PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CONOCIMIENTOS DE UN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA SOBRE EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MEDIATRIZ BAJO EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA: UN ESTUDIO DE CASOS.

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

ELMER GUEVARA VÁSQUEZ

Dirigido por

NORMA RUBIO GOYCOCHEA

San Miguel, 2015

A mis padres Miguel y Graciela por su apoyo, consejos, amor, ayuda en los momentos difíciles. Ellos me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi carácter, mi empeño, mi perseverancia, mi coraje para conseguir mis objetivos.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, que por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada "Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014".

A la Pontificia Universidad Católica del Perú que por intermedio de la Maestría de la Enseñanza de la Matemática ha permitido hacer esta maestría.

De manera muy especial y sincera agradezco a la Dra. Norma Rubio Goycochea por haber aceptado dirigir mi tesis, por su infinita paciencia y su valioso aporte sin lo cual no hubiese sido posible culminar este proyecto.

A los jurados de este trabajo de investigación Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre y Mg. Miguel Gonzaga Ramírez por sus correcciones y sugerencias realizadas.

A los profesores de la Maestría en enseñanza de la Matemática de la PUCP. En especial a la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, Mg. Mariano Gonzales Ulloa y Dr. César Carranza Saravia, por haber contribuido en mi formación y en la concreción de uno de mis objetivos personales.

A mis queridos amigos y amigas de la Maestría de Enseñanza de la Matemática de la PUCP – PRONABEC, con quienes tuve el gusto de compartir experiencias durante este periodo de lucha por alcanzar nuestras metas.

Y en especial a todas aquellas personas que siguen estando cerca de mí y que le regalan a mi vida algo de ellos.

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo identificar los conocimientos y algunas creencias de un profesor de educación secundaria, sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz, usando algunas herramientas proporcionadas por el enfoque Ontosemiótico (EOS). Se ha tomado del mencionado enfoque, las categorías de análisis de los conocimientos del profesor y las trayectorias didácticas en el proceso de instrucción. La metodología utilizada es del tipo cualitativa, interpretativa y descriptiva, y utiliza el estudio de casos para describir y analizar los conocimientos matemáticos y didácticos que pone en juego un profesor durante un proceso de instrucción. El análisis de las prácticas y objetos matemáticos muestran que el profesor tiene un conocimiento común del objeto matemático mediatriz, pero no un conocimiento especializado del mismo.

PALABRAS CLAVE: conocimientos matemáticos y didácticos, creencias, Enfoque Ontosemiótico, mediatriz.

ABSTRACT

This research has as objective to identify knowledge and some beliefs of a teacher of secondary education, about the teaching learning process of the bisector, using certain tools provided by the Ontosemiotic approach (EOS). It has been taken from the mentioned approach, the analysis categories of teacher knowledge and didactic paths in the process of instruction. The methodology used is qualitative, interpretative and descriptive type, and it uses the case studies to describe and analyze the mathematical and didactic knowledge that a teacher puts in play during an instruction process. The analysis of the practices and mathematical objects show that the teacher has a common knowledge of the bisector mathematical object, but no specialized knowledge of it.

KEY WORDS: mathematical and didactic knowledge, beliefs, ontosemiotic approach, bisector.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El profesor, por desempeñar un rol protagónico dentro del sistema educativo, tiene una alta incidencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es por ello, que en los últimos años ha surgido un interés creciente por estudiar ¿Qué conoce el profesor de matemática? En ese sentido, diversos grupos de investigación han presentado variados modelos teóricos que describen los tipos de conocimientos que el profesor pone en juego durante un proceso de instrucción; por ejemplo, uno de los pioneros fue el modelo del conocimiento de profesor propuesto por Lee Shulman (1986), por su parte, Godino (2009) propone el modelo de conocimiento didáctico matemático (CDM), el cual tiene en cuenta las diversas facetas o dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos.

Otro de los constructos que se ha convertido en importante foco de atención para los investigadores en educación matemática es el sistema de creencias del profesorado. Es así, que las investigaciones destacan cómo un aspecto importante, a las creencias de como son y cómo deben ser los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es en ese sentido, que surge nuestro interés por estudiar los conocimientos y algunas creencias de un profesor de matemática puestos en juego durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz con estudiantes de educación secundaria. Para ello, nos hemos propuesto dentro de nuestros objetivos describir las prácticas realizadas por el profesor en estudio, las que nos han servido para reconocer los significados implementados; analizar las prácticas objetos y procesos teniendo en cuenta el primer nivel de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e instrucción matemática (EOS). A continuación presentamos la estructura de la investigación, compuesta por seis capítulos.

En el primer capítulo presentamos el planteamiento y justificación del problema de investigación. En este capítulo, revisamos algunas investigaciones con relación al tema específico mediatriz, planteamos el problema que dio origen a esta investigación, enunciamos los objetivos y justificamos la importancia de su estudio.

En el segundo capítulo, presentamos de manera resumida el enfoque teórico que sustenta nuestra investigación (EOS), ya que, creemos cuenta con las herramientas adecuadas para los fines que perseguimos. Las herramientas que tendremos en cuenta son las configuraciones de objetos y procesos, las trayectorias didácticas en el proceso de instrucción, categorías de análisis de los conocimientos del profesor y algunos aspectos de la idoneidad didáctica.

En el tercer capítulo, se presenta la metodología de investigación, que por ser del tipo cualitativa y tratarse de un estudio de casos consta de una secuencia de actividades realizadas mediante las seis faces propuestas por Cols (2003).

En el cuarto capítulo, realizaremos un estudio del objeto matemático mediatriz. Para ello, analizamos dos textos que pertenecen al nivel se educación superior (Geometría Curso Superior, de la editorial Bruño y geometría moderna de Moise), además, los textos de matemática proporcionados por el Ministerio de Educación del Perú y los libros de Matemática para Todos de la editorial Apoyo, textos que corresponden al nivel secundario. El objetivo de este capítulo es identificar y fijar el significado institucional del objeto matemático mediatriz.

En el quito capitulo abordamos el diseño de dos cuestionarios y además, realizaremos el análisis a priori de las respuestas esperadas usando para ello las configuraciones de objetos primarios.

A lo largo del sexto capítulo realizaremos el análisis de los datos obtenidos en la presente investigación, dicho análisis contiene lo siguiente: análisis de prácticas matemáticas usando las trayectorias didácticas, análisis de las respuestas obtenidas a los cuestionarios 1 y 2 finalmente las respuestas y análisis de la entrevista.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación, que están dadas en función a la pregunta de investigación, los objetivos de investigación. Además, damos sugerencias y preguntas abiertas que consideramos puedan servir para futuras investigaciones con temas afines a la presente.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Resumen

En este capítulo mostramos la tendencia que tienen diversos grupos de investigación por acercarse a los conocimientos matemáticos que debe poseer el profesor de matemática para su práctica efectiva. A si como también, presentamos los principales antecedentes de investigación relacionados con el tema específico mediatriz de un segmento rectilíneo, planteamos el problema que dio origen a esta investigación, enunciamos los objetivos y finalmente justificamos la importancia de su estudio.

1.1 ANTECEDENTES

Diversas investigaciones señalan que durante los últimos años se ha incrementado el interés por los conocimientos matemáticos, que el profesor debe tener para su enseñanza efectiva (Ramos, 2005; Rubio, 2012; Pino, 2013; Pino, Font y Godino 2013). Del mismo modo se tiene la firme convicción de que los profesores son piedra angular en cualquier programa dedicado a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, (Lebrija, Flores y Trejos 2010). Es por ello, que se debe prestar mucha atención a lo que piensen, hagan o sientan (Ramos y Font 2008); es decir, prestar atención a su manera personal de entender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Así mismo, las creencias de los profesores sobre cómo se debe enseñar, cómo aprende el alumno y cuál es la naturaleza de los conocimientos matemáticos influyen en los programas de reforma educativa (Thompson, 1992, Lebrija, Flores & Trejos 2010), de ahí que, es importante conocerlas para tenerlas presente al momento de planificar las acciones a nivel micro, meso y macro educativas .

Nuestro interés por el estudio de los conocimientos y creencias del profesor acerca de la enseñanza y aprendizaje de la mediatriz, se debe a que existen estudios los cuales señalan que éstas influyen en la práctica docente, tanto en la forma de presentar un tema (manera tradicional, enunciar el teorema o propiedad y definir), como en la manera que se redactan las definiciones y propiedades; llegándose a considerar que las creencias de los profesores son una especie de filtro a través de las cuales toman sus decisiones (Ramos, 2005; Rubio, 2012). Por otro lado, la mediatriz está incluido en el diseño curricular elaborado por el Ministerio de

Educación del Perú como parte de las líneas y puntos notables, este tópico matemático puede ser usado en diversos contextos, tales como: como herramienta para construir otros conceptos (circuncentro, dividir un segmento en un numero par de partes iguales, hallar el centro de una circunferencia, etc.); como herramienta para realizar demostraciones de teoremas y propiedades geométricas (propiedad de los puntos que conforman la mediatriz, eje de simetría de figuras planas, etc); resolución de problemas geométricos; etc.

Cabe mencionar que en la literatura revisada, no se han encontrado investigaciones que tengan como objeto de estudio las creencias de los profesores sobre el aprendizaje y/o enseñanza de la mediatriz. Pero sí hemos encontrado investigaciones a nivel nacional e internacional que tienen como foco algunas aplicaciones del objeto matemático mediatriz a nivel de la educación básica regular, entre ellas tenemos: Patricio (2010) diseña actividades de aprendizaje siguiendo las fases del modelo de Van Hiele de los conceptos de mediatriz y circuncentro del triángulo; Montoro (2009) se propuso indagar a cerca de las concepciones de estudiantes de profesorado sobre la demostración matemática, uso para ello tres propiedades relacionadas con la mediatriz; Reyes y Monserrat (2014) realizaron un estudio referente al tratamiento del contenido rectas y puntos notables en los textos de educación básica en México usando el método de análisis de contenido y análisis de definiciones; Reyes y Monserrat (2014) se propusieron mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes relacionados con las rectas y puntos notables de un triángulo a nivel escolar y universitario. A continuación mencionaremos algunos de estos aportes.

En el trabajo de Patricio (2010) se concluyó que la enseñanza a través de software de geometría dinámica genera nuevas expectativas en los estudiantes ya que en poco tiempo se accede a una amplia gama de formas y posiciones las que son manipuladas permitiéndoles encontrar definiciones y propiedades. Por otro lado, las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele permiten mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Consideramos, que esta investigación es importante debido a que se ocupa del objeto matemático de nuestro interés, nos muestra un avance en el aprendizaje de los estudiantes luego de la aplicación de las actividades planificadas; además, deja abierta ciertas interrogantes tales como ¿Si los estudiantes que son capaces de resolver problemas usando un software de geometría dinámica, serán capaces de resolverlos haciendo uso de lápiz y papel? De esta manera, creemos que siempre hay algo nuevo por explorar en educación matemática; dependiendo de cómo concebimos la enseñanza, los contenidos a enseñar y las creencias de los sujetos involucrados en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Por otro lado, Reyes y Monserrat (2014) concluyeron que en la secundaria se trabajan los cuatro puntos de corte de las líneas notables (Ortocentro, Baricentro, Circuncentro e Incentro) en los diferentes tipos de triángulos. En lo que concierne a la mediatriz encontraron que, en los textos se inicia el tema trazando la mediatriz de un segmento y haciendo preguntas que lleven al estudiante a realizar conjeturas de las propiedades que caracterizan a esta recta, luego, se pide al estudiante trazar las mediatrices de los lados de diferentes tipos de triángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo). Sin embargo, no se proponen actividades que lleve al estudiante a explorar dichas situaciones, que sería lo más indicado para apropiarse de los conceptos pretendidos.

Esta investigación nos muestra que los libros de texto son de alto impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es así que condicionan de forma importante las prácticas discursivas y efectivas los profesores, es por ello que la tenemos presente en nuestra investigación.

De otro lado, Chávez & Parraguez (2014) identificaron algunas dificultades que se presenta al estudiar las líneas notables; pues, concluyen que incluso a nivel universitario (futuros profesores) confunden los diferentes elementos del triángulo; por ejemplo, confunden entre mediatriz y mediana en un triángulo.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Teniendo en cuenta que existen algunas investigaciones a nivel nacional e internacional que muestran las dificultades presentadas por los estudiantes al abordar el objeto matemático mediatriz y sabiendo que el docente desde su práctica profesional, juega un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se torna indispensable que el profesor conozca a profundidad el contenido que enseña. En ese sentido, creemos que el profesor es un agente que toma decisiones, tiene creencias y sus juicios inciden en su práctica profesional, es por ello, nuestro interés por el estudio de los conocimientos que debe tener un profesor de educación secundaria para la enseñanza y aprendizaje de la mediatriz de un segmento. En tal sentido, nos planteamos la siguiente pregunta.

¿Cuáles son los conocimientos y algunas creencias que tiene el profesor de matemática acerca de la enseñanza y aprendizaje de la mediatriz en de educación secundaria? Para responder a esta pregunta es necesario plantearnos un objetivo general, ligado a ciertos objetivos específicos.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Identificar los conocimientos y algunas creencias de un profesor de educación secundaria, sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz, usando algunas herramientas proporcionadas por el enfoque Ontosemiótico.

1.3.2 Objetivos específicos

Para lograr este objetivo general, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

1. Estudiar el objeto matemático mediatriz para conocer sus diferentes significados.
2. Describir las prácticas realizadas por el profesor en estudio**,** para reconocer los significados implementados.
3. Analizar las prácticas, objetos y procesos matemáticos teniendo en cuenta el primer nivel de análisis didáctico.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Se ha elegido el objeto matemático mediatriz, debido a su importancia en la educación secundaria del Perú. En el Diseño Curricular Nacional (DCN) está contemplado dentro del organizador correspondiente a Geometría y medición, propuesto para su enseñanza en los ciclos VI y VII de la Educación Básica Regular (EBR) como parte del estudio de las líneas y puntos notables del triángulo. Por otro lado, este tópico matemático, nos garantiza la construcción de diferentes conceptos en la geometría plana, por mencionar algunos: determinar el punto medio de un segmento, construir el circuncentro de cualquier triángulo, trazar el eje de simetría de los objetos que lo tengan, etc.

Consideramos también, que este estudio es importante, porque nos permitirá identificar los conocimientos que un profesor de educación secundaria activa durante las diversas facetas del proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz. Además, podremos usar el modelo propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento e instrucción matemática (Godino, 2009), cuyas categorías de análisis pueden ser usadas como herramientas para tal fin.

Por otro lado, consideramos que esta investigación es relevante, ya que en nuestro medio no existen investigaciones que analicen los conocimientos de los profesores puestos de manifiesto durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz. Solo se han encontrado investigaciones que analizan dicho objeto matemático bajo otras perspectivas, como por ejemplo: análisis de contenido y definiciones (Reyes & Monserrat, 2014), concepciones respecto a la demostración en matemática (Montoro, 2009), como herramienta para la construcción del objeto matemático recta de Euler (Chávez & Parraguez, 2014), las cuales brindan aportes apoyan nuestra investigación.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

Resumen

En este capítulo presentaremos de manera resumida el enfoque teórico que sustenta nuestra investigación, esto es, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), el mismo que surge a partir de las investigaciones en la didáctica de la matemática y que creemos, cuenta con las herramientas adecuadas para la investigación en matemática educativa. Los elementos del EOS que usaremos son: las configuraciones de objetos intervinientes y emergentes, que nos servirá para hacer una análisis de prácticas objetos y procesos en el proceso de instrucción; objetos institucionales y personales, que nos permitirá identificar los significados que maneja el profesor al responder las actividades planteadas y los usos y significados implementados; la teoría de la idoneidad didáctica, la que nos brinda subsidios para la elaboración de los cuestionarios.

2.1 EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En esta investigación, con la finalidad lograr los objetivos optamos como marco teórico al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS), desarrollada por Godino y colaboradores en diversos trabajos de investigación Godino (2003), Godino, Batanero y Font (2011).

Según Godino (2014), el Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, articulando para ello diferentes aportes teóricos del conocimiento matemático que contribuyan a mejor la calidad de su enseñanza y aprendizaje. Esta teoría la utilizaremos porque aporta herramientas que nos permitirá hacer un análisis detallado de los conocimientos y algunas creencias que tienen un docente (sujeto de investigación) de educación secundaria en el proceso de instrucción del objeto matemático mediatriz.

A continuación, describiremos brevemente algunas nociones del EOS que serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo.

2.2 EMERGENCIA DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

De acuerdo con Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2009), el EOS asume los presupuestos de una postura pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas, este es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar como mínimo dos niveles de objetos que emergen del sistema de prácticas. En el primer nivel se tiene aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) y en el segundo nivel se tiene una tipología de objetos que emergen de las distintas formas de ver, hablar, operar, etc., sobre los objetos del nivel anterior.

2.2.1 Primer nivel: configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En estudios presentados por diversos autores, como los de Ramos (2005), Godino, Batanero y Font (2009) y Velásquez (2014) se afirma que para realizar una buena práctica matemática y por ende conseguir una adecuada interpretación de sus resultados se necesita el funcionamiento de ciertos conocimientos. Estos pueden ser: el uso del lenguaje verbal o simbólico que conforman la parte ostensiva de los conceptos, proposiciones y procedimientos, los que a su vez intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen las prácticas matemáticas son satisfactorias. La movilización de elementos como lenguajes, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones, corresponde a lo que en el EOS se denomina configuraciones. Estas serán cognitivas, si se trata de objetos persónales y serán epistémicas, si se trata de objetos institucionales. En figura 1, se muestra la forma como interactúan diversos elementos como: situaciones- problemas, lenguaje matemático, definiciones (conceptos), procedimientos, proposiciones y argumentos de manera articulada para que de esta manera tener una herramienta que permita realizar un análisis apropiado de las prácticas matemáticas.

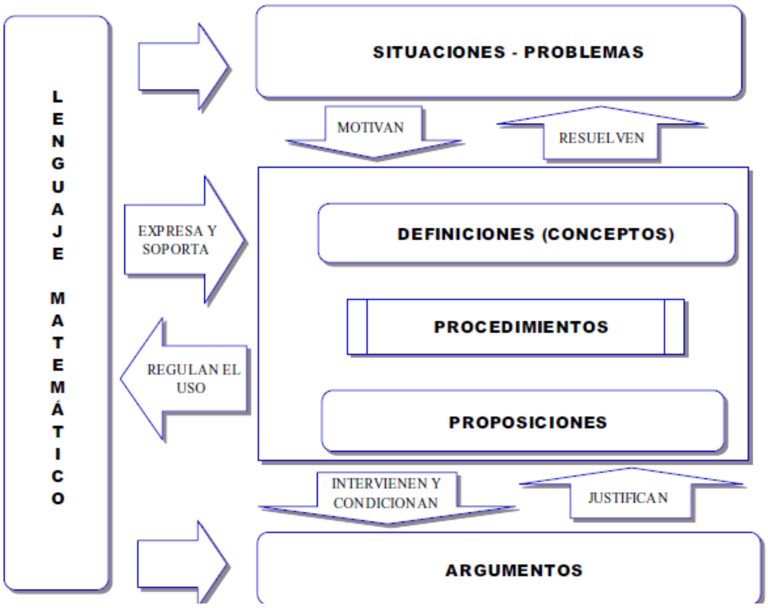


Figura 1. Configuraciones de objetos primarios.
Fuente: Godino, Batanero & Font (2009, p. 7)

El EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)

- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,...)

- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...)

- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos,...)

- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...)

- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...)

Para un análisis más preciso de la actividad matemática en el enfoque Ontosemiótico se ha introducido la tipología de objetos matemáticos antes mencionados, los que están relacionados entre sí formando redes de objetos emergentes e intervinientes en los sistemas de prácticas (Pino, 2013), que en el EOS se conoce como *configuraciones.*

Configuración epistémica y Configuración cognitiva

En el EOS, se entiende por configuraciones de objetos primarios a la articulación de los seis objetos primarios antes mencionados. Estas configuraciones pueden ser epistémicas si se activa un conglomerado de objetos institucionales, y pueden ser cognitivas si se activa un conglomerado de objetos personales, según cómo se considere la práctica matemática (institucional o personal).

2.3 LOS OBJETOS PERSONALES Y SU SIGNIFICADO

Para Ramos y Font (2008), el EOS considera a los objetos como entidades que surgen en el sistema de prácticas hechas en un campo de problemas. Para estos investigadores:

> Un objeto personal es algo de lo que se tiene conciencia subjetiva. El hecho de que los individuos pueden hablar sobre sus objetos personales, o realizar prácticas discursivas sobre ellos, conduce a una vía de investigación que ha adquirido gran relevancia en Matemática Educativa (Ramos y Font, 2008, p 237)

Por otro lado, el hecho de que un individuo sea capaz de hablar de los objetos personales también implica que haya pasado por una clase, la que le ha facilitado el diálogo con sus pares, lo cual vendrá a ser una norma de comportamiento para el sujeto. Siguiendo en la misma línea de los autores mencionados, cabe mencionar que el significado del objeto personal consiste en las prácticas que realiza la persona y en la planificación que esta haría para resolver problemas similares, dando de esta manera una utilidad permanente a la planificación de las prácticas.

2.4 LOS OBJETOS INSTITUCIONALES Y SU SIGNIFICADO

Pese a que los significados de los objetos personales son fenómenos de carácter individual, estos se han ido formando en el seno de las instituciones y por ende también tienen un carácter colectivo, por este motivo el EOS toma en cuenta las instituciones, las nociones institucionales y los significados institucionales.

Para Ramos y Font (2008), las personas distinguen entre objetos personales y objetos institucionales cuando al momento de expresarse, para referirse a los objetos personales usan términos en primera persona, mientras que al referirse a los objetos institucionales usan términos en tercera persona.

Para el EOS la dialéctica personal- institucional es algo clave dentro de toda práctica matemática, ya que el estudiante transita de tener un carácter individual a tener un carácter social dentro de una institución, por lo que debe estar preparado para distinguir entre objetos personales e institucionales.

2.5 SIGNIFICADOS DE LOS OBJETOS PERSONALES DEL PROFESORADO

Dentro de lo planteado por el EOS, los objetos personales didácticos son considerados como entidades emergentes en un sistema de prácticas personales, cuyo significado toma relevancia en las de prácticas matemáticas. Dentro de esta postura, a los objetos matemáticos se les asigna un estatus derivado, mientras que, a las prácticas matemáticas se les un lugar privilegiado. De acuerdo con Ramos y Font (2008)

> La caracterización que hace el EOS de los objetos matemáticos y didácticos como emergentes de los sistemas de prácticas, al igual que la de sus significados, en términos de prácticas, puede sustituir sin muchos problemas a los términos creencia, concepción y conocimiento si estos tres constructos se entienden básicamente como una disposición para la acción (p. 239)

Desde el punto de vista del EOS los términos creencias pueden ser sustituidos por los objetos matemáticos al igual que sus significados ya que dentro de este enfoque las creencias son concebidas como una disposición para la acción.

2.6 TIPOLOGÍA DE SIGNIFICADOS

Para explicar la dialéctica institucional-personal el EOS presenta cuatro tipos de significados institucionales.

- ✓ *Implementado*: En un proceso de estudio específico, es el sistema de prácticas que implementa el docente de manera efectiva.
- ✓ *Evaluado*: Consiste en el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- ✓ *Pretendido*: Atañe al sistema de prácticas que se incluye en la planificación del proceso de estudio.
- ✓ *Referencial*: Concierne al sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido; este se determina mediante un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como reparando en la diversidad de contextos de su uso.

Respecto a los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- ✓ *Global*: Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales, relativas a un objeto matemático, que es capaz de manifestar el sujeto.
- ✓ *Declarado*: Da cuenta sobre las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas; incluye tanto a las correctas como a las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- ✓ *Logrado*: Abarca las prácticas que resultan conforme con la pauta institucional establecida.

2.7 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

En este apartado abordaremos un modelo que comprende categorías para un análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, basado en los aportes del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática. Además, se incluye pautas para cuestiones de evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos, los cuales nos servirán para el análisis y reflexión sobre práctica docente.

Rubio (2012) manifiesta que el estudio del término *conocimiento* del profesor ha sido retomado con fuerza en diferentes investigaciones, cuyos supuestos básicos son dos: el profesor es un sujeto racional, que tiene creencias, emite juicios y genera rutas propias de desarrollo profesional; y, además, los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan, lo cual da lugar al supuesto de que no solo los procesos formales del pensamiento del profesor influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino también sus conocimientos implícitos y explícitos.

En los trabajos de Shulman (1986) y, posteriormente en Shulman (1987), se propone en primer lugar tres categorías del conocimiento del contenido: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge,* PCK) y conocimiento curricular. Posteriormente, se propone siete categorías de conocimiento que hacen posible la enseñanza, que son las siguientes: (1) conocimiento del contenido, (2) conocimiento pedagógico general, (3) conocimiento del currículo, (4) conocimiento pedagógico del contenido (PCK), (5) conocimiento de los estudiantes y sus características, (6) conocimiento de los contextos educativos y (7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Godino (2009) manifiesta que, durante muchos años, ha prevalecido la noción del conocimiento pedagógico del contenido (PCK). Luego, se ha dado paso a la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza" (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) en los trabajos de Ball y colaboradores Ball, Lubiensqui & Mewborn (2001), (citado en Godino, 2009), a partir de la observación del trabajo de profesores en el aula. Este análisis ha permitido clasificar los conocimientos del profesor en dos grandes grupos, como se muestra en la figura 2: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido. En la primera categoría se hace una distinción entre Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK) y Conocimiento en el Horizonte Matemático. En la segunda categoría se distingue entre Conocimiento del contenido los Estudiantes (KSC), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y Conocimiento del Currículo.

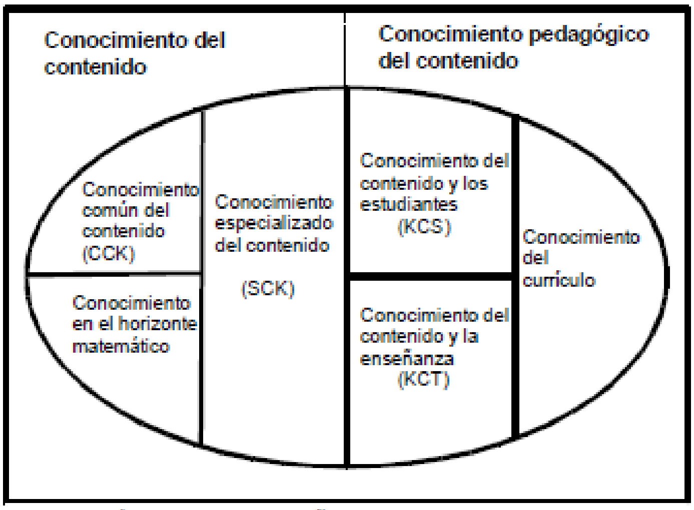


Figura 2. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)
Fuente: Godino (2009, p. 16)

2.7.1 Facetas y niveles de análisis didáctico según el EOS

La didáctica tiene como fin primordial el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2009). Lo que implica una interrelación entre contenido, estudiantes, profesor y medios tecnológicos. Tales procesos se llevan a cabo en un contexto institucional y social determinado que hace posible la enseñanza y el aprendizaje. Dado que, existe una interacción entre los distintos agentes educativos, es necesario contar con distintas facetas y niveles de análisis didáctico.

El EOS propone como las siguientes facetas para el análisis didáctico de los procesos de instrucción: *epistémica* (conocimiento relacionado al contexto institucional), *cognitiva* (conocimientos personales de los estudiantes), *afectiva* (actitudes, valores, creencias, etc.), *mediacional* (recursos tecnológicos, tiempo), *interaccional* (patrones de interrelación entre el profesor y alumno), *ecológica* (relación con el entorno social, político, económico, etc.)

Figura 3. Facetas y niveles del conocimiento del profesor
Fuente: Godino (2009, p. 21)

En cuanto a los niveles de análisis, el EOS propone los siguientes: *prácticas matemáticas* y *didáctica* (descripción de las tareas realizadas para resolver las tareas matemáticas), *configuraciones de objetos y procesos* (descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas), *normas y metanormas* (hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de instrucción), e *idoneidad* (identificación de potenciales mejoras que incrementan la idoneidad didáctica).

2.7.2 Evaluación y Desarrollo del Conocimiento Didáctico- Matemático

En Godino (2009) se incluye una guía de consignas sobre el conocimiento matemático, que bien puede ser usado por un observador externo como instrumento para evaluar un proceso de estudio implementado. Con la finalidad de evaluar un proceso, el mencionado autor propone ejemplos de tablas que incluyen consignas, en concordancia con los niveles de análisis didáctico los cuales presentamos en la tabla 1.

Tabla 1. Conocimiento del contenido (Común, especializado, y ampliado)

Faceta epistémica	Cognitiva
Conocimiento común	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
- Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
- Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
- Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
- Argumentos	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones. Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
- Conexiones	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Fuente: Godino (2009, p. 25)

La configuración de "objetos y procesos" nos lleva a pensar de manera sistémica en los diferentes procedimientos de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego con diferentes grados de formalidad en su enunciación. Así mismo en las diferentes formas de argumentar y justificar los procedimientos. Todo ello, guía el proceso y nos permite plasmar lo que el estudiante podría aprender.

La reflexión sobre el aprendizaje de los alumnos queda facilitada por los tipos de consignas incluidas en la tabla 2.

Tabla 2. Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes (aprendizajes)

Faceta cognitiva + afectiva	Consigna
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, enunciados, argumentaciones,…)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizajes	Formula cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).
Actitudes, emociones, creencias, Valores	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

Fuente: Godino (2009, p. 26)

La noción de configuración cognitiva incluye componentes similares a la configuración epistémica, esta se realiza a partir de los protocolos de respuesta de los estudiantes o de las observaciones de exploraciones argumentativas de los estudiantes.

La reflexión sobre las relaciones entre la enseñanza y aprendizaje y la identificación de consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje y los modelos de gestión de clase, se puede facilitar con el tipo de consignas incluidas en la tabla 3.

Tabla 3. Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza

Faceta instruccional (interaccional + mediacional)	**Consigna**
Configuración didáctica:	
Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido	Describe la configuración didáctica que implementaría usando la tarea matemática dada.
Modos de interacción profesor – alumnos; alumnos – alumnos;	
Recursos materiales	
Tiempo asignado	
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas)	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Fuente: Godino (2009, p. 27)

Finalmente la reflexión sobre el conocimiento curricular, contextos educativos, fines, propósitos y valores de la educación, se puede concretar con las consignas incluidas en la tabla 4.

Tabla 4. Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares

Faceta ecológica	**Consigna**
Orientaciones curriculares	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuesta (fines, objetivos).
Conexiones intra-disciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otros factores condicionantes	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Fuente: Godino (2009, p. 27)

2.8 TRAYECTORIAS DIDÁCTICAS EN UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN

De acuerdo a lo planteado en Godino, Contreras & Font (2006), un proceso de instrucción comprende distintas dimensiones interconectadas: epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), discente (funciones de los alumnos), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales), emocional (sentimientos y afectos). Cada una de estas dimensiones moviliza un conjunto de elementos debidamente secuenciados en un tiempo determinado. De esta manera, en todo proceso de instrucción se hacen evidentes elementos del significado pretendido, movilizados por las funciones del docente y la intervención de los estudiantes.

En ese mismo sentido, cada proceso de instrucción produce una serie de estados posibles, a los que se les puede denominar como la producción de trayectorias muestrales de proceso, los que describen la secuencia particular de funciones o componentes que han tenido lugar a lo largo del tiempo. Los mencionados autores, distinguen seis tipos de procesos y sus correspondientes trayectorias muestrales. A continuación presentamos una descripción de las diferentes trayectorias para el análisis de un proceso de instrucción.

a) Trayectoria epistémica. Distribución en el tiempo de la enseñanza de los componentes del significado implementado (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos), la relación entre ellos, la forma como se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. Para ello, es indispensable introducir la noción de configuración epistémica, trayectoria epistémica y estados potenciales de dichas trayectorias. Según (Godino, et al. 2006) se pueden distinguir seis categorías de entidades primarias (lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos), los cuales al ser distribuidos en el tiempo se denomina trayectoria epistémica. Por lo tanto, se distingue seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada uno, a saber: *situacional* (se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas), *actuativo* (se aborda el desarrollo o estudio de la manera de resolver los problemas), *lingüístico* (se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc), *conceptual* (se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego), *proposicional* (se enuncian e interpretan propiedades) y *argumentativo* (se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas)

b) Trayectoria docente. Según (Godino, et al. 2006) corresponde a la distribución de las distintas tareas y acciones que realiza el docente durante un proceso de estudio de un contenido matemático. Cuando estas actividades se circunscriben a una situación- problema específico hablamos de una configuración docente, la cual va asociada a una configuración epistémica. La siguiente es una categorización de funciones docentes durante en proceso de instrucción: *planificación* (diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar), *motivación* (creación de un vínculo de afectividad de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y colectivo), *asignación* (dirección y control del proceso de estudio), *regulación* (fijación de reglas, recuperación de saberes previos, etc.), *evaluación* (observación y valoración del estado de aprendizaje y resolución de las dificultades individuales observadas) e *investigación* (reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo).

c) Trayectorias discentes. Siguiendo a Godino, contreras & Font (2006), la trayectoria discente es similar a la trayectoria epistémica docente, y corresponde a la distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes, a propósito de una configuración epistémica. La siguiente relacion es una propuesta de un inventario de tipos potenciales de estados o funciones del estudiante en el proceso instruccional: *aceptación* (adopción de una actitud positiva al estudio y la cooperación con los compañeros), *exploración* (indagación, búsqueda de alternativas de resolución de problemas), *recuerdo* (interpretación y seguimiento de reglas y significados), *formulación* (de situaciones o tareas propuestas), *argumentación* (justificación de conjeturas), *recepción* (de información sobre modo de hacer, describir, nombrar, valorar, etc.), *demanda* (pedir información al profesor o a otros estudiantes), *ejecución* (de tareas rutinarias para determinar técnicas específicas) y *evaluación* (cuando realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor y autoevaluaciones).

d) Trayectoria mediacional. Para (Godino, et al. 2006) representa a los diferentes medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio, estos pueden ser: medios de presentación (pizarra, retroproyector, etc.), dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, ordenadoras), materiales manipulativos (reglas, compas, etc.). El uso de estos recursos debe ser tenido en cuenta al momento de planificar y ejecutar las actividades de enseñanza-aprendizaje. La noción de trayectoria didáctica pretende ser una herramienta para analizar los usos potenciales e implementados de los recursos instruccionales y sus consecuencias cognitivas.

e) Trayectoria cognitiva. En ese mismo sentido y siguiendo a Godino, contreras & Font (2006), esta trayectoria corresponde a la aprehensión durante el proceso de los significados personales de los estudiantes. Estos significados, son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los sistemas de prácticas operativas y discursivas que son capaces de realizar los estudiantes a cerca de un campo de problemas. Los significados personales se van construyendo durante todo el proceso de instrucción, partiendo de los conocimientos previos al inicio del proceso y llegando a los significados finales logrados.

f) Trayectorias emocionales. Así miso, en (Godino, et al. 2006) se define a estas trayectorias emocionales como aquellos factores del tipo emocional que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, los que van cambiando durante todo el proceso de instrucción (actitudes, valores, afectos y sentimientos) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. La devolución es un proceso considerado dentro de la trayectoria didáctica emocional, la cual implica el compromiso que debe tener los estudiantes con los problemas que el profesor propone.

Cada una de estas trayectorias se ven influenciadas por los múltiples cambios presentes en el proceso de instrucción, debido a la necesidad de adaptar la enseñanza planificada a los ritmos y estilos de aprendizaje de los estudiantes.

Otro factor muy importante a tener en cuenta en un proceso de instrucción es el tiempo didáctico. Puesto que, las distintas dimensiones de un proceso de instrucción (trayectorias didácticas) se dan secuencialmente en un tiempo determinado.

El tiempo didáctico

Según (Godino, et al. 2006), las actividades de enseñanza y aprendizaje no solamente se llevan a cabo en el aula, ambiente natural de interacción entre docente y discente, si no también, fuera del aula (biblioteca, domicilio, etc.). De ahí que, el tiempo que el profesor dedica a las actividades de enseñanza y el tiempo que los alumnos dedican efectivamente a realizar las actividades propuestas en el contenido pretendido son factores determinantes para el logro de los aprendizajes esperados. Es por ello que, el *tiempo didáctico* debe ser concebido como un vector cuyas componentes son los valores de las duraciones temporales de las diversas actividades docentes y discentes (Godino, Contreras & Font, 2006). Por otro lado, *el tiempo del aprendizaje* puede ser definido como la duración temporal que el estudiante necesita para lograr los objetivos planificados para el aprendizaje de un contenido dado, el cual es diferente al tiempo de enseñanza.

2.9 LA NOCIÓN DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

En Godino (2011) se plantea una serie de indicadores empíricos, los cuales nos sirven como pauta o guía para el diseño y valoración de acciones formativas planificadas. A continuación presentamos los criterios de idoneidad didáctica propuesta que se usarán en el presente trabajo de investigación.

2.9.1 Idoneidad epistémica

Todo programa formativo o proceso de estudio matemático tendrá alta idoneidad epistémica en la medida que los contenidos implementados representen bien a los contenidos de referencia. En la tabla 5 incluimos los componentes y los indicadores fundamentales que permiten hacer operativa el criterio mencionado.

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. - Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Fuente: Godino (2011, p. 09)

2.9.2 Idoneidad cognitiva

La idoneidad cognitiva en el EOS es definida como el grado de adecuación de los contenidos implementados, de tal forma que estos estén en la zona de desarrollo potencial del alumno. En la tabla 6 presentamos los indicadores propuestos para este criterio.

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Fuente: Godino, J. (2011, p. 10)

2.9.3 Idoneidad Ecológica

Este criterio de idoneidad nos permite identificar en qué medida el plan de formación o para aprender matemática están relacionados con los agentes externos al aula, así nos podemos referir a todo lo que viene determinado por la sociedad, la escuela, la didáctica, el currículo, otras áreas curriculares, etc. En la tabla 7 se presenta los indicadores de idoneidad para este criterio.

Tabla 7. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares

Fuente: Godino, J. (2011, p. 14)

2.9.4 Idoneidad mediacional

Se refiere al grado de adecuación de los recursos que intervienen en el proceso enseñanza-aprendizaje, podemos mencionar al caso de la tecnología que contribuye de manera favorable para el desarrollo de capacidades del estudiante, pero también a la utilización de muchos recursos que se utilizan dentro del aula. En la tabla 8 presentamos los indicadores para este criterio.

Tabla 8. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión

Fuente: Godino, J. (2011, p. 13)

Para Godino, Batanero & Font (2009) estas idoneidades deben integrarse, para que de esta manera adquiera sentido las interacciones que existen entre ellas. Por otro lado mencionan que, todas estas nociones han resultado ser útiles para el análisis de toda práctica de enseñanza. El gráfico que presentamos a continuación muestra las interacciones presentadas entre las diferentes idoneidades, también se puede apreciar que, un buen desarrollo de alguna idoneidad no garantiza que las demás también tengan una alta idoneidad.

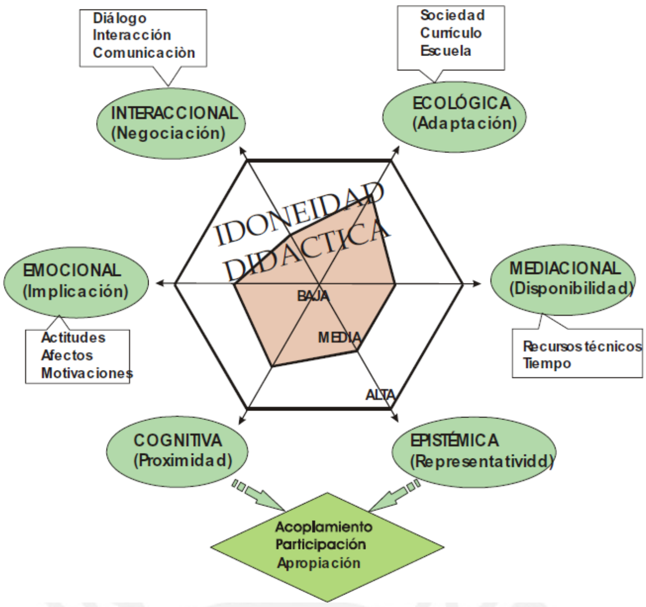


Figura 4. Componentes de la idoneidad didáctica.
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p.16)

2.10 DEFINICIÓN DE CREENCIAS

Dentro de la didáctica de la matemática, una de las líneas de investigación más relevante en las últimas décadas ha sido la que se ha ocupado de las creencias, concepciones, convicciones, imágenes y conocimientos del profesorado (Ramos, 2005; Rubio, 2012). En ese sentido, uno de los constructos más investigados ha sido el sistema de creencias del profesor. Sobre este tema en particular, son muchas los intentos por definir el término creencia, encontrándose tantas definiciones como intentos por definirla, es por ello, que no hay un consenso para lo que significa este constructo. A continuación presentamos algunas de estas definiciones y finalmente tomaremos una postura que guarde relación con el enfoque teórico que optamos para el trabajo de investigación.

Moreno y Azcárate (2003), siguiendo las definiciones de Llinares (1991) y Pajares (1992), plantean la siguiente definición:

> Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo. Moreno y Azcárate (2003, p.267)

Para Rokeaach (1969), *"las creencias son proposiciones simples, consientes o inconscientes, inferidas de lo que dice o hace una persona, que surge precedida por la frase "yo creo que""* Rodríguez (2005, p. 52), Sigel (1985) expone que, *"las creencias son construcciones* *mentales de la experiencia –a menudo condensadas e integradas dentro de esquemas o conceptos- que son tenidas como ciertas y que guían la conducta"* Rodríguez (2005, p. 52). Por otro lado, para Klatter (2001), una creencia se puede caracterizar en términos de *"compromisos personales (afectivos) o de veracidad de una proposición (cognitiva), a lo largo de un continuo de evaluaciones (lo cual provoca respuestas consistentes)"* Rodríguez (2005, p. 52), así mismo, Schommer (1990, 1994), citado en García y Sebastián (2011) sostiene que el sistema de creencias epistemológicas estaría conformado por cuatro dimensiones, cuyos polos ingenuo y sofisticado son resumidos en la siguiente tabla.

De lo dicho anteriormente podemos concluir que no hay un consenso sobre lo que son las creencias. Pero de acuerdo a lo propuesto en (Ramos 2005, Pino 2013 & Velásquez 2014) existe un gran interés por conocer el sistema de creencias que tiene el profesor ya que estas influyen de manera determinante en su práctica docente, considerándose de esta forma que su estudio contribuye a la mejora de la enseñanza de la matemática.

En la presente investigación tomaremos la definición dada por Peirce citado por Pino (2013) quien propone que las creencias deben ser entendidas como "*disposición para la acción*". Para este autor el término creencia está relacionado con las acciones, las cuales son producto de un estímulo (situación) que se presenta al organismo y cuyo fin es establecer un estado de creencia, la que generalmente se evidencia por la frase (yo creo P), las cuales en muchos casos, son propiedades que relacionan conceptos. El sujeto, ante una situación problema genera un proceso de investigación para establecer sus creencias (yo creo P) lo cual lo lleva a una acción.

2.11 RELACIÓN ENTRE CREENCIAS Y LAS CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS Y COGNITIVAS

Autores como Ramos (2005) consideran que las diferentes investigaciones sobre las creencias se han centrado en la forma cómo el profesor piensa, lo que hace y lo que dice; pero, debido a la imposibilidad de acceder directamente a sus pensamientos las investigaciones puntualizan en lo que dice y hace, para luego extraer las conclusiones sobre lo que piensa. La importancia de estas investigaciones se debe a que las creencias del profesor influyen en su práctica docente, llegando a ser *una especie de filtro a través del cual los profesores toman sus decisiones* determinándose de esta manera no solo creencias sobre el aprendizaje de la matemática, sino también sobre la enseñanza de la matemática.

Por otro lado, debido a que las prácticas docentes se generan por un sistema de creencias, es evidente que necesitan expresarse haciendo uso de un cierto lenguaje, es por ello que "*una determinada creencia, se puede considerar como el resultado de la activación de algo parecido a lo que en el EOS se ha denominado configuración cognitiva*" (Pino 2013, p.50)

CAPITULO III

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Resumen.

En este capítulo describimos la metodología y los pasos seguidos en cada una de las actividades planteadas. Por tratarse de una investigación cualitativa, interpretativa y descriptiva, se ha tomado el esquema propuesto por La Latorre y Cols (2003), que consta de seis fases, las que creemos se adaptan a la investigación. Así mismo, presentaremos en resumen el estudio de casos como método de investigación cualitativa, y que se complementa con las fases propuestas por los autores mencionados. Finalmente, presentaremos un cuadro en el que detallaremos los pasos seguidos para cumplir con las actividades propuestas, las que nos llevarán al logro de los objetivos específicos y éstos, al logro del objetivo general.

3.1 FASES DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo se enmarca dentro de la investigación del tipo cualitativo, debido a que se interesa por el análisis a profundidad del comportamiento y significados de la interacción social (Busquera, 1989), particularmente los conocimientos de un profesor de educación secundaria en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz, lo que nos permite obtener diferentes puntos de vista, perspectivas, experiencias y otros aspectos subjetivos del sujeto participante (Hernández, Collado & Baptista, 2010). Así mismo, el presente trabajo es interpretativo, ya que se ocupa del estudio de la persona, para comprender los acontecimientos en función a los significados que ésta les asigna a aquellos (Hernández, et al, 2010) cuando se desenvuelve en un sistema de prácticas discursivas y operativas. Además, este trabajo es descriptivo, pues tenemos por objetivo describir los acontecimientos basándonos fundamentalmente en la observación, la cual se realizará en el ambiente natural donde sucedan los hechos, sin buscar las razones ni causas que la originan (Busquera, 1989, Girax &Tremblay, 2004).

Como en toda investigación de corte cualitativo, en la presente, hemos creído conveniente buscar un esquema que nos permita alcanzar nuestros objetivos, los que nos conducirán a responder a la pregunta de investigación. Tomaremos la propuesta realizada por Latorre y Cols (2003) que consta de seis fases, la misma que adaptaremos con las actividades y metodología de acuerdo a nuestros intereses.

A continuación presentamos cada una de las fases y etapas contempladas en el diseño metodológico, así como el producto obtenido en cada fase aplicada a la investigación.

3.1.1 Fase exploratoria o de reflexión

a) Identificación de la problemática a investigar

En Educación Matemática y en Didáctica de la Matemática como campo de investigación y disciplina científica respectivamente, cuando se da inicio a una investigación, en primer lugar se debe identificar el problema a investigar relacionado a un determinado tópico matemático, es así que, para nuestro caso específico se comenzó por revisar las investigaciones relacionadas con enseñanza y aprendizaje de algunos aspectos de la geometría, luego, se eligió el tópico matemático mediatriz.

b) Planteamiento del problema de investigación

Luego de haber identificado la problemática se optó por estudiar los conocimientos del profesor de matemática puestos de manifiesto durante el proceso de enseñanza y el aprendizaje de la mediatriz.

c) Formulación de las cuestiones de la investigación

Nuestra pregunta de investigación surgió a partir del planteamiento del problema y busca responder a ¿Cuáles son los conocimientos que un profesor de matemática debe poner en juego para favorecer el aprendizaje de la mediatriz en de educación secundaria?

d) Revisión de investigaciones antecedentes

Con el propósito de contemplar antecedentes para nuestro trabajo, se procedió a revisar artículos de investigación y tesis relacionadas al estudio de la mediatriz y también investigaciones que se ocuparon de los conocimientos didáctico- matemáticos que ponen en juego los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos (Godino 2009; Godino & Batanero 2009; Rico, Pino, Godino & Font 2013; Godino, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras & Wilhelmi 2015). En otros trabajos, como el de Reyes & Monserrat (2014) se hacen referencia a las dificultades que presentan los estudiantes para distinguir entre altura, bisectriz y mediatriz en el triángulo. Además, dicen que las actividades propuestas por los docentes no conllevan a desafíos, no propician el análisis, ni dan relevancia a los axiomas.

Por otro lado, es Chávez & Parraguez (2014) se afirma que en los libros de textos utilizados por los profesores se presentan figuras estandarizadas sobre los temas de geometría en general y particular cuando se aborda los elementos del triángulo, como es el caso del trazo de la mediatriz; esto conlleva a que el estudiante se forme ideas equivocadas a cerca de los significados de los objetos matemáticos.

3.1.2 Fase de planificación

a) Selección de la institución educativa objeto de investigación

En este momento de la investigación fue necesario elegir una Institución Educativa donde se pueda llevar a cabo la investigación. Eligiéndose de entre otras a la I. E. “Jorge Berrios Alarcón” del distrito de Chota, provincia de Chota, región Cajamarca por las siguientes razones:

- El profesor sujeto de investigación en todo momento mostró interés por colaborar con la investigación, desde la filmación de una sesión de aprendizaje hasta la resolución de los cuestionarios y la entrevista.
- El director de la mencionada I.E brindó la autorización oportuna y además proporcionó los documentos necesarios.
- El profesor sujeto de investigación viene desempeñándose actualmente como docente en la mencionada I. E., lo que facilita las coordinaciones para la observación de clase, entrevista y la obtención de documentos de planificación.

b) Delimitación y ajuste del problema, preguntas y objetivos de la investigación

A medida que se ha ido profundizando en la investigación, se ha ido modificando algunos elementos y otros ajustándolos de acuerdo a las características de la investigación, entre ellos el problema de investigación, pregunta y objetivos (general y específico).

Cabe resaltar que en un primer momento se planifico identificar las creencias de un grupo de profesores, pero no se pudo concretar, puesto que no se podía realizar la filmación de su clase. Es por ello, que decidimos aplicar los cuestionarios a cuatro profesores y realizamos un análisis de sus respuestas como un estudio piloto, el cual nos ha servido para realizar algunos reajustes a las actividades propuestas en cada cuestionario. Finalmente, decidimos estudiar los conocimientos y algunas creencias de un profesor como estudio de caso, dado que se contaba con muchos más elementos para su análisis usando las herramientas del EOS.

c) Elección del marco teórico para la investigación

Luego de haber definido el problema a investigar, fue necesario elegir un marco teórico que dé sustento a la investigación, eligiéndose para ello algunas herramientas del Enfoque

Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Esta elección se hizo por los siguientes motivos: el EOS cuenta con las herramientas necesarias para el análisis de las prácticas discursivas y operativas, por los niveles bien definidos de su estructura, por las configuraciones didácticas que posee, por las trayectorias didácticas las cuales nos permitente hacer una acercamiento al proceso de instrucción y por los criterios de idoneidad que hace posible valorar un sistema de prácticas, tanto a nivel micro, como a nivel macro didáctico.

d) Selección de la estrategia a seguir en la investigación

En esta etapa de la investigación, se determinó la forma como se llevaría a cabo la recolección de datos, escogiendo para ello la metodología de "*estudio de caso único*" (Stake, 1999), y como técnicas e instrumentos la observación no participativa, la entrevista en profundidad y aplicación de cuestionarios.

3.1.3 Fase de entrada en el escenario

a) Selección de los sujetos de estudio con quienes se realizará la investigación

En esta etapa se entra en contacto directo con la I. E., se pide autorización para llevar a cabo la investigación, luego, se entra en contacto con el profesor sujeto de investigación y se va accediendo progresivamente a la información fundamental para el estudio.

b) Definición del papel del investigador

El investigador jugó un rol muy importante en la investigación, ya que se encargó del acceso a la I. E y el recojo dela información que fue clasificada adecuadamente de acuerdo a las características y fines de la investigación.

3.1.4 Fase de recogida y análisis de la información

a) Las estrategias para la recolección de la información

En esta fase de la investigación, con la finalidad de alcanzar los objetivos planteados, se ha realizado diversas actividades tales como: revisión de documentos oficiales entre ellos el Diseño Curricular Nacional del Perú (2009), documentos de planificación a nivel institucional (P.E.I, programaciones anuales y de unidad, etc.), observación de una sesión de aprendizaje, para la que se utilizó el registro audiovisual que nos ha permitido recoger el episodio y por ende describir las prácticas matemáticas del profesor; la aplicación de cuestionarios y entrevista a profundidad, que nos lleven a analizar los conocimientos que activa el profesor sujeto de estudio en las diferentes facetas del proceso de instrucción.

b) **Las técnicas a seguir para el análisis de la información**

Se aplicaron los criterios de análisis didáctico propuesto por el EOS a la planificación y ejecución del proceso de instrucción, se utilizó las trayectorias didácticas para analizar el episodio de clase, se utilizaron los descriptores para evaluar el conocimiento didáctico para la enseñanza propuesto por Godino (2009), etc.

3.1.5. Fase de retirada del escenario

a) Finalización de la recogida de la información en la Institución Educativa.

b) Se pidió autorización para regresar al escenario si el caso lo ameritase y así continuar en contacto con el sujeto de investigación.

c) Se realizó el análisis comparativo y reflexivo de la información y se dieron los resultados.

3.1.6. Fase de elaboración del informe, en esta etapa:

a) Redacción de las conclusiones de la investigación, y

b) Elaboración la redacción y refinamiento de dicho informe.

3.2 METODOLOGÍA DE ESTUDIO DE CASOS

El presente trabajo se ubica metodológicamente dentro del estudio de casos, el cual resulta pertinente cuando se desean analizar la singularidad y profundidad de un caso particular. Según (Stake, 1999) se le puede definir como "…el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a conocer su actividad en circunstancias importantes". Asimismo, el estudio de casos es considerado como un enfoque, el cual tiene una intención de indagación y un propósito metodológico que afectan a los métodos seleccionados para la recogida de datos (Simons, 2009). Mediante el estudio de casos se pretende detallar situaciones; recopilar, seleccionar, describir y analizar datos; observar minuciosamente los planes, prácticas y experiencias de las personas consideradas como sujetos de investigación; tal como pretendemos en la presente investigación, identificar los conocimientos de un profesor de educación secundaria durante las diferentes acusetas del proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz.

3.3 MÉTODOS Y TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

En cuanto a los métodos y técnicas de recolección de datos, por tratarse de una investigación cualitativa, se han utilizado las siguientes:

a) **Observación no participativa de clase**, que consiste en observar lo que viene ocurriendo durante el desarrollo de las actividades de un grupo o un individuo, pero evitando ser parte del grupo o las actividades (Cohen & Manión, 2002). En ese sentido, se observó una sesión de aprendizaje, la cual se recogió empleando para ello el registro audio visual y que fue analizada mediante las trayectorias didácticas propuestas por el EOS. En este momento el investigador procuró al máximo no interactuar con el sujeto de investigación durante el evento, para centrarse exclusivamente en los sucesos que aporten información importante a la investigación en curso.

b) **Se aplicó dos cuestionarios,** con la finalidad de identificar los conocimientos del profesor de matemática activados cuando resuelve un campo de problemas relacionados a las definiciones y usos de la mediatriz en educación secundaria.

c) **Se llevó a cabo una entrevista en profundidad,** la cual es considerada dentro de la investigación cualitativa como un método que permite reunir datos a través de una interacción oral entre individuos (Cohen & Manión, 2002), para llegar a las múltiples realidades del entrevistado (Stake, 1999); la que según Simons (2011, p. 71) tiene cuatro objetivos principales, (1) documentar la opinión del entrevistado sobre el tema en estudio, (2) implicación activa y el aprendizaje del entrevistador y el entrevistado que la entrevista puede favorecer en la identificación y análisis de datos, (3) la flexibilidad inherente que la entrevista ofrece para cambiar de dirección y abordar temas emergentes, para sondear un tema o profundizar una respuesta, y (4) el potencial de la entrevista de desvelar y representar sentimientos y sucesos inobservados e inobservables. Para llevar a cabo esta entrevista usamos un cuestionario semiestructurado, que será preparado con anticipación.

3.4. PARTICIPANTES

b) El sujeto de estudio de caso

El profesor sujeto de investigación es egresado del Instituto Superior Pedagógico Público “Nuestra Señora de Chota” de la provincia de Chota región Cajamarca. Cuenta con una experiencia de 8 años laborando en instituciones educativas de nivel secundario y enseñando el área de matemática del primer al quinto grado, correspondiente al VI y VII siclos de la educación básica regular del Perú. Actualmente, viene trabajando en condición de contratado por la Unidad de Gestión Educativa Local (UGEL) de chota en la Institución Educativa “Jorge Berrios Alarcón” del centro poblado de Yuracyacu provincia de Chota, región Cajamarca y enseña matemática al primer y cuarto grado respectivamente.

c) Descripción de la Institución Educativa

La Institución Educativa “Jorge Berrios Alarcón” se encuentra en la provincia de Chota, región Cajamarca. Actualmente cuenta con 6 de las cuales solamente el tercer grado está dividido en dos secciones debidamente reconocida por la UGEL Chota, la plana docente y administrativa está constituida por: un director, 8 docentes, un auxiliar de biblioteca y un personal de servicio. De esta manera, brindan el servicio educativo a 159 estudiantes en total.

d) Descripción de la clase

La sesión de aprendizaje ha estado planificada para una hora pedagógica (45’), pero ha durado 60’ aproximadamente, se ha caracterizado por ser mayormente expositiva con poca participación de los estudiantes. Se ha partido recogiendo los saberes, a continuación se ha definido la mediatriz de dos formas (como recta perpendicular en el punto medio del segmento y como un lugar geométrico), luego se ha realizado el proceso de construcción usando compás y regla, posteriormente, se ha resuelto dos problemas de aplicación y finalmente ha dejado un problema de contexto extramatemático para ser resuelto por los estudiantes en casa.

A continuación presentamos un cuadro (matriz de consistencia) que nos sirve para hacer la articulación de las actividades con el problema de investigación y los objetivos.

Tabla 9. Matriz de contingencia para articular el problema, la pregunta, los objetivos y las acciones a seguir durante la investigación.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN	OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA INVESTIGACIÓN	ACCIONES A SEGUIR PARA LOGRAR LOS OBJETIVOS.
¿Cuáles son los conocimientos y algunas creencias del profesor de matemática acerca de la enseñanza y aprendizaje de la mediatriz en de educación secundaria?	Identificar los conocimientos y algunas creencias de un profesor de educación secundaria, sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje dela mediatriz, usando algunas herramientas proporcionadas por el enfoque Ontosemiótico.	Estudiar el objeto matemático, para identificar los significados de referencia y los significados pretendidos.	Para cumplir con este objetivo específico, se ha revisado los siguientes documentos: En primer lugar el diseño curricular nacional de la educación básica regular de Perú (DCN 2009), documento que divide a la educación secundaria en dos ciclos VI (primero y segundo) y VII (tercero, cuarto y quinto), encontrándose que el objeto matemático mediatriz forma parte de las líneas notables y se propone su estudio tanto en el VI como en el VII ciclo respectivamente. Luego, diversos textos de educación superior en los que se estudia el objeto matemático mencionado, para identificar los significados de referencia y se ha elegido dos de ellos, el libro de Moise (1972) y el libro de la Editorial Bruño (1984) debido a la mayor cantidad de significados que se le atribuye al objeto matemático en mediatriz. También se ha revisado algunos de los textos más usados por los profesores de secundaria para preparar sus clases de matemática, con la finalidad de identificar los significados pretendidos; seleccionando para este estudio los textos que distribuye de forma gratuita el Ministerio de Educación (MINEDU) a todas las instituciones educativas públicas de la EBR; además los textos “matemática para todos” que se vienen usando en algunas regiones del país. También se analizaron los siguientes documentos de gestión planificación institucional: (a) el Proyecto Educativo Institucional (P.E.I) y nos centraremos específicamente en el (b) la programación anual del área de matemática (P.A), (c) unidad de aprendizaje (U.A), (d) sesión de aprendizaje, y (d) cuaderno de apuntes de un estudiante de la clase de matemática; estos documentos se tomaron en cuenta para indagar de que manara influyen en las creencias del profesor al realizar su práctica pedagógica. Finalmente se realizaron las configuraciones epistémicas (C.E) de las tareas relacionadas con la mediatriz en cada texto, para determinar de esta manera los objetos matemáticos (situaciones- problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos) con los que se viene trabajando en la educación secundaria.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	OBJETIVO GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN	OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA INVESTIGACIÓN	ACCIONES A SEGUIR PARA LOGRAR LOS OBJETIVOS.
		Describir las prácticas que realizan los profesores para reconocer los significados implementados.	Para cumplir con este objetivo específico se llevó a cabo las siguientes acciones: Se seleccionó la Institución Educativa en la cual se llevó a cabo la investigación, en esta se eligió un profesor sujeto de investigación durante su práctica pedagógica. En coordinación con el profesor seleccionado y las autoridades responsables de la Institución Educativa, se observó una sesión de aprendizaje bajo la técnica de la observación no participante, en la cual se registraron los hechos empleando el recurso audiovisual con la finalidad de describir las prácticas del profesor teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica propuesta por el EOS. A partir de la clase registrada se realizó la configuración cognitiva emergente de las explicaciones realizadas por el docente para su posterior análisis mediante las trayectorias didácticas, específicamente la trayectoria docente. Se aplicó un cuestionario, el cual fue diseñado teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica, cuyo objetivo fue recoger información que nos permitió identificar los conocimientos puestos en manifiesto del profesor durante al resolver problemas matemáticos sobre la mediatriz, teniendo en cuenta el primer nivel de análisis didáctico propuesto por el EOS.
		Analizar las prácticas, objetos y procesos; teniendo en cuenta el primer nivel de análisis didáctico	Para lograr este objetivo específico se realizó lo siguiente: Se llevó a cabo una entrevista en profundidad a un solo profesor (Ruiz & Ispizua, 1989) empleando un cuestionario semiestructurado el cual fue planificado y elaborado con anticipación. Además, se observó una sesión de aprendizaje, la cual fue recogido en un registro audiovisual y posteriormente se hizo la transcripción para un análisis más completo. Se analizó la transcripción de la sesión de aprendizaje, las respuestas del cuestionario las que nos ha permitido identificar los conocimientos que él activa el profesor durante las diferentes etapas del proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz. Además, se analizó las respuestas obtenidas en la entrevista aplicando el primer nivel de análisis propuesto por el EOS.

CAPÍTULO IV

SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DEL OBJETO MATEMÁTICO MEDIATRIZ

Resumen

En este capítulo realizaremos un estudio del objeto matemático mediatriz. Para ello, analizamos dos textos que pertenecen al nivel se educación superior (Geometría Curso Superior, de la editorial Bruño y geometría moderna de Moise), además, los textos de matemática proporcionados por el Ministerio de Educación del Perú y los libros de Matemática para Todos de la editorial Apoyo, textos que corresponden al nivel secundario. El objetivo de este capítulo consiste en identificar y fijar el significado institucional del objeto matemático mediatriz, el cual servirá para elaborar los instrumentos de recojo de información y también para compararlos con los significados implementados por el sujeto de estudio en una sesión de aprendizaje.

4.1 LA MEDIATRIZ EN LA GEOMETRÍA SINTÉTICA (EUCLIDIANA)

Para estudiar la mediatriz en la geometría euclidiana hemos tenido en cuenta libros, tanto de educación superior, como libros correspondientes al nivel secundario ya mencionados, en los cuales se ha identificado diferentes usos y significados de la mediatriz, los que serán tomados como significado institucional para este trabajo de investigación. Puesto que, dentro del enfoque Ontosemiotico se entiende como significado institucional, al significado de los objetos matemáticos en relación a la acción que realiza un sujeto cuando resuelve un campo de problemas.

4.1.1 Definiciones y significados de la mediatriz en los textos de estudio

En este apartado realizaremos una síntesis de los principales significados identificados en los textos de Geometría Curso Superior, de la editorial Bruño (1964), y el libro de Geometría Moderna de Moise (1972). Estos libros se han considerado por la mayor cantidad de significados que le atribuyen a la mediatriz y porque los diferentes problemas que presenta pueden ser enseñados en el nivel secundario.

En el plano la mediatriz de un segmento es definida como "… la recta perpendicular al segmento en su punto medio" (Moise, 1972. P. 163). El mencionado autor afirma que: "Todo segmento $\overline{AB}$ tiene un punto medio C, y solamente uno; y por C, pasa una recta, y solamente una, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Por lo tanto, la mediatriz existe y es única" a partir de ello se plantea el siguiente teorema.

Teorema: "La mediatriz de un segmento en el plano, es el conjunto de puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento". En la figura 6 se ilustra la mediatriz L del segmento $\overline{AB}$ y se presenta luego la demostración propuesta por Moise (1972).

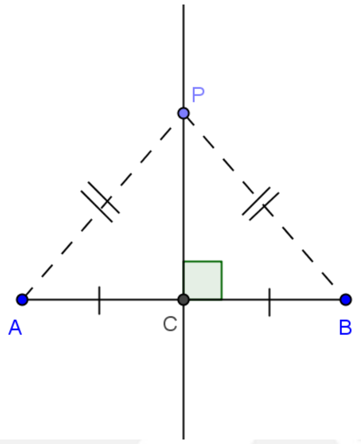


Figura 5. Mediatriz de un segmento en el plano.
Fuente: Moise (1972. p. 163)

De este modo L es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ en el punto E. Entonces,

(1) Si P está en L, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y

(2) Si $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, entonces P está en L.

Demostración.

Demostración de (1). A partir de la figura 7**,** sea C el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y sea P un punto cualquiera de la recta L. Si $P = C$, entonces $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Supongamos, que P es diferente de C, de manera que P no está en $\overline{AB}$. Tenemos $\overline{PC} \cong \overline{PC}$, por identidad $\angle PCA \cong \angle PCB$, por compartir ambos un ángulo recto y $CA = CB$, debido a que C es el puto medio de $\overline{AB}$. Por el caso LAL, tenemos que $\Delta PCA \cong \Delta PCB$. Luego $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

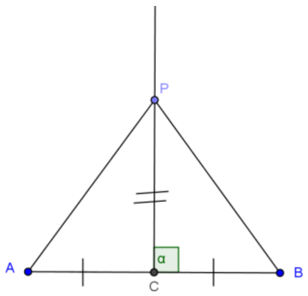


Figura 6. Demostración 1.
Fuente: Adaptado Moise (1972)

Demostración de (2). Teniendo en cuenta la figura 8, Se nos dice que P está en el plano E, y que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Si P está en $\overline{AB}$, entonces $P = C$, porque $\overline{AB}$ tiene un punto medio solamente. Si P no está en $\overline{AB}$, sea L' la recta que contiene $\overline{PC}$. Entonces $\overline{PC} \cong \overline{PC}$, $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ y $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Por el caso de congruencia LLL, tenemos: ΔPCA ≅ ΔPCB, como anteriormente. En consecuencia por definición,∠PCB es un ángulo recto y, en virtud a esto, L' es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en C. Por el teorema de la unicidad de la perpendicular en un punto. Luego $L' = L$, de modo que P está en L, que es lo que queríamos demostrar.

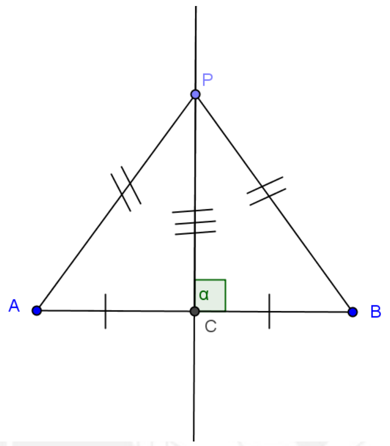


Figura 7. Demostración 2.
Fuente: Adaptado de Moise (1972)

Usos de la mediatriz en la geometría euclidiana

De los usos más importantes de la mediatriz en la geometría euclidiana consideraremos los siguientes, de acuerdo a Bruño (1964).

1. La mediatriz es usada para probar que dos triángulos son iguales.

Aplicación: Utilizando las propiedades de la mediatriz de un segmento, demostrar que dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales.

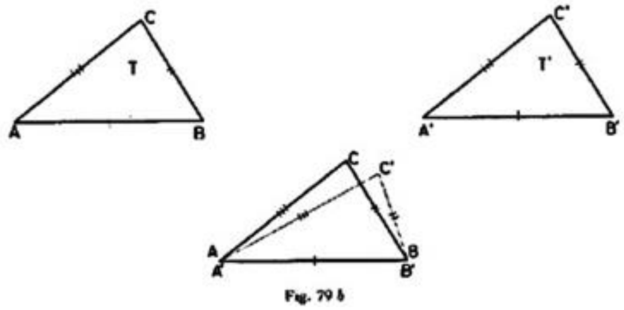


Figura 8. Uso de mediatriz para demostrar la igualdad de triángulos.
Fuente: Bruño(1964, p. 54)

2. Usando la mediatriz se puede determinar un punto equidistante de los vértices en el triángulo.

TEOREMA. – Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto equidistante de los tres vértices.

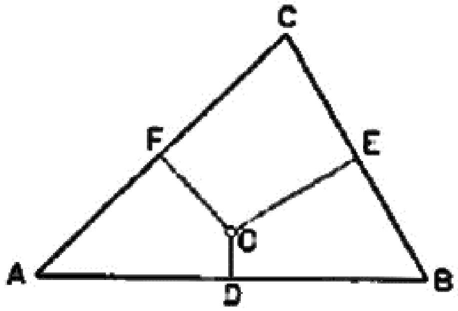


Fig. 136

Figura 9. Uso de mediatriz para encontrar un punto equidistante de los vertices.
Fuente: Bruño(1964, p. 85)

3. La mediatriz como eje de simetría nos permite encontrar el simétrico de un punto.

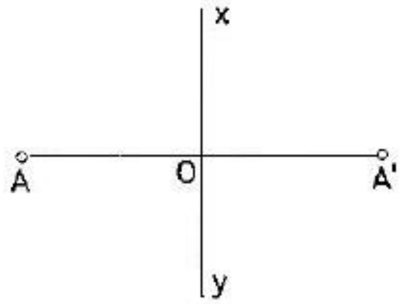
<table>
<tr><td colspan="2">Definición. Dos puntos A y A' se dicen simétricos respecto de un eje $\overleftrightarrow{xy}$ (figura de abajo), cuando dicho eje es mediatriz del segmento que une estos puntos.</td></tr>
<tr><td>Así pues, el punto simétrico de A respecto al eje $\overleftrightarrow{xy}$ será el punto A', tal que xy sea mediatriz del segmento $\overline{AA'}$</td><td>

Fig. 149</td></tr>
</table>

Figura 10. Uso de mediatriz para determinar el simetrico de un punto.
Fuente: Bruño(1964, p. 85)

4. La mediatriz de una cuerda divide un arco en partes iguales, y es definida como el lugar geométrico que divide a todas las circunferencias que pasan por los extremos de un segmento.

1°.- La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia y por los puntos medios de los arcos que subtiende.

2°.- Para dividir un arco en dos partes iguales se traza la mediatriz del arco que lo subtiende.

3°.- la mediatriz $\overleftrightarrow{CD}$ del segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los centros de las infinitas circunferencias que pasan por los extremos de A y B de dicho segmento. Forman lo que se llama el has de circunferencias cuyos puntos fundamentales son el A y el B.

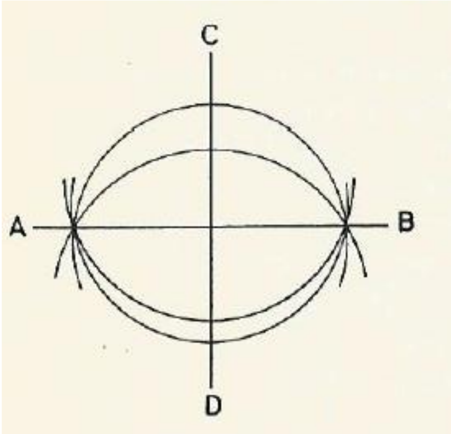


Fig. 166

Figura 11. Uso de mediatriz para dividir un arco de circunferencia.
Fuente: Bruño(1964, p. 106)

5. Usando la mediatriz se prueba que tres puntos alineados no están contenidos en una circunferencia.

Por tres puntos alineados no pasa ninguna circunferencia. Pues las mediatrices de los segmentos que los unen son paralelas. Bruño(1964, p. 107)

6. La mediatriz se puede usar para demostrar, el teorema relacionado con los puntos de corte en dos circunferencias secantes (ver figura 12)

Teorema. – Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la línea de los centros, tendrán otro punto común simétrico del anterior, respecto de la línea de los centros.

Sean O y O_1 los centros de dos circunferencias y A un punto común, exterior a la línea de los centros. Tracemos $\overleftrightarrow{AA'}$, perpendicular a $\overline{OO_1}$, y tomemos $DA'= AD$. Diremos que el punto A', simétrico de A, respecto de $\overline{OO_1}$, pertenece a ambas circunferencias.

Para ello trazamos los radios OA, OA' y O_1A, O_1A'. Como consecuencia de la construcción, la recta $\overleftrightarrow{OO_1}$ es mediatriz de $\overline{AA'}$; pero todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo; luego.

$$OA' = OA = R$$

Y el punto A'pertenecerá a la circunferencia de centro O_1. Por lo mismo será

$$\mathrm{O}_1\mathrm{A}' = \mathrm{O}_1\mathrm{A} = \mathrm{R}_1$$

Y el punto A' pertenecerá a la circunferencia de centro O_1.

Por consiguiente, el punto A', simétrico de A, es punto común de las dos circunferencias.

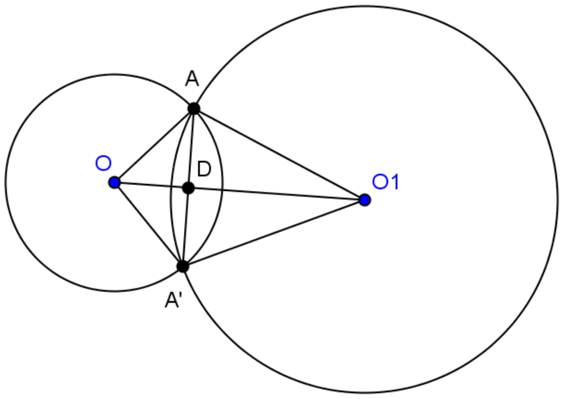


Figura 12. Puntos simetricos en dos circunferencias.
Fuente: Bruño(1964, pp. 114, 115)

La mediatriz se usa como herramienta para trazar una recta perpendicular a otra.

Problema. Por un punto A perteneciente a una recta $\overline{\mathrm{CD}}$ trazar una perpendicular a dicha recta.

Con el compás se toman a ambos lados del punto A distancias iguales AE y AF, y haciendo centro en E y F con radio mayor que la mitad del segmento $\overline{\mathrm{EF}}$, se trazan dos arcos que se cortan en el puntoB; la recta $\overleftrightarrow{\mathrm{BA}}$ será la pedida. Bruño (1964, p. 134)

7. La mediatriz nos permite dividir un segmento en dos partes iguales.

Problema.- Dividir un segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales.
Haciendo centro en los extremos A y B del segmento, con un radio mayor que la mitad del mismo, se traza dos arcos que se cortarán en los puntos C y D , porque la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia; la recta $\overleftrightarrow{CD}$ que pasa por esos puntos pasará también por el punto medio E del segmento $\overline{AB}$.
En efecto la recta $\overleftrightarrow{CD}$, al pasar por el punto C y D, que equidistan de los extremos A, B es la mediatriz del segmento.

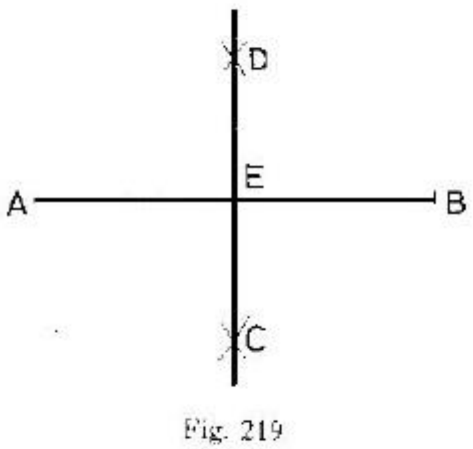


Figura 13. La mediatriz divide en dos partes iguales.
Fuente: Bruño(1964, p. 136)

8. Usando la mediatriz se puede construir la bisectriz de un ángulo.

Problema. Trazar la bisectriz de un ángulo dado BAC.
1°. Con el compás.- Desde el vértice A como centro y con un radio cualquiera, se traza el arco BC que corta a los lados del ángulo en B y C, desde los cuales, como centros y con un radio y con un radio arbitrario, se traza dos arquitos que se cortan en D; uniendo este con A tendremos la bisectriz $\overrightarrow{AD}$, por ser, al mismo tiempo mediatriz de la cuerda $\overline{BC}$. Bruño(1964, p. 139)

9. La mediatriz se usa también para trazar una circunferencia circunscrita a un triángulo dado.

Problema. Trazar una circunferencia circunscrita a un triángulo BAC.

Trácese las mediatrices de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ las cuales se cortan en el circuncentro I que equidista de los tres vértices del triángulo. Por estar en el circuncentro I que equidista de los tres vértices del triángulo. Por tanto, la circunferencia trazada desde I como centro y CI como radio será la circunferencia circunscrita que resuelve el problema. Bruño (1964, p. 152).

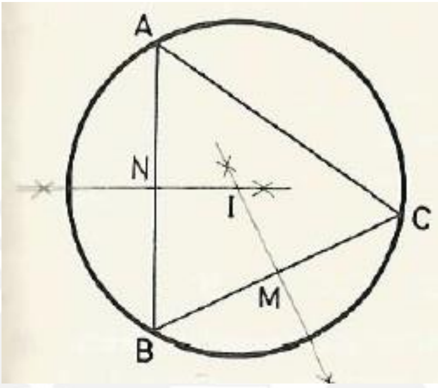


Figura 14. La mediatriz usada para trazar una circunferencia circunscrita al triangulo $\boldsymbol{ABC}$.
Fuente: Bruño(1964, p. 152)

10. La mediatriz permite hallar el centro de la circunferencia, como se describe en la siguiente figura.

Problema. Hallar el centro de una circunferencia o de un arco dados:

Se aplica esta misma construcción a tres puntos cualquiera elegidos en la circunferencia o arco y quedará resuelto el problema. Se traza la mediatriz de dos cuerdas y se toma su punto de intersección, el cual es el centro de la circunferencia.

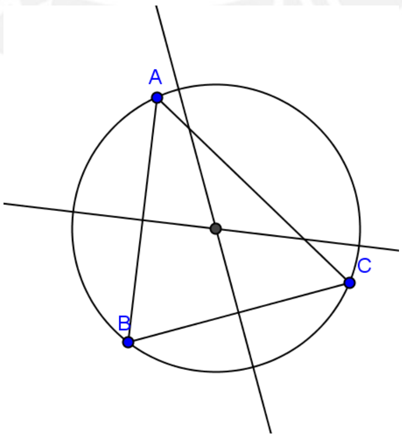


Figura 15. La mediatriz y el centro de la circunferencia.
Fuente: Bruño(1964, p. 152)

11. La mediatriz es una herramienta importante para la construcción del arco capaz.

Arco capaz.

El arco capaz es el lugar geométrico de los puntos desde los que un segmento $\overline{AB}$ se observa con el mismo ángulo; es decir, el lugar geométrico de los vértices de los ángulos que tienen la misma amplitud y abarcan un mismo segmento.

Problema: dado un segmento $\overline{CD}$ y su ángulo A, construir el arco capaz de ese ángulo, si ha de tener por extremo los del segmento dado.

Sobre un extremo del segmento $\overline{CD}$ se construye el ángulo $\angle CDE = A$, y por este mismo extremo D, se traza la perpendicular $\overline{DO}$ al lado $\overline{DE}$; dicha perpendicular encuentra a la mediatriz de $\overline{CD}$ en el puto O que es el centro del arco pedido.

En efecto, todo ángulo M inscrito en el arco CMD, trazado desde el centro O y con el radio $\overline{OD}$, es igual al ángulo CDE, pues ambos tienen la misma amplitud.

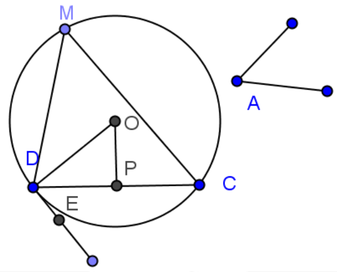


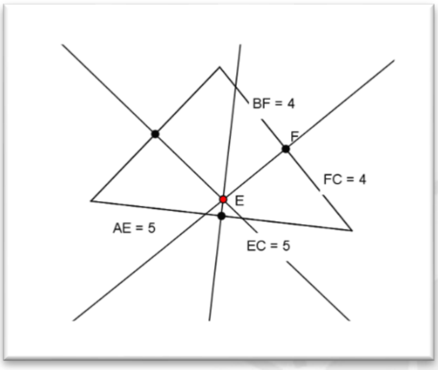
Figura 16. La mediatriz y la construccion del arco capáz.
Fuente: Bruño(1964, p. 155)

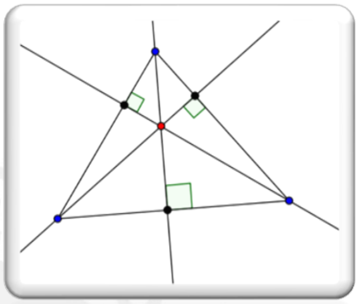
4.2 ANÁLISIS DE OBJETOS MATEMÁTICOS: CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DEL OBJETO MATEMÁTICO MEDIATRIZ EN LOS TEXTOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

En este apartado realizaremos el análisis de los objetos matemáticos emergentes e intervinientes de las tareas relacionadas a la mediatriz en los textos que son distribuidos de forma gratuita por el Ministerio de Educación (MINEDU) y también en los textos de "Matemática para Todos", los que fueron elegidos para la presente investigación. Elaboramos la configuración epistémica (C.E) teniendo en cuenta algunas tareas con la finalidad de utilizar los resultados de dicho análisis con las configuraciones cognitivas emergentes (C.C) de los significados implementados.

Cabe mencionar, que los textos se han elegido por los siguientes motivos: los primeros, porque son distribuidos en forma gratuita por el Ministerio de Educación de Perú a todas las Instituciones Educativas públicas, los que a veces se convierten en única herramienta de consulta para los estudiantes, especialmente en zona rural y los segundos, porque existen Instituciones Educativas en 8 regiones del país que vienen trabajando con estos textos.

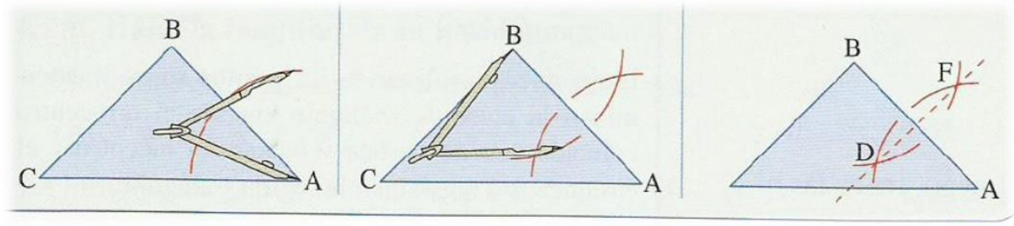
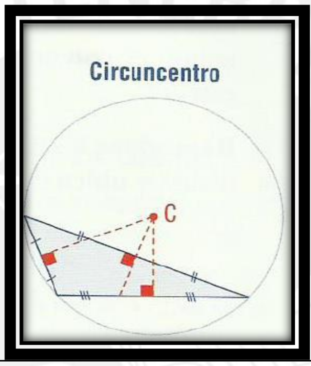
Tabla 10. C.E de la mediatriz en texto matemática- segundo de secundaria 2012.

<table>
<tr><td colspan="2">LENGUAJE</td></tr>
<tr><td colspan="2">➢ Verbal:
✓ Segmento rectilíneo
✓ Punto medio de un segmento
✓ Intersección de mediatrices
✓ circuncentro
➢ Gráfico:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráfico donde se resalta el circuncentro. Gráfico donde se resalta el circuncentro.


</td></tr>
<tr><td colspan="2">➢ Simbólico
✓ $A;\ \overline{AP};\ \overleftrightarrow{m};\ \overleftrightarrow{m} \perp \overline{AB}.$</td></tr>
<tr><td>SITUACIONES-PROBLEMAS</td><td>DEFINICIONES- CONCEPTOS</td></tr>
<tr><td>➢ En cada triangulo identifica el punto notable resaltado (se presenta dos triángulos como los que se muestran en el lenguaje gráfico).</td><td><u>Previos.</u>
➢ Segmento de recta
➢ Punto medio de un segmento
➢ Recta perpendicular a un segmento
➢ Mediatriz de un segmento
<u>Emergentes</u>.
➢ Circuncentro
➢ Líneas y puntos notables</td></tr>
<tr><td>Procedimientos</td><td>Proposiciones- propiedades</td></tr>
<tr><td>➢ para hallar el circuncentro se tiene que trazar las mediatrices de cada lado del triángulo.</td><td>El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices en el triángulo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Argumentos</td></tr>
<tr><td colspan="2">➢ No presenta.</td></tr>
</table>

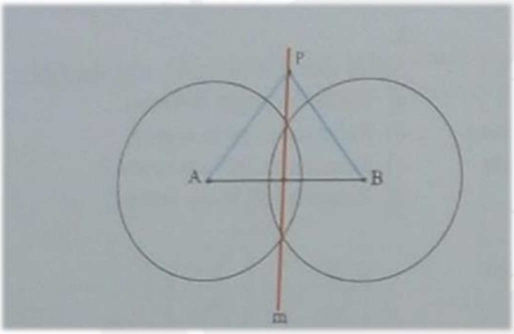
En cuanto a este objeto matemático podemos apreciar que existe tan solo un problema de aplicación, para ser resuelto con ayuda del profesor, no existen problemas propuestos.

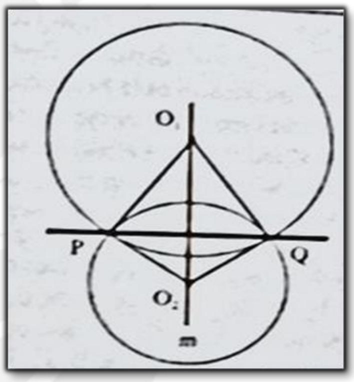
Tabla 11. C.E de la mediatriz en el texto de cuarto de secundaria 2012.

<table>
<tr><th colspan="2">LENGUAJE</th></tr>
<tr><td colspan="2">Verbal:
Mediatriz de un triángulo, recta perpendicular al lado del triángulo, punto de intersección de las mediatrices, circuncentro, etc.
➢ Gráfico: Proceso para el trazo de la mediatriz en un triangulo.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">El circuncentro, punto de interseccion de las mediatrices.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">➢ Simbólico
✓ $A; \overline{AP}; \overleftrightarrow{m}; \overleftrightarrow{m} \perp \overline{AB}$.</td></tr>
<tr><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th><th>DEFINICIONES- CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td>➢ Reproduce los triángulos (uno acutángulo y otro rectángulo), traza las mediatrices y ubica su circuncentro.
➢ Se dice que una circunferencia está circunscrita a un triángulo cuando los vértices del triángulo están sobre la circunferencia. Dibuja un triángulo obtusángulo; luego, traza una circunferencia de tal forma que el triángulo este circunscrito a ella. describe el procedimiento que realizaste.</td><td><u>Previos.</u>
➢ Segmento de recta
➢ Punto medio de un segmento
➢ Recta perpendicular a un segmento
<u>Emergentes</u>.
➢ Mediatriz de un triángulo
➢ Método para trazar la mediatriz de un segmento usando regla y compás
➢ Circuncentro
➢ Circunferencia circunscrita</td></tr>
<tr><th>Procedimientos</th><th>Proposiciones- propiedades</th></tr>
<tr><td>➢ Dado el triángulo ABC, para trazar la mediatriz de uno de sus lados se sugiere lo siguiente: (a) con centro en A, trazamos un arco de circunferencia a cada lado de $\overline{AB}$, (b) con la misma abertura del compás, trazamos un arco con centro en B, a cada lado del segmento $\overline{AB}$, nombramos los puntos de intersección de ambos arcos y trazamos una recta que pase por estos.</td><td>➢ La mediatriz de un triángulo es la recta perpendicular a cada lado y pasa por su punto medio.
➢ El punto de intersección de las tres mediatrices es el circuncentro.
➢ Una circunferencia está circunscrita a un triángulo cuando los vértices del triángulo están sobre la circunferencia.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Argumentos</th></tr>
<tr><td colspan="2">➢ No presenta.</td></tr>
</table>

En lo que respecta a este objeto matemático, se puede apreciar que se proponen escasos ejercicios y problemas para ser resueltos como actividad en clase. Además, carecen de un contexto extramatemático.

Tabla 12. C.E. de la mediatriz de en el texto “matemática para todos”- primero de secundaria 2002.

<table>
<tr><th colspan="2">LENGUAJE</th></tr>
<tr><td colspan="2">
➢ Verbal:
✓ Mediatriz de un segmento
✓ Punto medio de un segmento
✓ Recta perpendicular a un segmento
✓ Imagen de un punto
✓ Reflexión de un punto respecto de una recta
✓ Reflexión de un segmento respecto de una recta
✓ Eje de simetría
✓ Plano de coordenadas
➢ Gráfico:
</td></tr>
<tr><td>Figura para demostrar que $AP = PB$


</td><td>Dos circunferencias secantes tienen alineados sus centros.


</td></tr>
<tr><td colspan="2">
➢ Simbólico
✓ $A; \overline{AP}; m; m \perp \overline{AB}; A(1;4)$
</td></tr>
<tr><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th><th>DEFINICIONES- CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td>
➢ Dibuja dos círculos que pasen por los puntos P y Q.
➢ Construye el centro del círculo, utilizando solo regla y compas,
➢ Dibuja en un plano los puntos $A(1;4)$ y $B(7;1)$construye con ayuda de tu escuadra-transportador (geotriángulo) la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.
➢ Traza el segmento $\overline{CD}$ con $C(3;3)$ y $D(8;6)$. Construye ahora con el compás y la regla la mediatriz del segmento $\overline{CD}$.
➢ Traza un segmento $\overline{AB}$ y halla su punto medio.
➢ Divide un segmento de 9,7cm de largo en 2 partes iguales.
➢ Divide un segmento de 9,7cm de largo en 4 partes iguales.
➢ Divide un segmento de 17,5cm de largo en 8 partes iguales.
</td><td>
<u>Previos.</u>
➢ Segmento de recta
➢ Punto medio de un segmento
➢ Recta perpendicular a un segmento
➢ Reflexión respecto a un eje
<u>Emergentes</u>.
➢ Eje de simetría
➢ Mediatriz de un segmento
➢ Método para trazar la mediatriz de un segmento usando regla y compás
➢ Ubicación de un punto en el plano de coordenadas
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

- Construye un triángulo ABC con los vértices $A(2;4)$, $B(10;1)$ y $C(6;6)$en un plano de coordenadas. Construye (a) la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, (b) el eje de simetría de $\overline{BC}$.
- En el mapa de la figura los piratas han hecho unas marcas que permite encontrar un tesoro. Solo el capitán y dos de sus hombres de confianza saben que el tesoro se encuentra en un sitio que está a la misma distancia de las aspas de la roca y el árbol y que, además, está ubicado exactamente 25m del manantial.

  Copia el mapa en tu cuaderno he indica en que partes podría estar el tesoro de los piratas (1cm del mapa corresponde a 10m en la realidad), etc.

  En el texto podemos apreciar que este objeto matemático se caracteriza por qué; se resuelven pocos problemas, se proponen ejercicios repetitivos y existen muy pocos problemas contextualizados planteados, más ninguno resuelto.

</td><td></td></tr>
<tr><th>Procedimientos</th><th>Proposiciones- propiedades</th></tr>
<tr><td>

- Gráficamente se muestra como trazar la mediatriz del segmento.
- Se describe el procedimiento de la solución de algunos ejercicios.
- Se da instrucciones sobre la resolución de un problema contextualizado.

</td><td>

- La mediatriz m de un segmento $\overline{AB}$ es el eje de simetría de este segmento.
- Todos los puntos de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ se encuentran a la misma distancia de A y de B (se dice: son equidistantes de A y de B).
- Todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de los puntos A y B están en la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Argumentos</th></tr>
<tr><td colspan="2">

- **Tesis**: la distancia de un punto P que pertenece a la mediatriz m a los extremos del segmento $\overline{AB}$ es la misma.
- **Argumentos:**
  - ✓ Se halla la imagen del punto A y del círculo con centro en A según la reflexión del eje m, se obtiene el punto B y el círculo con centro en B.
  - ✓ Para cada punto P en m se cumple: Si se aplica la reflexión respecto al eje m al segmento $\overline{AP}$ se obtiene el segmento $\overline{BP}$. Por ello, los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ tienen la misma longitud.

</td></tr>
</table>

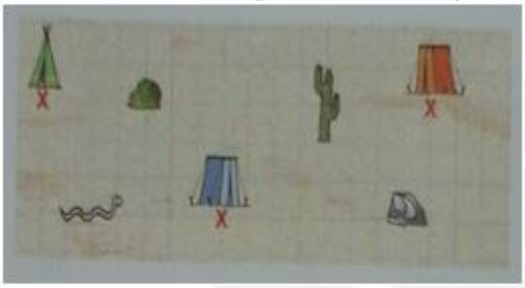
Tabla 13. C.E de la mediatriz en el texto “matemática para todos” segundo de secundaria 2002.

LENGUAJE

- **Verbal:** Mediatriz de los lados de un triángulo, circunferencia circunscrita, equidistancia de los extremos al vértice de un triángulo, etc.
- **Gráfico:**

Circuncentro en los diferentes tipos de triángulo.

- **Simbólico**
  - ✓ ΔABC; $\overline{AM}$; $\overleftrightarrow{m1}, \overleftrightarrow{m2}, \overleftrightarrow{m3}$; $\overleftrightarrow{m1} \perp \overline{AB}$; $A(0,0)$.

SITUACIONES-PROBLEMAS	DEFINICIONES- CONCEPTOS
➢ Los indios quieren hacer una fogata y ponerla de tal manera que esté a la misma distancia de las tres tiendas. Las aspas indican las posiciones desde las cuales se mide la distancia de una tienda a la fogata. Construye el bosquejo en tu cuaderno. Determina la posición de la fogata.  ➢ Construye un triángulo acutángulo (rectángulo, obtusángulo) y traza la circunferencia circunscrita. ➢ Traza los puntos $A(0,0)$; $B(8,2)$; $A(5,7)$ construye una circunferencia que pase por los tres puntos	**Previos.** ➢ Segmento de recta ➢ Punto medio de un segmento ➢ Recta perpendicular a un segmento ➢ Mediatriz de un segmento **Emergentes.** ➢ Mediatriz de un triángulo ➢ Circuncentro ➢ Ubicación de un punto en el plano de coordenadas
Procedimientos	**Proposiciones- propiedades**
➢ Se describe el procedimiento de la solución de algunos ejercicios y el problema contextualizado introductorio.	➢ La mediatrices de triangulo se cortan en un punto llamado circuncentro. ➢ El punto de intersección de las mediatrices de un triángulo determina el centro de la circunferencia. ➢ El circuncentro M se encuentra dentro del triángulo si es un triángulo acutángulo, sobre uno de los lados si es un triángulo rectángulo y fuera del triángulo si es un triángulo obtusángulo.

Argumentos

- No presenta.

Tabla 14. C.E de la mediatriz en el texto “matemática para todos”- quinto de secundaria 2002.

<table>
<tr><th colspan="2">LENGUAJE</th></tr>
<tr><td colspan="2">

➢ **Verbal:**

Mediatriz de un segmento, punto medio de un segmento, recta perpendicular a un segmento, líneas notables, puntos notables, ortocentro, recta de Euler, etc.

➢ **Gráfico:**

Mediatriz del segmento $\overline{AB}$

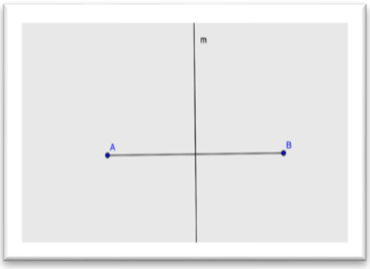
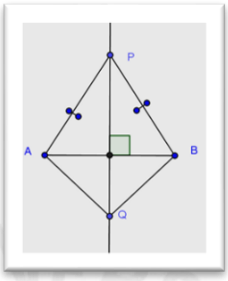
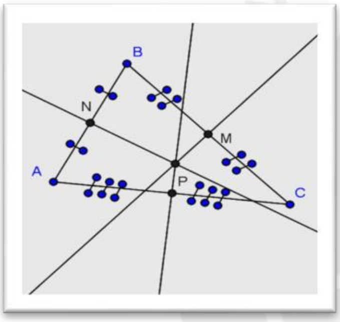


Gráfico usado para mostrar que $AP = PB$



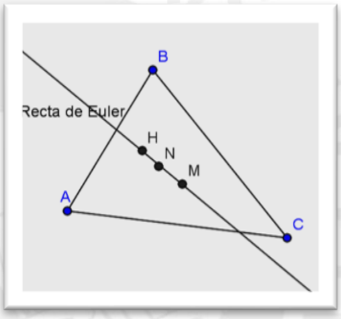
</td></tr>
<tr><td>

Gráfico que muestra el punto de interseccion de las mediatrices.



</td><td>

La recta de Euler.



</td></tr>
<tr><td colspan="2">

➢ **Simbólico :** A; $\overline{AP} = \overline{BP}$; $\overleftrightarrow{m}$; $\overleftrightarrow{m} \perp \overline{AB}$, ΔABC

</td></tr>
<tr><th>SITUACIONES-PROBLEMAS</th><th>DEFINICIONES- CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td>

➢ En un triángulo rectángulo la distancia del ortocentro al baricentro es de 6cm. Calcular cuánto mide la hipotenusa.

Este objeto matemático se caracteriza por tener muy pocos problemas propuestos, más ninguno resuelto y mucho menos contextualizados a situaciones de la vida cotidiana.

</td><td>

Previos.

➢ Segmento de recta, punto medio de un segmento, recta perpendicular a un segmento

Emergentes.

➢ Circuncentro, mediatriz de un triángulo, recta de Euler

</td></tr>
<tr><th>Procedimientos</th><th>Proposiciones- propiedades</th></tr>
<tr><td>

➢ Trazar las mediatrices correspondientes a los segmentos que forman los tres lados del triángulo y su intercepto es llamado circuncentro.

➢ Para construir la recta de Euler: trazar las líneas notables (mediatriz, mediana y altura) con sus respectivos puntos de corte (circuncentro, baricentro y ortocentro); finalmente, trazar la recta contiene a estos puntos.

</td><td>

➢ La mediatriz m de un segmento $\overline{AB}$ es la recta que pasa por el punto medio y lo corta perpendicularmente.

➢ La intersección de las tres mediatrices de un triángulo es el punto notable llamado circuncentro.

➢ En un triángulo no equilátero el ortocentro, el baricentro y el circuncentro se encuentran siempre en línea recta.

➢ En un triángulo no equilátero se cumple que la distancia entre el baricentro y el circuncentro es la mitad de la distancia entre el ortocentro y el baricentro.

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Argumentos</th></tr>
<tr><td colspan="2">

➢ No presenta.

</td></tr>
</table>

4.3 SIGNIFICADOS DE LA MEDIATRIZ EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

La mediatriz de un segmento visto desde la geometría analítica se define como "el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los extremos de un segmento rectilíneo" (Bruño, 1964. p. 65). Además, por tratarse de una recta en el plano cartesiano, ésta es representada mediante una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, la cual, está dada en términos de las coordenadas de los puntos extremos y el punto de corte con el segmento. En ese sentido, Moise (1968) afirma que "toda línea E es la gráfica de una ecuación lineal en x y y" puesto que la recta E es la mediatriz de algún segmento $\overline{P_1P_2}$, donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. Ilustraremos a continuación lo descrito mediante la figura 18.

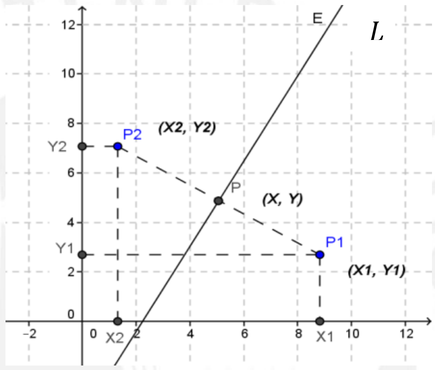


Figura 17. Mediatriz como lugar geométrico.
Fuente: Adaptado de (Moise, 1986. p. 280)

De la figura 18 se sabe que la recta E es mediatriz del segmento $\overline{\mathrm{P_1P_2}}$, luego $\overline{PP_1}$=$\overline{PP_2}$ y como $P = (x, y)$, eso se puede escribir algebraicamente de la siguiente forma.

$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$, de donde:

$x^2 - 2x_1x + {x_1}^2 + y^2 - 2y_1y + {y_1}^2 = x^2 - 2x_2x + +y^2 - 2y_2y + {y_2}^2$

$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + ({x_2}^2 + {y_2}^2 + {x_1}^2 + {y_1}^2)=0$

Si hacemos: $2(x_2 - x_1) = A$, $2(y_2 - y_1) = B$ y $({x_2}^2 + {y_2}^2 + {x_1}^2 + {y_1}^2) = C$; se tiene la ecuación de la recta mediatriz siguiente: $E: Ax + By + C = 0$ $(A \neq 0 \ V \ B \neq O)$

4.4 CAMPOS DE PROBLEMAS Y ANÁLISIS DE OBJETOS PRIMARIOS RELACIONADOS A LA MEDIATRIZ

En este apartado presentamos los diferentes tipos de problemas identificados en los textos revisados para la construcción del significado institucional del objeto matemático. Estos campos de problemas nos servirán como insumo para la elaboración de los instrumentos para la recolección de información (cuestionarios 1 y 2)

Problemas que implican demostraciones. En esta sección se incluyen a todos los problemas donde se pone en juego los argumentos y justificaciones.

1. Teorema: La mediatriz de un segmento en el plano, es el conjunto de puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. 2. Utilizando las propiedades de la mediatriz de un segmento, demostrar que dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales. 3. Demostrar que: Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la línea de los centros, tendrán otro punto común simétrico del anterior, respecto de la línea de los centros 4. Demostrar que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia

Tabla 15. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

PROBLEMA

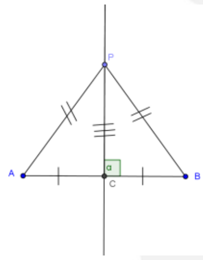
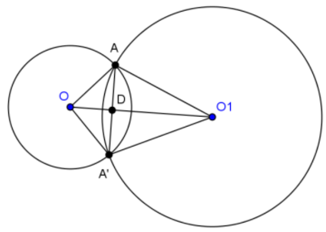
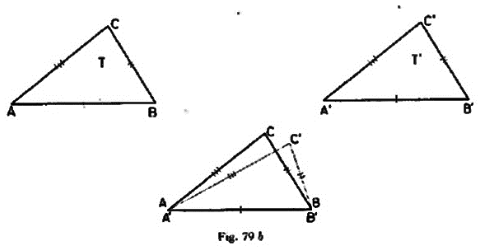
Problemas que implican demostraciones

LENGUAJE

- **Verbal**

  Mediatriz, segmento en el plano, conjunto de puntos en el plano, equidistancia, extremos del segmento, triángulo, lados iguales, circunferencia, línea de los centros.

- **Gráfico**

- **Simbólico**

  $A; \overline{AB}; \overleftrightarrow{m}; \overleftrightarrow{xy}; \Delta ABEC \cong \Delta A'B'C'$

DEFINICIONES – CONCEPTOS

- **Previos.**

  Mediatriz como recta perpendicular en el punto medio, demostración, justificación, congruencia de triángulos, circunferencia y sus elementos, axiomas geométricos, etc.

- **Emergentes**

  Demostración de las propiedades y teoremas relacionados a la mediatriz

PROPOSICIONES

- Todo punto de la mediatriz de un segmento rectilíneo equidista de los extremos del segmento.
- Si un punto no pertenece a la mediatriz de un segmento, no equidista de los extremos de este.
- La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia y por los puntos medios de los arcos que subtiende.

PROCEDIMIENTOS

Trazar una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{CD}$ que pasa por el punto A

Usar axiomas y teoremas de la geometría euclidiana

ARGUMENTOS

- **Tesis 1:** " la mediatriz divide al segmento en dos segmentos congruentes"

  Justificación: definición por la definición de mediatriz de un segmento.

- **Tesis 2:** "Todo punto sobre la mediatriz del segmento rectilíneo, equidista de los extremos del segmento"

  Justificación:

- Postulado de la existencia de un segmento determinado por dos puntos sobre la recta.
- Definición de mediatriz de un segmento
- Postulados de congruencia de triángulos rectángulos

Problemas que implica construir el circuncentro del triángulo. En este campo de problemas se incluye problemas relacionados al circuncentro, los cuales configuran objetos primarios comunes.

1. Determinar el punto que equidiste de los vértices del triángulo. 2. Por tres puntos alineados no pasa ninguna circunferencia. Pues las mediatrices de los segmentos que los unen son paralelas. 3. Trazar una circunferencia circunscrita a un triángulo BAC. 4. Hallar el centro de una circunferencia. 5. En cada triangulo identifica el punto notable resaltado (triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo) 6. Traza las mediatrices de los lados de un triángulo y ubica el circuncentro. 7. Dibuja un triángulo obtusángulo; luego, traza una circunferencia de tal forma que el triángulo este circunscrito a ella. describe el procedimiento que realizaste. 8. Traza los puntos $A(0,0)$; $B(8,2)$; $A(5,7)$ construye una circunferencia que pase por los tres puntos. 9. Construye la circunferencia circunscrita al siguiente triangulo: b= 5,8cm; c=5,4cm; α=48°

Tabla 16. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

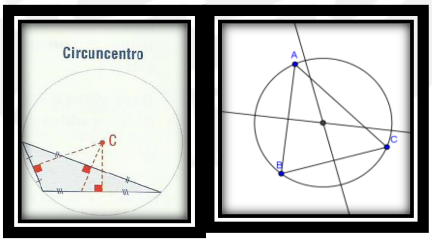
PROBLEMA

Problemas que implica el trazar el circuncentro

LENGUAJE

- **Verbal**

  Equidistancia, vértices del triángulo, puntos no alineados, circunferencia, rectas paralelas, circunferencia circunscrita, centro de una circunferencia, punto notable, circuncentro, triángulo obtusángulo, etc.
- **Gráfico**



- **Simbólico**

  $A; \overline{AP}; \overleftrightarrow{m}; \overleftrightarrow{xy}; AP = PB; \overrightarrow{AD}$

DEFINICIONES – CONCEPTOS

- **Emergentes e intervinientes.** Mediatriz de un segmento rectilíneo, triángulos, puntos notables del triángulo, clasificación de triángulos, coordenadas cartesianas, etc.

PROPOSICIONES

- Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto equidistante de los tres vértices.
- La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia
- Por tres puntos alineados pasa ninguna circunferencia.

PROCEDIMIENTOS

- Trazar la mediatriz de cada lado de un triángulo y tomar la el punto de intersección de estas.
- Trazar la circunferencia haciendo centro en el punto de intersección de las mediatrices. Esta circunferencia contiene a los vértices del triángulo.

ARGUMENTOS

Usar las propiedades de la mediatriz y otras propiedades geométricas

Problemas donde se considera la mediatriz como eje de simetría. En este tipo de problemas se considera a la mediatriz de un segmento como eje de simetría.

1. Trazar el eje de simetría del segmento $\overline{AB}$
2. Justifique que: Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la línea de los centros, tendrán otro punto común simétrico del anterior, respecto de la línea de los centros.
3. Dibuja dos círculos que pasen por los puntos P y Q.
4. Construye un triángulo ABC con los vértices $A(2;4)$, $B(10;1)$ y $C(6;6)$en un plano de coordenadas. Construye (a) la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, (b) el eje de simetría de $\overline{BC}$.

Tabla 17. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

PROBLEMA

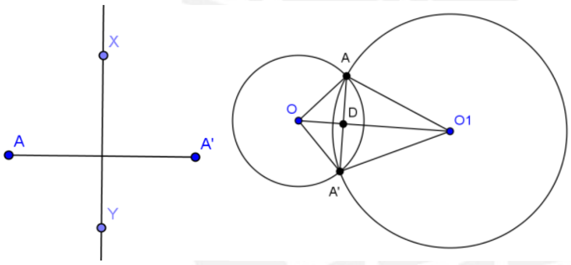
Problemas donde se considera la mediatriz como eje de simetría

LENGUAJE

- **Verbal**

  Mediatriz, eje de simetría, circulo, triángulos, plano de coordenadas, etc.

- **Grafico**



- **Simbólico**

  $\overline{AA'}$, A', $\overleftrightarrow{xy}$, $A(2;4)$, etc.

DEFINICIONES – CONCEPTOS

- **Emergentes.**

  Mediatriz como eje de simetría, simétrico de un punto, y aplicaciones, etc.

PROPOSICIONES

Dos puntos A y A' se dicen simétricos respecto de un eje $\overleftrightarrow{xy}$ cuando dicho eje es mediatriz del segmento que une estos puntos.

PROCEDIMIENTOS

El punto simétrico de A respecto al eje $\overleftrightarrow{xy}$ será el punto A', tal que xy sea mediatriz del segmento $\overline{AA'}$

ARGUMENTOS

Ejemplo de argumentos relacionados a este campo de problemas

- **Tesis**: Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la línea de los centros, tendrán otro punto común simétrico del anterior, respecto de la línea de los centros.
- **Argumentos:**
  - ✓ Sean O y O_1 los centros de dos circunferencias y A un punto común, exterior a la línea de los centros. Tracemos $\overleftrightarrow{AA'}$, perpendicular a $\overline{OO_1}$, y tomemos $DA' = AD$. Diremos que el punto A', simétrico de A, respecto de $\overline{OO_1}$, pertenece a ambas circunferencias.
  - ✓ Trazamos los radios OA, OA' y O_1A, O_1A'. Como consecuencia de la construcción, la recta $\overleftrightarrow{OO1}$ es mediatriz de $\overline{AA'}$; pero todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo; luego.

$$OA' = OA = R$$

- ✓ El punto A'pertenecerá a la circunferencia de centro. Por lo mismo será $O_1A' = O_1A = R_1$
- ✓ El punto A' pertenecerá a la circunferencia de centro O_1.

Por consiguiente, el punto A', simétrico de A, es punto común de las dos circunferencias.

Problemas que implique dividir un segmento en 2, 4, 6, 8….partes iguales. Se incluyen problemas que implique la división de un segmento en un número par de segmentos iguales, y además problemas donde se requiera trazar una perpendicular a una recta por un punto dado.

1. Traza un segmento $\overline{AB}$ y halla su punto medio
2. Divide un segmento de 9,7cm de largo en 2 partes iguales
3. Divide un segmento de 9,7cm de largo en 4 partes iguales
4. Divide un segmento de 17,5cm de largo en 8 partes iguales
5. Por un punto A perteneciente a una recta $\overline{\mathrm{CD}}$ trazar una perpendicular a dicha recta
6. Por un punto A que no pertenece a una recta $\overline{\mathrm{CD}}$ trazar una perpendicular a dicha recta
7. Dividir un segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales
8. Trazar la bisectriz de un ángulo dado BAC
9. Dibuja en un plano los puntos $A(1;4)$ y $B(7;1)$construye con ayuda de tu escuadra-transportador (geotriángulo) la mediatriz del segmento $\overline{AB}$

Tabla 18. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

PROBLEMA

Problemas que implique dividir un segmento en 2, 4, 6, 8….partes iguales

LENGUAJE

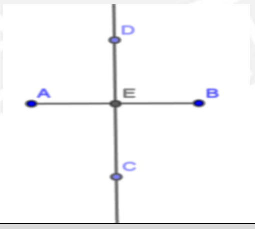
- **Verbal**

  Bisecar un segmento, hallar su punto medio, dividir un segmento en 4 partes iguales, trazar una recta perpendicular a otra, etc.

- **Simbólico**

  $A; \overline{AP}; m; m \perp \overline{AB}; A(1;4), 9{,}7cm$

- **Grafico**



DEFINICIONES – CONCEPTOS

- **Emergentes e intervinientes.**

  Mediatriz de un segmento, dividir un segmento en un número par de partes iguales, trazar una recta perpendicular a otra por un punto dado.

PROPOSICIONES

- Todo segmento puede ser dividido en un número par de partes iguales.
- Dada una recta y un punto, existe una única recta perpendicular a la primera que a la vez contenga al punto dado.

PROCEDIMIENTOS

- Para dividir un segmento en un número par de partes iguales, se empieza dividiendo al segmento en dos partes iguales y ese proceso se sigue con cada una de las partes resultantes.

ARGUMENTOS

- Usar las propiedades de la mediatriz.

Problemas que implican el trazar la mediatriz de una cuerda. Este tipo de problemas están asociados al teorema de la mediatriz de una cuerda respecto a la circunferencia.

1. Dividir el arco ABC de una circunferencia en dos partes iguales 2. Trazar una circunferencia circunscrita a un triángulo BAC 3. Hallar el centro de una circunferencia 4. Hallar el centro de un arco de circunferencia. 5. Traza los puntos $A(0,0)$; $B(8,2)$; $A(5,7)$ construye una circunferencia que pase por los tres puntos.

Tabla 19. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

PROBLEMA

Problemas que implican el trazar la mediatriz de una cuerda

LENGUAJE

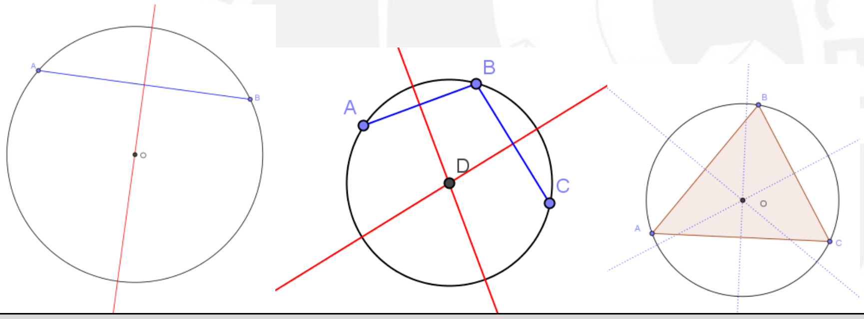
- **Verbal.**

Circunferencia, cuerda, propiedades de la mediatriz de la cuerda, diámetro centro de la circunferencia.

- **Simbólico**

  O, $\overline{AB}$, L

- **Gráfico**



DEFINICIONES – CONCEPTOS

- **Emergentes e intervinientes.**
  - Segmento, recta perpendicular, punto medio.
  - Mediatriz de una cuerda y la propiedad respecto del centro de la circunferencia.
  - Circuncentro de un triángulo
  - Aplicaciones de la propiedad de la mediatriz de una cuerda

PROPOSICIONES

- La mediatriz de una cuerda contiene al centro de una circunferencia.
- El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.
- Etc.

PROCEDIMIENTOS

- Trazar la mediatriz de una cuerda de circunferencia.
- Trazar la mediatriz de dos cuerdas y tomar el punto de intersección.
- Hallar el circuncentro de un triángulo inscrito en la circunferencia dada.

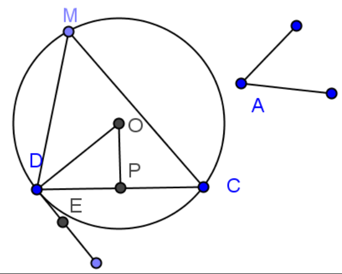
ARGUMENTOS

- La mediatriz corta a un segmento en su punto medio; por lo tanto el punto de corte equidista de los extremos.
- Toda recta puede ser representada como una ecuación en dos variables.

Construcción del arco capaz. Tenemos un problema de construcción del arco capaz, a partir de un segmento y un ángulo dados.

6. Dado un segmento $\overline{CD}$ y su ángulo A, construir el arco capaz de ese ángulo, si ha de tener por extremo los del segmento dado.

Tabla 20. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

PROBLEMA
Problemas relacionados a la construcción del arco capaz, como por ejemplo. Dado un segmento $\overline{CD}$ y su ángulo A, construir el arco capaz de ese ángulo, si ha de tener por extremo los del segmento dado.
LENGUAJE
➢ Verbal. Segmento, ángulo, arco capaz, extremos de un segmento. ➢ **Simbólico.** $A, \overline{CD}, \overline{l}$ ➢ **Grafico** 
DEFINICIONES – CONCEPTOS
➢ **Previos.** Segmento, mediatriz de un segmento, ángulos y medida de ángulos, circunferencia, etc. ➢ **Emergentes** El lugar geométrico de los vértices de los ángulos que tienen la misma amplitud y abarcan un mismo segmento.
PROPOSICIONES
PROCEDIMIENTOS
• Sobre un extremo del segmento $\overline{CD}$ se construye el ángulo $\angle CDE = A$, y por este mismo extremo D, se traza la perpendicular $\overline{DO}$ al lado $\overline{DE}$; dicha perpendicular encuentra a la mediatriz de $\overline{CD}$ en el puto O que es el centro del arco pedido. • En efecto, todo ángulo M inscrito en el arco CMD, trazado desde el centro O y con el radio $\overline{OD}$, es igual al ángulo CDE, pues ambos tienen la misma amplitud.
ARGUMENTOS
Usar las propiedades de la mediatriz y otros objetos de la geometría para construir el lugar geométrico buscado.

Problemas en la geometría analítica. Se incluye problemas que implica hallar la ecuación de la recta mediatriz de un segmento conociendo las coordenadas de sus puntos extremos.

1. "toda línea E es la gráfica de una ecuación lineal en x y y" puesto que la recta E es la mediatriz de algún segmento $\overline{P_1P_2}$, donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$.

Tabla 21. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

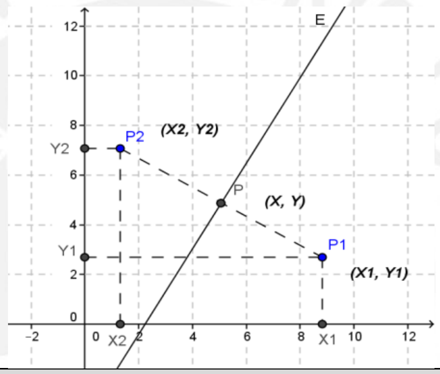
<table>
<tr><th>PROBLEMA</th></tr>
<tr><td>“toda línea E es la gráfica de una ecuación lineal en x y y” puesto que la recta E es la mediatriz de algún segmento $\overline{P_1P_2}$, donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$.</td></tr>
<tr><th>LENGUAJE</th></tr>
<tr><td>

- Verbal

Términos verbales del contexto matemático (punto medio de un segmento, perpendicular)

- **Simbólico**
  - $P_1 = (x_1, y_1), P = (x, y)$
  - $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$
  - $2(x_2 - x_1) = A$ y $2(y_2 - y_1) = B$
  - $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + ({x_2}^2 + {y_2}^2 + {x_1}^2 + {y_1}^2)$=0 $(A \neq O\ V\ B \neq 0)$

- **Gráfico.**



</td></tr>
<tr><th>DEFINICIONES – CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td>

- **Previos.**
  - Par ordenado
  - Recta
  - Punto medio de un segmento
  - Distancia entre dos puntos
- **Emergentes**
  - Mediatriz de un segmento expresado como una ecuación en dos variables

</td></tr>
<tr><th>PROPOSICIONES</th></tr>
<tr><td>

- La mediatriz de un segmento corta al segmento en su punto medio.
- La mediatriz de un segmento tiene una ecuación algebraica.
- Todo punto que pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ equidista de los puntos extremos de dicho segmento.

</td></tr>
<tr><th>PROCEDIMIENTOS</th></tr>
<tr><td>

- La ecuación de la recta se halla al aplicar la definición de punto medio de un segmento, conociendo las coordenadas del punto.

</td></tr>
<tr><th>ARGUMENTOS</th></tr>
<tr><td>

- La mediatriz corta a un segmento en su punto medio; por lo tanto el punto de corte equidista de los extremos.
- Toda recta puede ser representada como una ecuación en dos variables.

</td></tr>
</table>

Problemas aplicados al contexto extramatemático. Se incluye problemas relacionados a diferentes usos de la mediatriz, cuyo enunciado se encuentra en un contexto extramatemático.

1. En el mapa de la figura los piratas han hecho unas marcas que permite encontrar un tesoro. Solo el capitán y dos de sus hombres de confianza saben que el tesoro se encuentra en un sitio que está a la misma distancia de las aspas de la roca y el árbol y que, además, está ubicado exactamente 25m del manantial. Indica en que partes podría estar el tesoro de los piratas (1cm del mapa corresponde a 10m en la realidad) 2. Los indios quieren hacer una fogata y ponerla de tal manera que esté a la misma distancia de las tres tiendas. Las aspas indican las posiciones desde las cuales se mide la distancia de una tienda a la fogata. Construye el bosquejo en tu cuaderno. Determina la posición de la fogata. 

Tabla 22. C.E de la mediatriz relacionada a este campo de problemas.

PROBLEMA
Problemas aplicados al contexto extramatemático
LENGUAJE
➢ **Verbal.** Misma distancia, el tesoro está a 25m del manantial, misma distancia, triangulo etc. ➢ **Simbólico.** A; $\overline{AP}$; $\overleftrightarrow{m}$; $\overleftrightarrow{m} \perp \overline{AB}$. ➢ **Grafico** 
DEFINICIONES – CONCEPTOS
➢ **Emergentes e intervinientes.** Mediatriz de un segmento, circuncentro de un triángulo. Resolución de problemas asociados a la mediatriz.
PROPOSICIONES
• Todo punto perteneciente a la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. • El circuncentro en un triángulo equidista de los vértices de dicho triangulo • Dados tres puntos no alineados se puede trazar una circunferencia que los contenga.
PROCEDIMIENTOS
Leer el problema y comprender, para aplicar convenientemente las propiedades de la mediatriz.
ARGUMENTOS
• Usar las propiedades de la mediatriz de un segmento • Usar las propiedades del circuncentro

A continuación, la figura 19, se presenta una síntesis de las definiciones y los usos más frecuentes de la mediatriz, tanto en la geometría sintética (euclidiana), como en la geometría analítica (cartesiana). U_1 (dividir a un segmento en dos segmentos congruentes), U_2 (determinar el simétrico de un punto), U_3 (hallar el centro de una circunferencia), U_4 (construir el arco capaz)…etc, representa los usos identificados en los textos tomados para construir el significado de referencia.

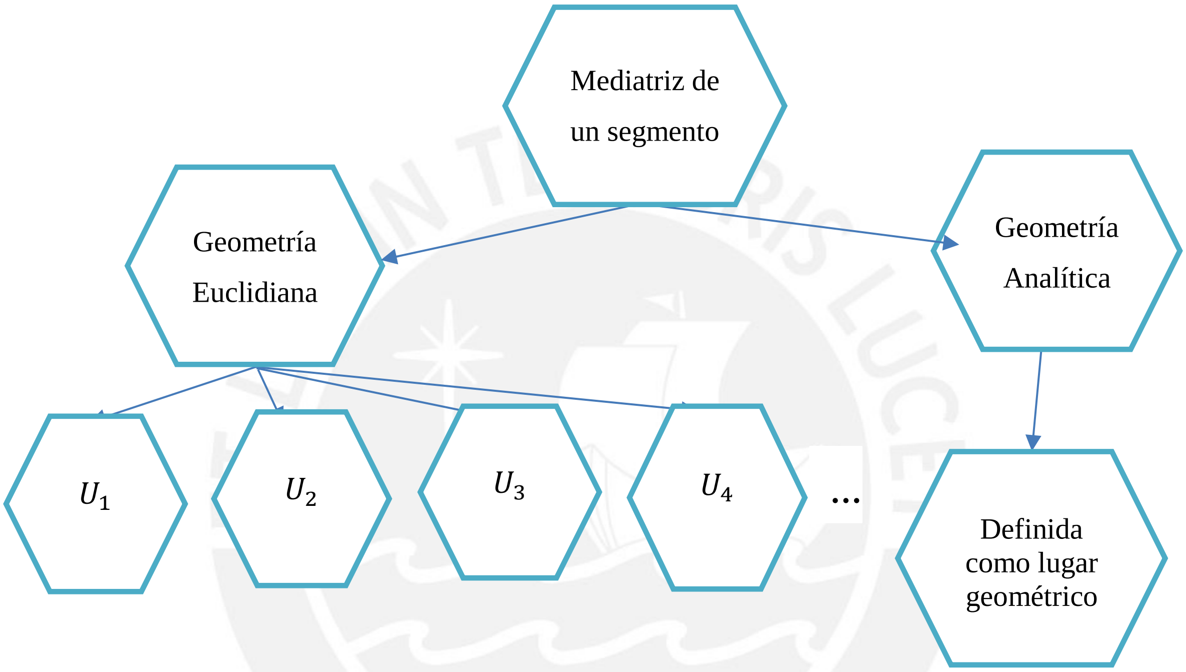


Figura 18. Definiciones y usos de la mediatriz

Fuente: Elaboración propia

El gráfico anterior sintetiza los diferentes significados y usos de la mediatriz de un segmento en los textos de educación superior revisados. Así tenemos que, la mediatriz puede ser estudiada desde dos ramas de la matemática, diferenciadas por la forma en que abordan los objetos matemáticos. Por un lado, la geometría sintética, en la que se considera a la mediatriz como una recta estática y a partir de ello se le da diferentes usos (U_1, U_2, U_3, U_4,…) tanto en la construcción de otros objetos matemáticos, como en la resolución de problemas. Por otro lado, la geometría analítica donde puede ser vista como un lugar geométrico y puede ser representada por la ecuación de una recta.

A continuación analizamos las diferentes actividades a través de las tareas planteadas en los textos de educación secundaria. Usando para ello, la noción de configuración epistémica de objetos primarios, en los textos distribuidos por el ministerio de educación del Perú y en los textos Matemática para Todos de la editorial Apoyo.

CAPITULO V

DISEÑO DE LOS INSTRUMENTOS Y ANÁLISIS A PRIORI DE LAS RESPUESTAS ESPERADAS

(Resumen)

En este capítulo abordaremos el diseño de dos cuestionarios y análisis a priori de las respuestas esperadas usando para ello las configuraciones de objetos primarios.

5.1 ASPECTOS GENERALES

Con la finalidad de identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que el profesor pone de manifiesto durante el proceso de enseñanza - aprendizaje, y teniendo como insumos a nuestro marco teórico descrito en el capítulo II y al significado institucional del objeto matemático propuesto en el capítulo IV, elaboramos dos cuestionarios. Las actividades de cada cuestionario tienen en cuenta las relaciones entre el conocimiento común del contenido (mediatriz y significados) y el conocimiento didáctico especializado.

Así mismo, presentamos las configuraciones epistémicas (C.E) de las soluciones esperadas. Nuestro objetivo es mostrar como el uso de las configuraciones permiten describir los objetos primarios que conforman la estructura de una situación problema y describir brevemente las posibles prácticas y procesos puestos en marcha durante las prácticas matemáticas.

5.2 DISEÑO DEL CUESTIONARIO 1 Y ANÁLISIS A PRIORI DE LAS RESPUESTAS ESPERADAS

Este cuestionario consta de 15 ítems, las primeras 08 preguntas están destinadas a recoger información general del profesor, por ejemplo: nivel educativo al que pertenece, institución educativa superior de la que egresó, años de experiencia enseñando el área de matemática, ciclos y grados a los que ha enseñado últimamente y el tipo de institución educativa en la que viene laborando. Las siguientes 07 preguntas tienen como finalidad, identificar el nivel de conocimiento que tiene el profesor sobre el objeto matemático mediatriz, sus diferentes usos, propiedades, así como los argumentos que usa para demostrar las propiedades y resolver problemas. En lo que sigue, presentamos las 07 últimas preguntas acompañadas de los objetivos pretendidos en cada una de ellas.

Pregunta 09
a) ¿Qué entiende por mediatriz de un segmento?
b) ¿Cómo define la mediatriz de un segmento en una sesión de aprendizaje a sus alumnos?

Estas preguntas tienen como objetivo determinar qué conceptos de mediatriz maneja el profesor; y si los conecta y los adapta al nivel educativo al que se dirige.

Solución esperada. Se espera que el profesor responda una o más de las siguientes respuestas, lo que nos daría evidencia de un conocimiento común del contenido. Si el profesor tiene en cuenta la adecuación al grado al que se dirige daría evidencia de un conocimiento didáctico especializado.

Se llama Mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al segmento, que corta en su punto medio.

La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ *en el plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos, que son los extremos de dicho segmento.*

La mediatriz de un segmento es el eje de simetría de dicho segmento.

Pregunta 10
Demuestre el teorema relacionado con la mediatriz.
La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.

El objetivo de esta pregunta es conocer qué argumentos utiliza el profesor para demostrar el teorema de la mediatriz. Además, conocer si los argumentos y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen" en coherencia con la idoneidad epistémica propuesta por el EOS.

Solución esperada. Se espera que el profesor demuestre la propiedad usando loas axiomas y teoremas matemáticos.

Demostración:
Hipótesis: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$; AM=MB; $\overleftrightarrow{CD} \cap \overline{AB} = \{M\}$, P es un punto cualquiera sobre $\overleftrightarrow{CD}$, $C \neq M$.
Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

PROPOSICIONES	RAZONES
1. $:\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$; $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.	1) Hipótesis
2. $\sphericalangle AMC$ y $\sphericalangle BMC$ son $\sphericalangle s$ rectos.	2) Debido a que $:\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$ (1)
3. Trazar $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$.	3) Postulado de la existencia de una sola recta que contiene a dos puntos; determinando un segmento entre ellos.
4. $\overline{CM} \cong \overline{MC}$.	4) Propiedad reflexiva.
5. $\Delta AMC \cong \Delta BMC$	5) Si dos triángulos rectángulos tienen dos catetos congruentes, entonces son congruentes.
6. $\mid \therefore \overline{AC} \cong \overline{BC}$	6) Como $\Delta AMC \cong \Delta BMC$, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (5)

La configuración de objetos primarios no la incluimos en este apartado, porque la incluimos en el apartado correspondiente a la actividad 3 del cuestionario 2

Pregunta 11 Si Ud. tuviera que diseñar una actividad para ser desarrollada en un ambiente de geometría dinámica, ¿qué preguntas haría a sus estudiantes para que el concepto de mediatriz emerja de forma natural?

El objetivo es conocer si el docente usa algún software de geometría dinámica para enseñar matemática, y además, si utiliza las herramientas del software de modo que permita a sus estudiantes hacer conjeturas sobre la mediatriz de un segmento y sus propiedades.

Solución esperada

Si se trabaja con algún software, por ejemplo Geogebra, se pedirá a los estudiantes que grafiquen un segmento haciendo uso de la herramienta segmento, luego hagan uso de la herramienta mediatriz y tracen la mediatriz del segmento y hagan conjeturas de la observación. Los estudiantes apreciarán que la recta es perpendicular al segmento, se intersecta con el segmento en su punto medio, lo que finalmente les llevará a la definición.

Su respuesta no ayudará a identificar si el docente conoce el uso de las herramientas informáticas y si las conoce, cómo las usa para enseñar un determinado tópico matemático. Esto muestra por un lado, el grado de idoneidad didáctica mediacional en un proceso de instrucción y por otro el conocimiento pedagógico especializado del tema en un ambiente tecnológico para la enseñanza.

Pregunta 12 ¿Dónde aplica o utiliza el concepto de mediatriz?

El objetivo de esta pregunta es determinar si el docente conoce qué usos se puede dar al concepto de mediatriz en la geometría sintética y analítica, teniendo en cuenta los siguientes indicadores de idoneidad didáctica: a) *Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí y b) Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas*.

Solución esperada. Se espera que el profesor responda diversos uso de la mediatriz, entre los más importantes los siguientes: para determinar el punto medio de un segmento, para determinar el circuncentro de un triángulo cualesquiera, para graficar una circunferencia circunscrita a un triángulo, como eje de simetría, para construir el simétrico de una figura, para dividir un arco de circunferencia en dos partes iguales, para trazar un perpendicular a una recta que pase por un punto dado en la recta, para construir el arco capaz, como el concepto del vecino más próximo, para encontrar la ecuación de la recta mediatriz de un segmento conociendo las coordenadas de sus extremos, aplicación a la resolución de problemas de contexto extramatemático, etc.

La respuesta a la pregunta nos permitirá conocer si el profesor solo tiene un conocimiento común del contenido o un conocimiento especializado y ampliado del contenido (adecuación al grado que enseña y conocimiento de niveles superiores al que enseña)

Pregunta 13
¿Qué textos de geometría utiliza al preparar sus clases? y ¿por qué?

El objetivo de esta pregunta es conocer qué textos utiliza el profesor de educación secundaria para preparar sus clases de matemática en general y la mediatriz en particular, teniendo en cuenta el indicador de idoneidad didáctica: "*Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones*" que está contemplada en la idoneidad mediacional propuesta por el EOS

Respuesta esperada

Se espera que el profesor detalle toda la bibliografía que usa para preparar sus clases, pero como mínimo mencione los textos proporcionados por el Ministerio de Educación del Perú.

La respuesta a esta pregunta nos permitirá identificar la fuente se ha adquirido los conocimientos, ya que investigaciones como la de Reyes y Monserrat (2014) señalan que los libros de texto influyen en la forma como se presenta los objetos matemáticos.

Pregunta 14
Se conoce que la casa de Carlos (C) está a la misma distancia lineal de Sebastián(S) y Beatriz (B). Señalar tres ubicaciones donde se localizaría la casa de Carlos.
¿Qué concepto matemático esta de tras de este problema?

S

B

El objetivo de esta pregunta es determinar si el profesor conoce problemas de contexto extramatemático como el mostrado, para reforzar el aprendizaje. Teniendo en cuenta el indicador de idoneidad didáctica *"Se presenta una muestra representativa y articulada de* *situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación" propuesta por el EOS el criterio de idoneidad epistémica.*

Solución esperada

Se espera que en este problema se proporcione una solución que se aproxime a la siguiente:

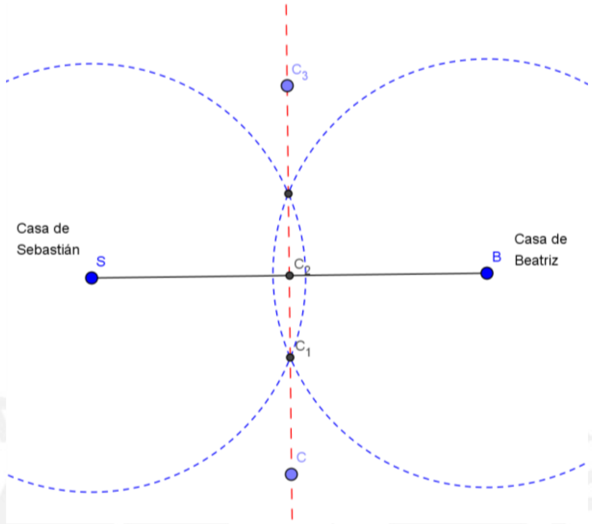


Figura 19. Resolución problema 14 (cuestionario 1)

Representamos la casa Sebastián con el punto S y la casa de Beatriz con la letra B, se traza el segmento $\overline{SB}$, luego construimos la mediatriz de dicho segmento. Finalmente, la casa de Carlos puede estar ubicada sobre cualquier punto de la mediatriz como se puede apreciar en la figura.

La solución a este problema nos dará evidencia de un conocimiento común del contenido. Además si identifica en concepto que está detrás de la solución y la define de acuerdo al nivel educativo implica un manejo de un conocimiento especializado del contenido.

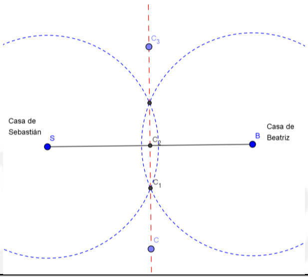
Análisis de prácticas

Las prácticas matemáticas necesarias para resolver esta actividad son: leer el enunciado del problema, comprender el enunciado en el contexto extramatemático, resolver el problema y comunicar su respuesta, la que incluye identificar el objeto matemático que está detrás de la solución.

Análisis de objetos: configuración epistémica de la tarea

Una configuración "emergente" asociada a al problema mencionado es el siguiente.

Tabla 23. C.E de la pregunta 14 (cuestionario 1).

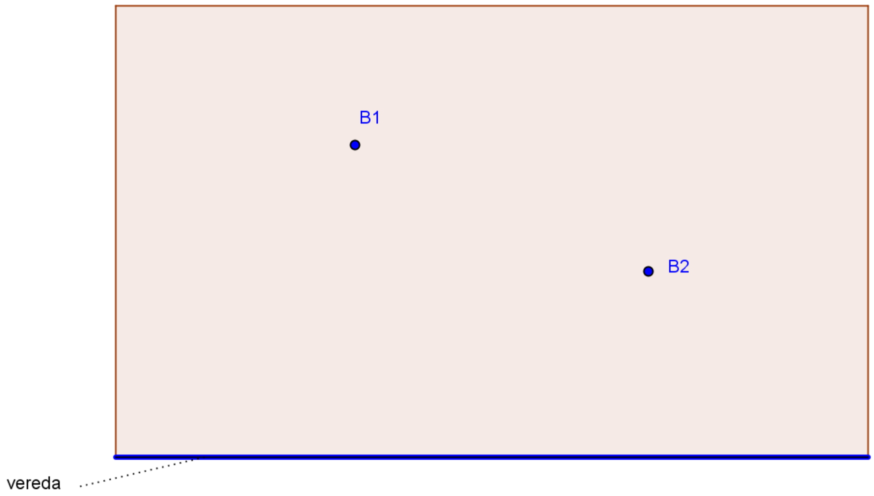
Situación problema
Problema de contexto extramatemático, para que emerja la definición de la mediatriz como lugar geométrico.
Lenguaje
➢ **Verbal** Distancia lineal, misma distancia, mediatriz, construcción geométrica, etc. ➢ **Simbólico** $S, \overline{SB}$ ➢ **Grafico** 
Conceptos (definiciones)
➢ **Previos** Segmento, recta perpendicular, mediatriz como recta perpendicular en el punto medio. ➢ **Emergentes** Mediatriz de un segmento (definida como un lugar geométrico)
Propiedades
➢ **Previas** La mediatriz divide al segmento en dos segmentos congruentes. La recta perpendicular a un segmento, forma cuatro ángulos congruentes e iguales a 90° con el segmento. ➢ **Emergentes** Todos los puntos que pertenecen a la mediatriz de un segmento, equidistan de sus extremos.
Procedimientos
➢ **Previas Emergentes** Analizar las características que tiene el problema para comprenderlo, luego construir un gráfico para responder a lo indicado en el problema. Finalmente, comunicar su resultado.
Argumentos
➢ **Tesis 1: "**los puntos que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidistan de los extremos del segmento**"** **Justificación:** justificación visual a partir del trazo de la mediatriz del segmento $\overline{SB}$, justificación por la definición de mediatriz de un segmento.

5.3 DISEÑO DEL CUESTIONARIO 2 Y ANÁLISIS A PRIORI DE LAS RESPUESTAS ESPERADAS

El cuestionario 02 consta de 06 actividades, las cuales serán resueltas por el profesor; a partir de cuyas respuestas analizaremos si los profesores identifican los conceptos que emergen en cada actividad, los argumentos que utilizan para resolver cada pregunta y de esta manera acercarnos a las creencias que tiene el profesor sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz. A continuación presentamos las actividades, los objetivos que se persiguen con ellas, la solución y su configuración epistémica de objetos primarios emergentes.

ACTIVIDAD 02

En la figura que presentamos a continuación se muestra parte de un parque de diversiones con la ubicación de dos boleterías B_1 y B_2 y una vereda.



a) ¿Dónde podría ubicarse una persona, sobre esta vereda, para que se encuentre a la misma distancia de las boleterías B_1 y B_2 ?

b) ¿Es posible encontrar otros puntos sobre esta vereda cuyas distancias a las boleterías B_1 y B_2 sean iguales?

c) ¿Es posible encontrar otros puntos de ubicación, dentro del parque, de modo que una persona se encuentre a la misma distancia de las boleterías B_1 y B_2 ? ¿Qué propiedad cumplen dichos puntos?

d) ¿Qué objeto matemático es el que emerge en esta actividad?

e) ¿Cómo define este objeto matemático?

Esta actividad tiene como objetivos: (1) Usar un problema de contexto extra matemático, cuya resolución conlleva a que emerja el concepto de mediatriz de un segmento rectilíneo como un lugar geométrico; (2) Identificar si el profesor de educación secundaria es capaz de usar este concepto y sus propiedades, para resolver problemas.

Respuesta esperada. Para esta actividad se espera que el profesor proporcione la siguiente respuesta.

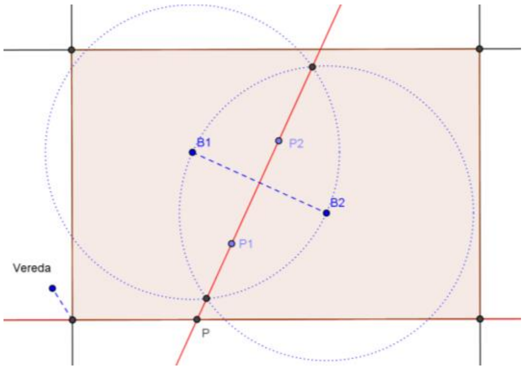


Figura 20. Resolución actividad 1 (cuestionario 2)

a) Si tratamos por ensayo y error de encontrar el punto donde se ubicaría la persona sobre la vereda señalada, de tal manera que se encuentre a la misma distancia de las boleterías B_1 y B_2 tenemos que, es necesario de algún instrumento de medida adicional, con el cual podamos aproximarnos a la ubicación del punto pedido y esto es un trabajo bastante tedioso. Es por ello, que surge la necesidad de introducir el uso de otro objeto matemático que nos permita resolver el problema en forma precisa y rápida; este objeto, es la mediatriz de un segmento. Como se muestra en la figura 20 el punto P (en la vereda) donde se ubicaría la persona, de tal forma que este a la misma distancia tanto de la boletería B_1, como de la boletería B_2, está en la intersección de la mediatriz del segmento $\overline{B_1\ B_2}$ y la vereda indicada.

b) A partir de la figura 20 podemos apreciar que no es posible encontrar otros puntos sobre la vereda que equidisten de las boleterías B_1 y B_2, ya que los únicos puntos que equidistan son los que pertenecen a la mediatriz.

c) Existen muchos puntos dentro del parque que se encuentran a la misma distancia de las boleterías B_1 y B_2, de hecho, todos los puntos que están dentro del parque y pertenecen a la mediatriz del segmento $\overline{B_1\ B_2}$ satisfacen esa condición.

d) El objeto matemático que emerge de esta actividad es la mediatriz de un segmento rectilíneo definida como un lugar geométrico.

e) La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ en el plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos, que son los extremos de dicho segmento.

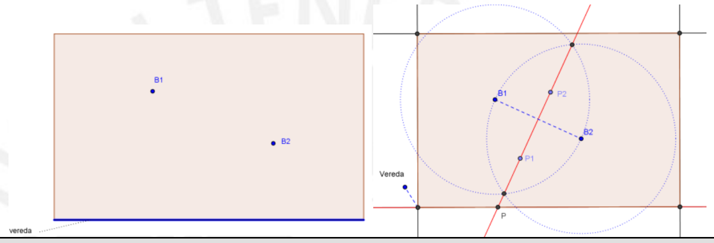
Análisis de prácticas, objetos y procesos

Análisis de prácticas. En ese sentido, las prácticas del profesor para resolver la actividad 01 son: leer el problema de contexto extramatemático cuyo fin es la emergencia de la mediatriz como lugar geométrico, resolver el problema y posteriormente producir un texto en lengua natural para comunicar su respuesta.

Análisis de objetos: configuración epistémica de la tarea

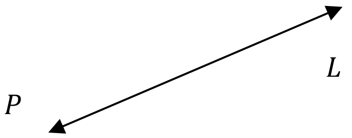
Una configuración emergente asociada a la mediatriz de un segmento, definida como un lugar geométrico es la siguiente.

Tabla 24. C.E de la actividad 1 (cuestionario 2).

Situación problema
Problema de contexto extramatemático, cuya solución lleva a que emerja el concepto de mediatriz como un lugar geométrico.
Lenguaje
➢ **Verbal.** Términos verbales del contexto matemático: distancias iguales, segmento, punto, recta, mediatriz. ➢ **Simbólico.** P;B_1, B_2 , $\overline{B_1\, B_2}$ ➢ **Grafico** 
Conceptos (definiciones)
➢ **Previos** - Segmento, recta perpendicular, punto medio, equidistancia. - Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular en el punto medio) ➢ **Emergentes** - Mediatriz de un segmento (definida como el lugar geométrico en el plano, de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento)
Propiedades
➢ **Previas** - La mediatriz divide al segmento en dos segmentos congruentes. - La recta perpendicular a un segmento, forma cuatro ángulos congruentes e iguales a 90° con el segmento. ➢ **Emergentes** Todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del mismo.
Procedimientos
➢ **Previas** - Buscar por ensayo y error el puto en el que se ubicaría la persona, de modo que se encuentre a la misma distancia de las dos boleterías. ➢ **Emergentes** - Construcción de la mediatriz del segmento $\overline{B_1\, B_2}$ y hallando el punto P que resulta de interceptar la mediatriz de dicho segmento con la vereda.
Argumentos
➢ **Tesis 1:** **“**los puntos que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidistan de los extremos del segmento**”** **Justificación:** justificación visual a partir del trazo de la mediatriz del segmento $\overline{B_1\, B_2}$ ➢ **Tesis 2:** **“**todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del segmento**”** **Justificación:** justificación de la propiedad haciendo uso de otros elementos de la geometría, para ello construir la mediatriz del segmento $\overline{B_1\, B_2}$ y probar que $\overline{P\, B_2} \cong \overline{PB_2}$

ACTIVIDAD 02

Considere la figura mostrada a continuación:



Se sabe que P es uno de los extremos del segmento $\overline{PQ}$ y L es la mediatriz de este segmento.

a) Explique donde se ubicaría el punto Q y por qué.
b) ¿Qué objeto matemático emerge en esta actividad?
c) ¿Cómo define este objeto matemático?

Objetivo. Determinar si el profesor reconoce el uso de la mediatriz como eje de simetría de un segmento y usa esta definición para resolver problemas.

Respuesta esperada.

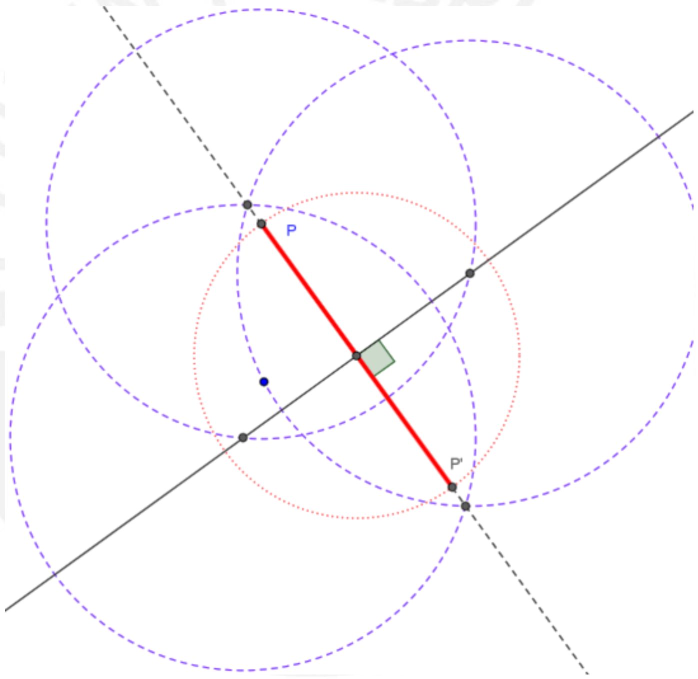


Figura 21. Resolución actividad 2 (cuestionario 2)

De acuerdo a la figura 21 se sugiere lo siguiente:

a) Para poder determinar donde se ubica el punto $Q = P'$, trazaremos una recta perpendicular a la recta L, sobre ella se trazara el simétrico del punto P, teniendo como eje de simetría a la L. la recta L es eje de simetría del segmento $\overline{PP'}$
b) El objeto matemático que emerge de esta actividad es la mediatriz como eje de simetría.
c) Una recta es eje de simetría de una figura, cuando la divide en dos figuras semejantes. El eje de simetría de un segmento es su mediatriz.

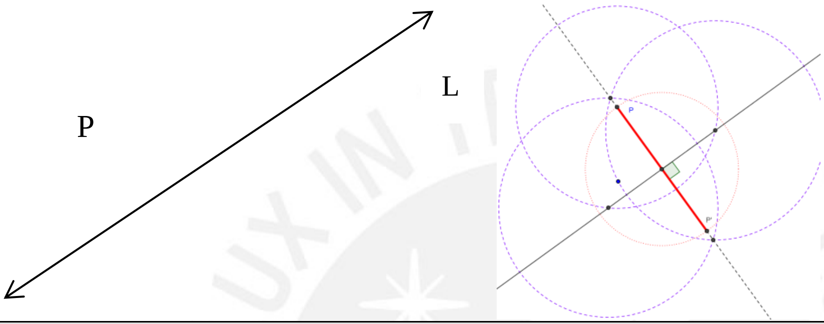
Tabla 25. C.E de la actividad 2 (cuestionario 2)

Situación problema

Problema de contexto intramatemático, que conduce a que emerja la mediatriz de un segmento definida como: el eje de simetría de un segmento.

Lenguaje

- **Verbal**
  Relacionado al contexto: figura, extremo de un segmento.
  Términos verbales del contexto matemático: segmento, punto, recta, mediatriz de un segmento.
- **Simbólico**
  $P;Q, \overline{PQ}, Q = P', \overline{PP'}$
- **Grafico**



Conceptos (definiciones)

- **Previos**
  - Segmento, recta perpendicular, punto medio, simétrico de un punto.
  - Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento)
- **Emergentes**
  - Mediatriz de un segmento (definida como el eje de simetría de un segmento)

Propiedades

- **Previas**
  - La mediatriz divide al segmento en dos segmentos congruentes.
  - La recta perpendicular a un segmento, forma cuatro ángulos congruentes e iguales a 90° con el segmento.
  - Todo punto en el plano tiene un simétrico respecto de una recta.
- **Emergentes**
  - La mediatriz de un segmento (definido como el eje de simetría del mismo).

Procedimientos

- **Previas**
  - Trazar una recta perpendicular a la recta L, haciendo uso de la propiedad de la mediatriz hallar el punto Q.
- **Emergentes**
  - Trazar una recta perpendicular a la recta L, sobre ella ubicar el simétrico del punto P, finalmente unimos los extremos del segmento.

Argumentos

- **Tesis 1:** " la mediatriz de un segmento corta al segmento es su punto medio"

Justificación: definición de la mediatriz en el plano.

- **Tesis 2:** "dado un punto o un conjunto de puntos, se puede determinar el punto simétrico o conjunto de puntos simétricos respecto de un eje de simetría"

Justificación: dos puntos simétricos equidistan de su eje de simetría .

ACTIVIDAD 3

Considere un Segmento $\overline{AB}$ y la mediatriz L de dicho segmento.

a) Ubique un punto C en la mediatriz, de modo que no pertenezca al segmento $\overline{AB}$, ¿Qué tipo de triángulo se formó? ¿Por qué?
b) ¿Qué definición o propiedad de la mediatriz empleó?
c) Demuestre esta propiedad.

Objetivo. Los objetivos de esta actividad son: (1) Identificar si el profesor conoce la propiedad que determinan los puntos de la mediatriz respecto a los extremos del mismo y (2) identificar los argumentos que usa para demostrar la propiedad 4.

Respuesta esperada.

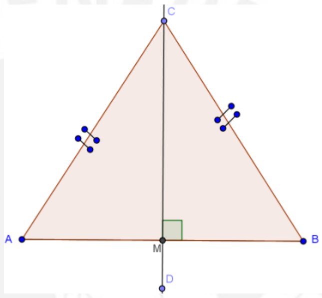


Figura 22. Resolución actividad 3 (cuestionario 2)

a) El tipo de triángulo que se formó es un triángulo isósceles; porque, el punto C se encuentra a la misma distancia de los extremos del segmento $\overline{AB}$; además la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ del triángulo ΔABC es el eje de simetría del triángulo.
b) Cualquier punto que pertenece a la mediatriz segmento $\overline{AB}$, equidista de los extremos de dicho segmento, lo cual nos permite trazar el triángulo ΔABC (figura 22), donde la mediatriz del lado $\overline{AB}$ es a la vez altura y bisectriz del ángulo $\measuredangle C$
c) Demostración de la propiedad

"Todo punto sobre la mediatriz del segmento rectilíneo, equidista de los extremos del segmento"

Demostración:

Hipótesis: $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$; AM=MB; $\overleftrightarrow{CD} \cap \overline{AB} = \{M\}$, P es un punto cualquiera sobre $\overleftrightarrow{CD}$, $C \neq M$.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

PROPOSICIONES	RAZONES
7. $\mathbf{:}\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}; \overline{AM} \cong \overline{MB}$.	7) Hipótesis
8. $\sphericalangle AMC$ y $\sphericalangle BMC$ son $\sphericalangle s$ rectos.	8) Debido a que $\mathbf{:}\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$ (1)
9. Trazar $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$.	9) Postulado de la existencia de una sola recta que contiene a dos puntos; determinando un segmento entre ellos.
10. $\overline{CM} \cong \overline{MC}$.	10) Propiedad reflexiva.
11. $\Delta AMC \cong \Delta BMC$	11) Si dos triángulos rectángulos tienen dos catetos congruentes, entonces son congruentes.
12. $\mid \therefore \overline{AC} \cong \overline{BC}$	12) Como $\Delta AMC \cong \Delta BMC, \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (5)

Análisis de prácticas

En esta actividad el profesor debe leer el enunciado del problema para identificar la propiedad de la mediatriz, demostrar esta propiedad usando argumentos lógicos convincentes.

Análisis de objetos: configuración epistémica de la tarea

Una configuración "emergente" asociada a la propiedad de la mediatriz de un segmento es la que presentamos a continuación. En ella se presenta además, los posibles argumentos usados para la demostración.

Tabla 26. C.E de la actividad 3 (cuestionario 2).

Situación problema

Problema de contexto intramatemático, en el que emerge la propiedad de la mediatriz de un segmento.

Lenguaje

- **Verbal**

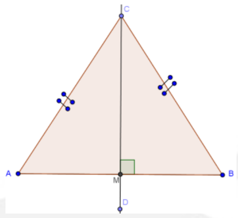
  Relacionado al contexto: ubicar un punto en un segmento, punto fuera del segmento, propiedad.

  Términos verbales del contexto matemático: segmento, punto, recta, mediatriz de un segmento, triángulo, tipo de triangulo, demostración.

- **Simbólico**

  A;B, $\overline{AB}$, $\Delta AMC \cong \Delta BMC$, $\overline{CM} \cong \overline{MC}$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \cap \overline{AB} = \{M\}$, , $C \neq M$

- **Gráfico**



Conceptos (definiciones)

- **Previos**
  - Segmento, recta perpendicular, punto medio, triángulos rectángulos, congruencia de triángulos.
  - Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento)
  - Mediatriz de un segmento (definida como el lugar geométrico)
  - Triangulo isósceles.
- **Emergentes**

  Propiedad de la mediatriz un segmento: “todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo”

Propiedades

- **Previas**
  - La mediatriz corta al segmento en su punto medio.
  - La mediatriz divide al segmento en dos segmentos congruentes.
  - La recta perpendicular a un segmento, forma cuatro ángulos congruentes e iguales a 90° con el segmento.
- **Emergentes**

  Propiedad de la mediatriz de un segmento “todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo”

Procedimientos

- **Previas**
  - Seguir las indicaciones del problema, determinar el tipo de triangulo que se formó.
- **Emergentes**
  - Conjeturar sobre la equidistancia de los puntos que pertenecen a la mediatriz y luego generalizar la propiedad.

Argumentos

- **Tesis 1: “** la mediatriz de un segmento corta al segmento es su punto medio**”**

  Justificación: definición por la definición de mediatriz de un segmento.

- **Tesis 2: “**Todo punto sobre la mediatriz del segmento rectilíneo, equidista de los extremos del segmento**”**

  Justificación: conjunto de pasos ordenados para demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (ver figura 22)
  - Postulado de la existencia de una sola recta que contiene a dos puntos y determina un segmento entre ellos.
  - Definición de mediatriz de un segmento
  - Propiedad reflexiva
  - Postulados de congruencia de triángulos rectángulos

ACTIVIDAD 4 Se le pide que realice los siguientes pasos: (i) Trace una circunferencia. (ii) Trace la mediatriz de una cuerda de dicha circunferencia, diferente al diámetro. A continuación, responda la pregunta siguiente: ¿Qué propiedad tiene dicha mediatriz relacionada con la circunferencia?

Objetivo. Identificar si el profesor conoce la propiedad de la recta mediatriz de una cuerda con respecto a la circunferencia.

Respuesta esperada

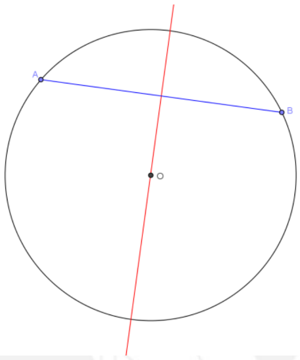


Figura 23. Resolución actividad 4 (cuestionario 2)

La mediatriz de una cuerda de circunferencia tiene la propiedad de contener al centro de la circunferencia (figura 23)

Análisis de prácticas

Las prácticas matemáticas necesarias para resolver esta actividad son: leer el enunciado del problema cuya finalidad es determinar si el profesor conoce la propiedad de la mediatriz de una cuerda en una circunferencia, usar la propiedad y resolver el problema y finalmente comunicar su respuesta usando el lenguaje.

Análisis de objetos: configuración epistémica de la tarea

Una configuración "emergente" asociada a la de la mediatriz de una cuerda respecto a una circunferencia.

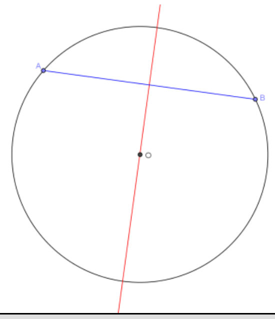
Tabla 27. C.E de la actividad 4 (cuestionario 2).

Situación problema

Problema de contexto intramatemático, para que emerja la propiedad de la mediatriz de una cuerda respecto de la circunferencia.

Lenguaje

- **Verbal**
  Relacionado al contexto: trazar una circunferencia, trazar una cuerda, propiedad.
  Términos verbales del contexto matemático: circunferencia, diámetro, cuerda, mediatriz de una cuerda, centro de una circunferencia.
- **Simbólico**
  O, $\overline{AB}$, L
- **Grafico**



Conceptos (definiciones)

- **Previos**
  - Segmento, recta perpendicular, circunferencia, elementos de la circunferencia.
  - Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento)
- **Emergentes**
  - Propiedad de la mediatriz de un una cuerda respecto de la circunferencia.

Propiedades

- **Previas**
  - La mediatriz divide al segmento en dos segmentos congruentes.
  - La recta perpendicular a un segmento, forma cuatro ángulos congruentes e iguales a 90° con el segmento.
- **Emergentes**
  - La mediatriz de una cuerda de circunferencia contiene al centro de la circunferencia.

Procedimientos

- **Previas**
  - Realizar los pasos indicados en el problema
- **Emergentes**
  - Analizar las características que tiene la mediatriz de la cuerda con respecto a la circunferencia.

Argumentos

- **Tesis 1:** "los puntos que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidistan de los extremos del segmento"

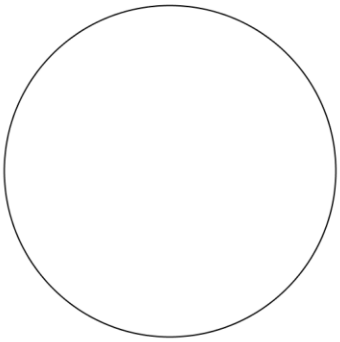
Justificación: justificación visual a partir del trazo de la mediatriz del segmento $\overline{B_1\,B_2}$

- **Tesis 2:** "la mediatriz de una cuerda contiene al centro de una circunferencia"

Justificación: justificación visual, hacer conjeturas al trazar la mediatriz de otras cuerdas, finalmente probar haciendo uso de la congruencia de triángulos rectángulos.

ACTIVIDAD 5.

Dada la circunferencia mostrada a continuación



a) Halle el centro de dicha circunferencia.
b) Explique el procedimiento realizado para hallar el centro de esta circunferencia.

Objetivo. Identificar si el profesor usa la definición o alguna propiedad de la mediatriz para determinar el centro de una circunferencia.

Respuesta esperada

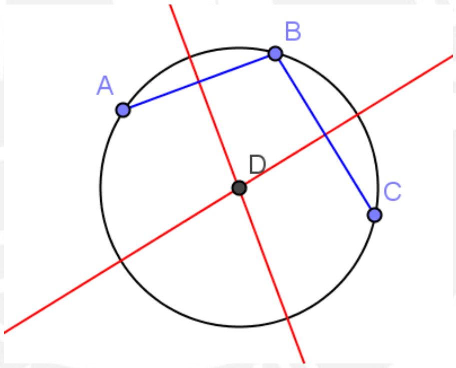


Figura 24. Resolución actividad 5 (cuestionario 2)

a) Esperamos que el procedimiento que se siga en esta actividad sea: i) tomar tres puntos (A, B y C) en la circunferencia, ii) trazar las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, iii) trazar la mediatrices de las cuerdas y hallar su punto de intersección, iv) el punto determinado por la intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia (ver figura 24)

También es válido para esta actividad construir un triángulo inscrito a la circunferencia y hallar su circuncentro, el circuncentro es el centro de la circunferencia.

Análisis de prácticas

En esta actividad el profesor debe leer el problema, utilizar la propiedad de la mediatriz de una cuerda para determinar el centro de una circunferencia o en todo caso usar la propiedad de circuncentro de un triángulo inscrito y de esa manera resolver el problema y comunicar su respuesta.

Análisis de objetos: Configuración epistémica de la tarea

Una configuración “emergente” al trazo del centro de una circunferencia donde solo se tiene la circunferencia.

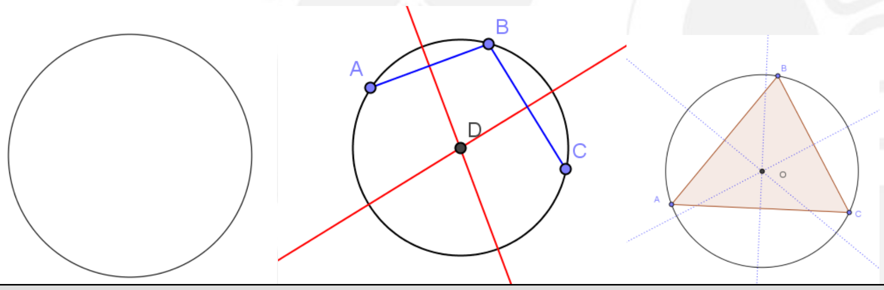
Tabla 28. C.E de la actividad 5 (cuestionario 2).

Situación problema

Problema de contexto extramatemático, cuya finalidad es aplicar la propiedad de la mediatriz de una cuerda para hallar el centro de la circunferencia.

Lenguaje

- **Verbal**
  Relacionado al contexto: figura, circunferencia mostrada, explicar procedimiento.
  Términos verbales del contexto matemático: circunferencia, centro de la circunferencia, segmento, punto, recta, mediatriz.
- **Simbólico**
  A, B , C, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$
- **Grafico**



Conceptos (definiciones)

- **Previos:** Segmento, recta perpendicular, mediatriz de una cuerda y la propiedad respecto del centro de la circunferencia, circuncentro de un triángulo.
- **Emergentes:** Aplicación de la propiedad de la mediatriz de una cuerda, para hallar el centro de la circunferencia, uso de la mediatriz para hallar el circuncentro en un triángulo.

Propiedades

- **Previas**
  - La mediatriz de una cuerda contiene al centro de una circunferencia.
  - El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.
- **Emergentes**
  - Aplicación de propiedades para hallar el centro de una circunferencia.

Procedimientos

- **Previas**
  - Trazar la mediatriz de una cuerda de circunferencia.
- **Emergentes**
  - Trazar la mediatriz de dos cuerdas y tomar el punto de intersección.
  - Hallar el circuncentro de un triángulo inscrito en la circunferencia dada.

Argumentos

- **Tesis 1: “**las mediatrices de cualquier par de cuerdas se interceptan en el centro de la circunferencia**”**

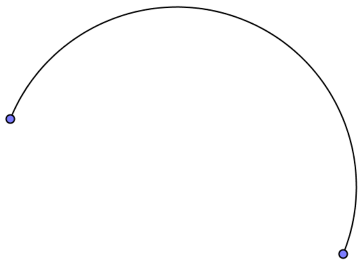
Justificación: propiedad de la mediatriz de una cuerda respecto de la circunferencia.

- **Tesis 2: “**el circuncentro de un triángulo equidista de sus vértices**”**

Justificación: propiedad de las mediatrices del triángulo.

ACTIVIDAD 6.

Suponga que tiene un arco de circunferencia, como se muestra en la figura adjunta.



a) ¿Qué procedimiento realizará para dibujar por completo la circunferencia?
b) ¿Qué objeto u objetos matemáticos emergen en esta actividad?

Objetivo. El objetivo de esta actividad es determinar si el profesor usa la propiedad de la mediatriz de una cuerda para trazar una circunferencia a partir de un arco de circunferencia.

Respuesta esperada

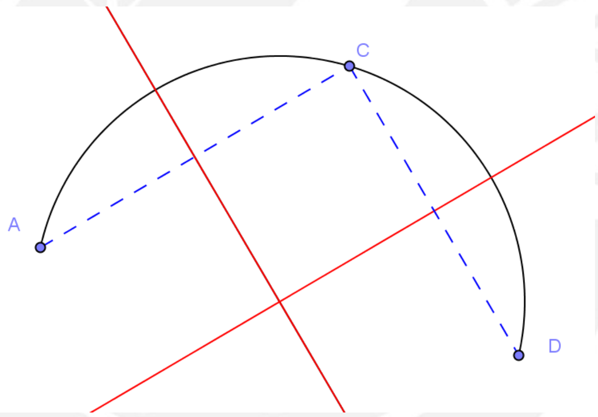


Figura 25. Resolución actividad 6 (cuestionario 2)

a) Para construir la circunferencia a partir de un arco de circunferencia dado, se traza las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que están contenidos en el arco de circunferencia dados (figura 25), se traza las respectivas mediatrices a las cuerdas antes indicadas; el punto O que es la intersección de estas rectas es el centro de la circunferencia; finalmente con ayuda del compás se construye la circunferencia que tiene como centro el punto O y radio OA.
b) El objeto matemático que emerge de esta actividad la mediatriz una cuerda de circunferencia.

Análisis de prácticas

Para esta actividad, las prácticas necesarias del profesor son: leer el problema, identificar el uso de la mediatriz de una cuerda, resolver el problema y usar el lenguaje para comunicar su respuesta.

Análisis de objetos: configuración epistémica de la tarea

Configuración "emergente" asociada a la construcción de una circunferencia a partir de un arco de circunferencia.

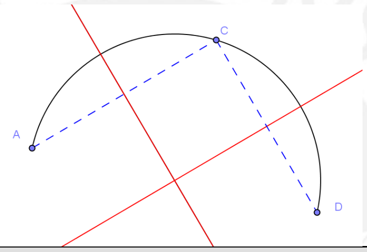
Tabla 29. C.E de la actividad 6 (cuestionario 2).

Situación problema

Problema de contexto intramatemático, donde se pide construir una circunferencia a partir de un arco de circunferencia.

Lenguaje

- **Verbal**
  Relacionado al contexto: figura, construir, procedimiento, dibujar.
  Términos verbales del contexto matemático: distancias iguales, segmento, punto, recta, mediatriz.
- **Simbólico**
  $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, O, OA.
- **Grafico**



Conceptos (definiciones)

- **Previos**
  - Segmento, recta perpendicular, punto medio, equidistancia.
  - Mediatriz de una cuerda en la circunferencia y su propiedad.
- **Emergentes**
  - Uso de la mediatriz para construir una circunferencia a partir de un arco de circunferencia dado.

Propiedades

- **Previas**

La mediatriz de una cuerda contiene al centro de una circunferencia.

- **Emergentes**

Las mediatrices de dos cuerdas trazados en un arco de circunferencia, se interceptan en el centro de la circunferencia.

Procedimientos

- **Previas**

Trazar la mediatriz de una cuerda en un arco de circunferencia.

- **Emergentes**

Trazar las mediatrices de dos cuerdas en el arco de circunferencia y tomar su punto de intercepción.

Argumentos

- **Tesis 1: "**las mediatrices de dos cuerdas de un arco de circunferencia se cortan en el centro de la circunferencia**"**

Justificación: propiedad de la mediatriz de una cuerda respecto al centro de la circunferencia.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS EN EL ESTUDIO

(Resumen)

A lo largo de este capítulo realizaremos el análisis de los datos obtenidos en la presente investigación, dicho análisis contiene lo siguiente: análisis de prácticas matemáticas de un episodio de clase usando las trayectorias didácticas, análisis de las respuestas obtenidas a los cuestionarios 1 y 2 finalmente las respuestas y análisis de la entrevista.

6.1 ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS TRAYECTORIAS DIDÁCTICAS EN LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

Realizamos este análisis de episodio de clase teniendo en cuenta las trayectorias didácticas propuestas por el enfoque Ontosemiótico (EOS), las cuales han sido debidamente explicadas en el capítulo II del presente trabajo de investigación. Para hacer este análisis se ha tenido en cuenta la configuración cognitiva elaborada a partir de la sesión de aprendizaje (ver anexo 05)

a) Trayectoria epistémica

En la tabla 30 se muestra la trayectoria epistémica del episodio de clase denominado la *mediatriz de un segmento* (anexo 03). En ella hacemos una breve descripción de las unidades epistémicas e identificamos el estado de la trayectoria epistémica, esto nos permite identificar los conocimientos puestos en juego durante la práctica efectiva en el aula.

Tabla 30. Trayectoria epistémica del proceso instruccional.

Configuración Epistémica	Unidad Epistémica	Descripción	Estado
Configuración de la trayectoria epistémica. En un tiempo de 58 minutos.	0	enunciado del tema *mediatriz de un segmento*	Situacional
	1	planteamiento la tarea de construir la mediatriz de un segmento	Situacional
	2	Definición de la mediatriz de un segmento como recta perpendicular en el puto medio	Proposicional
	3	Descripción de la técnica de para el trazado de la mediatriz	Proposicional
	4	Aplicación de la técnica para trazar la mediatriz	Actuativo
	5	Enunciación de la propiedad de la mediatriz de un segmento	Proposicional
	6	Prueba mediante un caso particular la propiedad de la mediatriz	Argumentativo
	7	Generalización a partir de un caso particular de la propiedad de la mediatriz de un segmento	Proposicional
	8	Recuerdo de que esa manera se concluye que la mediatriz es perpendicular al segmento ($\overleftrightarrow{MP} \perp \overline{AB}$) y que el segmento queda dividido en dos segmentos iguales ($AM = MB$)	Lingüístico
	9	Ejercicio de aplicación (para determinar el circuncentro de un triángulo)	situacional
	10	Evocación de la técnica para el trazado de la mediatriz de un segmento	Proposicional
	11	Aplicación del algoritmo para la construcción del circuncentro del triángulo	Actuativo
	12	Enunciar la propiedad del circuncentro del triangulo	Proposicional
	13	Enunciado de otro uso de la mediatriz (para encontrar el centro de la circunferencia)	Situacional
	14	Descripción del algoritmo para desarrollar la actividad	Actuativo
	15	Aplicación del algoritmo para hallar el centro de la circunferencia.	Actuativo
	16	Planteamiento de una actividad para ser resuelta en casa	Situacional

La configuración de la trayectoria epistémica tiene un carácter esencialmente actuativo, ya que se pretende, que los estudiantes se ejerciten en la construcción de algunos objetos matemáticos relacionados al tema, por ejemplo: se busca que se apropien del procedimiento para la construcción de la mediatriz, luego recordando ese procedimiento podrían construir el circuncentro de un triángulo o hallar el centro de una circunferencia dada. Por otro lado, se evidencia escases del carácter argumentativo, pues se realizan generalizaciones de propiedades a partir de un caso particular.

b) Trayectoria docente

Llamaremos *trayectoria docente* a las actividades realizadas por el profesor durante la sesión de aprendizaje (*mediatriz de un segmento)*. Estas actividades realizadas por el docente son sus maneras de afrontar las tareas o funciones docentes. Estas trayectorias se muestran en la tabla 31.

Tabla 31. Trayectoria docente del proceso de instruccional

Configuración Epistémica	Unidad Docente	Descripción	Estado
Configuración de la trayectoria docente. En un tiempo de 58 minutos.	1	Presentación del tema (recojo de saberes previos)	Regulación
	2	Asignación de la tarea (construir la mediatriz de un segmento)	Asignación
	3	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
	4	Explica y justifica la técnica que ha usado para resolver las actividades	Regulación
	5	Enunciación de propiedades (de la mediatriz de un segmento)	Regulación
	6	Justifica propiedades mediante un solo caso particular	Regulación
	7	Sintetiza el sistema de prácticas descrito	Regulación
	8	Introducción de notaciones	Regulación
	9	Detención del tiempo didáctico (para que el estudiante realice sus construcciones)	Asignación
	10	Asignación de la tarea (construir el circuncentro de un triángulo)	Asignación
	11	Recuerdo de proposiciones previas	Regulación
	12	Resolución de la actividad	Regulación
	13	Detención del tiempo didáctico (para que el estudiante realice sus construcciones)	Asignación
	14	Indicación para el uso de los instrumentos para el trazo de figuras (reglas y compás)	Regulación
	15	Asignación de la tarea (hallar el centro de una circunferencia)	Asignación
	16	Evaluación interrogativa colectiva	Evaluación
	17	Ensenar como se resuelve la actividad	Regulación
	18	Motivación y orientación	Motivación
	19	Asignación de la tarea domiciliaria	Asignación

El trabajo del profesor comienza recogiendo los saberes previos, especialmente sobre la definición de un segmento, que dicho sea de paso, lo define como una *línea que tiene dos puntos extremos*. La descripción de las unidades docentes refleja que la labor fundamental del profesor es de regulación del proceso de instrucción, puesto que, brinda la definición, luego explica el procedimiento para la construcción de las figuras pretendidas y detiene el tiempo didáctico para que el estudiante transcriba lo dicho a su cuaderno de apuntes.

c) Trayectoria discente

De manera similar a las trayectorias *epistémica* y *docente*, presentamos la tabla 32 como un sistema de las funciones y acciones que desempeña el estudiante durante la sesión de aprendizaje.

Tabla 32. Trayectoria discente del proceso de instruccional

Configuración Epistémica	Unidad Docente	Descripción	Estado
Configuración de la trayectoria discente. En un tiempo de 58 minutos.	1	Recepción de la explicación de la teoría y la resolución de los ejercicios	Recepción
	2	Planteamiento de preguntas (especialmente sobre uso de instrumentos para la construcción de figuras)	Demanda
	3	Exploración personal de los ejercicios	Exploración
	4	Responder a preguntas del profesor	Formulación
	5	Asunción de la tarea domiciliaria	Recepción

Se observó que durante la mayor parte del proceso de instrucción, la función del estudiante ha sido del tipo receptivo, puesto que, la trayectoria docente fue influenciada por la forma tradicional de realizar su clase. Es por ello, que hubo poca participación en el momento de formular los conceptos y propiedades, dedicándose principalmente a contestar algunas interrogantes puntuales de parte del docente y luego a transcribir lo dicho por este.

d) Trayectoria mediacional

Durante la sesión de aprendizaje la tecnología utilizada es la tradicional del uso de pizarra y cuaderno para tomar apuntes. Además, se utilizó regla y compás para las construcciones por parte de los estudiantes, mientras que, el profesor utilizó una cuerda (en vez de compás) con la que realizó todas sus construcciones.

Cabe mencionar, que los estudiantes no habían tenido experiencia en el uso de este tipo de materiales, lo que dificultó el proceso de instrucción.

f) Trayectoria emocional

Durante la mayor parte del proceso de instrucción, se ha apreciado que los estudiantes mostraron interés por aprender los nuevos conocimientos, aunque el desconocer el manejo de instrumentos para la construcción de figuras geométricas (reglas y compás), ha hecho que se desvíe la atención durante algunos pasajes de la sesión de aprendizaje, pero esta apreciación aún es superficial basada en la observación de la grabación de la clase.

6.2 ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN AL CUESTIONARIO NÚMERO 1

En este apartado presentaremos la respuesta del cuestionario 01 y las respuestas y su respectivo análisis.

Tabla 33. Respuestas a las preguntas 1 – 7 (cuestionario 1)

PREGUNTA /PROFESOR	RESPUESTA PROFESOR A_1
¿Usted se identifica como profesor de? (Pregunta 1)	Secundaria
¿De qué institución egresó? (Pregunta 2)	"ISPP. Nuestra señora de Chota",
¿De qué especialidad egreso? (Pregunta 3)	Matemática
¿A qué ciclo(s) y grado(s) ha enseñado recientemente? (Pregunta 4)	Ciclos: VI y VII. Grados: primero a quinto grado.
¿En qué tipo de institución labora o ha laborado recientemente? (Pregunta (Pregunta 5)	Estatal
¿Ud. ha enseñado el tema de mediatriz? (Pregunta 6)	Si
¿En qué grado(s) considera que se debe enseñar el tema de la mediatriz? (Pregunta 7)	Cuarto año de educación secundaria.

De las respuestas a las primeras 7 preguntas del cuestionario 1 podemos observar que el sujeto de investigación se identifica como profesor de educación secundaria, es egresado del Instituto Superior Pedagógico de la especialidad de matemática, tiene entre 5 y 10 años de experiencia en la enseñanza de la matemática en el nivel educativo al que pertenece. De acuerdo con las respuestas a las preguntas 6 y 7, el afirman que sí ha enseñado el objeto matemático mediatriz, y que además, puede ser enseñado en tercero y cuarto grado de educación secundaria.

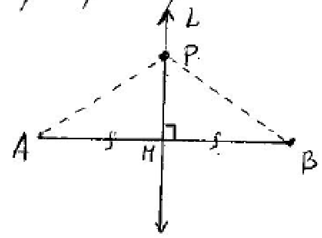
A continuación presentamos las respuestas brindadas por los docentes sobre el tema de mediatriz, propiedades y otros significados.

Tabla 34. Respuesta a la pregunta 8 (cuestionario 1)

PROFESOR/ PREGUNTA/ RESPUESTA	Pregunta 8
PROFESOR A_2	Es la recta perpendicular que biseca al segmento dado.

De esta respuesta podemos apreciar que el profesor en estudio define la mediatriz como la recta perpendicular que biseca al segmento dado, muestra evidencia que él posee un conocimiento común del objeto matemático, puesto que no explica cómo debería enseñar este objeto matemático a su clase.

Tabla 35. Respuesta a la pregunta 9 (cuestionario 1)

PROFESOR/ PREGUNTA/ RESPUESTA	**Pregunta 9**
PROFESOR A_1	Sea $\overline{AB}$ y M punto medio de $\overline{AB}$. Sea $\overleftrightarrow{L}$ una recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por M. Sea P un punto de $\overleftrightarrow{L}$. demostraremos que $PA = PB$. i) Si M es punto medio $\rightarrow AM = MB$ ii) $\Delta AMP \cong \Delta BMP$ (L-A-L) $\therefore \underline{PA = PB}$ lqqd 

De esta pregunta, se puede apreciar que el profesor realiza una demostración, pero en el desarrollo de su clase no la ejecutó y por otro lado durante la entrevista manifestó que enseñar el proceso de demostración no es muy importante en el nivel secundario, por lo que deducimos que esta forma de resolver la pregunta nos da evidencia del conocimiento común del contenido.

Tabla 36. Respuesta a la pregunta 11 (cuestionario 1)

PROFESOR/ PREGUNTA/ RESPUESTA	(Pregunta 11)
PROFESOR A_1	No uso ningún software, ya que desconozco su aplicación a la enseñanza de la geometría

De esta respuesta, podemos observar que el profesor no usa ningún software para enseñar matemática porque desconoce su aplicación; y es por ello que la idoneidad mediacional no es muy adecuada para la enseñanza de objetos geométricos.

Tabla 37. Respuesta a la pregunta 12 (cuestionario 1)

PROFESOR/ PREGUNTA/ RESPUESTA	¿Dónde aplica o utiliza el concepto de mediatriz? (Pregunta 12)
PROFESOR A_1	Para determinar el circuncentro de un triángulo. Para hallar el centro de una circunferencia.

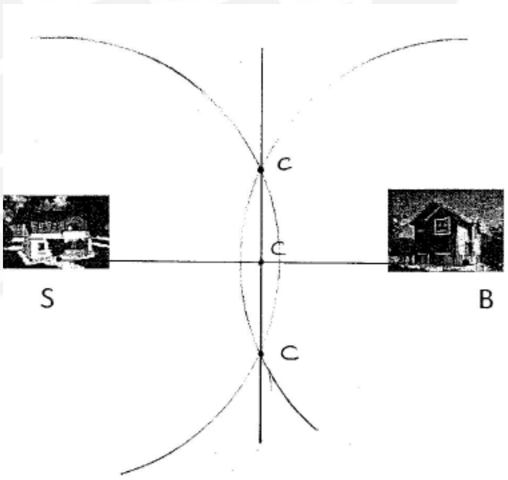
De estas respuestas podemos observar que son muy escasos los usos que conoce el profesor de la mediatriz. Esto, también nos da evidencia que el profesor tiene un conocimiento común del contenido.

Tabla 38. Respuesta a la pregunta 13 (cuestionario 1)

PROFESOR/ PREGUNTA/ RESPUESTA	(Pregunta 13)
PROFESOR *A* $_1$	➢ Geometría de la colección Raccso. ➢ Geometría de Alvaro Gllegos Fernando. ➢ Matemática 4 de Santillana. ➢ Libros del MED. ➢ Recursos educativos de Perú Educa.

Se puede apreciar que la bibliografía usada por el docente es muy escasa lo que hace que el docente no pueda tener un acercamiento al conocimiento especializado del tema.

Tabla 39. Respuesta a la pregunta 14 (cuestionario 1)

PROFESOR/ PREGUNTA/ RESPUESTA	(Pregunta 14)
PROFESOR *A* $_1$	

A partir de la respuesta podemos apreciar que el profesor si tiene la noción intuitiva de mediatriz como un lugar geométrico pero no la define como tal, lo cual también nos da evidencia de un conocimiento común del objeto matemático. Además sus argumentos para la resolución son del tipo gráfico solamente.

6.3 ANÁLISIS DE LAS PRÁCTICAS A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN AL CUESTIONARIO NÚMERO 2

Presentamos en resumen un análisis de las respuestas al cuestionario 02 teniendo en cuenta los objetivos y las respuestas esperadas. Además, clasificamos los conocimientos puestos en juego para cada resolución de acuerdo a los criterios para evaluar conocimiento del contenido (común especializado y ampliado), propuesto en Godino (2009), los cuales han sido explicados en el capítulo correspondiente al marco teórico.

Tabla 40. Respuestas de la Actividad 1 (cuestionario 2)

Actividad// Profesor	Actividad 01 (ver anexo 02)				
Profesor A_1	Ítem a)	Ítem b)	Ítem c)	Ítem d)	Ítem a)
	Responde que la persona se ubica en el punto P, que es la intersección de la mediatriz de $\overline{B_1B_2}$ con la vereda.	Señala que no es posible porque no hay más puntos que coincidan con la mediatriz.	Responde que existen más puntos, porque la recta mediatriz pasa por el parque, es por eso que podemos ubicar más puntos.	Señala que el objeto emergente de esa actividad es la mediatriz de un segmento.	Define la mediatriz como: el lugar geométrico de todos los puntos que están en la recta, que equidistan de los extremos del segmento.

De acuerdo con los objetivos de esta actividad, se esperaba que la resolución conlleve a que emerja la definición de la mediatriz como lugar geométrico. Analizando las respuestas a los diferentes ítems podemos observar que el profesor tiene noción de la mediatriz de un segmento como un lugar geométrico; pero, no la define con precisión. Además, podemos acotar que el hecho de tener la idea de mediatriz de un segmento como lugar geométrico le ha permitido resolver con éxito los demás ítems comprendidos en la misma actividad.

Análisis de las prácticas (actividad 1)

Las prácticas matemáticas realizadas por el profesor sujeto de investigación al resolver esta actividad fueron: leer el enunciado del problema (contexto extramatemático), luego, ha producido un texto para comunicar sus respuestas; ha determinado en primer lugar el punto donde se ubicaría la persona sobre la vereda para que esté a la misma distancia de las boleterías, para ello ha determinado que es necesario usar el objeto matemático mediatriz de un segmento, definido como un lugar geométrico.

Esto nos permite ubicar al conocimiento del profesor en la categoría de conocimiento común, ya que, utiliza la definición de la mediatriz como recta perpendicular en el punto medio y además tiene nociones de mediatriz como lugar geométrico. Decimos que el profesor no tiene un conocimiento especializado del contenido, porque aún no define adecuadamente mediatriz como lugar geométrico, puesto que la define en función a la recta perpendicular al segmento.

Tabla 41. Análisis de la actividad 2

Actividad// Profesor	Actividad 02 (ver anexo 02)		
Profesor A_1	Ítem a)	Ítem b)	Ítem c)
	Responde que para encontrar el punto pedido ha utilizado escuadras y midiendo la distancia del punto P a la recta L .	Señala que el objeto matemático emergente de esta actividad es la mediatriz del segmento.	Define al objeto emergente la recta perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.

Se esperaba que el profesor defina la mediatriz como eje de simetría del segmento; ya que esto le permitiría hallar el punto simétrico del punto dado, respecto a la mediatriz. Por el contrario, podemos observar que ha usado un procedimiento mecánico basado en el uso de escuadras para determinar la distancia del punto P a la recta L. Por último usó un proceso parecido para determinar el punto pedido.

Análisis de las prácticas (actividad 2)

Las prácticas que realiza el profesor para este problema fueron: leer el enunciado del problema y producir un texto como respuesta, utilizando la escuadra y una regla para medir la distancia del punto P a la recta L y luego completa el segmento $\overline{PQ}$ usando compás.

La resolución a este problema nos permite ubicar el conocimiento del profesor, como un conocimiento del tipo común en el cual ha utilizado un procedimiento del tipo intuitivo informal; creemos que es informal debido a que solo usa los instrumentos y por ensayo y error llega a la respuesta.

Tabla 42. Análisis de la actividad 3

Actividad// Profesor	Actividad 03 (ver anexo 02)		
Profesor A_1	Ítem a)	Ítem b)	Ítem c)
	Responde que el triángulo que se ha formado es un triángulo isósceles, porque C equidista de los extremos de $\overline{AB}$.	Señala que ha usado la definición de mediatriz de un segmento, por lo que, todo punto que pertenece a esta equidista de los extremos.	El profesor demuestra la propiedad usando para ello la definición de mediatriz de un segmento definida como, la recta perpendicular en el punto medio, y congruencia de triángulos.

De esta actividad podemos observar que el profesor identifica al triángulo dentro de la clasificación esperada (triángulo isósceles), identifica la propiedad correcta y finalmente demuestra esta propiedad.

Análisis de prácticas (actividad 3)

Las prácticas realizadas por el profesor en esta actividad fueron: lectura del enunciado del problema y producción de un texto para comunicar su respuesta, trazando para ello la mediatriz del segmento, identificando el tipo de triángulo formado, usando la propiedad de la mediatriz como lugar geométrico y finalmente demostrando la propiedad.

Las prácticas docentes al resolver la actividad nos muestran que el profesor posee un conocimiento común ya que resuelve la actividad. Además, muestra evidencia de un conocimiento especializado del tema; puesto que realiza una demostración de la propiedad utilizada; aunque es contradictorio a lo que el realiza en su clase. Esto puede deberse a su creencia de que en secundaria no es importante trabajar las demostraciones de teoremas y propiedades.

Tabla 43. Análisis de la actividad 4

Actividad// Profesor	Actividad 04	Actividad 05	Actividad 06
Profesor A_1	Enuncia la propiedad que emerge de esta actividad como, la mediatriz pasa por el centro de la circunferencia.	Encuentra el centro de la circunferencia trazando dos cuerdas y sus respectivas mediatrices, justificando su respuesta con propiedad enunciada en la actividad 04.	Usa la propiedad de la mediatriz de una cuerda respecto de la circunferencia y resuelve con éxito la actividad.

De las respuestas podemos observar que las tres últimas actividades han sido resueltas correctamente. El profesor al conocer la propiedad de la mediatriz de una cuerda respecto de la circunferencia (actividad 04) ha sido capaz de usar esta propiedad para resolver exitosamente las actividades 05 y 06.

Análisis de prácticas

La práctica que realiza el profesor para las tres últimas actividades fueron: leer el problema, identificar la propiedad de la mediatriz de una cuerda y luego utilizar esta propiedad para resolver las actividades 5 y 6, en cada caso producir un texto para comunicar su respuesta.

De las prácticas mencionadas observamos que el profesor posee el conocimiento común del tema, ya que identifica la propiedad, pero no ve la necesidad de realizar conjeturas, argumentos, tampoco demostrar dicha propiedad.

6.4 RESPUESTAS Y ANÁLISIS A LA ENTREVISTA

A continuación presentamos las respuestas obtenidas luego de aplicar la entrevista y revisar las respuestas del cuestionario 01 (anexo 01), herramientas que nos ha permitido identificar las creencias del profesor sujeto de estudio sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz en educación secundaria.

Tabla 44. Respuesta a la entrevista final.

RESPUESTA A LA ENTREVISTA FINAL.	
PREGUNTA	RESPUESTA DEL PROFESOR
P1. ¿Con tus propias palabras que me puede decir a cerca de la mediatriz?	La mediatriz es una recta que pasa perpendicularmente por el punto medio de un segmento.
P2. Si tendrías que definir la mediatriz ¿Cómo la definirías?	Se define como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de sus extremos.
P3. ¿Conoce otra(s) definición(es)?	No, son las únicas que conozco.
P4. ¿De dónde ha obtenido Ud. esta(s) definición(es)? O ¿Dónde lo aprendió?	Lo obtuve cuando estudie el curso de geometría durante mis estudios superiores.
P5. ¿Qué usos le daría a la mediatriz a nivel intramatemático y extramatemático?	Intramatemático para hallar el centro de una circunferencia, simetría, congruencia de triángulos rectángulos.
P6. ¿Qué opina de la demostración matemática en educación secundaria?	Que actualmente se ha dejado de lado porque se está trabajando un estilo preuniversitario a los alumnos, es decir solo se mecaniza en aplicar fórmulas en la resolución de ejercicios y problemas.
P7. Sabemos que una de las propiedades de la mediatriz la siguiente: todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este. ¿Enseña a sus estudiantes esta propiedad?	Sí, esta propiedad lo aplicamos para hallar el circuncentro de un triángulo
P8. ¿Realiza la demostración de propiedades como la anterior en su clase?	Sólo se hace una demostración construyendo gráficamente.
P9. En caso de que no realice las demostraciones. ¿Qué hace para probar que estas propiedades son ciertas?	Construcciones gráficas con regla y compás.
P10. Con respecto a su clase. ¿Qué le ha parecido? ¿Cómo lo calificaría?	Allí los estudiantes aprendieron a construirá una mediatriz de un segmento con regla y compás, y creo que es un poco difícil para los alumnos debido a que no tenían la costumbre de utilizar medidas.
P11. ¿Cómo calificaría el desempeño de sus estudiantes?	Regular ya que están en proceso de aprendizaje y los errores que cometen al graficar les ayuda a mejorar cada vez más.
P12. ¿Qué aspectos podría mejorar en su clase?	Quizás la metodología para presentar la información a los estudiantes.
P13. ¿Qué libros utiliza para para preparar sus clases?	Libros del MINEDU, libros de preparación preuniversitaria (Colección Racso, colección Uniciencia).
P14. ¿Utiliza medios informáticos para preparar y realizar su clase? ¿Cuáles?	No.

Análisis de la entrevista

Las respuestas a la entrevista nos corroboran que el conocimiento del profesor es un conocimiento común del contenido, lo cual está en concordancia con lo observado durante su práctica efectiva y la resolución a los cuestionarios; pues de la entrevista se aprecia entre otras cosas que para él la demostración no es importante en secundaria y si realiza demostraciones, las justifica gráficamente. Además, estos conocimientos están fuertemente influenciados por sus creencias acerca del proceso de enseñanza - aprendizaje de la mediatriz y la geometría en general.

6.5 SÍNTESIS A PARTIR DEL ANÁLISIS DE LA CLASE, RESPUESTAS A LOS CUESTIONARIOS Y LA ENTREVISTA

A continuación presentamos la tabla 37, la que resume los conocimientos y algunas creencias que tiene el profesor acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de la mediatriz.

Tabla 45. Conocimientos y algunas creencias del profesor en estudio.

Define al segmento como una línea recta que tiene dos puntos extremos.
Define la mediatriz como recta perpendicular en su punto medio.
Cree que los estudiantes de antemano conocen el uso de instrumentos como el compás y reglas, para construcciones geométricas (reglas y compás)
Define la mediatriz como lugar geométrico aunque confunde los términos al escribir en la pizarra para el copiado de los alumnos: *la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico que equidista de los extremos.*
No hace conjeturas para identificar propiedades y tampoco realiza demostraciones.
Cree que para hacer una demostración es suficiente un gráfico, utilizando para su construcción regla y un compás.
Considera que un caso particular es suficiente para hacer una generalización.
Confunde segmento con longitud de un segmento.
Define triángulo acutángulo en función de sus lados.

De acuerdo a las consignas propuestas en el EOS para evaluar el conocimiento didáctico matemático propuestas en Godino (2009) y teniendo en cuenta las prácticas objetos y procesos implementados en la sesión de aprendizaje, además, las respuestas a los cuestionarios y a la entrevista, podemos hacer el siguiente análisis:

El profesor tiene un conocimiento común del contenido, debido a que utiliza solo dos definiciones de la mediatriz (como recta perpendicular en el punto medio, y tiene la noción de mediatriz como lugar geométrico) y conoce muy pocos usos de este objeto matemático (para determinar el punto medio de un segmento, determinar el circuncentro de un triángulo y para determinar el centro de una circunferencia). Mientras que en los textos tomados como referencia se identificaron muchos más usos y significados de la mediatriz a parte de los utilizados, por ejemplo: como eje de simetría, dividir un arco de circunferencia, trazar una circunferencia que pase por tres puntos no alineados, construir el arco capaz.

Propone muy pocas tareas, identifica algunas propiedades pero no ve la necesidad de realizar las demostraciones, solamente se limita a tomar un caso particular con lo que realiza las generalizaciones. Además, resuelve las actividades realizando procedimientos intuitivos mediante un solo procedimiento.

Por el hecho de no realizar las demostraciones de las propiedades, no evidencia el uso de argumentos matemáticamente sólidos para justificar sus soluciones.

No identifica posibles conexiones y generalizaciones de las tareas a otras ramas de la matemática ni fuera de ella, por ejemplo podría haber generalizado que la mediatriz de un segmento al ser definido como un lugar geométrico puede ser representada mediante una ecuación de la recta, esto en la geometría analítica. Proporciona una tarea para ser resuelta en casa por los estudiantes que guarda relación con el concepto del *vecino más próximo*, pero no permite a los estudiantes que exploren esta forma de resolución y les sugiere que para dar solución al problema se construirá un triángulo y luego las mediatrices de sus lados (ver problema en anexo 03)

No presenta un conocimiento ampliado ni especializado, puesto que no realiza conexiones a otras materias como ya se indicó y tampoco ve la necesidad de realizar las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras conexiones.

El cuanto al conocimiento del contenido respecto a los estudiantes, creemos que el profesor tiene que responder a la interrogante ¿Qué matemática se esperaría que los estudiantes aprendan? En cuanto a ello podemos manifestar lo siguiente: no identifica los principales conflictos cognitivos de aprendizaje en la resolución de las tareas durante la sesión de aprendizaje, más por el contrario, generó un conflicto en los estudiantes con el uso de instrumentos para la construcción de objetos matemáticos (regla y compás), los cuales no habían sido usados anteriormente y tampoco se propuso tarea previas para que los alumnos practiquen su utilización.

Durante la sesión de aprendizaje realizó pocas preguntas para ir constatando el aprendizaje de los estudiantes y para una posterior evaluación propuso actividades de carácter repetitivo.

En lo que se refiere al contenido del profesor con respecto a la enseñanza. Se ha podido apreciar que su clase ha sido mayormente expositiva con muy pocas interacciones del profesor alumno y sin las interacciones alumno- alumno, utilizó recursos tradicionales para la enseñanza y sus procedimientos fueron mayormente intuitivos.

CONCLUSIONES

A través del estudio se logró identificar los conocimientos del profesor y algunas creencias, eso nos ha permitido dar respuesta a la pregunta de investigación. Es por eso, que podemos afirmar que el profesor tiene un conocimiento común de la enseñanza y aprendizaje de la mediatriz, más no posee un conocimiento especializado del tema; esto se puede apreciar a partir del análisis de la trayectoria didáctica docente, del análisis de las respuestas a los cuestionarios y del análisis a las respuestas de la entrevista.

Respecto a nuestro objetivo general, podemos decir que ha sido alcanzado ya que hemos logrado analizar con detalle la aplicación de la sesión de aprendizaje desarrollada por el profesor y recogida en el registro audiovisual, también se analizó el protocolo de respuestas a los cuestionarios 1 y 2, además se analizó las respuestas a la entrevista. A través de este análisis hemos podido verificar que el profesor sujeto de nuestra investigación posee un conocimiento común del proceso enseñanza aprendizaje de la mediatriz.

En relación a nuestro primer objetivo específico, podemos decir que hemos realizado el análisis de textos tanto del nivel superior como del nivel secundario, lo cual nos ha permitido identificar los diferentes usos y significados del objeto matemático mediatriz y con ello hemos diseñado nuestros instrumentos para el recojo de la información.

En relación a nuestro segundo objetivo específico, hemos logrado realizar una descripción de cómo el profesor realiza su práctica efectiva en el aula utilizando para ello un episodio de clase, la herramienta de la configuración cognitiva emergente de las explicaciones realizadas y del posterior análisis usando las trayectorias didácticas propuestas por el EOS, logrando reconocer los significados implementados, entre ellos podemos señalar los siguientes: definición de mediatriz como recta perpendicular en el punto medio, uso de la mediatriz para construir el circuncentro del triángulo, uso de la mediatriz para determinar el centro de la circunferencia, entre otros.

En relación al tercer objetivo específico, se logró realizar el análisis de las prácticas y objetos matemáticos utilizados por el docente, teniendo como fuente de información la transcripción del episodio de clase, la entrevista, llegando a la siguiente conclusión que las clases del profesor fueron del tipo magistral, enunció generalmente los conceptos y propiedades, pero no realizó demostraciones rigurosas matemáticamente hablando.

El profesor tiene un conocimiento común del objeto matemático, esto se puede concluir a partir de la trayectoria docente en la cual se aprecia que él utiliza solamente la definición de la mediatriz como recta perpendicular en el punto medio, e intenta definir la mediatriz como lugar geométrico. Además, conoce pocos significados o usos de la mediatriz (para determinar el punto medio, para construir el circuncentro y hallar el centro de una circunferencia) lo que dista bastante de los usos identificados en el significado institucional del objeto matemático.

Por otro lado es evidente que el profesor no tiene un conocimiento especializado del objeto matemático, debido a que no realiza una reflexión sobre su práctica, tampoco realiza conexiones con otras ramas de la matemática, por ejemplo con la geometría analítica, donde la mediatriz puede ser representada por la ecuación de una recta (uso identificado en el significado de referencia) o el uso de la mediatriz como el vecino más próximo. Tampoco realiza conexiones con otras ramas afines a la matemática por mencionar, a la física, la geografía, entre otras.

En relación con al conocimiento del currículo, se puede observar que el profesor identifica los elementos del currículo mediante la realización de las tareas propuestas, pero los desarrolla tal y como están presentados en el documento oficial de planificación (DCN), de manera que presenta el contenido y propiedades, luego ejemplifica, más no realiza conjeturas y mucho menos demostraciones.

CONSIDERACIONES FINALES

Entre las limitaciones presentadas durante la investigación podemos mencionar que, en un inicio se había planificado llevar a cabo el estudio con un grupo de profesores, pero por términos de distancia y otros motivos personales de ellos, solo se pudo realizar un estudio de caso único, ya que él fue el único que aceptó que se grabara su clase en registro audiovisual.

Entre los aspectos positivos observados durante el desarrollo del estudio tenemos la buena disposición de parte del docente sujeto de investigación, mostrando en todo momento disposición para el desarrollo de las actividades (resolución de los cuestionarios, desarrollo de la clase filmada, la entrevista, facilitación de sus documentos de planificación). Así mismo, las autoridades responsables de la institución educativa donde se aplicó el estudio brindaron todas las facilidades, tanto para el ingreso a escenario como para el desarrollo de la investigación.

Consideramos que este trabajo puede ser complementado con futuras investigaciones. Entre esas posibilidades tenemos: profundizar en los procesos de argumentación, justificación y demostración de propiedades y teoremas relacionados al objeto matemático en estudio y a otros objetos matemáticos, realizar una evaluación del conocimiento pedagógico del profesor de matemáticas, necesario para ejercer como docente en las instituciones educativas y a partir de ello diseñar planes de capacitación docente.

REFERENCIAS

Busquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa*: *Guía Práctica. España*: Ediciones CEAC, S. A.

Cohen, L. & Manión, L. (2002). *Métodos de Investigación Educativa*. España: Editorial LA MURALLA, S. A. segunda edición.

Chávez, V. y Parraguez, M. (2014). Construcciones Mentales para el Objeto Recta de Euler. Acta Latino Americana de Educación Matemática ALME (27), pp. 689-696. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

Euclides (1991). *Elementos*. España: Editorial Gredos, S.A

Etcheverry, N, Reid, M. y Botta, R. (2009). Animándonos a la enseñanza de la geometría con Cabri. Revista Iberoamericana de educación matemática UNION (17), pp. 102-116. Recuperado de http:// http://www.fisem.org/www/union/revista17.php

García, M y Sebastián, C. (2011). Creencias Epistemológicas de Estudiantes de Pedagogía en Educación Parvularia, Básica y Media: ¿Diferencias en la Formación Inicial Docente? PSYKHE, 1(20), pp. 29- 43. Recuperado de http://www.scielo.cl/pdf/psykhe/v20n1/art03.pdf

Giraix, S. & Tremblay, G. (2004). *Metodología de las Ciencias Humanas*: La investigación Acción. México: Fondo de cultura económica.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. (Trabajo de investigación para optar a la catedra de la universidad de didáctica de la matemática). Universidad de Granada, España.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, L. & Wilhelmi, M. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33(1), pp. 127-150. Recuperado de: http://ensciencias.uab.es/article/view/v33-n1-godino-ake-etal/1468-pdf-es

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J., Batanero, C. (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Recuperado de: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXII/ConocyDesProf/GodinoYBatanero.pdf

Godino, J., Contreras, A. & Font., V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque Ontológico- semiótico de la cognición matemática.

Hernández, R., Collado, F. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: Mc. Grau- Hill/ Interamericana Editores, S. A de C. V. quinta edición.

Instituto APOYO (2002), *Matemática para todos 1*. Lima: Bruño.

Instituto APOYO (2002), *Matemática para todos 2*. Lima: Bruño.

Instituto APOYO (2002), *Matemática para todos 5*. Lima: Bruño.

Lebrija, A. Flores, C. y Trejos T. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. Educación Matemática 1(22), pp 31- 55. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262010000100003&script=sci_arttext&tlng=pt

Moreno, M. Ascárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 3(31), pp. 265-280. Recuperado de file:///C:/Users/GUEVARA/Downloads/21935-21859-1-PB.pdf

Moise, E. (1968). *Elementos de Geometría Superior*. Compañía editorial continental, S.A. Mexico.

Moise, E. (1972). *Geometría. Serie matemáticas modernas*. Editorial Norma. Cali Colombia.

Montoro, V. (2009). Prácticas argumentativas de estudiantes de profesorado frente a las consignas, demostrar o justificar. *Revista de Educación Matemática*.

Patricio, P. (2010). El Modelo de Razonamiento de Van Hiele como Marco para el Aprendizaje de los Conceptos de Mediatriz y Circuncentro en Estudiantes de Tercero de Secundaria, Utilizando el Geogebra. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2004). Unidad de Medición de la Calidad. Informe pedagógico de resultados de Formación matemática – Tercer y Quinto grado de Secundaria. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/?p=211

Perú, Ministerio de Educación (2009). Diseño Curricular Nacional de EBR. Lima. Recuperado de http://www.santillana.com.pe/dcn_2009.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 4° secundaria*. Primera edición. Lima. Editorial Norma.

Pino, L. (2013). Evaluación de La faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España. Recuperado de: https://dl.dropboxusercontent.com/u/3280703/TesisDoctoral_LuisPino.pdf

Ramos, A. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona, España. Recuperado de http://www.tdx.cat/handle/10803/1313;jsessionid=E61CA35664592FC6C56D0BD29409AA6D.tdx1

Ramos, A. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa RELIME, 2(11), pp. 233-266. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v11n2/v11n2a4.pdf

Reyes, L. y Monserrat, F. (2014). Desarrollo Conceptual de las Rectas y Puntos Notables del Triángulo en Libros de Texto de Nivel Básico. Actas de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (14) pp. 543- 553. Recuperado de http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Rico, L., Pino, F., Godino, J. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada. *REVEMAT*. eISSN 1981-1322. Florianópolis (SC). *08* (2), p. 1-49. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/LPino_%20REVEMAT_2013-1.pdf

Rodríguez, L. (2005). *Análisis de las creencias epistemológicas, concepciones y enfoque de aprendizaje de futuros docentes*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España. Recuperado de http://hera.ugr.es/tesisugr/15480112.pdf

Rodríguez, G., Flores, J. & García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. España: Ediciones Ajibe. S. L.

Rubio, N. (2012). *Competencias del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona, España.

Ruiz, J. & Ispizua, M. (1989). *La Descodificación de la Vida Cotidiana: Métodos de Investigación Cualitativa*. España: Publicaciones de la Universidad de DEUSTO.

Simons, H. (2011). *El Estudio de Casos: Teoría y Práctica*. España: EDICIONES MORATA, S.L.

Stake, R. (1999). *Investigación en Estudio de Casos*. España: EDICIONES MORATA, S.L. segunda edición.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2). pp. 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Velásquez, F. (2014). *Creencias y una Aproximación de la Concepción de los Profesores Sobre el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Función Exponencial en Cursos de Pre-Cálculo*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5498

ANEXOS

(Anexo 01). Cuestionario 01

Marque con una X, sobre la letra respectiva, la opción más cercana a su propia apreciación o responda a la pregunta según corresponda. Mucho agradeceremos que conteste al presente cuestionario con la mayor sinceridad posible. Las seis primeras preguntas son sobre su ejercicio profesional, las siguientes son sobre el tema de mediatriz, que se desarrolla en educación secundaria.

1. Ud. se identifica como profesor de:

a.	Primaria	d.	Universidad
b.	Secundaria	e.	Otro:____________________
c.	Centro Pre Universitario		

2. ¿De qué institución egresó?

____

3. ¿De qué especialidad egresó?

____

4. ¿Cuantos años de docencia ha ejercido hasta el momento?

a.	Menos de 3 años	d.	Entre 10 y 20 años
b.	Entre 3 y 5 años	e.	Más de 20 años
c.	Más de 5 pero menos de 10 años		

5. ¿A qué ciclo(s) y grado(s) ha enseñado recientemente?

Ciclo(s) __________________________

Grado(s) __________________________

Otros: __________________________

6. ¿En qué tipo de institución labora o ha laborado recientemente? y ¿cómo se llama? Indique el lugar.

a.	Estatal	c.	Particular religioso
b.	Particular laico	d.	Otro:____________________

Nombre: ____

Lugar: ______________________________

7. ¿Ud. ha enseñado el tema de mediatriz?

a.	Sí	b.	No

8. ¿En qué grado(s) considera que se debe enseñar el tema de la mediatriz? Puede marcar más de una alternativa

a.	Primero	d.	Cuarto
b.	Segundo	e.	Quinto
c.	Tercero		

9. a) ¿Qué entiende por mediatriz de un segmento?
   b) ¿**Cómo** define la mediatriz de un segmento en una sesión de aprendizaje a sus alumnos?

10. Demuestre el teorema relacionado con la mediatriz.
    "la mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento"
11. Si Ud. tuviera que diseñar una actividad para ser desarrollada en un ambiente de geometría dinámica, ¿qué preguntas haría a sus estudiantes para que el concepto de mediatriz emerja de forma natural?
12. ¿Dónde aplica o utiliza el concepto de mediatriz?
13. ¿Qué textos de geometría utiliza al preparar sus clases? y ¿por qué?
14. Se conoce que la casa de Carlos (C) está a la misma distancia lineal de Sebastián(S) y Beatriz (B). Señalar tres ubicaciones donde se localizaría la casa de Carlos.
    ¿Qué concepto matemático esta de tras de este problema?

S

B

I.D.

CUESTIONARIO 02.

ACTIVIDAD 01.

En la figura 1 de abajo se muestra parte de un parque de diversiones con la ubicación de dos boleterías B_1 y B_2 y una vereda.

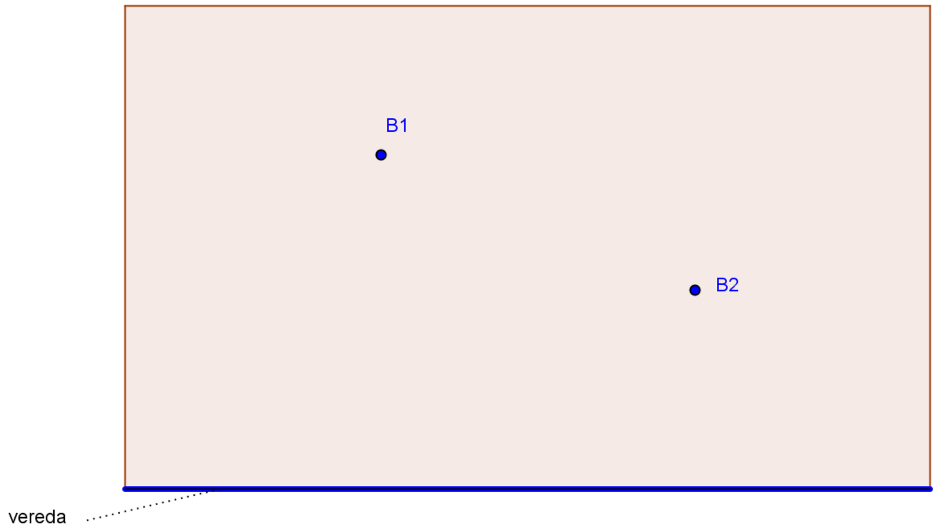


Figura 1

f) ¿Dónde podría ubicarse una persona, sobre esta vereda, para que se encuentre a la misma distancia de las boleterías B_1 y B_2 ?
g) ¿Es posible encontrar otros puntos sobre esta vereda cuyas distancias a las boleterías B_1 y B_2 sean iguales?
h) ¿Es posible encontrar otros puntos de ubicación, dentro del parque, de modo que una persona se encuentre a la misma distancia de las boleterías B_1 y B_2 ? ¿Qué propiedad cumplen dichos puntos?
i) ¿Qué objeto matemático es el que emerge en esta actividad?
j) ¿Cómo define este objeto matemático?

ACTIVIDAD 02.

Considere la figura 2, mostrada a continuación:

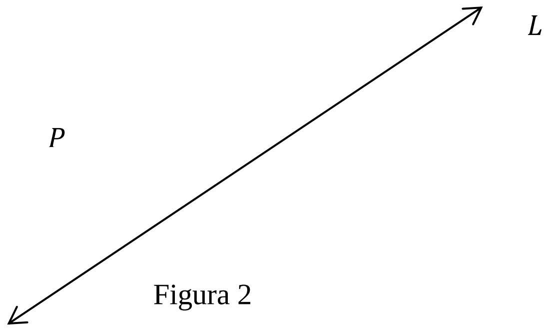


Figura 2

Se sabe que P es uno de los extremos del segmento $\overline{PQ}$ y L es la mediatriz de este segmento.

d) Explique donde se ubicaría el punto Q y por qué.
e) ¿Qué objeto matemático emerge en esta actividad?
f) ¿Cómo define este objeto matemático?

ACTIVIDAD 3

Considere un Segmento $\overline{AB}$ y la mediatriz L de dicho segmento.

d) Ubique un punto C en la mediatriz, de modo que no pertenezca al segmento $\overline{AB}$, ¿Qué tipo de triángulo se formó? ¿Por qué?
e) ¿Qué definición o propiedad de la mediatriz empleó?
f) Demuestre esta propiedad.

ACTIVIDAD 4

Se le pide que realice los siguientes pasos:

(iii) Trace una circunferencia.
(iv) Trace la mediatriz de una cuerda de dicha circunferencia, diferente al diámetro.

A continuación, responda la pregunta siguiente:

¿Qué propiedad tiene dicha mediatriz relacionada con la circunferencia?

ACTIVIDAD 5.

Dada la circunferencia mostrada en la figura 3

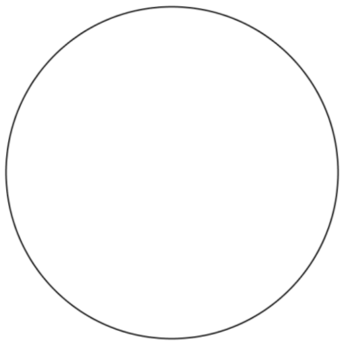


Figura 3.

b) Halle el centro de dicha circunferencia.
c) Explique el procedimiento realizado para hallar el centro de esta circunferencia.

ACTIVIDAD 6.

Suponga que tiene un arco de circunferencia, como se muestra en la figura 4.

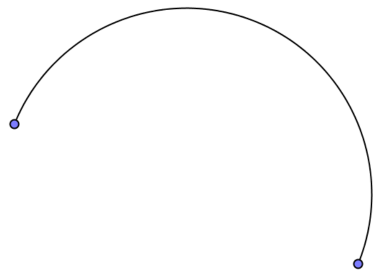


Figura 4

c) ¿Qué procedimiento realizará para dibujar por completo la circunferencia?
d) ¿Qué objeto u objetos matemáticos emergen en esta actividad?

Anexo 03

TRASCRIPCIÓN DE LA CLASE SOBRE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.

TIEMPO	TRANSCRIPCIÓN	COMENTARIO
Introducción a la clase. 52	Profesor. A ver, el tema para ahora es sobre la mediatriz de un segmento, ¿ya? Recordando lo que el año anterior hemos visto. A ver ¿Todos recordamos como dibujar un segmento? ¿Qué viene a ser un segmento? Alumnos. Una línea recta. Profesor. Una línea recta, en el cual tiene dos puntos extremos, un punto A y un punto B. ahí tenemos un segmento $\overline{AB}$.	El profesor termina la introducción al tema trazando un segmento en la pizarra e indicado los puntos extremos.
Introducción a la mediatriz de un segmento	Profesor. Ahora ¿Qué viene a ser la mediatriz? Media-triz. Alumno. El centro. Alumno. El punto medio. Profesor. Ya, tenemos por ahí, el centro, el punto medio Alumno. El punto medio. Profesor. Es lo mismo, bueno, el centro o el punto medio, pero; ¿el centro será la mediatriz? Porque, el centro sería el punto medio nada más. La mediatriz… Alumnos. ¿Una línea? Profesor. La mediatriz es una línea que pasa por el centro, entonces más o menos estaríamos por ahí, y esa línea sería ¿perpendicular o no? ¿Sí o no? Alumno. Sí Profesor. Si sería perpendicular; entonces lo que hemos visto nosotros es más o menos; todo este segmento, medirlo, ubicar su punto medio y trazar una línea perpendicular. Eso habíamos visto, pero, en este caso ahí tenemos una línea recta que pasa por ese punto medio. Pero, ojo lo que estamos haciendo ahora es una mediatriz la cual no la hemos construido correctamente, es decir, exactamente ese punto medio todavía no lo hemos hallado, pero teóricamente ya tenemos una mediatriz ¿no?, que sería la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$	- El profesor mientras va preguntando, va señalando en la al segmento trazado en la pizarra. - Traza la recta perpendicular sobre el segmento y para indicar que pasa por el punto medio coloca unas marcas sobre los dos segmentos determinados.
Definición de la mediatriz de un segmento.	Profesor. Vamos definir primero, y luego la construcción de una mediatriz. La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$, se define como: la recta perpendicular al segmento en su punto medio; esta es la definición clásica que nosotros tenemos. ***La mediatriz de un segmento AB, se define como la recta perpendicular al segmento en su punto medio.*** Profesor: existe otra definición con la que vamos a complementar. (Hay un silencio, mientras el docente revisa sus apuntes). Profesor. A ver la otra definición es una definición un poco más formal, ¿sí?; es decir es que coincide con la geometría cartesiana. Está un poco más clásica (señalando a la anterior en la pizarra). Ahora una definición ya más compleja, diríamos que la mediatriz viene a ser un lugar geométrico de todos los puntos, un	- El profesor define la mediatriz de un segmento de dos formas (como recta perpendicular en el punto medio y como lugar geométrico) - No ha definido previamente lugar geométrico. - Para explicar la equidistancia toma como ejemplo su ubicación y la distancia hacia dos estudiantes al final

	lugar geométrico del plano, ahí vamos a corregir esto, un lugar geométrico del plano que equidista de los extremos. Profesor. Ahora vamos hacer la construcción; bueno esta es la definición que más coincide con la construcción. ***Es un lugar geométrico del plano que equidista de los extremos.*** Profesor. La palabra equidista significa que tienen la misma, a eso se llama equidistar, por ejemplo: si queremos ubicar un punto aquí, (señala su ubicación), que equidiste al compañero que esta al final (señala un extremo del aula) y al compañero que esta al final (señala al otro extremo), entonces este punto (señalando a su propia ubicación) tiene que tener la misma distancia, de acá a su compañero como de acá hacia el otro, en ese caso estamos hablando de la palabra equidistancia.	del aula.
Construcción de la mediatriz.	Profesor. Ya? entonces todos vamos a trazar un segmento, saquen las reglas que les han asignado, vamos a trazar un segmento. Lo que estamos haciendo es la construcción de una mediatriz, a ver todos tracen un segmento $\overline{AB}$. Profesor. Ya, sea entonces el segmento $\overline{AB}$, ahora nosotros para trazar una mediatriz usamos las herramientas, ustedes tienen ahí el compás; yo en lugar de compás puedo utilizar esta cuerda Alumnos. Compás Profesor. Una cuerda es muy útil. Alumna. Profesor ¿Cómo se utiliza? (no explica) Profesor. A Ver lo que vamos hacer es ubicar el centro, ojo el centro del compás en el punto A, y van hacer un arco, que pase un poco más de la mitad, ycon esa misma distancia lo ubicamos en el punto B, observen esa misma distancia y trazamos ahí el otro arco; entonces ustedes con el compás también un poco más de la mitad van a trazar un arco ubicando el centro en el punto A, ¿sí? ¿Pueden o no? ustedes tienen el compás ubican en el punto A y lo que van hacer es trazar un arco pero un poco más de la mitad, haciéndole o dándole un radio que sea mayor a la mitad (señala al segmento). ¿Si me están entendiendo o no? Pueden utilizar el compás ya les mencioné, ubican el centro en el punto A y luego su compás lo que hacen es alargarlo, pero alargarlo un poco más de la mitad para que puedan trazarlo el arco, y así haya intersección. Observen, una vez que llegan a esto, (señala la figura en la pizarra), acá tenemos dos puntos de intersección, ahí tenemos dos puntos de intersección, trazamos una línea o una recta, esa recta representa la mediatriz del segmento. Esa recta exactamente si podemos decir que exactamente divide al segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales. A ver todos construya (se dirige a los estudiantes) Alumnos. No lo podemos. Profesor. Si pueden.	- El profesor pide a los estudiantes que tracen un segmento de extremos A y B para ello les da un tiempo apropiado. - Explica el procedimiento a seguir para trazar la mediatriz usando una cuerda. - Para indicar que el radio de los arcos de circunferencias a trazar tienen una longitud mayor a la mitad $\overline{AB}$ va señalando con la cuerda sobre el segmento. - A observar que sus estudiantes no pueden hacer los trazos, toma un compás pequeño y explica en la pizarra el uso del compás. - Y cuando aún así no pueden realizar el trazo se acerca a algunos estudiantes y le explica en forma individual. - Cuando menciona que un punto está sobre la mediatriz, él va ubicando siempre sobre el grafico de la

	Alumnos. No lo podemos. Alumno$_1$. Es que es la primera vez que utilizan en su vida ah! (indica una alumna) Profesor. A ver si pueden, repito el proceso: han trazado todos un segmento (realiza un trazo en la pizarra), ahí tienen un segmento, todos han trazado el segmento $\overline{AB}$, ahora les mencionaba que con el compás realicen los siguientes trazos: el compás tiene una punta con la cual ustedes van a presionar en el punto A para que no se mueva; yo en lugar de compás estoy utilizando esta cuerda. Ubico el centro en el punto A y estoy viendo que ha pasado de la mitad, eso me permite encontrar la intersección, observen, allí; igual ustedes ubican la aguja, presionan para que no se mueva en el punto B y trazan el arco, ¿están observando? luego por los dos puntos de la intersección de las circunferencias van a trazar con su regla una recta, tracen ustedes una recta ubicando acá el punto P (ubica un punto P sobre la mediatriz) y esa recta representa ya la mediatriz de un segmento, quiere decir que lo divide exactamente al segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales. A ver ¿Quién no puede? Alumna. Yo! Profesor. Ubicas en A, presionas y luego giras, pero acá un poco más de la mitad del segmento. Se les da un tiempo para que terminen sus figuras. Profesor. Ahora por esos dos puntos tracen la línea recta. ¿Salió? A ver cuando ustedes van a girar su compás no lo cojan de acá (muestra la parte céntrica del compás) la parte de arriba tienen para que ustedes giren. Alumnos. Ya, sonríen al percatarse que no habían estado usando bien el compás. Profesor. Cuando ustedes hacen girar el compás lo que estoy viendo es que ustedes están tomándolo por la parte donde va el lápiz y lo hacen girar, así no! Tienen que tomarlo por la parte de arriba, para que puedan hacerlo girar. Hay un tiempo para que los estudiantes practiquen. Alumna. ¿De mi profesor a ver? Profesor. ¿No aprendes? (con un tono de broma) ubicas ahí, un poco más de la mitad, cogiéndolo por la parte de arriba. Lo que estamos haciendo es construir la mediatriz de un segmento utilizando algunos instrumentos como son el compás una regla que es lo básico. Este punto M observen acá en la pizarra y ahí también ustedes en su cuaderno, exactamente divide al segmento $\overline{AB}$; y podemos concluir que M es punto medio de $\overline{AB}$, y eso en geometría lo podemos representar de esta forma (escribe en la pizarra) $\overline{AM}$, el segmento $\overline{AM}$ es igual al segmento $\overline{MB}$ (AM= MB), ahora la recta $\overleftrightarrow{PM}$ entonces en esta construcción va ser perpendicular, acá la recta $\overline{MP}$, en este caso $\overline{MP}$ representa una recta perpendicular o diríamos ahí que es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ (copia en la pizarra $\overleftrightarrow{MP} \perp \overline{AB}$). Acá tenemos una	pizarra.

	definición que dice, es un lugar geométrico del plano que equidista de los extremos, entonces ¿cómo lo entendemos ese concepto? Si yo tengo acá un punto, por ejemplo este punto puede ser el punto N, este punto N va equidistar de los extremos, N tomará la misma distancia hacia el extremo B y la misma distancia hacia el extremo A; nos da a entender que esas distancias son las mismas, es decir, son iguales y si ubico un punto en cualquier parte de la recta también va equidistar hacia los extremos AB. Esto es para entender el concepto. Se les da un tiempo para que los estudiantes terminen sus figuras. Profesor. Utilizando estos instrumentos también nosotros podemos trazar triángulos con las medidas de sus lados exactos, ya que a veces por avanzar nosotros trazamos triángulos y solamente los colocamos los lados por ejemplo 9, 12, 15, pero quizás muy poco hemos construido un triángulo con esas medidas, utilizando regla y compás también podemos construir un triángulo que sea exacto a las medidas que nos proponen.	
Aplicación de la mediatriz.	Profesor. A ver un triángulo tiene tres lados, ¿sí?, eso ya lo conocemos desde que hemos conocido un triángulo; ahora, de cada lado vamos a construir su mediatriz y la intersección de esas mediatrices va formar un punto llamado circuncentro, entonces vamos a borrar acá y vamos a ver una aplicación de la mediatriz, en este caso es encontrar el circuncentro de un triángulo, pero vamos a llamarlo como mediatrices de un triángulo (copia en la pizarra), recordando que todo triangulo tiene tres mediatrices, y la intersección de esas mediatrices va ser un punto llamado circuncentro ¿Qué significa circuncentro? Circuncentro, centro de una circunferencia, eso es circuncentro y una circunferencia que en este caso circunscribe al triángulo, a ver todos entonces dibujamos un triángulo cualquiera, a ver por acá hacemos un triángulo. A ver ustedes tracen un triángulo para que puedan trabajar con el compás. Ahí tengo un triángulo, ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Triangulo rectángulo? ¿Acutángulo? Alumno. ¿Igualito profe? Profesor. Triangulo acutángulo, ¿Por qué es acutángulo? Porque en el triángulo acutángulo todos son menores que 90° Alumnos. ¿Cómo? ¿Cómo? Profesor. Un triángulo cualquiera. Alumna. Con tal que tenga tres lados. Profesor. Tres lados, desiguales sí. Profesor. ¿Ya dibujaron un triángulo? Un triángulo bien grande háganlo ya, bien grande, por eso ahí los he dado una hojita para que hagan un triángulo bien grande ¿no? Si no en su cuaderno pues, los que tienen pena a su cuaderno en la hoja. Alumna. ¿En la hojita? Profesor. ¿Ya? ¿Dibujaron un triángulo? De preferencia	- El profeso reparte a cada estudiante hojas en blanco donde realizaran los trazos. - Indica la definición de mediatriz se puede usar para trazar las mediatrices de los lados del triángulo y encontrar el circuncentro. - Dibuja un triángulo en la pizarra y explica el procedimiento a seguir; siempre usa una cuera en ese proceso. - Los estudiantes aún tienen dificultad para realizar la construcción, ante lo cual el profesor se da tiempo para explicarles en forma individual. - Después de trazar las tres mediatrices toma la intersección de las mismas y lo nombra con la letra ce e indica que ese punto representa al circuncetro del triángulo.

	que tenga lados desiguales, no lo hagan con lados iguales, por eso es que vamos a tener un triángulo acutángulo. Entonces vamos a trazar la mediatriz de cada lado observen: ustedes con el compás lo que van hacer es, primero esto que sea un poco más de la mitad y ojo el centro, la punta del compás presionan en el punto A y hacen esta operación, vamos a encontrar su mediatriz ahí, ya nuevamente ubicamos en el punto C, centro en el punto C y estamos encontrando una línea, una mediatriz, observen ahí ya tengo una, una mediatriz. (se les da unos segundos para que los estudiantes tracen la mediatriz de uno de los lados del triángulo) Profesor. A ver hallen la mediatriz (el profesor se dirige a una estudiante y coge el compás para ayudar con el trazo) ¿Cómo has dibujado tu mediatriz? (hay un espacio para ayudar con el trazo a varios estudiantes) Profesor. Ya, entonces hemos trazado recién la primera mediatriz, primera mediatriz porque es de un lado, falta del otro lado; borramos estas líneas (borra trazos auxiliares) ahora vamos a construir la mediatriz de otro lado. A ver observen. Alumnos. Todo lo borramos. Profesor. No, para que no se confunda pues con la otra mediatriz (refiriéndose a lo borrado), observen, nuevamente ubican centro en el punto A y lo que haces es trazar ahí un arco, luego ubicamos centro en el punto B, trazamos ahí; con compás sale mejor pues no, para que no se confundan, déjelo ahí nomás, como están haciéndolo con lápiz y acá vamos a trazar otra mediatriz (el profesor realiza el trazo en la pizarra), otra mediatriz. Alumna. Que profesor ¿hacemos otro triángulo? Profesor. Otra mediatriz en el mismo triangulo, después estas líneas como ustedes están haciéndolo con lápiz pueden borrarlo, pero tracen la otra mediatriz Alumna. No se puede pues profe. Profesor. ¿No se puede? Alumna. Profesor y ¿en qué línea ubicamos el compás para hacerlo eso? Aluna. En la A y en la B Profesor. En el punto A y en el punto B, hacen centro en el punto A y luego en el punto B (el profesor se dirige a otros estudiantes y le indica cómo se usa el compás) Profesor. Ahora falta el tercer lado. (realiza la construcción de la tercera mediatriz) Alumna. Ya lo hice, ya aprendí. Profesor. A ver los que han hecho triángulos rectángulos le va salir por acá (indica uno de los lados del triángulo) Alumna. ¿Por dónde profesor? Profesor. Los que han hecho triángulos rectángulos, esta intersección les va salir en la hipotenusa. Después van borrando las líneas color rojo, allí van borrando las líneas de color rojo. Ya a ver todos observen ahí, una vez que tienen las tres rectas, ojo se intersectan ya en un	- Señala que desde el circuncentro a los vértices del triángulo hay la misma distancia.

	punto, a ver escuchen, las tres rectas mediatrices, las tres rectas mediatrices, ojo ah! cada lado es un segmento, cada segmento tiene su mediatriz, pero en este triángulo las tres mediatrices se intersecan acá en este punto, este punto vamos a llamarlo punto C; ese punto C es el punto llamado circuncentro y ¿qué viene a ser el circuncentro? Viene a ser el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo, repito, circuncentro viene a ser el centro de una circunferencia que circunscribe al triángulo, observen si nosotros con el compás hacemos centro en el punto C hacia uno de los lados, entonces, entonces ahí lo que se va ver es que este punto representa el centro de la circunferencia, claro C en este caso circunscribe al triángulo, tiene que salirles exacto. (el profesor se acerca a una estudiante y le indica como que la distancia de C es la misma tanto al punto A, como al punto B) Profesor. Ya ¿Cómo lo entendemos acá? Que este punto C es el centro, quiere decir la misma distancia a B, la misma distancia a A y la misma distancia al punto C. Alumno. Si me salió profe. Otros alumnos. No me sale. Profesor. Ahora vamos hacer la aplicación de todo esto en unas hojitas que les estoy dando (reparte hojas a cada estudiante) ya ahora vamos hacer la aplicación de la mediatriz, ojo a ver antes de todo esto una vez más les explico acá, ya a ver para comprender ya todo este tema de mediatriz, ojo lo que hemos visto acá es la aplicación ya de lo que es la mediatriz de un segmento, como el triángulo está conformado por tres segmentos, tres segmentos no colineales, a cada segmento se puede trazar su mediatriz: del segmento $\overline{AC}$ acá tengo su mediatriz, del segmento $\overline{BC}$ acá tengo su mediatriz y del segmento $\overline{AB}$ acá tengo su mediatriz, esa mediatriz coincide en un punto C, ese punto C es el punto llamado circuncentro, ya circuncentro y ¿qué viene a ser el circuncentro? El circuncentro viene a ser el punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo y además es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo, si, ya entonces ¿Qué hemos hecho acá? con el compás lo hemos trazado, haciendo centro en C y con una distancia CA o un radio CA, puede ser un radio CB, se ha trazado toda la circunferencia.	
Aplicación de la mediatriz para hallar el centro de la circunferencia.	Profesor. Una aplicación más de la mediatriz es para hallar el centro de una circunferencia. En las hojitas que los he dado, para que desarrollen la pregunta dos ¿qué dice la pregunta dos? ***Halle el centro de la circunferencia mostrada.*** Profesor. A ver ¿Cómo podemos hallar ese centro de la circunferencia? Alumnos. Dibujando un triángulo. Profesor. ¿Dibujando un triángulo? trazando mediatrices ¿Cómo lo harían? La pregunta uno es fácil porque ya	- El profesor previamente ha repartido hojas con problemas de aplicación. La pregunta dos pide al estudiante encontrar el centro de la circunferencia. - Los estudiantes asumen que el

	hemos hecho, la uno y la tres ya es fácil; ahora ¿Cómo haríamos la dos? A ver antes que rayen en la dos, den la vuelta, (refiriéndose a la hoja entregada), y acá lo vamos a practicar, ahí está, a ver ¿Cómo haríamos? Ya ahí el compás no tiene que ver nada casi, ahí trabajamos con regla, a ver ahí en la pizarra voy a dibujar una circunferencia ya y es la circunferencia que tienen allí. Profesor. Ya, ahí tenemos la circunferencia, en el cual el centro no está señalado ¿Cómo lo hallaríamos? Vamos a trazar una cuerda por acá, en cualquier parte, ojo en cualquier parte una cuerda, por ejemplo para este caso yo lo voy a trazar acá (traza una cuerda he indica) allí tengo una cuerda, observen una cuerda AB. En esa cuerda yo voy a trazar su mediatriz, pero no basta una para poder encontrar el centro, con cuantas líneas puedo ver la intersección en un triángulo, ¿recuerdan? Alumnos. Con tres Profesor. Con tres, pero no necesariamente con tres, con dos ya se veía la intersección y con la tercera tienen que coincidir; pero es suficiente con dos; otra línea por ejemplo podemos trazar por acá (traza una cuerda más) otra cuerda. En la primera voy hallar su mediatriz. a ver voy a usar el compás nuevamente, trazar este arco allí, en la otra parte también trazaría un arco para hallar su mediatriz haciendo centro en el punto B y también a la ves trabajamos acá (señalando a la otra cuerda), a ver a esta cuerda lo vamos a llamar la cuerda $\overline{ED}$, y voy a trazar dos arcos para hallar la mediatriz, observen, a ver vamos hacer de un color azul, ya ahí vamos a trazar la línea mediatriz (traza la primera) y acá también vamos a trazar la línea mediatriz (traza la segunda). ¿Dónde se intersectan? Este punto (marcándolo con el plumo) ese punto viene a ser el centro de la circunferencia, el punto O ahí, quiere decir que esta distancia hasta este punto sería el radio y acá también el radio de la circunferencia (señala). Ahora si recién aplicando dos mediatrices con dos arcos en cualquier parte ya puedo encontrar el centro de este círculo; O seria el centro. Entonces resuelto ese ejercicio de ahí, que en este caso para hallar el centro bastaría con trazar dos cuerdas y sus mediatrices. Profesor. Ya, y para finalizar todo esto quedaría allí dos ejercicios de aplicación. Alumna. Aquí lo hacemos profesor. Profesor. Sí, por hoy día entonces se ha aprendido un tema nada más, para ir este recordando. ¿Cuál es el tema que hemos aprendido hoy? (dirigiéndose a un estudiante) Alumno. Mediatriz de un segmento. Profesor. La mediatriz de un segmento, ¿Qué hemos visto entonces? Como se construye la mediatriz de un segmento utilizando la regla y el compás y una aplicación de la mediatriz de un segmento es hallar el centro del círculo ¿no? Cuando no lo tenemos, entonces nos dan el círculo o una circunferencia y nosotros debemos encontrar su centro.	proceso a seguir es trazando un triángulo y luego sus mediatrices. - El profesor indica que para hallar el centro de la circunferencia es suficiente trazar la mediatriz a dos cuerdas, pero no ha explicado previamente la propiedad de la mediatriz de una cuerda respecto a la circunferencia.

Cierre de la sesión de aprendizaje.	Profesor. A ver el problema tres, un problemita que lo van a trabajar ustedes, es un problemita interesante. ***Tres familias A, B y C desean instalar un reservorio para dar cobertura de agua a las tres familias, (justo nos presentan un mapa allí), cada jefe desea que dicho reservorio sea lo más próximo posible de su casa, por ello han decidido colocarlo en un lugar que se encuentre a la misma distancia de los tres (y la pregunta dice) ¿puede señalar el lugar donde se encontraría dicho punto?*** Profesor, entonces lo trabajarían ustedes trazando un triángulo a los puntos A. B y C que son las familias, hallarían sus mediatrices y es suficiente con dos mediatrices para hallar su intersección. Y allí finaliza la clase por ahora.	- El profesor indica que es su hoja de trabajo existe un problema que aún no ha sido resuelto (problema 3) el cual debe ser resuelto en casa, sugiere para ello trazar un triángulo y luego trazar las mediatrices.

Anexo 04

CONFIGURACIÓN COGNITIVA ELABORADA A PARTIR DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE DESARROLLADA POR EL PROFESOR SUJETO DE INVESTIGACIÓN.

Episodio de clase.

Estudio de la mediatriz de un segmento y sus diferentes usos o aplicaciones en Geometría.

Lenguaje

- **Verbal:** Relacionado al contexto del tema: centro, punto medio, línea recta con dos puntos extremos, medir el segmento, equidistancia, construcción exacta, mediatriz teóricamente, perpendicular en el punto medio, lugar geométrico, equidistancia, perpendicular, triangulo isósceles, lados del triángulos, mediatrices de los lados, circuncentro, circunferencia, diámetros, mediatriz de una cuerda, un poco más de la mitad, etc.
- **Simbólico:** $\boldsymbol{A}, \overline{AB}, \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{PM} \perp \overline{AB}, AM = MB$
- **Grafico**

Conceptos (definiciones)

- **Previos:** Recta, segmento, recta perpendicular, triángulos, clasificación de triángulos, circunferencia y sus elementos, lugar geométrico, etc.
- **Emergentes:**

  - La mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular en su punto medio)
  - La mediatriz de un segmento como lugar geométrico.
  - El circuncentro de un triángulo.

Propiedades

- **Previas:** No presenta
- **Emergentes:** Los puntos que están a la misma distancia de los extremos de un segmento, pertenecen a la mediatriz (justifica con un solo caso particular)

Procedimientos

- **Previas.** Trazar un segmento y luego trazar su mediatriz usando reglas pero sin realizar medición alguna, a la mediatriz hallada la llama mediatriz teórica.
- **Emergentes:**

  - Usar regla y una cuerda la que hace las veces de compás, para construir la mediatriz de un segmento.
  - Usar regla y una cuerda la que hace las veces de compás, para construir las mediatrices delos lados de un triángulo y así hallar el circuncentro.

- Usando las mismas herramientas que en los casos anteriores, trazar la mediatriz a dos cuerdas en una circunferencia para halla su centro.

Argumentos

- **Tesis 1:** los puntos que están a la misma distancia de los extremos de un segmento, pertenecen a la mediatriz.
- **Justificación:**
  - Definición de la mediatriz de un segmento como lugar geométrico
  - Justificación con un caso particular
- **Tesis 2:** las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro.
- **Justificación:**
  - Definición de mediatriz
  - Justificación grafica (caso particular)
- **Tesis 2:** las mediatrices de dos cuerdas se interceptan en el centro de la circunferencia.
- **Justificación:**
  - Definición de mediatriz
  - Justificación grafica (caso particular)

Anexo 06

RESPUESTAS Y CONFIGURACIONES DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO 02 POR PARTE DEL SUJETO DE INVESTIGACIÓN.

ACTIVIDAD 01 (ver anexo 02).

Resolución propuesta por el profeso A_1

Actividad 1

1) Se ubicaría en el punto P. que es la intersección de la Mediatriz de $\overline{B_1 B_2}$ Con la Vereda.

b) NO, porque la Vereda no coincide con la línea Mediatriz

c) Sí, porque la recta mediatriz pasa por el parque y podemos ubicar muchos puntos.

d) la Mediatriz de un Segmento.

e). La Mediatriz es el lugar geométrico de todos los puntos que están en la recta, que equidistan de los puntos extremos del segmento.

Análisis de los objetos

Situación problema
Problema de contexto extramatemático, cuya solución lleva a que emerja el concepto de mediatriz como un lugar geométrico.
Lenguaje
➢ **Verbal** Relacionado al contexto: figura, parque de diversiones, ubicación, boletería, vereda, parque, muchos puntos. Términos verbales del contexto matemático: distancias iguales, segmento, punto, recta, mediatriz, lugar geométrico, equidistancia. ➢ **Simbólico** P;B_1, B_2 , $\overline{B_1\,B_2}$. ➢ **Grafico** Gráfico relacionado al trazo de la mediatriz
Conceptos (definiciones)
➢ **Previos** - Segmento, recta perpendicular, punto medio, equidistancia. - Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento) - Lugar geométrico. ➢ **Emergentes** - Mediatriz de un segmento (definida como el lugar geométrico, de todos los puntos que están en la recta, que equidistan de los extremos del segmento)
Propiedades

➢ **Previas** - La recta mediatriz es la recta perpendicular a un segmento. ➢ **Emergentes** - Todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del mismo. - Si un punto no pertenece a la mediatriz de un segmento, entonces no equidista de sus extremos.
Procedimientos
➢ **Previas** - Buscar por ensayo y error el puto en el que se ubicaría la persona, de modo que se encuentre a la misma distancia de las dos boleterías. ➢ **Emergentes** - Construcción de la mediatriz del segmento $\overline{B_1\, B_2}$ y hallando el punto P que resulta de interceptar la mediatriz de dicho segmento con la vereda. - Hacer una conjetura acerca de que, los puntos que no pertenecen a la mediatriz no equidistan de los extremos.
Argumentos
➢ **Tesis 1: "**los puntos que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidistan de los extremos del segmento**"** **Justificación:** justificación visual a partir del trazo de la mediatriz del segmento $\overline{B_1\, B_2}$ ➢ **Tesis 2: "**todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del segmento**"** **Justificación:** justificación de la propiedad haciendo uso de otros elementos de la geometría, para ello trazar la mediatriz del segmento $\overline{B_1\, B_2}$ y probar que $\overline{P\, B_2} \cong \overline{PB_2}$. (resuelto en la actividad 03)

ACTIVIDAD 02 (ver anexo 02).

<u>Resolución propuesta por el profeso A_1</u>

Actividad 2

a). El punto Q lo encontré utilizando la escuadra y midiendo la distancia que hay desde P hacia la recta.

b). En esta actividad está presente la Mediatriz y los puntos P y Q son sus extremos y tienen la misma distancia.

c) La Mediatriz se define como la recta perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.

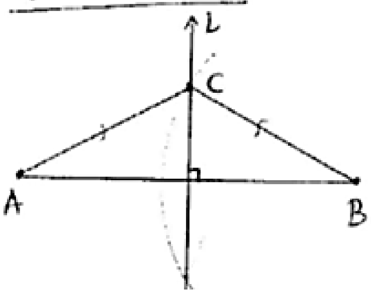
Análisis de objetos

Situación problema
Problema de contexto intramatemático, donde se pide hallar el extremo de un segmento conociendo uno de sus puntos extremos y la mediatriz del segmento; para ello se usará alguna definición o propiedad de la mediatriz.
Lenguaje
➢ **Verbal** - Términos comunes relacionados al contexto del problema (por ejemplo: corte, escuadra, medir, extremos del segmento) - Términos de contexto matemático (por ejemplo: segmento, recta, mediatriz, distancia, recta perpendicular, punto medio de un segmento) ➢ **Simbólico** $P, Q, \overline{PQ}$ ➢ **Grafico** Construcción con escuadra.
Conceptos (definiciones)
➢ **Previos.** - Mediatriz de un segmento. - Distancia de un punto a la recta. ➢ **Emergentes** - No presenta.
Propiedades
➢ **Previas** - La mediatriz de un segmento corta al segmento en su punto medio. ➢ **Emergentes** - No presenta.
Procedimientos
➢ **Previas.** - Trazado de la mediatriz de un segmento - Uso de escuadras ➢ **Emergentes** - Usando las escuadras hallar la distancia de un punto a la recta y luego con esa misma distancia hallar el otro extremo de la circunferencia.
Argumentos
➢ **Tesis 1:** “la distancia de un punto a la recta, es el segmento perpendicular que une al punto con uno de los puntos de la recta” **Justificación:** se justifica usando escuadras y por definición de distancia entre dos puntos.

ACTIVIDAD 3 (ver anexo 02).

<u>Resolución propuesta por el profeso A_1</u>

ACTIVIDAD 3.



Se formó un triángulo rectángulo isósceles porque C equidista de los extremos $\overline{AB}$

b) Se empleó la definición de Mediatriz: que todo punto equidista de sus extremos.

c) Demostración

Sea el Segmento $\overline{AB}$ y M: punto medio de $\overline{AB}$

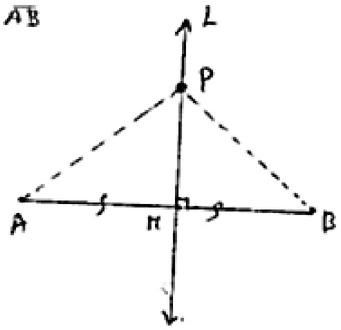
Sea $\overleftrightarrow{L}$ Mediatriz de $\overline{AB}$ y P un punto cualquiera de $\overleftrightarrow{L}$

Tesis: $PA = PB$.

i) Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz; M es punto medio de $\overline{AB}$ $\Rightarrow AM = MB$.

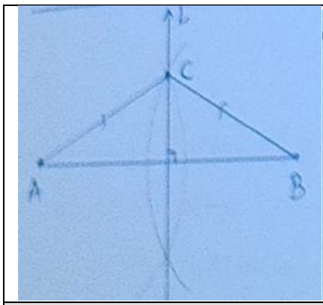
ii) $\Delta AMP \cong \Delta BMP$. (L-A-L).

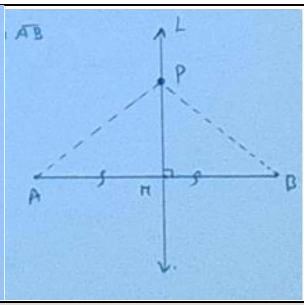
$\therefore$ $PA = PB$. lqqd.



Análisis de objetos

Situación problema
Problema de contexto intramatemático de cuya solución emerge la propiedad de la mediatriz.
Lenguaje
➢ **Verbal** - Términos comunes relacionados al problema (formó, extremos, definición, demostración, tesis, punto cualquiera) - Términos matemáticos inmersos (triángulo isósceles, equidistancia, mediatriz, punto medio) ➢ **Simbólico** $C, \overline{AB}, \overleftrightarrow{L}, PA = PB, \Delta AMP \cong \triangle BMP. (L - A - L), l.q.q.d.$ ➢ **Grafico**





Conceptos (definiciones)

- **Previos**
  - Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular que intercepta al segmento en su punto medio)
  - Triangulo isósceles
- **Emergentes**
  - Mediatriz de un segmento (definida como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de sus extremos)

Propiedades

- **Previas**
  - La mediatriz de un segmento corta al segmento en su punto medio formando un ángulo recto.
- **Emergentes**
  - Todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos.

Procedimientos

- **Previas.**
  - Trazar la mediatriz de un segmento
- **Emergentes**
  - Realizar los pasos indicados en el problema
  - Demostración de la propiedad de la mediatriz usando propiedades geométricas

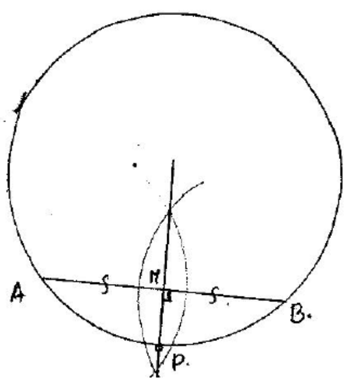
Argumentos

- **Tesis 1:** “todo punto perteneciente a la mediatriz equidista de los extremos del segmento”
  Justificación:
  - La mediatriz de un segmento lo divide en dos segmentos iguales
  - La mediatriz corta al segmento formando un ángulo recto
  - Dos triángulos son congruentes si cumplen con el postulado $(L - A - L)$

ACTIVIDAD 4 (ver anexo 02)

<u>Resolución propuesta por el profeso A_1</u>

ACTIVIDAD 4.



Propiedades

- La Mediatriz pasa por el Centro de la Circunferencia
- la Mediatriz Corta a la circunferencia en 2 arcos Iguales: $\widehat{AP} = \widehat{PQ}$.

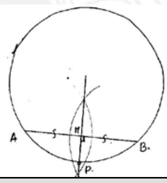
Análisis de objetos.

Situación problema

Problema de contexto intramatemático para que emerja la propiedad de la mediatriz de una cuerda, respecto a la mediatriz.

Lenguaje

- **Verbal**
  - Términos de diversos contextos relacionados con el problema (mediatriz, circunferencia, cuerda, arcos, cortar)
- **Simbólico**
  - $\widehat{AP} = \widehat{PQ}$
- **Grafico**



Conceptos (definiciones)

- **Previos**
  - Definición de circunferencia y sus elementos (cuerda, arco de circunferencia)
  - Definición de mediatriz de una circunferencia.
- **Emergentes**
  - Propiedad de la mediatriz de una cuerda, respecto a la circunferencia.

Propiedades

- **Previas**
  - La mediatriz biseca al segmento
- **Emergentes**
  - La mediatriz pasa por el centro de la circunferencia $\widehat{AP} = \widehat{PQ}$
  - La mediatriz corta a la circunferencia en dos arcos iguales

Procedimientos

- **Previas**
  - Trazar la mediatriz de un segmento
- **Emergentes**
  - Realizar los trazos indicados el problema y hacer conjeturas sobre la propiedad de la mediatriz de la cuerda.

Argumentos

- **Tesis 1:** "la mediatriz pasa por el centro de la circunferencia"
- **Justificación:** justificación grafica

ACTIVIDAD 5 (ver anexo 02).

Resolución propuesta por el profeso A_1

ACTIVIDAD 5.

b) Se traza una Cuerda $\overline{PQ}$ y se halla su mediatriz Luego trazamos otra Cuerda AB y trazamos su mediatriz: la intersección de ambas mediatrices Coincide Con el Centro de la Circunferencia.

Análisis de objetos.

Situación problema
Problema de contexto intramatemático donde se pide hallar el centro de una circunferencia, usando propiedades de la mediatriz.
Lenguaje
➢ **Verbal** Términos de contexto (cuerda, mediatriz, trazar, cuerda, intersección, centro, circunferencia) ➢ **Simbólico** $\overline{PQ}, AB$ ➢ **Grafico** No Presenta
Conceptos (definiciones)
➢ **Previos** Mediatriz de un segmento (definida como, la recta perpendicular en el punto medio del segmento) ➢ **Emergentes** Aplicación de la propiedad de la mediatriz de una cuerda, respecto de la circunferencia.
Propiedades
➢ **Previas** La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular en su punto medio. ➢ **Emergentes** La intersección de las mediatrices de dos cuerdas es el centro de la circunferencia.
Procedimientos
➢ **Previas** Procedimiento para trazar la mediatriz de un segmento. ➢ **Emergentes** Trazar dos cuerdas de circunferencia, hallar el punto de intersección.
Argumentos
➢ **Tesis 1:** "la intercepción de dos cuerdas de circunferencia, es el centro de la circunferencia" **Justificación:** propiedad de la mediatriz de una cuerda (la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de una circunferencia)

ACTIVIDAD 6 (ver anexo 02).

Resolución propuesta por el docente A_1.

ACTIVIDAD 6.

a) trazaría dos cuerdas, hallaría sus mediatrices de cada una y luego encontramos la intersección de las mediatrices y eso sería su centro. Luego tomaríamos un compás ubicando el centro en la intersección de las mediatrices y completamos la circunferencia.

b). Concepto de mediatriz, equidistancia.

Análisis de objetos.

Situación problema
Problema de contexto intramatemático donde se pide trazar una circunferencia a partir de un arco de circunferencia dado.
Lenguaje
➢ **Verbal** Términos del contexto del problema (circunferencia, cuerdas, trazar cuerdas, mediatriz, hallar mediatrices, intersección de mediatrices, centro, completar la circunferencia) ➢ **Simbólico** No presenta ➢ **Gráfico** No presenta.
Conceptos (definiciones)
➢ **Previos** Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular en el punto medio del segmento) ➢ **Emergentes** Aplicación de la propiedad de la mediatriz de una cuerda, para construir la circunferencia que contiene a un arco dado.
Propiedades
➢ **Previas** La mediatriz de una cuerda, contiene al centro de una circunferencia. ➢ **Emergentes** La intersección de las mediatrices de dos cuerdas en un arco de circunferencia, es el centro de la circunferencia que contiene a dicho arco.
Procedimientos
➢ **Previas** Trazar la mediatriz de una cuerda. ➢ **Emergentes** Trazarla mediatriz de dos cuerdas en el arco de circunferencia y tomar el punto de intersección; el punto de intersección es el centro de la circunferencia que contiene al arco dado.
Argumentos
➢ **Tesis 1:** "la intersección de dos mediatrices en un arco de circunferencia es centro de la circunferencia que contiene al arco de circunferencia dado" **Justificación:** trazar las dos cuerdas, hallar la intersección y trazar la circunferencia con centro en el punto hallado (usar reglas y compás)