PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ARTICULACIÓN DE LAS APREHENSIONES EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CUBO TRUNCADO CON CABRI 3D EN ESTUDIANTES DEL QUINTO DE SECUNDARIA

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

MARCO ANTONIO MOYA SILVESTRE

Dirigido por

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR

San Miguel, 2015

A mis abuelos Julia Soto y Herminio Silvestre por el cariño y apoyo brindado en todo momento.

AGRADECIMIENTO

Al Ministerio de Educación y al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo - PRONABEC por la oportunidad brindada para realizar esta maestría y de esa manera mejorar nuestra práctica docente.

A la Maestría en Educación Matemática – MEM de la Pontificia Universidad Católica del Perú por realizar un trabajo serio y responsable, plasmado en un programa muy exigente, en aras de un formación rigurosa.

A mi asesora, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar quien además de ser mi maestra de aula, fue mi guía. Aquella persona incansable, de carácter firme y noble cuya dedicación y sabios consejos supieron guiar mis pasos e hicieron posible que este trabajo sea lo que es.

A los miembros del jurado, Dra. Talita y Dr. Fumikazu por las sugerencias brindadas para la mejora y conclusión de la investigación.

A la institución educativa “Huanta” de la provincia de Huanta-Ayacucho, por ser el centro donde se realizó la parte experimental con los estudiantes del quinto año “A”

A las autoridades de la Unidad de Gestión Educativa Local de Huanta, quienes me proporcionaron las facilidades, a pesar de la distancia, para realizar los trámites propios de la Beca Docente

A mis amigos de la Ugel Huanta Tulio, Denis y Hugo por su sincera amistad y el apoyo incondicional que me aportaron.

A los profesores del posgrado de la PUCP por sus valiosas enseñanzas, por sus consejos, su dedicación, su profesionalismo y su don de gente que los enaltece hasta alcanzar mi admiración y respeto.

A mis compañeros y amigos de la Maestría de la PUCP por el honor de haberlos conocido, por los bellos momentos compartidos, por los trabajos realizados, por los momentos de ocio y deporte disfrutados.

A la Dra. Talita por su generosidad, su tiempo y consejos para mejorar mi tesis.

A mis abuelos Leo y Darío por ese cariño de padres que siempre me brindaron.

A mi Papá Juver y Haydee por su apoyo incondicional en los buenos y malos momentos.

A mis tres hermanos del Callao y a Rolo por compartir gratos momentos con ellos.

A Fany, Pavel, Marín, Cirito, mi tío Ciro, Miguel, entre otros miembros de mi familia por ser el soporte emocional que uno necesita y por los momentos alegres que compartimos.

A mi amigo Luis Maraví, por su ayuda en temas de interés académico referidos a nuestra investigación.

Y por último, a una persona muy especial quien supo brindarme su ayuda y apoyo incondicional con quien compartí penas y alegrías, y sobre todo quien me demostró que la verdadera amistad y el amor pueden nacer y vivir juntos.

RESUMEN

La presente investigación tuvo por objetivo analizar las articulaciones del registro figural que desarrollan estudiantes peruanos del quinto de secundaria (15 – 17 años) al movilizar nociones de geometría en la construcción del cubo truncado con el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D; para ello planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo estudiantes del quinto de secundaria articulan las aprehensiones del registro figural cuando movilizan nociones de geometría en la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D? En este estudio, tomamos como referente teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica, centrándonos en el registro figural y sus aprehensiones. En cuanto a la metodología, optamos por aspectos de la Ingeniería Didáctica. En la parte experimental, propusimos una secuencia de dos actividades encaminadas a la construcción del cubo truncado y ocho preguntas asociadas a ellas. La intención fue que los estudiantes durante el proceso de construcción y resolución de las preguntas, movilicen nociones de geometría, coordinen registros, desarrollen y articulen aprehensiones del registro figural. En las diferentes construcciones, especialmente en la del cubo truncado, los estudiantes desarrollaron y articularon las aprehensiones secuencial, perceptiva y operatoria; mientras que en la resolución de las preguntas, las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva. Finalmente, consideramos que las actividades permitieron a los estudiantes articular las aprehensiones, mientras movilizaban nociones geométricas, y que el Cabri 3D fue propicio para trabajar la construcción del cubo truncado por ser un ambiente de geometría dinámica que cuenta con el arrastre y la manipulación directa; funciones indispensables para la construcción y análisis de este objeto matemático.

Palabras clave: cubo truncado, registro figural, aprehensiones, Cabri 3D.

ABSTRACT

This work had the purpose analyze the interactions of figural register that carry out fifth students secondary to mobilize geometric notions in construction the truncated cube with Cabri 3D and then answer the following research question: how fifth school´s students articulate apprehensions of figural register when mobilized notions of geometry in construction the truncated cube with Cabri 3D? In this study, we took as theoretical reference the Theory of Semiotics Representation Registers focusing on the figural register and apprehensions, and as to the methodology we choose aspects of the Didactic Engineering. In the experimental part, we proposed a sequence of two activities directed at construction the truncated cube and eight questions associated with it. The intention was that students in the process of construction and solving questions mobilize notions of plane and spatial geometry, and develop and articulate apprehensions of figural register. So, in different construction, especially in the truncated cube, the students developed and articulated the sequential, perceptual and operational apprehensions; while that in the solving questions, articuled the perceptive, operative and discursive apprehensions. Finally, we consider the development of activities allowed, students articulate apprehensions while geometric notions mobilized; and that the Cabri 3D was appropriate to work construction the truncated cube to be a dynamic geometry ambient that enables direct manipulation drag and indispensable functions for the construction and analysis of this mathematical object.

Keywords: truncated cube, figural register, apprehensions, Cabri 3D.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.Ambiente del Cabri 3D 27
Figura 2. Zona de trabajo a escala 1 27
Figura 3. Puntos en el plano base y fuera de él 28
Figura 4. Manipulación del punto 28
Figura 5. Rectas y segmentos en el plano base 28
Figura 6. Plano secante al plano base 29
Figura 7. Punto medio de un segmento 29
Figura 8. Puntos de intersección 30
Figura 9. Ocultar objetos 31
Figura 10. Circunferencia definida en un plano 31
Figura 11. Construcción de un cubo 32
Figura 12. Recorte de poliedro 1 32
Figura 13.Recorte de poliedro 2 32
Figura 14. Ejemplo de recinto abierto y cerrado 59
Figura 15. Cubo formado a partir de tetrágonos equiláteros 64
Figura 16. Dualidad del cubo 64
Figura 17. Sólidos de Arquímedes 67
Figura 18.Composición de los sólidos de Arquímedes 68
Figura 19.Cubo truncado a partir del octaedro y del cubo 70
Figura 20. Cubo truncado 70
Figura 21. Puntos de corte en una cara del cubo 71
Figura 22. Ubicación del punto de corte en la arista del cubo 72
Figura 23. Triángulo con vértices en planos secantes 78
Figura 24. Medida de las áreas de los triángulos 86
Figura 25.Construcción de Rosa 87

Figura 26. Construcción de Semnia 87

Figura 27. Construcción de Yaneth 88

Figura 28. Medida del perímetro de los triángulos 89

Figura 29. Construcción de la estudiante Rosa 89

Figura 30. Construcción de la estudiante Semnia 90

Figura 31. Construcción de la estudiante Yaneth 91

Figura 32. Ubicación del triángulo ABC en el plano base 92

Figura 33. Construcción de Rosa 92

Figura 34. Construcción de Semnia 93

Figura 35. Construcción de Yaneth 93

Figura 36. Circunferencia definida en una cara del cubo 95

Figura 37. Circunferencias en una cara del cubo 95

Figura 38. Posible construcción de las estudiantes 102

Figura 39. Evidencia del segmento BM 104

Figura 40. Construcción de Rosa 106

Figura 41. Puntos determinados en las aristas para truncar el cubo 107

Figura 42. Construcciones de Rosa 111

Figura 43. Construcciones de Rosa 112

Figura 44. Construcciones de Semnia 112

Figura 45. Construcción de Yaneth 113

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Registros de Representación Semiótica 44
Cuadro 2. Elementos constitutivos de una figura 46
Cuadro 3. Aprehensión perceptiva 47
Cuadro 4.Aprehensión secuencial 48
Cuadro 5. Aprensión discursiva........ 49
Cuadro 6. Modificación mereológica 50
Cuadro 7. Modificación óptica 51
Cuadro 8. Modificación posicional de un cubo 52
Cuadro 9. Título de las actividades 74
Cuadro 10. Secuencia de actividades 75
Cuadro 11. Primer análisis de Rosa........ 78
Cuadro 12. Primer análisis de Semnia........ 81
Cuadro 13. Primer análisis de Yaneth 84
Cuadro 14. Segundo análisis de Rosa........ 96
Cuadro 15. Segundo análisis de Semnia 98
Cuadro 16. Segundo análisis de Yaneth 99
Cuadro 17. Análisis de la pregunta 5........ 102
Cuadro 18. Análisis de la pregunta 6........ 104
Cuadro 19. Análisis de la pregunta 7........ 106
Cuadro 20. Tercer análisis de Rosa 108
Cuadro 21. Tercer análisis de Semnia 109
Cuadro 22. Tercer análisis de Yaneth........ 110

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES 11
CAPÍTULO I: EL PROBLEMA 14
1.1. Antecedentes y justificación 14
1.2. Problema de investigación 35
1.2.1. Pregunta de investigación 35
1.2.2. Objetivos 35
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO 37
2.1. Investigación cualitativa 37
2.2. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica 40
2.3. Aspectos de la Ingeniería Didáctica 53
2.4. Fases de la ingeniería didáctica 54
2.5. Instrumentos 57
CAPÍTULO III: OBJETO MATEMÁTICO 59
3.1. Poliedros 59
3.2. Sólidos arquimedianos 65
3.3. Cubo truncado 68
CAPÍTULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS 73
4.1. Escenario de la investigación 73
4.2. Sujetos de la investigación 73
4.3. Descripción de las actividades 74
4.4. Secuencia de actividades 75
4.5. Actividades y análisis 76
CONSIDERACIONES FINALES 114
REFERENCIAS 120
ANEXOS 124

CONSIDERACIONES INICIALES

En el Perú, los contenidos de geometría, tanto plana como especial, si bien es cierto figuran en los documentos oficiales, como en el Diseño Curricular Nacional del 2009 (DCN) y en los Mapas de Progreso como estándares de aprendizaje, observamos que su enseñanza se ve postergada para los últimos meses de cada año académico. Es así, que esta realidad trae algunas consecuencias como por ejemplo, que no se logren culminar todos los contenidos previstos en los documentos oficiales mencionados, que los temas de geometría espacial sean estudiados someramente y, en algunos casos, que los estudiantes no le encuentren sentido al estudio de esta área de la matemática.

En ese sentido, debemos tener en cuenta que existen investigaciones, como las de Duval (2004a), las que manifiestan que la actividad cognitiva que requiere la geometría es más exigente en relación a otras áreas de la matemática. Por su parte, Gisele, Verbanek & Goldoni (2013) afirman que la geometría está aún ausente en las aulas y que el problema radica en el propio sistema educativo, así como en la formación que tienen los profesores. Por otro lado, Suarez & Ramírez (2011) señalan que la geometría es fundamental en la formación de personas, pero, en la práctica, siempre ha estado relegada a disposición del profesor, posiblemente, por falta de estrategias que garanticen su aprendizaje. También Torregrosa & Quesada (2007) precisan que el resolver un problema de geometría desarrolla, en los estudiantes, capacidades geométricas, las cuales son procesos cognitivos que se deben garantizar cuando se enseña esta área.

De la misma forma, algunas investigaciones destacan que la enseñanza de la geometría, y en especial de la espacial, debe apoyarse también en un ambiente de geometría dinámica como el Cabri 3D por ejemplo. Kosa & Karakus (2010) resaltan que el uso de ambientes de geometría dinámica, en la enseñanza de la geometría, se encuentra actualmente en incremento. Sin embargo, los autores señalan que aún persisten ciertas dificultades de visualización por parte de los estudiantes, sobre todo en figuras espaciales. También, aclaran los investigadores, que el Cabri 3D permite al usuario la construcción y manipulación de sólidos geométricos vía interfaz de dos dimensiones. Además, Gisele, Verbanek & Goldoni (2013) sustentan que el Cabri 3D auxilia en la construcción de representaciones geométricas, como los sólidos geométricos, y en la exploración de los conceptos que los sustentan o caracterizan.

En ese sentido, por los argumentos mostrados, podemos señalar que la enseñanza del sólido arquimediano cubo truncado, mediado con el Cabri 3D, es posible de realizar con estudiantes del nivel secundario y su enseñanza admite movilizar contenidos de geometría plana y espacial.

Además, el uso de este ambiente ayuda a desarrollar procesos cognitivos como el de la visualización. Es así que, como parte de las conclusiones en la investigación desarrollada por Gisele, Verbanek & Goldoni (2013) sobre sólidos arquimedianos, proponen incorporar estos contenidos en la educación básica y destacan que el principal problema que su estudio podría resolver es el de la visualización.

Por esa razón, en vista que la enseñanza de la geometría, y en especial de la geometría espacial, no es abordada adecuadamente, es que nos interesó realizar el presente trabajo de investigación sobre el cubo truncado. Este estudio fue desarrollado con la intención de utilizar el Cabri 3D, como ambiente de geometría dinámica para realizar la construcción, y que los estudiantes desarrollen y articulen aprehensiones dentro del registro figural de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, mientras movilizan nociones de geometría plana y espacial. Por esa razón, esperamos que el presente trabajo contribuya a lograr que la enseñanza de los sólidos arquimedianos se incluyan en los currículos oficiales de la Educación Básica en el Perú, claro está, mediado con el Cabri 3D.

En ese sentido, a continuación presentamos la estructura de nuestro trabajo, el cual está organizado en cuatro capítulos cuyos contenidos precisamos de inmediato.

El primer capítulo contiene el problema de investigación y los antecedentes relacionados con el objeto matemático cubo truncado, con el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D y con la Teoría de Registros de Representación Semiótica. También presentamos las herramientas del Cabri 3D que se utilizarán en la construcción del cubo truncado. Luego, mostramos la justificación de nuestra investigación; y por último, los objetivos y la pregunta de investigación.

El segundo capítulo contiene el marco teórico, con el que trabajamos nuestra investigación, y la metodología que orienta todo nuestro trabajo.

El tercer capítulo se relaciona con nuestro objeto matemático cubo truncado. En este capítulo, realizamos un estudio histórico de los sólidos arquimedianos, y particularmente del cubo truncado. Tomamos como referente aspectos de Almeida (2015).

El último capítulo le corresponde a la parte experimental. En él, describimos el escenario y los sujetos de investigación; luego, describimos las secuencias de las dos actividades que desarrollamos en la parte experimental; después, realizamos el análisis a priori; y por último, el análisis a posteriori y la validación.

Al finalizar todos los capítulos establecemos las consideraciones finales, referencias y anexos de nuestra investigación.

Debemos resaltar que la presente tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, forma parte del proyecto internacional desarrollado entre los grupos de investigación *DIMAT* de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP/PERÚ y *PEA-MAT* de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, PUC-SP/ BRASIL, titulado: *"Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT"* y aprobado por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (FAPESP) processo 2013/23228-7 y por PI0272 (PUCP).

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA

En esta sección, en primer lugar, presentamos los antecedentes y la justificación del problema que motivó nuestra investigación. En ella, exponemos tanto los artículos y las tesis que sustentan nuestra investigación; así como las razones que justifican la misma, la cual estará detallada dentro de nuestras justificaciones.

En segundo lugar, mostramos la sección referida al problema de investigación. Aquí, mencionamos en que consiste nuestro problema de investigación. Luego, planteamos nuestra pregunta de investigación para al final enunciar nuestros objetivos de investigación.

1.1. Antecedentes y justificación

En este apartado, encontramos los antecedentes de nuestra investigación. En ella, mostramos estudios que sustentan nuestro trabajo. Por otro lado, exponemos los argumentos que validan la indagación y ello estará detallado dentro de la justificación.

1.1.1. Antecedentes

Aquí, presentamos investigaciones en el área de Educación Matemática referidas a nuestro objeto matemático cubo truncado. También, investigaciones sobre el marco teórico en el que nos basamos y; por último, algunas investigaciones que sustentan el uso del Cabri 3D para desarrollar nuestra propuesta.

Antecedente relacionado con nuestro objeto matemático

Gisele, Verbanek & Goldoni (2013) realizan una investigación con el objetivo de estudiar los poliedros arquimedianos y proponer su estudio en la educación básica. Los autores realizan este trabajo con el software Poly (software simulador de poliedros) y materiales manipulables. Los investigadores entienden que una de las dificultades que se presenta, en los estudiantes, en el estudio de los poliedros arquimedianos está referido a los procesos de visualización y representación de los mismos.

Precisan los estudiosos que los poliedros arquimedianos se caracterizan por ser semirregulares y equiangulares; es decir, que la suma de dos ángulos planos en cada vértice son iguales y constituyen un ángulo sólido. También, que las caras aunque sean polígono regulares estos no son iguales. Además, mencionan que los trece poliedros arquimedianos pueden ser construidos a partir de los poliedros platónicos.

De los trece poliedros arquimedianos manifiestan Gisele, Verbanek & Goldoni (2013) que once de ellos son construidos a partir de truncaturas (cortes) en las aristas de los platónicos y los otros dos restantes se construyen mediante un procedimiento denominado *snubificación*. Este procedimiento consiste en quitar todas las caras de un poliedro platónico, luego rotarlo 45° para finalmente llenar los espacios vacíos resultantes con triángulos. En ese sentido, hacen mención al cubo truncado como el arquimediano que pertenece al grupo de los once mencionados, el cual se obtiene a partir del cubo.

Asimismo, los autores argumentan que una alternativa interesante para el estudio de estos poliedros arquimedianos, en las aulas, son los softwares de geometría como por ejemplo el Cabri 3D. Estos softwares también posibilitan la visualización de los objetos en el espacio, además de trabajar con diversos contenidos geométricos y ayudan a los estudiantes cuando realizan una tarea similar; es decir, permiten migrar de una actividad mecánica hacia una actividad dinámica.

En la parte experimental, los autores trabajaron con estudiantes del último ciclo de un curso de licenciatura de matemática en Brasil. Dichos estudiantes no tenían ningún conocimiento sobre poliedros arquimedianos, y las actividades planteadas incluyeron el uso del software Poly y de material manipulable. Las actividades estuvieron centradas en los siguientes aspectos: construir poliedros arquimedianos a partir de truncaturas, y discutir las características y propiedades de dichos poliedros.

Los investigadores, dentro de sus conclusiones, afirman que las actividades propuestas para los estudiantes con el software Poly y con materiales manipulables fueron un acierto, ya que posibilitó una adecuada exploración de las características y propiedades de los poliedros arquimedianos. También manifestaron que las actividades guiaron la comprensión de las truncaturas realizadas para obtener los poliedros arquimedianos y las relaciones entre los poliedros platónicos y los arquimedianos. Por último, mencionan que este trabajo abre la posibilidad de incluir una alternativa didáctica para abordar los poliedros arquimedianos en la educación básica.

Esta investigación nos parece pertinente, ya que muestra la importancia del estudio de los sólidos arquimedianos, a su vez que los investigadores detallan algunas características del proceso de construcción de los mismos. También mencionan que nuestro objeto matemático cubo truncado se encuentra dentro de los once que se construyen a partir de truncaturas (cortes) en un platónico; es decir, en el cubo. Resaltan también la importancia de su inclusión en la educación básica regular que es un objetivo que compartimos en esta tesis.

Antecedentes relacionados con el marco teórico

A continuación, presentamos dos investigaciones que guardan relación con la Teoría de Registros de Representación Semiótica y en especial con los elementos de esta teoría que utilizaremos en nuestra investigación tales como los tratamientos, conversiones y las aprehensiones dentro del registro figural.

En primer lugar, presentamos a Toledo & Velho (2014) quienes realizan una investigación con estudiantes del primer año de Ensino Medio, en Rio Grande do Sul en Brasil, con el objetivo de analizar los tratamientos y conversiones que se dan dentro de los Registros de Representación Semiótica cuando los estudiantes resuelven problemas de modelación matemática.

Las investigadoras refieren que, según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, los objetos con que se trabaja en matemática son abstractos y no son accesibles; por ello, es que para su apropiación es necesario una forma de representación. Es así, que a través de estas representaciones es que los conceptos matemáticos serán apropiados por los estudiantes. De la misma manera, afirman que para que el estudiante alcance entender un concepto es necesario que coordine por lo menos en dos registros de representación de un mismo objeto. Esta coordinación se manifiesta por la actividad cognitiva de conversión.

En la misma línea, las autoras señalan que de acuerdo con la Teoría de Registros de Representación Semiótica existen tres tipos de representaciones; las mentales que son conjunto de creencias, concepciones, nociones que un estudiante puede tener sobre un objeto; las representaciones computacionales o internas, que son no consientes y en donde el estudiante ejecuta automáticamente una tarea; y por último, las representaciones semióticas, que son externas y consientes, y que gracias a ellas el estudiante tiene acceso a los objetos matemáticos. También afirman que las representaciones semióticas son lengua natural, sistemas de escritura (numérico, algebraico y simbólico), los gráficos cartesianos y las figuras geométricas; además para que un sistema semiótico sea un registro de representación debe cumplir tres actividades cognitivas: el primero, es el de *formación de una representación identificable*; es decir, cuando es posible reconocer en esta representación aquello que representa dentro de un sistema de signos establecido socialmente; el segundo, es *el tratamiento* que es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo sistema de registros; y la tercera, es la *conversión* que es la transformación de la representación de un objeto en otra representación de ese mismo objeto.

En este sentido, Toledo & Velho (2014) añaden que para que exista aprendizaje en matemática es necesario que el estudiante no solo pueda transitar entre diversos registros, sino que se garantice la coordinación entre esos registros.

En la parte experimental, las autoras propusieron actividades relacionadas con la modelación matemática, función, variables dependientes e independientes; para ello, al grupo de trabajo se le solicitó que trajeran recibos de luz, los cuales serían la fuente de recojo de información y del desarrollo de las actividades.

Luego de realizar las actividades de modelación matemática, las autoras, llegaron a la conclusión que los estudiantes comprendieron el concepto de función y que demostraron facilidad para realizar tratamientos y conversiones entre todos los registros trabajados.

Esta investigación es importante, ya que en ella se realizó un estudio sobre los tratamientos y conversiones que son elementos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica que se tomarán en cuenta en nuestra investigación.

En esta misma línea, presentamos a Torregrosa, Quesada & Penalva (2010) quienes desarrollan una investigación con estudiantes para profesores donde proponen actividades con las cuales pretenden identificar los procesos de visualización cuando estos resuelven problemas de geometría. Por otro lado, pretenden establecer las relaciones entre las aprehensiones discursiva y operativa como vínculo entre los procesos de razonamiento y visualización en la resolución de problemas de geometría.

Los investigadores plantean como objetivos de esta investigación caracterizar la coordinación entre los procesos de visualización y razonamiento, generado por los estudiantes, cuando resuelven problemas de geometría y desarrollar explicaciones que permitan comprender las acciones realizadas por los estudiantes en relación con el análisis del razonamiento configural.

También señalan que los estudiantes deben coordinar los distintos procesos (visualización y razonamiento) y los distintos registros de representación para ordenar y construir soluciones cuando resuelven un problema de geometría. Ahora, esta coordinación, que aluden los autores, se da mediante las tres actividades relacionadas con la semiosis, las cuales son: identificación, tratamiento y conversión. Estas tres actividades, mencionan, son inherentes a la resolución de problemas geométricos.

Torregrosa, Quesada & Penalva (2010) quienes toman como referente la Teoría de Registros de Representación Semiótica definen los procesos de visualización considerando los tipos de aprehensiones que son: perceptiva, discursiva y operativa. Así mismo, señalan que el proceso de visualización está relacionado con los procesos de razonamiento, entendiendo a este proceso como cualquier procedimiento que permite desprender nueva información a partir de informaciones previas en un problema dado de geometría. Destacan también al razonamiento de tipo configural como aquel que se caracteriza por la coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa cuando un estudiante resuelve un problema de geometría.

Los autores realizaron la parte experimental con 55 estudiantes para profesores quienes resolvieron ocho problemas geométricos en un entorno de lápiz y papel. Dentro del análisis de los resultados señalan que se ha identificado tres tipos de desenlace en relación con la coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa. El primero, es el de *truncamiento* y este sucede cuando la coordinación entre las aprehensiones mencionadas brinda al estudiante una "idea" para resolver deductivamente el problema; el segundo, es la *conjetura sin demostración* en donde el estudiante puede dar una respuesta al problema por medio de conjeturas sin demostración; para ello, utiliza el registro de lengua natural. Por último, el *buclé*, el cual se concibe como un proceso en que el estudiante llega a bloquearse y ello no le permite avanzar para llegar a la solución; es decir, se produce un estancamiento del estudiante en la resolución del problema geométrico.

En las conclusiones, los investigadores señalan que en los tres desenlaces (truncamiento, conjetura sin demostración y buclé), observaron que los estudiantes realizaron aprehensiones discursivas y operativas; es así que el proceso de resolución de problemas geométricos es un proceso fruto de que el estudiante realiza un tipo de aprehensión, por ejemplo la operativa, la cual provoca la realización de otro tipo de aprehensión, discursiva, y que la misma secuencia debe repetirse de manera coordinada.

Sin embargo, como mencionan los estudiosos, la coordinación entre estas aprehensiones tiene sus limitaciones. Por ejemplo en el truncamiento es posible seguir la coordinación entre estas dos aprehensiones, mientras tanto en la conjetura sin demostración y en el bucle la coordinación entre las aprehensiones operativa y discursiva no se aprecian con claridad por causas que se mencionan a continuación: aquellas que obstaculizan la realización de aprehensiones, la cual se podría deber a una distracción del estudiante y su desvío de atención hacia subconfiguraciones no relevantes en el momento de resolver el problema geométrico; otra causa podría estar en la ausencia de aprehensiones discursivas, y esta se puede deber al conocimiento deficiente del estudiante en las relaciones lógicas y el no poseer una congruencia semántica; y una última causa podría estar en la falta de coordinación entre las aprehensiones. Por tanto, debido a estas dificultades el proceso configural entendido como la coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa puede no desembocar en la solución deseada.

Así también, Torregrosa, Quesada & Penalva (2010), mencionan que la caracterización obtenida del razonamiento configural a partir de la Teoría de Registros de Representación Semiótica aporta instrumentos para explicar los distintos desenlaces (que ya fueron descritos), que se dan cuando los estudiantes enfrentan problemas de geometría.

Esta investigación es relevante en nuestro trabajo, ya que los autores estudian y analizan la articulación de aprehensiones del registro figural; y ello tiene relación directa con nuestros objetivos de investigación y en sí, con el referencial teórico que elegimos trabajar en esta investigación.

Ambientes de geometría dinámica y el Cabri 3D

Según Gravina (2001), los ambientes de geometría dinámica ofrecen regla y compas virtuales, lo que permite la construcción de objetos geométricos a partir de propiedades que lo definen. También afirma que la base del conocimiento de estos ambientes es el interfaz de trabajo disponible en ella tales como la manipulación de objetos en la pantalla del computador.

Por otro lado, la investigadora precisa que los ambientes de geometría dinámica motivan el espíritu de investigación matemática. Su interfaz interactivo abierto a la exploración y experimentación, posibilita la experimentación del pensamiento (hacer exploraciones, elaborar conjeturas, probar hipótesis, producir demostraciones).

En la misma línea, Salazar (2011) resalta que de acuerdo a investigaciones en el área, como las de Laborde, Restrepo & Gravina, los ambientes de geometría dinámica pueden proporcionar otra perspectiva para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Principalmente porque estos ambientes influencian en la representación de objetos planos y espaciales; así como también permite la exploración (manipulación directa) lo que reduce las dificultades de visualización, en el sentido que permite al usuario ver la figura desde diferentes puntos de vista. Además, una figura construida en un ambiente de geometría dinámica preserva sus propiedades relacionadas al objeto matemático que representa.

En cuanto al Cabri 3D, Salazar (2011) manifiesta que este es un ambiente en donde se puede manipular y construir figuras espaciales. Añade también, que el Cabri 3D posee herramientas que ayudan a construir puntos, rectas, planos, prismas, cubos, etc. Estos objetos a su vez ayudan a realizar construcciones dinámicas desde las más elementales hasta las más complejas.

De esta forma, podemos destacar la importancia de los ambientes de geometría dinámica para realizar construcciones, en especial construcciones de figuras espaciales. En ese sentido, nuestra investigación se apoya en estas investigaciones para elegir al Cabri 3D como el indicado para construir el objeto matemático cubo truncado, y aprovechar sus funciones del arrastre y manipulación directa en dicha construcción, las cuales servirán para realizar una investigación más adecuada del sólido mencionado.

Antecedentes relacionados con el objeto matemático y el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D

A continuación, presentamos investigaciones muy importantes en nuestro trabajo relacionados con los sólidos arquimedianos y el uso del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, que es el ambiente con el que trabajaremos en nuestra investigación.

En primer lugar, la investigación de Almeida (2010) que es uno de los antecedentes más importantes en nuestra investigación porque estudia los trece sólidos arquimedianos y, entre ellos al cubo truncado que es el objeto matemático que deseamos investigar. Al mismo tiempo, estudia la relación con el Cabri 3D que también es el ambiente con el que desarrollaremos nuestra investigación.

El objetivo de la investigadora es el de rescatar el estudio de los sólidos arquimedianos por medio de construcciones en el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. Para ello, utiliza aspectos de la Transposición Didáctica desarrollado por Chevallard para articular el análisis epistemológico y el análisis didáctico. También emplea la Teoría de Registros de Representación Semiótica, con la finalidad de identificar qué registros y articulados de qué manera, permiten la construcción de los sólidos arquimedianos y además, en dicha articulación y coordinación de registros qué tipos de tratamientos y conversiones se realiza en el estudio de los sólidos arquimedianos.

Para abordar el objeto de enseñanza, asumió la definición de un poliedro como un sólido; en cuanto al objeto matemático sólidos arquimedianos señala que tienen la misma definición que la de poliedros semi regulares; es decir, que los sólidos arquimedianos están formados por más de un polígono regular.

En cuanto al ambiente de la geometría dinámica Cabri 3D, Almeida (2010) precisa que dicho ambiente favorece la exploración y adquisición de conceptos geométricos, y que presenta ventajas en relación a construcciones con lápiz y papel. Así también, afirma que el ambiente del Cabri 3D permite construir, visualizar y manipular una figura tridimensional conservando las propiedades de dicho objeto representado.

En cuanto a la metodología, la investigadora señala que realizó un estudio bibliográfico riguroso de los sólidos arquimedianos para conocer sus características, propiedades y su proceso de construcción, luego se utilizó el Cabri 3D para construir los trece sólidos arquimedianos.

En lo referente al cubo truncado, la autora refiere que este sólido se obtiene a partir de las truncaturas realizadas en el cubo a través de un tipo de truncamiento (tipo 2, que explicaremos en el capítulo de nuestro objeto matemático) donde se determina la distancia adecuada desde el vértice hasta el punto de corte, de tal manera que por cada cara del poliedro de partida (cubo), resulte un polígono regular. También explica que una vez realizado los truncamientos, el cubo truncado presenta 2 tipos de caras octógonos y triángulos regulares.

La investigadora concluye que el Cabri 3D se configuró como un ***hábitat,*** en el sentido de Chevallard, para la construcción y estudio de los sólidos arquimedianos, entre ellos del cubo truncado, una vez que reconoció como objetos a todos los saberes que determinan su existencia. También sustenta que es posible incluir el estudio de los sólidos arquimedianos en la educación básica con apoyo de la tecnología como es el Cabri 3D.

En la misma línea, tenemos la investigación de Almeida & Silva (2012) quienes presentan en este trabajo al Cabri 3D como un ambiente propicio para la construcción de los sólidos arquimedianos. Las autoras inician su investigación y mencionan que los sólidos arquimedianos no están presentes como objeto de enseñanza en la escuela básica de Brasil; sin embargo, aparecen en materiales didácticos como apoyo para el profesor en la enseñanza de otros tópicos como las relaciones de Euler y la concavidad. También señalan que muy pocos conocen de la existencia del objeto matemático sólidos arquimedianos, y aducen que las razones para tal desconocimiento podría estar en la escasa información bibliográfica al respecto y, en el hecho que no se enseña en la educación básica.

Así, en esta investigación, las investigadoras realizan un estudio de los sólidos arquimedianos por medio de sus construcciones en el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D; y para ello, recurrirán primero a fuentes históricas para rescatar este conocimiento y poder ayudar a su comprensión e intentar encontrar una posibilidad de enseñanza de este objeto en la escuela básica con el auxilio del Cabri 3D. Respecto al Cabri 3D, Almeida & Silva (2012), afirman que es un ambiente para el estudio de los sólidos arquimedianos en la medida que dicho ambiente reconozca a este objeto, y a los demás saberes que determinan su existencia, como objetos de enseñanza.

Todas las construcciones en el Cabri 3D fueron realizadas por medio de la operación de truncamiento efectuado a los poliedros platónicos. Particularmente en este trabajo, las autoras, presentan a nuestro objeto matemático cubo truncado, del cual refieren que se obtiene realizando cortes a una *distancia* adecuada de cada vértice, de tal manera que se forman en cada cara un octógono regular y en el canto donde se realizó el corte se forma un triángulo regular.

Nos mencionan también, que para respetar la regularidad de las caras del cubo truncado, los puntos de corte en las caras cuadradas deben ser encontrados mediante procedimientos matemáticos (los cuales se detallarán en el capítulo de nuestro objeto matemático).

Para la construcción del cubo truncado, las investigadoras pasan a detallar el proceso con el Cabri 3D que se inicia con la construcción del cubo, luego con la herramienta "longitud", luego se pasa a medir la longitud de la arista para después con la "calculadora" ingresar la distancia calculada para los cortes. Así, detallan los pasos a seguir en el Cabri 3D hasta finalizar con las truncaturas de los ocho cantos del cubo original y obtener el cubo truncado. Al culminar dicha construcción, las autoras establecen una serie de relaciones entre el poliedro de partida el cubo y el poliedro de llegada; es decir, el cubo truncado (dichas relaciones también se detallarán en el capítulo de nuestro objeto matemático).

Las investigadoras culminan y precisan que son importantes dos aspectos que a continuación mencionamos: primero, identificar los saberes que se asocian en la construcción del cubo truncado y segundo, verificar si el Cabri 3D reconoce a dicho objeto matemático. Y por contar con ambos aspectos, afirman las autoras, es que el Cabri 3D contribuye para que los sólidos arquimediano y, en especial el cubo truncado se trasforme en objeto de enseñanza. Es así, que el cubo truncado se tornó un objeto para el Cabri 3D en el momento que este ambiente lo reconoció como tal y se relacionó con él, lo que lleva a confirmar que el Cabri 3D es adecuado para el estudio del cubo truncado en la escuela básica.

Igualmente, tenemos a Silva (2012) quien presenta una investigación en donde propone cinco situaciones para trabajar con profesores de enseñanza básica, con la finalidad de utilizar el software Cabri 3D para que el estudiante pueda realizar construcción de sólidos por truncaturas (cortes) y además, pueda determinar sus volúmenes. En este sentido, la autora afirma que en la escuela básica brasilera y sobre todo en la enseñanza media (14 – 17 años) se privilegia el estudio de volúmenes a partir del principio de Cavalieri y de fórmulas, además de solo presentar como objeto de estudio a los prismas, pirámides y sólidos de Platón. Los otros tipos de sólidos no son tratados.

Silva (2012) afirma que el Cabri 3D permite, por ejemplo, la construcción de sólidos arquimedianos, objeto cuya enseñanza en el Brasil fue olvidada desde el siglo pasado. También menciona que este software es una herramienta que auxilia la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

En su investigación, la autora, en la parte experimental, presenta cinco situaciones, las cuales se precisan a continuación: caracterización de poliedros, construcción de un octaedro y cuboctaedro a partir del cubo, volumen del icosaedro regular, geometría de las transformaciones y actividades de manipulación.

Al finalizar la parte experimental, la autora concluye con la afirmación que el Cabri 3D es un ambiente favorable para el estudio de los sólidos arquimedianos, los cuales no forman parte del currículo de geometría espacial. También menciona que las truncaturas realizadas con el Cabri 3D en estudiantes menores de 14 años pueden ser utilizados para obtener sólidos más simples; y de esa manera, los estudiantes busquen la fórmula del volúmenes a partir de la descomposición del sólido inicial.

La investigadora también afirma que muchos de los contenidos de la educación básica podrían tener al Cabri 3D como herramienta para la construcción del aprendizaje con ayuda de sus profesores previamente formados y con capacidad para crear situaciones para tales fines.

Por otro lado, presentamos a Silva & Salazar (2012) quienes presentan un trabajo con profesores del nivel secundario, con el objetivo de explorar construcciones geométricas espaciales, con el software de geometría dinámica Cari 3D.

Las investigadoras nos mencionan que a pesar que las investigaciones muestran las ventajas del uso del software en la enseñanza de las matemáticas, estos no están del todo incorporados en la práctica docente dentro de las aulas. Así mismo, destacan las bondades del Cabri 3D, como un ambiente adecuado cuando se trabaja contenidos de geometría. Estas bondades del Cabri 3D se centran en dos aspectos, los cuales son el arrastre, como característica importante que posee, y la manipulación de la representación de objetos construidos.

Silva & Salazar (2012) desarrollan su investigación y proponen actividades con el objetivo de desarrollar técnicas en los profesores de secundaria para poder construir sólidos arquimedianos con el uso del Cabri 3D. También señalan que los sólidos arquimedianos en algún momento formaron parte del currículo Brasilero; y ahora, se podría recuperar la posibilidad de su enseñanza gracias al ambiente de geometría dinámica del Cabri 3D, el cual permite disminuir las dificultades de la representación de dichos objetos.

Las investigadoras realizan dos actividades; una de ellas centradas en la construcción de diversos objetos matemáticos, lo que contribuirá a explorar los principales recursos del Cabri 3D; y la segunda actividad está centrada en el cálculo de volumen del sólido arquimediano cuboctaedro.

Luego de desarrollar la parte experimental, las estudiosas arribaron a las conclusiones siguientes: el uso del Cabri 3D contribuye a la visualización de todas las caras del sólido a diferencia de la construcción con lápiz y papel, también que este ambiente posibilitó identificar las características del sólido construido; y por último, que gracias al Cabri 3D se movilizaron elementos de la geometría pero construidos en el espacio tales como: el punto, recta, plano y sólidos arquimedianos.

Ahora, exponemos la investigación de Suarez & Ramírez (2011) quienes en su trabajo presentan la implementación de una estrategia de enseñanza de los sólidos platónicos y arquimedianos en estudiantes del octavo grado (13-15 años de edad) en Boyacá-Colombia. La investigación está fundamentada en el enfoque de aprendizaje significativo y en el manejo de los sistemas de representación, vistos desde el enfoque ontosemiótico con el uso de materiales concretos y el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D.

Los investigadores mencionan la importancia que tiene la geometría en la formación de las personas; y por ello, su incorporación en los programas curriculares de los países. También manifiestan que, en la práctica, la geometría ha sido siempre relegada a la disposición del profesor, tal vez por el desconocimiento de estrategias efectivas que garanticen su aprendizaje.

Así también, señalan que el aprendizaje de la geometría ha estado enmarcada en enfoques epistemológicos formalistas, en una metodología para su enseñanza de tipo algorítmica con un tipo de transmisión unidireccional de los conocimientos y el empleo del método axiomático deductivo para estructurar conceptos claves como punto, recta, planos, semiplanos y figuras geométricas en el plano y en el espacio. Este tipo de metodología conlleva a la memorización de propiedades por parte del estudiante y, a la aplicación y formulación de relaciones ya demostradas sin la apertura para que sean los estudiantes quienes descubran y construyan dichos conocimientos.

Suarez & Ramírez (2011) presentan la investigación de Salazar en el 2008, la cual aborda aspectos del Cabri 3D y destaca que el uso de este software es importante en el aprendizaje de las matemáticas, pues conlleva a la comprensión de conceptos geométricos. Además, que el uso del Cabri 3D puede desarrollar actividades cognitivas como la visualización; y por último, que el Cabri 3D ofrece posibilidades ilimitadas que puede ser utilizadas sin mayor dificultad en la educación secundaria como herramienta que contribuya al aprendizaje mediante la construcción y la exploración.

Por otro lado, los autores añaden que el Cabri 3D es un programa de geometría dinámica especial para dibujar y modelar poliedros, y si privamos a los estudiantes de la educación básica y media en el uso de este programa, estaríamos privándolos de vivir experiencias fascinantes y novedosas en el campo de las representaciones de conceptos matemáticos. Añaden que diseñar, crear, modelar y simular situaciones, en el Cabri 3D, constituye uno de los mayores potenciales en la exploración de las representaciones, en el campo de las matemáticas, y que se puede trabajar de manera natural las construcciones geométricas. Así también, señalan que el crear los dibujos correspondientes a los poliedros brindan al estudiante un espacio más apropiado para el aprendizaje por descubrimiento, ya que las situaciones problemáticas que el estudiante debe afrontar en dichas construcciones le permiten desarrollar su pensamiento espacial sin enfatizar el bagaje de conocimientos, teoremas y propiedades al estilo de la geometría clásica.

Los autores también refieren que las representaciones gráficas juegan un papel muy importante en el aprendizaje de la geometría, en su comprensión y la construcción de conceptos. Así, están de acuerdo con Duval quien manifiesta que no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación. Un mismo objeto puede darse a través de representaciones muy diferentes, y la confusión entre ellos provoca pérdida de aprendizaje. También afirman que las representaciones semióticas son indispensables y necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, y que la posibilidad de efectuar transformaciones en los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado.

En la parte experimental, los autores, propusieron cinco actividades con los siguientes objetivos: desarrollar interpretaciones que favorezcan la construcción de sólidos y evidenciar las dificultades que tienen los estudiantes cuando construyen sólidos platónicos y arquimedianos. En las actividades propuestas, se incorporó el uso del Cabri 3D para la parte final del proyecto. Este software facilitó hacer énfasis en la visualización, modelación y exploración de las propiedades de dichos sólidos.

Luego de la parte experimental de la investigación, Suarez & Ramírez (2011) llegaron a las siguientes conclusiones: en la construcción de los poliedros platónicos y arquimedianos con el Cabri 3D, los estudiantes pudieron identificar sus características, giraron y manipularon sus construcciones lo que ayudó al proceso de visualización. Así también, que los sistemas de representación semiótico de los sólidos platónicos y arquimedianos colaboraron en la construcción del concepto de poliedro. Por último, comprendieron que las representaciones son instancias que permiten conocer un concepto determinado, en este caso el de poliedros.

Los investigadores, como cierre, afirman que debido a la alta motivación que muestran los estudiantes al realizar las aplicaciones tecnológicas, es importante crear espacios para implementar el empleo del software dinámico en las clases de geometría, ya que ello transformará significativamente los resultados de la educación geométrica.

Las investigaciones mostradas son importantes, ya que sustentan y validan nuestra decisión sobre la elección del Cabri 3D como ambiente adecuado para la construcción del objeto matemático cubo truncado a partir de cortes realizados en el cubo. Sus bondades como las del *arrastre y manipulación directa*, entre otras, permitirán a los estudiantes observar sus construcciones desde distintas posiciones y así desarrollar procesos cognitivos como el de la visualización.

Por consiguiente, en este estudio trabajaremos la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D, lo cual nos lleva a precisar las herramienta que utilizaremos para lograr dicha construcción. En ese sentido, presentamos aquellas que consideramos esenciales para realizar nuestra investigación en la parte experimental.

Principales herramientas del Cabri 3D

- ***Ambiente del Cabri 3D***

Al abrir el Cabri 3D debemos observar cuatro campos: la barra de títulos, la barra de herramientas, la zona de trabajo, el eje de coordenadas y el plano base.

Figura 1. Ambiente del Cabri 3D

En la barra de herramientas desplegamos la ventana "**despliegue**" y elegimos la escala de trabajo con la que desea trabajar. A mayor escala se observa la "**zona de trabajo**" más extensa.

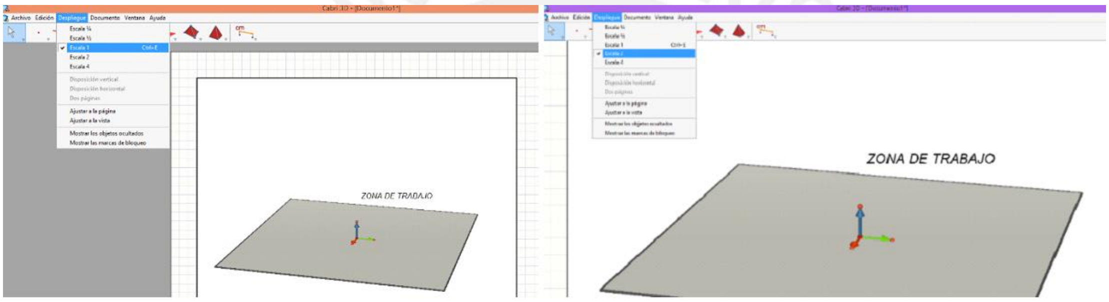


Figura 2. Zona de trabajo a escala 1

- ***Manipulación del plano base:*** para efectos de ver una figura desde varias posiciones del observador, podemos manipular el plano base. Nos debemos ubicar en cualquier lugar de la *zona de trabajo* y mantener presionado el botón derecho del mouse hasta que el puntero se convierta en una "**mano**" y luego podremos manipular libremente el plano base.
- ***Puntos en el plano y en el espacio***: para crear puntos en el plano, debemos hacer clic con el botón izquierdo en la herramienta "**punto**" y llevar el puntero a cualquier parte de la "**zona de trabajo**" y clicar ahí con el botón izquierdo. También, podemos asignar una letra a dicho punto una vez creado este.

Para crear puntos fuera del plano base, procedemos a hacer clic con el botón izquierdo en la herramienta "**punto**" y llevar el puntero a cualquier parte de la "**zona de trabajo**". Una vez ahí, mantenemos presionado la tecla "**SHIFT"** y hacemos un clic con el botón izquierdo en cualquier parte de la "**zona de trabajo";** de esa forma creamos un punto en el espacio.

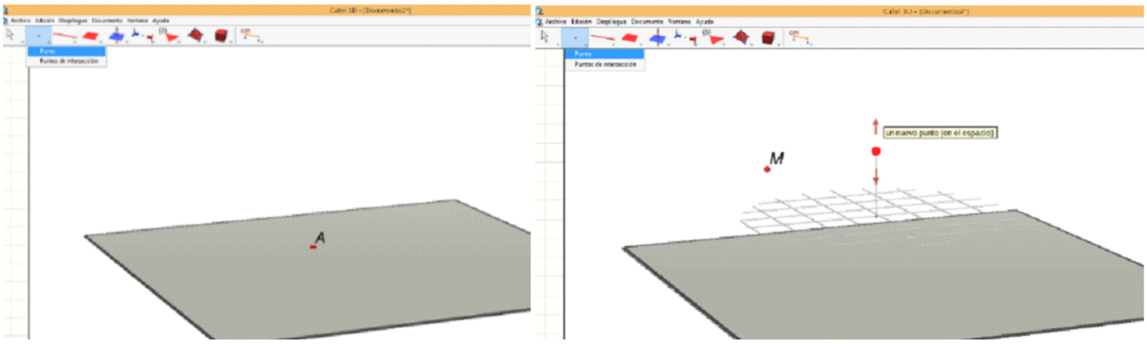


Figura 3. Puntos en el plano base y fuera de él

• ***Manipulación de objetos representados:*** para efectos de manipular la representación de un objeto construido, debemos clicar en la herramienta "**manipulación**" (primer icono de la barra de herramientas), luego ubicamos el puntero del mouse en el objeto que se desea manipular y presionamos el botón izquierdo del mouse. Luego, mantenemos presionado el botón izquierdo, hasta que el puntero se convierta en una "**mano**", y de ahí podemos manipular libremente el objeto.

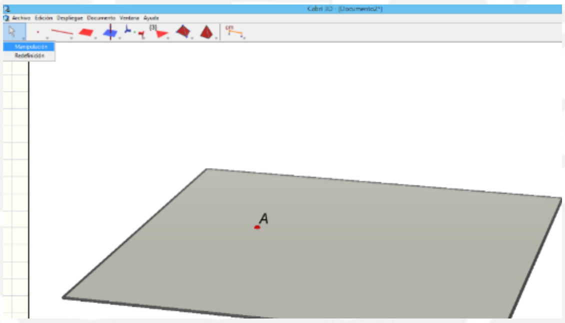


Figura 4. Manipulación del punto

• ***Rectas y segmentos que pasan por dos puntos:*** para crear rectas y/o segmentos, debemos ubicar en primer lugar dos puntos y luego clicar con el botón izquierdo en la herramienta **"recta"** o **"segmento",** y marcar sobre los puntos creados para generar la recta o el segmento.

• ***Planos mediante tres puntos:*** para generar planos mediante tres puntos, construimos tres puntos (en el plano, en el espacio o en ambos), luego hacemos un clic en la herramienta "**plano**" y marcamos en los tres puntos previamente construidos.

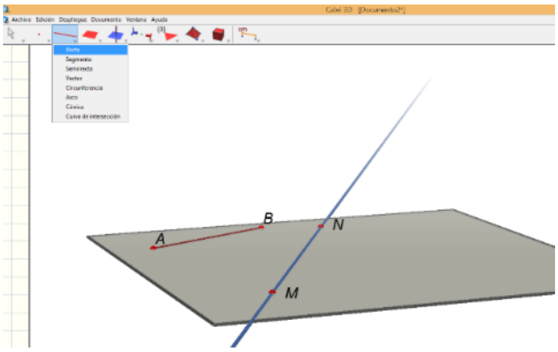


Figura 5. Rectas y segmentos en el plano base

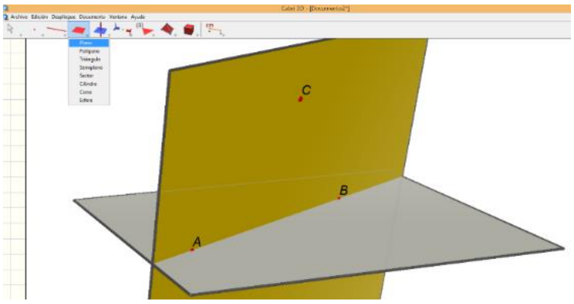


Figura 6. Plano secante al plano base

• ***Punto medio de un segmento y punto medio entre dos puntos:*** para ubicar el punto medio de un segmento, en la barra de herramientas del Cabri 3D, debemos hacer clic en la opción "**punto medio**". Luego, desplazamos el cursor hasta el segmento dado y hacer clic sobre él. Por otro lado, para ubicar el punto medio entre dos puntos teniendo los dos puntos ya creados, hay que clicar en la herramienta "**punto medio";** luego arrastramos el puntero hasta el primer punto y se hace un clic; a continuación se hace un clic en el segundo punto y automáticamente aparecerá el punto medio del segmento.

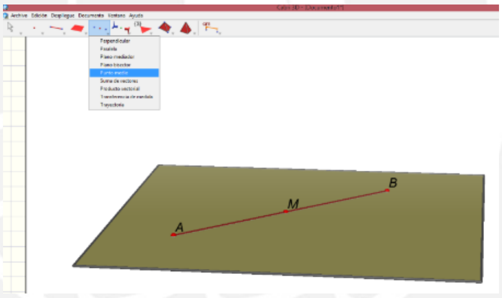


Figura 7. Punto medio de un segmento

• ***Puntos y curvas de intersección:*** cuando dos figuras se intersecan siempre van a tener en común o un punto o una figura distinta a un punto. Si deseamos identificar lo que genera la intersección de dos figuras, recurrimos a las herramientas "**punto de intersección**" o "**curvas de intersección**" de la barra de herramientas. Clicamos en alguna de estas opciones, luego arrastramos el puntero del mouse hasta el primer objeto y clicamos sobre él. Finalmente, hacemos un clic en el segundo objeto e inmediatamente se creará la figura producto de la intersección de estos dos objetos.

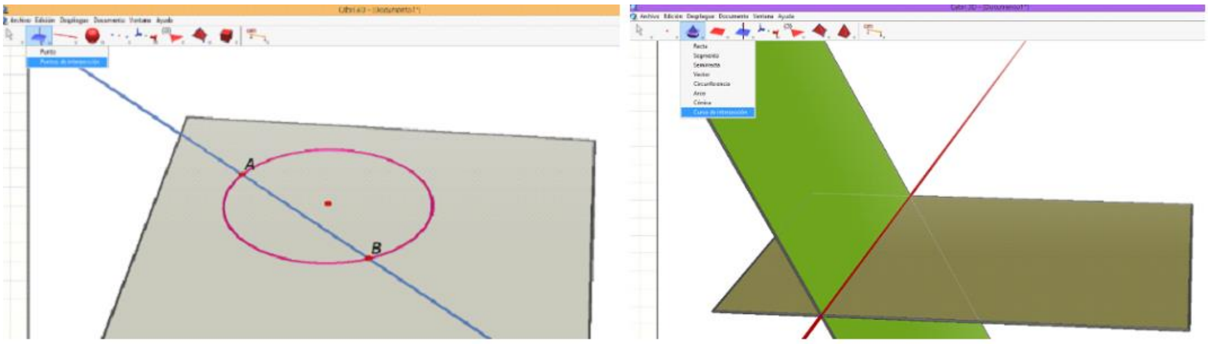


Figura 8. Puntos de intersección

• ***Triangulo por tres puntos:*** para crear un triángulo por medio de tres puntos debemos clicar en la herramientas "**triángulo**", luego con el botón izquierdo del mouse clicamos en los tres puntos (si es que previamente hemos creado tres puntos) por donde se creará el triángulo. Si no hemos creado inicialmente los tres puntos, podemos hacer clic directamente en el plano o fuera de él y los puntos se generarán automáticamente a la par con el triángulo que se irá creando por dichos puntos.

• ***Distancia entre dos puntos:*** para determinar la distancia entre dos puntos cualesquiera, debemos clicar en la herramienta "**distancia**", luego clicamos en los dos puntos entre quienes queremos medir la distancia.

• ***Longitud de un segmento:*** para determinar la longitud de un segmento dado, hacemos un clic en la herramienta "**longitud**" y luego otro clic en el segmento del cual deseamos apreciar su longitud.

• ***Área de una región:*** para apreciar el área de una región, hacemos clic en la herramienta "**área**", luego llevamos el cursor hasta ubicarla sobre la región de la que queremos determinar su área y clicamos ahí.

• ***Ocultar objetos:*** por cuestiones de comodidad es conveniente muchas veces ocultar algunos objetos (que es diferente a eliminarlos). Para ello, debemos ubicar el puntero en el objeto que se desea ocultar y hacer un clic con el botón derecho del mouse. Luego, elegimos la opción "**ocultar/mostrar**" y clicamos ahí. Si pretendemos recuperar los objetos ocultados, debemos hacer un clic con el botón derecho en cualquier parte fuera del plano base y elegir la opción "**recuperar objetos ocultados**".

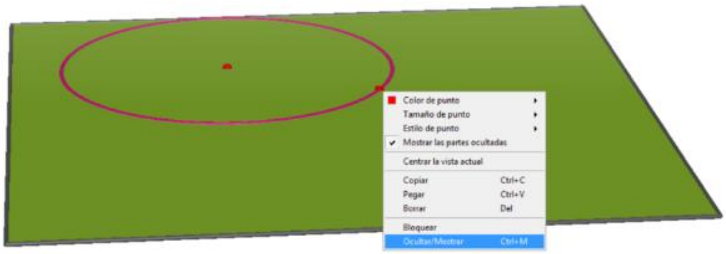


Figura 9. Ocultar objetos

• ***Circunferencia definida en un plano por su centro y un punto de paso:*** para construir una circunferencia ubicamos el puntero del mouse en el tercer icono (contado de izquierda a derecha) de la barra de herramientas y hacemos un clic en la opción "**circunferencia**". Luego, llevamos el puntero del mouse al plano donde deseamos crear la circunferencia (puede ser el plano base u otro plano distinto) y damos un clic en él. A continuación, definimos un punto que será el centro (el punto puede ya existir o lo puede crear); y finalmente, expandimos la circunferencia hasta otro punto de paso que ya exista en ese plano o defina uno dando un clic con el botón izquierdo del mouse.

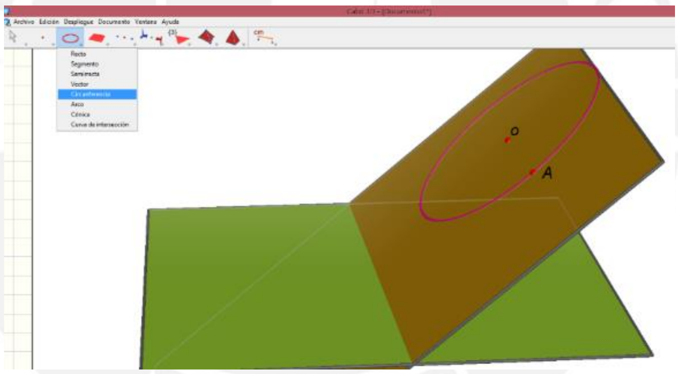


Figura 10. Circunferencia definida en un plano

• ***Construcción de un cubo definido en un plano con centro y un punto:*** para construir un cubo desplegamos el penúltimo icono de la barra de herramientas (contado de izquierda a derecha) y hacemos clic en la herramienta "**cubo**"; luego hacemos un clic en el plano donde deseamos construirla. A continuación, un clic para generar un punto que será el centro y otro clic para el punto que definirá el cubo. Si consideramos conveniente podemos asignarle letras a los vértices del cubo simplemente clicando en dicho vértice y digitando la letra de nuestra elección. Si no fuera el caso, hacemos un clic en la herramienta "**punto**" y clicamos en el vértice para luego nombrarlo.

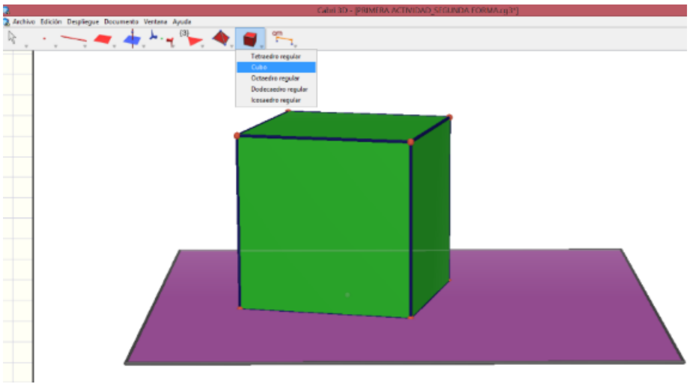


Figura 11. Construcción de un cubo

• ***Recortar el cubo:*** en general para recortar cualquier poliedro el proceso es el mismo. En el caso particular del cubo diremos que una vez construido el cubo, definimos tres puntos (uno en cada arista, las cuales concurren en un vértice) y luego construimos un plano con dichos puntos. En seguida, desplegamos el antepenúltimo icono de la barra de herramientas y elegimos la herramienta “**recorte de poliedro**”. Por último, hacemos un clic en el plano construido y luego en la parte del cubo que deseamos recortar.

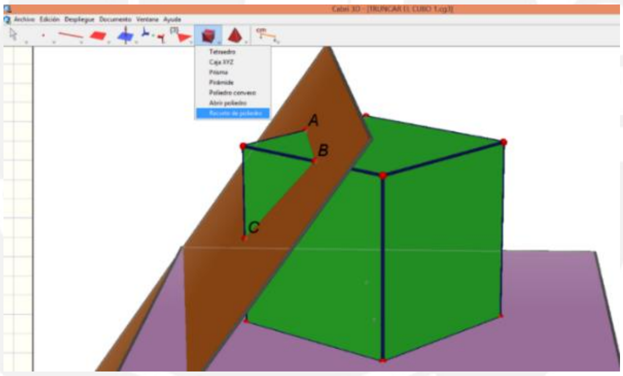


Figura 12. Recorte de poliedro 1

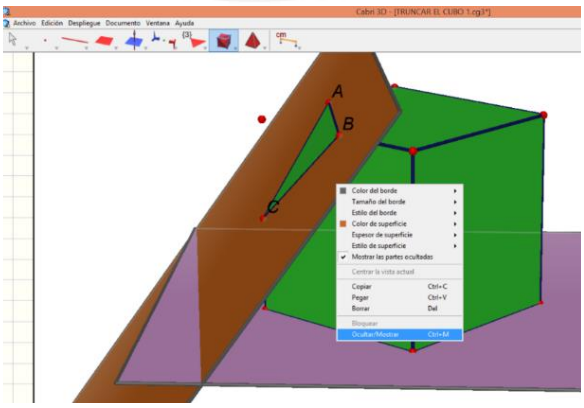


Figura 13. Recorte de poliedro 2

1.1.2. Justificación

La presente investigación surgió de la preocupación al observar en nuestra práctica docente, como profesor de matemática, que los contenidos de geometría, y en particular los de geometría espacial, son relegados para el final del año escolar. También el hecho de observar que en la enseñanza de sólidos geométricos solo se utilizan fórmulas sin enfatizar su proceso de construcción y análisis de los mismos.

Además, observamos que el estudio de los sólidos arquimedianos en general, y el del cubo truncado en particular, no son considerados explícitamente como contenido en la educación básica regular (EBR). Creemos que las razones pueden ser, entre otras, el escaso conocimiento que tiene los profesores respecto a este objeto matemático, el desconocimiento de alguna herramienta de geometría dinámica que permita construir la representación de este objeto matemático, la falta de una propuesta didáctica para su enseñanza, o el no estar explícitamente mencionado en el Diseño Curricular Nacional (DCN 2009).

Sin embargo, de manera algo contradictoria constatamos que en los textos del Ministerio de Educación de cuarto grado de secundaria (13 -16 años), existen orientaciones metodológicas para el docente donde abordan el estudio de los sólidos arquimedianos; así como fascículos de geometría del Ministerio de Educación que presentan el estudio del mismo objeto.

Consideramos que es pertinente entonces estudiar el cubo truncado a partir de su construcción (cortes realizados al cubo) en el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, ya que construir la representación de este objeto matemático direccionará que los estudiantes movilicen diversas nociones geométricas como tetraedro, pirámide, polígonos regulares e irregulares, teorema de Pitágoras, proporcionalidad, circunferencia, entre otros. Es así, que creemos que los estudiantes desarrollarán capacidades como la matematizar, visualizar, aprehender y otras, las cuales ponen en práctica en el momento de la construcción y del análisis del cubo truncado.

De la misma manera, consideramos relevante el estudio del cubo truncado en el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, ya que como lo señala el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) “se relaciona con el análisis de las propiedades, atributos y relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones; así como la visualización de objetos tridimensionales desde distintas perspectivas” (p.138). Además, el estudio del cubo truncado y el proceso intuitivo para encontrar su volumen está relacionado con la competencia de resolución de problemas, la que establece: “Resuelve problemas que involucran el cálculo de volúmenes de poliedros: prisma, cilindro, cubo y pirámide” (DCN, 2009, p.332).

También el uso de ambiente del Cabri 3D, para construir el cubo truncado, va de la mano con lo señalado en los Mapas de Progreso del Aprendizaje (2013), que en el nivel "destacado" en geometría, describe: "Construye y representa formas bidimensionales y tridimensionales compuestas aplicando relaciones entre propiedades de las formas y generaliza los procesos seguidos para su construcción" (p.9).

Además, nuestra investigación no es ajena a los requerimientos de evaluaciones internacionales, como el *Programme for International Student Asseessment* (PISA), en las que los estudiantes peruanos entre 15 y 17 años de edad participan cada tres años, ya que el estudio del cubo truncado por medio del ambiente del Cabri 3D permite: "Comprender modelos, propiedades, posiciones, orientaciones y representaciones de los objetos. Codificar y decodificar la información visual y la interacción dinámica con formas reales así como emplear la visualización espacial y la medición" (Informe Nacional en el Perú del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes PISA, 2012, p.15).

Esta afirmación se refuerza con lo señalado en Los Principios y Estándares para la Educación Matemática (2003) de la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), que afirma:

> En los programas que han adoptado las recomendaciones de los Principios y Estándares, los alumnos de los niveles medios habrán explorado y descubierto relaciones entre figuras geométricas, usando frecuentemente programas de geometría dinámica basándose en las características de los polígonos y poliedros. (p.313).

En la investigación, el estudio del cubo truncado y su incorporación en el Currículo Nacional Peruano tiene como antecedente principal lo señalado por Almeida (2010),

> **[…]** Por tanto, tomamos como eje, presentar una posibilidad para la enseñanza y aprendizaje de los sólidos arquimedianos y su inclusión en la Educación Básica por medio del ambiente de Geometría Dinámica Cabri 3D combinada con la historia como fuente generadora de aprendizaje. (p.177). (traducción nuestra)

Por las razones expuestas, consideramos importante el estudio del sólido arquimediano cubo truncado por medio del Cabri 3D, el cual permite realizar construcciones de este tipo mediante truncaturas (cortes que se realizan a nuestro objeto matemático).

En base a nuestras justificaciones, planteamos nuestro problema de investigación.

1.2. Problema de investigación

En esta parte, planteamos el problemas que motivo nuestra investigación, luego la consolidamos a través de la pregunta de investigación. Por último, planteamos nuestro objetivo general y los específicos que guiarán el derrotero de nuestro trabajo.

Planteamiento del problema de investigación

El objeto matemático cubo truncado no es materia de estudio en la educación básica regular del nivel secundario en el Perú; no por disposición del profesor de aula, sino porque no es considerado en los documentos oficiales del Ministerio de Educación como el Diseño Curricular Nacional DCN (2009) vigentes hoy en día. Ello, a pesar que su estudio tiene mucha importancia para el estudiante en el sentido que permite movilizar diversos contenidos como: teorema de Pitágoras, circunferencia, tetraedro, cubo, pirámide, polígonos regulares e irregulares, entre otros.

Así, mostramos en nuestros antecedentes la importancia de este contenido, sobre todo porque permite consolidar conocimientos de geometría plana y espacial los cuales ya mencionamos.

Por otro lado, los estudios plasmados en los antecedentes sustentan que el Cabri 3D contribuye a realizar este tipo de investigación mediante construcciones y ello permite al estudiante movilizar también otros procesos cognitivos como la conceptualización y visualización asociadas a las aprehensiones dentro del registro figural. Por ello, nos interesa realizar el estudio del cubo truncado a partir de su representación por medio del Cabri 3D.

De la formulación de nuestro problema, planteamos entonces nuestra pregunta de investigación:

1.2.1. Pregunta de investigación

¿Cómo estudiantes de quinto grado de educación secundaria articulan las aprehensiones del registro figural cuando movilizan nociones de geometría en la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D?

1.2.2. Objetivos

Objetivo general

Analizar la articulación de las aprehensiones del registro figural en estudiantes de quinto grado de educación secundaria cuando movilizan nociones de geometría en la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D.

Del objetivo general planteado, formulados los siguientes objetivos específicos:

Objetivos específicos

- Identificar las aprehensiones perceptiva, secuencial y operatoria del registro figural cuando realizan construcciones con el Cabri 3D y movilizan nociones de geometría.
- Identificar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva del registro figural, en los estudiantes, cuando movilizan nociones de geometría en la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este apartado, puntualizaremos los aspectos alusivos tanto a nuestro enfoque de investigación, a nuestro marco teórico y a nuestra metodología. Es decir, la investigación con el enfoque cualitativo, que es el que utilizaremos en nuestro trabajo, aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y aspectos de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.

En primer lugar, pasamos a sustentar nuestro enfoque de investigación, el cual se enmarca dentro del tipo cualitativo.

2.1. Investigación cualitativa

Según Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010), la investigación con el enfoque cualitativo es aquella que se basa en una lógica y, proceso inductivo en el momento de realizar el estudio de un fenómeno. También manifiesta el autor que en este enfoque los métodos de recolección de datos no son estandarizados ni predeterminados. En otras palabras, no se efectúa una medición numérica (como en el enfoque cuantitativo). El análisis no es estadístico.

En este tipo de investigación, se describen situaciones, eventos, interacciones y conductas observadas de los individuos sujetos de la investigación. Estas observaciones se realizan en sus ambientes naturales y cotidianos (enfoque naturalista) con la intención de evaluar el desarrollo natural de los sucesos sin pretender manipular la realidad.

Por otro lado, Martínez (2006) expresa que el enfoque de investigación cualitativo es aquel que pretende estudiar el todo integrado, de algo que constituye una unidad de análisis, y que hace que ese algo sea como es (una persona, una entidad social, un producto, etc.). En ese sentido, el escritor agrega que la investigación cualitativa trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades y su estructura dinámica aquella que da razón completa de su comportamiento y manifestaciones.

Por su parte, Taylor & Bogdan (1994), con respecto a la investigación cualitativa, precisan que ella es inductiva en donde los investigadores desarrollan conceptos y comprensiones que parte de los datos y no así en el simple recojo de datos para evaluar modelos o teorías pre determinadas. En otras palabras, el diseño de investigación cualitativo es flexible.

En este tipo de investigación, agregan, el investigador observa el escenario y a las personas desde una perspectiva holística. Es decir, que los individuos y los escenarios no son reducidos a variables, sino considerados como un todo.

Otra característica de la investigación cualitativa, precisan Taylor & Bogdan (1994), es que esta subraya la validez de la investigación más que la confiabilidad y la reproductibilidad de la misma, sin que ello signifique la falta de preocupación por la precisión de los datos obtenidos. Es así, que se afirma que es una investigación sistemática conducida por procedimientos rigurosos aunque no necesariamente estandarizados.

> La investigación cualitativa es un arte. Los métodos cualitativos no han sido tan refinados y estandarizados como en otros enfoques investigativos. **[…]** Se siguen lineamientos orientadores pero no reglas. Los métodos sirven al investigador, nunca es el investigador esclavo de un procedimiento o técnica. (Taylor & Bogdan, 1994, p.23).

Luego, Bogdan & Biklen (1994) refieren que la investigación científica implica un escrutinio empírico y sistemático basado en datos. En ese sentido, la investigación cualitativa llena estos requisitos, ya que ella es sistemática y rigurosa.

De igual modo, manifiestan que el enfoque cualitativo tiene como objetivos construir conceptos heurísticos; realizar la descripción de un fenómeno estudiado; comprender mejor el comportamiento y las experiencias humanas; y también intentar comprender el proceso por el cual las personas construyen significados y describen en qué consisten estos mismos significados. Los investigadores cualitativos, agregan los estudiosos, recurren a la observación empírica, porque de esa manera se puede intentar entender con más claridad y profundidad la condición humana.

A continuación, detallan las características que, según los investigadores, posee una investigación cualitativa en educación:

En primer lugar, la fuente directa de los datos es el ambiente natural y el investigador se constituye en el instrumento principal. Es así, entonces, que el investigador no puede divorciar un hecho, una palabra o un gesto de su contexto, porque ello significaría perder de vista el significado.

En segundo lugar, una investigación cualitativa es descriptiva; es decir, que los datos recogidos no son números sino palabras e/o imágenes; que además pueden incluir transcripciones, notas de campo, fotografías, videos, registros oficiales, etc.

En tercer lugar, declaran los estudiosos, que la investigación cualitativa se interesa por los procesos más que por los resultados o productos. Fortalecen su argumento y añaden que el énfasis en el proceso dentro de esta investigación en educación ha sido muy útil, ya que el investigador cualitativo debe concentrarse en observar como los estudiantes logran hacer “esto” o “aquello” en una actividad (comportamientos, actitudes, intereses, etc.).

En cuarto lugar, en la investigación cualitativa se analizan los datos de forma inductiva. Dicho de otro modo, en este enfoque no se recogen los datos con el objetivo de confirmar o rechazar una hipótesis dada previamente, sino que a medida que los datos se agrupan se realizan las abstracciones. Bogdan & Biklen (1994), respecto a este tipo de investigación, afirman que “…una teoría desarrollada de este modo, procede de “abajo hacia arriba” (en vez de “arriba hacia abajo”), con base en muchas piezas individuales de información recogida que son inter-relacionadas” (traducción nuestra. p. 50).

Ellos relatan que el análisis de los datos es como una especie de embudo, ya que las cuestiones se encuentran abiertas en un inicio, y cada vez se van tornando más cerradas y específicas en la parte final.

Por último, en una investigación cualitativa, declaran los autores, el significado es de importancia vital. En otras palabras, los investigadores cualitativos están interesados en el modo como las personas o sujetos de estudio dan sentido a sus vidas.

En la misma línea de pensamiento, Borba & Araujo (2004) respecto a la investigación cualitativa en educación matemática, establecen su acuerdo con Bogdan & Biklen respecto a las características que presenta ella. Luego, aclaran que la metodología que envuelve este tipo de investigación, en educación matemática, debe ser coherente con la visión de la educación que se tiene y, con el conocimiento que este posee. Dicho de otro modo, lo que el investigador conciba como matemática y educación matemática y como este conocimiento es producido (transmitido o descubierto) es fundamental y ejerce además una enorme influencia en los resultados del trabajo de investigación. Con ello, se rebate la idea aquella que la investigación consiste en hacer una lista de procedimientos destinados a recolectar datos, que luego serán analizados por medio de un marco teórico establecido anticipadamente para responder a una pregunta dada previamente.

En razón a lo escrito en los párrafos precedentes, afirmamos que nuestro estudio está enmarcado dentro del enfoque cualitativo, ya que es una investigación en educación matemática y, además, nuestro trabajo guarda relación con lo declarado por los autores respecto a este tipo de investigación.

Es así, que nuestra tesis presenta las siguientes características que la vincula con este enfoque investigativo: es un trabajo cuyo proceso es inductivo, ya que pretendemos explorar y descubrir qué sucede cuando realicemos el estudio del cubo truncado con estudiantes de secundaria; además, nuestra recolección de datos no es estandarizada ni tampoco nuestro análisis pretende ser de tipo estadístico, sino más bien de tipo descriptivo; por otro lado, la parte experimental se va a desarrollar en los ambientes naturales de los estudiantes tal como son, sin tratar de modificar algún aspecto de él.

Debemos añadir que aquí se procura desarrollar una interpretación de las acciones de los estudiantes al realizar la parte experimental y, a su vez, entender el porqué de las acciones en cada actividad señalada. Nuestro estudio no parte de una hipótesis previa ni de una teoría establecida anticipadamente, sino que, en concordancia con nuestro objetivo de investigación, se adecuaron la teoría y la metodología pertinentes. Por estas razones, enmarcamos nuestro trabajo en el enfoque cualitativo de la investigación.

Ahora pasamos a exponer los aspectos que consideramos pertinentes de la Teoría de Registros de representación Semiótica para realizar nuestro estudio en la construcción del cubo truncado.

2.2. Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

En esta sección, presentamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica con los que trabajaremos nuestra investigación. Los aspectos que presentamos de la teoría de Duval están encaminados principalmente a conocer las aprehensiones dentro del registro figural.

Duval (2004a) afirma que el aprendizaje de las matemáticas permite el análisis de actividades cognitivas como la conceptualización, razonamiento, resolución de problemas y comprensión de textos. Estas actividades a su vez requieren la utilización de variados sistemas de representación, tales como: sistemas de escritura de los números, notaciones simbólicas, escrituras algebraicas y lógicas, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Los aspectos teóricos a considerar en nuestra investigación están relacionados con la representación, registros de representación semiótica, tratamiento, conversiones y las aprehensiones del registro figural. A continuación presentamos cada uno de estos aspectos.

Representación

Duval (2004a) asegura que no hay conocimiento que algún individuo pueda movilizar si es que no existe una actividad de representación. En ese sentido, el estudio de la actividad de representación ha sido el foco de interés de investigadores cuando se han abordado estudios sobre la representación de un objeto matemático.

Así también, el autor hace referencia a los momentos dentro de la historia donde se ha presentado la noción de representación. Es así, que afirma que son tres las oportunidades donde este concepto se presentó. En primer lugar, hacia los años 1924-1926 con los trabajos de Piaget, donde presenta la representación como "representación mental", la cual se entiende como "evocación de objetos ausentes"; es decir, como un proceso de interiorización mental de objetos que no están presentes. En segundo lugar, la noción de representación aparece en los años 1955-1960 y se presenta como una "representación interna o computacional"; es decir, como codificación de la información que viene del exterior y el individuo interioriza. En tercer lugar, se presenta la noción de representación en los años 1985 y aparece como "representación semiótica". Esta definición surge en relación a la adquisición de conocimientos matemáticos, debido a los problemas en el aprendizaje de las matemáticas.

El investigador refiere que esta "representación semiótica" tiene su característica especifica en el empleo de un sistema particular de signos como son: lenguaje, escritura algebraica, gráficos cartesianos, etc., y además, que éste sistema particular de signos (sistema semiótico), puede "convertirse" en representaciones equivalentes expresados mediante otro sistema semiótico. Es decir, los sistemas semióticos están formados por representaciones semióticas.

En ese sentido Duval (2012a) introduce los términos de semiosis y noesis; y afirma que la *semiosis* es la producción de una representación semiótica y la *noesis* es la aprehensión conceptual de un objeto. Afirma también, que no puede haber *semiosis* sin *noesis*. Además, el investigador manifiesta que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos como por ejemplo: una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica o un gráfico; todos ellos son ejemplos de representaciones semióticas en sistemas semióticos diferentes.

También el autor hace referencia que las representaciones semióticas son consideradas por otros autores como un medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación; es decir, que dichas representaciones semióticas se tornan visibles o accesibles a otras personas por medio de las representaciones.

Según Duval (2012a), esta afirmación no es del todo cierta, ya que las representaciones en sí son también esenciales en la actividad cognitiva del pensamiento y desempeñan un papel primordial en el desenvolvimiento de las representaciones mentales; en la realización de diferentes funciones cognitiva (objetivación y tratamiento); y en la producción de conocimientos, ya que se puede representar un mismo objeto de diversas maneras. Por lo tanto, el investigador explica que no se puede subordinar las representaciones semióticas a las representaciones mentales.

También afirma que las representaciones semióticas no son importantes solamente para exteriorizar las representaciones mentales, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma e indica que no todo sistema semiótico cumple las tres actividades cognitivas que son las de formación, tratamiento y conversión. Es así, que por ejemplo los códigos morse, o las señales de tránsito pueden ser sistemas semióticos pero al no permitir las tres actividades cognitivas señaladas no pueden denominarse registros de representación semiótica.

En base a lo descrito, pasamos a exponer lo que en términos de Duval es un registro de representación semiótica.

Registros de Representación Semiótica

El autor afirma que para que una representación semiótica sea un registro de representación semiótica debe cumplir tres funciones cognitivas fundamentales ligada a la *semiosis*: formación, tratamiento y conversión. A continuación presentamos las tres funciones cognitivas:

- **Formación de una representación:** De acuerdo con Duval (2004a, 2012a), está constituido por un conjunto de marcas perceptibles y que son identificables como representación de alguna cosa en un sistema determinado, como por ejemplo: el enunciado de una frase (comprensible en una lengua natural dada), la composición de un texto, el diseño de una figura geométrica, elaboración de un esquema, expresión de una fórmula, etc.

Así mismo, el autor indica que la formación debe respetar ciertas reglas (como las gramaticales para la lengua natural, reglas de formación en un sistema formal, barreras de construcción para las figuras, etc.). Dichas reglas van a cumplir dos funciones: por un lado, el asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento de la representación; y por el otro, asegurar la posibilidad de su utilización para los tratamientos.

- **Tratamiento:** El autor afirma que es la transformación de una representación en otra equivalente. En ese sentido el tratamiento es “Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que pueden constituir una ganancia de conocimientos en comparación con las representaciones iniciales” (Duval 2004a, p.30).

Estas reglas de tratamiento son propias de cada sistema (transformación interna) la naturaleza y el número de estas reglas pueden variar de un sistema a otro. Estas reglas de las que se hablan pueden ser: reglas de derivación, reglas de coherencia temática, de similitud. etc.

Duval (2004a, 2012a) menciona, por ejemplo, que el parafraseo y la inferencia son formas de tratamiento en sistema semiótico de lengua natural y que la reconfiguración es un tratamiento propio de las figuras geométricas.

- **Conversión:** La conversión de una representación, según el investigador, es la transformación de ésta representación en otra representación. Esta última representación va a conservar todo o parte del contenido que tenía la representación inicial (transformación externa).

Luego de haber explicado las tres actividades que definen a un Registro de Representación Semiótica, debemos señalar que el investigador afirma que es esencial en la actividad matemática movilizar diferentes registros (figuras, gráficos, escrituras algebraicas, lengua natural, etc.). El movilizar diversos registros establece, según el investigador, dos condiciones: primero, que es una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones; y segundo, que estos objetos matemáticos puedan también ser reconocidos en cada una de sus representaciones.

Es así, que el autor menciona que es en éstas dos condiciones que una representación funciona verdaderamente como tal; es decir, que da acceso al objeto representado. Así mismo, añade que la coordinación de los registros de representación semiótica permite la aprehensión conceptual del objeto matemático; dicho de otro modo, que el estudiante llega a comprender las características, propiedades y todo aquello relacionado con el objeto en estudio.

Una vez descrita las condiciones que debe cumplir un sistema semiótico determinado, para ser considerado un registro de representación semiótico, pasaremos a mencionar los tipos de Registro de Representación Semiótica. Asimismo, el autor establece que en matemáticas se movilizan cuatro tipos de registros de representación divididos en dos bloques:

Registros discursivos: son aquellos que utilizan una lengua y en ellos se puede formular proposiciones o transformar expresiones. Dentro de los registros discursivos están: ***el registro de lengua natural*** y ***el registro algebraico***

Registros no discursivos: son registros que muestran formas, configuraciones de forma y organizaciones, dentro de ellas tenemos el ***registro figural*** y el ***registro gráfico.***

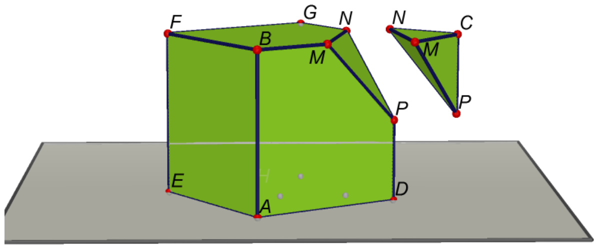
A pesar que en nuestra investigación vamos a centrarnos en el registro figural, es importante señalar que dentro de estos cuatro registros propuestos por Duval (2004a, 2012a) el registro de lengua natural merece una apreciación especial debido a que casi siempre está presente en toda actividad matemática.

Por ello, respecto al *registro lengua natural*, el autor refiere que este es considerado la organización semiótica por excelencia, y que en este registro se distinguen dos funciones: metas discursivas y discursivas.

Duval (2004b) afirma que las funciones metadiscursivas son comunes también a otros registros ya que la finalidad de esta función es la de comunicar una información. La función discursiva es aquella que establece cuatro condiciones: permitir designar un objeto, decir algo sobre el objeto (en forma de proposición enunciada), articular los enunciados en una unidad coherente y señalar el valor de la expresión por parte de quien lo enuncia.

El cuadro 1 muestra un ejemplo de Registro de Representación Semiótica del objeto matemático cubo cuando se le ha realizado la primera truncatura en el punto medio de cada arista.

Cuadro 1. Registros de Representación Semiótica

REGISTROS DE REPRESENTACION SEMIOTICA	
Lengua natural	**Figural**
Al realizar la truncatura del cubo ABCD-EFGH, en los puntos medios M, N y P de las aristas BC, GC y DC respectivamente, vemos que se extrae el tetraedro C-MNP. Además, en la esquina donde se realizó el corte, se observa el triángulo equilátero MNP.	

Ya que en nuestro trabajo de investigación realizamos el estudio del cubo truncado, creemos necesario centrarnos en el registro figural y las aprehensiones que en ese registro se realizan.

El registro figural

Duval (2004a) señala que en el curso de geometría en la educación básica secundaria de Francia (11-17 años de edad) se realiza en dos registros: el de las figuras y el de la lengua natural. El figural para designar las figuras, características y propiedades; y el de lengua natural enuncia las propiedades, teoremas, axiomas, hipótesis, etc.

Para entender en términos de Duval que es una ***figura,*** debemos partir por lo siguiente:

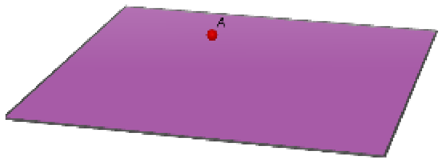
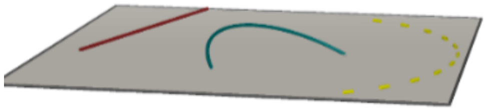
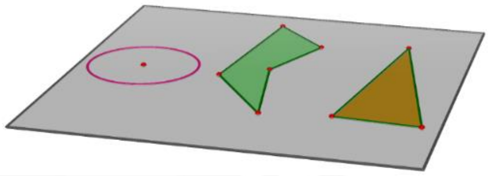
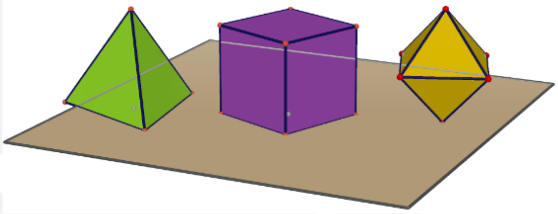
En primer lugar, el autor sostiene que para tener una figura es necesario que haya un contraste sobre un soporte material (hoja de papel, pantalla del computador, superficie de una pizarra, etc.) de manera que se pueda destacar alguna cosa (algo perceptible o identificable) en dicho soporte. Este “algo” es la implantación de una “mancha visible”, y esta implantación es percibida visualmente y está sujeto a variaciones visuales de dos tipos, según lo manifiesta el autor:

1. Variaciones ligadas al número de ***dimensiones***:
   Dimensión cero (0D): un punto, dimensión uno (1D): una línea recta, una línea curva, dimensión dos (2D): un área o superficie, dimensión tres (3D): un volumen.
2. Variaciones ***cualitativas***: variaciones de forma (línea curva o recta), variaciones de color, variaciones de sus dimensiones (longitud), de orientación, etc.

Cabe señalar que estas distinciones de acuerdo con el investigador van a permitir definir los ***elementos constitutivos de una figura.*** En ese sentido, toda figura aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones de estos tipos como son: dimensional y cualitativo. A partir de ahí es fácil determinar los elementos que funcionarán como ***unidades figurales elementales***.

El cuadro 2 muestra los elementos constitutivos de una figura asociadas a las variables dimensional y cualitativa.

Cuadro 2. Elementos constitutivos de una figura

Elementos constitutivos de una figura: variables dimensional y cualitativa	
Dimensión cero (0D)	
Dimensión uno (1D)	
Dimensión dos (2D)	
Dimensión tres (3D)	

Duval (2004a, 2004b, 2012a, 2012b), afirma que una figura es entonces siempre una configuración (dibujo) de al menos ***dos unidades figurales elementales***. Por ejemplo un cuadrado con su diagonal, un círculo y su centro marcado por un punto, o simplemente una figura como el cubo que es una unidad de dimensión tres podemos decir que está compuesta por seis cuadrados que son unidades de dimensión dos.

Según el autor, el registro figural es un tipo de representación no discursiva propia de las figuras geométricas, las cuales vamos a representar a través de configuraciones de formas 0D, 1D, 2D, 3D.

Por otro lado, señala el investigador que, el registro figural es un tipo de registro especial que va originar formas de interpretaciones autónomas. Dichas interpretaciones son denominadas ***aprehensiones*** y el autor define cuatro: la aprehensión perceptiva, la aprehensión discursiva, la aprehensión secuencial y la aprehensión operatoria.

Aprehensión perceptiva

Respecto a esta aprehensión, Duval (2004a, 2004b, 2012a, 2012b) menciona que es aquella en la que el sujeto de manera inmediata y automática percibe las formas de la figura diseñada en una determinada actividad matemática. Constituye un proceso intuitivo en donde el estudiante identifica las formas de la figura representada.

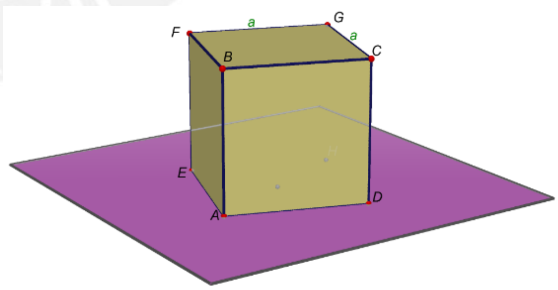
Además, señala que la aprehensión perceptiva de una figura sigue la ***ley de agrupamiento y continuidad para identificar formas*** **(ley gestaltista de cierre o de continuidad)**; es decir, dada una figura (organización de unidades figurales elementales), cuyas unidades figurales por ejemplo son trazos, la aprehensión perceptiva, señala el autor, permite destacar aquellos trazos que formen un contorno cerrado. Ella destacará como una figura sobre un fondo, dicho de otro modo, como formando un todo. Por ejemplo, un triángulo es percibido como una figura única; mas no como la unión de tres segmentos que comparten extremos dos a dos.

Este tipo de aprehensión es la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del estudiante y la primera en ser usada en su etapa escolar.

El investigador también añade que la aprehensión perceptiva destaca los indicadores de profundidad y de distancia; es decir, tamaño de la figura, superposición, inclinación respecto a un plano, número de dimensiones (2 o 3 dimensiones), etc.

A continuación, en el cuadro 3 observamos un ejemplo de la aprehensión perceptiva de un cubo.

Cuadro 3. Aprehensión perceptiva

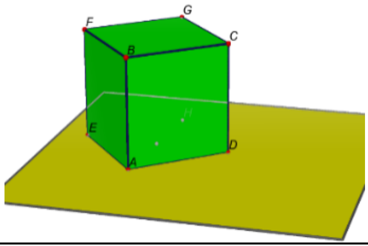
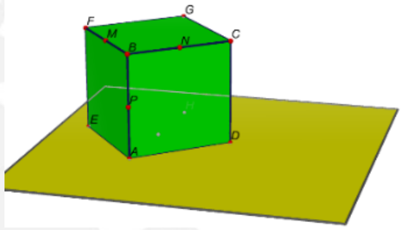
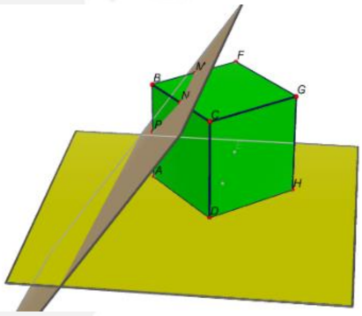
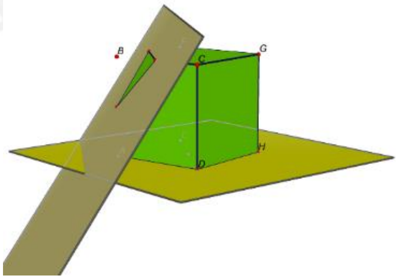
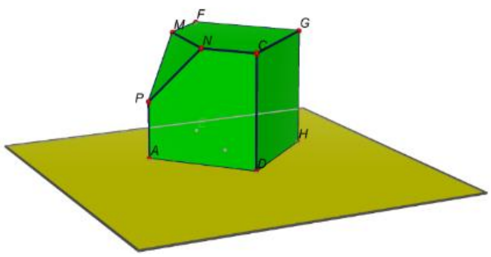
Aprehensión perceptiva de un cubo construido con Cabri 3D	
La figura representa un cubo ABCD-EFGH. Las aristas del cubo mide “a” unidades La cara BFGC es un cuadrado.	

Aprehensión secuencial.

Según Duval (2012a; 2012b), es aquella que es solicitada en actividades de construcción o en actividades de descripción, teniendo por objetivo la reproducción de una figura dada.

El autor señala que la aprehensión secuencial ***posee una estructura diádica***; es decir, considera los factores externos que intervienen en la construcción de una figura; así como el grado de congruencia entre las unidades figurales elementales posibles de construir y aquellas permitidas por los instrumentos utilizados. Así, presentamos el cuadro 4 que muestra la aprehensión secuencial de la truncatura de una esquina de un cubo por los puntos medios de las aristas que concurren en un vértice.

Cuadro 4.Aprehensión secuencial

Paso 1: Seleccione la herramienta "cubo" para construir el cubo ABCD-EFGH en el plano base del Cabri 3D.	
Paso 2: Con la herramienta "punto medio", ubicar los puntos medios M, N y P de las aristas BF, BC y BA respectivamente.	
Paso 3: Con la herramienta "plano", construir un plano que pase por los tres puntos medios creados M, N y P.	
Paso 4: Con la herramienta "recorte de poliedro" realizar el corte de la esquina marcada por el plano.	
Paso 5: Con el clic derecho del mouse elegir la opción "ocultar/mostrar" para ocultar el plano con el que se realizó el corte y el cubo quede de la forma mostrada.	

Aprehensión discursiva

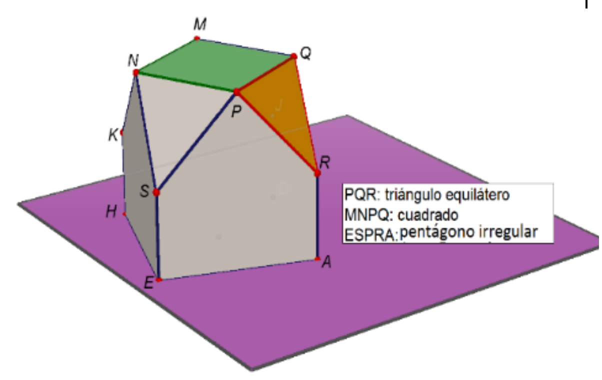
Según Duval (2004a; 2012b), no existe en geometría un dibujo que se represente a sí mismo. En otras palabras, no existe dibujo sin leyenda. Un mismo dibujo podría representar situaciones matemáticas distintas; y por lo tanto, servir de punto de partida para razonamientos distintos. Por esa razón, el autor afirma que es necesario realizar un anclaje entre una indicación verbal y la figura que representa a algún objeto matemático.

En palabras del estudioso, la aprehensión discursiva es aquella que permite una asociación entre una figura representada con afirmaciones matemáticas o enunciado matemáticos.

El investigador señala que para que exista la congruencia entre *figura y enunciado* es necesario restringir la aprehensión perceptiva a la discursiva, ya que una figura geométrica no muestra, a primera vista o a partir de sus trazos o formas, lo que un enunciado si puede hacer. Esta subordinación, según el autor, de la aprehensión perceptiva a la discursiva se puede denominar teorización de la representación figural. La figura geométrica se vuelve de alguna manera un fragmento del discurso teórico; este discurso teórico puede estar representado por afirmaciones, teoremas, axiomas, propiedades, etc.

El autor señala que la aprehensión discursiva es la que diferencia radicalmente las actividades de demostración de las de construcción. El cuadro 5 nos ofrece un ejemplo para la aprehensión discursiva.

Cuadro 5. Aprensión discursiva

Aprehensión discursiva de un poliedro formado por truncaturas de cuatro esquinas de un cubo a partir de los puntos medios de sus aristas con el Cabri 3D	
Podemos apreciar en la construcción lo siguiente: Los triángulos PQR, PSN y los otros dos de las caras laterales, son triángulos equiláteros. La figura MNPQ es un cuadrado de lado congruente con el lado de los triángulos equiláteros mencionados. La figura ESPRA es un pentágono irregular con m(SP)=m(PR), m(ES)=m(RA) y m(EA) la longitud de la arista del cubo inicial de lado congruente al del cuadrado mencionado.	

Aprehensión operatoria

Para Duval (2004a; 2012b) toda figura es posible de ser modificada de distintas maneras. Se puede separar de una figura las unidades figurales elementales que la componen en otras unidades figurales, homogéneas o heterogéneas.

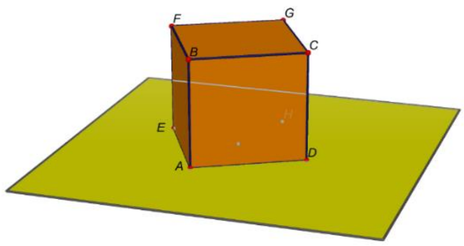
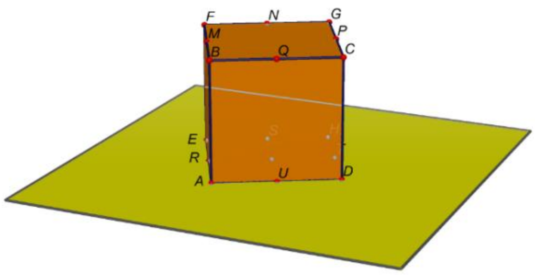
Se puede, de la misma forma, descomponer la figura en sub figuras; se puede agrandar o achatar la figura; se puede girar la figura, se puede trasladar la figura etc. Todas esas posibles modificaciones de la figura que no son de una misma naturales, según el autor constituyen la *productividad heurística de la figura.*

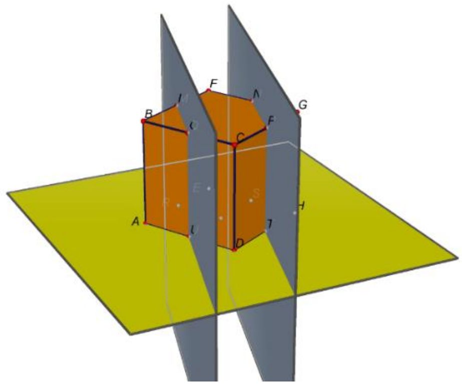
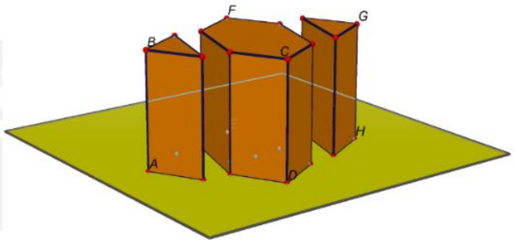
También afirma el autor que existen tres tipos de modificaciones que se pueden realizar a una figura: ***mereológica, óptica y posicional***. Pasaremos a explicitar en que consiste cada una de ellas.

Modificación mereológica es, según el autor, aquella modificación que se realiza con la operación denominada reconfiguración y consiste en reorganizar una o varias sub figuras (homogéneas o heterogéneas) diferentes de una figura dada en otra figura. Dichas modificaciones son consideradas como un camino heurístico para acceder a dar solución a un problemas planteado inicialmente. De la misma manera, la operación de reconfiguración se revela como una operación fundamental para una aprehensión matemática de las figuras.

En el cuadro 6 proponemos un ejemplo de dicha modificación en relación al cubo.

Cuadro 6. Modificación mereológica

Modificación mereológica del cubo representado en el espacio y construido con Cabri 3D	
Figura inicial: cubo ABCD-EFGH	
En la figura inicial se ubican los puntos medios M, N, P, Q y R, S, T, U de las aristas.	

Construimos dos planos paralelos, que pasen por los puntos medios señalados para poder realizar el corte en tres secciones del cubo inicial.	
La figura inicial (cubo) queda seccionada en tres partes, dos prismas triangulares y un prisma hexagonal.	

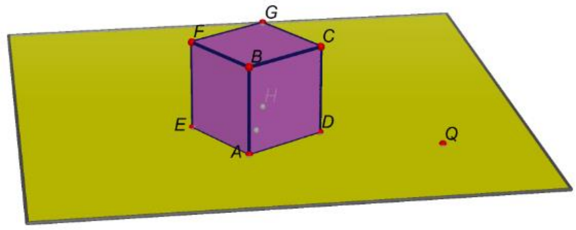
Fuente: Adaptado de Salazar (2009, p.85)

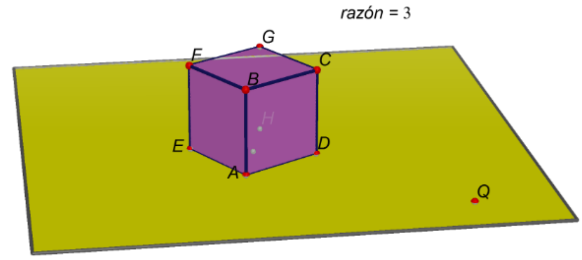
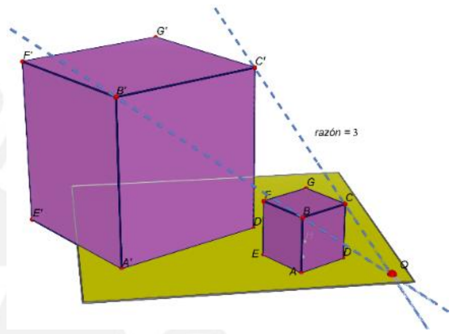
Modificación óptica, según Duval (2004a; 2012a) la modificación óptica es aquel tipo de modificación que sufre una figura cuando varían las dimensiones de sus unidades figurales sea 1D, 2D o 3D, sin variar su forma ni su orientación.

Para el estudioso es la operación que consiste en ver en "profundidad" dos unidades figurales de la misma forma y con la misma orientación pero cuyas dimensiones varían.

Esta operación está asociada al concepto de homotecia como "conservación de las relaciones de tamaño (ya definido según la RAE)". La herramienta del "arrastre", permitiría evidenciar este tipo de modificación, así también, la homotecia, tal como mostramos en el cuadro 7.

Cuadro 7. Modificación óptica

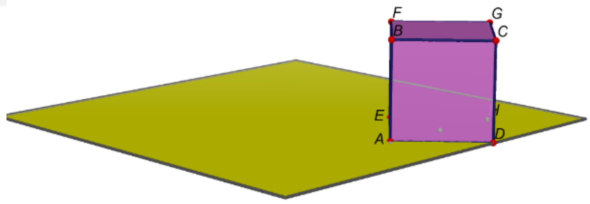
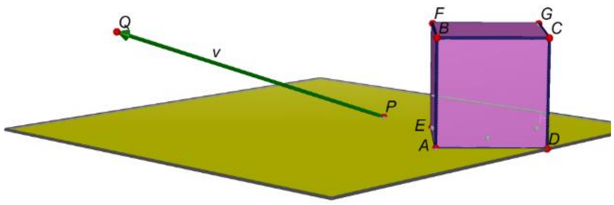
Modificación óptica de un cubo construido con Cabri 3D	
La figura inicial es el cubo ABCD-EFGH y el punto de homotecia "Q", definido en el plano base.	

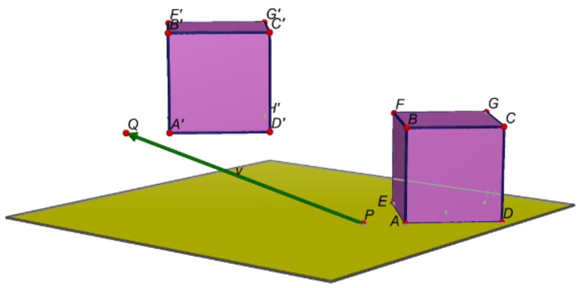
Se define la razón (3), es decir tres veces las dimensiones de la arista del cubo, para realizar la homotecia por dilatación.	
La figura inicial (cubo ABCD-EFGH) es transformada utilizando el punto Q y la razón 3, donde se obtiene la figura dilatada (cubo A'B'C'D'-E'F'G'H') en el triple de sus dimensiones en relación al cubo inicial.	

Fuente: Adaptado de Salazar (2009, p.85)

Modificación posicional, es según Duval (2012a), aquel tipo de modificación donde la figura conserva su tamaño y su forma, pero sufre variación en su orientación, rotación o traslación, tal como mostramos en el cuadro 8.

Cuadro 8. Modificación posicional de un cubo

Modificación posicional de un cubo construido con Cabri 3D	
La figura inicial es el cubo ABCD-EFGH	
Trazamos el vector "v" con el origen "P" en el plano base y el extremo "Q" en el espacio. Este vector va permitir trasladar el cubo inicial.	

Con la herramienta traslación, realizamos la modificación posicional del cubo inicial en dirección del vector "v".	

2.3. Aspectos de la Ingeniería Didáctica

En nuestra propuesta, adoptaremos la metodología de investigación cualitativa denominada *Ingeniería Didáctica,* y de ella tomaremos algunos aspectos. Los motivos para dicha elección se vendrán esclareciendo a medida que precisemos cada fase de dicha metodología. Pasamos a mostrar esos aspectos que se tomarán de ella.

Artigue (1995) declara que la ingeniería didáctica surge dentro de la didáctica de las matemáticas en los años ochenta en Francia. La ingeniería didáctica, como metodología de investigación, se caracteriza por ser un esquema experimental que sienta sus bases en las llamadas "realizaciones didácticas" en clase. Dicho de otra forma, en el proceso de enseñanza que está formada por secuencias didácticas donde se observa la concepción, realización, observación y el análisis de dichas secuencias de enseñanza.

Además, la autora agrega que se distinguen dos niveles de análisis, el de *micro ingeniería* y el de la *macro ingeniería*. Las investigaciones de micro ingeniería son las más sencillas de llevar a la práctica, ya que ellas permiten tener en cuenta de manera global la complejidad de los fenómenos de clase. Es decir, en este nivel el objetivo está enmarcado en el estudio de un tópico y se lleva a cabo en un salón de clase. Las investigaciones de macro ingeniería, por su lado, son más complejas, ya que estas están ligadas a los fenómenos asociados con la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, y no permiten distinguir de forma coherente los objetos de conocimiento. Sin embargo, a pesas que las investigaciones de macro ingeniería puedan presentar dificultades metodológicas e institucionales, estas se hacen indispensables.

En nuestro estudio del cubo truncado, pretendemos realizar una secuencia de actividades, las cuales van a contar con los cuatro elementos descritos por Artigue: concepción, realización, observación y el análisis al final de la aplicación en la parte experimental.

Todo ello, enmarcado en nuestro referente teórico que son los registros de representación semiótica, y, más puntualmente, en las articulaciones entre las distintas aprehensiones dentro del registro figural.

Por otro lado, nuestra investigación se encuadra dentro del nivel de *micro-ingeniería,* ya que se va a estudiar un determinado tema como es el caso del cubo truncado. Además, estudiaremos de manea local los fenómenos en un salón de clases.

2.4.Fases de la ingeniería didáctica

Artigue (1995) refiere que esta metodología en su proceso experimental distingue cuatro fases:

- Los análisis preliminares.
- La concepción y el análisis a priori
- La experimentación
- Análisis a posteriori y validación.

Los análisis preliminares

Dentro de los análisis preliminares, señala la autora, se enmarcan los análisis correspondientes al objeto matemático y este consta de los siguientes aspectos: análisis epistemológico de los conceptos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución y el análisis del campo de restricciones donde se va a realizar la acción didáctica efectiva.

En el presente trabajo, *el análisis epistemológico* estará referenciado al objeto matemático sólidos arquimedianos y específicamente al cubo truncado, en el presentamos el proceso histórico de su reconstrucción a partir de su hallazgo en el siglo XV y en las obras de Pappus y Kepler. También anunciamos la definición científica del cubo truncado de acuerdo a varios autores como Pogorélov, Lima, Rangel, Comwell, entre otros. En cuanto al segundo aspecto, debemos precisar que el objeto en estudio no forma parte del currículo en la educación básica, por tanto no lo tenemos presente en los textos del Ministerio de Educación.

Sin embargo, los estudios revisados como parte de nuestros antecedentes revelan que este objeto es factible de ser enseñado en las aulas. Contamos para ello con uno de nuestros principales antecedentes como es el de Almeida (2010) quien resalta la pertinencia de incluir este objeto en la educación básica. Y como parte de nuestra investigación se pretende apuntar ese derrotero con nuestro estudio.

En lo concerniente al *análisis de las concepciones de los estudiantes*, consideramos que al no ser materia de enseñanza en las aulas, este objeto matemático cubo truncado carece de dichas concepciones en los estudiantes. Lo que se puede verter como comentario es que en general el estudio de la geometría espacial ha estado encasillado a su enseñanza de la manera tradicional y sujeto al uso de algoritmos, tal como señalan algunos antecedentes de nuestra investigación.

Por último, en lo que compete al campo de restricciones, nuestro estudio se va a desarrollar en una institución educativa del nivel secundario, con estudiantes del quinto grado de secundaria quienes no poseen conocimientos previos del objeto de estudio; así como tampoco poseen conocimientos del Cabri 3D.

La concepción y el análisis a priori

En palabras de Artigue (1995) en esta fase el investigador tiene que trabajar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Estas variables son las que el investigador considera pertinentes en relación con el fenómeno en estudio.

La autora designa a estas variables como *variables de comando* y distingue dos tipos de ellas: las ***variables macro-didácticas o globales*** pertenecientes a la organización global de la ingeniería y, las ***variables micro-didácticas o locales*** relacionadas a la organización local de las situaciones didácticas de la ingeniería; es decir, la que corresponde a una secuencia de actividades para los estudiantes. En lo que respecta al análisis a priori, la autora manifiesta que el objetivo principal es determinar que las selecciones hechas (variables micro-didácticas) permitan controlar o encaminen los comportamientos esperados de los estudiantes.

Podría decirse que este análisis se basa en un conjunto de hipótesis y que consta de una parte descriptiva y otra predictiva que se diseña y se pretende llevar a los estudiantes.

En nuestra investigación, las variables macro-didácticas se precisarán en la parte experimental, en nuestra secuencia de tres actividades previstas para la construcción del cubo truncado con estudiantes del quinto de secundaria de una institución pública y con el auxilio del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D.

Asimismo, en coherencia con nuestros objetivos de cada actividad y con nuestras variables definidas, estableceremos los comportamientos esperados de los estudiantes del quinto grado de secundaria cuando construyen el cubo truncado y planteado en las actividades mencionadas.

Cabe señalar que estos comportamiento esperados están vinculados con nuestro referencial teórico, es decir plantearemos dichos comportamiento en coherencia con las aprehensiones que pretendemos que los estudiantes articulen dentro del registro figural y de acuerdo a los conocimiento que deseamos que estos movilicen. Por último, estos comportamientos esperados forman parte del análisis a priori y constituirán la base para realizar nuestra validación interna cuando lo confrontemos con nuestro análisis a posteriori.

La experimentación

En esta fase, según la Campos (2006), se pone en acción la secuencia didáctica con estudiantes. Asimismo, ella se inicia en el momento en que se da el contacto profesor/investigador/ observador con la población de estudiantes sujetos de investigación.

Esta fase, según el autor, supone la explicitación a los estudiantes de los objetivos y condiciones de la realización de la investigación; establecimiento del contrato didáctico; aplicación de los instrumentos de la indagación y contar con el registro de observaciones durante la experimentación.

En nuestro trabajo, a esta fase le corresponde la aplicación de nuestros instrumentos de investigación que consta de una secuencia de dos actividades asociadas a la familiarización con el Cabri 3D y a la construcción del cubo truncado. Cada una de las secuencia cuenta con objetivos planteados en la sección de las actividades.

La parte experimental la desarrollaremos con estudiantes del quinto grado de educación secundaria de una institución educativa pública. Existen elementos que aún no están declarados y que precisaremos más adelante.

Análisis a posteriori y validación

Artigue (1995) destaca que esta fase se basa en un conjunto de datos recogidos durante el proceso de la experimentación, a través de las observaciones, las secuencias de actividades, etc.

Estos datos se pueden complementar también con otros obtenidos en un tipo de experimentación llamada externa tales como: cuestionarios, entrevistas individuales o grupales aplicadas en distintos momentos de la enseñanza durante ella.

En esta fase, señala también la investigadora, se da la confrontación de estos resultados obtenidos producto de la experimentación, con aquellos comportamientos esperados (fase a priori) descritos anteriormente. Esta confrontación entre el análisis a priori y a posteriori constituyen la esencia de la validación de los comportamiento esperados planteados en el a priori.

En el trabajo que desarrollamos, el análisis a posteriori se evidenciará en el momento que confrontemos los comportamientos esperados, planteados en el análisis a priori, con los obtenidos en la parte experimental fruto de la aplicación de nuestra secuencia de dos actividades, anteriormente mencionadas, sobre la construcción del cubo truncado.

La descripción de los resultados obtenidos en la parte experimental en cada una de las dos actividades, guardarán relación estrecha con nuestro referencial teórico. En otras palabras, dicha descripción estará conectada las aprehensiones dentro del registro figural que se pretende que los estudiantes articulen en cada actividad.

Es por ello, que en el momento de la confrontación entre el a priori y a posteriori se tomará en cuenta en qué medida están se han cumplido a la luz de la teoría con la que hemos trabajado. En ese sentido la validación interna luego de dicha confrontación, se hará evidente.

2.5.Instrumentos

En nuestra investigación, en la aplicación de la parte experimental, la recolección de la información se realizará con el uso de los siguientes instrumentos.

Ficha de actividades: presentamos dos actividades, las cuales son: el Cabri 3D y construcción del cubo truncado. Los objetivos y la estructura de cada actividad están detallados en el capítulo de instrumentos.

La primera actividad está planificada para dos encuentros (180 min) y la segunda también para otros dos encuentros (180 minutos).

Ficha de observación: estas fichas serán elaboradas para cada uno de los tres observadores no participantes. En ella se establecerán los aspectos que deseamos que se observen cuando los estudiantes desarrollan las actividades programadas.

Filmación de video: a lo largo del desarrollo de las actividades, filmaremos el comportamiento que muestran los estudiantes al momento de realizar las actividades. Pretendemos evidenciar si realizan apuntes, preguntas o cualquier acción que sea relevante en nuestro análisis posterior.

Grabaciones de las pantallas del computador: ya que el trabajo que desplegarán los estudiantes al desarrollar las actividades serán con el Cabri 3D, pretendemos grabar todas las construcciones que los mismos realicen para evidenciar los comportamientos antes, durante y después de cada construcción.

CAPÍTULO III: OBJETO MATEMÁTICO

En esta sección, estableceremos la definición de nuestro objeto matemático cubo truncado. Pero antes de llegar a dicha definición, precisaremos otros conceptos sobre objetos matemáticos que merecen ser tomados en cuenta, tales como poliedros, poliedro cóncavo, poliedros regulares, cubo, sólidos arquimedianos o semirregulares, y otros términos como truncatura, que consideramos relevantes antes de presentar formalmente a nuestro objeto matemático.

3.1.Poliedros

El término poliedro, aunque pareciera tener una única definición, nos presenta en la realidad una interesante razón para investigar y consultar bibliografía referente a él. Es así, que mostraremos las definiciones planteadas por diferentes autores y, al final, precisaremos con cuál de ellas trabajaremos nuestra investigación y las razones para dicha elección.

Según Pogorélov (1974), antes de llegar a la definición de poliedro, debemos transitar por algunas definiciones como la de cuerpo. Es así, que el autor manifiesta que un *cuerpo* es un *recinto espacial cerrado*, de tal forma que entendamos como recinto a todos los puntos que pertenecen a una figura sea plana o espacial, pero sin considerar los puntos que forman su contorno. Un recinto será espacial y cerrado cuando además de los puntos que conforman dicha figura espacial, también se considere a todos aquellos puntos que forman parte de su contorno (ver figura 14).

En ese sentido, un poliedro, según el autor, es aquel cuerpo cuya frontera (puntos que forman su contorno de un recinto) consta de un número finito de polígonos.

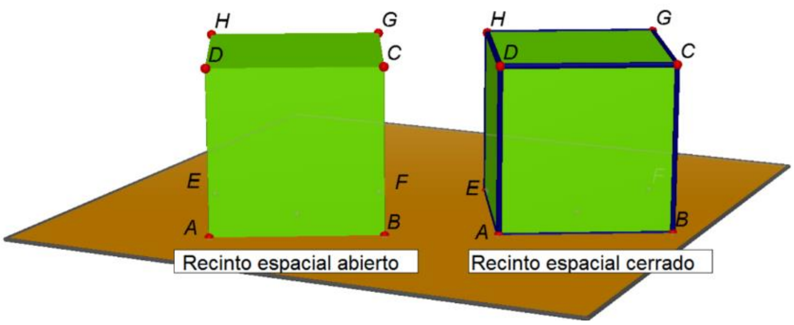


Figura 14. Ejemplo de recinto abierto y cerrado

Lima, Pinto, Wagner & Morgado (2000), definen el poliedro como sólidos formados por caras, siendo caras las partes acotadas de un plano. Otra definición que los autores brindan sobre el poliedro es aquella que lo define como la reunión de un número finito de polígonos planos llamados caras. También mencionan que cada lado de uno de estos polígonos es también lado de otro polígono; la intersección de dos caras cualesquiera es un lado común o un vértice o un conjunto vacío.

Alexander & Koeberlein (2013) sostienen que un poliedro es un sólido delimitado por regiones del plano, dicho sólido consta de caras formada por polígonos y los segmentos comunes a estos polígonos son las aristas.

Por otra parte, Rangel (1982) antes de realizar la definición de un poliedro precisa algunos términos como el de superficie, el cual considera como toda extensión en dos dimensiones o lugar geométrico de los puntos comunes a dos regiones tridimensionales. También nos menciona que una superficie es cerrada cuando envuelve total y únicamente un espacio tridimensional finito, por ejemplo la esfera, el cubo, etc.

Así mismo, el autor afirma que una superficie poliédrica es aquella figura geométrica que está formada por tres o más planos tales que no haya más de dos planos interceptándose en una misma recta. Con estas definiciones previas, el autor señala que un poliedro es toda superficie poliédrica cerrada, de tal manera que a cada lado de una cara le pertenece siempre como máximo dos caras.

Según Guillen (1997), un poliedro es un modelo cerrado formado por polígonos y que se ha establecido que estos polígonos se juntan de dos en dos.

De acuerdo a las definiciones establecidas, en nuestro trabajo de investigación consideraremos de aquí en adelante como poliedro a todo sólido limitado por polígonos a los que llamaremos caras. De la misma forma en nuestra investigación el término de poliedro convexo será el mismo que propone Pogorélov (1982) y Rangel (1982), los cuales a continuación brindamos.

Poliedro convexo

Según Pogorélov (1974), un poliedro es convexo cuando se encuentra a un lado del plano de cada una de sus caras.

Por otra parte Rangel (1982), señala que para distinguir que un poliedro sea convexo o no, nos debemos remitir a lo siguiente: en primer lugar tener en cuenta que un plano divide el espacio tridimensional en dos regiones (lo que comúnmente se conoce como semi planos), entonces ubiquemos al poliedro en cualquiera de esas dos regiones y verifiquemos si todo el poliedro se ubica dentro de esa región cualquiera sea la cara que pertenece al plano. Si esto sucede, entonces estamos frente a un poliedro convexo, es decir que el poliedro no es cortado por cualquiera de los planos de sus caras.

Otro término que es importante tener en cuenta es el de poliedros regulares o poliedros platónicos, ya que a partir de uno de estos es que construiremos nuestro objeto matemático cubo truncado.

Poliedros regulares

Se puede establecer que “el poliedro convexo se llama regular si sus caras son polígonos regulares de un mismo número de lados y si en todo vértice del poliedro converge un mismo número de aristas. Las caras del poliedro regular son triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares” (Pogorélov 1974, p.180).

El autor también señala, respecto a los poliedros regulares:

> Efectivamente, a partir del hexágono regular, los ángulos internos no son menores que 120° y, como quiera que en todo vértice del poliedro convergen como mínimo tres aristas, resulta que la suma de los ángulos planos del ángulo poliedro correspondiente a cualquier vértice del poliedro regular no sería menor que 3.120°=360°; pero esto es imposible pues la suma de los ángulos planos de cualquier ángulo poliedro convexo es menor que 360°. […] Si las caras del poliedro regular son triángulos regulares, en todo vértice del poliedro no pueden converger más de cinco aristas. […]Si las caras del poliedro regular son cuadradas, el número de aristas convergentes en todo vértice del poliedro no es mayor que tres y, por consiguiente, es igual a tres. […] Si las caras del poliedro son pentágonos regulares, en todo vértice también convergen tres aristas solamente. […] En todo poliedro regular son iguales todos los ángulos diedros. (pp.180, 181).

Lages, Pinto, Wagner & Morgado (2000), sobre los poliedros regulares, indican que son aquellos poliedros cuyas caras son polígonos regulares y en todos los vértices concurren el mismo número de aristas.

Por su parte Rangel (1982), menciona que un poliedro convexo es regular cuando este tiene todos los ángulos sólidos iguales entre sí (un ángulo sólido o ángulo poliédrico es aquel cuyo vértice es vértice del poliedro), y también sus caras son iguales. Además, en cualquier poliedro regular las caras son polígonos regulares, las diagonales son iguales y los ángulos diédricos son todos iguales (un ángulo diédrico es aquel formado por dos caras adyacentes de un poliedro).

El investigador realiza la clasificación de los poliedros regulares convexos, y es la que a continuación mostramos: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Según Guillen (1997), al referirse a los poliedros regulares menciona que no se sabe exactamente en qué época se conocieron; sin embargo, existe una tradición que le asigna a los pitagóricos el conocimiento de los cinco poliedros regulares.

El nombre alternativo de los poliedros regulares, es la de sólidos platónicos y, según Guillen (1997), se debe a que fue Platón quien cita a estos poliedros en el Timeo. Además, él asocia con el fuego, tierra, agua y aire a los cuatro poliedros regulares: tetraedro, cubo, icosaedro y octaedro respectivamente; el quinto poliedro regular dodecaedro lo asocia al universo.

Es así, que la autora nos brinda un recorrido rápido por los orígenes de estos cinco poliedro regulares. En cuanto a la definición que brinda de estos poliedros, afirma que los poliedros regulares son aquellos que cumplen algunas condiciones como: caras congruentes y regulares, vértices iguales y ángulos sólidos de igual medida.

Es así que para demostrar la existencia de únicamente cinco poliedros regulares, la autora precisa:

> Una prueba más en el estilo de lo que se entiende por demostración de que no puede haber más de 5 se basa en la fórmula de Euler y en alguna característica de estos poliedros. Así, si se supone que hay un poliedro regular con C caras, V vértices, A aristas, cada cara tiene n lados y los vértices son de orden m. Entonces $m \geq 3$, $n \geq 3$ y además:
>
> a) $C + V - A = 2$. La fórmula de Euler es cierta para todos los poliedros convexos.
>
> b) $2A = mV$, ya que de cada vértice salen m aristas – todos los vértices son del mismo orden – y cada arista sale de dos vértices y por lo tanto se cuenta dos veces.
>
> c) $2A = nC$, ya que cara tiene n aristas – todos los polígonos tienen n lados – y cada arista pertenece a dos caras, por lo tanto se cuenta dos veces.
>
> Sustituyendo b) y c) en a), operando y reordenando se llega a la expresión:
>
> d) $(2m + 2n - mn)A = 2mn$. De lo que se sigue que 2m +2n – mn debe ser positivo: es decir: 2m + 2n - mn > 0, es decir (m-2)(n-2) < 4.
>
> Esta última expresión disminuye las posibilidades considerablemente. Las únicas posibilidades para m y n son (3,3), (3,4), (3,5), (4,3) y (5,3) que corresponden a vértices de orden 3 y caras triángulos, cuadriláteros o pentágonos, vértices de orden 4 y caras triángulos, vértices de orden 5 y caras triángulos.
>
> […] con esta prueba si se demuestra la imposibilidad de que haya más poliedros regulares convexos distintos de los encontrados. Se demuestra la imposibilidad de que existan poliedros con caras hexágonos regulares, heptágonos regulares, etc. Con caras triángulos, vértices todos del mismo orden y un orden de los vértices superior a 5, y con caras cuadrados o pentágonos regulares, vértices todos del mismo orden y de orden superior a 3. En realidad se ha probado más de lo que se quería, pues solo se pretendía justificar que no había más poliedros regulares convexos. (p. 47)

De los cinco pares ordenados podemos, a manera de resumen, indicar que los tres primeros pares representan los vértices de orden tres (tres aristas concurren en dicho vértice) y caras triangulares, cuadrangulares y pentagonales (tetraedro, cubo y dodecaedro); el siguiente par representa un vértice de orden cuatro y de caras triangulares (octaedro); y el último par representa un vértice de orden cinco y caras triangulares (icosaedro).

De esta manera, Guillen (1997) demuestra que únicamente existen cinco poliedros regulares convexos o poliedros platónicos o simplemente sólidos platónicos.

Por otro lado, Villarreal (1912), en relación a los poliedros regulares, refiere que existe una esfera circunscrita a todos los vértices del poliedro, y cuando este es regular se puede imaginar otra esfera inscrita, donde se tienen planos tangentes que vendrían a ser las caras del mencionado poliedro regular. Además, ya que los poliedros regulares tienen sus aristas respectivamente iguales, entones equidistan del centro y; por lo tanto, se concibe una esfera inscrita a estas aristas.

Creemos conveniente también, definir el objeto matemático cubo que es uno de los cinco poliedros convexos regulares, ya que las truncaturas que se van a realizar para obtener el cubo truncado, van a ser a partir de este objeto matemático.

Cubo

Respecto a este objeto matemático, Pogorélov (1974) refiere: "… si las caras del poliedro regular son cuadrados, el número de aristas convergentes en todo vértice del poliedro no es mayor que tres y, por consiguiente, es igual a tres. El poliedro correspondiente es el cubo" (p.181).

Según Villarreal (1912), con respecto al cubo menciona:

> Es el triángulo isósceles, dice Platón, que engendra la cuarta especie de los cuerpos; estos triángulos son combinados por cuatro, de tal manera, que los ángulos rectos se unen en un tetrágono equilátero y seis de estos tetrágonos equiláteros, forman tres a tres ocho ángulos sólidos, la figura que resulta de esta composición es el cubo, cuyas bases son seis tetrágonos equiláteros; el cubo representa el elemento terrestre. (p. 6).

Cabe precisar que dentro de la definición que realiza el autor sobre el cubo, los términos que utiliza como el de ***tetrágono equilátero*** es referido al hecho de juntar cuatro triángulos rectángulo isósceles a través de sus vértices del ángulo recto, tal como se muestra en la figura 15. El autor al hacer referencia a triángulo isósceles es efectivamente al triángulo rectángulo isósceles del que hace mención.

Por ejemplo, según la figura 15, los cuatro triángulos ABM, BMC, CMD y DMA de la cara ABCD formarían el primer tetrágono equilátero que vendría a ser dicha cara del cubo.

Así, se tendrán 8 tetrágonos en el cubo, los cuales tres a tres forman un ángulo sólido, sumando un total de 8 ángulos sólidos.

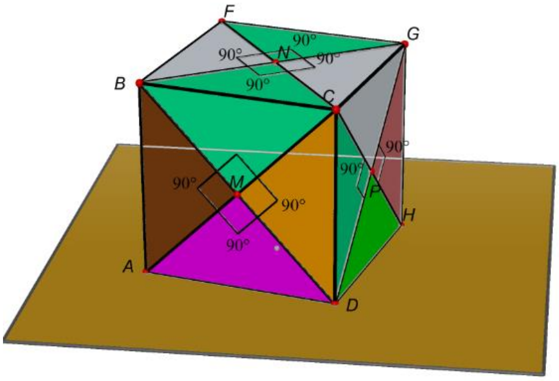


Figura 15. Cubo formado a partir de tetrágonos equiláteros

Por otro lado, según Guillen (1997), el cubo es uno de los cinco poliedros regulares que está formado de tres pares de caras paralelas dos a dos, con vértice de orden tres, y ángulos sólidos iguales. La investigadora define al cubo como la figura más familiar y sobre la cual se puede realizar algunos estudios como los que detallamos a continuación.

Un estudio que se realiza es respecto a las truncaturas (término que definimos más adelante). Es así, que si se realiza un corte en la esquina de un cubo se obtiene un triángulo, y si el corte es con el ángulo adecuado el triángulo sería equilátero. Esto se explica por el hecho que en el vértice del cubo concurren tres caras y por cada cara aparece un lado del polígono, por tanto el número de lados del polígono que se obtiene al cortar en su vértice es igual al orden de dicho vértice.

También la investigadora establece una interrelación de los poliedros platónicos, de modo que, el cubo y el octaedro pueden inscribirse el uno al otro, esto debido a que estos poliedros tienen las mismas simetrías (ver figura 16).

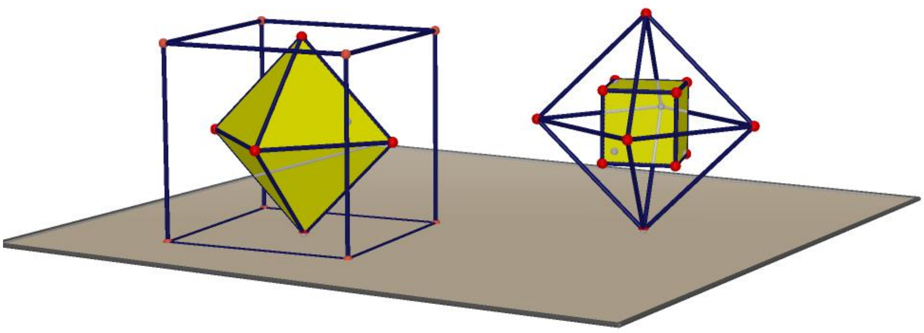


Figura 16. Dualidad del cubo
Fuente: Adaptado de Guillen (1997, p.91)

Operación de truncamiento

En esta sección, definiremos el término *truncamiento*, de acuerdo a lo que señala la Real Academia de la Lengua Española, la cual, en su primera acepción, dice: “cortar una parte de algo”.

Es así, que Almeida (2010) al respecto precisa que el truncamiento es un procedimiento matemático utilizado por artistas renacentistas para la obtención de once de los trece sólidos arquimedianos.

Por otro lado, la autora señala que dentro de la operación de truncamiento, podemos distinguir las truncaturas directas y las truncaturas modificadas. La primera se refiere a un truncamiento que se realiza directamente a un sólido platónico; la segunda, en cambio, es una truncatura que inicia como una directa seguida de transformaciones convenientes.

La investigadora manifiesta también que dentro de las truncaturas directas se pueden distinguir dos tipos de ellas.

Truncaturas de tipo 1: en este tipo de truncamiento, los cortes a los sólidos platónicos se realizan con planos que pasan por los puntos medios de las aristas del poliedro de partida que concurren en un vértice.

Truncaturas de tipo 2: en este tipo de truncamiento, según la autora, los cortes en las aristas del platónico de partida se realiza por planos a una distancia adecuada de cada vértice, de tal manera que en cada cara del poliedro de partida resulte un polígono regular.

En nuestra investigación, para la construcción del cubo truncado, utilizaremos la truncatura de tipo 2, ya que los cortes en las aristas del poliedro de partida (el cubo) se deben realizar en un punto de tal manera que al final resulten como caras triángulos y octógonos regulares.

Ahora, pasaremos a definir los sólidos arquimedianos en general y específicamente el objeto materia de nuestro estudio el cubo truncado.

3.2.Sólidos arquimedianos

En primer término, convendremos en nuestro estudio que el término sólidos arquimedianos es equivalente al de poliedros semirregulares, aunque los investigadores de acuerdo a sus concepciones se inclinen por uno u otro término indistintamente.

Nuestro objeto matemático cubo truncado, es uno de los trece tipos de los denominados sólidos arquimediano o poliedros semirregulares, y a pesar de que la información de este objeto es escaza, hemos hecho lo posible para conseguir la información necesaria en referencia a este objeto matemático.

Rangel (1982) clasifica a los poliedros en regulares y semi-regulares; dentro de los semi-regulares los subdivide en equiangulares y equifaciales. Los sólidos arquimedianos, (término que no emplea el autor), son llamados por él como poliedros semi-regulares equiangulares o poliedros semi-regulares arquimedianos. En relación a este tipo de poliedros, el investigador afirma que son aquellos cuyos ángulos sólidos o ángulos poliédricos son iguales entre sí, pero sus caras no son iguales, aunque estas son polígonos regulares. Respecto a ellos, afirma:

> Son todos los poliedros que tienen todos los ángulos sólidos iguales entre sí, pero las caras no son iguales, aunque sean polígono regulares. Aparecen agrupados en dos o tres géneros distintos. Cuando las caras son de dos géneros, los ángulos sólidos pueden ser triédricos, tetraédricos o pentaédricos, pero, si las caras son de tres géneros, los ángulos sólidos pueden ser triédricos o tetraédricos. Los poliedros semi-regulares equiangulares también son llamados poliedros semi-regulares arquimedianos. (p.37).

El autor afirma que existen 13 poliedros semi-regulares arquimedianos, de los cuales 10 de ellos tienen como caras dos tipos de polígonos, mientras que los otros dos están formados por tres tipos de polígonos. También afirma que la manera como estos poliedros arquimedianos se relacionan con los poliedros regulares es por medio de las truncaturas de los poliedros regulares. Así, tenemos un tetratroncoedro (truncatura de un tetraedro), seis cuboctatroncoedros (truncaturas en un cubo o un octaedro) y seis dodecaicositroncoedros (truncaturas de un dodecaedro o de un icosaedro)

También Almeida (2010) realiza un estudio sobre sólidos arquimedianos, en donde al tomar como referente a Eves menciona que los trabajos de Arquímedes sobre sólidos se desaparecieron al igual que gran parte de su obra. Lo que se pueda conocer de la obra de Arquímedes es gracias a los escritos de comentadores como Pappus (o Pappu) de Alejandría (290-350d.c). Pappus 1876 (citado en Almeida, 2010) sostiene:

> Aunque muchos solidos pueden ser diseñados teniendo todo tipo de caras, aquellos que parecen ser formados regularmente son más merecedores de atención. Estos incluyen apenas los cinco solidos de Platón […] pero también los sólidos en número de trece, que fueron descubiertos por Arquímedes y que contienen polígonos equiláteros y equiangulares, pero no son iguales. (p.353).

Así, la autora manifiesta que el estudio de los sólidos arquimedianos fue retomado en el siglo XV con Kepler, quién quizás fue el primero en sistematizarlo. También afirma que en el periodo del renacimiento muchos artistas y matemáticos se interesaron por su estudio.

La investigadora señala que en el libro de Piero della Francesca se descubren cinco sólidos arquimedianos obtenidos a partir de la eliminación de los cantos o esquinas de los sólidos platónicos. Así mismo, resalta que realizar cortes en un sólido requiere descubrir el punto en donde se efectuará dicho corte; y ello, implica cálculos.

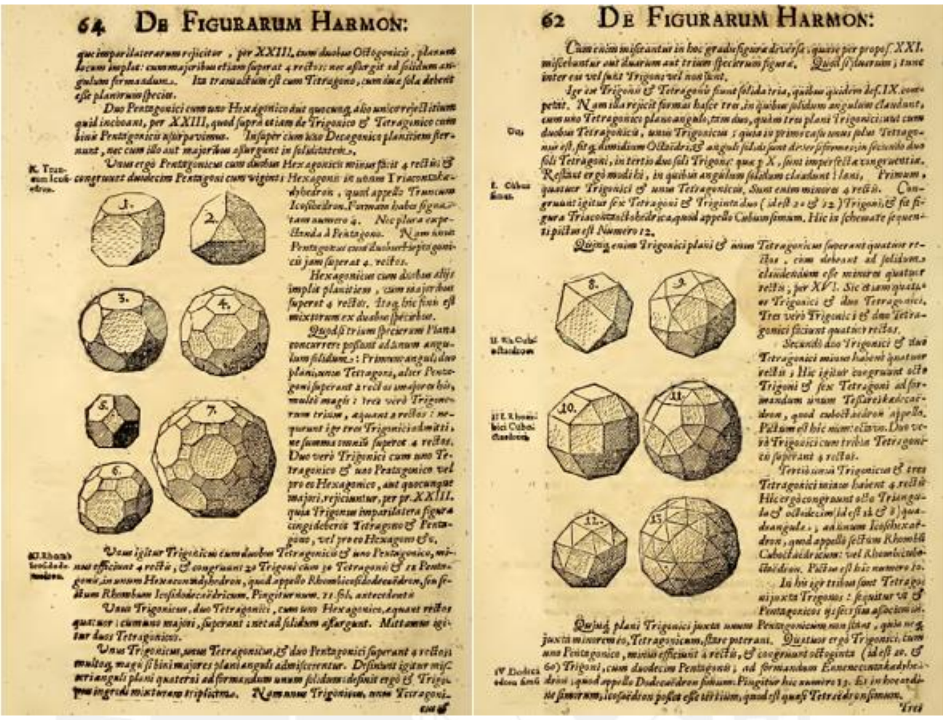


Figura 17. Sólidos de Arquímedes
Fuente: Kepler (1619, p.63)

También nos señala que Field hizo alusión a Piero della Francesca para indicarlo como el responsable de introducir los cinco sólidos arquimedianos: tetraedro truncado, cubo truncado, icosaedro truncado, dodecaedro truncado y octaedro truncado.

Por su parte, Villarreal (1912), en alusión a los poliedros semirregulares (nombre con el que se denomina también a los sólidos de Arquímedes), afirma que Arquímedes inventó los trece poliedros a los que Develey llama semirregulares. Además, respecto a ellos precisa:

> […] sino también las trece que inventó Arquímedes, terminadas por polígonos equiláteros y equiángulos pero no semejantes. El 1° es el octaedro que está terminado por cuatro triángulos y otros tantos exágonos. Después, tres de catorce caras, de los cuales: el primero está terminado por ocho triángulos y seis octógonos; el 2° por seis cuadrados y ocho exágonos; el 3° por ocho triángulos y seis cuadrados. Después dos de veinte seis caras, de las cuales el primero esa terminado por ocho triángulos y diez y ocho cuadrados; el segundo por doce cuadrados, ocho exágonos y seis octógonos. Después tres de treinta y dos caras de las cuales el 1° está terminado por veinte triángulos y doce dodecágonos; el 2° de doce pentágones y veinte exágonos y el 3° de veinte triángulos y doce pentágonos. Después uno de treinta y ocho caras, el cual consta de treinta y dos triángulos y seis cuadrados. A este le siguen dos de sesenta y dos caras, de las cuales el primero consta de veinte triángulos, treinta cuadrados y doce pentágonos; el segundo de treinta cuadrados, veinte exágonos y doce decágonos. Finalmente, el último es de noventa y dos caras, el cual está terminado por ochenta triángulos y doce pentágonos. (pp.8, 9).

El autor aporta respecto a este objeto al referir que, al partir de los cinco poliedros regulares o platónicos, se pueden obtener los trece semirregulares por medio de *truncaduras.*

Por último, Cromwell (1997) señala que en el V libro de su "Colección Matemática", Pappus atribuye el descubrimiento de 13 poliedros a Arquímedes. Pappus descubre las trece figuras, los ordena de acuerdo con el número total de caras, y lista la clase de caras que tiene cada poliedro (ver figura 18).

THE ARCHIMEDEAN SOLIDS

	Numbers of					
Faces	Triangles	Squares	Pentagons	Hexagons	Octagons	Decagons
8	4			4		
14	8	6				
14		6		8		
14	8				6	
26	8	18				
26		12		8	6	
32	20		12			
32			12	20		
32	20					12
38	32	6				
62	20	30	12			
62		30		20		12
92	80		12			

Figura 18. Composición de los sólidos de Arquímedes
Fuente: Cromwell (1997, p.81)

El autor menciona que aunque el propio informe de Arquímedes está extraviado, los trece poliedros son conocidos como los sólidos arquimedianos, aunque algunas veces son llamados poliedros semirregulares. También señala que fue durante el renacimiento, especialmente después de la introducción de la perspectiva en el arte, donde pintores y artista hicieron pinturas de los sólidos platónicos, y que para variar sus diseños cortaban las esquinas y los bordes de estos sólidos, produciendose naturalmente alguno de los sólidos arquimedianos como resultado. Este proceso de remover todas las esquinas de una manera simétrica es llamado *truncatura.*

Por último, Cromwell (1997) menciona que fue Kepler quien redescubrió los trece sólidos y les dio los nombres con los que ellos son conocidos hoy.

Una vez vertida las definiciones de los sólidos arquimedianos, brindaremos definiciones de nuestro objeto matemático cubo truncado, un tipo particular de sólido arquimediano, visto desde distintos puntos de vista de algunos investigadores a los que tuvimos acceso.

3.3.Cubo truncado

Villarreal (1912), respecto al cubo truncado, precisa que este pertenece a los trece inventados por Arquímedes, y que está determinada por ocho triángulos y seis octógonos; es decir por 14 caras. Además, que este poliedro semi-regular tendrá 24 ángulos sólidos y 36 lados. Por otro lado, afirma que esta poliedro se puede obtener por truncadura (cabe señalar que el autor utiliza el término *truncadura* en lugar de *truncatura*) partiendo del exaedro, y ya que esta poliedro regular tiene sus ángulos sólidos compuestos por tres ángulos planos, truncándolos se obtendrá secciones triangulares y generando lo que él llama caras primitivas que serían polígonos regulares con el doble del número de lados (octógonos).

Por otro lado, Rangel (1982) en su clasificación de los poliedros semi-regulares equiangulares, ubica al cubo truncado en el grupo que él denomina ***cuboctatroncoedros***, en virtud creemos de que para obtener dicho poliedro se toma como objeto de partida al cubo. Además, para el autor el cubo truncado tuvo un primer nombre antiguo denominado *Troncocubo*, y que luego se le asignó el nombre de *Triaotogonal*, para luego llamarse como lo conocemos ahora, *cubo truncado*. Cabe precisar que, el investigador no menciona el origen de estos términos ni como o en qué momento de la historia se llegaron a estos nombres o si simplemente es creación del autor.

Una identificación que se le asigna al cubo truncado es la siguiente: $8_3 - 6_8$. Esta nomenclatura se entiende la siguiente manera: el número 8 representa al número de vértices del poliedro de partida (el cubo) y su sub índice 3 al número de lados del polígono que se obtiene en cada vértice luego de realizar los cortes en sus esquinas, los cuales son triángulos equiláteros. Por otro lado, el número 6 representa al número de caras que tiene el poliedro de partida y su sub índice 8 al número de lados que posee el polígono formado en dichas caras al realizar los cortes al cubo en sus esquinas (octógonos regulares).

Además, Rangel (1982) señala que el cubo truncado (en nuestros términos) tiene 14 caras (8 triángulos y 6 octógonos), 36 aristas, 24 vértices, 120 diagonales, ángulos sólidos triédricos formados por un triángulo y dos octógonos y en cada vértice concurren tres aristas. Por otra parte, el investigador menciona que los poliedros semi-regulares se obtienen por truncaduras de poliedros regulares convexos.

En ese sentido, precisa que el cubo truncado puede obtenerse al truncar un cubo o un octaedro (ver figura 19); en el caso que el objeto de partida sea el cubo, las truncaduras en las aristas se tiene que realizar a una distancia de 0.294 del vértice más próximo a dichas aristas. Si el objeto de partida es un octaedro, la truncadura en los vértices de este objeto se tiene que realizar a una distancia de 0.586 de cada arista.

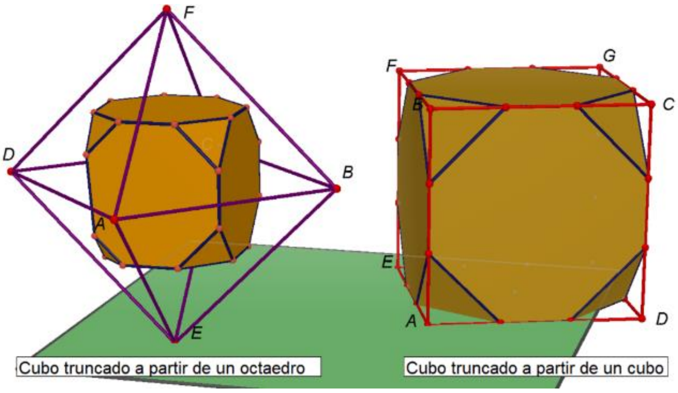


Figura 19. Cubo truncado a partir del octaedro y del cubo
Fuente: Adaptado de Cromwell (1999, p.84)

Sin embargo, Guillen (2010) realiza un estudio en donde refiere al cubo truncado (figura 20), como producto de cortes realizados en las esquinas de un cubo o poliedro de partida, y del cual se observa lo siguiente: por cada cara del poliedro de partida se obtiene un polígono regular con el doble del número de lados y en todos sus vértices se juntan tres caras.

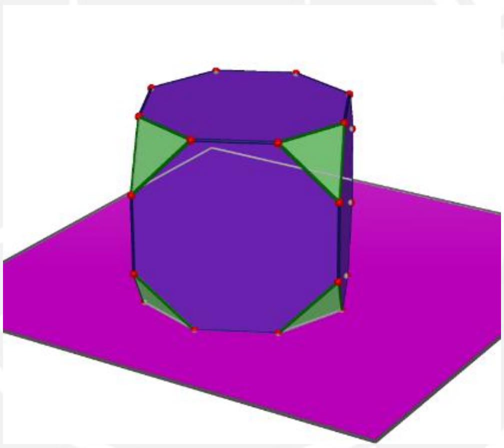


Figura 20. Cubo truncado
Fuente: Adaptado de Guillen (2010, p.60)

Además, las caras con menor número de lados están bordeadas por las caras de la otra clase y las que tienen mayor número de lados están bordeadas alternativamente por caras de ambas clases.

También Almeida (2010) refiere que el cubo truncado es un tipo de sólido arquimediano o semi-regular obtenido a partir de truncaturas de tipo 2 realizados en las aristas de un cubo; y así, caras octogonales y triangulares regulares son el resultado de dichas truncaturas. También manifiesta que Field menciona a Piero della Francesca como el primero que inventó el uso de cortes como un procedimiento matemático para formar sólidos arquimedianos.

Además, Almeida (2010) declara que para obtener las caras octogonales regulares del arquimediano cubo truncado a partir de las caras cuadradas del cubo, es necesario encontrar la distancia "d" entre el vértice y el punto de la arista del cubo en donde debe ser efectuada la truncatura, el cual, de acuerdo con la autora, es:

$d = \frac{a}{\sqrt{2}+2}$, siendo "a" la arista del cubo

Creemos conveniente plasmar el procedimiento matemático que la investigadora declara en su investigación, el cual justifica la obtención de la distancia "d" que va a ser el punto donde realizar los cortes en cada arista del cubo para obtener en las caras del cubo, que inicialmente son cuadradas, octógonos regulares.

Es así, que en la figura 21 se muestran la cara ABCD de un cubo y los puntos P_1, P_2,…P_8 que son aquellos donde se deben realizar los cortes. Por otro lado, "d" es la distancia entre un vértice y un punto de corte.

Ahora, en vista que deseamos obtener en dicha cara octógonos regulares, debemos notar que la distancia P_1P_2, que es igual a "a-2d", debe ser igual a la distancia P_1P_8. En ese sentido, en la esquina del vértice "A" podemos observar que se ha formado un triángulo rectángulo (recto en el vértice A) y mediante el teorema de Pitágoras podemos encontrar "d" en términos de la arista del cubo "a".

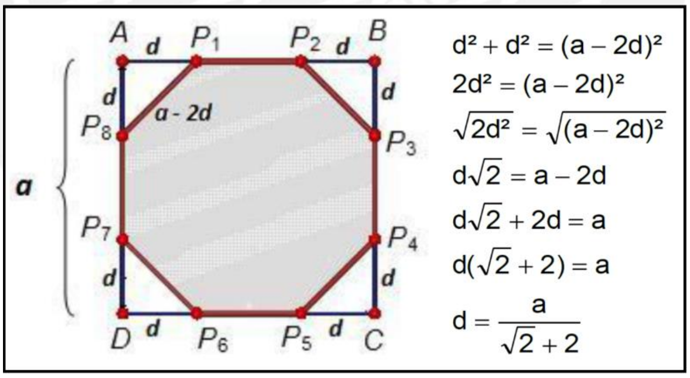


Figura 21. Puntos de corte en una cara del cubo
Fuente: Almeida (2010, p.134)

Sin embargo, la estudiosa resalta que esta distancia obtenida, como podemos evidenciar, es un número irracional. Por lo tanto, el punto de corte se va a encontrar a una distancia aproximada (sin ser exacta) del vértice más próximo.

Es así que, frente a esta situación, Almeida (2015) propone una técnica (en términos de Chevallard) para ubicar de manera exacta el punto de corte en cada arista del cubo.

La justificación para el uso de esta técnica es que la expresión obtenida $d = \frac{a}{\sqrt{2}+2}$, se puede racionalizar y obtener la siguiente expresión: $d = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .Entonces, como explica Almeida (2015) la expresión $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ no es sino la mitad de la diagonal de la cara del cubo.

Por lo tanto, si construimos una circunferencia con centro en un vértice del cubo y punto de paso el centro de la cara donde se pretende construir la circunferencia, el resultado es la obtención del punto de corte en dos de las aristas del cubo. La figura 22 nos muestra el modelo propuesto por la investigadora.

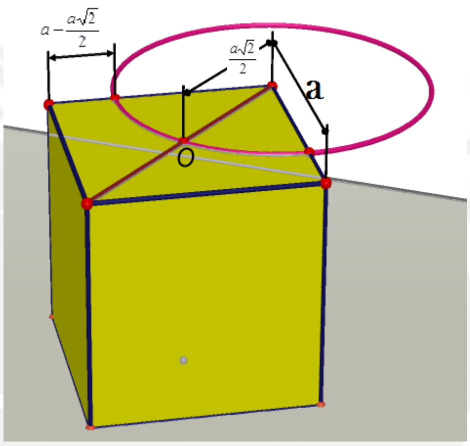


Figura 22. Ubicación del punto de corte en la arista del cubo
Fuente: Adaptado de Almeida (2015, P.164)

En ese sentido, creemos que ha sido importante describir la parte histórica de los sólidos arquimedianos, ya que nuestro objeto de estudio el cubo truncado pertenece al grupo de los mencionados 13 sólidos. Asimismo, es relevante conocer en qué momento surgieron estos objetos, en que momento desaparecieron y sobre todo quién o quienes los rescataron. Pensamos que es en la historia donde también radica la esencia para su estudio y conocimiento en la actualidad. De igual forma pensamos que es significativo para nuestra investigación definir adecuadamente nuestro objeto matemático cubo truncado; así como de los objetos asociados a su construcción como son los sólidos regulares y particularmente el cubo.

CAPÍTULO IV: EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo, presentamos la secuencia de las dos actividades que encaminaron a alcanzar los objetivos y responder la pregunta de investigación.

Las secuencias de actividades, para la construcción y estudio del cubo truncado, fueron diseñadas teniendo en cuenta aspectos de la investigación de Almeida (2015). En ella, la autora refiere que para la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D se puede utilizar dos técnicas (en términos de Chevallard), las cuales mencionamos a continuación: vía construcción geométrica y por transferencia de medida. En nuestro trabajo, utilizaremos la primera técnica.

4.1. Escenario de la investigación

Para la aplicación de la secuencia, se utilizó la sala de cómputo de la institución educativa "Huanta". Dicha institución, de nivel secundario, se encuentra ubicada en la provincia de Huanta, región de Ayacucho. En ella, los aproximadamente 300 estudiantes entre varones y mujeres que asisten se encuentran distribuidos en los cinco grados y principalmente el quinto grado de secundaria tiene tres secciones: A, B y C.

Por otro lado, esta es una institución de reciente construcción con una nueva infraestructura; y además, ha sido seleccionado para aplicar en ella la Jornada Escolar Completa (JEC). Es decir, los estudiantes asisten a sus clases hasta las 3:30 pm todos los días.

4.2. Sujetos de la investigación

La investigación se realizó con dieciséis estudiantes del quinto grado del nivel secundario (15 y 17 años de edad) de la Institución Educativa "Huanta", Ayacucho - Perú. Las tres actividades de la secuencia se trabajaron de manera individual en la sala de cómputo.

Para el análisis de la parte experimental seleccionamos tres estudiantes: Rosa, Semnia y Yaneth. La elección de ellas se debe a que lograron culminar las cinco sesiones. Por demás, los trece estudiantes restantes tuvieron dificultades de diversa índole por lo que no asistieron a todas las sesiones.

Además, del profesor investigador contamos con el apoyo de dos observadores no participantes (profesores de matemática de la institución).

4.3.Descripción de las actividades

El cuadro 9 muestra las actividades que se llevaron a cabo a lo largo de las cuatro sesiones programadas. En ellas, los estudiantes trabajaron en la sala de cómputo y en cada ficha respondieron las preguntas planteadas anotando sus observaciones.

Por otro lado, las construcciones que realizaron los estudiantes con el Cabri 3D fueron gravadas con el software Camptasia. Además, los observadores no participantes, anotaron en una ficha de observación los acontecimientos que se presentaron en el desarrollo de las actividades.

Cuadro 9. Título de las actividades

N° de sesiones	Actividad	Contenido
Dos sesiones	Actividad 1	El Cabri 3D
Dos sesiones	Actividad 2	Construcción del cubo truncado

Las dos actividades son secuenciales. Antes del inicio de la primera actividad se dispuso de 30 minutos para familiarizar a los estudiantes con el Cabri 3D y las herramientas que utilizaron en las construcciones.

La actividad 1 se realizó en dos sesiones; la primera dedicada a una construcción y la segunda a que los estudiantes respondan tres primeras preguntas. La actividad 2 también se realizó en dos sesiones; la primera para la construcción de los puntos de corte en las aristas y absolver cuatro preguntas; y la segunda para construir el cubo truncado y responder una última interrogante.

En las dos actividades, tuvimos la intención que los estudiantes desarrollen y articulen las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva; ya que la aprehensión secuencial en realidad va a estar presente como parte de cualquier construcción que el estudiante realice. De la misma forma, pretendimos que movilicen nociones de geometría que detallamos en nuestro análisis a priori.

De esa forma, el desarrollo de la secuencia completa nos llevó a cumplir los objetivos y responder nuestra pregunta de investigación.

4.4.Secuencia de actividades

Elaboramos una secuencia de actividades mediadas por el Cabri 3D en vista que nos permitió identificar la articulación entre las aprehensiones del registro figural cuando movilicen nociones de geometría durante la construcción del cubo truncado.

Al proponer la secuencia de actividades pensamos a priori que los estudiantes poseen conocimientos relacionados al cubo, puesto que de acuerdo con el Diseño Curricular Nacional (2009), los estudiantes culminan el cuarto grado de educación secundaria (14-16 años) con los contenidos de poliedros, prismas y cubos.

Por otro lado, como no están familiarizados con el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, las actividades presentadas tuvieron una parte introductoria para la familiarización con este ambiente.

La secuencia de las dos actividades presentó la siguiente estructura: la primera actividad que se realizó en dos sesiones consta de dos partes, las cuales están orientadas a la familiarización con algunas herramientas del Cabri 3D.

La segunda actividad que también se desarrolló en dos sesiones, estuvo dividida en cuatro partes, las cuales tuvieron por finalidad principal que los estudiantes utilicen la herramienta "recorte de poliedro".

El análisis de las construcciones realizadas por los estudiantes en las dos actividades, así como las respuestas de las ocho preguntas asociadas a dichas construcciones las formalizamos en tablas donde figurará el procedimiento y su análisis respectivo.

La secuencia de actividades que elaboramos se propone en el cuadro 10.

Cuadro 10. Secuencia de actividades

Actividad	Título	Objetivos	Nociones geométricas a movilizar
1	El Cabri 3D	Familiarizar a los estudiantes en el uso de ciertas herramientas del Cabri 3D necesarias para construir cubo truncado, identificar principalmente las aprehensiones secuencial, perceptiva y operatoria.	• Puntos en el plano y en el espacio • Posición relativa entre dos planos • Planos secantes • Segmentos y su punto medio • Circunferencia • Posición relativa entre circunferencias.

2	Construcción del cubo truncado	Aleccionar a los estudiantes en el uso de la herramienta "recorte de poliedro" para realizar la truncatura del cubo y asimismo, evidenciar las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva.	• Teorema de Pitágoras • Cuadrado • Triángulos notables • Polígonos regulares e irregulares • Poliedros • Sólidos platónicos • Pirámide • Cubo • Tetraedro.

4.5.Actividades y análisis

Presentamos las actividades que componen la parte experimental, los objetivos de cada una de ellas, y el análisis a priori y a posteriori de las mismas.

Debemos resaltar que, de aquí en adelante, cuando realicemos una construcción con el Cabri 3D o con lápiz y papel; nos referiremos a este simplemente con el nombre del objeto matemático. Ejemplo: cubo, plano, tetraedro, etc. Sin embargo, como lo menciona Duval (2004a), no debemos confundir el objeto con su representación. En ese sentido, aclaramos que por más que declaremos directamente el nombre del objeto matemático, en realidad nos referimos a la representación del mismo.

<u>Actividad 1: El Cabri 3D</u>

El objetivo de esta actividad es identificar las aprehensiones perceptiva, secuencial y operatoria del registro figural.

En esta actividad, los estudiantes se familiarizarán con algunas herramientas del Cabri 3D, las cuales consideramos importantes para la construcción del cubo truncado. De otro lado, esta actividad consta de dos partes: una primera, en la cual los estudiantes desarrollan una construcción; y la segunda parte donde responden tres preguntas asociadas a la construcción realizada.

A continuación detallamos las acciones asociadas a esta actividad:

<u>FICHA DE LA ACTIVIDAD 1</u>

Utilizamos las herramientas del Cabri 3D conocidas hasta el momento y realizamos la siguiente construcción; luego respondemos las preguntas planteadas.

Primera parte: Construcción

Abra el Cabri 3D y luego realice la siguiente construcción:

Construya dos planos secantes al plano base, de tal manera que dichos planos sean secantes entre sí y después oculte los puntos con los que construyó los planos. Luego, ubique un punto en cada plano y denótelos con las letras A, B y C. Ahora, una los puntos A, B y C con segmentos de recta. A continuación, ubique el punto medio de cada segmento y denótelo con las letras P, Q y R (P en AB, Q en AC y R en BC). Por último, con la herramienta "**triángulo**" construya los triángulos APQ, PQR, PBR, RQC y asígnele un color distinto a cada triángulo.

Análisis a priori de la construcción

El objetivo en esta construcción es que utilicen las herramientas del Cabri 3D mostradas en la parte inicial: puntos en el plano base y fuera de él, segmentos, planos, triangulo, etc. Creemos que los estudiantes podrían seguir el siguiente procedimiento en sus construcciones:

En primer lugar, pensamos que construirán los dos planos secantes al plano base por medio de tres puntos, lo que mostraría, mientras movilizan nociones de puntos, planos y planos secantes, el desarrollo dela **aprehensión secuencial**. Esta aprehensión se desarrolla en la medida que los estudiantes seguirían el proceso de construcción de los planos tal como fue señalado. En ese sentido, podemos afirmar que de acuerdo con la estructura diádica de esta aprehensión, hay un grado de congruencia en la construcción del plano, ya que el Cabri 3D permite su construcción de esta unidad figural de dimensión uno.

Pensamos también, que podrían tener dificultades en lograr que los dos planos construidos sean secantes entre sí. Esta dificultad podría obligarlos a manipular el plano base con la intención de acomodar los planos para que estos sean secantes entre sí. La manifestación de la **aprehensión perceptiva** se daría en el momento que ellos deben percibir que la posición de los planos puede modificarse al manipular los puntos con los que fueron creados y no al manipular los planos en sí. Dicho de otro modo, los estudiantes deberán identificar a las unidades figurales de dimensión uno (los puntos) como partes constitutivas de la unidad figural de dimensión dos (el plano).

Luego, asumimos que ubicarán los puntos A, B y C en cada plano distinto y los unirán con segmentos hasta formar el triángulo ABC. A partir de ahí, calculamos que ubicarán el punto medio de cada lado del triángulo ABC y, después construirán los cuatro triángulos con la herramienta "triángulo". En esta parte de la construcción de los estudiantes podemos creer que movilizarán nociones de segmento, punto medio de un segmento, triángulo, perímetro y área. De ser así, los estudiantes desplegarán la **aprehensión secuencial** inherente a cada una de las construcciones y además, la **aprehensión perceptiva** en la medida que podrían observar al triángulo ABC como una figura superpuesta de cuatro triángulos o como una compuesta de cuatro triángulos lo que afirmaría la ley de cierre y continuidad como parte de dicha aprehensión.

Por último, estimamos que los estudiantes intentarán arrastrar los puntos A y B hacia el plano base, con la finalidad de ubicar el triángulo ABC en este plano. Esta acción mostraría la ejecución de la **aprehensión perceptiva** de acuerdo a la ley de continuidad y cierre en el sentido que los estudiantes percibirían la figura no como cuatro triángulos pequeños, sino como un solo triangulo ABC. La figura 23 muestra una posible construcción de los estudiantes.

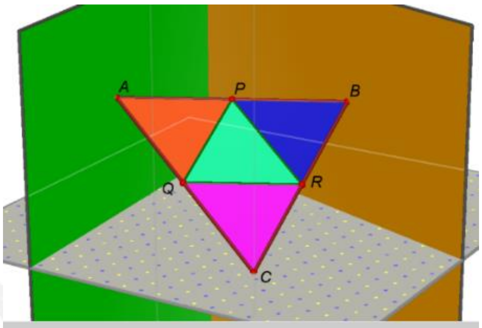
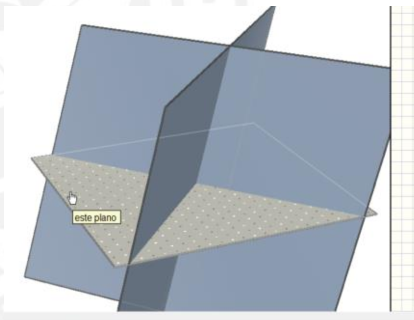
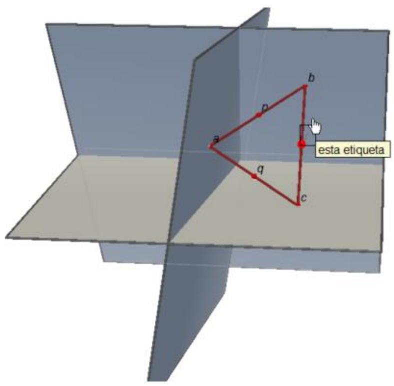
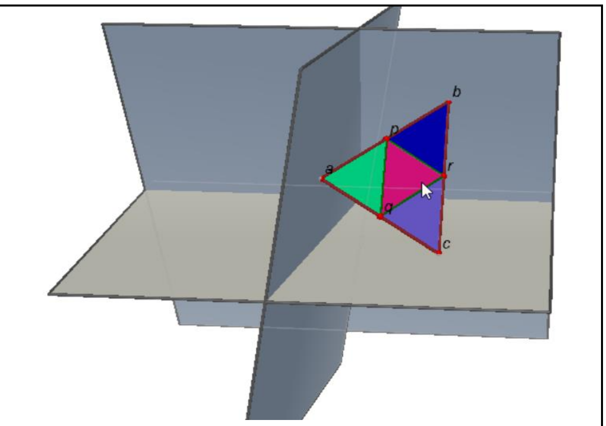
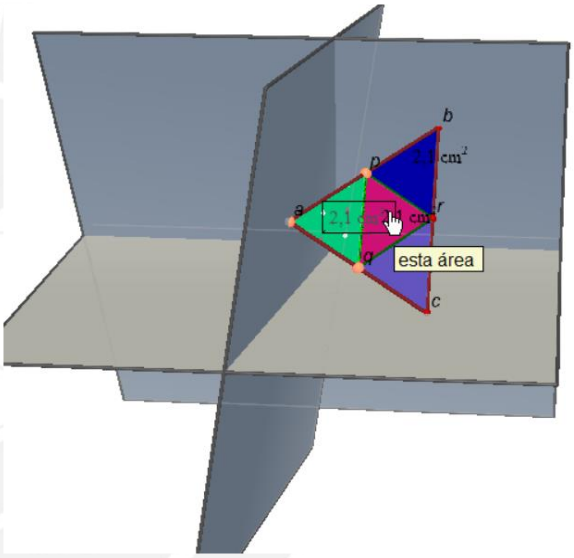
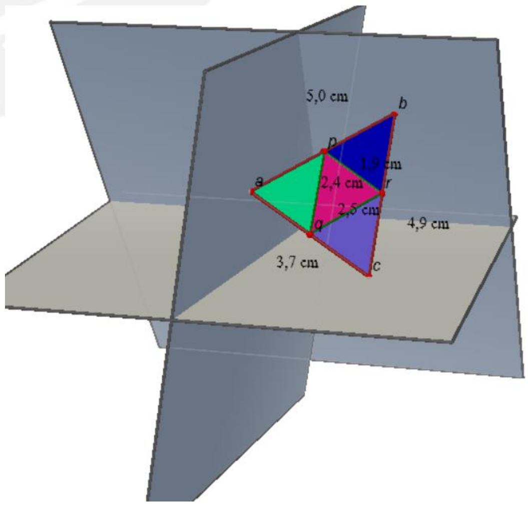


Figura 23. Triángulo con vértices en planos secantes

Análisis a posteriori de la estudiante Rosa

Cuadro 11. Primer análisis de Rosa

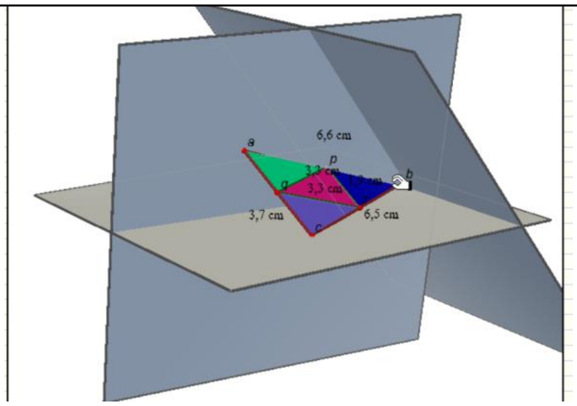
Análisis del proceso de construcción	**Construcción de la estudiante**
La estudiante Rosa construyó los dos planos secantes por medio de tres puntos tal como se indicó en el a priori. En esta parte pudimos observar que existió una relación entre la noción geométrica de planos secantes que ella parecía conocer bien y el desarrollo de la **aprehensión secuencial,** ya que logró seguir la secuencia para construir los planos, y se observó la congruencia entre la unidad figural solicitada en la construcción y la que el Cabri 3D le permitió construir. En seguida, tal como lo previmos en el a priori, la estudiante ubicó en cada plano los puntos A, B y C para construir, mediante segmentos, el triángulo ABC. A continuación, colocó los puntos medios (P, Q y R) en cada lado del triángulo ABC.	 

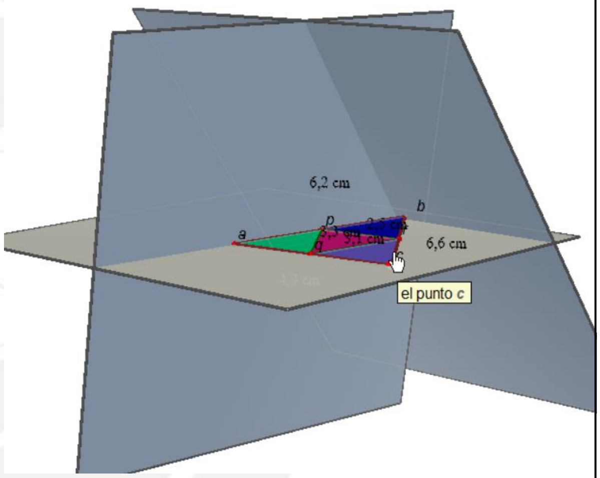
Después, con la herramienta “triángulo”, construyó los triángulos APQ, PRQ, QRC y PRB. En esta parte de la construcción se movilizó nociones que pensamos en el a priori, tales como segmentos, punto medio de un segmento y triángulos. Además, Rosa desarrolló **la aprehensión secuencial,** cuando siguió los pasos para construir el segmento, punto medio, triángulos y ocultar objetos. Por otro lado, aunque no lo consideramos en el a priori, Rosa desarrolló la **aprehensión operatoria (modificación mereológica)** en el momento que reconfigura el triángulo ABC en los cuatro triángulos mencionados. En esta parte, la estudiante utilizó herramientas que no consideramos en el a priori para medir el área de cada uno de los cuatro triángulos. Ella empleó herramienta “área”, y la longitud de los lados del triángulo ABC y de los cuatro triángulos con la herramienta “longitud”. En esta sección, pensamos que mientras movilizó nociones de área y perímetro de figuras planas, se manifestó la **aprehensión perceptiva,** que concuerda con lo que pensamos en el a priori, ya que creemos que ella observó la figura (el triángulo ABC) como un todo y a los cuatro triángulos como figuras que se superponen en él. Por esa razón, pensamos que cuando evaluó los lados de cada triángulo no utilizó la herramienta “distancia” sino “longitud” ya que, no concibió que el triángulo ABC se	  

haya descompuesto en otros cuatro, sino que cuatro triángulos independientes se superpusieron en el triángulo ABC. Estos procedimientos están de acuerdo con lo mencionado en nuestro a priori.

Por último, tal como supusimos en nuestro a priori, Rosa arrastró los puntos A y B creemos que con la finalidad de colocar el triángulo ABC en el plano base.

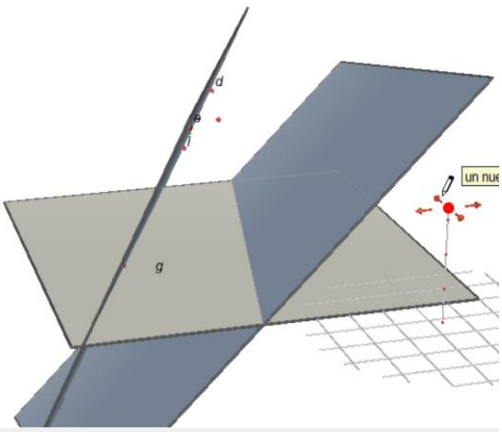
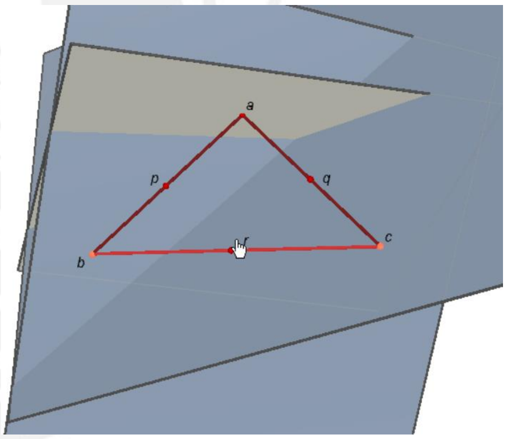
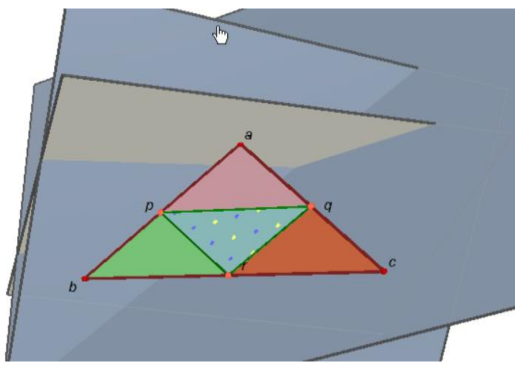
En este caso, observamos que las nociones de plano y figuras que pertenecen a un plano fueron movilizadas por la estudiante. Además, como lo manifestamos en el a priori, pensamos que desarrolló **la aprehensión perceptiva,** porque ella reconoció al triángulo ABC como una figura que no se encontraba en alguno de los planos presentes ahí y tuvo la necesidad de colocarlo en uno de ellos. Por ello, al arrastrar los puntos desplegó la **aprehensión operatoria (modificación óptica y posicional)** en virtud que la estudiante cambió la forma y la posición del triángulo para ubicarlo en el plano base, acción que no previmos en nuestro a priori.





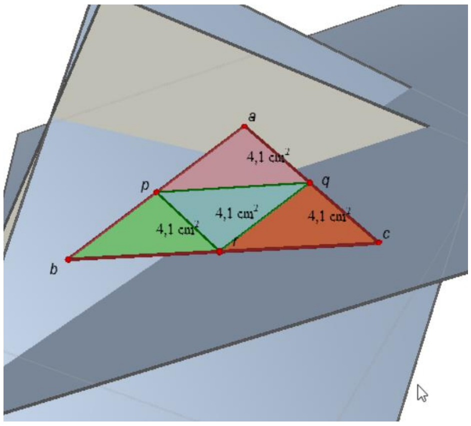
Análisis a posteriori de la alumna Semnia

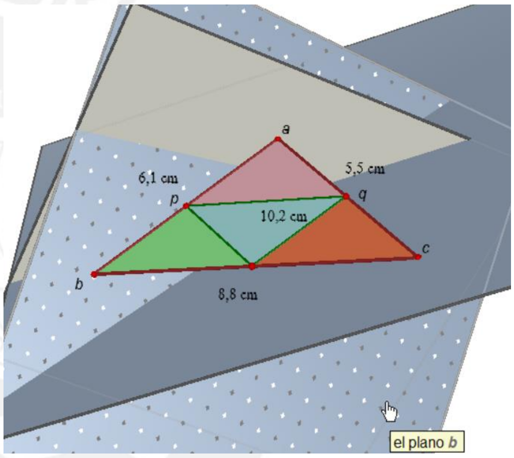
Cuadro 12. Primer análisis de Semnia

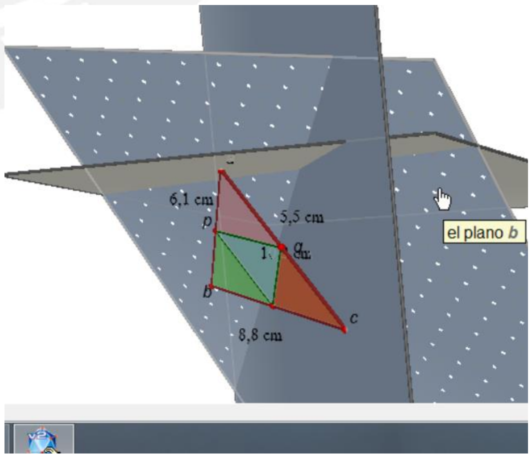
Análisis del proceso de construcción	**Construcción de la estudiante**
Semnia construyó los dos planos aunque no consiguió en un primer momento que estos sean secantes, lo cual previmos de esta posible dificultad en el a priori. Se evidenció que la estudiante manipuló el plano base, creemos que con la intención de obtener una mejor vista de su construcción para luego construir el triángulo ABC. Podemos identificar, a diferencia de nuestro a priori, la falta de apropiación de la noción de planos secantes, pero a su vez desarrolló la **aprehensión perceptiva** lo que le permite ver a los planos como figuras disociadas de los puntos que lo forman. Por otro lado, también desarrolló la **aprehensión secuencial,** tal como supusimos en el a priori, aunque el tiempo de construcción fue mayor en comparación al de sus compañeros. Creemos que de acuerdo a la estructura diádica de esta aprehensión, existieron factores externos (distracción en el momento de la indicación), que no estimamos en nuestro a priori, los cuales fueron causales de dicha demora por parte de la estudiante. Además, no ocultó los puntos como estaba precisado. Luego, tal como describimos en el a priori, la estudiante Semnia ubicó los puntos (A, B y C) uno en cada plano y, con segmentos de	  

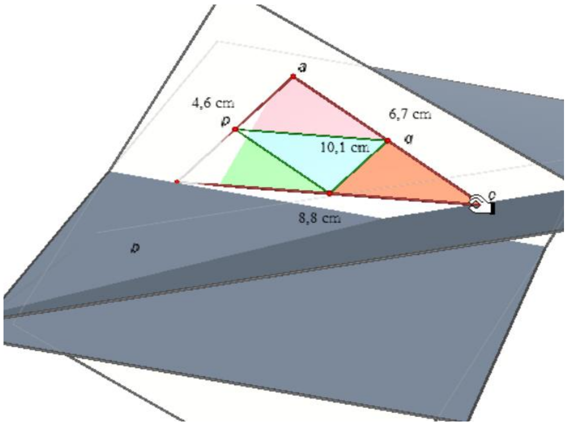
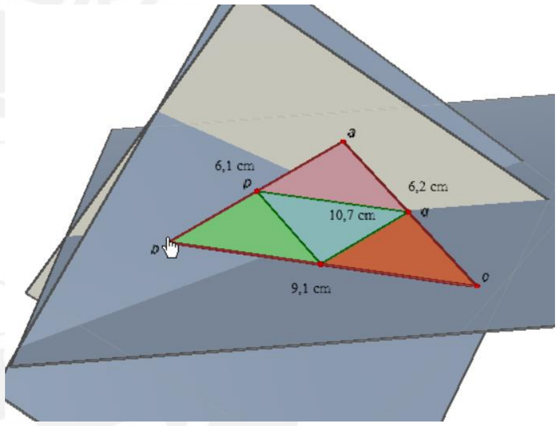
recta construyó el triángulo ABC. A continuación, siguió los pasos previstos en el a priori y estableció el punto medio de cada segmento y con la herramienta "triángulo" construyó los cuatro triángulos dentro del triángulo ABC. Podemos anotar que mientras movilizó los contenidos previstos en el a priori, los cuales son segmento, punto medio de un segmento y triángulos, Semnia evidenció la consecución de la **aprehensión secuencial** en relación a que realizó la construcción como está indicado. Además, aunque no está planteado en el a priori, ella desarrolló la **aprehensión operatoria (modificación mereológica)** en el momento que construyó sub figuras (los cuatro triángulos) dentro del triángulo ABC. Tal construcción sí estuvo prevista en el a priori.

Por otro lado, la estudiante utilizó las herramientas "área" y "longitud" para observar la relación entre las áreas de los cuatro triángulos y la relación entre los perímetros de los triángulos ABC, y mientras la estudiante movilizó nociones como las de perímetro y área previstas en el a priori, pensamos que en ella se realizó la **aprehensión perceptiva** en vista que Semnia identificó al triángulo ABC como un todo y los triángulos pequeños como figuras superpuestas en él, ya que al momento de determinar la longitud solo lo hizo de los lados del triángulo ABC más no logró



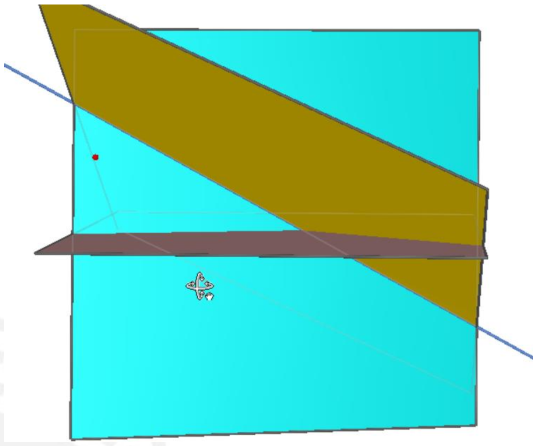
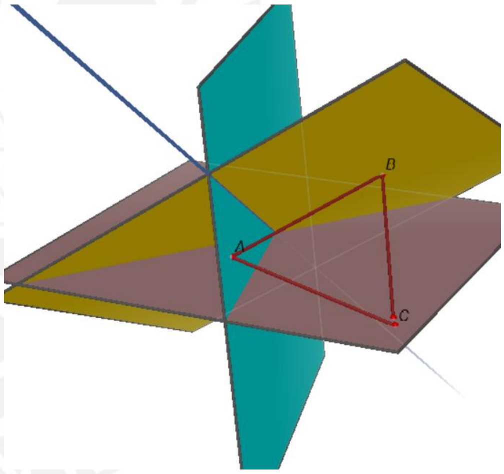
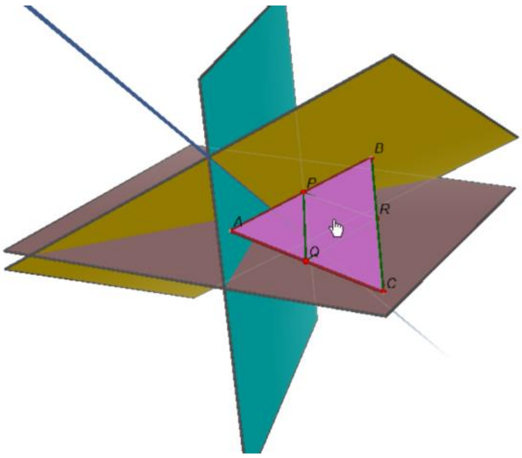




determinar la longitud de los lados de cada triángulo pequeño. También a pesar de no estar previsto en nuestro a priori, creemos que desarrolló la **aprehensión operatoria (modificación posicional)** ya que ella manipuló el plano y modificó la posición del triángulo ABC, creemos que con la finalidad de observar la figura desde distintas posiciones. Por último, la estudiante procedió como estaba anunciado en el a priori y manipuló los puntos A, B y C para lograr que el triángulo ABC se encuentre en el plano. Sin embargo, se observó que ella tuvo dificultades en lograr este propósito, ya que luego movió uno de los planos más no los puntos que es lo que se solicitaba. En ese sentido, podemos decir que mientras se evidenció la noción de planos y triángulos, tal como lo señalado en el a priori, intuimos que también desarrolló la **aprehensión perceptiva,** pero en su percepción no pudo distinguir los elementos figurales de punto y plano para obtener lo que pretendía.	 

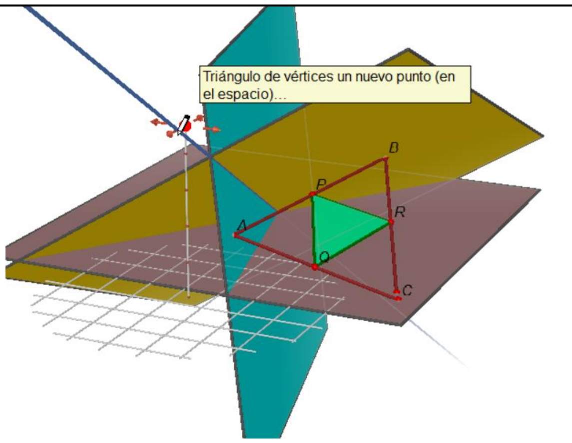
Análisis a posteriori de la alumna Yanet

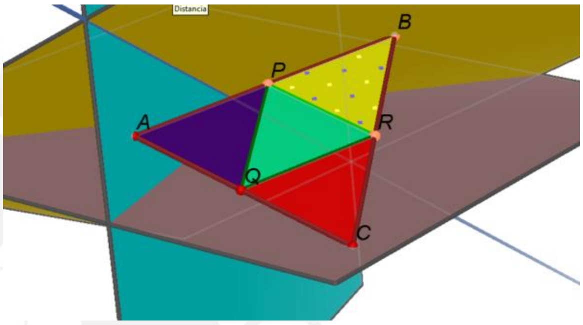
Cuadro 13. Primer análisis de Yaneth

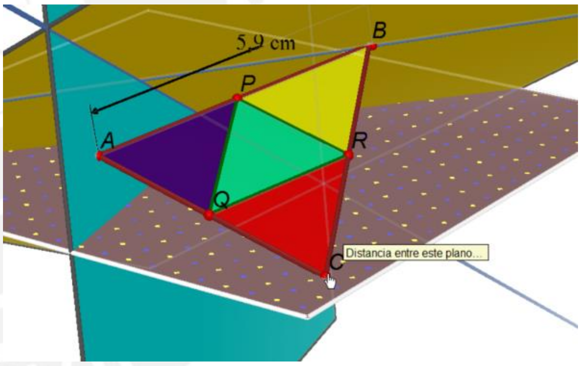
Análisis del proceso de construcción	Construcción de la estudiante
La estudiante realizó la construcción de los dos planos secantes por medio de tres puntos, tal como se indicó y tal como describimos en el a priori. Esta acción le permitió movilizar nociones de puntos y planos secantes, además de realzar el proceso de **aprehensión secuencial** porque siguió el proceso de construcción de planos. También, como lo anotamos en el a priori, se observó que manipuló el plano, creemos que para observar su construcción desde distintos puntos y percibir que los planos sean realmente secantes. Pensamos que la **aprehensión perceptiva** que desarrolló le permitió reconocer los planos como unidades figurales de dimensión dos. Luego, ubicó los puntos A, B y C en cada plano tal como lo supusimos en nuestro a priori, para después mediante segmentos de recta unir dichos puntos y obtener el triángulo ABC. A continuación, Yaneth ubicó los puntos medios P, Q y R de cada segmento. Pensamos que la estudiante mientras movilizó nociones de triángulos, desarrolló su **aprehensión perceptiva,** que se ajusta con lo que anunciamos en el a priori, lo cual le permitió ver a la figura inicial como una figura vacía que tenía que rellenar inicialmente antes de construir los cuatro	  

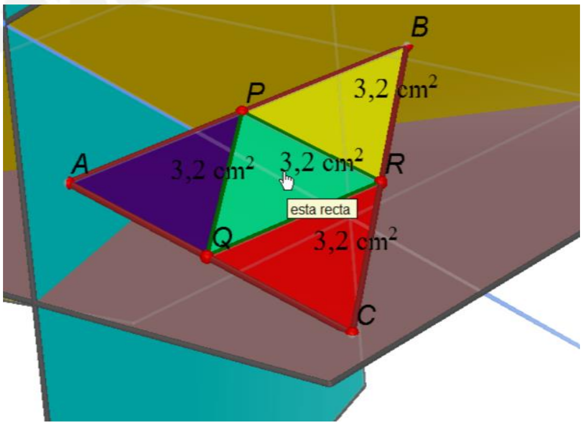
triángulos. Esta percepción de observar la figura como una de dimensión dos está de acuerdo con que Duval denomina ley de cierre y continuidad. Luego, realizo una acción que tampoco avistamos en el a priori. Observó que más sencillo era rellenar el triángulo ABC con los cuatro triángulos antes de rellenarlo primero con uno de mayores dimensiones.

En seguida, con la herramienta “área” midió las áreas de los cuatro triángulos. También se observó que utilizó la herramienta “distancia” y no “longitud” para medir los lados de las figuras. Ella midió los lados del triángulo ABC lo que nos hace pensar que mientras movilizó nociones de área y perímetro de figuras planas previstas en el a priori, entró en desarrollo la **aprehensión perceptiva,** la cual hizo que ella observe el triángulo como una unidad figural, yuxtapuesta de cuatro triángulos. Finalmente, movilizó los puntos A y B, como lo imaginamos en el a priori, creemos que con la intención de ubicar el triángulo ABC en el plano base, lo que evidenció el desarrollo de la **aprehensión operatoria: modificación óptica y posicional**, que no previmos en el a priori, en el momento que utilizó las funciones de manipulación y el arrastre del Cabri 3D.









Segunda parte: Preguntas 1, 2 y 3

Pregunta 1:

¿Cuál es la razón entre las áreas de los triángulos ABC y el triángulo PQR?, justifique su respuesta.

Análisis a priori

Creemos que los estudiantes utilizarán la herramienta "área" para medir las áreas de los cuatro triángulos: APQ, PBR, RQC y PQR. Pensamos que al medir dichas áreas, ellos se percatarán que los cuatro triángulos poseen las mismas medidas y, a priori observarán que el área del triángulo ABC es la suma de las áreas de los cuatro triángulos inicialmente medidos, tal como mostramos en la figura 24.

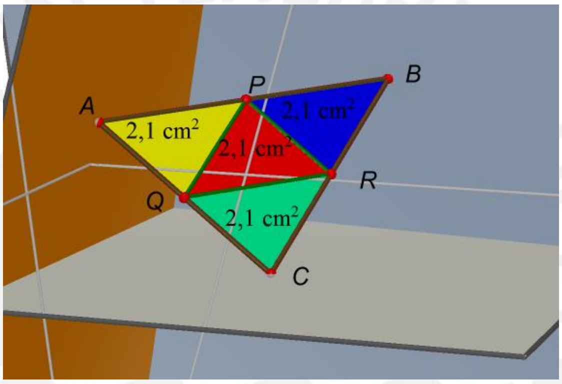


Figura 24. Medida de las áreas de los triángulos

Sospechamos por otro lado que podrían manipular el triángulo ABC arrastrando los puntos A, B o C para verificar si las áreas permanecen constantes entre ellas. En estas acciones podemos decir que mientras los estudiantes movilizarán nociones de posición relativa entre planos, segmento, punto medio de un segmento y áreas de triángulos, también desarrollarán la **aprehensión operatoria (modificación posicional),** en el sentido que existe una reconfiguración del triángulo ABC en otros cuatro. De la misma forma, desarrollarán la **aprehensión discursiva**, ya que lo observado en la pantalla podrían plasmarlo en una hoja para realizar los cálculos de la relación entre las áreas.

Luego de realizar los cálculos, intuimos que los estudiantes llegarán a concluir que la razón entre las áreas es de 1 a 4, o dicho de otras formas: 1/4 o que simplemente escriban que la relación es la cuarta parte.

Análisis a posteriori de la estudiante Rosa

La estudiante manifestó que: "*el triángulo PQR es 1/4 del triángulo ABC*". *Luego, declaró que "el área de cada triángulo miden iguales y la suma de todos es el área total del triángulo ABC*"

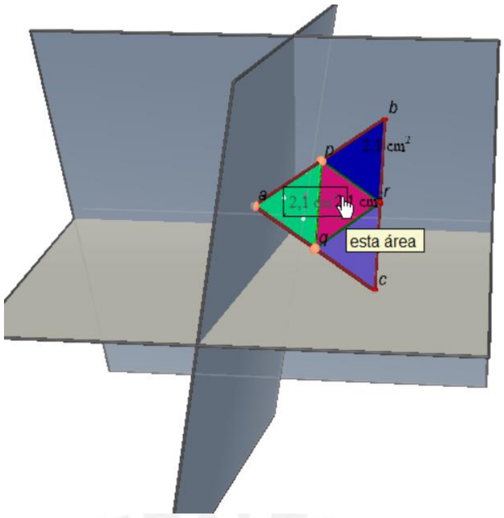


Figura 25. Construcción de Rosa

De acuerdo a la respuesta vertida por Rosa y la construcción realizada (ver figura 25), podemos suponer que ella movilizó nociones previstas en el a priori como triángulos y área de triángulos. Además, aunque no previmos el desarrollo de la aprehensión perceptiva en el a priori, ella evidenció la **aprehensión perceptiva y discursiva**, ya que ella realizó el paso de la percepción de la figura como una unidad figural de dimensión dos y superpuesta de otras cuatro figuras cuyas áreas fueron determinadas con ayuda de una herramienta del Cabri 3D, al discurso en registro aritmético, lo cual le permitió realizar cálculos para establecer la relación entre las áreas solicitadas. En este paso aunque tampoco está descrito en nuestro a priori, Rosa utilizó dos registros: lengua natural y simbólica. La respuesta textual si guarda relación con lo descrito en nuestro a priori.

Análisis a posteriori de la estudiante Semnia

La estudiante manifestó que: "*el triángulo PQR es 1/4 del triángulo ABC". Luego, declara que "el área de cada triángulo miden iguales y la suma de todos es el área total del triángulo ABC*".

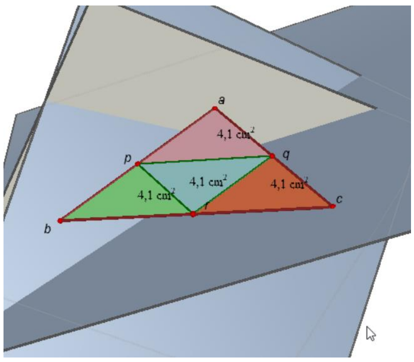


Figura 26. Construcción de Semnia

De la misma forma, cuando observamos la construcción realizada por la estudiante (ver figura 26), anotamos que ella movilizó nociones de triángulos y área, que también predijimos en el a priori. Además, desarrolló la **aprehensión perceptiva** que no estaba pensado en el a priori y la **aprehensión discursiva**, que está de acuerdo con nuestro a priori, ya que ella pasa de la percepción de la figura al discurso utilizando lengua natural y registro aritmético tal como sucedió con la estudiante Rosa.

Análisis a posteriori de la estudiante Yaneth

La estudiante señaló que: "*el triángulo PQR es 1/4 del triángulo ABC*".

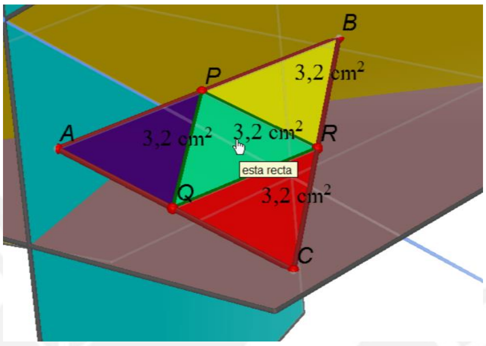


Figura 27. Construcción de Yaneth

En vista de su respuesta y la construcción realizada, la cual observamos en la figura 27, podemos decir que en relación a nuestro a priori, la estudiante movilizó las nociones triángulo y área; además evidenció la **aprehensión perceptiva**, en vista que percibe de acuerdo a ley de formación y cierre a la figura como un todo superpuesto por cuatro figuras que lo componen. Por tal razón como lo pensamos en el a priori, con la ayuda de los cálculos que realiza establece que el área del triángulo PQR es la cuarta parte del valor del área del triángulo ABC.

<u>Pregunta 2:</u>

¿Cuál es la razón entre el perímetro del triángulo PQR y el perímetro del triángulo ABC?, justifique su respuesta.

Análisis a priori.

Presumimos que para llegar a determinar la razón entre la medida de los perímetros de ambos triángulos, utilizarán la herramienta "longitud" para medir los lados de cada triángulo, tal como se muestra en la figura 28. Luego, tendrán que realizar la operación aritmética de la adición para encontrar la razón entre los perímetros por lo que, en este proceso, se desarrollarán las **aprehensiones perceptiva y discursiva**, en vista que los estudiantes deberán distinguir las figuras como unidades de dimensión dos en el Cabri 3D; y luego introducir estas longitudes en lápiz y papel (teorización de la aprehensión perceptiva) para realizar los cálculos y establecer la razón. Además, suponemos que se movilizará la noción de perímetro.

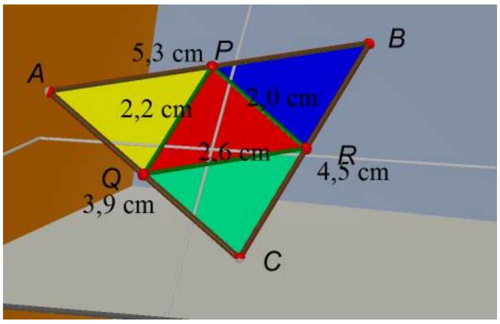


Figura 28. Medida del perímetro de los triángulos

Por otro lado, imaginamos que como en nuestro a priori no tomamos en cuenta la cantidad de decimales que el Cabri 3D ofrece, los estudiantes podrían tener dificultad al observar esta situación. Esta dificultad se podría reflejar al sumar los perímetros del triángulo PQR y del triángulo ABC, ya que estos no podrían estar exactamente en la relación de 1 a 2 que es la razón a la que los estudiantes deberían llegar.

Sin embargo, esperamos que a pesar de ello los estudiantes redondeen y enuncien su respuesta con el anuncio que la relación es de 1 a 2 o $\frac{1}{2}$; o 1:2, o enunciar que el perímetro del triángulo ABC es el doble del perímetro del triángulo PQR.

Análisis a posteriori de la estudiante Rosa

La estudiante manifestó que "*la medida del perímetro PQR es la mitad del triángulo ABC*". Por otro lado, añadió para justificar su respuesta: "*utilicé la longitud para medir los perímetros del triángulo ABC y PQR y obtener la relación entre ellas*". Su declaración se justifica con la construcción que ella realizó y la cual se muestra en la figura 29 y también se ajusta a nuestro pensamiento a priori.

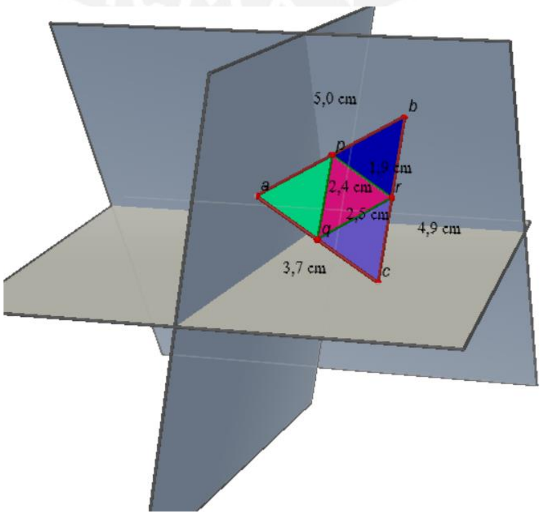


Figura 29. Construcción de la estudiante Rosa

De estas afirmaciones, podemos pensar que mientras movilizó nociones de longitud de un segmento, perímetro y triángulo, la estudiante desarrolló la **aprehensión perceptiva,** en el instante que pasó dela percepción de ver a los triángulos como unidades figurales de dimensión dos, a observar que estos están compuestos por unidades de dimensión uno (segmentos o lados de cada triangulo), las cuales fueron susceptible de ser medidos. Este análisis tiene relación con nuestro a priori, salvo en la movilización de nociones geométricas, ya que no contemplamos la movilización de segmentos y triángulos. También tal como lo intuimos en el a priori, la estudiante realizó cálculo de las longitudes de sus lados, y estos los pasó al discurso (**aprehensión discursiva**) sobre una hoja con la finalidad de encontrar la relación entre los perímetros solicitados.

Análisis a posteriori de la estudiante Semnia

La estudiante declaró: "*el perímetro del triángulo PQR es la mitad del perímetro del triángulo ABC*". En la ficha se evidenció la suma de los tres lados del triángulo ABC: 6.1+5.5+8.8=20.4. Luego, añadió: "*utilicé la herramienta "longitud" para hallar el perímetro del triángulo PQR y ABC*". Al parecer la estudiante tal y como pensamos en el a priori, halló la suma de los lados del triángulo PQR ya que en la ficha se observa escrito 10.2cm. Estas medidas y todo el proceso aritmético con las longitudes del triángulo estaban previsto en nuestro a priori, y además guardan relación con la construcción de Semnia que se observa en la figura 30.

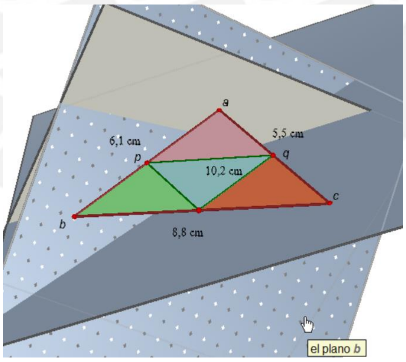


Figura 30. Construcción de la estudiante Semnia

En ese sentido, podemos observar que Semnia movilizó nociones de perímetro, longitud de segmentos y triángulos, los cuales señalamos parcialmente en nuestro a priori. Además, pensamos que se evidenció la **aprehensión perceptiva y la discursiva,** que si indicamos en el a priori, ya que hace un salto del registro figural, que está en su construcción, al discurso matemático, en los mismo términos descritos en los análisis anterior de Rosa.

Análisis a posteriori de la estudiante Yaneth

La estudiante manifestó que "*el perímetro del triángulo PQR es la mitad del perímetro del triángulo ABC",* lo que guarda relación estrecha con nuestra propuesta a priori. La estudiante realizó los cálculos para llegar a esa conclusión. En virtud de su respuesta y de la construcción realizada por ella (ver figura 31), podemos decir que la estudiante movilizó nociones de perímetro, longitud y triángulos que señalamos en el a priori, aunque no consideramos al triángulo.

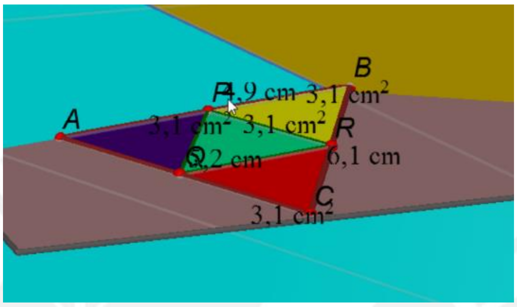


Figura 31. Construcción de la estudiante Yaneth

Además, podemos señalar que la estudiante desarrolló la **aprehensión perceptiva y la discursiva,** prevista también en nuestro a priori, ya que hace un salto del registro figural, que está en su construcción, al discurso matemático.

Pregunta 3:

El triángulo ABC ¿pertenece a alguno de los tres planos?, manipule para observar.
Si la respuesta es SI, indique a que plano pertenece.
Si la respuesta es NO, ¿qué punto(s) y de qué manera debemos arrastrar para lograr que el triángulo ABC se encuentre en el plano base?

Análisis a priori

Esperamos que los estudiantes, en primer lugar, manipulen el plano base y luego el desarrollo de su **aprehensión perceptiva**, les permita, por un lado asociar al triángulo ABC como una unidad figural cerrada que debería pertenecer a un plano, y por otro lado con el hecho de que para lograr tal propósito debe manipular las unidades figurales de dimensión cero (los puntos) de los otros dos planos. En ese sentido, creemos que ellos intentarán colocar el triángulo en el plano base siguiendo la secuencia que se muestra en la figura 32, lo cual desarrollará la **aprehensión operativa (modificación óptica y posicional)**, porque al pretender ubicar el triángulo en el plano base deben cambiar de posición al triangulo y al manipular los puntos A y B el triángulo ABC podría sufrir cambios es sus dimensiones.

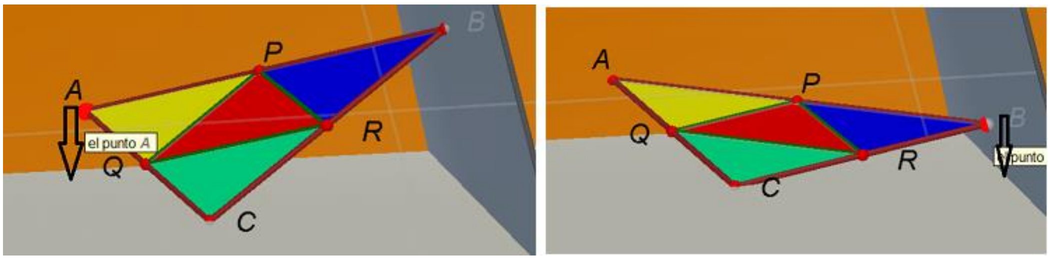


Figura 32. Ubicación del triángulo ABC en el plano base

Presumimos que los estudiantes arrastrarán los puntos que forman los vértices del triángulo ABC, y que no pertenezcan al plano base, para lograr ubicar el triángulo ABC en el plano base.

Análisis a posteriori de la estudiante Rosa

La estudiante declaró lo siguiente: "*arrastré los puntos A y B viendo los movimientos de lado a lado y haciendo que cada uno de ellos encaje exactamente en cada recta de los secantes*", dicha afirmación guarda coherencia con lo descrito en el a priori.

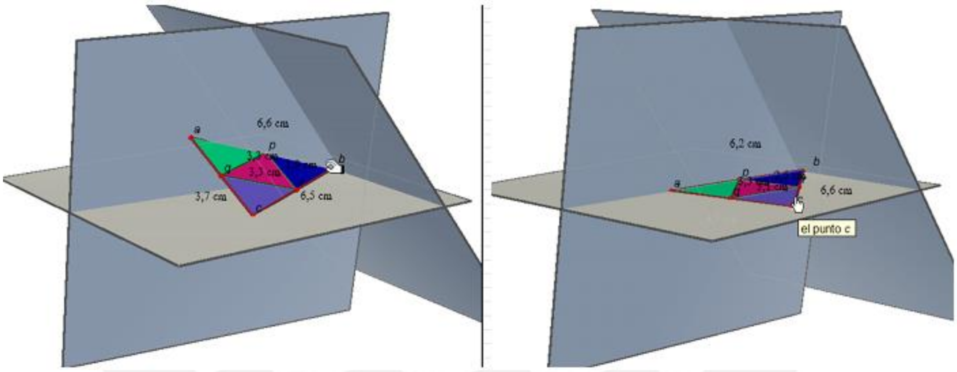


Figura 33. Construcción de Rosa

De acuerdo a lo descrito por la estudiante y a su construcción (ver figura 33), podemos precisar que en esta pregunta se movilizaron nociones de puntos en el plano y en el espacio, planos y triángulos, nociones que no previmos en nuestro a priori. Además, como planeamos en nuestro a priori, la estudiante desarrolló la **aprehensión perceptiva y la aprehensión operatoria (modificación posicional)** en medida que la estudiante utilizó la función de manipulación del Cabri 3D para cambiar la posición de la figura inicial y tener más clara su percepción del plano donde quiso ubicarla.

Análisis a posteriori de la estudiante Semnia

La estudiante escribió: "*el punto "A" lo moví hacia abajo. El punto "B" lo moví hacia la izquierda y el punto "C" lo moví hacia la derecha*". En esta pregunta, la estudiante realiza la acción de mover el punto "C"; esta acción no estuvo prevista en nuestro a priori. Se observó también que Semnia movilizó nociones de puntos en el plano y en el espacio, planos y triángulos, que si consideramos en el a priori.

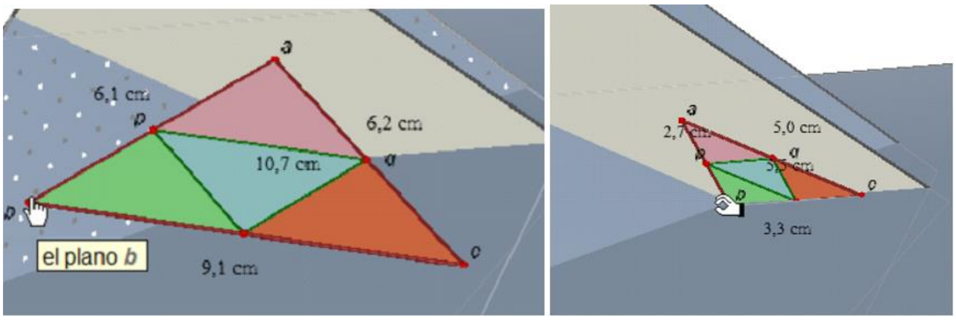


Figura 34. Construcción de Semnia

Por otra parte, se evidenció en la construcción de la estudiante, la cual se muestra en la figura 34, un desarrollo de la **aprehensión perceptiva y la aprehensión operatoria (modificación posicional)** en medida que la estudiante debe cambiar de posición de la figura inicial teniendo clara su percepción del plano donde quiera ubicarlo, lo cual reafirma el pensamiento planteado en el a priori.

Análisis a posteriori de la estudiante Yaneth

De acuerdo a la construcción realizada por Yaneth (ver figura 35), observamos que el **desarrollo de su aprehensión perceptiva,** descrita en el a priori, le dejó distinguir al triángulo como una figura cuyos elementos figurales (los puntos A, B y C) se encuentran en planos diferentes y por tanto, fue necesario arrastrar los puntos A y B para ubicar a la figura en un único plano. Esta acción de arrastrar los puntos A y B estuvo reflexionada de esa manera en nuestro a priori.

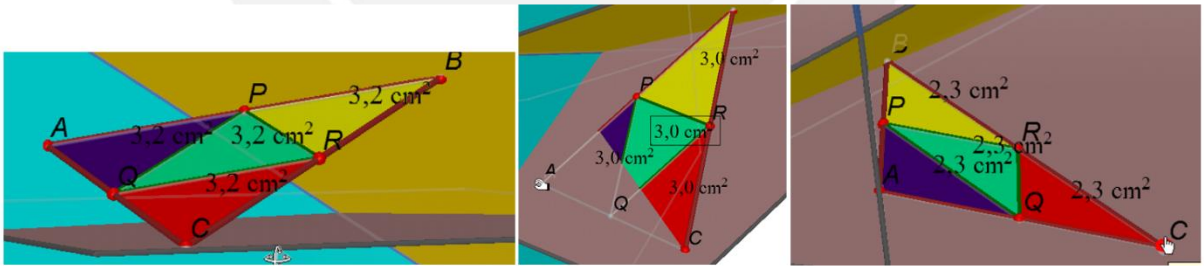


Figura 35. Construcción de Yaneth

Podemos estimar que la estudiante movilizó nociones de planos y triángulos, a la vez que desplegó la **aprehensión operatoria: modificación posicional y óptica**, como también figura en el a priori, ya que el triángulo ABC es modificado en su posición inicial.

<u>ACTIVIDAD 2: Construcción del cubo truncado</u>

Esta actividad tiene dos objetivos: en primer lugar, que los estudiantes logren realizar la construcción del cubo truncado y, en segundo lugar, satisfacer nuestro segundo objetivo específico que es el de conseguir que los estudiantes articulen las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva principalmente.

Esta actividad está dividida en cuatro partes: la primera parte, responde a la determinación de los puntos de corte en una de las caras del cubo. La segunda parte, lo constituyen cuatro preguntas que guardan relación con la construcción anterior. La tercera parte, corresponde a la construcción de los demás puntos de corte y del recorte de las esquinas del cubo hasta obtener el cubo truncado. Por último, la cuarta parte lo compone una pregunta que se vincula con la última construcción.

<u>Ficha de la actividad 2</u>

Primera parte: Determinación de los puntos de corte:

Abra el Cabri 3D
Construya un cubo
Elija una cara del cubo y nómbrelo con las letras ABCD.
Ubique el centro de la cara ABCD y nómbrelo con la letra "O"
Construya una circunferencia en la cara ABCD, tomando como centro el vértice "A" y punto de paso "O"
Marque los puntos de intersección de la circunferencia con las aristas y nómbrelo con las letras M y N (M en AB y N en AD).
Construya tres circunferencias adicionales en la misma cara ABCD del cubo, las cuales deben tener como centros los vértices B, C y D y como punto de paso el punto "O".
Marque los puntos de intersección de las circunferencias con las aristas (no le asigne letras a dichos puntos).
Oculte las circunferencias construidas.

Análisis a priori

En la construcción que los estudiantes podrían realizar (ver figura 36), creemos que para construir el cubo, ellos harán uso de la herramienta "cubo" definido con un punto en el plano base que será el centro y otro punto de paso. Luego, pensamos que elegirán la cara superior a la que denotarán con las letras A, B, C y D para construir ahí la circunferencia con las indicaciones dadas. Hasta esta parte de la construcción creemos que se evidenciará la **aprehensión secuencial;** y su estructura diádica que lo constituye no interrumpirá dicha aprehensión.

Los pasos mostrados previamente para la construcción de distintos objetos en Cabri 3D y la realización delos mismos son los que dan el soporte del desarrollo de la aprehensión secuencial. Luego, para ubicar el punto medio de la cara, pensamos que algunos podrían ubicar el punto medio con la herramienta "punto medio" entre dos vértices opuestos de la cara. Otros quizás tengan que trazar las dos diagonales y marcar el punto de intersección. En seguida, creemos que para trazar la circunferencia los estudiantes podrían tener dificultades en definir la cara en primer lugar, no por falta de conocimiento sino porque pueden olvidar este paso.

Finalmente, en la intersección de la circunferencia con las aristas creemos que utilizarán adecuadamente la herramienta “puntos de intersección” para lograr dicho cometido. Las aprehensiones que suponemos articularán son las **aprehensiones perceptiva y operatoria**; en vista que existirá una relación directa entre la percepción de los estudiantes sobre un cuadrado como unidad figural de dimensión dos y que forma parte del cubo que es una unidad figural de dimensión tres, y el hecho de realizar reconfiguraciones (trazos de diagonales posiblemente) en dicha cara para ubicar el puto medio de ella.

Por otro lado, suponemos que se han de movilizar nociones como el cuadrado y sus propiedades. Presentamos una posible construcción delos estudiantes.

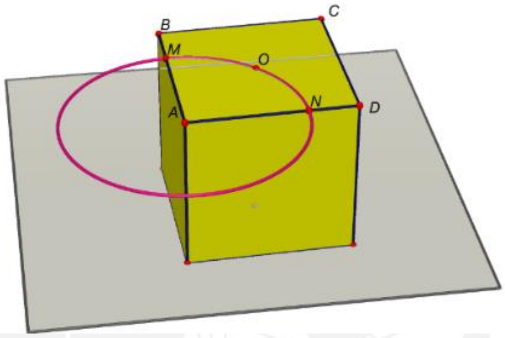


Figura 36. Circunferencia definida en una cara del cubo

En la continuación de la construcción, creemos que los estudiantes no tendrán problemas en construir las tres circunferencias solicitadas, ya que seguirán los pasos de su primera construcción. Entonces, la **aprehensión secuencial** se hará evidente en esta construcción. Una posible construcción es la que sigue.

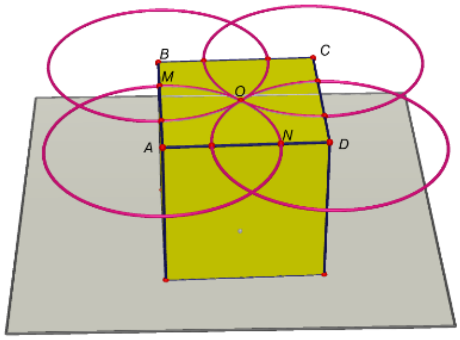
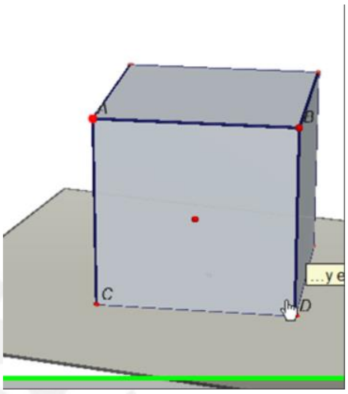
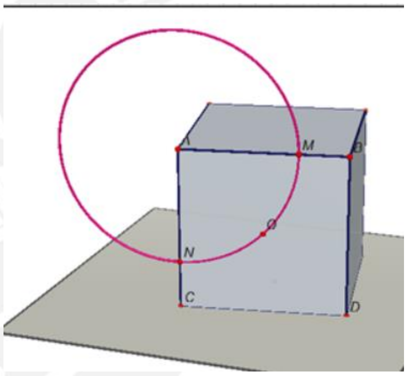
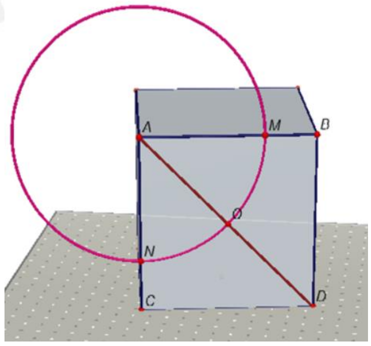
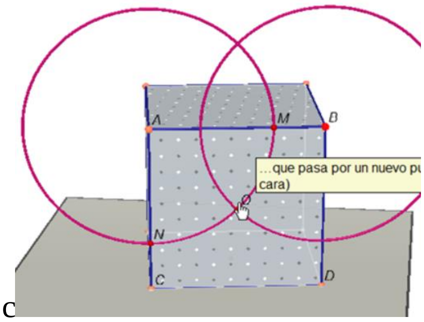
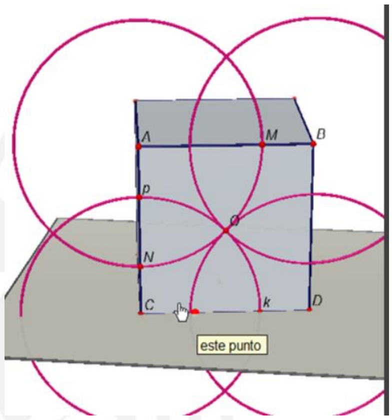
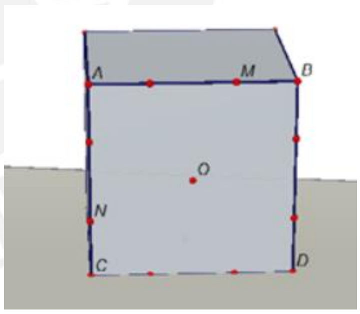


Figura 37. Circunferencias en una cara del cubo

Análisis a posteriori de la alumna Rosa

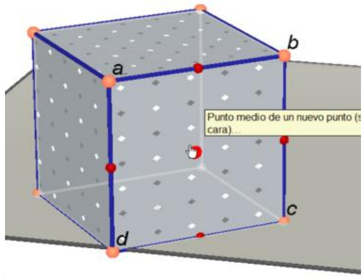
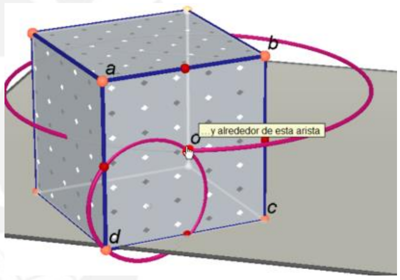
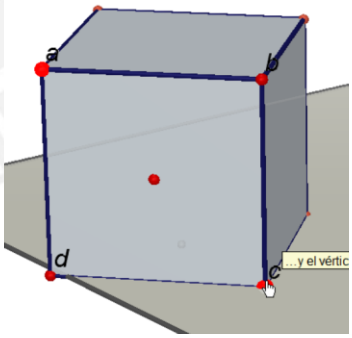
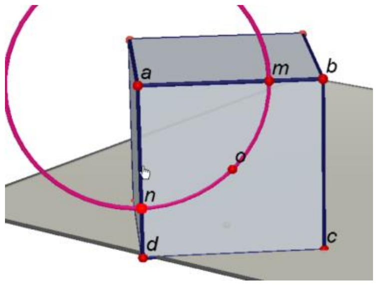
Cuadro 14. Segundo análisis de Rosa

Análisis del proceso de construcción	**Construcción de la estudiante**
La estudiante Rosa, de acuerdo con lo señalado en nuestro a priori, construyó el cubo con la herramienta "cubo", luego eligió una cara y la denotó con las letras ABCD, pero se equivocó en el orden y ella lo denotó como ABDC (es decir no colocó las letras en forma consecutiva en los vértices de la cara elegida), lo cual no se planteó en el a priori, y nos hizo suponer que existió una interferencia entre la **aprehensión perceptiva** que tiene sobre el cuadrado y el enunciado asociado a esta unidad figural. En seguida, ubicó el punto medio “O” de la cara elegida con la herramienta "punto medio" de tal manera que encontró dicho punto medio de la forma descrita en el a priori que es a partir de dos vértices opuestos de la cara del cubo. Este punto en realidad, es el centro de la diagonal, que aunque ella no lo traza, pensamos que la asume. También, construyó la circunferencia con centro en el vértice "A" y punto de paso "O". En esta parte de su construcción, podemos notar que la estudiante movilizó nociones de cuadrado, diagonal del cuadrado, circunferencia y cubo, lo cual concuerda con las nociones que mencionamos en nuestro a priori. Pero además, evidenció la	  

aprehensión operatoria (modificación posicional) ya que ella, a pesar de no estar previsto en el a priori, manipuló y cambió constantemente la posición del cubo, porque quiso ubicar con precisión el centro de la circunferencia y observó el cubo desde diversas posiciones. Por otro lado, aunque tampoco estuvo pensado en el a priori, la estudiante manipuló el cubo, creemos que para intentar percibir (**aprehensión perceptiva**) que segmento o segmentos representan el radio de dicha circunferencia. Luego, realizó una reconfiguración con el acto de hacer el trazo del segmento AD (diagonal de la cara) lo que evidenció una **aprehensión operatoria: modificación mereológica**, a la vez que movilizó nociones de segmento, radio y diagonal de un cuadrado. Continuó el proceso de construcción tal como lo presentamos en el a priori y así la estudiante mediante circunferencias encontró los demás puntos de corte en las otras caras, lo cual puso de manifiesto la **aprehensión secuencial,** presente en cada parte de cada construcción.	 c  

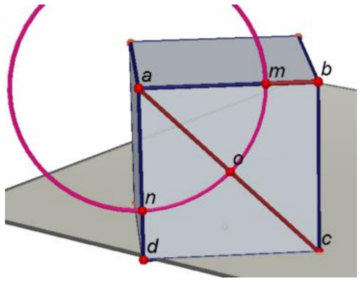
Análisis a posteriori de la estudiante Semnia

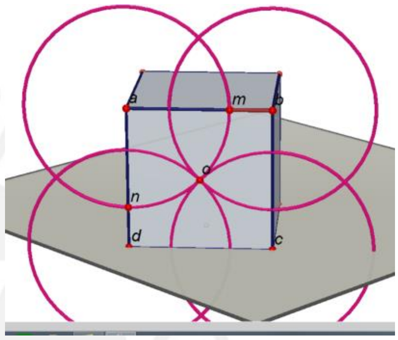
Cuadro 15. Segundo análisis de Semnia

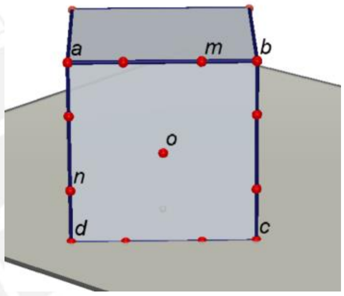
Análisis del proceso de construcción	**Construcción de la estudiante**
La estudiante siguió lo pensado en el a priori, al construir el cubo con la herramienta "cubo"; luego eligió una cara y la denotó con las letras ABCD. En seguida, para ubicar el punto medio de la cara ABCD ella marcó los puntos medios de cada lado del cuadrado ABCD, aunque este paso no lo contemplamos en el a priori, creemos que quiso formar una especie de cruz y de esa manera ubicar el punto medio de dicha cara. Sin embargo, no logró culminar su intento. Aunque no haya culminado su pretensión se pudo evidenciar, como lo describimos en nuestro a priori, la **aprehensión operatoria: modificación mereológica** en el momento que ubicó los puntos medios de los lados con el fin de intentar dar solución al problema presentado. Ello mientras movilizó nociones pensadas en el a priori como segmentos, punto medio de un segmento, cuadrado y cubo. Luego, deshizo esa parte de su construcción y logró ubicar el punto medio de la cara ABCD trazando, como esta en nuestro a priori, el punto medio entre dos vértices opuestos de dicha cara. También tal como lo precisamos en el a priori, construyó la circunferencia con centro en el vértice "A" y punto de paso "O".A	   

<table>
<tr>
<td>continuación, trazó la diagonal AC, pensamos que para identificar el segmento AO que representa el radio de la circunferencia, lo que evidenció la aprehensión operatoria: modificación mereológica, ya que añadió elementos a la figura inicial para buscar solucionar el problema.

También a diferencia del a priori, la estudiante trazó el segmento MB, creemos que para identificar dicha distancia en términos de la arista “a” del cubo, lo que una vez más evidenció una articulación entre la aprehensión perceptiva y operatoria.

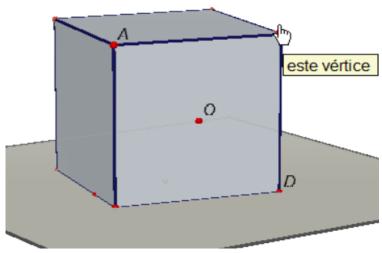
La estudiante continuó su construcción y evidenció la aprehensión secuencial, la cual señalamos en el a priori, en el momento que construyó las tres circunferencias adicionales mediante el mismo proceso de construcción de la primera.</td>
<td>




</td>
</tr>
</table>

Análisis a posteriori de la alumna Yaneth

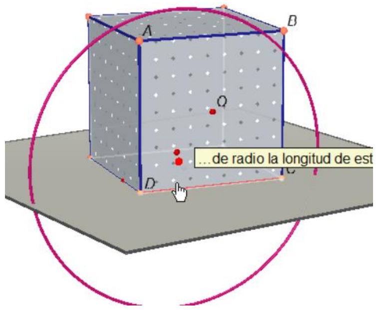
Cuadro 16. Segundo análisis de Yaneth

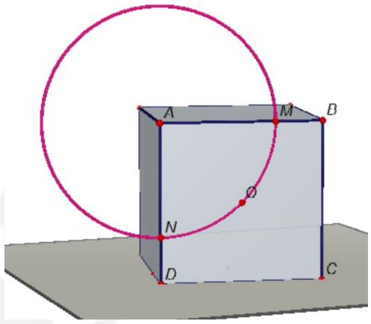
<table>
<tr>
<th>Análisis del proceso de construcción</th>
<th>Construcción de la estudiante</th>
</tr>
<tr>
<td>La estudiante en concordancia con nuestro a priori construyó el cubo con la herramienta "cubo", luego eligió una cara y se observó ciertas dificultades en denotarla con las letras ABCD, dificultad que no la pensamos en el a priori, aunque creemos que es más por</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

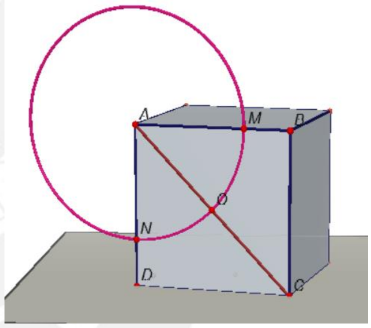
manejo del Cabri 3D que por otra razón. En seguida, para ubicar el punto medio de la cara ABCD ella marcó el punto medio entre dos vértices opuestos de dicha cara, tal como está señalado en el a priori.

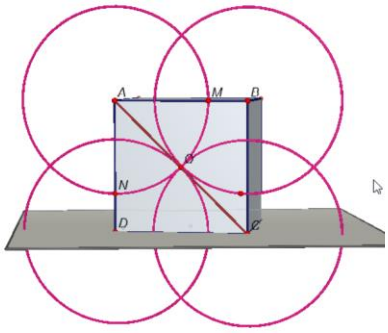
Se observó también que para construir la circunferencia inicialmente tuvo dificultades de tipo secuencial que no contemplamos en el a priori, por lo que en esta parte **no estuvo bien desarrollada la aprehensión secuencial** aunque de igual forma movilizó nociones de punto, cuadrado y circunferencia.

A continuación, trazó la diagonal AC, pensamos que para identificar el segmento AO que representa el radio de la circunferencia, lo que ayudó a desarrollar su **aprehensión operatoria: modificación mereológica,** que pensamos en el a priori**.** La estudiante continuó su construcción y evidenció la **aprehensión secuencial** en el momento que construyó las tres circunferencias adicionales siguiendo el mismo proceso de construcción de la primera. Todo este proceso se dio mientras movilizó nociones que establecimos en el a priori como circunferencia y diagonal de un cuadrado.









Segunda parte: Preguntas 4, 5 6 y 7

Pregunta4:

De acuerdo con su construcción, ¿qué segmentos representan el radio de la circunferencia?

Análisis a priori

Pensamos que algunos estudiantes al manipular el cubo se percatarán que el segmento AO es el radio de la circunferencia y que es igual a los segmentos AM y AN, lo que permitirá articular las **aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva** en el caso de que esbocen y realicen algún trazo además de establecer las relación en términos de los segmentos señalados.

Sin embargo, también creemos que algunos estudiantes no podrían percatarse de este hecho y no podrían llegar a establecer relación con los tres segmentos. Las nociones que movilizarán en esta pregunta se relacionan con las de punto medio de un segmento y circunferencia.

Análisis a posteriori de las tres estudiantes

Las tres estudiantes tuvieron, tanto las respuestas en la ficha como en sus construcciones, procedimientos similares.

Rosa respondió: "*tiene dos segmentos que son de: AM, AN y AO*", mientras Semnia manifestó: "*el segmento: AN, AM y AO*". Por último, Yaneth declaró: "*los segmentos: AM y AN".*

De acuerdo con nuestro a priori, salvo en el caso de Yaneth, lo afirmado por las estudiantes se ajusta a lo que pensamos iba a suceder. Por otro lado, tal y como muestra nuestro a priori las estudiantes movilizaron nociones de segmentos y circunferencia. Además, en vista de sus construcciones creemos que su **aprehensión perceptiva** dejó distinguir los segmentos AN, AO y AM, como elementos figurales. También, al igual que en a priori, pensamos que desarrollaron la **aprehensión operatoria: modificación mereológica.**

Luego, cuando llevaron al papel (discurso) lo observado en la figura se evidenció la **aprehensión discursiva**. Por tanto, en esta pregunta podemos suponer que se articularon estas dos aprehensiones, lo cual guarda relación con lo pensado en el a priori.

Pregunta 5:

Si asumimos que la arista del cubo es “a”, ¿a qué es igual el radio de la circunferencia en términos de la arista “a”? expréselo matemáticamente.

Análisis a priori

Confiamos que los estudiantes no tendrán problemas en identificar que el radio de la circunferencia es el segmento AO (ver figura 38)

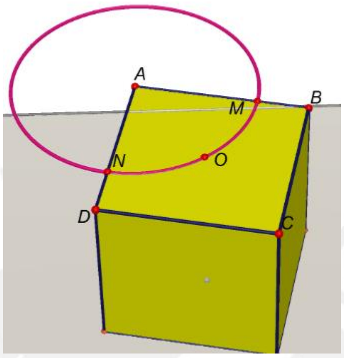


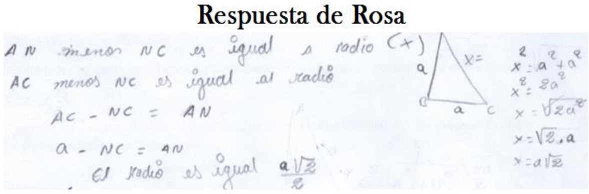
Figura 38. Posible construcción de las estudiantes

Pensamos también que realizarán un esbozo con lápiz y papel para trazar el radio y observar que este es la mitad de la diagonal del cuadrado (que es una de las caras del cubo), lo cual articularía **la aprehensión perceptiva y operatoria.**

Creemos también que dibujarán un triángulo rectángulo con los lados del cuadrado y su diagonal, y con el teorema de Pitágoras o triángulos notables determinarán que la longitud de la diagonal es $a\sqrt{2}$ y por lo tanto, que el radio AO es $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. En esta parte creemos que los estudiantes **articularán las aprehensiones operatoria y discursiva;** así como movilizarán las nociones de cuadrado, circunferencia, teorema de Pitágoras y triángulos notables.

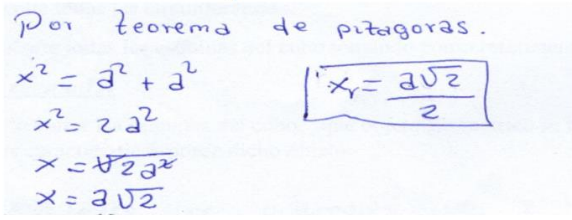
Análisis a posteriori de las tres estudiantes

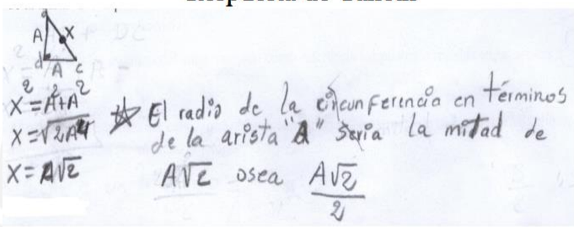
Cuadro 17. Análisis de la pregunta 5

Las tres estudiantes tuvieron procedimientos similares tanto en sus construcciones como en lo expuesto en sus respectivas fichas de actividades. Es así, que dentro del análisis creemos que las estudiantes movilizaron las nociones pensadas en el a priori como son segmentos, cuadrados, circunferencia y el teorema de Pitágoras. Cabe señalar que a	**Respuesta de Rosa** 

<table>
<tr>
<td>
diferencia de nuestro a priori, ninguna estudiante realizo los cálculos con triángulos notables, lo que nos hace pensar que esta noción no está aún aprehendida por ellas.

Al mismo tiempo, también como muestra el a priori, intuimos que se articularon las aprehensiones perceptiva y discursiva en vista que fueron capaces de percibir en la cara ABCD el triángulo rectángulo ACD y asociar esta figura con el teorema de Pitágoras.

Por otro lado, en una parte de su respuesta se pudo evidenciar que su aprehensión perceptiva los ayudó a distinguir en el lado AC del cuadrado tres elementos figurales los segmentos AN, NC y AC. Por ello, en alguna de las respuestas mencionaron que la diferencia entre AC y NC es el radio de la circunferencia, lo cual no imaginamos y menos planteamos en nuestro a priori.
</td>
<td>
Respuesta de Semnia


Respuesta de Yaneth


</td>
</tr>
</table>

Pregunta 6:

¿Cuál es la medida del segmento BM en términos de la arista “a”?, expréselo matemáticamente.

Análisis a priori

Sospechamos que los estudiantes deberían darse cuenta que el segmento AM y AN son congruentes con AO y que todos ellos son el radio de la circunferencia. Esperamos que algunos estudiantes puedan observar y darse cuenta que el segmento BM tiene por longitud a la arista “a” restándole el radio AM que ya lo calcularon (ver figura 39)

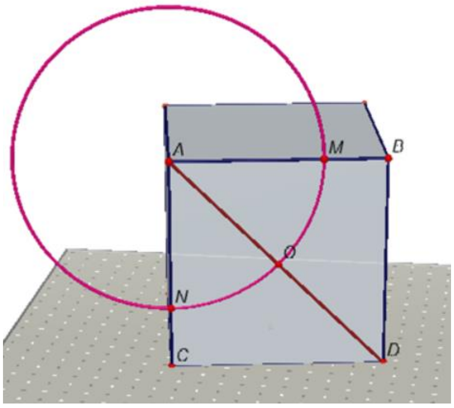
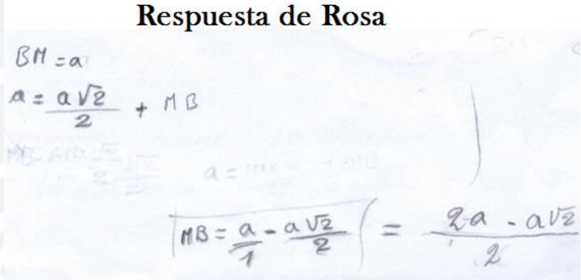
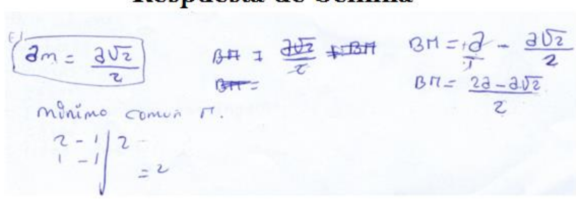


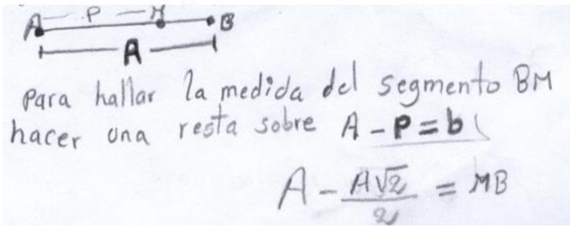
Figura 39. Evidencia del segmento BM

Siendo así, se articularía la **aprehensión perceptiva y la discursiva,** ya que lo que los estudiantes perciben, lo plasman en un discurso matemático sobre un papel y mediante definiciones y procedimientos matemáticos, arriban a una respuesta. Las nociones que se pretende movilizar son operaciones con segmentos, congruencia de segmentos y circunferencia. Luego, creemos que los estudiantes percibirán que el segmento NC es congruente con el segmento BM.

Análisis a posteriori de las tres estudiantes

Cuadro 18. Análisis de la pregunta 6

Se muestran las respuestas de Rosa, Semnia y Yaneth. De acuerdo a sus respuestas podemos sospechar que en primer lugar se movilizaron nociones previstas en nuestro a priori como segmentos. Además, tal como lo señalamos en el a priori, creemos que se **articularon las aprehensiones perceptiva y discursiva,** ya que ellas pudieron distinguir el segmento BM como la diferencia entre la arista AB y el radio AM. Es por eso que escribieron en sus fichas que el segmento BM es igual a: $a-\frac{a\sqrt{2}}{2}$ A diferencia de lo pensado en el a priori, no se pudo evidenciar el desarrollo de la aprehensión operatoria. Creemos que ellas	**Respuesta de Rosa**  **Respuesta de Semnia** 

<table>
<tr>
<td>solo les bastó asociar la percepción y el discurso para resolver el problema, y no así realizar alguna modificación a la figura que permitiese el desarrollo de la aprehensión operatoria.</td>
<td>Respuesta de Yaneth

</td>
</tr>
</table>

Pregunta7:

En términos de la arista "a" del cubo construido, ¿exprese matemáticamente la distancia entre los puntos de intersección de dos circunferencias sobre una misma arista?

Análisis a priori

Pensamos que los estudiantes identificarán que el segmento solicitado es aquel que se encuentra en la parte central de cada arista. Creemos sin embargo, que podrían tener dificultades en calcular su longitud en vista que inicialmente no encontrarían la relación de este segmento, con la arista y con las longitudes de los otros dos segmentos contiguos a él.

Sospechamos que algunos estudiantes conseguirán percibir que el segmento solicitado se puede calcular restándole a la arista "a" el doble del segmento BM.

Es decir: $x = a - 2\left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

$$x = a\sqrt{2} - a$$

Estas acciones evidenciarán **la articulación entre las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva**, ya que pensamos que además de percibir en la construcción dicho elemento figural de dimensión uno (segmento BM) y plasmarlo mediante un discurso matemático en el papel, también podrían realizar algún tipo de modificación, sea óptica o posicional de la construcción que desarrolle su aprehensión operatoria. También creemos que movilizarán nociones de operaciones con segmentos y circunferencia.

Análisis a posteriori de las tres estudiantes

Cuadro 19. Análisis de la pregunta 7

<table>
<tr>
<td>
Mostramos la construcción de la estudiante Rosa (figura 40), ya que las demás tuvieron construcciones similares.

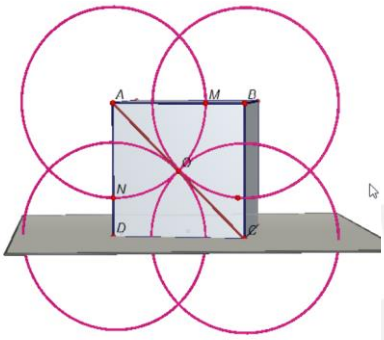
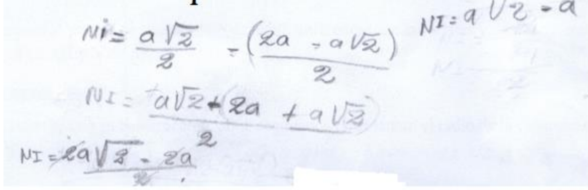


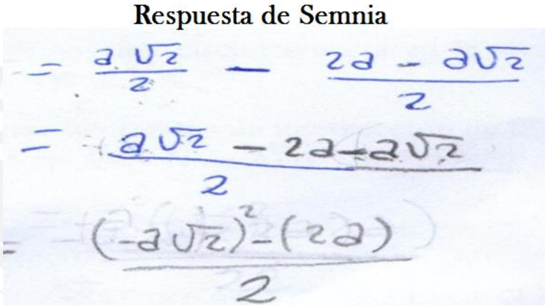
Figura 40. Construcción de Rosa

Por otro lado, las respuestas de las tres estudiantes si bien es cierto se aproximan bastante a nuestro a priori, no terminan por convencer en relación a su procedimiento algebraico, el cual muestra ciertas dificultades en su proceso.

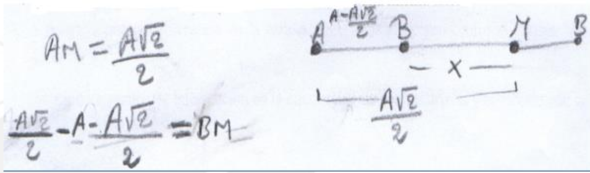
Además, **la aprehensión perceptiva** les ayudó a distinguir que la distancia entre los puntos de corte era un segmento (unidad figural de dimensión uno como lo manifestamos en el a priori). También podemos pensar que se **articularon las aprehensiones perceptiva y discursiva**, pues esa percepción de la relatamos se convirtió en discurso en el momento que los estudiantes lo plasman en la ficha. Aunque esta articulación estaba prevista en el a priori, no pasó lo mismo con la aprehensión operatoria, la cual no se evidenció por las estudiantes.
</td>
<td>
Respuesta de Rosa



Respuesta de Semnia



Respuesta de Yaneth



</td>
</tr>
</table>

Tercera parte: Construcción del cubo truncado

…Continúe con la construcción realizada en la primera parte:
En todas las aristas restantes del cubo ubique los puntos como en la cara ABCD, siguiendo el mismo procedimiento u otro que usted crea conveniente (no le asigne letras a ningún punto).
Oculte todas las circunferencias.
Recorte todas las esquinas del cubo tomando como referencia los puntos marcados en las aristas.

Análisis a priori

En relación a la construcción, creemos que los estudiantes utilizarán adecuadamente la herramienta "**ocultar/mostrar**" para ocultar las circunferencias. Luego, construirán en cada cara del cubo circunferencias para ubicar y marcar los puntos en las aristas. A continuación, pensamos que construirán planos en cada esquina del cubo por medio de tres puntos, que ya están marcados, y con la herramienta "**recorte de poliedro**" procederán a recortar dichas esquinas. Los estudiantes articularán en esta construcción las **aprehensiones perceptiva y operatoria (modificación mereológica y posicional),** ya que deberán distinguir elementos figurales como punto y plano, además de cambiar de posición al cubo cada vez que pretenda realizar el recorte de alguna esquina**.** Pensamos que podrían tener alguna dificultad en el momento de clicar primero al plano, pues podrían intentar directamente clicar la parte que se desea cortar sin definir el plano que lo cortará. A pesar de ello, suponemos que lograrán recortar todas las esquinas. Las nociones que pensamos movilizarán son plano, circunferencia y propiedades del cuadrado. La figura 41 es una posible construcción de los estudiantes.

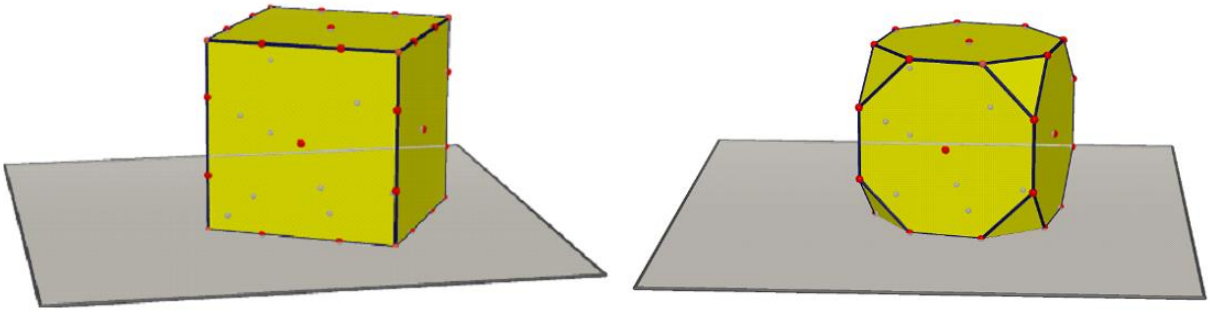
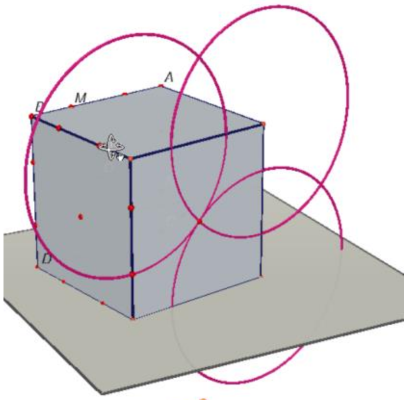
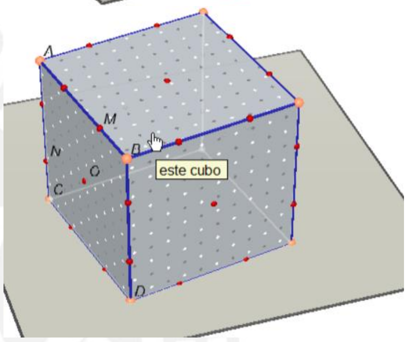
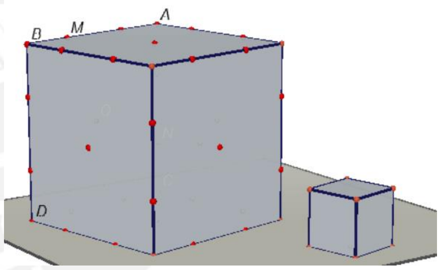
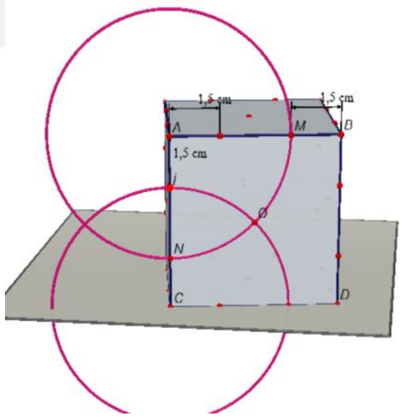
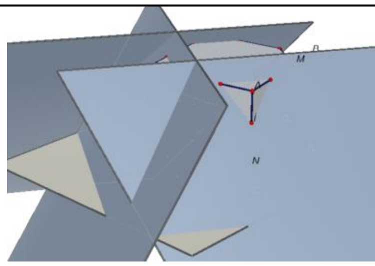
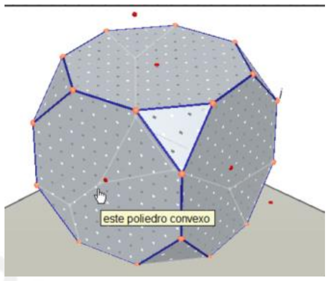


Figura 41. Puntos determinados en las aristas para truncar el cubo

Análisis a posteriori de Rosa

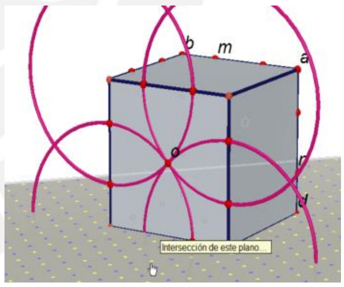
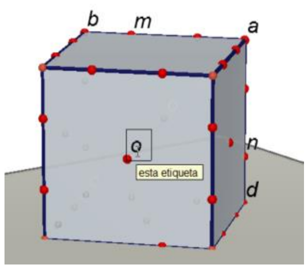
Cuadro 20. Tercer análisis de Rosa

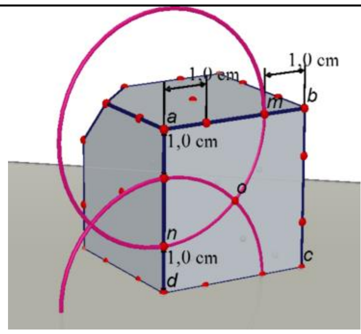
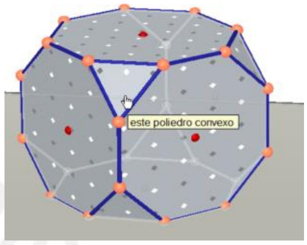
Análisis del proceso de construcción	
La estudiante inició la construcción a partir de haber encontrado los puntos de corte en la cara ABCD del cubo. Luego, tal como lo imaginamos en el a priori, siguió el procedimiento realizado en dicha cara y ubicó los puntos de corte en las demás aristas. Esta acción desarrolló la **aprehensión secuencial** de la estudiante, en vista que siguió los pasos y procesos como inicialmente se le indicaron y como señalamos en el a priori. A continuación, la estudiante, con la finalidad de recortar una esquina del cubo, realizó un accion no pensada en nuestro a priori, y construyó otro cubo; creemos que para intentar recortar primero éste y luego ya el original. Esta acción desarrolló en la estudiante la **aprehension operatoria de modificación óptica**. Luego, ella logró recortar adecuadamente el cubo inicial. Por último, la estudiante realizó los demás cortes, como creimos que pasarían en nuestro a priori, sobre las esquinas del cubo sin ninguna dificultad. En este proceso se articularon las **aprehensiones secuencial y la aprehensión perceptiva**, aunque no estaba prevista en el analisis a priori sobre la	   

aprehensoin secuencial, sabemos que esta es inherente a toda construccion. La aprehension perceptiva se manifestó en vista que la estudiante debió manipular el cubo para percibir donde construir los planos e iniciar el recorte de las esquinas. Como resultado, y tal como lo pensamos en el a priori, la estudiante logró construir el cubo truncado.	 

Análisis a posteriori de Semnia

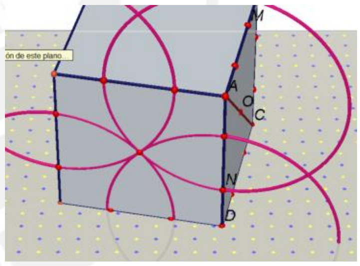
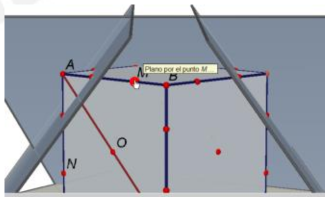
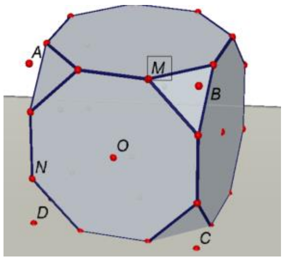
Cuadro 21. Tercer análisis de Semnia

Análisis del proceso de construcción	Construcción de la estudiante
La estudiante realizó los procedimientos descritos en nuestro a priori, los cuales iniciaron con la construcción a partir de los puntos de corte en la cara ABCD del cubo. Luego, con el mismo procedimiento realizado en dicha cara, ubicó los puntos de corte en las demás aristas. Esto evidenció la **aprehensión secuencial** de la estudiante, que aunque no precisamos en el a priori, es inherente a toda construcción. A continuación, la estudiante realizó una acción no pensada en el a priori al utilizar la herramienta “distancia” y medir si los puntos en las aristas realmente son equidistantes de cada vertice.	 

Creemos que esta acción fue realziada para costatar la congruencia entre los segemntos de cada arista. Luego, ella logró recortar adecuadamente el cubo inicial lo que articuló la **aprehensión secuencial con la aprehensión perceptiva** que pensamos en a priori, mas no estuvo presente la aprehension operatoria.	 

Análisis a posteriori de Yaneth

Cuadro 22. Tercer análisis de Yaneth

Análisis del proceso de construcción	Construcción de la estudiante
De la misma manera planificada en nuestro a priori, Yaneth procedió a ubicar los puntos en las demás aristas del cubo. A pesar de no estar precisado en el a priori, se desarrolló la **aprehensión secuencial** inherente a toda construcción. Luego, ella logró recortar adecuadamente el cubo inicial lo que evidenció la articulación entre la **aprehensión secuencial y la aprehensión perceptiva,** tambien prevista en el a priori, aunque con la ausencia de la aprehension operatoria que imaginamos a priori.	  

Cuarta parte: Pregunta 8

Pregunta 8:

Al recortar las esquinas del cubo, ¿qué objeto geométrico se ha extraído de cada esquina? Explique qué características posee dicho objeto.

Análisis a priori

Esperamos que en primer lugar los estudiantes manipulen el plano base para intentar percibir que tipo de figura fue recortada, luego respondan que la figura extraída de cada esquina del cubo es una pirámide, ya que en cada esquina del cubo podemos apreciar que se formó un triángulo y al haber observado que lo extraído es una porción del cubo, pensamos que deberían asociarlo a una pirámide. Posiblemente otros precisen que es una pirámide triangular; sin embargo, algunos podrían argumentar que la figura es un tetraedro o tetraedro regular.

Esta pregunta permitirá que los estudiantes **articulen la aprehensión perceptiva y la operatoria** (modificación mereológica). La perceptiva porque deben reconocer el objeto que se extrae producto de la truncatura, la operatoria porque se ha modificado la figura inicial mediante una extracción de una sección de esta. Las nociones geométricas envueltas son triángulos, poliedros, pirámide, tetraedro regular e irregular.

Análisis a posteriori de la estudiante Rosa

La figura 42 muestra las construcciones de Rosa. Tal como está descrito en el a priori, la estudiante movilizó nociones de triángulos y cubo mientras desarrolló la **aprehensión perceptiva** en el momento que manipuló el cubo para ver desde distintas posiciones y poder identificar la figura que se extrajo de cada vértice.

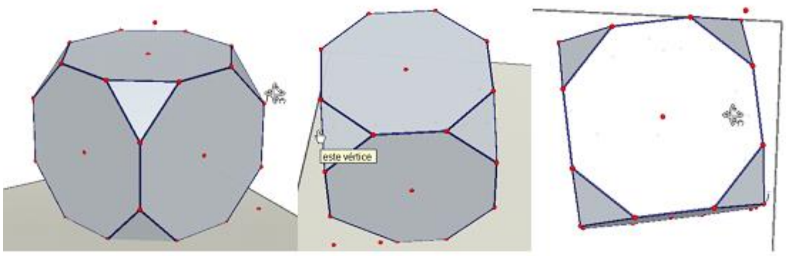


Figura 42. Construcciones de Rosa

La figura 43 muestra que la estudiante pudo desarrollar la **aprehensión operatoria: modificación óptica,** la cual no estuvo contemplada en nuestro a priori, ya que ella redujo las dimensiones del cubo y luego las incrementa notoriamente, imaginamos que con la finalidad de identificar la figura extraída de las esquinas.

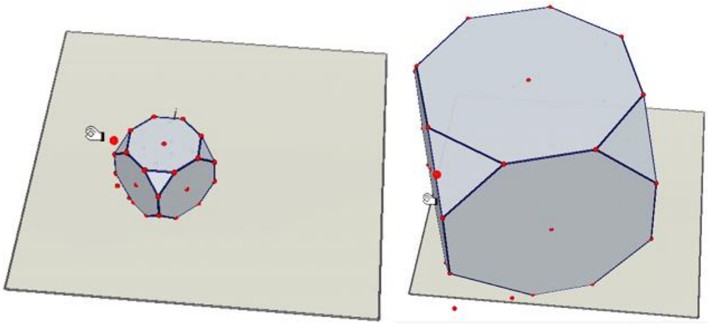


Figura 43. Construcciones de Rosa

En la ficha, la estudiante manifestó como lo afirmamos en el a priori, que la figura extraída de cada esquina del cubo es una pirámide (aunque ella realizó un bosquejo de un triángulo en la hoja), lo que permitió **articular las aprehensiones perceptiva y discursiva**, no pensadas en nuestro a priori. A pesar que no estuvo pensado en el a priori, también señala que esta figura tiene volumen, altura, grosor y área total. En otra parte de su escrito manifestó: "*la pirámide tiene un volumen y por lo tanto tiene cada cara, arista y vértice*". En esta parte Rosa articuló las aprehensiones previstas en el a priori como son la **perceptiva y operatoria (modificación óptica),** en el momento que cambia las dimensiones de su construcción contantemente, creemos que para percibir la figura extraída.

Análisis a posteriori de la estudiante Semnia

La estudiante manifestó: "*yo creo que quitándole un pedazo del cubo se ha adquirido una pirámide que tiene vértices, aristas, grosor, forma de triángulos, caras y tiene ángulos*". Esta afirmación se ajusta a lo previsto en el a priori sobre que podrían identificar una pirámide como la figura extraída producto de las truncaturas. Además, en la construcción de la estudiante (ver figura 44), y tal como está descrito en el a priori, movilizó nociones de triángulos, cubo y pirámide.

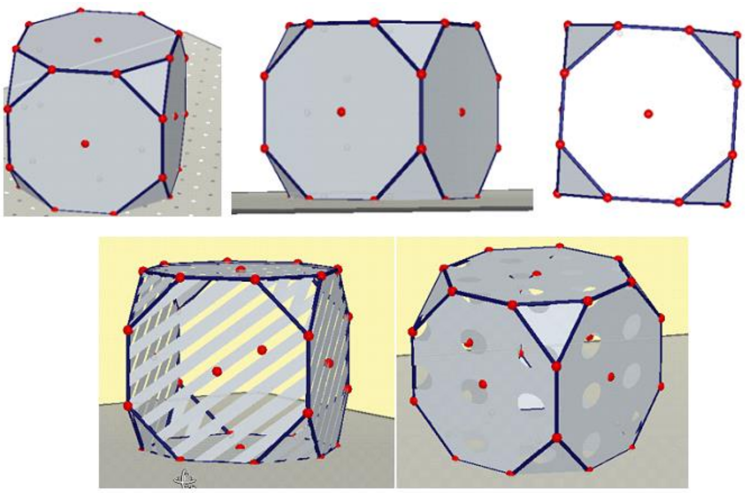


Figura 44. Construcciones de Semnia

Por otro lado, como lo planteamos en el a priori, la estudiante **articuló las aprehensiones perceptiva y operatoria (modificación posicional),** porqué ella manipuló el cubo como vemos en sus construcciones, e incluso cambió el relleno del mismo, sospechamos que para identificar la figura extraída de cada esquina.

Análisis a posteriori de la estudiante Yaneth

La estudiante manifestó: "*parece un triángulo. Hay cuatro triángulos*". En esta afirmación se observó que la percepción de la estudiante no ayudó a concretizar lo que estimamos en nuestro a priori. Por otro lado, la figura 45 muestra la construcción de la estudiante, de la cual cabe destacar que Yaneth no manipuló el objeto de ninguna manera, lo cual también se desconecta de lo pensado en el a priori, ya que inicialmente pensamos que ella manipularía el objeto.

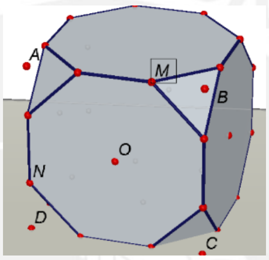


Figura 45. Construcción de Yaneth

Por otro lado, como afirmamos en el a priori, se movilizaron nociones como triángulos y cubo, lo que precisó el desarrolló la **aprehensión perceptiva**, la cual le hizo ver a las figuras de las esquina únicamente como triángulos.

De esta manera, creemos que la segunda actividad fue muy importante, ya que ella consolidó la articulación de las aprehensiones que planteamos en nuestros objetivos específicos. Por otro lado las dos actividades, pensamos, nos condujeron al logro no solo de nuestros objetivos trazados, sino de responder nuestra pregunta de investigación.

CONSIDERACIONES FINALES

Tomamos en cuenta la parte inicial de la investigación y la experiencia profesional para señalar que, la enseñanza de sólidos geométricos en la educación básica regular en el Perú con estudiantes del VII ciclo (entre 13 y 16 años) es relegada para el final de cada año lectivo y además, es enseñada de forma bastante somera. Pensamos que debido a esta situación que afronta la enseñanza de la geometría, los estudiantes cuando culminan el quinto año de secundaria (15- 16 años) no tienen los conocimientos mínimos requeridos (según los estándares del Ministerio de Educación del Perú) en lo que compete al área de geometría.

Las razones para tal situación pueden ser diversas; sin embargo, también creemos que es oportuno brindar algunas alternativas. En ese sentido, entendimos que era propicio realizar este trabajo de investigación sobre la construcción del cubo truncado, el cual toma aspectos de Almeida (2015). Este trabajo fue oportuno de realizar con estudiantes de quinto de secundaria de la educación básica regular. En ella nos interesó conocer las nociones de geometría plana y espacial que podían movilizar los estudiantes. De la misma forma, nos interesó conocer de qué manera los estudiantes desarrollan y articulan las aprehensiones mientras movilizan estas nociones geométricas al momento de construir el cubo truncado.

Además, como lo describimos en nuestro trabajo, pensamos que la inserción de los sólidos arquimedianos para su enseñanza en la educación básica es factible y necesaria, debido a que ella afianzaría las nociones geométricas que movilizan los estudiantes, y el desarrollo de procesos cognitivos asociadas a la articulación de aprehensiones en el registro figural en el momento que utilizan un ambiente de geometría dinámica para construir dichos sólidos arquimedianos. La construcción del cubo truncado es posible de realizar con estudiantes del nivel secundario y consideramos que constituye el primer paso para alimentar la posibilidad de su enseñanza en los colegios. En ese sentido, esperamos que nuestro trabajo sea un aporte para perspectivas futuras.

Por otro lado, el uso de la tecnología es un aspecto que debemos tener en cuenta por la importancia que este trae consigo. Al trabajar la construcción del sólido arquimediano cubo truncado, se requería de un ambiente que no solo permitiese realizar dicha construcción, sino que además posibilite su manipulación para ser observado de distintas posiciones. En ese sentido, el Cabri 3D es el ambiente que consideramos apropiado para la presente investigación.

Las razones de su elección no solo se sustentan en que dicho ambiente es el adecuado para la construcción del cubo truncado, sino que gracias a sus dos bondades como el arrastre y manipulación directa, funciones que otros ambientes no poseen, es posible de que cualquier construcción pueda ser modificada óptica y posicionalmente.

Otro aspecto del Cabri 3D del cual resaltamos su importancia es su aplicativo *applet*. Este aplicativo admite su instalación en Word y permite realizar la manipulación directa de algún objeto construido previamente. Este factor es muy valioso desde el punto de vista didáctico para la enseñanza en aula.

Estos argumentos creemos que han sido importante señalarlos en nuestras consideraciones finales. A continuación, presentamos también aspectos que consideramos valioso mostrar tales como: pertinencia del marco teórico y metodológico, relación entre los resultados de la parte experimental y los objetivos y la pregunta de investigación, y perspectivas futuras sobre estos tipos de investigaciones.

Pertinencia del marco teórico y metodológico

En la construcción del sólido arquimediano cubo truncado con el Cabri 3D con estudiantes de educación secundaria no solo se movilizaron nociones geométricas, sino que además los estudiantes al realizar las construcciones siguieron una secuencia de pasos previamente brindadas por el profesor.

Además, durante el proceso de construcción, los estudiantes debieron percibir las formas que integran un determinado objeto matemático; es decir, reconocer figuras de dimensión dos, que en conjunto constituyen otra de dimensión tres como es el caso de un cubo. Por otro lado, los estudiantes debieron realizar trazos y cortes a un determinado objeto con el fin de obtener otro, esto es realizar reconfiguraciones a un objeto matemático. Y por último, hubo que realizar cálculos y afirmaciones matemáticas en papel; es decir, expresar lo que observaron en la figura construida de manera algebraica o textual.

Por estas razones, consideramos que la Teoría de Registros de Representación Semiótica es la que mejor se ajustó a nuestro interés de investigación y la que permitió alcanzar el objetivo de la misma y responder la pregunta planteada en la tesis. Por otro lado, para realizar el análisis de la investigación consideramos al registro figural, que es propio para el estudio de figuras geométricas. Además, en este registro se puede realizar el estudio propio de la figuras mediante las aprehensiones que en ella desarrollan los estudiantes, tales como: aprehensión secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva. La articulación de estas aprehensiones fue el objetivo de nuestra investigación, en conjunto con las nociones geométricas que movilizan los estudiantes.

En el análisis de las tres actividades elaboradas por los estudiantes, tanto en las construcciones como en las preguntas asociadas a ellas, pudimos evidenciar la relación existente entre las nociones geométricas movilizadas por los estudiantes y las aprehensiones que ellos desarrollaron y articularon, lo que podría garantizar la comprensión del objeto de estudio, el cubo truncado.

En cuanto a la metodología, tomamos aspectos de la Ingeniería Didáctica porque ayudó a estructurar y desarrollar la investigación mediante la conexión con las cuatro fases que esta metodología ofrece: análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y el análisis a posteriori y validación. Dentro de los análisis preliminares, se hizo el estudio histórico de los sólidos arquimedianos en general y del objeto matemático cubo truncado en particular. Dentro del aspecto de la enseñanza y sus efectos, recordemos que el estudio de este objeto en la educación básica del Perú contribuiría a que los estudiantes movilicen nociones de geometría plana y espacial, y también que desarrollen proceso cognitivos asociados a las aprehensiones como el de la visualización y el razonamiento.

La parte experimental, fue diseñada de tal forma que permitió a los estudiantes movilizar nociones geométricas mientras desarrollaban y articulaban aprehensiones dentro del registro figural. La actividad principal, que fue la segunda actividad, posibilitó articular las aprehensiones perceptiva, operatoria, en todas sus modificaciones, y la discursiva principalmente. Esta articulación fue de mucha importancia desarrollarla y evidenciarla porque ahí es que se desarrollaron los procesos cognitivos de reconocimiento de una figura geométrica, visualización y demostración, los cuales admitieron la comprensión de un determinado tópico.

Nuestro análisis a priori por otro lado, nos encaminó a predecir el comportamiento que podían tener los estudiantes en la parte experimental, la cual se contrastó con el análisis a posteriori luego de la aplicación de las actividades. Es así, que en la validación pudimos notar que los estudiantes manifestaban comportamientos muy similares a los previstos en el a priori, sobre todo en lo referido a las construcciones.

Relación con el objetivo general y la pregunta de investigación

En relación a nuestro objetivo general: *Analizar la articulación de las aprehensiones del registro figural en estudiantes de quinto grado de educación secundaria cuando movilizan nociones de geometría en la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D*, podemos afirmar que nuestra investigación cumplió este objetivo, en virtud de las razones que pasamos a precisar:

La primera actividad, logró que los estudiantes desarrollen las aprehensiones secuencial y perceptiva principalmente en el sentido que, debían realizar la construcción en base a secuencias dadas por el profesor. La aprehensión secuencial tuvo que ser analizada teniendo en cuenta su estructura diádica como son: factores externos que condicionan la secuencia y la permisibilidad del Cabri 3D para construir objetos. En ese sentido, ninguno de los dos factores fue un impedimento para analizar esta aprehensión, ya que los factores externos (que no fueron determinantes para limitar esta aprehensión) presentes en las construcciones fueron por ejemplo: ruidos que provenían del patio del colegio, profesores que eventualmente ingresaban a la sal de cómputo y distraía la atención de los estudiantes y la propia distracción entre ellos producto de su edad.

En cuanto al Cabri 3D, este ambiente no presentó limitaciones para ninguna de las construcciones que los estudiante debían realizar, es más, el ambiente ofrece hasta más de un camino para una determinada construcción de algún objeto, bondad que algunos estudiantes descubrieron cuando se trata de la construcción de unidades figurales de dimensión uno como es un segmento, y de unidades de dimensión dos como el caso de la circunferencia y el triángulo. La aprehensión perceptiva por otro lado, ha sido analizada teniendo en cuenta las unidades figurales que conforman una figura; principalmente la que según Duval (2004a) es la que el estudiante percibe de manera automática que es la unidad figural de dimensión dos.

Por otra parte, se tuvo en cuenta la ley de cierre y continuidad en el sentido de Duval, ya que los estudiantes, de manera automática, percibieron de manera global un dibujo o una configuración. En ese sentido, entendemos que esta aprehensión se desarrolló cuando los estudiantes construyeron la representación de objetos como planos secantes y sobre todo cuando construyeron el triángulo ABC y lo dividieron en cuatro más pequeños. En esta parte evidenciamos que los estudiantes perciben rápidamente unidades figurales de dimensión dos (planos, triángulos) antes que unidades de dimensión uno o cero (segmentos, puntos). Es decir, fue más rápido percibir el triángulo ABC como un todo (ley gestáltica) que como una figura formada por la unión entre segmentos. De la misma forma, fue más fácil para ellos percibir los triángulos pequeños como figuras yuxtapuestas sobre el triángulo ABC, que verlos como reconfiguración del triángulo ABC.

La segunda actividad, facilitó no solo identificar el desarrollo de dos aprehensiones principalmente como son la operatoria y la discursiva, sino que también analizar cómo se articulan las mismas en los estudiantes, a medida que ellos movilizan nociones geométricas de dimensión dos. La construcción asociada a esta actividad, que fue la construcción del cubo truncado, admitió que la aprehensión operatoria, con todas sus modificaciones, se pongan de manifiesto mientras los estudiantes realizaban acciones como: trazado de la diagonal de una cara del cubo, construcción de circunferencias para ubicar los puntos de corte y recorte de las esquinas del cubo. Las funciones del arrastre y manipulación directa del Cabri 3D fueron utilizados por la mayoría de estudiantes, y contribuyó para poner de manifiesto el desarrollo de las modificaciones posicional y óptica.

La articulación entre las aprehensiones discursiva y operatoria se suscitó cuando los estudiantes resolvieron las preguntas en la ficha de actividades. Preguntas como el cálculo de la medida del radio en términos de la arista del cubo y la distancia entre dos puntos de corte en una misma arista. Estas cuestiones obligaron a los estudiantes a conectar las reconfiguraciones que realizaban con el discurso matemático que plantearon luego en sus fichas, discursos que expresaron en registro algebraico y aritmético en base a propiedades y fórmulas que los estudiantes manejaban, como el teorema de Pitágoras por ejemplo.

Por otra parte, en relación a nuestra pregunta de investigación: ¿*Cómo estudiantes de quinto grado de educación secundaria articulan aprehensiones del registro figural cuando movilizan nociones de geometría en la construcción del cubo truncado con el Cabri 3D*?, podemos declarar que se logró dar respuesta a ella, porque el análisis mostró que los estudiantes, mientras movilizaron nociones geométricas como las de puntos, planos, circunferencias, triángulos, teorema de Pitágoras, cubo y tetraedro entre otros, desarrollaron aprehensiones propias a cada construcción. Los estudiantes articularon aprehensiones del registro figural cuando, por ejemplo, la actividad los obligó a ubicar los puntos de corte en cada arista del cubo. Entonces, para este propósito, ellos debían percibir las unidades figurales de dimensión dos, presente en una unidad figural de dimensión tres (el cubo) y a su vez realizar una reconfiguración mediante circunferencias para encontrar estos puntos, articulando de esta forma las aprehensiones perceptiva y operatoria de modificación mereológica. De la misma forma, cuando realizaron el cálculo del radio en términos de la arista del cubo, ellos debieron reconfigurar con el trazo de la diagonal para formar un triángulo rectángulo, y luego llevar al discurso, por medio del registro algebraico, esta reconfiguración y realizar tratamientos dentro de este registro. Ahí los estudiantes articularon las aprehensiones operatoria y discursiva.

Como conclusión final podemos decir que fueron las actividades propuestas, basadas en construcciones y preguntas, las que permitieron analizar no solo el desarrollo de las aprehensiones, sino que analizar las articulaciones entre ellas, todo ello mientras de manera natural los estudiantes movilizaban nociones geométricas.

Perspectivas futuras

Pensamos que la investigación presentada, debe de ser continuada y ampliada a otros campos como el de la formación de profesores, con el uso de tecnologías como el Cabri 3D que demostró ser un ambiente apropiado para la construcción de los sólidos arquimedianos.

Por otro lado, creemos que se podría continuar con este trabajo, de tal manera que no solo se trabaje construcciones y preguntas como las planteadas, sino que se debería trabajar el volumen del cubo truncado, así como de otros sólidos arquimedianos, lo cual creemos sería muy interesante para consolidar la articulación entre las aprehensiones operatoria y discursiva principalmente.

Por último consideramos que es importante trabajos de investigación sobre la construcción de los demás sólidos arquimedianos tanto con estudiantes como con profesores en formación y profesores que en la actualidad ejercen su profesión. La finalidad es abrir caminos que permitan en un futuro, incluir la enseñanza de estos sólidos, mediados con el Cabri 3D, en la educación básica del Perú.

REFERENCIAS

Alexander, D. & Koeberlein, G. (2013). *Elementary Geometry*. Recuperado de http://www.atibook.ir/dl/en/Siences/Formal%20Sciences/mathematic/9781439047903_elementary_geometry_for_college_students.pdf.

Almeida, T. (2010). *Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estúdio de truncaturas baseadas no renascimento*. (Tesis de Maestría Profesional en Enseñanza de Matemática). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

Almeida, T. (2015). *A base de conhecimento para o ensino de sólidos arquimedianos*. (Tesis de Doctorado en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

Almeida, T. & Silva, M. (2012). O Cabri 3D como hábitat para o estudo dos sólidos de Arquímedes. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.), *VI Congreso Iberoamericano de Cabri Actas 2012-IBEROCABRI 2012*. 202-211. Ediciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigacao qualitativa em educacao-Uma introducao a teoria e aos métodos*. Portugal: Porto Editora LTDA. Recuperado de file:///E://LIBROS%20DESCARGADOS/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao%20(1).pdf

Borba, M. & Araujo, J. (2004). *Pesquisa Qualitativa em Educacao Matemática*. Belo Horizonte: Autentica Editora LTDA.

Campos, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Revista Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(2), pp. 1-9.

Cromwell, P. (1999). *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University.

Duval, R. (2012a). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Revista Electrónica de Educación Matemática Revemat*, 7(2), pp. 266-297. Recuperado de http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2012b). Abordaje cognitivo de problemas de geometría en términos de congruencia. *Revista Electrónica de Educación Matemática Revemat*, 7(1), pp. 118-138. Recuperado de http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Duval, R. (2004a). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Editorial Merlín.

Duval, R. (2004b). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Cali: Editorial Merlín.

España, Sociedad Andaluza de Educación Matemática (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada.

Gisele, B., Verbanek, V. & Goldoni, E. (2013). Poliedros arquimedianos: materiais manipuláveis e o software Poly como alternativa didática. *Sociedad Brasileira de Educación Matemática – XI Encontro Nacional de Educación Matemática*. pp. 01-10. Recuperado de http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2518_1018_ID.pdf

Gravina, M. (2001). *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.* (Tesis de Doctorado). Pontificia Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Guillen, G. (1997). El mundo de los poliedros. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Guillen, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?. En M. Mar, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. 21-68. Ediciones de la Universidad de Lleida. Granada, España.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación- Quinta edición.* México: Interamericana Editores S.A. Recuperado de https://www.academia.edu/6399195/Metodologia_de_la_investigacion_5ta_Edicion_Sampieri

Kepler, I. (1619). *Armonices Mundi*. Lincii: Bibl. Francof. Recuperado de https://ia701205. us.archive. org /1/items/ioanniskepplerih00kepl/ioanniskepplerih00kepl.pdf

Kösa, T. & Karakus, F. (2010). Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic geometry. *Procedia Social and Behevioral Sciences*, pp. 1385-1389. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810002442

Lima, E., Pinto, P., Wagner, E. & Morgado, A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media-Volumen 2*. Lima: Editorial Hozlo S.R.L.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa-Síntesis conceptual. *Revista de investigación en Psicología-UNMSM*, 9(1), pp. 123-146. Recuperado de http:// sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/investigacion_psicologia/v09_n1/pdf/a09v9n1.pdf

Perú, Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica IPEBA (2013). *Mapas de Progreso del Aprendizaje*. Lima. Recuperado de http://www.ipeba.gob. pe/estandares/Mapasprogreso_ Matemática _Geometria.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2013). *PISA 2012: Primeros resultados. Informe nacional del Perú*. Lima. Recuperado de http://www2. minedu. gob.pe/ umc/ PISA/Pisa2012/ Informes_de_resultados/Informe_PISA_2012_Peru.pdf

Pogorélov, A. (1974). *Geometría elemental*. Moscú: Editorial Mir.

Rangel, A. (1982). *Poliedros*. Rio de Janeiro: Editorial Libros Técnicos y Científicos S.A.

Salazar, J.V.F. (2009). *Génese instrumental na intercao com Cabri 3D: um estudo de Transformacoes geométricas no espaco*. (Tesis de Doctorado en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

Salazar, J.V.F, Silva, M. & Almeida, T. (2011). Geometría dinámica: una alternativa informática para o ensino de geometría espacial. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM 2011*, pp. 01-06. Recife, Brasil.

Silva, M. (2012). A construcao de situacoes problemas utilizando o Cabri 3D. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.), *VI Congreso Iberoamericano de Cabri Actas 2012-IBEROCABRI 2012*. 23-37. Ediciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Silva, M.& Salazar, J.V.F. (2012). Cabri 3D na sala de aula. En F. Ugarte y H. Azabache (Eds.), *VI Congreso Iberoamericano de Cabri Actas 2012-IBEROCABRI 2012*. 101-107. Ediciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Suarez, P. & Ramírez, G. (2011). Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. *Praxis y Saber: Revista de investigación científica* 2(3), pp.27-60. Recuperado de http://revistas.uptc.edu.co/revistas /index.php/praxis_ saber /article /view / 1109.

Taylor, S. & Bogdan, R. (1994). *Introducción a los métodos cualitativos*. Barcelona: Novagrafic S.I. Recuperado de http://colegiodesociologosperu.org/nw/biblioteca/ introduccion%20a%20 los %20metodos%20cualitativos%20 de%20 investigacion-taylor-bogdan. pdf

Toledo, N. & Velho, D. (2014). Analizando la teoría de registros de representación semiótica a partir de una actividad de modelación matemática. En N. Rubio (Coordinación), *VII Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas*. 228-243. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Torregrosa, G. & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Relime 10*(2), pp. 275-300. Recuperado de file:///C:/Users/n422/Downloads/ Coordinación %20de%20 procesos%20cognitivos%20en%20geometria.pdf

Torregrosa, G., Quesada, H. & Penalva (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Revistes Catalanes amb Accés Obert –RACO* 28(3), pp. 327-340. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/265820/ 35 3411.

Villarreal, F. (1912). *Poliedros regulares y semi-regulares*. Lima: Imprenta de la Escuela de Ingenieros.

ANEXOS

ACTIVIDADES CON LOS ESTUDIANTES

Apellidos y nombres : ……………………………………………………………………………

Edad : ………………………..…… Fecha: ……………….……….

Grado y sección : …………………………………………………………………….…..

Institución educativa : ……………………………………………………….………………….

ACTIVIDAD N° 01: EL CABRI 3D

Primera parte

Abra el Cabri 3D y luego realice la siguiente construcción:

Construya dos planos secantes al plano base, de tal manera que dichos planos sean secantes entre sí y después oculte los puntos con los que construyó los planos. Luego, ubique un punto en cada plano y denótelos con las letras A, B y C. Ahora, una los puntos A, B y C con segmentos de recta. A continuación, ubique el punto medio de cada segmento y denótelo con las letras P, Q y R (P en AB, Q en AC y R en BC). Por último, con la herramienta "**triángulo**" construya los triángulos APQ, PQR, PBR, RQC y asígnele un color distinto a cada triángulo.

Segunda parte

Utilice las herramientas área, longitud y la función del arrastre para responder las siguientes preguntas:

Pregunta 01:

¿Cuál es la relación entre las áreas de los triángulos ABC y el triángulo PQR?, justifique su respuesta.

Pregunta 02:

¿Cuál es la relación entre el perímetro del triángulo PQR y el perímetro del triángulo ABC?, justifique su respuesta.

Pregunta 03:

El triángulo ABC ¿pertenece a alguno de los tres planos?, manipule para observar.

Si la respuesta es SI, indique a que plano pertenece.

Si la respuesta es NO, ¿qué punto(s) y de qué manera debemos arrastrar para lograr que el triángulo ABC se encuentre en el plano base?

ACTIVIDAD N° 02: CONSTRUCCIÓN DEL CUBO TRUNCADO

Apellidos y nombres : ………………………………………………………………………………

Fecha : ……………………………………………..

Primera parte

Abra el Cabri 3D y luego realice la siguiente construcción:

Abra el Cabri 3D
Construya un cubo
Elija una cara del cubo y nómbrelo con las letras ABCD.
Ubique el centro de la cara ABCD y nómbrelo con la letra "O"
Construya una circunferencia en la cara ABCD, tomando como centro el vértice "A" y punto de paso "O"
Marque los puntos de intersección de la circunferencia con las aristas y nómbrelo con las letras M y N (M en AB y N en AD).
Construya tres circunferencias adicionales en la misma cara ABCD del cubo, las cuales deben tener como centros los vértices B, C y D y como punto de paso el punto "O".
Marque los puntos de intersección de las circunferencias con las aristas (no le asigne letras a dichos puntos).
Oculte las circunferencias construidas.

Segunda parte

Pregunta 04:

De acuerdo con su construcción, ¿qué segmentos representan el radio de la circunferencia?

Pregunta 05:

Si asumimos que la arista del cubo es “a”, ¿a qué es igual el radio de la circunferencia en términos de la arista “a”? expréselo matemáticamente.

Pregunta 06:

¿Cuál es la medida del segmento BM en términos de la arista “a”?, expréselo matemáticamente.

Pregunta 07:

En términos de la arista “a” del cubo construido, ¿exprese matemáticamente la distancia entre los puntos de intersección de dos circunferencias sobre una misma arista?

Tercera parte

…Continúe con la construcción realizada en la primera parte: En todas las aristas restantes del cubo ubique los puntos como en la cara ABCD, siguiendo el mismo procedimiento u otro que usted crea conveniente (no le asigne letras a ningún punto). Oculte todas las circunferencias. Recorte todas las esquinas del cubo tomando como referencia los puntos marcados en las aristas.

Cuarta parte

Pregunta 8:

Al recortar las esquinas del cubo, ¿qué objeto geométrico se ha extraído de cada esquina? Explique qué características posee dicho objeto.