marco curricular común a los países participantes del estudio de acuerdo al enfoque de habilidades para la vida. La evaluación de matemáticas se enfoca en la capacidad del estudiante para utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar, comprender y actuar en el mundo real. Para evaluar los conocimientos matemáticos se establecieron dos dimensiones: dominios y procesos. Los dominios se definieron tomando en consideración los currículos oficiales, los libros de texto, las habilidades para la vida, la edad de los estudiantes y los aportes de la investigación en

Didáctica de la Matemática. Los dominios definidos en esta evaluación fueron: numérico, geométrico, de la medición, estadístico y variacional. El dominio variacional (del cambio) estaba referido al reconocimiento de regularidades y patrones, a la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia, a la noción de función y a la proporcionalidad (caso de la variación lineal) en contextos aritméticos y geométricos.

En la misma línea, el *Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes* (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en el año 2012 ha realizado una evaluación a los estudiantes de secundaria en la que el Perú participó conjuntamente con otros 64 países. El objetivo de PISA es conocer en qué medida los estudiantes de quince años de edad son capaces de utilizar los conocimientos y habilidades que han desarrollado, y que están relacionadas a las áreas de Lectura, Matemática y Ciencia, para hacer frente a las situaciones y desafíos que les plantea la sociedad actual con el fin de que puedan participar de manera pertinente en ella. El Informe Nacional del Perú (Perú, 2013a) de esta evaluación señala que la competencia matemática se evalúa con relación a cuatro categorías de contenido interrelacionadas entre sí: cantidad; espacio y forma; cambio y relaciones; e incertidumbre y datos. El hecho de que se considere el dominio cambio y relaciones para la evaluación de la competencia matemática de los estudiantes participantes es un indicio de la importancia del objeto matemático función en la formación de los estudiantes de educación secundaria.

Por otra parte, el libro de texto juega un papel importante en el sistema de enseñanza de nuestros países. Para Silva (2005), el libro de texto es actualmente uno de los recursos más eficaces a nuestra disposición, debido a que nos ofrece información, propone actividades, ayuda a organizar el trabajo en clase y contribuye en la preparación de las sesiones de aprendizaje del profesor. Las investigaciones de Santana *et al*. (2010), Gúmera (2011), Carrillo (2013) y Mayorga (2013) señalan que los libros de texto que analizaron en su organización matemática no presentan tipos tareas sobre las distintas representaciones de la función, frecuentemente incluyen tareas en contextos puramente matemáticos y consideran muy pocas tareas de la vida cotidiana en torno al objeto matemático función. En la misma línea, Guacaneme (2001), García (2005) y Gonzales (2014) manifiestan que, en los libros de texto analizados, no existe articulación entre la proporcionalidad y la función lineal, razón por la cual, sugieren la posibilidad de realizar investigaciones sobre la articulación entre la proporcionalidad y la función lineal.

Finalmente, debemos señalar que, desde el año 2005, el Ministerio de Educación, a través de la Dirección de Educación Secundaria, ha contemplado la dotación de textos para los estudiantes y docentes de las instituciones educativas públicas del ámbito nacional. Por esta razón, el libro de texto que analizamos es el libro de *Matemática 1* de secundaria del Grupo Editorial Norma que en el año 2012 el Ministerio de Educación entregó a todos los estudiantes y docentes del Perú.

Por los motivos antes expuestos, consideramos pertinente y vigente realizar una investigación sobre el análisis de una organización matemática de un libro de texto, y a partir de ella, establecer la articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa, ya que, en nuestro país son escasas las investigaciones de esta naturaleza.

1.3. Pregunta de investigación

Nuestra investigación se centra en el análisis de la organización matemática que un libro de texto de educación secundaria presenta, para el estudio del objeto matemático función lineal y su articulación con la proporcionalidad directa. Para ello, hemos seleccionado el libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria cuyo uso es promovido por el Ministerio de Educación del Perú.

El problema de investigación se resume en la siguiente interrogante:

¿Cuál es la organización matemática de la unidad, que contiene los temas de función y proporcionalidad directa, del libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria?

1.4. Objetivos de la investigación

1.4.1. Objetivo general

Analizar la organización matemática de la unidad, que contiene los temas de función y proporcionalidad directa, de un libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria y, a partir de ello, establecer si existe articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa.

1.4.2. Objetivos específicos

- Identificar una organización matemática de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa en un libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria.

- Determinar el grado de completitud de la organización matemática encontrada en la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa en el libro de texto seleccionado.
- Establecer la articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa, a partir de la organización matemática de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa en el libro de texto seleccionado.

En el siguiente capítulo, tratamos la perspectiva teórica en que se basa nuestro trabajo de investigación.

CAPÍTULO II: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo presentamos algunos elementos de la teoría que sustenta nuestro trabajo de investigación, la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante TAD. Dicha teoría fue propuesta por Chevallard (1999) y complementada por las investigaciones de Bosch (1994), Fonseca (2004), García (2005), Lucas (2010) y Serrano (2013). Utilizamos la TAD porque nos proporciona herramientas para estudiar los objetos matemáticos en los libros de texto, ya que el objeto primario de investigación de la TAD es el análisis de la actividad escolar matemática con sus relaciones humanas enmarcadas en ciertas instituciones sociales.

A continuación, desarrollamos los elementos teóricos de la TAD que utilizaremos en esta investigación.

2.1. Teoría antropológica de lo didáctico

La Teoría Antropológico de lo Didáctico tiene sus orígenes en la Teoría de la Transposición Didáctica propuesto por Chevallard. Al respecto, Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006) señalan que:

> La Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), aparece con las primeras formulaciones de la Teoría de la Transposición Didáctica. Puede ser considerada como un desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas, con la que comparte sus principios fundamentales. Dos problemas básicos pueden ser considerados como el origen de la TAD: Por una parte, la necesidad del investigador de emanciparse de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares; y por otro lado, el cuestionamiento de las condiciones y restricciones que afectan a todo proceso de difusión del conocimiento matemático en la escuela. (p. 38)

En la misma línea, Lucas (2010) afirma que:

> La TAD fue iniciada por el investigador francés Yves Chevallard a finales de los años 1980; básicamente es una posición de estudio cuyo eje central es el hombre aprendiendo y enseñando la Estructura Matemática a través de las relaciones humanas frente a la relatividad del saber científico con respecto a las instituciones sociales. […], la TAD se pregunta cuáles son las condiciones que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o “vivir”) en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las restricciones que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades. (p. 13)

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico el objeto es la actividad humana regular, como resultado de un saber, que puede ser saber sabio, saber a enseñar o saber enseñado, aplicado en las diferentes tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

De otro lado, Chevallard, Bosch y Gascón (2005) afirman que:

> La didáctica de las matemáticas es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio –o procesos didácticos- de cara a proponer explicaciones y respuestas solidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.), que se ven llevados a estudiar matemáticas. (p. 64)

La afirmación anterior nos permite sostener que el objeto de la didáctica de la matemática no solo es el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes en el aprendizaje de un concepto, ni solo la problemática del profesor con la enseñanza de este concepto, sino también la situación didáctica mediante la cual uno o varios estudiantes consiguen apropiarse de un saber matemático específico ya construido o en vías de construcción.

2.2. La noción de organización praxeológica

Según Chevallard (1999) la TAD sitúa la actividad matemática y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Además, toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología.

Al respecto Chevallard *et al.* (2005) manifiestan que:

> En la actividad matemática, como en cualquier otra actividad, hay dos partes que no pueden vivir la una sin la otra. Están, por un lado, las tareas y las técnicas y, por otro lado, las tecnologías y teorías. La primera parte es lo que podemos llamar la "práctica" o, en griego, la praxis. La segunda está hecha de elementos que permiten justificar y entender lo que se hace, es el ámbito del discurso razonado -implícito o explícito- sobre la práctica, lo que los griegos hubieran llamado logos. Y lo que tienes que recordar es que no hay praxis sin logos, pero que tampoco hay logos sin praxis. Los dos están unidos como las dos caras de una hoja de papel. Cuando juntamos las palabras griegas praxis y logos, sale, en castellano, la palabra praxeología. (p. 268)

Para Bosch *et al*. (2006), la TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologias (praxis+logos). Esta noción primitiva constituye la herramienta fundamental propuesta desde la TAD para modelizar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más. Concisamente, en toda actividad humana es posible distinguir entre:

- El nivel de la praxis o del “saber hacer”, que engloba un cierto tipo de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlos.
- El nivel de logos o del “saber” en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, y que recibe el nombre de tecnología. Dentro del

"saber" se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología de la tecnología que se denomina teoría).

Según Lucas (2010) el sistema formado por estos dos bloques, o cuatro componentes, constituye una praxeología u organización matemática que consideramos la unidad mínima en que puede ser descrita la actividad matemática, como sugiere el esquema que sigue:

Tabla 1. Componentes de una praxeología u organización matemática

Componentes	Bloque	Tipo de saber
Tarea	Práctico-técnico (Praxis)	Saber hacer
Técnica		
Tecnología	Tecnológico-teórico (Logos)	Saber
Teoría		

Fuente: Adaptado de Lucas (2010, p. 25)

2.3. Elementos de las praxeologías matemáticas

Los cuatro componentes de una organización praxeológica son: los tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría. Según Serrano (2013), estos elementos constituyen lo que consideramos como la unidad mínima de análisis de las actividades humanas. La autora representa simbólicamente una praxeología u organización matemática mediante estos cuatro componentes P = [T, τ, θ, Θ]. Donde: T es el tipo de tarea, τ es la técnica empleada para realizar la tarea, θ es la tecnología que justifica la técnica y Θ la teoría asociada a la tecnología. A continuación, pasamos a desarrollar cada una de ellas.

2.3.1. Tipos de tareas (T)

Un tipo de tarea es un conjunto de uno o más tareas. Una tarea propiamente dicha es una acción que debe ser hecho por alguien, en la mayoría de los casos son definidas por un verbo. Las tareas pueden ser agrupadas en tipos de tareas (T). Una tarea en una organización matemática puede ser presentada a los estudiantes de diferentes formas tales como un ejemplo, un ejercicio, un problema, una actividad, etc. Es decir, la forma de presentar una tarea depende del autor del libro de texto o del profesor.

Al respecto, Chevallard (1999) señala que:

> En la raíz de la noción de praxeología, se encuentran las nociones solidarias de tarea t, y de tipo de tareas, T. Cuando una tarea t forma parte de un tipo de tareas T, se escribirá t $\in$ T. En la mayoría de casos, una tarea (y el tipo de tareas asociado) se expresa por un verbo: limpiar la habitación, desarrollar la expresión literal dada, dividir un entero entre otro, saludar a un vecino, leer un manual de empleo, subir una escalera, integrar la función $x \rightarrow x \ln x$ entre $x = 1$ y $x = 2$, etc. (p. 2)

Una tarea es la acción sobre un objeto particular, un tipo de tareas es la acción que puede recaer sobre un diverso tipo de objetos y por último, los géneros de tareas son aquellas en las que se menciona la acción pero no se especifica el objeto sobre el que ésta recae. En este sentido, Chevallard (1999) sostiene que:

> La noción de tarea o, mejor, de tipo de tareas, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo. (p. 2)

Teniendo en cuenta lo anterior, por ejemplo, "determinar" es un género de tarea, determinar el dominio de una función, es un tipo (T) de tarea y determinar el dominio de función a partir de un conjunto de pares ordenados es una tarea (t) propiamente dicha de ese tipo.

Según Zanardi, Kneubil y Pereira (2013) la relación entre el tipo de tareas (T) y sus tareas (t_1, t_2, t_3, t_4, …, t_n) puede ser más fácilmente comprendida por medio del diagrama presentado en la figura 1.

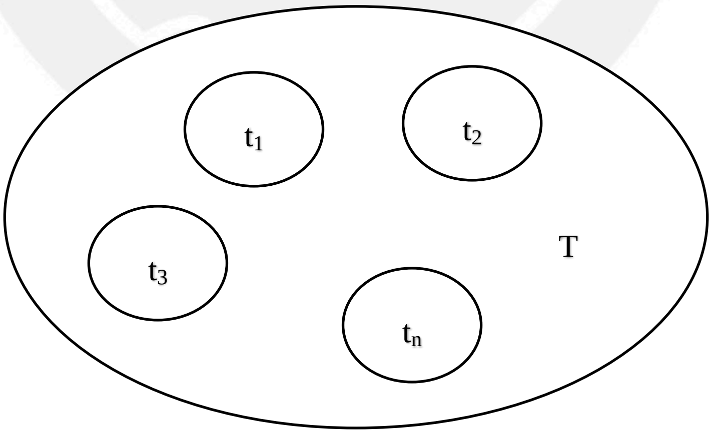


Figura 1. Diagrama de tipos de tareas y tareas asociadas a ella.
Fuente: Adaptado de Zanardi, Kneubil y Pereira (2013, p. 608)

Es importante señalar que el diagrama de la figura 1 nos indica que un tipo de tareas (T) tiene uno o más tareas (t_i). Es decir, un tipo de tarea incluye una o más tareas específicas que están relacionadas entre ellas.

De otro lado, Serrano (2013) sostiene que:

> Dada una institución, solo tendrían que considerarse como tipos de tareas T aquellas para las cuales se dispone de algún tipo de técnica τ con un mínimo entorno tecnológico [θ, Θ], más o menos explícito […]. Por simetría, se podría decir que las técnicas siempre dan respuesta a alguno de los tipos de tareas que se pueden plantear en una institución, aunque a veces puedan existir herramientas y maneras de hacer que respondan a cuestiones que ya no se plantean. (pp. 19 - 20)

Teniendo en cuenta la cita anterior, solo se considera como tipos de tareas a aquellos ejercicios, problemas o actividades para los cuales se tiene al menos una técnica que es justificada por una tecnología.

Para Chevallard *et al.* (2005) algunos ejemplos de tareas en educación secundaria son las siguientes actividades: racionalizar una fracción con denominador irracional y resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos variables.

En nuestro trabajo, a modo de ejemplo, presentamos la tabla 2 que contiene un tipo tarea y sus correspondientes tareas que hemos encontrado en el libro de texto de Matemática de primer grado de educación secundaria que el Ministerio de Educación del Perú entregó a los estudiantes en el año 2012.

Tabla 2. Ejemplo de tipo de tarea y sus correspondientes tareas.

Tipo de tarea	Tareas
Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.	- Reconocer funciones a partir de gráficos cartesianos.
	- Reconocer funciones a partir de diagramas sagitales.
	- Reconocer funciones a partir de tablas.
	- Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.

Fuente: Libro de texto de Matemática 1 (Perú, 2012a)

En seguida, presentamos un ejemplo de nuestra investigación para la tarea reconocer funciones a partir de diagramas sagitales que forma el tipo de tarea reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.

1. Analizamos las siguientes gráficas y determinamos si las relaciones son funciones:

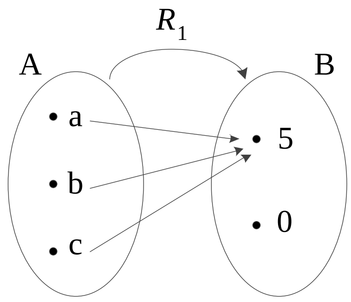


Figura 2. Ejemplo de una tarea.
Fuente: Libro de texto de Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 143)

En esta situación se observa que el libro de texto presenta la relación R_1 definida de A en B a partir de esta información el estudiante tiene que reconocer si la relación representada es una función.

2.3.2. Técnica (τ)

Una técnica es la manera de realizar una determinada tarea, es el método por el cual se realizan las tareas. La técnica es un saber-hacer y forma conjuntamente con la tarea el bloque práctico-técnico de una organización matemática.

Con respecto a este punto Chevallard (1999) afirma que:

> Sea pues T un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a T requiere (en principio) una manera de realizar las tareas $t \in T$: a una determinada manera de hacer, se le da aquí el nombre de técnica. […]. Una praxeología relativa al tipo de tareas *T* contiene pues, en principio, una técnica τ relativa a *T*. Contiene así un "bloque" designado por [*T*/τ], que se denomina bloque *práctico-técnico* y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina *un saber hacer*: un determinado tipo de tareas, *T* y una determinada manera, τ, de realizar las tareas de este tipo.

El autor también, manifiesta que la técnica τ no necesariamente resuelve todas las tareas t del tipo de tarea T, entonces puede existir otra técnica que sí resuelve la tarea T en mayor medida que la anterior, diremos en este caso que una técnica puede ser superior a otra. Es necesario considerar que una técnica τ, no necesariamente es algorítmica o casi algorítmica.

Además, Serrano (2013) manifiesta que el desarrollo de las técnicas genera nuevos tipos de tareas y provoca nuevas necesidades explicativas y justificativas.

De acuerdo, con Chevallard *et al.* (2005) para la tarea racionalizar el denominador de una fracción con expresiones radicales; la técnica consiste en "quitar los radicales" del denominador multiplicando al numerador y denominador de la fracción por el "conjugado" de la expresión radical que aparece en el denominador. Mientras que, para la tarea resolver el sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas existen, en la enseñanza secundaria, tres técnicas para resolverlo: substitución, igualación y reducción aparentemente independientes entre sí.

A continuación, presentamos un ejemplo de técnica para realizar la tarea que corresponde a la tarea reconocer funciones a partir de diagramas sagitales que hemos presentado como ejemplo en la sección anterior.

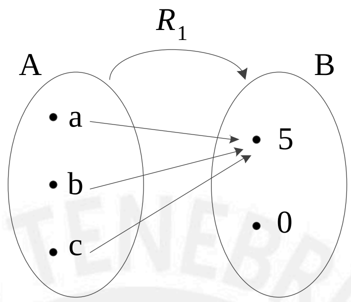


Figura 3. Ejemplo de una tarea y su respectiva técnica.
Fuente: Libro de texto de Matemática 1 (Perú, 2012a, 143)

Para ello, transcribimos el procedimiento que se sigue para realizar la tarea anterior:

> En este caso, se observa que para cada elemento de A existe una imagen en B (existencia) y que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B (unicidad). Por lo tanto: $R_1 = \{(a;\ 5);\ (b;\ 5);\ (c;\ 5)\}$ es una función. (Perú, 2012a, p.143)

Del procedimiento que el libro de texto realiza podríamos deducir los siguientes pasos para la realización de la tarea planteada: primero se verifica que cada elemento del conjunto A este relacionado con un elemento del conjunto B; y segundo se verifica que a cada elemento del conjunto A le corresponda un único elemento del conjunto B. Si se cumple estas dos condiciones, entonces el diagrama sagital representa una función.

2.3.3. Tecnología (θ)

La tecnología permite describir, explicar y justificar por qué una técnica funciona, son los conocimientos matemáticos que justifican la técnica. Las definiciones, axiomas y teoremas son tecnologías que validan la técnica. Además, si se maneja adecuadamente, puede originar nuevas técnicas.

Según Chevallard *et al*. (2005) una tecnología es un discurso matemático que justifica y permite entender cierta técnica.

De igual forma, Chevallard (1999) sostiene que:

> Se entiende por *tecnología*, y se indica generalmente por θ, un *discurso racional* –el *logos*- sobre la técnica -la *tekhnê*- τ , discurso cuyo primer objetivo es *justificar*

“racionalmente” la técnica τ, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo *T*, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución.

De acuerdo con el autor la tecnología es un discurso racional, es un discurso que cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica θ, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende. Una segunda función de la tecnología es la de explicar, de hacer inteligible, de aclarar la técnica. Por último, la tecnología también tiene como función la producción de nuevas técnicas, más eficientes y adaptadas a la realización de una determinada tarea.

En seguida, presentamos las tecnologías que justifica la técnica que se usa para realizar la tarea reconocer funciones a partir de diagramas sagitales.

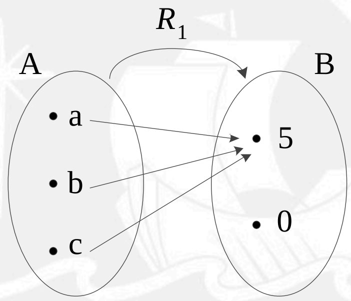


Figura 4. Ejemplo de una tarea y su respectiva tecnología.
Fuente: Libro de texto de Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 143)

En el libro de texto de *Matemática 1* que el Ministerio de Educación del Perú entregó a los estudiantes en el año 2012 hemos identificado las siguientes tecnologías para realizar la tarea anterior.

Por un lado, toma en cuenta la representación de una función mediante diagramas sagitales y para ello, presenta la tecnología que transcribimos en seguida.

θ_{10}: La representación de una función a través de flechas se denomina diagrama sagital.

De otro lado, el libro de texto que analizamos manifiesta para que una relación *f* entre dos conjuntos A y B sea una función de A en B, deben cumplirse dos condiciones:

θ_{16}: Existencia: para todo elemento de A, donde A es el conjunto de partida, existe una imagen en B, donde B es el conjunto de llegada. Esto se simboliza con:

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\ y \in \mathrm{B} /\ (x; y) \in f$$

θ_{17}: Unicidad: a cada valor del conjunto de partida le corresponde un único valor del conjunto de llegada. Por lo tanto:

$$(x;y) \in f \wedge (x;z) \in f \rightarrow y = z$$

La técnica que usa el libro de texto que se analiza, para realizar la tarea reconocer funciones a partir de diagramas sagitales se justifica en tres tecnologías: la representación de una función a través de un diagrama sagital, y en las condiciones de existencia y unicidad de la función.

2.3.4. Teoría (Θ)

La teoría justifica e explica las afirmaciones de la tecnología. Es el discurso racional sobre la tecnología. Ella tiene, en relación a la tecnología, el mismo papel que esta tiene en relación a la técnica, o sea, la teoría es la tecnología de la tecnología, la teoría es quien justifica, explica y genera tecnologías y que posibilita interpretar técnicas y probar tecnologías. La teoría viene a ser el campo matemático que justifica a las tecnologías.

Chevallard (1999), al respecto, señala que:

> El discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la teoría, Θ, que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica.

Para Chevallard *et al*. (2005), en primer lugar, hay que decir que a la tecnología de la tecnología la llamamos una teoría, la teoría de la técnica.

Según Serrano (2013), la teoría (asociada a una tecnología) es el discurso justificador de esa tecnología y constituye por decisión metodológica el último nivel de la justificación de la actividad.

La teoría que justifica las tecnologías que también justifica la técnica que se usa para realizar la tarea reconocer funciones a partir de diagramas sagitales del ejemplo que hemos propuesto es la teoría de funciones.

En seguida, en la tabla 3 se presenta el tipo de tarea, las tareas asociadas al tipo de tarea, la técnica, las tecnologías y la teoría del ejemplo de nuestro trabajo de investigación que hemos considerado para ilustrar los componentes de la organización matemática.

Tabla 3. Ejemplo de tipos de tareas, tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Tipo de tarea	Tareas	Técnicas	Tecnologías	Teorías
Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.	- Reconocer funciones a partir de gráficos cartesianos. - Reconocer funciones a partir de diagramas sagitales. - Reconocer funciones a partir de tablas. - Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.	Verificar que cada elemento del conjunto A este relacionado con un elemento del conjunto B. Verificar que a cada elemento del conjunto A le corresponda un único elemento del conjunto B.	Diagrama sagital de la función. Condición de existencia. Condición de unicidad.	Teoría de funciones.

Fuente: Libro de texto de Matemática 1 (Perú, 2012a)

2.4. Clases de praxeologías

Con la finalidad de tener herramientas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) hizo una clasificación de las organizaciones matemáticas de acuerdo al grado de complejidad de sus componentes. A continuación, se describe en forma breve cada una de ellas teniendo en cuenta los aportes de Fonseca (2004 y 2011).

- Una organización matemática es puntual (OMP) en una institución si está generada por lo que se considera en la institución como un único tipo de tareas.

  Para Fonseca (2004), son ejemplos de una OMP en educación secundaria los siguientes tipos de tareas: descomponer en factores un polinomio con raíces enteras, resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, entre otras.

- Una organización matemática es local (OML) en una institución si se obtiene como resultado de la integración de diversas organizaciones puntuales. Una OML permite plantear y resolver problemas que en las OMP iniciales no podían formularse con toda propiedad. Resulta, por tanto, que estas nuevas cuestiones problemáticas deberían constituir la “razón de ser” que dan sentido a la OML.

  De acuerdo con Fonseca (2004) un ejemplo de una OMP es el caso de la geometría en la enseñanza secundaria española, ya que las técnicas de la geometría analítica permiten resolver muchas de las tareas geométricas que no pueden llevarse a cabo con las técnicas de la geometría sintética.

- Una organización matemática es regional (OMR) en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una teoría matemática común Θ, de diversas OML.

  Según Fonseca (2004), se pueden considerar como ejemplos ilustrativos de una OMR la teoría de Galois, la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, el álgebra lineal, la teoría de la medida, etc.
- Una organización matemática es global (OMG), cuando surge agregando varias organizaciones regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

2.5. Completitud de las organizaciones matemáticas locales

De acuerdo con los trabajos de investigación llevados a cabo por Fonseca (2004), Lucas (2010) y Serrano (2013) se puede hablar del "grado de completitud" de una OML para ello se considera siete indicadores. Además, Fonseca, Casas, Bosch y Gascón (2009) afirman que los indicadores de completitud de las organizaciones matemáticas locales "analiza la calidad de la actividad matemática construida" (p. 3).

En seguida, describimos cada uno de los indicadores, para lo cual tomamos los trabajos de Fonseca (2004); Bosch, Fonseca y Gascón (2004) y Fonseca, Bosch y Gascón (2010).

OML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico

De acuerdo con este indicador, una OML está conformada por varios tipos de tareas relacionadas entre ellas a través de los elementos tecnológicos o mediante el desarrollo progresivo de las técnicas. Es decir, los tipos de tareas no deben estar aislados unas de otras. Fonseca (2004), al respecto, indica que:

> En una OML convivirán necesariamente varios tipos de tareas problemáticas relacionadas entre sí mediante sucesivos desarrollos de las técnicas. El grado de completitud dependerá entonces del grado de integración de todos los tipos de tareas. Entre éstos deben aparecer tipos de tareas asociados al "cuestionamiento tecnológico" de las técnicas de la OML esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas. Una OML será menos completa cuantos más tipos de tareas aisladas (esto es, realizables mediante técnicas que no estén relacionadas entre sí por ningún elemento tecnológico) existan en OML. (p. 181)

El cuestionamiento tecnológico de las técnicas refiere que en una OML deben existir un conjunto de tareas relacionadas con la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía, el alcance y la comparación entre las técnicas. La fiabilidad se refiere al buen funcionamiento de la técnica, en otras palabras, la técnica debe ofrecer seguridad y buenos resultados. La economía se refiere a que la técnica permite realizar una tarea en el menor tiempo y con el menor esfuerzo posible, es decir, con la menor cantidad de pasos. El alcance de una técnica consiste en que con ella se puede realizar la mayor cantidad de tareas existentes.

Para evidenciar que este indicador se cumple en la unidad del libro de texto analizado, indagamos que los tipos de tareas sobre función y proporcionalidad directa están relacionados entre ellas, y que el libro de texto presenta tipos de tareas sobre función y proporcionalidad asociados al cuestionamiento tecnológico; es decir, tareas sobre la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía, el alcance y la comparación entre técnicas.

El siguiente problema tomado del libro de texto de Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141) es un ejemplo para este indicador.

> *Carmen y Ana van a un parque de diversiones. La entrada para cada juego cuesta S/. 3.*
>
> *a) Identifica la variable independiente y la dependiente.*
>
> *b) Define la función estableciendo su regla de correspondencia.*
>
> **Fuente:** Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

En esta situación planteada se observa que hay dos tipos de tareas que se encuentran integrados. La tarea *identifica la variable independiente y la dependiente* pertenece al tipo de tarea identificar variables de una función, mientras que la tarea *define la función estableciendo su regla de correspondencia* pertenece al tipo de tarea determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín. Además, en esta situación planteada observamos que para hacer la segunda tarea (b) es necesario previamente realizar la tarea (a).

En relación a la existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, el siguiente problema es un ejemplo ilustrativo.

> *Determina el dominio y el rango de las funciones, según corresponda:*
>
> a) $f = \{(1; 3); (3; 9); (5; 15); (6; 18)\}$
>
> b) $h = \{(1; -1); (2; -2); (3; -3); (4; -4); (5; -5)\}$
>
> c) $g = \{(1; 0); (2; 0); (3; 0); (4; 0)\}$
>
> d) $f(x) = 2x + 1,\ x \in \{1; 2; 3; 4\}$
>
> e) $g(x) = 2 - x,\ x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
>
> **Fuente:** Adaptado de Matemática 3 (Sebastiani, s. f., p. 29)

En los ejercicios a), b) y c) la solución es casi de inmediato, ya que solo tenemos que escribir todas las primeras componentes de los pares ordenados en un conjunto a la que llamamos dominio. A las segundas componentes de los pares ordenados también escribimos en otro conjunto a la que llamamos rango de la función. Sin embargo, para resolver los ejercicios d) y e) la técnica que se usa para hacer los ejercicios anteriores, ya no funcionan; por lo tanto, se debe buscar otra técnica que permita resolver estas dos tareas.

OML2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas

Según este indicador, en una OML deben existir dos o más técnicas que resuelvan un tipo de tarea o alguna de las tareas del tipo, además deben existir criterios tecnológicos para elegir la técnica más pertinente, esto es, la técnica más económica y de mayor alcance. Al respecto, Fonseca (2004) señala que:

> Una OML será más completa en la medida que, dado un tipo concreto de tareas Tq de OML, *existan dos o más técnicas* (que pueden ser variaciones de una misma técnica) que permitan realizar algunas de las tareas concretas de ese tipo. Este indicador de la completitud comporta que en la OML existan, además, los *elementos tecnológicos que permiten discernir*, para cada tarea concreta, cuál es la técnica más fiable y económica para llevar a cabo dicha tarea. (pp. 181-182)

En el libro de texto analizado investigamos si se presenta dos o más técnicas para realizar las tareas y si existen criterios para escoger la técnica más económica y de mayor alcance.

En seguida, presentamos un ejemplo de una tarea tomado del libro de texto Saber Enciclopedia Escolar, cuyos autores son Capdevilla, Maestro, Chávez, Muñoz y Mallma (1983), en que se presenta dos técnicas para realizar la siguiente tarea:

Una fábrica paga 4690 Intis de sueldo a 7 trabajadores estables. ¿Cuánto pagará por sueldos al mes si debe aumentar a 12 el número de trabajadores?

Para resolver este problema hacemos una tabla de proporcionalidad.

÷ 7 × 12

Trabajadores	7	1	12
Sueldo	4 690	670	8 040

÷ 7 × 12

A 7 trabajadores le corresponde 4 690

A 1 trabajador le corresponde 4 690 ÷ 7 = 670

y a 12 trabajadores le corresponde 670 × 12 = 8 040

Esta forma de resolver este problema de regla de Tres se llama “por reducción a la unidad”.

También se puede resolver este problema calculando la cantidad desconocida como un cuarto proporcional.

Así:

a 7 trabajadores se les paga 4 690 Intis

a 12 trabajadores se les paga *x* Intis

O sea que:

$$\frac{7}{12} = \frac{4\ 690}{\boxed{x}}$$

$$x = \frac{4\ 690 \times 12}{7} = 8\ 040$$

La fábrica pagará en sueldos: 8 040 Intis.

Fuente: Adaptado de Capdevilla, Maestro, Chávez, Muñoz y Mallma (1983, p. 517)

En el ejemplo, podemos observar que para la tarea propuesta, el libro de texto citado presenta dos técnicas: la técnica de reducción a la unidad y la técnica denominada como cuarto proporcional.

OML3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas

Para hablar de la independencia de los objetos ostensivos, primero revisemos a que se refiere el término ostensivo. Bosch (1994) sostiene que:

> El adjetivo ostensivo está formado a partir del sustantivo *ostensión* que proviene del latín *osténdere*, “presentar con insistencia”, es decir ostentar. Al sustantivo ostensión se le puede asociar dos adjetivos: *ostensivo*, entendido como “que se muestra”, y *ostensible*, “susceptible de ser ostentado o mostrado”. De acuerdo con esta distinción que registran un gran número de lenguas latinas, llamaremos objeto ostensivo a todo objeto dotado de una naturaleza sensible, de cierta materialidad, y que, por ello, puede presentarse al sujeto humano como una realidad perceptible. Será pues un objeto ostensivo cualquier objeto material y, en particular, los sonidos (entre ellos los “morfemas” lingüísticos), los grafismos (entre los cuales se encuentran los “grafemas” que componen la escritura de las lenguas naturales o formales) y los gestos. (pp. 47-48)

Los objetos ostensivos para nosotros son las representaciones que usa el libro de texto con frecuencia en la actividad matemática para representar el objeto matemático en cuestión y estas son verbal, numérica, gráfica y algebraica.

Sobre la independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas, Fonseca (2004) sostiene que:

> La flexibilidad de las técnicas de una OML comporta, en particular, que éstas no se identifiquen rígidamente con los objetos ostensivos (en el sentido definido en Bosch, 1994) que las componen sino que, por el contrario, acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas y hasta de la tarea específica abordada dentro de un tipo de tareas. Esta independencia presupone, para comportar efectivamente una mayor eficacia de las técnicas, que en la OML existen criterios (más o menos explícitos) que permiten elegir adecuadamente la presentación ostensiva más adecuada de cada técnica para realizar cada tarea. (p. 182)

En la misma línea, Fonseca (2011) señala que los ostensivos (palabras, expresiones, escrituras, notaciones, etc.) que constituyen la "materia prima" de los elementos de la OM son suficientemente ricos y variados como para permitir diferentes representaciones de la actividad matemática. También, Fonseca, Pereira y Casas (2011), manifiestan que la independencia de los objetos ostensivos hace referencia a la "existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática" (p. 115). En otras palabras, en la actividad matemática se debe hacer uso de diferentes representaciones.

En el libro de texto para identificar la presencia de este indicador investigamos cuáles son las representaciones usadas en la ejecución de las tareas relacionadas con la función y la proporcionalidad directa, por otro lado, averiguamos que las tareas no haga referencia a una determinada representación para hacer uso en su ejecución. Es decir, no obligue a usar una representación ya predeterminada.

OML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

En una OML las tareas propuestas deben tener sus respectivas tareas inversas y las técnicas que se usan para hacer dichas tareas deben ser reversibles, de modo que permitan realizar las tareas inversas o en su defecto también deben existir técnicas inversas de alguna de las técnicas. Al respecto, Fonseca (2004) sostiene que:

> Otro indicador de la flexibilidad de las técnicas y, por lo tanto, del grado de completitud de la OML lo proporciona el hecho que existan en la OML técnicas inversas de algunas de las técnicas, es decir técnicas (no necesariamente únicas) que permiten realizar las tareas también "inversas", por ejemplo aquellas definidas intercambiando los datos y las incógnitas de la tarea inicial. (p. 182)

A modo de ilustración, presentamos algunas tareas directas y sus respectivas tareas inversas que han sido tomadas de Bosch, Fonseca y Gascón (2004).

Tabla 4. Ejemplo de tareas directas e inversas.

Tarea directa	Tarea inversa
Representar la gráfica a partir de la expresión analítica.	Expresar analíticamente una función a partir de la gráfica.
Resolver un sistema de ecuaciones lineales	Determinar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sus soluciones.
Traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.	Traducción del lenguaje algebraico al lenguaje natural.

Fuente: Adaptado de Bosch, Fonseca y Gascón (2004)

En seguida, presentamos un ejemplo de dos tareas inversas que hemos encontrado en el libro de texto de matemática (Perú, 2005) del cuarto grado de educación secundaria del Perú.

Tarea directa

Gráfica las funciones lineales de IR en IR, hallando las intersecciones con los ejes de coordenadas.

84) $f(x) = 7x + 1$

85) $g(x) = 0{,}5x + 1$

Fuente: Adaptado de Matemática 4 (Perú, 2005, p. 25)

Tarea inversa

Siguiendo los ejemplos propuestos en la tabla 4, la tarea inversa que corresponde a la tarea anterior es la siguiente:

3) Del gráfico que se muestra a continuación, halle la ecuación de la función.

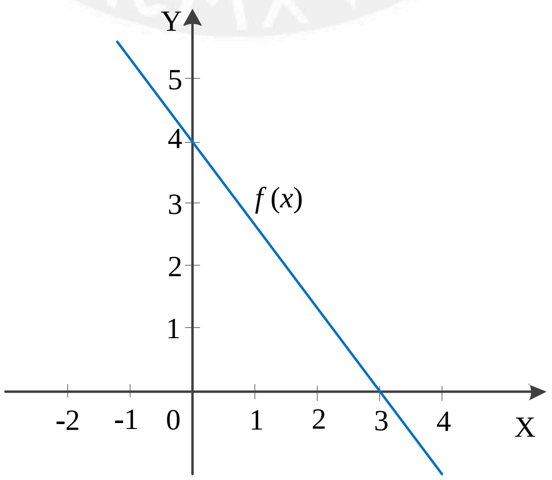


Figura 5. Ejemplo de una tarea inversa
Fuente: Adaptado de Matemática 4 (Perú, 2005, p. 43)

En la primera tarea, se trata de representar gráficamente la función en el plano cartesiano teniendo como información la regla de correspondencia de la función y resaltando los intersectos de la gráfica de la función con los ejes. Mientras, que en la segunda tarea se trata de determinar la regla de correspondencia de la función dado la representación gráfica de la función y los puntos de intersección con los ejes. Estas dos tareas son inversas.

En el libro de texto analizado investigamos la existencia de tareas inversas de algunas tareas, así como también, las técnicas inversas de las técnicas que se usan para hacer las tareas inversas de las tareas directas.

OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas

En una OML debe fomentarse la interpretación del funcionamiento de las técnicas y también la interpretación de los resultados de la aplicación de las técnicas. Para ello, se debe contar con los elementos tecnológicos necesarios. Sobre este indicador Fonseca (2004) afirma que:

> En la medida que una OML sea más completa, se cumplirá que, para cada técnica τ de OML, existirá en OML el tipo de tareas consistente en interpretar el funcionamiento y el resultado de aplicar τ para realizar una tarea o un tipo de tareas de OML. Este aspecto de la completitud implica, de nuevo, que en OML existen los elementos tecnológicos necesarios para llevar a cabo esta tarea de interpretación. De hecho esta “interpretación” deberá hacerse en referencia a la OML en su conjunto, en términos de los componentes de la OML y, especialmente, usando la tecnología que la caracteriza. Cuando la citada interpretación no es una tarea que forma parte de OML (lo que significa que no existen técnicas matemáticas en OML para llevar a cabo dicha tarea), entonces la interpretación en cuestión se deja bajo la responsabilidad exclusiva del estudiante y, naturalmente, acaba desapareciendo del contrato didáctico. (p. 182)

En el mismo sentido, Fonseca, Bosch y Gascón (2010) sostienen que “la OML en cuestión contiene tareas matemáticas cuya realización permite interpretar el funcionamiento de las técnicas matemáticas que se utilizan en dicha OM y, también, el resultado de aplicar dichas técnicas” (p. 12).

En el libro de texto que analizamos averiguamos la presencia de tareas que su ejecución permite interpretar el funcionamiento de las técnicas que se han usado para resolver los diferentes tipos de tareas y por el otro lado, buscamos tareas que permitan interpretar los resultados que se obtiene al aplicar las técnicas.

OML6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”

En una OML deben existir tareas matemáticas abiertas que incluyen tareas en que los datos y las incógnitas no sean fijos, sino más bien se toman como parámetros. Asimismo, se debe incluir tareas que puedan modelar situaciones económicas, físicas, biológicos, químicas, sociales, etc. Sobre este asunto Fonseca (2004) señala que:

> Una OML será más completa en la medida que existan tipos de tareas matemáticas "abiertas", esto es, tipos de tareas matemáticas en los que los datos y las incógnitas no están prefijados completamente de antemano. En un primer nivel, las tareas abiertas son aquellas en las que los datos son valores conocidos que se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son objetos matemáticos concretos (como, por ejemplo, valores numéricos) sino las relaciones que se establecen entre ellos en determinadas condiciones explicitadas en el enunciado de la tarea. Existe un segundo nivel de "tareas matemáticas abiertas" en las que el estudiante ha de decidir, ante una situación matemática o extramatemática determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas más pertinentes. En este segundo nivel se incluyen las tareas de modelización matemática. (p.183)

En la misma línea, Fonseca *et al*. (2010) afirman que:

> En la OM local en cuestión deben aparecer, de manera relevante, tareas matemáticas abiertas, esto es, tareas matemáticas cuyos datos e incógnitas no estén completamente determinados de antemano. Entre dicho tipo de tareas matemáticas deben citarse, en primer término, las que requieren un proceso de modelación matemática. (p. 12)

La tarea que presentamos a continuación es un ejemplo de una tarea matemática abierta y que modela matemáticamente una situación a través de la función lineal afín.

Describe una vela. Explica de qué color es, de qué material está fabricada y sus característica en cuenta la forma, longitud, peso, y grosor.

Mide cada 5 min el tamaño de la vela prendida por un período de una hora.

Elabora el gráfico de la relación ***Tiempo → Tamaño de la vela****. ¿En cuánto tiempo se consume la vela?*

Fuente: Adaptado del Libro de Matemática 1(APOYO, 2002, p. 33)

Consideramos que, esta tarea es una tarea "abierta", porque los datos y las incógnitas no están fijados previamente sino que depende de la longitud, grosor o forma que podría tener la vela. Por ejemplo, cuando se trabaja esta tarea en el aula con los estudiantes podríamos encontrar diferentes respuestas, pero el objeto matemático siempre está presentes en cada una de ellas. Por otro lado, es una tarea que modela el comportamiento de una situación extramatemática.

En el libro de texto que analizamos, por un lado investigamos si existen tareas en la que los datos y las incógnitas no estén fijados previamente y por el otro lado, buscamos tareas en la que se use la función y la proporcionalidad directa para la modelización matemática asociada a situaciones matemáticas y extramatemáticas.

OML7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica

Según Chevallard (1999), la tecnología tiene tres funciones: justificar la técnica, explicar la técnica y producir técnicas. Por ello, el bloque del saber debe permitir crear nuevas técnicas que amplíen los tipos de tarea. Sobre este asunto, Fonseca (2004) afirma que:

> Cada OML viene caracterizada por una tecnología, θ. El grado de completitud de OML dependerá también del grado de integración interna de los elementos tecnológicos (componentes de θ) y de la incidencia efectiva de θ sobre la práctica matemática que se lleva a cabo con las tareas y las técnicas de OML. En particular un indicador importante del grado de completitud de OML lo constituye la medida en que θ permita construir técnicas nuevas (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas de OML. (p. 183)

En el mismo sentido, Fonseca *et al*. (2010) manifiestan que:

> El discurso tecnológico-teórico de la OM local en cuestión, esto es, el discurso matemático que sirve para interpretar y justificar la práctica matemática, deben incidir efectivamente sobre ésta y debe permitir, en particular, construir técnicas matemáticas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas y flexibilizar la práctica matemática. (p. 13)

En el libro de texto analizado buscaremos que los elementos tecnológicos existentes sobre la función y la proporcionalidad directa permitan construir nuevas técnicas que permitan resolver nuevos tipos de tareas.

Además, cabe señalar que no existen organizaciones matemáticas completas ni organizaciones matemáticas incompletas. Pues, Fonseca (2004) manifiesta que:

> Hay que subrayar, […] que la noción de “completitud” es relativa. No tiene sentido hablar de OML “completas” ni de OML “incompletas”. Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos “completas” que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML7. (p. 183)

Por lo tanto, el grado de completitud de la organización matemática de la función y la proporcionalidad directa puede considerarse como más completa o menos completa, dependiendo de la presencia o ausencia de los siete indicadores descritos en la unidad del libro de texto que se analiza.

A continuación, abordamos aspectos de la rigidez de las matemáticas que se estudian en educación secundaria.

2.6. Aspectos de la rigidez de las matemáticas que se estudian en secundaria

También Fonseca (2004) planteó cinco aspectos sobre la rigidez de las matemáticas que se estudian en educación secundaria. Además, señala que estos cinco aspectos surgen de la negación de las características de los indicadores de completitud de una OML. A continuación, enunciaremos cada una de ellas y para ello tomamos a Fonseca (2004 y 2011) y Lucas (2010).

C1. Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica.

El autor señala que "en la universidad se considera que la "nomenclatura" es irrelevante y que un simple cambio de los símbolos que se utilizan para poner en marcha una técnica no puede representar una modificación importante de la actividad matemática" (p. 103).

Fonseca (2004) cita como ejemplos de esta dependencia: el desarrollo del cuadrado de un binomio, la fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado y las reglas de derivación de funciones.

Por su parte, Lucas (2010) propone como ejemplos de esta dependencia los siguientes casos: la representación gráfica de una función cuya variable independiente es *x*, el límite de una sucesión con variable *n*, el desarrollo del cuadrado de un binomio, la fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado completas está restringida a la determinación de la incógnita *x*, etc.

De modo similar, en los libros de texto del Perú, por ejemplo, para representar la variable independiente de una función se usa la letra *x* y para representar la variable dependiente se usa la letra *y*; para representar la constante de proporcionalidad de las magnitudes proporcionales también siempre se usa la letra *k*. Si se cambia estas letras por otras es probable que los estudiantes tengan dificultades. En educación secundaria la nomenclatura juega un papel importante para comprender el objeto matemático.

C2. La aplicación de una técnica en secundaria no incluye la interpretación del resultado.

El autor manifiesta que "en secundaria no se exige interpretar adecuadamente el resultado de aplicar una técnica para considerar que dicha técnica ha estado "correctamente" utilizada." (p. 103). Además, Fonseca y Casas (2009) manifiestan que en secundaria no se fomenta interpretar el resultado de la aplicación de una técnica debido a la poca incidencia del bloque tecnológico-teórico en las organizaciones matemáticas.

Por su parte, Lucas (2010) entre los diversos ejemplos asociados a esta conjetura considera: la aplicación de las técnicas de derivación de una función en secundaria no incluye la interpretación de la derivada como variación de la función; el cálculo del límite de una función racional no implica la interpretación de su valor relacionando la velocidad de convergencia del numerador con la velocidad de convergencia del denominador; la interpretación física de la derivada, muchas veces, también no es explorada en secundaria por no formar parte del contrato didáctico; y la discontinuidad no es interpretada como un cambio abrupto en el gráfico de la función.

C3. Inexistencia de dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea.

Según este aspecto de rigidez en educación secundaria se enfatiza el trabajo de una sola técnica. En otras palabras, en la ejecución de las tareas no se fomenta la aplicación de varias técnicas. Fonseca (2011) afirman que:

> En secundaria se utilizan técnicas aisladas y muy rígidas hasta el punto de que, aunque "existan" – en la práctica docente del profesor y en los libros de texto –dos técnicas diferentes para un mismo tipo de tareas, no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno – en el contrato didáctico – decidir cuál de las dos técnicas es la más pertinente para cada tarea concreta. Suele suceder, además, que una de las dos técnicas se acaba imponiendo, de tal manera que se convierte en la manera de resolver ese tipo de problemas en secundaria, adquiriendo un carácter autotecnológico y provocando la práctica desaparición de la técnica rival. (p. 103)

Asimismo, Lucas (2010) señala que en la enseñanza secundaria se utilizan técnicas rígidas y desarticuladas, y con referencia a las técnicas privilegiadas y su carácter autotecnológico, manifiesta de que:

> Esta técnica privilegiada adquiere un carácter auto-tecnológico y provoca la desaparición de las otras técnicas. Desde el punto de vista del alumno, la supremacía y mecanización de una sola técnica, provocan el desinterés en conocer varios procesos para resolver un problema matemático; condicionando el estudiante a creer que es suficiente el dominio de una solo técnica para alcanzar el éxito en las matemáticas, no siendo necesario el estudio de otras posibles técnicas que pueden resolver el problema. (p. 58)

Según Fonseca (2004), podemos citar, como ejemplos de técnicas autotecnológicas, la 'regla de tres', la regla de derivación de funciones polinómicas y la 'regla de Ruffini'" (p.47).

C4. No reversión de las técnicas para realizar la tarea "inversa" de una tarea dada.

En la enseñanza secundaria no se acostumbra proponer tareas inversas por consiguiente no se desarrollan técnicas para ejecutar las tareas inversas de las tareas directas.

Sobre este aspecto de rigidez Fonseca (2011) manifiesta que:

> Uno de los aspectos más importantes de la rigidez de la OM que se estudia en secundaria se manifiesta en la no reversión de las técnicas matemáticas correspondientes. En términos del contrato didáctico podemos decir que, en secundaria, no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno invertir una técnica para llevar a cabo la tarea inversa. (p. 104)

Con referencia a este asunto, Lucas (2010) señala que:

> En términos del contrato didáctico podemos decir que, en Secundaria, no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno invertir una técnica para llevar a cabo la tarea inversa. Podría decirse, más en general, que el contrato didáctico en S no asigna al alumno la responsabilidad de modificar una técnica "conocida" de manera adecuada para llevar a cabo una tarea un poco diferente a la tarea inicial. (p. 59)

Por último, es conveniente resaltar que para Lucas esta conjetura implica que cuando existen dos tareas "inversas" entre sí (esto es, tareas con los datos y las incógnitas intercambiados) las correspondientes técnicas suelen tratarse como si fueron "independientes". Por ejemplo, la substitución de la tarea usual "resolver un sistema de ecuaciones lineales" por la tarea inversa "dada la solución escribir un sistema de ecuaciones lineales" representa una situación problemática para los estudiantes, una vez que la tarea inversa está ausente en los manuales escolares y, consecuentemente los alumnos no están acostumbrados a este tipo de tarea.

C5. Ausencia de situaciones abiertas de modelación.

De acuerdo con este aspecto de rigidez, en educación secundaria las tareas que se proponen a los estudiantes contienen datos ya fijados de antemano, y se da poca importancia a las actividades de modelización matemática. Al respecto, Fonseca (2011) señalan que:

> La ausencia de técnicas explícitas de modelación comporta que, en ambas instituciones (secundaria-universidad), la modelación matemática constituya una de las actividades más problemáticas y menos reguladas. […], se suele considerar que las modelaciones matemáticas que se realizan en secundaria son simples "cambios de lenguaje" o "cambios de nomenclatura" triviales que no tienen la categoría de "verdaderas" técnicas matemáticas. (p. 104)

En la misma línea, Fonseca y Casas (2009) dicen que:

> Los *problemas escolares* se presentan, tanto en S [secundaria] como en U [universidad], con enunciados muy cerrados en los que figuran como "datos" todos los que se necesitan (exactamente) para resolver el problema sin que falte ni sobre ninguno. Raramente se presenta una situación abierta donde el estudiante deba decidir cuáles son los datos que se necesitan para formular correctamente un problema matemático. (pp. 123-124)

Dentro de esta perspectiva, Lucas (2010) también sostiene que, "en la institución secundaria, los problemas matemáticos se presentan aislados, sin encadenamiento, los ítems poco articulados entre sí, con enunciados cerrados en que figuran todos los datos necesarios para la resolución de la situación problemática" (p. 60).

De ahí que, para Fonseca (2004) "por ejemplo, los problemas de combinatoria y de probabilidad (pero también de optimización, entre otros) se tratan como si las relaciones entre el *sistema a modelizar* y el *modelo matemático* de dicho sistema fueran transparentes y no problemáticas" (p. 48).

En este capítulo, hemos expuesto algunos aspectos de la Teoría Antropológico de lo Didáctico de Chevallard y los indicadores de completitud de una organización matemática local propuesto por Fonseca. En el capítulo, que continúa realizamos el estudio de la función y la proporcionalidad directa.

CAPÍTULO III: ESTUDIO DE LA FUNCIÓN Y LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA

En este capítulo estudiamos el objeto matemático de nuestra investigación desde dos perspectivas: desde el punto de vista matemático y didáctico. Para realizar el estudio matemático de la función y la proporcionalidad directa, hacemos uso de libros de texto de matemática como: Lages (1991), Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000) y complementamos con los libros de Stewart, Redlin y Watson (2007) y Thomas (2010). Luego, para realizar el estudio didáctico de la función lineal y la proporcionalidad directa en la educación básica regular se revisa las distintas estructuras curriculares, los Mapas de Progreso y los libros de texto que el Ministerio de Educación entregó a los estudiantes del Perú en los últimos años. La ruta que seguimos para realizar el estudio es primero tener un panorama general de la función matemática para luego centrarnos con más profundidad en la función lineal y la proporcionalidad directa.

3.1. La función y proporcionalidad directa desde la perspectiva matemática

Para el estudio del objeto matemático hacemos uso del volumen uno del libro "La Matemática de la Enseñanza Media" de Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000). El libro está estructurado en nueve capítulos. El objeto matemático función y proporcionalidad directa se aborda en los capítulos tres y cinco.

A continuación, desarrollamos algunos aspectos relacionados con la función y la proporcionalidad directa.

3.1.1. La definición de función

En la sección 3.1 del capítulo tres Lages, Pinto, Wagner y Morgado (2000) presentan la siguiente definición de función:

> Dados dos conjuntos X, Y, una función f: $X \rightarrow Y$ (se lee "una función de X en Y") es una regla (o conjunto de instrucciones) que dice como asociar a cada elemento $x \in X$ un elemento $y = f(x) \in Y$. El conjunto X se llama dominio e Y es el contradominio de la función f. Para cada $x \in X$, el elemento $f(x) \in Y$ se llama la imagen de x por la función f, o el valor asumido por la función f en el punto $x \in X$. Se escribe $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f transforma (o lleva) x en $f(x)$. (p. 35)

Consideramos que se usa el término función para describir la dependencia de una cantidad sobre otra. El dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida, y el rango de la función es el conjunto de todos los valores que f toma.

Además, los autores citados manifiestan que son ejemplos de funciones la función identidad f: $X \rightarrow X$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$ y las funciones constantes $f : X \rightarrow Y$, donde se toma un elemento $c \in Y$ y se pone $f(x) = c$ para todo $x \in X$.

Asimismo, Lages *et al.* (2000) realizan dos recomendaciones que debemos tener en cuenta:

1. Es importante resaltar que $f(x)$ es la imagen del elemento $x \in X$ por la función f, o el valor de la función f en el punto $x \in X$. Los libros antiguos, bien como algunos actuales, principalmente los de Cálculo, acostumbran decir "la función $f(x)$" cuando deberían decir "la función f". Algunas veces este lenguaje inexacto vuelve la comunicación más rápida y hace difícil resistir a la tentación de usarla. Pero es indispensable a cada momento tener la noción exacta de lo que se está haciendo.

2. También se debe observar que una función consta de tres ingredientes: dominio, contradominio y la ley de correspondencia $x \rightarrow f(x)$. Incluso cuando decimos simplemente "la función f", quedan sobrentendidos su dominio X y su contradominio Y. Sin que ellos sean especificados no existe la función.

Es importante señalar que para Lages *et al.* (2000) son ejemplos de funciones las siguientes relaciones de correspondencia:

1. Sea X el conjunto de los triángulos del plano $\prod$ y R el conjunto de los números reales. Si, a cada $t \in X$, hacemos corresponder el número real $f(t)$ que corresponde a la medida del área del triángulo t, obtendremos una función $f : X \rightarrow R$.

2. Sea S el conjunto de los segmentos del plano $\prod$ y Δ el conjunto de las rectas de ese mismo plano. La regla que asocia a cada segmento $AB \in S$ su mediatriz $g(AB)$ define una función $g : S \rightarrow \Delta$.

3. La correspondencia que asocia a cada número natural n su sucesor $n + 1$ define una función $s : N \rightarrow N$, con $s(n) = n + 1$.

De otro lado, Lages *et al.* (2000) indican que:

> Prácticamente todos los textos escolares de uso en el país (Brasil) definen una función $f : X \rightarrow Y$ como un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ con las propiedades $G1$ y $G2$ arriba enunciadas. Esa definición presenta el inconveniente de ser formal, estática y no transmitir la idea intuitiva de función como correspondencia,

> transformación, dependencia (una magnitud función de otra) o resultado de un movimiento. Los matemáticos y los usuarios de la Matemática miran a una función como una correspondencia, no como un conjunto de pares ordenados. (p. 76)

En relación con ésta última cita, debemos señalar que existe dos posibilidades para presentar la función a los estudiantes: como un tipo de relación especial y como una correspondencia. La función como una correspondencia está asociada a la idea de variación, es decir, permite analizar cómo cambia el valor de una variable cuando la otra cambia.

3.1.2. Los tipos de definición de función

Para esta investigación es importante considerar las múltiples definiciones de función, ya que las tareas existentes en los libros de texto de matemática de educación secundaria hacen uso de una variedad de definiciones de función. A continuación, describimos brevemente cada una de ellas.

Según Hitt (2002), las cuatro definiciones más comunes que se han presentado en los libros de texto a lo largo del siglo XX son las siguientes:

a) Función en términos de variable: una función es una variable relacionada con otra variable tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera.

   Un ejemplo de esta definición en educación secundaria es la definición que presenta el libro de texto de Matemática 3 de Santillana (2008):

   > Una función es una relación entre magnitudes o variables numéricas, x e y, de modo que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. (p. 176)

b) Función en términos de conjunto de parejas ordenadas: una función es un conjunto de pares ordenados, no dos de los cuales tiene la misma primera componente.

   La definición del libro de texto de Matemática 4 del Ministerio de Educación del año 2008, es un ejemplo para este tipo de definición:

   > Dados dos conjuntos no vacíos A y B y una relación $f \subset A\times B$, decimos que f es una función de A en B si para cada elemento x que pertenece a A, le corresponde a lo más un elemento y perteneciente a B, tal que el par ordenado $(x\ ;\ y) \in f$. (p. 11)

c) Función en términos de regla de correspondencia: una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada valor de x cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B.

Un ejemplo de este tipo de definición en educación secundaria es la definición que presenta el libro de texto Matemática 5 del Ministerio de Educación entregado en el año 2005:

> Se llama función real de variable real a toda función *f* de *IR* en *IR*, definida por una regla de correspondencia que se puede expresar como $y = f(x)$, donde la variable "*x*" recibe el nombre de variable independiente y la variable "*y*" el de variable dependiente. (p. 28)

d) Función en ambiente logo: una función es un procedimiento P que tiene la propiedad de que cualesquiera dos apelaciones a P con las mismas entradas producen las mismas salidas.

Para Planchart (2000), "es fundamental escoger la definición de función de acuerdo a los objetivos, niveles e intereses que tenga el estudiante y lo que propongan los programas y los profesores en el estudio de la matemática en general" (p. 31).

De otro lado, Hitt (2000) citado en Planchart (2000), con respecto a la definición de función sostiene que:

> Es importante desarrollar la idea intuitiva de variación para la adquisición del concepto de función. Por esta razón, se considera que la definición en términos de variable independiente y dependiente resulta ser la más adecuada para el nivel medio. Esta definición a la que se refiere está vinculada a problemas de la vida cotidiana. La definición en términos de correspondencia sería adecuada para ser utilizada en el nivel superior y la definición conjuntista sería más bien para estudiantes de la carrera de matemáticas. (pp. 31-32).

De acuerdo con este autor la definición más apropiada para los estudiantes de educación secundaria es la definición en términos de variable.

3.1.3. Las formas de representación de la función

Según Thomas (2010), una función puede representarse mediante "una ecuación, una gráfica, una tabla numérica o mediante una descripción verbal" (p. 1).

De acuerdo con Stewart *et al.* (2007), se puede describir una función específica en las cuatro formas siguientes:

- Verbal (mediante una descripción en palabras)
- Algebraica (mediante una formula explicita)
- Visual (por medio de una gráfica)
- Numérica (por medio de una tabla de valores)

Además, Stewart *et al*. (2007), señalan que "una función simple se puede representar por cuatro formas, y suele ser útil ir de una representación a otra para comprender mejor la función. Sin embargo, ciertas funciones se describen de manera más natural con un método que con otros" (p. 154).

Según Larson y Hostetler (2001), citado en Planchart (2000), las funciones comúnmente están representadas en cuatro formas:

- Verbalmente por una oración que describe la variable de entrada está relacionada a la variable de salida.
- Numéricamente por una tabla o lista de pares ordenados que hace corresponder un valor de entrada con un valor de salida.
- Gráficamente por puntos sobre una gráfica en un plano coordenado en el cual los valores de entradas son representados por el eje horizontal y los valores de salida por el eje vertical.
- Algebraicamente por una ecuación de dos variables.

En esta investigación identificamos que tipos de representaciones de función usa el libro de texto de matemática de primer grado de educación en sus ejemplos y ejercicios.

3.1.4. El gráfico de una función

Como señala Lages *et al.* (2000) el gráfico de una función f: $X \to Y$ es el subconjunto $G(f)$ del producto cartesiano $X \times Y$ formado por todo los pares ordenados (x, y) donde x es un punto cualquiera de X e $y = f(x)$. Así:

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \,;\, y = f(x)\} = \{(x, f(x));\, x \in X\}$$

Para que un subconjunto $G \subset X \times Y$ sea el gráfico de alguna función f: $X \to Y$ es necesario y suficiente que G cumpla las siguientes condiciones:

$G1$: Para todo $x \in X$ existe un par ordenado $(x, y) \in G$ cuya primera ordenada es x.

$G2$: Si $p = (x, y)$ y $p' = (x, y')$ son pares pertenecientes a G con la misma primera coordenada x entonces $y = y'$ (esto es, $p = p'$).

Está claro que estas condiciones pueden ser resumidas en una, diciéndose que para cada $x \in X$ existe un, y solamente un, $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$.

3.1.5. La función lineal afín

Según Lages *et al.* (2000) “una función $f : R \to R$ se llama afín cuando existen constantes a, b $\in R$ tales que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$” (p. 81). Lages *et al.* plantean que la función identidad $f : R \to R$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in R$ es afín. También son funciones afines las traslaciones $f : R \to R$, $f(x) = x + b$, inclusive son casos particulares de funciones afines las funciones lineales, $f(x) = ax$ y las funciones constantes $f(x) = b$.

Para los autores arriba citados es posible, mediante criterios como los que presentamos a continuación, saber que cierta función $f : R \to R$ es afín sin que los coeficientes a y b sean dados explícitamente. En este caso, se obtiene b como $b = f(0)$ a veces se llama valor inicial de la función f. En cuanto al coeficiente a, puede ser determinado a partir del conocimiento de los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ que la función f asume en dos puntos distintos (pero arbitrarios) x_1 y x_2. En efecto, conocidos $f(x_1) = ax_1 + b$ y $f(x_2) = ax_2 + b$ obtenemos $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 – x_1)$ por lo tanto:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dados x, $x + h \in R$ con $h \neq 0$, el número $a = [f(x + h) - f(x)]/h$ se llama la tasa de crecimiento o tasa de variación de la función f en el intervalo de extremos x, $x + h$.

El gráfico G de una función afín $f : x \to ax + b$ es una línea recta. Para ver esto basta demostrar que tres puntos cualesquiera $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ y $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ de ese gráfico son colineales. Para que esto ocurra, es necesario y suficiente que el mayor de los tres números $d(P_1 , P_2)$, $d(P_2 , P_3)$ y $d(P_1 , P_3)$ sea igual a la suma de los otros dos. Ahora, podemos siempre suponer que las abscisas x_1 , x_2 y x_3 fueron numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. La fórmula de la distancia entre dos puntos nos da:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

De ahí se sigue inmediatamente que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

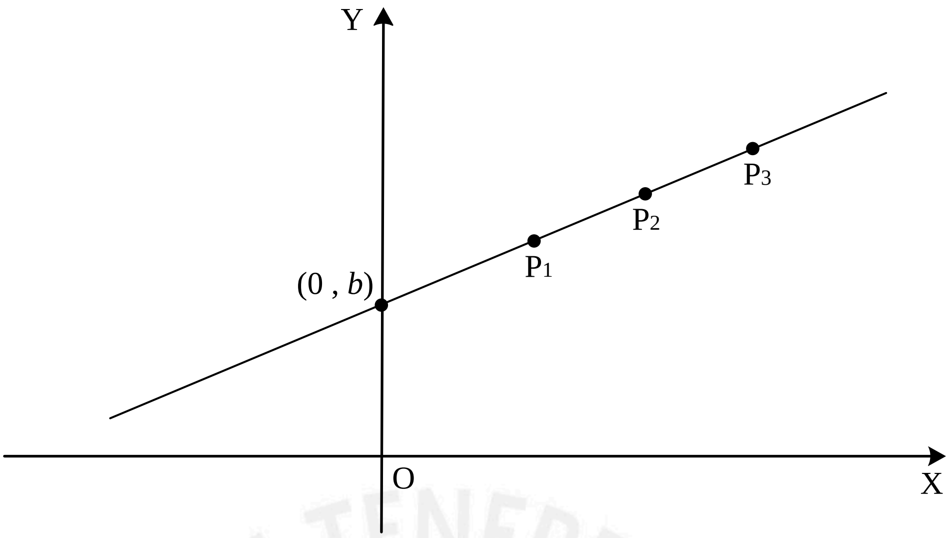


Figura 6. Gráfico de la función afín
Fuente: Adaptado de Lages *et al*. (2000, p. 83)

Desde el punto de vista geométrico, *b* es la ordenada del punto donde la recta, que es el gráfico de la función $f : x \to ax + b$, interseca el eje *OY*. El número *a* se llama la inclinación, o coeficiente angular, de esa recta (en relación al eje horizontal *OX*). Mientras mayor es el valor de *a* más la recta se aleja de la posición horizontal. Cuando $a > 0$, el gráfico de f es una recta ascendente y cuando $a < 0$, la recta es descendente.

A continuación presentamos algunos comentarios que Lages *et al.* (2000) plantean sobre la función afín:

1. Si la función afín *f* está dado por $f(x) = ax + b$, no es adecuado llamar al número *a* de coeficiente angular de la función *f*. El nombre más apropiado, que usamos, es tasa de variación (o tasa de crecimiento). En primer lugar no hay, en la mayoría de los casos, ningún ángulo en el problema estudiado. En segundo lugar, aun considerando el gráfico de *f*, el ángulo que hace con el eje horizontal depende de las unidades escogidas para medir las magnitudes *x* y $f(x)$. En resumen: se tiene tasa de variación de una función y coeficiente angular de una recta.

2. La mayoría de nuestros textos escolares se refiere a la función afín como "función de primer grado". Esa nomenclatura sugiere la pregunta: ¿Qué es el grado de una función? La función no tiene grado. El que posee grado es el polinomio.

3.1.6. La función lineal

Para Lages *et al.* (2000) "la función lineal, dada por la fórmula $f(x) = ax$, es el modelo matemático para los problemas de proporcionalidad" (p. 86). Además señala que el siguiente teorema es la llave para determinar, en todas las situaciones, si una función dada es o no lineal.

> Teorema fundamental: Sea $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ una función creciente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes: (1) $f(nx) = n\,f(x)$ para todo $n \in \mathrm{Z}$ y todo $x \in \mathrm{R}$. (2) Poniendo $a = f(1)$, se tiene $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathrm{R}$. (3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para cualquier $x, y \in \mathrm{R}$. (p. 86)

Consideramos que este teorema es de suma importancia para identificar a la función lineal en cualquier situación. La definición de función lineal de Lages *et al.* (2000), se usa en los documentos oficiales del Ministerio de Educación del Perú, tal como por ejemplo los libros de texto que se entrega a los estudiantes.

3.1.7. La proporcionalidad directa

Lages *et al.* (2000) manifiesta que "la proporcionalidad es, probablemente, la noción matemática más difundida en la cultura de todos los pueblos y su uso universal data de milenios" (p. 86). Luego presentan la definición de un compendio antiguo muy utilizado en el Brasil cuya primera edición ocurrió en 1883 y tuvo más de ochenta ediciones. El título es "Aritmética Progresiva" de Antonio Trajano que define la proporcionalidad de la siguiente manera:

> Se dice que dos magnitudes son proporcionales cuando ellas se corresponden de tal modo que, multiplicándose una cantidad de una de ellas por un número, la cantidad correspondiente de la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número. En el primer caso, la proporcionalidad se llama directa y, en el segundo, inversa; las magnitudes se dicen directamente proporcionales o inversamente proporcionales. (Citado por Lages *et al*., 2000, 86)

Así mismo, Lages *et al.* (2000) definen la proporcionalidad directa e inversa como una función:

> Una proporcionalidad es una función $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tal que, para cualesquiera números reales c, x se tiene $f(cx) = c.f(x)$ (proporcionalidad directa) o $f(cx) = f(x)/c$, si $c \neq 0$ (proporcionalidad inversa). (p. 86)

Por su parte Lages (1991) nos dice que:

> Supongamos que una magnitud y sea una función de una magnitud x, esto es $y = f(x)$. Diremos que y es directamente proporcional a x cuando las siguientes condiciones sean satisfechas: (1) y es una función creciente de x; (2) si multiplicamos x por un número natural n, el valor correspondiente de y también queda multiplicada por n. En términos matemáticos: $f(n.x) = n.f(x)$, para todo valor de x y todo $n \in \mathrm{N}$. (p. 127)

La definición de proporcionalidad directa propuesto por Lages *et al.* (2000) articula la función lineal con la proporcionalidad directa, ya que considera a la función lineal como el modelo matemático para resolver los problemas de proporcionalidad directa. Por ello, a la función lineal también se le denomina función de proporcionalidad directa.

3.2. La función lineal y proporcionalidad directa desde la perspectiva didáctica

En esta sección, realizamos un estudio de la función lineal y proporcionalidad directa desde la perspectiva didáctica. Para ello, recurrimos a los diferentes programas curriculares que han regido el sistema educativo del Perú en los últimos años, seguidamente revisamos los diferentes libros de texto y finalmente hacemos una revisión del proceso de algebrización de proporcionalidad. La finalidad de este estudio es obtener información sobre la articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa tanto en las estructuras curriculares como en los libros de texto.

3.2.1. La función lineal y la proporcionalidad directa en los programas curriculares

En esta sección hacemos una revisión de algunos Programas Curriculares de Educación Secundaria que el Ministerio de Educación del Perú ha implementado en los últimos años. Tomamos en cuenta las estructuras curriculares de los años 1998, 2002, 2004, 2005 y 2009 porque marcan hitos de cambio en el sistema educativo del Perú. Además, revisamos el mapa de progreso de cambio y relaciones.

3.2.1.1. Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de 1998

La Unidad de Desarrollo Curricular y Recursos Educativos para la Educación Secundaria de la Dirección Nacional de Educación Secundaria y Superior Tecnológica ha elaborado este Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria y puso en consideración de toda la comunidad educativa del país en el año 1998. Las competencias y los contenidos del área de matemática están articulados en tres componentes: sistemas numéricos y funciones, geometría y organización y gestión de datos. El componente sistemas numéricos y funciones incluye el estudio de los números y sus relaciones, álgebra y funciones, etc.

En el primer grado de educación secundaria, cuyas edades fluctúa entre los 12 años, se aborda los siguientes contenidos conceptuales: Funciones: regla de correspondencia; diagramas, tablas y gráficos; proporcionalidad, función rectilínea. Los contenidos procedimentales que se pretende desarrollar usando funciones y polinomios en este grado son: reconoce y utiliza reglas de correspondencia; grafica y representa cantidades directamente proporcionales; utiliza diversas formas de expresar la dependencia funcional entre variables: verbal, tablas, gráficos, etc.; y representa funciones rectilíneas. El contenido actitudinal a lograr es valora la aplicación de la proporcionalidad directa.

En el segundo grado de educación secundaria se trata los siguientes contenidos conceptuales: Función: regla de correspondencia, dominio y rango; proporcionalidad directa e inversa. Los contenidos procedimentales que se quiere lograr usando funciones y polinomios en este grado son: reconoce y utiliza reglas de correspondencia; determina el dominio y rango de una función; grafica y representa proporcionalidad directa e inversa; y describe y representa relaciones de dependencia entre dos variables con tablas, gráficos y expresiones verbales o matemáticas. Los contenidos actitudinales que se pretenden lograr son: valora la aplicación de la proporcionalidad directa; y confianza en el uso de funciones y polinomios.

De acuerdo con este Diseño Curricular Básico, la función lineal (función rectilínea) y la proporcionalidad directa se estudian en el primero y segundo grado de educación secundaria y ambos se encuentran dentro del componente sistemas numéricos y funciones. Además, las funciones se estudian del primero al cuarto grado de educación secundaria.

3.2.1.2. Propuesta de Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores 2002 (Nueva Secundaria)

Este Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores, fue publicada por el Ministerio de Educación del Perú en febrero del año 2002 y se aplicó en primero, segundo y quinto grado. Uno de los componentes del área de matemática es sistemas numéricos y funciones, este componente incluye el estudio de los números y sus relaciones, álgebra y funciones, entre otros. Además, para este Diseño Curricular uno de los ejes centrales de la matemática es el concepto de función, razón por la cual se considera su estudio desde el primer grado para permitir un enriquecimiento progresivo y profundización de este valioso concepto.

En el primer grado de educación secundaria se abordan los siguientes contenidos conceptuales: funciones, dependencia, variable dependiente e independiente; representación tabular y gráfica; y dominio y rango. En el segundo grado de educación secundaria se trata los contenidos conceptuales: función lineal y afín a la lineal; y modelos lineales.

Según este Diseño Curricular, no se aborda la proporcionalidad directa en primero, segundo ni en quinto grado de educación secundaria.

3.2.1.3. Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria del 2004

Este Diseño Curricular Básico fue elaborado por la Dirección Nacional de Educación Secundaria y Superior Tecnológica (DINESST) y fue publicada en enero del 2004. El área de matemática prioriza el desarrollo de las siguientes capacidades: razonamiento y demostración, interpretación de gráficos y/o de expresiones simbólicas, y resolución de problemas.

En el segundo grado de educación secundaria dentro del componente conjuntos, sistemas numéricos, nociones de lógica, funciones y trigonometría se aborda los siguientes contenidos básicos:

- Razones y proporciones: aritméticas y geométricas.
- Porcentaje.
- Regla de tres, de interés y de mezcla.

En el cuarto grado se abordan los siguientes contenidos básicos:

1. Función. Dominio y rango. Representaciones gráficas.
2. Composición de funciones.
3. Funciones: inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente y decreciente.
4. Función inversa.
5. El plano cartesiano.
6. Funciones reales. Funciones reales de variable real. Operaciones.
7. Funciones algebraicas: lineal afín, cuadrática, raíz cuadrada, valor absoluto y máximo entero.

En este Diseño Curricular Nacional, se observa que la proporcionalidad directa no es abordada en la educación secundaria, por lo tanto, no se evidencia ningún indicio de articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa. Además, se observa que la noción de función solo se trabaja en el cuarto grado de educación secundaria. Pensamos que en este Diseño Curricular se da un retroceso sobre lo avanzado en los anteriores diseños curriculares.

3.2.1.4. Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular 2005 (Proceso de Articulación)

Este Diseño Curricular Nacional fue aprobado por el Ministerio de Educación del Perú mediante la Resolución Ministerial N° 0667-2005-ED de fecha 07 de noviembre del año 2005. Su uso se generalizó a partir del año escolar 2006 en todas las instituciones educativas públicas y privadas del Perú.

En el segundo grado de educación secundaria dentro del componente número, relaciones y funciones se aborda los siguientes contenidos básicos:

- Razones y proporciones: aritméticas y geométricas
- Regla de tres, porcentaje. Regla de interés y de mezcla.

En el cuarto grado de Educación Secundaria se aborda los siguientes contenidos básicos:

- Función. Dominio y rango. Representaciones gráficas.
- Composición de funciones.
- Funciones: inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente y decreciente.
- Función inversa.
- Funciones reales de variable real.
- Operaciones.
- Funciones algebraicas: lineal afín, cuadrática, raíz cuadrada, valor absoluto y máximo entero.

Según este Diseño Curricular Nacional, el área de Matemática desarrolla las siguientes capacidades: razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas.

De otro lado, se observa que las nociones de proporcionalidad y función lineal son consideradas como dos bloques totalmente aislados, por lo que no existe ninguna intención de articular estos objetos matemáticos.

3.2.1.5. Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del 2009

Según el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú (Perú, 2009), el estudio de las funciones ocupa un lugar importante en la educación secundaria, ya que, se estudia desde el primero al quinto grado. En el primer grado se estudia la noción de dependencia, función, variables dependientes e independientes, representación tabular y gráfica de funciones, dominio y rango de funciones lineales y la proporcionalidad directa e inversa. En el segundo grado la función lineal, función lineal afín, dominio y rango de una función lineal, representación verbal, tabular y grafica de funciones lineales y la proporcionalidad directa e inversa. En el tercer grado se estudia el dominio y rango de funciones cuadráticas, gráfica de funciones cuadráticas, modelación de fenómenos del mundo real con funciones, análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados, dominio y rango de las funciones, valor absoluto y raíz cuadrada, gráfica de las funciones, valor absoluto, cuadrática y raíz cuadrada. En el cuarto grado se abordan las funciones trigonométricas, período y amplitud de funciones sinusoidales y cosenoidales, y modelos con funciones trigonométricas. Finalmente, en quinto grado se estudian las funciones inyectiva, suryectiva y biyectiva, función inversa, función logarítmica, función exponencial, modelos exponenciales y modelos logarítmicos.

Por otro lado, el estudio de la proporcionalidad en la Educación Básica Regular del Perú empieza en el V ciclo y concluye el VI ciclo. En el quinto grado de educación primaria se estudian cantidades directamente e inversamente proporcionales y criterios de proporcionalidad directa. En el sexto grado de primaria se estudia la proporcionalidad directa e inversa, gráficas lineales y aplicación de la proporcionalidad en: cambio monetario, impuestos e intereses. En el primer y segundo grado de educación secundaria se estudia la proporcionalidad directa e inversa.

En el Diseño Curricular Nacional (Perú, 2009), se observa que tanto la función lineal como la proporcionalidad directa, se encuentran ubicados dentro del organizador número, relaciones y funciones, en particular dentro del bloque de conocimientos de funciones, lo cual nos permite suponer que existe una relación entre estos dos conceptos matemáticos. Para el Ministerio de Educación del Perú, es necesario que los estudiantes internalicen, comprendan y utilicen varias formas de representar patrones, relaciones y funciones de manera real. Asimismo, deben desarrollar habilidades para usar modelos matemáticos para comprender y representar relaciones cuantitativas.

3.2.1.6. La función lineal y la proporcionalidad directa en los Mapas de Progreso

Los mapas de progreso son estándares de aprendizaje que el Ministerio de Educación del Perú ha elaborado en el año 2013 a través del Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (IPEBA). Estos documentos contienen los niveles de desempeños que deben alcanzar todos los estudiantes del Perú en las diferentes áreas curriculares.

El Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (Perú, 2013b) manifiesta que:

> Los mapas de progreso describen la secuencia en que progresan los aprendizajes fundamentales a lo largo de la trayectoria escolar. Brindan criterios claros y comunes para monitorear y evaluar dichos aprendizajes. Los mapas de progreso describen los aprendizajes organizados en competencias. Por ejemplo, las competencias de Comunicación están desarrolladas en tres mapas (Lectura, Escritura y Comunicación

> oral), mientras que las competencias de Matemática están desarrolladas en cuatro mapas (Números y operaciones, Cambio y relaciones, Geometría, y Estadística y probabilidad). (p. 5)

En la misma línea, el Marco Curricular Nacional (Perú, 2014) sostiene que:

> Los Mapas de Progreso son instrumentos de política que definen los estándares de las competencias de los Aprendizajes Fundamentales, y aportan al sistema los referentes para la evaluación de a nivel externo (evaluaciones nacionales censales o muestrales) y de aula. Así, estos estándares definen metas comunes, desafiantes y evaluables, que todos pueden y deben alcanzar, estableciendo de manera clara los desempeños que los estudiantes deben poder exhibir al final de cada ciclo de la educación básica. (p. 28).

El mapa de progreso está dividido en niveles. Los niveles señalan lo que se espera que un estudiante haya aprendido al finalizar cada ciclo de la Educación Básica Regular.

El Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (Perú, 2013c) afirma que:

> Los Mapas de Progreso de Matemática exigen una educación matemática que brinde al estudiante situaciones de aprendizaje problemáticas que lo motiven a comprometerse con la investigación, exploración y construcción de su aprendizaje, y que ponga énfasis en los procesos de construcción de los conceptos matemáticos y en el desarrollo de las competencias matemáticas, que implica que un individuo sea capaz de identificar y comprender el rol que desempeña la matemática en el mundo, para permitir juicios bien fundamentados y para comprometerse con la matemática, de manera que cubra las necesidades de la vida actual y futura de dicho individuo como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (p. 7)

En esta investigación solo nos centraremos en el Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones, ya que el objeto matemático de nuestro interés que son la función lineal y la proporcionalidad directa se encuentra en este mapa.

3.2.1.6.1. El Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones

De acuerdo con el IPEBA (Perú, 2013c), el Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones “describe el desarrollo de la competencia para identificar patrones, describir y caracterizar generalidades, modelar fenómenos reales referidos a las relaciones cambiantes entre dos o más magnitudes, utilizando desde gráficos intuitivos hasta expresiones simbólicas como las igualdades, desigualdades, equivalencias y funciones”(p. 8).

Además, según el IPEBA (Perú, 2013c, p. 8), la descripción del progreso del aprendizaje en esta competencia se realiza en base a tres aspectos:

a) **Interpretación y generalización de patrones.** Implica el desarrollo de capacidades para identificar, interpretar y representar la regularidad existente en diferentes sucesiones a través de una expresión general que modele el comportamiento de sus términos.

b) **Comprensión y uso de igualdades y desigualdades.** Implica el desarrollo de capacidades para interpretar y representar las condiciones de una situación problemática, mediante igualdades o desigualdades, que permite determinar valores desconocidos y establecer equivalencias entre expresiones algebraicas.

c) **Comprensión y uso de las relaciones y funciones.** Implica el desarrollo de capacidades para identificar e interpretar las relaciones entre dos magnitudes, analizar la naturaleza del cambio y modelar situaciones o fenómenos del mundo real mediante funciones, con la finalidad de formular y argumentar predicciones.

A continuación, tomando en cuenta la descripción de los niveles del Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones, hemos identificado los indicadores de desempeño que están referidos a las funciones y la proporcionalidad directa a lo largo de la EBR.

Tabla 5. Indicadores de desempeño de la función lineal y la proporcionalidad directa.

NIVEL	DESEMPEÑOS
IV CICLO (3° y 4° primaria) 8-9 años.	Identifica y explica relaciones de cambio entre dos magnitudes y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, y las representa en diagramas o tablas de doble entrada.
V CICLO (5° y 6° primaria) 10-11años.	Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad directa y relaciones de equivalencia entre unidades de medida de una misma magnitud, las describe y representa en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura si la relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa, comprueba y formula conclusiones.
VI CICLO (1° y 2° secundaria) 12-13 años.	Interpreta que una variable puede representar también un valor que cambia. Modela diversas situaciones de cambio mediante relaciones de proporcionalidad inversa, funciones lineales y afines; las describe y representa en tablas, en el plano cartesiano y con expresiones algebraicas. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes tiene un comportamiento lineal; formula, comprueba y argumenta conclusiones.
VII CICLO (3°, 4° y 5° secundaria) 14-16 años.	Modela diversas situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta conclusiones.
Destacado	Interpreta que una variable puede representar un valor constante o un parámetro. Modela situaciones o fenómenos de diversos contextos haciendo uso de variadas funciones definidas en tramos; conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento exponencial, logarítmico o periódico; formula, comprueba y argumenta conclusiones.

Fuente: Mapas de Progreso del Aprendizaje Matemática (Perú, 2013c, p. 9)

Del resumen anterior de los descriptores del Mapa de Progreso de Cambio y Relaciones, podemos deducir que el estudio del objeto matemático función y la proporcionalidad directa ocupan un lugar importante en la formación matemática de los estudiantes de la Educación Básica Regular del Perú, puesto que se empieza a estudiar a partir del IV ciclo hasta el VII.

3.2.2. La función lineal y la proporcionalidad directa en los libros de texto

A partir del año 2005, el Ministerio de Educación del Perú a través de la Dirección de Educación Secundaria, ha contemplado la dotación de libros de texto para los estudiantes y docentes de las instituciones educativas públicas de todo el Perú. Desde al año 2005 hasta ahora se ha entregado tres dotaciones de libros de texto. Consideramos que los contenidos de estos libros tienen una relación directa con el DCN, ya que el uso de ellos fue promovido por el Ministerio de Educación del Perú, por lo tanto, suponemos que responden a las políticas de cambio que viene implementando el Ministerio de Educación del Perú a lo largo de estos últimos años.

A continuación, describimos como los libros de texto de matemática abordaron la proporcionalidad y la función lineal a largo de los últimos años. Con la finalidad de conocer el tratamiento que dieron a la proporcionalidad directa y a la función lineal los libros de texto. Para ello, solamente centramos nuestro estudio en las unidades en las que aparecen la proporcionalidad y las funciones.

3.2.2.1. Libros de texto entregados en el año 2005

El Ministerio de Educación del Perú por primera vez hizo entrega de libros de texto de las diferentes áreas a todos los estudiantes de las instituciones educativas públicas del Perú en el año escolar 2006.

Debemos señalar que la proporcionalidad se estudiaba en el libro de texto de segundo grado y el estudio de las de las funciones se realizaba en el cuarto y quinto grado de educación secundaria.

En el libro de texto de Matemática 2 del segundo grado de educación secundaria, la unidad 5 titula *Proporcionalidad Numérica* en la que se tratan los siguientes contenidos:

Razones y proporciones

- Razón
- Proporción geométrica
- Magnitudes directamente proporcionales

Regla de tres simple directa

Tanto por ciento

Magnitudes inversamente proporcionales

Regla de tres simple inversa

Regla de tres compuesta

Interés simple

Los aprendizajes esperados que este libro de texto pretende alcanzar son: identifica las magnitudes directa e inversamente proporcionales; infiere y generaliza las propiedades de las proporciones geométricas y; resuelve problemas que involucran magnitudes directa e inversamente proporcionales.

En el libro de texto de Matemática 4 de secundaria del año 2005. En la primera unidad titulada *Funciones y progresiones* se abordan los siguientes contenidos:

1. Función. Dominio y rango
2. Notación y representaciones de una función
3. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
4. Crecimiento y decrecimiento de una función: máximos y mínimos de una función
5. Función real de variable real
6. Operaciones con funciones: función inversa y composición de funciones.
7. Funciones lineal afín
8. Función cuadrática
9. Función raíz cuadrada
10. Función valor absoluto
11. Función máximo entero.
12. Sucesiones
13. Progresiones

El libro de texto pretende desarrollar los siguientes aprendizajes esperados:

- Define, interpreta y representa funciones reales de variable real.
- Analiza las características de la representación gráfica de una función.
- Realiza operaciones con funciones polinómicas.
- Describe las propiedades de las funciones: lineal, cuadrática, raíz cuadrada, valor absoluto y máximo entero.
- Identifica las propiedades de una sucesión.

- Identifica progresiones aritméticas y geométricas.

Además, el libro de texto sugiere los siguientes pasos (técnicas) para estudiar una función:

1. Identificar la variable independiente y la variable dependiente.
2. Determinar su regla de correspondencia.
3. Construir una tabla evaluando varios valores de la variable independiente y sus correspondientes de la variable dependiente.
4. Representar los pares de valores en un sistema de coordenadas.
5. Analizar si tiene o no sentido unir los puntos de la tabla; así se obtiene la representación gráfica de la función.

Por otro lado, la función lineal no es abordada con profundidad en el libro de texto de cuarto grado. Este libro de texto señala que si la representación gráfica de la función lineal afín pasa por el origen ($b = 0$) de coordenadas, la expresión se reduce a la forma $f(x) = ax$, a la que se conoce como función lineal. En los ejemplos, problemas resueltos y problemas propuestos del libro de texto se encuentra una escaza cantidad de tareas asociados a la función lineal.

En los dos libros de texto observamos que la proporcionalidad directa y la función lineal están separadas en dos grados diferentes. En consecuencia, estos dos objetos matemáticos forman dos bloques completamente aislados, lo que muestra, que no existe intención de articular la función lineal y la proporcionalidad directa en una sola organización matemática.

3.2.2.2. Libros de texto entregados en el año 2008

El Ministerio de Educación del Perú por segunda vez distribuyó libros de texto a los estudiantes de las instituciones educativas públicas del Perú en el año escolar 2009.

En el libro de texto de Matemática 2do de secundaria, la unidad 3 titula *proporcionalidad* en la que se tratan los siguientes contenidos:

1. Razones y proporciones:
   Razones: razón aritmética, razón geométrica
   Proporciones: proporción aritmética y proporción geométrica
2. Magnitudes proporcionales
   Magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.
3. Aplicaciones de la proporcionalidad
   Regla de tres simple, regla de tres simple directa, regla de tres compuesta, tanto por ciento, regla de interés y mezclas.

Los aprendizajes esperados que el libro de texto tiene como propósito desarrollar en los estudiantes del segundo grado de educación secundaria están organizados en base a las tres capacidades del Área de Matemáticas y son los siguientes:

- Razonamiento y demostración: Analiza magnitudes proporcionales.
- Comunicación matemática: Interpreta representaciones gráficas de magnitudes proporcionales.
- Resolución de problemas: Evalúa resultados obtenidos en la resolución de problemas con razones y proporciones, regla de tres, regla de interés y mezcla.

Este libro de texto, para resolver los problemas de proporcionalidad no hace referencia a las técnicas conocidas como el método de reducción a la unidad y el método de las proporciones, sino que hace uso de la constante de proporcionalidad.

En el libro de texto Matemática de cuarto grado de educación secundaria en la unidad 1 denominada *Funciones y progresiones* se aborda los siguientes contenidos:

Funciones

1. Función. Dominio y rango. Representaciones gráficas.
2. Composición de funciones.
3. Tipos de funciones: inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente y decreciente.
4. Función inversa.
5. Funciones reales de variable real. Operaciones.
6. Funciones algebraicas: lineal afín, cuadrática, raíz cuadrada, valor absoluto y máximo entero.

Progresiones

1. Sucesiones
2. Progresiones aritméticas
3. Progresiones geométricas

Los aprendizajes esperados que este libro de texto tiene como finalidad desarrollar en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria también están organizados en base a las tres capacidades del Área de Matemática y son los siguientes:

Razonamiento y demostración

1. Discrimina funciones
2. Infiere el comportamiento de funciones
3. Infiere propiedades de una sucesión

4. Discrimina progresiones aritméticas y geométricas

Comunicación matemática

1. Elabora gráficos de funciones crecientes y decrecientes
2. Elabora gráficos de funciones algebraicas

Resolución de problemas

1. Formula resultados operando con funciones
2. Evalúa resultados obtenidos de situaciones problemáticas con funciones
3. Evalúa resultados obtenidos de situaciones problemáticas con progresiones

Este libro de texto, no aborda la función lineal. Solo se trata la función lineal afín.

Al igual que en los libros de texto del año 2005, en los dos libros de texto del año 2008 observamos que la proporcionalidad directa y la función lineal están separados en dos grados diferentes. Por lo tanto, estos dos objetos matemáticos forman dos bloques completamente aislados, lo que evidencia que no existe articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa.

3.2.2.3. Libros de texto entregados en el año 2012

En los libros de texto entregados por el Ministerio de Educación del Perú en el año 2012, el estudio de las funciones y la proporcionalidad abarca un lugar fundamental. Las magnitudes proporcionales se estudian desde el quinto grado de primaria hasta el segundo grado de secundaria. Mientras, que las funciones se abordan desde el primero al quinto grado de secundaria. También, debemos resaltar que estos libros de texto aún tienen vigencia en la actualidad, es decir, se están utilizando como material didáctico en las instituciones educativas públicas del Perú. En seguida, describimos algunos aspectos resaltantes de estos libros de texto.

Las capacidades y conocimientos sobre las funciones y la proporcionalidad que se desarrollan en el libro de texto del área de matemática del primer grado de educación secundaria (Perú, 2012a) se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 6. La función lineal y la proporcionalidad en el libro de Matemática 1

MATEMÁTICA 1	
Aprendizajes Esperados	**Conocimientos**
Razonamiento y demostración - Identifica y establece relaciones de proporcionalidad en situaciones de contexto. Comunicación matemática - Describe, utiliza reglas de correspondencia y representa la dependencia entre variables. - Identifica la variable dependiente e independiente de una relación. Resolución de problemas - Determina el dominio y rango de funciones.	Unidad 5. Funciones y álgebra. Tema 1. Funciones. - Producto cartesiano - Variables de una función - Representación tabular y gráfica de una función - Dominio y rango de funciones - Funciones y gráfica. Tema 2. Proporcionalidad - Proporcionalidad directa e inversa.

Fuente: Adaptado de Perú (2012a, pp. 136-149)

En la tabla 6, se observa que las funciones y la proporcionalidad se encuentra en la misma unidad del libro de texto.

Las capacidades y conocimientos relacionados a las funciones y a las proporcionalidades que se desarrollan en el libro de texto del área de matemática del segundo grado de educación secundaria (Perú, 2012b) se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 7. La función lineal y la proporcionalidad en el libro de Matemática 2.

MATEMÁTICA 2	
Aprendizajes Esperados	**Conocimientos**
Razonamiento y demostración - Determina el dominio y rango de una función. - Establece relaciones entre la proporcionalidad directa y la función lineal. - Formula modelos de fenómenos del mundo real con funciones lineales. Comunicación matemática - Representa de diversas formas la dependencia funcional entre variables. - Representa relaciones y funciones a partir de tablas, gráficos y expresiones simbólicas. Resolución de problemas - Resuelve problemas de contexto real y matemático donde existen diversas formas de dependencia funcional entre variables. - Resuelve problemas que representan magnitudes en relación directa e inversa.	Unidad 2: Funciones en mi vida diaria. Tema 1. Función lineal. - Función lineal y función lineal afín. - Dominio y rango de una función lineal. - Modelos lineales. - Representación verbal, tabular y gráfica de las funciones lineales. Tema 2. Proporcionalidad directa e inversa. - Proporcionalidad directa. - Representación gráfica de la proporcionalidad directa. - Proporcionalidad inversa. - Representación gráfica de la proporcionalidad inversa. - Regla de tres simple. - Regla de tres compuesta. - El porcentaje.

Fuente: Adaptado de Perú (2012b, pp. 40-73)

Este libro de texto señala que "una función lineal relaciona dos magnitudes directamente proporcionales. Por ello, también se le denomina función de proporcionalidad directa" (p. 44). Además, la técnica que el libro de texto usa para resolver los problemas de proporcionalidad directa es el método de las proporciones.

En los dos libros de texto de educación secundaria entregados en el año 2012 a diferencia de los libros de texto de los años 2005 y 2008, observamos que las funciones y la proporcionalidad se encuentra en la misma unidad, lo que significa que existen un acercamiento entre estos dos objetos matemáticos, pero no existen elementos que puedan articular estos dos objetos a pesar de que se encuentran en la misma unidad.

En síntesis, en la revisión de los diferentes libros de texto del área de matemáticas entregados desde el año 2005 hasta el año 2012 por el Ministerio de Educación del Perú, observamos que los libros de texto sitúan la proporcionalidad en el ámbito clásico de la proporcionalidad aritmética y, por otro lado, las relaciones funcionales. No existen indicios de articular estos dos objetos para integrar en una sola organización matemática.

3.3. Algebrización de la proporcionalidad de magnitudes

En esta sección, describiremos los cuatro indicadores del grado de algebrización de una organización matemática en torno a la proporcionalidad de magnitudes. Para ello, tomamos como fuente el trabajo desarrollado por Bolea, Bosch y Gascón (2001) y a García (2005). El objetivo de utilizar la algebrización de las magnitudes proporcionales es establecer la articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa.

Bolea, Bosch y Gascón (2001) manifiestan que "para explicar la estructura de las organizaciones matemáticas escolares efectivamente construidas, es imprescindible tener en cuenta que la transposición didáctica no actúa sobre objetos aislados, sino sobre organizaciones matemáticas en evolución" (p. 21). Al mismo tiempo, los autores antes citados señalan que "la algebrización progresiva de la organización matemática clásica, conducirá a la inclusión de la proporcionalidad dentro de la organización matemática más amplia construida alrededor de la modelización funcional" (p. 22).

3.3.1. Organización clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes

Los problemas de la proporcionalidad de las magnitudes incluyen modelos estereotipados en el sistema de enseñanza, ya que se abordan tareas prototípicas y técnicas predeterminadas. Al respecto, Bolea *et al*. (2001) manifiestan que:

> En los problemas de proporcionalidad, se parte siempre de ciertos sistemas emblemáticos en los que aparecen dos magnitudes concretas supuestamente "proporcionales" (cantidad de mercancía y coste, cantidad de trabajo y número de obreros, etc.). La noción de proporcionalidad permanece en este universo hasta tal punto ligada a esos sistemas supuestamente proporcionales que la presentación de los mismos constituye para la organización clásica un primer modelo de la relación de proporcionalidad. (p. 22)

Además, los autores sostienen que una de las técnicas matemáticas más evolucionadas que propone la organización clásica para resolver los problemas de proporcionalidad simple puede describirse como sigue. A partir del enunciado, se destacan en un modelo tabular las magnitudes M y M', junto con las cantidades a, b, c y la incógnita x correspondiente.

M	M'
a	c
b	x

Figura 7. Modelo tabular de una técnica clásica
Fuente: Adaptado de Bolea, Bosch y Gascón (2001)

Asimismo, para identificar el tipo de relación se usa un discurso verbal, pero también se emplean los signos más (+) y menos (-) para determinar el tipo de relación. Sobre este asunto, Bolea *et al*. (2001) manifiestan que:

> Después se decide, con un simple discurso verbal (del tipo "a más mercancía, más precio" o "a más velocidad, menos tiempo"), si la relación entre M y M' es una proporcionalidad directa o inversa. Esta información permite establecer un segundo modelo escrito: una ecuación proporcional del tipo $a : b :: c : x$ para el caso de la proporcionalidad directa o del tipo $a : b :: x : c$ para el caso de la proporcionalidad inversa. La resolución de la ecuación proporcional, que el conjunto técnico-tecnológico de la teoría de las razones y proporciones se encarga de presentar y justificar, permite hallar el valor de x a partir de una regla simple: si x es un "extremo", se multiplican los "medios" y se divide por el otro "extremo" (caso directo: $x = bc/a$), si x es un "medio", se multiplican los "extremos" y se divide por el otro "medio" (caso inverso: $x = bc/a$). (pp. 22-23)

También, los autores dicen que las "sus limitaciones se situaron esencialmente en el nivel tecnológico-teórico y afectaron tanto la función de descripción de la organización como de la justificación de las técnicas" (p. 23). Además, estos investigadores sostienen que el desarrollo de estas técnicas reduce los problemas de proporcionalidad inversa y los de proporcionalidad compuesta a problemas de proporcionalidad simple.

3.3.2. Algebrización hipotética de la organización clásica

Sobre la algebrización hipotética de la organización clásica Bolea *et al*. (2001) afirman que:

> Una modelización algebraica de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad unificará, por el hecho de proponer un tratamiento conjunto, todas las técnicas y los tipos de problemas clásicos de proporcionalidad. Veremos, en efecto, que los diferentes tipos de problemas de proporcionalidad de magnitudes (simple, compuesta, directa e inversa) se integrarán en un único modelo algebraico y que las técnicas clásicas se podrán describir como diferentes variantes del trabajo de este modelo. (p. 24)

Según, estos autores se denomina algebrización hipotética, porque no existe ni ha existido como organización matemática. A continuación, describimos cada uno de los niveles, enfatizando en la proporcionalidad directa.

a) Primer nivel de algebrización: la modernización del lenguaje técnico

De acuerdo a los autores antes citados al primer nivel de algebrización se conoce como la modernización del lenguaje técnico, y al respecto señalan que:

> El primer nivel consistirá en modelizar mediante ecuaciones los diferentes tipos de proporcionalidad, así, se dirá que dos magnitudes X e Y son directamente proporcionales cuando se puede establecer una correspondencia entre ellas de tal forma que, entre una cantidad cualquiera x de X y su correspondiente y de Y se cumple la relación $y = kx$ para un determinado valor constante de k. (p. 24)

En ese sentido, las tareas de proporcional directa se resuelven utilizando la relación $y = kx$. Además, aquí surge la constante de proporcionalidad o factor de proporcionalidad que usualmente se representa con la letra k.

De otro lado, Bolea *et al*. (2001), señalan que:

> En este primer nivel de algebrización, los tipos de problemas y las técnicas se mantienen muy próximos a los de la organización clásica. La resolución de un problema de proporcionalidad sigue consistiendo en la distinción de las dos magnitudes relacionadas, en la determinación del "sentido" de la relación de proporcionalidad, en la escritura de la relación que cumplen los datos y la incógnita del problema, y en el cálculo final del valor de la incógnita. Aparece sin embargo una diferencia importante en el nivel tecnológico-teórico: la relación de proporcionalidad entre magnitudes se convierte ahora en una relación de proporcionalidad entre variables numéricas que representan medidas de cantidades de magnitud. (pp. 24-25)

En este nivel de algebrización ya existe un progreso, pues las relaciones de proporcionalidad de magnitudes ahora se conciben como relaciones entre variables numéricas.

b) Segundo nivel de algebrización: la reducción a la función lineal

Según Bolea *et al*. (2001), "el segundo nivel de algebrización surge de la necesidad de describir mediante un único modelo las tres relaciones de proporcionalidad establecida en el primer nivel" (p. 25).

Además, los autores antes citados señalan que “la realización de este segundo nivel parte de la consideración de todas las relaciones de proporcionalidad como casos particulares de una función *f* de varias variables reales, homogénea de grado ± 1 con respecto a cada una de ellas” (p. 25). Asimismo, ellos proponen la siguiente relación:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k.x_1^{\varepsilon_1}.x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \quad \text{con } \varepsilon_i = \pm 1$$

Del mismo modo, los autores afirman que “este modelo funcional general permite reducir todos los problemas clásicos de proporcionalidad al único caso de la proporcionalidad simple directa definiendo la nueva variable $x = x_1^{\varepsilon_1}.x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ y considerando la función lineal de una variable real” (p. 25). Para ello, plantean como modelo la representación algebraica de la función lineal.

$$f^*(x) = kx;\ \text{donde } k = f(1, 1, \ldots, 1) = f^*(1)$$

Sin embargo, los investigadores, también señalan que:

> La unificación que resulta del segundo nivel de algebrización no es posible en la organización escolar actual, como tampoco era posible en la organización escolar clásica, fundada en una teoría cultura de las magnitudes que no podía incluir productos ni cocientes de magnitudes. (p. 26).

Dentro de esta perspectiva, García (2005) sostiene que “la modelización funcional supone la inmersión de la proporcionalidad en el universo de las relaciones funcionales entre magnitudes” (p. 124). Asimismo, el autor propone el siguiente esquema:

enunciado — “*modelización*” → *f*(*a*) = *c*; *f*(*b*) = *x*; *f* lineal.

Según el esquema anterior, los problemas de proporcionalidad directa se deben resolver usando como modelo la función lineal.

c) Tercer nivel de algebrización: la modelización funcional general

Según Bolea *et al*. (2001), a pesar de sus limitaciones “la proporcionalidad era la relación entre magnitudes por excelencia que permitía expresar muchos tipos de relaciones funcionales” (p. 26). Sin embargo, pronto emergieron otras relaciones funcionales. Entonces, el segundo nivel se integra al tercer nivel de algebrización de la proporcionalidad de magnitudes. Respecto a este nivel los autores manifiestan que:

> El segundo nivel de algebrización formará parte de un proceso de algebrización más general que evolucionará hacia un proceso de modelización funcional general para describir relaciones más complejas entre magnitudes. Surgirá así un tercer nivel de algebrización como respuesta a un cuestionamiento tecnológico relativo a una práctica matemática en desarrollo.(pp. 26-27)

Asimismo, estos autores señalan que:

> En este tercer nivel se puede prescindir de la teoría de las magnitudes como componente tecnológico-teórico siempre y cuando de disponga de una teoría matemática rigurosa de los números reales como medidas de las magnitudes continuas que intervienen en las situaciones estudiadas. La nueva organización así construida puede entonces adoptar, como marco teórico principal, la teoría de funciones reales de variable real. (p. 27)

En este sentido, las investigaciones realizadas por Bosh (1994), García (2005) y Serrano (2013) tratan sobre la modelización matemática como herramienta de articulación de la matemática, para ello, usan como fundamento teórico la TAD.

En el capítulo, que continua tratamos la metodología de investigación y los instrumentos utilizados para llevar a cabo el análisis del libro de texto seleccionado.

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN E INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA EL ANÁLISIS

En este capítulo, describimos la metodología que usamos en nuestra investigación y luego explicamos los criterios utilizados para analizar el libro de texto seleccionado y que han sido desarrollados en los trabajos de Fonseca (2004 y 2011), García (2005), Lucas (2010) y Serrano (2013).

4.1. Metodología de la investigación

Nuestro trabajo se enmarca dentro de la investigación cualitativa de tipo bibliográfica. De acuerdo con Taylor y Bogdan (1986), la metodología es el modo de enfocar los problemas de investigación y encontrar respuestas para los mismos. En la misma línea, Bogdan y Biklen (2003) señalan que *metodología* es un término que se refiere a la lógica general y a la perspectiva teórica de una investigación.

Para Taylor y Bogdan (1986), “la frase metodología cualitativa se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable” (p. 20). Es decir, la investigación cualitativa busca observar, describir y comprender el objeto de estudio tal como se presenta en su ambiente natural.

Hernández, Fernández y Baptista (2010), al respecto, manifiestan que:

> La investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto.
> El enfoque cualitativo se selecciona cuando se busca comprender la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará) acerca de los fenómenos que los rodean, profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados, es decir, la forma en que los participantes perciben subjetivamente su realidad. (p. 364)

Las nociones antes enunciadas corresponden a las investigaciones cualitativas en su modo más general, por eso conviene tener en cuenta las características propias de la investigación cualitativa en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

En ese sentido, Kilpatrick (1998) manifiesta que “la investigación en educación matemática es una indagación metódica acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” (p. 2). Ello sugiere que el trabajo busca dar respuesta a una pregunta específica; no es una especulación fútil o erudita para la satisfacción propia.

De otro lado, Sierpinska, Kilpatrick, Balacheff, Howson, Sfard y Steinbring (1993), sostienen que:

> El objeto de estudio (…) en la educación matemática podría ser, por ejemplo, la enseñanza de las matemáticas; el aprendizaje de las matemáticas; las situaciones de la enseñanza y aprendizaje; la relaciones entre la enseñanza, el aprendizaje y el conocimiento matemático; la realidad de las clases de matemáticas; el punto de vista de la sociedad sobre las matemáticas y su enseñanza; o el sistema mismo de educación (p. 275).

Nuestra investigación es de carácter cualitativo puesto que observa, describe e intenta comprender los fenómenos tal como se presentan en su medio natural. Asumimos que es una investigación de tipo bibliográfica, porque, en la investigación analizamos un libro de texto y también revisamos documentos oficiales como los programas curriculares y el mapa de progreso de cambio y relaciones.

Sobre la investigación bibliográfica, Gil (2002) manifiesta que:

> Una investigación bibliográfica es desarrollada con base en el material ya elaborado, constituido principalmente de libros y artículos científicos. Aunque, en casi todos los estudios se ha exigido algún tipo de trabajo de esta naturaleza, ya hay investigaciones desarrolladas exclusivamente a partir de fuentes bibliográficos. (p. 44)

Esta investigación es bibliográfica, ya que, analiza un libro de texto que es un material ya elaborado por el Departamento Editorial del Grupo Norma y distribuido por el Ministerio de Educación del Perú a los estudiantes y docentes para que pueda ser usado en el desarrollo de las sesiones de aprendizaje.

Van Dalen y Meyer (1984) afirman que:

> El estudio documental de los libros de texto puede determinar el contenido de la enseñanza, el tiempo que se dedica a los diversos aspectos y los temas que forman parte de una materia. Estudiando los libros de texto es posible enumerar los conceptos que se incluyen, determinar la frecuencia con que aparecen errores y distorsiones, el espacio asignado a ciertos temas y el nivel del vocabulario. (p. 237)

En esta investigación, también centramos nuestro interés en el contenido del libro de texto analizado y su alineamiento con los conocimientos que el Diseño Curricular Nacional del año 2009 establece para los estudiantes del primer grado de educación secundaria en torno a los conceptos de función y proporcionalidad.

Marconi y Lakatos (2003) sostienen que:

> La investigación bibliográfica no es una mera repetición de lo que ya fue dicho o escrito sobre algún asunto, sino que propicia el examen de un tema bajo un nuevo enfoque, llegando a conclusiones innovadoras. (p. 183)

En ese sentido, nuestra investigación analiza la organización matemática que presenta un libro de texto de matemática de educación secundaria en términos de tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

4.2. Etapas de la investigación bibliográfica

Como toda investigación, la investigación bibliográfica también se lleva a cabo siguiendo una serie de etapas o pasos que varía de acuerdo a la naturaleza y a los propósitos de la investigación. Al respecto, Gil (2002), manifiesta que:

> La investigación bibliográfica, como cualquier otra modalidad de investigación, se desarrolla a lo largo de una serie de etapas. El número de etapas depende de muchos factores, tales como la naturaleza del problema, el nivel de conocimiento que tiene el investigador sobre el tema, el grado de precisión que se pretende conferir a la investigación, etc. Asimismo, cualquier intento de presentar un modelo para el desarrollo de una investigación bibliográfica debería de ser entendida como arbitraria. Tanto es que los modelos presentados por los autores difieren significativamente entre sí. (p. 59)

Este autor también señala que la investigación bibliográfica tiene nueve etapas, para el caso de nuestra investigación hemos considerado relevante seguir las siguientes etapas:

a) Elección del tema: En esta etapa decidimos realizar una investigación relacionada al análisis de textos del área de Matemática en Educación Secundaria que es distribuido por el Ministerio de Educación; debido a que en nuestro quehacer pedagógico los libros de texto constituyen una herramienta importante tanto para el docente como para el estudiante.

b) Levantamiento bibliográfico preliminar: Después de elegir el tema de investigación realizamos un estudio exploratorio sobre las diferentes teorías que permitirán realizar el análisis del libro de textos; así como investigaciones relacionadas con el objeto matemático de esta investigación.

Luego de este análisis, optamos por utilizar la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999), porque, nos proporciona una herramienta fundamental en términos de la organización matemática para estudiar el conocimiento matemático en una institución.

c) Formulación del problema: En esta etapa formulamos la pregunta de investigación y los objetivos generales y específicos de nuestra investigación, es importante señalar que tanto el problema como los objetivos pueden ser modificados en el transcurso de la investigación cualitativa.

d) Identificación de fuentes para el análisis de textos: En esta etapa depuramos las investigaciones que son relevantes para nuestro trabajo de investigación que identificamos en la etapa de la revisión bibliográfica preliminar y que den respuesta al problema propuesto.

De la misma forma consideramos los criterios que tendremos en cuenta para el análisis de la organización matemática.

e) Organización lógica del análisis de texto: En esta etapa realizamos las siguientes actividades:

- Definir las herramientas teóricas para analizar el libro de texto seleccionado.
- Elección del capítulo en el libro de texto seleccionado que en este caso fue la unidad 5, titulado como *Funciones y álgebra*, donde se encuentra el objeto matemático función y proporcionalidad directa.
- Resolver los ejemplos, ejercicios y actividades (tareas) que el libro de texto presenta en la unidad de función y proporcionalidad directa, utilizando las técnicas que usa el libro en los ejemplos.
- Identificar los tipos de tarea y las tareas asociadas a cada tipo.
- Determinar las técnicas y tecnologías de estudio asociadas a las tareas identificadas.
- Detrminar el grado de completitud de la organización matemática del libro de texto analizado, teniendo en cuenta los indicadores de completitud de Fonseca (2004).
- Establecer la articulación entre la proporcionalidad directa y la función lineal.

f) Redacción del trabajo de investigación: En esta etapa formulamos las consideraciones finales y las sugerencias de nuestra investigación.

4.3. Instrumentos para la recolección de datos

Los instrumentos de investigación son las herramientas que se manipulan para obtener información necesaria relacionada con las variables de estudio. Para Hernández *et al.* (2010) "un instrumento es un recurso que utiliza el investigador para registrar información o datos sobre las variables que tiene en mente" (p. 200).

En esta investigación, los instrumentos de recolección de datos específicos, son los elementos que componen una organización matemática, es decir, los tipos de tareas, las tareas que conforman cada tipo de tarea, las técnicas, las tecnologías y las teorías. Estas herramientas nos permitirán construir una organización matemática del libro de texto en la unidad de función lineal y proporcionalidad directa.

Para recoger información sobre la organización matemática que presenta el libro de texto, nos basamos en las investigaciones de García (2005), Hurtado y Zúñiga (2011) y Mayorga (2013) quienes primero recogen información sobre los tipos de tareas, las tareas asociadas a cada tipo, las técnicas, las tecnologías y las teorías que componen una organización matemática, usando para ello la siguiente tabla que ha sido completada durante el proceso de identificación de los elementos que componen la organización matemática del libro de texto seleccionado.

Tabla 8. Organización matemática del libro de texto

Bloque practico-técnico (praxis)			Bloque tecnológico-teórico (logos)	
Tipos de tareas (T)	Tareas (t)	Técnicas (τ)	Tecnologías (θ)	Teorías (Θ)
¿Cuáles son los tipos de tareas propuestas en el texto?	¿Cuáles son las tareas que pertenecen a un determinado tipo de tarea?	¿Cuáles son las técnicas que justifican las tareas presentadas en el libro de texto?	¿Cuáles son las tecnologías que justifican las técnicas aplicadas en el libro de texto?	¿Cuáles son las teorías que justifican las tecnologías presentes en el libro de texto?
T_1	$t_{1,\,1}$	$\tau_{1,1,1}$ $\tau_{1,1,2}$	θ_1	Θ_1
	$t_{1,\,2}$		θ_2	
	$t_{1,\,3}$		θ_3	
T_2	$t_{2,\,1}$	$\tau_{2,1,1}$	θ_4	Θ_2
	$t_{2,\,2}$	$\tau_{2,2,1}$	θ_5	
	$t_{2,\,3}$	$\tau_{2,3,1}$	θ_6	

Fuente: Adaptado de Mayorga (2013).

Para el análisis de la organización matemática hemos considerado los indicadores de completitud de Fonseca (2004). A continuación, pasamos a describir cada una de ellas.

4.4. Instrumentos para del análisis

En esta investigación, asumimos que el libro de texto es una organización matemática local (OML). Por ello, para analizar el grado de completitud de la organización matemática que presenta el libro de texto sobre la función y la proporcionalidad, hemos adaptado los indicadores de completitud propuestos por Fonseca (2004 y 2011), y desarrollados en los trabajos de Lucas (2010) y Serrano (2013).

La tabla 9, resume los indicadores de completitud y los diferentes aspectos considerados en cada indicador para indagar su presencia o ausencia en el libro de texto analizado.

Tabla 9. Indicadores de completitud y aspectos para analizar la organización matemática.

INDICADORES DE COMPLETITUD	DESCRIPCIÓN
OML_1: Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.	- Los tipos de tareas sobre función y proporcionalidad directa están relacionados entre ellos. - El libro de texto presenta tareas sobre función y proporcionalidad directa asociados al cuestionamiento tecnológico.
OML_2: Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.	- Existen dos o más técnicas para resolver un tipo de tareas (T_i) asociadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa. - El libro de texto presenta criterios para analizar cuál es la técnica más fiable y económica para realizar el tipo de tareas (T_i).
OML_3: Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.	- La técnica hace uso de distintas representaciones (palabras, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) que permiten resolver un tipo de tarea (T_i).
OML_4: Existencia de tareas y técnicas "inversas"	- El libro de texto presenta tipos de tareas (T_i) y tipos de tareas inversas (T_j) asociadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa. - El libro de texto presenta técnicas reversibles para resolver un tipo de tareas (T_i) asociadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa.
OML_5: Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.	- El libro de texto presenta tipos de tareas que permitan interpretar el funcionamiento y resultado de aplicar una técnica. - El libro de texto presenta elementos tecnológicos necesarios para interpretar la o las técnicas.
OML_6: Existencia de tareas matemáticas "abiertas".	- El libro de texto presenta tipos de tareas (T_i) en donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente. - El libro de texto presenta tipos de tareas de modelización matemática asociadas a situaciones matemáticas o extramatemáticas relacionadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa.
OML_7: Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.	- Grado de integración de los elementos tecnológicos en el libro de texto. - La tecnología presente en el libro de texto permite producir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

Fuente: Adaptado de Fonseca (2004, pp. 18-184).

Es importante resaltar que Fonseca (2004) propone siete indicadores para la completitud de una organización local, pero que no necesariamente se encuentre todas en dos temas de una unidad del libro de texto como la que se analiza, por ejemplo los tres últimos indicadores de completitud son más globales.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA

En este capítulo, presentamos el análisis de la organización matemática del libro de texto de *Matemática 1 Secundaria* que el Ministerio de Educación del Perú distribuyó a los estudiantes del primer grado de educación secundaria del Perú en el año escolar 2012 y que actualmente se usa como material didáctico referente en todas las instituciones educativas estatales del Perú.

5.1. Descripción del libro de texto

El libro de texto *Matemática 1 Secundaria* (Perú, 2012a) que analizamos ha sido elaborado por el Departamento Editorial del Grupo Editorial Norma en el Perú. Los autores de este libro de texto son: Ramón Marín Córdova, Carmen Lay Huarac y Jacqueline Urbano Arias. Fue publicado en abril del 2012 y se han impreso 617 094 ejemplares. El Ministerio de Educación del Perú distribuyó a los estudiantes del primer grado de Educación Secundaria en el año escolar 2012 como material didáctico a usarse en las instituciones educativas públicas del Perú.

La unidad 5 del libro de texto analizado tiene como título *Funciones y Álgebra* y contiene los siguientes temas: funciones, proporcionalidad y ecuaciones. Nosotros solo analizamos los temas de función y proporcionalidad directa. La unidad comienza con una lectura donde se hace uso de la biodiversidad para relacionarlo con la función y la proporcionalidad. A continuación, se presentan los aprendizajes esperados que se pretende lograr con el desarrollo de la unidad. En seguida, el libro presenta una sección llamado ¿qué sabemos?, donde se propone cuatro tareas con la finalidad de recuperar los saberes previos de los estudiantes que son necesarios para trabajar en la unidad. Luego, hay una sección denominado ¿qué vamos a aprender? donde se describe lo que el estudiante logrará con el desarrollo de la unidad.

El primer tema está referido a las funciones. Inicia presentando una lectura titulada “cultivamos nuestras tierras”. Luego, se presentan algunas interrogantes para analizar y contestar con la finalidad de que el estudiante se familiarice con el tema. Después, el libro define el producto cartesiano de dos conjuntos, propone algunos ejemplos del producto cartesiano a través de un diagrama sagital y gráfico cartesiano, se pone énfasis en la noción de relación binaria. A continuación, se estudia la función, para ello propone una tarea donde hace uso la función, en seguida se da la definición de la función y se presenta algunas tareas como ejemplos. Luego, se aborda las variables de una función, se define la variable independiente y dependiente. Después se estudia la representación tabular y gráfica de una función, se presenta la actividad 1 para que los estudiantes puedan desarrollar individualmente. El siguiente punto que se trata es dominio y rango de funciones, aquí se presentan un ejemplo y se define el dominio y rango. Luego, se presenta la actividad 2 para que resuelvan individualmente los estudiantes. El otro punto que se estudia es funciones y gráficas, en esta sección se da las condiciones para que una relación sea una función y luego se hace hincapié en la representación gráfica sagital y en la representación cartesiana de la función. Finalmente, se presenta una evaluación donde las preguntas están relacionadas con las capacidades de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas. La función lineal no aparece explícitamente. Sin embargo, como detallaremos más adelante si aparece en los ejemplos y actividades propuestos del libro de texto.

El tema 2 está referido a la proporcionalidad. En este tema se aborda la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa. Se comienza el tema con una situación problema donde se usa la proporcionalidad directa. A continuación, se da la definición de la proporcionalidad directa y de la proporcionalidad inversa, luego se resuelve un problema de proporcionalidad inversa. Luego, se presenta la actividad 3 para que los estudiantes resuelvan en forma individual. Las tareas de la actividad son sobre identificar magnitudes directa e inversamente proporcionales, problemas que involucran magnitudes directa e inversamente proporcionales, completar tablas y analizar gráficos. Este tema concluye con una evaluación donde las preguntas están separadas por las capacidades de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas.

En la página 155 del libro de texto se elabora un organizador visual que resume los temas tratados en esta unidad. Luego, se presenta cuatro ejemplos sobre los principales temas tratados. A continuación, con el nombre de Mix matemático se presenta 20 problemas propuestos para que los estudiantes resuelvan en sus cuadernos. También, se presenta una sección de Historia de la Matemática en la que se muestra una línea de tiempo sobre el origen del Álgebra. Luego, hay una sección denominado conexiones en donde se vincula la función con la biología. Después, hay una sección llamado Pruebas Internacionales, donde se presentan una pregunta de la Evaluación PISA 2003, dos problemas de la ONEM y una pregunta del examen de admisión de la UNMSM 2009 – I. Luego, en el apartado de trabajo cooperativo se presenta un proyecto denominado “Costo de la electricidad”. A partir del recibo mensual expedida por la empresa de distribución eléctrica se identifican las variables dependiente e independiente, se establece el dominio y rango de la función, se define la función $f(x)$ en base a kW. En la sección Matemática recreativa se presenta tetraminós para recubrir con ellas un rectángulo de 4 × 5. En seguida, se presentan los proyectos: relaciones y funciones, superando errores y fórmulas para calcular costos; con la finalidad de que los estudiantes organizados en equipos puedan trabajar para aplicar los conocimientos tratados en esta unidad. La unidad concluye con la evaluación. Para realizar la heteroevaluación se propone al estudiante nueve ejercicios sobre los temas abordados en la unidad. En seguida se realiza la autoevaluación y la coevaluación; en ambos caso se hace uso de una escala tipo Likert. Luego, también se realiza la Metacognición de la evaluación donde se reflexiona sobre lo trabajado en la unidad y en base a ello se responden a las interrogantes planteadas.

Finalmente, debemos manifestar que el libro de texto contiene 138 ejercicios correspondientes a la función y la proporcionalidad directa, de los cuales 25 están resueltos y 113 están propuestos.

5.2. Organización matemática construida del libro de texto

A continuación, presentamos los tipos de tareas, las tareas asociadas a cada tipo, las técnicas, las tecnologías y las teorías identificadas en el libro de texto analizado. El procedimiento metodológico que hemos seguido fue primero trabajar con las técnicas que presenta el libro de texto en los ejemplos, luego buscar en las unidades anteriores del libro de texto analizado y en caso de que no se encuentre en ella, acudimos a los libros de texto de matemática del quinto y sexto grado de educación primaria, ya que en estos grados también se estudia las relaciones de proporcionalidad. Por ello, se considera que forman parte de los conocimientos previos del estudiante que realiza las tareas.

En ese sentido, primero presentamos el tipo de tarea, luego la primera tarea asociada a ese tipo, en seguida un ejemplo representativo de dicha tarea, a continuación la técnica que resuelve la tarea (pasos), después la tecnología y finalmente la teoría. Luego, presentaremos la segunda tarea asociada al tipo de tarea con todos los elementos antes mencionados, en caso de que ya no existe más tareas para el primer tipo pasamos al segundo tipo de tarea y seguimos el mismo procedimiento hasta concluir con los 17 tipos de tareas. Los elementos tecnológicos que justifican las técnicas solo se enuncian en las primeras tareas que aparecen, luego solo se harán mención, lo mismo se hace con las teorías encontradas. Para mayor información ver el Anexo 2 de esta investigación.

Para ello, se considera las siguientes notaciones:

T_i : Es el tipo de tarea i.

$t_{i,j}$: Es la tarea *j* del tipo de tarea T_i, Además:

$i \in \{1; 2; 3; \ldots; 17\}$

$j \in \{1; 2; 3; 4\}$

$\tau_{i,j,k}$: Es la técnica. Donde *i* indica el tipo de tarea; *j* indica el número de tarea; y *k* indica el número de técnica de la tarea *j*.

$k \in \{1; 2\}$

θ_m : es la tecnología que justifica la técnica.

Donde $m \in \{1; 2; 3; \ldots; 18\}$

Θ_n : es la teoría que justifica la tecnología.

Donde $n \in \{1; 2\}$

Tipo de tarea (T_1): Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes.

Tarea ($t_{1,1}$): Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de una tabla.

Esta tarea está conformado por el ejercicio propuesto 1 de la sección ¿qué sabemos?, que se encuentra en la página 137 del libro de texto analizado. En seguida, transcribimos como ejemplo representativo de esta tarea.

El consumo mensual de agua de una familia durante un año es el siguiente:

Mes	Consumo (en m^3)	Mes	Consumo (en m^3)
1	1	7	37
2	7	8	43
3	13	9	49
4	19	10	55
5	25	11	61
6	31	12	x

¿Qué relación encuentras entre el número que representa el mes y la cantidad de metros cúbicos consumidos? ¿Cuántos metros cúbicos se consumió en diciembre?

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 137)

Técnica ($\tau_{1,1,1}$):

Paso 01: Realizar operaciones entre los valores de las magnitudes.

$1 = 6(1) – 5$; $7 = 6(2) – 5$; $13 = 6(3) – 5$; $19 = 6(4) – 5$

Paso 02: Identificar las operaciones que relacionan las magnitudes.

Al número que representa el mes se le multiplica por seis y se le resta cinco unidades para encontrar el consumo mensual de agua de la familia.

Paso 03: Reconocer la relación existente entre las magnitudes.

Para encontrar cuántos metros cúbicos se ha consumido en el mes de diciembre se multiplica seis por doce y se le resta 5 unidades. Es decir, $6(12) – 5 = 67$ m^3 de agua.

Tecnología:

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales.

Dos magnitudes son directamente proporcional (DP) si el cociente de sus valores permanece constante, es decir: A DP B $\Leftrightarrow$ A/B = K (K = constante de proporcionalidad).

Teoría (Θ_2): Teoría de las magnitudes proporcionales.

De acuerdo al libro de texto que analizamos, la teoría de las magnitudes proporcionales comprende magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.

Tarea ($t_{1,2}$): Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de un enunciado verbal.

Esta tarea está conformada por los ejercicios propuestos A1, A2, A3 y A4 de la sección cultivamos nuestras tierras de la página 138 del libro de texto y por el ejemplo de las páginas 139 y 140 que el libro de texto usa para introducir la noción de función. A continuación, transcribimos como ejemplo de esta tarea.

Luisa, paseando por Iquitos, entra a un restaurante y pregunta por el precio de la porción de tacacho con cecina. Uno de los mozos le responde que cuesta S/.12.

¿Cuánto tendrá que pagar si pide 3 porciones? ¿Y si pide 5? Observa en la tabla la relación que se da entre el monto a pagar y el número de porciones.

N° de porciones	1	2	3	4	5
Monto a pagar (S/.)	1(12)	2(12)	3(12)	4(12)	5(12)
	12	24	36	48	60

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, pp. 139-140)

Técnica ($\tau_{1,2,1}$):

Paso 04: Identificar las magnitudes que intervienen.

Número de porciones y monto a pagar en soles.

Paso 05: Identificar los factores que influyen en el resultado de una magnitud.

El monto a pagar es el resultado de multiplicar la cantidad de porciones por el costo de la unidad.

1(12) = 12; 2(12) = 24; 3(12) = 36; 4 (12) = 48; 5(12) = 60

Paso 03: Reconocer la relación existente entre las magnitudes.

Entonces, si pedimos x porciones, tendremos que pagar 12x soles. Asignándole x al número de porciones; y al monto a pagar, y, tenemos: $y = 12x$.

Tecnologías:

θ_6: Definición de función.

Dados dos conjuntos A y B, se define la función f de A en B como un subconjunto de A×B, donde a cada elemento de A (conjunto de partida) le corresponde un único elemento de B (conjunto de llegada). Se denota por $y = f(x)$.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

En el libro de texto analizado la teoría de funciones comprende: el producto cartesiano, definición de función, variables de una función, representación tabular y gráfica de una función, dominio y rango de funciones, y funciones y gráficas.

Tipo de tarea (T_2): Representar relaciones binarias.

Tarea ($t_{2,1}$): Representar relaciones binarias como un conjunto de pares ordenados.

Conforman esta tarea los ejemplos 1a, 2a y 3a de la página 139 que el libro de texto usa para ilustrar el producto cartesiano. El siguiente ejercicio es un ejemplo de esta tarea.

Dados los conjuntos A = {2; 3; 4} y B = {4; 9}, *entonces:*

A×B = {(2; 4); (2; 9); (3; 4); (3; 9); (4; 4); (4; 9)}

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 139)

Técnica ($\tau_{2,1,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Conjunto de partida: A = {2; 3; 4}

Conjunto de llegada: B = {4; 9}

Paso 07: Determinar el producto cartesiano A×B como un conjunto de pares ordenados.

A×B = {(2; 4); (2; 9); (3; 4); (3; 9); (4; 4); (4; 9)}

Paso 08: Seleccionar un subconjunto del producto cartesiano A×B que cumple una propiedad común.

Tecnologías:

θ_1: Definición de producto cartesiano.

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, que se denota con A×B, es el conjunto formado por todos los pares ordenados (*a*; *b*), donde la primera componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

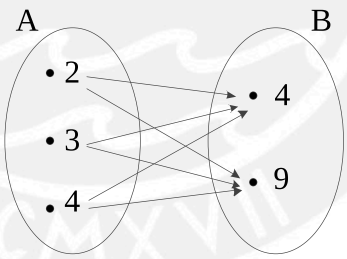
Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{2,\,2}$): Representar relaciones binarias como diagramas sagitales.

Conforma esta tarea el ejemplo 1b de la página 139 que el libro de texto usa para explicar el producto cartesiano mediante el diagrama sagital. En seguida, transcribimos a modo de ejemplo.

Dados los conjuntos A = {2; 3; 4} y B = {4; 9}, *entonces:*

A×B = {(2; 4); (2; 9); (3; 4); (3; 9); (4; 4); (4; 9)}



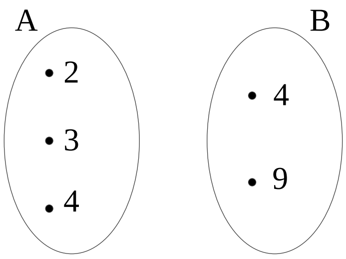
Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 139)

Técnica ($\tau_{2,2,1}$):

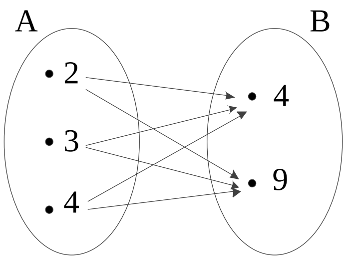
Paso 09: Definir una relación de A en B expresado como pares ordenados.

A×B = {(2; 4); (2; 9); (3; 4); (3; 9); (4; 4); (4; 9)}

Paso 10: Representar los conjuntos A y B mediante diagramas de Venn-Euler.



Paso 11: Representar con flechas que van de A a B cada par ordenado de la relación.



Tecnologías:

θ_1: Definición producto cartesiano.

θ_2: Observación sobre diagrama sagital.

En un diagrama sagital cada par ordenado se representa con una flecha. Las flechas van del conjunto de partida (A) al conjunto de llegada (B).

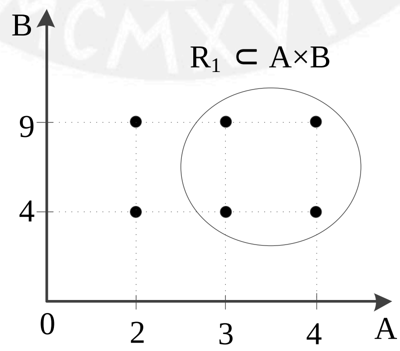
Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{2,3}$): Representar relaciones binarias como gráficos cartesianos.

Constituyen esta tarea los ejemplos 1c, 2b y 3b de la página 139 que el libro de texto usa para ilustrar el producto cartesiano mediante un diagrama cartesiano. El ejercicio 2b es un ejemplo ilustrativo de esta tarea.

Dados los conjuntos A = {2; 3; 4} y B = {4; 9}, *entonces:*

R_1 = {(3; 4); (3; 9); (4; 4); (4; 9)}



Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p.139)

El plano cartesiano es un sistema de coordenadas perpendiculares que se emplea para representar el gráfico de una relación o de una función. El gráfico que presenta el libro de texto no toma en cuenta las notaciones de la matemática, ya que el plano cartesiano que aquí se presenta no concuerda con la propuesta de Lages *et al*. (2000). Es decir, la figura que se muestra no es un plano cartesiano.

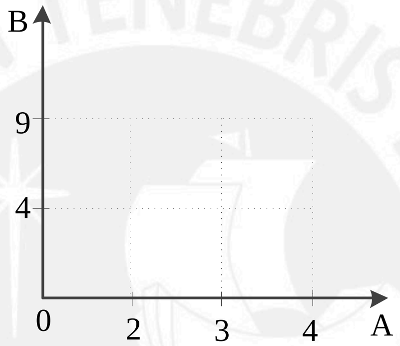
Técnica ($\tau_{2,3,1}$):

Paso 12: Definir la relación como un subconjunto de pares ordenados del producto cartesiano A×B.

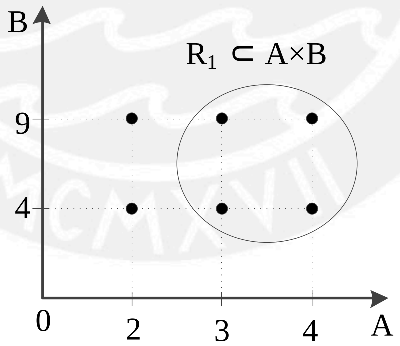
$R_1 = \{(3; 4); (3; 9); (4; 4); (4; 9)\}$

Paso 13: Trazar dos semirrectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical.

Paso 14: Ubicar en la recta horizontal los elementos del conjunto de partida (A), y en la recta vertical los elementos del conjunto de llegada (B).



Paso 15: Ubicar cada par ordenado en el plano cartesiano.



Esta manera de representar el plano cartesiano por el libro de texto, conlleva a que los estudiantes tengan obstáculos en el aprendizaje de la función.

Tecnologías:

θ_1: Definición de producto cartesiano.

θ_3: Observación sobre el gráfico cartesiano.

En un diagrama cartesiano cada par ordenado se representa con un punto. En el eje horizontal se representa al conjunto de partida (A) y en el eje vertical al conjunto de llegada (B).

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_3): Identificar variables de una función.

Tarea ($t_{3,1}$): Identificar variables independiente y dependiente en una situación matemática.

Llamamos situación matemática a aquellas tareas escolares que involucran contextos netamente matemáticos.

Constituyen esta tarea el ejemplo de la sección variables de una función y los ejercicios propuestos: 1a de la Actividad 1; 1a y 1b de la Evaluación 1; y 9a de la Heteroevaluación que se encuentran en las páginas 141, 144 y 166 respectivamente. El ejercicio 1a de la Actividad 1 es un ejemplo ilustrativo de esta tarea.

Identifica la variable independiente y la variable dependiente en cada caso:

a) La longitud del lado de un cuadrado y su área.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

Técnica ($\tau_{3,1,1}$):

Paso 16: Representar con letras a las magnitudes que intervienen en la situación.

L = la longitud del lado del cuadrado;

A = el área del cuadrado.

Paso 17: Proponer casos particulares para verificar la dependencia.

- Si L = 1cm, entonces su área será $A = (1\text{ cm})^2 = 1\text{ cm}^2$.
- Si L = 2 cm, entonces su área será $A = (2\text{ cm})^2 = 4\text{ cm}^2$.

Paso 18: Determinar la regla de correspondencia.

La regla de correspondencia es $A = L^2$.

Paso 19: Establecer la dependencia e independencia entre las variables.

Donde L es la variable independiente y A es la variable dependiente.

Tecnologías:

θ_8: Definición de variables de una función.

En una función $y = f(x)$, x es la variable independiente, puesto que x puede tomar cualquier valor del conjunto de partida, mientras que y, variable dependiente, obtiene su valor dependiendo del asignado a x.

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

La regla de correspondencia nos indica el criterio con el cual se eligen las parejas de elementos del conjunto de partida y de llegada.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{3,2}$)*: Identificar variables independiente y dependiente en una situación extramatemática.*

Según Font (2007), "las situaciones extramatemáticas, problemas contextualizados, problemas del mundo real, problemas relacionados con el trabajo, problemas situados son solo algunos de los diferentes nombres que se da a las tareas escolares que simulan situaciones del mundo real" (p. 432). En ese sentido, llamamos situación extramatemática a aquellas tareas que incluyen aspectos de la vida cotidiana o del mundo real.

Constituyen esta tarea los ejercicios propuestos: 1b, 1c y 3a de la Actividad 1; 1c, 1d y 1e de la Evaluación 1; y 9b de la Heteroevaluación que se encuentran en las páginas 141, 144 y 166 respectivamente. El ejercicio 1d de la Evaluación 1 es un ejemplo ilustrativo de esta tarea.

Identifica la variable dependiente (d) y la variable independiente (i) en cada caso:

d) El costo a pagar por llamada telefónica es S/. 0, 75 *por minuto*.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 144)

Técnica ($\tau_{3,2,1}$) = Técnica ($\tau_{3,1,1}$):

Paso 16: Representar con letras a las magnitudes que intervienen en la situación.

C = el costo a pagar;

m = el número de minutos

Paso 17: Proponer casos particulares para verificar la dependencia.

- Si $m = 1$ min, entonces el costo a pagar será $C = 0{,}75(1)$ = S/. 0, 75.
- Si $m = 2$ min, entonces el costo a pagar será $C = 0{,}75(2)$ = S/. 1, 50.

Paso 18: Determinar la regla de correspondencia.

La regla de correspondencia es $C = 0{,}75m$.

Paso 19: Establecer la dependencia e independencia entre las variables.

Luego el número de minutos (*m*) es la variable independiente y el costo a pagar (*C*) es la variable dependiente.

Tecnologías:

θ_8: Definición de variables de una función

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

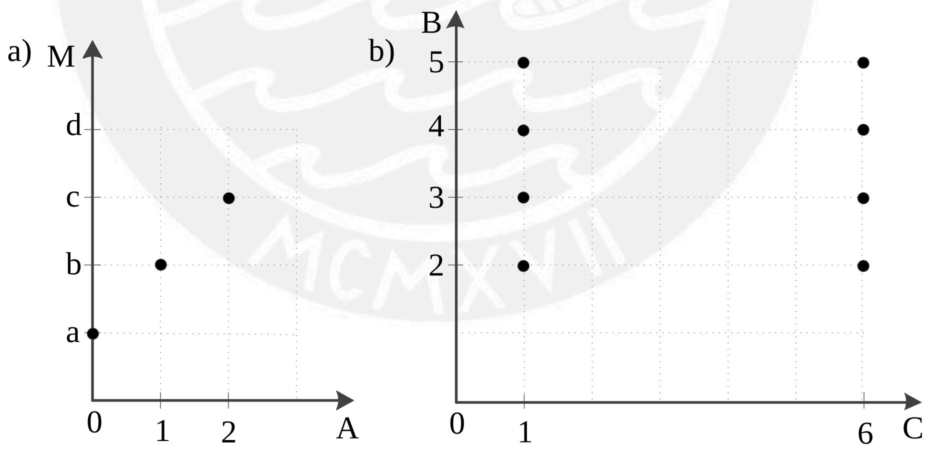
Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_4): Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.

Tarea ($t_{4,\,1}$): Reconocer funciones a partir de un conjunto de puntos.

Constituyen esta tarea los ejemplos 2 y b de la página 143 y los ejercicios propuestos: 4a y 4b de la Actividad 1; y 8c, 8d de la Heteroevaluación que se encuentran en las páginas 141 y 166 respectivamente. El ejercicio propuesto 4a de la Actividad 1 que se encuentra en libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

Determina cuáles de las siguientes gráficas representan funciones:



Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p.141)

El gráfico anterior muestra algunos puntos de una relación, debido a que el libro de texto solo se limita al sistema de los números naturales; sin embargo, los estudiantes del primer grado de educación secundaria ya conocen hasta el sistema de los números racionales. Además, es conveniente tomar en cuenta gráficos continuos en estas tareas, debido a que en primaria para representar la proporcionalidad directa ya se usan gráficos continuos. De otro lado, esta forma de representación del libro de texto no es adecuado, pues conduce a que los estudiantes construyan conocimientos erróneos.

Técnica ($\tau_{4,1,1}$):

Paso 20: Verificar que para cada elemento del conjunto de partida existe una imagen en el conjunto de llegada (existencia).

En la gráfica del ejercicio (a), se observa que para cada elemento de A existe una imagen en M, es decir se cumple la condición de existencia.

Paso 21: Verificar que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (unicidad).

En la gráfica del ejercicio (a), se observa que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de M, es decir se cumple la unicidad. Por lo tanto: $f = \{(0; a); (1; b); (2; c)\}$ es una función de A en M.

Tecnologías:

θ_{11}: Gráfico cartesiano de una función.

La representación de una función en un plano cartesiano se denomina diagrama cartesiano.

θ_{16}: Condición de existencia.

Para todo elemento de A, donde A es el conjunto de partida, existe una imagen en B, donde B es el conjunto de llegada. Esto se simboliza con:

$$\forall\, x \in \mathrm{A},\, y \in \mathrm{B} /\, (x; y) \in f$$

θ_{17}: Condición de unicidad.

A cada valor del conjunto de partida le corresponde un único valor del conjunto de llegada. Por lo tanto:

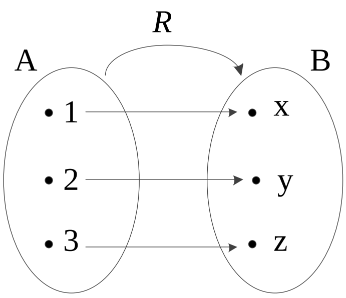
$$(x; y) \in f \;\wedge\; (x; z) \in f \;\rightarrow y = z$$

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{4,\,2}$): Reconocer funciones a partir de diagramas sagitales.

Constituyen esta tarea los ejemplos 1 y a de la página 143 y los ejercicios propuestos: 4a y 4b de la Actividad 1; y 8a, 8b de la Heteroevaluación que se encuentran en las páginas 141 y 166 respectivamente. El ejercicio propuesto 4c de la Actividad 1 es un ejemplo de esta tarea.

Determina cuáles de las siguientes gráficas representan funciones:



Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

Técnica ($\tau_{4,2,1}$) = Técnica ($\tau_{4,1,1}$):

Paso 20: Verificar que para cada elemento del conjunto de partida existe una imagen en el conjunto de llegada (existencia).

En la gráfica sagital del ejercicio anterior, se observa que para cada elemento de A existe una imagen en B, es decir se cumple la condición de existencia.

Paso 21: Verificar que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (unicidad).

En el diagrama sagital del ejercicio 4c, también se observa que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de M, es decir se cumple la unicidad. Por lo tanto: $R = \{(1; x); (2; y); (3; z)\}$ es una función de A en B.

Tecnologías:

θ_{11}: Gráfico cartesiano de una función.

θ_{16}: Condición de existencia.

θ_{17}: Condición de unicidad.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{4,\,3}$): Reconocer funciones a partir de tablas.

Constituyen esta tarea los ejercicios propuestos 8a, 8b, 8c y 8d de la Actividad 2 que se encuentran en la página 142. El ejercicio propuesto 8b de la Actividad 2 del libro de texto analizado es un ejemplo de esta tarea.

Determina si cada una de las siguientes tablas describe una función. Justifica tus respuestas.

b)

x	1,5	2	- 1	- 1,5	4
y	2,25	4	1	2,25	16

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

Técnica ($\tau_{4,3,1}$):

Paso 22: Revisar que ninguno de los valores independientes (x) están repetidos en la tabla.

En la primera fila de la tabla observamos que no existe ningún número que se repite.

x	1,5	2	- 1	- 1,5	4

Paso 23: Verificar que a cada valor de x de la tabla le corresponda un único valor de y o $f(x)$.

En la tabla propuesta se observa que a cada valor de x le corresponde un único valor de y; por lo tanto, la tabla propuesta representa una función.

Tecnologías:

θ_6: Definición de función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{4,\,4}$): Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.

Constituyen esta tarea el ejemplo F3 de la sección de funciones de la página 140, el ejemplo 1M, 1N, 1P, y 1Q de la sección *Mix matemático* de la página 156. Además, los ejercicios propuestos 1G, 1H, 1I, y 1J de la sección *Mix matemático* de la página 157. Los siguientes ejemplos de la sección *Mix matemático* del libro de texto son representantes de esta tarea.

¿Cuáles de los siguientes conjuntos podrían representar una función?

- $M = \{(1; 3); (2; 6); (3; 9)\}$
- $N = \{(2; 9); (3; 5); (5; 12); (3; 16)\}$
- $P = \{(7; 8); (6; 9); (4; 10); (1; 11)\}$
- $Q = \{(8; 2); (12; 4); (14; 6); (12; 7)\}$

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 156)

Técnica ($\tau_{4,4,1}$):

Paso 24: Verificar que ningún elemento de la primera componente del par ordenado se repite.

Paso 25: Verificar que cada elemento x del dominio de la función tiene solo una imagen.

- M = {(1; 3); (2; 6); (3; 9)} es función, porque los elementos del dominio {1; 2; 3} tiene cada uno solo una imagen.
- N = {(2; 9); (3; 5); (5; 12); (3; 16)} no es función, porque el elemento 3 del dominio tiene doble imagen, 5 y 16.
- P = {(7; 8); (6; 9); (4; 10); (1; 11)} es función, ya que cada elemento del dominio tiene una sola imagen.
- Q = {(8; 2); (12; 4); (14; 6); (12; 7)} no es función, pues 12 tiene doble imagen: 4 y 7.

El libro de texto analizado en la solución de estas cuatro tareas usa los término *es función* y *no es función*. Es decir, confunde el objeto matemático con su representación.

Paso 26: Seleccionar el conjunto de pares ordenados que representan funciones.

Luego, M y P representan funciones

Tecnologías:

θ_6: Definición de función.

θ_{12}: Definición de función como par ordenado.

Los elementos de la función f son pares ordenados (x; y), los cuales tienen dos componentes. La primera componente es x, y la segunda es y.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tareas (T_5): Determinar el dominio y rango de funciones.

Tarea ($t_{5,\,1}$): Determinar el dominio y rango de funciones de un conjunto de pares ordenados.

Constituyen esta tarea el ejemplo que emplea el libro de texto para ilustrar las nociones de dominio y rango de funciones en la página 141. Además, los ejercicios propuestos 1a, 1b y 1c de la Actividad 2 que se ubica en la página 141. El ejercicio propuesto 1a de la Actividad 2 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

Determina el dominio y el rango de las funciones, según corresponda:

a) $f = \{(2; 5); (3; 6); (4; 7); (5; 8)\}$

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a; p. 141)

Técnica ($\tau_{5,1,1}$):

Paso 27: Escribir las primeras componentes de los pares ordenados en un conjunto de manera ordenada.

Dom (f) = {2; 3; 4; 5}

Paso 28: Escribir las segundas componentes de los pares ordenados en otro conjunto de manera ordenada.

Ran (f) = {5; 6; 7; 8}

Tecnologías:

θ_{13}: Definición de dominio de una función.

El conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados se denomina dominio de la función.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

El conjunto de las segundas componentes se denomina rango de la función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{5, 2}$): Determinar el dominio y rango de funciones de una tabla numérica.

Constituye esta tarea el problema propuesto 9b de la Actividad 2 que se encuentra en la página 142. A continuación, transcribimos dicho problema a modo ejemplo de esta tarea.

La función f: N → N *está definida por:* $f(x) = 2x + 3$.

a) De acuerdo con la ley de correspondencia completa la representación tabular.

x	0		4	7		12	48
$f(x)$		7			23		

b) determinar el dominio y rango de las funciones.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

Después de hacer la tarea 9a, la tabla anterior queda de la siguiente manera:

x	0	2	4	7	10	12	48
$f(x)$	3	7	11	17	23	27	99

Técnica ($\tau_{5,2,1}$):

Paso 29: Escribir los valores de x en un conjunto en forma ordenada.

Dom (f) = {0; 2; 4; 7; 10; 12; 48}

Paso 30: Escribir los valores de $f(x)$ en otro conjunto en forma ordenada.

Ran (f) = {3; 7; 11; 17; 23; 27; 99}

Tecnologías:

θ_{13}: Definición de dominio de una función.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{5,\,3}$): Determinar el rango de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el dominio.

Constituyen esta tarea los ejercicios propuestos: 1d, 1e y 2 de la Actividad 2; el ejercicio propuesto 2 de la Evaluación 1; y el ejercicio propuesto 4 de la Heteroevaluación. Se encuentran en las páginas 141, 144 y 166 respectivamente. El ejercicio propuesto 2 de la Actividad 2 es un ejemplo representativo de esta tarea.

Sea f una función cuyo dominio es Dom(f) = {4; 7; 9} *y su regla de correspondencia* $f(x) = 7 - x$. *Determina el rango.*

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

Técnica ($\tau_{5,3,1}$):

Paso 31: Reemplazar cada valor de x en la regla de correspondencia.

Si $x = 4$, entonces: $f(4) = 7 - 4$

Si $x = 7$, entonces: $f(7) = 7 - 7$

Si $x = 9$, entonces: $f(9) = 7 - 9$

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias.

Si $x = 4$, entonces: $f(4) = 7 – 4 = 3$

Si $x = 7$, entonces: $f(7) = 7 – 7 = 0$

Si $x = 9$, entonces: $f(9) = 7 – 9 = -2$

Paso 33: Escribir en un conjunto los valores encontrados de $f(x)$ en forma ordenada.

Luego: Ran (f) = {-2; 0; 3}

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{5,\ 4}$): Determinar el dominio de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el rango.

Constituye esta tarea el ejercicio propuesto 5 de la Evaluación 1 que se encuentra en la página 144 del libro de texto. A continuación, transcribimos como ejemplo de esta tarea.

Sea la función f: N $\rightarrow$ N, *según la regla de correspondencia:* $f(x) = 5x + 3$.

Se sabe que: Ran (f) = {18; 23; 28; 48}. *Calcula la suma de los elementos del dominio.*

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 144)

Técnica ($\tau_{5,4,1}$):

Paso 34: Igualar cada elemento del rango a la regla de correspondencia de la función.

$5x + 3 = 18$

Paso 35: Resolver la ecuación y encontrar los valores de la variable x.

$5x = 18 – 3$

$5x = 15$

$x = 15 \div 5$

$x = 3$

Paso 36: Escribir el conjunto con los elementos del dominio de la función.

Dom (f) = {3; 4; 5; 9}

Paso 37: Sumar los elementos del dominio de la función.

$3 + 4 + 5 + 9 = 21$

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

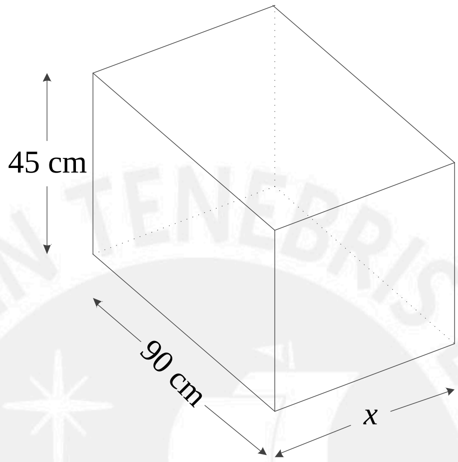
Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_6): Completar tablas que representan funciones.

Tarea ($t_{6,1}$): Completar tablas a partir de la regla de correspondencia dado el dominio.

Conforma esta tarea el ejercicio propuesto 7b de la Actividad 2 que se encuentra en la página 142 del libro de texto. A continuación, transcribimos como ejemplo de esta tarea.

De acuerdo con la figura:



a) Escribe una expresión para el volumen del acuario.

b) Determina el volumen del acuario para las siguientes medidas de x.

x	V(x)
15 cm	
25 cm	
30 cm	
40 cm	

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

No tiene sentido considerar la unidad de medida en la expresión de una función; por ello, no aparece en los cálculos. Para responder a la interrogante se debe recontextualizar.

Después de realizar la tarea 7a la expresión para el volumen del acuario es:

$V(x) = 45(90)x = 4\,050x$

Técnica ($\tau_{6,1,1}$):

Paso 38: Reemplazar cada elemento del dominio en la regla de correspondencia.

x	$V(x) = 4\,050x$
15 cm	V(15) = 4050(15)
25 cm	V(25) = 4050(25)
30 cm	V(30) = 4050(30)
40 cm	V(40) = 4050(40)

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias para completar la tabla.

x	$V(x) = 4\,050x$
15 cm	V(15) = 4050(15) = 60 750
25 cm	V(25) = 4050(25) = 101 250
30 cm	V(30) = 4050(30) = 121 500
40 cm	V(40) = 4050(40) = 162 000

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

θ_{13}: Definición de dominio de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{6,\,2}$): Completar tablas a partir de la regla de correspondencia donde falta elementos del dominio y rango.

Esta tarea está conformada por el ejercicio propuesto 9a de la Actividad 2 y el ejercicio propuesto 5 de la sección *Mix matemático*. Las que se encuentran en las páginas 142 y 157 respectivamente. El ejercicio propuesto 5 de la sección *Mix matemático* es un ejemplo de esta tarea.

Sea la función $f(x) = 2x + 1$, *cuya representación tabular es*:

x	3		8	10	
$f(x)$		13	17		31

Halla los valores que completan la tabla.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 157)

Técnica ($\tau_{6,2,1}$):

Paso 39: Reemplazar los elementos conocidos del dominio en la regla de correspondencia de la función.

Si $x = 3$, entonces: $f(3) = 2(3) + 1$

Si $x = 8$, entonces: $f(8) = 2(8) + 1$

Si $x = 10$, entonces: $f(10) = 2(10) + 1$

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias.

Si $x = 3$, entonces: $f(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$

Si $x = 8$, entonces: $f(8) = 2(8) + 1 = 16 + 1 = 17$

Si $x = 10$, entonces: $f(10) = 2(10) + 1 = 20 + 1 = 21$

Paso 34: Igualar la regla de correspondencia de la función con los elementos conocidos del rango.

$2x + 1 = 13$; $2x + 1 = 31$

Paso 35: Resolver la ecuación y encontrar los valores de la variable x.

$2x + 1 = 13$

$2x = 13 – 1$

$2x = 12$

$x = 12 \div 2$

$x = 6$

Paso 40: Completar la tabla con los números encontrados.

x	3	6	8	10	15
$f(x)$	7	13	17	21	31

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

θ_{13}: Definición de dominio de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{6,\,3}$): Completar tablas a partir de situaciones extramatemáticas.

El ejercicio propuesto 20a de la sección *Mix matemático* que se encuentra en la página 158 del libro de texto, conforma esta tarea. En seguida copiamos como ejemplo.

Pedro quiere saber la cantidad de agua que se pierde en un caño que gotea constantemente. Para ello, pone un recipiente debajo de dicho caño y observa que después de 20 minutos el agua subió 24 cm.

a) Complete la tabla y elabora una gráfica de la relación: tiempo y altura que alcanza el agua en el recipiente.

Tiempo en minutos	10	20	30	40	50
Altura en centímetros	12	24			

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 158)

Técnica ($\tau_{6,3,1}$):

Paso 41: Determinar la regla de correspondencia de la función a partir de los elementos conocidos.

$$f(x) = \frac{6}{5}x = 1{,}2x$$

Paso 39: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los demás valores del dominio.

Si $x = 30$, entonces: $f(30) = 1{,}2(30)$

Si $x = 40$, entonces: $f(40) = 1{,}2(40)$

Si $x = 50$, entonces: $f(50) = 1{,}2(50)$

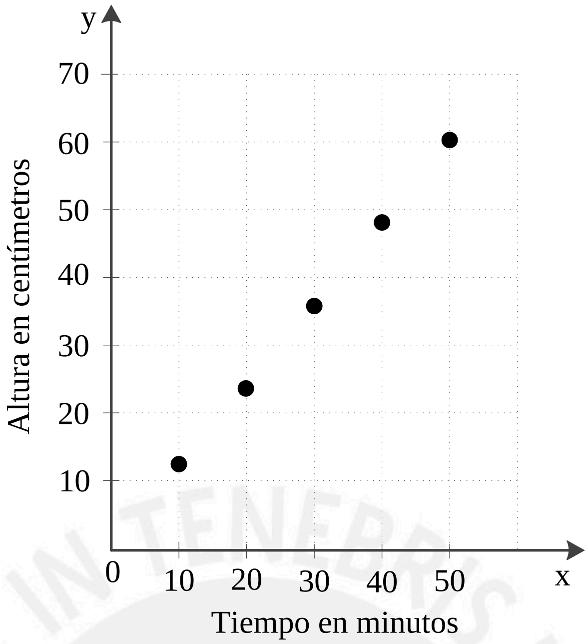
Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias.

Si $x = 30$, entonces: $f(30) = 1{,}2(30) = 36$

Si $x = 40$, entonces: $f(40) = 1{,}2(40) = 48$

Si $x = 50$, entonces: $f(50) = 1{,}2(50) = 60$

Paso 42: Representar gráficamente algunos puntos de la función.



Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

θ_{13}: Definición de dominio de una función.

θ_{11}: Gráfico cartesiano de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_7): Representar una función lineal afín.

Tarea ($t_{7,\,1}$): Representar tabular y gráficamente algunos puntos de una función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.

Esta tarea está conformada por el ejemplo de la sección donde se trata la representación tabular y gráfica de una función y por los ejercicios propuestos 2a, 2b de la Actividad 1; y 9c de la Actividad 2. El ejercicio propuesto 2a en la Actividad 1 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

Representa tabular y gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = 3x$

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

Técnica ($\tau_{7,1,1}$):

Paso 43: Asignar valores a la variable *x*.

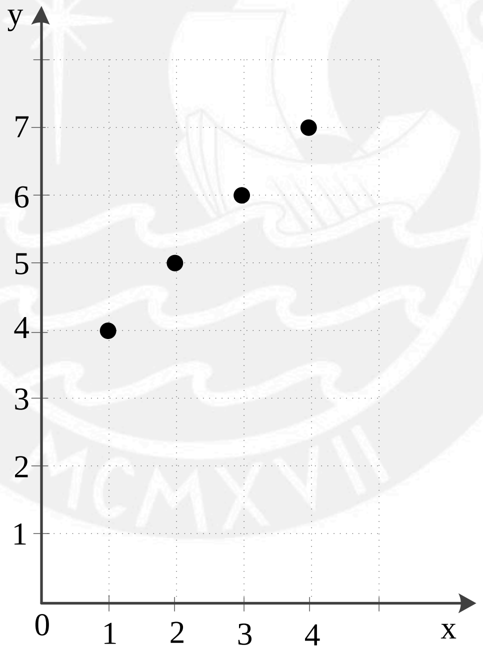
Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de *x* para encontrar *f*(*x*).

Paso 45: Construir una tabla de valores.

x	$f(x) = x + 3$
1	$f(1) = 1 + 3 = 4$
2	$f(2) = 2 + 3 = 5$
3	$f(3) = 3 + 3 = 6$
4	$f(4) = 4 + 3 = 7$

Paso 46: Construir el plano cartesiano.

Paso 15: Ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano.



Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{11}: Gráfico cartesiano de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{7,2}$): Representación tabular y sagital de la función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.

Esta tarea está conformada por un ejemplo de la sección donde se trata la representación tabular y gráfica de una función y por el ejercicio propuesto 3 de la Evaluación 1. El ejercicio propuesto 3 en la Evaluación 1 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

Sean los conjuntos:

$A = \{2x \in N / 2 < x < 6\}$

$B = \{x \in N / 4 < x < 10\}$

Se define la función $f: A \rightarrow B$ *según la regla de correspondencia* $f(x) = x - 1$.

Realiza la representación tabular de la función y la representación gráfica mediante un diagrama sagital.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 144)

En esta tarea hay un error, pues los elementos del conjunto A son de la forma $2x$. Sin embargo, cuando se define la función $f: A \rightarrow B$ según la regla de correspondencia $f(x) = x – 1$, el estudiante podría reemplazar en la regla de correspondencia los valores de x, y no necesariamente los valores de $2x$ que son los elementos del conjunto A. Sería conveniente que el libro de texto utilice otra letra cuando define la regla de correspondencia de la función.

Técnica ($\tau_{7,2,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Los valores que x toma en el conjunto A son: 3, 4 y 5

x	3	4	5
$2x$	2(3)	2(4)	2(5)
	6	8	10

Luego los elementos del conjunto A son:

$A = \{6; 8; 10\}$

Los elementos del conjunto B son números naturales mayores que 4, pero menores que 10. Luego:

$B = \{5; 6; 7; 8; 9\}$

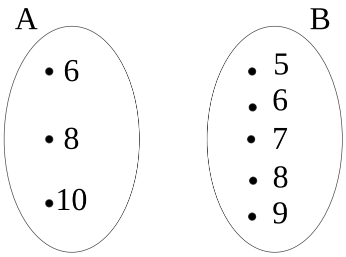
Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de x para encontrar $f(x)$.

Si $x = 6$ entonces $f(6) = 6 – 1 = 5$

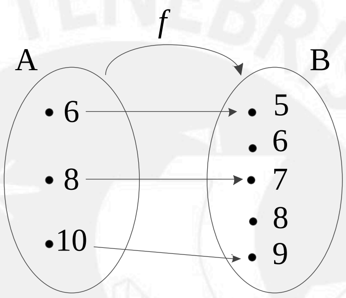
Si $x = 8$ entonces $f(8) = 8 - 1 = 7$

Si $x = 10$ entonces $f(10) = 10 - 1 = 9$

Paso 10: Representar los conjuntos de partida y llegada mediante diagramas de Venn-Euler.



Paso 45: Representar con flechas que van de A a B cada elemento de la función.



Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{10}: Diagrama sagital de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{7,\,3}$): Representar una función lineal afín como un conjunto de pares ordenados dado la regla de correspondencia.

Esta tarea está conformada por dos ejemplos: uno de ellos corresponde a la sección donde se introduce la noción de función y el otro a la sección en la que se trata la representación tabular y gráfica de una función.

El siguiente ejercicio resuelto que el libro de texto usa para explicar la definición de función es un ejemplo de esta tarea.

Dados los conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{0; 3; 4; 5; 6\}$, *determina por extensión la función* f *de A en B según la regla de correspondencia* $y = x + 2$. *La función definida es:* $f = \{(1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 6)\}$

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 140)

En vez de decir la función definida es conveniente usar la expresión la función definida puede ser representada por $f = \{(1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 6)\}$.

Técnica ($\tau_{7,3,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Conjunto de partida: $A = \{1; 2; 3; 4\}$

Conjunto de llegada: $B = \{0; 3; 4; 5; 6\}$

Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de x para encontrar $f(x)$.

Si $x = 1$, entonces $y = 1 + 2 = 3$

Si $x = 2$, entonces $y = 2 + 2 = 4$

Si $x = 3$, entonces $y = 3 + 2 = 5$

Si $x = 4$, entonces $y = 4 + 2 = 6$

Paso 46: Representar como un conjunto de pares ordenados los elementos de la función.

$f = \{(1; 3); (2; 4); (3; 5); (4; 6)\}$

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{10}: Diagrama sagital de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_8): Representar una función cuadrática.

Tarea ($t_{8,\,1}$): Representar tabular y gráficamente una función cuadrática a partir de la regla de correspondencia.

Esta tarea está conformada por el ejercicio propuesto 2c de la Actividad 1 del libro de texto. A continuación, transcribimos a modo de ejemplo de esta tarea.

Representa tabular y gráficamente las siguientes funciones:

c) $f(x) = x^2$

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

Técnica ($\tau_{8,1,1}$) = Técnica ($\tau_{7,1,1}$):

Paso 43: Asignar valores a la variable x.

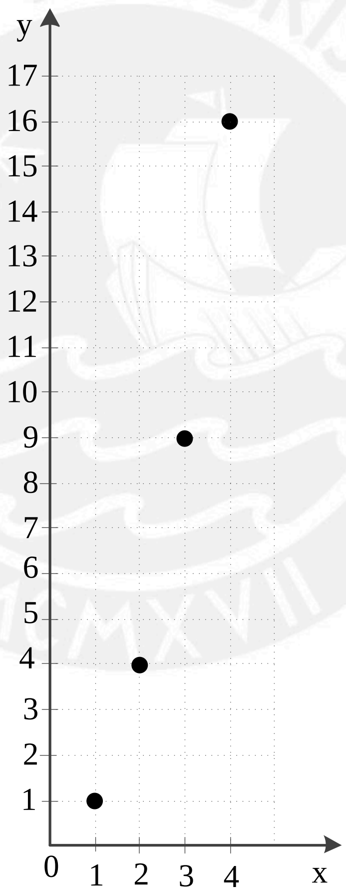
Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de *x* para encontrar *f*(*x*).

Paso 45: Construir una tabla de valores.

x	$f(x) = x^2$
1	$f(1) = 1^2 = 1$
2	$f(2) = 2^2 = 4$
3	$f(3) = 3^2 = 9$
4	$f(4) = 4^2 = 16$

Paso 46: Construir el plano cartesiano.

Paso 15: Ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano.



Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{11}: Gráfico cartesiano de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_9): Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín.

Tarea ($t_{9,\ 1}$): Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de un enunciado verbal.

Conforman esta tarea el ejercicio propuesto 3b de la Actividad 1 que se encuentra en la página 141. A continuación transcribimos como un ejemplo.

> *Carmen y Ana van a un parque de diversiones. La entrada para cada juego cuesta S/. 3.*
>
> b) *Defina la función estableciendo su regla de correspondencia.*
>
> **Fuente:** Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

Técnica ($\tau_{9,1,1}$):

Paso 04: Identificar las magnitudes que intervienen en el enunciado verbal.

Número de entradas y costo total de las entradas

Paso 47: Asignar valores a una de las variables de la relación para encontrar el valor de la otra variable.

1 entrada cuesta S/. 3

2 entradas cuestan S/. 6

3 entradas cuestan S/. 9

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia de la función.

$f(x) = 3x$

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{9,\ 2}$): Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de pares ordenados.

Constituyen esta tarea los ejercicios propuestos 5a, 5b, 5c y 5d de la Actividad 1. El ejercicio propuesto 5a de la Actividad 1 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

> *Descubre la regla de correspondencia de cada función y escríbela.*
>
> a) $f = \{(1; 4); (2; 8); (3; 12); (4; 16)\}$
>
> **Fuente:** Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 141)

Técnica ($\tau_{9,2,1}$):

Paso 49: Realizar operaciones aritméticas con los componentes de los pares ordenados.

$4 = 4(1); 8 = 4(2); 12 = 4(3); 16 = 4(4)$

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia de la función.

$f(x) = 4x$

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{12}: Definición de función como par ordenado.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{9,\ 3}$): Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de tablas.

Constituyen esta tarea los ejercicios propuestos 4a, 4b y 4c de la Actividad 1; y el ejercicio propuesto 6 de la sección *Mix matemático* de la página 157. El ejercicio propuesto 4a en la Evaluación 1 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

Escribe la regla de correspondencia a partir de la información de cada tabla.

a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	6	9	12

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 144)

Técnica ($\tau_{9,3,1}$):

Paso 50: Realizar operaciones aritméticas con los números que forman la tabla.

$0 = 3(0); 3 = 3(1); 6 = 3(2); 9 = 3(3); 12 = 3(4)$

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia de la función.

$f(x) = 3x$

Tecnologías:

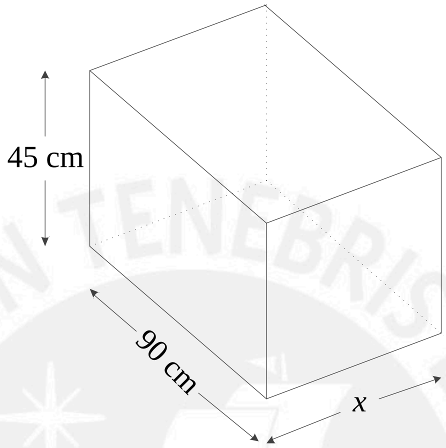
θ_7: Definición de regla de correspondencia.

Teoría (Θ): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{9,\ 4}$): Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de figuras.

Conforma esta tarea el ejercicio propuesto 7a de la Actividad 2 que se encuentra en la página 142 del libro de texto, en seguida presentamos como un ejemplo.

De acuerdo con la figura [acuario]:



a) *Escribe una expresión para el volumen del acuario.*

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

No tiene sentido operar con las unidades de medida. Para resolver la tarea se considera los datos, se realizan las operaciones y se recontextualiza para responder a la pregunta formulada.

Técnica ($\tau_{9,4,1}$):

Paso 51: Identificar las dimensiones de los lados del acuario.

Paso 52: Multiplicar las dimensiones del acuario (paralelepípedo).

$V(x) = (45)(90)(x)$

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia que representa el volumen del acuario.

$V(x) = 4050x$

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_{10}): Extraer información de las distintas representaciones de una función.

Tarea ($t_{10,\,1}$): Extraer información de pares ordenados que representan funciones y encontrar valores que faltan.

Constituyen esta tarea los ejercicios propuestos 11a, 11b, 11c, 11d y 11e de la Actividad 2 de la página 142. El ejercicio propuesto 11a de la Actividad 2 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

Si f es una función, calcula el valor de k en cada caso.

a) $f = \{(5; 8); (3; 2k); (3; 6)\}$

b) $f = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (1; k)\}$

c) $f = \{(3; 2); (2; k); (2; 6); (1; 2k)\}$

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

El enunciado de esta tarea debe empezar con la expresión “si f representa una función”. El libro de texto confunde la función con su representación.

Técnica ($\tau_{10,1,1}$):

Paso 53: Identificar la componente del par ordenado en el que se encuentra la incógnita.

$(3; 2k)$

Paso 54: Buscar la primera componente que se repite.

$(3; 2k); (3; 6)$

Paso 55: Igualar las segundas componentes de los pares ordenados.

$2k = 6$

Paso 35: Resolver la ecuación.

$2k = 6$

$k = 6 \div 2$

$k = 3$

Paso 56: Hallar el valor que falta en la función.

Luego $k = 3$

Tecnologías:

θ_6: Definición de función.

θ_{12}: Definición de función como par ordenado.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{10,\,2}$): Extraer información de pares ordenados que representan funciones y encontrar valores que faltan y determinar el rango.

Constituyen esta tarea los ejercicios propuestos 3 y 5 de la Actividad 2 de la página 142. El ejercicio propuesto 5 de la Actividad 2 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

Sea la función:

$f = \{(2; k - 1); (3; k + 3); (5; k^2); (2; 10)\}$

Calcula el valor de k, luego indica el dominio y rango de la función.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

Al igual que en la tarea anterior, el enunciado de esta tarea debe comenzar con la expresión "representada por" en vez de la expresión "sea la función". El libro de texto otra vez más confunde la función con su representación.

Técnica ($\tau_{10,2,1}$):

Paso 53: Identificar la componente del par ordenado en el que se encuentra la incógnita.

Paso 54: Buscar la primera componente que se repite.

$(2; k - 1)$ y $(2; 10)$

Paso 55: Igualar las segundas componentes de los pares ordenados.

$k - 1 = 10$

Paso 35: Resolver la ecuación.

$k - 1 = 10$

$k = 10 + 1$

$k = 11$

Paso 57: Representar la función como pares ordenados.

$f = \{(2; 11 - 1); (3; 11 + 3); (5; 11^2); (2; 10)\}$

$f = \{(2; 10); (3; 14); (5; 121); (2; 10)\}$

$f = \{(2; 10); (3; 14); (5; 121)\}$

Paso 28: Determinar el dominio y rango de la función.

Dom (f) = $\{2; 3; 5\}$

Ran (f) = $\{10; 14; 121\}$

Tecnologías:

θ_6: Definición de función.

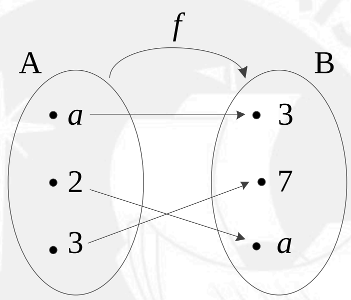
θ_{14}: Definición de rango de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{10,\ 3}$): Extraer información de un diagrama sagital y encontrar valores que faltan dado una condición y sumar los elementos del rango.

El ejercicio propuesto 4 de la Actividad 2 del libro de texto constituye esta tarea. Por lo tanto, es el único ejemplo de esta tarea.

Calcula la suma de los elementos del rango de la función si: $f(a) + f(3) = f(2)$.



Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

Técnica ($\tau_{10,3,1}$):

Paso 58: Identificar las incógnitas.

Paso 59: Extraer datos del diagrama sagital.

$f(a) = 3;\ \ f(3) = 7;\ \ f(2) = a$

Paso 60: Reemplazar los datos en la condición del problema.

$f(a) + f(3) = f(2)$

$3 + 7 = a$

Paso 35: Resolver la ecuación.

$3 + 7 = a \Rightarrow a = 10$

Paso 28: Determinar el rango de la función.

Ran $(f) = \{3; 7; 10\}$

Paso 61: Realizar la suma de los elementos del rango.

$3 + 7 + 10 = 20$

Tecnologías:

θ_{10}: Diagrama sagital de una función.

θ_{14}: Definición de rango de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_{11}): Construir funciones entre dos conjuntos.

Tarea ($t_{11,\ 1}$): Construir funciones entre dos conjuntos usando la representación tabular y gráfica de diagramas sagitales.

El ejercicio propuesto 6 de la Actividad 2 del libro de texto constituye esta tarea. Por lo tanto, es el único ejemplo que ilustra esta tarea.

Sean los conjuntos:

A = {2; 4; 6} *y*

B = {*m*; *n*; *p*}

Define cinco funciones posibles de A en B usando la representación tabular y gráfica de diagramas sagitales.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

Técnica ($\tau_{11,1,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Conjunto de partida: A = {2; 4; 6}

Conjunto de llegada: B = {m; n; p}

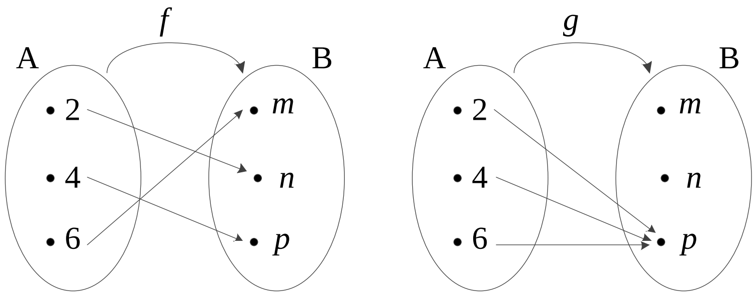
Paso 62: Construir una tabla que representa una función de A en B.

x	$f(x)$
2	m
4	n
6	p

X	$g(x)$
2	n
4	n
6	n

x	$h(x)$
2	p
4	m
6	n

Paso 63: Construir un diagrama sagital que representa una función de A en B.



Tecnologías:

θ_6: Definición de función.

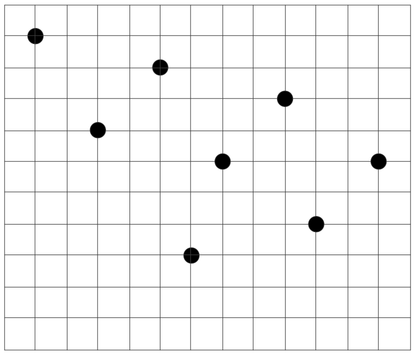
θ_{10}: Diagrama sagital de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{11,\ 2}$): Construir funciones entre dos conjuntos usando la representación gráfica cartesiana.

Los puzzles propuestos (ab1, ab2 y ab3) de la página 143 del libro de texto constituyen esta tarea. Por lo tanto, es un ejemplo de esta tarea.

En cada gráfico los puntos representan a pares ordenados de los elementos de dos conjuntos que se relacionan.
En cada caso:
a) Traza los ejes para que el diagrama represente una función.
b) Traza los ejes para que el diagrama no represente una función.
Recuerda que está permitido girar la cuadrícula (gira tu cuaderno) y luego traza los ejes.



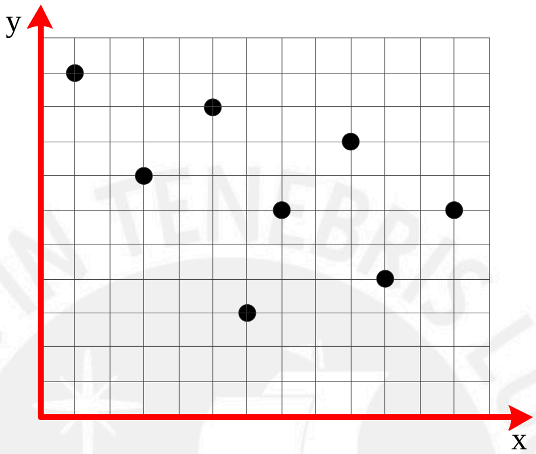
Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 143)

Esta tarea puede conducir a los estudiantes a creer que los ejes de coordenadas siempre deben estar representados en horizontal y en vertical, y eso no es cierto.

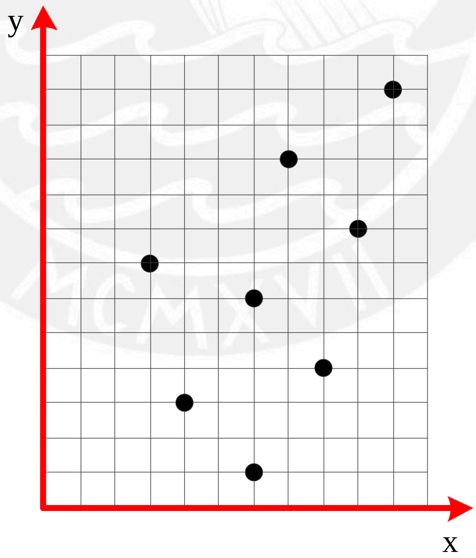
Técnica ($\tau_{11,2,1}$):

Paso 64: Identificar los puntos en la cuadrícula proporcionada.

Paso 65: Trazar los ejes coordenados para que la relación represente una función.



Paso 66: Trazar los ejes coordenados para que la relación no represente una función.



Tecnologías: Los conocimientos movilizados en esta tarea son:

θ_6: Definición de función

θ_{11}: Gráfico cartesiano de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_{12}): Evaluar una función a partir de la imagen y preimagen.

Tarea ($t_{12,\,1}$): Evaluar una función a partir de la preimagen dado la regla de correspondencia de la función.

Los ejercicios propuestos 10a y 10c de la Actividad 2 conforman esta tarea. El ejercicio propuesto 10a de la actividad 2 del libro de texto es un ejemplo de esta tarea.

> *Sea la función* f: N→N *definida por:* $f(x) = 3x - 5$
>
> a) *Calcula la imagen de 4.*
>
> **Fuente:** Matemática 1 Secundaria (Perú, 2012a, p. 142)

Técnica ($\tau_{12,1,1}$):

Paso 39: Reemplazar el valor a evaluar en la regla de correspondencia de la función.

$f(x) = 3x - 5$

$f(4) = 3(4) - 5$

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas.

$f(4) = 3(4) - 5$

$f(4) = 12 - 5$

$f(4) = 7$

Paso 67: hallar la imagen de la preimagen dado.

Luego, la imagen de 4 es 7

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{15}: Imagen y preimagen de una función.

En toda función, los elementos del rango se llaman imágenes de los respectivos elementos del dominio (preimágenes), según la regla de correspondencia de dicha función.

$(x\,;\,y)$

Preimagen ← x y → Imagen

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{12,\ 2}$): Evaluar una función a partir de la imagen dado la regla de correspondencia de la función.

El ejercicio propuesto 10b de la Actividad 2 conforma esta tarea. Por lo tanto, es el único ejemplo de esta tarea.

> *Sea la función* f: N→N *definida por:* $f(x) = 3x - 5$
>
> b) *Halle la preimagen de* 13.
>
> **Fuente:** Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 142)

Técnica ($\tau_{12,2,1}$):

Paso 34: Igualar la regla de correspondencia de la función a la imagen dado.

$f(x) = 3x - 5 = 13$

$3x - 5 = 13$

Paso 35: Resolver la ecuación.

$3x - 5 = 13$

$3x = 13 + 5$

$3x = 18$

$x = 18 \div 3$

$x = 6$

Paso 68: Hallar la preimagen de la imagen dado.

Luego la preimagen de 13 es 6.

Tecnologías:

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{15}: Imagen y preimagen de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_{13}): Determinar el valor de verdad de proposiciones.

Tarea ($t_{13,\ 1}$): Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre el dominio y rango de una función.

Los ejercicios propuestos 2a, 2b y 2c de la sección *Mix matemático* del libro de texto conforman esta tarea. Por consiguiente, son un ejemplo de esta tarea.

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- *El dominio de una función está incluido en el conjunto de partida.*
- *El rango de una función es el conjunto de las preimágenes.*
- *Si el dominio de la función $f(x) = x + 1$ es $\{3; 9\}$, entonces el rango es $\{4; 10\}$*

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p.157)

Técnica ($\tau_{13,1,1}$):

Paso 69: Leer el enunciado de la proposición.

Paso 70: Verificar la información que contiene la proposición.

Para $x = 3$, $f(3) = 3 + 1 = 4$

Para $x = 9$, $f(9) = 9 + 1 = 10$

Luego: Ran $(f) = \{4; 10\}$

Paso 71: Establecer el valor de verdad de la proposición.

Por lo tanto, el valor de verdad de la proposición: si el dominio de la función $f(x) = x + 1$ es $\{3; 9\}$, entonces el rango es $\{4; 10\}$ es verdadera.

Tecnologías:

θ_{13}: Definición de dominio de una función

θ_{14}: Definición de rango de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{13,\,2}$): Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre los pares ordenados que representan una función.

Los ejercicios propuestos 3A, 3B, 3C, 3D, 3E y 3F de la sección *Mix matemático* que se encuentran en la página 157 del libro de texto conforma esta tarea. Por consiguiente, son un ejemplo de esta tarea.

Si $f(x) = 3x - 8$ y Dom $(f) = \{3; 4; 7; 11\}$, ¿cuáles de las afirmaciones son verdaderas?

A. $(3; 2) \in f$	C. $(4; 4) \in f$	E. $(11; 24) \notin f$
B. $(3; 1) \in f$	D. $(7; 13) \in f$	F. $(11; 25) \in f$

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 157)

Técnica ($\tau_{13,2,1}$):

Paso 72: Identificar la regla de correspondencia de la función.

La regla de correspondencia es: $f(x) = 3x – 8$

Paso 73: Reconocer los elementos del dominio de la función.

Dom (f) = {3; 4; 7; 11}

Paso 71: Establecer el valor de verdad de la proposición.

A) (3; 2) $\in f$ es falso, pues $f(3) = 3(3) – 8 = 9 – 8 = 1$

B) (3; 1) $\in f$ es verdadero, pues $f(3) = 3(3) – 8 = 9 – 8 = 1$

C) (4; 4) $\in f$ es verdadero, pues $f(4) = 3(4) – 8 = 12 – 8 = 4$

D) (7; 13) $\in f$ es verdadero, pues $f(7) = 3(7) – 8 = 21 – 8 = 13$

E) (11; 24) $\notin$ f es verdadero, pues f(11) = 3(11) – 8 = 33 – 8 = 25

F) (11; 25) $\in f$ es verdadero, pues $f(11) = 3(11) – 8 = 33 – 8 = 25$

Paso 74: Seleccionar las proposiciones que son verdaderos.

Luego las afirmaciones verdaderas son: (3; 1) $\in f$; (4; 4) $\in f$; (7; 13) $\in f$; (11; 24) $\notin f$ y (11; 25) $\in f$

Tecnologías:

θ_6: Definición de función.

θ_7: Definición de regla de correspondencia.

θ_{13}: Definición de dominio de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tarea ($t_{13,\ 3}$): Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre situaciones extramatemáticas.

Los ejercicios propuestos 4I, 4II, 4III y 4IV de la sección *Mix matemático* que están en la página 157 del libro de texto conforma esta tarea. Por consiguiente, son un ejemplo de esta tarea.

Analiza la siguiente situación que da origen a una función:

Sofía visitó una feria de libros con el fin de comprar algunos cuentos. La tarifa de ingresos es S/. 2 y el precio de cada cuento es de S/. 10.

Señala cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas:

I) La variable independiente es el número de cuentos que compró Sofía.

II) La variable dependiente es el costo de los cuentos que compró.

III) Si Sofía compró 3 cuentos, su gasto total fue S/. 30.

IV) Si solo compró un cuento, Sofía gastó S/. 12 en total.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 157)

Técnica ($\tau_{13,3,1}$):

Paso 75: Leer la situación de contexto propuesto.

Paso 71: Establecer el valor de verdad de la proposición.

I) La variable independiente es el número de cuentos que compró Sofía, es verdadero.

II) La variable dependiente es el costo de los cuentos que compró, es falso, porque falta considerar los S/. 2 de la entrada.

III) Si Sofía compró 3 cuentos, su gasto total fue S/. 30. Es falso, porque su gasto fue de $f(3) = 10(3) + 2 =$ S/. 32.

IV) Si solo compró un cuento, Sofía gastó S/. 12 en total. Es verdadero, porque ella gastó $f(1) = 10(1) + 2 =$ S/. 12.

Paso 74: Seleccionar las proposiciones que son verdaderos.

Son verdaderas las afirmaciones I y II.

Tecnologías:

θ_8: Definición de variables de una función.

Teoría (Θ_1): Teoría de las funciones.

Tipo de tarea (T_{14}): Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.

Tarea ($t_{14,\ 1}$): Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes en una situación matemática.

El ejercicio propuesto 2a de la Actividad 3 del libro de texto conforma esta tarea. Por consiguiente, es un ejemplo de esta tarea.

Determina en cada situación si las magnitudes mostradas son directamente (D) o inversamente (I) proporcionales:

a) Lado de un cuadrado y su perímetro.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 147)

Técnica ($\tau_{14,1,1}$):

Paso 76: Asignar valores a una de las magnitudes y encontrar el valor de la otra magnitud.

Lado	L	1	2	3	4
Perímetro	$4L$	4	8	12	16

Paso 77: Hallar el cociente de los valores.

$$\frac{1}{4} = 0{,}25;\ \frac{2}{8} = 0{,}25;\ \frac{3}{12} = 0{,}25;\ \frac{4}{16} = 0{,}25$$

Paso 78: Comparar los cocientes de proporcionalidad.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

Los pasos 77 y 78 no se encuentran en el libro de texto analizado, pero si se emplean en el libro de sexto grado de educación primaria. Por ello, se considera que forma parte de los conocimientos previos del estudiante.

Paso 79: Establecer si las magnitudes son directamente proporcionales.

Encontramos que el cociente es 0,25 en todos los casos. Entonces, las magnitudes lado y perímetro de un cuadrado son directamente proporcionales.

Tecnologías:

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales.

Dos magnitudes son directamente proporcional (DP) si el cociente de sus valores permanece constante, es decir: A DP B $\Leftrightarrow$ A/B = K (K = constante de proporcionalidad).

Teoría (Θ_2): Teoría de las magnitudes proporcionales.

De acuerdo al libro de texto que analizamos, la teoría de las magnitudes proporcionales comprende magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.

Tarea ($t_{14,\ 2}$): Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes en una situación extramatemática.

Conforman esta tarea los ejercicios propuestos: 2c de la Actividad 3; 1b de la Evaluación 2; 7a, 7c y 7d de la sección Mix matemático; y 7b de la Heteroevaluación. Las que se encuentran en las páginas 147, 149, 157 y 166 respectivamente del libro de texto. El ejercicio propuesto 2c de la Actividad 3 es un ejemplo de esta tarea.

Determina en cada situación si las magnitudes mostradas son directamente (D) o inversamente (I) proporcionales:

c) Costo y número de juanes.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 147)

Técnica ($\tau_{14,2,1}$) = Técnica ($\tau_{14,1,1}$):

Paso 76: Asignar valores a una de las magnitudes y encontrar el valor de la otra magnitud.

Costo	S/. 4	S/. 8	S/. 12	S/. 16
Número de juanes	1	2	3	4

Paso 77: Hallar el cociente de los valores.

$$\frac{4}{1} = 4\ ;\ \frac{8}{2} = 4\ ;\ \frac{12}{3} = 4;\ \frac{16}{4} = 4$$

Paso 78: Comparar los cocientes de proporcionalidad.

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = 4$$

Paso 79: Establecer si las magnitudes son directamente proporcionales.

Encontramos que el cociente es 4 en todos los casos. Entonces, las magnitudes costo y número de juanes son directamente proporcionales.

Tecnologías:

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales.

Teoría (Θ_2): Teoría de las magnitudes proporcionales.

Tipo de tarea (T_{15}): Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales.

Tarea ($t_{15, 1}$): Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales sobre situaciones extramatemáticas.

Conforman esta tarea el ejemplo de la página 145 de la proporcionalidad directa e inversa. Asimismo, los ejercicios propuestos: 2a, 2b y 4 de la subsección ¿qué sabemos?; 4 y 5 de la Actividad 3; 2, 4, 5 y 6 de la Evaluación 2; y el ítem 2 de la subsección de olimpiadas matemáticas. Las que se encuentran en las páginas 137, 147, 149 y 160 respectivamente del libro de texto. El ejercicio propuesto 4 de la Actividad 3 del libro de texto constituye un ejemplo de esta tarea.

El precio de tres docenas de coconas es S/. 48. ¿Cuál será el precio de 15 coconas?

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 147)

Técnica ($\tau_{15,1,1}$): Método de las proporciones

Paso 80: Establecer la proporcionalidad de las magnitudes.

Para resolver este problema hacemos una tabla de proporcionalidad.

	Cantidad		Precio
Supuesto	36	——	S/. 48
Pregunta	15	——	x

Como puede observarse, la cantidad de coconas y el precio son magnitudes directamente proporcionales, puesto que a más cantidad de coconas más es el precio y a menos cantidad, menos es el precio.

Paso 81: Escribir la ecuación de la proporcionalidad.

Por consiguiente, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{36}{15} = \frac{48}{x}$$

Paso 82: Multiplicar en aspa.

$$36(x) = 48(15) \rightarrow x = \frac{48(15)}{36} = 20$$

Paso 83: Hallar el valor de la incógnita.

Luego x = S/. 20

Por lo tanto, el precio de 15 coconas es S/. 20.

Para realizar este tipo de tareas se pueden usar dos técnicas conocida como: el método de las proporciones y el método de reducción a la unidad, sin embargo el libro de texto que analizado solo usa la primera de ellas.

Tecnologías:

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales.

Teoría (Θ_2): Teoría de las magnitudes proporcionales.

Tipo de tarea (T_{16}): Completar tablas de magnitudes directamente proporcionales.

Tarea ($t_{16,\,1}$): Completar tablas de magnitudes directamente proporcionales a partir de una situación extramatemática.

Esta tarea está formada por el ejercicios propuesto 6 de la Actividad 3 del libro de texto. A continuación, transcribimos a modo de ejemplo de esta tarea.

En una empresa cada empleado elabora diariamente 30 artículos de una misma clase. Basándote en esta información, completa la tabla.

N° de empleados	Cantidad de artículos elaborados
1	30
3	
6	
9	
12	

Determinar y explica si estas magnitudes son directamente proporcionales.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 147)

Técnica ($\tau_{16,1,1}$):

Paso 80: Establecer la proporcionalidad entre las magnitudes.

Paso 84: Averiguar el número por el que se debe multiplicar uno de los valores para encontrar el valor de la otra magnitud.

30 = 1(30)

Paso 85: Multiplicar por el número encontrado a los demás valores para completar la tabla.

N° de empleados	Cantidad de artículos elaborados
1	1(30) = 30
3	3(30) = 90
6	6(30) = 180
9	9(30) = 270
12	12(30) = 360

Tecnologías:

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales.

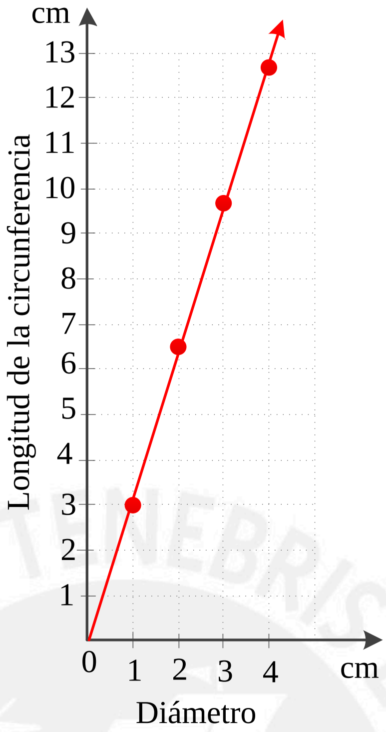
Teoría (Θ_2): Teoría de las magnitudes proporcionales.

Tipo de tarea (T_{17}): Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales.

Tarea ($t_{17,\,1}$): Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales para realizar justificaciones.

Esta tarea está formada por el ejercicio propuesto 9 de la Actividad 3 del libro de texto. A continuación, transcribimos a modo de ejemplo de esta tarea.

> *La gráfica de la figura relaciona la longitud de una circunferencia (eje vertical) con el diámetro (eje horizontal).*
>
> *¿Puedes afirmar que la longitud de la circunferencia es directamente proporcional con el diámetro? ¿Por qué?*



Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 147)

Por un lado, los términos eje vertical y horizontal son obstáculos didácticos que conducen al estudiante al error. El eje de las abscisas y de las ordenadas son perpendiculares entre sí, más no horizontal y vertical. Por otro lado, el libro de texto utiliza un gráfico continúo para representar la proporcionalidad directa, debido a que en educación primaria también se representa así.

Técnica ($\tau_{17,1,1}$):

Paso 86: Observar el gráfico de diagrama cartesiano.

Paso 76: Asignar algunos valores a una magnitud para ver su influencia en la otra magnitud.

Diámetro (D)	Radio (r)	Longitud de la circunferencia (L)
D = 1	r = 0,5	L = 2π(0,5) = π
D = 2	r = 1,0	L = 2π(1,0) = 2π
D = 3	r = 1,5	L = 2π(1,5) = 3π
D = 4	r = 2,0	L = 2π(2,0) = 4π

Paso 87: Establecer conclusiones.

Luego la longitud de la circunferencia es directamente proporcional con el diámetro de la circunferencia, ya que si el diámetro aumenta, la longitud de la circunferencia también aumenta, si el diámetro disminuye, la longitud de la circunferencia también disminuye.

Paso 88: Justificar las conclusiones.

Porque la constante de proporcionalidad en todos los casos es lo mismo.

$$k = \frac{\pi}{1} = \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{3} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

Tecnologías:

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales.

Teoría (Θ_2): Teoría de las magnitudes proporcionales.

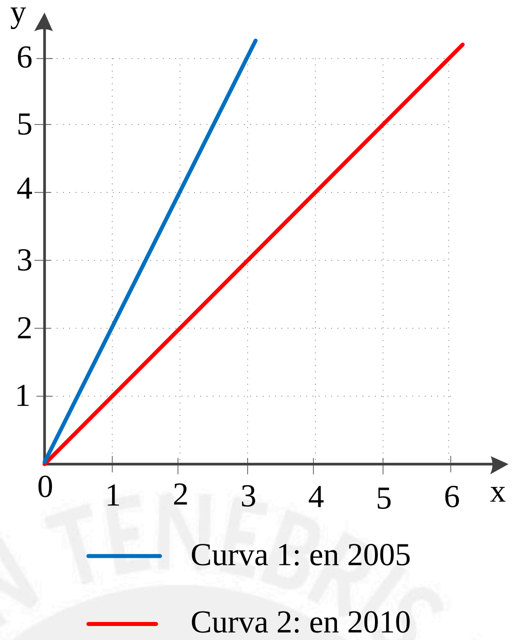
Esta tarea hace referencia a la longitud y el diámetro de la circunferencia. Calcular la longitud de la circunferencia implica conocer el número irracional π, a pesar de que los estudiantes del primer grado de educación secundaria aún no han estudiado los números irracionales, en sexto grado de primaria ellos tratan el tema de circunferencia, Además, el libro de texto de matemática del sexto grado de primaria (Perú, 2012c) manifiesta que la longitud o perímetro de la circunferencia se mide usando la fórmula $L = 2\times\pi\times r$. Asimismo, en este libro de texto existen tareas que consisten en calcular la longitud de la circunferencia. Por ello, se considera que la longitud de la circunferencia forma parte de los conocimientos previos del estudiante.

Tarea ($t_{17,\,2}$): Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales para establecer relaciones.

Esta tarea está conformada por los ejercicios propuestos 3 de la Evaluación 2 de la página 149 y los ejercicios propuestos 20b y 20c en la sección *Mix matemático* de la página 158. Transcribimos el ejercicio propuesto 3 de la Evaluación 2 del libro de texto como ejemplo de esta tarea.

Las curvas 1 y 2 representan relaciones de dependencia entre las magnitudes x e y en dos años diferentes.

¿Cuál es la relación observada entre las variables x e y? ¿Cómo son las constantes de proporcionalidad?



Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p.149)

Técnica ($\tau_{17,2,1}$):

Paso 86: Observar el gráfico de diagrama cartesiano.

Paso 76: Asignar algunos valores a una magnitud para ver su influencia en la otra magnitud.

Paso 89: Determinar la regla de correspondencia entre las magnitudes.

La regla de correspondencia de la curva 1 es: $y = 2x$.

La regla de correspondencia de la curva 2 es: $y = x$.

Paso 90: Hallar la constante de proporcionalidad.

Constante de proporcionalidad para la curva 1:

$$k_1 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

Constante de proporcionalidad para la curva 2:

$$k_2 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = 1$$

Paso 91: Comparar las constantes de proporcionalidad.

Las constantes de proporcionalidad son diferentes en ambos casos, pues $k_1 \neq k_2$.

Tecnologías:

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales.

Teoría (Θ_2): Teoría de las magnitudes proporcionales.

La tabla siguiente, resume la organización matemática construida en base a los ejemplos desarrollados y ejercicios propuestos del libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria.

Tabla 10. Organización matemática del libro de texto.

Tipos de tarea	Tarea	Técnica	Tecnología	Teoría
T_1	$t_{1,1}$	$\tau_{1,1,1}$	θ_6	Θ_2
	$t_{1,2}$	$\tau_{1,2,1}$	θ_6	Θ_1
T_2	$t_{2,1}$	$\tau_{2,1,1}$	θ_1	Θ_1
	$t_{2,2}$	$\tau_{2,2,1}$	θ_1, θ_2	
	$t_{2,3}$	$\tau_{2,3,1}$	θ_1, θ_3	
T_3	$t_{3,1}$	$\tau_{3,1,1}$	θ_8, θ_7	
	$t_{3,2}$	$\tau_{3,2,1}$	θ_8, θ_7	
T_4	$t_{4,1}$	$\tau_{4,1,1}$	θ_{16}, θ_{17}, θ_{11}	
	$t_{4,2}$	$\tau_{4,2,1}$	θ_{16}, θ_{17}, θ_{11}	
	$t_{4,3}$	$\tau_{4,3,1}$	θ_6	
	$t_{4,4}$	$\tau_{4,4,1}$	θ_6, θ_{12}	
T_5	$t_{5,1}$	$\tau_{5,1,1}$	θ_{13}, θ_{14}	
	$t_{5,2}$	$\tau_{5,2,1}$	θ_{13}, θ_{14}	
	$t_{5,3}$	$\tau_{5,3,1}$	θ_{14}, θ_7	
	$t_{5,4}$	$\tau_{5,4,1}$	θ_7, θ_{14}	
T_6	$t_{6,1}$	$\tau_{6,1,1}$	θ_{14}, θ_{13}, θ_7	
	$t_{6,2}$	$\tau_{6,2,1}$	θ_{14}, θ_{13}, θ_7	
	$t_{6,3}$	$\tau_{6,3,1}$	θ_7, θ_{13}, θ_{14}	
T_7	$t_{7,1}$	$\tau_{7,1,1}$	θ_7, θ_{11}	
	$t_{7,2}$	$\tau_{7,2,1}$	θ_7, θ_{10}	
	$t_{7,3}$	$\tau_{7,3,1}$	θ_7, θ_{12}	
T_8	$t_{8,1}$	$\tau_{8,1,1}$	θ_7, θ_{11}	
T_9	$t_{9,1}$	$\tau_{9,1,1}$	θ_7	
	$t_{9,2}$	$\tau_{9,2,1}$	θ_7, θ_{12}	
	$t_{9,3}$	$\tau_{9,3,1}$	θ_7	
	$t_{9,4}$	$\tau_{9,4,1}$	θ_7	
T_{10}	$t_{10,1}$	$\tau_{10,1,1}$	θ_6	
	$t_{10,2}$	$\tau_{10,2,1}$	θ_6, θ_{14}	
	$t_{10,3}$	$\tau_{10,3,1}$	θ_{10}, θ_{14}	
T_{11}	$t_{11,1}$	$\tau_{11,1,1}$	θ_6, θ_{10}	
	$t_{11,2}$	$\tau_{11,2,1}$	θ_6, θ_{11}	
T_{12}	$t_{12,1}$	$\tau_{12,1,1}$	θ_7, θ_{15}	
	$t_{12,2}$	$\tau_{12,2,1}$	θ_7, θ_{15}	
T_{13}	$t_{13,1}$	$\tau_{13,1,1}$	θ_{13}, θ_{14}	
	$t_{13,2}$	$\tau_{13,2,1}$	θ_6, θ_7, θ_{13}	
	$t_{13,3}$	$\tau_{13,3,1}$	θ_8	
T_{14}	$t_{14,1}$	$\tau_{14,1,1}$	θ_{18}	Θ_2
	$t_{14,2}$	$\tau_{14,2,1}$	θ_{18}	
T_{15}	$t_{15,1}$	$\tau_{15,1,1}$	θ_{18}	
T_{16}	$t_{16,1}$	$\tau_{16,1,1}$	θ_{18}	
T_{17}	$t_{17,1}$	$\tau_{17,1,1}$	θ_{18}	
	$t_{17,2}$	$\tau_{17,2,1}$	θ_{18}	

La tabla 10, muestra que la organización matemática de la función y la proporcionalidad directa está conformada por 17 tipos de tareas, 42 tareas, 38 técnicas compuesta por 91 pasos, 18 tecnologías y 2 teorías.

En síntesis, la organización matemática del libro de texto no toma en cuenta las notaciones y convenciones matemáticas al presentar las tareas tal como es el caso del plano cartesiano. Asimismo, el libro de texto confunde la función con sus distintas representaciones al momento de proponer las tareas. Además, el libro de texto denomina como diagrama cartesiano a la representación gráfica de la función. En cuanto a la definición de función, el libro de texto analizado no usa la definición de función en términos de variable tal como sugiere Hitt (2000) para los estudiantes de educación secundaria. De otro lado, la cantidad de tareas que conforman los tipos de tareas varía entre uno y cuatro tareas. Predominan en la OM tipos de tareas que están formadas por dos y tres tareas.

5.3. Completitud de la organización matemática del libro de texto

En esta sección, presentamos el análisis de los indicadores de completitud de las organizaciones matemáticas locales que incluye los temas de funciones y proporcionalidad directa de la unidad 5 del libro de texto que analizamos. Para ello, tomamos en cuenta los trabajos de Fonseca (2004), Lucas (2010) y Serrano (2013).

Tal como señalan Fonseca, Casas, Bosch y Gascón (2009) el objetivo de los indicadores de completitud de las organizaciones matemáticas locales es analizar la calidad de la actividad matemática construida.

5.3.1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico (OML1)

En una OML es importante que los tipos de tareas se integren unas con otras. Ello, evitará la reiteración de tareas cuya ejecución requiere de procedimientos mecánicos y nada significativos para el estudiante. En seguida, hacemos una revisión de algunos aspectos que nos pueda brindar información con respecto a este indicador de completitud.

Como primer aspecto hemos considerado que los tipos de tareas sobre función y proporcionalidad directa están relacionadas entre ellas. En el libro de texto analizado no hemos encontrado que los tipos de tareas se encuentren integradas unas con otras. Pero si hemos encontrado algunas tareas integradas tal como podemos observar en la siguiente tabla.

Tabla 11. Integración de los tipos de tareas.

Aspectos considerados	Tareas integradas	Ejercicios	Páginas
Los tipos de tareas sobre función lineal y proporcionalidad directa están relacionadas entre ellas.	$t_{3,2}$ con $t_{9,1}$	3a con 3b	p. 141
	$t_{9,4}$ con $t_{6,1}$	7a con 7b	p. 142
	$t_{6,2}$ con $t_{5,1}$ y $t_{7,1}$	9a con 9b y 9c	p. 142

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a)

En la tabla 11, se observa que solo 7 tareas están integradas de un total de 42 tareas. Sobre este aspecto, Lucas (2010) señala que "las tareas aparecen aisladas, sin una articulación entre ellas y sin una posible razón de ser, lo que provoca que los problemas no tengan sentido para los estudiantes" (p. 53). Un ejemplo ilustrativo de la integración de tareas es el ejercicio propuesto 3a y 3b de la Actividad 1 de la página 141 del libro de texto. La tarea 3a corresponde al tipo de tarea identificar variables de una función. Mientras que la tarea 3b corresponde al tipo de tarea determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín. En estos ejemplos podemos observar que se integra estas dos tareas que corresponden a distintos tipos de tareas.

El otro aspecto que hemos considerado para este indicador es que las tareas sobre función y proporcionalidad directa hacen uso del cuestionamiento tecnológico de las técnicas. Dentro del cuestionamiento tecnológico se consideran aspectos como: la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía, el alcance y la comparación de las técnicas. En los 138 ejercicios, agrupadas en 42 tareas no existen tareas en que aparezca el cuestionamiento tecnológico donde se evidencia todas sus componentes. Lo que confirma lo señalado por Lucas (2010) que "pocas veces se cuestiona la necesidad de justificar la técnica utilizada para la actividad matemática, ni tampoco, cuál es su ámbito de actuación" (p. 53). El motivo parece ser la poca importancia que se le da al bloque tecnológico-teórico en la enseñanza de la matemática en educación secundaria, lo que se confirma con una limitada presentación de la parte teórica de los temas abordados en el libro de texto analizado. Al respecto, la autora antes citada sostiene que en educación secundaria "no se exige interpretar adecuadamente el resultado de aplicar una técnica para considerar que dicha técnica ha estado correctamente utilizada" (p. 57).

En seguida, mencionamos a modo de ilustración algunas tareas en que aparecen algunos elementos del cuestionamiento tecnológico, tales como: la economía, el alcance y la fiabilidad de las técnicas. Para ello, usamos el ejercicio propuesto 1a, 1b, 1c, 1d y 1e de la Actividad 2 de la página 141 del libro de texto. En los ejercicios a), b) y c) la solución es casi de inmediato, ya que la técnica solo consiste en escribir todas las primeras componentes de los pares ordenados en un conjunto a la que se llama dominio, y a las segundas componentes de los pares ordenados también se escribe en otro conjunto a la que se denomina rango de la función. Sin embargo, para resolver los ejercicios d) y e) la técnica usado para hacer los ejercicios anteriores ya no funcionan, por lo tanto se debe buscar otra técnica que permita resolver estas dos tareas. En este caso, la técnica consiste en remplazar los elementos del dominio dado (valores de *x*) en la regla de correspondencia y encontrar las imágenes con lo cual determinamos cada uno de los elementos del rango de la función. En consecuencia, el *alcance* de la primera técnica es muy limitado y son *económicas y fiables* solo para determinar el dominio y rango de funciones representadas como un conjunto de pares ordenados. Asimismo, la segunda técnica resulta *no aplicable* cuando el dominio de la función tiene infinitos elementos.

Por consiguiente, en base a la información vista anteriormente, afirmamos que el grado de completitud del indicador *integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico* es menos completo, ya que los tipos de tareas se encuentran aisladas y no existe un adecuado cuestionamiento tecnológico de las distintas técnicas que se emplean para realizar las tareas.

5.3.2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas (OML2)

Una técnica es la manera de hacer una determinada tarea. La técnica debe resolver la mayoría de las tareas asociadas al tipo de tarea. Asimismo, para hacer una tarea no necesariamente existe una única técnica.

Sobre la existen de dos o más técnicas para resolver un tipo de tarea asociadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa, debemos manifestar que en el libro de texto analizado se observa que en la mayoría de los tipos de tareas existen técnicas para cada tarea particular.

De otro lado, en los ejemplos que propone el libro de texto no se evidencia la presencia de varias técnicas para resolver todas las tareas. Las tareas son resueltas empleando una única técnica ya predeterminada. Lo que hace que los estudiantes resuelvan las tareas de manera mecánica y sin tener la posibilidad de contrastar cual es la técnica más eficiente para realizar una tarea determinada. Sin embargo, el tipo de tarea T_{15} se puede ejecutar haciendo uso de dos técnicas: por el método de las proporciones y por el método de reducción a la unidad. Aunque en el libro de texto solo está la primera de ellas.

Sobre el otro aspecto considerado se observan que el libro de texto no presenta criterios para analizar cuál es la técnica más fiable y económica para realizar los tipos de tareas, debido a que el número de técnicas para todas las tareas es único. Por lo tanto, en base a la información anterior, afirmamos que el indicador de completitud *diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas* no se cumple, porque no existe presencia de dos o más técnicas para los tipos de tareas en el libro de texto. Estos hallazgos confirman lo señalado por Fonseca (2011) en el sentido de que en secundaria se utilizan técnicas aisladas y muy rígidas, aunque existan dos técnicas para un mismo tipo de tareas, el uso de ellos no forma parte del contrato didáctico en la educación secundaria.

5.3.3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas (OML3)

Consideramos como un aspecto de este indicador la posibilidad de hacer uso de varias representaciones en la ejecución de cada tarea, en otras palabras, la tarea no haga referencia a una determinada representación para hacer uso durante su ejecución. Es decir, no obligue a usar una representación ya predeterminada. A continuación, realizamos una revisión de las distintas representaciones que emplea el libro de texto que analizamos en las diferentes tareas que presenta. En ese sentido, las representaciones que emplea el libro de texto son: verbal, numérica (representación como conjunto de pares ordenados y representación en tablas), gráfica y algebraica. Sin embargo, existe preferencia del libro de texto por la representación verbal y numérica. La representación que menos se usa son las representaciones gráfica y algebraica. Estos hallazgos confirman los resultados de las investigaciones de Planchart (2001) y Gúmera (2011).

Las tareas relacionadas a los ostensivos, ya están fijados previamente por el libro de texto. Entre ellas tenemos por ejemplo: representación tabular y gráficamente mediante un diagrama cartesiano las funciones, representación tabular y gráfica a través de diagramas sagitales, representación algebraica y tabular, representación tabular y grafica mediante un diagrama sagital.

En la organización matemática del libro de texto analizado existen diferentes representaciones lo que está de acuerdo con lo señalado por Fonseca, Pereira y Casas (2011), quienes manifiestan que los objetos ostensivos hacen referencia a la existencia de distintas representaciones en la actividad matemática. Pero, los elementos ostensivos a usarse ya están establecidos previamente por el libro de texto. Esto indica de que el estudiante que ejecuta la tarea está obligado a usar una determina representación, por lo tanto los elementos ostensivos usados por el libro de texto exigen al ejecutante de las tareas usar un determinado ostensivo.

Por otra parte, el libro de texto frecuentemente utiliza la letra x para representar la variable independiente de una función y la letra y para representar la variable dependiente. Asimismo, se observa que al conjunto de partida siempre se representa con la letra ***A*** y al conjunto de llegada con la letra ***B***. Además, el libro de texto siempre usa el ostensivo $f(x)$ para representar algebraicamente una función. También, se usa la letra k para representar la constante de proporcionalidad.

En síntesis, sobre la base de la información anterior afirmamos que el grado de completitud de este indicador en el libro de texto analizado es relativamente completo, ya que emplea cuatro representaciones al proponer las tareas sobre la función y la proporcionalidad directa.

5.3.4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas" (OML4)

Sobre si el libro de texto presenta tipos de tareas (T_i) y tipos de tareas inversas (T_j) asociadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa no se encuentra que ningún tipo de tarea tenga su respectivo tipo de tarea inversa en la organización matemática que presenta el libro de texto analizado. Sin embargo, hemos encontrado que algunas tareas si tienen sus respectivas tareas inversas. La tabla 12 muestra dicha información.

Tabla 12. Existencia de tareas inversas.

Tarea directa	Cantidad	Tarea inversa	Cantidad
$t_{5,3}$: Determinar el rango de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el dominio.	05	$t_{5,4}$: Determinar el dominio de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el rango.	01
$t_{6,1}$: Completar tablas a partir de la regla de correspondencia de la función lineal.	01	$t_{9,3}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal a partir de tablas.	04
$t_{7,3}$: Representar una función lineal como conjunto de pares ordenados dado la regla de correspondencia.	02	$t_{9,2}$: Determinar la regla de correspondencia de la función lineal afín a partir de un conjunto de pares ordenados.	04
$t_{12,1}$: Evaluar una función a partir de la preimagen dado la regla de correspondencia de la función.	02	$t_{12,2}$: Evaluar una función a partir de la imagen dado la regla de correspondencia de la función.	01

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a)

En el libro de texto analizado se ha encontrado 4 tareas que poseen sus respectivas tareas inversas en la organización matemática de la función y la proporcionalidad directa. En cuanto, al número de ejercicios que conforma las tareas directas e inversas no existe una distribución equitativa. Por ejemplo la tarea $t_{6,1}$ está conformado por un solo ejercicio y su tarea inversa $t_{9,3}$ tiene cuatro ejercicios. Por otra parte, hemos encontrado que dos tareas que ameritan tener tareas inversas no tienen sus respectivas tareas inversas en el libro de texto analizado.

Tabla 13. Tareas sin tareas inversas.

Tarea directa	Tarea inversa
$t_{7,1}$: Representar gráficamente una función lineal a partir de la regla de correspondencia.	Determinar la regla de correspondencia de la función lineal afín a partir de la representación cartesiana.
$t_{7,2}$: Representar tabular y sagitalmente una función lineal a partir de la regla de correspondencia.	Determinar la regla de correspondencia de la función lineal afín a partir de la representación sagital.

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a)

Sobre si el libro de texto presenta técnicas reversibles para resolver un tipo de tareas (T_i) asociadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa, en el libro de texto no se ha encontrado la presencia de ellas. Ya que, la técnica $\tau_{5,4,1}$ no es la inversa de $\tau_{5,3,1}$; la técnica $\tau_{9,3,1}$ no es la inversa de $\tau_{6,1,1}$; la técnica $\tau_{9,2,1}$ no es la inversa de $\tau_{7,3,1}$; y la técnica $\tau_{12,2,1}$ tampoco es la inversa de $\tau_{12,1,1}$. Estos hallazgos confirman lo señalado, por Fonseca (2011) para quien uno de los aspectos más importantes de la rigidez de la OM que se estudia en secundaria se manifiesta en la no reversión de las técnicas matemáticas correspondientes. De igual manera, Lucas (2010) afirmaba que cuando existen dos tareas “inversas” entre sí en una organización matemática, las correspondientes técnicas se tratan como si fueran independientes. Es decir, las tareas se resuelven con técnicas independientes.

En todo caso los resultados anteriores, nos muestran que en la organización matemática de la función y la proporcionalidad directa se proponen algunas tareas inversas pero no existen técnicas reversibles para hacer las tareas. Por consiguiente, la presencia de este indicador en los temas de función y proporcionalidad directa en el libro de texto analizado es mínima. Por lo que este indicador no se cumple en la unidad el libro de texto.

5.3.5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas (OML5)

En la organización matemática del libro de texto sobre la función y la proporcionalidad directa no se proponen tareas que incluyan la interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas. Los 138 ejercicios que se agrupan en 42 tareas están orientados a obtener respuestas específicas, no se proponen tareas referidas a la comprobación, verificación e interpretación de determinados resultados. La ausencia de este indicador de completitud confirma lo señalado por Fonseca (2011) quien afirma que en secundaria no se exige interpretar el resultado de aplicar una técnica para considerar que dicha técnica ha sido correctamente aplicada. La razón por la que en secundaria no se promueve interpretar el resultado de la aplicación de una técnica de acuerdo a Fonseca y Casas (2009) es debido a la poca influencia del bloque tecnológico-teórico en las organizaciones matemáticas. Pero también podría ser porque interpretar el funcionamiento y el resultado de aplicar técnicas como Fonseca (2004) dice es un indicador de completitud más global, tal vez por eso no se encuentran tareas referidas a este indicador en la unidad del libro de texto analizado.

Luego, de las reflexiones anteriores, podemos concluir que la presencia de este indicador de completitud no se evidencia en los ejemplos y ejercicios propuestos sobre función y proporcionalidad directa del libro de texto analizado.

5.3.6. Existencia de tareas matemáticas "abiertas" (OML6)

Consideramos dos aspectos para determinar la existencia de tareas matemáticas abiertas en la organización matemática correspondiente a la función y proporcionalidad directa del libro de texto analizado. El primero de ellos, es que el libro de texto presenta tipos de tareas en donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente. La tabla 14 contiene dicha información.

Tabla 14. Tipos de tareas con datos e incógnitas no prefijados completamente.

<table>
<tr><th>Ejercicios</th><th>Número de páginas</th><th>Tareas</th><th>Tipos de tareas</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>p. 138</td><td>$t_{1,2}$</td><td>T_1</td></tr>
<tr><td>V1</td><td>p. 140</td><td rowspan="4">$t_{3,1}$</td><td rowspan="7">T_3</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>p. 141</td></tr>
<tr><td>1a, 1b</td><td>p. 144</td></tr>
<tr><td>9a</td><td>p. 166</td></tr>
<tr><td>1b, 1c</td><td>p. 141</td><td rowspan="3">$t_{3,2}$</td></tr>
<tr><td>1c, 1d, 1e</td><td>p. 144</td></tr>
<tr><td>9b</td><td>p. 166</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>p. 147</td><td>$t_{14,1}$</td><td rowspan="5">T_{14}</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>p. 147</td><td rowspan="4">$t_{14,2}$</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>p. 149</td></tr>
<tr><td>7a, 7c, 7d</td><td>p. 157</td></tr>
<tr><td>7b</td><td>p. 166</td></tr>
</table>

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a)

En los ejercicios que se presentan en las diferentes actividades y en la evaluación del libro de texto existen 19 ejercicios, que conforman 5 tareas y 3 tipos de tareas en que los datos y las incógnitas no están prefijados de antemano, sino más bien dependen del conocimiento y experiencia del que ejecuta la tarea.

El segundo aspecto considerado para este indicador, es sobre la presencia de tipos de tareas de modelización matemática asociadas a situaciones matemáticas o extramatemáticas relacionadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa.

Tabla 15. Tipos de tareas de modelización matemática de situaciones matemáticas o extramatemáticas.

Situación	Ejercicios	Páginas	Tarea	Tipos de tarea
Matemática	5a, 5b, 5c, 5d	p. 141	$t_{9,2}$	T_9
	4a, 4b, 4c	p. 144	$t_{9,3}$	
	6	p. 157		
Extramatemática	3b	p. 141	$t_{9,1}$	
	7a	p. 142	$t_{9,4}$	
	F1a	p. 139	$t_{1,2}$	T_1

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a)

En la tabla 15, se observa que de los 138 ejercicios, hay 11 ejercicios sobre modelización matemática, de las cuales 8 están asociadas a situaciones matemáticas y 3 a situaciones extramatemáticas. Estos 11 ejercicios se agrupan en 5 tareas y 2 tipos de tareas.

La modelización matemática asociada a una situación matemática está relacionada con determinar la regla de correspondencia de la función a partir de la representación de la función como un conjunto de pares ordenados y encontrar la regla de correspondencia de la función a partir de la información dada en una tabla. La modelización matemática asociada a situaciones extramatemáticas está relacionado con situaciones de la vida cotidiana y a partir de ella se pide determinar la regla de correspondencia de la función, es decir, el modelo matemático que representa dicha situación.

El libro de texto analizado presenta tareas matemáticas abiertas, ya que existen tareas de modelización matemática asociadas a situaciones matemáticas y extramatemáticas relacionadas al objeto matemático función y proporcionalidad directa. Esto confirma lo señalado por Ospina (2012) quien manifiesta que la función lineal afín es una herramienta importante para modelar muchos fenómenos de la vida cotidiana. De otro lado, también confirma los resultados que hemos encontrado en las investigaciones de Planchart (2000), Ramos (2005), Santana *et al.* (2010) y Carrillo (2013) en el sentido de que existe escasa cantidad de ejercicios sobre situaciones extramatemáticas. En particular el libro de texto analizado solo considera 3 ejercicios que involucran situaciones de la vida cotidiana.

Sobre el indicador de completitud existencia de tareas matemáticas abiertas en el libro de texto analizado se ha encontrado 19 ejercicios en que los datos no están fijados de antemano y 11 ejercicios de modelización matemática, es decir, un total de 30 ejercicios referidos a la existencia de tareas matemáticas abiertas, de un total de 138 ejercicios que conforman 9 tareas y 4 tipos de tareas, por lo tanto, el grado de completitud de este indicador en el libro de texto analizado es relativamente completo. Además, el tema de funciones es muy adecuado para trabajar la modelización matemática de situaciones económicas, físicos, biológicos, químicas, sociales, etc.

5.3.7. Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica (OML7)

El primer aspecto que hemos considerado para este indicador es el grado de integración interna de los elementos tecnológicos que se presentan en la ejecución de cada una de las tareas propuestos del libro de texto analizado. Para ello, se ha tomado en cuenta el número de tecnologías en que se fundamenta una técnica para realizar una tarea determinada. La tabla 16 muestra dicha información.

Tabla 16. Integración de las tecnologías.

Número de tecnologías	Técnicas	Tecnologías	Número de técnicas
Una tecnología	$\tau_{1,1,1}$; $\tau_{1,2,1}$; $\tau_{2,1,1}$; $\tau_{4,3,1}$; $\tau_{9,1,1}$; $\tau_{9,3,1}$; $\tau_{9,4,1}$; $\tau_{13,3,1}$; $\tau_{14,1,1}$; $\tau_{15,1,1}$; $\tau_{16,1,1}$; $\tau_{17,1,1}$; $\tau_{17,2,1}$	θ_{18}; θ_6; θ_1; θ_6; θ_7; θ_7; θ_7; θ_8; θ_{18}; θ_{18}; θ_{18}; θ_{18}; θ_{18}; θ_{18}	13
Dos tecnologías	$\tau_{2,2,1}$; $\tau_{2,3,1}$; $\tau_{3,1,1}$; $\tau_{4,4,1}$; $\tau_{5,1,1}$; $\tau_{5,2,1}$; $\tau_{5,3,1}$; $\tau_{5,4,1}$; $\tau_{7,1,1}$; $\tau_{7,2,1}$; $\tau_{7,3,1}$; $\tau_{9,2,1}$; $\tau_{10,1,1}$; $\tau_{10,2,1}$; $\tau_{10,3,1}$; $\tau_{11,1,1}$; $\tau_{11,2,1}$; $\tau_{12,1,1}$; $\tau_{12,2,1}$; $\tau_{13,1,1}$	θ_1, θ_2; θ_1, θ_3; θ_8, θ_7; θ_6, θ_{12}; θ_{13}, θ_{14}; θ_{13}, θ_{14}; θ_7, θ_{14}; θ_7, θ_{14}; θ_7, θ_{11}; θ_7, θ_{10}; θ_7, θ_{11}; θ_7, θ_{12}; θ_6, θ_{12}; θ_6, θ_{14}; θ_{10}, θ_{14}; θ_6, θ_{10}; θ_6, θ_{11}; θ_7, θ_{15}; θ_7, θ_{15}; θ_{13}, θ_{14};	20
Tres tecnologías	$\tau_{4,1,1}$; $\tau_{6,1,1}$; $\tau_{6,2,1}$; $\tau_{13,2,1}$	θ_{11}, θ_{16}, θ_{17}; θ_7, θ_{14}, θ_{13}; θ_7, θ_{14}, θ_{13}; θ_6, θ_7, θ_{13};	04
Cuatro tecnologías	$\tau_{6,3,1}$	θ_7, θ_{14}, θ_{13}, θ_{11}	01

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a)

El número de técnicas identificadas para resolver las tareas es 38, ya que algunas técnicas son las mismas ($\tau_{3,1,1} = \tau_{3,2,1}$; $\tau_{4,1,1} = \tau_{4,2,1}$; $\tau_{7,1,1} = \tau_{8,1,1}$; $\tau_{14,1,1} = \tau_{14,2,1}$). En la tabla 16 se observa que 25 técnicas usan dos o más elementos tecnológicos. En consecuencia, el grado de integración interna de los elementos tecnológicos que se presentan en la ejecución de las tareas del libro de texto analizado es relativamente completo.

El segundo aspecto que hemos considerado para este indicador es que la tecnología presente en el libro de texto permita construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas. El único elemento tecnológico que podemos resaltar en este aspecto es la definición de función, que de alguna manera puede contribuir en la creación de nuevas técnicas. De otro lado, Fonseca (2004) señala que este indicador tiene un carácter más global, quizá por eso no se encuentren elementos tecnológicos que permitan producir nuevas técnicas en la unidad del libro que analizamos.

El análisis precedente, nos permite señalar que este indicador de completitud se cumple parcialmente en las dos secciones del libro de texto que analizamos.

5.4. Grado de completitud del libro de texto

En esta sección, realizamos un análisis más general del grado de completitud, con la finalidad de establecer la completitud de la organización matemática de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa.

En base a los resultados anteriores y desde la perspectiva más general podemos concluir que el grado de completitud de la organización matemática local construida en base a los ejemplos y ejercicios propuestos del libro de texto de matemática del primer grado de educación secundaria es menos completa, porque no se evidencia una clara presencia de los indicadores de completitud según la propuesta de Fonseca (2004 y 2011).

- Con respecto a la integración entre los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico, no hemos encontrado tipos de tareas integradas, pero si se ha verificado que solo 7 tareas están integradas; y solo existen 5 tareas en la que se puede aplicar el cuestionamiento tecnológico a un nivel incipiente.
- En el libro de texto analizado no hay presencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas, ya que en el libro de texto no existe ningún tipo de tarea que se resuelva por dos o más técnicas distintas.

- Sobre la independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas, hemos encontrado cuatro ostensivos que se usan con frecuencia en la actividad matemática para representar el objeto matemático en cuestión.
- Respecto a la existencia de tareas y técnicas inversas, hemos identificado cuatro tareas que tienen sus respectivas tareas inversas y las técnicas que se usan son no reversibles, por ello, las tareas inversas se resuelven con técnicas independientes.
- A cerca de la interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar técnicas no se evidencian tareas que promuevan la comprobación, verificación e interpretación de las técnicas utilizadas.
- Sobre el indicador existencia de tareas matemáticas abiertas hay un total de 30 ejercicios que involucra a 9 tareas y 4 tipos de tareas, por ello, consideramos que este indicador si se cumple en la organización matemática.
- En torno al indicador integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica se cumple parcialmente en las dos secciones del libro de texto analizado.

Consideramos que algunos indicadores no son aplicables a una unidad del libro de texto, por ejemplo, los indicadores de completitud existencia de tareas matemáticas abiertas, interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar técnicas, e integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica son más globales, por ello, tal vez no se encuentran evidencias de la presencia de los dos últimos indicadores.

Es importante señalar, que la existencia de algunos indicadores pueden depender del contexto, por ejemplo, los indicadores independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas y existencia de tareas matemáticas abiertas tienen una presencia notoria, porque el tema de funciones y proporcionalidad es muy apropiada para trabajar diferentes representaciones de la actividad matemática, como para modelizar situaciones matemáticas y extramatemáticas.

Finalmente, no queremos dejar de señalar la posibilidad de que la presencia o ausencia de los indicadores de completitud también pueden depender de la institución libro de texto, ya que en el Perú los autores de los libros de texto de matemática para educación secundaria en su mayoría son profesionales que no tienen relación con el campo de la educación matemática, esto hace que muchos autores no tomen en cuenta los aportes de la Didáctica de la Matemática, como por ejemplo, la Teoría Antropológica de lo Didáctico al momento de escribir un libro de texto.

5.5. Organización matemática presente en el libro de texto

A partir de la organización matemática evidenciada a través de nuestros supuestos mostramos, a continuación, la organización matemática del libro de texto explícitamente de las tareas desarrolladas (ejemplos). Es decir, tomando como referencia las técnicas que emplea el libro de texto en los ejemplos que propone para ilustrar la función y la proporcionalidad directa en la unidad 5 denominada como *Funciones y álgebra*. Para ello, tomamos en cuenta la organización matemática construida y el análisis de los resultados obtenidos. La finalidad de construir esta organización matemática es determinar cuántas tareas del libro de texto puede resolver un estudiante que toma como guía las técnicas de los ejemplos y cuántas tareas quedarían sin resolver.

Tabla 17. Ejemplo del libro de texto analizado.

Tipos de tarea	Tarea	Número Página	Ejemplos
T_1: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes.	$t_{1,2}$: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de un enunciado verbal.	Pág. 139	F1a, F1b
T_2: Representar relaciones binarias.	$t_{2,1}$: Representar relaciones binarias como un conjunto de pares ordenados.	Pág. 139	1a, 2a, 3a
	$t_{2,2}$: Representar relaciones binarias como diagramas sagitales.	Pág. 139	1b
	$t_{2,3}$: Representar relaciones binarias como gráficos cartesianos.	Pág. 139	1c, 2b, 3b
T_3: Identificar variables de una función.	$t_{3,1}$: Identificar variables independiente y dependiente en una situación matemática.	Pág. 140	V1
T_4: Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.	$t_{4,1}$: Reconocer funciones a partir de gráficos cartesianos.	Pág. 143 Pág. 143	2 b
	$t_{4,2}$: Reconocer funciones a partir de diagramas sagitales.	Pág. 143 Pág. 143	1 a
	$t_{4,4}$: Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.	Pág. 140 Pág. 156	F3 1a, 1b, 1c, 1d
T_5: Determinar el dominio y rango de funciones.	$t_{5,1}$: Determinar el dominio y rango de funciones de un conjunto de pares ordenados.	Pág. 141	D1
T_7: Representar una función lineal afín.	$t_{7,1}$: Representar tabular y gráficamente una función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.	Pág. 140	R3
	$t_{7,2}$: Representación tabular y sagital de función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.	Pág. 140	R2
	$t_{7,3}$: Representar una función lineal afín como un conjunto de pares ordenados dado la regla de correspondencia.	Pág. 140 Pág. 140	F2 R1
T_{15}: Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales.	$t_{15,1}$: Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales sobre situaciones extramatemáticas.	Pág. 145	P1

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, pp. 136-167)

En la tabla 17, se observa que 6 tareas solo tienen un ejemplo, 4 tareas tienen dos ejemplos, 2 tareas tienen tres ejemplos y 1 tarea tiene cinco ejemplos en el libro de texto. De otro lado, se observa que solo existe un tipo de tarea con una sola tarea sobre la proporcionalidad directa y tiene un solo ejemplo.

En seguida, presentamos la organización matemática del libro de texto, para ello, se ha considerado solo los ejemplos del libro de texto.

Tabla 18. Organización matemática de los ejemplos resueltos del libro de texto.

Tipos de tarea	Tarea	Técnica	Tecnología	Teoría
T_1	$t_{1,2}$	$\tau_{1,2,1}$	θ_6	Θ_1
T_2	$t_{2,1}$	$\tau_{2,1,1}$	θ_1	
	$t_{2,2}$	$\tau_{2,2,1}$	θ_1, θ_2	
	$t_{2,3}$	$\tau_{2,3,1}$	θ_1, θ_3	
T_3	$t_{3,1}$	$\tau_{3,1,1}$	θ_8, θ_7	
T_4	$t_{4,1}$	$\tau_{4,1,1}$	θ_{16}, θ_{17}, θ_{11}	
	$t_{4,2}$	$\tau_{4,2,1}$	θ_{16}, θ_{17}, θ_{11}	
	$t_{4,4}$	$\tau_{4,4,1}$	θ_6, θ_{12}	
T_5	$t_{5,1}$	$\tau_{5,1,1}$	θ_{13}, θ_{14}	
T_7	$t_{7,1}$	$\tau_{7,1,1}$	θ_7, θ_{11}	
	$t_{7,2}$	$\tau_{7,2,1}$	θ_7, θ_{10}	
	$t_{7,3}$	$\tau_{7,3,1}$	θ_7, θ_{12}	
T_{15}	$t_{15,1}$	$\tau_{15,1,1}$	θ_{18}	Θ_2

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, pp. 136-167)

Tomando en cuenta los ejemplos del libro de texto analizado se ha identificado 7 tipos de tareas, 13 tareas, 12 técnicas para ejecutar las tareas, 18 elementos tecnológicos y 2 teorías. En el análisis precedente se ha verificado que las técnicas $\tau_{4,1,1}$ y $\tau_{4,2,1}$ son las mismas y resuelven las tareas del tipo de tarea T_4.

Cabe señalar que con las técnicas que aparecen en los ejemplos del libro de texto solo podría resolverse 13 tareas de un total de 42 tareas, es decir, el estudiante solo podría resolver 62 ejercicios de un total de 138 ejercicios. Asimismo, hemos encontrado en la organización matemática construida que para 29 tareas no existe ningún ejemplo y como consecuencia 9 tipos de tareas no tienen ningún ejemplo; por lo tanto, no existen técnicas para resolver estos tipos de tareas.

De otro lado, hemos identificado que 4 tareas que incluyen 9 ejemplos, no tienen ejercicios propuestos en las actividades y en las evaluaciones que presenta el libro de texto analizado. Esto muestra que la organización matemática del libro de texto es inadecuada para los estudiantes del primer grado de educación secundaria.

En cuanto a los indicadores de completitud de Fonseca (2004) debemos señalar que solo hay evidencias de la presencia de algunos aspectos de los indicadores de completitud a un nivel muy bajo. Con respecto al indicador independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas, se ha encontrado que los ejemplos desarrollados sobre la función y la proporcionalidad usan la representación verbal, numérica y gráfica.

Sobre el indicador existencia de tareas matemáticas “abiertas”, solamente existen dos ejemplos en la que los datos y las incógnitas no están prefijados completamente.

Tabla 19. Tipos de tareas con datos e incógnitas no prefijados completamente.

Ejemplos	Número de páginas	Tareas	Tipos de tareas
A1	p. 138	$t_{1,2}$	T_1
V1	p. 140	$t_{3,1}$	T_3

Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a)

La tabla 19, nos muestra que solo existen 2 ejemplos de un total de 25 en que los datos y las incógnitas no están prefijados completamente.

A cerca del indicador integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica, en la tabla 18 de la página anterior, se observa que ocho técnicas se fundamentan en dos elementos tecnológicos y una técnica en tres elementos tecnológicos.

En síntesis, en nuestra opinión el grado de completitud de la organización matemática local construida en base a los ejemplos del libro de texto es menos completa, porque no existe evidencia notoria de la presencia de ninguno de los indicadores de completitud en forma íntegra.

5.6. Articulación de la proporcionalidad directa y la función lineal

Habiendo terminado el análisis de la organización matemática de la unidad, que contiene los temas de función y proporcionalidad directa del libro de texto, surge la necesidad de establecer si existe relación entre la función lineal y la proporcionalidad directa. En esta sección, se presenta algunas consideraciones sobre la articulación entre la proporcionalidad directa y la función lineal. Pues, Lages *et al*. (2000) manifiesta que la función lineal es el modelo matemático para los problemas de proporcionalidad. Además, en las investigaciones realizadas en el marco de la TAD, como la de Bolea *et al*. (2001) y García (2005) se busca articular la proporcionalidad de magnitudes con las relaciones funcionales y usar la modelización como una herramienta de articulación de la matemática escolar.

Asimismo, es necesario considerar que después de haber estudiado la proporcionalidad por dos años en la educación primaria en el marco de la organización clásica en la que se utilizan las técnicas conocidas como el método de las proporciones y el método de la reducción a la unidad, es conveniente que los estudiantes del primer grado de educación secundaria puedan conocer otras técnicas para realizar tareas sobre la proporcionalidad de magnitudes. Por lo tanto, es preciso vincular la proporcionalidad directa con la función lineal. Para ello, tomamos el trabajo de Bolea *et al*. (2001) quienes han realizado un estudio sobre la transposición didáctica de proporcionalidad de las magnitudes en el que presentan tres niveles de algebrización: la modernización del lenguaje técnico, la reducción a la función lineal y la modelización funcional general.

En el libro de texto que analizado (Perú, 2012a) encontramos la siguiente tarea y su proceso de solución (técnica). Esta tarea se usa para introducir el tema de proporcionalidad directa.

Unos turistas visitaron Chachapoyas, en Amazonas, y decidieron ir a la imponente fortaleza de Kuélap, en Luya. Al llegar, observaron que el precio de la entrada era S/.11,50 por persona. Ellos pagaron S/.115 por el ingreso de 10 personas. Al poco tiempo, llegó otro grupo de 30 personas para visitar dicho lugar. ¿Cuánto pagará este último grupo en total por ingresar a la fortaleza?

Solución:

Si el costo por entrada era S/. 11,50, entonces 30 personas pagaron 30(11,50) = S/. 345.

Observa: 10 personas pagaron: 10(11,50) = S/. 115

30 personas pagaron: 30 (11,50) = S/. 345

Entonces podemos afirmar que si el número de personas se triplica, el monto también se triplica.

Entonces, el número de personas y el monto a pagar son proporcionales. Observa la proporción:

$$\frac{10 \text{ personas}}{30 \text{ personas}} = \frac{115 \text{ soles}}{x \text{ soles}}$$

Multiplicando en aspa:

$$x(10) = 115(30) \rightarrow x = \frac{115(30)}{10} = 115(3) = 345$$

La técnica que se usa para realizar la tarea anterior es el método de proporciones que según Bolea *et al*. (2001) corresponde a la organización clásica de la proporcionalidad de magnitudes. Además, de acuerdo a los autores citados, se decide con un simple discurso que la tarea en cuestión es una magnitud directamente proporcional (si el número de personas se triplica, el monto también se triplica) y se concluye que el número de personas y el monto a pagar son directamente proporcionales.

Luego de este ejemplo, el libro de texto de Matemática del primer grado de secundaria del Ministerio de Educación (Perú, 2012a) define la proporcionalidad de la siguiente manera: “Dos magnitudes son directamente proporcional (DP) si el cociente de sus valores permanece constante, es decir: A DP B ⇔ A/B = K (K = constante de proporcionalidad)” (p. 145).

En la definición anterior se considera un elemento importante, la *constante de proporcionalidad* conocida también como el *coeficiente de proporcionalidad* o *factor de conversión*. Entonces, de acuerdo con Bolea *et al*. (2001) el libro de texto se aproxima al primer nivel de algebrización conocida como el nivel de la modernización del lenguaje técnico. Según los autores en este nivel de algebrización, los tipos de tareas y las técnicas, se mantienen muy próximos a los de la organización clásica.

En cuanto a la articulación de la proporcionalidad directa y la función lineal, no se encuentran evidencias para que ello se realice. Ya que, en el libro de texto a la función lineal, representada por $f(x) = ax$, no considera como el modelo matemático para los problemas de la proporcionalidad de magnitudes tal como señala Lages *et al*. (2000). Además, esto corrobora uno de los resultados encontrados en la investigación de García (2005) en el sentido de que “el análisis de los libros de texto confirma, la desarticulación tanto en el estudio de la relación de proporcionalidad como en el estudio de la proporcionalidad junto con el resto de relaciones funcionales en la educación secundaria” (p. 521).

De otro lado, para que se realice la articulación entre la proporcionalidad directa y la función lineal según Bolea *et al*. (2001), el libro de texto debe llegar al segundo nivel de algebrización denominada como la reducción a la función lineal. En donde todas las relaciones de proporcionalidad se consideran como casos particulares de la función lineal. En el libro de texto analizado no se evidencia elementos de articulación entre estos dos temas aparte de encontrarse en la misma unidad.

CONSIDERACIONES FINALES

La organización matemática de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa está formada por 17 tipos de tareas, 42 tareas, 38 técnicas, 18 tecnologías y 2 teorías. Al mismo tiempo, cabe señalar que con las técnicas que se encuentran en el libro de texto solo se puede realizar 13 tareas de un total de 42, es decir, el estudiante solo podría resolver 62 ejercicios de un total de 138. También, se ha identificado que 4 tareas que incluyen 9 ejemplos desarrollados no tienen ejercicios propuestos en las actividades y en las evaluaciones que presenta el libro de texto analizado; por lo tanto, la organización matemática del libro de texto no es la más adecuada para los estudiantes del primer grado de educación secundaria. El grado de completitud de la organización matemática de la unidad que contiene los temas de función y proporcionalidad directa es relativamente menos completo, ya que no se evidencia una clara presencia de los aspectos de los indicadores. Asimismo, la función lineal y la proporcionalidad directa en el DCN vigente se encuentran dentro del bloque de funciones del organizador número, relaciones y funciones, es decir, existe un acercamiento entre estos dos conocimientos, a diferencia de las estructuras curriculares anteriores en las que se encontraban en grados diferentes. De otro lado, la función lineal y la proporcionalidad directa en el libro de texto analizado se encuentran dentro de la unidad de funciones y álgebra, pero no existen elementos que articulen estos dos objetos matemáticos cuando se realiza el tratamiento didáctico, a pesar de encontrarse en la misma unidad, lo que da lo mismo que si se encontraran en grados diferentes, tal como se ha visto en los libros de texto anteriores. Respecto a los niveles de algebrización en torno a la proporcionalidad de magnitudes, correspondería trabajar en este grado el segundo nivel, que consiste en la reducción a la función lineal de todas las tareas de proporcionalidad directa; sin embargo, nuestra investigación ha comprobado que esto no sucede.

SUGERENCIAS

Una siguiente etapa de la continuación natural de nuestra investigación sería investigar la transposición didáctica entre la proporcionalidad directa y la función lineal en el Perú, tomando para ello como material los libros de texto y las estructuras curriculares existentes en el sistema de educativo del Perú a lo largo de los últimos años. Luego, habría que construir un Modelo Epistemológico de Referencia y, en base a ello, analizar la organización matemática que presentan los libros de texto, a partir de una cuestión o problema, tal como señala la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Otra cuestión por explorar son los niveles de algebrización de la proporcionalidad de magnitudes para determinar la articulación entre la función lineal y la proporcionalidad directa. Para ello, es necesario realizar una investigación en la que se analicen los libros de texto de matemática del primero al quinto grado de educación secundaria del Perú, con la finalidad de comprobar si se alcanza el segundo y tercer nivel de algebrización de las magnitudes proporcionales.

REFERENCIAS

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *21*(3), pp. 247-304.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. *El caso de la proporcionalidad*. (Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelana). Recuperado de http://www.atd-tad.org/documentos/la-dimension-ostensiva-en-la-actividad-matematica-el-caso-de-la-proporcionalidad/

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *24*(2-3), pp. 205-250.

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática. 18*(2), pp. 37-74. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40518203.pdf

Capdevilla, R., Maestro, F., Chávez, B., Muñoz, J. y Mallma, W (1983). *Saber. Enciclopedia escolar 6to grado de educación primaria*. Lima: Bruño.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *19*(2), pp. 221-266. Recuperado de http://www.ing.unp.edu.ar/asignaturas/algebra/chavallard_tad.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2005). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Perú: Horsori.

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/ repositorio/handle/123456789/4634

Coveñas, M. (2008). *Matemática 4. Manual para el docente*. Lima: Bruño

Cuesta, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. (Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona). Recuperado de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4713/acb1de1.pdf

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. (Tesis Doctoral, Universidad de Vigo). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf

Fonseca, C.; Casas, J. M.; Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T. y Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM.* Santander.

Fonseca, C. y Casas, J. M. (2009). El paso de estudiar matemáticas en secundaria a la universidad y los REI. *Actas III Jornadas Internacionales de las Matemáticas en Ingeniería*. pp. 119-140. Recuperado de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/JORNADAS%201/110%20recorridoestudioinvestigacion.pdf

Fonseca, C., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación Matemática*. *22*(2). pp. 5–34.

Fonseca, C. (2011). Recorridos de estudio e investigación: una propuesta dentro de la teoría antropológica de lo didáctico para la creación de secuencias de enseñanza aprendizaje. *Paradigma*. *32*(1). pp. 55–70. Recuperado de http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v32n1/art04.pdf

Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas. Los recorridos de estudio e investigación (REI). *Educación Matemática*. *23*(1). pp. 97–121.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta RSME*. *10*(2). pp. 427-442. Recuperado de http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2007_10_2_06.pdf

Gálvez, R. (2008). *Matemática 2do. de Secundaria*. Perú: El Nocedal S.A.C.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis de Doctorado, Universidad de Jaen). Recuperado de http://www.atd-tad.org/tag/proporcionalidad

Gil, A. (2002). *Como elaborar projectos de pesquisa*. São Paulo: atlas.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225

Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares*. (Tesis de Maestría, Universidad del Valle de Colombia). Recuperado de https://www.academia.edu/5503482

Gúmera, C. (2011). *Registros de representación semiótica utilizados para la proporcionalidad y la función lineal en los textos de matemáticas de 8º año básico y 1er año medio entregados por el MINEDUC en Chile 2010-11*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso). Recuperado de http://www.buenastareas.com/ensayos/Tesis-De-Did%C3%A1ctica-De-Las-Matem%C3%A1ticas/4763961.html

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Pearson Educación.

Hernández, R., Fernández, C., & Batista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Hurtado, A. y Zúñiga, F. (2011). *La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica*. (Tesis de Licenciatura, Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía). Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/3849

Instituto APOYO (2002), *Matemática para todos 1*. Lima: Bruño.

Kilpatrick, J., Gómez, P., Rico, L. (1998). *Educación Matemática*. Bogota: Una empresa docente.

Lages, E. (1991). *Mi profesor de matemáticas y otras historias*. Rio de Janeiro: Graftex.

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E. y Morgado, A. (2000). *La matemática de la enseñanza media*. Lima: IMCA.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. México: McGraw Hill.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación de Diploma de Estudios Avanzados, Universidad de Vigo). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/DEA-CatarinaLucas_versi% C3%B3n-preliminar.pdf

Marconi, M. y Lakatos, E. (2003). *Fundamentos de metodologia científica*. São Paulo: atlas. Recuperado de http://es.slideshare.net/praetece/lakatos-marconi-fundamentos-de-metodologia-cientifica

Mayorga, L. (2013). Organizaciones matemáticas en el libro de texto. Un estudio en el contenido de función lineal en el tercer año de educación media venezolana. *Ciencia de la Educación*, *23*(42), pp. 69-82. Recuperado de http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/ n42/art04.pdf

Ospina, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal. (Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Manizales). Recuperado de http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis_Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf

Perú, Ministerio de Educación (1998). *Diseño curricular básico de educación secundaria.* Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2002). *Propuesta de diseño curricular básico de educación secundaria de menores. Nueva secundaria*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2004). *Diseño curricular básico de educación secundaria.* Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2005). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular. Proceso de articulación.* Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2005a). *Matemática 4*. Lima: Santillana.

Perú, Ministerio de Educación (2005b). *Matemática 5*. Lima: Bruño.

Perú, Ministerio de Educación (2006). *Matemática 2 secundaria*. Lima: Quipu.

Perú, Ministerio de Educación (2008). *Matemática 4*. Lima: Bruño.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2012a). *Matemática 1*. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Matemática 2*. Lima: Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012c). *Matemática 6. Sexto grado de educación primaria.* Lima: El Nocedal S.A.C.

Perú, Ministerio de Educación (2013a). *Pisa 2012: Primeros resultados, informe nacional del Perú.* Lima. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/?p=1673

Perú, Ministerio de Educación (2013b). *Mapas de progreso del aprendizaje. Nuestros estándares nacionales de aprendizaje.* Lima. Recuperado de http://www.sineace.gob.pe/mapas-de-progreso

Perú, Ministerio de Educación (2013c). *Mapas de progreso del aprendizaje matemática: Cambio y relaciones*. Lima. Recuperado de http://www.sineace.gob.pe/mapas-de-progreso

Perú, Ministerio de Educación (2014). *Marco curricular nacional*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/minedu/archivos/MarcoCurricular.pdf

Planchart, O. (2000). *La visualización y la modelización en la adquisición del concepto de función.* (Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma del Estado de Morelos). Recuperado de http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf

Ramos, A. (2005). *Objetos Personales, Matemáticos y Didácticos, del profesorado y cambios Institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales.* (Tesis de Doctorado, Universidad de Barcelona). Recuperado de https://es.scribd.com/doc/184294666/Tesis07

Santana, K., Januario, G., Costa, F., Possani, J. e Amaral, N. (2010) Introdução ao conceito de função: uma análise pela perspectiva da organização praxeológica. In: Encontro Paulista de Educação Matemática, 10. Anais... *X EPEM: Os (des)caminhos da Educação Continuada de Professores que ensinam Matemática no Estado de São Paulo*. São Carlos: SBEM/SBEM-SP, p. 1-12. (ISBN 978-85-98092-12-6) Recuperado de http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_santana_janario_possani_amaral.pdf

Santillana (2008). *Matemática 3*, Lima: Santillana.

Sebastiani, F. (s. f.). *Matemática tercer grado de secundaria*. Lima: Escuela Nueva S. A.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. (Tesis Doctoral, Universitat Ramon Llull). Recuperado de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/101204/Tesis_Lidia Serrano_2013.pdf?sequence=1

Silva, E. (2005). *A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: un estudo sob a ótica da organização praxeológica*. (Teses de Mestrado em Educação Matemática, PUC/São Paolo). Recuperado de http://www.sapientia.pucsp.br/ tde_arquivos/13/TDE-2005-0915T16:31:30Z1274/Publico/ELIANA%20DA%20SILVA %20CRUZ.pdf

Sierpinska, A., Kilpatrick, J., Balacheff, N., Howson, A., Sfard, A., y Steinbring, H. (1993). What Is Research in Mathematics Education, and What Are Its Results?. *Journal for Research in Mathematics Education*. *24*(3), pp. 274-278. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/749348

Stewart, J., Redlin, L y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México: Cengage Learning.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1996). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Thomas, G. (2010). *Calculo una variable*. México: Pearson Educación. Recuperado de http://es.slideshare.net/angelbaez1217/thomas-calculo-una-varia-12e-george-b-thomas -jr

UNESCO (2009). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo* (*SERCE*). Chile: Salesianos.

Van Dalen, D. y Meyer, W. (1984). *Manual de técnica de la investigación educacional*. Barcelona: Paidos.

Zanardi, D., Kneubil, F. e Pereira, V. (2013). Organização praxeológica de saberes escolares: uma comparação da equação de clapeyron em livros de física e química. *Investigações em Ensino de Ciências*, *18*(3), pp. 601-620. Recuperado de http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID345/v18_n3_a2013.pdf

ANEXO 1: CLASIFICACIÓN DE LOS EJERCICIOS Y EJEMPLOS DEL LIBRO DE MATEMÁTICA 1°

TIPO DE TAREA	TAREA	PROBLEMAS PROPUESTOS			PROBLEMAS RESUELTOS		
		Número de Actividad	**Número Pág.**	**Número de problema**	**Tema**	**Número Pág.**	**Número de problema**
T_1: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes.	$t_{1,1}$: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de una tabla.	¿Qué sabemos? Cultivamos nuestras tierras	Pág. 137	1a, 1b			
	$t_{1,2}$: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de un enunciado verbal.	Cultivamos nuestras tierras	Pág. 138	A1, A2, A3, A4	Problema introductorio de función	Pág. 139	F1a, F1b
T_2: Representar relaciones binarias.	$t_{2,1}$: Representar relaciones binarias como un conjunto de pares ordenados.				Producto cartesiano	Pág. 139	1a, 2a, 3a
	$t_{2,2}$: Representar relaciones binarias como diagramas sagitales.				Producto cartesiano	Pág. 139	1b,
	$t_{2,3}$: Representar relaciones binarias como gráficos cartesianos.				Producto cartesiano	Pág. 139	1c, 2b, 3b
T_3: Identificar variables de una función.	$t_{3,1}$: Identificar variables independiente y dependiente en una situación matemática.	Act. 1 Evaluación 1 Heteroevaluación	Pág. 141 Pág. 144 Pág. 166	1a 1a, 1b 9a	Variables de una función	Pág. 140	V1
	$t_{3,2}$: Identificar variables independiente y dependiente en una situación extramatemática.	Act. 1 Act. 1 Evaluación 1 Heteroevaluación	Pág. 141 Pág. 141 Pág. 144 Pág. 166	1b, 1c 3a 1c, 1d, 1e 9b			
T_4: Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.	$t_{4,1}$: Reconocer funciones a partir de un conjunto de puntos.	Act. 1 Heteroevaluación	Pág. 141 Pág. 166	4a, 4b 8c, 8d	Funciones y gráficas	Pág. 143 Pág. 143	2 b
	$t_{4,2}$: Reconocer funciones a partir de diagramas sagitales.	Act. 1 Heteroevaluación	Pág. 141 Pág. 166	4c, 4d 8a, 8b	Funciones y gráficas	Pág. 143 Pág. 143	1 a
	$t_{4,3}$: Reconocer funciones a partir de tablas.	Act. 2	Pág. 142	8a, 8b, 8c, 8d			

	$t_{4,4}$: Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.	Mix matemático	Pág. 157	1G, 1H, 1I, 1J	Función Mix matemático	Pág. 140 Pág. 156	F3 1M, 1N, 1P, 1Q
T_5: Determinar el dominio y rango de funciones.	$t_{5,1}$: Determinar el dominio y rango de funciones de un conjunto de pares ordenados.	Act. 2	Pág. 141	1a, 1b, 1c	Dominio y rango de funciones	Pág. 141	D1
	$t_{5,2}$: Determinar el dominio y rango de funciones de una tabla numérica.	Act. 2	Pág. 142	9b			
	$t_{5,3}$: Determinar el rango de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el dominio.	Act. 2 Evaluación 1 Heteroevaluación	Pág. 141 Pág. 144 Pág. 166	1d, 1e, 2 2 4			
	$t_{5,4}$: Determinar el dominio de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el rango.	Evaluación 1	Pág. 144	5			
T_6: Completar tablas que representan funciones.	$t_{6,1}$: Completar tablas a partir de la regla de correspondencia dado el dominio	Act. 2	Pág. 142	7b			
	$t_{6,2}$: Completar tablas a partir de la regla de correspondencia donde falta elementos del dominio y rango.	Act. 2 Mix matemático	Pág. 142 Pág. 157	9a 5			
	$t_{6,3}$: Completar tablas a partir de situaciones extramatemáticas.	Mix matemático	Pág. 158	20a			
T_7: Representar una función lineal afín.	$t_{7,1}$: Representar tabular y gráficamente algunos puntos de una función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.	Act. 1 Act. 2	Pág. 141 Pag. 142	2a, 2b 9c	Representación de la función	Pág. 140	R3
	$t_{7,2}$: Representación tabular y sagital la función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.	Evaluación 1	Pág. 144	3	Representación de la función	Pág. 140	R2
	$t_{7,3}$: Representar una función lineal				Función	Pág. 140	F2

	afín como un conjunto de pares ordenados dado la regla de correspondencia.				Representación de la función	Pág. 140	R1
T_8: Representar algunos puntos de una función cuadrática.	$t_{8,1}$: Representar tabular y gráficamente algunos puntos de una función cuadrática a partir de la regla de correspondencia.	Act. 1	Pág. 141	2c			
T_9: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín.	$t_{9,1}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de un enunciado verbal.	Act. 1	Pág. 141	3b			
	$t_{9,2}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de pares ordenados.	Act. 1	Pág. 141	5a, 5b, 5c, 5d			
	$t_{9,3}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de tablas.	Evaluación 1 Mix matemático	Pág. 144 Pág. 157	4a, 4b, 4c 6			
	$t_{9,4}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de figuras.	Act. 2	Pág. 142	7a			
T_{10}: Extraer información de las distintas representaciones de una función.	$t_{10,1}$: Extraer información de pares ordenados que representan funciones y encontrar valores que faltan.	Act. 2	Pág. 142	11a, 11b, 11c, 11d, 11e			
	$t_{10,2}$: Extraer información de pares ordenados que representan funciones y encontrar valores que faltan y determinar el rango.	Act. 2	Pág. 142	3, 5			
	$t_{10,3}$: Extraer información de un diagrama sagital y encontrar valores que faltan dado una	Act. 2	Pág. 142	4			

	condición y sumar los elementos del rango.						
T_{11}: Construir funciones entre dos conjuntos.	$t_{11,1}$: Construir funciones entre dos conjuntos usando la representación tabular y gráfica de diagramas sagitales.	Act. 2	Pág. 142	6			
	$t_{11,2}$: Construir funciones entre dos conjuntos usando la representación gráfica cartesiana.	Puzzles	Pág. 143	ab1, ab2, ab3			
T_{12}: Evaluar una función a partir de la imagen y preimagen.	$t_{12,1}$: Evaluar una función a partir de la preimagen dado la regla de correspondencia de la función.	Act. 2	Pág. 142	10a, 10c			
	$t_{12,2}$: Evaluar una función a partir de la imagen dado la regla de correspondencia de la función.	Act. 2	Pág. 142	10b			
T_{13}: Determinar el valor de verdad de proposiciones.	$t_{13,1}$: Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre el dominio y rango de una función.	Mix matemático	Pág 157	2a, 2b, 2c			
	$t_{13,2}$: Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre los pares ordenados que representan una función.	Mix matemático	Pág. 157	3A, 3B, 3C, 3D, 3E, 3F			
	$t_{13,3}$: Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre situaciones extramatemáticas.	Mix matemático	Pág. 157	4I, 4II, 4III, 4IV			
T_{14}: Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.	$t_{14,1}$: Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes en una situación matemática.	Act. 3	Pág. 147	2a			
	$t_{14,2}$: Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes en una situación	Act. 3 Evaluación 2 Mix matemático	Pág. 147 Pág. 149 Pág. 157	2c 1b 7a, 7c, 7d			

	extramatemática.	Heteroevaluación	Pag. 166	7b			
T_{15}: Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales.	$t_{15,1}$: Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales sobre situaciones extramatemáticas.	¿Qué sabemos? Act. 3 Evaluación 2 Problemas olimpiadas	Pág. 137 Pág. 147 Pág. 149 Página160	2a, 2b, 4 4, 5 2, 4, 5, 6 2	Proporcionalidad directa e inversa	Pág. 145	P1
T_{16}: Completar tablas de magnitudes directamente proporcionales	$t_{16,1}$: Completar tablas de magnitudes directamente proporcionales a partir de una situación extramatemática.	Act. 3	Pág. 147	6			
T_{17}: Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales.	$t_{17,1}$: Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales para realizar justificaciones.	Act. 3	Pág. 147	9			
	$t_{17,2}$: Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales para establecer relaciones.	Evaluación 2 Mix matemático	Pág. 149 Pag 158	3a, 3b 20b, 20c			

ANEXO 2: TIPOS DE TAREAS, TAREAS, TÉCNICAS, TECNOLOGÍAS DEL LIBRO DE TEXTO DE MATEMÁTICA 1

Tipos de tareas y tareas del libro de texto

Primero, presentamos el primer tipo de tarea con sus respectivas tareas asociadas a ella. Luego, presentaremos el segundo tipo de tareas con sus respectivas tareas asociada a ese tipo de tarea, y así sucesivamente hasta concluir con el último tipo de tareas y sus correspondientes tareas.

Para ello, consideramos las siguientes notaciones:

T_i : es el tipo de tarea *i*.

$t_{i,\ j}$: es la tarea del tipo de tarea T_i. Además, *i* indica el tipo de tarea a la que corresponde la tarea y *j* indica el número de tarea del tipo de tarea *i*.

T_1: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes.

$t_{1,1}$: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de una tabla.

$t_{1,2}$: Establecer relaciones de dependencia entre magnitudes a partir de un enunciado verbal.

T_2: Representar relaciones binarias.

$t_{2,1}$: Representar relaciones binarias como un conjunto de pares ordenados.

$t_{2,2}$: Representar relaciones binarias como diagramas sagitales.

$t_{2,3}$: Representar relaciones binarias como gráficos cartesianos.

T_3: Identificar variables de una función.

$t_{3,1}$: Identificar variables independiente y dependiente en una situación matemática.

$t_{3,2}$: Identificar variables independiente y dependiente en una situación extramatemática.

T_4: Reconocer funciones a partir de las distintas representaciones de una relación.

$t_{4,1}$: Reconocer funciones a partir de conjunto de puntos.

$t_{4,2}$: Reconocer funciones a partir de diagramas sagitales.

$t_{4,3}$: Reconocer funciones a partir de tablas.

$t_{4,4}$: Reconocer funciones a partir de un conjunto de pares ordenados.

T_5: Determinar el dominio y rango de funciones.

$t_{5,1}$: Determinar el dominio y rango de funciones de un conjunto de pares ordenados.

$t_{5,2}$: Determinar el dominio y rango de funciones de una tabla numérica.

$t_{5,3}$: Determinar el rango de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el dominio.

$t_{5,4}$: Determinar el dominio de funciones conociendo la regla de correspondencia dado el rango.

T_6: Completar tablas que representan funciones.

$t_{6,1}$: Completar tablas a partir de la regla de correspondencia dado el dominio.

$t_{6,2}$: Completar tablas a partir de la regla de correspondencia donde falta elementos del dominio y rango.

$t_{6,3}$: Completar tablas a partir de situaciones extramatemáticas.

T_7: Representar una función lineal afín.

$t_{7,1}$: Representar tabular y gráficamente algunos puntos de una función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.

$t_{7,2}$: Representación tabular y sagital de la función lineal afín a partir de la regla de correspondencia.

$t_{7,3}$: Representar una función lineal afín como un conjunto de pares ordenados dado la regla de correspondencia.

T_8: Representar una función cuadrática.

$t_{8,1}$: Representar tabular y gráficamente una función cuadrática a partir de la regla de correspondencia.

T_9: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín.

$t_{9,1}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de un enunciado verbal.

$t_{9,2}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de pares ordenados.

$t_{9,3}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de tablas.

$t_{9,4}$: Determinar la regla de correspondencia de una función lineal afín a partir de figuras.

T_{10}: Extraer información de las distintas representaciones de una función.

$t_{10,1}$: Extraer información de pares ordenados que representan funciones y encontrar valores que faltan.

$t_{10,2}$: Extraer información de pares ordenados que representan funciones y encontrar valores que faltan y determinar el rango.

$t_{10,3}$: Extraer información de un diagrama sagital y encontrar valores que faltan dado una condición y sumar los elementos del rango.

T_{11}: Construir funciones entre dos conjuntos.

$t_{11,1}$: Construir funciones entre dos conjuntos usando la representación tabular y gráfica de diagramas sagitales.

$t_{11,2}$: Construir funciones entre dos conjuntos usando la representación gráfica cartesiana.

T_{12}: Evaluar una función a partir de la imagen y preimagen.

$t_{12,1}$: Evaluar una función a partir de la preimagen dado la regla de correspondencia de la función.

$t_{12,2}$: Evaluar una función a partir de la imagen dado la regla de correspondencia de la función.

T_{13}: Determinar el valor de verdad de proposiciones.

$t_{13,1}$: Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre el dominio y rango de una función.

$t_{13,2}$: Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre los pares ordenados que representan una función.

$t_{13,3}$: Determinar el valor de verdad de proposiciones sobre situaciones extramatemáticas.

T_{14}: Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.

$t_{14,1}$: Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes en una situación matemática.

$t_{14,2}$: Reconocer relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes en una situación extramatemática.

T_{15}: Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales.

$t_{15,1}$: Calcular el término desconocido de magnitudes directamente proporcionales sobre situaciones extramatemáticas.

T_{16}: Completar tablas de magnitudes directamente proporcionales.

$t_{16,1}$: Completar tablas de magnitudes directamente proporcionales a partir de una situación extramatemática.

T_{17}: Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales.

$t_{17,1}$: Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales para realizar justificaciones.

$t_{17,2}$: Analizar gráficos cartesianos de magnitudes directamente proporcionales para establecer relaciones.

Entre los problemas resueltos y los problemas propuestos del libro de texto tenemos identificado 17 tipos de tareas y 42 tareas asociadas a las diferentes tipos de tareas.

Técnicas del libro de texto

Las técnicas que hemos utilizado para ejecutar las tareas son algorítmicas, por consiguiente están formadas por un conjunto de pasos. A continuación, describimos cada una de ellas:

Para ello, consideramos la siguiente notación:

$\tau_{i,j,k}$: donde *i* indica el tipo de tarea a la que corresponde la tarea, *j* indica el número de tarea del tipo de tarea *i* y *k* indica el número de técnica de la tarea *j*. Además:

$$i \in \{1; 2; 3; \ldots; 17\}$$

$$j \in \{1; 2; 3; 4\}$$

$$k \in \{1; 2\}$$

Técnica ($\tau_{1,1,1}$):

Paso 01: Realizar operaciones entre los valores de las magnitudes.

Paso 02: Identificar las operaciones que relacionan las magnitudes.

Paso 03: Reconocer la relación existente entre las magnitudes.

Técnica ($\tau_{1,2,1}$):

Paso 04: Identificar las magnitudes que intervienen.

Paso 05: Identificar los factores que influyen en el resultado de una magnitud.

Paso 03: Reconocer la relación existente entre las magnitudes.

Técnica ($\tau_{2,1,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Paso 07: Determinar el producto cartesiano A×B como un conjunto de pares ordenados.

Paso 08: Seleccionar un subconjunto del producto cartesiano A×B que cumple una propiedad común.

Técnica ($\tau_{2,2,1}$):

Paso 09: Definir una relación de A en B expresado como pares ordenados.

Paso 10: Representar los conjuntos A y B mediante diagramas de Venn-Euler.

Paso 11: Representar con flechas que van de A a B cada par ordenado de la relación.

Técnica ($\tau_{2,3,1}$)

Paso 12: Definir la relación como un subconjunto de pares ordenados del producto cartesiano A×B.

Paso 13: Trazar dos semirrectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical.

Paso 14: Ubicar en la recta horizontal los elementos del conjunto de partida (A), y en la recta vertical los elementos del conjunto de llegada (B).

Paso 15: Ubicar cada par ordenado en el plano cartesiano.

Técnica ($\tau_{3,1,1}$)

Paso 16: Representar con letras a las magnitudes que intervienen en la situación.

Paso 17: Proponer casos particulares para verificar la dependencia.

Paso 18: Determinar la regla de correspondencia.

Paso 19: Establecer la dependencia e independencia entre las variables.

Técnica ($\tau_{3,2,1}$) = Técnica ($\tau_{3,1,1}$):

Paso 16: Representar con letras a las magnitudes que intervienen en la situación.

Paso 17: Proponer casos particulares para verificar la dependencia.

Paso 18: Determinar la regla de correspondencia.

Paso 19: Establecer la dependencia e independencia entre las variables.

Técnica ($\tau_{4,1,1}$):

Paso 20: Verificar que para cada elemento del conjunto de partida existe una imagen en el conjunto de llegada (existencia).

Paso 21: Verificar que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (unicidad).

Técnica ($\tau_{4,2,1}$) = Técnica ($\tau_{4,1,1}$):

Paso 20: Verificar que para cada elemento del conjunto de partida existe una imagen en el conjunto de llegada (existencia).

Paso 21: Verificar que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada (unicidad).

Técnica ($\tau_{4,3,1}$):

Paso 22: Revisar que ninguno de los valores independientes x están repetidos en la tabla.

Paso 23: Verificar que a cada valor de x de la tabla le corresponda un único valor de y o $f(x)$.

Técnica ($\tau_{4,4,1}$):

Paso 24: Verificar que ningún elemento de la primera componente del par ordenado se repite.

Paso 25: Verificar que cada elemento x del dominio de la función tiene solo una imagen.

Paso 26: Seleccionar el conjunto de pares ordenados que representan funciones.

Técnica ($\tau_{5,1,1}$):

Paso 27: Escribir las primeras componentes de los pares ordenados en un conjunto de manera ordenada.

Paso 28: Escribir las segundas componentes de los pares ordenados en otro conjunto de manera ordenada.

Técnica ($\tau_{5,2,1}$):

Paso 29: Escribir los valores de *x* en un conjunto en forma ordenada.

Paso 30: Escribir los valores de *f*(*x*) en otro conjunto en forma ordenada.

Técnica ($\tau_{5,3,1}$):

Paso 31: Reemplazar cada valor de *x* en la regla de correspondencia.

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias.

Paso 33: Escribir en un conjunto los valores encontrados de *f*(*x*) en forma ordenada.

Técnica ($\tau_{5,4,1}$):

Paso 34: Igualar cada elemento del rango a la regla de correspondencia de la función.

Paso 35: Resolver la ecuación y encontrar los valores de la variable *x*.

Paso 36: Escribir el conjunto con los elementos del dominio de la función.

Paso 37: Sumar los elementos del dominio de la función.

Técnica ($\tau_{6,1,1}$):

Paso 38: Reemplazar cada elemento del dominio en la regla de correspondencia.

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias para completar la tabla.

Técnica ($\tau_{6,2,1}$):

Paso 39: Reemplazar los elementos conocidos del dominio en la regla de correspondencia de la función.

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias.

Paso 34: Igualar la regla de correspondencia de la función con los elementos conocidos del rango.

Paso 35: Resolver la ecuación y encontrar los valores de la variable *x*.

Paso 40: Completar la tabla con los números encontrados.

Técnica ($\tau_{6,3,1}$):

Paso 41: Determinar la regla de correspondencia de la función a partir de los elementos conocidos.

Paso 39: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los demás valores del dominio.

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas necesarias.

Paso 42: Representar gráficamente algunos puntos de la función.

Técnica ($\tau_{7,1,1}$):

Paso 43: Asignar valores a la variable *x*.

Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de *x* para encontrar *f*(*x*).

Paso 45: Construir una tabla de valores.

Paso 46: Construir el plano cartesiano.

Paso 15: Ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano.

Técnica ($\tau_{7,2,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de *x* para encontrar *f*(*x*).

Paso 10: Representar los conjuntos de partida y llegada mediante diagramas de Venn-Euler.

Paso 45: Representar con flechas que van de A a B cada elemento de la función.

Técnica ($\tau_{7,3,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de *x* para encontrar *f*(*x*).

Paso 46: Representar como un conjunto de pares ordenados los elementos de la función.

Técnica ($\tau_{8,1,1}$) = Técnica ($\tau_{7,1,1}$):

Paso 43: Asignar valores a la variable *x*.

Paso 44: Reemplazar en la regla de correspondencia de la función los valores de *x* para encontrar *f*(*x*).

Paso 45: Construir una tabla de valores.

Paso 46: Construir el plano cartesiano.

Paso 15: Ubicar los pares ordenados en el plano cartesiano.

Técnica ($\tau_{9,1,1}$):

Paso 04: Identificar las magnitudes que intervienen en el enunciado verbal.

Paso 47: Asignar valores a una de las variables de la relación para encontrar el valor de la otra variable.

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia de la función.

Técnica ($\tau_{9,2,1}$):

Paso 49: Realizar operaciones aritméticas con los componentes de los pares ordenados.

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia de la función.

Técnica ($\tau_{9,3,1}$):

Paso 50: Realizar operaciones aritméticas con los números que forman la tabla.

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia de la función.

Técnica ($\tau_{9,4,1}$):

Paso 51: Identificar las dimensiones de los lados del acuario.

Paso 52: Multiplicar las dimensiones del acuario (paralelepípedo).

Paso 48: Escribir la regla de correspondencia que representa el volumen del acuario.

Técnica ($\tau_{10,1,1}$):

Paso 53: Identificar la componente del par ordenado en el que se encuentra la incógnita.

Paso 54: Buscar la primera componente que se repite.

Paso 55: Igualar las segundas componentes de los pares ordenados.

Paso 35: Resolver la ecuación

Paso 56: Hallar el valor que falta en la función.

Técnica ($\tau_{10,2,1}$):

Paso 53: Identificar la componente del par ordenado en el que se encuentra la incógnita.

Paso 54: Buscar la primera componente que se repite.

Paso 55: Igualar las segundas componentes de los pares ordenados.

Paso 35: Resolver la ecuación.

Paso 57: Representar la función como pares ordenados.

Paso 28: Determinar el rango de la función.

Técnica ($\tau_{10,3,1}$):

Paso 58: Identificar las incógnitas.

Paso 59: Extraer datos del diagrama sagital.

Paso 60: Reemplazar los datos en la condición del problema.

Paso 35: Resolver la ecuación.

Paso 28: Determinar el rango de la función.

Paso 61: Realizar la suma de los elementos del rango.

Técnica ($\tau_{11,1,1}$):

Paso 06: Identificar los conjuntos de partida y llegada.

Paso 62: Construir una tabla que representa una función.

Paso 63: Construir un diagrama sagital que representa una función de A en B.

Técnica ($\tau_{11,2,1}$):

Paso 64: Identificar los puntos en la cuadrícula proporcionada.

Paso 65: Trazar los ejes coordenados para que la relación represente una función.

Paso 66: Trazar los ejes coordenados para que la relación no represente una función.

Técnica ($\tau_{12,1,1}$):

Paso 39: Reemplazar el valor a evaluar en la regla de correspondencia de la función.

Paso 32: Realizar las operaciones aritméticas.

Paso 67: Hallar la imagen de la preimagen dado.

Técnica ($\tau_{12,2,1}$):

Paso 34: Igualar la regla de correspondencia de la función a la preimagen dado.

Paso 35: Resolver la ecuación.

Paso 68: Hallar la preimagen de la imagen dado.

Técnica ($\tau_{13,1,1}$):

Paso 69: Leer el enunciado de la proposición.

Paso 70: Verificar la información que contiene la proposición.

Paso 71: Establecer el valor de verdad de la proposición.

Técnica ($\tau_{13,2,1}$):

Paso 72: Identificar la regla de correspondencia de la función.

Paso 73: Reconocer los elementos del dominio de la función.

Paso 71: Establecer el valor de verdad de la proposición.

Paso 74: Seleccionar las proposiciones que son verdaderos.

Técnica ($\tau_{13,3,1}$):

Paso 75: Leer la situación extramatemática propuesto.

Paso 71: Establecer el valor de verdad de la proposición.

Paso 74: Seleccionar las proposiciones que son verdaderos.

Técnica ($\tau_{14,1,1}$):

Paso 76: Asignar valores a una de las magnitudes y encontrar el valor de la otra magnitud.

Paso 77: Hallar el cociente de los valores.

Paso 78: Comparar los cocientes de proporcionalidad.

Paso 79: Establecer si las magnitudes son directamente proporcionales.

Técnica ($\tau_{14,2,1}$) = Técnica ($\tau_{14,2,1}$):

Paso 76: Asignar valores a una de las magnitudes y encontrar el valor de la otra magnitud.

Paso 77: Hallar el cociente de los valores.

Paso 78: Comparar los cocientes de proporcionalidad.

Paso 79: Establecer si las magnitudes son directamente proporcionales.

Técnica ($\tau_{15,1,1}$):

Paso 80: Establecer la proporcionalidad de las magnitudes.

Paso 81: Escribir la ecuación de la proporcionalidad.

Paso 82: Multiplicar en aspa.

Paso 83: Hallar el valor de la incógnita.

Técnica ($\tau_{16,1,1}$):

Paso 80: Establecer la proporcionalidad entre las magnitudes.

Paso 84: Averiguar el número por el que se debe multiplicar uno de los valores para encontrar la otra magnitud.

Paso 85: Multiplicar por el número encontrado a los demás valores para completar la tabla.

Técnica ($\tau_{17,1,1}$):

Paso 86: Observar el gráfico de diagrama cartesiano.

Paso 76: Asignar algunos valores a una magnitud para ver su influencia en la otra magnitud.

Paso 87: Establecer conclusiones.

Paso 88: Justificar las conclusiones.

Técnica ($\tau_{17,2,1}$):

Paso 86: Observar el gráfico de diagrama cartesiano.

Paso 76: Asignar valores a una de las magnitudes para ver su influencia en la otra magnitud.

Paso 89: Determinar la regla de correspondencia de las magnitudes.

Paso 90: Hallar la constante de proporcionalidad.

Paso 91: Comparar las constantes de proporcionalidad.

En resumen, se ha identificado 38 técnicas para resolver las tareas que conforman la organización matemática de la función lineal y la proporcionalidad directa del libro de texto. Además, estas 38 técnicas están conformadas por 91 pasos.

Tecnologías del libro de texto

En este apartado presentamos las tecnologías que se encuentra en el libro de texto analizado. Además, consideramos que estas tecnologías deben justificar las técnicas enumeradas en la sección anterior. Para lo cual, consideramos la siguiente notación:

θ_m : es la tecnología que justifica la tarea.

Donde $m \in \{1; 2; 3; \ldots; 18\}$

Producto cartesiano

θ_1: Definición de producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, que se denota con A×B, es el conjunto formado por todos los pares ordenados (*a*; *b*), donde la primera componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

θ_2: Observación sobre diagrama sagital

En un diagrama sagital cada par ordenado se representa con una flecha. Las flechas van del conjunto de partida (A) al conjunto de llegada (B).

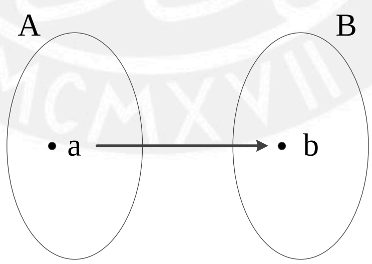


Figura 8. Diagrama sagital
Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 139)

θ_3: Observación sobre el gráfico cartesiano

En un diagrama cartesiano cada par ordenado se representa con un punto. En el eje horizontal se representa al conjunto de partida (A) y en el eje vertical al conjunto de llegada (B).

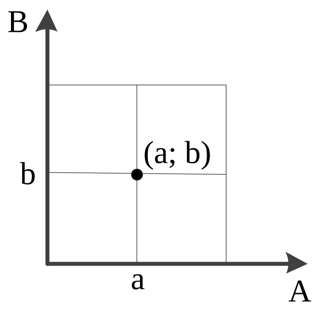


Figura 9. Gráfico cartesiano
Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 139)

θ_4: Definición de par ordenado

En el par ordenado (*a*; *b*) *a* es la primera componente y *b* es la segunda componente.

θ_5: Elementos de una relación

Si (*a*; *b*) es un elemento de una relación R, se dice que *b* es la imagen de *a*.

Funciones

θ_6: Definición de función

Dados dos conjuntos A y B, se define la función *f* de A en B como un subconjunto de A×B, donde a cada elemento de A (conjunto de partida) le corresponde un único elemento de B (conjunto de llegada). Se denota por $y = f(x)$.

θ_7: Definición de regla de correspondencia

La regla de correspondencia nos indica el criterio con el cual se eligen las parejas de elementos del conjunto de partida y de llegada.

Variables de una función

θ_8: Definición de variables de una función

En una función $y = f(x)$, *x* es la variable independiente, puesto que *x* puede tomar cualquier valor del conjunto de partida, mientras que *y*, variable dependiente, obtiene su valor dependiendo del asignado a *x*.

Representación tabular y gráfica

θ_9: Notación funcional

La notación funcional que representa simbólicamente una función es:

$f : A \to B$

Se lee: función *f* de A en B.

θ_{10}: Diagrama sagital de una función

La representación de una función a través de flechas se denomina diagrama sagital.

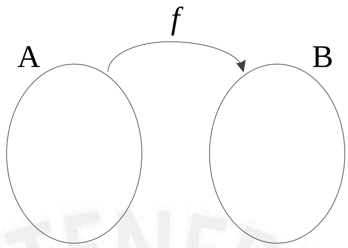


Figura 10. Diagrama sagital de la función
Fuente: Libro de texto Matemática 1 (Perú, 2012a, p. 140)

θ_{11}: Gráfico cartesiano de una función

La representación de una función en un plano cartesiano se denomina diagrama cartesiano (gráfico cartesiano).

Dominio y rango de funciones

θ_{12}: Definición de función como par ordenado

Los elementos de la función *f* son pares ordenados (*x*; *y*), los cuales tienen dos componentes. La primera componente es *x*, y la segunda es *y*.

θ_{13}: Definición de dominio de una función

El conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados se denomina dominio de la función.

θ_{14}: Definición del rango de una función

El conjunto de las segundas componentes se denomina rango de la función.

θ_{15}: Imagen y preimagen de una función

En toda función, los elementos del rango se llaman imágenes de los respectivos elementos del dominio (preimágenes), según la regla de correspondencia de dicha función.

(*x* ; *y*)

Preimagen ← → Imagen

Funciones y gráficas

Para que una relación *f* entre dos conjuntos A y B sea una función de A en B, deben cumplirse dos condiciones:

θ_{16}: Condición de existencia

Para todo elemento de A, donde A es el conjunto de partida, existe una imagen en B, donde B es el conjunto de llegada. Esto se simboliza con:

$$\forall\ x \in \text{A},\ y \in \text{B}/\ (x; y) \in f$$

θ_{17}: Condición de unicidad

A cada valor del conjunto de partida le corresponde un único valor del conjunto de llegada. Por lo tanto:

$$(x; y) \in f\ \wedge (x; z) \in f\ \rightarrow y = z$$

Proporcionalidad directa

θ_{18}: Definición de magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcional (DP) si el cociente de sus valores permanece constante, es decir: A DP B $\Leftrightarrow$ A/B = K (K = constante de proporcionalidad).

En resumen, en el libro de texto existen 18 tecnologías, de los cuales, 17 están son a cerca de la función y solo uno está referido a la proporcionalidad directa.

Teorías del libro de texto

En seguida, presentamos las teorías que justifican las tecnologías que el libro de texto posee en su organización matemática. Para ello, se usa la siguiente notación:

Θ_n : es la teoría que justifica la tecnología.

Donde $n \in \{1; 2\}$

Teoría de funciones

Θ_1: En el libro de texto analizado la teoría de funciones comprende: el producto cartesiano, definición de función, variables de una función, representación tabular y gráfica de una función, dominio y rango de funciones, y funciones y gráficas.

Teoría de las magnitudes proporcionales

Θ_2: De acuerdo al libro de texto que analizamos, la teoría de las magnitudes proporcionales comprende magnitudes directamente proporcionales y magnitudes inversamente proporcionales.

En el libro de texto analizado solo hemos identificado dos teorías que justifican las tecnologías identificadas en el libro de texto.