

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



PUCP

**Estudio de los sistemas cuánticos de dos
estados desde el enfoque del álgebra
geométrica**

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE
MAGISTER EN FÍSICA QUE PRESENTA:

Pedro AMAO CUTIPA

Asesor:

Dr. Hernán A. CASTILLO EGOAVIL.

Jurado:

Dr. Francisco A. DE ZELA MARTINEZ.

Dr. Eduardo R. MASSONI KAMIMOTO.

Lima, julio de 2015

“...for geometry, you know, is the gate of science, and the gate is so low and small that one can only enter it as a child.”

William Kingdon Clifford (1845 - 1879)



Resumen

Estudio de los sistemas cuánticos de dos estados desde el enfoque del álgebra geométrica

Se estudian los sistemas de dos niveles sin recurrir al espacio de Hilbert el cual es sustituido por el álgebra geométrica del espacio tridimensional (\mathcal{G}_3). En esta descripción los estados son codificados mediante elementos de un ideal izquierdo mínimo del álgebra par de \mathcal{G}_3 , mientras los operadores son codificados mediante la combinación lineal de los vectores del álgebra impar de \mathcal{G}_3 . La dinámica que obedecen estos sistemas está gobernada por la ecuación de “Schrödinger real” ya que el número imaginario $\sqrt{-1}$ es sustituido por el pseudoescalar de \mathcal{G}_3 . Introduciendo los idempotentes primitivos del álgebra geométrica, se generalizan las descripciones previas estando en completo acuerdo con la literatura convencional. Utilizando los axiomas del álgebra geométrica, se demuestra que las relaciones de conmutación canónica que obedecen los operadores de espín son consecuencia de la anticonmutatividad del producto geométrico.

Abstract

Geometric algebra approach of the two state quantum systems

We study two level quantum systems in the geometric algebra approach; the Hilbert space is substituted by the geometric algebra of the tridimensional space (\mathcal{G}_3). In this description, the states are encoded in the elements of minimal left ideals of the even algebra of \mathcal{G}_3 , whereas operators are encoded by the linear combination of vectors in \mathcal{G}_3 . The dynamics of these systems are governed by “real Schrödinger equation” because the imaginary number $\sqrt{-1}$ is substituted by the pseudo-scalar of \mathcal{G}_3 . Introducing the primitive idempotents of the geometric algebra, we generalize previous approaches in complete agreement with the standard literature. Starting from the axioms of the geometric algebra, we show that the canonical commutation relations obeying spin operators, are consequence of the anti-commutativity of the geometric product.

Agradecimientos

Muchas personas han contribuido conmigo durante el desarrollo de esta tesis. Quiero agradecer en especial a mi asesor Hernán Castillo por su constante apoyo y por haberme dejado investigar libremente; por las largas horas de discusión y por haber revisado esta tesis. Al profesor Massoni por sus sugerencias y críticas. No puedo dejar de mencionar con gratitud al profesor Francisco de Zela por su paciencia y por sus enseñanzas. Mi aprecio a la profesora Maria Elena Lopez, por su ayuda.

Quiero aprovechar estas líneas para expresar mi agradecimiento y aprecio a Ernesto quien me apoyó incondicionalmente cuando más lo necesitaba. A mi amigo Andrés por la confianza, aunque no merecida, a Rubén Sanchez por el apoyo y confianza, a mi amiga Dennise Chana por su ayuda.

No quiero terminar sin expresar mi aprecio y gratitud a mis amigos y amigas del pregrado y posgrado de la Católica de quienes he aprendido mucho. A mis amigos y colaboradores más cercanos Juan y Yonny, gracias por soportar mi humor y mal humor y por ayudarme a no sentirme solo en esta aventura. A mis compañeros de trabajo Rubén Poma, Bernabé, Miguel, Alvaro, Jonny Ochoa, mi gratitud y aprecio. A Sofía Oviedo por su apoyo incondicional aún en los peores momentos de mi vida.

Finalmente quiero agradecer a mis padres: Pascual y Augusta por su infinito amor y compartir conmigo su sabiduría, gracias por ayudarme a seguir mis sueños. A mis hermanos: Nelly, Germán, Mary y Techy aún en la distancia no me he sentido solo gracias a ustedes. A George, Hugo, y a toda mi familia sin cuyo constante soporte y amor este trabajo no hubiera visto la luz del día.

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	III
Lista de Figuras	VII
Lista of Tablas	VIII
1. Introducción	1
2. El Álgebra Geométrica	4
2.1. Definición formal	5
2.2. Álgebra geométrica en dos dimensiones (\mathcal{G}_2)	8
2.2.1. El Algebra par de \mathcal{G}_2 y los Números Complejos	10
2.2.2. Involuciones de \mathcal{G}_2 y Conjugación Compleja	12
2.2.3. Relación con el álgebra de matrices	13
2.3. Álgebra geométrica en tres dimensiones (\mathcal{G}_3)	14
2.3.1. El Álgebra par de \mathcal{G}_3 y el álgebra de los cuaterniones	15
2.3.2. El Centro de \mathcal{G}_3	16
2.3.3. Involuciones de \mathcal{G}_3	16
2.3.4. El Producto Cruz de \mathbb{R}^3 en \mathcal{G}_3	17
2.3.5. Álgebra de Pauli	18
2.4. Álgebra geométrica en cuatro dimensiones ($\mathcal{G}_{1,3}$)	18
2.4.1. Los bivectores spacelike y timelike de $\mathcal{G}_{1,3}$	20
2.4.2. El pseudoescalar de $\mathcal{G}_{1,3}$	20
2.4.3. Los trivectores de $\mathcal{G}_{1,3}$	21
2.4.4. Los multivectores de $\mathcal{G}_{1,3}$	22
2.5. Algunas aplicaciones	22
2.5.1. Reflexiones en \mathcal{G}_2	22
2.5.2. Rotaciones	24
2.5.3. Ley de composición de Rotores	26
2.5.4. Ángulos de Euler	27
2.6. Sumario	31

3. Algunos tópicos de álgebra abstracta	32
3.1. Grupos	33
3.2. Anillos	33
3.3. Campos	34
3.4. Idempotentes primitivos	35
3.5. Ideales Izquierdos y Derechos	36
3.5.1. Ideales Izquierdos Mínimos	36
3.6. Formas Cuadráticas Reales	37
3.7. Álgebras de Clifford	38
4. Sistemas cuánticos de dos estados	40
4.1. Sistemas no relativistas de espín $1/2$	41
4.2. Dinámica del Espinor	45
4.3. Rotaciones en el formalismo de dos componentes	50
4.4. Sistemas de dos estados y el álgebra de cuaterniones	53
4.5. Relaciones de conmutación canónica y el álgebra de los generadores de \mathcal{G}_3	56
5. A. G. de las part. de Schrödinger y Pauli	58
5.1. Densidad de Clifford	59
5.2. Partículas de Schrödinger	59
5.3. Dinámica de las partículas de Schrödinger	61
5.4. Partículas de Pauli	63
5.4.1. Cálculo de los valores esperados	64
6. Conclusiones	67
A. Álgebra de los números complejos y . . .	69
A.1. El Algebra de los Números Complejos	69
A.2. El Algebra de cuaterniones	71
B. Algunas demostraciones útiles	73
B.1. Forma Polar del producto geométrico	73
B.2. Identidad de Polarización	73
B.3. Rotación en tres dimensiones	74
C. El Potencial cuántico y el cálculo del corchete. . .	76
C.1. Separación de la Ecuación de Schrödinger y el Potencial Cuántico	76
C.2. Cálculo del Corchete $\{\rho, H\}$	77
C.3. Revisión de la aproximación a la mecánica cuántica de Bohm	79
C.4. Corriente de probabilidad	80

<i>Contents</i>	VI
Bibliografía	82

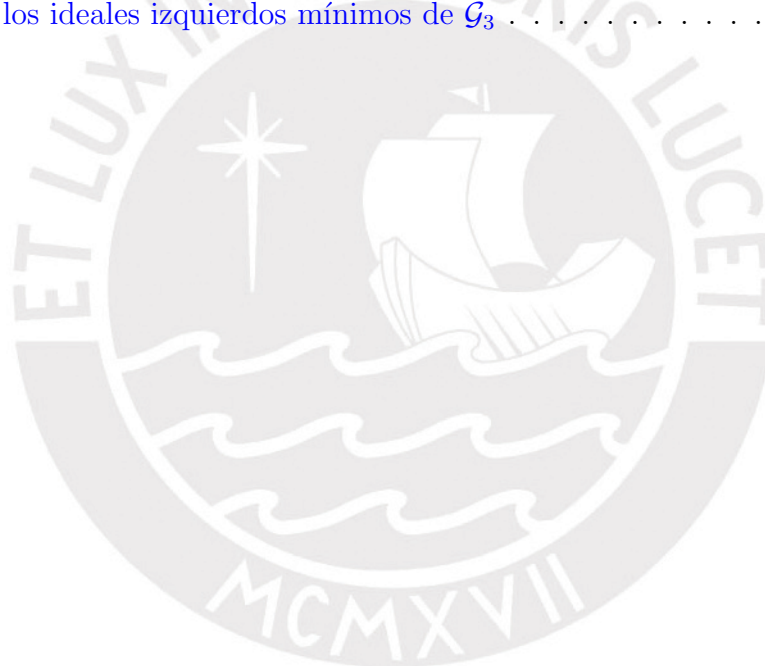


Índice de figuras

2.1. Representación geométrica del bivector $a \wedge b$	7
2.2. Bivector momentum angular	10
2.3. Representación geométrica de los elementos de \mathcal{G}_3	15
2.4. El producto cruz en el álgebra geométrica.	17
2.5. Reflexión del vector a	23
2.6. Rotación en tres dimensiones	24
2.7. Ángulos de Euler	28
2.8. Efecto del rotor $R = e^{-e_{12}\pi/4}e^{-e_{23}\pi/4}e^{-e_{12}\pi/4}$ sobre cada uno de los vectores e_1, e_2 y e_3	31
4.1. Experimento de Stern-Gerlach	42
4.2. Rotación del vector e_3	42
4.3. Esfera de Bloch	44
4.4. Rotaciones en el formalismo de dos componentes	51
A.1. Representación geométrica de la suma y producto de dos números complejos.	70
B.1. Vectores involucrados en la ley del paralelogramo.	74
B.2. Rotación en tres dimensiones	74

Índice de cuadros

2.1. Tabla de multiplicación para \mathcal{G}_2	8
2.2. Tabla de multiplicación para \mathcal{G}_3	15
3.1. Álgebras de Clifford en diferentes signaturas	39
4.1. Efecto de las matrices de Pauli sobre el estado $ \psi\rangle$	46
4.2. Equivalencias modificadas del álgebra geométrica en términos del los ideales izquierdos mínimos de \mathcal{G}_3	55



Convenciones

En esta tesis a no ser que se mencione explícitamente usaremos unidades naturales, a saber:

$$\hbar = c = 1$$

además el número imaginario $i = \sqrt{-1}$ se escribirá como i'

Utilizaremos la signatura dada por el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Los elementos del algebra de Clifford se denotarán de acuerdo a su grado, según:

- Escalares (grado cero), por letras griegas minúsculas como λ, δ , etc.
- Vectores (grado uno), por letras minúsculas como a, b, c , etc.
- Multivectores (grado mayor a uno), por letras mayúsculas como A, B, C , etc.



Capítulo 1

Introducción

El *Álgebra de Clifford* ofrece una manera alternativa de estudiar los sistemas físicos, prescindiendo del álgebra de matrices y de los números complejos; esto se logra introduciendo un nuevo tipo de producto entre los elementos del álgebra llamado “*producto geométrico*”. El producto geométrico, introducido por William Kingdon Clifford en 1878 [1], es una herramienta poderosa que permite entre otras cosas generalizar e integrar dentro del mismo lenguaje matemático a diferentes sistemas algebraicos aparentemente disímiles como: el álgebra de los números complejos, álgebra de cuaterniones, álgebra vectorial, álgebra de matrices, entre otros [2].

En física, el álgebra de Clifford es poco conocida y está comúnmente relacionada con el álgebra de Dirac en la mecánica cuántica relativista. En contraste, en matemáticas el álgebra de Clifford está extensamente desarrollada [3], [4], [5], [6], [7] y puede considerarse como un tipo de álgebra asociativa sobre un campo. El álgebra de Clifford sobre el campo de los números reales se conoce como *Álgebra Geométrica* y fue desarrollada en gran parte por David Hestenes alrededor de 1963 [8], [9],[10], [11] y posteriormente ampliada por el grupo de Chris Doran en la Universidad de Cambridge [12].

Uno de los sistemas físicos que pueden ser estudiados mediante el álgebra geométrica es el sistema cuántico de dos estados [13], [14], [15]. En la mecánica cuántica el estudio de los sistemas de dos estados es fundamental debido a que siendo uno de los sistemas de menor complejidad, exhiben todas las propiedades inherentes a sistemas cuánticos más complejos como son: superposición, entrelazamiento, decoherencia etc. Convencionalmente dichos sistemas se codifican matemáticamente en el espacio de Hilbert complejo; sin embargo, dicho espacio no es el único ya que

se puede codificar el principio de superposición mediante los ideales izquierdos mínimos del álgebra geométrica [11].

Revisando la literatura reciente [14], [16], [17], puede verse que el álgebra geométrica se suele construir partiendo de una serie de axiomas de los cuales se derivan sus demás propiedades. Según Doran [13] las propiedades centrales del álgebra geométrica son el grado y el producto geométrico. La primera propiedad permite clasificar a los elementos del álgebra de acuerdo a su naturaleza, (escalares, vectores, bivectores, etc), mientras que la segunda permite enlazar a estos elementos. Esta manera de introducir el álgebra geométrica tiene la ventaja de que puede ser fácilmente asimilada puesto que los axiomas del álgebra pueden considerarse como una generalización de los axiomas de los espacios vectoriales estudiados en el álgebra lineal. Sin embargo, la descripción de los sistemas cuánticos de dos estados en base a esta construcción [14] tiene algunas limitaciones, véase la sección 4.4, que pueden resolverse estudiando el álgebra geométrica en el contexto más general del álgebra abstracta.

En [14], Doran estudia los sistemas de dos estados introduciendo el mapeo $\mathcal{M} : |\psi\rangle \rightarrow R$; es decir, la información contenida en el espinor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ se codifica en el rotor R del álgebra geométrica en tres dimensiones (\mathcal{G}_3). Además los operadores que actúan sobre el espinor se codifican mediante los vectores de \mathcal{G}_3 , debido al isomorfismo que existe entre estos y las matrices de Pauli. Finalmente la dinámica del sistema obedece a la ecuación de “Schrödinger real” ya que el número imaginario $\sqrt{-1}$ es reemplazado por un bivector también de \mathcal{G}_3 . De otra parte, en [18] Basil Hiley utiliza el álgebra de Clifford ($Cl_{m,n}$), para codificar el principio de superposición en un ideal izquierdo mínimo (ψ_L) del mismo álgebra. Aún cuando Hiley no se centra en la discusión de los sistemas de dos estados, se puede aprovechar su enfoque para generalizar el mapeo introducido por Doran.

Debido a que el álgebra geométrica es un caso particular del álgebra de Clifford, se pueden aprovechar las propiedades de esta última para estudiar los sistemas de dos estados limitándonos al álgebra geométrica en tres dimensiones. Para lograr ello, en esta tesis se ha modificado el mapeo discutido en el párrafo anterior introduciendo los idempotentes primitivos del álgebra. La matemática necesaria para la discusión del álgebra geométrica en el contexto del álgebra abstracta aparece en el capítulo 3, donde se presenta la definición del álgebra de Clifford para signaturas arbitrarias.

En el capítulo 2 se presenta una breve revisión del álgebra geométrica en dos, tres y cuatro dimensiones, haciendo hincapié en el formalismo de las rotaciones en tres dimensiones necesarias para la discusión de los sistemas de dos estados. La conexión entre el álgebra de matrices y el álgebra geométrica se discute en la sección 2.2.3. El capítulo 4 está dedicado a la discusión de los sistemas de dos estados para el caso de una partícula de espín $1/2$ en interacción con un campo magnético externo. El álgebra geométrica predice la precesión del espín en completo acuerdo con el formalismo convencional [19]. Adicionalmente, el considerar al espinor como elemento de \mathcal{G}_3 permite encontrar una parametrización alternativa a la esfera de Bloch, véase el ejemplo 4. Alternativamente la información codificada por la función de onda puede codificarse en el multivector $\rho_c \in Cl_{m,n}$ introducido por Hiley [20]. En el capítulo 5 se presenta una revisión de este formalismo para el caso de $Cl_{0,1}$ y $Cl_{3,0}$. Finalmente en el capítulo 6 se resume y presentan las conclusiones.



Capítulo 2

El Álgebra Geométrica

El álgebra geométrica es un álgebra asociativa no Abeliana sobre el campo de los números reales. Una de sus características más relevantes, es que a los elementos del álgebra, llamados multivectores, se les puede representar como figuras geométricas orientadas tales como: líneas, planos, volúmenes, etc. Mejor aún, la mayoría de los resultados operacionales entre los elementos del álgebra, también tienen su correspondiente representación geométrica en forma de rotaciones, reflexiones, proyecciones, etc.

El álgebra geométrica introduce un nuevo tipo de producto asociativo entre sus elementos llamado producto geométrico. Este permite entre otras cosas unificar, tanto el producto interno y cruz convencionales del álgebra vectorial, en un solo tipo de producto. El producto geométrico es una herramienta poderosa, que permite realizar operaciones geométricas como rotaciones y reflexiones prescindiendo completamente del álgebra matricial. Estas ventajas a su vez permiten una nueva manera de entender los conceptos físicos ocultos en el formalismo matemático que se utiliza para expresarlos. Pese a estas ventajas, el álgebra geométrica es poco conocida y aún no forma parte de la curricula en las universidades.

Con el propósito de motivar su uso y desarrollo, presentamos en este capítulo una breve revisión del álgebra geométrica desarrollada en gran parte por David Hestenes y Chris Doran [9], [21], [2],[13], [14]. Este resumen se ha enriquecido en gran parte por el trabajo de Pertti Lounesto [22], Venzo de Sabbata y B. K. Datta [16] y también por el trabajo reciente de Alan Mc Donald [23], [17]. Se presentan además algunas de sus aplicaciones para el estudio de las rotaciones en dos y

tres dimensiones, muy importantes para el estudio del espín desde el enfoque del álgebra geométrica.

2.1. Definición formal

A continuación definiremos el álgebra geométrica a partir de ciertos axiomas de los cuales derivaremos sus propiedades,¹

Definición 1. *El álgebra geométrica (\mathcal{G}_n), es un álgebra unital² asociativa no Abeliana de dimensión 2^n , la cual es una extensión del espacio producto interior \mathbb{R}^n ; es decir, es un espacio vectorial con un producto llamado producto geométrico que satisface los siguientes axiomas, para todo escalar λ y vectores $a, b \in \mathcal{G}_n$.*

1. $a(b+c) = ab+ac, \quad (b+c)a = ba+ca.$ (Distributividad izquierda y derecha)

2. $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab).$

3. $(ab)c = a(bc).$ (Asociatividad)

4. $1a = a1 = a.$ (Existencia de la identidad)

5. *El producto geométrico en \mathcal{G}_n está enlazado con la estructura algebraica de \mathbb{R}^n mediante*

$$aa = a \cdot a = |a|^2, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1.1)$$

6. *Toda base ortonormal de \mathbb{R}^n determina una base canónica³ para \mathcal{G}_n . \square*

En base estos axiomas es posible desarrollar las demás propiedades del álgebra geométrica. Comencemos destacando de que a diferencia del producto interior de \mathbb{R}^n , el producto geométrico es invertible, ya que utilizando la ecuación (2.1.1) podemos definir la inversa de a como:

$$a^{-1} = \frac{a}{|a|^2} \quad (2.1.2)$$

¹Este enfoque es similar al desarrollado en [23]

²Un álgebra es unital si tiene por elemento a la unidad

³Esta es la base estándar de \mathbb{R}^n .

de donde $aa^{-1} = 1$; además gracias a la identidad de polarización [6], véase el apéndice B.2

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(|a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2)$$

y el axioma (5) podemos verificar que

$$\boxed{a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)} \quad (2.1.3)$$

El resultado anterior demuestra que si $a \cdot b = 0$, entonces $ab = -ba$, es decir, la anticonmutatividad indica ortogonalidad.

De otra parte, si introducimos la base ortonormal⁴ de \mathbb{R}^2 , $\{e_1, e_2\}$, podemos escribir los vectores a y b como: $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ y $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$; de este modo podemos calcular el producto geométrico

$$ab = (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 e_2 \quad (2.1.4)$$

donde el primer término $\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$ es similar al producto interior $a \cdot b$ convencional, mientras que el término $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 e_2$ sugiere una analogía con el producto cruz. En realidad, este término representa geoméricamente un área orientada cuyo módulo es $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$.

La discusión anterior nos motiva a definir el *producto exterior* representado por el operador cuña “ \wedge ” como

$$\boxed{a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)}. \quad (2.1.5)$$

Al igual que el operador punto “ \cdot ”, el operador cuña, nos permite construir objetos de diferente naturaleza a los originales. En este caso, el resultado es un objeto conocido como *bivector* el cual está constituido por dos vectores que definen un área orientada tal como se muestra en la figura 1.1.

Al igual que con el producto interior, si $a \wedge b = 0$, entonces $ab = ba$, es decir, la conmutatividad indica que a y b son colineales.

Sumando (2.1.3) y (2.1.5), podemos escribir el producto geométrico de manera compacta como:

$$\boxed{ab = a \cdot b + a \wedge b} \quad (2.1.6)$$

⁴En el álgebra geométrica es convencional utilizar la notación $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ para denotar a los vectores ortonormales

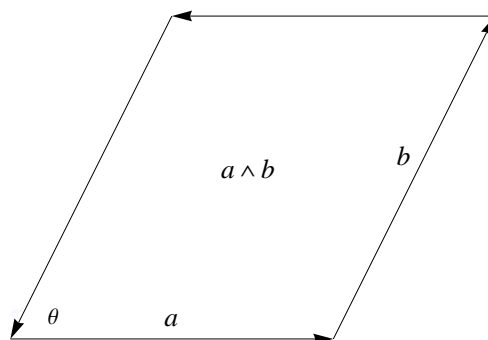


FIGURA 2.1: Representación geométrica del bivector $a \wedge b$, la orientación se encuentra dada por el circuito $a \rightarrow b \rightarrow -a \rightarrow -b$.

la cual se conoce como *identidad fundamental*. Aún cuando la identidad anterior se ha deducido para el caso de los vectores a y b en \mathcal{G}_2 , se puede probar que este puede generalizarse para cualesquiera multivectores de \mathcal{G}_n , véase por ejemplo el capítulo 4 de [14].

Debemos notar que la identidad fundamental (2.1.6) es la suma de dos objetos de diferente naturaleza: un escalar (grado cero) y un bivector (grado dos), lo cual es a primera vista inaceptable; sin embargo, si hacemos la analogía con el conjunto de los números complejos \mathbb{C} , vemos que la ecuación anterior es similar al número complejo $z = x + i'y$, donde x y y son números reales mientras que i' es un número imaginario puro que suele asociarse con un fador para fines prácticos; sin embargo, en el álgebra geométrica a este se le asocia con un bivector.

En general los elementos del álgebra geométrica se clasifican de acuerdo a su naturaleza, es decir, de acuerdo a su grado, según:

- Escalares (grado cero)
- Vectores (grado uno)
- Bivectores (grado dos), etc.

Es así que todo multivector puede escribirse como la suma de elementos de diferente grado, sin embargo, debe notarse que la suma usual solo puede realizarse entre elementos del mismo grado, mientras que la suma de elementos de diferente grado deberá entenderse como una suma indicada.

Como se vio en la definición, toda base ortonormal de \mathbb{R}^n define una base canónica de \mathcal{G}_n , para comprender esto veamos los casos más simples.

2.2. Álgebra geométrica en dos dimensiones (\mathcal{G}_2)

Uno de los casos más sencillos de estudiar es el álgebra geométrica bi-dimensional o álgebra geométrica del plano; la cual está generada por la base ortonormal de \mathbb{R}^2 , $\{e_1, e_2\}$; ello implica que la dimensión de \mathcal{G}_2 será $2^2 = 4$. De otra parte, aplicando la identidad fundamental (2.1.6) calculemos el producto geométrico de los vectores e_1 y e_2

$$e_1 e_2 = e_1 \cdot e_2 + e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2, \quad (2.2.1)$$

como se puede apreciar, el resultado es el bivector $e_1 \wedge e_2 = e_1 e_2$, al cual denotaremos de manera resumida como e_{12} . En consecuencia, los elementos de \mathcal{G}_2 son los siguientes: la identidad 1 (ya que el álgebra geométrica es unital), los vectores e_1 , e_2 y el bivector e_{12} ; estos elementos forman una base que denotaremos por

$$\text{span}\{1, e_1, e_2, e_{12}\}, \quad (2.2.2)$$

a partir de la cual puede construirse la tabla de multiplicación mostrada en el cuadro 2.1

	1	e_1	e_2	e_{12}
1	1	e_1	e_2	e_{12}
e_1	e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

CUADRO 2.1: Tabla de multiplicación para \mathcal{G}_2 .

En consecuencia, todo multivector $M \in \mathcal{G}_2$ puede escribirse en función de los elementos dados en la ecuación (2.2.2):

$$M = \alpha + \beta e_1 + \zeta e_2 + \kappa e_{12}, \quad (2.2.3)$$

que de manera resumida se denota por:

$$M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2,$$

donde se ha introducido el símbolo $\langle \ \rangle_r$ para clasificar a los términos de M de acuerdo a su grado: $r = 0$ escalar, $r = 1$ vector y $r = 2$ bivector, respectivamente.

En adelante prescindiremos del subíndice $r = 0$ para denotar al término de grado cero, es decir, $\langle M \rangle$ se referirá siempre a la parte escalar de M .

Nótese además que a consecuencia de la anti-conmutatividad del producto geométrico, el bivector e_{12} conmuta con los escalares y anti-conmuta con los vectores de \mathcal{G}_2

$$(e_{12})e_1 = -e_2$$

$$e_1(e_{12}) = e_2$$

$$(e_{12})e_2 = e_1$$

$$e_2(e_{12}) = -e_1,$$

mientras que del cuadro 2.1 se aprecia que $(e_1e_2)^2 = -1$. Esta última propiedad motiva a introducir el símbolo “ i ” para denotar al elemento $e_{12} \in \mathcal{G}_2$, ya que este cumple las mismas propiedades del número imaginario $\sqrt{-1}$. De ahora en adelante el número imaginario $\sqrt{-1}$ se denotará siempre por el símbolo i' .

Con ayuda de la fórmula del producto interior (2.1.3), podemos demostrar que los vectores e_1 y e_2 satisfacen la identidad

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.2.4)$$

donde δ es la función delta de Kronecker.

Nota

En el álgebra geométrica del plano el elemento de mayor grado es $i = e_{12}$, mientras que en el álgebra geométrica del espacio (\mathcal{G}_3) es el elemento e_{123} , al cual también denotaremos por el mismo símbolo i . Ambos elementos tienen cuadrado negativo, sin embargo no cumplen las mismas reglas de conmutación. A pesar de esto conviene utilizar el mismo símbolo ya que la distinción de i quedará clara conociendo las dimensiones del espacio en el cual se esté trabajando.

Ejemplo 1. *Conviene en este punto mencionar algunos ejemplos sobre las magnitudes físicas que pueden representarse mediante los multivectores del álgebra geométrica. Por ejemplo, en mecánica clásica, la temperatura, masa y energía son*

funciones escalares y están asociadas a los multivectores de grado cero. En contraste, la velocidad, momentum y aceleración son magnitudes vectoriales o multivectores de grado uno. Finalmente es posible codificar el torque y el momentum angular mediante los bivectores del álgebra. Por ejemplo, definimos el momentum angular L como

$$L = r \wedge p, \quad (2.2.5)$$

de donde puede calcularse el torque

$$\begin{aligned} \tau = \dot{L} &= \frac{d}{dt}(r \wedge p) = \dot{r} \wedge p + r \wedge \dot{p} \\ &= v \wedge (mv) + r \wedge (m\dot{v}) \\ &= r \wedge f. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Debe notarse que a diferencia de los vectores axiales $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ y $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f}$, los bivectores L y τ están siempre contenidos en el plano generado por los vectores mediante los cuales están definidos. En el caso del momentum angular este bivector es un área cuya orientación se muestra en la figura 2.2. La notación del

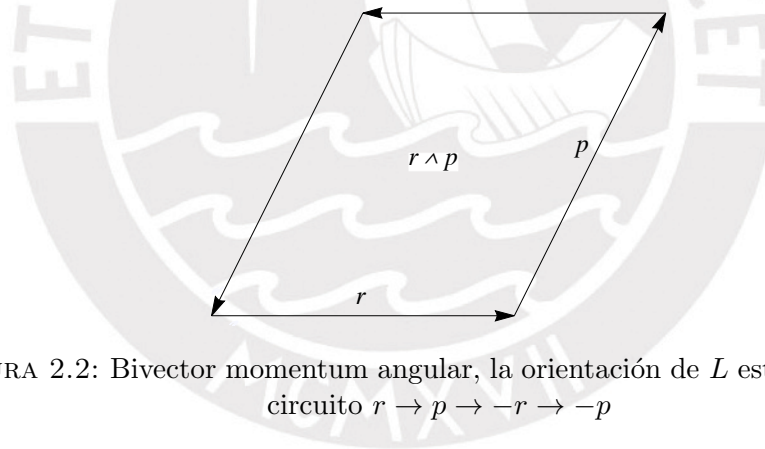


FIGURA 2.2: Bivector momentum angular, la orientación de L está dada por el circuito $r \rightarrow p \rightarrow -r \rightarrow -p$

momentum angular introducida anteriormente, es muy conveniente para el estudio del problema de dos cuerpos, ya que el movimiento en general queda restringido a un plano, dado que el momentum angular del sistema se conserva. Puede verse la solución del problema de los dos cuerpos desde el enfoque del álgebra geométrica en el capítulo 3 de [14].

2.2.1. El Algebra par de \mathcal{G}_2 y los Números Complejos

El producto geométrico demuestra que el conjunto de los números complejos \mathbb{C} puede considerarse como un subálgebra de \mathcal{G}_2 , este subálgebra se conoce como

álgebra par y se denota por \mathcal{G}_2^+ .

Anteriormente vimos que la identidad fundamental (2.1.6) relaciona a dos objetos de diferente naturaleza, de la misma manera en que el número complejo $z = u + vi'$ relaciona a un número real y a un número imaginario puro

$$\overbrace{Z = ab = a \cdot b + a \wedge b}^{\text{producto geométrico}} \leftrightarrow \overbrace{z = u + vi'}^{\text{número complejo}}. \quad (2.2.7)$$

El producto geométrico $Z = ab$, es la suma de un escalar $a \cdot b$ (grado 0) y un bivector $a \wedge b$ (grado 2), es decir, es la suma de dos multivectores de grado par; por lo tanto el multivector Z puede escribirse en términos de los elementos

$$\text{span}\{1, e_{12}\}, \quad (2.2.8)$$

de donde

$$Z = \alpha + \beta e_{12}. \quad (2.2.9)$$

Recordar además que e_{12}^2 es un número negativo:

$$(e_1 e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 (e_2)^2 e_1 = -(e_1)^2 (e_2)^2 = -1,$$

puesto que ambos vectores anticonmutan.

En síntesis podemos hacer el siguiente mapeo en la ecuación (2.2.7):

$$a \cdot b \rightarrow u, \quad a \wedge b \rightarrow vi'. \quad (2.2.10)$$

Este mapeo demuestra que podemos interpretar el producto ab como un número complejo. Además, al igual que los números complejos, \mathcal{G}_2^+ es un álgebra cerrada que tiene las mismas propiedades del campo complejo; véase el capítulo 3.

Alternativamente, se puede considerar que todo número complejo $z = u + vi'$ puede ser generado por los elementos:

$$\text{span}\{1, i'\}, \quad \text{con } 1^2 = 1 \quad \text{e} \quad i'^2 = -1, \quad (2.2.11)$$

es decir, $z = u1 + vi'$, mientras que en \mathcal{G}_2^+ , $Z = \alpha 1 + \beta e_{12}$. Esto demuestra el isomorfismo⁵ entre \mathcal{G}_2^+ y \mathbb{C} . En general podemos considerar que \mathbb{C} es un caso

⁵Un isomorfismo es una clase especial de homomorfismo que admite inversa, en este contexto, debe entenderse que \mathcal{G}_2^+ y \mathbb{C} satisfacen: $f(xy) = f(x)f(y)$ y $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

particular del álgebra de Clifford $Cl_{p,q}$ con $p = 0$ y $q = 1$; véase el capítulo 3.

2.2.2. Involuciones de \mathcal{G}_2 y Conjugación Compleja

Para completar la discusión del isomorfismo entre \mathcal{G}_2^+ y \mathbb{C} , es necesario introducir el concepto de conjugación compleja. Para ver ello basta tomar el producto geométrico ab en orden inverso, es decir:

$$ba = b \cdot a + b \wedge a = a \cdot b - a \wedge b, \quad (2.2.12)$$

de donde puede apreciarse el cambio de signo en el segundo término, el cual debido al mapeo introducido en la ecuación 2.2.10 nos indica que la conjugación compleja en \mathbb{C} es equivalente a tomar el producto geométrico en orden inverso en \mathcal{G}_2 . Esta discusión motiva a introducir el reverso de Z denotado por Z^\dagger ⁶ como:

$$Z^\dagger = ba = \alpha - \beta e_{12}. \quad (2.2.13)$$

Utilizando el reverso de Z se puede calcular su módulo

$$ZZ^\dagger = |Z|^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (2.2.14)$$

En general, definimos tres tipos de involución⁷ las cuales han de utilizarse posteriormente en el capítulo 5. Puede consultarse el capítulo 2 de [22] para mayores detalles

$$\hat{M} = \langle M \rangle - \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2. \quad \text{Involución de grado}$$

$$M^\dagger = \langle M \rangle + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2. \quad \text{Reversión}$$

$$\tilde{M} = \langle M \rangle - \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2. \quad \text{Conjugación de Clifford.}$$

De la definición anterior, se puede apreciar que la conjugación compleja es simplemente una restricción de la reversión y la conjugación de Clifford.

⁶La notación aquí utilizada difiere de la notación adoptada por Lounesto [22] para la reversión, ya que el símbolo: $\tilde{\cdot}$, ha de utilizarse para denotar a la conjugación de Clifford.

⁷En matemáticas una involución es una función $f : X \rightarrow X$ que aplicada dos veces nos devuelve el mismo valor. Un ejemplo sencillo de esto la conjugación compleja $(z^*)^* = z$.

2.2.3. Relación con el álgebra de matrices

Los números complejos pueden representarse mediante matrices 2×2 con entradas reales [22]

$$z = u + vi' \rightarrow \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}. \quad (2.2.15)$$

Por lo discutido en la sección anterior, los números complejos pueden obtenerse a partir del producto geométrico de dos vectores; esto sugiere que dichos vectores tienen también su representación matricial correspondiente. Por ejemplo, es fácil demostrar que los generadores de \mathcal{G}_2 pueden representarse mediante las matrices:

$$e_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.16)$$

ya que satisfacen todas las propiedades de los vectores de \mathcal{G}_2 . Esto ayuda a representar a los vectores $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ y $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ de \mathcal{G}_2 como las matrices:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & -\beta_1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.17)$$

Utilizando esta equivalencia, se puede escribir el equivalente matricial del producto geométrico ab como:

$$ab \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & -\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 & \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ -(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) & \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.18)$$

que es idéntica a la ecuación (2.2.15). El resultado anterior motiva a representar a los vectores a y b como:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 e_1 & \alpha_2 e_2 \\ \alpha_2 e_2 & -\alpha_1 e_1 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 e_1 & \beta_2 e_2 \\ \beta_2 e_2 & -\beta_1 e_1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.19)$$

en donde las componentes de las matrices son ahora vectores de \mathcal{G}_2 ; entonces el producto geométrico equivale a multiplicar ambas matrices, por lo cual

$$ab \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 e_1^2 + \alpha_2 \beta_2 e_2^2 & (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_{12} \\ -(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) e_{12} & \alpha_1 \beta_1 e_1^2 + \alpha_2 \beta_2 e_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b & a \wedge b \\ -a \wedge b & a \cdot b \end{pmatrix}. \quad (2.2.20)$$

Sean los vectores unitarios m y n los cuales forman un ángulo θ , entonces el producto interior y exterior puede ponerse en función de este ángulo mediante:

$$m \cdot n = \cos \theta, \quad m \wedge n = i \operatorname{sen} \theta, \quad (2.2.21)$$

de donde utilizando la ecuación (2.2.20) tenemos

$$mn \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & i \operatorname{sen} \theta \\ -i \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2.22)$$

Este último resultado, nos ayuda a ver de manera más clara lo siguiente:

- Los vectores de \mathcal{G}_2 pueden alternativamente ser representados por vectores con entradas reales.
- El producto geométrico es equivalente al producto matricial.
- Finalmente, la identidad fundamental (2.1.6) está implícita en el producto matricial según lo demuestra la ecuación (2.2.20).

2.3. Álgebra geométrica en tres dimensiones (\mathcal{G}_3)

El álgebra geométrica en tres dimensiones, está generada por la base canónica de \mathbb{R}^3 ; por lo tanto, esta es de dimensión ocho y está constituida por los siguientes multivectores:

$$\operatorname{span}\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{23}, e_{31}, e_{123}\},$$

cuya tabla de multiplicación y representación geométrica aparecen en el cuadro 2.2 y la figura 2.3, respectivamente.

En consecuencia, todo multivector $M \in \mathcal{G}_3$ se escribe como:

$$\begin{aligned} M &= \alpha + \beta e_1 + \zeta e_2 + \kappa e_3 + \lambda e_{12} + \mu e_{31} + \nu e_{23} + \rho e_{123} \\ &= \langle M \rangle + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3. \end{aligned}$$

En \mathcal{G}_3 se tienen dos subálgebras, las cuales describiremos a continuación.

	1	e_1	e_2	e_3	e_{23}	e_{31}	e_{12}	e_{123}
1	1	e_1	e_2	e_3	e_{23}	e_{31}	e_{12}	e_{123}
e_1	e_1	1	e_{12}	$-e_{31}$	e_{123}	$-e_3$	e_2	e_{23}
e_2	e_2	$-e_{12}$	1	e_{23}	e_3	e_{123}	$-e_1$	e_{31}
e_3	e_3	e_{31}	$-e_{23}$	1	$-e_2$	e_1	e_{123}	e_{12}
e_{23}	e_{23}	e_{123}	$-e_3$	e_2	-1	$-e_{12}$	e_{31}	$-e_1$
e_{31}	e_{31}	e_3	e_{123}	$-e_1$	e_{12}	-1	$-e_{23}$	$-e_2$
e_{12}	e_{12}	$-e_2$	e_1	e_{123}	$-e_{31}$	e_{23}	-1	$-e_3$
e_{123}	e_{123}	e_{23}	e_{31}	e_{12}	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	-1

CUADRO 2.2: Tabla de multiplicación para \mathcal{G}_3 .

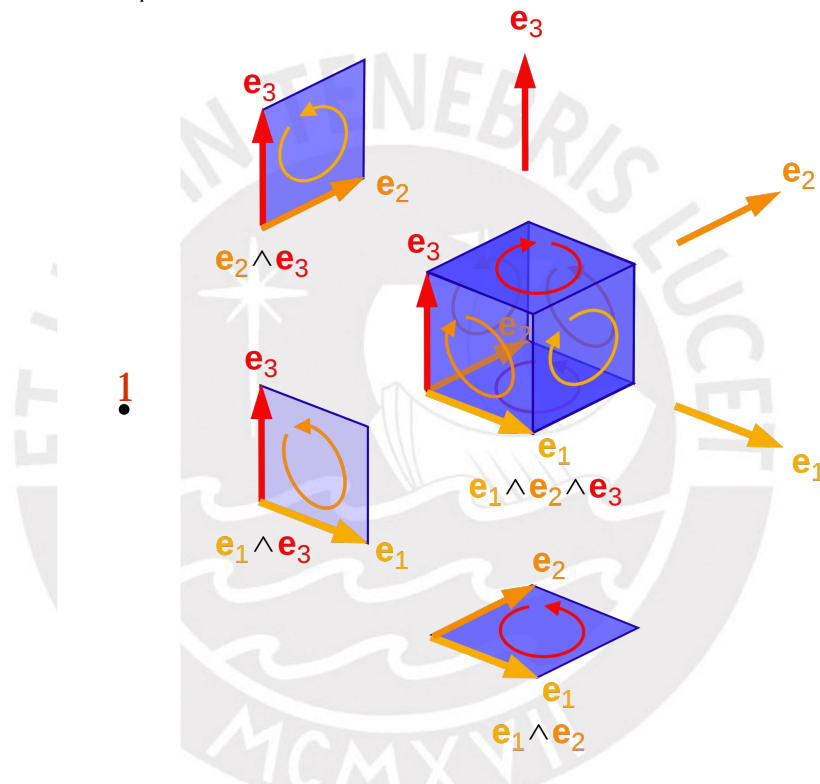


FIGURA 2.3: Representación geométrica de los elementos de \mathcal{G}_3 . El escalar 1 es un punto, los tres vectores de la base canónica son líneas orientadas, los tres bivectores son los planos orientados y finalmente el elemento de mayor grado (pseudoescalar), es el volumen de aristas e_1 e_2 y e_3 . Figura tomada de [24].

2.3.1. El Álgebra par de \mathcal{G}_3 y el álgebra de los cuaterniones

Los elementos de grado par de \mathcal{G}_3 forman un subálgebra de dimensión cuatro a la cual denotaremos similarmente al caso bi-dimensional por \mathcal{G}_3^+ . Es así que todo multivector en \mathcal{G}_3^+ puede escribirse como:

$$M = \alpha + \lambda e_{12} + \mu e_{31} + \nu e_{23}.$$

Además, los tres bivectores de \mathcal{G}_3^+ cumplen las siguientes relaciones:

$$e_{12}^2 = e_{23}^2 = e_{31}^2 = e_{12}e_{23}e_{31} = -1,$$

las cuales son idénticas al álgebra de cuaterniones descubierta por Hamilton:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (2.3.1)$$

Se concluye entonces que el álgebra par de \mathcal{G}_3 es isomorfa al álgebra de cuaterniones \mathbb{H} . La demostración de Hamilton aparece en el apéndice A.

2.3.2. El Centro de \mathcal{G}_3

El elemento $i = e_{123}$ junto con la identidad 1, forman un subálgebra de dimensión 2 y están en el centro de \mathcal{G}_3 .⁸, es decir, está generada por los elementos:

$$\text{span}\{1, i\}, \quad (2.3.2)$$

por lo tanto, todo multivector en el centro de \mathcal{G}_3

$$M = \alpha + \beta i, \quad (2.3.3)$$

es isomorfo al número complejo $z = u + vi' \in \mathbb{C}$.

2.3.3. Involuciones de \mathcal{G}_3

Al igual que en dos dimensiones, se tienen las siguientes involuciones para el caso tridimensional:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \langle M \rangle - \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 \\ M^\dagger &= \langle M \rangle + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3 \\ \tilde{M} &= \langle M \rangle - \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 \end{aligned}$$

que corresponden a la involución de grado, reversión y conjugación de Clifford, respectivamente.

⁸En un álgebra, los elementos que conmutan con todos los demás, forman un subálgebra conocida como centro.

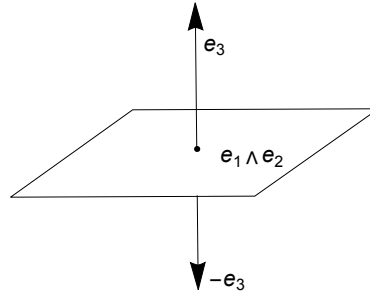


FIGURA 2.4: El producto cruz en el álgebra geométrica. El producto ie_{12} resulta en el vector $-e_3$.

Nótese que la reversión permite calcular el módulo del multivector M :

$$|M|^2 = MM^\dagger = \alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2 + \kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2, \quad (2.3.4)$$

mientras que la conjugación de Clifford es el resultado de las dos anteriores $\tilde{M} = (\hat{M})^\dagger$.

2.3.4. El Producto Cruz de \mathbb{R}^3 en \mathcal{G}_3

En tres dimensiones, el producto geométrico entre el pseudoescalar y los tres bivectores de \mathcal{G}_3 , pueden utilizarse para encontrar el equivalente al producto cruz convencional de \mathbb{R}^3 . Por ejemplo, el producto

$$i(e_1 \wedge e_2) = -e_3, \quad (2.3.5)$$

nos devuelve un vector ortogonal al plano $e_1 \wedge e_2$, véase la figura 2.4. Se puede ver que este resultado es similar al obtenido por el producto cruz excepto por el signo negativo. Esto motiva a definir el producto cruz como

$$a \times b = -i(a \wedge b), \quad (2.3.6)$$

el cual es completamente equivalente al producto vectorial en tres dimensiones. Sin embargo, ya que en el álgebra geométrica se tiene a disposición el producto exterior, el uso del producto cruz es redundante e innecesario.

2.3.5. Álgebra de Pauli

Los vectores de la base canónica de \mathcal{G}_3 , cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 &= 1, \\ e_i e_j &= -e_j e_i \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Utilizando la identidad fundamental (2.1.6) se tiene:

$$\boxed{e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} e_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3} \quad (2.3.7)$$

en donde el símbolo i juega el papel del número imaginario i' y ϵ_{ijk} es el símbolo alternante de Levi-Civita.

La ecuación anterior es similar al álgebra de matrices encontrada por Pauli en su estudio del espín:

$$\boxed{\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I} + i' \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3} \quad (2.3.8)$$

Comparando ambas expresiones, vemos que el álgebra de las matrices de Pauli, son en realidad, la representación matricial del álgebra geométrica en tres dimensiones.

El hecho de que las matrices de Pauli se comporten como los vectores de la base canónica de \mathcal{G}_3 , implica que podemos realizar todos los cálculos del álgebra geométrica utilizando dichas matrices; sin embargo, el álgebra matricial esconde la geometría que está implícita en ella, es por esto que es preferible evitar en lo posible su uso, salvo para comparar los resultados del álgebra geométrica con el formalismo convencional.

2.4. Álgebra geométrica en cuatro dimensiones

$$(\mathcal{G}_{1,3})$$

Uno de los postulados de la relatividad especial es que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes en su descripción de los fenómenos físicos. La consecuencia inmediata de ello es que la geometría en la cual se desarrolla la relatividad especial ya no es la euclidiana sino la del espacio-tiempo de Lorentz.

Para entender el porqué, supongamos que un haz de luz esférica es emitida desde una fuente y que este evento es descrito en dos sistemas de referencia inerciales. Estos sistemas de referencia están en movimiento relativo uno respecto al otro y dispuestos de tal forma que sus orígenes coinciden con la fuente de luz cuando esta es emitida y que en ese mismo instante los relojes en ambos sistemas de referencia son puestos a cero. En el primer sistema la fuente permanece en reposo y se expande radialmente de acuerdo a

$$r = ct, \quad (2.4.1)$$

mientras que en el segundo sistema de referencia también se observará lo mismo pero de acuerdo a

$$r' = ct'. \quad (2.4.2)$$

Ya que ambos sistemas de referencia ven frentes de onda esféricos debe cumplirse la siguiente relación

$$c^2t^2 - r^2 = c^2t'^2 - r'^2 = 0, \quad (2.4.3)$$

este es el intervalo invariante de la relatividad especial que necesitamos codificar. Para ello requerimos que el vector asociado a la componente temporal tenga distinto signo que los tres vectores asociados a las componentes espaciales.

Siguiendo la convención utilizada en la relatividad especial para el tensor métrico $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1 - 1 - 1 - 1)$, introducimos la base canónica⁹ de $\mathcal{G}_{1,3}$ $\{\gamma_\mu\}$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$ como:

$$\text{span}\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \quad (2.4.4)$$

donde

$$\gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_i^2 = -1 \quad (2.4.5)$$

con $i = 1, 2, 3$. Esta es un álgebra similar a los casos vistos anteriormente excepto que ahora tenemos vectores tanto con cuadrado positivo como negativo. Este hecho repercute en que los multivectores de $\mathcal{G}_{1,3}$ se comportan de manera distinta a los casos en dos y tres dimensiones. Para ver este comportamiento, veamos en primer lugar el caso de los bivectores.

⁹Es conveniente utilizar la notación γ_μ introducida por Dirac en lugar de e_μ .

2.4.1. Los bivectores spacelike y timelike de $\mathcal{G}_{1,3}$

En el álgebra del espacio-tiempo se tienen seis bivectores que se clasifican de acuerdo a si están o no en función de γ_0 . Estos son los tres bivectores timelike $\gamma_i \wedge \gamma_0$ y los tres bivectores spacelike¹⁰ $\gamma_i \wedge \gamma_j$. Recordando que si a y b son dos vectores perpendiculares, entonces el cuadrado del bivector es

$$(a \wedge b)^2 = abab = -ab^2a = -a^2b^2. \quad (2.4.6)$$

Utilizando este resultado se puede probar que los cuadrados de los bivectores timelike y spacelike son diferentes

$$(\gamma_i \wedge \gamma_0)^2 = -(-1)(+1) = +1 \quad \text{timelike} \quad (2.4.7)$$

$$(\gamma_i \wedge \gamma_j)^2 = -(-1)(-1) = -1 \quad \text{spacelike} \quad (2.4.8)$$

Este resultado demuestra que los bivectores timelike tienen cuadrado positivo, mientras que los spacelike tienen cuadrado negativo. Esto último se debe a que estamos trabajando en un espacio de signatura mixta.¹¹

Hay que señalar que los bivectores timelike revelan que la geometría del espacio de Lorentz es hiperbólica, ya que por ejemplo, en el caso particular del bivector γ_{10} se tiene la exponencial

$$\begin{aligned} e^{\gamma_{10}\alpha} &= 1 + \alpha\gamma_{10} + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3\gamma_{10} + \mathcal{O}^4 \\ &= \cosh \alpha + \gamma_{10} \sinh \alpha, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

véase el capítulo 5 de [14] para más detalles.

2.4.2. El pseudoescalar de $\mathcal{G}_{1,3}$

Al igual que en los casos de menos dimensiones, el elemento de mayor grado se conoce como pseudoescalar y está definido por

$$i = \gamma_{0123} \quad (2.4.10)$$

¹⁰Preferimos las palabras en inglés timelike, spacelike y lightlike en lugar de “como el tiempo, como el espacio y como la luz”.

¹¹ El álgebra geométrica tiene simultáneamente vectores con cuadrado positivo y negativo.

el cual geoméricamente es un hiper-volumen que define la orientación del espacio-tiempo; aquí seguimos asumiendo que los vectores γ_i ($i = 1, 2, 3$) forman un sistema coordinado derecho. Vemos además que el reverso de i es

$$i^\dagger = \gamma_{3210} = -\gamma_{0321} = -\gamma_{0132} = \gamma_{0123} = i \quad (2.4.11)$$

gracias a ello, es sencillo calcular el cuadrado de i

$$i^2 = ii^\dagger = \gamma_{0123}\gamma_{3210} = -1. \quad (2.4.12)$$

El pseudo-escalar permite obtener los seis bivectores discutidos anteriormente

$$i\gamma_{i0} = i \cdot \gamma_{i0} + i \wedge \gamma_{i0}$$

$$i\gamma_{ij} = i \cdot \gamma_{ij} + i \wedge \gamma_{ij}$$

ya que los términos $i \wedge \gamma_{i0} = i \wedge \gamma_{ij} = 0$ son de grado seis (están fuera de $\mathcal{G}_{1,3}$), mientras que los términos $i \cdot \gamma_{i0}$ y $i \cdot \gamma_{ij}$ son de grado dos.

2.4.3. Los trivectores de $\mathcal{G}_{1,3}$

Los cuatro trivectores del álgebra del espacio-tiempo son

$$\gamma_\mu i = \gamma_\mu \cdot i + \gamma_\mu \wedge i = \gamma_\mu \cdot i \quad (2.4.13)$$

puesto que el producto exterior $\gamma_\mu \wedge i$ se anula ya que el producto resultante es un multivector de grado cinco (está fuera de \mathcal{G}_{13}), mientras que el producto interior nos devuelve los cuatro trivectores

$$\gamma_{123} = \gamma_{023} = \gamma_{013} = \gamma_{012}. \quad (2.4.14)$$

Ya que estamos en un espacio de dimensión par (4), el pseudo-escalar anticonmuta con los multivectores de dimensión impar y conmuta con los multivectores de dimensión par.

2.4.4. Los multivectores de $\mathcal{G}_{1,3}$

Combinando los resultados anteriores, llegamos a un álgebra con 16 elementos,

$$\text{span}\{1, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_\nu, i\gamma_\mu, i\} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.4.15)$$

Esta es el álgebra del espacio-tiempo $\mathcal{G}_{1,3}$, la cual describe al espacio plano de Lorentz. Por tanto, cualquier multivector puede escribirse como combinación lineal de los términos anteriores

$$M = \langle M \rangle + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4 \quad (2.4.16)$$

Finalmente, utilizando la definición del producto interior, se aprecia que los generadores de $\mathcal{G}_{1,3}$ cumplen

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = g_{\mu\nu} \quad (2.4.17)$$

que es idéntica al álgebra de las matrices de Dirac!.

2.5. Algunas aplicaciones

2.5.1. Reflexiones en \mathcal{G}_2

Sean a un vector arbitrario y n un vector unitario de \mathcal{G}_2 , entonces, se puede utilizar la identidad: $a = n^2a$ en conjunto con la asociatividad del producto geométrico para escribir el vector a en sus componentes paralela y perpendicular al vector unitario n , como se demuestra a continuación

$$\begin{aligned} a &= n^2a \\ &= n(na) = n(n \cdot a) + n(n \wedge a). \end{aligned}$$

Para entender este resultado analicemos los términos del lado derecho de la ecuación anterior por separado. En primer lugar, el término $n(n \cdot a)$ es un vector que se puede identificar como la proyección de a en la dirección de n , por ello es conveniente denotarlo por a_{\parallel} . En segundo lugar, el término $n(n \wedge a)$ es ortogonal a n .

Para comprobar esto, calculemos el producto interior $n \cdot nn \wedge a$; para simplificar este cálculo, es conveniente recordar que la parte escalar del producto geométrico se representa por

$$a \cdot b = \langle ab \rangle \quad (2.5.1)$$

es decir, preferimos trabajar con el producto geométrico en lugar del producto escalar, por lo tanto

$$n \cdot nn \wedge a = \langle nnn \wedge a \rangle = \langle n \wedge a \rangle = 0, \quad (2.5.2)$$

ya que el bivector no tiene parte escalar. Entonces podemos concluir que el vector a se descompone en sus componentes paralela y perpendicular, según se muestra en la figura 2.5.

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp}. \quad (2.5.3)$$

Tomando el negativo del vector a_{\parallel} , se puede escribir el vector a' como:

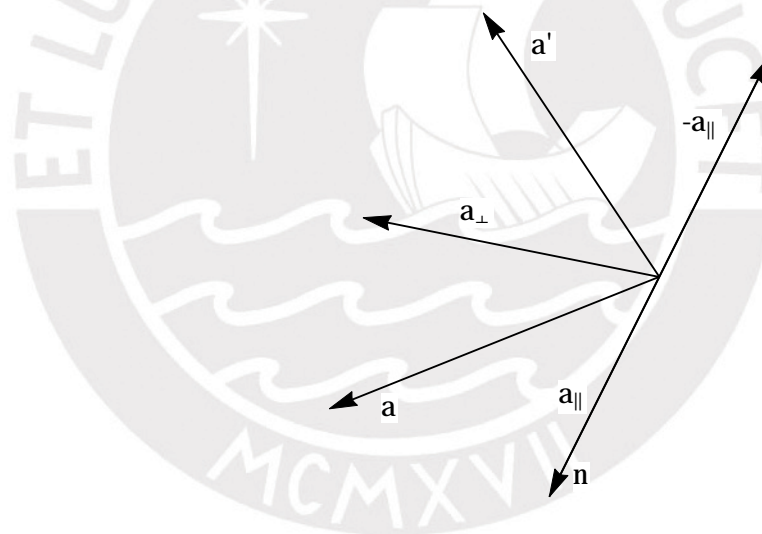


FIGURA 2.5: Reflexión del vector a . El vector a' se obtiene reflejándolo en el plano ortogonal al vector unitario n .

$$a' = a_{\perp} - a_{\parallel}. \quad (2.5.4)$$

Geoméricamente a' es la reflexión del vector a respecto al vector a_{\perp} . Habiendo encontrado el significado geométrico de la ecuación anterior podemos escribirla de

manera más simple

$$\begin{aligned}
 a' &= a_{\perp} - a_{\parallel} \\
 &= n(n \wedge a) - n(n \cdot a) \\
 &= -n(a \cdot n - n \wedge a) \\
 &= -n(a \cdot n + a \wedge n),
 \end{aligned}$$

de donde se tiene

$$a' = -nan. \quad (2.5.5)$$

Esta fórmula es válida para reflejar cualquier multivector de \mathcal{G}_n como veremos a continuación.

2.5.2. Rotaciones

Usando el resultado anterior, es fácil obtener una fórmula general para rotar cualquier multivector, es decir, la fórmula es válida para rotaciones en n dimensiones.

Sean los vectores unitarios m y n y sea θ el ángulo formado por ellos, entonces se puede rotar el vector a mediante doble reflexión, véase la figura 2.6. En primer

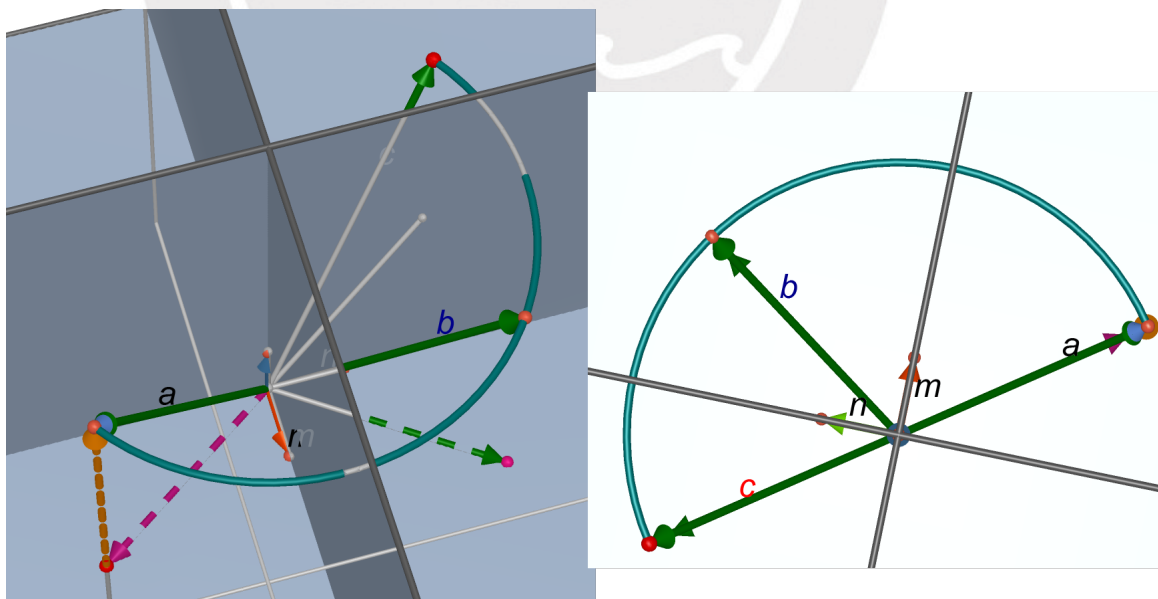


FIGURA 2.6: Rotación en tres dimensiones. El vector c se obtiene mediante doble reflexión: el vector a se refleja en el plano ortogonal al vector unitario n , vector b , finalmente b se refleja en el plano ortogonal al vector unitario m .

lugar reflejamos el vector a en el plano ortogonal a n , resultando en el vector

$$b = -nan.$$

En segundo lugar volvamos a rotar el vector b en el plano ortogonal a m , de modo que

$$c = -mbm.$$

De esta forma, el resultado de las dos rotaciones sucesivas sera:

$$c = -m(-nan)m \quad (2.5.6)$$

$$=mnanm. \quad (2.5.7)$$

Definimos el multivector $R = mn$, de donde la ecuación anterior puede escribirse de manera sencilla como

$$c = RaR^\dagger, \quad (2.5.8)$$

este resultado se interpreta geoméricamente como la rotación del vector a en un ángulo 2θ .

Utilizando la identidad fundamental (2.1.6) podemos obtener una forma alternativa del multivector R como

$$R = m \cdot n + m \wedge n \quad (2.5.9)$$

ya que m y n son unitarios es fácil darse cuenta que

$$R = \cos \theta + m \wedge n. \quad (2.5.10)$$

Para demostrar la potencia del álgebra geométrica, calculemos de manera detallada el cuadrado del bivector $B = m \wedge n$

$$B^2 = (m \wedge n)(m \wedge n)$$

$$B^2 = (mn - m \cdot n)(mn - m \cdot n),$$

donde hemos hecho uso de la identidad fundamental (2.1.6). El término mn del segundo factor $(mn - m \cdot n)$ en la ecuación anterior, puede reescribirse nuevamente

gracias a (2.1.6) como $2m \cdot n - nm$, resultando

$$B^2 = (nm - n \cdot m)(m \cdot n - nm)$$

$$B^2 = (m \cdot n)^2 - m^2 n^2$$

$$B^2 = -\text{sen}^2 \theta$$

donde se ha utilizado la conocida identidad $a \cdot b = |a||b| \cos \theta$ y utilizado el hecho de que m y n son unitarios.

Aprovechando el resultado anterior podemos escribir B como

$$B = \frac{n \wedge m}{\text{sen} \theta}.$$

Nótese que hemos escrito $n \wedge m$ en lugar de $m \wedge n$ ya que este bivector define la dirección de rotación de los elementos del álgebra que han de ser rotados. Con esto la ecuación (2.5.10) toma la forma simple [14]

$$R = \cos \theta - B \text{sen} \theta = e^{-B\theta}, \quad (2.5.11)$$

ya que este rotor produce rotaciones en un ángulo de 2θ , véase el Apéndice B.3. Es convencional escribir la ecuación anterior como

$$\boxed{R = e^{-B\theta/2}} \quad (2.5.12)$$

para lograr rotaciones en un ángulo θ .

2.5.3. Ley de composición de Rotores

Veamos que sucede ahora si se tienen rotaciones sucesivas descritas por los rotores R_1 y R_2 . Sea el vector a sobre el cual hacemos actuar el rotor R_1 de modo que obtenemos el vector $b = R_1 a R_1^\dagger$. Finalmente podemos volver a rotar el vector b mediante R_2 , teniendo como resultado el vector $c = R_2 b R_2^\dagger$, es decir

$$c = R_2 R_1 a R_1^\dagger R_2^\dagger = R a R^\dagger.$$

En la ecuación anterior se ha definido el rotor R como $R = R_2 R_1$, es decir, el producto de dos rotores nos entrega un nuevo rotor equivalente a los dos primeros.

Es interesante darse cuenta que el producto $RR^\dagger = 1$, es decir, los rotores preservan la norma de los vectores sobre los cuales actúan. En general se pueden conseguir rotaciones sucesivas mediante

$$R = R_l R_m \dots \quad (2.5.13)$$

Este último resultado se conoce como *ley de composición de rotores* el cual es uno de los resultados fundamentales del álgebra geométrica. Finalmente es fácil darse cuenta que estos rotores junto con el producto geométrico forman un grupo, véase el capítulo 3.

2.5.4. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler sirven para describir la orientación de un sólido rígido en el espacio tridimensional. Dicha orientación puede conseguirse a través de rotaciones sucesivas parametrizadas por los ángulos $\{\phi, \theta, \psi\}$, conocidos como ángulos de Euler. Esta parametrización transforma el sistema coordenado definido por los vectores $\{e_1, e_2, e_3\}$ en el nuevo sistema $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. El álgebra geométrica provee una nueva manera de abordar este problema de una forma más sencilla e intuitiva mediante los rotores descritos en la sección anterior.

Sea el sistema coordenado definido por los vectores unitarios $\{e_1, e_2, e_3\}$, véase la figura 2.7. En primer lugar hagamos una rotación del vector e_1 alrededor del vector e_3 en sentido antihorario en un ángulo ϕ .¹² El rotor correspondiente será

$$R_\phi = e^{-e_{12}\phi/2}. \quad (2.5.14)$$

Seguidamente hagamos una segunda rotación esta vez alrededor del nuevo vector e'_1 . Para conseguir esto, debemos calcular el nuevo plano de rotación; este plano puede encontrarse fácilmente utilizando el pseudoescalar i , es decir, el plano en consideración será

$$ie'_1 = iR_\phi e_1 R_\phi^\dagger = R_\phi e_{23} R_\phi^\dagger, \quad (2.5.15)$$

donde se ha utilizado el hecho de que e'_1 se calcula como: $R_\phi e_1 R_\phi^\dagger$.

¹²Equivalentemente, puede considerarse la rotación del vector e_1 en el plano e_{12} .

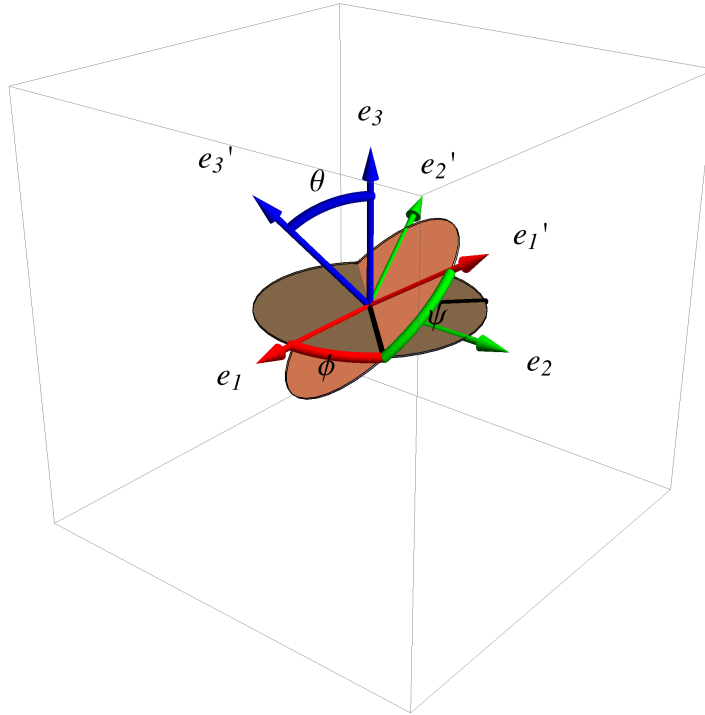


FIGURA 2.7: Ángulos de Euler; se llega a la configuración final $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ haciendo primero una rotación en el plano ie_3 en un ángulo ϕ , luego se hace una segunda rotación en el plano ie'_2 en un ángulo θ , finalmente la tercera rotación es el plano ie'_3 en un ángulo ψ .

Una vez encontrado el plano de rotación es fácil escribir el rotor correspondiente al cual denotaremos por R_θ

$$R_\theta = e^{-R_\phi e_{23} R_\phi^\dagger \theta / 2}. \tag{2.5.16}$$

La ecuación anterior se simplifica fácilmente si la expandimos en series de Taylor:

$$\begin{aligned} R_\theta &= 1 - R_\phi e_{23} R_\phi^\dagger \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2!} \left(R_\phi e_{23} R_\phi^\dagger \frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(R_\phi e_{23} R_\phi^\dagger \frac{\theta}{2} \right)^3 + \mathcal{O}^4 \\ &= R_\phi \left(1 - e_{23} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2!} e_{23}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 - \frac{1}{3!} e_{23}^3 \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 + \mathcal{O}^4 \right) R_\phi^\dagger, \end{aligned}$$

resultando en el rotor

$$R_\phi e^{-e_{23} \theta / 2} R_\phi^\dagger = R_\phi R_\theta R_\phi^\dagger, \tag{2.5.17}$$

de modo que el rotor intermedio —la aplicación de las dos rotaciones sucesivas— se simplifica sencillamente en

$$R' = (R_\phi R_\theta R_\phi^\dagger) R_\phi = R_\phi R_\theta, \quad (2.5.18)$$

resultado que escrito de manera explícita será:

$$R' = R_\phi R_\theta = e^{-e_{12}\phi/2} e^{-e_{23}\theta/2}. \quad (2.5.19)$$

Para finalizar, realizamos una tercera rotación esta vez respecto al eje e'_3 en un ángulo ψ ; vemos entonces que el plano de rotación será:

$$ie'_3 = iR'e_3R'^\dagger = R'e_{12}R'^\dagger, \quad (2.5.20)$$

por lo tanto, el rotor correspondiente será

$$R_\psi = e^{-R'e_{12}R'^\dagger\psi/2}. \quad (2.5.21)$$

Volviendo a expandir la ecuación anterior se puede demostrar que

$$R_\psi = R'e^{-e_{12}\psi/2}R'^\dagger = R_\phi R_\theta R_\psi R_\theta^\dagger R_\phi^\dagger, \quad (2.5.22)$$

con lo cual, tenemos el efecto de las tres rotaciones sucesivas

$$R = R_\psi R' = R_\phi R_\theta R_\psi R_\theta^\dagger R_\phi^\dagger R_\phi R_\theta, \quad (2.5.23)$$

que se simplifica de manera muy sencilla en

$$\boxed{R = R_\phi R_\theta R_\psi = e^{-e_{12}\phi/2} e^{-e_{23}\theta/2} e^{-e_{12}\psi/2}}. \quad (2.5.24)$$

Esta forma es más sencilla de visualizar y trabajar que su equivalente matricial.

Ejemplo 2. Para demostrar cómo actúan los rotores discutidos en la sección anterior sobre los vectores de \mathcal{G}_3 , veamos el caso particular del rotor $R = e^{-e_{12}\pi/4} e^{-e_{23}\pi/4} e^{-e_{12}\pi/4}$ sobre el vector e_1 .

$$Re_1R^\dagger = R_\phi R_\theta (R_\psi e_1 R_\psi^\dagger) R_\theta^\dagger R_\phi^\dagger,$$

CAPÍTULO 2. EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

evaluando el término entre paréntesis se tiene

$$\begin{aligned}
 R_\psi e_1 R_\psi^\dagger &= e^{-e_{12}\pi/4} e_1 e^{e_{12}\pi/4} \\
 &= (\cos \pi/4 - e_{12} \operatorname{sen} \pi/4) e_1 (\cos \pi/4 + e_{12} \operatorname{sen} \pi/4) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - e_{12} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + e_{12} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - e_{121} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + e_{12} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_{112} - \frac{1}{2} e_{121} - \frac{1}{2} e_{12112} \\
 &= \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_1 \\
 &= e_2,
 \end{aligned}$$

como era de esperarse. La primera rotación en sentido antihorario en el plano e_{12} del vector e_1 en un ángulo de $\pi/2$ nos devuelve e_2 . La segunda rotación será la siguiente

$$\begin{aligned}
 R_\theta e_2 R_\theta^\dagger &= e^{-e_{23}\pi/4} e_2 e^{e_{23}\pi/4} \\
 &= \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 + \frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} e_2 \\
 &= e_3,
 \end{aligned}$$

es decir, el vector e_2 se rota en el plano e_{23} en $\pi/2$ en sentido antihorario resultando e_3 . La última rotación es trivial ya que tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 R_\phi e_3 R_\phi^\dagger &= e^{-e_{12}\pi/4} e_3 e^{e_{12}\pi/4} \\
 &= e_3
 \end{aligned}$$

es decir, la última rotación no tiene ningún efecto sobre el vector e_3 ya que este es ortogonal al plano e_{12} .

Se puede aplicar el mismo procedimiento para el caso de los vectores e_2 y e_3 , con lo cual el efecto neto del rotor R sobre cada uno de los ejes coordenados será:

$$\begin{aligned}
 R e_2 R^\dagger &= -e_2 \\
 R e_3 R^\dagger &= e_1,
 \end{aligned}$$

véase la figura 2.8.

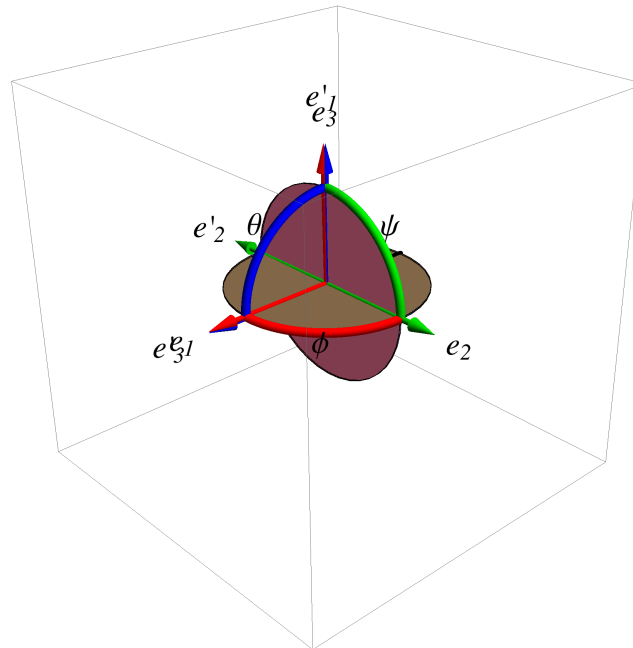


FIGURA 2.8: Efecto del rotor $R = e^{-e_{12}\pi/4}e^{-e_{23}\pi/4}e^{-e_{12}\pi/4}$ sobre cada uno de los vectores e_1 , e_2 y e_3 ; la nueva orientación de estos vectores es: $e'_1 = e_3$, $e'_2 = -e_2$ y $e'_3 = e_1$.

2.6. Sumario

En este capítulo se ha revisado el formalismo del álgebra geométrica en dos, tres y cuatro dimensiones. Debe destacarse el hecho de que el álgebra de los generadores $e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2g_{\mu\nu}$ es la misma en todos los casos, salvo el tensor métrico que difiere dependiendo de la dimensión del espacio, por ejemplo en el caso tridimensional $\mu, \nu = 1, 2$ y 3 , entonces se tiene el tensor métrico tridimensional $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1 + 1 + 1)$.

Aún cuando los axiomas fundamentales del álgebra geométrica se han definido para el caso de los vectores de \mathcal{G}_n , estos han de cumplirse para cualesquiera multivectores también de \mathcal{G}_n ; similarmente la identidad fundamental (2.1.6) preserva su forma para cualesquiera multivectores de \mathcal{G}_n . Puede verse el desarrollo axiomático del álgebra geométrica para dimensiones arbitrarias en el capítulo 4 de [14].

De otro lado, se ha demostrado que el producto geométrico está implícito en el producto matricial; sin embargo, el álgebra geométrica posee más estructura que el álgebra matricial ya que incluye el subespacio de vectores o 1-vectores de $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{G}_n$.

Capítulo 3

Algunos tópicos de álgebra abstracta

En el capítulo anterior se ha estudiado el álgebra geométrica, partiendo de una serie de axiomas de los cuales se han derivado sus propiedades; sin embargo, ésta puede considerarse como un caso particular del álgebra de Clifford, que su vez puede ser estudiada en el contexto más general del álgebra abstracta. El álgebra abstracta es una rama especializada de las matemáticas, dedicada al estudio de estructuras algebraicas¹ tales como campos, anillos, grupos, espacios vectoriales, álgebras, etc.

En física, el álgebra de Clifford es poco conocida y está comúnmente relacionada con el álgebra de las matrices γ de Dirac. En contraste, en matemáticas el álgebra de Clifford está extensamente desarrollada [4], [5], [6], [7] y puede considerarse como un tipo de álgebra asociativa sobre un campo.² Puesto que el álgebra geométrica es un caso particular del álgebra de Clifford, esto implica que podemos estudiar la primera en el contexto más general del álgebra abstracta.

La necesidad de estudiar el álgebra geométrica en el contexto más general del álgebra abstracta, surge cuando se requiere estudiar los sistemas cuánticos ya que se sabe que dichos sistemas —por ejemplo espinores— son elementos de un ideal izquierdo mínimo de un anillo [20]. En su formulación actual, el álgebra geométrica

¹Una estructura algebraica es un conjunto en el cual se han definido operaciones entre sus elementos, por ejemplo, el conjunto N junto a la operación de adición es una estructura algebraica.

²Por ejemplo el álgebra vectorial en \mathbb{R}^3 , es un álgebra asociativa sobre el campo de los números reales

prescinde de los conceptos de álgebra abstracta, por ello se requiere discutir algunos tópicos de álgebra abstracta que serán utilizados más adelante en el estudio de los sistemas cuánticos de dos estados.

3.1. Grupos

Un grupo es una estructura algebraica con una única operación binaria³ la cual satisface ciertos axiomas, llamados axiomas de grupo.

Definición 2. *Un grupo $(G, *)$, se define por el conjunto G junto a la operación binaria $(*)$ para cualesquiera elementos a, b y c diferentes de cero en G que satisfacen los siguientes axiomas*

$$G1 \quad a * (b * c) = (a * b) * c. \text{ (Asociatividad).}$$

$$G2 \quad a * b = c. \text{ (Clausura)}$$

$$G3 \quad a * e = e * a = a. \text{ (Al elemento } e \text{ se le conoce como identidad).}$$

$$G4 \quad a * f = f * b = e, \text{ donde } f \in G \text{ es el inverso de } a. \text{ (Inversa).} \quad \square$$

En general no se exige que la operación $(*)$ sea conmutativa, en cuyo caso G se conoce como Abeliano. Como ejemplo clásico de grupo, podemos mencionar al conjunto de los números enteros junto a la adición $(\mathbb{Z}, +)$, ya que la adición es asociativa y cerrada; además la identidad es el cero y el elemento inverso sería el inverso aditivo. Los rotores R junto al producto geométrico, forman un grupo ya que el producto de dos o más rotores nos devuelve también un rotor (cumple G1 y G2), la identidad sería en este caso la unidad ya que $RR^\dagger = 1$, (cumple G3 y G4).

3.2. Anillos

Un anillo es una estructura algebraica que generaliza los conceptos de adición y multiplicación a objetos no numéricos como polinomios, matrices, funciones, etc.

³La operación es entre dos elementos del grupo

Definición 3. *Un anillo es un conjunto R provisto de dos operaciones binarias $(+)$ y (\cdot) que satisfacen los siguientes axiomas, para todo $a, b, c \in R$:*

Bajo la adición R es un grupo aditivo abeliano:

$$R1 \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

$$R2 \quad \text{Existe la identidad aditiva } 0 \text{ en } R \text{ tal que } a + 0 = 0 + a = a.$$

$$R3 \quad \text{Existe el inverso aditivo } -a \text{ en } R \text{ tal que } a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

$$R4 \quad a + b = b + a, + \text{ es abeliano.}$$

R es monoide⁴ bajo la multiplicación:

$$R5 \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ es asociativa bajo la multiplicación.}$$

$$R6 \quad \text{Existe la identidad multiplicativa } 1 \text{ en } R, \text{ tal que, } 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

La multiplicación es distributiva bajo la adición:

$$R7 \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (izquierda).}$$

$$R8 \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \text{ (derecha).} \quad \square$$

En el desarrollo de la tesis siempre ha de considerarse que los anillos cumplen con el axioma R6, además ha de omitirse la notación (\cdot) para denotar el producto de los elementos del anillo.

3.3. Campos

En el álgebra abstracta, un campo es una estructura algebraica *conmutativa* cuyos elementos diferentes de cero poseen inversa multiplicativa. Como tal, en un campo están definidas las operaciones de suma y producto incluyendo las operaciones inversas, resta y división, respectivamente. Los ejemplos más comunes de campos son el conjunto de los números reales y el campo de los números complejos.

⁴En el álgebra abstracta, un monoide es una estructura algebraica (S) , con una única operación binaria (\cdot) la cual no necesariamente posee inversa, además tiene un elemento identidad I de modo que $\forall a \in S$ se cumple: $a \cdot I = I \cdot a = a$.

Hay que notar, en base a lo antes discutido, que todo campo es un anillo mas no todo anillo es un campo ya que todo campo permite la división mientras que en un anillo no esta definida la inversa multiplicativa. Definimos entonces un campo en base a las operaciones de adición y multiplicación donde las identidades aditivas y multiplicativas son diferentes, es decir, $0 \neq 1$. Además las operaciones de sustracción y división están definidas en función de las dos anteriores.

Definición 4. *Un campo es un conjunto F provisto de dos operaciones binarias $(+)$ y (\cdot) que satisfacen los siguientes axiomas, para todo a, b, c en F :*

F1 F es cerrado bajo la adición y multiplicación: $(a + b) \in F$ y $(a \cdot b) \in F$.

F2 F es asociativo tanto para la suma como la multiplicación $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

F3 Existe la identidad aditiva 0 en F tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

F4 Existe la identidad multiplicativa 1 en F tal que: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

F5 Existe el inverso aditivo $-a$ e inverso multiplicativo a^{-1} en F tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ y $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, en otras palabras, existen tanto la sustracción como la división.

F6 Distributividad de la multiplicación sobre la suma, es decir: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ □

3.4. Idempotentes primitivos

En todo anillo R existen elementos $e \in R$ junto a la operación binaria (\cdot) que cumplen: $e \cdot e = e$, a estos elementos se les llama idempotentes primitivos. En general, se puede probar por inducción que: $e^n = e$. Dentro del álgebra abstracta existen muchos tipos de idempotentes, sin embargo, sólo discutiremos los idempotentes primitivos puesto que son importantes para nuestro propósito, como se verá en el próximo capítulo.

Un idempotente e se llama primitivo si este no puede descomponerse en la suma de otros dos. Los idempotentes e y f se aniquilan mutuamente si: $ef = fe = 0$, en general los idempotentes e_1, e_2, \dots, e_n se aniquilan en pares, es decir, $e_i e_j = 0$.

3.5. Ideales Izquierdos y Derechos

Dentro de la teoría de anillos, un ideal es un subconjunto especial el cual generaliza ciertos tipos de conjuntos. Por ejemplo, en el conjunto de los números enteros, los números pares forman un subconjunto en el cual la suma resulta en otro número par, es decir, la suma es cerrada; de otro lado, el producto de dos números pares también resulta en otro número par, es decir, el producto “absorbe” a cualquier elemento dentro del mismo conjunto.

Definición 5. *Un subconjunto I de R se dice que es un ideal bilatero en R si cumple las siguientes condiciones:*

- $(I, +)$ es subgrupo aditivo de $(R, +)$, donde $(R, +)$ es el grupo aditivo asociado al anillo $(R, +, \cdot)$
- $\forall x \in I, \forall r \in R: xr \in I$
- $\forall x \in I, \forall r \in R: rx \in I.$ □

Ya que se va a trabajar con anillos no abelianos tenemos que distinguir otros dos tipos de ideales:

El subconjunto $I \subset R$ es un ideal izquierdo de R si es subgrupo aditivo de $(R, +)$ y además:

$$\forall x \in I, \forall r \in R: rx \in I \quad (3.5.1)$$

de manera similar: el subconjunto $I \subset R$ es un ideal derecho de R si es subgrupo aditivo de $(R, +)$ y además:

$$\forall x \in I, \forall r \in R: xr \in I. \quad (3.5.2)$$

3.5.1. Ideales Izquierdos Mínimos

En mecánica cuántica los espinores forman un ideal izquierdo dentro del álgebra de Clifford adecuada, estos pueden construirse a partir de los idempotentes primitivos e ideales izquierdos descritos anteriormente.

Un ideal Izquierdo $I \subset R$ es mínimo, si este no contiene otros ideales propios distintos de cero. Además si I es un ideal izquierdo mínimo dentro del anillo R ,

entonces o bien $II = 0$ o $I = Re$, para cualquier idempotente primitivo e de R [25].

3.6. Formas Cuadráticas Reales

Las formas cuadráticas son en general polinomios de grado dos en n variables, por ejemplo el polinomio $2x^2 + 3y^2 - z^2$ es una forma cuadrática en las variables x , y y z , sin embargo, el polinomio $ax^2 + bx + c$ no lo es a no ser que $b = c = 0$. Las formas cuadráticas reales juegan un rol muy importante en muchas áreas de las matemáticas como teoría de grupos, álgebra lineal, etc. En esta sección presentamos sólo las formas cuadráticas sobre el campo de los números reales, ya que los números complejos están embebidos dentro de la estructura general del álgebra de Clifford.

Definición 6. Sea el espacio vectorial V sobre el campo de los números reales, se dice que V es un espacio cuadrático (V, q) , si existe una función de valor real q , llamada forma cuadrática, en V tal que $q(x) = b(x, x)$, donde b es una forma bilineal⁵ simétrica en V , para todo x en V . \square

Si $\{e_1, e_2 \dots e_n\}$ es una base ortonormal de V y la forma bilineal b está representada por la matriz $b = (b_{ij})$, entonces la forma cuadrática puede escribirse como

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j. \quad (3.6.1)$$

Esta forma cuadrática puede escribirse como

$$q(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i x_i, \quad (3.6.2)$$

haciendo b diagonal. Los coeficientes b_{ii} en este caso pueden tomar los valores 0, +1 o -1 y generalmente se denotan por la *signatura* (n_0, n_+, n_-) , donde n_0 es el número de 0s, n_+ es el número de +1s y n_- es el número -1s respectivamente. Si $n_0 = 0$ entonces la forma cuadrática es no degenerada y la signatura se escribe

⁵Una forma bilineal es una función $b : V \times V \rightarrow F$, donde F es el campo de los números reales, esto es, $\forall u, v, w \in V$ se cumple que $b(u+v, w) = b(u, w) + b(v, w)$, $b(u, v+w) = b(u, v) + b(u, w)$, además para cualquier escalar λ se tiene: $b(\lambda u, v) = b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v)$.

simplemente como (p, q) con $p + q = n$. Resumiendo:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1 && \text{para } 1 \leq i \leq p \\ b_{ii} &= -1 && \text{para } p + 1 \leq i \leq p + q \text{ y} \\ b_{ij} &= 0 && \text{para los demás casos.} \end{aligned}$$

con esto podemos escribir $q(x)$ de manera más familiar

$$q(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^n x_i^2 \quad (3.6.3)$$

donde $n = p + q$ es llamada el rango de b .

Ejemplo 3. En este punto conviene mencionar algunos ejemplos relacionados a las formas cuadráticas encontradas en la física, por ejemplo si $(p = 3, q = 0)$, es decir, para la signatura $(3, 0)$ se tiene la forma cuadrática

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (3.6.4)$$

resultando en el espacio euclidiano tridimensional, mientras que la signatura $(1, 3)$ representa a la forma cuadrática asociada al espacio de Minkowsky

$$q(x) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (3.6.5)$$

3.7. Álgebras de Clifford

El álgebra de Clifford es un álgebra asociativa que generaliza e integra a los números reales, números complejos, cuaterniones y muchos otros tipos de sistemas hipercomplejos. El álgebra de Clifford es la generalización del álgebra geométrica para signaturas arbitrarias, es decir, el álgebra geométrica es realmente un caso particular del álgebra de Clifford sobre los números reales.

Definición 7. El álgebra unital asociativa sobre el campo F es el álgebra de Clifford $Cl_{p,q}$ la cual contiene una copia de F y \mathbb{R}^n de modo que:

- (a) El cuadrado de cualquier vector x en \mathbb{R}^n es igual a su forma cuadrática $q(x)$
- (b) El álgebra de Clifford $Cl_{p,q}$ es generada por el espacio vectorial \mathbb{R}^n .

(c) El álgebra de Clifford $Cl_{p,q}$ no puede generarse por ningún subespacio propio de \mathbb{R}^n . \square

Utilizando la base canónica de \mathbb{R}^n , (a) puede reemplazarse por

$$\begin{aligned} e_i^2 &= 1, & 1 \leq i \leq p \\ e_i^2 &= -1, & p+1 \leq i \leq p+q = n \\ e_i e_j &= -e_j e_i, & i < j. \end{aligned}$$

mientras que (c) equivale a imponer la condición: $e_1 e_2 \dots e_n \neq \pm 1$, véase [22].

La anticonmutatividad del producto geométrico nos permite recobrar fácilmente los casos particulares vistos en el capítulo 2 los cuales se resumen en el cuadro 3.1.

Signatura	Álgebra	Nombre
(2, 0)	$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}$	\mathcal{G}_2
(3, 0)	$e_i e_j = \delta_{ij} + e_{123} \epsilon_{ijk} e_k$	Álgebra de Pauli
(1, 3)	$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$	Álgebra de Dirac

CUADRO 3.1: Álgebras de Clifford en diferentes signaturas

Capítulo 4

Sistemas cuánticos de dos estados

En este capítulo veremos una de las principales aplicaciones del álgebra geométrica a la mecánica cuántica, este es el caso de los sistemas cuánticos de dos estados. Como bien se sabe, estos sistemas son sencillos de estudiar ya que el sistema cuántico que los describe es simplemente la superposición de dos estados cuánticos uno independiente del otro.

Convencionalmente, estos sistemas están descritos en el espacio de Hilbert de dimensión dos, en donde los operadores están representados en función de las matrices de Pauli. Por otra parte, como vimos en el capítulo 2, las matrices de Pauli son la representación matricial de los vectores de la base canónica de \mathcal{G}_3 . Este hecho sugiere que dichos sistemas pueden estudiarse utilizando el álgebra geométrica del espacio tridimensional. Sin embargo, hacer esto conlleva a plantear si los equivalentes algebraicos de las matrices de Pauli en \mathcal{G}_3 , se comportan en el mismo sentido que sus equivalentes matriciales.

Para ver cuales son las implicancias de ello, es necesario encontrar las equivalencias tanto de los estados como los operadores del espacio de Hilbert en el álgebra geométrica. Seguidamente hay que encontrar la dinámica que obedecen los estados en este formalismo, por ello debe buscarse cuál es el equivalente algebraico de la ecuación de Schrödinger para estos sistemas. Finalmente debe resolverse dicha ecuación y reproducir los resultados convencionales.

El programa del párrafo anterior está estudiado tanto en la tesis doctoral de Chris Doran [13] como en el libro de texto publicado por él y Antony Lasemby “*Geometric Algebra for Physicists*” [14]. El propósito de este capítulo es recapitular,

ampliar y generalizar dicho programa considerando a los estados como elementos de un ideal izquierdo mínimo de \mathcal{G}_3 .

4.1. Sistemas no relativistas de espín 1/2

En el espacio de Hilbert, un sistema de dos estados se escribe como la superposición

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle, \quad (4.1.1)$$

en donde c_1 y c_2 son números complejos y los kets $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ son los posibles estados del sistema. Uno de los experimentos más famosos en el cual puede aplicarse de manera inmediata el formalismo anterior es el experimento de Stern-Gerlach donde un haz de átomos de plata es sometido a un campo magnético no uniforme externo. Debido a que los átomos de plata –como un todo– poseen un momento magnético¹ $\boldsymbol{\mu}$, la energía de interacción de éste y el campo magnético externo es $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$, por tanto la fuerza en la dirección del eje z está dada por la ecuación

$$F_z = \frac{\partial(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (4.1.2)$$

Ya que la dirección de $\boldsymbol{\mu}$ es completamente arbitraria se esperaría que los valores de μ_z varíen entre $-|\boldsymbol{\mu}|$ y $+|\boldsymbol{\mu}|$ resultando en un haz continuo emergiendo del campo magnético no uniforme, pero esto no es lo que se observa. En lugar de ello se tienen dos haces completamente separados, véase la figura 4.1.

Como se vio en el capítulo 2, el álgebra geométrica nos provee de nuevas herramientas y técnicas que nos permitirán estudiar los sistemas de dos estados desde una nueva perspectiva.

Para empezar escribamos el sistema cuántico de dos estados de la ecuación (4.1.1), véase por ejemplo[27, capítulo IV], como:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \exp(-i'\phi/2) \\ \text{sen}(\theta/2) \exp(i'\phi/2) \end{pmatrix} \exp i'(\gamma + \delta)/2, \quad (4.1.3)$$

donde puede verse que prescindiendo de la fase global $\exp i'(\gamma + \delta)/2$, los factores $\exp(\mp i'\phi/2)$ sugieren una analogía con los rotores discutida en el capítulo 2.

¹En este capítulo denotaremos a los vectores tridimensionales en negrita.

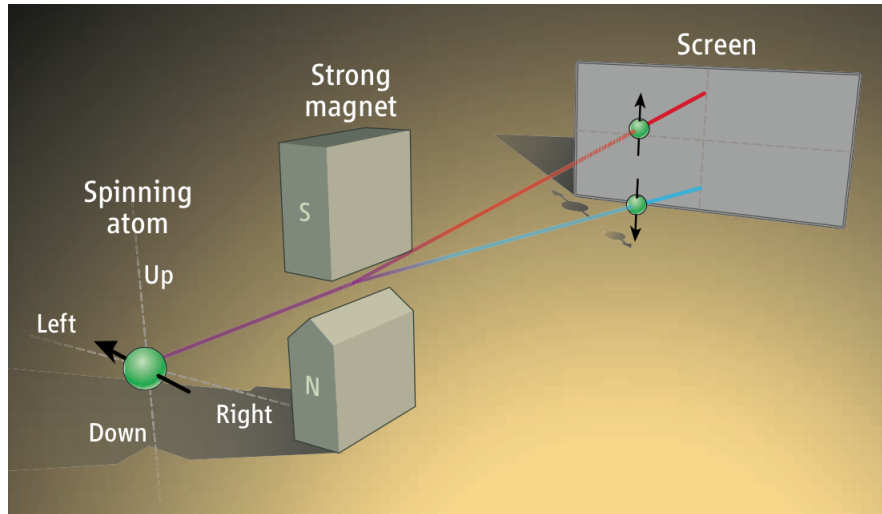


FIGURA 4.1: Experimento de Stern-Gerlach. Figura tomada de [26].

Para explorar esto en detalle, consideremos un sistema coordinado generado por la base canónica de \mathbb{R}^3 , donde el vector e_3 puede rotarse en los planos e_{12} y e_{31} ángulos ϕ y θ , respectivamente, como se ve en la siguiente figura.

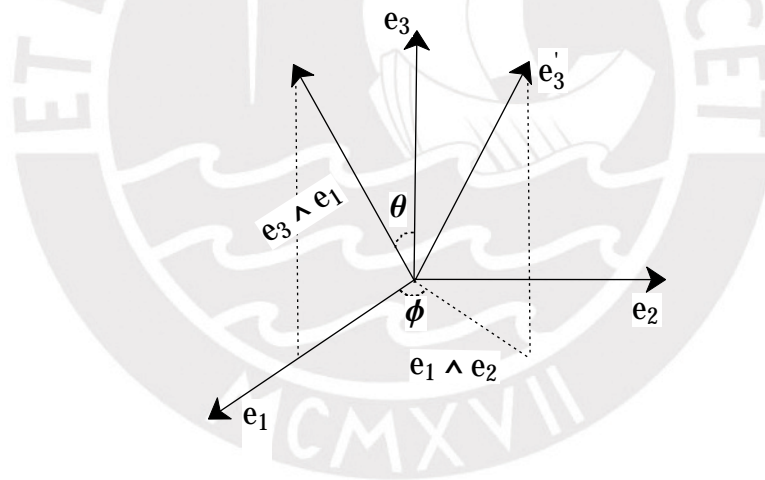


FIGURA 4.2: Rotación del vector e_3

Por lo tanto, el nuevo vector e'_3 , resulta de aplicar el rotor

$$R = e^{-e_{12}\phi/2}e^{-e_{31}\theta/2}, \tag{4.1.4}$$

sobre e_3 , es decir:

$$e'_3 = Re_3R^\dagger. \tag{4.1.5}$$

CAPÍTULO 4. SISTEMAS CUÁNTICOS DE DOS ESTADOS

43

Usando la fórmula de Euler, la ecuación (4.1.4) puede escribirse como

$$R = \left(\cos \frac{\phi}{2} - e_{12} \sin \frac{\phi}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - e_{31} \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (4.1.6)$$

de donde

$$R = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} e_{23} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} e_{31} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} e_{12} \quad (4.1.7)$$

La ecuación anterior se puede escribir de manera compacta si introducimos los coeficientes

$$a_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \quad (4.1.8a)$$

$$a_1 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \quad (4.1.8b)$$

$$a_2 = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \quad (4.1.8c)$$

$$a_3 = -\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2}, \quad (4.1.8d)$$

de modo que

$$R = a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{31} + a_3 e_{12}. \quad (4.1.9)$$

Usando nuevamente la fórmula de Euler esta vez en la ecuación 4.1.3 se tiene

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - i' \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + i' \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Comparando término a término este último resultado con la ecuación (4.1.7) y utilizando los coeficientes a_i definidos anteriormente vemos que

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 + i' a_3 \\ -a_2 + i' a_1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.11)$$

El análisis anterior sugiere que existe una equivalencia entre el ket $|\psi\rangle$, ecuación (4.1.3) y el rotor R , ecuación (4.1.9), por lo tanto se tiene el siguiente mapeo

$$\boxed{\mathcal{M} : |\psi\rangle \rightarrow \psi = a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{31} + a_3 e_{12}}, \quad (4.1.12)$$

donde se ha introducido el símbolo ψ en lugar de R para destacar que este multivector es equivalente al estado cuántico $|\psi\rangle$. A consecuencia del resultado anterior,

se concluye que los sistemas cuánticos de espín $1/2$ pueden estudiarse usando el álgebra geométrica del espacio tridimensional utilizando el mapeo introducido en la ecuación (4.1.12).

Ejemplo 4. *En este punto, es conveniente discutir un ejemplo para el caso particular de los estados up y down en el formalismo del álgebra geométrica. Convencionalmente un sistema de dos estados puede visualizarse en la esfera de Bloch, en donde los polos norte y sur representan estados mutuamente ortogonales, véase la figura 4.3. El multivector (4.1.12) ofrece una manera alternativa de representar geoméricamente los sistemas de dos estados en el álgebra geométrica.*

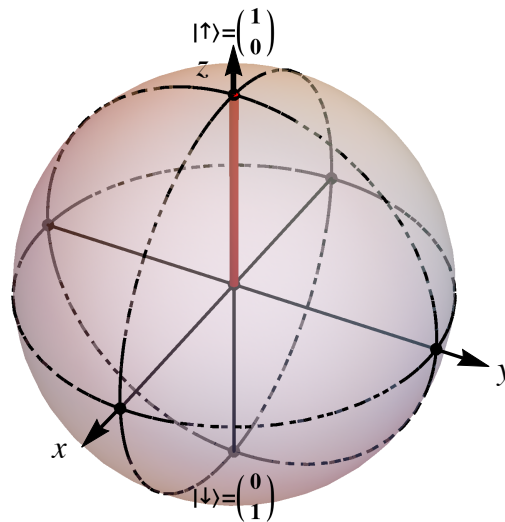


FIGURA 4.3: Esfera de Bloch mostrando el estado up en color rojo, $\theta = \phi = 0$; el estado down se puede obtener de similar forma haciendo $\theta = \pi$ y $\phi = 0$.

En el formalismo del álgebra geométrica, los coeficientes a_i del multivector (4.1.12) dependen de los ángulos θ y ϕ , de manera que haciendo una analogía con la esfera de Bloch, el estado up $|\uparrow\rangle$ correspondería a los valores $\theta = \phi = 0$, entonces la ecuación (4.1.12) se reduce simplemente a

$$|\uparrow\rangle \leftrightarrow \psi_{\uparrow} = \cos 0 \cos 0 + \sin 0 \sin 0 e_{23} - \sin 0 \cos 0 e_{31} - \cos 0 \sin 0 e_{12} = 1 \quad (4.1.13)$$

Similarmente en el caso del estado down $|\downarrow\rangle$, tenemos que $\theta = \pi$ y $\phi = 0$, entonces

$$|\downarrow\rangle \leftrightarrow \psi_{\downarrow} = \cos \pi/2 \cos 0 + \sin \pi/2 \sin 0 e_{23} - \sin \pi/2 \cos 0 e_{31} - \cos \pi/2 \sin 0 e_{12} = -e_{31}. \quad (4.1.14)$$

En el caso del estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$; se tiene que $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$ de donde: $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $a_3 = 0$. Por lo tanto se tiene la equivalencia

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \leftrightarrow \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e_{31}. \quad (4.1.15)$$

Finalmente si $\theta = \pi/2$ y $\phi = \pi/2$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ y $a_3 = -\frac{1}{2}$, por lo tanto:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i'|\downarrow\rangle \leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}(1 + e_{23} - e_{31} - e_{12}). \quad (4.1.16)$$

Nota

Los resultados del ejemplo anterior son algo controversiales, sin embargo, están en completo acuerdo con los resultados mostrados en [14]. Esta controversia puede eliminarse introduciendo los idempotentes primitivos del álgebra geométrica como se verá más adelante en este capítulo.

4.2. Dinámica del Espinor

A continuación veamos que sucede con la dinámica del espinor $|\psi\rangle$ en la descripción del álgebra geométrica, para ello recordemos que la dinámica de este estado en el espacio de Hilbert está gobernada por la ecuación de Schrödinger²

$$i'\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (4.2.1)$$

entonces la siguiente tarea es encontrar una ecuación equivalente para el multivector ψ . Esto puede lograrse recordando que las matrices de Pauli son simplemente la representación matricial de los generadores del álgebra geométrica en tres dimensiones:

$$e_1 \rightarrow \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \rightarrow \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i' \\ i' & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \rightarrow \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

²En este capítulo representaremos a los operadores del espacio de Hilbert con el símbolo: $\hat{\cdot}$

Puesto que el Hamiltoniano para el sistema de dos estados está en términos de las matrices de Pauli, es conveniente encontrar cual es el efecto de multiplicar las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_k$ con el espinor $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + i'a_3 \\ -a_2 + i'a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 + i'a_1 \\ a_0 + i'a_3 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_2|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i' \\ i' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + i'a_3 \\ -a_2 + i'a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + i'a_2 \\ -a_3 + i'a_0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}_3|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + i'a_3 \\ -a_2 + i'a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + i'a_3 \\ a_2 - i'a_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

A partir del resultado anterior, se puede ver por ejemplo que en el caso del producto $\hat{\sigma}_1|\psi\rangle$, los términos a_i del estado $|\psi\rangle$ se transforman de acuerdo al siguiente mapeo: $a_0 \rightarrow -a_2$, $a_1 \rightarrow a_3$, $-a_2 \rightarrow a_0$ y $a_3 \rightarrow a_1$; este mapeo, junto a los dos casos restantes se muestran en el cuadro 4.1

Grados de libertad de $ \psi\rangle$	$\hat{\sigma}_1 \psi\rangle$	$\hat{\sigma}_2 \psi\rangle$	$\hat{\sigma}_3 \psi\rangle$
a_0	$-a_2$	a_1	a_0
a_1	a_3	a_0	$-a_1$
$-a_2$	a_0	$-a_3$	a_2
a_3	a_1	a_2	a_3

CUADRO 4.1: Efecto de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_k$ sobre los términos a_i del estado $|\psi\rangle$. Puede observarse por ejemplo que el efecto de la matriz $\hat{\sigma}_1$ sobre el estado $|\psi\rangle$ es que los términos a_i se transforman de acuerdo a: $a_0 \rightarrow -a_2$, $a_1 \rightarrow a_3$, $-a_2 \rightarrow a_0$ y $a_3 \rightarrow a_1$.

Debido a las equivalencias: (4.1.12) ($|\psi\rangle \rightarrow \psi$) y (4.2.2) ($\hat{\sigma}_k \rightarrow e_k$), es tentativo escribir por ejemplo para el caso $\hat{\sigma}_1|\psi\rangle$ lo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1|\psi\rangle \rightarrow e_1\psi &= e_1(a_0 + a_1e_{23} + a_2e_{31} + a_3e_{12}) \\ &= a_0e_1 + a_1e_{123} - a_2e_3 + a_3e_2.\end{aligned}$$

Nótese que este mapeo es incorrecto ya que deseamos que el multivector de grado par ψ preserve su grado, en lugar de eso se ha obtenido un multivector de grado impar. Para salvar este inconveniente podemos multiplicar la ecuación anterior por

el vector e_3 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_1|\psi\rangle &\rightarrow e_1\psi e_3 = e_1(a_0 + a_1e_{23} + a_2e_{31} + a_3e_{12})e_3 \\ &= a_0e_{13} + a_1e_{12} - a_2 + a_3e_{23} \\ &= -a_2 + a_3e_{23} - a_0e_{31} + a_1e_{12}\end{aligned}$$

este último resultado reproduce el mismo efecto que tiene la matriz $\hat{\sigma}_1$ sobre el estado $|\psi\rangle$ tal como se muestra en el cuadro 4.1; repitiendo este mismo proceso para los demás casos vemos que el mapeo correcto es

$$\boxed{\hat{\sigma}_k|\psi\rangle \rightarrow e_k\psi e_3} \quad (4.2.3)$$

Por otra parte, veamos ahora cual es el efecto que tiene el número imaginario i' sobre el estado $|\psi\rangle$, para ver esto notamos que el producto de las tres matrices de Pauli es el siguiente:

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} i' & 0 \\ 0 & i' \end{pmatrix}, \quad (4.2.4)$$

es decir $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3 \rightarrow e_1e_2e_3 = i$. Utilizando la ecuación 4.2.3, es fácil darse cuenta que

$$\boxed{i'|\psi\rangle \rightarrow e_1e_2e_3\psi e_3e_3e_3 = i\psi e_3} \quad (4.2.5)$$

nótese en la ecuación anterior que vector e_3 está elevado al cubo, la razón de ello es que estamos aplicando (4.2.3) tres veces consecutivas.

Seguidamente debemos encontrar la representación del Hamiltoniano en la ecuación 4.2.1 en el formalismo de \mathcal{G}_3 . Para ello, recordemos que en el caso de los sistemas de espín 1/2 como los descritos anteriormente, el Hamiltoniano de interacción es simplemente

$$\hat{H} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (4.2.6)$$

donde el momento magnético viene dado por la expresión

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{g_s\mu_B}{\hbar}\mathbf{S}, \quad (4.2.7)$$

con g_s que representa a la razón giromagnética que para el caso del electrón es aproximadamente 2, μ_B es el magnetón de Bohr: $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m_e}$ y \mathbf{S} es el *vector de espín*

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \text{donde } \boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z), \quad (4.2.8)$$

con lo cual se tiene el Hamiltoniano en función de las matrices de Pauli y el vector campo magnético tridimensional \mathbf{B}

$$\hat{H} = -\frac{q\hbar}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.2.9)$$

En la expresión anterior, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ no es un escalar, sino una notación abreviada de la suma

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \sum_{k=1}^3 B_k \hat{\sigma}_k, \quad (4.2.10)$$

que puede escribirse fácilmente en términos de los generadores de \mathcal{G}_3

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \rightarrow \sum_{k=1}^3 B_k e_k, \quad (4.2.11)$$

es decir, la expresión anterior es un *vector* de \mathcal{G}_3 !. Por consiguiente, la expresión para el Hamiltoniano de interacción en \mathcal{G}_3 que denotaremos simplemente por H será la siguiente:

$$H = -\frac{q\hbar}{2m_e} B_k e_k, \quad (4.2.12)$$

en la cual se ha considerado la suma sobre índices repetidos.

Armados ahora con las correspondencias anteriores (4.2.3), (4.2.5) y (4.2.12), volvamos nuevamente a escribir la ecuación de Schrödinger para los sistemas cuánticos de espín 1/2 esta vez en función de los multivectores del álgebra geométrica

$$\underbrace{i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = -\frac{q\hbar}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} |\psi\rangle}_{\text{Espacio de Hilbert}} \rightarrow \underbrace{i\hbar \dot{\psi} e_3 = -\frac{q\hbar}{2m_e} B_k e_k \psi e_3}_{\text{Álgebra geométrica tridimensional}} \quad (4.2.13)$$

que puede simplificarse de manera sencilla resultando

$$\dot{\psi} = \frac{q}{2m_e} B_k i e_k \psi. \quad (4.2.14)$$

En el formalismo convencional, la función de onda en la representación x puede escribirse en forma polar como $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = R \exp(i\theta)$, donde el producto: $\psi(x)\psi(x)^* = \mathcal{R}^2$ representa la densidad de probabilidad. Esto sugiere que se puede escribir cualquier multivector $\psi \in \mathcal{G}_3$ de la siguiente manera

$$\psi = \mathcal{R}U, \quad (4.2.15)$$

donde $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ representa la amplitud de ψ y $U = a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{31} + a_3 e_{12}$. De esta manera, la amplitud de ψ puede calcularse a partir del producto

$$\psi\psi^\dagger = \mathcal{R}UU^\dagger\mathcal{R}^\dagger = \mathcal{R}^2, \quad (4.2.16)$$

ya que $UU^\dagger = 1$.

El espinor normalizado U se puede poner en función del multivector ψ y la amplitud de probabilidad $\rho = \mathcal{R}^2$ como

$$U = \frac{\psi}{(\psi\psi^\dagger)^{1/2}} = \frac{\psi}{(\rho)^{1/2}}, \quad (4.2.17)$$

de manera que $\psi = \rho^{1/2}U$.

Descomponiendo (4.2.14) en función de U y ρ se tiene

$$\dot{U} = \frac{q}{2m_e} i\mathbf{B}U \quad (4.2.18)$$

la cual es la ecuación de Schrödinger en función del rotor o espinor normalizado U , es decir, la dinámica de los sistemas cuánticos de espín 1/2 se reduce simplemente a la dinámica de los rotores en el álgebra geométrica.

La ecuación anterior se puede integrar fácilmente resultando

$$U = e^{\frac{q}{2m_e} i\mathbf{B}t} U_0, \quad (4.2.19)$$

de donde

$$\psi = e^{\frac{q}{2m_e} i\mathbf{B}t} \psi_0, \quad (4.2.20)$$

esto nos indica que el espinor ψ precesa en el plano $i\mathbf{B}$ a una frecuencia $\omega_0 = \frac{q}{m_e} |\mathbf{B}|$.

4.3. Rotaciones en el formalismo de dos componentes

Veamos brevemente la descripción de los sistemas de dos estados desde el punto de vista convencional. Como se sabe los estados de espín $\frac{1}{2}$ pueden manipularse utilizando el formalismo de las matrices de Pauli [19]. En este formalismo se introduce el operador de rotación $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ de la siguiente forma

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = e^{-\frac{1}{2}i'\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi} \quad (4.3.1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario tridimensional

$$\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3). \quad (4.3.2)$$

Como ya vimos anteriormente, el producto $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ es en realidad una forma abreviada de escribir la suma de operadores Hermíticos

$$\hat{\sigma}_1 n_1 + \hat{\sigma}_2 n_2 + \hat{\sigma}_3 n_3.$$

Par ver la acción del operador $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ sobre los espinores es conveniente expandirlo como

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}i'\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi} = & \left[1 - \frac{1}{2!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}})^4 \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 - \dots \right] \\ & - i' \left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}) \left(\frac{\phi}{2}\right) - \frac{1}{3!}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}})^3 \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \dots \right], \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

donde los términos $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}})^n$ pueden evaluarse utilizando la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i'\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \quad (4.3.4)$$

Haciendo $\mathbf{n} = \mathbf{a} = \mathbf{b}$ se tiene:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}})^n = \begin{cases} 1 & : \text{para } n \text{ par} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} & : \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

Utilizando estos resultados es fácil probar la identidad

$$e^{-\frac{1}{2}i'\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi} = \mathbb{I} \cos \frac{\phi}{2} - i'\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\phi}{2}, \quad (4.3.5)$$

que no es otra cosa que la fórmula de Euler en el formalismo de dos componentes.

Veamos ahora cual es el efecto de aplicar el operador de rotación sobre los estados. Suponiendo que al inicio el sistema se encuentra en el estado up $|\uparrow\rangle$, podemos aplicar el operador de rotación sobre este estado de la siguiente manera

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}_2, \beta)|\uparrow\rangle = e^{-\frac{1}{2}i'\beta\hat{\sigma}_2}|\uparrow\rangle, \quad (4.3.6)$$

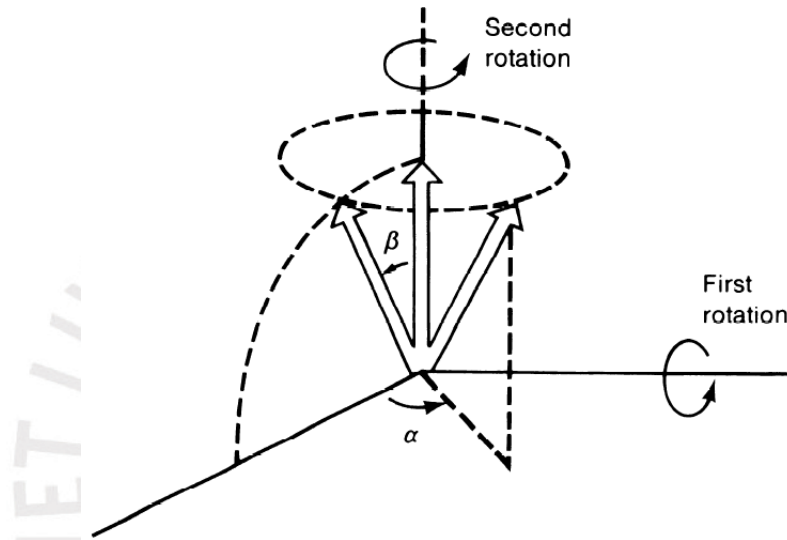


FIGURA 4.4: Rotaciones en el formalismo de dos componentes. La primera rotación se realiza respecto al eje y , mientras que la segunda respecto al eje z .

Figura tomada de [19]

donde se ha elegido al eje y como eje de rotación y rotado un ángulo β , véase la figura 4.4. Seguidamente se puede aplicar una segunda rotación en un ángulo α esta vez respecto al eje z , el operador de rotación correspondiente es $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}_3, \alpha)$, por lo tanto el efecto combinado de ambos operadores será:

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}_3, \alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}_2, \beta)|\uparrow\rangle = e^{-\frac{1}{2}i'\alpha\hat{\sigma}_3}e^{-\frac{1}{2}i'\beta\hat{\sigma}_2}|\uparrow\rangle \quad (4.3.7)$$

Escribiendo la ecuación anterior en función de las matrices de Pauli y la matriz identidad tenemos que el estado final es

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}_3, \alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}_2, \beta)|\uparrow\rangle = (\mathbb{I} \cos \frac{\alpha}{2} - i'\hat{\sigma}_3 \sin \frac{\alpha}{2})(\mathbb{I} \cos \frac{\beta}{2} - i'\hat{\sigma}_2 \sin \frac{\beta}{2})|\uparrow\rangle \quad (4.3.8)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{-\alpha/2} \\ \sin \frac{\beta}{2} e^{\alpha/2} \end{pmatrix}, \quad (4.3.9)$$

resultado que era de esperarse³ puesto que el producto de los operadores de rotación descritos en esta sección es similar al rotor R introducido al comienzo de este capítulo. Para aclarar esto utilizamos las identidades

$$i'\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1, \quad i'\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \quad (4.3.10)$$

que al ser reemplazadas en la ecuación (4.3.7) nos reproduce la matriz de rotación

$$\hat{R} = e^{-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\alpha}e^{-\frac{1}{2}\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1\beta}, \quad (4.3.11)$$

en donde el número imaginario i' aparece de manera implícita en el producto de las matrices $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2$ y $\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1$.

La discusión de la sección anterior demuestra que el álgebra matricial es completamente equivalente al formalismo del álgebra geométrica. Aún así, hay que notar las siguientes observaciones:

- El vector \hat{n} en este formalismo, es el vector normal al plano de rotación, sin embargo, es difícil extender este concepto a otras dimensiones.
- La notación $\sigma \cdot \hat{n}$ aparece solamente en el formalismo del álgebra de Pauli.
- Según [2], la ecuación (4.3.4) que relaciona el álgebra vectorial con el álgebra de matrices de Pauli es un ejemplo claro de la redundancia innecesaria que existe en el formalismo convencional ya que se sabe que tanto el álgebra vectorial como el álgebra de las matrices de Pauli tienen el mismo contenido geométrico.
- Utilizando el álgebra geométrica la ecuación (4.3.4) se reduce simplemente a la identidad fundamental (2.1.6) como demostraremos a continuación.

Sean a y b vectores de \mathcal{G}_3 , entonces el producto geométrico de estos será

$$ab = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \quad (4.3.12)$$

³Nótese que $\beta = \theta$ y $\alpha = \phi$.

donde a_i y b_i son escalares reales. Desarrollando este producto se tiene

$$\begin{aligned}
 ab &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} + (a_1b_3 - a_3b_1)e_{13} + (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23} \\
 &= a \cdot b + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} + (a_1b_3 - a_3b_1)e_{13} + (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23} \\
 &= a \cdot b + (a_2b_3 - a_3b_2)ie_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)ie_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)ie_3 \\
 &= a \cdot b + i(a \times b)
 \end{aligned}$$

este último resultado se puede poner en términos de los vectores tridimensionales \mathbf{a} y \mathbf{b} y el vector de Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ introduciendo las correspondencias

$$a \rightarrow \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad b \rightarrow \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad a \times b \rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.3.13)$$

Recordando además que el pseudoescalar i corresponde al número imaginario i' obtenemos finalmente

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i' \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4.3.14)$$

4.4. Sistemas de dos estados y el álgebra de cuaterniones

La precesión del rotor R discutida anteriormente, justifica en gran medida la discusión de los sistemas de dos estados en el álgebra geométrica del espacio tridimensional ya que es más intuitivo trabajar con rotadores que trabajar con las componentes del espinor $|\psi\rangle$.⁴

Veamos ahora algunas observaciones respecto a la discusión anterior. Recordemos nuevamente que el sistema de dos estados (4.1.1) puede representarse matricialmente introduciendo la representación matricial de los vectores up y down

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4.1)$$

de donde

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

⁴ Se tiene una completa discusión del formalismo de las matrices Pauli para los sistemas de dos estados en la página 163 de [19] visto desde el punto de vista convencional.

Como ya vimos anteriormente, esta ecuación debe ser equivalente al rotor (4.1.12)

$$\psi = a_0 + a_1 e_{23} - a_2 e_{13} + a_3 e_{12}, \quad (4.4.3)$$

para averiguar esto, volvamos a escribir la ecuación anterior esta vez en función de las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_k$ y la matriz identidad \mathbb{I}

$$\hat{\psi} = a_0 \mathbb{I} + a_1 \hat{\sigma}_{23} - a_2 \hat{\sigma}_{13} + a_3 \hat{\sigma}_{12}. \quad (4.4.4)$$

de donde

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} a_0 + i'a_3 & a_2 + i'a_1 \\ -a_2 + i'a_1 & a_0 - i'a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix}, \quad (4.4.5)$$

resultado similar a (4.1.11) excepto por la segunda columna. Para recobrar la ecuación original es necesario introducir la matriz

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4.6)$$

con ello se recobra la ecuación original (4.1.11)

$$|\psi\rangle \rightarrow \hat{\psi}\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4.7)$$

excepto que ahora tenemos la segunda columna con valores nulos. En general, si multiplicamos una matriz cuadrada cualquiera con otra matriz que tiene ceros en la segunda columna de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} m & n \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4.8)$$

se tendrá siempre una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4.9)$$

es decir, la matriz que tiene ceros en la segunda columna se comporta como un ideal izquierdo mínimo de un anillo.

Recordando la teoría de anillos discutida en el capítulo 3, vemos que la matriz $\hat{\psi} \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ de la ecuación (4.4.5) es un elemento del anillo $R(+, \cdot)$. Mientras que la

matriz (4.4.6) es un idempotente primitivo también de $R(+, \cdot)$. Como consecuencia de esto, el producto de matrices $\hat{\psi}\hat{\epsilon}$ es un elemento del ideal izquierdo mínimo I_L del anillo de matrices $R(+, \cdot)$.

El análisis anterior demuestra que el estado $|\psi\rangle$ puede considerarse como un elemento de un ideal izquierdo mínimo del anillo $R(+, \cdot)$. En realidad, las matrices que tienen una única columna diferente de cero como en la ecuación (4.4.7) son elementos del ideal izquierdo mínimo I_L del álgebra de matrices complejas 2×2 de $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$. Esto nos indica que la equivalencia introducida en la ecuación (4.1.12) es incompleta.

Las equivalencias dadas en las ecuaciones (4.2.3), (4.2.5) y (4.1.12) deben entonces ser modificadas de acuerdo al siguiente cuadro:

Equivalencias del álgebra geométrica	Equivalencias modificadas
$ \psi\rangle \rightarrow a_0 + a_1 e_{23} - a_2 e_{13} + a_3 e_{12}$	$ \psi\rangle \rightarrow \Psi_L = (a_0 + a_1 e_{23} - a_2 e_{13} + a_3 e_{12})\epsilon$
$i' \psi\rangle \rightarrow e_{123}\psi(e_3)^3$	$i' \psi\rangle \rightarrow e_{123}\Psi_L$
$\hat{\sigma}_k \psi\rangle \rightarrow e_k\psi e_3$	$\hat{\sigma}_k \psi\rangle \rightarrow e_k\Psi_L$

CUADRO 4.2: Equivalencias modificadas del álgebra geométrica en términos de los ideales izquierdos mínimos de \mathcal{G}_3

donde hemos introducido el símbolo Ψ_L para representar al ideal izquierdo mínimo de \mathcal{G}_3 .

El cuadro 4.2 muestra el rol del idempotente primitivo ϵ , cuando el cuaternion ψ es multiplicado por la izquierda por i'

$$i'\psi = e_1(e_2(e_3\psi)), \quad (4.4.10)$$

vemos que el producto $e_3\psi$ está fuera del álgebra par de \mathcal{G}_3 , por ello hay que introducir de manera “ad hoc” el vector e_3 por la derecha para hacer que el producto permanezca dentro de \mathcal{G}_3^+ ; este proceso debe repetirse para los dos vectores restantes lo que al final hace que aparezca el vector e_3 elevado al cubo. En cambio el idempotente primitivo ϵ asegura que cuando el cuaternion es multiplicado por izquierda por cualquier elemento del álgebra, el producto permanezca siempre dentro del mismo subálgebra par de \mathcal{G}_3 . Este mismo análisis explica el factor e_3 a la derecha de ψ para el caso de la acción de los operadores $\hat{\sigma}_k$ sobre el estado $|\psi\rangle$, ecuación (4.2.3).

Gracias a las equivalencias modificadas introducidas en el cuadro 4.2, podemos discutir los resultados del ejemplo 4. En dicho ejemplo, se encontró que en el caso del estado up se tenía la siguiente equivalencia: $|\uparrow\rangle \rightarrow 1$, entonces este resultado debe modificarse como

$$|\uparrow\rangle \rightarrow 1\epsilon. \quad (4.4.11)$$

En el caso del estado down la equivalencia $|\downarrow\rangle \rightarrow -e_{31}$ también debe modificarse como:

$$|\downarrow\rangle \rightarrow -e_{31}\epsilon. \quad (4.4.12)$$

Introduciendo tanto la representación matricial del idempotente primitivo (4.4.6) como de las matrices de Pauli en los resultados anteriores, es fácil darse cuenta que se recobran las matrices

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

4.5. Relaciones de conmutación canónica y el álgebra de los generadores de \mathcal{G}_3

Otra observación interesante que debemos destacar, es que la Hermiticidad de los operadores de espín S_k del álgebra de Pauli queda completamente codificada dentro del álgebra geométrica en la anticonmutatividad del producto geométrico. Para entender esto, recordemos que si \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} son tres operadores Hermíticos, entonces debe cumplirse que

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}, \quad (4.5.1)$$

sin embargo si desarrollamos el conmutador anterior y exigimos la Hermiticidad de este vemos que

$$[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = -\hat{C}.$$

Este problema se resuelve introduciendo el factor $i\hbar$ de la siguiente manera

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}. \quad (4.5.2)$$

donde \hbar se agrega por razones dimensionales ya que el producto de operadores $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ tiene dimensiones ML^2T^{-1} .

En el álgebra de Pauli, todo operador \hat{M} puede escribirse en función de las matrices de Pauli y la identidad como

$$\hat{M} = m_0\mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 m_i\hat{\sigma}_i, \quad (4.5.3)$$

esto debido a que las matrices de Pauli son hermíticas, por tanto la suma de estas también lo es. Entonces los generadores de \mathcal{G}_3 junto al escalar 1 forman una base para todo operador en el formalismo del álgebra geométrica.

Dicho esto, en el capítulo 2 vimos que los generadores de \mathcal{G}_3 cumplen la siguiente relación de conmutación

$$e_1e_2 - e_2e_1 = 2e_1 \wedge e_2. \quad (4.5.4)$$

Para ver si la ecuación anterior es similar a la que obedecen los operadores de espín \hat{S}_k , escribamos estos en términos de los vectores de la base canónica de \mathcal{G}_3 como $S_k = \frac{1}{2}\hbar e_k$, de donde:

$$\begin{aligned} S_1S_2 - S_2S_1 &= \frac{1}{4}\hbar^2(2e_1e_2) \\ &= \frac{1}{2}\hbar^2ie_3, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la identidad $e_1e_2 = ie_3$. Finalmente recuperamos la relación de conmutación 4.5.2

$$[S_1, S_2] = i\hbar S_3. \quad (4.5.5)$$

Nótese que el número imaginario i' ha sido reemplazado por el pseudoescalar i de \mathcal{G}_3 .

El resultado anterior sugiere que el postulado fundamental de la mecánica cuántica $[\hat{x}, \hat{p}] = i'\hbar$ podría ser simplemente una consecuencia de la anticonmutatividad del producto geométrico.

Capítulo 5

Álgebra Geométrica de las partículas de Schrödinger y Pauli

En el capítulo anterior se vio como es posible resolver el caso particular de los sistemas de dos niveles utilizando el álgebra geométrica del espacio tridimensional considerando a los estados como elementos de un ideal izquierdo mínimo de \mathcal{G}_3 . Esto no indica sin embargo que el álgebra geométrica solamente puede aplicarse a algunos casos particulares donde es fácil encontrar analogías como es el caso del álgebra de las matrices de Pauli discutidas anteriormente, por el contrario, esto sugiere que que las dimensiones del espacio están íntimamente relacionadas con las propiedades de los sistemas físicos.

Por ejemplo, la ecuación de Schrödinger es adecuada para la descripción de sistemas cuánticos no relativistas sin espín, sin embargo, esta descripción deja de ser válida si dichos sistemas poseen esta última propiedad, en cuyo caso debe recurrirse a la ecuación de Pauli que a su vez es la aproximación no relativista de la ecuación de Dirac. Siguiendo las ideas de Basil Hiley [18], podemos utilizar el álgebra de Clifford para lograr una descripción unificada y jerarquizada de estos tres tipos de sistemas cuánticos a los cuales él llama partículas de Schrödinger, Pauli y Dirac respectivamente.

En la aproximación del álgebra de Clifford a la mecánica cuántica los estados cuánticos se codifican mediante el multivector $\rho_c = \Psi_L \tilde{\Psi}_L$, donde $\tilde{\Psi}_L$ es la conjugada de Clifford discutida en el capítulo 2. Este multivector permite codificar simultáneamente a los tres tipos de partículas mencionadas en el párrafo anterior,

cada tipo de partícula se codifica en diferentes firmas de $Cl_{m,n}$: $Cl_{0,1}$, $Cl_{3,0}$ y $Cl_{1,3}$ respectivamente.

5.1. Densidad de Clifford

En el capítulo 4 vimos que los grados de libertad de los estados cuánticos pueden codificarse mediante los multivectores del álgebra geométrica, sin necesidad de recurrir al espacio de Hilbert, es decir, podemos codificar el principio de superposición mediante el elemento $\Psi_L \in I_L$

$$\Psi_L = M\epsilon \quad (5.1.1)$$

donde M es el multivector

$$M = \sum_i \langle M \rangle_i = \langle M \rangle + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 + \dots \quad (5.1.2)$$

y ϵ es un idempotente primitivo que ha de ser elegido de acuerdo a la situación física a considerar.

En la aproximación del álgebra de Clifford a la mecánica cuántica [20], los estados cuánticos se codifican definiendo el multivector:

$$\rho_c = \Psi_L \Psi_R \quad (5.1.3)$$

conocido como *densidad de Clifford*, donde $\Psi_R = \tilde{\Psi}_L$ es la conjugada de Clifford del elemento Ψ_L . Como se verá más adelante la representación matricial de la densidad de Clifford corresponde exactamente a la matriz densidad en el formalismo del espacio de Hilbert.

5.2. Partículas de Schrödinger

Las partículas no relativistas sin espín están gobernadas por la ecuación de Schrödinger

$$i' \frac{\partial}{\partial t} |\psi(r, t)\rangle = \hat{H} |\psi(r, t)\rangle \quad (5.2.1)$$

donde $|\psi(r, t)\rangle$ es el estado que pertenece al espacio de Hilbert \mathcal{H} . Como ya dijimos, la aproximación algebraica que hemos venido desarrollando, permite el estudio de las partículas de Schrödinger sin necesidad de utilizar el espacio de Hilbert. Para ver esto, es conveniente recordar que en la imagen de Heisenberg, la dinámica de las partículas está gobernada por la ecuación¹:

$$i\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + [\hat{\rho}, \hat{H}]_- = 0, \quad (5.2.2)$$

donde $\hat{\rho}$ es el operador densidad y \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema. Esta ecuación generaliza a la ecuación de Schrödinger, sin embargo, convencionalmente ésta se deriva posteriormente cuando surge la necesidad de trabajar con estados mixtos y sólo se destaca el hecho de que la dependencia en el tiempo es trasladada de los estados hacia los operadores.

En el álgebra de Clifford, la información codificada por la función de onda $\psi(x) \in \mathbb{C}$ puede codificarse en $Cl_{0,1}$ debido al isomorfismo entre ésta última y el conjunto de los números complejos. El equivalente a la función de onda es el elemento Ψ_L , que en el caso de las partículas de Schrödinger toma la forma:

$$\Psi_L = \psi_L \epsilon \quad (5.2.3)$$

donde ψ_L es un elemento de $Cl_{0,1}$ generado por la base $\{1, i\}$. De esta manera podemos escribir ψ_L en su forma polar como

$$\psi_L = \mathcal{R}U = \mathcal{R}(g_0 + ig_1), \quad (5.2.4)$$

donde g_0 , g_1 y \mathcal{R} son funciones reales que pueden depender de las coordenadas (r, t) y están sujetas a la condición de normalización $g_0^2 + g_1^2 = 1$.

Por otro lado, la elección del idempotente primitivo es trivial [25] ya que en la base de $Cl_{0,1}$, no existe ningún elemento no escalar con cuadrado $+1$, es decir, el único idempotente sería la identidad $\epsilon = 1$, con esto la densidad de Clifford para el caso de las partículas de Schrödinger será

$$\rho_c = \psi_L \cdot 1 \cdot \tilde{1} \cdot \tilde{\psi}_L = \mathcal{R}(g_0 + ig_1)(g_0 - ig_1)\tilde{\mathcal{R}} \quad (5.2.5)$$

¹En adelante representaremos al conmutador de A y B , $[A, B]$, por $[A, B]_-$ y al anticonmutador por $[A, B]_+$

resultando simplemente en

$$\rho_c = \mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^2, \quad (5.2.6)$$

es así que la densidad de Clifford representa simplemente la densidad de probabilidad. Esto parece a primera vista no tener ninguna ventaja respecto a la aproximación convencional utilizando el espacio de Hilbert, sin embargo, es muy útil cuando se consideran más dimensiones.

5.3. Dinámica de las partículas de Schrödinger

Veamos ahora cuál es la dinámica que obedece la densidad de Clifford. Para ello volvamos a escribir ρ_c en términos de Ψ_L y Ψ_R y derivemos respecto al tiempo

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_L}{\partial t} \Psi_R + \Psi_L \frac{\partial \Psi_R}{\partial t}, \quad (5.3.1)$$

de otro lado, debido a la equivalencia:

$$|\psi\rangle \rightarrow \Psi_L, \quad \langle\psi| \rightarrow \Psi_R, \quad (5.3.2)$$

la ecuación de Schrödinger y su conjugada en términos de los elementos Ψ_L y Ψ_R serán

$$i \frac{\partial \Psi_L}{\partial t} = H \Psi_L \quad (5.3.3)$$

$$-i \frac{\partial \Psi_R}{\partial t} = \Psi_R H. \quad (5.3.4)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.3.3) y (5.3.4) en la ecuación (5.3.1) se tiene

$$\boxed{i \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + [\rho_c, H]_- = 0.} \quad (5.3.5)$$

De otro lado, multiplicando las ecuaciones (5.3.3) y (5.3.4) por derecha y por izquierda por los elementos Ψ_R y Ψ_L , respectivamente, se tiene que la suma resulta

$$i \left(\frac{\partial \Psi_L}{\partial t} \Psi_R - \Psi_L \frac{\partial \Psi_R}{\partial t} \right) = [H, \rho_c]_+. \quad (5.3.6)$$

Escribiendo Ψ_L en forma polar $\Psi_L = \tilde{\mathcal{R}}U$ y reemplazando esto en la ecuación (5.3.6) se tiene

$$i\left(\frac{\partial\Psi_L}{\partial t}\Psi_R - \Psi_L\frac{\partial\Psi_R}{\partial t}\right) = i\tilde{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\tilde{U} - U\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t}\right)\tilde{\mathcal{R}} = [H, \rho_c]_+. \quad (5.3.7)$$

La expresión anterior puede escribirse de manera más sencilla introduciendo la fase $U = \exp(iS)$ y asumiendo que $S = \tilde{S}$, adicionalmente si consideramos que el conmutador $[\tilde{\mathcal{R}}, \frac{\partial S}{\partial t}]_-$ es idénticamente nulo, tenemos finalmente

$$\rho_c\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}[H, \rho_c]_+ = 0. \quad (5.3.8)$$

Las ecuaciones (5.3.5) y (5.3.8) son las formas algebraicas de la ecuación de Liouville y Hamilton-Jacoby respectivamente [28], [20], [29], como demostraremos a continuación.

Sea $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ la representación matricial de la densidad de Clifford en el espacio de Hilbert para estados puros y \hat{H} el Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V$ correspondiente, escribimos las ecuaciones (5.3.5) y (5.3.8) en la representación x como

$$i'\frac{\partial\langle x|\hat{\rho}|x\rangle}{\partial t} + \langle x|[\hat{\rho}, \hat{H}]_-|x\rangle = 0, \quad (5.3.9)$$

$$\langle x|\hat{\rho}|x\rangle\frac{\partial\langle x|S|x\rangle}{\partial t} + \frac{1}{2}\langle x|[\hat{H}, \hat{\rho}]_+|x\rangle = 0. \quad (5.3.10)$$

Nótese que hemos escrito i' en lugar de i . Luego de algo de trabajo de cálculo, véase el apéndice C.4, se puede demostrar que las ecuaciones anteriores se reducen simplemente a

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \text{y} \quad (5.3.11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\nabla S|^2}{2m} + Q + V = 0, \quad (5.3.12)$$

donde \mathbf{j} es la corriente de probabilidad

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2mi'}(\psi(x)^*\nabla\psi(x) - \psi(x)\nabla\psi(x)^*), \quad (5.3.13)$$

y Q es el potencial cuántico

$$Q = -\frac{1}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (5.3.14)$$

Las ecuaciones (5.3.11) y (5.3.12) son simplemente la parte imaginaria y real respectivamente de la ecuación de Schrödinger y describen la conservación de la probabilidad y la energía. Este último resultado demuestra que la aproximación del álgebra de Clifford a la mecánica cuántica reproduce los mismos resultados que el formalismo desarrollado por David Bohm [30].

5.4. Partículas de Pauli

En la capítulo 4 vimos que se necesitan cuatro grados de libertad para codificar a las partículas no relativistas con espín de Pauli. El álgebra de Clifford adecuada para esto es $Cl_{3,0}^+$, de modo que el elemento del ideal mínimo izquierdo esta dado por:

$$\Psi_L = \psi_L \epsilon = \mathcal{R}(a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{31} + a_3 e_{12}) \epsilon \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^3 a_i^2 = 1. \quad (5.4.1)$$

Para continuar, debemos elegir al idempotente primitivo ϵ , el cual puede escribirse en función de los vectores de $Cl_{3,0}$ [25] como:

$$\frac{1}{2}(1 \pm e_1), \quad \frac{1}{2}(1 \pm e_2), \quad \frac{1}{2}(1 \pm e_3).$$

Convencionalmente se elige al eje z para cuantizar al espín, por tanto elegimos al idempotente $\frac{1}{2}(1 + e_3)$ ya que este actúa como un proyector en la dirección $+z$. Gracias a esto la densidad de Clifford toma la forma:

$$\rho_c = \frac{1}{2} \mathcal{R} U (1 + e_3) \tilde{U} \tilde{\mathcal{R}} \quad (5.4.2)$$

donde $U = a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{31} + a_3 e_{12}$. Es así que la densidad de Clifford será

$$\rho_c = \frac{1}{2} \mathcal{R}^2 (U \tilde{U} + U e_3 \tilde{U}) = \frac{1}{2} \mathcal{R}^2 (1 + U e_3 \tilde{U}), \quad (5.4.3)$$

que en su representación matricial corresponde a la matriz densidad $\hat{\rho} = 1/2(\mathbb{I} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ en el formalismo convencional. Para ver el significado de este resultado, primero desarrollemos el término $s = U e_3 \tilde{U}$

$$s = U e_3 \tilde{U} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \quad (5.4.4)$$

donde los términos v_1 , v_2 y v_3 son

$$\begin{aligned}v_1 &= 2(a_1a_3 - a_0a_2) \\v_2 &= 2(a_0a_1 + a_2a_3) \\v_3 &= a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\end{aligned}$$

es decir, el término $s = Ue_3\tilde{U}$ es un vector que entrega de manera directa las componentes del espín [22], convencionalmente calculadas en función de los operadores $\hat{\sigma}_k$ y los espinores columna ψ mediante

$$s_1 = \psi^\dagger \hat{\sigma}_1 \psi, \quad s_2 = \psi^\dagger \hat{\sigma}_2 \psi, \quad s_3 = \psi^\dagger \sigma_3 \psi, \quad (5.4.5)$$

lo cual demuestra la simplificación ofrecida por este formalismo.

Por otra parte, la densidad de Clifford como un todo sería

$$2\rho_c = v_0 1 + v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \quad (5.4.6)$$

con $v_0 = \sum a_i^2$. En la siguiente sección veremos como utilizar este resultado para el cálculo de los valores esperados para el caso de las partículas de Pauli.

5.4.1. Cálculo de los valores esperados

Convencionalmente, el valor medio del observable \hat{A} se calcula mediante el operador densidad $\hat{\rho}$ mediante²

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \text{tr}(\hat{A} \hat{\rho}). \quad (5.4.7)$$

De otro lado, en la aproximación algebraica, \hat{A} y $\hat{\rho}$ son la representación matricial de los multivectores A y ρ_c respectivamente, en donde puede aplicarse el concepto de traza.

En el caso particular del álgebra de Pauli, debe notarse que

$$\text{tr}(\hat{M}) = \text{tr}(M_0 \mathbb{I} + \sum_{k=1}^3 M_k \hat{\sigma}_k) = 2M_0, \quad (5.4.8)$$

²Para distinguir entre el valor medio de un observable y la parte escalar de un multivector, en esta sección volveremos a introducir la notación $\langle M \rangle_0$ para denotar a la parte escalar de M . Es decir, la notación $\langle M \rangle$ se referirá al valor esperado de M .

debido a la linealidad de la traza y a que las matrices de Pauli tienen traza cero.

El resultado anterior sugiere introducir el concepto de traza en el álgebra de Clifford como

$$\text{tr}M = \langle M \rangle_0, \quad (5.4.9)$$

es decir, la traza equivale a tomar la parte escalar del multivector M .

Utilizando este resultado el valor medio del observable A puede calcularse como

$$\langle A \rangle = \langle A\rho_c \rangle_0. \quad (5.4.10)$$

Para ilustrar la utilidad de la densidad de Clifford, calculemos los valores medios de las componentes del espín para el caso de las partículas de Pauli. Para ello identificamos las componentes del espín con los vectores del álgebra, entonces el valor medio de la componente j del espín puede calcularse como

$$\langle s_j \rangle = \langle e_j \rho_c \rangle_0. \quad (5.4.11)$$

Recordemos que la densidad de Clifford (5.4.6), está dada por

$$\rho_c = \frac{1}{2}(v_0 1 + v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) = \frac{1}{2}(v_0 + s), \quad (5.4.12)$$

entonces el valor medio de s_j será

$$\langle s_j \rangle = \frac{1}{2} \langle e_j (v_0 + s) \rangle_0 = \frac{1}{2} \langle v_0 e_j \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle e_j s \rangle_0. \quad (5.4.13)$$

Recordemos además que $\langle e_j \rangle_0 = 0$ y que la parte escalar del producto $\langle e_j s \rangle_0$ es simplemente $e_j \cdot s$, es decir el resultado anterior se reduce simplemente a

$$\langle s_j \rangle = \frac{1}{2} e_j \cdot s. \quad (5.4.14)$$

Por lo tanto vemos que si la partícula se encuentra en el estado de espín up los valores medios serán

$$\langle s_1 \rangle = 0, \quad \langle s_2 \rangle = 0, \quad \langle s_3 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (5.4.15)$$

debido a que en este caso $s = v_3 e_3$ y además $v_3 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = 1$. Aplicando el mismo análisis se puede demostrar también que los valores medios para el caso

en que la partícula se encuentre en el estado de espín down son los siguientes

$$\langle s_1 \rangle = 0, \quad \langle s_2 \rangle = 0, \quad \langle s_3 \rangle = -\frac{1}{2}. \quad (5.4.16)$$

De esta manera se puede ver que los valores medios del espín pueden calcularse fácilmente en el álgebra de Clifford utilizando las propiedades del producto geométrico e introduciendo el concepto de traza.



Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se ha revisado parte del formalismo del álgebra geométrica en diferentes dimensiones. Uno de los resultados más remarcables es que tanto el álgebra de Pauli como el álgebra de Dirac, aparecen como consecuencia de los axiomas del álgebra geométrica. Debido a que el álgebra geométrica es un superálgebra, se ha visto que el álgebra de los números reales, complejos y cuaterniones, pueden considerarse como subálgebras del álgebra geométrica. Esto demuestra que la gran variedad de sistemas algebraicos aparentemente disímiles pueden unificarse estudiándolos dentro del mismo formalismo.

Debido a que las matrices de Pauli cumplen las mismas relaciones que los generadores de \mathcal{G}_3 , se ha demostrado que el producto matricial es equivalente al producto geométrico. En la sección 2.2.3 se ha puesto este hecho de manera clara utilizando la representación matricial de los generadores de \mathcal{G}_2 . Además, dado que el producto geométrico enlaza a un escalar y a un bivector, de la misma manera en que un número complejo enlaza a un número real y a un número imaginario, podemos concluir que el producto geométrico se comporta como un número complejo.

En la mecánica cuántica no relativista convencional, el álgebra de Clifford es pocas veces mencionada, sin embargo, como se ha demostrado en la sección 4.5, las relaciones de conmutación canónica que obedecen los operadores de espín \hat{S}_k , aparecen naturalmente como consecuencia de la anticonmutatividad del producto geométrico (ecuación (4.5.5)).

Siguiendo las ideas de Hiley y Callagan [18], el mapeo $\mathcal{M} : |\psi\rangle \rightarrow \psi$ introducido por Doran y Lasemby [14] se ha modificado en la sección 4.4 en favor del elemento

$\psi_L \in I_L \subset \mathcal{G}_3$, logrando así generalizar el mapeo “ad hoc” introducido por Doran y Lasemby (ecuaciones (4.1.9), (4.2.3) y (4.2.5)). Esto último repercute en que el número imaginario i' debe ser reemplazado por el pseudoescalar de \mathcal{G}_3 en lugar del bivector ie_3 utilizado en la literatura actual.

En el capítulo 5 se ha revisado parte de la aproximación a la mecánica cuántica en el álgebra de Clifford según Hiley [20]. Esta aproximación generaliza la discusión de los sistemas cuánticos en el álgebra geométrica para incluir también a las partículas de Schrödinger. Para demostrar que esta aproximación es completamente equivalente al formalismo convencional se ha verificado que en el caso de las partículas de Schrödinger la dinámica del sistema se reduce a un par de ecuaciones diferenciales acopladas (ecuaciones (5.3.11) y (5.3.12)), las cuales están en completo acuerdo con la aproximación a la mecánica cuántica desarrollada por David Bohm [30].

En la sección 5.4 nos hemos limitado a la discusión de las partículas de Pauli en $Cl_{3,0}$ aplicando la técnica de la densidad de Clifford introducida por Hiley [18]. También hemos verificado que dicha técnica es completamente equivalente a la técnica del operador densidad del formalismo convencional. La dinámica de las partículas de Pauli (sistemas de dos niveles), se ha discutido ampliamente en la sección 4.1.1 del capítulo 4.

Debido a que esta tesis se concentra más en la discusión de los sistemas cuánticos de dos estados, no se ha incluido la discusión de las partículas de Dirac, el lector interesado puede consultar [18] y [29] para más detalles.

Apéndice A

Álgebra de los números complejos y cuaterniones

A.1. El Algebra de los Números Complejos

Los números complejos juegan un papel fundamental en la física matemática; sin embargo, estos sólo están definidos dentro del plano complejo que es esencialmente un espacio bidimensional. La generalización de los números complejos a más dimensiones fue uno de los problemas más importantes abordados por W. R. Hamilton; quien en 1843 crea el álgebra de cuaterniones. Sin embargo, debido a su inadecuada interpretación, el algebra de cuaterniones fue dejada de lado siendo reemplazada por el álgebra vectorial híbrida desarrollada por Gibbs a finales del siglo XVIII.

Los números complejos se expresan matemáticamente mediante:

$$z = x \oplus i'y, \quad (\text{A.1.1})$$

donde hemos escrito la suma como “ \oplus ” en lugar de “+” para destacar el hecho de que esta suma¹ enlaza a dos objetos de diferente naturaleza, mas no los suma algebraicamente. El hecho de “sumar” objetos de diferente naturaleza tiene grandes ventajas como se puede apreciar en el desarrollo de la tesis.

¹Debe entenderse esta suma como una “suma indicada”, pues los números x e iy son objetos de diferente tipo.

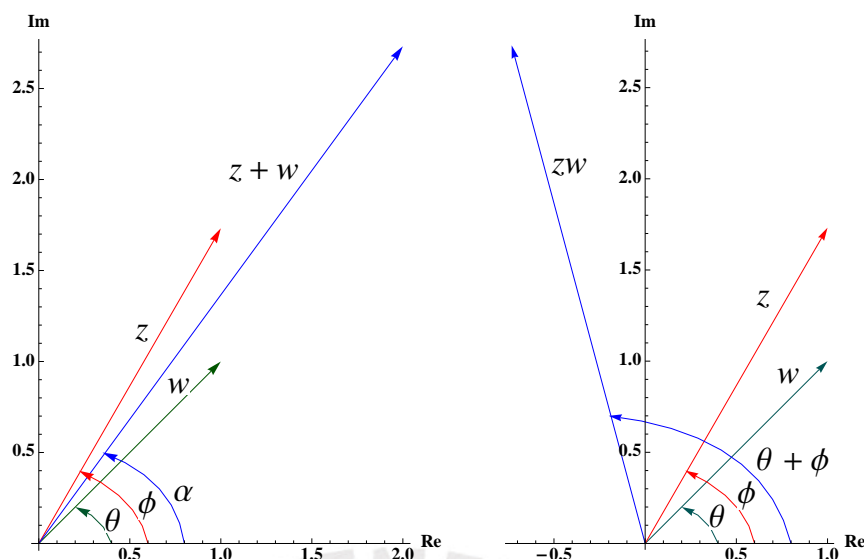


FIGURA A.1: Representación geométrica de la suma y producto de dos números complejos.

Las operaciones de adición y multiplicación de números complejos tienen significado geométrico inmediato mediante su representación polar; por ejemplo en la figura A.1, se puede ver la representación geométrica de la suma y el producto de los números complejos $z = x + i'y$ y $w = u + i'v$; de donde se puede apreciar que el módulo de $z + w$ es muy similar a una suma vectorial con orientación dada por el ángulo α , mientras que el producto zw tiene módulo $|z||w|$ con la orientación dada por el ángulo $\theta + \phi$.

Analicemos ahora por separado la interpretación geométrica de las componentes real e imaginaria del cuadrado del número complejo z

$$z^2 = (x + i'y)^2 = (x^2 - y^2) + i'(2xy),$$

vemos que ninguno de los términos, tanto real como imaginario, tienen interpretación geométrica adecuada; sin embargo, si en lugar de ello escribimos

$$zz^* = (x + i'y)(x - i'y) = x^2 + y^2,$$

podemos notar que el resultado es simplemente un número real el cual representa el cuadrado del módulo de z , donde z^* se obtiene al intercambiar i' por $-i'$.

Consideremos ahora el producto

$$zw^* = (x + i'y)(u - i'v) = (xu + vy) + i'(uy - vx),$$

de donde puede observarse que la parte real se asemeja al producto escalar de dos vectores en dos dimensiones; mientras que la parte imaginaria se asemeja a una de las componentes del producto vectorial; para ver esto con mayor claridad, utilizemos la forma polar de z y w

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad w = |w|e^{i\phi},$$

de modo que

$$zw^* = |z||w| = |z||w|e^{i(\theta-\phi)} = |z||w|(\cos(\theta - \phi) - i' \operatorname{sen}(\theta - \phi)).$$

Del resultado anterior se observa que la parte imaginaria de zw^* tiene magnitud $|z||w|\operatorname{sen}(\theta - \phi)$ donde $(\theta - \phi)$ es el ángulo entre z y w , además la magnitud del término imaginario representa el área del paralelogramo formado por z y w y el signo nos entrega información de la orientación del plano que ambos conforman.

Con esto, llegamos a una interpretación satisfactoria del producto zw^* , cuya parte real representa el producto escalar y la parte imaginaria representa un área orientada.

A.2. El Algebra de cuaterniones

Ya que el número complejo² $z = x + iy$ puede representarse en un plano por dos ejes perpendiculares, es razonable representar direcciones en el espacio por un triplete con una parte real y dos partes imaginarias, es decir,

$$x + iy + jz,$$

donde el tercer término representa un tercer eje perpendicular a los otros dos. El módulo de este triplete será

$$(x + iy + jz)(x - iy - jz) = x^2 + y^2 + z^2 - yz(ij + ji).$$

Para que el resultado anterior tenga una interpretación geométrica adecuada, es necesario que el término $yz(ij + ji)$ se anule, de modo que $ij = -ji$. Sin embargo,

²En esta sección conviene volver a utilizar la notación i para representar al número complejo $\sqrt{-1}$ ya que vamos a introducir otros dos números imaginarios con las mismas propiedades que el primero.

si consideramos el producto de dos tripletes cualesquiera

$$(a + ib + jc)(x + iy + iz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz - cy),$$

vemos que aún habiendo escrito $ij = -ji$, es imposible deshacernos del último término, la única alternativa que resta es escribir $ij = k$, donde k es alguna incógnita a ser posteriormente determinada.

Hamilton se dio cuenta de que si sus tripletes estuviesen formados por cuatro términos, el álgebra se cierra de una manera simple

$$(a + ib + jc + kd)(a - ib - jc - kd) = a^2 - i^2b^2 - j^2c^2 - k^2d^2 - bc(ij + ji) - bd(ik + ki) - cd(jk + kj).$$

El resultado que deseamos es $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ que representa el cuadrado del módulo del cuaternion; para conseguir esto escribimos: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, además $ij = -ji$, $ik = -ki$ y $jk = -kj$, adicionalmente poniendo $ij = k$, obtenemos

$$ik = i(ij) = (ii)j = -j, \quad jk = j(ij) = (ji)j = -i(jj) = i.$$

El resultado anterior fue uno de los logros más grandes de Hamilton y se conoce como el álgebra de cuaterniones que de manera resumida puede escribirse como

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{A.2.1}$$

Apéndice B

Algunas demostraciones útiles

B.1. Forma Polar del producto geométrico

Consideremos ahora el caso de dos vectores a y b quienes forman un ángulo θ diferente de $\pi/2$. Utilizando la ecuación (2.1.6) tenemos

$$ab = |a||b| \cos \theta + |a||b| \sin \theta e_{12}, \text{ en}$$

donde se ha utilizado las identidades:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= |a||b| \cos \theta && \text{escalar} \\ a \wedge b &= |a||b| \sin \theta e_{12} && \text{bivector,} \end{aligned}$$

a partir de lo cual se puede escribir ab como

$$ab = |a||b|(\cos \theta + e_{12} \sin \theta) = |a||b| \exp(e_{12}\theta). \quad (\text{B.1.1})$$

B.2. Identidad de Polarización

En \mathbb{R}^n la identidad de polarización relaciona la norma de dos vectores con la norma de la suma y diferencia de estos mediante la identidad

$$|a|^2 + |b|^2 = |a + b|^2 + |a - b|^2, \quad (\text{B.2.1})$$

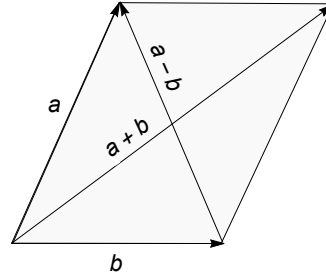
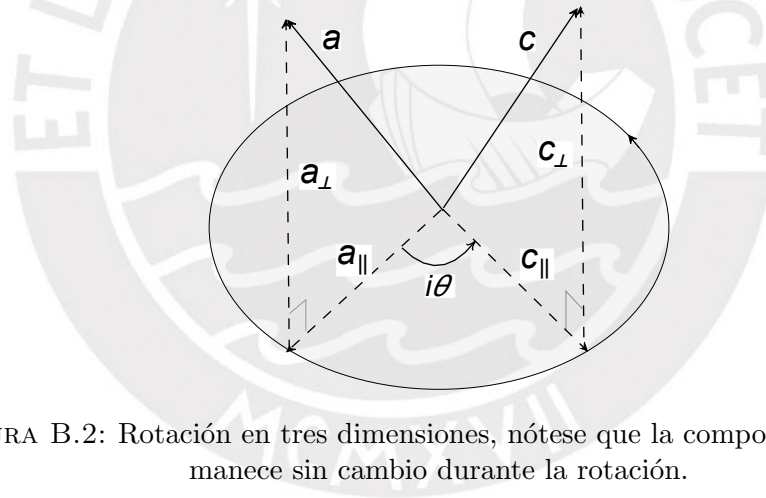


FIGURA B.1: Vectores involucrados en la ley del paralelogramo.

la cual puede obtenerse a partir de la figura B.1. Utilizando el resultado anterior y el axioma G5 se tiene

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(|a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2). \quad (\text{B.2.2})$$

B.3. Rotación en tres dimensiones

FIGURA B.2: Rotación en tres dimensiones, nótese que la componente a_{\perp} permanece sin cambio durante la rotación.

Una forma de rotar el vector a en el espacio tridimensional, es tomar sus componentes paralela y perpendicular al plano $i\theta$ ¹, de este modo podemos rotar la componente a_{\parallel} un ángulo θ resultando el vector c_{\parallel} , con esto es fácil construir el

¹En esta sección adoptamos la notación utilizada por Alan McDonald [17] para denotar al plano en donde se realiza la rotación

vector c de la siguiente manera

$$\begin{aligned}c &= c_{\parallel} + c_{\perp} \\ &= e^{-i\theta} a_{\parallel} + c_{\perp} \\ &= e^{-i\theta/2} e^{-i\theta/2} a_{\parallel} + e^{-i\theta/2} e^{i\theta/2} c_{\perp} \\ &= e^{-i\theta/2} a_{\parallel} e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} c_{\perp} e^{i\theta/2}.\end{aligned}$$

De la figura B.2 es claro que $a_{\perp} = c_{\perp}$, por lo tanto

$$c = e^{-i\theta/2} a e^{i\theta/2}. \quad (\text{B.3.1})$$



Apéndice C

El Potencial cuántico y el cálculo del corchete $\{\rho, H\}$

C.1. Separación de la Ecuación de Schrödinger y el Potencial Cuántico

Comenzamos escribiendo la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V \psi(\vec{r}, t), \quad (\text{C.1.1})$$

luego escribimos $\psi(\vec{r}, t) = R e^{iS/\hbar}$ y reemplazamos en la ecuación anterior

$$i\hbar \frac{\partial R e^{iS/\hbar}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R e^{iS/\hbar} + V R e^{iS/\hbar}, \quad (\text{C.1.2})$$

de donde tenemos que

$$\begin{aligned} \left(-R \frac{\partial S}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial R}{\partial t}\right) e^{iS/\hbar} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla \cdot (\nabla R e^{iS/\hbar}) + \frac{i}{\hbar} \nabla \cdot (R e^{iS/\hbar} \nabla S)\right) + V R e^{iS/\hbar} \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R + \frac{1}{2m} R (\nabla S)^2\right) e^{iS/\hbar} + V R e^{iS/\hbar} \\ &\quad - \frac{i\hbar}{2m} \left(\nabla R \cdot \nabla S + R \nabla^2 S + \nabla S \cdot \nabla R\right) e^{iS/\hbar}, \end{aligned}$$

además hemos utilizado la identidad

$$\nabla \cdot (f \vec{r}) = f(\nabla \cdot \vec{r}) + \vec{r} \cdot \nabla f. \quad (\text{C.1.3})$$

Igualando las partes reales e imaginarias se llega al resultado esperado

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\nabla S|^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0 \quad \text{parte real} \quad (\text{C.1.4})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{2m} (2\nabla S \cdot \nabla R + R\nabla^2 S) = 0 \quad \text{parte imaginaria} \quad (\text{C.1.5})$$

C.2. Cálculo del Corchete $\{\rho, H\}$

Clásicamente el corchete de Poisson está definido por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = \nabla_q f \cdot \nabla_p g - \nabla_p f \cdot \nabla_q g, \quad (\text{C.2.1})$$

donde f y g son funciones de las coordenadas generalizadas q y p .

Sea un sistema de N partículas con $3N$ grados de libertad, el estado de este sistema se puede describir con $6N$ variables independientes $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$. Si se conocen las condiciones iniciales, entonces, la dinámica de este sistema se puede conocer usando las ecuaciones de Hamilton que para el caso de la i -ésima partícula son:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (\text{C.2.2})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (\text{C.2.3})$$

A partir de la solución de las ecuaciones diferenciales anteriores se pueden reconstruir las trayectorias que siguen las partículas de este sistema. Sin embargo, para un sistema físico real, es imposible resolver tal sistema, por ello es necesario asociar al sistema físico anterior un espacio de dimensión $6N$ llamado espacio de fase e introducir la variable estocástica $\mathbf{X} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ y la densidad de probabilidad $\rho(\mathbf{X}, t)$ de modo que la probabilidad de que el punto \mathbf{X} se encuentre en el elemento de volumen $dV = d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \dots d\mathbf{p}_N d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N$ viene dada por $\rho(\mathbf{X}, t)dV$.

APÉNDICE C. EL POTENCIAL CUÁNTICO Y EL CÁLCULO DEL CORCHETE... 78

En este espacio de fase es posible definir las corrientes para el i -ésimo grado de libertad

$$j_{q_i} = \rho(q, p)\dot{q}_i \quad (\text{C.2.4})$$

$$j_{p_i} = \rho(q, p)\dot{p}_i \quad (\text{C.2.5})$$

de modo que el número de partículas por unidad de tiempo que atraviesan los elementos de área son $j_{q_i}dA_{q_i}$ y $j_{p_i}dA_{p_i}$.

En base a estas definiciones podemos escribir las corrientes vectoriales como

$$\mathbf{j}_q = \rho(q, p)\nabla_p H \quad (\text{C.2.6})$$

$$\mathbf{j}_p = -\rho(q, p)\nabla_q H, \quad (\text{C.2.7})$$

donde hemos utilizado las ecuaciones (C.2.2) y (C.2.3). Por otro lado, derivando las ecuaciones anteriores respecto a q y p tenemos

$$\nabla_q \cdot \mathbf{j}_q = \nabla_q \rho \cdot \nabla_p H + \rho \nabla_{qp}^2 H \quad (\text{C.2.8})$$

$$\nabla_p \cdot \mathbf{j}_p = -\nabla_p \rho \cdot \nabla_q H - \rho \nabla_{pq}^2 H, \quad (\text{C.2.9})$$

sumando ambas ecuaciones y asumiendo que $\nabla_{qp}^2 H = \nabla_{pq}^2 H$ se tiene

$$\nabla_q \cdot \mathbf{j}_q + \nabla_p \cdot \mathbf{j}_p = \nabla_q \rho \cdot \nabla_p H - \nabla_p \rho \cdot \nabla_q H. \quad (\text{C.2.10})$$

Vemos además que el primer término del lado izquierdo de (C.2.10) es

$$\{\mathbf{j}_q, \mathbf{p}\} = \sum_{i=1}^N \{j_{q_i}, p_i\} = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial j_{q_i}}{\partial q_l} \frac{\partial p_i}{\partial p_l} - \frac{\partial j_{q_i}}{\partial p_l} \frac{\partial p_i}{\partial q_l} \right) \quad (\text{C.2.11})$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\partial j_{q_i}}{\partial q_i} = \nabla_q \cdot \mathbf{j}_q. \quad (\text{C.2.12})$$

De manera similar, podemos demostrar también que el segundo término corresponde a

$$\{\mathbf{j}_p, \mathbf{q}\} = -\nabla_p \cdot \mathbf{j}_p, \quad (\text{C.2.13})$$

mientras que el miembro derecho de (C.2.10) es precisamente el corchete $\{\rho, H\}$, de esta manera se verifica la identidad

$$\{\dot{\mathbf{j}}_q, \mathbf{p}\} - \{\dot{\mathbf{j}}_p, \mathbf{q}\} = \{\rho, H\}. \quad (\text{C.2.14})$$

A partir del resultado anterior es fácil encontrar la relación canónica de conmutación que obedecen los operadores

$$[\dot{\mathbf{j}}_q, \mathbf{p}]_- - [\dot{\mathbf{j}}_p, \mathbf{q}]_- = [\rho, H]_-. \quad (\text{C.2.15})$$

C.3. Revisión de la aproximación a la mecánica cuántica de Bohm

En 1952 David Bohm publica un paper algo controversial en el cual sugiere una interpretación alternativa de la mecánica cuántica [30]. En este paper, Bohm reemplaza la función de onda de la ecuación de Schrödinger en su forma polar $\psi = R \exp(iS)$ llamada descomposición de Madelung; con esto logra separar la ecuación de Schrödinger en dos ecuaciones diferenciales acopladas que describen la conservación de la probabilidad y conservación de la energía, respectivamente. En esta sección veremos brevemente la contribución de Bohm y su conexión directa con la aproximación algebraica de Hiley. Se puede ver en [29] un excelente review sobre el potencial cuántico de Bohm en diferentes contextos.

Según Bohm, un sistema físico individual puede representarse mediante una onda que se propaga en el espacio y tiempo junto a una partícula puntual que se mueve guiada por la onda. Esta onda a su vez se representa matemáticamente por la función $\psi(\vec{x}, t)$ la cual es solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (\text{C.3.1})$$

El movimiento de la partícula se obtiene a partir del momentum de Bohm

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} = \nabla S(\vec{x}, t), \quad (\text{C.3.2})$$

donde S es la fase y se impone la condición inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Para que esta descripción sea compatible con el formalismo convencional de la mecánica cuántica,

las trayectorias descritas por la ecuación (C.3.2) deben ser ponderadas por la amplitud $\rho = \psi\psi^*$ lo cual nos produce no una sino un ensemble de trayectorias.

Como ya dijimos, al reemplazar la función $\psi(\vec{x}, t) = R \exp(i/\hbar S)$ se obtienen dos ecuaciones diferenciales acopladas

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\nabla S|^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0 \quad \text{parte real} \quad (\text{C.3.3})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{2m} (2\nabla S \cdot \nabla R + R\nabla^2 S) = 0 \quad \text{parte imaginaria}, \quad (\text{C.3.4})$$

es decir, una ecuación para la parte real y otra para la parte imaginaria. La primera ecuación es similar a la ecuación de Hamilton-Jacoby excepto por el término $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}$ llamado potencial cuántico, mientras que la otra es similar a la ecuación de continuidad, ya que haciendo $\rho = R^2$ o también $R = \rho^{\frac{1}{2}}$ se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla S}{m} \right) = 0, \quad (\text{C.3.5})$$

la cual es similar a la ecuación de continuidad con $\rho \frac{\nabla S}{m} = \vec{j}$.

C.4. Corriente de probabilidad

En esta sección demostraremos que la ecuación

$$i \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = [H, \rho_c]_- \quad (\text{C.4.1})$$

describe la conservación de la corriente de probabilidad para estados puros. Para esto introducimos el Hamiltoniano $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ y el operador densidad $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ en la ecuación anterior. Empezamos evaluando el conmutador $[\hat{H}, \hat{\rho}]_-$ en la representación x

$$\langle x | [\hat{H}, \hat{\rho}]_- | x \rangle = \langle x | \hat{H} \hat{\rho} | x \rangle - \langle x | \hat{\rho} \hat{H} | x \rangle. \quad (\text{C.4.2})$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior será

$$\langle x | \hat{H} \hat{\rho} | x \rangle = \langle x | \frac{\hat{p}^2}{2m} \hat{\rho} | x \rangle + \langle x | V \rho | x \rangle \quad (\text{C.4.3})$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\nabla \psi \psi^*) + \langle x | V \rho | x \rangle, \quad (\text{C.4.4})$$

APÉNDICE C. EL POTENCIAL CUÁNTICO Y EL CÁLCULO DEL CORCHETE... 81

mientras que el segundo término resulta

$$\langle x|\hat{\rho}\hat{H}|x\rangle = \langle x|\hat{\rho}\frac{\hat{p}^2}{2m}|x\rangle + \langle x|\rho V|x\rangle \quad (\text{C.4.5})$$

$$= \frac{i'^2}{2m} \nabla \cdot (\nabla\psi^*\psi) + \langle x|\rho V|x\rangle, \quad (\text{C.4.6})$$

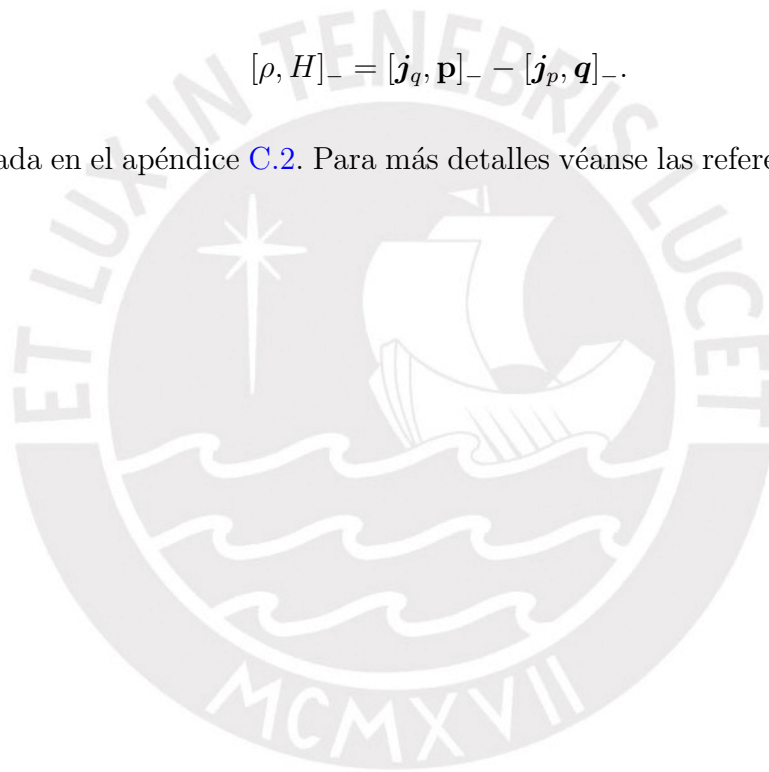
de donde restando ambos términos tenemos

$$\frac{\partial\langle x|\rho|x\rangle}{\partial t} = -\frac{1}{2mi'} \nabla \cdot [\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*]. \quad (\text{C.4.7})$$

Alternativamente se puede llegar a este mismo resultado utilizando la relación

$$[\rho, H]_- = [j_q, \mathbf{p}]_- - [j_p, \mathbf{q}]_-. \quad (\text{C.4.8})$$

demostrada en el apéndice C.2. Para más detalles véanse las referencias [28] y [32].



Bibliografía

- [1] Professor Clifford. Applications of grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, 1(4):pp. 350–358, 1878. ISSN 00029327. URL <http://www.jstor.org/stable/2369379>.
- [2] D Hestenes. Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics. *American Journal of Physics*, 71:104, 2003.
- [3] Marcel Riesz. *Clifford Numbers and Spinors*. Lecture series No. 38. The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1958.
- [4] I.R. Porteous. *Topological Geometry*. Cambridge University Press, 1981. ISBN 9780521298391. URL <http://books.google.com.pe/books?id=nzI8AAAAIAAJ>.
- [5] I.R. Porteous. *Clifford Algebras and the Classical Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995. ISBN 9780521551779. URL http://books.google.com.pe/books?id=pivcVR3d_1EC.
- [6] D.J.H. Garling. *Clifford Algebras: An Introduction*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781107096387. URL <http://books.google.com.pe/books?id=RxNtliK3ROYC>.
- [7] C. Chevalley, P. Cartier, and C. Chevalley. *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras: Collected Works, Volume 2*. Collected Works. Springer, 1997. ISBN 9783540570639. URL <https://books.google.com.pe/books?id=bzBDRgyhRP4C>.
- [8] David Hestenes. *New foundations for classical mechanics*. Fundamental Theories of Physics. Reidel, Dordrecht, 1986. URL <http://cds.cern.ch/record/108468>.

- [9] D. Hestenes. *Space-time algebra*. Documents on modern physics. Gordon and Breach, 1966. URL <http://books.google.com.pe/books?id=OoRmatRYcs4C>.
- [10] D. Hestenes and G. Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Fundamental Theories of Physics. Springer, 1987. ISBN 9789027725615. URL <http://books.google.com.pe/books?id=dScR5zwrheYC>.
- [11] David Hestenes. Clifford algebra and the interpretation of quantum mechanics. In J.S.R. Chisholm and A.K. Common, editors, *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, volume 183 of *NATO ASI Series*, pages 321–346. Springer Netherlands, 1986. ISBN 978-94-010-8602-8. doi: 10.1007/978-94-009-4728-3_27. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-4728-3_27.
- [12] Chris Doran. Geometric algebra, 2016. URL <http://geometry.mrao.cam.ac.uk/>.
- [13] C. Doran. *Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics*. PhD thesis, University of Cambridge, 1994.
- [14] C. Doran and A.A.N. Lasenby. *Geometric Algebra For Physicists*. Cambridge University Press, 2003. ISBN 9780521480222. URL <http://books.google.com.pe/books?id=VW4yt0WHdjoC>.
- [15] Chris Doran, Anthony Lasenby, Stephen Gull, Shyamal Somaroo, and Anthony Challinor. Spacetime algebra and electron physics. *Advances in imaging and electron physics*, 95:271–386, 1996.
- [16] V. de Sabbata and B.K. Datta. *Geometric Algebra and Applications to Physics*. Taylor & Francis, 2006. ISBN 9781584887737. URL <http://books.google.com.pe/books?id=AXTQXnws8E8C>.
- [17] A. MacDonald. *Linear and Geometric Algebra*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011. ISBN 9781453854938. URL <http://books.google.com.pe/books?id=oxhJYgEACAAJ>.
- [18] B J Hiley and R E Callaghan. Clifford Algebras and the Dirac-Bohm Quantum Hamilton-Jacobi Equation. *Found.Phys.*, 42(1):192–208, May 2011.

- [19] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison Wesley, 1993. ISBN 0201539292. URL <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20&path=ASIN/0201539292>.
- [20] B J Hiley and R E Callaghan. The Clifford algebra approach to quantum mechanics A: The Schrödinger and Pauli particles. *arXiv preprint arXiv:1011.4031*, 2010.
- [21] David Hestenes. Spacetime physics with geometric algebra. *American Journal of Physics*, 71(7):691, 2003.
- [22] P. Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521599160. URL <http://books.google.com.pe/books?id=qvToQwAACAAJ>.
- [23] A MacDonald. A survey of geometric algebra and geometric calculus. pages 1–33, April 2013. URL <http://faculty.luther.edu/~macdonal/GA&GC.pdf>.
- [24] Wikipedia. Geometric algebra — wikipedia, the free encyclopedia, 2014. URL http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometric_algebra&oldid=591432618. [Online; accessed 21-January-2014].
- [25] Pertti Lounesto and G.P. Wene. Idempotent structure of clifford algebras. *Acta Applicandae Mathematica*, 9(3):165–173, 1987. ISSN 0167-8019. doi: 10.1007/BF00047537. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00047537>.
- [26] Adrian Cho. Furtive approach rolls back the limits of quantum uncertainty. *Science*, 333(6043):690–693, 2011. doi: 10.1126/science.333.6043.690. URL <http://www.sciencemag.org/content/333/6043/690.short>.
- [27] B.D.F.L. Claude Cohen-Tannoudji. *Quantum Mechanics Volume 1*. Hermann. ISBN 9782705683924. URL http://books.google.com.ar/books?id=e_Ec0I1SbMMC.
- [28] MR Brown and BJ Hiley. Schrodinger revisited: an algebraic approach. *arXiv preprint quant-ph/0005026*, 2000.
- [29] Ignazio Licata and Davide Fiscaletti. *Quantum potential physics, geometry and algebra*. SpringerBriefs in Physics. Springer, Cham, 2014.
- [30] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of «hidden» variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952. doi: 10.1103/

- PhysRev.85.166. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.85.166>.
- [31] John Snygg. *Clifford Algebra: A Computational Tool for Physicists*. Oxford University Press, USA, 1997. ISBN 9780198025863. URL <http://books.google.com.pe/books?id=sPNg00wg4ygC>.
- [32] M. Brown. *The Symplectic and Metaplectic Groups in Quantum Mechanics and the Bohm Interpretation*. PhD thesis, Birkbeck College, University of London, 2004.

