PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

BASE MEDIA DEL TRAPECIO Y APREHENSIONES EN EL REGISTRO FIGURAL: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON EL USO DEL GEOGEBRA CON ESTUDIANTES DEL NIVEL SECUNDARIO

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

BEATRIZ PAULINA ESPINOZA PERALTA DE MANRIQUE

Dirigido por

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

San Miguel, 2015

A Dios por darme las bendiciones en cada amanecer del día.

A mis queridos padres Cirilo Espinoza y Alejandra Peralta, por su amor incondicional, su ejemplo de ser perseverantes y de tener fortaleza para lograr el éxito.

A mi esposo Henry Manrique Arias por su amor y apoyo, por su paciencia, comprensión y por estar a mi lado en los momentos más difíciles e importantes de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo – PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada "Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educción en el Perú 2014", por la oportunidad y el apoyo financiero para realizar mis estudios de maestría en una de las mejores Universidades como es la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por su alto nivel de exigencia en los cursos que he estudiado en la maestría y por su preocupación en mí formación profesional.

A mí querida maestra y asesora Dra. Jesús Flores, por sus enseñanzas, paciencia, su constante orientación, por las recomendaciones y críticas constructivas que me brindó en los momentos oportunos y que fueron de vital importancia para desarrollar y concluir la presente investigación. Gracias por su tiempo, por creer en mí y por alentarme en todo momento a seguir avanzando en el campo académico y personal.

A los miembros del jurado, Dra. Katia Vigo de la PUCP/Perú y al Dr. Gerson Pastre de Oliveira de la PUC-SP/Brasil, por las sugerencias y observaciones pertinentes que ayudaron a mejorar la calidad de mi tesis por lo que les estaré siempre agradecida.

A mis amigos María Teresa Portugal, Norma Espinoza, Milagros Rondan, Verónica Castillo, Elva Paucar y Rubén Jara, por su apoyo y amistad, y a todos mis compañeros de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por permitirme compartir momentos académicos en la maestría.

Al Prof. Fermín Campos Aburto, director de la Institución Educativa "José Abelardo Quiñones Gonzales" de la UGEL Nº13 en la cual laboro, por el constante apoyo y facilidades dadas para el desarrollo de la investigación.

A los estudiantes de 4º año de secundaria de la Institución Educativa "José Abelardo Quiñones Gonzales" que participaron en la investigación, por su colaboración y sobre todo por el entusiasmo que mostraron durante la aplicación de la secuencia didáctica de este trabajo.

La autora

RESUMEN

La presente investigación tiene por objetivo analizar como los estudiantes de 4º año de secundaria de Educación Básica Regular conjeturan la propiedad de la base media cuando articulan las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica en la que utilizan el Geogebra, para lo cual nos planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo estudiantes de secundaria conjeturan la propiedad de la base media del trapecio cuando articulan las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica con el uso del Geogebra? Utilizamos como base teórica aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica y aspectos de la Ingeniería Didáctica como marcos teórico y metodológico respectivamente. La secuencia didáctica de la investigación está formada por tres actividades, las cuales permiten que los estudiantes realicen tratamientos y conversiones. Específicamente en el registro figural analizamos las articulaciones de las aprehensiones secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva que realizaron los estudiantes. Observamos también que los estudiantes movilizaron sus conocimientos previos sobre el trapecio y otros elementos de la geometría. Señalamos también que utilizaron la función arrastre y herramientas del Geogebra para realizar tratamientos en el registro figural, la cual les permitió observar diferentes configuraciones del objeto representado, articular aprehensiones, relacionar conocimientos y establecer conjeturas. Finalmente, mediante la articulación de las aprensiones en el registro figural, los estudiantes lograron conjeturar la propiedad de la base media del trapecio.

Palabras claves: base media del trapecio, registro figural, aprehensiones, Geogebra.

ABSTRACT

The present research aims to analyze how 4-grade high school students from Regular Basic Education conjecture the property of the median of a trapezoid when they put together the apprehensions in the figurative register in a didactic sequence in which they use Geogebra. To do this, we pose the following research question: how do high school students conjecture the property of the median of a trapezoid when they put together the apprehensions in the figurative register in a didactic sequence by using Geogebra? As theoretical basis, we used aspects from the theory of Registers of Semiotic Representation as well as aspects from Didactic Engineering as theoretical and methodological framework respectively. The didactic sequence of the research is made up of three activities, which allow students to perform treatments and conversions. In the figurative register we specifically analyzed the interactions of the sequential, perceptual, operative and discursive apprehensions students performed. We also observed that students mobilized their previous knowledge on trapezoids and other elements of geometry. We also noted that they used the dragging function and tools from Geogebra to perform treatments in the figurative register, which allowed them to observe different configurations of the represented object, put together apprehensions, relate knowledge, and establish conjectures. Finally, by putting together the apprehensions in the figurative register, students managed to conjecture the property of the median of a trapezoid.

Key words: median of a trapezoid, figurative register, apprehensions, Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE CUADROS

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación aborda el estudio de la propiedad de la base media del trapecio desde la perspectiva de Duval (1995), para ello haremos uso del software Geogebra. Pensamos que nuestra investigación contribuye al estudio de este objeto matemático y especialmente a su enseñanza, ya que estamos interesados en analizar como los estudiantes de cuarto año del nivel secundario correspondiente a la Educación Básica Regular, movilizan la noción del trapecio y conjeturan la propiedad de la base media del trapecio a través de una secuencia didáctica en el cual harán uso del software Geogebra.

Así mismo, debemos señalar que la presente investigación busca resaltar la importancia de la enseñanza del trapecio y especialmente la propiedad de la base media del trapecio ya que su desarrollo permite conectar conocimientos sobre semejanza, congruencia de triángulos y propiedades de ángulos formados por dos rectas paralela y una recta secante, mediante los diferentes registros de representación semiótica para su mejor comprensión tal como lo señala Duval (1995) y no limitarse solo a la enseñanza del cálculo de su perímetro y área tal como lo señala el Diseño Curricular Nacional del Perú.

A continuación presentamos la estructura de la investigación, compuesta de cuatro capítulos.

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación en el que revisamos investigaciones que tienen relación con nuestro objeto de estudio trapecio, los cuales nos brindan información sobre su enseñanza y los errores comunes que presentan los estudiantes en su aprendizaje, la influencia positiva del software Geogebra en la enseñanza de temas de geometría, el significado de conjetura y su relevancia en nuestra investigación, también revisamos investigaciones en los cuales utilizaron como base la Teoría de Registros de Representación Semiótica ya que nos permitirá conocer las dificultades que presentan los estudiantes con respecto a los registros de representación que utilizan en el desarrollo de las actividades matemáticas. Así mismo presentamos una breve descripción del software Geogebra y las herramientas que se emplearan en nuestra investigación, también justificamos la problemática, formulamos la pregunta y los objetivos de nuestra investigación.

En el segundo capítulo presentamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuestos por Duval, de los cuales nos centraremos en la conversión del registro en lengua natural al registro figural y viceversa; y en el tratamiento en el registro figural, dentro del tratamiento en el registro figural, consideramos las distintas aprehensiones, también presentamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como base metodológica de nuestra investigación.

En el tercer capítulo presentamos el estudio del trapecio desde dos dimensiones: Epistemológico, en el que se introduce el aspecto formal del objeto matemático trapecio, que se inicia con la definición del trapecio, luego la clasificación, definición y demostración de las propiedades del trapecio y finalmente presentamos el aspecto didáctico en el cual realizamos un estudio del texto Matemática 4° de secundaria, utilizados por los estudiantes de cuarto año de secundaria en las escuelas públicas del Perú.

En el cuarto capítulo presentamos el experimento, que comprende: la descripción del escenario de investigación, la descripción de los sujetos de investigación, la descripción de la secuencia didáctica que consta de tres actividades; el análisis de las actividades, con sus respectivos análisis a priori y a posteriori de las acciones de los estudiantes; y los resultados del experimento.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación, en relación al marco teórico y metodológico, la pregunta de investigación, al objetivo general; y las perspectivas futuras.

Así mismo, debemos resaltar que la presente tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación *DIMAT* de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP/PERÚ y *PEA-MAT* de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, PUC-SP/ BRASIL, titulado: *“Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT”* y aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP) processo 2013/23228-7 y por PI0272 (PUCP).

CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo de investigación estamos interesados en que los estudiantes a partir de una secuencia didáctica movilicen nociones del trapecio y conjeturen la propiedad de la base media del trapecio. Y para ello presentamos algunas investigaciones en los que se aborda la noción del trapecio tales como sus elementos, clasificación y propiedades. Además, presentamos otras investigaciones en las que se utiliza el software Geogebra y la Teoría de Registro de Representación Semiótica. Posteriormente, presentaremos la justificación de la investigación, la pregunta de investigación y sus respectivos objetivos.

1.1 Antecedentes

En este apartado, organizamos los antecedentes relacionados con el objeto matemático trapecio, el software Geogebra y la Teoría de Registros de Representación Semiótica, los cuales guardan estrecha relación con nuestra investigación.

Investigaciones relacionadas con el objeto matemático trapecio

En las investigaciones relacionadas con el objeto trapecio presentamos en primer lugar el trabajo de Maguiña (2013). El investigador propone un estudio basado en las fases de aprendizaje según el modelo Van Hiele, en el cual realiza un análisis de los diferentes niveles de razonamiento geométrico así como la comparación del grado de adquisición que se tiene en torno al objeto matemático cuadriláteros. En esta investigación participaron estudiantes de 4° año de educación secundaria (14 a 15 años) de un colegio estatal de la ciudad de Lima-Perú, con quienes realizó una secuencia de actividades para identificar el nivel de razonamiento geométrico respecto a los cuadriláteros y los errores presentados por los estudiantes. El autor en su investigación propone algunas actividades sobre el trapecio y realiza una explicación detallada sobre los resultados obtenidos.

Es así que en la parte experimental, en una de las actividades el autor evidenció que los estudiantes confunden los trapecios con los paralelogramos, clasificándolos dentro del grupo de los mismos, en otra actividad en el que se propone un problema sobre un trapecio isósceles y se les solicita ubicar los puntos medios de sus lados, el autor les plantea la siguiente pregunta: ¿Qué figura se forma al unir consecutivamente los puntos medios del trapecio isósceles? De acuerdo al resultado obtenido el autor evidenció que los estudiantes no presentaron dificultades en construir el registro figural de acuerdo a las condiciones del problema, pero que sí mostraron inconsistencia en reconocer el tipo de cuadrilátero obtenido, el autor asume que es debido al desconocimiento de las propiedades de dicho objeto geométrico.

Por otro lado, Maguiña (2013) señala algunos errores encontrados en los trabajos realizados en clase, y afirma que "ningún estudiante caracteriza pertinentemente al trapezoide simétrico, algunos lo confunden con el trapecio isósceles, quizás este error más que de caracterización sea un error de tipo lingüístico, ya que este nombre simétrico podría confundirse con isósceles" (p.86).

A partir del análisis de los resultados en la parte experimental, el autor menciona que los estudiantes lograron utilizar un lenguaje matemático apropiado y un progreso en la justificación y explicación de sus respuestas, al utilizar argumentos teóricos y restándole importancia a los argumentos visuales (justificaciones basadas solo en lo que observan en la figura). Además, lograron clasificar cuadriláteros y aprendieron a formular ejemplos y contraejemplos para analizar enunciados.

También menciona que el software Geogebra facilitó la visualización y manipulación de las representaciones del objeto matemático cuadrilátero: "es decir, la capacidad de arrastre del software Geogebra le permitirá al estudiante diferenciar entre lo que se denomina dibujo y figura de un objeto geométrico" (Maguiña 2013, p.111).

Finalmente, el investigador concluye que:

1. El desarrollo de la propuesta didáctica basado en el modelo de Van Hiele permitió a los estudiantes disminuir errores como por ejemplo, cuando confunden al paralelogramo con el trapecio.

2. Los estudiantes de 4º año de secundaria poseen insuficientes conocimientos sobre la notación matemática propia de la geometría.

En segundo lugar presentamos la investigación de Escudero y Carrillo (2014), los cuales, en su trabajo de investigación realizan un análisis sobre los conocimientos que los estudiantes de educación (futuros profesores) poseen sobre cuadriláteros. Para ello, se basan en el modelo teórico Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). En este estudio, participaron 51 estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Sevilla. Inicialmente, se realizó el recojo de información sobre los conocimientos matemáticos, mediante la aplicación de un cuestionario y una entrevista que solo se aplicó a 12 participantes. Las preguntas planteadas en las actividades buscan que los estudiantes comparen características comunes y no comunes de figuras, para luego clasificarlas. El resultado de las actividades permitió a los investigadores conocer la imagen conceptual que los estudiantes, que en el futuro serán maestros poseen sobre los diferentes cuadriláteros, incluido el trapecio, ya que se les solicita que representen varios de ellos.

Escudero y Carrillo (2014) a partir de los resultados obtenidos, realizan un análisis en el cual mencionan que algunos estudiantes presentaron dificultades en reconocer cuadriláteros, y dentro de ellos los trapecios, ya que las figuras fueron presentados en posiciones no convencionales como se suelen mostrar en las clases o en los textos de matemática. También observaron que muchos de los estudiantes poseen serias dificultades para representar un cuadrilátero convexo. Pero los investigadores también destacan la fortaleza de los estudiantes, puesto que son capaces de asociar una representación prototípica (figuras en posición convencional, sobre el plano) a una definición, caracterización o nombre.

En conclusión, los investigadores afirman que las principales deficiencias inciden en la falta de comprensión de las nociones geométricas tales como las propiedades comunes de los cuadriláteros, debido a que la forma de la figura y lo que se percibe a través de su representación predomina sobre los conocimientos geométricos. También mencionan que la imagen prototípica de las figuras incita a que los estudiantes enuncien propiedades incorrectas de las figuras.

Estas investigaciones son importantes porque nos permiten tener una idea acerca de la enseñanza de las características y propiedades de los cuadriláteros en el que está incluido el trapecio y los errores comunes que presentan tanto los estudiantes para ser futuros maestros como también los estudiantes en edad escolar en su aprendizaje.

Además, presentan actividades que tomaremos en cuenta al momento del diseño de nuestra secuencia didáctica, que luego serán aplicadas a estudiantes de 4° año de secundaria los cuales serán nuestros sujetos de investigación.

Investigaciones relacionadas con el software Geogebra

En las investigaciones relacionadas con el software Geogebra, presentamos los trabajos realizados por Reid y Etcheverry (2014), quienes desarrollan una investigación en el que proponen enseñar Geometría en educación secundaria con utilización del software Geogebra como recurso didáctico. Afirman que las investigaciones en educación tienen como finalidad realizar reflexiones y críticas, para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es por este motivo que las investigadoras están interesadas en realizar una descripción de cómo es la enseñanza de la Geometría con el uso de la tecnología como recurso. Para ello trabajaron con estudiantes y docentes de primer año de secundaria, durante dos meses.

Reid y Etcheverry (2014), indican que el desarrollo de las actividades propuestas se llevó a cabo en tres partes. En la primera parte, se realizó un tutorial sobre la utilización del software Geogebra dirigido a los docentes con el objetivo de introducirlos en las construcciones de figuras geométricas. Además, trabajaron en un taller colaborativo, donde elaboraron actividades, para ello tomaron en cuenta el contexto y las necesidades de sus estudiantes, luego estas actividades junto a otras elaboradas por las investigadoras serían aplicados en la segunda y tercera parte de la investigación.

En la segunda y tercera parte, las actividades estaban dirigidas a los estudiantes que, mediante rompecabezas diseñadas por los docentes y presentadas en la pantalla de la computadora, debían de explorar y manipular las formas geométricas y construir otras a partir de ellas, dando a ellas denominaciones de acuerdo a su aspecto. Algunas de estas figuras obtenidas fueron el triángulo, cuadrado, trapecio, trapezoide y paralelogramo. Luego que ellos obtuvieron estas figuras, las autoras les plantearon una interrogante basada en lo aprendido: "¿Cómo pueden asegurar que las piezas determinan cada una de las figuras antes mencionadas? Los estudiantes tenían que reconocer las propiedades de las figuras y las clasificaron de acuerdo con sus propiedades" (Reid y Etcheverry, 2014, p.296).

Las autoras mencionan que este tipo de actividades ayudó a los estudiantes a establecer lo que ya sabían, es decir logaron precisión en el lenguaje que utilizaban, de hacer una simple descripción de observaciones, lograron realizar justificaciones, basadas en explicaciones organizadas tomando en cuenta las propiedades de las figuras geométricas. Además, mencionan que la principal ventaja del software Geogebra que lo diferencia de otras herramientas es que las figuras dejan de ser estáticas, de modo que los diseños están sujetos a modificaciones en su construcción, o que les permite comprobar cuáles son los efectos de estos cambios.

Además, concluyen que al término de las actividades los estudiantes lograron construir el trazado de figuras geométricas tales como el cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio y trapezoide, teniendo en cuenta las propiedades de cada uno de ellos y analizaron que otros conceptos se relacionan.

También, Ramírez (2014) realiza un estudio con el objetivo de caracterizar los avances en el proceso cognitivo de visualización basada en la teoría de Van Hiele, cuando estudiantes de séptimo grado (12 a 13 años) de educación básica en Colombia, clasifican triángulos y cuadriláteros según las propiedades que poseen, utilizando el software Geogebra. Los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica permiten a la investigadora inferir que un alto porcentaje de estudiantes no realizan una interpretación pertinente sobre las representaciones semióticas (interpretación y lectura de las representaciones en distintas estructuras y posiciones).

Ramírez (2014) afirma que:

> De la comparación de los resultados, se tiene que hubo avances en las diferentes habilidades que se abordaron en el subproceso de interpretación de representaciones semióticas. Los estudiantes manifestaron en sus respuestas indicadores de cada habilidad, lo que lleva a determinar que este subproceso se fue fortaleciendo con la intervención de la estrategia didáctica. (Ramírez, 2014, p.115)

La investigadora destaca que el aprendizaje de la geometría involucra el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación; por ello, recomienda el uso del software Geogebra para crear situaciones que den posibilidad a los tres procesos: visualización, construcción y razonamiento.

Estas investigaciones señalan que la utilización del software Geogebra contribuye en el proceso de construcción de los conocimientos, sobre todo en temas de geometría.

En este sentido, pensamos que el uso del software Geogebra en la aplicación de las actividades que formaran parte de nuestra secuencia didáctica, permitirán a los estudiantes observar, explorar y manipular las representaciones del trapecio. De esta forma, mostrarán evidencias de progreso de la comprensión sobre los conceptos y propiedades relacionados con el objeto matemático trapecio. Además, el uso de las herramientas del software Geogebra les permitirán realizar diferentes representaciones del trapecio y con apoyo de la función arrastre los estudiantes podrán hacer conjeturas sobre sus propiedades.

Llegados a este punto resulta necesario presentar la noción de conjetura que utilizaremos en la investigación. Es así que, para fines de nuestra investigación, tomaremos la postura de Cañadas et al. (2008) quienes sostienen que “una conjetura es una proposición que se prevé verdadera pero que está pendiente de ser sometida a un examen” (p. 433).

Los autores, mencionan los siguientes tipos de conjeturas: *la conjetura por inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos, la inducción empírica a partir de casos dinámicos, la analogía, la abducción* y la *conjetura basada en la percepción*. De los cuales para fines de nuestra investigación consideraremos los siguientes tipos de conjeturas, *las conjeturas por inducción empírica a partir de casos dinámicos y la conjetura basada en la percepción.* Explicaremos a continuación cada uno de ellas.

Las conjeturas por inducción empírica a partir de casos dinámicos se basan en un número infinito de acontecimientos seguidos, que representan a un subconjunto del número infinito de acontecimientos posibles. A partir de ellos se conjetura una regla general, que explica la naturaleza de un conjunto de acontecimientos dinámicamente relacionados (Cañadas et al, 2008).

Las conjeturas basadas en la percepción. En este caso, los autores señalan que:

> Una conjetura puede ser establecida a partir de una representación visual de un problema, de una traducción perceptual de su planteamiento. La base de este tipo de conjeturas es una cuidadosa representación del contenido del problema como una imagen mental. No hay una atención inmediata a las relaciones que existen entre los elementos del problema porque el foco inicial está en la creación de una nueva representación del problema. Una vez que esta representación existe, es a menudo bastante adecuada para reproducir las relaciones entre los elementos matemáticos que aparecen. (Cañadas et al, 2008, p.436)

En este trabajo adoptaremos la concepción de Cañadas et al. (2008) con respecto al significado de conjetura la cual consideramos más apropiada, porque ella nos permitirá establecer qué tipo de conjetura realizan nuestros estudiantes, ya que estamos interesados en que ellos establezcan relaciones entre los elementos geométricos y mediante ellos conjeturen la propiedad de la base media del trapecio.

Investigaciones relacionadas con la Teoría de Registros de Representación Semiótica

En las investigaciones relacionadas con la Teoría de Registros de Representación Semiótica presentamos en primer lugar el trabajo de Morales y Majé (2011) y en segundo lugar el trabajo de Maioli (2002).

Morales y Majé (2011) realizan una investigación sobre cuadriláteros con el objetivo de contribuir con una propuesta para el desarrollo del pensamiento espacial y los niveles de la competencia matemática sobre la base de un referencial teórico, al formular y resolver problemas en estudiantes de séptimo grado (12 a 13 años) de educación básica secundaria.

La propuesta didáctica de los investigadores responde a una articulación entre diferentes teorías como el modelo de Van Hiele, la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la forma de entender la clase de matemáticas propuesta por Bishop, con apoyo del software Geogebra.

Morales y Maje (2011), señalan que esta investigación se desarrolló en dos fases: en la primera, denominada de diagnóstico los investigadores solicitan a los estudiantes clasificar los cuadriláteros; al resolver esta actividad los estudiantes cometen errores que los investigadores los asocian al uso casi exclusivo de representaciones figurales estereotipadas durante la enseñanza de los conceptos geométricos, es decir la posición de las figuras sobre el plano. En la segunda fase se trata sobre el diseño de la propuesta didáctica en torno al tema de cuadrilátero. Cabe resaltar que los investigadores se apoyaron en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, para analizar las respuestas de los estudiantes en el desarrollo de las actividades. “En esta investigación se asume los sistemas semióticos de representación como un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto y se tiene presente que ningún sistema de representación agota por sí sólo un concepto” (Morales y Majé, 2011, p.59).

Los investigadores mencionan que nueve de los cuarenta estudiantes no poseen dominio del sistema de representación figural del trapecio y además poseen un escaso dominio del sistema de representación del lenguaje simbólico. También, consideran que: “Las actividades de la propuesta didáctica han sido intencionales en cuanto ayudan a generar constantes preguntas en los estudiantes en una interacción con sus compañeros y el profesor en la negociación de los significados” (Morales y Majé, 2001, p.157).

Las actividades propuestas en este trabajo aquellas que tienen relación con el trapecio nos brindan información que tomaremos en cuenta en el diseño de nuestra secuencia didáctica, dadas que estas fueron diseñadas con la intención de que los estudiantes utilicen los diferentes tipos de registros de Representación Semiótica.

Así mismo, Maioli (2002) realizó una investigación a partir de un taller de formación para profesores de enseñanza matemática con respecto a los cuadriláteros, con el objetivo de ofrecer una contribución en el área de matemática y dar una idea a los profesores de cómo elaborar estrategias adecuadas para trabajar temas de geometría en el aula. Para su investigación se basó en la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Maioli (2002) para la realización del taller, seleccionó diez profesores de enseñanza fundamental media. En todas las actividades, los profesores trabajaron en grupos, en los cuales discutieron, corrigieron errores encontrados en la solución de las actividades, para luego crear estrategias y comprobar sus conjeturas. Este taller estaba compuesta por situaciones problema, ya que es un contenido geométrico que permite explorar puntos importantes de la geometría, para las construcciones de los objetos matemáticos utilizaron regla y compás, estas actividades estaban orientadas a que los profesores utilicen varios Registros de Representación, realicen conjeturas, demostraciones y utilicen teoremas para resolver algunas actividades.

La autora, propuso once actividades que fueron desarrolladas en un salón de la Universidad Estatal de Maringá en Brasil. Antes de realizar el estudio sobre los cuadriláteros, la investigadora propone una actividad con el propósito de verificar como los textos utilizados por los profesores para la enseñanza de la matemática, definen cada uno de los cuadriláteros. La intención de esta actividad era provocar una discusión sobre la definición de cada una de ellas para luego tomar una postura sobre ello.

En el desarrollo de las actividades, específicamente en la actividad dos, en la parte B, se propone dos definiciones del trapecio, luego se les planteó interrogantes, algunas de ellas fueron: ¿Cuál es la diferencia entre ellas?, ¿De acuerdo a la definición un trapecio es un cuadrado?, ¿Es un rombo? El objetivo de esta actividad era discutir sobre las definiciones presentadas y verificar la influencia de los diagramas de clasificación de los cuadriláteros a partir de las definiciones propuestas. Esto permitió que los profesores tomen conciencia sobre las definiciones trabajadas en clase, porque podrían generar confusión en los estudiantes.

Luego en la actividad cinco, se plantea la siguiente interrogante: ¿Qué lados del trapecio escogería usted para llamarlos bases?, ¿Defina y construya un trapecio isósceles? ¿Construya un trapecio rectángulo? Explique su construcción. Al resolver las interrogantes, se evidenció que los docentes confunden la idea de base por la idea del sentido común, llegando a una concertación de que los lados paralelos son las bases del trapecio así se encuentren en posición horizontal o no. En cuanto a la construcción del trapecio los docentes afirman que no están acostumbrados a actividades que solicitan explicar las construcciones de los objetos matemáticos, los docentes tienen dificultad en utilizar términos para expresar las propiedades que se deben tener en cuenta en la construcción del trapecio, sobre las diversas formas de representar, la investigadora evidencia que los docentes tienen dificultades en describir sus observaciones en un lenguaje discursivo.

Maioli (2002) concluye que para garantizar si una figura representa o no, un objeto geométrico, se debe tomar en cuenta la definición que ha sido considerada para el objeto en estudio. Es por ello que un paralelogramo puede ser un trapecio o no, dependiendo de la definición que se le asigne al trapecio. También menciona que las bases del trapecio no necesitan ser paralelos al plano horizontal, o que el trapecio este en posición horizontal, como se suele trabajar en las escuelas.

La autora, afirma que, algunos docentes realizan conjeturas sobre las propiedades del trapecio a través de mediciones de los ángulos, afirmando que no necesitan demostrar, que a partir de la medida de los ángulos podrían construir los diferentes trapecios.

Esta investigación nos proporciona información acerca de la problemática que se presenta en el estudio de los cuadriláteros y los trapecios como parte de ellos y; las dificultades que presentan tanto los profesores como los estudiantes para realizar la representación figural del trapecio que es nuestro objeto de estudio.

Además nos indica lo importante que es la definición que se utiliza cuando trabajamos con el trapecio y nos muestran indicios de cómo los docentes realizan conjeturas sobre las propiedades del trapecio, son informaciones relevantes que tomaremos en cuenta en nuestra investigación.

Como nuestro interés es que los estudiantes movilicen nociones del trapecio y conjeturen la propiedad de la base media a partir de una secuencia didáctica, consideramos que desde la perspectiva de nuestra investigación basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica también vamos a analizar como ellos realizan estas acciones y hacen tratamientos en el registro figural.

1.2 El Geogebra

El software Geogebra es una herramienta que permite realizar observaciones y manipular la representación de los objetos matemáticos mediante el uso de la propiedad de “arrastre”.

Así mismo Corrales (2011) señala que el Geogebra es un programa útil para explorar propiedades y con posibilidades de diferentes procesos para construir una misma representación figural de un objeto matemático, así como también sugerir contraejemplos para verificar la falsedad de algunas proposiciones, la posibilidad de controlar la validez del procedimiento, armar conjeturas desde la exploración dinámica y otras que se han registrado durante los diferentes momentos de acción con los estudiantes. (p.178)

Además este software es de libre acceso y no requiere de la conexión a internet, de este modo, los estudiantes tienen la posibilidad de acceder a ello.

La versión que utilizaremos en nuestro trabajo de investigación es el Geogebra 5.0. Las ventanas que muestran esta versión son las siguientes (ver figura 1).

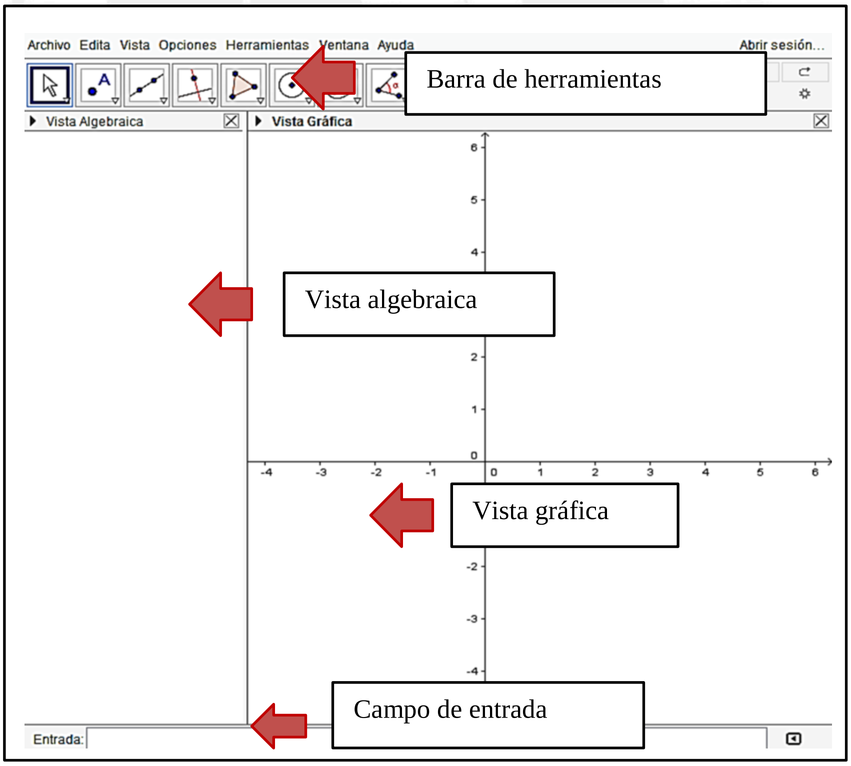


Figura 1. Ventanas de la versión del Geogebra 5.0

En el desarrollo de la secuencia didáctica que estará conformada por actividades los estudiantes harán uso de la vista gráfica, porque realizarán construcciones geométricas y harán modificaciones de forma rápida y dinámica. Se puede acceder a la vista gráfica desde el menú Apariencias y luego se selecciona la opción Geometría (ver figura 2).

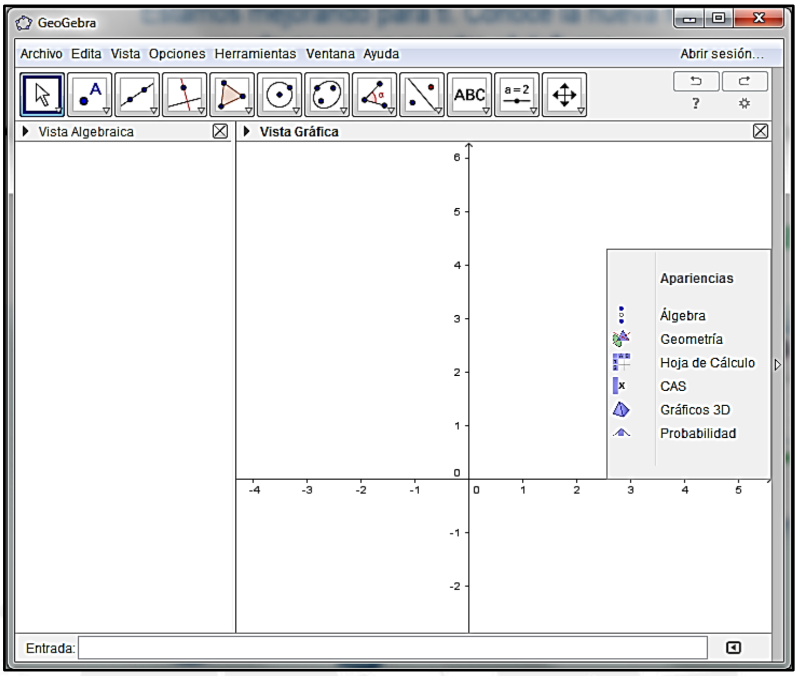
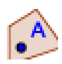
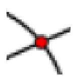
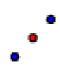
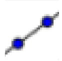
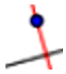
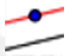
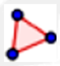
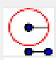
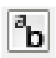


Figura 2. Apariencia Geometría

De acuerdo a las construcciones que realizarán los estudiantes en nuestra investigación, hemos seleccionado las siguientes herramientas (ver tabla 1). Para elaborar la tabla de herramientas hemos tomado como base a García (2014) y Gómez (2015).

Tabla 1. Herramientas del software Geogebra 5.0

Herramienta	Iconos	Construcción
Elige y mueve		Permite seleccionar y trasladar objetos, incluso varios a la vez presionando la tecla de Control.
Nuevo punto		Crea un punto en el plano.
Punto en objeto		Crea un punto dentro del objeto.
Punto de intersección		Selecciona dos objetos, para crear todos los puntos de intersección.
Medio o centro		Marca dos puntos y se traza un punto que equidista y es colineal a los dos puntos.

Recta		Ubica dos puntos y se traza la recta que pasa por los dos puntos.
Segmento		Elige dos puntos extremos y queda definido un segmento.
Recta perpendicular		Selecciona una recta (semirrecta o segmento) y un punto, donde quedará definida una recta que pase por el punto y perpendicular a la primera recta.
Rectas paralelas		Selecciona una recta y un punto, quedará definida una recta paralela a la primera recta.
Polígono		Construye polígono marcando como mínimo tres puntos, se inicia en el primer punto y termina en el mismo punto donde se inició.
Compás		Selecciona un segmento o puntos extremos que serán el radio de la circunferencia, luego se fija en un punto que será su centro.
Longitud de medida		Selecciona dos puntos extremos o un segmento para determinar la medida de longitud.
Ángulo		Selecciona tres puntos (lateral, vértice, lateral) o dos rectas para determinar su medida.
Renombrar		Clica sobre el objeto matemático (punto, recta, ángulo, etc.), con el botón derecho para asignarle un nombre.

Fuente: García (2014, p.13) y Gómez (2015, p. 16)

Estas herramientas permitirán la construcción y tratamiento de nuestro objeto matemático trapecio en el desarrollo de las actividades de nuestra investigación.

En base a los antecedentes presentados anteriormente, pasamos a justificar nuestra investigación.

1.3 Justificación de la investigación

En las diversas investigaciones como la de Maguiña (2013), Escudero y Carrillo (2014), Morales y Maje (2011) y Maioli (2002) nos muestran que existen problemas en la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático trapecio.

Así mismo, en nuestra labor docente hemos observado problemas que presentan los estudiantes de 4º año de secundaria (14 a 15 años) en cuanto al estudio del objeto matemático cuadriláteros, incluyendo al trapecio. En general, observamos que no relacionan conocimientos teóricos previos como noción de rectas paralelas, rectas perpendiculares y líneas notables, propiedades de rectas paralelas cortadas por una secante, propiedades de los trapecios y el teorema de base media que es nuestro objeto de estudio. Pensamos que esto se debe a que los temas de geometría no han sido tratados a profundidad.

También al realizar una revisión de los temas desarrollados en los textos de matemática, los cuales están relacionados con los conocimientos y capacidades a desarrollar de acuerdo al Diseño Curricular Nacional (DCN), y que son proporcionados por el Ministerio de Educación del Perú como guía de trabajo del docente y texto de consulta para el estudiante en el V y VI ciclo de educación, observamos lo siguiente (ver tabla 2).

Tabla 2. Organización de Capacidades y Conocimientos

Ciclo	Grado	Capacidades	Conocimientos
V	5º	- Clasificar cuadriláteros de acuerdo a sus ángulos y lados.	**Geometría: Polígonos regulares, triángulos y cuadriláteros** Los cuadriláteros 1. Paralelogramos **2. Trapecios** (rectángulo, isósceles, escaleno).
	6º	- Resuelve problemas que implican relaciones entre áreas, perímetros de figuras geométricas. - Utiliza propiedades de cada figura geométrica que ayuden	**¿Para qué sirven las figuras geométricas?** - Resolvemos problemas sobre áreas y perímetros de polígonos - Aplicamos una fórmula para calcular el área del rectángulo,

		al cálculo de la medida del perímetro y área.	cuadrado, triángulo, paralelogramo, **trapecio** y rombo.
VI	**1º**	- Utiliza propiedades de cada figura geométrica para crear estrategias que ayuden al cálculo de la medida de sus ángulos, perímetro y área.	**Polígonos** Clasificación de polígonos. Perímetros y áreas de figuras planas. Área del cuadrado, rectángulo y el triángulo. Área del romboide. **Área del trapecio.**
	2º	- Resuelve problemas que implican el cálculo de reas y perímetros de figuras planas.	**Áreas y perímetros de figuras planas.** Área: cuadrado, rectángulo, triángulo, romboide, **trapecio y** rombo.
VII	**3º**	- Resuelve problemas geométricos que involucran el cálculo de áreas de regiones poligonales, así como la relación entre área y el perímetro.	**Área de regiones convexas y no convexas.** Área de cuadriláteros Rectángulo Romboide Cuadrado Rombo **Trapecio.**

De acuerdo a lo que observamos en la tabla 2, que corresponden a los conocimientos desarrollados en el V y VI ciclo, no se realiza una exploración de las propiedades del trapecio, incluido la propiedad de la base media del trapecio. Así mismo en Perú, el Diseño Curricular Nacional del Ministerio de Educación (2009) y en los Mapas de Progreso (2013), observamos que con respecto al objeto matemático trapecio solo se propone desarrollar conocimientos acerca del área y el perímetro.

Por lo tanto, consideramos importante el estudio de las propiedades del trapecio y en especial la propiedad de la base media, ya que nos permite realizar conexiones con temas importantes como, triángulos, semejanza, congruencia y el teorema de Thales. Pensamos que la ausencia de temas como este, en el currículo escolar es uno de los motivos por el que creemos que no se hace el abordaje de la geometría de manera adecuada.

Es por ello que los resultados obtenidos en la última evaluación nacional, realizada en el 2004 por la Unidad de la Medición de la Calidad Educativa (UMC) del Ministerio de Educación en el Perú con estudiantes del nivel secundario, evidencian que sólo el 6,0% de los estudiantes que estaban finalizando el tercer año de secundaria se encontraban en el nivel de suficiente en el componente de geometría y medición, que es el nivel esperado. Esto significa que el 94% de estudiantes tendrían serias dificultades en ampliar sus conocimientos y desarrollar sus capacidades en el área de matemática.

Por otro lado, *la National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM, 2000) recomienda el uso de la tecnología en la enseñanza de la matemática, como por ejemplo los ambientes de geometría dinámica, los cuales permiten abordar los temas de geometría y otros aspectos de la matemática, a través de la experimentación y la manipulación de la representación de diferentes objetos matemáticos, permite analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones, desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas, utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Además, existen otras investigaciones como la de Reid y Etcheverry (2014) y Ramírez (2014) que nos brindan información acerca del software Geogebra y la importancia que tiene en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Por lo tanto, el presente trabajo tiene como finalidad que los estudiantes, a partir de una secuencia didáctica, movilicen la noción de trapecio y conjeturen la propiedad de la base media del trapecio. Consideramos importante que el estudiante identifique las otras propiedades del trapecio porque que a partir de ellas podrá conjeturar la propiedad de la base media, y esto permitirá que el estudiante movilice conocimientos sobre otros objetos matemáticos como congruencia, semejanza de triángulos y el teorema de Thales.

Pensamos que el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta nos permitirá hacer un análisis de como los estudiantes de 4º año de secundaria de (14 a 15 años de edad) se apropian de los conocimientos referentes a los trapecios al realizar los diferentes cambios de registros de representación semiótica, en la resolución de la secuencia didáctica. Así mismo haremos uso del software Geogebra el cual facilitará al estudiante plantear conjeturas y describir propiedades del trapecio.

Para ello, diseñaremos una secuencia didáctica que estarán compuestas por tres actividades, los cuales permitirán a los estudiantes consolidar los aprendizajes relacionados con las propiedades del trapecio, mediante el uso del software Geogebra. Estas actividades estarán orientadas a que los estudiantes realicen tratamientos y conversiones entre diferentes Registros de Representación Semiótica. Además de los tratamientos y conversiones se desea que las actividades enfaticen la articulación entre las diferentes aprehensiones. Es por este motivo que nuestra investigación tomará como referencial teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

A continuación presentamos nuestra pregunta de investigación y los objetivos.

Pregunta de la investigación

¿Cómo estudiantes de 4º año de secundaria elaboran conjeturas acerca de la propiedad de la base media del trapecio cuando articulan las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica con el uso del Geogebra?

Objetivo general

Analizar como estudiantes de 4º año de secundaria elaboran conjeturas acerca de la propiedad de la base media del trapecio cuando articulan las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica con el uso del Geogebra.

Objetivos específicos:

- Identificar los tratamientos y conversiones en la secuencia didáctica en el registro de lengua natural, registro figural y viceversa que realizan los estudiantes al desarrollar una secuencia didáctica que involucra la noción del trapecio y sus propiedades.

- Observar como los estudiantes construyen la articulación entre las aprehensiones secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva a partir del registro figural al desarrollar una secuencia de actividades que involucran la propiedad de la base media del trapecio.
- Identificar el tipo de conjetura que realizan los estudiantes al desarrollar las actividades que involucran la propiedad de la base media.

En el siguiente capítulo presentamos algunos de los aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

CAPÍTULOII: TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

En esta parte presentamos algunos aspectos del marco teórico de nuestra investigación que tomará como base la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

2.1 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

El presente trabajo de investigación toma como base fundamental a la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval (1995).

El autor señala que;

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, formula algebraica, grafico, figura geométrica…) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas, pues, estarían subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación. (Duval, 2004a, p.14)

Asimismo, el autor afirma que en la enseñanza matemática, las representaciones semióticas no solo son necesarias para efectuar una comunicación, sino que también son importantes para el desarrollo de la actividad matemática misma.

El autor señala que las representaciones semióticas son relativas a un sistema particular de signos; son, a la vez, representaciones que permiten realizar un análisis del objeto, a través de percepciones de estímulos. Estas representaciones pueden ser figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, etc.

Registros de Representación Semiótica

Para Duval (2004a), un sistema semiótico, al cumplir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la Semiósis (formación, tratamiento y conversión), pasa a ser un Registro de Representación Semiótica. Así mismo, menciona que “los distintos registros de representación se diferencian no solo por la naturaleza de sus significantes, sino también por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de dimensiones en que puede efectuarse esta asociación” (p.35). Establece que ciertas actividades cognitivas como la conceptualización y la resolución de problemas, requieren del uso de sistemas de expresión y de representación, que son distintos a los del lenguaje natural tales como gráficos, letras, números, etc.

Duval (2004b) clasifica los Registros de Representación Semiótica, en registros discursivos que se presentan en forma verbal y algebraica y los registros no discursivos que se presentan en forma gráfica y figural (ver figura 3).

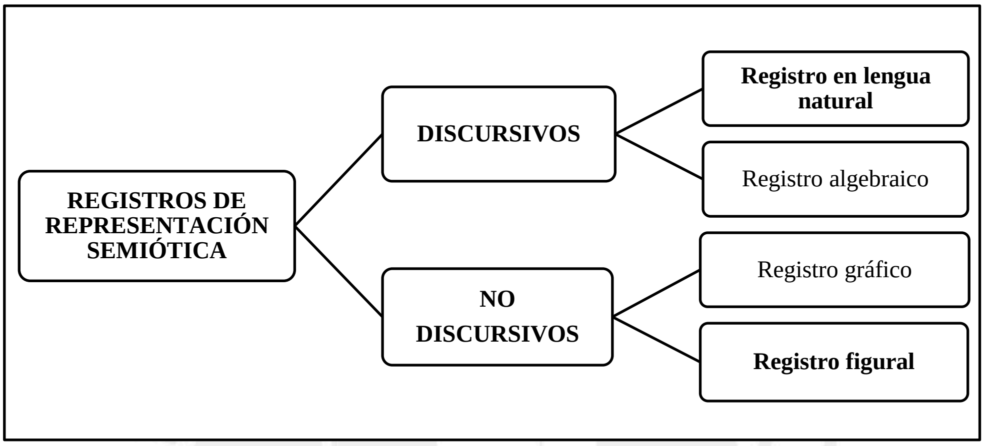


Figura 3. Clasificación de Registros de Representación Semiótica
Fuente: Adaptado de Duval (2004b, p.52)

En el esquema anterior, mostramos la clasificación de los principales registros de Representación Semiótica. En nuestra investigación, trataremos los registros discursivos (registro de la lengua natural) y el registro no discursivo (registro figural), ya que los estudiantes al realizar tratamientos y conversiones, necesariamente deben transitar por los registros antes mencionados.

Tipos de Registros de Representación Semiótica

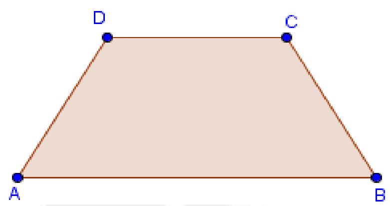
Registro en lengua natural: Es el acto espontaneo de comunicar en forma ordinaria y textual para enunciar un teorema, una definición, describir, explicar, proponer, designar y argumentar sobre el objeto matemático en estudio, como por ejemplo: cuando realizamos la definición de un trapecio o describimos una de sus características.

Registro algebraico: Presentado en forma de expresión algebraica. En este caso se hará uso de símbolos, letras que señalan características particulares del objeto en estudio, las cuales permitirán realizar generalizaciones y modelizaciones.

Registro figural: es un tipo de registro no discursivo, representan formas, estructuras y organización entre ellas; es decir está estrechamente relacionada con la percepción visual y de un discurso teórico y simbólico.

A continuación mostramos, en el cuadro 1, dos de los registros de representación semiótica del trapecio.

Cuadro 1. Registros de Representación Semiótica

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA	
Registro en lengua natural	**Registro figural**
El trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos llamados bases y dos lados no paralelos.	

Fuente: Adaptado de Maguiña (2013, p. 36)

Duval (2012) afirma que el tránsito entre los diferentes Registros de Representación Semiótica favorecen las actividades cognitivas. Es por esta razón que los estudiantes deben transitar por lo menos en dos tipos de representación para afirmar que han adquirido el conocimiento suficiente sobre el objeto matemático. También considera que estos tipos de Registro de Representación Semiótica se deben dar en forma espontánea y que se deben distinguir los objetos de sus respectivas representaciones.

Por otro lado, Duval (2004b) señala que en la actividad matemática se realiza dos tipos de transformaciones: el tratamiento y la conversión (ver figura 4).

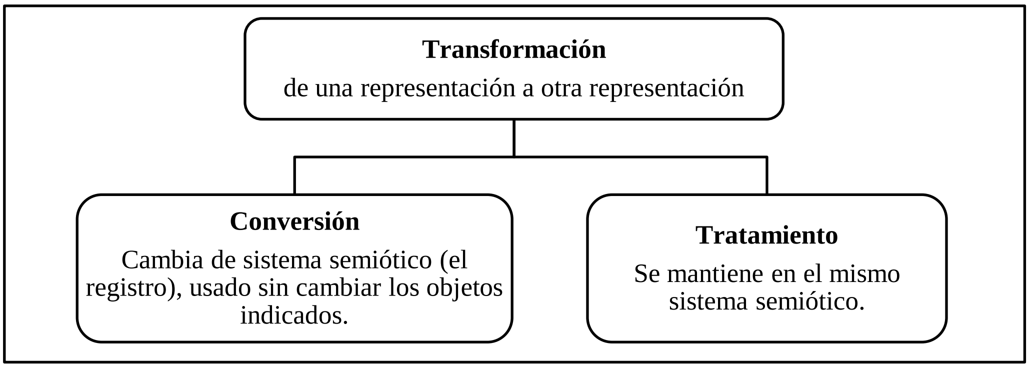


Figura 4. Transformación de Representación Semiótica.
Fuente: Adaptado de Duval (2004b, p.54)

Duval (2004a) afirma que ambas transformaciones se caracterizan por:

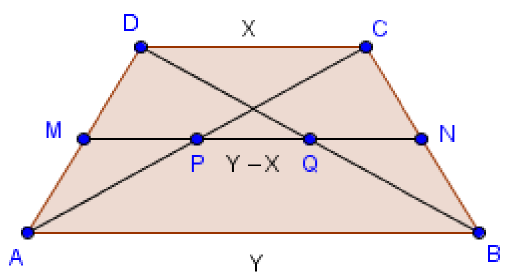
- **El Tratamiento:** "es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas" (Duval, 2004a, p.44).

El autor señala que esta actividad cognoscitiva es una transformación interna de un registro como por ejemplo en geometría realizamos tratamientos en la figura (trazos auxiliares) para identificar propiedades. En la investigación, los estudiantes realizarán tratamientos en el registro de lengua natural y en el registro figural cuando desarrollen las actividades dadas en un determinado registro.

- **La Conversión:** "es la transformación de representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, situación o de la misma información en otro registro" (Duval, 2004a, p.46). El autor afirma que la conversión de una representación es la transformación de esta representación en una interpretación que conserva toda o parte del contenido inicial. En este caso, los estudiantes realizaran conversiones cuando realicen transformaciones de un registro a otro; como por ejemplo, del registro figural al registro simbólico o, de forma inversa, del registro simbólico al registro figural.

A continuación mostramos en el cuadro 2, ejemplos de conversión entre los registros de representación semiótica con el objeto matemático trapecio.

Cuadro 2. Conversión de los registros de representación

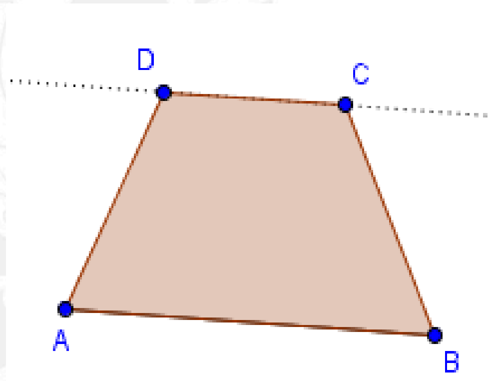
Registro en lengua natural	Registro figural
En un trapecio ABCD, la diferencia entre la longitud de los segmentos AB y DC es el segmento que une los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.	

Fuente: Adaptado de Alva (2007, p.129)

Por otro lado, Duval (1994) afirma que en la enseñanza de la geometría se debe tener en cuenta las diferentes aprehensiones a las cuales una figura da a lugar. Para ello, se distingue cuatro aprehensiones cognitivas en la enseñanza de un objeto geométrico:

Aprehensión Secuencial: es la aprehensión que corresponde al orden de la construcción de una figura geométrica. Es decir, los pasos que se debe seguir para construir dicha figura como mostramos en el cuadro 3, en ese mismo sentido. Duval (1994) afirma que "este orden no solo dependerá de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las limitaciones técnicas de los instrumentos" (p. 126, traducción nuestra).

Cuadro 3. Aprehensión secuencial.

Secuencia de pasos para construir un trapecio	Representación figural del trapecio
Paso 1: Trazar un segmento AB. **Paso 2:** Ubicar un punto C exterior al segmento AB. **Paso 3:** Trazar una recta paralela al segmento AB que pase por C. **Paso 4:** Luego ubicar un punto D (con la herramienta punto en objeto) en la recta. De esta forma, nos aseguramos que el segmento CD será siempre paralelo al segmento AB. **Paso 5:** Seleccionar la opción Polígono y marcar el trapecio ABCD.	

Aprehensión perceptiva: De acuerdo con Duval (1995) es la aprehensión que da lugar a la observación de la figura en forma automática, e independiente del enunciado; está sujeta a leyes gestálticas de organización y principalmente a la ley de cierre. El tratamiento cognitivo es inmediato. Este tipo de aprehensión permite identificar y reconocer de forma inmediata un objeto matemático ya sea en el plano o en el espacio.

A continuación, en la figura 5, mostramos un ejemplo de la aprehensión perceptiva del trapecio.

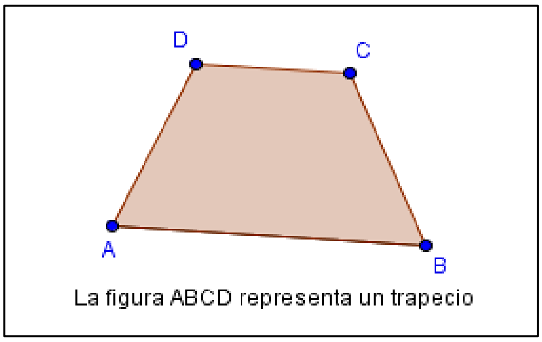
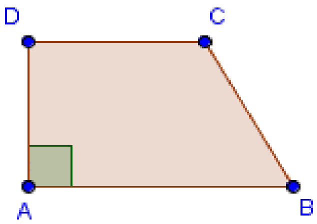


Figura 5. Aprehensión perceptiva

Aprehensión Discursiva: De acuerdo con Duval (1995), **e**sta aprehensión está sujeta a las propiedades relacionadas a una hipótesis, por lo tanto la figura en este caso es parte del discurso teórico. También, señala que este tipo de aprehensión de una figura geométrica está íntimamente relacionada a una doble referencia: por un lado, a una red semántica de objetos matemáticos y, por otro lado, a una axiomática local. En esta aprehensión se asocia, a una figura, una afirmación matemática (definiciones, teoremas, axiomas, etc.). El autor menciona que "de otra parte, la aprehensión discursiva, da cuenta de la relación indisoluble entre demostración en geometría y las figuras" (Duval, 1995, p.146, traducción nuestra).

En el cuadro 4, mostramos un ejemplo de la aprehensión discursiva del trapecio.

Cuadro 4. Aprehensión discursiva

Objeto matemático representado en un plano	**Aprehensión discursiva de la figura**
 Leyenda: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	$\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{CD}}$ son bases del trapecio $\overline{\mathrm{AD}}$ es la altura del trapecio $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ $\overline{\mathrm{AD}} \nparallel \overline{\mathrm{BC}}$ $\mathrm{m}\measuredangle\mathrm{BAD} = \mathrm{m}\measuredangle\mathrm{ADC} = 90°$

Aprehensión Operatoria: Es "una aprehensión centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las organizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen" (Duval, 2004a, p.162).

El autor, señala que es a partir de las modificaciones que se realizan en una figura en el cual se añaden o quitan elementos mediante la aplicación de una operación cognitiva determinada, es cuando se generan ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos que se deben realizar para resolver un problema. También, menciona que, la aprehensión operativa depende de las distintas formas de modificar la figura, estas pueden ser de los siguientes tipos:

Mereológicas: También llamada operación de reconfiguración, es la operación de mayor complejidad e interés en el aprendizaje de la geometría: "es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente" (Duval, 2004a, p.165, traducción nuestra).

Óptica: De acuerdo con Duval (1995) señala que este tipo de aprehensión operatoria, también es llamada operación de superponibilidad, es cuando se agranda, o se disminuye las dimensiones, o se deforma una figura inicial.

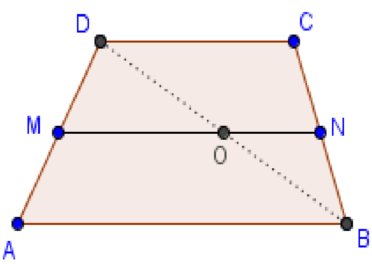
Posición: De acuerdo con Duval (1995), menciona que este tipo de aprehensión operatoria también es llamada operación de rotación y traslación, es cuando se cambia de posición o la orientación de una figura de partida como las sub-figuras con respecto al plano en la que se representan.

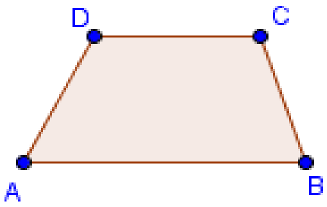
El autor menciona que cada una de estas modificaciones se puede realizar mentalmente o físicamente por medio de operaciones cognitivas.

> Estas operaciones constituyen un procesamiento figural específico que proporciona cifras con una función heurística. En un problema de geometría, una de estas operaciones pueden resaltar una modificación de figuras que muestran la solución o que sugieren los pasos principales de una prueba o demostración (Duval, 1995, p.147, traducción nuestra).

A continuación mostramos en el cuadro 5 un ejemplo de aprehensión operatoria.

Cuadro 5. Aprehensión operatoria

Pruebe que:	Aprehensión Operatoria
La longitud del segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es igual a la semisuma de las longitudes de las dos bases.	

 Leyenda: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ Observación: este enunciado corresponde al Teorema de base media del trapecio.	Sea $\overline{BD} \cap \overline{MN} = \{O\}$ $\overline{\mathrm{OM}} \parallel \overline{AB}$ y $\mathrm{OM} = \frac{\overline{AB}}{2}$ $\overline{\mathrm{ON}} \parallel \overline{\mathrm{CD}}$ y $\mathrm{ON} = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{2}$ Luego $\mathrm{MN} = \mathrm{MO} + \mathrm{ON}$ $\mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{CD}}{2}$ $\mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{CD}}{2}$

Por lo expuesto anteriormente, consideramos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como marco teórico de nuestra investigación, ya que, en la resolución de la secuencia de actividades en la parte experimental es indispensable realizar tratamientos y conversiones entre los diferentes registros; así como también las aprehensiones en el registro figural.

2.2 Metodología de investigación: aspectos de la Ingeniería Didáctica.

La presente investigación es cualitativa. Para esta afirmación, nos basamos en Hernández, Fernández y Baptista (2010).

Los autores señalan que la investigación cualitativa “utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación” (Hernández, et a 2010, p. 7).

Como nuestra investigación es cualitativa, consideramos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

Aspectos de la Ingeniería Didáctica

Artigue (1995) señala que la noción de Ingeniería Didáctica surge a comienzos de los años ochenta dentro de la didáctica de la matemática. Consiste en una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio. Se caracteriza por ser experimental y basada en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, elaboración, observación y análisis de secuencias de enseñanzas (pp. 33-36).

Es por ello que, consideramos relevante trabajar con algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica ya que diseñaremos una secuencia de actividades que serán aplicadas a los estudiantes. Para ello, utilizaremos instrumentos que nos permitirán recoger datos para luego ser analizados.

A seguir, presentamos las fases de la ingeniería didáctica de acuerdo con Artigue (1995) y explicaremos en que consiste cada una de ellas.

Fase 1: Análisis preliminar

El análisis preliminar, en palabras de Artigue (1995), se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación, en el cual se debe tener presente las siguientes dimensiones: epistémica, cognitiva y didáctica.

En nuestra investigación, en la dimensión epistemológica, desarrollamos una descripción formal de nuestro objeto matemático trapecio, esto se encuentra presente en el capítulo trapecio. En la dimensión cognitiva, presentamos investigaciones que nos señalan cuales son los problemas de aprendizaje y errores cometidos por los estudiantes en torno al objeto matemático trapecio, los cuales se encuentran presentes en nuestros antecedentes en el capítulo I. En la dimensión didáctica, analizaremos el texto de cuarto año de secundaria utilizado por estudiantes de 14 y 15 años de edad en el Perú, este análisis se presentará en el capítulo III de nuestra investigación.

Fase 2: La concepción y el análisis a priori

Artigue (1995) señala que, en esta fase, el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables. La investigadora, distingue dos tipos de variables: las *macro-didácticas*, concernientes a la organización global de la ingeniería, y las *micro-didácticas,* concernientes a la organización local de una secuencia o de una fase.

En nuestra investigación presentaremos la organización y gestión del medio, como por ejemplo la identificación de los sujetos de investigación, el número de estudiantes, la secuencia didáctica, el tiempo de aplicación de las actividades y el uso del software Geogebra.

Con respecto al análisis a priori la investigadora menciona que este comprende una parte descriptiva y una predictiva los cuales se centran en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los estudiantes.

Como en nuestra investigación hemos diseñado una secuencia didáctica mediadas por el Geogebra, que consta de tres actividades que corresponden al contenido matemático trapecio, el análisis a priori que realizaremos se basará en un conjunto de hipótesis sobre el comportamiento y acciones que harán los estudiantes en relación a los registros de representación, la conversión, el tratamiento en el registro en lengua natural y figural, y la coordinación entre las aprehensiones desde la perspectiva de Duval.

La validación de estas hipótesis estará sujeta a la confrontación que se llevará a cabo en la cuarta fase, entre los análisis a priori y los análisis a posteriori de las actividades propuestas.

Fase 3: Experimentación

Según Artigue (1995), es la fase donde se pone en funcionamiento lo planificado. Es el momento en que tanto el investigador como los sujetos de investigación interactúan y se aplican los instrumentos diseñados.

En nuestra investigación, esta fase se inicia cuando el profesor investigador entra en contacto con los estudiantes y aplica las actividades diseñadas en la fase anterior que le permiten recolectar los datos.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

Según Artigue (1995), se basa en el análisis de los datos recogidos a lo largo de la experimentación, de las observaciones realizadas en la aplicación de la secuencia de actividades, como también las producciones realizadas por los estudiantes.

En este estudio realizaremos el análisis a posteriori de las tres actividades aplicadas a los estudiantes en la fase anterior. Para la validación de la investigación, contrastaremos el análisis a priori y a posteriori de las tres actividades.

Recolección de la información

Para recolectar la información en nuestra investigación, utilizaremos fichas de actividades y grabaciones. A continuación, presentamos la descripción de cada una de ellas.

Fichas de actividades: Para fines de nuestra investigación, consideramos tres actividades. La primera actividad, denominada "Reconociendo nuestros saberes previos", está compuesta de dos preguntas: la primera es una adaptación de la actividad que se realizó en el Taller *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos* organizado por la colaboración PUCP – SP e PUCP – PERÚ, el cual estaba orientado a que los profesores movilicen propiedades de los cuadriláteros y nosotros la adaptamos de tal forma que los estudiantes movilicen específicamente las propiedades del trapecio (escaleno, recto e isósceles), y la segunda pregunta es una adaptación de la tercera actividad propuesta en la tesis de Maioli (2002), para fines de nuestra investigación nosotros lo adaptamos para hacer la conversión de registros en lengua natural al registro figural del trapecio y viceversa; la segunda actividad, denominada "Propiedad de los trapecios", está compuesta de tres preguntas, y la tercera actividad, denominada "Trabajemos con las bases del trapecio", está compuesta de cuatro preguntas. Estas actividades están relacionadas con el aprendizaje de las propiedades del trapecio y el teorema de la base media. Cada actividad ha tenido una duración de dos horas pedagógicas (90 minutos).

Grabaciones: Los archivos trabajados por los estudiantes con el Geogebra fueron grabados en una carpeta para luego analizar las construcciones realizadas por ellos según las indicaciones establecidas en las actividades.

En el siguiente capítulo, presentamos nuestro objeto de estudio Trapecio, desde dos dimensiones: epistemológico y didáctico.

CAPÍTULO III: TRAPECIO

En este capítulo presentamos el estudio del trapecio, desde dos dimensiones: Epistemológico, en el que se introduce el aspecto formal del objeto matemático trapecio y didáctico correspondiente a la enseñanza del objeto matemático trapecio. Para el desarrollo de la primera dimensión, tomamos como referente los aportes sobre las definiciones del trapecio de Verástegui (2012), la clasificación del trapecio de Alva (2007) y las propiedades y sus respectivas demostraciones de Landaverde (1977), fundamentales para nuestra investigación. Así mismo para el desarrollo de la segunda dimensión realizaremos un análisis del texto de cuarto año de secundaria utilizado en la enseñanza del trapecio.

3.1 Estudio del trapecio

Inicialmente, introduciremos la noción de cuadrilátero y luego la noción de trapecio, que es el objeto matemático de nuestra investigación. Realizamos este estudio dado que el trapecio pertenece al grupo de los cuadriláteros.

De acuerdo con Alva (2007), los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos y no paralelogramos (ver figura 6).

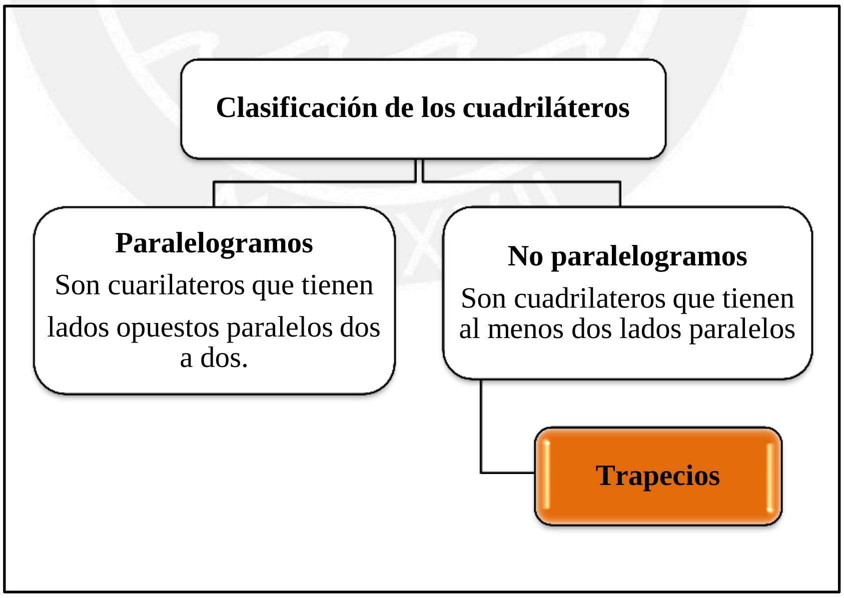


Figura 6. Clasificación de cuadriláteros
Fuente: Adaptado de Alva (2007, p.119)

Como se muestra en la figura 6, nuestro objeto de estudio trapecio se encuentra dentro del grupo de los no paralelogramos.

Para fines de nuestra investigación, definiremos primero que es un paralelogramo, para diferenciarlo del trapecio.

Para Verástegui (2012), un cuadrilátero es un paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos dos a dos, como se ve en la figura 7.

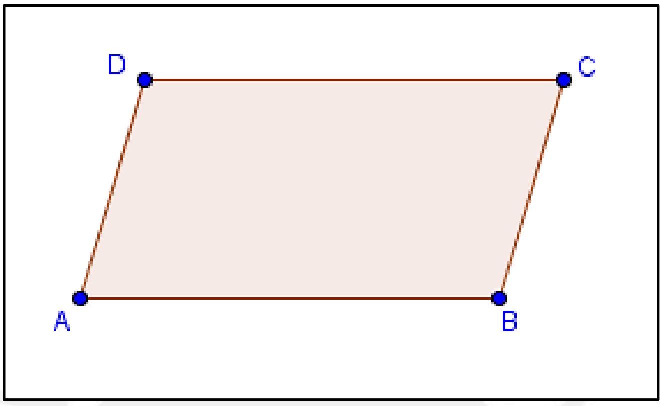


Figura 7. Paralelogramo
Fuente: Adaptado de Verástegui (2012, p.58)

Así mismo, Verástegui (2012) define al trapecio como un cuadrilátero en el que dos y solamente dos de sus lados opuestos son paralelos, como se puede ver en la figura 8.

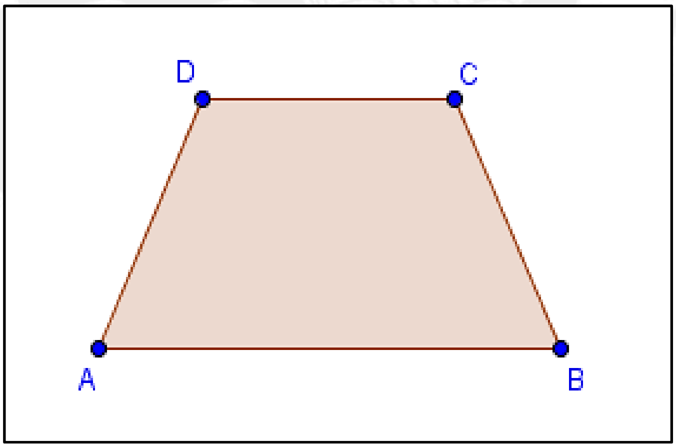


Figura 8. Trapecio
Fuente: Adaptado de Verástegui (2012, p.58)

En cuanto a los elementos del trapecio, Alva (2007) considera aquellos que se muestran en la figura 9.

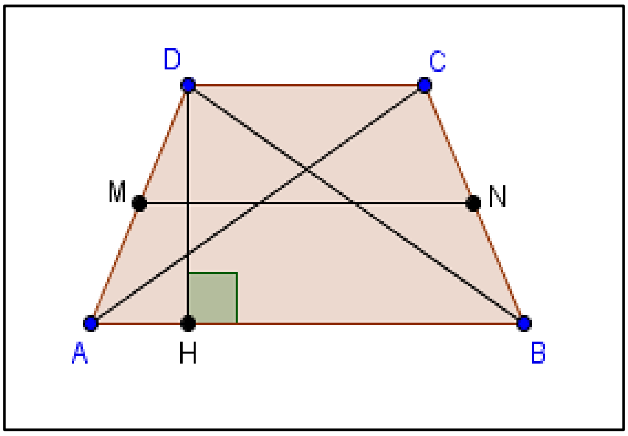


Figura 9. Trapecio

Fuente: Adaptado de Alva (2007, p.119)

Los lados paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se llaman base.
El segmento perpendicular $\overline{DH}$ es la altura del trapecio ABCD.
El segmento que une los puntos medios M y N de los lados no paralelos del trapecio se llama mediana.
El segmento que une los vértices $\overline{\text{AC}}$ y $\overline{\text{BD}}$ son diagonales del trapecio.

Así mismo, Alva (2007) clasifica los trapecios de la siguiente forma:

a. **Trapecio escaleno:** es aquel trapecio cuyos lados no paralelos tienen diferente longitud (ver figura 10).

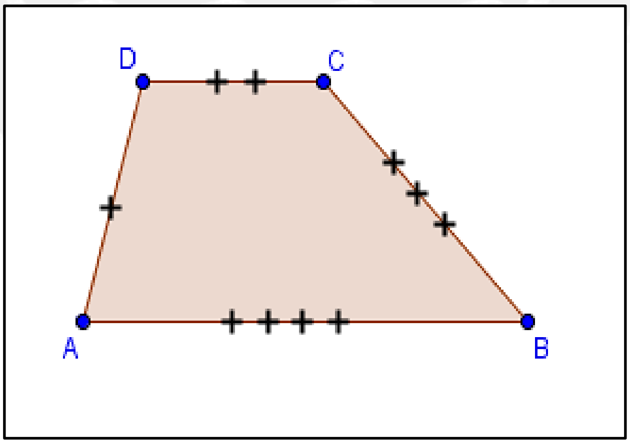


Figura 10. Trapecio escaleno
Fuente: Adaptado de Alva (2007, p.119)

b) **Trapecio isósceles:** Sus lados no paralelos son congruentes, como mostramos en la figura 11.

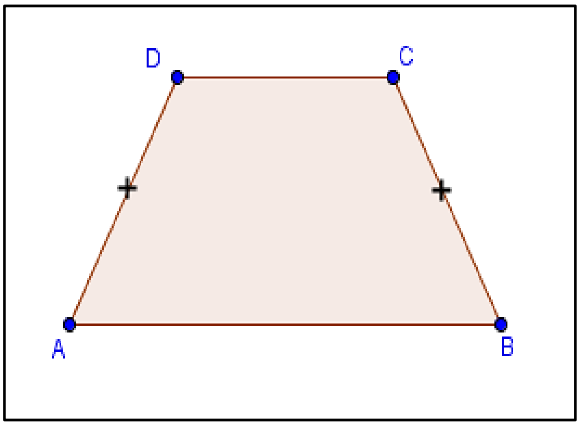


Figura 11. Trapecio isósceles
Fuente: Adaptado de Alva (2007, p.119)

c) **Trapecio rectángulo:** Uno de sus lados no paralelos es perpendicular a las bases, como se ve en la figura 12.

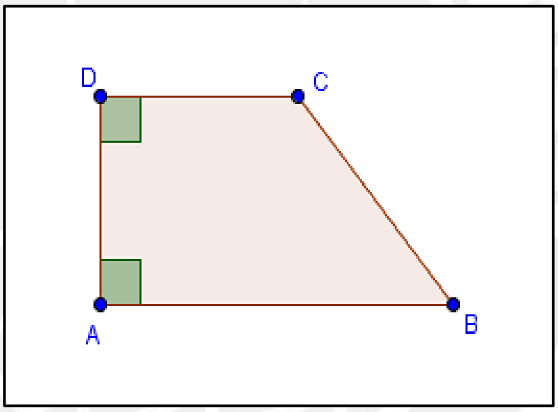


Figura 12. Trapecio rectángulo
Fuente: Adaptado de Alva (2007, p119)

Finalmente presentamos los teoremas del trapecio y sus respectivas demostraciones de acuerdo con Landaverde (1977).

I. Los ángulos adyacentes a cada uno de los lados no paralelos de un trapecio son suplementarios (ver figura 13).

Hipótesis: El cuadrilátero ABCD es un trapecio.
Tesis: $\measuredangle A + \measuredangle D = 180°$
$\measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

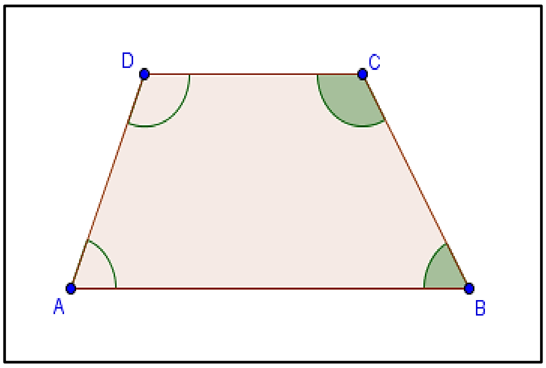


Figura 13. Trapecio
Fuente: Adaptado de Landaverde (1977, p.80)

En efecto:

A + D =180º, por ser colaterales internos.

B + C = 80º, por ser colaterales internos.

II. Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son iguales (ver figura 14)

Hipótesis: ABCD es un trapecio isósceles.

Tesis: $\measuredangle A = \measuredangle B, \measuredangle ADC = \measuredangle BCD$

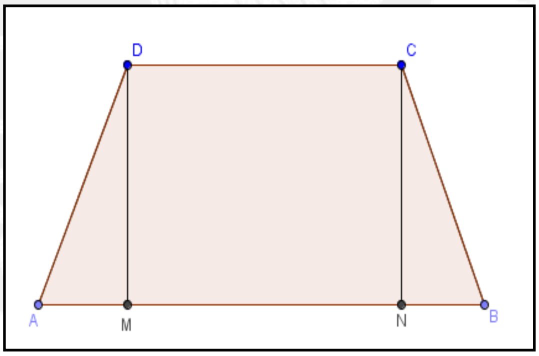


Figura 14. Trapecio isósceles
Fuente: Adaptado de Landaverde (1977, p.81)

Demostración:

Trácense las rectas perpendiculares DM y CN a las bases.

Se tiene: AD = BC,

Por hipótesis; DM = CN, por ser lados opuestos del cuadrilátero MNCD.

Luego, los triángulos AMD y BNC son iguales, por tener la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.

Por tanto:

$\measuredangle$A = $\measuredangle$B, por ser ángulos homólogos de triángulos iguales;

$\measuredangle$ADC = $\measuredangle$BCD, por ser suplementos de los ángulos A y B.

III. Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales (ver figura 15).

Hipótesis: ABCD trapecio isósceles.

Tesis: AC = BD.

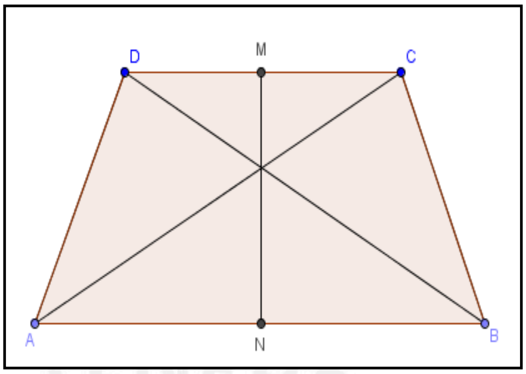


Figura 15. Trapecio isósceles
Fuente: Adaptado de Landaverde (1977, p.81)

Demostración:

Por la propiedad anterior y por definición, se tiene:

$\measuredangle \mathrm{DAB} = \measuredangle \mathrm{ABC}$, por ser ángulos adyacentes a la base AB;

$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$, por hipótesis.

Luego, los triángulos ABD y ABC, son iguales, por tener un ángulo igual formado por los lados respectivamente iguales.

$$\therefore \mathrm{AC} = \mathrm{BD}$$

La mediatriz MN, común a las dos bases del trapecio ABCD (ver figura 15), es el eje de simetría, puesto que divide la figura en dos partes iguales y simétricamente dispuestas.

IV. La base media de un trapecio es paralela a las bases e igual a su semisuma (ver figura 16).

Hipótesis: $\overline{MN}$ es la base media del trapecio ABCD.

Tesis: $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$, $\mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AB+DC}}{2}$

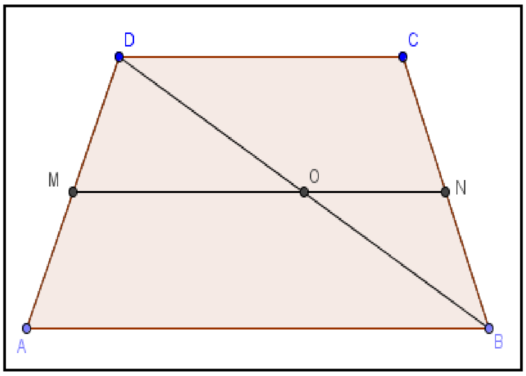


Figura 16. Trapecio
Fuente: Adaptado de Landaverde (1977, p.80)

Demostración:

Trácese la diagonal DB, y únase su punto medio O con los puntos medios M y N de AD y BC.

En el triángulo ABD, la recta OM es // a AB e igual a su mitad.

En el triángulo BCD, la recta ON es // a DC e igual a su mitad.

Luego, ON es // a AB, por ser DC // a AB.

Pero por el punto O solo se puede trazar una paralela a AB; luego, OM y ON forman una sola recta que se confunde con MN.

$$\therefore \mathrm{MN} \parallel \mathrm{AB} \text{ y } \mathrm{DC}.$$

Por otra parte:

$$\mathrm{OM} + \mathrm{ON} = \mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{DC}}{2} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{DC}}{2} = \frac{AB + DC}{2}$$

Este estudio del aspecto del trapecio apoya a nuestra investigación, ya que nos permitirá formalizar las nociones del trapecio y demostrar el teorema de la base media del trapecio nociones que fueron trabajadas en la secuencia didáctica de la investigación.

A continuación, mostraremos como se presenta la noción de trapecio en el libro didáctico proporcionado por el Ministerio de Educación de Perú.

3.2 Enseñanza del trapecio

Para tener una referencia sobre el desarrollo del tema de trapecio en las escuelas públicas, realizamos un estudio del texto Matemática 4° utilizados por los estudiantes de cuarto año de secundaria. Este libro presenta una secuencia para el desarrollo y tratamiento del tema trapecios que se muestra a seguir.

En la figura 17 se aprecia la definición del trapecio y se menciona sus características y clasificaciones, sin antes realizar una actividad que permita que los estudiantes puedan deducir, verificar, analizar y descubrir estos conceptos. Las representaciones del trapecio se presentan en forma convencional; además, podemos apreciar los registros discursivo, simbólico y figural, los cuales nos proporciona informaciones sobre el objeto geométrico.

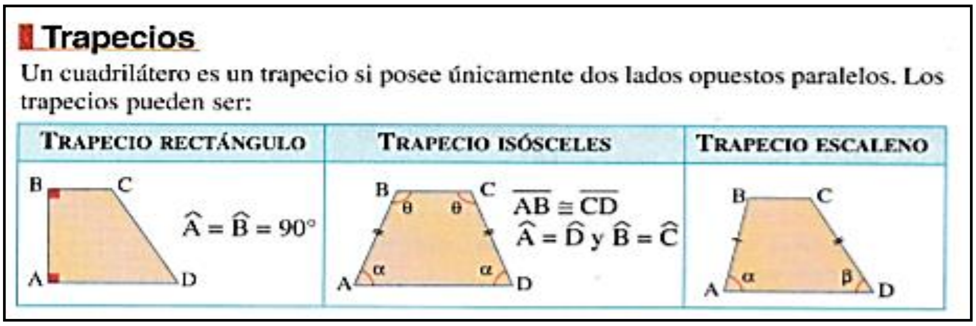


Figura 17. Trapecio
Fuente: Matemática 4° de secundaria (Perú, 2005, p.50)

De la misma forma, el texto presenta las propiedades del trapecio, referentes a su mediana y el segmento generado por la unión de los puntos medios de las diagonales del trapecio (segmento de mediana). Para ello utiliza, los registros verbal, simbólico y figural (ver figura 18).

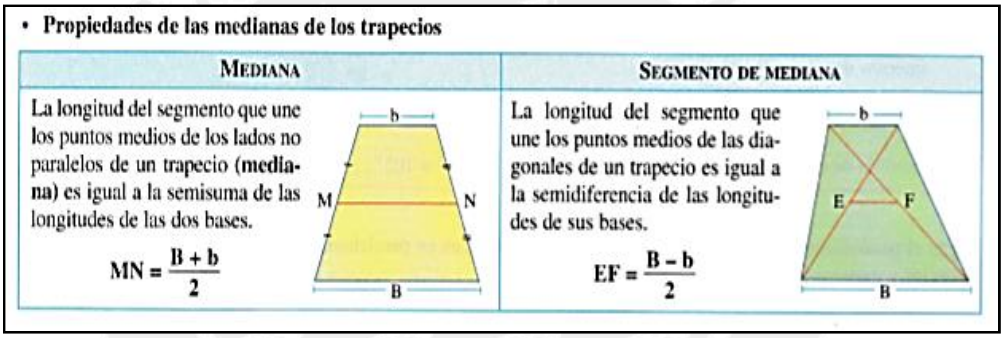


Figura 18. Propiedades del trapecio
Fuente: Matemática 4° de secundaria (Perú, 2005, p.50)

Posterior a esta introducción, presenta un ejemplo donde se debe analizar el problema para luego realizar la representación figural del trapecio de acuerdo a las condiciones del problema. Este ejemplo permite al estudiante reconocer los elementos del trapecio, aplicar la propiedad del segmento de mediana y la propiedad de la base media del trapecio para solucionar el problema (ver figura 19).

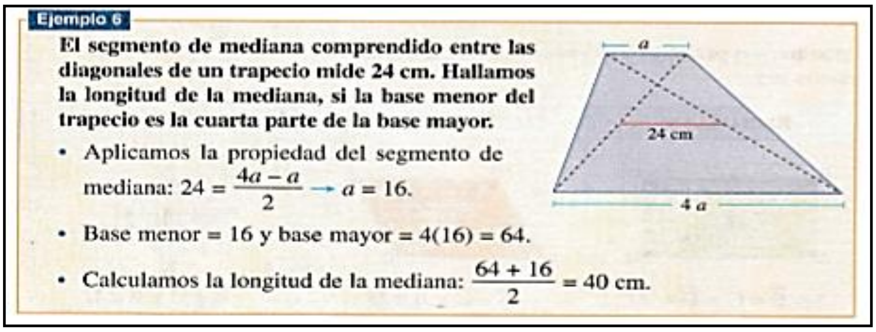
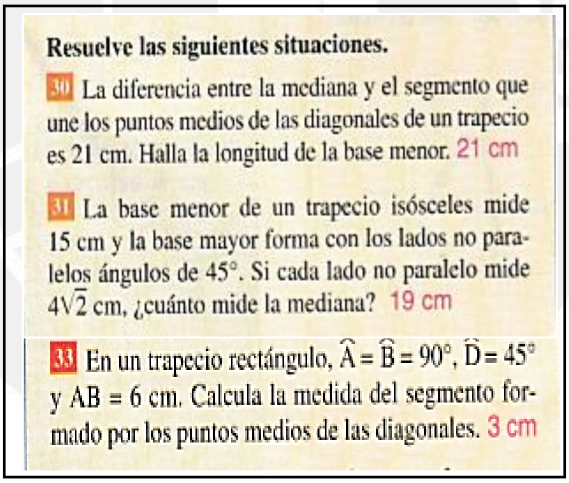


Figura 19. Aplicación de la propiedad del trapecio
Fuente: Matemática 4° de secundaria (Perú, 2005, p.50)

Como se puede apreciar, es el único ejemplo presentado en el texto que trata sobre el tema trapecio. Sería recomendable que se proponga más ejemplos de este tipo. Ya que favorecerá la comprensión matemática del objeto en estudio.

En este tipo de tarea expresado en el registro de lengua natural, busca averiguar si el concepto y las propiedades del objeto en estudio han sido aprendidos por los estudiantes.

Así mismo en la figura 20 se propone situaciones donde se exige a los estudiantes determinar las medidas de los elementos geométricos como la longitud de la mediana del trapecio, longitud de la base menor del trapecio, determinar la medida del segmento formado por los puntos medios de las diagonales del trapecio y medidas de los ángulos interiores, estas situaciones están enunciadas en el registro verbal y simbólico. Luego, para dar solución a estas situaciones, los estudiantes deberán analizar el registro verbal presentado, y luego realizar los cambios de registro de representación; es decir, para dar sus respuestas deben realizar conversiones.



Resuelve las siguientes situaciones.

30 La diferencia entre la mediana y el segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es 21 cm. Halla la longitud de la base menor. 21 cm

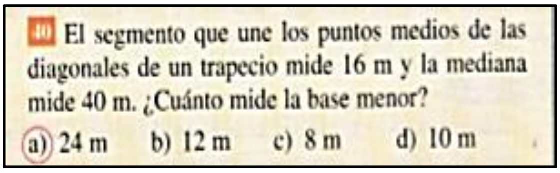
31 La base menor de un trapecio isósceles mide 15 cm y la base mayor forma con los lados no paralelos ángulos de 45°. Si cada lado no paralelo mide $4\sqrt{2}$ cm, ¿cuánto mide la mediana? 19 cm

33 En un trapecio rectángulo, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, $\widehat{D} = 45°$ y AB = 6 cm. Calcula la medida del segmento formado por los puntos medios de las diagonales. 3 cm

Figura 20. Tarea de extensión
Fuente: Matemática 4° de secundaria (Perú, 2005, p.51)

El enunciado en el registro en lengua natural son los que se deben tener en cuenta para realizar un adecuado procedimiento en la búsqueda de la solución.

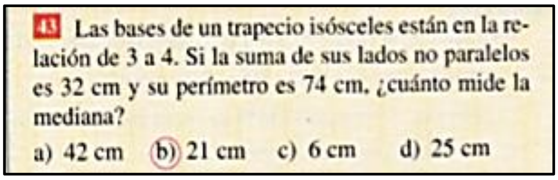
Finalmente podemos observar que las siguientes tareas son repetitivas y las estrategias a seguir son similares. En algunos casos, se necesitará realizar algunos trazos y otros tendrán que relacionar otros conocimientos con la geometría. Para las situaciones planteadas en las figuras 21 y 22, sería deseable que los estudiantes pudiesen dar una solución realizando cambios de registros de representación semiótica: registro verbal, registro simbólico y registro figural.



40 El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio mide 16 m y la mediana mide 40 m. ¿Cuánto mide la base menor?

a) 24 m b) 12 m c) 8 m d) 10 m

Figura 21. Tarea de extensión
Fuente: Matemática 4° de secundaria (Perú, 2005, p.51)



43 Las bases de un trapecio isósceles están en la relación de 3 a 4. Si la suma de sus lados no paralelos es 32 cm y su perímetro es 74 cm, ¿cuánto mide la mediana?

a) 42 cm b) 21 cm c) 6 cm d) 25 cm

Figura 22. Tarea de extensión.
Fuente: Matemática 4° de secundaria (Perú, 2005, p.51)

Es importante la coordinación entre el registro verbal, simbólico y figural que muestra el autor para presentar la clasificación, propiedades del trapecio y enunciar situaciones, lo que permite al estudiante visualizar este objeto matemático.
Luego de finalizar el análisis del texto, podemos concluir que:

- Presenta la definición del trapecio en un solo registro. Se emplea de manera predominante el registro verbal tanto en la definición como en el enunciado de las propiedades y en la propuesta de situaciones problemáticas.
- No presenta conexión del objeto matemático trapecio con el contexto en el que se desenvuelve el estudiante.
- Muestra solo un ejemplo resuelto que involucra la noción de trapecio en los cuales se proponen los diversos tratamientos y conversiones que contribuyen para el aprendizaje de las propiedades del objeto matemático en estudio. Sin embargo, no es suficiente, es decir, se debería proponer más ejemplos de este tipo.

Luego de haber analizado el texto utilizado por los estudiantes y profesores en la enseñanza escolar, presentamos el experimento y sus análisis de acuerdo a la metodología y al referencial teórico de la investigación.

CAPÍTULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo, presentamos la descripción del escenario donde se realizará la investigación, los sujetos que participarán en ella y la secuencia de actividades con sus respectivos análisis de acuerdo a los aspectos de la Ingeniería Didáctica contemplados en la investigación y en base a la Teoría de Registro de Representación Semiótica.

4.1 Escenario de la investigación

La investigación se desarrolló en la Institución Educativa Pública Integrado Nº20868 "José Abelardo Quiñones Gonzales", el cual está ubicado en una zona rural en una de las provincias de Lima - Perú. La institución educativa funciona en un solo turno en todos los niveles (inicial, primaria y secundaria) y todos los grados en secundaria tienen una sola sección.

El desarrollo de las actividades se llevó a cabo en la sala de cómputo de la institución educativa antes mencionada.

4.2 Sujetos de investigación

Nuestra investigación se llevó acabo con 15 estudiantes de cuarto año de secundaria entre 14 a 15 años de edad, correspondientes al VII ciclo de Educación Básica Regular. El grupo de estudiantes estuvo conformado por nueve mujeres y seis varones, de los cuales doce de ellos viven cerca al colegio en el mismo Centro Poblado y tres de ellos viven en los anexos aledaños, los cuales se desplazan desde sus casas hasta el colegio en un tiempo aproximado de dos horas de camino. Esto significa que cuando se quiere trabajar con todo el grupo de estudiantes se deberá programar con anticipación y prever su alimentación y el tiempo para que puedan retornar a sus hogares.

Los estudiantes participaron de manera voluntaria. La formación que ellos reciben se rigen bajo los lineamientos del Diseño Curricular Nacional y los textos con los que trabajan son aquellas proporcionadas por el Ministerio de Educación de Perú: el nombre del texto es Matemática 4º.

Los estudiantes participantes en esta investigación, tienen conocimientos del uso del software Geogebra, este programa se insertó en las clases de matemática hace dos años con la llegada de los equipos de cómputo a la Institución Educativa, pero su uso se limitó solo en las construcciones de objetos geométricos. Esto facilitó el desarrollo de las actividades de construcción y exploración de las figuras, por medio de su función arrastre, los estudiantes pudieron realizar cambios en la configuración de la figura, hacer observaciones y establecer relaciones entre los elementos geométricos (segmentos, ángulos, diagonales, etc.).

Los estudiantes trabajarán de manera individual, es decir, cada uno desarrolló las actividades en una computadora en la sala de cómputo.

Del grupo de quince estudiantes, se analizarán los trabajos realizados por las estudiantes que llamaremos en adelante Rosario y Benilda, para salvaguardar su identidad, quienes fueron elegidas por participar en todas las actividades programadas y haber desarrollado todas las preguntas planteadas en cada actividad.

4.3 Descripción de la secuencia didáctica

En la siguiente tabla, mostramos la descripción de la secuencia didáctica que consta de tres actividades los cuales se desarrollaran en tres encuentros de 90 minutos cada uno. Estos encuentros se llevaron a cabo fuera del horario de clases en la sala de cómputo de la institución educativa antes mencionada.

Tabla 3. Actividades del experimento

Encuentro	Actividad	Duración	Contenido
I	Actividad 1	90 minutos	Nociones de trapecio.
II	Actividad 2	90 minutos	Propiedades del trapecio.
III	Actividad 3	90 minutos	Conjetura la propiedad de la base media del trapecio.

En el primer encuentro, se desarrolló la actividad 1, en el cual participaron los quince estudiantes. Esta actividad consta de dos preguntas, los cuales buscan que los estudiantes movilicen la noción de trapecio (clasificación y propiedades del trapecio). En el segundo encuentro, se desarrolló la actividad 2 que consta de tres preguntas, los cuales están orientadas a que los estudiantes establezcan relaciones con las propiedades del trapecio. En este encuentro, solo participaron once estudiantes, ya que los demás estaban como representantes de la institución educativa del nivel secundario en los ciclos VI y VII en el concurso organizado por la Feria Nacional de Ciencia y Tecnología (FENCYT), en la etapa provincial cuyo organizador de esa etapa es la UGEL Nº 13 de la provincia de Yauyos. En el tercer encuentro se desarrolló la actividad 3 que constan de cuatro preguntas los cuales tienen relación con la propiedad de la base media del trapecio. Cada una de las actividades se desarrolló en un tiempo de dos horas pedagógicas (90 minutos).

Así mismo, señalamos que para la elaboración de las actividades adaptamos una actividad del taller de formación docente *Processos de Ensino e Aprendizagem de matemática em ambientes tecnológicos,* del proyecto internacional de los grupos de investigación DIMAT-PUCP y PEAMAT-PUC-SP, y también adaptamos, para nuestra investigación, actividades de la investigación de Maioli (2002).

Al término del desarrollo de cada actividad se realizó una formalización parcial de los aspectos matemáticos desarrollados. Esta formalización estará a cargo de la profesora investigadora, tomando como referencia las dudas y errores que los estudiantes mostraron durante el proceso de desarrollo de cada una de las preguntas de cada actividad, la cual será de manera expositiva (para ello utilizará pizarra acrílica, plumones y el software Geogebra). Esta formalización se realizará con el propósito de corregir los errores y dificultades que se presenten en relación al conocimiento matemático formal.

A continuación, presentamos las actividades con sus respectivos análisis a priori y a posteriori

4.4 Análisis de las actividades

De cada pregunta de la actividad 1 y 2, presentaremos los objetivos, los análisis a priori y a posteriori basados en aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. En la actividad 3, además de considerar los aspectos de la Teoría de Registros, nos basaremos también en Cañadas et al. (2008) para indicar el tipo de conjetura que realizarán los estudiantes.

Así mismo, presentaremos primero el trabajo realizado por la estudiante Rosario y luego el trabajo realizado por la estudiante Benilda.

Actividad 1: Reconociendo los saberes previos

La primera actividad tiene por objetivo que los estudiantes identifiquen las propiedades de los diferentes tipos de trapecio (escaleno, rectángulo e isósceles), realicen la conversión del registro en lengua natural al registro figural, realicen tratamientos en el registro figural y reconozcan el tipo de trapecio mediante la construcción de la figura, identifiquen las propiedades del trapecio y articulen las aprehensiones secuencial y operatoria en el registro figural.

Para iniciar la **actividad 1,** los estudiantes recibirán un conjunto de tiras cada una con una afirmación como se muestra en la figura 23; luego leerán, seleccionarán y registraran aquellas que tienen relación con los tipos de trapecio que fueron propuestos con el nombre de proposiciones bases (F4: *Q es un trapecio escaleno,* F7: *Q es un trapecio recto* y F10: *Q es un trapecio isósceles).* De esta forma, los estudiantes movilizarían y confrontarían lo que ya saben; luego, se haría la formalización parcial de cada pregunta.

Para el desarrollo de esta actividad, recibirás un conjunto de tiras de papel con una afirmación. Luego elige, lee cada una de las frases y relaciona cada frase con otras frases. A continuación presentamos las afirmaciones de las tiras:

F1: Q es un trapecio

F2: Q tiene dos lados paralelos llamados bases.

F3: La altura de Q es la distancia entre las bases.

F4: Q es un trapecio escaleno.

F5: Sus lados no paralelos de Q tienen diferente longitud.

F6: Dos lados consecutivos de Q son iguales.

F7: Q es un trapecio recto.

F8: Q es un trapecio que tiene uno de sus lados no paralelos perpendicular a sus bases.

F9: Q es un trapecio que tiene sus diagonales congruentes.

F10: Q es un trapecio isósceles.

F11: Q es un trapecio que tiene sus lados no paralelos congruentes.

F12: Q tiene dos diagonales

F13: Los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios.

F14: Los ángulos adyacentes a una misma base de Q son congruentes.

Figura 23. Actividad 1

A continuación presentamos el análisis a priori y a posteriori de la actividad 1 que consta de dos preguntas.

Pregunta 1

Con esta pregunta deseamos que los estudiantes, movilicen las nociones de trapecio e identifiquen las propiedades del mismo, de acuerdo a las proposiciones bases planteadas en la pregunta 1 (ver figura 24).

1. Registre las posibles proposiciones para:
F4: Q es un trapecio escaleno
F7: Q es un trapecio recto
F10: Q es un trapecio isósceles

Figura 24. Actividad 1 - Pregunta 1

Como observamos en la figura 24, se tiene tres proposiciones bases, la idea es que los estudiantes relacionen las otras proposiciones con alguna de estas tres proposiciones bases y luego escriban, mediante el registro en lengua natural, aquellas que corresponden a cada una de estas proposiciones bases.

Análisis a priori

En esta pregunta, esperamos que los estudiantes movilicen conocimientos previos sobre la noción de trapecio, relacionen los tipos de trapecio que están contenidas en cada proposición base, con sus propiedades que están contenidas en las otras proposiciones. Todas ellas presentadas en tiras de papel.

De esta forma esperamos que identifiquen cual es la proposición que corresponde a cada proposición base.

Creemos que los estudiantes seleccionarán adecuadamente las proposiciones (propiedades) y las relacionaran con cada una de las proposiciones bases y, mediante el registro en lengua natural, escribirán las que corresponden a cada una de ellas. Es probable que los estudiantes pregunten si se puede repetir las proposiciones, para una o más proposiciones bases.

Pensamos que las respuestas de las estudiantes para la primera proposición base (ver figura 25) podría ser de la siguiente manera:

F4: Q es un trapecio escaleno. (Proposición base)

Figura 25. Primera proposición base

F1: Q es un trapecio

F2: Q tiene dos lados paralelos llamados bases.

F3: La altura de Q es la distancia entre las bases.

F5: Sus lados no paralelos de Q tienen diferente longitud.

F12: Q tiene dos diagonales

F13: Los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios.

Para la segunda proposición base (ver figura 26) pensamos que la respuesta será de la siguiente forma:

F7: Q es un trapecio recto. (Proposición base)

Figura 26. Segunda proposición base

F1: Q es un trapecio

F2: Q tiene dos lados paralelos llamados bases.

F3: La altura de Q es la distancia entre las bases.

F8: Q es un trapecio que tiene uno de sus lados no paralelos perpendicular a sus bases.

F12: Q tiene dos diagonales

F13: Los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios.

De la misma forma, pensamos que para la tercera proposición base (ver figura 27) la respuesta será de la siguiente:

F10: Q es un trapecio isósceles. (Proposición base)

Figura 27. Tercera proposición base

F1: Q es un trapecio

F2: Q tiene dos lados paralelos llamados bases.

F3: La altura de Q es la distancia entre las bases.

F9: Q es un trapecio que tiene sus diagonales congruentes.

F11: Q es un trapecio que tiene sus lados no paralelos congruentes.

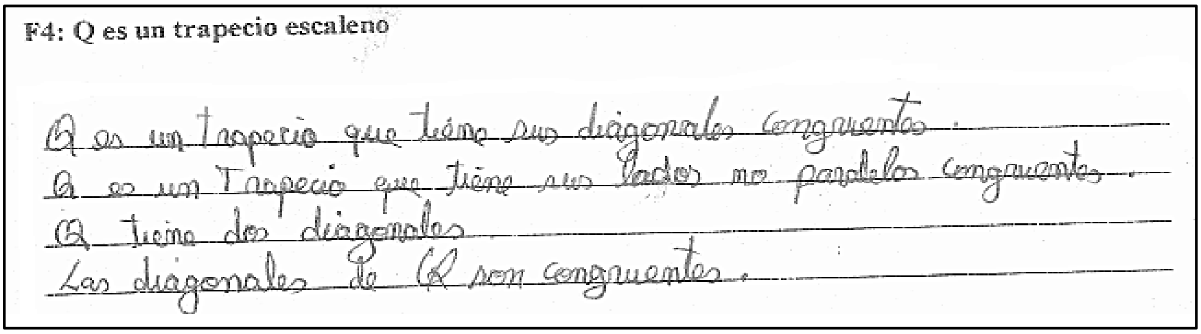
F12: Q tiene dos diagonales

F13: Los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios.

F14: Los ángulos adyacentes a una misma base de Q son congruentes.

Análisis a posteriori de la pregunta 1- Estudiante Rosario

Las acciones realizadas por Rosario muestran que, al relacionar las propiedades contenidas en las proposiciones y los tipos de trapecio contenido en las proposiciones bases, ella movilizó conocimientos sobre trapecio y mediante el registro en lengua natural, registró las proposiciones correspondientes a cada proposición base. En la figura 28, mostramos el registro de las proposiciones que la estudiante selecciono para la proposición base **F4**: Q es un trapecio escaleno.


F4: Q es un trapecio escaleno

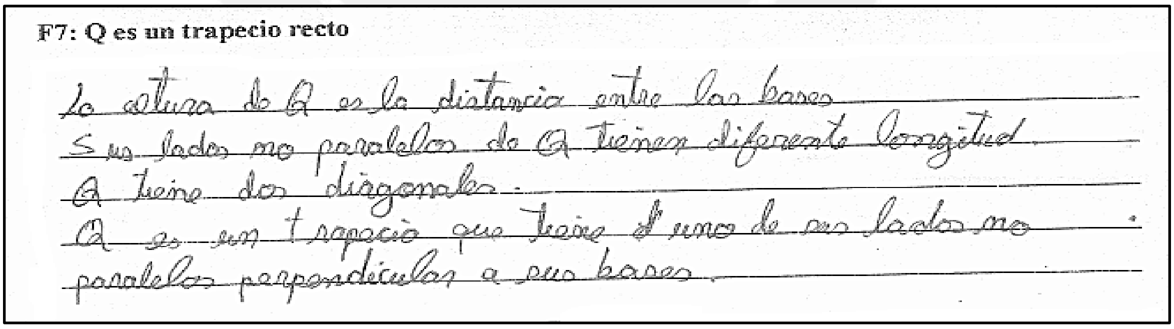
Q es un trapecio que tiene sus diagonales congruentes.
Q es un Trapecio que tiene sus lados no paralelos congruentes.
Q tiene dos diagonales
Las diagonales de Q son congruentes.

Figura 28. Respuesta 1 – estudiante Rosario

Tal como se muestra en la figura 28, algunas proposiciones que registró Rosario para la proposición base **F4**, fueron: *Q es un trapecio que tiene sus diagonales congruentes*, *Q es un trapecio que tiene sus lados no paralelos congruentes*, estas proposiciones (propiedades) no corresponden a la proposición base (trapecio escaleno), lo cual nos hace pensar que Rosario no tiene los conocimientos consolidados sobre las propiedades de un trapecio escaleno.

Así mismo, registro la siguiente proposición, *Q tiene dos diagonales*, está si corresponde a la proposición base. Por tanto Rosario cumplió parcialmente con lo esperado a priori.

De la misma forma para la proposición base **F7**, Rosario mediante el registro en lengua natural registró las proposiciones (propiedades) que corresponden a un trapecio recto. En este caso, como se observa en la figura 29, la estudiante estableció la relación de manera correcta e identificó algunas propiedades del trapecio recto.

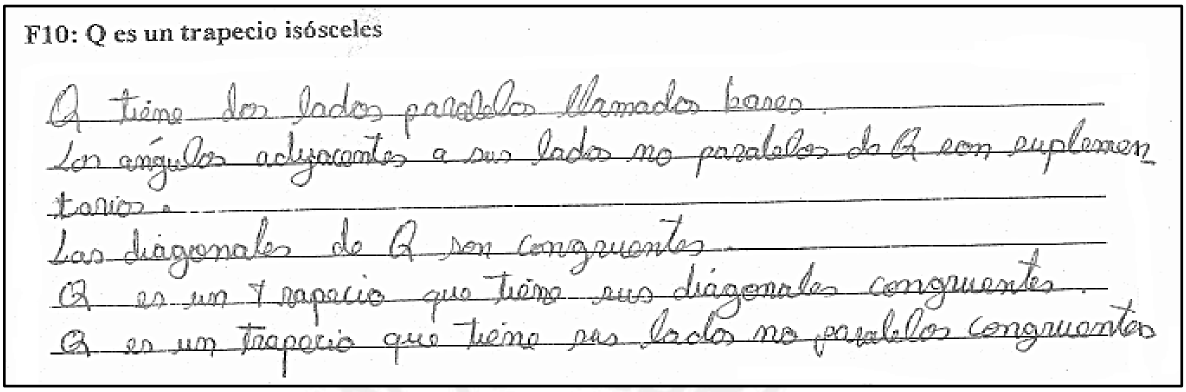

F7: Q es un trapecio recto

La altura de Q es la distancia entre las bases
Sus lados no paralelos de Q tienen diferente longitud.
Q tiene dos diagonales.
Q es un trapecio que tiene el uno de sus lados no
paralelos perpendicular a sus bases.

Figura 29. Respuesta 2 – estudiante Rosario

De acuerdo a lo que observamos en la figura 29, la estudiante registró algunas proposiciones (propiedades) correspondiente a la proposición base (trapecio recto). Esto significa que, la estudiante cumplió parcialmente con lo previsto en el análisis a priori porque no registró algunas proposiciones previstas tales como: *Q es un trapecio, Q tiene dos lados paralelos llamados bases y los ángulos adyacentes a una misma base de Q son congruentes*.

En **F10**, Rosario al igual que en **F4** y **F7**, estableció una relación entre la proposición base (trapecio isósceles) con las demás proposiciones (propiedades) y mediante el registro en lengua natural escribió lo siguiente (ver figura 30).


F10: Q es un trapecio isósceles

Q tiene dos lados paralelos llamados bases.
Los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios.
Las diagonales de Q son congruentes.
Q es un trapecio que tiene sus diagonales congruentes.
Q es un trapecio que tiene sus lados no paralelos congruentes

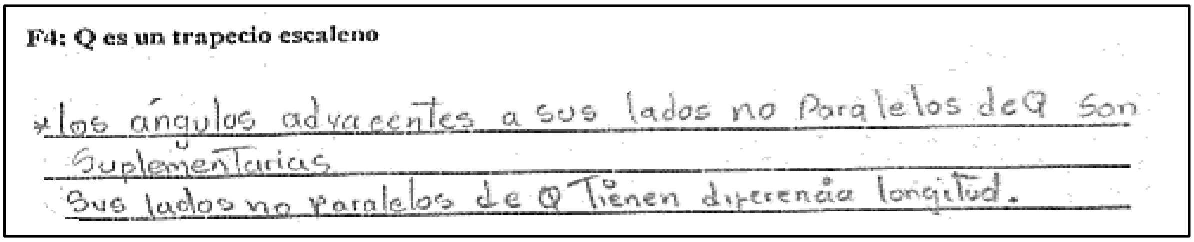
Figura 30. Respuesta 3 – estudiante Rosario

De acuerdo a lo que observamos en la figura 30, Rosario cumplió parcialmente con lo previsto en el análisis a priori, ya que no registró algunas proposiciones (propiedades) que también corresponden a la proposición base tales como: *Q es un trapecio, la altura de Q es la distancia entre las bases, Q es un trapecio que tiene sus diagonales congruentes, Q tiene dos diagonales y los ángulos adyacentes a una misma base de Q son congruentes*.

Análisis a posteriori de la pregunta 1- Estudiante Benilda

Las acciones realizadas por Benilda, muestran que, la estudiante relacionó y reagrupó las proposiciones escritas en las tiras de papel, de acuerdo a las proposiciones bases.

Es por ello que en la primera proposición base **F4,** la estudiante mediante el registro en lengua natural, escribió las siguientes propiedades, tales como: *los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios y sus lados no paralelos de Q tienen diferente longitud*, como se muestra en la figura 31.


F4: Q es un trapecio escaleno

*los ángulos adyacentes a sus lados no Paralelos de Q Son Suplementarios
Sus lados no paralelos de Q Tienen diferencia longitud.

Figura 31. Respuesta 1 – estudiante Benilda

De acuerdo a lo que observamos en la figura 31, Benilda cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori; afirmamos esto, porque ella no escribió algunas proposiciones (propiedades) previstas en el análisis a priori, tales como: *Q es un trapecio, Q tiene dos lados paralelos llamados bases, la altura de Q es la distancia entre las bases y Q tiene dos diagonales.*

De la misma forma, en **F7**, Benilda mediante el registro en lengua natural, escribió las proposiciones (propiedades) correspondientes a la proposición base (trapecio recto) tales como: *los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios y la altura de Q es la distancia entre las bases* (ver figura 32).

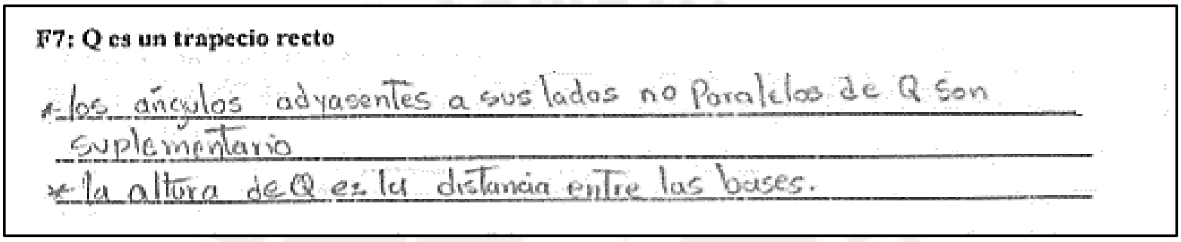

F7: Q es un trapecio recto
- los ángulos adyasentes a sus lados no Paralelos de Q son suplementario
- la altura de Q es la distancia entre las bases.

Figura 32. Respuesta 2 – estudiante Benilda

De acuerdo a lo que observamos en la figura 32, la estudiante cumplió parcialmente con lo previsto en el análisis a priori, porque no registró algunas proposiciones previstas para **F7** tales como:

Q es un trapecio, Q tiene dos lados paralelos llamados bases, Q tiene dos diagonales y *Q es un trapecio que tiene uno de sus lados no paralelos perpendicular a sus bases.*

En **F10**, Benilda, al igual que en **F4** y **F7,** movilizó conocimientos previos, para relacionar la proposición base (trapecio isósceles) con las demás proposiciones (propiedades) y mediante el registro en lengua natural ella escribió lo que mostramos en la figura 33.

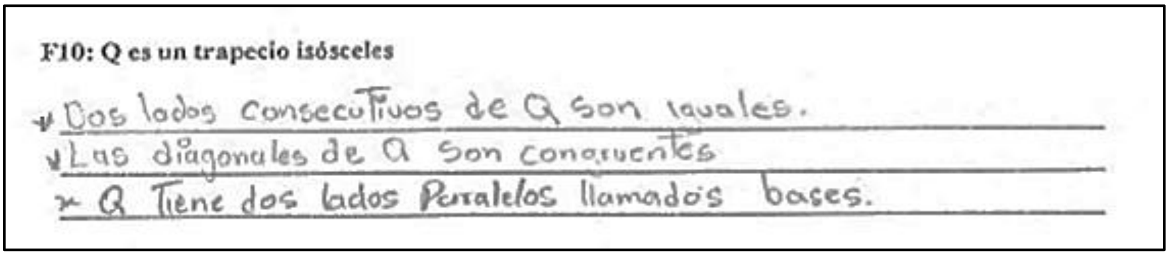

F10: Q es un trapecio isósceles
- Dos lados consecutivos de Q son iguales.
- Las diagonales de Q son congruentes
- Q Tiene dos lados Paralelos llamados bases.

Figura 33. Respuesta 3 – estudiante Benilda

En este caso, la estudiante registró las siguientes proposiciones: "*dos lados consecutivos de Q son iguales",* propiedad que no ha sido señalada en la actividad; esto nos hace pensar que confunde las propiedades de polígonos regulares con los del trapecio.

De la misma forma que en **F4 y F7**, la estudiante cumplió parcialmente con lo previsto en el análisis a priori porque no registró algunas proposiciones tales como: *Q es un trapecio, la altura de Q es la distancia entre las bases, Q es un trapecio que tiene sus lados no paralelos congruentes, Q tiene dos diagonales, los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios y los ángulos adyacentes a una misma base de Q son congruentes.*

Las respuestas realizadas por la estudiante tanto en **F4, F7 y F10** nos hace pensar que no han consolidado sus conocimientos con respecto a las propiedades de los diferentes tipos de trapecio.

A continuación, mostramos la formalización parcial de la pregunta 1.

<u>Formalización parcial de la Actividad 1- pregunta 1</u>

Al terminar la pregunta 1, la profesora investigadora, formalizó matemáticamente y mostró las propiedades de acuerdo al tipo de trapecio según las proposiciones bases (trapecio escaleno, recto e isósceles). Estas propiedades fueron presentadas en el análisis preliminar (estudio del objeto matemático).

Consideramos que, luego de la formalización los estudiantes estarán listos para afrontar la segunda etapa de la **actividad 1**.

Pregunta 2

En esta pregunta, esperábamos que los estudiantes realizasen la conversión del registro en lengua natural al registro figural y viceversa, reconociesen el tipo de trapecio de acuerdo a su construcción e identificasen las propiedades que pusiesen mediante el tratamiento en el registro figural.

La pregunta 2 consta de dos partes denominadas A y B (ver figura 34): en la **parte A,** nos centramos en la construcción del trapecio ABCD; para ello, se les facilitó los pasos que deben realizar para su construcción.

Pensamos, también, que al construir el trapecio siguiendo las indicaciones de la pregunta 2, los estudiantes realizan la conversión del registro en lengua natural al registro figural.

También, esperamos que los estudiantes a partir del tratamiento que realicen en el registro figural, por ejemplo al utilizar la función arrastre para mover uno de los vértices del trapecio, les permitirá observar las diferentes configuraciones del trapecio ABCD e identificar el tipo de trapecio y sus propiedades, de esta manera, se evidenciaría la articulación entre las aprehensiones secuencial y operatoria.

A continuación mostramos la estructura de la pregunta 2 (ver figura 34).

Parte A:

Con ayuda del software Geogebra, construye el trapecio ABCD, con el lado AB paralelo a CD.

Mediante el siguiente procedimiento:

1) Trazar un segmento AB.
2) Ubicar un punto C exterior al segmento AB.
3) Trazar una recta paralela al segmento AB que pase por C.
4) Luego ubicar un punto D (con la herramienta punto en objeto) en la recta. De esta forma, nos aseguramos que el segmento CD será siempre paralelo al segmento AB.)
5) Seleccionar la opción Polígono y marcar el cuadrilátero ABCD.

Guardar el archivo con el nombre Trapecio1_apellido_nombre (en la carpeta PUCP_2015).

Parte B:

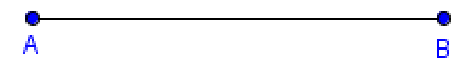
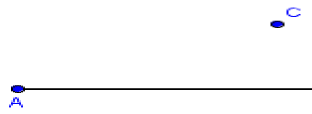
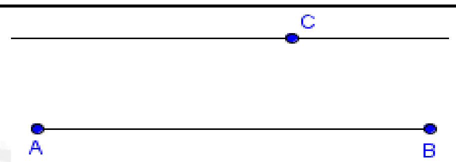
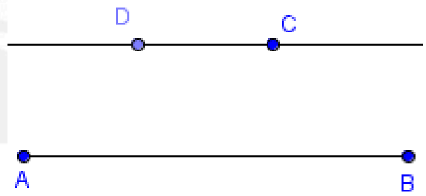
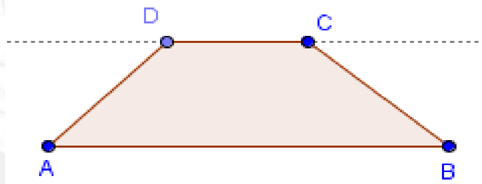
Mediante el arrastre, mueva uno de los vértices del trapecio ABCD construido, luego nombra el tipo de trapecio que se forma y señale sus propiedades. Explique detalladamente.

Figura 34. Actividad 1 - pregunta 2

Análisis a priori:

Pensamos que en la parte A de la pregunta 2, la actividad permitirá que los estudiantes realicen una conversión del registro en lengua natural (que estarán determinadas por una secuencia de pasos para construir el trapecio ABCD) al registro figural. En la tabla 4 presentamos la secuencia de pasos que pensamos seguirán los estudiantes y la posible construcción en el Geogebra.

Tabla 4. Aprehensión secuencial a priori

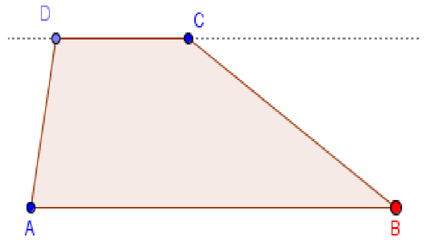
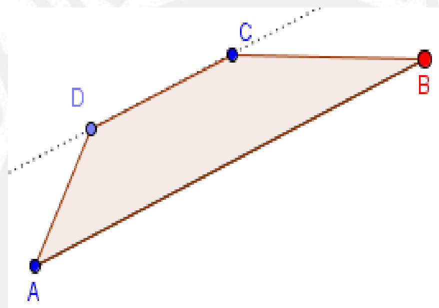
Paso 1: con la herramienta segmento traza el segmento AB.	
Paso 2: con la herramienta punto ubica un punto C exterior al segmento AB.	
Paso 3: Con la herramienta recta paralela traza una recta paralela al segmento AB que pase por C.	
Paso 4: Con la herramienta punto en objeto ubica un punto D en la recta. De esta forma, nos aseguramos que el segmento CD será siempre paralelo al segmento AB.	
Paso 5: En las herramientas Geogebra selecciona la opción Polígono y marca el cuadrilátero ABCD.	

En esta pregunta, esperamos que los estudiantes construyan el trapecio por medio de la herramientas del Geogebra tales como: *segmento, punto en objeto, recta paralela y polígono* tal como se observa en la tabla 4, para que luego realicen tratamientos en la figura.

En la parte B de la pregunta 2, creemos que los estudiantes realizarán tratamientos en el registro figural los cuales podrán conducirlos a una aprehensión operatoria por medio del uso de la función arrastre del Geogebra. De este modo, pensamos que los estudiantes realizarán una nueva configuración del trapecio inicial, porque, al mover uno de los vértices del trapecio ABCD, podrán observar las diferentes configuraciones del trapecio y asociar las propiedades que son invariantes en la figura, lo cual les permitirá identificar el tipo de trapecio y sus propiedades. Estas acciones permitirán que los estudiantes articulen su aprehensión operatoria y discursiva.

Por ejemplo, en la Tabla 5, presentamos dos posibles respuestas de los estudiantes al arrastrar el vértice B y mover la figura.

Tabla 5. Aprehensión operatoria a priori

Posiciones	Figura	Propiedades
1: Mantiene la posición y arrastra el vértice **B**.		Como se trata de un trapecio escaleno sus propiedades son los siguientes: El lado AB es paralelo al lado CD, los lados no paralelos AD y BC no son congruentes, los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos son suplementarios y sus diagonales AC y BD tienen diferentes longitudes.
2: Cambia de posición y arrastra el vértice **B**.		

Como observamos en la tabla 5 (en el primer ítem), la primera posibilidad corresponde a una aprehensión operatoria de tipo óptica, como afirma Duval (1995). Este tipo de aprehensión se da cuando la figura, en el tratamiento figural (en las nuevas configuraciones), tiene sus dimensiones agrandadas o disminuidas. En este caso, al mover el vértice B mediante la función arrastre podrán modificar la longitud de los lados del trapecio ABCD.

En la segunda posibilidad que mostramos en la tabla 5 (segundo ítem), pensamos que los estudiantes pueden desarrollar la aprehensión operatoria por medio de modificaciones posicionales y ópticas, ya que, como afirma Duval (1995), una aprehensión operatoria de tipo óptica; se da cuando se cambia la posición o la orientación de una figura de partida con respecto al plano en la que se presenta. En el ítem 2, al arrastrar el vértice B del trapecio ABCD, la figura cambia de posición con respecto a la orientación inicial y también cambian las dimensiones de la figura inicial del trapecio ABCD.

De esta forma, pensamos que el uso del software Geogebra permitirá la coordinación entre la aprehensión operatoria de tipo óptica y la aprehensión operatoria de tipo posicional.

Análisis a posteriori de la pregunta 2 - Estudiante Rosario

Rosario cumplió con lo esperado a priori en la parte A de la pregunta 2 porque realizó la construcción siguiendo los procedimientos del análisis a priori. De esta manera, Rosario realizó la conversión del registro en lengua natural al registro figural.

Sin embargo, la estudiante fue más allá de nuestras expectativas porque identificó los ángulos interiores del trapecio ABCD y trazó las diagonales $\overline{AC}\ y\ \overline{BD}$ del trapecio (coordinación entre la aprehensión operatoria y discursiva). Conforme se muestra en la figura 35.

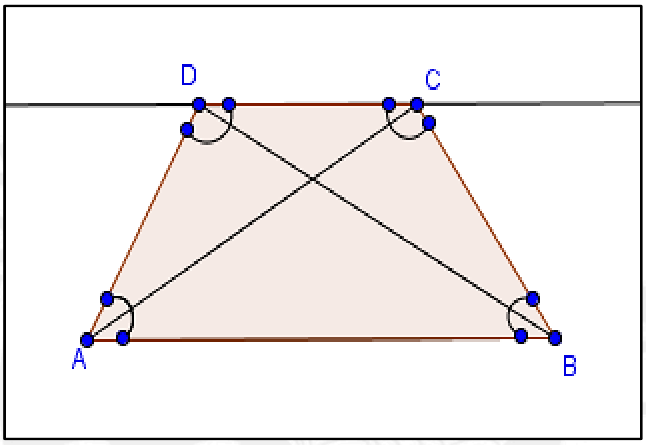
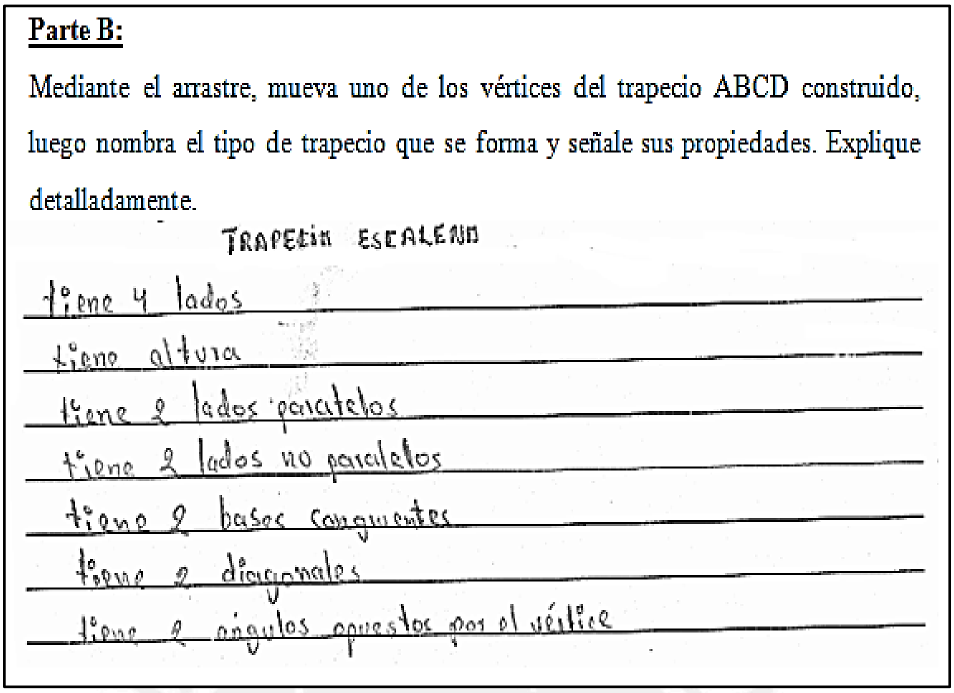


Figura 35. Respuesta A – estudiante Rosario

De acuerdo al figura 35, observamos que a pesar de que el Geogebra tiene la herramienta *ángulo*, la estudiante exploró por su cuenta y utilizó otra herramienta (arco) del Geogebra, aunque no es el adecuado pero lo utilizó para marcar los ángulos interiores del trapecio.

Además, por las acciones de la estudiante, observamos, también, el desarrollo de su aprehensión operatoria de tipo mereológica (al realizar trazos auxiliares), como muestra la figura 35, y por la modificación mereológica identificó las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del trapecio ABCD y los ángulos internos $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C\ y\ \measuredangle D$.

Luego de realizada la construción, Rosario arrastró el vertice **B** del trapecio ABCD, y conservó la posición que habiamos previsto a priori de la construcción y luego observó los cambios en la figura e identificó al trapecio escaleno y sus propiedades. Utilizó, para ello el registro de lengua natural (ver figura 36). De esta manera la estudiante coordinó su aprehensión perceptiva y operatoria.



Parte B:

Mediante el arrastre, mueva uno de los vértices del trapecio ABCD construido, luego nombra el tipo de trapecio que se forma y señale sus propiedades. Explique detalladamente.

TRAPECIO ESCALENO

tiene 4 lados

tiene altura

tiene 2 lados paralelos

tiene 2 lados no paralelos

tiene 2 bases congruentes

tiene 2 diagonales

tiene 2 ángulos opuestos por el vértice

Figura 36. Respuesta B – estudiante Rosario

Tal como observamos en la figura 36, Rosario identificó el trapecio escaleno lo que coincide con nuestro análisis a priori. Las propiedades que la estudiante identifica, *"tiene dos bases congruentes*", nos hace pensar que no tiene claro el significado de congruencia, y cuando afirma que el trapecio "*tiene 2 ángulos opuestos por el vértice"*, pensamos que Rosario ha relacionado las diagonales con rectas que, al cruzarse, tendrían un punto en común llamado vértice (no se evidencia en la figura 35), formando así ángulos opuestos por el vértice. Esto nos indica que Rosario ha realizado tratamientos en el registro figural (aprehensión operatoria).

Es decir, que la estudiante por las siguientes aprehensiones: aprehensión perceptiva, identificó al trapecio escaleno (formación de la figura) y aprehensión operatoria (modificación mereológica) realizó trazos auxiliares (diagonales, ángulos internos del trapecio ABCD).

Análisis a posteriori de la pregunta 2: estudiante Benilda

Las acciones de Benilda nos muestran que cumplió con lo esperado a priori en la parte A de la pregunta 2 porque realizó la construcción siguiendo las indicaciones propuestas en la ficha.

De esta manera, Benilda por la aprehensión secuencial construyó el trapecio (ver figura 37).

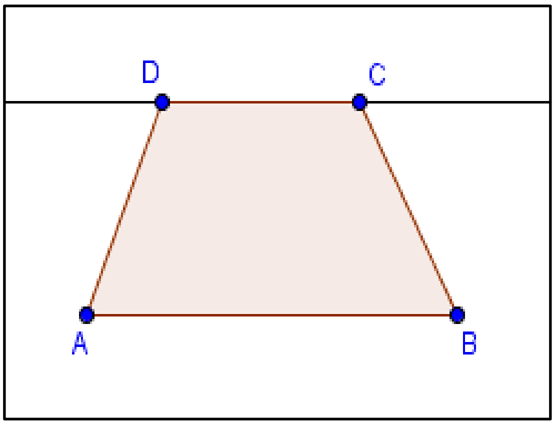


Figura 37. Respuesta A – estudiante Benilda

Luego de realizada la construción, la estudiante arrastró el vertice **A** del trapecio ABCD, y conservó la posición que pensamos a priori de la construcción, de esta manera, desarrolló, su aprehensión operatoria, porque realizó modificaciones correspondientes a la configuración inicial del trapecio al realizar un tratamiento en el registro figural, para luego observar los cambios en la figura e identificar el tipo de trapecio y sus propiedades; utilizó, para ello, el registro de lengua natural (ver figura 38).

Parte B:

Mediante el arrastre, mueva uno de los vértices del trapecio ABCD construido, luego nombra el tipo de trapecio que se forma y señale sus propiedades. Explique detalladamente.

Es un Tropecio Isoseles, Tienen 4 lados, Tenenen base menor y base Mayor, Tiene dos lados Paralelos, Tienen diagonales Tambien angulos internos, Propedades, una alTura,

Figura 38. Respuesta B – estudiante Benilda

Tal como observamos en la figura 38, Benilda identifica al trapecio como isósceles. Esto nos hace pensar que la estudiante tiene dificultades para reconocer el tipo de trapecio de acuerdo a las propiedades que posee. Sin embargo, la estudiante identificó las propiedades como: *Tienen cuatro lados, tiene una base menor y una base mayor, tiene diagonales, también ángulos internos y una altura*, las cuales si corresponden al trapecio ABCD construido. Esto nos hace pensar que Benilda ha realizado tratamientos en el registro figural (porque, mediante el arrastre, movió uno de los vértices del trapecio y modificó la configuración inicial del trapecio, e identifico al trapecio como isósceles), de esta manera, desarrolló, su aprehensión operatoria, perceptiva y discursiva.

Por lo tanto, la estudiante cumplió de manera parcial con lo previsto en el análisis a priori.

Formalización parcial Actividad 1 – pregunta 2

Es necesario hacer la formalización parcial de la pregunta 2, porque en el desarrollo hecho por los estudiantes, se observó que nombraron las propiedades del trapecio ABCD, pero lo al momento de identificar el tipo de trapecio, lo hicieron de manera equivocada. Es por ello que es necesaria la formalización parcial, en el cual, con la participación de los estudiantes y el uso del Geogebra, la profesora investigadora construyó el trapecio recto, el trapecio isósceles y el trapecio escaleno solicitado.

Luego mostró las propiedades que le corresponde a cada uno de ellos. Así mismo, los estudiantes verificaron que las propiedades vistas en la primera parte de la actividad 1 se cumplen para cada tipo de trapecio.

Finalmente, los estudiantes identificaron cuáles son las propiedades del trapecio escaleno y se aclaró la confusión presentada por las estudiantes Rosario y Benilda en el desarrollo de la pregunta 2.

En la siguiente actividad 2, nos interesa que los estudiantes construyan el trapecio isósceles porque consideramos que para ellos será más fácil conjeturar el teorema de la base media con este tipo de trapecio en la actividad 3.

Actividad 2: Propiedades del Trapecio

La actividad 2 que consta de tres preguntas, tiene por objetivo analizar la relación entre las diagonales del trapecio y los lados no paralelos del trapecio *ABCD*, así como también analizar la relación que existe entre los segmentos y ángulos interiores del mismo al realizar tratamientos en el registro figural. Esperamos, también, que los estudiantes conjeturen las relaciones entre los elementos geométricos (diagonales, segmentos y ángulos interiores) del trapecio *ABCD* al articular las aprehensiones operatoria y discursiva en el registro figural.

A continuación, presentamos el análisis a priori y a posteriori de la actividad.

Pregunta 1

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya un trapecio isósceles ABCD, luego trace las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, después con la herramienta (medida o longitud) mida la longitud de las diagonales y sus lados no paralelos del trapecio ABCD. En seguida arrastre el vértice A y explique cuál es la relación entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del trapecio isósceles ABCD.

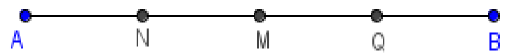
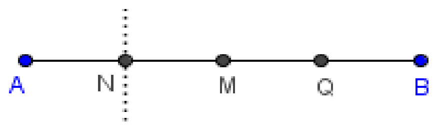
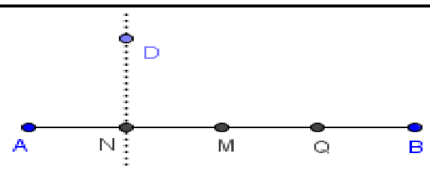
Figura 39. Actividad 2 – Pregunta 1

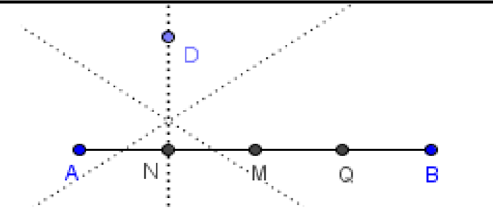
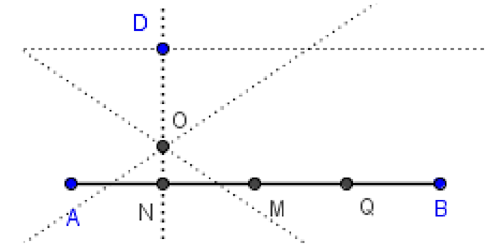
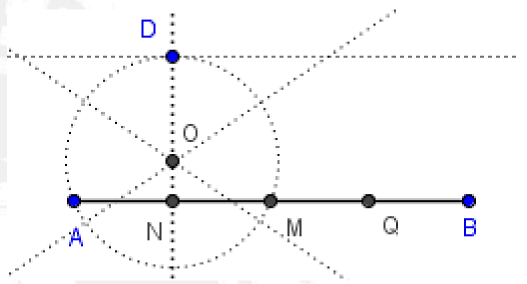
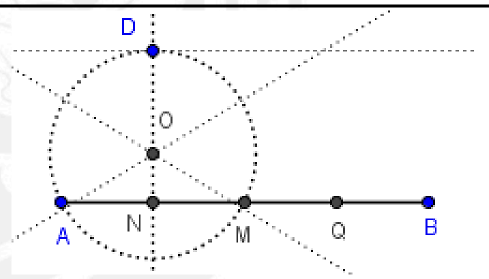
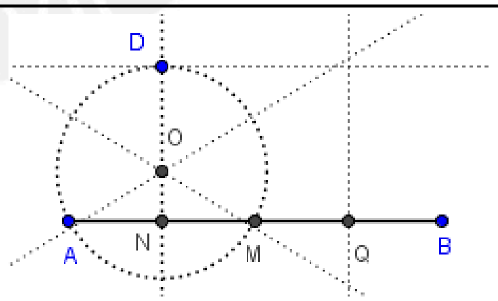
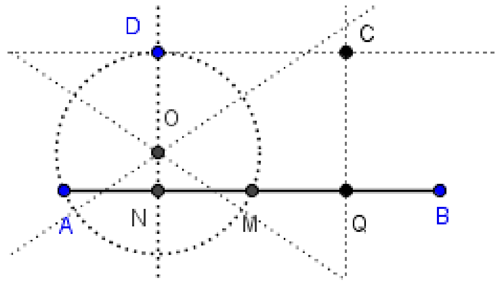
Análisis a priori:

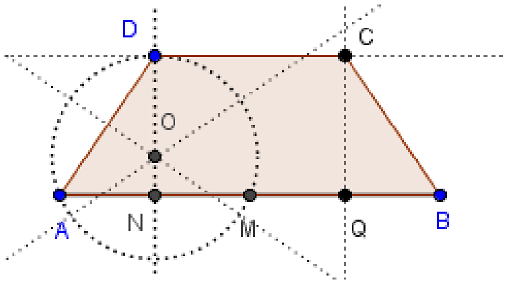
Pensamos que las estudiantes construirán sin dificultad el trapecio isósceles ya que tienen como base las construcciones realizadas en la formalización parcial de la actividad 1. Así mismo, pensamos que esta actividad permitirá a los estudiantes desarrollar su aprehensión secuencial en el registro figural, ya que seguirán una secuencia de pasos para construir dicho trapecio.

En Tabla 6, presentamos la secuencia de pasos que suponemos seguirán los estudiantes para construir el trapecio isósceles *ABCD* con el uso del software Geogebra.

Tabla 6. Aprehensión secuencial a priori

Paso 1: con la herramienta segmento traza el segmento AB.	
Paso 2: con la herramienta punto medio ubica el punto medio M del segmento AB, el punto medio del segmento AM y el punto medio Q del segmento MB.	
Paso 3: Con la herramienta recta perpendicular traza una recta perpendicular al segmento AB que pase por N.	
Paso 4: Con la herramienta punto en objeto ubica un punto D en la recta perpendicular.	

Paso 5: Con la herramienta mediatriz traza la mediatriz de AD y DM.	
Paso 6: Con la herramienta punto ubica el punto de intersección O entre las mediatrices.	
Paso 7: Con la herramienta “circunferencia” traza una circunferencia de radio OD con centro en O.	
Paso 8: Con la herramienta “recta paralela” traza una recta paralela al segmento AB que pase por D.	
Paso 9: Con la herramienta “recta perpendicular” traza una recta perpendicular al segmento AB que pase por Q.	
Paso 10: Con la herramienta “punto” ubica el punto de intersección C entre la recta perpendicular y la recta paralela.	

Paso 11: Con la herramienta "polígono" marca el trapecio ABCD.	

En esta pregunta, pensamos que los estudiantes construirán el trapecio por medio de las herramientas del software Geogebra tales como: *segmento, punto, punto en objeto, recta paralela, recta perpendicular, mediatriz, circunferencia y polígono.*

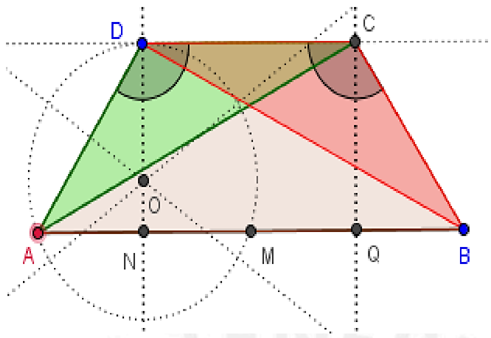
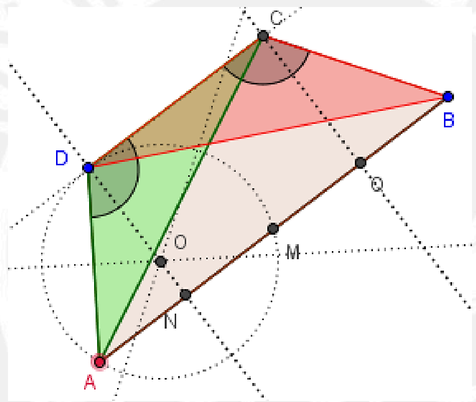
También pensamos que los estudiantes realizarán tratamientos en el registro figural, ya que trazarán y medirán las diagonales del trapecio. Además, suponemos que al usar la función arrastre del Geogebra, desplazarán el vértice A del trapecio *ABCD* para poder establecer la relación entre sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Igualmente pensamos que, mediante la movilización de conocimientos sobre congruencia de triángulos, los estudiantes establecerán la relación entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del trapecio *ABCD*, porque consideramos que, al realizar el tratamiento en el registro figural, los estudiantes podrán observar, por ejemplo, los triángulos *ABC* y *BCD* al interior del trapecio (aprehensión perceptiva) y a partir de ello, pensamos que establecerán el siguiente razonamiento: *sí* $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ *y* $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BCD$, *entonces se trata de dos triángulos congruentes por el caso LAL* (aprehensión discursiva). Finalmente, pensamos que los estudiantes llegarán a la relación de que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes (aprehensión discursiva).

De esta manera, los estudiantes realizarán un tratamiento en el registro figural y desarrollarán su aprehensión operatoria de tipo mereológica (división de la figura inicial) y discursiva (identificaran propiedades en la figura y establecerán relaciones entre los elementos geométricos). Es así que las acciones realizadas evidencian una articulación entre la aprehensión operatoria y discursiva.

En la Tabla 7 presentamos una posible aprehensión operatoria que podrían desarrollar los estudiantes al arrastrar el vértice A.

Tabla 7. Aprehensión operatoria a priori

Posiciones	Figura	Aprehensión operatoria
1. Mantiene la posición y arrastra el vértice *A*.		Realiza trazos auxiliares sobre la figura *ABCD* e identifica las unidades figurales de dos dimensiones: triángulo *ACD* y *BCD*. Al arrastrar el vértice *A*, mantiene su posición inicial
2. Cambia de posición y arrastra el vértice *A*.		Realiza trazos sobre la figura *ABCD* e identifica las unidades figurales de dos dimensiones: triángulo *ACD* y *BCD*. Al arrastrar el vértice *A*, cambia su posición inicial

Como se observa en la tabla 7, hemos considerado la construcción del trapecio *ABCD* en forma convencional ya que los estudiantes están acostumbrados a trabajarlo en esa posición, sin embargo no podemos descartar que lo hagan de forma diferente.

También, creemos que los estudiantes con ayuda de la herramienta “distancia” o “longitud” del Geogebra pueden conjeturar acerca de la congruencia entre las diagonales del trapecio.

Análisis a posteriori de la pregunta 1 – Estudiante Rosario

Rosario no cumplió con lo esperado en el análisis a priori. Pero, la estudiante construyó y realizó un tratamiento en el registro figural, diferente a lo previsto en el análisis a priori. Ya que, al revisar el protocolo de construcción, evidenciamos que la estudiante siguió una secuencia de pasos para construir el trapecio. De esta manera en términos de Duval (1994), la estudiante desarrolló su aprehensión secuencial porque siguió una secuencia de pasos para construir el trapecio ABCD.

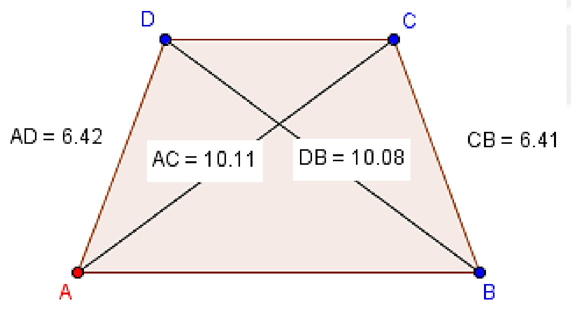
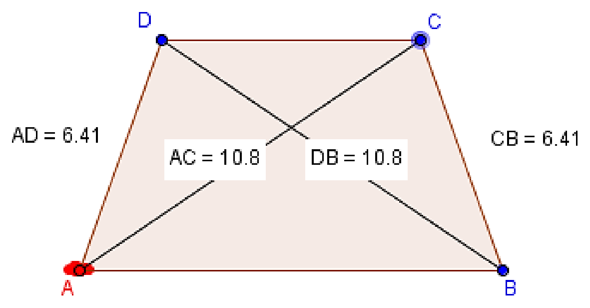
En la figura 40, mostramos el protocolo de construcción del Geogebra que siguió la estudiante.

nº	Nombre	Definición
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Segmento a	Segmento [A, B]
4	Punto C	
5	Recta b	Recta que pasa por C paralela a a
6	Punto D	Punto sobre b
7	Cuadrilátero pol...	Polígono A, B, C, D

Figura 40. Protocolo de construcción - estudiante Rosario

De acuerdo a lo que observamos en la figura 40, para construir el trapecio ABCD, la estudiante utilizó las siguientes herramientas: *punto, segmento, recta paralela y polígono*. En la tabla 8, mostramos el tratamiento que la estudiante realizó en el registro figural (aprehensión operatoria).

Tabla 8. Aprehensión operatoria – a posteriori Rosario

Figura inicial	Figura final
	

Como observamos en la tabla 8, la estudiante a diferencia de lo previsto en el análisis a priori, construyó un trapecio escaleno, luego trazó las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, midió las longitudes de los lados no paralelos del trapecio *ABCD* y las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, luego mediante la función arrastre del software Geogebra, la estudiante arrastró el vértice A y ajusto perceptivamente y verificó sus medidas, de tal manera que los lados opuestos del trapecio sean congruentes, esto nos hace pensar que la estudiante conoce las propiedades del trapecio isósceles.

Luego como producto de la articulación de su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva, escribe la relación encontrada entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ mediante el registro en lengua natural.

Que ambas diagonales son congruentes.

Figura 41. Pregunta 1 – respuesta Rosario

Como mostramos en la figura 41, Rosario escribió la siguiente afirmación *"Que ambas diagonales son congruentes"*, lo que coincide con nuestro análisis a priori. De esta forma Rosario desarrolló su aprehensión perceptiva.

Análisis a posteriori de la pregunta 1 – Estudiante Benilda

Benilda al igual que Rosario no cumplió con lo esperado a priori. Pero a diferencia de lo previsto en el análisis a priori, la estudiante construyó un trapecio, para ello siguió una secuencia de pasos tal como mostramos en el protocolo de construcción (ver figura 42).

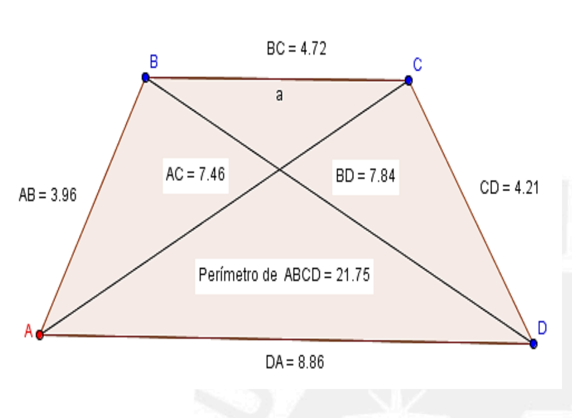
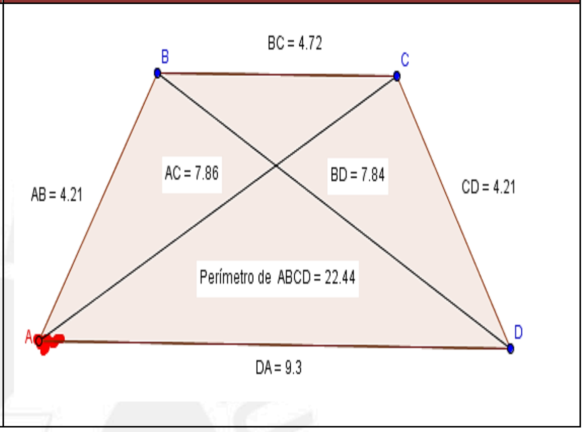
Protocolo de Construcción

N°	Nombre	Definición	Valor
1	Punto B		B = (2.12, 4.94)
2	Punto C		C = (6.84, 4.9)
3	Segment...	Segmento [B, C]	a = 4.72
4	Punto A		A = (-0.22, 1.44)
5	Punto D		D = (9.08, 1.34)
6	Segment...	Segmento [A, D]	b = 9.3
7	Cuadrilát...	Polígono A, B, C, D	polígono1 = 2...

Figura 42. Protocolo de construcción – estudiante Benilda

Como se observa en la figura 42, desde la perspectiva de Duval (1994), la estudiante siguió una secuencia ordenada de pasos para construir el trapecio ABCD, lo que significa que la estudiante mostró su aprehensión secuencial al utilizar las siguientes herramientas del software Geogebra: *punto, segmento y polígono*. En la tabla 9, mostramos la representación de la figura construida y el tramiento realizado por la estudiante.

Tabla 9. Aprehensión operatoria – a posteriori Benilda

Figura inicial	Figura final
	

De acuerdo a lo que se observa en la tabla 9, la estudiante construyó un trapecio escaleno, luego trazó las diagonales $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$, midió las longitudes de los lados no paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, el perímetro así como también los lados paralelos del trapecio y, mediante la función arrastre del software Geogebra, arrastró el vértice A y ajusto perceptivamente, hasta lograr que los lados no paralelos del trapecio sean congruentes. Esto nos hace pensar que la estudiante conoce algunas propiedades del trapecio isósceles. De esta manera la estudiante realizó una aprehensión operatoria y obtuvo una nueva configuración del trapecio ABCD.

Pensamos como resultado de la articulación de su aprehensión perceptiva y operatoria, mediante el registro en lengua natural, la estudiante estableció la relación entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del trapecio ABCD (ver figura 43).

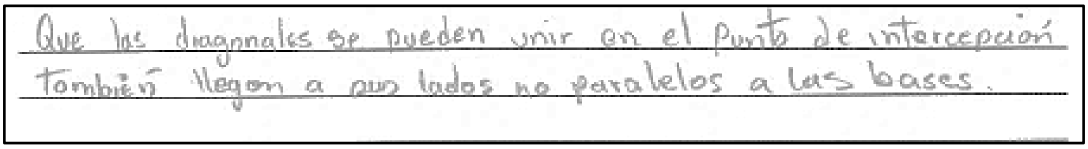


Figura 43. Pregunta 1 - respuesta Benilda

De acuerdo a lo observado en la figura 43, la estudiante escribió la siguiente relación: *las diagonales se pueden unir en el punto en el que se intersecan las diagonales y que llegan a sus lados no paralelos a las bases*, esta afirmación corresponde a lo que tienen en común las diagonales. Pensamos que la estudiante no estableció la relación de congruencia de las diagonales debido a la medida de longitud de las diagonales, esto está relacionado con la construcción del trapecio ABCD.

<u>Formalización parcial - Actividad 2 – pregunta 1</u>

Luego que los estudiantes finalizaron el desarrollo de la pregunta 1 de la actividad 2, la profesora investigadora realizó la formalización parcial con la participación activa de los estudiantes.

La profesora investigadora, realizó tratamientos en el registro figural y conectó conocimientos sobre congruencia de triángulos, para establecer la relación entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del trapecio isósceles *ABCD* (procedimiento que se encuentran presentado en el análisis preliminar, p. 48).

De esta manera, los estudiantes percibieron la relación que existe entre las diagonales del trapecio *ABCD*.

Pregunta 2

Abra el archivo. ggb Actividad 2, en la figura que representa al trapecio ABCD, se tiene que los puntos M y N representan a los puntos medios de los lados no paralelos AD y BC respectivamente. Ahora de acuerdo a la figura responda las siguientes preguntas.

Para desarrollar la pregunta 2 se propone una representación figural del trapecio ABCD, donde los estudiantes deberán realizar tratamientos y establecer relaciones entre las bases y los ángulos internos del trapecio ABCD.

A continuación, mostramos la construcción del trapecio *ABCD* representado en el software Geogebra (Ver figura 44).

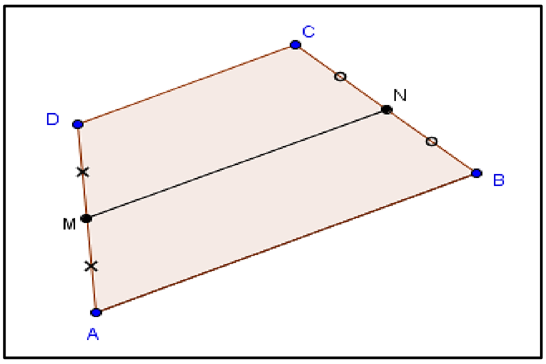


Figura 44. Representación del trapecio ABCD

Así mismo, en la figura 45 mostramos la pregunta 2 en la cual se les pide a los estudiantes establecer la relación entre las bases del trapecio *ABCD*. Para ello, tendrán que realizar tratamientos en la figura.

> 2. ¿Cuál es la relación entre los segmentos AB, MN y CD tomados dos a dos? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (haga trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce).

Figura 45. Actividad 2 – pregunta 2

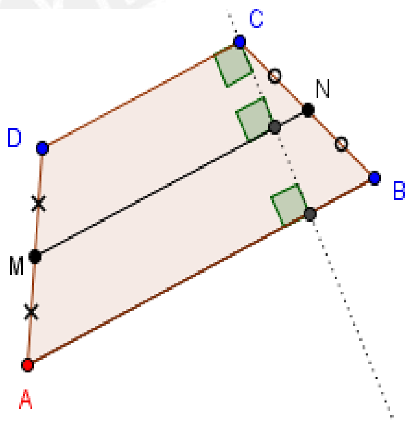
Análisis a priori:

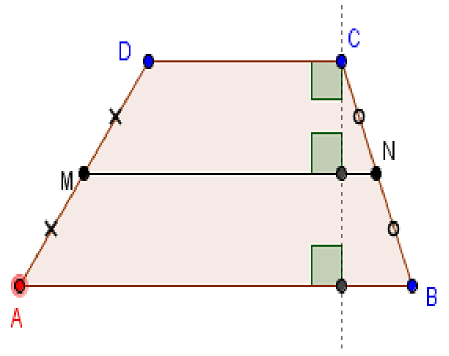
En esta pregunta esperamos que los estudiantes mediante su aprehensión perceptiva reconozcan los elementos geométricos (*punto medio, segmentos congruentes y segmentos paralelos*) en el trapecio *ABCD.*

También esperamos que los estudiantes realicen trazos y arrastren uno de los vértices del trapecio *ABCD* ya que estas acciones les permitirán establecer la relación entre los segmentos $\overline{AB}, \overline{MN}$ y $\overline{CD}$ del trapecio *ABCD*. De esta manera los estudiantes evidenciarán su aprehensión operatoria.

En la tabla 10 presentamos los posibles tratamientos que realizarán los estudiantes al arrastrar el vértice *A*.

Tabla 10. Aprehensión operatoria a priori

Posición	Modificación de la figura
1. Mantiene la posición inicial y arrastra el vertice A.	

2. Cambia la posición inicial y arrastra el vértice *A*.	

Así mismo, pensamos que, como producto de la articulación entre las aprehensiones operatoria y discursiva, los estudiantes establecerían la siguiente relación: *Que el segmento* $\overline{AB}$ *es paralela a* $\overline{MN}$ *y que* $\overline{MN}$ *es paralela a* $\overline{CD}$.

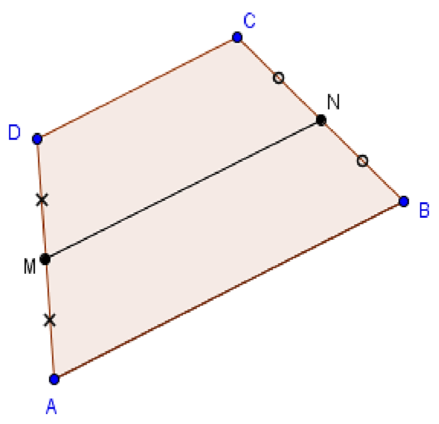
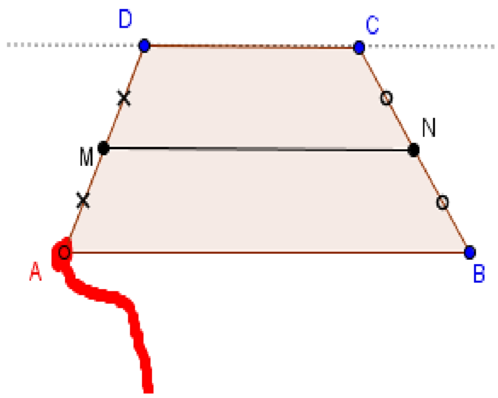
De esta manera, esperamos que los estudiantes desarrollen su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva al realizar el tratamiento en el registro figural.

Análisis a posteriori de la pregunta 2 – estudiante Rosario

Rosario cumplió parcialmente con el análisis a priori porque al revisar el tratamiento que realizó en la figura inicial, la estudiante trazo rectas auxiliares ($\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$), luego arrastró el vértice A (ver tabla 11). Pensamos que estas acciones le permitirán observar alguna propiedad conocida.

De esta forma, la estudiante evidenciaría su aprehensión operatoria y perceptiva.

Tabla 11. Aprehensión operatoria - a posteriori Rosario

Figura inicial	**Figura final**
	

Como observamos en la tabla 11, la estudiante cambio la posición de la construcción que presentamos en el segundo ítems del análisis a priori (ver tabla 10). Después de observar la figura, escribió la relación encontrada entre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ mediante el registro en lengua natural.

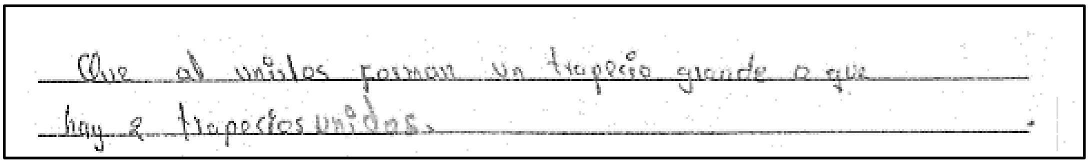

Que al unirlos forman un trapecio grande o que hay 2 trapecios unidos.

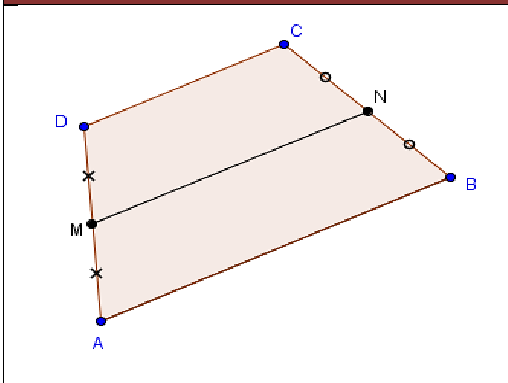
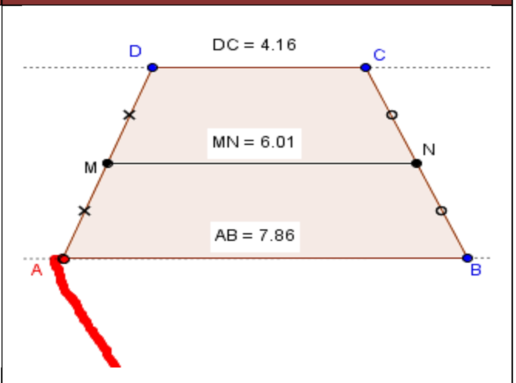
Figura 46. Pregunta 2 – respuesta Rosario

Como mostramos en la figura 46, Rosario estableció la siguiente relación: *Que al unirlos forman un trapecio grande o que hay 2 trapecios unidos*, esta afirmación nos muestra que la estudiante ha desarrollado su aprehensión operatoria y perceptiva porque además de haber realizado una modificación mereológica, la estudiante estableció una relación (parte – todo) e identificó unidades figurales de dos dimensiones: trapecio ABCD (trapecio grande), trapecio ABNM y trapecio MNCD (dos trapecio unidos). La relación que estableció Rosario no corresponde a una relación entre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ tomados dos a dos. Sin embargo a diferencia de lo que esperábamos a priori la estudiante estableció la relación de proporcionalidad.

Análisis a posteriori de la pregunta 2 – estudiante Benilda

Benilda cumplió parcialmente con el análisis a priori porque, al revisar el tratamiento que realizó en la figura inicial, la estudiante trazó rectas auxiliares ($\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$), midió la longitud de los segmentos $\overline{AB}, \overline{MN}$ y $\overline{CD}$; y arrastró el vértice A (ver tabla 12).

Tabla 12. Aprehensión operatoria – a posteriori Benilda

Figura inicial	Figura final
	

Como observamos en la tabla 12, desde la perspectiva de Duval (1995), la estudiante desarrolló su aprehensión operatoria de tipo posicional, porque Benilda modificó al igual que Rosario la posición de la construcción, tal como lo habíamos pensado en el análisis a priori en el primer ítem (ver tabla 10). Después de observar la figura, escribió la relación encontrada entre los segmentos $\overline{AB}, \overline{MN}$ y $\overline{CD}$ mediante el registro en lengua natural.

Que la primera que es BC no Tiene la misma medida quelos demas y eso pasa con dos de MN y AD .

Figura 47. Pregunta 2 – respuesta Benilda

Como mostramos en la figura 47, Benilda escribió la siguiente relación: *Que la primera que es BC no tiene la misma medida que los demás y eso pasa con los de MN y AB, llegan a tener otros tamaños*, esta afirmación nos indica que la estudiante se basó en una simple percepción para escribir esta afirmación, lo cual no es lo que esperábamos a priori.

<u>Formalización parcial – Actividad 2 - pregunta 2</u>

Luego que los estudiantes finalizaron el desarrollo de la segunda pregunta de la actividad 2, la profesora investigadora realizó la formalización parcial con la participación activa de los estudiantes.

Pregunta 3

Para desarrollar la pregunta 3, el estudiante debe tomar en cuenta la construcción propuesta anteriormente (ver figura 39).

A continuación, en la figura 48 mostramos la pregunta 3 en donde se les pide a los estudiantes establecer la relación entre los ángulos interiores de uno de los lados no paralelos del trapecio ABCD.

3. ¿Qué relación existe entre los pares de ángulos interiores que se encuentran a un mismo lado, de uno de los lados no paralelos? Justifique su respuesta.

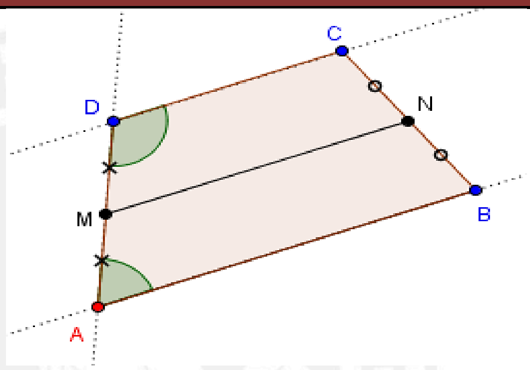
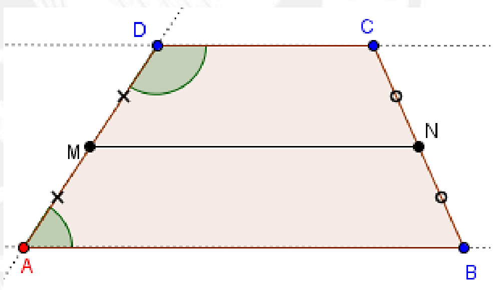
Figura 48. Actividad 2 – pregunta 3

Análisis a priori

En esta pregunta esperamos que los estudiantes mediante la articulación de la aprehensión perceptiva y operatoria, reconozcan los lados no paralelos del trapecio ABCD, realicen trazos, midan ángulos y arrastren uno de los vértices del trapecio ABCD ya que estas acciones les permitirán hacer conjeturas acerca de la relación entre los ángulos interiores del trapecio ABCD.

En la Tabla 13, presentamos los posibles tratamientos que realizaran los estudiantes al arrastrar el vértice A.

Tabla 13. Aprehensión operatoria a priori

Posición	Modificación de la figura
1. Mantiene la posición inicial y arrastra el vértice *A*.	
2. Cambia la posición inicial y arrastra el vértice *A*.	

Como mostramos en la tabla 13, pensamos que los estudiantes prolongarían los segmentos AB, CD y AD con la herramienta recta del software Geogebra, medirían los $\measuredangle BAD$ y $\measuredangle ADC$ del trapecio ABCD y luego arrastrarían el vértice A.

Así mismo, pensamos que los estudiantes mediante la movilización de conocimientos sobre ángulos formados por dos rectas paralelas y una recta secante, establecerían la relación entre los pares de ángulos que se encuentran a uno de lados no paralelos del trapecio ABCD, porque consideramos que al realizar el tratamiento en el registro figural los estudiantes podrían identificar las rectas paralelas y la recta secante en la figura (aprehensión perceptiva) y a partir de ello, pensamos que establecerían el siguiente razonamiento: *si los*

∢BAD y ∢ADC son conjugados internos, entonces, por propiedad, se sabe que los ángulos conjugados internos son suplementarios, es decir, que la suma de ambos es 180º (aprehensión discursiva).

De esta forma, los estudiantes realizarían un tratamiento en el registro figural y desarrollarían su aprehensión operatoria porque realizarían trazos auxiliares e identificarían elementos geométricos como rectas y ángulos; y su aprehensión discursiva porque identificarían propiedades en la figura y establecerían relaciones entre los elementos geométricos. Así mismo estas acciones evidenciarían una articulación entre la aprehensión operatoria y discursiva.

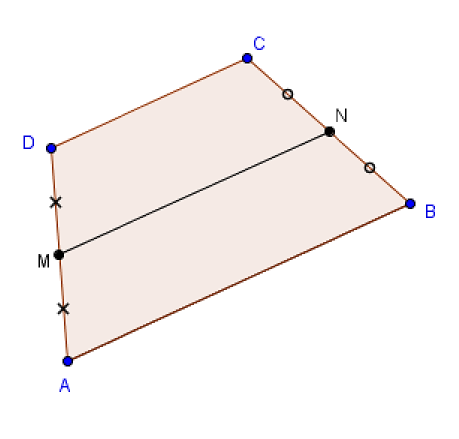
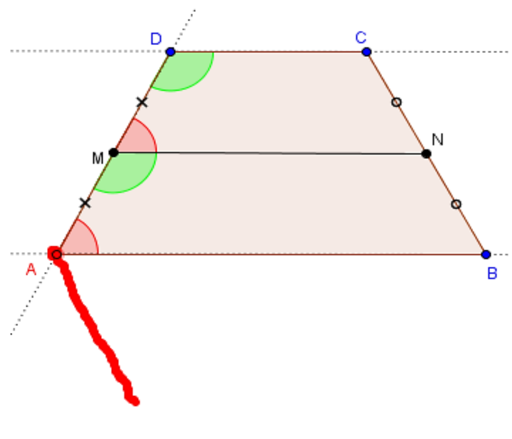
También pensamos que los estudiantes, con ayuda de la herramienta *"ángulo"* del Geogebra, podrían medir y llegar a la relación que los pares de ángulos que se encuentran a un mismo lado no paralelo del trapecio ABCD suman 180º.

Análisis a posteriori de la pregunta 3 – estudiante Rosario

Rosario cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori, porque identificó uno de los lados no paralelos del trapecio ABCD y en el tratamiento que realizó en la figura, trazó una recta para prolongar el segmento AD del trapecio ABCD e identificó los $\measuredangle BAM, \measuredangle AMN,$ $\measuredangle NMD\ y\ \measuredangle ADC$ que corresponden a un mismo lado no paralelo del trapecio ABCD (ver tabla 14).

De esta forma Rosario mostró su aprehensión perceptiva y operatoria al realizar el tratamiento en el registro figural del trapecio ABCD.

Tabla 14. Aprehensión operatoria – a posteriori Rosario

Figura inicial	**Figura final**
	

Como observamos en la tabla 14, la estudiante mediante la función arrastre del software Geogebra, arrastró el vértice A del trapecio ABCD y modificó la posición de la construcción tal como lo habíamos pensado en el análisis a priori en el segundo ítem (ver tabla 13). De esta manera desde la perspectiva de Duval (1994), la estudiante mostró su aprehensión operatoria de tipo posicional.

Así mismo, permitió a la estudiante observar diferentes configuraciones del trapecio, luego Rosario mediante el registro en lengua natural escribió la relación encontrada entre los ángulos interiores que se encuentran a un mismo lado no paralelo del trapecio ABCD (ver figura 49).

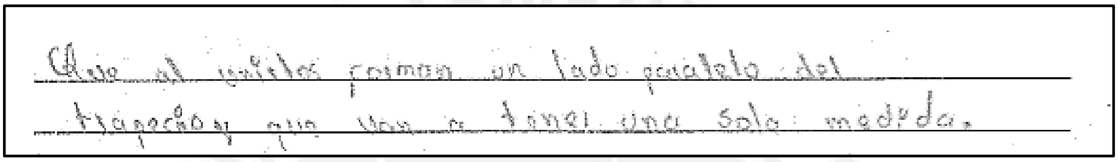


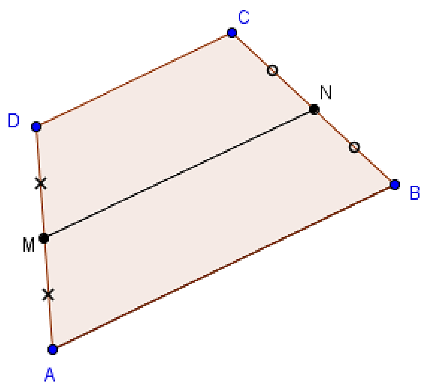
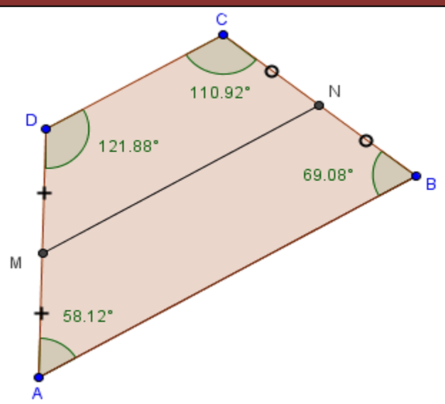
Figura 49. Pregunta 3 - respuesta Rosario

Como mostramos en la figura 49, Rosario escribió la siguiente relación: *Que al unirlos forman un lado paralelo del trapecio y que van a tener una sola medida*, creemos que la estudiante en lugar de establecer la relación entre los ángulos internos, relacionó las medidas de longitud de los segmentos AM y MD del trapecio ABCD.

Análisis a posteriori de la pregunta 3 – estudiante Benilda

Benilda cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori porque en el tratamiento que la estudiante realizó se limitó en medir los ángulos internos del trapecio (ver tabla 15).

Tabla 15. Aprehensión operatoria – a posteriori Benilda

<table>
<tr><th>Figura inicial</th><th>Figura final</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

De acuerdo a lo que observamos en la tabla 15, la estudiante,con el apoyo de la herramienta medida, midío los angulos internos del trapecio ABCD y basandose en la percepción sobre la figura la estudiante mediante el registro en lengua natural, escribió lo siguiente (ver figura 50).

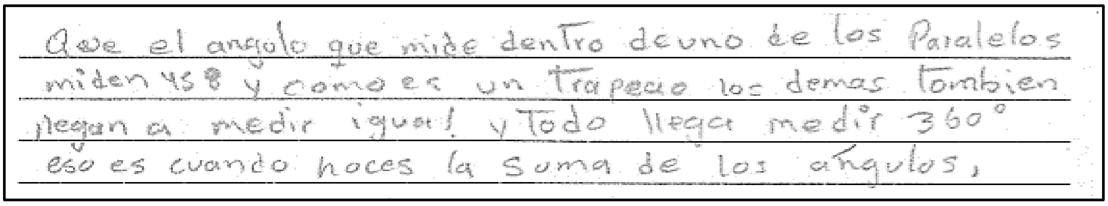

Que el angulo que mide dentro deuno de los Paralelos miden 45° y como es un Trapecio los demas tambien llegan a medir igual y Todo llega medir 360° eso es cuando hoces la suma de los angulos,

Figura 50. Pregunta 3 – respuesta Benilda

De acuerdo a lo observado en la figura 50, la estudiante escribió la siguiente relación: *Que el ángulo que mide dentro de uno de los lados paralelos miden 45°*, esta afirmación nos hace pensar que la estudiante por su simple persepción determina que $\sphericalangle AMN$ es un ángulo recto, y cuando afirma que, *como es un trapecio los demás tambien llegan a medir igual y todo llega a medir 360° eso es cuando haces la suma de los angulos*, esta afirmación a diferencia de lo que esperabamos en el analisis a priori, nos hace pensar que la estudiante conoce la propiedad de la suma de ángulos internos de un cuadrilátero y como el trapecio es un cuadrilátero entonces ella afirma que la suma de sus ángulos internos tambien es 360°.

<u>Formalización parcial – Actividad 2 - pregunta 3</u>

Luego que los estudiantes finalizaron el desarrollo de la tercera pregunta, la profesora investigadora realizó la formalización parcial a partir de la construcción presentada a los estudiantes (ver figura 44).

La profesora investigadora, realizó tratamientos en la figura y conectó conocimientos sobre ángulos formados por dos rectas paralelas y una recta secante (propiedad de ángulos conjugados internos), para establecer la relación entre los pares de ángulos interiores que se encuentran a un mismo lado de uno de los lados no paralelos del trapecio ABCD.

Finalmente, los estudiantes percibieron cual es la relación entre los ángulos internos que se encuentran a un mismo lado de uno de los lados no paralelos del trapecio ABCD y reconocieron los ángulos internos, lados paralelos y no paralelos del trapecio ABCD.

A continuación, presentamos la última actividad en la cual los estudiantes utilizarán las mismas estrategias para conjeturar las observaciones que harán del trapecio ABCD, y la relación entre los elementos geométricos existentes. De esta manera, pondrán en práctica todo lo que aprendieron en las actividades anteriores.

Actividad 3: Trabajemos con las bases del trapecio

Esta última actividad consta de cuatro preguntas, tiene por objetivo articular las aprehensiones en el registro figural y conjeturar la propiedad de la base media del trapecio. Pensamos que alcanzaremos este objetivo a partir de observaciones que realizarán en el trapecio ABCD propuesto, al ubicar puntos y trazar rectas, así como también analizar las posiciones de los segmentos que forman las bases del trapecio y establecer la relación que existe entre las longitudes de la base media en función de las otras bases del trapecio ABCD, al realizar tratamientos en el registro figural. Esperamos también que los estudiantes conjeturen la propiedad de la base media del trapecio ABCD al articular las aprehensiones operatoria y discursiva y al realizar el tratamiento en el registro figural.

A continuación, presentamos el análisis a priori y a posteriori de la actividad.

Pregunta 1:

Indicación: Abra el archivo. Ggb Actividad 3, en la figura que representa al trapecio ABCD, se tiene que $\overline{CD}$ es paralela a $\overline{AB}$, tal como se muestra en la siguiente figura. **Sugerencia:** Para desarrollar la actividad puede usar las herramientas de medida u otras herramientas del software Geogebra.

Para desarrollar las cuatro preguntas de la actividad 3, se propone una representación figural del trapecio ABCD, donde los estudiantes deberán realizar tratamientos y a partir de ella realizar observaciones para luego establecer relaciones de acuerdo a las preguntas que se plantearán en esta actividad. A continuación, mostramos la construcción del trapecio ABCD representado en el software Geogebra (ver figura 51).

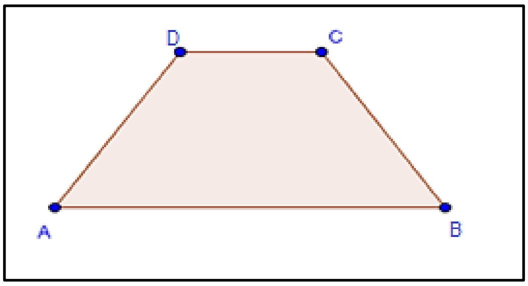


Figura 51. Representación del trapecio ABCD.

De la misma forma en la figura 52, mostramos la pregunta 1 en el cual los estudiantes deben realizar tratamientos en la figura de acuerdo a las indicaciones de la pregunta 1.

1. Luego de abrir el archivo, ubique los puntos medios M y N con la herrami[…] de los lados no paralelos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Ahora arrastre el vértice A ¿Cómo son las longitudes de $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$? Explica.

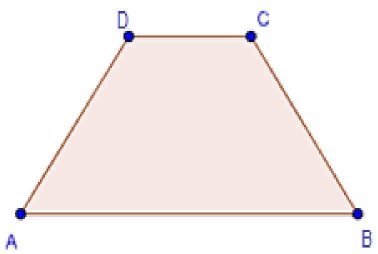
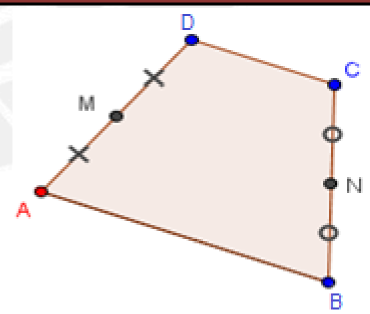
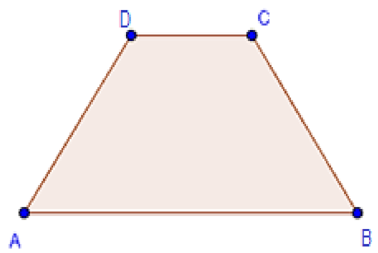
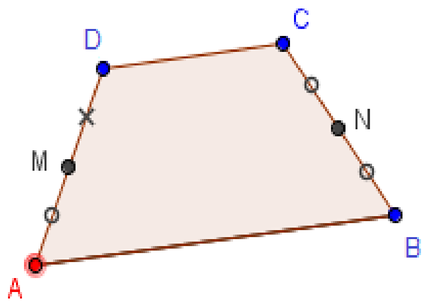
Figura 52. Actividad 3 - pregunta 1

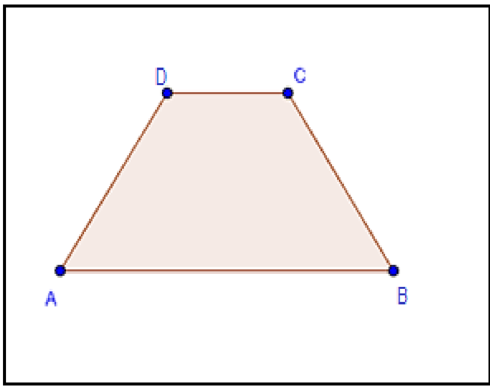
Análisis a priori:

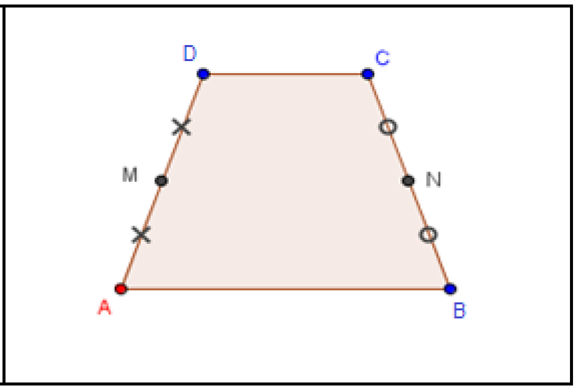
En esta pregunta, esperamos que los estudiantes reconozcan los lados no paralelos del trapecio ABCD y ubiquen los puntos medios M y N. También esperamos que arrastren el vértice A, ya que esta acción les permitirá obtener diferentes configuraciones e identificar propiedades conocidas como la congruencia entre dos segmentos y, en base a ello, conjeturar cómo son las longitudes de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ del trapecio ABCD.

En la tabla 16 presentamos los posibles tratamientos que realizarán los estudiantes al arrastrar el vértice A.

Tabla 16. Aprehensión operatoria a priori

Figura propuesta	Primera modificación a priori de la figura
	
	





Como mostramos en la tabla 16, pensamos que los estudiantes, a partir de sus aprehensiones operatorias, realizarán modificaciones en la figura como: ubicar los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio ABCD, marcas las longitudes de los segmentos AM y MD para representar la congruencia de los segmentos formados entre ellas.

De esta forma, se evidenciará la coordinación entre la aprehensión operatoria y perceptiva, así mismo al realizar el arrastre del vértice A, pensamos que cambiarán la posición inicial del trapecio ABCD, es por ello que presentamos tres posibles casos que podrían realizar los estudiantes.

También, pensamos que los estudiantes establecerán la siguiente explicación: *Como M es punto medio del* $\overline{AD}$ *, entonces M divide en dos partes iguales al* $\overline{AD}$*, por lo tanto* $\overline{AM}$ *y* $\overline{MD}$ *son congruentes por tener la misma longitud de medida.*

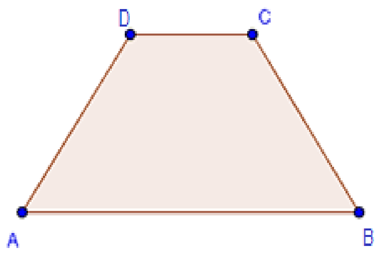
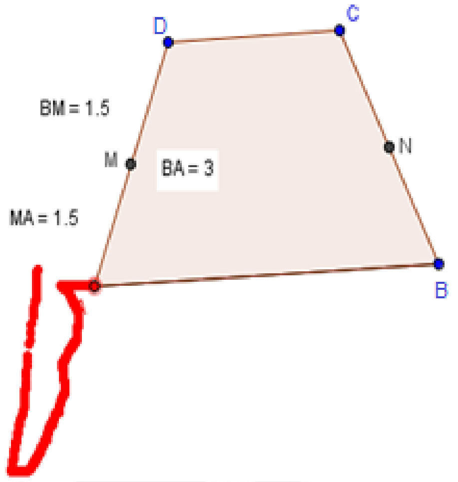
De esta manera, esperamos que los estudiantes sustenten su explicación mediante un discurso deductivo en base a propiedades que ya conocen (puntos medios y congruencia de segmentos) a partir de la articulación de sus aprehensiones y, con el apoyo del Geogebra, también desarrollen su aprehensión operatoria y discursiva al realizar el tratamiento en el registro figural.

Además, pensamos que los estudiantes se apoyarán en la herramienta de medida del software Geogebra y medirán la longitud de los segmentos $\overline{AM}$ *y* $\overline{MD}$, de esta forma podrían llegar a establecer una explicación sobre lo que observan.

Análisis a posteriori de la pregunta 1 – estudiante Rosario

Rosario, en el tratamiento que realizó en la figura inicial del trapecio ABCD, modificó la figura inicial al ubicar los puntos medios M y N de los lados no paralelos del trapecio, tal como lo habíamos previsto en el análisis a priori; luego con la herramienta *medida* del software Geogebra, midió la longitud del segmento $\overline{AD}$ y la longitud de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ (ver tabla 17).

Tabla 17. Aprehensión operatoria – a posteriori Rosario

Figura propuesta	Primera modificación de la figura
	

Como observamos en la tabla 17, la estudiante luego de haber medido las longitudes de los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$, arrastró el vértice A en diferentes direcciones y cambió la posición de la construcción como lo que habíamos previsto en el segundo caso a priori de la posible aprehensión operatoria del trapecio ABCD (ver tabla 16), de esta manera obtuvo una nueva configuración del trapecio ABCD.

Además, pensamos que mediante las modificaciones hechas en la figura, la estudiante relacionó unidades figurales de dimensión 1 (segmentos) y realizó la explicación sobre las longitudes de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$, mediante el registro en lengua natural.

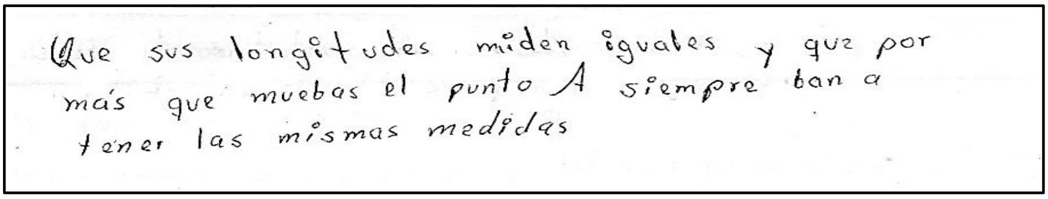

Que sus longitudes miden iguales y que por más que muebas el punto A siempre ban a tener las mismas medidas

Figura 53. Pregunta 1 – respuesta Rosario

Como se observa en la figura 53, Rosario escribió la siguiente explicación: *Que sus longitudes miden iguales y que por más que muevas el punto A siempre van a tener las mismas medidas*. Esta afirmación nos hace pensar que se refiere a la propiedad de los puntos medios, para relacionar la igualdad de los segmentos AM y MD; esta afirmación corresponde a una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos porque se basa en un número potencialmente infinito de casos dinámicos. También pensamos que la estudiante no relaciona la igualdad de longitudes de los segmentos con la congruencia.

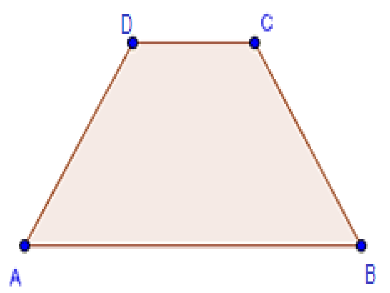
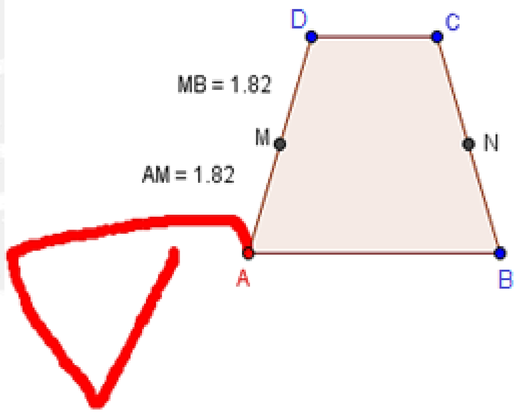
Además, se evidencia la coordinación entre la aprehensión operatoria y discursiva (moviliza conocimientos matemáticos).

Finalmente, podemos afirmar que Rosario cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori.

Análisis a posteriori de la pregunta 1 – estudiante Benilda

Benilda cumplió con lo esperado en el análisis a priori, porque, en el tratamiento que la estudiante realizó, ubicó el punto medio M y N en los lados no paralelos del trapecio ABCD, como habíamos previsto en el análisis a priori, luego con ayuda de la herramienta *medida* del software Geogebra, midió los segmentos $\overline{AM}\ y\ \overline{MD}$ (ver tabla 18).

Tabla 18. Aprehensión operatoria – a posteriori Benilda

Figura propuesta	Primera modificación de la figura
	

Como se observa en la tabla 18, la estudiante arrastró el vértice A en diferentes direcciones, para finalmente ubicarlo en la posición inicial de la construcción como lo habíamos previsto en el tercer caso a priori (ver tabla 16). Pensamos que esto se debe a que los estudiantes están acostumbrados al uso de figuras prototípicas (figuras en posición convencional sobre el plano) en las clases de geometría. Después de observar las diferentes configuraciones de la figura y los tratamientos realizados en ella, la estudiante explicó, mediante el registro en lengua natural, como son los segmentos $\overline{AM}\ y\ \overline{MD}$ del trapecio ABCD (ver figura 54).

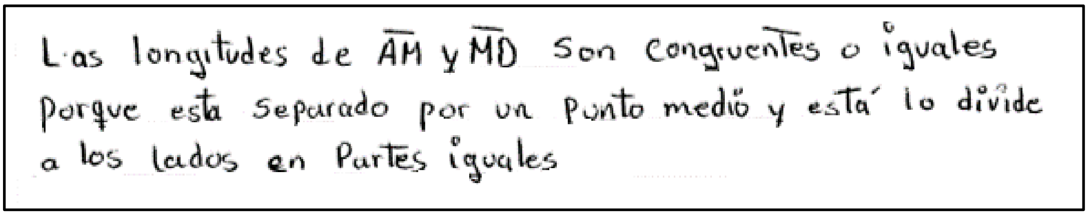

Las longitudes de $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ son congruentes o iguales porque esta separado por un punto medio y está lo divide a los lados en partes iguales

Figura 54. Pregunta 1 – respuesta Benilda

De acuerdo a lo que se observa en la figura 54, la estudiante, al igual que Rosario al realizar el tratamiento en la figura y al observar las diferentes configuraciones del trapecio, relacionó unidades figurales de dimensión 1 (segmentos) con la propiedad de punto medio y la explicación que realizó fue la siguiente: *Las longitudes de* $\overline{AM}$ *y* $\overline{MD}$ *son congruentes o iguales esta separado por un punto medio y esta lo divide a los lados en partes iguales*. Esta afirmación nos hace pensar que la estudiante tiene nociones sobre el significado de congruencia y utiliza la propiedad del punto medio para explicar la igualdad de los segmentos. De esta manera, la estudiante evidencia la coordinación de su aprehensión operatoria y discursiva. Así mismo, la afirmación realizada por la estudiante corresponde a una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos.

Finalmente, podemos decir que Benilda cumplió con lo esperado en el análisis a priori.

Formalización parcial – Actividad 3 - pregunta 1

Al finalizar el desarrollo de la pregunta 1 propuesta en la actividad 3, la profesora investigadora realizó la formalización parcial con la participación activa de los estudiantes a partir de la construcción presentada en la figura 51.

La profesora investigadora, realizó tratamientos en la figura propuesta y los conectó con sus conocimientos sobre punto medio de un segmento y congruencia de segmentos, para establecer la relación entre las longitudes de los segmentos $\overline{AM}\ y\ \overline{MD}$.

Finalmente, los estudiantes comprendieron la relación existente entre los segmentos $\overline{AM}\ y\ \overline{MD}$ del trapecio ABCD mediante los tratamientos realizados en el registro figural.

Pregunta 2:

Para desarrollar la pregunta 2, el estudiante debe tener en cuenta la construcción propuesta, con las modificaciones que realizaron para el desarrollo de la pregunta 1 (nueva configuración de la figura). Esta construcción será de acuerdo a como cada estudiante ha realizado el tratamiento en la figura propuesta.

A continuación mostramos la pregunta 2, donde los estudiantes realizarán tratamientos y observaciones para luego mediante la coordinación entre la aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva, expliquen qué sucede con las posiciones de las rectas al realizar el arrastre del vértice B del trapecio ABCD (ver figura 55).

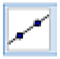
> 2. Con la ayuda de la herramienta  trace una recta que pase por los puntos M y N, trace otra recta que contenga a $\overline{AB}$ y otra recta que contenga a $\overline{CD}$; después arrastre el vértice B del trapecio ABCD. ¿Qué pasa con las posiciones de $\overline{AB}, \overline{MN}$ y $\overline{CD}$? ¿Son paralelas o perpendiculares? Explica lo que observas.

Figura 55. Actividad 3 – pregunta 2

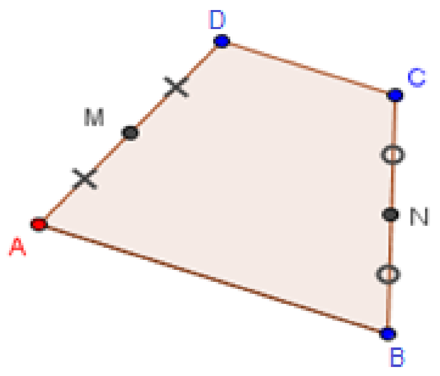
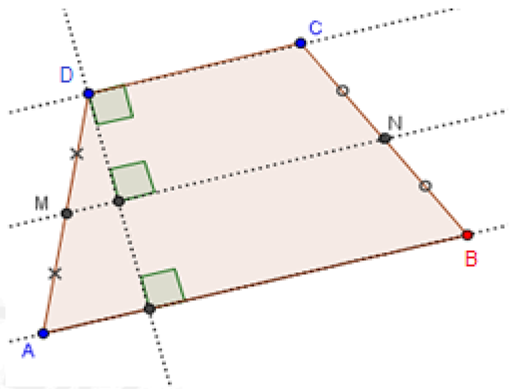
Análisis a priori

En esta pregunta esperamos que los estudiantes realicen trazos auxiliares para responder a las siguientes preguntas: *¿Qué pasa con las posiciones de $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$? ¿Son paralelas o perpendiculares?*, para ello deben trazar la recta que contenga a los puntos medios M y N del trapecio ABCD, la recta que contenga al $\overline{AB}$ y otra recta que contenga al $\overline{CD}$, para luego al realizar el arrastre del vértice B los estudiantes puedan explicar lo que sucede con las posiciones de las rectas trazadas y como son. Para el análisis a priori de esta pregunta, consideramos la primera posibilidad de modificación de la figura luego de su tratamiento para el desarrollo de la pregunta 1(ver tabla 16).

También creemos que los estudiantes, para desarrollar la pregunta 2, deberán movilizar conocimientos previos sobre las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares para determinar a cuál de ellos corresponde este caso.

En la tabla 19, presentamos el posible tratamiento que seguirán los estudiantes al trazar las rectas auxiliares y al arrastrar el vértice B del trapecio ABCD.

Tabla 19. Aprehensión operatoria a priori

Primera modificación a priori de la figura	Segunda modificación a priori de la figura
	

Como mostramos en la tabla 19, pensamos que los estudiantes a partir de sus aprehensiones operatorias realizarían modificaciones al trazar una recta perpendicular a una de las bases del trapecio ABCD, ubicarían los puntos de intersección con las bases del trapecio y medirían los ángulos formados por la recta perpendicular y la recta que contiene a las bases del trapecio ABCD. Luego mediante la función arrastre del Geogebra, moverían el vértice B y mediante su aprehensión perceptiva, observarían que en las diferentes configuraciones de la figura, la recta también es perpendicular a las otras bases; entonces, pensamos que los estudiantes al relacionar la perpendicularidad de la recta con las bases del trapecio, realizarían la siguiente explicación: *Al arrastrar el vértice B, los segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ *y* $\overline{CD}$ *cambian de posición y son paralelas, ya que al trazar una recta perpendicular a una de las bases, esta recta también es perpendicular a las otras dos bases; y al prolongar* $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ *y* $\overline{CD}$ *no se interceptan.*

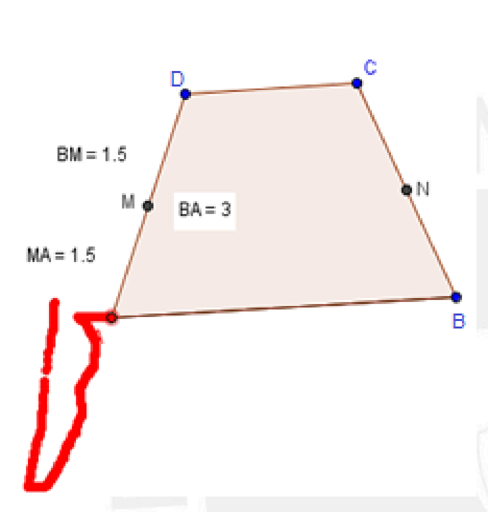
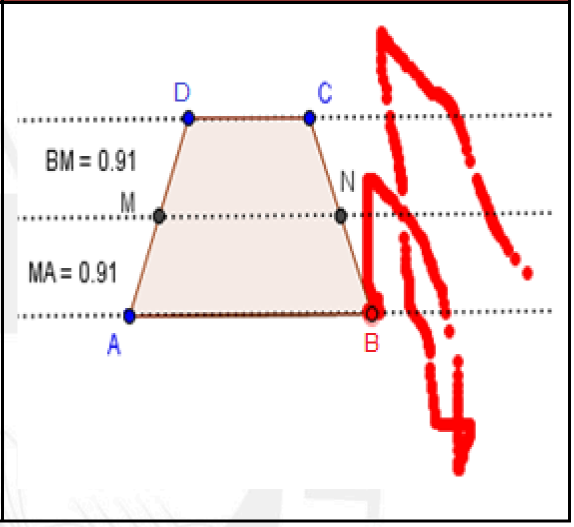
Esta afirmación corresponde a una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos.

Por otro lado, pensamos que los estudiantes al realizar el tratamiento en el registro figural, realizarán la coordinación entre su aprehensión perceptiva y operatoria, así como la coordinación entre su aprehensión operatoria y discursiva.

Análisis a posteriori de la pregunta 2 – estudiante Rosario

Rosario cumplió con lo esperado en el análisis a priori, ya que modificó la figura como lo habíamos previsto en el análisis a priori, porque trazó rectas para prolongar los segmentos $\overline{AB},\ \overline{MN}\ y\ \overline{CD}$, luego arrastró el vértice B del trapecio ABCD (ver tabla 20).

Tabla 20. Aprehensión operatoria - a posteriori

Primera modificación de la figura	Segunda modificación de la figura
	

Como observamos en la tabla 20, la estudiante arrastró el vértice B del trapecio ABCD en diferentes direcciones, para luego ubicarlo en una posición convencional.

Después de las observaciones que realizó de las diferentes configuraciones del trapecio ABCD, la estudiante mediante el registro en lengua natural, escribió lo siguiente (ver figura 56).

Que al mover el vértice B también se mueven ellos así
que por lo tanto son paralelas.

Figura 56. Pregunta 2 – respuesta Rosario

Como observamos en la figura 56, la estudiante estableció la siguiente explicación: *Que al mover el vértice B también se mueven ellos así que por lo tanto son paralelas.*

Esta afirmación nos hace pensar que la estudiante se limitó en observar el movimiento de las rectas y neutralizó los demás elementos geométricos; guiándose de la percepción de la figura, relacionó la configuración del trapecio con las rectas que contienen a las bases del trapecio con el paralelismo. Esto significa que la estudiante realizó una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos.

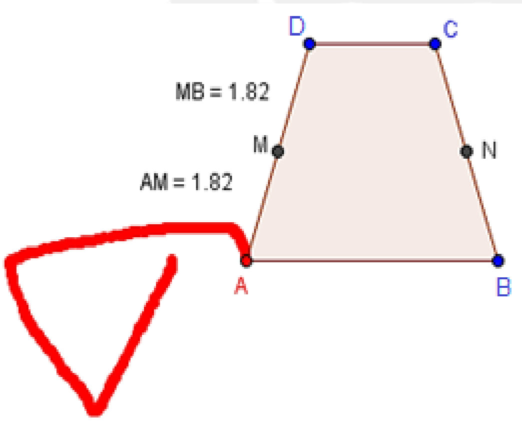
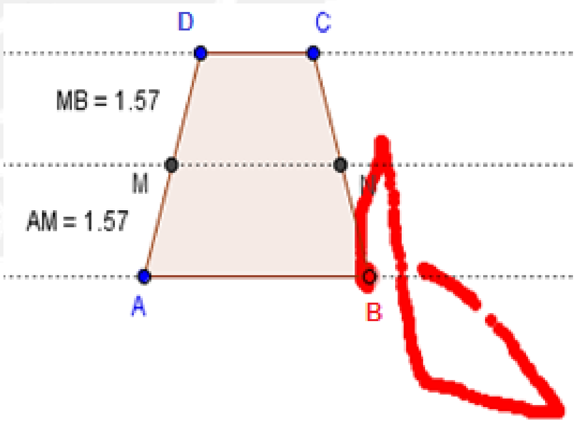
Así mismo, Rosario realizó la coordinación entre su aprehensión perceptiva y operatoria. Finalmente, la estudiante, de una manera diferente, cumplió con lo esperado en el análisis a priori.

Análisis a posteriori de la pregunta 2 – estudiante Benilda

Benilda cumplió con lo esperado en el análisis a priori, porque al revisar el tratamiento que la estudiante realizó en la figura (primera figura modificada), realizó trazos auxiliares, como por ejemplo, trazó las rectas que contienen los $\overline{AB}, \overline{MN}\ y\ \overline{CD}$, pensamos que lo hizo con la intención de prolongar los segmentos y relacionar las rectas que las contienen.

Así mismo la estudiante con la ayuda de la herramienta del software Geogebra, midió los segmentos generados por los puntos medios M y N (ver tabla 21), de esta manera la estudiante realizó el tratamiento en el registro figural.

Tabla 21. Aprehensión operatoria – a posteriori Benilda

Primera modificación de la figura	Segunda modificación de la figura
	

Como observamos en la tabla 21, la estudiante arrastró el vértice B en diferentes direcciones, observó las diferentes configuraciones del trapecio ABCD, ubicó la figura en la posición inicial de acuerdo a la primera modificación que realizó la estudiante. Luego mediante el registro en lengua natural escribió lo siguiente (ver figura 57).

* Que al mover el Vertice B los Posiciones $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ Combian de dirección.

* Son Paralelos Porque al mover el vertice B el Segmento $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ Se mueven y También pueden cambiar sus medidas y nunca se van a intersectar.

Figura 57. Pregunta 2 – respuesta Benilda

Como se observa en la figura 57, la estudiante señala *Que al mover el vértice B las posiciones de* $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ *y* $\overline{CD}$ *cambian de dirección*, pensamos que esta afirmación se debe a que la estudiante, al igual que Rosario, se limitó en observar la configuración del trapecio ABCD y las rectas que contienen a las bases del trapecio, fijándose en las posiciones que adoptaban las rectas en función de las direcciones en las que arrastró el vértice B (ver tabla 21). Luego escribe *Son paralelos porque al mover el vértice B, el segmento* $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ *y* $\overline{CD}$ *se mueve y también pueden cambiar sus medidas y nunca se van a intersectar*. Esta afirmación nos hace pensar que la estudiante relacionó las propiedades de rectas paralelas con las configuraciones de las rectas que contienen a los segmentos AB, MN y CD, es así que la explicación realizada por Benilda se basa en la percepción que realizó sobre las diferentes configuraciones del trapecio ABCD, esto significa que la estudiante realizó una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos. Además, de acuerdo a las acciones realizadas por la estudiante, se evidencia la coordinación entre su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva. Finalmente, podemos decir que Benilda cumplió con lo esperado en el análisis a priori.

<u>Formalización parcial – Actividad 3 - pregunta 2</u>

Luego que los estudiantes finalizaron el desarrollo de la pregunta 2 propuesta en la actividad 3, la profesora investigadora realizó la formalización parcial a partir de tratamientos realizados en el registro figural del trapecio ABCD (ver figura 51).

Estableciendo las siguientes relaciones: *Como se trata de un trapecio, sabemos que por definición, dos de sus lados son paralelas (llamadas bases). Por lo tanto, las dos rectas que contienen a las bases del trapecio ABCD también serán paralelas. Ahora, para determinar que el segmento* $\overline{MN}$ *también es paralelo, la profesora investigadora se apoyó en las propiedades de rectas paralelas cortadas por una recta secante (ángulos conjugados internos).*

De esta manera, los estudiantes percibieron la importancia de realizar conexiones de conocimientos (propiedades de rectas paralelas cortadas por una secante) con las propiedades del trapecio.

Pregunta 3:

Para desarrollar la pregunta 3, el estudiante debe tener en cuenta la construcción con las modificaciones que realizaron para el desarrollo de la última pregunta (pregunta 2). Esta construcción será de acuerdo a como cada estudiante ha realizado el tratamiento en la figura propuesta.

A continuación, mostramos la pregunta 3, donde los estudiantes realizarán tratamientos y observaciones para, mediante su aprehensión perceptual, determinen el nombre de la figura obtenida luego de realizar algunas modificaciones en la representación figural del trapecio ABCD (ver figura 58).

3. Luego con la herramienta compas traslade la longitud de $\overline{CD}$ a continuación del vértice B hasta un punto Q, de la misma forma traslade la longitud de $\overline{AB}$ a continuación del vértice C hasta un punto P. Luego trace una recta que contenga a los puntos P y Q. Observa y responde ¿Qué figura representa el cuadrilátero AQPD? Explique.

Figura 58. Actividad 3 – pregunta 3

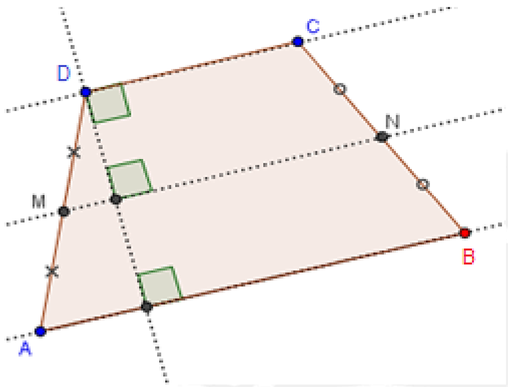
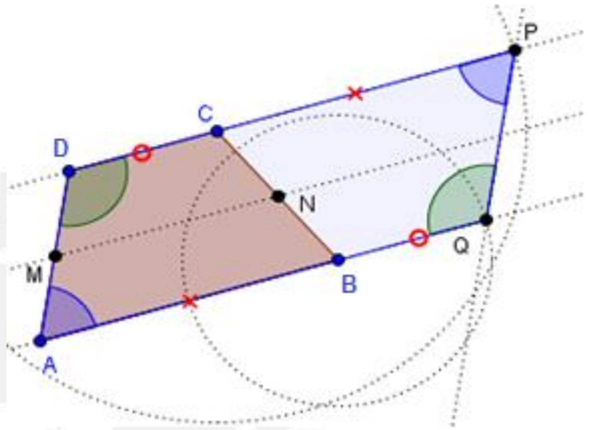
Análisis a priori

En esta pregunta esperamos que los estudiantes trasladen las longitudes de $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$, ubique los puntos P y Q; y tracen una recta que las contengan; pensamos que estas acciones les permitirán asociar las propiedades que corresponden a la nueva la figura construida y, en base a los conocimientos que tienen sobre el objeto matemático construido, podrán responder a la siguiente pregunta: *¿Qué figura representa el cuadrilátero AQPD?* y realizará la explicación de ello. Para el análisis a priori de esta pregunta, consideraremos la segunda modificación de la figura propuesta inicialmente, que fue sujeta a modificaciones para el desarrollo a priori de la pregunta 2 (ver tabla 19).

También creemos que los estudiantes, para desarrollar la pregunta 3, deberán movilizar conocimientos previos sobre las propiedades de los cuadriláteros para determinar a qué cuadrilátero representa.

En la tabla 22, presentamos el posible tratamiento que seguirán los estudiantes en el trapecio ABCD.

Tabla 22. Aprehensión operatoria a priori

Segunda modificación a priori de la figura	**Tercera modificación a priori de la figura (reconfiguración)**
	

Como mostramos en la tabla 22, pensamos que los estudiantes borrarán algunos elementos de la figura que no les sean necesarios para el desarrollo de la pregunta 3. Así mismo, creemos que los estudiantes realizarán la reconfiguración de la figura (aprehensión operatoria de tipo mereológica), luego de trasladar las medidas de los segmentos con ayuda de la herramienta *compas* y marcar el polígono AQPD con ayuda de la herramienta *polígono*, los estudiantes utilizarán la función arrastre del software Geogebra el cual les permitirá obtener diferentes configuraciones de la nueva figura y a partir de las observaciones que realicen, pensamos que ellos establecerán la siguiente afirmación: *Sí* $\overline{AB} \cong \overline{CP}$ *y* $\overline{CD} \cong \overline{BQ}$, *entonces* $\overline{DP}$ *y* $\overline{AQ}$ *son congruentes, así mismo sabemos que* $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ *entonces* $\overline{DP} \parallel \overline{AQ}$, *sí los ángulos opuestos son congruentes y las diagonales se bisecan, entonces AQPD es un paralelogramo.* Esta afirmación corresponde a una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos

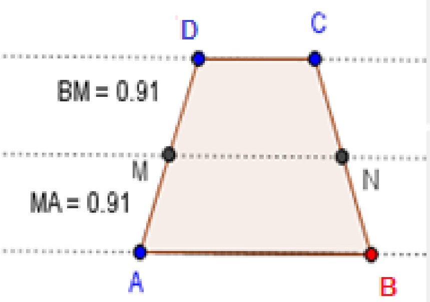
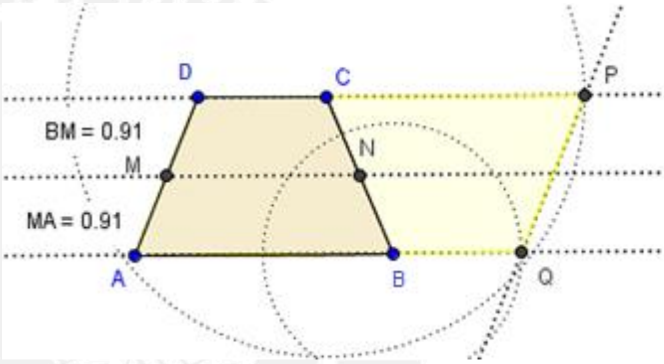
De esta forma, pensamos que los estudiantes relacionaran los elementos geométricos existentes y establecerán razonamientos al movilizar conocimientos adquiridos anteriormente. De esta manera, el estudiante realizará la coordinación entre su aprehensión operatoria y discursiva.

Creemos también que los estudiantes se apoyarán en la herramienta *medida* para verificar las razones planteadas.

Análisis a posteriori de la pregunta 3 – estudiante Rosario

Rosario cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori porque traslado las longitudes de los segmentos $\overline{CD}\ y\ \overline{AB}$ con ayuda de la herramienta *compas* y ubicó los puntos de intersección P y Q (ver tabla 23).

Tabla 23. Aprehensión operatoria – a posteriori Rosario

Segunda modificación a priori de la figura	Tercera modificación a priori de la figura
	

Como observamos en la tabla 23, la estudiante mediante su aprehensión operatoria, realizó modificaciones mereológicas al realizar trazos como lo habíamos previsto en el análisis a priori de la pregunta 3, no borro ningún elemento geométrico considerado en la segunda modificación de la figura, se apoyó en la herramienta polígono para marcar el cuadrilátero AQPD.

Luego mediante el registro en lengua natural, la estudiante escribió la siguiente afirmación (ver figura 59).

> Representa a la figura de un rectangulo en donde dos de sus lados miden iguales.

Figura 59. Pregunta 3 – respuesta Rosario

De acuerdo a lo que observamos en la figura 59, Rosario escribió la siguiente afirmación: *Representa a la figura de un rectángulo en donde dos de sus lados miden iguales*. Esta afirmación nos hace pensar que la estudiante realizó una percepción simple de la configuración final de la figura (cuadrilátero AQPD).

Esta afirmación corresponde a una conjeturas basadas en la percepción de acuerdo a Cañadas et al, 2008.

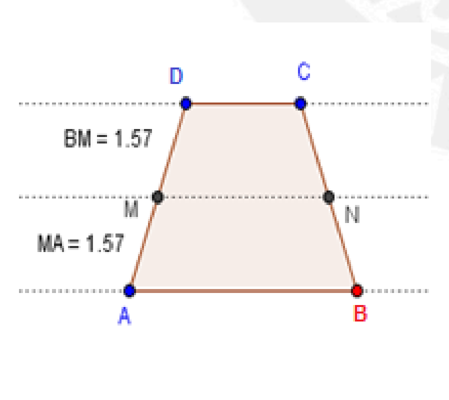
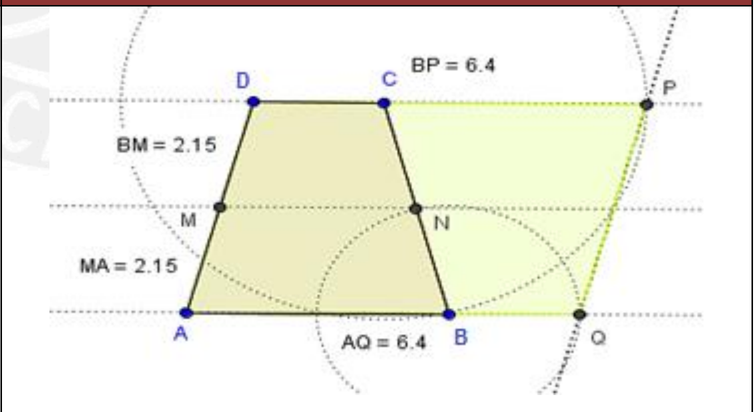
También pensamos que la estudiante neutralizó los elementos geométricos (ángulos internos, longitud de los segmentos AD, DC, CP, PQ, QB y BA), los cuales le hubieran permitido realizar una afirmación correcta sobre el cuadrilátero AQPD.

Finalmente podemos decir que la estudiante cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori de la pregunta 3.

Análisis a posteriori de la pregunta 3 – estudiante Benilda

Benilda cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori porque, al igual que Rosario, traslado las longitudes de los segmentos $\overline{CD}\ y\ \overline{AB}$ con ayuda de la herramienta *compas* y ubicó los puntos de intersección P y Q tal como se muestra en la tabla 24.

Tabla 24. Aprehensión operatoria – a posteriori Benilda

<table>
<tr><th>Segunda modificación a priori de la figura</th><th>Tercera modificación a priori de la figura</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Así mismo, observamos en la tabla 24 que la estudiante realizó los trazos como lo habíamos previsto en el análisis a priori de la pregunta 3; con la herramienta polígono, marco el cuadrilátero AQPD y luego se apoyó en la herramienta *medida* del software Geogebra para medir los segmentos $\overline{AQ}\ y\ \overline{DP}$ del cuadrilátero AQPD, así como también arrastró el vértice A. Esta última acción le permitió observar diferentes configuraciones de la figura construida y asociar las propiedades de cada uno de los elementos geométricos que se encuentran en ella. De esta manera, Rosario evidenció su aprehensión operatoria.

Luego mediante el registro en lengua natural, la estudiante escribió la siguiente afirmación (ver figura 60).

Cuando unimos el Vertice AQPD estas forman un rectangulo
Con medidas iguales de cada dos de Sus lados.

Figura 60. Pregunta 3 – respuesta Benilda

Como observamos en la figura 60, Benilda escribió la siguiente afirmación: *Cuando unimos el vértice AQPD estas forman un rectángulo con medidas iguales de cada dos de sus lados,* esta afirmación nos hace pensar que la estudiante se basó en las observaciones de las diferentes configuraciones del cuadrilátero AQPD, relacionó propiedades de los cuadriláteros, para llegar a la afirmación que "*cada dos de sus lados tienen la misma medida"*, pero no consideró las medidas de los ángulos interiores del cuadrilátero AQPD. Finalmente, la percepción que realizó sobre la configuración final de la figura (cuadrilátero AQPD) no es correcta. Esta afirmación, de acuerdo con Cañadas et al (2008), corresponde a una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos.

Así mismo, en los procedimientos realizados por Benilda, se evidencia la coordinación entre la aprehensión operatoria y perceptiva.

Finalmente podemos decir que la estudiante cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori de la pregunta 3.

Formalización parcial – Actividad 3 - pregunta 3

Luego que los estudiantes finalizaron el desarrollo de la pregunta 3 propuesta en la actividad 3, la profesora investigadora realizó la formalización parcial a partir de tratamientos realizados en el registro figural del trapecio ABCD (ver figura 51).

La profesora investigadora se apoyó en las herramientas del software Geogebra y mostró las propiedades del cuadrilátero AQPD y, para verificar las propiedades midió y arrastró uno de sus vértices, para que finalmente concluya que el cuadrilátero AQPD representa a un paralelogramo.

De esta manera los estudiantes movilizaron conocimientos sobre cuadriláteros y sus propiedades, evidenciando su aprehensión perceptiva y operatoria.

Pregunta 4:

En esta pregunta, el estudiante debe tener en cuenta la construcción con las modificaciones que realizaron para el desarrollo de la pregunta 3. Esta construcción será de acuerdo a como cada estudiante ha realizado el tratamiento en la figura propuesta.

A continuación, mostramos la pregunta 4, para responder esta pregunta, los estudiantes deben realizar tratamientos en la figura y observaciones de las modificaciones que se pueden realizar en ella, para que, mediante su aprehensión operatoria y discursiva, puedan determinar la relación que existe entre la longitud de $\overline{MN}\ y\ \overline{MO}$, así como también, establecer la relación entre la longitud $\overline{MN}$ en función de las longitudes de las bases $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ del trapecio ABCD (ver figura 61).

> 4. Ubique el punto de intersección "O" entre las rectas que contienen a $\overline{MN}\ y\ \overline{PQ}$. ¿Cuál es la relación entre las longitudes de $\overline{MN}\ y\ \overline{MO}$? ¿Cuál es la relación de la longitud de $\overline{MN}$ en función de las longitudes de las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$? Explique.

Figura 61. Actividad 3 – pregunta 4

Análisis a priori

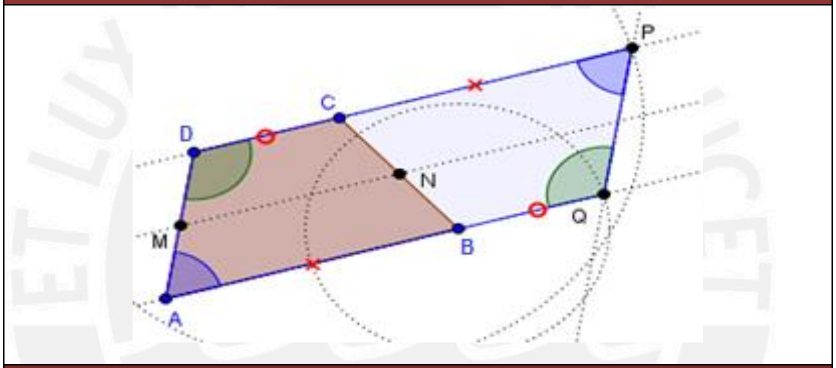
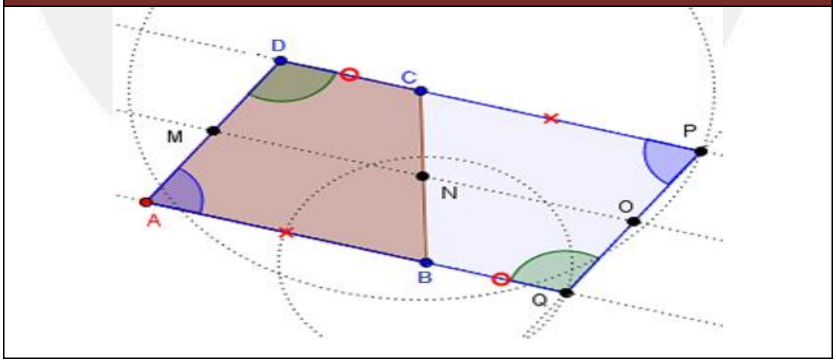
En esta pregunta, esperamos que los estudiantes identifiquen elementos geométricos en la figura, como las rectas que contienen a los segmentos $\overline{MN}\ y\ \overline{PQ}$, ubiquen el punto de intersección O y luego arrastren uno de los vértices del cuadrilátero ABPQ. Pensamos que esta acción permitirá a los estudiantes realizar observaciones de las diferentes configuraciones de la figura, para que a partir de ellos pueda identificar dos sub configuraciones en la configuración final: trapecios isósceles ABCD y CBQP. Pensamos que estas acciones les permitirán asociar las propiedades que corresponden a la figura construida y, en base a los conocimientos que tienen sobre congruencia, podrán responder a la siguientes preguntas: *¿Cuál es la relación entre las longitudes de* $\overline{MN}$ *y* $\overline{MO}$*?¿Cuál es la relación de la longitud de* $\overline{MN}$*en función de las bases* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *del trapecio ABCD?*

Para el análisis a priori de esta pregunta, consideraremos la tercera modificación de la figura propuesta inicialmente, que fue sujeta a modificaciones para el desarrollo a priori de la pregunta 3 (ver tabla 22).

También creemos que los estudiantes, para desarrollar la pregunta 4, deberán movilizar conocimientos previos sobre congruencia para determinar la relación entre las longitudes de las bases del trapecio ABCD y el trapecio CBPQ.

En la tabla 25, presentamos el posible tratamiento que seguirán los estudiantes en el trapecio ABCD.

Tabla 25. Aprehensión operatoria a priori

Tercera modificación a priori de la figura

Cuarta modificación a priori de la figura


Como mostramos en la tabla 25, pensamos que los estudiantes ubicarán el punto de intersección O entre las rectas que contienen a los segmentos $\overline{MN}\ y\ \overline{PQ}$ y a partir de su aprehensión perceptiva esperamos que identifiquen los trapecios ABCD y CBQP.

Así mismo, pensamos que los estudiantes, al arrastrar el vértice A de la figura, les permitirá observar diferentes configuraciones y luego de analizarlas establecerán la siguiente afirmación: *Como ADPQ es un paralelogramo,* $\overline{MO}$ *es la paralela media; además, por construcción, se sabe que el trapecio ABCD ≅ al trapecio CBQP; por lo tanto, la relación* *entre* $\overline{MN}$ *y* $\overline{MO}$ *es que, sí N es punto medio de* $\overline{MO}$ *entonces* $\overline{MN} = \frac{\overline{MO}}{2}$. *Luego, como* $\overline{MO} = \overline{AB} + \overline{BQ}$ *y* $\overline{BQ} \cong \overline{CD}$, *entonces* $\overline{MN} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$, *esto significa que* $\overline{MN}$ *es la semisuma de las bases del trapecio ABCD.* De esta manera, esperamos que los estudiantes realicen una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos, de acuerdo a Cañadas et al, 2008.

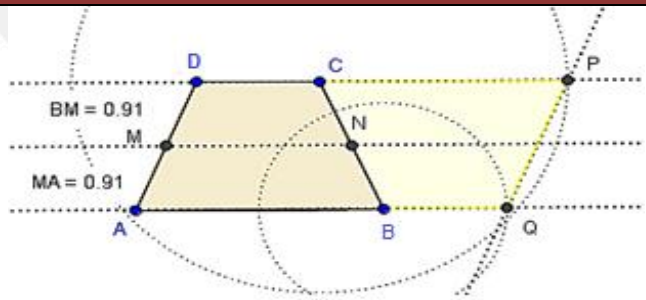
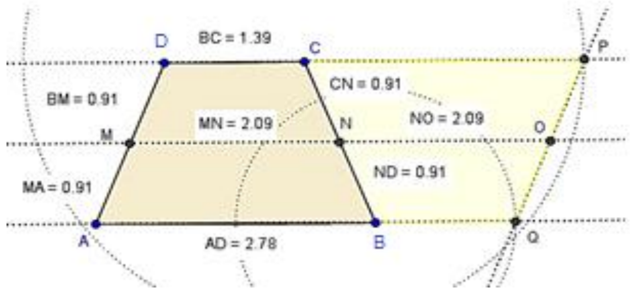
Así mismo, pensamos que los estudiantes relacionarán las propiedades de los elementos geométricos existentes en la figura y establecerán razonamientos al movilizar conocimientos sobre segmentos congruentes, de esta forma también evidenciaran la coordinación entre su aprehensión operatoria y discursiva.

Creemos, también, que los estudiantes se apoyarán en la herramienta *medida* para verificar las razones planteadas.

Análisis a posteriori de la pregunta 4 – estudiante Rosario

Rosario cumplió parcialmente con lo esperado en el análisis a priori de la pregunta 4, porque en la configuración de la tercera modificación (ver tabla 23), la estudiante identificó las rectas que contienen a los segmentos $\overline{MN}$ *y* $\overline{PQ}$ y ubicó el punto de intersección O (ver tabla 26).

Tabla 26. Aprehensión operatoria – a posteriori Rosario

Tercera modificación a priori de la figura

Cuarta modificación a priori de la figura


Como podemos observar en la tabla 26, la estudiante se apoyó en la herramienta medida del software Geogebra y midió la longitud de las bases del trapecio ABCD, los segmentos $\overline{CN}$, $\overline{NB}$ y $\overline{NO}$.

Luego mediante el registro en lengua natural, la estudiante escribió la siguiente afirmación (ver figura 62).

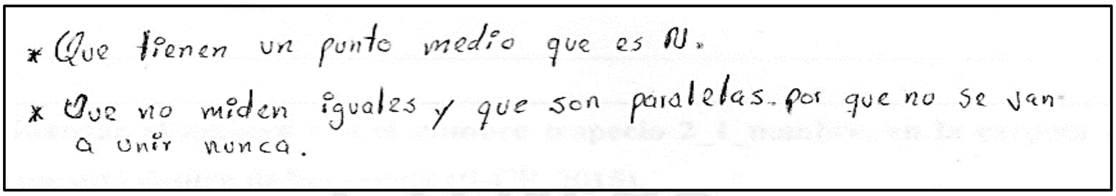

* Que tienen un punto medio que es N.
* Que no miden iguales y que son paralelas. por que no se van a unir nunca.

Figura 62. Pregunta 4 – respuesta Rosario

Como observamos en la figura 62, Rosario, para la primera cuestión escribió la siguiente afirmación: *Que tiene un punto medio que es N*, esta afirmación nos hace pensar que la estudiante, al observar las longitudes de los segmento $\overline{MN}$ y $\overline{NO}$, relacionó estas medidas con la propiedad de punto medio, es por ello que indica que N es punto medio. Sin embargo no era lo que esperábamos a priori, para la segunda cuestión de la pregunta 4, la estudiante escribió la siguiente afirmación: *Que no miden iguales y que son paralelas porque no se van a unir nunca,* creemos que esta afirmación se debe a que la estudiante realizó una aprehensión perceptiva de las rectas que contienen a las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, esto se debe a que la estudiante no utilizó la función arrastre del Geogebra, se limitó a realizar una percepción simple de la figura y comparó las longitudes de los segmentos en cuestión.

La afirmación realizada por la estudiante, de acuerdo a cañadas et al (2008) corresponde a una Conjeturas basadas en la percepción.

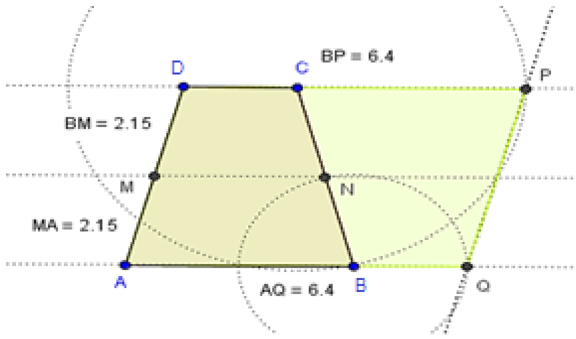
Por lo tanto esto significa que Rosario no llegó a conjeturar la propiedad de la base media del trapecio ABCD.

Análisis a posteriori de la pregunta 4 – estudiante Benilda

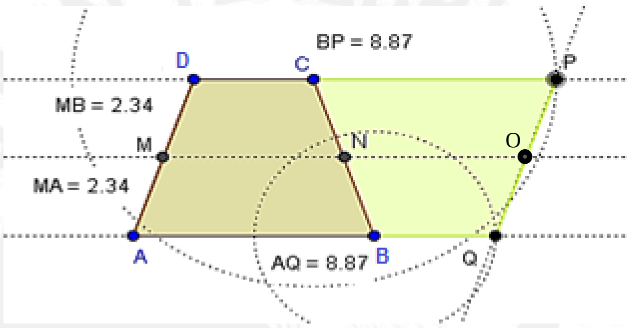
De acuerdo a las acciones realizadas por Benilda, podemos decir que cumplió con lo esperado en el análisis a priori de la pregunta 4, porque en la configuración de la tercera modificación (ver tabla 24), la estudiante al igual que Rosario identificó las rectas que contienen a los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ y ubicó el punto de intersección O, tal como se indica en el enunciado de la pregunta (ver tabla 27).

Tabla 27. Aprehensión operatoria – a posteriori Benilda

Tercera modificación a priori de la figura

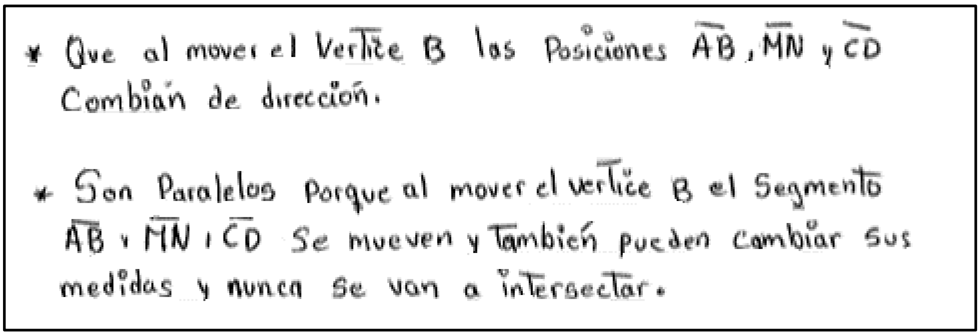


Cuarta modificación a priori de la figura



Así mismo, como observamos en la tabla 27, la estudiante realizó los trazos como lo habíamos previsto en el análisis a priori de la pregunta 4, luego mediante la función arrastre del software Geogebra, arrastró el vértice A del cuadrilátero AQPD. Pensamos que estas acciones le permitieron a la estudiante observar diferentes configuraciones de la representación del trapecio y asociar las propiedades de cada uno de los elementos geométricos que se encuentran en el cuadrilátero AQPD.

Luego mediante el registro en lengua natural, la estudiante escribió la siguiente afirmación (ver figura 63).


* Que al mover el Vertice B las Posiciones $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ Cambian de dirección.

* Son Paralelos Porque al mover el vertice B el Segmento $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ Se mueven y También pueden cambiar sus medidas y nunca se van a intersectar.

Figura 63. Pregunta 4 – respuesta Rosario

Como observamos en la figura 63, Benilda escribió la siguiente afirmación para la primera cuestión de la pregunta 4: *Que el punto N es el punto medio de* $\overline{MO}$ *y esta lo divide en partes iguale entonces* $\overline{MN} = \frac{\overline{MO}}{2}$, esta afirmación nos hace pensar que la estudiante relaciono conocimientos sobre congruencia de segmentos y punto medio de un segmento, para llegar a la afirmación que $\overline{MN}$ es la mitad del segmento $\overline{MO}$. Luego, para la segunda cuestión Benilda escribió la siguiente afirmación: *Que el segmento* $\overline{MN}$ *es el segmento medio de las bases y que es la mitad de AB y CD.* Esta afirmación nos hace pensar que la estudiante identificó las bases del trapecio ABCD y relacionó las longitudes de los segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{MO}$ y $\overline{DP}$. Luego identificó la congruencia de los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{BQ}$, para afirmar que $\overline{\text{MN}}$ es el segmento medio de las bases y que es la mitad de AB y CD. De esta manera Benilda conjeturó la propiedad de la base media, esto significa que cumplió con lo esperado en el análisis a priori de la pregunta 4.

<u>Formalización parcial - pregunta 4 – actividad 3</u>

Luego que los estudiantes finalizaron el desarrollo de la pregunta 4 de la actividad 3, la profesora investigadora realizó la formalización parcial con la participación activa de los estudiantes.

La profesora investigadora realizó tratamientos en el registro figural y conectó conocimientos sobre congruencia de triángulos, para establecer la relación entre las de la base media $\overline{MN}$ y las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del trapecio ABCD (procedimiento que se encuentran presentado en el análisis preliminar, p. 44).

De esta manera, los estudiantes percibieron la relación que existe entre las bases del trapecio *ABCD*.

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En la actividad 1, cuyo objetivo fue identificar las propiedades del trapecio escaleno, recto e isósceles, los estudiantes movilizaron sus conocimientos que poseían sobre las nociones del trapecio y sus propiedades, pero al observar el desarrollo de la pregunta nos hemos dado cuenta que los estudiantes cometen errores al registrar propiedades que no corresponden a una clasificación determinada del trapecio, lo cual significa que no han consolidado estos conocimientos en su estructura cognitiva, es por ello que al momento de registrarlos lo hacen de forma incompleta.

En la actividad 1, en la pregunta 2 en la parte A y en la actividad 2 en la pregunta 1, los estudiantes construyeron la representación figural del trapecio ABCD, las herramientas “recta”, “segmento”, “punto”, “punto en objeto” y “polígono” del Geogebra facilitarán el desarrollo de la aprehensión secuencial, porque los estudiantes lograron seguir una secuencia de pasos para la construcción, lo que significa que los estudiantes movilizaron las nociones del trapecio y sus propiedades, conocimientos geométricos como rectas paralelas y segmentos congruentes.

En las actividades 2 y 3, la función arrastre del Geogebra, permitió a los estudiantes mover la figura, para que por medio de las diferentes configuraciones puedan observar propiedades, unidades figurales y asociarlas para establecer relaciones entre ellas.

Así mismo, en la pregunta 2 de la actividad 1 en la parte B, los estudiantes realizaron una conversión del registro discursivo al registro figural y viceversa, pero mostraron dificultad en reconocer el tipo de trapecio.

En la actividad 2, las estudiantes mostraron dificultad en construir el trapecio isósceles, a diferencia de ello construyeron un trapecio escaleno, para ello siguieron una secuencia ordenada de pasos, lo que significa que ambas estudiantes desarrollaron y mostraron su aprehensión secuencial. Así mismo adicional a la construcción del trapecio escaleno, las estudiantes establecieron la relación de congruencia entre las diagonales del trapecio ABCD, mediante la representación figural del trapecio escaleno ellas con ayuda de la función arrastre, ajustaron perceptivamente y realizaron mediciones que les permitió verificar la congruencia de las diagonales. Esto significa que de una manera diferente a lo previsto, las estudiantes lograron coordinar su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva.

En la actividad 2, pregunta 2, se esperaba que los estudiantes relacionen los segmentos BC, MN y AD con la propiedad de paralelismo, pero al realizar su aprehensión operatoria se centraron más en la medida de sus longitudes.

En la actividad 2, pregunta 3, se esperaba que los estudiantes establezcan la relación entre los pares de ángulos interiores que se encuentran a un mismo lado de sus vértices, en este caso Benilda recurrió a sus conocimientos previos sobre las propiedades de los ángulos internos de los cuadriláteros e indicó que la suma total es de 360°, pero hace indicaciones erróneas como por ejemplo que uno de sus ángulos es de 45ª y como se trata de un trapecio al parecer se debe a la dificultad de observar figuras en posición diferente a las que son usadas en las aulas de clase.

En la actividad 3, donde el objetivo era establecer la relación de congruencia entre los segmentos formados por un punto medio de uno de sus lados no paralelos del trapecio ABCD, las estudiantes lograron establecer la congruencia entre dichos segmentos mediante su aprehensión perceptiva y operatoria , relacionaron los dos segmentos como parte de las diferentes configuraciones del trapecio ABCD que lograron observar al utilizar la función arrastre del Geogebra y mediante su aprehensión discursiva describieron la propiedad existente entre los segmentos. De esta manera las estudiantes lograron la coordinación entre las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva.

En la actividad 3, pregunta 2, se cumplió con el objetivo, las estudiantes mediante el tratamiento en el registro figural movilizaron conocimientos sobre la propiedad de paralelismo y lograron establecer la relación de paralelismo de los segmentos que contienen a las bases del trapecio, de esta manera coordinaron su aprehensión operatoria, perceptiva y discursiva. También lograron relacionar sus posiciones y longitudes, apoyándose siempre en la herramienta medida para verificar las longitudes de los segmentos.

En la actividad 3, pregunta 3, Rosario se guió solo por su percepción simple para confirmar que la reconfiguración de la figura inicial del trapecio es un rectángulo y la estudiante Benilda a diferencia de Rosario arrastro uno de los vértices del trapecio, observo diferentes configuraciones, se apoyó en la herramienta medida e identificó propiedades relacionadas a los lados pero no a los ángulos internos del trapecio, es por ello que afirmó que se trata de un rectángulo.

En la actividad 3, pregunta 4, Benilda logro conjeturar la propiedad de la base media, mediante su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva.

Con respecto a la conjetura que realizan los estudiantes para explicar las relaciones existentes entre los elementos geométricos que se encuentran asociados a la configuración del trapecio, se basó en una conjetura por inducción empírica a partir de casos dinámicos, tal como lo indica Cañadas et al. (2008), una conjetura de este tipo se basa en un número infinito de acontecimientos seguidos, a partir de ellos se conjetura una regla general, que explica la naturaleza de un conjunto de acontecimientos dinámicamente relacionados. A diferencia la estudiante Rosario en la actividad 3, sus explicaciones corresponden a una conjetura basada en la percepción.

Observamos que las estudiantes movilizan conocimientos previos (paralelismo, propiedad de punto medio y congruencia de segmentos), que se evidenció en el tratamiento en el registro figural. En todas las actividades se les solicitó explicar y justificar las relaciones entre elementos geométricos existentes en la configuración del trapecio, la mayoría optó por una versión discursiva.

Pensamos que la conexión con temas como triángulos congruentes, rectas paralelas cortadas por una secante, les hubiera permitido hacer una mejor justificación en sus explicaciones.

CONSIDERACIONES FINALES

Tomando en cuenta los antecedentes presentados y la justificación de la investigación, podemos afirmar que los estudiantes presentan dificultades en cuanto al estudio del objeto matemático trapecio y su comprensión. Son las razones por las cuales nos interesamos en realizar esta investigación con estudiantes de secundaria. Esperamos que nuestra investigación sea un aporte para el cambio en la enseñanza de la geometría, con la inserción de herramientas como lo es el software Geogebra ya que permite construir de manera rápida y analizar las propiedades que caracterizan a una figura geométrica.

Por otro lado, los aspectos epistemológicos y didácticos fueron fundamentales porque nos permitieron realizar el análisis de la parte experimental de la investigación, los cuales también nos ayudó en la formalización del conocimiento movilizado.

Seguido, presentamos aspectos importantes en la tesis como: aspectos de la Teoría de Registros de Representación semiótica y aspectos de metodología utilizada, los principales resultados de la parte experimental y las nuevas perspectivas de investigación.

Con relación a la teoría y metodología

Consideramos que la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesto por Duval (1995) nos ayudó a comprender que el tránsito entre los diferentes registros de representación son importantes en la comprensión del objeto matemático en estudio, que los tratamientos y conversiones en diferentes registros permiten movilizar y relacionar conocimientos, la importancia de realizar tratamiento en cada registro. Los tratamientos realizados como configuraciones y reconfiguraciones es una operación fundamental en el registro figural porque brinda la posibilidad de hacer modificaciones en la figura y relacionarlas con propiedades matemáticas. La utilización del registro de lengua natural, es importante porque mediante ella los estudiante describieron y explicaron sus conjeturas de acuerdo a los tratamientos realizados en el registro figural del trapecio.

Estos aspectos de la teoría nos permitieron analizar como los estudiantes de secundaria conjeturan la propiedad de la base media del trapecio cuando articulan las aprehensiones secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva en una secuencia didáctica con el uso del Geogebra**,** donde se movilizan y realizan conexiones con los cocimientos de los elementos geométricos que emergen en la representación figural del trapecio.

Por otro lado, para organizar y desarrollar la investigación, utilizamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica como metodología propuesta por Artigue (1995). Es así que nuestra investigación se desarrolló en cuatro fases: Análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación. Los estudios preliminares nos mostraron un panorama de los problemas que presentan los estudiantes en cuanto a los conocimientos que poseen sobre los cuadriláteros dentro de ellos el trapecio, la importancia de la utilización del software Geogebra en la enseñanza de la Geometría que posibilita la construcción y tratamiento de las diferentes configuraciones del objeto matemático en estudio de forma rápida. Las actividades planteadas en la experimentación fueron orientadas a que los estudiantes realicen tratamientos y conversiones en el registro de lengua natural y figural, con la finalidad de observar y analizar como los estudiantes conjeturan la propiedad de la base media del trapecio cuando articulan las aprehensiones en el registro figural. Estas actividades también permitirán la movilización de la noción de trapecio y sus propiedades, la relación entre los elementos geométricos. Se empleó el software Geogebra en el desarrollo de las actividades, utilizaron algunas herramientas para construir el trapecio y la función arrastre les permitió observar y analizar las diferentes configuraciones del trapecio y de esta manera las estudiantes, mediante sus aprehensiones establecieron relaciones entre los objetos geométricos, para luego mediante el registro en lengua natural explicaron y justificaron sus respuestas. Además, nos permitió prever las posibles acciones y analizar sus respuestas.

Con relación a la pregunta de investigación y al objetivo general

A continuación presentamos los principales resultados de la investigación. Con respecto a la pregunta: ¿Cómo estudiantes de secundaria conjeturan la propiedad de la base media del trapecio cuando articulan las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica mediada por el Geogebra?

Nuestra investigación respondió parcialmente a la pregunta, ya que las estudiantes realizaron la conversión del registro en lengua natural al registro figural, realizaron tratamientos en el registro figural, mediante el uso del software Geogebra y la función arrastre, lograron movilizar conocimientos, articular sus aprehensiones y establecieron relaciones entre elementos geométricos emergentes en el trapecio, y mediante el registro en lengua natural escribieron sus conjeturas. Por ejemplo en la primera actividad los estudiantes desarrollaron su aprehensión operatoria y discursiva, ya que a partir de la construcción de la figura Rosario a diferencia de Benilda, logro reconocer el tipo de trapecio e identificó sus propiedades, para luego escribirlo mediante el registro en lengua natural. En la segunda actividad las estudiantes, mostraron dificultad para construir el trapecio isósceles a diferencia, ellas construyeron el trapecio escaleno, esta acción muestra que lograron desarrollar su aprehensión secuencial porque siguieron una secuencia ordenada de pasos para construirlo, así mismo, las estudiantes, mediante su aprehensión perceptiva identificaron unidades figurales de dimensión 1 (diagonales del trapecio). Así mismo, mediante la observación y análisis de las diferentes configuraciones del trapecio, relacionaron las unidades figurales con la congruencia de segmentos, se apoyaron en la herramienta medida para verificar su respuesta.

En la actividad 3, los estudiantes desarrollaron su aprehensión perceptiva y operatoria porque lograron establecer la congruencia entre unidades figurales de dimensión 1(segmentos) relacionaron segmentos como parte de las diferentes configuraciones del trapecio ABCD al utilizar la función arrastre del software Geogebra, desarrollaron su aprehensión operatoria y perceptiva y mediante el registro de lengua natural describieron la propiedad existente entre los segmentos. En la pregunta 2, lograron coordinar su aprehensión operatoria, perceptiva y discursiva, lograron establecer la relación de paralelismo de los segmentos que contienen a las bases del trapecio.

Así mismo en la pregunta 4, Benilda a diferencia de Rosario, logro conjeturar la propiedad de la base media, para ello se apoyó en la herramienta medida y la función arrastre del Geogebra los cuales les permitió coordinación su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva porque estableció relaciones existentes entre los elementos geométricos que se encuentran asociados a la configuración del trapecio.

Las estudiantes de acuerdo a la explicación y justificación que realizan mayormente se basaron en acontecimientos dinámicamente relacionados entonces son conjeturas por inducción empírica a partir de casos dinámicos, tal como lo indica Cañadas et al. (2008).

Con respecto a nuestro objetivo general, *Analizar como estudiantes de secundaria conjeturan la propiedad de la base media del trapecio cuando articulan las aprehensiones en el registro figural en una secuencia didáctica con el uso del Geogebra*, podemos decir lo siguiente:

Se logró parcialmente el objetivo general porque los estudiantes, lograron realizar construcciones, por ejemplo construyeron el trapecio escaleno, para ello emplearon algunas herramientas del Geogebra, lo que nos indica que han desarrollado su aprehensión secuencial. En el tratamiento en el registro figural lograron identificar las propiedades de la figura, identificar y relacionar unidades figurales, lo que nos indica que realizaron la articulación entre su aprehensión perceptiva y discursiva, mostraron su aprehensión operatoria porque realizaron trazos adicionales como puntos, rectas y segmentos. La función arrastre facilitó la observación y análisis de las figuras, los cuales les permitió establecer relaciones entre las unidades figurales y la herramienta "compás" les permitió trasladar longitudes y determinar la congruencia de dos segmentos, lo que significa que articularon su aprehensión perceptiva y operatoria. Con respecto a la explicación y justificación la mayor parte se basaron en descripciones y en algunos casos son deductivos ya que recurren a propiedades (puntos medios y congruencia de segmentos), lo que nos muestra que hubo una articulación de sus aprehensiones y evidencian conocimientos matemáticos.

Así mismo cabe señalar que las estudiantes mostraron algunas limitaciones en cuanto a los conocimientos sobre el trapecio, en la construcción del trapecio isósceles, la utilización de un lenguaje matemático adecuado para dar a conocer sus conjeturas

Finalmente, nuestra investigación nos ayudó a comprender las acciones que realizan los estudiantes para explicar y justificar la relación entre las unidades figurales correspondientes al trapecio, las dificultades que presentan en la justificación de sus respuestas.

Además, el uso del Geogebra nos permitió observar si los estudiantes desarrollaron sus aprehensiones.

Perspectivas futuras

Consideramos necesario realizar otras investigaciones relacionadas con este tipo de actividades los cuales incentiven a la conjetura de propiedades de otros objetos geométricos, ya sea con profesores o estudiantes.

REFERENCIAS

Almouloud, S.A y Silva M.J.F. (2015). *Material para formação de professores de ensino "secundário" de Peru (de 18 a 27 de maio de 2015).* En: processos de ensino e aprendizagem de matemática em ambientes tecnológicos PEA-MAT/DIMAT parceria PUCP-SP E PUCP-PERU. Pontificia Universidad Católica Del Perú. Escuela de Posgrado Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

Alva, F. (2007). *Geometría Analítica.* Perú: Editorial San Marcos.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Colombia. Grupo editorial Iberoamérica.

Cañadas, M.C., Deulofeu, J., Figueiras, L. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas Teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las ciencias, 26*(3), 431-444.

Corrales, E. J. (2011). Las construcciones con GeoGebra como medio para resignificar las propiedades de las Figuras. *Revista Iberoamericana de educación matemática.* Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/28/archivo_18_volumen28.pdf

Duval, R. (1994). Les Differents Fonctionnemens posibles D'une démarches géometrique. Reperes-*IREM,* (17), pp.121-138.Recuperado de http//www.uni-irem.fr/reperes/articles/17_article_119, pdf.

Duval, R. (1995). *Geometrical Pictures:Kinds of Representation and specific Processings*. Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-57771-0_10#page-1

Duval, R. (2004a). *Semiosis y pensamiento humano.* (Myriam Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2004b). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las foras superiores deldesarrollo cognitivo.* (Myriam Vega, Trad.). Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1999).

Duval, R. (2012). *Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Revista Electrónica de Educación Matemática. REVEMAT 7(2), pp. 266-297. Recuperado de http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Escudero, A. y Carrillo J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. *Revista de Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276) Salamanca: SEIEM.

España, (2000) *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Granada.

García, D. (2014). *Simetría Axial mediado por el Geogebra: Un estudio con alumnos de primer grado de Educación secundaria.* (Tesis de maestría en Enseñanza de la Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Gómez, C. (2015). *Proceso de visualización de cuadriláteros: Un estudio con profesores de nivel secundario.* (Tesis de maestría en Enseñanza de la Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. Interamericana Tercera Edición. México: Editorial McGraw-Hill.

http://www2.minedu.gop.pe/umc/admin/images/en2004/MatemáticaS3.pdf

Landaverde, F. (1977). *Geometría Plana.* México: Editorial Progreso, S. A. DE C.V.

Maguiña, T. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele.* (Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789

Maioli, Marcia. (2002). *Uma Oficina para formação de professores como enfoque em cuadriláteros.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI Facultad de Psicología* (pp. 123-146), Perú: UNMSM.

Morales, C. y Majé, R. (2011). *Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros.* (Tesis de maestría, Universidad de la Amazonia, Colombia. Recuperado de http:// www.elitv.org/.../tesis/Tesis%20de%20Mestria%20Cesar%20y%20Ramon.

Perú, Ministerio de Educación (2005). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004.* Recuperado de

Perú, Ministerio de Educación (2005). *Matemática 4 Secundaria.* Lima, Perú: Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

Ramírez, N. (2014). *Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y Geogebra.* (Tesis de maestría, Pontificia Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de http:// www.bdigital.unal.edu.co/39484/1/44005486.2014

Reid, M. y Etcheverry, N. (2014). Enseñanza de geometría en la educación secundaria usando Geogebra. *V REPEM-Memorias, 1*(32), 293-300.

Verástegui, T. (2012). *Geometría Básica Curso Geometría Plana.* Perú: Editorial Moshera.

ANEXOS

FICHAS DE ACTIVIDADES

ACTIVIDAD: 1

RECONOCIMIENTO DE SABERES PREVIOS

Estimados estudiantes al resolver esta actividad pondrás en práctica las nociones básicas sobre trapecios.

Indicación: Ahora lee con atención para luego responder las siguientes preguntas.

Para el desarrollo de esta actividad, recibirás un conjunto de tiras de papel con una afirmación. Luego elige, lee cada una de las frases y relaciona cada frase con otras frases. A continuación presentamos las afirmaciones de las tiras:

F1: Q es un trapecio

F2: Q tiene dos lados paralelos llamados bases.

F3: La altura de Q es la distancia entre las bases.

F4: Q es un trapecio escaleno.

F5: Sus lados no paralelos de Q tienen diferente longitud.

F6: Dos lados consecutivos de Q son iguales.

F7: Q es un trapecio recto.

F8: Q es un trapecio que tiene uno de sus lados no paralelos perpendicular a sus bases.

F9: Q es un trapecio que tiene sus diagonales congruentes.

F10: Q es un trapecio isósceles.

F11: Q es un trapecio que tiene sus lados no paralelos congruentes.

F12: Q tiene dos diagonales

F13: Los ángulos adyacentes a sus lados no paralelos de Q son suplementarios.

F14: Los ángulos adyacentes a una misma base de Q son congruentes.

1. Registre las posibles proposiciones para:

F4: Q es un trapecio escaleno

____

____

____

F7: Q es un trapecio recto

____

____

____

F10: Q es un trapecio isósceles

____

____

____

2. **Parte A:**

Con ayuda del software Geogebra, construye el trapecio ABCD, con el lado AB paralelo a CD.

Mediante el siguiente procedimiento:

1) Trazar un segmento AB.
2) Ubicar un punto C exterior al segmento AB.
3) Trazar una recta paralela al segmento AB que pase por C.
4) Luego ubicar un punto D (con la herramienta punto en objeto) en la recta. De esta forma, nos aseguramos que el segmento CD será siempre paralelo al segmento AB.)
5) Seleccionar la opción Polígono y marcar el cuadrilátero ABCD.

Guardar el archivo con el nombre Trapecio1_apellido_nombre (en la carpeta PUCP_2015).

Parte B:

Mediante el arrastre, mueva uno de los vértices del trapecio ABCD construido, luego nombra el tipo de trapecio que se forma y señale sus propiedades. Explique detalladamente.

____

____

____

"Gracias por su colaboración"

ACTIVIDAD 2:

PROPIEDADES DEL TRAPECIO

Indicación: Lee con atención antes de responder las preguntas.

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya un trapecio isósceles ABCD, luego trace las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, después con la herramienta (medida o longitud) mida la longitud de las diagonales y sus lados no paralelos del trapecio ABCD.

   En seguida arrastre el vértice A y explique cuál es la relación entre las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del trapecio isósceles ABCD.

____

____

____

Guardar el archivo con el nombre trapecio 2_1_nombre, en la carpeta Actividad 2 (que está dentro de la carpeta PUCP_2015).

Abra el archivo. ggb Actividad 2, en la figura que representa al trapecio ABCD, se tiene que los puntos M y N representan a los puntos medios de los lados no paralelos AD y BC respectivamente. Ahora de acuerdo a la figura responda las siguientes preguntas.

2. ¿Cuál es la relación entre los segmentos AB, MN y CD tomados dos a dos? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (haga trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce).

____

____

____

3. ¿Qué relación existe entre los pares de ángulos interiores que se encuentran a un mismo lado, de uno de los lados no paralelos? Justifique su respuesta.

____

____

Guardar el archivo con el nombre trapecio2_nombre, en la carpeta Actividad 2 (que está dentro de la carpeta PUCP_2015)

ACTIVIDAD 3:

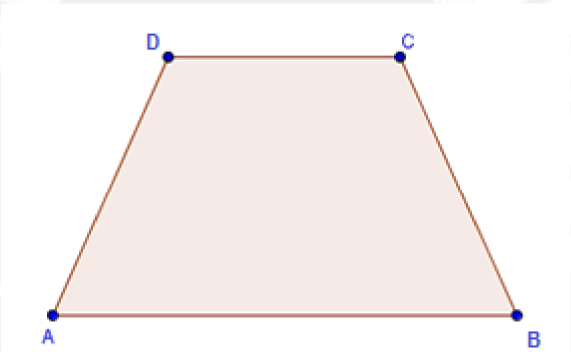
TRABAJEMOS CON LAS BASES DEL TRAPECIO

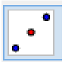
Estimado alumno, hoy concluye nuestra investigación, esfuérzate en el desarrollo de esta actividad. Tienes dos horas (90 minutos), para cumplir tu trabajo.

Indicación:

Abra el archivo. ggb Actividad 3**,** en la figura que representa al trapecio ABCD, se tiene que $\overline{CD}$ es paralela a $\overline{AB}$, tal como se muestra en la siguiente figura.

Sugerencia: Para desarrollar la actividad puede usar las herramientas de medida u otras herramientas del software Geogebra.



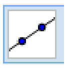
1. Luego de abrir el archivo, ubique los puntos medios M y N con la herramienta  de los lados no paralelos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Ahora arrastre el vértice A ¿Cómo son las longitudes de $\overline{AM}\ y\ \overline{MD}$? Explica.

____

____

____

____

2. Con la ayuda de la herramienta  trace una recta que pase por los puntos M y N, trace otra recta que contenga a $\overline{AB}$ y otra recta que contenga a $\overline{CD}$; después arrastre el vértice B del trapecio ABCD. ¿Qué pasa con las posiciones de $\overline{AB}, \overline{MN}\ y\ \overline{CD}$? ¿Son paralelas o perpendiculares? Explica lo que observas.

3. Luego con la herramienta compas traslade la longitud de $\overline{CD}$ a continuación del vértice B hasta un punto Q, de la misma forma traslade la longitud de $\overline{AB}$ a continuación del vértice C hasta un punto P. Luego trace una recta que contenga a los puntos P y Q. Observa y responde ¿Qué figura representa el cuadrilátero AQPD? Explique.

4. Ubique el punto de intersección "O" entre las rectas que contienen a $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$. ¿Cuál es la relación entre las longitudes de $\overline{MN}$ y $\overline{MO}$? ¿Cuál es la relación de la longitud de $\overline{MN}$ en función de las longitudes de las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$? Explique.

Observación: *Al terminar el desarrollo de la Actividad guarde el archivo con el nombre Actividad 3_1_Nombre, dentro de la carpeta Actividad 3.*