PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

NÚMEROS RACIONALES: RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE SECUNDARIA DE LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR DEL PERÚ

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta

SAÚL MIQUIAS VICTORIO HURTADO

Dirigido por

ESTELA AURORA VALLEJO VARGAS

San Miguel, 2015

A la memoria de mi adorado padre Florentino "Llulli",
cuyas acciones guiaron mi vida con sólidos valores.

A Otilia, mi madre querida, cuya fortaleza y amor
remozan mi vida personal y profesional.

AGRADECIMIENTOS

Al gobierno peruano personificados por el Sr. Presidente Constitucional de la República del Perú Ollanta Humala Tasso y el Sr. Ministro de Educación Jaime Saavedra Chanduví, y por ende al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo – PRONABEC dirigido por Raúl Choque Larrauri. Por la apertura de este espacio de valiosa innovación para los maestros del Perú, mediante la Beca Presidente de la República “Beca Docente de Postgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú” cuya decisión política fortalecerá a la educación peruana.

A la Maestría en Enseñanza de las Matemática, de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú dirigida por la Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por su permanente exigencia y su valioso apoyo plasmado en sus “pastillitas de motivación”. Asimismo, al selecto equipo de docentes por su profesionalismo y empatía demostrada durante nuestra formación académica.

Mi inmenso agradecimiento y gratitud a mi estimada asesora Mg. Estela Vallejo Vargas, por su paciencia, apoyo y orientación profesional en aras de hacer de la investigación una herramienta vital para el desarrollo de la ciencia y la educación.

Expreso también mi agradecimiento a los respetables miembros del jurado: Dr. Francisco Ugarte Guerra y Mg. Carolina Reaño Paredes por su valiosa contribución en la presente investigación.

Gratitud especial para mi colega y amigo Rubén Jara Sánchez, por su inestimable tiempo brindado para el logro de los propósitos implícitos del presente estudio.

RESUMEN

Este trabajo presenta una investigación sobre los libros de textos de matemática de uso oficial en las Instituciones Educativas Públicas del Perú, distribuidos por el Ministerio de Educación. En ella se analizan las tareas matemáticas con perspectiva en *Razonamiento y Demostración* cuando se desarrollan temas relacionados a los números racionales. Esta investigación se realizó sobre la base teórica de investigaciones realizadas y orientadas por los retos metodológicos para el análisis de libros de texto en *Razonamiento y Demostración* planteados por Gabriel Stylianides. La problemática que motiva la investigación se sitúa en el escenario escolar de la Educación Básica Regular del Perú. Abordar el tratamiento escolar del número racional plantea pensar, entre otros aspectos, en la forma que son presentados en los libros de texto, puesto que estos recursos son de vital importancia en la interacción docente – estudiante durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los resultados obtenidos muestran evidencias importantes para afirmar que los autores de los libros de texto no abordan procesos involucrados en *Razonamiento y Demostración* en el desarrollo de los números racionales, sin embargo en las tareas propuestas hallamos aquellas que sí pueden ser desarrolladas desde la perspectiva de nuestro marco teórico.

Palabras clave: Números Racionales, Razonamiento y Demostración, libros de texto.

ABSTRACT

This paper presents a research about mathematics textbooks of official use in the public educational institutions in Perú, they are distributed by the Ministry of Education. In it the mathematics tasks are discussed with *Reasoning and Proving* perspective when issues of the rational numbers are developed. This research was conducted on the theoretical basis of researches conducted and focused by the methodological challenges for textbooks analysis on *Reasoning and Proving* approached by Gabriel Stylianides. The problem that motivates the research is in the school situation of Regular Basic Education of Perú. The school treatment address of the rational number, it raises think among other things, in the way that they are presented in the textbooks, since these resources are of vital importance in the interaction teacher - student during the teaching and learning processes. The results show significant evidence to say that the authors of the textbooks do not address processes underlying in *Reasoning and Proving* in the development of rational numbers, however in the proposed tasks found that those do can be developed since of the perspective of our theoretical framework.

Keywords: Rational Numbers, Reasoning and Proving, textbooks.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación tiene como objeto de estudio las tareas de *Razonamiento y Demostración* para el tema de los números racionales que están presentes en los libros de texto de matemática de la Educación Básica Regular (EBR) del Perú distribuidos por el Ministerio de Educación del gobierno peruano. Para el logro de tal propósito, nos proponemos analizar los libros del 1º y 2º grados de secundaria, y nos enfocamos específicamente en las secciones donde se trata el tema en cuestión. Asimismo, nuestro trabajo de investigación está compuesto de cinco capítulos.

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación referente al análisis de textos acorde a la perspectiva del *Razonamiento y Demostración*.

En el segundo capítulo, realizamos un estudio de los números racionales, en el que consideramos aspectos matemáticos y aspectos didácticos en el contexto de la educación secundaria.

En el tercer capítulo, presentamos los elementos teóricos que rigen el desarrollo de la investigación. Consideramos el análisis de textos tomando en cuenta los procesos del *Razonamiento y Demostración*.

En el cuarto capítulo, detallamos los aspectos metodológicos y procedimentales los cuales dan soporte sistemático al proceso de investigación, el cual tiene un carácter cualitativo.

En el quinto capítulo, mostramos el análisis de los libros de texto del 1º y 2º grado de secundaria distribuidos por el Ministerio de Educación en relación a los números racionales y las consideraciones que se hacen respecto al *Razonamiento y Demostración*.

En la parte final, establecemos las consideraciones finales de nuestra investigación en la que detallamos la pertinencia del marco teórico y metodológico, la relación con los objetivos y la pregunta de investigación y las perspectivas futuras.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

En este capítulo de la investigación, describimos la problemática que engloba la temática de nuestro trabajo. Para el logro de nuestro propósito, hemos realizado la revisión de investigaciones vinculadas al análisis de libros de texto relacionados al *Razonamiento y Demostración*, y luego detallamos aspectos relevantes que respaldan la elección del tema seleccionado y precisamos el problema de investigación para luego enunciar los objetivos que se persiguen.

1.1 Antecedentes

No hemos hallado investigaciones en el medio local en las que se hayan analizado los números racionales en la perspectiva del *Razonamiento y Demostración*, tampoco en el análisis de libros de texto de matemática peruanos bajo estas dos perspectivas. Sin embargo, hemos tenido acceso a investigaciones desarrolladas a nivel internacional en el marco de *Razonamiento y Demostración* y creemos que es pertinente considerarlas ya que son estudios enfocados en el análisis de textos, particularmente con la mirada puesta en procesos de *Razonamiento y Demostración*. Es en este contexto que nuestro estudio cobra relevancia, ya que avizoramos que significará un precedente de suma importancia para futuras investigaciones en el campo de la demostración matemática ligada al campo del pensamiento numérico y el análisis de textos.

En ese sentido, Bieda, Ji, Drwencke y Picard (2014), en su estudio *Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks*, analizaron siete libros de texto de matemáticas de los grados superiores de primaria (edades de 9 a 11 años) en Estados Unidos. En este estudio se encontró que sólo un promedio del 3,7% de las tareas analizadas presentaban oportunidades para el desarrollo de *Razonamiento y Demostración*. En los siete libros de texto analizados los autores hallaron que en la mayoría de ellos se piden a los estudiantes a realizar afirmaciones y a justificar las afirmaciones; solamente, en pocas tareas además de estos dos propósitos se piden evaluar afirmaciones. Además concluyen que el plan de estudios que se utiliza en el aula de matemáticas de primaria no es suficiente para proporcionar a los estudiantes oportunidades significativas para aprender a generar y evaluar las afirmaciones matemáticas. Para nuestro propósito, este estudio es relevante puesto que nos muestra el proceso metodológico que se sigue al analizar libros de texto en la perspectiva del *Razonamiento y Demostración*.

MacCrory y Stylianides (2014) en su estudio denominado *Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers*, analizaron 16 libros de texto para la formación de futuros profesores de primaria en Estados Unidos en la que precisan que los elementos específicos de *Razonamiento y Demostración* fueron escasos en los libros de texto que analizaron; pero si distinguieron que los libros de texto analizados incluyeron explicaciones acerca de las conjeturas, definiciones, axiomas y teoremas, y su relación entre ellas. Ellos concluyeron que en los capítulos dedicados a la resolución de problemas, la lógica o el *Razonamiento y Demostración* en donde se encontraron la mayor parte de los contenidos, las ideas acerca de estos conceptos clave estuvieron ausentes. Sin embargo este estudio, a decir de los investigadores, nos proporciona indicios acerca del grado en que estos libros de texto pueden ser utilizados como referencia para contenidos de *Razonamiento y Demostración*.

Por otro lado, Fujita y Jones (2014) en su investigación *Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan*, analizaron un libro de texto de geometría para estudiantes del octavo grado, cuyas edades fluctúan entre 13 a 14 años. En ella se muestra el énfasis que se da a las pruebas directas de enunciados geométricos y a la presencia de actividades estimuladoras para la formación de conjeturas. Dado que el libro de texto es uno de los recursos más influyentes en el aprendizaje, este estudio muestra que existen oportunidades para la mejora en la presentación de libros de texto para la enseñanza de la demostración en geometría. Este hallazgo coincide con nuestros propósitos, puesto que una de las intenciones de este estudio es generar espacios de investigación para proveer al gobierno peruano de herramientas de mejora para la edición de los libros de texto bajo estas innovaciones que ofrece esta línea de investigación en *Educación Matemática*.

En el estudio denominado *Reasoning and proving in algebra: The case of two reform oriented U.S. textbooks*, de Davis, Smith, Roy y Bilgic (2014), se analizan las oportunidades de los estudiantes para involucrarse en el *Razonamiento y Demostración* en dos libros de texto de álgebra de la educación secundaria estadounidense. En este estudio, los autores precisan que en ambos textos, la categoría más frecuente fue la identificación de patrones definidos, pero muy pocas estaban ligadas al desarrollo de conjeturas o a la construcción argumentos. Asimismo, los investigadores proponen que con el fin de proporcionar a los estudiantes más oportunidades de involucrarse en la construcción de conjeturas y argumentos, los autores de libros de texto podrían proporcionar a los estudiantes situaciones para la identificación de patrones y la generación de conjeturas, los cuales podrían calificar como precursores para la generación de argumentos. Es decir, según la propuesta de los mencionados investigadores, los autores de libros de texto podrían utilizar la investigación sobre la participación de los estudiantes en procesos del *Razonamiento y Demostración* para determinar qué ideas matemáticas están dentro del alcance conceptual de los alumnos, con el propósito de diseñar tareas que proporcionen a los estudiantes oportunidades para identificar patrones, construir conjeturas y proporcionar argumentos generales y específicos.

En Perú, Quispe (2011) realiza su estudio respecto a la comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con sus operaciones básicas y propiedades elementales, con el propósito de hallar el tipo de relación entre la resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales en estudiantes de secundaria de la ciudad de Puno. En su tesis doctoral genera varias conclusiones, de las cuales es relevante para nuestra investigación la que precisa que:

> La comprensión que poseen los estudiantes, del nivel de educación secundaria, de la definición del conjunto de los números racionales es imprecisa; asumen que, es el conjunto de cocientes o pares ordenados a/b de números, más no precisan que deben ser números enteros y menos comprenden que el segundo componente, divisor o denominador, sea diferente de cero. (p. 227).

De entre las recomendaciones que realiza, podemos remarcar la propuesta referida a las actividades de aprendizaje mediante situaciones en la que se relacione los significados de los números racionales, los procesos de ejecución de las operaciones básicas con fracciones y sus propiedades. “De tal manera que, estas nociones matemáticas no estén desconectadas, sino sean integradas en un cuerpo de conocimientos relacionados entre sí” (Quispe, 2011, p.230). El autor sostiene que no es posible que el número racional sea estudiado de manera aislada, sino de manera integrada, tomando en cuenta sus diversos significados, el cual compartimos en la sección correspondiente a nuestro objeto matemático.

Un referente importante para nuestro trabajo es la investigación de Vallejo (2012) debido a que plantea una propuesta para inclusión de las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en la EBR del Perú. Del análisis de cuatro de los libros de texto de primer grado de secundaria más difundidos en la enseñanza de las matemáticas en Perú, la autora halla que ninguno de ellos recoge la propuesta planteada en el Diseño Curricular Nacional (DCN), y añade refiriéndose al DCN, que ésta, en términos muy generales acentúa la importancia de las justificaciones en la Educación Básica Regular: “el fomento de la argumentación, el planteamiento de conjeturas, la búsqueda de diversos métodos de solución, etc. en la formación de todo estudiante, con el propósito esencial de desarrollar su pensamiento matemático" (p. 182). Al respecto, desde nuestra indagación, hemos observado que en los indicadores de actitudes que se plantean en el DCN se evidencian aspectos relacionados con la demostración matemática en el sentido que el estudiante debe poseer actitudes que evidencien que "muestra rigurosidad para plantear argumentos y toma iniciativa para buscar conjeturas" (Perú, 2009)

Analizar el tratamiento de las demostraciones en la EBR nos permite plantear sugerencias para un abordaje más preciso y variado de los procesos de demostración matemática en el contexto del currículo oficial implementado en Perú. Bajo este parámetro, en el DCN de la EBR en Perú se abordan contenidos matemáticos agrupados en bloques temáticos. Nosotros, para el propósito de nuestro estudio hemos tomado como nuestro objeto matemático a los números racionales.

1.2 Justificación

Es de conocimiento de la sociedad peruana que nuestro sistema educativo se caracteriza por sus permanentes cambios, el cual se da inicio con la aprobación del Proyecto Educativo Nacional al 2021 (PEN), cuyo segundo objetivo estratégico establece: "estudiantes e instituciones que logran aprendizajes pertinentes y de calidad (Perú, 2007, p.13). De esa manera, a fines del año 2008 mediante R.M. Nº 0440-2008-ED se oficializa el DCN de la EBR, que entra en vigencia a partir del año académico 2009. En la modificatoria del DCN, Perú (2015d), una de las cuatro capacidades se plantea en términos de "razona y argumenta generando ideas matemáticas". Los indicadores de desempeño se formulan mediante: argumenta, justifica, prueba y demuestra, los cuales guardan concordancia con la demostración matemática. También considera: plantea conjeturas, realiza conjeturas, emplea ejemplos y contraejemplos, y en el nivel primario: explica procedimientos. Asimismo se considera: evalúa, generaliza y analiza el razonamiento.

De lo detallado, desde nuestra perspectiva, valoramos los esfuerzos de innovación curricular en el desarrollo de habilidades ligadas al *Razonamiento y Demostración*, tal como se muestran en las Rutas de aprendizaje 2015, lo cual hace relevante nuestro estudio. Además, en la educación peruana, el uso de libros de texto en la enseñanza de las matemáticas en la EBR es obligatorio en las instituciones educativas públicas (Perú, 2014, p. 22). Pues este hecho permite que en las próximas ediciones de los libros de texto distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú, explícitamente se consideren procesos involucrados con el *Razonamiento y Demostración*.

Pero el problema de fondo, desde nuestro punto de vista, es que aún no se implementa una *Educación Matemática* basada en el establecimiento de un eje en torno al cual debería girar el quehacer matemático en el aula. Es en este contexto que planteamos la relevancia de nuestra investigación el cual se respalda por los argumentos de Stylianides (2014), quien plantea un enfoque que él considera importante y sin embargo poco explorado en la generación de cambios en las prácticas de aula en el área de *Razonamiento y Demostración*, los cuales son las fuentes instruccionales y en particular los libros de texto usados tanto a nivel escolar como a nivel de la formación de profesores. El autor añade, también que los:

> Appropriately designed school mathematics textbooks can include rich opportunities for students to engage in reasoning-and-proving in a coherent and consistent way. Furthermore, school mathematics textbooks can offer guidance to teachers about how to specific mathematical / pedagogical issues which can arise in the classroom as teachers endeavor to support students' engagement in reasoning-and-proving and with which teachers tend to have difficulties. (p. 64)
>
> [Libros de texto de matemática a nivel escolar diseñados apropiadamente pueden incluir oportunidades ricas para que los estudiantes se involucren en razonamiento y demostración de una manera coherente y consistente. Más aun, los libros de texto de matemática escolar pueden ofrecer una guía a los profesores sobre cómo atacar temas específicos matemáticos / pedagógicos que pueden surgir en el aula de clase conforme los profesores se esfuercen por respaldar el involucramiento de sus estudiantes en razonamiento y demostración y con lo que los profesores tienden a tener dificultades] (traducción nuestra).

De esta manera, el autor rescata el poder que tienen los libros de texto, pero siempre y cuando sean diseñados apropiadamente. Desde su perspectiva la razón principal de porqué hay pocas investigaciones que se enfocan en atacar temas de *Razonamiento y Demostración* en los libros de texto de matemática se debe a las técnicas metodológicas para emprender este tipo de investigaciones, pues no están bien desarrolladas en comparación a las técnicas para investigar el pensamiento del estudiante o la práctica en la escuela. Añade que hay más investigaciones que están enfocadas en cómo el estudiante piensa o razona y en las prácticas que se realiza en aula en el contexto de *Razonamiento y Demostración*, pero no hay tanta información acerca de las técnicas metodológicas para el análisis de textos.

Una vigente visión sobre la enseñanza de las matemáticas, con la cual concordamos, se plasma en los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), que surge con el propósito de generar acciones para que los estudiantes aprendan, de manera comprensiva conceptos y procesos matemáticos en el cual "los profesores ayudan a sus alumnos a formular, perfeccionar y explorar conjeturas partiendo de evidencias y a utilizar diferentes tipos de razonamiento, así como distintas técnicas de demostración para confirmarlas o refutarlas" (p. 3). En el mismo documento se distinguen los estándares de contenidos y los estándares de procesos; de los cuales, para nuestro propósito, hemos considerado los estándares correspondientes a números y operaciones, y al *Razonamiento y Demostración* respectivamente; puesto que “los procesos pueden aprenderse con los contenidos y los contenidos junto con los procesos” (p. 33).

Nuestro objeto de estudio se enmarca en el estándar de números y operaciones, cuyo eje central es el desarrollo del sentido numérico. Al respecto, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) se precisa que:

> Los principios que rigen la resolución de ecuaciones en álgebra coinciden con las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos. En geometría y medida, los atributos se describen con números. El área de análisis de datos conlleva dar sentido a los números. A través de la resolución de problemas, los estudiantes pueden explorar y consolidar sus conocimientos sobre números. El razonamiento matemático de los más pequeños es más probable que se dé sobre las situaciones numéricas, y sus primeras representaciones probablemente sean de números (p. 34).

Al respecto Stylianides (2014) expresa que el *Razonamiento y Demostración* puede extenderse a lo largo de otros contenidos matemáticos y plantea la cuestión respecto al foco de atención que deben considerar los investigadores al analizar los libros de texto. El investigador afirma: “This is less of an issue when a textbook analysis focuses on a specific mathematical topic, because in that case it is often clearer where exactly in the textbook the topic is covered” (Stylianides, 2014, p. 65) [Este es un asunto menor cuando un análisis de un libro de texto se centra en un tema matemático específico, porque en ese caso es muy claro dónde exactamente el tema está incluido en el libro de texto] (traducción nuestra).

De todo lo expresado planteamos la necesidad de generar investigaciones que focalicen propósitos puntuales en el análisis de libros de texto, cuya intención es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje mediante la puesta en práctica de estrategias y actividades que fortalezcan el *Razonamiento y Demostración* en el desarrollo de tareas en el aula de matemática.

En tal sentido y con la pertinencia respaldada por investigadores en *Educación Matemática*, el propósito de nuestra investigación es justamente enfocar nuestro estudio en el tratamiento de las demostraciones al abordar conocimientos específicos relacionados a los números racionales en los libros de texto del 1º y 2º grado de secundaria de la educación peruana.

1.3 El problema de investigación

Nuestro estudio se enfoca en temas referentes a los números racionales en la EBR, mediante el análisis de libros de texto del 1° y 2° grados de secundaria basados en la descripción en la forma que se plantean los números racionales para luego examinar cuáles son las tareas que realmente pueden promover el *Razonamiento y Demostración*.

Stylianides (2009) manifiesta que el *Razonamiento y Demostración* es fundamental en el quehacer matemático y que los libros de texto tienen influencia significativa en los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas. Específicamente, puntualiza el investigador, que en estudios recientes en los Estados Unidos se mostraron que muchas de las decisiones tomadas por los profesores sobre qué matemáticas enseñar a sus estudiantes, cuándo y cómo enseñar estas matemáticas son mediadas por los libros de texto que utilizan. A pesar de que los libros de texto juegan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, el autor puntualiza, que hasta ahora nos falta conocer cómo en ellos se promueven procesos relacionados al *Razonamiento y Demostración*.

Es en esta perspectiva, sobre la base de estudios efectuados, creemos que es necesario realizar un análisis similar en los libros de texto de matemática del 1° y 2° grado de secundaria en los cuales se dan mayor énfasis a los números racionales, para luego indagar cómo se pretende promover el desarrollo del *Razonamiento y Demostración* en los estudiantes de la EBR.

Nuestro estudio se sustenta en la propuesta de Stylianides (2009), quien plantea formas de abordar el análisis de libros de texto. La primera relacionada con las oportunidades que se presentan en *Razonamiento y Demostración* a través de los contenidos, ya que el *Razonamiento y Demostración* es el centro de todos los contenidos. La segunda se relaciona con la distribución de oportunidades de *Razonamiento y Demostración* a través de los grados y niveles. En nuestro caso, el análisis lo ejecutamos a través de los números racionales, como contenido en la perspectiva del *Razonamiento y Demostración* en los libros de texto de matemática del 1° y 2º grado de secundaria, es decir a través de los grados de estudio.

1.3.1 Pregunta de investigación

Es en este contexto que nos propusimos analizar ¿cómo se desarrollan las habilidades del *Razonamiento y Demostración* al abordar los números racionales en los libros de texto de matemática del 1° y 2° grado de secundaria distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú?

1.3.2 Objetivos

Objetivo general

Analizar las tareas sobre *Razonamiento y Demostración* para el tema números racionales presentes en los libros de texto de matemática del primer y segundo grado de secundaria distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú.

Objetivos específicos

- Identificar las tareas que tienen el propósito de desarrollar alguna habilidad de *Razonamiento y Demostración*, de acuerdo al marco analítico de Stylianides.
- Describir el propósito que cada una de las tareas identificadas tiene en el desarrollo de *Razonamiento y Demostración*.

Una vez presentada la problemática que engloba nuestro estudio, enseguida nos enfocamos a los aspectos matemáticos y didácticos para los números racionales en relación con el currículo peruano. Este detalle lo presentamos en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO II: NÚMEROS RACIONALES

Nuestra investigación se enmarca en la línea de investigación del Pensamiento Numérico en Didáctica de la Matemática. En primer lugar, desarrollaremos aspectos matemáticos respecto los números racionales provisto de dos operaciones internas llamadas adición y multiplicación, así como de sus diversos significados. En segundo lugar realizaremos una descripción de los aspectos didácticos en el que se enmarca nuestra educación el cual influye en el desarrollo de temas respecto a los números racionales.

2.1 Aspectos matemáticos

La base teórica para nuestro objeto de estudio ha sido tomada de Carranza (2015), quien en el cuarto capítulo de su libro denominado Algebra, introduce y desarrolla el sistema de los números racionales. Solamente para casos específicos nos apoyamos en los estudios de los demás autores citados.

2.1.1 Construcción del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

Para explicar la construcción de los números enteros Barrantes (2005) parte del enunciado: Sí $a\ y\ b\ \in \mathbb{N}$, entonces la ecuación $a + x = b$ tiene solución. En este caso, $x \in \mathbb{N}$ si y solo si $a < b$. Expresaremos esta solución por $x = b - a$ y diremos que es la resta de b menos a. Sobre esta base, el autor añade que "construiremos ahora un conjunto más grande, es decir, un conjunto que contenga $\mathbb{N}$ de modo que la ecuación $a + x = b$ pueda resolverse en ese conjunto, para cualesquiera que sean los elementos a y b en él" (p. 73).

2.1.2 Extensión del sistema de los números enteros

Carranza (2015), con el propósito de extender el sistema de los números enteros afirma que en el sistema de los números enteros las operaciones de adición, sustracción y multiplicación están totalmente definidas; en el sentido que la suma, la diferencia y el producto de dos números enteros cualesquiera es otro número entero. En cambio la división es una operación parcialmente definida puesto que si $0 < |a| < |b|$ se puede demostrar fácilmente que no existe un entero n de tal manera que $b = na$.

Enseguida, el autor se propone efectuar una ampliación del sistema de los números enteros $\mathbb{Z}$, es decir considerar un conjunto de nuevos elementos definidos de manera que contenga, como caso particular a los elementos de $\mathbb{Z}$ y que las operaciones que entre ellos se definan incluyan a las operaciones definidas sobre $\mathbb{Z}$ y gocen de las mismas propiedades de estas. Además, el autor plantea la necesidad que en este nuevo conjunto se pueda realizar sin restricciones las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (excepto por cero).

El mismo autor menciona que para lograr tal objetivo:

> Procederemos análogamente a como lo hicimos para extender el sistema de los números naturales. En efecto, consideremos el conjunto de todos los posibles cocientes $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ de números enteros con $\mathrm{n} > 0$, a los cuales les representaremos mediante pares ordenados (m, n). En el conjunto así formado, definiremos una relación de equivalencia que por el Teorema Fundamental de la Partición, determinará una partición de dicho conjunto en clases disjuntas, no vacías y cuya reunión será el conjunto dado. Luego, en el conjunto cociente así construido, definiremos operaciones y relaciones, obteniendo así lo que llama el sistema de los números racionales, al cual denotaremos por $\mathbb{Q}$ y esto constituirá la solución de nuestro problema (p. 73).

Luego de estas precisiones, en la siguiente sección detallaremos aspectos puntuales sobre relaciones de equivalencia cuya delimitación nos enmarcará para realizar una cabal definición de los números racionales.

2.1.3 Relación de equivalencia

Carranza (2015), parte de denotar a T como el conjunto de todos los pares ordenados de número enteros tales que sus segundas componentes sean números enteros positivos $T = \mathbb{Z}\, x\, \mathbb{Z}^{+}$. A los elementos de T los denotamos así: $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$, ...

El autor define ahora en T una relación mediante la siguiente definición:

Diremos que el par ordenado de números enteros (a_1, a_2) es equivalente a (b_1, b_2) y escribiremos $(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2)$ si y solo si $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

De ella podemos ejemplificar $(4{,}3) \equiv (8{,}6)$, puesto que $4 \times 6 \equiv 3 \times 8$

También enuncia el teorema:

La relación $(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2)$ es una relación de equivalencia, es decir verifica las siguientes propiedades:

a) Reflexiva: $(a_1, a_2) \equiv (a_1, a_2)$
b) Simétrica: Si $(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2)$ $entonces$ $(b_1, b_2) \equiv (a_1, a_2)$
c) Transitiva:
   Si $(a_1, a_2) \equiv (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \equiv (c_1, c_2)$ $entonces$ $(a_1, a_2) \equiv (c_1, c_2)$

Luego de puntualizar estas definiciones previas, las cuales son muy valiosas para desarrollar los temas subsiguientes, pasamos enseguida a definir a los números racionales.

2.1.4 Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Al respecto, Carranza (2015) define al número racional de la manera siguiente:

"Daremos el nombre de número racional a cada una de las clases de pares ordenados (con segunda componente positiva) equivalentes de números enteros" (p. 74).

Asimismo Carranza (2015), añade "De la definición resulta que a cada número racional le corresponde infinitos pares equivalentes entre si y que a cada par le corresponde un único número racional que es la clase a la cual pertenece el par considerado" (p. 74).

A decir, añade que "en virtud de la definición anterior, queda pues bien determinado un conjunto de elementos llamados números racionales, al que denotaremos por $\mathbb{Q}$" (p. 74).

A sus elementos, el autor lo denota así:

$$a = [(a_1, a_2), (a_1', a_2'), (a_1'', a_2''), \dots],$$

$$b = [(b_1, b_2), (b_1', b_2'), (b_1'', b_2''), \dots], \dots$$

o simplemente

$$a = [(a_1, a_2)]\ , b = [(b_1, b_2)], \dots$$

El autor concluye "en consecuencia el sistema de los números racionales $\mathbb{Q}$ es el conjunto cociente de $T = \mathbb{Z}\, x\, \mathbb{Z}^+$ por la relación de equivalencia dada" (p. 75).

2.1.5 Suma de números racionales

Para precisar la suma de números racionales, Carranza (2015), enuncia la siguiente definición:

Dados los números racionales $a = [(a_1, a_2)]$ y $b = [(b_1, b_2)]$ se llama suma de a y b, y se denota por $a + b$, al número racional determinado por la clase $[(a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_2)]$.

Es decir:

$$[(a_1, a_2)] + [(b_1, b_2)] = [(a_1 b_2 + a_2 b_1, a_2 b_2)]$$

De la definición anterior se sigue que la suma de dos números racionales siempre existe, puesto que la suma de dos números enteros siempre existe, refiere el autor. También el autor realiza la siguiente precisión: “la operación que hace corresponder a cada par de números (a, b) su suma $a + b$ recibe el nombre de adición” (p. 75).

Asimismo, el autor explica que la suma de los números racionales está bien definida, es decir no depende de los representantes. Este enunciado lo aclara mediante el siguiente lema:

La suma $a + b$ es independiente de los pares que se consideran para definirla. Es decir, si $(a_1', a_2') \in a$ y $(b_1', b_2') \in b$ entonces $(a_1'b_2' + a_2'b_1', a_2'b_2') \in a + b$.

Propiedades

Carranza (2015), enuncia las propiedades de la adición mediante el siguiente teorema:

La adición de números racionales verifica las siguientes propiedades:

a) $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (asociativa).

b) $a + b = b + a,\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$ (conmutativa).

c) Existe un único número racional llamado cero o elemento neutro de la adición y denotado por 0, tal que: $a + 0 = a;\ para\ todo\ a \in \mathbb{Q}$.

d) Para cada número racional $a \in \mathbb{Q}$, existe un único $b \in \mathbb{Q}$, llamado opuesto de a, denotado por $-a$ y tal que $a + b = 0$. Es decir, $a + (-a) = 0$.

e) $a + c = b + c$ implica $a = b$.

f) Llamaremos 0 racional a la clase que contiene a todos los pares de la forma (c_1, c_2) tales que $c_1 = 0\ y\ c_2 > 0$. Es inmediato ver que esta clase es no vacía, pues por ejemplo el par $(0,1) \in 0$. Además si $a = [(a_1, a_2)]$,

$$a + 0 = [(a_1, a_2)] + [(0, c_2)] = [(a_1c_2, a_2c_2)] = a$$

puesto que $(a_1c_2, a_2c_2) \equiv (a_1, a_2)$. Finalmente se ve fácilmente que 0 es único.

g) Dado $a = [(a_1, a_2)]$ llamaremos $-a$ a la clase que contiene el par $(-a_1, a_2)$. Es decir $-a = [(-a_1, a_2)]$. Evidentemente esta clase no es vacía. Además se puede ver fácilmente que $a + (-a) = 0$ y que el opuesto $-a$ es único.

2.1.6 Multiplicación de números racionales

Para precisar la multiplicación de números racionales, Carranza (2015), enuncia la siguiente definición:

Dados los números racionales $a = [(a_1, a_2)]$ y $b = [(b_1, b_2)]$ se llama producto o multiplicación de a y b, y se denota por ab, al número racional determinado por la clase $[(a_1b_1, a_2b_2)]$.

Es decir:

$$[(a_1, a_2)][(b_1, b_2)] = [(a_1b_1, a_2b_2)]$$

Resulta de esta definición que el producto de dos números racionales siempre existe. Además el autor añade que "la operación que hace corresponder a cada par de números (a, b), su producto ab recibe el nombre de multiplicación" (p. 76).

También, el autor para precisar que la multiplicación está bien definida, lo aclara mediante el siguiente lema:

"El producto ab es independiente de los pares que se consideran para definirla. Es decir, si $(a'_1, a'_2) \in a$ y $(b'_1, b'_2) \in b$ entonces $(a'_1b'_1, a'_2b'_2) \in ab$" (p. 76).

Propiedades

Carranza (2015), al igual que en la adición, enuncia las propiedades de la multiplicación a través del siguiente **teorema**:

La multiplicación de números racionales verifica las siguientes propiedades:

a) $(ab)c = a(bc),\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ (asociativa).

b) $ab = ba,\ \forall a, b \in \mathbb{Q}$ (conmutativa).

c) Existe un único número racional diferente de cero llamado uno o elemento neutro de la multiplicación, denotado por 1, tal que: $a.1 = a;\ para\ todo\ a \in \mathbb{Q}$.

d) Para cada número racional $a \neq 0$, existe un único número racional llamado inverso de a, denotado con $\frac{1}{a}$, tal que $a.\frac{1}{a} = 1$.

Otro modo de definir el inverso o recíproco la plantea Barrantes (2005) del modo siguiente: "Todo número racional $x \neq 0$ tiene un recíproco $x^{-1} \in \mathbb{Q}$; es decir $x.x^{-1} = 1$. Observe que si $x = \frac{a}{b}$, entonces $x^{-1} = \frac{b}{a}$. El número x^{-1} también se escribe de la forma $\frac{1}{x}$." (p. 85).

e) $ac = bc$ implica $a = b$.

Una propiedad que relaciona a la adición y multiplicación en los números reales es distributiva. Es por ello que Carranza (2015), precisa que la multiplicación es distributiva con respecto a la adición:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: a(b + c) = ab + ac$$
$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: (a + b)c = ac + bc$$

2.1.7 Relación entre los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$

Para establecer la relación entre el sistema de los números enteros y el sistema de los números racionales, Carranza (2015) establece la relación, a partir de la definición de una aplicación f entre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, y el conjunto B de los números racionales de la forma $[(e, 1)]$ al asignar a cada entero e el número racional $[(e, 1)]$.

$$f: e \to [(e, 1)] \text{ ó } f(e) = [(e, 1)]$$

Enseguida, el autor demuestra que f es un isomorfismo algebraico y de orden, es decir que f es una biyección de $\mathbb{Z}$ sobre B que cumple con las siguientes propiedades:

a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$,

b) $x \leq y \, si \, y \, solo \, si \, f(x) \leq f(y)$.

Luego, afirma que:

> Este doble isomorfismo nos permite identificar desde el punto de vista algebraico y del orden a $\mathbb{Z}$ y a B. Por esta razón suele llamarse a B, conjunto de números racionales enteros y se denota por $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$. Como $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ está contenido en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, se dice corrientemente que $\mathbb{Z}$ “esta contenido” en $\mathbb{Q}$. Por último, es posible encontrar en $\mathbb{Q}$ un subconjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{N}}$ constituidos por todos los pares de la forma $[(n, 1)]$ con n número natural, que evidentemente está constituido en $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, y tal que $\mathbb{N}$ es isomorfo algebraicamente y en el orden a $\mathbb{Q}_{\mathbb{N}}$. Tal conjunto es llamado el conjunto de los racionales naturales. Esto nos permite decir que $\mathbb{N}$ “esta contenido” en $\mathbb{Q}$ (p.85).

Asimismo, sobre esta base, el autor presenta el diagrama tal como se muestra en la figura 1, en el que nos muestra que un racional natural es una $f: n \to [(n, 1)]$ y un racional entero es una $f: e \to [(e, 1)]$.

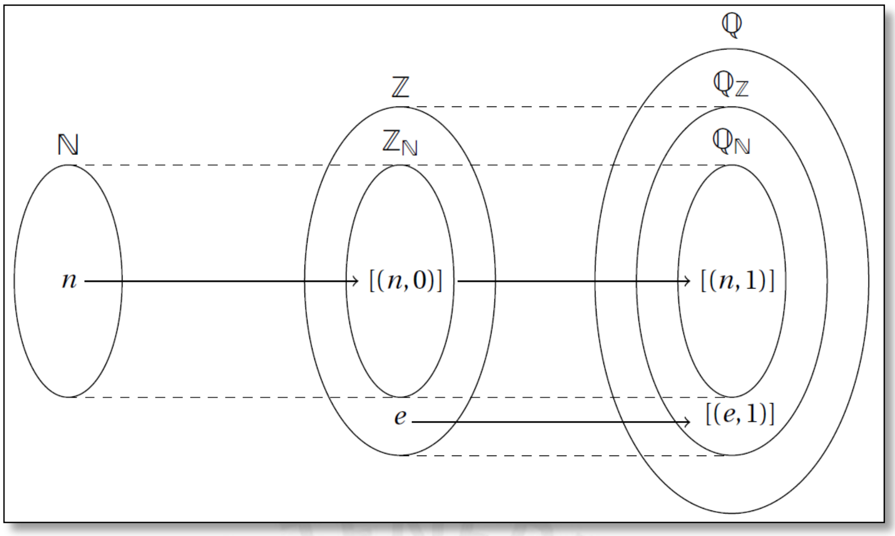


Figura 1. Relación entre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ **y** $\mathbb{Q}$
Fuente: Carranza (2015, p. 85)

2.1.8 Representación de los números racionales en la recta numérica

Los números racionales pueden ser representados en la recta numérica. Al respecto, Egoavil (2015) afirma que "a todo número racional le corresponde un punto en la recta numérica, pero no todos los puntos de la recta numérica corresponden a números racionales" (p. 35). Esto alude a que existe una correspondencia unívoca entre los números racionales y los puntos de la recta numérica. Así en el ejemplo que mostramos en la figura 2, los números racionales negativos se representan ubicándolos a la izquierda del cero y los racionales positivos a la derecha del cero.

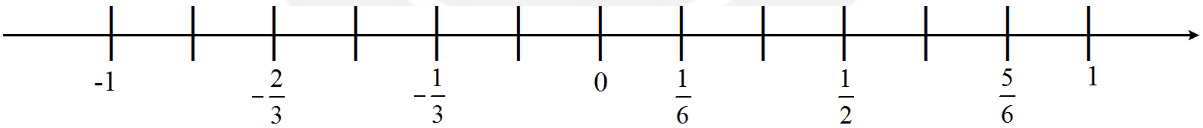


Figura 2. Ejemplos de representación de $\mathbb{Q}$ en la recta numérica

2.1.9 Relación menor en $\mathbb{Q}$

Para un abordaje diverso de nuestro objeto matemático nos remitimos a Barrantes (2005), quien define el orden en los números racionales en base al orden en los números enteros. Para ello se puede escoger una fracción representante de cada número racional de manera que el denominador de la fracción sea un número entero positivo.

Sean $\frac{a_1}{a_2}$ *y* $\frac{b_1}{b_2}$ *en* $\mathbb{Q}$, *con* $a_2 > 0$ *y* $b_2 > 0$, *decimos que* $\frac{a_1}{a_2}$ *es menor que* $\frac{b_1}{b_2}$ *y lo escribimos* $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$ *si* $a_1 b_2 < a_2 b_1$.

2.1.10 Ley de tricotomía

En el sentido de que $\mathbb{Q}$ es un conjunto ordenado, esta ley es enunciada por Huete (2002, p.44) de la siguiente forma: "Dados dos números racionales $\frac{a_1}{a_2} y \frac{b_1}{b_2}$ se cumple una y sólo una de las tres relaciones siguientes: $\frac{a_1}{a_2} > \frac{b_1}{b_2}$; $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$"

Demostración:

Para nuestro propósito hemos tomado referencia de la demostración realizada en Carranza (2015, p. 23), cuya denotación la hemos adecuado al enunciado anterior.

En primer lugar, dados $\frac{a_1}{a_2} y \frac{b_1}{b_2}$, siempre se cumple $\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{b_1}{b_2}$ o $\frac{b_1}{b_2} \leq \frac{a_1}{a_2}$ (Teorema), luego siempre se cumple, $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ o $\frac{b_1}{b_2} < \frac{a_1}{a_2}$ (Teorema). Probaremos a continuación que se cumple, una y sólo una de las tres posibilidades. En efecto, si se cumpliera a la vez $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ y $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$ (hip. auxiliar), reemplazando $\frac{b_1}{b_2}$ por $\frac{a_1}{a_2}$ (PS) se tendría $\frac{a_1}{a_2} < \frac{a_1}{a_2}$ lo que es una contradicción (Definición). Análogamente si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ y $\frac{b_1}{b_2} < \frac{a_1}{a_2}$. Finalmente, si se cumpliera a la vez $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$ y $\frac{b_1}{b_2} < \frac{a_1}{a_2}$, de la segunda relación resultaría $\frac{a_1}{a_2} \nless \frac{b_1}{b_2}$ (Teorema) lo que contradice la primera relación.

2.1.11 Densidad en $\mathbb{Q}$

En los números enteros se establece que todo número entero ***a*** tiene un sucesor ***b*** y que entre ***a*** y *b* no hay otro número entero, "por esta característica se dice que el conjunto de los números enteros es discreto. En $\mathbb{Q}$ no es posible definir un sucesor como en $\mathbb{Z}$, por la propiedad de los número racionales llamada densidad" (Huete, 2002, p. 72).

Al respecto, Barrantes (2005) aclara que entre dos números racionales siempre podemos encontrar un número racional, infinitos número racionales. Enseguida, el autor presenta el teorema "el conjunto de los números racionales es denso; esto es, entre dos números racionales siempre existe un número racional" (p. 88).

Consideramos dos números racionales representados por $\frac{a_1}{a_2} y \frac{b_1}{b_2}$, donde $a_2 > 0 \; y \; b_2 > 0 \; y$ supongamos que $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$. Consideremos el número racional $\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2 a_2 b_2}$ (este es valor medio entre $\frac{a_1}{a_2} y \frac{b_1}{b_2}$ *), verificaremos que este número está entre* $\frac{a_1}{a_2} y \frac{b_1}{b_2}$.

Demostración:

i) Puesto que $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$, entonces $a_1 b_2 < a_2 b_1$ y,

por lo tanto, $a_2 a_1 b_2 < a_2 a_2 b_1$ (pues $a_2 > 0$).

Luego, $a_2 a_1 b_2 + a_2 a_1 b_2 < a_2 a_1 b_2 + a_2 a_2 b_1$,

$$\frac{2a_2 a_1 b_2}{2a_2 a_2 b_2} < \frac{a_2(a_1 b_2 + a_2 b_1)}{2a_2 a_2 b_2}$$

Pero esto quiere decir que $\frac{a_1}{a_2} < \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2a_2 b_2}$.

ii) Puesto que $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_1}{b_2}$, entonces $a_1 b_2 < a_2 b_1$ y,

por lo tanto, $a_1 b_2 b_2 < a_2 b_1 b_2$ (pues $b_2 > 0$).

Luego, $a_1 b_2 b_2 + a_2 b_1 b_2 < a_2 b_1 b_2 + a_2 b_1 b_2$,

$$\frac{b_2(a_1 b_2 + a_2 b_1)}{2a_2 b_2 b_2} < \frac{2a_2 b_1 b_2}{2a_2 b_2 b_2}$$

Pero esto quiere decir que $\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2a_2 b_2} < \frac{b_1}{b_2}$.

Finalmente: $\frac{a_1}{a_2} < \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2a_2 b_2} < \frac{b_1}{b_2}$

2.1.12 Significados del número racional

Es importante también considerar para nuestro estudio los significados del número racional en su representación fraccional puesto que nos permitirá poseer una visión más amplia para nuestro análisis. Estos significados aparecen en Quispe (2011):

El número racional como parte-todo, se da cuando existe la división de una unidad en partes iguales de las que se "destacan" algunas. Las partes que se destacan están indicadas por el numerador de la fracción, mientras que las partes en que se ha dividido la unidad lo indica el denominador. La relación "parte-todo" se presenta cuando un "todo", se divide en partes "congruentes". La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes; el todo recibe el nombre de unidad. En esta interpretación la expresión *a/b* representa la situación en que un todo o unidad se ha dividido en *b* partes iguales de las que se consideran *a* de dichas partes. Cuando ubicamos fracciones en la recta numérica a la fracción *a/b* se le asocia un punto situado sobre ella, aquí implícitamente se realiza la asociación de un punto con una fracción, donde cada segmento unidad se divide en b partes (o en un múltiplo de b) congruentes, de las que se toma a.

El número racional como cociente, en la que a/b representa una situación de reparto. En ella se trata de conocer el tamaño de cada una de las partes que resulta de distribuir a unidades en b partes iguales. Bajo esta interpretación, se asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro distinto de cero (división indicada *a/b*), o bien, dividir una cantidad en un número de partes dadas en un contexto de reparto. Kieren 1980 (citada en Quispe, 2011) "señala la diferencia entre la interpretación parte-todo con la de cociente; indica que, para el alumno que está aprendiendo a trabajar con fracciones, el dividir una unidad en cinco partes y tomar tres (3/5) resulta muy distinto del hecho de dividir tres unidades entre cinco personas, aunque el resultado sea el mismo". Las situaciones de reparto se presentan en contextos de magnitudes continuas y discretas. A diferencia de la interpretación parte-todo, los alumnos realizan de mejor manera las reparticiones en contextos discretos que en contextos continuos. Esto siempre que el numerador sea múltiplo del denominador. Caso contrario una situación de contexto discreto se convierte en una de contexto continuo.

En la perspectiva de Quispe (2011), esta interpretación sirve para introducir los números racionales con rango de "número" y romper el concepto de que solo los naturales son números, en ella se considera que las fracciones tienen un doble aspecto: primero, se distingue la fracción como una división indicada; y segundo, como elemento de un cuerpo cociente. Se considera las fracciones como los elementos de una estructura algebraica, es decir, como elementos de un conjunto numérico $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \ /\mathrm{a} \in \mathbb{Z},\ \mathrm{b} \in \mathbb{Z}^{+}\right\}$ el cual representa la solución de la ecuación $b = xa$.

Según Kieren 1975 (citada en Quispe, 2011) "esta interpretación de las fracciones (números racionales) como elemento de un cuerpo (estructura algebraica) no está estrechamente vinculada al pensamiento natural del niño al desarrollarse de forma deductiva las operaciones y propiedades".

El número racional como medida, surge cuando al medir una longitud, la unidad no cabe un número entero de veces en ella, entonces esta puede fraccionarse para obtener una medida más precisa. La necesidad de fraccionar la unidad de medida permitió la emergencia natural del significado parte-todo; la unidad de medida debía ser dividida en sub unidades de medida para garantizar la realización de una medición con más precisión. Esta acepción es consecuencia de la necesidad de medir longitud, superficie, peso y comunicar las medidas. La fracción *a/b* indica fraccionar la unidad de medida en *b* sub-unidades iguales y que es necesario colocar *a* sub-unidades, reiteradas veces, para completar la medición del objeto.

En esta situación el todo, sea continuo o discreto, se divide en partes "congruentes". La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes. La relación parte-todo es intrínseca a la interpretación de la fracción como medida. De los contextos continuo y discreto de la fracción como parte-todo, la que presenta mayor dificultad es la del contexto discreto, por consiguiente, "se fuerza a que el niño amplíe su esquema de la relación parte-todo".

El número racional como razón, se basa en que a/b no representa la partición de ningún objeto o magnitud, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos, o la comparación entre una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial. La comparación entre cantidades que indica la fracción ha de entenderse como el tanto por uno, es decir, como la cantidad de la magnitud a que se refiere el numerador que corresponde a cada unidad de la magnitud considerada en el denominador. La fracción tiene significado de razón cuando lo que se simboliza con ella es la relación entre dos cantidades o conjuntos de unidades. En una razón el primer elemento, o sea, el dividendo o numerador, se llama antecedente, y al segundo elemento, divisor o denominador, se llama consecuente.

La fracción como índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud es una relación parte-parte o todo-todo, y se denota *a/b*. En esta interpretación es importante fijarse en la bidireccionalidad de la comparación, de manera que se puede leer: *a* es *a/b* respecto a *b* o *b* es *b/a* con relación a *a*.

El número racional como como operador, en la que se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones. En esta interpretación la fracción actúa como un transformador, número que provoca cambios a través de una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa. Esta interpretación puede ser relacionada a la noción de función. Ante la siguiente situación; "Si en cada aula se tiene 36 alumnos y 2/3 deben ser niñas. Y si en otra aula se tiene 42 alumnos, ¿cuántas niñas hay en cada salón?" se puede interpretar como la función: $f(x) = \frac{2}{3}x$. La fracción como porcentaje, es un caso particular de la fracción como operador, así la relación que se establece entre un número y 100 recibe el nombre particular de porcentaje. Por regla general, los porcentajes tienen asignado un aspecto de "operador", es decir, al interpretar "el 40% de 252 se concibe "actuando la fracción 40/100 por 252".

2.2 Aspectos didácticos

A continuación, realizaremos una descripción puntual de la actual coyuntura en la que se desarrolla la enseñanza de las matemáticas en la educación peruana. Para tal propósito, nos ubicaremos en la situación actual en la que se desarrolla la *Educación Matemática* en el contexto internacional y en el ámbito nacional.

2.2.1 Números racionales y los principios y estándares para la Educación Matemática

El *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM (2000) formula el estándar de números y operaciones basado en que los programas de enseñanza en todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: comprender los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos; comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras; y calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables.

En lo referente a los números racionales el NCTM (2000), considera que los programas de enseñanza deben capacitar a los estudiantes para que logren comprender las fracciones como partes de una unidad entera o de una colección, "llegar a comprender que los números pueden representarse de diversas maneras; ver que, por ejemplo, ¼, 25% y 0,25 son diferentes formas de expresar el mismo número" (p. 35). También, se plantea la comparación de fracciones a través de referencias tal como ½ "y a medida que se desarrolla su sentido numérico, deberían ser capaces de razonar sobre números; por ejemplo, explicar que ½ + 3/8 tiene que ser menor que 1, porque uno de los sumandos es ½ y el otro es menor que ½" (p. 36). Asimismo, en dichos estándares se plantea el uso de una variedad de estrategias para fracciones equivalentes, decimales y porcentajes, también para ordenar y comparar números racionales.

En lo que respecta a la comprensión de los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática NCTM (2000) se plantea el trabajo con una estructura numérica ampliada, tal como en la multiplicación de un número natural por una fracción comprendida entre 0 y 1, siendo el resultado menor que dicho número natural. "Esto contradice la experiencia previa (con números naturales) de los alumnos, según la cual, al multiplicar siempre resulta un número mayor" (p. 37). También se promueve el uso de métodos diversos de cálculo con fracciones, tal como para calcular ¼ + ½ se resolvería con facilidad usando estrategias de descomposición que exprese: ¼ + ½ = ¼ + (1/4 + ¼), llegando incluso a utilizar decimales para concluir dicho cálculo.

Luego de mostrar un referente importante del panorama internacional, enseguida realizaremos un abordaje puntual en lo que se refiere a los números racionales en el contexto nacional.

2.2.2 El número racional en el Diseño Curricular Nacional

En el DCN de la EBR del Perú (Perú, 2009) el estudio de los números racionales se inicia en el tercer grado de primaria hasta el segundo grado de secundaria. En dicho documento oficial vigente en nuestro país se detallan las competencias y conocimientos relacionados a los números racionales, los cuales presentamos a continuación:

Competencias relacionadas a los números racionales

Las competencias estructuradas de acuerdo a los ciclos de la EBR, en el DCN están estructuradas con el propósito de establecer relaciones entre los números y las operaciones para resolver problemas, identificar y encontrar regularidades. Dicho documento vigente detalla las competencias de la siguiente manera:

Tabla 1. Competencias según el Diseño Curricular Nacional

CICLO IV	CICLO V	CICLO VI
(3º y 4º grados de primaria)	**(5º y 6º grados de primaria)**	**(1º y 2º grados de secundaria)**
Resuelve problemas de contexto real y contexto matemático, que requieren del establecimiento de relaciones y operaciones con números naturales y fracciones, e interpreta los resultados obtenidos, mostrando perseverancia en la búsqueda de soluciones.	Resuelve y formula, con autonomía y seguridad, problemas que requieren del establecimiento de relaciones entre números naturales, decimales y fracciones, y sus operaciones, argumentando los procesos empleados en su solución e interpretando los resultados obtenidos.	Resuelve problemas con números reales y polinomios; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático.

Fuente: Diseño Curricular Nacional de la EBR (Perú, 2009, pp. 189 y 318)

Conocimientos relacionados a los números racionales

Con el propósito de poseer una visión global acerca del desarrollo de los contenidos ligados a los números racionales detallaremos a continuación cómo estos son distribuidos a través de los diversos grados de estudios de la EBR.

En el tercer grado de primaria, se propone el estudio a partir de fracciones de conjunto de objetos y de cantidades continuas, fracciones usuales: ½, ¼ y 1/8, fracciones homogéneas, relación de orden en fracciones homogéneas, fracciones equivalentes, y adición y sustracción de fracciones homogéneas.

En el cuarto grado de primaria se considera el estudio de los números decimales con aproximación a la décima; fracciones equivalentes; fracciones heterogéneas; adición y sustracción de números decimales con una cifra decimal; adición y sustracción de fracciones heterogéneas con denominadores 2, 4, 5, 8 y 10; adición y sustracción de fracciones y; números decimales.

En el quinto grado de primaria se aborda el número decimal hasta el orden de la centésima, expresión decimal de una fracción, ordenamiento de números decimales exactos hasta los centésimos y fracciones con denominadores 10 y 100, operaciones combinadas con resultado decimal, división de números decimales hasta la centésima, operaciones combinadas con números naturales y decimales, adición y sustracción de fracciones heterogéneas y, fracción de una fracción.

En el sexto grado de primaria se propone el estudio del valor posicional de los números de números decimales; relación de orden entre números naturales, fracciones y decimales exactos; números decimales en la recta numérica; adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones; operaciones combinadas con números naturales fracciones y decimales.

En el primer grado de secundaria se plantea el estudio de la representación, orden y operaciones con números racionales; operaciones con fracciones y decimales.

También, en el segundo grado de secundaria se propone el estudio de la representación, orden, densidad y operaciones con números racionales.

2.2.3 El número racional en los Mapas de Progreso

En nuestro país, el desarrollo de las competencias matemáticas se estandariza mediante metas de aprendizaje que se esperan que todos los estudiantes del país alcancen a lo largo de su escolaridad básica. De esta manera se busca asegurar que todos los niños, niñas y jóvenes del país, de cualquier contexto socioeconómico o cultural, logren los aprendizajes fundamentales.

Tabla 2. Competencias según los Mapas de Progreso

NIVEL	COMPETENCIA
IV CICLO (3° y 4° de primaria)	Clasifica objetos en grupos y subgrupos, los reagrupa empleando un criterio distinto y explica la relación entre ellos. Representa las partes de un todo y una situación de reparto mediante fracciones. Compara y establece equivalencias entre números naturales hasta la unidad de millar y entre fracciones usuales. Identifica la equivalencia de números de hasta cuatro dígitos en centenas, decenas y unidades. Estima, compara y mide la masa de objetos empleando unidades convencionales como el kilogramo, el gramo y las propias de su comunidad, y la duración de eventos usando unidades convencionales como años, meses, hora, media hora o cuarto de hora. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de agregar, quitar, igualar o comparar dos cantidades, o de repetir una cantidad para aumentarla o repartirla en partes iguales; empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona la división y la multiplicación como procesos inversos y a la división como un reparto en partes iguales.
V CICLO (5° y 6° de primaria)	Representa cantidades discretas o continuas mediante fracciones, decimales y porcentaje. Compara y establece equivalencias entre números naturales, fracciones, decimales y porcentajes más usuales. Identifica la equivalencia de números de hasta seis dígitos en centenas, decenas y unidades de millar, y de unidades en décimos y centésimos. Estima, compara y mide la masa de objetos en miligramos; la duración de eventos en minutos y segundos; y la temperatura en grados Celsius. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a acciones de comparar e igualar dos cantidades, combinar los elementos de dos conjuntos o relacionar magnitudes directamente proporcionales, empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Identifica la potencia como un producto de factores iguales.
VI CICLO (1° y 2° de secundaria)	Representa cantidades discretas o continuas mediante números enteros y racionales en su expresión fraccionaria y decimal en diversas situaciones. Compara y establece equivalencias entre números enteros, racionales y porcentajes; relaciona los órdenes del sistema de numeración decimal con potencias de base diez. Selecciona unidades convencionales e instrumentos apropiados para describir y comparar la masa de objetos en toneladas o la duración de un evento en décadas y siglos. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a determinar cuántas veces una cantidad contiene o está contenida en otra, determinar aumentos o descuentos porcentuales sucesivos, relacionar magnitudes directa o inversamente proporcionales; empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona la potenciación y radicación como procesos inversos.

Fuente: Mapas de progreso del aprendizaje (Perú, 2013, p. 9)

Según esta perspectiva, el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (Perú, 2013), bajo la consideración que el aprendizaje es un proceso continuo, que se desarrolla a lo largo de la vida, en el Mapa de Números y Operaciones propone el desarrollo del razonamiento cuantitativo mediante la aplicación de variadas estrategias de cálculo y estimación. También realiza la descripción del desarrollo de la siguiente competencia “comprender y usar los números, sus diferentes representaciones y su sentido de magnitud; comprender el significado de las operaciones en cada conjunto numérico; usar dicha comprensión en diversas formas para realizar juicios matemáticos; y desarrollar estrategias útiles en diversas situaciones” (p. 8). Las competencias relacionadas a nuestro estudio, las detallamos en la tabla 2.

Indicadores de desempeño según el Mapa de Progreso de Números y Operaciones

Para que el desarrollo progresivo de las competencias sea evidente, el Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica (Perú, 2013), propone diversos ejemplos de indicadores de desempeño para cada uno de los niveles del Mapa de Progreso de Números y Operaciones:

IV Ciclo (3º y 4º grados de primaria)

- Representa cantidades continuas o discretas con fracciones, empleando material concreto, gráfico y simbólico.

A continuación presentamos dos ejemplos en las que se detallan actividades referentes a cantidades discretas y continuas, los cuales coadyuvan al desempeño formulado líneas arriba.

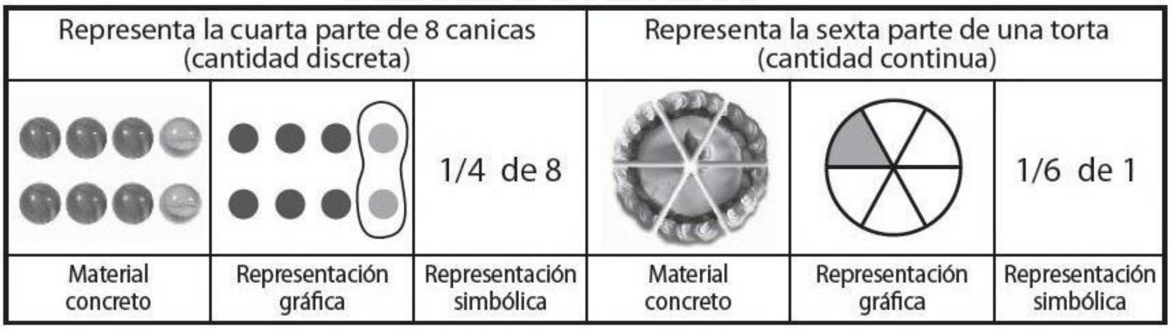


Figura 3. Cantidades continuas o discretas con fracciones
Fuente: Mapas de progreso del aprendizaje (Perú, 2013, p. 18)

V Ciclo (5º y 6º grados de primaria)

- Establece equivalencias entre decimales, fracciones y porcentaje con soporte concreto, gráfico y simbólico.

Las siguientes actividades referentes a cantidades discretas y continuas, coadyuvan al desempeño respectivo las detallamos en los siguientes ejemplos:

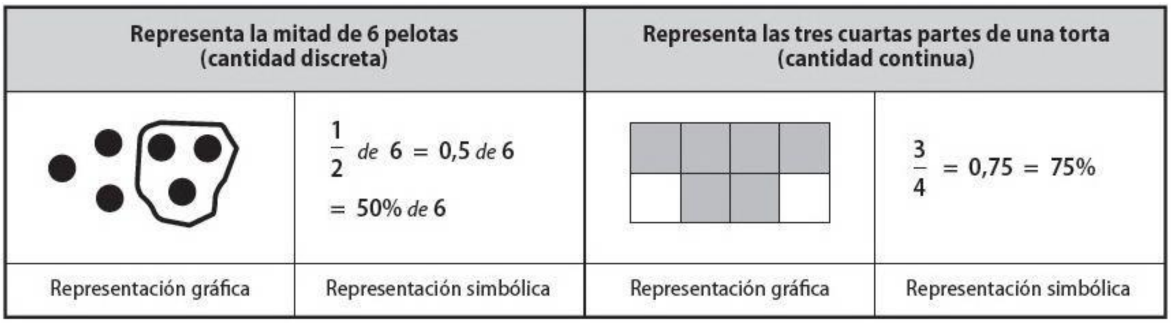


Figura 4. Equivalencias entre decimales, fracciones y porcentajes.
Fuente: Mapas de progreso del aprendizaje (Perú, 2013, p. 22)

- Representa los significados de la fracción como operador, medida o razón.

Por ejemplo, las siguientes tareas se relacionan de manera con el desempeño enunciado en el párrafo anterior.

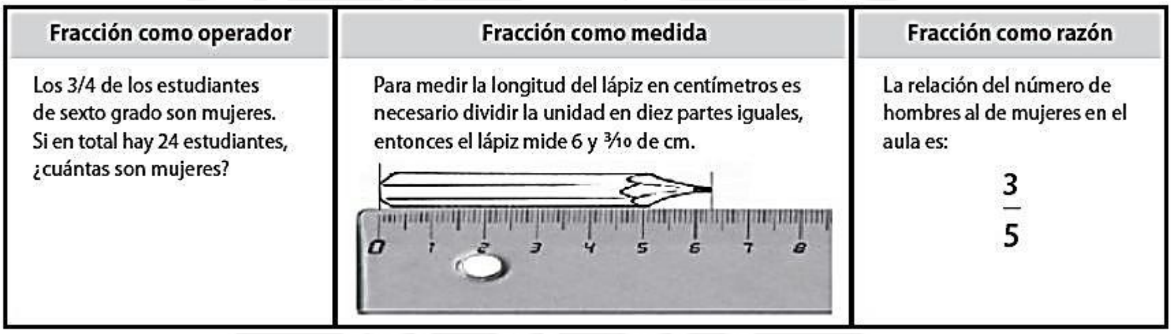


Figura 5. Significados de la fracción como operador, medida o razón
Fuente: Mapas de progreso del aprendizaje (Perú, 2013, p. 22)

VI Ciclo (1º y 2º grados de secundaria)

- Usa equivalencias entre números enteros, racionales y porcentajes en situaciones contextualizadas. Ejemplo: Pedro gana S/ 1200, gasta el 40% en alimentación y el 1/10 en movilidad, ¿qué parte de su sueldo le queda? (Perú, 2013, p. 26).
- Resuelve problemas multiplicativos en los que requiere encontrar la cantidad comparada o el referente de comparación y explica la elección de su estrategia sustentando su respuesta, según las condiciones del problema (multiplicativos de comparación). Ejemplo: Pedro tiene 72,85 nuevos soles, que son 3 veces más dinero que el que tiene Juan. ¿Cuánto dinero tiene Juan? (Perú, 2013, p. 26).

2.2.4 El número racional en las Rutas de Aprendizaje

En el contexto de la educación peruana se han implementado las Rutas de Aprendizaje que en el presente año han sido actualizadas en su versión 2015. Estos recursos de apoyo a la labor docente son orientaciones pedagógicas y didácticas para una enseñanza efectiva de las competencias del área de matemática.

En las Rutas del Aprendizaje VI Ciclo (Perú, 2015c), los números racionales se estructuran en la **competencia 1: actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad**, el cual "implica desarrollar modelos de solución numérica, comprendiendo el sentido numérico y de magnitud, la construcción del significado de las operaciones, así como la aplicación de diversas estrategias de cálculo y estimación al resolver un problema". (p. 19).

En las Rutas del Aprendizaje V Ciclo (Perú, 2015b), podemos distinguir la intención de promover aprendizajes que vinculados a la idea de cantidad, específicamente en los números racionales, lo cual implica:

- Conocer los múltiples usos que les damos a los números naturales, fracciones y decimales.
- Representar los números naturales, fracciones y decimales en sus variadas formas.
- Realizar procedimientos como conteo, cálculo y estimación de cantidades.
- Comprender las relaciones y las operaciones.
- Comprender el sistema de numeración decimal con los números naturales y decimales.
- Reconocer patrones numéricos en números de hasta seis cifras.
- Utilizar números para representar atributos medibles de objetos del mundo real.
- Comprender el significado de las operaciones con cantidades y magnitudes. (p.19)

Capacidades relacionadas al Razonamiento y Demostración, en las Rutas de Aprendizaje

Asimismo, en las Rutas de Aprendizaje de toda la EBR se precisan cuatro capacidades para la mencionada competencia "actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad" tal como se muestra en la figura 5.

Es en este contexto según los propósitos de nuestro estudio, es necesario tener una mirada puntual en las Rutas del Aprendizaje, respecto a la capacidad **razona y argumenta generando ideas matemáticas** la cual se relaciona con el marco analítico de *Razonamiento y Demostración*. Esta capacidad busca que el estudiante "explique sus argumentos al plantear supuestos, conjeturas e hipótesis, observe los fenómenos y establezca diferentes relaciones matemáticas, elabore conclusiones a partir de sus experiencias, y defienda sus argumentos y refute otros, sobre la base de sus conclusiones" (Perú, 2015b, p. 29).

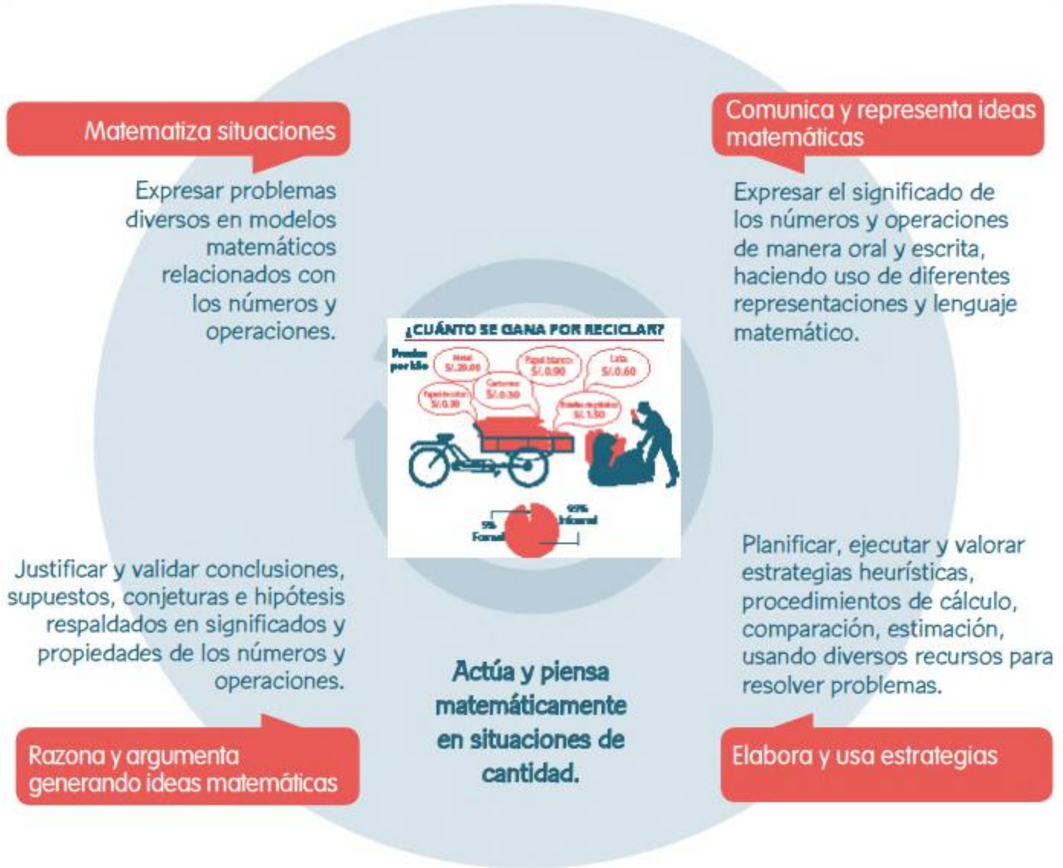


Figura 6. Competencia: actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad
Fuente: Rutas del aprendizaje VI Ciclo (Perú, 2015c, p. 20)

Indicadores de desempeño en números racionales según las Rutas de Aprendizaje

El Ministerio de Educación del Perú en su permanente afán de innovación curricular mediante la R.M. Nº 199-2015-MINEDU modifica parcialmente el DCN en lo referente a las capacidades y competencias del área de matemática, en la que se incorporan indicadores de desempeño. Esta norma establece el marco legal y es así que en el presente año se inicia su implementación plasmándose en las Rutas de Aprendizaje.

De acuerdo a estas circunstancias, surge la necesidad de analizar los indicadores de desempeño de la capacidad **razona y argumenta generando ideas matemáticas**, el cual se relaciona con nuestro estudio y apertura espacios para proponer tareas que se adecuen al desarrollo de esta capacidad.

En las Rutas del Aprendizaje IV Ciclo, Perú (2015a) se muestran indicadores de desempeño, correspondiente al tercer y cuarto grados de primaria. De ellas mostramos en la tabla 3 aquellos que se relacionan con los números racionales y a la capacidad “razona y argumenta generando ideas matemáticas”.

Tabla 3. Indicadores de desempeño para el 3° y 4° grados de primaria

Tercer grado de primaria	Cuarto grado de primaria
- Explica a través de ejemplos con apoyo concreto o gráfico, los significados sobre las operaciones de adición y sustracción y lo que comprende sobre sus propiedades. - Explica procedimientos o resultados propios o de otros, con apoyo concreto o gráfico.	- Realiza conjeturas a partir de más de un caso experimentado u observado sobre las relaciones de orden, comparación y equivalencia entre fracciones usuales y los diferentes tipos de fracciones (fracción propia, impropia, homogénea y heterogénea). - Explica a través de ejemplos las diferentes formas de representar fracciones usuales y fracciones equivalentes. - Explica a través de ejemplos con apoyo concreto o gráfico, los significados sobre las operaciones de adición y sustracción de fracciones. - Explica sus procedimientos y resultados en la solución de problemas.

Fuente: Rutas del aprendizaje IV Ciclo (Perú, 2015a, p. 38)

Asimismo, en las Rutas del Aprendizaje V Ciclo, Perú (2015b) se especifican los indicadores de desempeño, correspondiente al quinto y sexto grados de primaria. Las que se relacionan con los números racionales y a la capacidad “razona y argumenta generando ideas matemáticas”, las mostramos en la tabla 4.

Tabla 4. Indicadores de desempeño para el 5° y 6° grados de primaria

Quinto grado de primaria	Sexto grado de primaria
- Establece conjeturas sobre las relaciones de orden, comparación y equivalencia entre fracciones y decimales hasta el centésimo. - Explica a través de ejemplos y contraejemplos las diferentes formas de representar fracciones, fracciones decimales y fracciones equivalentes. - Establece diferencias entre fracciones propias e impropias, heterogéneas y homogéneas. - Explica a través de ejemplos con apoyo concreto, gráfico o simbólico, los significados sobre las operaciones de adición y sustracción con decimales. - Justifica y defiende sus argumentos o conjeturas, usando ejemplos o contraejemplos. - Explica sus procedimientos y resultados.	- Establece conjeturas sobre las relaciones de orden, comparación y equivalencia entre fracciones, fracción decimal y decimales hasta el milésimo. - Explica a través de ejemplos y contraejemplos las diferentes formas de representar un número decimal según su valor posicional. - Justifica y defiende sus argumentos o conjeturas, usando ejemplos o contraejemplos.

Fuente: Rutas del aprendizaje V Ciclo (Perú, 2015b, p. 41)

Del mismo modo, de los indicadores de desempeño establecidos para el 1° y 2° grados de secundaria en las Rutas del Aprendizaje VI Ciclo, Perú (2015c), mostramos en la tabla 5, aquellos relacionados a los números racionales y a la capacidad “razona y argumenta generando ideas matemáticas.”

Tabla 5. Indicadores de desempeño para el 1° y 2° grados de secundaria

Primer grado de secundaria	Segundo grado de secundaria
- Justifica procedimientos de aproximación en números decimales por exceso, defecto o redondeo. - Justifica que al multiplicar el numerador y denominador de una fracción por un número siempre se obtiene una fracción equivalente. - Justifica a través de ejemplos que $a{:}b = a/b = a \times 1/b$; $a/b = n \times a/n \times b$ (siendo a y b números naturales, con $n \neq 0$). - Identifica diferencias y errores en una argumentación.	- Propone conjeturas para reconocer la teoría de exponentes con números fraccionarios. - Comprueba a partir de ejemplos las operaciones con potencia de base entera, racional y exponente entero. - Propone conjeturas referidas a la noción de densidad, propiedades y relaciones de orden en Q. - Justifica que dos números racionales son simétricos cuando tienen el mismo valor absoluto. - Justifica cuando un número racional en su expresión fraccionaria es mayor que otro. - Identifica diferencias y errores en una argumentación.

Fuente: Rutas del aprendizaje VI Ciclo (Perú, 2015c, p. 39)

Todos estos aspectos desarrollados, comentados y ejemplificados en el contexto de la educación peruana se tornan relevantes para el análisis de las tareas matemáticas puesto que nos ayudan a ubicarnos en el contexto de la EBR del Perú y en la perspectiva del marco teórico de *Razonamiento y Demostración*, cuyos aspectos detallamos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo presentamos los parámetros conceptuales referentes al *Razonamiento y Demostración* en las matemáticas escolares, los cuales son pilares fundamentales para la ejecución objetiva de los análisis correspondientes al abordar las tareas matemáticas presentes en los libros de textos de matemática del 1° y 2° grados de secundaria de la EBR.

3.1. Razonamiento y demostración en las matemáticas escolares

Cuando proponemos a nuestros estudiantes el tratamiento de tareas matemáticas, muchas veces nos preguntamos ¿cómo nos damos cuenta si en el desarrollo de las mismas ellos están razonando o no? Es decir ¿cuándo los estudiantes usan su razonamiento?

Al respecto, Bieda, Ji, Drwencke y Picard (2014) afirman que:

> Students use reasoning when they engage in mathematical argumentation, a process that involves making and justifying mathematical claims. Proof, a specialized form of argumentation, is a process to show that a claim is always true (or false), governed by disciplinary norms establishing the modes of reasoning and representational forms are appropriate for valid proof. (p. 72)
>
> [Los estudiantes usan su razonamiento cuando ellos se involucran en argumentación matemática, un proceso que involucra plantear y justificar afirmaciones matemáticas. La demostración, una forma especializada de argumentación, es un proceso que muestra que una afirmación es siempre verdadera (o falsa), regida por normas disciplinarias estableciendo modos de razonamiento y formas de representación que son apropiadas para una demostración válida] (traducción nuestra).

Por lo anterior notamos que el *Razonamiento y Demostración* están íntimamente ligados, puesto que los mencionados procesos se relacionan entre sí. Sin embargo, una realidad coyuntural es que en la comunidad de educadores matemáticos aún no hay consenso en la conceptualización de demostración al nivel de las matemáticas escolares.

Con el propósito de sentar bases sólidas para esta línea de investigación en *Educación Matemática*, Stylianides (2007) propone una conceptualización para el nivel en cuestión, que en la actualidad es frecuentemente citada en investigaciones en este campo.

> Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:
>
> It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;
>
> It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and

> It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community (p. 291).
>
> [Demostración es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática, con las siguientes características:
>
> Usa afirmaciones aceptadas por la comunidad de la clase (conjunto de enunciados aceptados) que son verdaderas y que están disponibles sin mayor justificación;
>
> Emplea formas de razonamiento (modos de argumentación) que son válidas y conocidas por, o dentro del alcance conceptual de la comunidad de la clase; y
>
> Es comunicada con formas de expresión (modos de representación de argumentos) que son apropiadas y conocidas por, o dentro del alcance conceptual de la comunidad de la clase] (traducción nuestra).

Lo importante de esta definición de demostración es que se pone énfasis en los conocimientos que se manejan en el contexto de una clase de matemática en un determinado instante para precisar si un argumento califica o no como una demostración, y que además es compatible con lo que se entiende por demostración al nivel de la comunidad matemática (Stylinanides, 2007, p. 291). En la tabla 6, mostramos algunos ejemplos relacionados a los componentes de la demostración los cuales nos brindan un mayor detalle de esta conceptualización.

Tabla 6. Ejemplos de los tres componentes de un argumento matemático

Componente de un argumento	**Ejemplos**
Conjunto de afirmaciones aceptadas	Definiciones, axiomas, teoremas, etc.
Modos de argumentación	Aplicación de reglas lógicas de inferencia (tales como *modus ponens* y *modus tollens*), uso de definiciones para obtener afirmaciones generales, enumeración sistemática de todos los casos para que una afirmación es simplificada (dado que sus números son finitos), construcción de contraejemplos, desarrollo de un razonamiento que muestre que la aceptación de una afirmación conduce a una contradicción, etc.
Modos de representación de argumentos	Lingüística (por ejemplo, el lenguaje oral), material, esquemático/gráfico, tabular, simbólico/algebraico, etc.

Fuente: Stylianides, (2007, p. 292) (traducción nuestra)

A partir de esta conceptualización de demostración, a nivel escolar, Stylianides (2008) presenta una conceptualización de *Razonamiento y Demostración*. El autor define al *Razonamiento y Demostración* como “la actividad general que comprende cuatro actividades” (p. 9), que son “identificar patrones”, “plantear conjeturas”, “proporcionar argumentos que no califican como demostración”, y “proporcionar demostraciones”, las que como explica el autor, hacen parte del proceso de dar sentido y establecer conocimiento matemático.

Gabriel Stylianides además considera las dos primeras actividades como una gran actividad a la que él llama “plantear generalizaciones matemáticas” y las dos últimas como “proporcionar fundamento a afirmaciones matemáticas”.

Stylianides (2008) incluye tres componentes: matemática, psicológica y pedagógica para el análisis del *Razonamiento y Demostración* en las matemáticas escolares. Sin embargo, de acuerdo a la naturaleza de nuestro estudio, el que se caracteriza por el análisis de libros de texto, sin considerar tareas a ser trabajadas en el aula en la que se dan interacciones entre el docente y los estudiantes, enfocamos nuestras consideraciones únicamente en el componente matemático. Bajo esta perspectiva, como expresa el autor, “the observer (or examiner) of the activity (e.g., classroom activity or activity described in textbooks) is considered to be a mathematically proficient person (e.g., the researcher or the teacher) who analyzes the given activity using mathematical considerations” (p. 10) [el observador (o examinador) de la actividad (por ejemplo, una actividad de clase o una actividad descrita en libros de texto) es considerada como una persona competente matemáticamente (por ejemplo, el investigador o el profesor) quien analiza la actividad dada usando consideraciones matemáticas] (traducción nuestra).

Tabla 7. Actividades de *Razonamiento y Demostración*

	Razonamiento y Demostración			
	Plantear generalizaciones matemáticas		Dar fundamento a afirmaciones matemáticas	
	Identificar un patrón	Plantear una conjetura	Proporcionar un argumento que no califica como demostración	Proporcionar una demostración
Dimensión 1 Componentes y subcomponentes de *Razonamiento y Demostración*	• Patrón plausible • Patrón bien definido	• Conjetura	• Argumento empírico • Argumento Lógico	• Ejemplo genérico • *Demonstration*
Dimensión 2 Propósitos de los patrones, conjeturas y demostración	• Precursor de una conjetura • No precursor de una conjetura	• Precursor de una demostración • No precursor de una demostración		• Explicación • Verificación • Refutación • Generación de nuevo conocimiento

Fuente: Stylianides, (2009, p. 262) (traducción nuestra)

Esta conceptualización de *Razonamiento y Demostración* es enriquecida en Stylianides (2009), en el que podemos observar un panorama más completo de las actividades involucradas en *Razonamiento y Demostración* tal como mostramos en la tabla 7. Nosotros adoptamos este marco como parte de nuestro marco teórico, el que permitirá posteriormente el desarrollo de nuestros análisis.

A continuación describimos y ejemplificamos cada una de las componentes y subcomponentes del *Razonamiento y Demostración*, de acuerdo al autor.

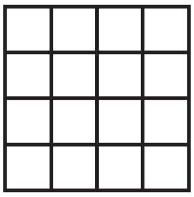
3.1.1. Planteamiento de generalizaciones matemáticas

Plantear generalizaciones matemáticas incluye dos procesos claves los cuales son: la identificación de patrones y el planteamiento de conjeturas.

a) Identificación de un patrón

Un patrón es definido como "a general mathematical relation that fits a given set of data" (p. 263) [una relación matemática general que satisface un conjunto de datos dados] (traducción nuestra). Esta noción va más allá de las áreas de contenido y de las formas de representación (algebraica, gráfica, etc.). En este marco se distinguen dos tipos de patrones: "patrón bien definido" y "patrón plausible".

En el caso de los **patrones bien definidos**, dada la información en una tarea, es posible matemáticamente para un experto proporcionar evidencias concluyentes para la selección de un patrón específico. Es decir, la relación que logre ser identificada será única, de esta manera no podrá ser posible identificar dos o más relaciones para el conjunto de datos proporcionado. Un ejemplo de tarea para identificar un patrón de este tipo es el "problema de los cuadrados" (Fig. 7). En este problema se pretende primero la exploración de algunos casos particulares con el fin de que se llegue a un generalización matemática en la forma de un patrón numérico (Stylianides & Stylianides, 2009a, p. 328).



1. Find the number of all different squares.
2. What if this was a 5-by-5 square?
3. What if this was a 60-by-60 square? How would you work to find how many different squares there would be? How would you make sure that you found them all?

Figura 7. Problema de los cuadrados.
Fuente: Stylianides & Stylianides (2009a, p. 328)

Primero, en esta tarea se pide hallar el número de todos los cuadrados diferentes que hay en la figura dada (el cuadrado de 4 por 4). Segundo, se plantea la pregunta: ¿qué ocurriría si la figura fuese un cuadrado de 5 por 5? Tercero, se pregunta: ¿qué pasaría si la figura fuese un cuadrado de 60 por 60? ¿Cómo harías para encontrar el número total de cuadrados que hay? ¿Cómo estás seguro de que encontraste todos los cuadrados posibles?

Para el caso del primer requerimiento, cuando la figura es el cuadrado de 4 por 4 mostrado en la figura, los estudiantes podrían hallar la respuesta contando simple y directamente el número de cuadrados, cumpliendo de esta manera con lo solicitado. Por otro lado, algún alumno podría sistematizar sus resultados como en el caso de una alumna, participante de la investigación, la que realiza un análisis de los casos previos al del cuadrado de 4 por 4, como se ve en la siguiente tabla:

Tabla 8. Problema de los cuadrados

Tamaño del cuadrado	Número de cuadrados
1 x 1	16
2 x 2	9
3 x 3	4
4 x 4	1
Total	30

Fuente: Stylianides & Stylianides (2009a, p. 334)

Para el caso del segundo requerimiento, cuando la figura es de 5 por 5 (Fig. 8), los estudiantes podrían contar también directamente, o también podrían estructurar sus respuestas sobre la base de lo mostrado en la tabla anterior.

En ambos casos, el número de cuadrados diferentes para el caso del segundo requerimiento es el mismo (55). Esto es 5^2 para cuadrados de 1 por 1, 4^2 para cuadrados de 2 por 2, 3^2 para cuadrados de 3 por 3, 2^2 para cuadrados de 4 por 4, 1^2 para el cuadrado grande de 5 por 5. O sea: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$

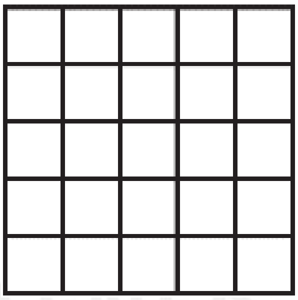


Figura 8. Problema de los cuadrados (5 x 5)

Notemos que en ambos casos, tanto el de la figura del cuadrado 4 por 4, como el de la figura del cuadrado 5 por 5, el estudiante puede resolver la tarea contando directamente los cuadrados, según sea el caso. Es decir, un estudiante puede resolver ambos requerimientos sin pensar siquiera en sistematizar su respuesta. Sin embargo, cuando se le plantea el tercer ítem, para el caso del cuadrado de 60 por 60, es donde se crea la necesidad de que el estudiante piense en sistematizar su análisis de solución, ya que de otro modo sería poco práctico contar todos los cuadrados para dicho caso. De aquí que, siguiendo el mismo razonamiento empleado para el desarrollo de la tarea, podemos decir que habrán $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 60^2$ cuadrados diferentes. De esta manera, el ejemplo mostrado nos proporciona el caso de una tarea que tiene el fin de identificar un patrón bien definido en el sentido de que no existirá otra relación posible que permita "encajar" los datos proporcionados en la tarea.

En el caso de los **patrones plausibles**, no es posible matemáticamente para un experto proporcionar evidencias concluyentes para la selección de un patrón específico sobre otros patrones que también se ajustan a los datos. Un ejemplo ilustrativo es el siguiente, en el que se observa la tabla 9 donde se muestra cómo están relacionadas dos variables y se pide encontrar un patrón en la tabla y usar dicho patrón para completar las entradas restantes.:

Tabla 9. Patrones plausibles

x	**1**	**2**	**3**	**4**
y	2	4		

Fuente: Stylianides (2009, p. 263)

El autor nota que, un patrón que se ajusta a los datos proporcionados se puede identificar de manera algebraica, y es $y = 2^x$. Empleando este patrón, completaríamos las entradas restantes de la tabla con 8 y 16 respectivamente. Asimismo, otro patrón (algebraico) que también se ajusta a los datos es $y = 2x$, de acuerdo al cual los números que completan las entradas de la tabla serían 6 y 8, respectivamente. Por otro lado, es posible identificar otra relación entre los datos proporcionados, que es, 2 si x es impar y 4 si x es par. Siguiendo este patrón, los números que completan las entradas faltantes de la tabla serían 2 y 4 respectivamente. Observemos que desde un punto de vista matemático las tres respuestas son correctas. Vemos que fue posible identificar más de un patrón para un mismo conjunto de datos, lo que nos muestra que estamos frente al caso de una tarea que tiene el propósito de identificar un patrón de tipo plausible ya que cuando el patrón no se puede determinar de forma única, estamos tratando con el caso de un patrón plausible.

b) Planteamiento de una conjetura

De acuerdo a Stylianides (2009, p. 264), una conjetura se define como "una hipótesis razonada acerca de una relación matemática general basada en evidencia incompleta". El término "hipótesis", explica el autor, indica un nivel de incertidumbre acerca de la veracidad de una conjetura y denota que se necesita argumentos para su aceptación o rechazo. Asimismo explica que, el término "razonada" destaca el carácter no arbitrario de la hipótesis.

Para mostrar un ejemplo de este tipo de actividad, tomamos como base el ejemplo mostrado en la Figura 6. En este caso, si al ejemplo indicado, le agregamos el requerimiento adicional siguiente:

¿Qué pasaría si la figura fuese un cuadrado de n por n? ¿Cuántos cuadrados diferentes habría en dicha figura?

La tarea que se origina entonces conlleva al estudiante a plantear una conjetura acerca de cuál podría ser la expresión general que permita determinar el número de cuadrados que habrían en la figura indicada. Una conjetura que podría plantearse, en base a los casos analizados y sistematizados en los casos particulares de los ítems previos, es: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ cuadrados diferentes. Lo cual representa una hipótesis, ya que su veracidad requiere de la respectiva validación a través de una demostración y es "razonada" en el sentido de que se basa en el análisis de los casos previos requeridos.

3.1.2. Producción de fundamentos para afirmaciones matemáticas

El proceso de producción de fundamentos para afirmaciones matemáticas engloba dos procesos específicos que incluye la producción de argumentos que no califican como demostración y la producción de demostraciones.

a) Producción de argumentos que no califican como demostración

De acuerdo al marco adoptado, los argumentos que no califican como demostración matemática pueden ser de dos tipos: argumentos empíricos y argumentos lógicos.

Un **argumento empírico** es un “argument that purports to show the truth of a mathematical claim by validating the claim in a proper subset of all the possible cases covered by the claim” (p. 266) [argumento que pretende mostrar la veracidad de una afirmación matemática mediante la validación de la afirmación en un subconjunto propio de todos los posibles casos involucrados en la afirmación] (traducción nuestra).

Por ejemplo, en Stylianides & Stylianides (2009b, p. 247) se presenta el siguiente argumento para la propiedad “Si se multiplica un número impar por 3 y le sumamos 3, se obtiene un múltiplo de 6”.

1(3) + 3 = **6**;

3(3) + 3 = **12**;

5(3) + 3 = **18**;

7(3) + 3 = **24**; …

El cual es un argumento empírico, y por tanto un argumento no válido (Stylianides 2014, p. 66), puesto que se trata de justificar la propiedad a través de ejemplos particulares que no son todos los casos involucrados en la propiedad dada.

Por otro lado, los **argumentos lógicos** son argumentos válidos a favor o en contra de afirmaciones matemáticas, que no califican como demostraciones. Concretamente, un argumento cuenta como un argumento lógico, en lugar de contar como una demostración, si no hace referencia explícita a las verdades aceptadas que utiliza (en el contexto de una comunidad particular donde estas verdades pueden ser considerados como verdades claves), o si utiliza afirmaciones que no pertenecen al conjunto de verdades aceptadas de una comunidad particular (en este caso el argumento es incompleto porque omite pasos necesarios). Por ejemplo, de acuerdo a Stylianides (2009), el argumento (Fig. 9) para la afirmación “La suma de dos números naturales impares consecutivos es un múltiplo de 4”, en el contexto de una comunidad de clase de primaria donde los estudiantes acaban de ver las definiciones de números impares y múltiplos de 4, calificaría como argumento lógico en el caso que no se mostrara, de manera gráfica, las definiciones de “impar” y “múltiplo de 4”, debido a que no se haría referencia explícita a las definiciones que se emplean.

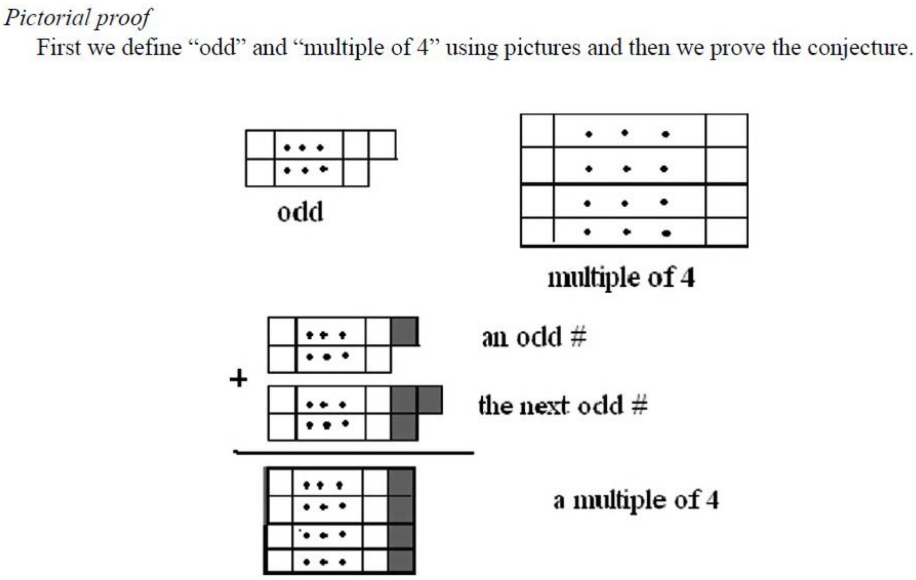


Figura 9. Demostración gráfica
Fuente: Stylianides (2009, p. 266)

Otro ejemplo de argumento lógico dado en Stylianides (2009) es aquel en el que se pretende demostrar el mismo resultado anterior y que con ese fin un estudiante emplea la propiedad: “La suma de dos números naturales pares consecutivos es un múltiplo de 4, con residuo 2”, la cual no pertenece al conjunto de verdades aceptadas previamente por la comunidad de la clase del estudiante. Este argumento se presenta de la siguiente manera: “puedo conseguir dos números naturales impares consecutivos restando uno de cada uno de dos números naturales pares consecutivos. Por lo tanto, (impar) + (impar consecutivo) = (par - 1) + (par consecutivo - 1) = (par + par consecutivo) - 2 = (múltiplo de 4 + 2) – 2 = múltiplo de 4”, y califica como argumento lógico por las razones ya expuestas.

b) Producción de demostraciones

Una **demostración** es definida por Stylianides (2009) como “a valid argument based on accepted truths for or against a mathematical claim that makes explicit reference to ‘key’ accepted truths that it uses” (p. 265) [un argumento válido basado en verdades aceptadas a favor o en contra de una afirmación matemática que hace referencia explícita a verdades “claves” aceptadas que utiliza] (traducción nuestra). El término “argumento”, explica el autor, hace referencia a una secuencia conectada de afirmaciones. El término “válido” indica que estas afirmaciones están conectadas por medio de reglas correctas de inferencia (*modus ponens*, *modus tollens*, etc.) y este término debe entenderse en el contexto de las consideraciones actuales de la matemática. El término “verdades aceptadas” es usado ampliamente para incluir axiomas, teoremas, definiciones, y afirmaciones que una comunidad particular puede asumir como compartida en un determinado momento. De acuerdo al autor, la noción de demostración aquí considerada es compatible con la definición que hemos adoptado de Stylianides (2007). Por esta razón no tendremos conflictos cuando hagamos referencia a alguna de ellas en nuestros análisis.

En este marco se distinguen dos tipos de argumentos que califican como demostraciones: ejemplo genérico y *demonstration*. Observemos que en este trabajo decidimos emplear el término “*demonstration*” tal y como es presentado en su idioma original por el autor debido a que su traducción directa en nuestro idioma sería “demostraciones”; sin embargo, con el fin de no repetir estos términos tanto para la categoría (producción de “demostraciones”), así como para la subcategoría a la que se pretende hacer referencia (“*demonstration*”) es que optamos por usar la palabra tal y como es presentada por el autor.

Un ejemplo genérico definido por Stylianides (2009) es “a proof that uses a particular case seen as representative of the general case” (p. 265) [una demostración que emplea un caso particular considerado como representativo del caso general] (traducción nuestra). El autor manifiesta que los argumentos de este tipo son importantes porque proveen a los estudiantes de herramientas poderosas que están a su alcance para producir demostraciones matemáticas incluso en el caso de alumnos muy jóvenes que podrían no tener acceso a un lenguaje matemático que les permita expresar sus demostraciones de manera más sofisticada. Un ejemplo para este tipo de argumentos es el argumento de Betsy (Stylianides 2007, p. 310) a la conjetura a la cual había llegado su grupo de trabajo: “Existen infinitos enunciados numéricos para 10”. El siguiente fragmento resume las ideas principales del argumento de la alumna: “Si tomo un número, digamos 200, y luego lo resto de sí mismo, obtengo 0. Luego, si le sumo 10 a 0, obtengo 10.” El cual es claramente un argumento genérico, es decir, un argumento general ilustrado en un caso particular visto como un caso representativo.

Por otro lado, una ***demonstration*** definida por Stylianides (2009) es una “proof that does not rely on the ‘representativeness’ of a particular case. Valid arguments by counterexample, contradiction, reductio ad absurdum, mathematical induction, contraposition, and exhaustion are examples of demonstrations” (p. 265) [demostración que no depende de la "representatividad" de un caso particular. Los argumentos válidos por contraejemplo, contradicción, reducción al absurdo, inducción matemática, contraposición, y exhaución son ejemplos de *demonstrations*] (traducción nuestra). Por ejemplo, para la afirmación "La suma de dos números naturales impares consecutivos es un múltiplo de 4", un argumento que califica como *demonstration* es la forma algebraica que puede ser desarrollada de la siguiente manera: Los números naturales impares son números de la forma $2n+1$, donde n es un número natural. Los múltiplos de 4 son los números de la forma $4k$, donde k es un entero. La suma de dos números impares consecutivos naturales $= (2m + 1) + (2m + 1 + 2) = 4m + 4 = 4.(m + 1) = 4n$, donde m es un número natural y n es un entero. Por lo tanto, la suma de dos números impares consecutivos naturales es un múltiplo de 4.

El argumento gráfico mostrado en la figura 10 constituye una demostración para la afirmación que "la suma de los primeros n números enteros positivos, es $\frac{n(n+1)}{2}$", este argumento gráfico es una *demonstration*.

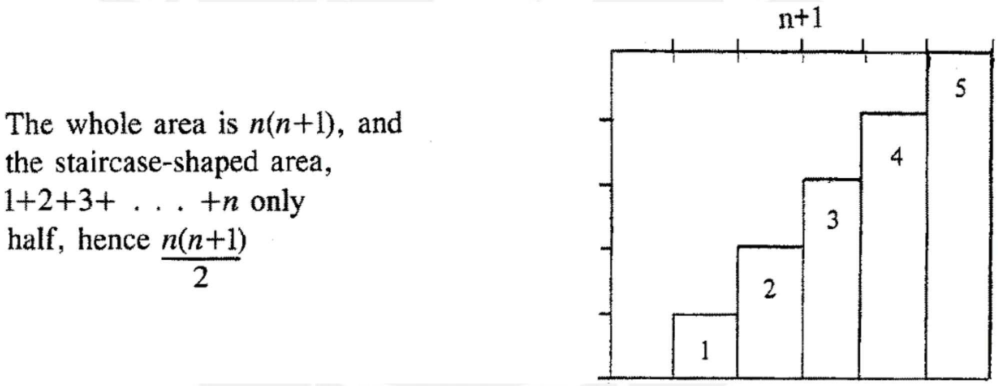


Figura 10. Demostración gráfica de la suma de los $\boldsymbol{n}$ primeros números enteros positivos.
Fuente: Hanna (1990, p. 11)

Un ejemplo adicional de *demonstration*, esta vez empleando como forma de representación el lenguaje cotidiano, para la afirmación: "Si se multiplica cualquier número impar por 3 y luego le sumamos 3, se obtiene un múltiplo de 6", es el argumento de María presentado en Stylianides & Stylianides (2009b). El argumento es como sigue:

> Definitions: A whole number is odd if you can divide it into 2 equal groups of whole numbers with one left over. A whole number is a multiple of 6 if you can divide it into six equal groups with none left over. When an odd number (2 equal groups+1) is multiplied by 3, you end up with 6 equal groups that are of equal size +3. When 3 is added to this we can distribute these 6 to each of the 6 equal groups that are now each 1 bigger than the previous groups. Thus, the product of any odd number and 3, plus 3 makes 6 equal groups with none left over or a multiple of 6. (p. 247)

> [Definiciones: Un número natural es impar si lo puedes dividir en 2 grupos iguales de números naturales y sobra uno. Un número natural es un múltiplo de 6 si puedes dividirlo en seis grupos iguales con ninguno de sobra. Cuando un número impar (2 grupos iguales + 1) es multiplicado por 3, terminas con 6 grupos iguales que son del mismo tamaño + 3. Cuando agregas 3 a esto podemos distribuir estos 6 a cada uno de los 6 grupos iguales que ahora son cada uno 1 más grande que los grupos anteriores. Por lo tanto, el producto de cualquier número impar y 3, más 3 hacen 6 grupos iguales con ninguno de sobra o un múltiplo de 6] (traducción nuestra).

Observamos que los tres ejemplos dados usan diferentes formas de representación; no obstante, los tres cumplen con los requerimientos para ser demostraciones, de acuerdo a nuestro marco teórico.

3.2. Propósitos de las actividades involucradas en razonamiento y demostración

A continuación, bajo los parámetros conceptuales desarrollados, detallaremos y ejemplificaremos respecto a los propósitos de las actividades ligadas al *Razonamiento y Demostración*.

3.2.1. Propósitos de los patrones

Respecto a los propósitos del patrón, Stylianides (2009) precisa que “a major role that patterns play in mathematics is to lead to the development of conjectures” (p. 267) [un rol importante que juegan los patrones es conducir a la generación de conjeturas] (traducción nuestra). En ese sentido el autor plantea que esto hace que se distinga entre los patrones que anteceden la generación de conjeturas (patrones precursores de conjeturas) o no (patrones no precursores de conjeturas). El autor además explica que un patrón tiene el propósito de no precursor de una conjetura cuando “not have the potential to be extended to a conjecture, or when the solver does not investigate/is not expected to investigate the pattern further to make a conjecture” (p. 268) [no tiene el potencial de ser extendido a una conjetura, o cuando la persona que resuelve el problema no investiga más sobre el patrón/no se espera que la persona investigue más sobre el patrón como para plantear una conjetura] (traducción nuestra).

Por ejemplo, si al mostrar la secuencia (Fig. 11) le preguntamos al estudiante ¿qué observas en las figuras? o le pedimos que exprese que está pasando ahí; y en respuesta a ello, el estudiante sólo se limita a describir exactamente lo que observa en la serie de figuras, decimos que el patrón tuvo el propósito de un no precursor de una conjetura. Pero si además le preguntásemos qué pasaría con la *n*-ésima figura, la pregunta serviría para que el estudiante investigue más allá de lo que observa, y sobre la base del patrón identificado, sería capaz de plantear una conjetura. Entonces, en este caso, la tarea tendría el propósito de identificar un patrón que además cumple el rol de precursor de una conjetura. Es en estas circunstancias que se hace necesaria la habilidad, creatividad y experiencia del profesor para conducir al estudiante para que ellos, de manera gradual, sean capaces de plantear conjeturas que posteriormente requerirán de una demostración matemática.

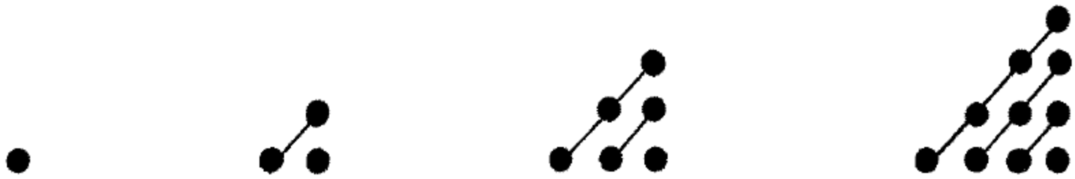


Figura 11. Secuencia gráfica para la suma de los primeros números enteros positivos.
Fuente: Hanna (1990, p. 11)

3.2.2. Propósitos de las conjeturas

En nuestro análisis anterior desde la perspectiva de Stylianides (2009) valoramos que “a major role that conjectures play in mathematics is to lead to the development of proofs” (p. 268) [un papel importante que juegan las conjeturas en las matemáticas es conducir al desarrollo de las demostraciones] (traducción nuestra). Esto da lugar a la distinción entre las conjeturas que anticipan la producción de demostraciones asociadas a estas conjeturas (conjeturas precursoras de una demostración) o no (conjeturas no precursoras de una demostración). El autor además señala que una conjetura puede servir al propósito de no precursor de una demostración cuando la persona que resuelve el problema no investiga más acerca de la conjetura, o no se espera que esta persona investigue más sobre ella, para producir una demostración, o también cuando la persona que resuelve el problema investiga la conjetura, pero desarrolla un argumento que no califican como demostración. Si el estudiante desarrolla un argumento que califica como demostración, entonces se dice que la conjetura sirvió al propósito de precursor de una demostración.

En el ejemplo anterior (Fig. 11), el cuarteto de figuras puede expresarse:

1; 1+2 = **3**; 1+2+3 = **6**; 1+2+3+4 = **10**

El argumento que califica como demostración se presenta en Hanna (1990) y puede estructurarse de la siguiente manera:

La distribución de los puntos forma triángulos rectángulos isósceles (tal como se puede ver en la Figura 11). Y, en la *n-ésima* figura habrán: $S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ puntos. Que es la suma de los n primeros números positivos.

Dos veces tal suma $S(n) + S(n)$ da un cuadrado que contiene n^2 puntos, y una columna adicional de n puntos (Fig. 12).

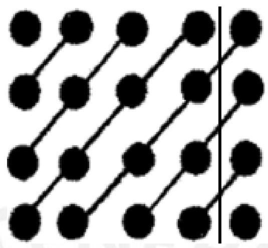


Figura 12. Triángulos rectángulos isósceles
Fuente: elaboración propia

Por lo tanto:

$2\,S(n) = n^2 + n$

De aquí que:

$S(n) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ que vendría a ser la suma de los n primeros enteros positivos.

3.2.3. Propósitos de la demostración

a) Verificación

Al indagar sobre los propósitos de la demostración podemos verificar el énfasis dado para el propósito de verificación debido a que tradicionalmente “la función de la demostración ha sido considerada exclusivamente en términos de verificación (convicción o justificación) de lo correcto de una proposición matemática” (De Villiers, 1993, p.3).

También, Knuth (2012) refiere respecto a este rol que:

> Not surprisingly, this is typically the role most students encounter during their school mathematics experiences. Students’ experiences with proof, however, often are limited to verifying the truth of statements that they know have been proven before and, in many cases, are intuitively obvious to them. (p. 64)
>
> [No es una sorpresa que este sea típicamente el rol que la mayoría de los estudiantes encuentran en sus experiencias matemáticas de la escuela. Experiencias de los estudiantes con la demostración, sin embargo, a menudo se limitan a verificar la veracidad de los enunciados que ellos saben que han sido probados antes y, en muchos casos, son intuitivamente obvios para ellos] (traducción nuestra).

Es en ese sentido que, Bell, 1976 y De Villiers, 1999, citados en Stylianides (2009) afirman que cuando una demostración establece la veracidad de una afirmación dada, ésta cumple el propósito de verificación. Corresponden al propósito de verificación de la demostración, según Sytianides (2009, p. 269), los métodos directos de demostración y las demostraciones por contradicción.

Un ejemplo esclarecedor del propósito de verificación de la demostración se da cuando nos piden demostrar que, si *n* es un entero y n^2 es par, entonces, *n* es par.

1º. Partimos de la suposición de que n no es par. Ello significa que n es impar y puede ser expresada como $n = 2k + 1$, donde k es entero. Luego, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. La última expresión es impar, es decir, n^2 es impar. Ello entra en contradicción con la hipótesis brindada (que es verdadera). Luego n^2 es par y es falso que *n* sea impar.

2º. Como "*n* es impar" es proposición falsa, entonces "*n* es par" proposición verdadera.

La tesis queda demostrada.

Otro ejemplo de demostración que verifica es la demostración por inducción matemática de que la suma de los *n* primeros números positivos es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

b) Explicación

Una demostración cumple el propósito de explicación cuando aporta el por qué una afirmación es verdadera o falsa. Es en este contexto que De Villiers (1993), aclara que:

> Así, en la mayoría de los casos en los que los resultados son intuitivamente evidentes por sí mismos, y/o están apoyados por evidencia cuasi-empírica convincente, la función de la demostración no es, ciertamente, la de verificación, sino más bien de explicación. No es cuestión de "asegurarse", sino de "explicar por qué". Desde luego, no todas las demostraciones son igualmente explicativas, así que es posible distinguir entre demostraciones que "verifican" y demostraciones que "explican". (p. 21)

Asimismo, en el contexto educativo es sumamente importante tomar en cuenta la aseveración de (Knuth, 2002) que cuando la demostración cumple el rol de explicación "students learn where statements come from or why they are true rather than accepting their truth as given (from some external source of authority)" (p. 21) [los estudiantes aprenden de dónde proceden los enunciados o por qué son verdaderos en lugar de aceptar su verdad ya dada (de alguna fuente externa de autoridad)] (traducción nuestra).

Desde nuestra perspectiva y en base a los conceptos precisados anteriormente, un ejemplo de demostración que explica es cuando se presenta el caso de la multiplicación de fracciones que es presentada por Lay (2009), quien refiere que para probar un algoritmo familiar, vamos a demostrar que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, cuya definición según Carranza (2015) se da mediante:

$$[(a, b)][(c, d)] = [(ac, bd)]$$

Para ello, utilizaremos la siguiente definición y propiedades:

Definición: Multiplicar por $\frac{a}{b}$ es lo mismo que multiplicar por a y dividir por b.

Propiedades:

1) Multiplicar y dividir conmutan entre sí. Esto quiere decir que, multiplicar un número por x y luego dividir por y es lo mismo que dividir por y y luego multiplicar por x. Por ejemplo, 12 dividido por 3 y multiplicado por 2 es los mismo que 12 multiplicado por 2 y luego dividido por 3.

   $2\left(\frac{12}{3}\right) = 2(4) = 8$ y $\frac{2.12}{3} = \frac{24}{3} = 8$

2) Dividir por x y luego dividir por y es lo mismo que dividir por su producto xy. Por ejemplo, 12 dividido por 2 y luego dividido por 3 es lo mismo que 12 dividido por su producto 6:

   $\frac{\frac{12}{2}}{3} = \frac{6}{3} = 2$ y $\frac{12}{2.3} = \frac{12}{6} = 2$

   Ahora, para la demostración de que:

   $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\left(\frac{c}{d}\right)}{b}$ Definición de multiplicación por $\frac{a}{b}$.

   $= \frac{\frac{ac}{b}}{d}$ Propiedad 1.

   $= \frac{ac}{bd}$ Propiedad 2.

Asimismo, el autor destaca que el uso de definiciones válidas como una base para demostrar cálculos algoritmos comunes y otras propiedades de los números es la esencia de las matemáticas y se debería destacar en el currículo escolar. Además recalca que no podemos esperar que profesores y estudiantes construyan pruebas válidas cuando les damos definiciones inadecuadas.

Otro caso de demostración matemática que juega el rol de explicación es por ejemplo la demostración dada en el apartado 3.2.2, para la suma de los n primeros enteros positivos.

c) Refutación

La refutación, según Stylianides (2009) se da “when it establishes the falseness of a given claim” (p. 269) [cuando se establece la falsedad de una afirmación dada] (traducción nuestra). El autor explica que una demostración generalmente ha sido definida como un argumento a favor de la verdad de una afirmación matemática, puesto que la refutación aún no ha sido identificada en la literatura como un propósito de la demostración independiente. Sin embargo, basado en este marco, una demostración puede también ser un argumento en contra de una afirmación.

Es en este contexto que la reducción al absurdo y la demostración por contraejemplo se relacionan al propósito de refutación y no pueden ser tomados como verificación. Un ejemplo de demostración que cumple este rol es la demostración por reducción al absurdo de la falsedad de la afirmación: “$\sqrt{2}$ es un número racional”. Esta versión es citada en Crespo (2005), presentada por Hardy y atribuida por él a los pitagóricos:

> “Un número racional es una fracción $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros; podemos suponer que a y b no tienen ningún factor común, ya que si lo tuvieran podríamos sacarlo. El decir que “$\sqrt{2}$ es un irracional” es meramente otra manera de decir que 2 no puede expresarse en la forma $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ y esto es lo mismo que decir que la ecuación:
>
> $a^2 = 2b^2$ (1)
>
> no puede satisfacerse para valores enteros de a y b que no tienen factor común.
>
> Este es un teorema de aritmética pura, que no requiere ningún conocimiento de los números irracionales, ni depende de ninguna teoría acerca de su naturaleza.
>
> Razonemos por reducción al absurdo; supongamos que (1) es cierta y siendo a y b enteros sin ningún factor común. De (1) resulta que a^2 es par (ya que $2b^2$ es divisible por 2), y por consiguiente que a es par (ya que el cuadrado de un número impar es siempre un número impar). Si a es par, entonces: $a = 2c$ para algún valor entero de c y por lo tanto $2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$
>
> o $b^2 = 2c^2$
>
> De aquí que b^2es par y por lo tanto por la misma razón que antes b es par. Es decir a y b son pares y por lo tanto tienen el factor común 2. Esto contradice nuestra hipótesis y por consiguiente es falsa” (Hardy, 1979, p.421)

El siguiente ejemplo se da en el contexto escolar, en el marco de la tesis de Vallejo (2012), en el que la profesora de aula tiene el propósito de introducir la noción de contraejemplo, para lo que plantea el siguiente enunciado a los alumnos con quienes desarrolla su investigación: “Todo número impar entre tres es una división exacta” (p. 74), y luego procede a preguntarles si esto es verdadero o falso, así como que justifiquen su respuesta. La profesora empieza reforzando los conceptos involucrados (lo que es número impar y división exacta en el contexto de los números naturales). Enseguida guía a los estudiantes para que, mediante un diálogo permanente, los propios estudiantes lleguen a afirmar que el enunciado es falso, y justifiquen su respuesta. La profesora induce a los alumnos a que planteen un caso que justifique la falsedad del enunciado, ante lo cual Sebastián propone el caso concreto de 7 por ser un número impar y porque al dividir dicho número entre 3, la división no es exacta. Posteriormente la profesora aprovecha la oportunidad para aclarar la noción de contraejemplo.

d) Generación de nuevo conocimiento

Al respecto Stylianides (2009) afirma que este propósito de la demostración se da "when it contributes to the development of new results" (p. 269) [cuando ésta contribuye al desarrollo de nuevos resultados] (traducción nuestra). El autor agrega que utiliza la expresión "nuevos resultados" para describir aquellos productos que personas, en una comunidad en particular, suman a sus conocimientos base como consecuencia de construir una demostración.

Al respecto, (Knuth, 2002) explica que "through their explorations, students generate conjectures and then attempt to verify the truth of the conjectures by producing deductive proofs. In this case, students are using proof as a means of creating new results." (p. 65) [mediante exploraciones, los estudiantes generan conjeturas y luego tratan de verificar la veracidad de las conjeturas al producir demostraciones deductivas. En este caso, los estudiantes están utilizando la demostración como un medio para crear nuevos resultados] (traducción nuestra).

Asimismo, Knuth (2002) añade que:

> In order for students to be autonomous in mathematics classrooms, they must be able to create their own knowledge through validating their own as well as their classmates' knowledge claims. Consequently, this role of proof enables students to become producers of knowledge rather than consumers of other's knowledge. (p. 81)
>
> [Para que los estudiantes sean autónomos en las aulas de matemática, deben ser capaces de crear su propio conocimiento a través de la validación de sus propias afirmaciones, así como las de sus compañeros. En consecuencia, este rol de la demostración permite que los estudiantes se conviertan en productores de conocimiento en lugar de consumidores del conocimiento de otros] (traducción nuestra).

Un ejemplo ilustrativo de este propósito de la demostración es presentada en Ordoñez (2014), en el que se pide a estudiantes de tercer grado de primaria que respondan, por escrito, las preguntas: "¿Todo número es divisible entre 1? ¿Por qué?" (p. 320). Es importante hacer notar que esta pregunta no se les había planteado previamente a los estudiantes, y que tampoco había sido discutida en clases anteriores, de tal manera que era la primera vez que los alumnos se enfrentaban a este problema. De las diversas respuestas, el argumento de Orlando

(Fig. 13) muestra que se trata de una afirmación verdadera para todos los casos involucrados. Además el estudiante emplea el símbolo “∞” con el propósito de representar un número cualquiera, el cual al ser dividido entre uno, da como cociente el mismo “número ∞”, y su residuo es cero. En ella, el estudiante pone énfasis al residuo cero, lo cual pone en evidencia la verificación del cumplimiento de la condición clave del concepto de divisibilidad dado en clase.

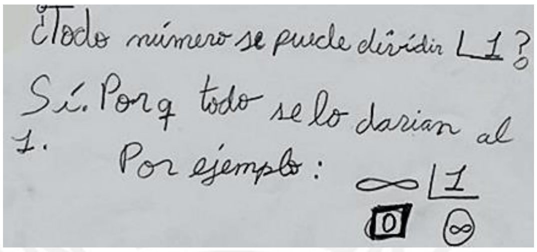


Figura 13. Respuesta de Orlando a la segunda pregunta
Fuente: Ordoñez (2014, p. 320)

En este contexto, este nuevo resultado es alcanzado por el estudiante gracias a la demostración que él ha planteado tomando como base la definición dada dentro de su comunidad de clase.

De esta manera hemos detallado cada uno de los procesos que engloba el *Razonamiento y Demostración*, los cuales incluso fueron clarificados con los ejemplos correspondientes. Enseguida, es nuestro propósito describir los aspectos metodológicos que guiaron esta investigación cuyo detalle presentamos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV: MARCO METODOLÓGICO

Nuestra investigación se enmarca en el enfoque cualitativo, porque nos permite registrar nuestras observaciones de manera detallada y libre, debido a que "(…) el proceso cualitativo no es lineal, sino iterativo o recurrente, las supuestas etapas en realidad son acciones para adentrarnos más en el problema de investigación y la tarea de recolectar y analizar datos es permanente". (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 362).

El método de nuestra investigación es el análisis de contenido, ya que nuestro propósito es analizar los libros de texto de matemática de 1° y 2° grado de secundaria y verificar si los procesos de *Razonamiento y Demostración* se desarrollan bajo la perspectiva de Styilianides (2009); puesto que el análisis de contenido es: "el análisis sistemático para resultar verificadas en el sentido de una confirmación o una invalidación" (Bardin, 2002, p. 22). Es decir confirmar o invalidar la existencia de los procesos de *Razonamiento y Demostración* en las tareas matemáticas objeto de nuestro estudio.

En esta sección, realizamos la descripción de aspectos generales de la muestra de los respectivos libros de texto analizados. Enseguida precisamos las perspectivas que guiarán nuestro análisis. Luego, delimitamos nuestra unidad de análisis, el cual se relaciona al marco teórico de nuestro estudio y, finalmente, describimos el procedimiento utilizado para llevar a cabo todo el proceso sistemático de la investigación.

4.1. Perspectivas tomadas para nuestro análisis

Para hacer que nuestro análisis coadyuve al logro de nuestros objetivos de investigación, fue necesario especificar los focos generales en la que estarán centradas nuestras observaciones. Para lograr este propósito nos hemos basado en los retos metodológicos propuestos por Stylianides (2014) quien considera que el análisis de un libro de texto se puede ejecutar desde cuatro perspectivas: perspectiva del estudiante, perspectiva matemática, perspectiva del profesor y perspectiva del autor del libro de texto.

Debido a que nuestro estudio se enfoca única y exclusivamente en el análisis de libros de texto, puesto que no hemos considerado la interacción docente, estudiante y libros de texto en actividades en aula, hemos elegido de manera puntual, sólo dos perspectivas: la perspectiva matemática y la perspectiva del autor del libro de texto.

Bajo la primera perspectiva nos planteamos: la tarea a analizar ¿qué habilidades de *Razonamiento y Demostración* nos permite desarrollar? Por otro lado, bajo la perspectiva del autor del libro de texto, nos planteamos: el autor del libro ¿cómo pretendía que la tarea sea implementada en el aula?, lo cual observamos en el manual para el docente del respectivo libro de texto.

4.2. Las tareas matemáticas como unidad de análisis

Con el propósito de precisar nuestra concepción sobre la tarea matemática, el cual debe expresar coherencia con la perspectiva de *Razonamiento y Demostración*, y los procesos del pensamiento matemático, nos remitimos a Stein, Grover y Henningsen (1996), quienes parten de la propuesta de que los estudiantes no deberían percibir las matemáticas como un sistema estático, limitado de hechos, conceptos y procedimientos a ser absorbidos, sino más bien, a decir de Romberg 1992 (citada en Stein et al., 1996) como un proceso dinámico de "recolección, descubrimiento y creación de conocimiento en el curso de alguna actividad que tenga un propósito".

Estas propuestas tienen la finalidad de exponer a los estudiantes a tareas realmente problemáticas, significativas y valiosas. Tareas que tengan la posibilidad de ser representadas en múltiples formas y que posean más de una estrategia de solución, asimismo que demanden en los estudiantes la comunicación y justificación de sus procedimientos y conocimientos.

Al respecto, Henningsen y Stein, (1997), precisan que una tarea matemática se define como una actividad de clase, cuyo objetivo es centrar la atención de los estudiantes en un concepto, idea o habilidad matemática en particular. En esta perspectiva establecen un marco del cual creemos que es necesario mostrar para poseer una visión general de la tarea matemática para así poder identificarlos en los libros de texto.

Este propósito es corroborado por Stylianides (2014):

> Thus, the Framework not only highlights the dynamic interaction between students and teachers as they work on tasks during classroom work, but also points to the important role that textbooks can play in contributing to or setting the stage for this work. (p. 64)
>
> [Por consiguiente, el marco no sólo resalta la interacción dinámica entre los estudiantes y profesores a medida que trabajan en las tareas durante el trabajo en el aula, sino también señala el importante rol que los libros de texto pueden desempeñar para contribuir o a preparar el escenario para este trabajo] (traducción nuestra).

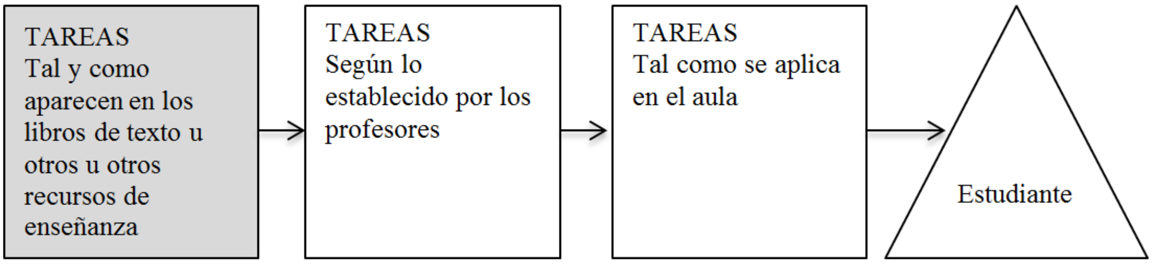


Figura 14. Marco conceptual de la tarea matemática
Fuente: Adaptado de Stylianides (2014, p. 64) (traducción nuestra)

Es en ese sentido es necesario recalcar, que nuestro estudio se enfoca básicamente en la tarea matemática representada en los materiales curriculares o de enseñanza, debido a que en los libros de texto se plasman tareas a ser implementadas en aula. Es por esta razón que en la figura 14 hemos sombreado exclusivamente el primer cuadro.

4.3. Procedimiento

Para nuestro estudio hemos considerado los libros de texto del 1º y 2º grado de secundaria distribuidos por el Ministerio de Educación, los cuales han sido elaborados bajo el marco del DCN del Perú, en razón de que en dichos textos se abordan los números racionales.

Sobre la base de las investigaciones realizadas en este contexto, las cuales están consideradas en los antecedentes nuestra investigación, hemos adoptado los procesos metodológicos respectivos, adaptándolos según las características de nuestro estudio. Es así que la presente investigación se circunscribió a los siguientes procesos:

Codificación de los libros de texto

Nuestro análisis ha sido enfocado en los manuales para el docente, aunque en éstas hay escaza información respecto a los componentes del *Razonamiento y Demostración*, pero si se especifican las soluciones para las tareas planteadas.

En esta sección, presentamos el análisis de los números racionales en la perspectiva de *Razonamiento y Demostración* inmersos en dos libros de texto de la EBR distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú, los cuales las hemos denominado por A y B, donde A: Perú, Ministerio de Educación (2012a), Matemática 1 Secundaria – Manual para el docente, Norma y B: Perú, Ministerio de Educación (2012b). 2 Secundaria – Manual para el docente, Norma.

Desde nuestra perspectiva, el análisis de los mencionados libros de texto es relevante puesto que dichos recursos impresos son de carácter oficial y obligatorio en la educación peruana en el marco del Proyecto Educativo Nacional al 2021, y abarcan el tratamiento de los números racionales en el nivel secundario de la EBR.

Ubicación de las tareas relacionadas a razonamiento y demostración

Nuestro estudio concuerda con Stylinanides (2014) porque se basa en la primera parte de las tareas matemáticas plateadas por Henningsen y Stein (1997), debido a que analizamos enfocando nuestra mirada única y exclusivamente en cómo las tareas matemáticas aparecen en los libros de texto. En nuestra investigación no se ha considerado cómo las tareas son aplicadas o puestas en práctica, es decir no analizamos cómo son implementadas en el aula y cómo llegan a los estudiantes.

Es en esa perspectiva, para nuestro análisis iniciamos el recojo de información con la identificación de los capítulos en la que se desarrollan temas correspondientes a los números racionales, expresados en algunos casos como fracciones o decimales, en los respectivos índices de cada libro de texto.

Enseguida, hicimos el conteo del total de tareas en cada grupo de actividades, para luego distinguir las tareas con perspectiva de *Razonamiento y Demostración*, para el cual, bajo la misma mirada de Bieda, Ji, Drwence y Picard (2014), nos concentramos en buscar palabras clave tales como: explicar, describir, predecir, mostrar, escribir una regla, decir porqué, decir cómo, justificar y probar. Estos términos, nos permitieron distinguir las tareas a ser analizadas bajo nuestro marco teórico.

Con el propósito de tener una visión global, en esta investigación denominamos “tareas” a todos los ejercicios y problemas que se presentan en los libros de texto objeto de nuestro análisis, algunas de las cuales incluso se presentan con sub ítems, los cuales en primera instancia no han sido disgregados. Esta información mostramos en la tabla 10 con intención de mostrar una visión global sobre la proporción de tareas con perspectiva de *Razonamiento y Demostración* en relación al total de tareas presentes en los libros de texto analizados.

Tabla 10. Frecuencia de tareas por texto

Grado/nivel	Tareas		
	Total	Relacionados a RD	Porcentaje con RD (%)
1° / Secundaria	87	6	6.90
2° / Secundaria	40	3	7.50
TOTAL	127	9	7.09

Observemos que en la tabla 10, en el 1° grado de secundaria, de 87 tareas sólo seis se relaciona a nuestro marco teórico y en el 2° grado, de 40 tareas sólo 3 corresponden a la perspectiva de *Razonamiento y Demostración*.

Codificación de las tareas

La codificación de las tareas se realizó por cada grado, el cual consistió en asignarle una numeración correlativa, seguida de un guion y luego de 1s o 2s, lo cual hace referencia al libro de texto del 1° o 2° grados de secundaria, respectivamente. Es en esta fase que hemos procedido a disgregar aquellas tareas que se presentan con sub ítems, puesto que nuestra intención es considerarlas como dos tareas "diferentes" con el objetivo de analizar con mayor precisión bajo nuestro marco teórico de *Razonamiento y Demostración*.

Análisis de las tareas

Luego del proceso de codificación, con las tareas específicas escritas y disgregadas de las tareas presentadas tal cual en los libros de texto, hemos procedido al análisis de cada una de ellas. Para el logro de tal propósito basamos nuestro análisis en la perspectiva del autor del libro de texto y en la perspectiva matemática; asimismo en nuestra ficha de análisis, el cual es mostrado en el anexo1.

Nuestro análisis consistió en describir, de manera detallada, cada una de las tareas, identificándolas, describiéndolas y analizándolas bajo los parámetros conceptuales de nuestro marco teórico.

Con nuestras herramientas metodológicas delimitadas, a continuación procedemos a mostrar el análisis de las tareas inmersas en los libros de texto del 1° y 2° de secundaria, el cual detallamos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

Una vez identificadas las tareas de *Razonamiento y Demostración* en los bloques temáticos de *Números Racionales* de los libros de texto de matemática de la EBR del Perú, pasamos a analizarlas a la luz de nuestro marco teórico y metodológico. Con este propósito, para cada libro de texto, en primer lugar codificamos cada una de las tareas relacionadas al *Razonamiento y Demostración* ya identificadas previamente, indicando en cada caso la página, el código asignado, así como el enunciado textual de la misma. Enseguida, realizamos el análisis de cada una de las tareas ya codificadas. Finalmente detallamos las consideraciones finales correspondiente a cada grado. A continuación detallamos dicho análisis en cada uno de los libros de texto en las que se desarrollan contenidos referentes a los números racionales.

5.1. Análisis del libro de texto del 1° grado de secundaria

En el manual para el docente del libro de texto del 1° grado de secundaria, Perú (2012a, pp. 104-135), en la Unidad 4 correspondiente al sistema de números racionales, se desarrollan los temas mediante definiciones, conceptos, ejemplos y problemas relacionados a situaciones del entorno social. Sin embargo, la mayor cantidad de ejercicios y problemas se agrupan en diez actividades individuales y otros ocho grupos con diversa denominación.

5.1.1. Codificación de las tareas del libro de texto del 1° grado de secundaria

Entre las tareas identificadas en el libro de texto de 1° grado de secundaria, pudimos ubicar seis tareas en las que pudimos disgregar 14 tareas relacionadas al *Razonamiento y Demostración* con el propósito de realizar un análisis detallado. La codificación de las tareas (Tabla 13) consistió en asignarle una numeración correlativa del 1 al 14, seguida mediante un guión y 1s, lo cual hace referencia al libro de texto del 1° de secundaria.

En el primer grupo de tareas, observemos que en la figura 13, el autor del libro de texto considera estas tareas en el bloque de *Razonamiento y Demostración*, el que es considerado en el Diseño Curricular Nacional (DCN) de la Educación Básica Regular del Perú como uno de los procesos transversales bajo los cuales se sugiere trabajar el área de matemática a nivel escolar (Perú, 2009).

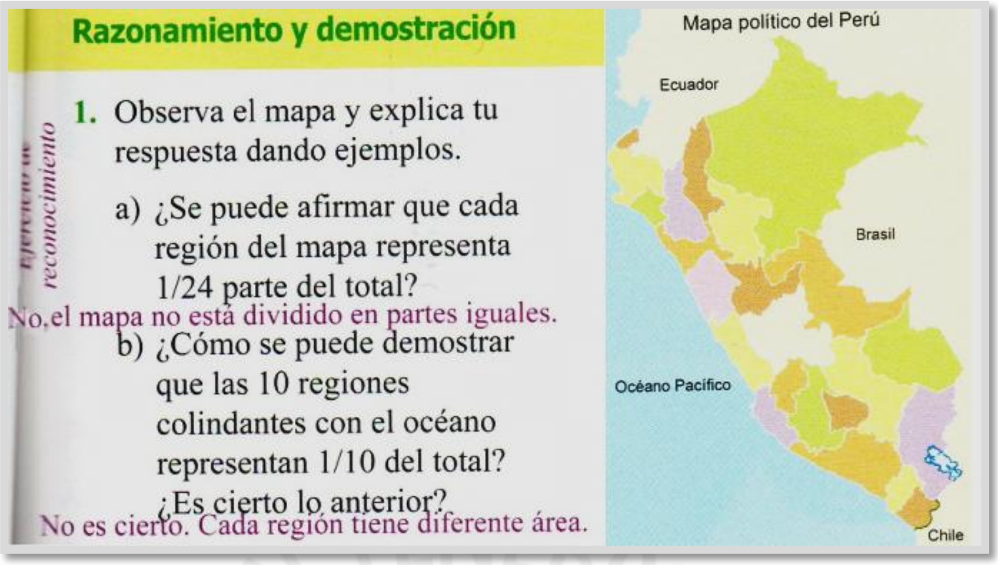


Figura 15. Tarea 1-1s y Tarea 2-1s
Fuente: Matemática 1 Secundaria. Manual para el docente (Perú, 2012a, p. 105)

Las dos primeras tareas que analizamos (Tarea 1-1s y Tarea 2-1s) son presentadas por el autor del texto como se muestra en la figura 15. Nosotros decidimos considerarlas como dos tareas "diferentes" conforme se muestra en la tabla 11 con el objetivo de identificar con mayor precisión el propósito de *Razonamiento y Demostración* que tiene cada una de ellas.

Tabla 11. Tarea 1-1s y Tarea 2-1s

Pág.	Código	Tarea
105	1-1s	Observa el mapa y explica tu respuesta dando ejemplos. ¿Se puede afirmar que cada región del mapa representa 1/24 del total?
105	2-1s	Observa el mapa y explica tu respuesta dando ejemplos. ¿Cómo se puede demostrar que las 10 regiones colindantes con el océano representan 1/10 del total? ¿Es cierto lo anterior?

El segundo grupo de tareas se puede observar en la figura 16. Este grupo de tareas es propuesto una vez presentada la definición del conjunto de números racionales. Sin embargo, al final de este bloque, el autor del libro de texto plantea preguntas y pide realizar comprobaciones para algunas de las afirmaciones presentadas. Es allí cuando surgen tareas que son factibles ser analizadas mediante nuestro marco teórico de *Razonamiento y Demostración.*

Algunas propiedades del conjunto $\mathbb{Q}$ son:

1. $\mathbb{Q}$ es un conjunto infinito.
2. Entre dos números racionales existe siempre un número infinito de racionales (densidad de $\mathbb{Q}$).
3. $\mathbb{Q}$ no tiene primero ni último elemento.
4. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Todo número entero es racional, pero no todo número racional es entero.
5. Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
6. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d};\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d};\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Responde:

- ¿A todo número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica?
- ¿Corresponde a cada punto de la recta un número racional?

Comprueba mediante ejemplos que se cumplen las propiedades 4, 5 y 6.

Figura 16. Tareas: 3-1s, 4-1s, 5-1s, 6-1s, 7-1s y 8-1s
Fuente: Matemática 1 Secundaria. Manual para el docente (Perú, 2012a, p. 110)

Bajo la misma perspectiva, con el propósito de realizar un análisis preciso, hemos procedido a disgregar las tareas de este bloque según mostramos en la tabla 12, los cuales por supuesto, poseen características diversas y de antemano ameritan análisis diferenciados.

Tabla 12. Tareas: 3-1s, 4-1s, 5-1s, 6-1s, 7-1s y 8-1s

Pág.	Código	Tarea
110	3-1s	Responde: ¿A todo número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica?
110	4-1s	Responde: ¿Corresponde a cada punto de la recta un número racional?
110	5-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Todo número entero es racional.
110	6-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: No todo número racional es entero.
110	7-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
110	8-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Si $\frac{a}{b}$y$\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

El tercer grupo de tareas es el mostrado en la figura 17. El autor del libro de texto pide al estudiante, de manera directa, que realice una demostración de las dos propiedades que incluye.

Razonamiento y demostración

1. Demuestra las siguientes propiedades: a) $a^0 = 1, \forall\, a \neq 0$ b) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Figura 17. Tarea 9-1s y tarea 10-1s
Fuente: Matemática 1 Secundaria. Manual para el docente (Perú, 2012a, p. 116)

En este caso, también hemos procedido a disgregar el ítem 1 en dos tareas tal como mostramos en la tabla 13, con la intención de lograr un análisis puntual y objetivo.

Tabla 13. Tarea 9-1s y tarea 10-1s

Pág.	Código	Tarea
116	9-1s	Demuestra la siguiente propiedad: $a^0 = 1, \forall\, a \neq 0$
116	10-1s	Demuestra la siguiente propiedad: $a^m . a^n = a^{m+n}$

Del mismo modo, ubicamos el cuarto grupo de tareas en el ítem 20 del respectivo libro de texto. Estas tareas, así como se muestran en la figura 18, poseen una característica común porque demandan analizar la veracidad de las afirmaciones y justificar cada respuesta.

20. Determina cuáles de las afirmaciones son verdaderas. Justifica tu respuesta.

a. Si se multiplica un número racional negativo por su recíproco, el producto es 1.

b. Si se divide un número racional entre su recíproco, el cociente es 1.

c. Si se multiplica un número racional por su opuesto, el producto es -1.

d. Si se multiplica un número racional por su opuesto, se obtiene el cuadrado de dicho número racional.

Figura 18. Tareas: 11-1s, 12-1s, 13-1s y 14-1s
Fuente: Matemática 1 Secundaria. Manual para el docente (Perú, 2012a, p. 126)

A pesar de que estas tareas poseen características comunes, con el propósito de realizar un análisis exhaustivo, hemos procedido a separarlas en cuatro tareas, tal como mostramos en la tabla 14, debido a que cada una posee su propia particularidad.

Tabla 14. Tareas: 11-1s, 12-1s, 13-1s y 14-1s

Pág.	Código	Tarea
126	11-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se multiplica un número racional negativo por su recíproco, el producto es 1”. Justifica tu respuesta.
126	12-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se divide un número racional entre su recíproco, el cociente es 1”. Justifica tu respuesta.
126	13-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se multiplica un número racional por su opuesto, el producto es 1”. Justifica tu respuesta.
126	14-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se multiplica un número racional por su opuesto, se obtiene el cuadrado de dicho número racional”. Justifica tu respuesta.

A continuación, mostramos el proceso de análisis de las tareas correspondientes al 1° grado de secundaria en la que consideramos la perspectiva del autor del libro de texto y la perspectiva matemática.

5.1.2. Análisis de las tareas del libro de texto del 1° grado de secundaria

Una vez delimitadas y precisadas las tareas de *Razonamiento y Demostración* halladas en el libro de texto del 1° grado de secundaria, bajo los parámetros de nuestro marco teórico (ver Capítulo 3). Asimismo, con el soporte matemático en relación al conjunto de los números racionales, el cual fue descrito en el Capítulo 2, hemos procedido a realizar los análisis correspondientes, enfocándonos en cada una de las 14 tareas encontradas.

a) Tarea 1-1s: Observa el mapa y explica tu respuesta dando ejemplos. ¿Se puede afirmar que cada región del mapa representa $1/24$ del total?

Observemos que la tarea tiene el claro propósito de que se formule una afirmación matemática. En este caso la tarea puede ser respondida de manera afirmativa con un Sí, o de forma negativa con un No. En todo caso, cada una de estas posibles respuestas hace referencia a una afirmación más completa que es, respectivamente, “Sí, es verdad que cada región del mapa representa 1/24 del total”, o “No, no es verdad que cada región del mapa representa 1/24 del total”. En este caso concreto, tal y como se muestra en el manual para el docente, el autor pretende que se responda de forma negativa.

Notemos además que en el enunciado del problema se pide dar ejemplos para explicar la respuesta dada, lo que sugiere que la tarea tiene el propósito adicional de que se proporcione fundamento para la afirmación que se plantee. Asimismo, observemos que el autor del libro de texto sugiere el tipo de argumento que se debía presentar (ejemplos). En este caso concreto, desde la perspectiva matemática, un argumento suficiente para respaldar la falsedad del enunciado “cada región del mapa representa 1/24 del total” es formular un contraejemplo, una demostración matemática, que coincide con lo esperado desde la perspectiva del autor del libro de texto.

b) Tarea 2-1s: Observa el mapa y explica tu respuesta dando ejemplos. ¿Cómo se puede demostrar que las 10 regiones colindantes con el océano representan 1/10 del total? ¿Es cierto lo anterior?

Empezaremos comentando que el planteamiento del problema presente aquí no es lo suficientemente claro debido a que: (1) en la primera pregunta propuesta, aunque creemos que cuando el autor escribe “las 10 regiones colindantes con el océano”, hace referencia a las regiones desde Tumbes en el norte hasta Tacna en el sur, cuando este escribe “representan 1/10 del total” no queda claro qué quiere decir exactamente con “total”. ¿Se refiere a todas las regiones que conforman el mapa del Perú? ¿Se refiere solo a las 10 regiones como un todo? Al no quedar claro esto, nuestro problema podría ser replanteado de distintas maneras, todas ellas dependiendo de lo que el autor quiso decir con cada término incluido en su planteamiento. Sin embargo, de acuerdo a lo trabajado en la Tarea 1-1s, creemos que la intención del autor fue plantear el siguiente problema: ¿Cómo se puede demostrar que *cada una de las 10 regiones colindantes con el océano representa 1/10 del total (la franja costeña formada por estas 10 regiones)*?; (2) en segundo lugar, aun suponiendo que el planteamiento de la primera pregunta es como lo que hemos considerado, surge una segunda observación. Esta está relacionada con la primera parte de esta pregunta. Cuando el autor pregunta: “¿Cómo se puede demostrar que *cada una de las 10 regiones colindantes con el océano representan 1/10 del total (la franja costeña formada por estas 10 regiones)*?”, de alguna manera se está “admitiendo” que lo que se dice es verdadero (que “*cada una de las 10 regiones colindantes con el océano representa 1/10 del total (la franja costeña formada por estas 10 regiones)”* es verdad), aunque sabemos que esto no es así. De esta manera, creemos que una manera más clara de plantear este problema es como sigue, y en función a este replanteamiento es que realizaremos nuestro análisis:

Observa el mapa y explica tu respuesta dando ejemplos. ¿Cada una de las 10 regiones colindantes con el océano representa 1/10 del total (la franja costeña formada por estas 10 regiones)? ¿Es cierto lo anterior?

Esta tarea tiene el propósito que se formule una afirmación matemática, es decir la pregunta puede ser respondida afirmativamente (Sí) o negativamente (No), de manera extensa: "Si, es verdad que cada una de las 10 regiones colindantes con el océano representa 1/10 del total (la franja costeña formada por estas 10 regiones)" o "No, no es verdad que cada una de las 10 regiones colindantes con el océano representa 1/10 del total (la franja costeña formada por estas 10 regiones)". En este caso, de manera puntual, tal como se muestra en el manual para el docente, el autor espera que se responda de forma negativa, con el propósito que se aclare el concepto de una fracción propia.

También, podemos afirmar que la tarea tiene el propósito de que se proporcione fundamento para la afirmación que se plantee, puesto que según el enunciado, se pide explicar la respuesta mediante ejemplos. Desde la perspectiva matemática, un argumento para amparar la falsedad del enunciado "cada una de las 10 regiones colindantes con el océano representa 1/10 del total (la franja costeña formada por estas 10 regiones)" es mediante un contraejemplo.

c) Tarea 3-1s: Responde: ¿A todo número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica?

Como podemos observar, la tarea planteada tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática. En este caso, que se responda de manera afirmativa (Sí, a todo número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica) o de forma negativa (No, no es verdad que a todo número racional le corresponda un punto sobre la recta numérica). Además, la tarea no tiene el propósito de que se fundamente dicha respuesta ya que solo indica que el alumno responda (en forma afirmativa o negativa) la pregunta planteada. Vemos que no se emplea alguno de los términos detallados en la sección correspondiente a nuestro marco metodológico (ver Capítulo 4, p. 62), lo que podría haber sugerido la exigencia de algún tipo de fundamento para la respuesta del alumno. Por otro lado, en el manual para el docente no se incluye respuesta alguna para esta tarea, lo que no permite saber cuál es la perspectiva del autor respecto a esta tarea.

Desde la perspectiva matemática, la tarea corresponde a un axioma, es decir la respuesta se basa en el conocimiento de un axioma, debido a ello no amerita demostración alguna. Esta afirmación se sustenta en el grupo V de axiomas, enunciadas por Hilbert (1953, p. 34), denominadas axiomas de continuidad, conocidas también como axiomas de completitud de Hilbert, en el que se detallan dos axiomas: el de la medida o de Arquímedes y el de la plenitud lineal. Estos axiomas, luego de ser expuestos llegan a concluir que "entonces nuestra

Geometría se presenta idéntica a la Geometría Cartesiana" (p. 37). Aquí se sustenta el hecho que la geometría euclidiana y la geometría analítica es la misma. Gracias a este axioma podemos establecer que a cada punto de la recta le corresponde un único número real. Entonces, esta afirmación implica también, que a todo número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica.

Asimismo, de nuestra indagación podemos precisar que en el manual para el docente del respectivo libro de texto no se incluye la solución para esta tarea. Esta situación hace que no es viable saber cuál es la perspectiva del autor respecto a esta tarea.

d) Tarea 4-1s: Responde: ¿Corresponde a cada punto de la recta un número racional?

La tarea tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática; es decir que se responda de manera afirmativa (Sí, a cada punto de la recta le corresponde un número racional) o negativa (No, no es verdad que a cada punto de la recta le corresponde un número racional) la pregunta planteada. Además, la tarea no tiene el propósito de que se fundamente dicha respuesta ya que solo indica que el alumno responda (en forma afirmativa o negativa) la pregunta planteada. Vemos que no se emplea alguno de los términos sugeridos enumerados en la sección correspondiente a nuestro marco metodológico (ver Capítulo 4, p. 62).

Desde la perspectiva matemática, la respuesta que se espera que se formule debe ser negativa, puesto que "A todo número racional le corresponde un punto en la recta numérica", en consecuencia no todos los puntos de la recta numérica corresponden a los números racionales". Esta afirmación se sustenta en los axiomas de continuidad de Hilbert comentada en el análisis de la tarea anterior. Notemos también que, desde esta perspectiva, la tarea tiene el potencial de exigir una demostración para fundamentar su respuesta. Esta demostración vendría dada por el uso de un contraejemplo, el cual debe hacer referencia a un punto de la recta numérica que no corresponda a un número racional, digamos $\sqrt{2}$, un número irracional. Entonces no es verdad que a cada punto de la recta le corresponde un número racional.

Por otro lado, sustentamos que no es posible saber cuál es la perspectiva del autor del libro de texto, respecto a esta tarea, debido a que en el manual para el docente no se incluye respuesta alguna para esta tarea, tampoco se muestra un solucionario.

e) Tarea 5-1s: Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Todo número entero es racional.

Observemos que en el enunciado de esta tarea el autor emplea el término “comprueba” y, aunque no explica en el manual para el docente qué quiere decir con él, sugiere al estudiante que emplee ejemplos para dicha comprobación, lo que admite implícitamente a la propiedad como verdadera. De aquí que, creemos que la tarea, no tiene el propósito de que se determine el valor de verdad de dicha propiedad o de que se formule una afirmación matemática, como sí sucedió en los casos anteriores. No obstante, sí tiene el propósito de que se proporcione fundamento para ella, mediante ejemplos. De esta manera, desde la perspectiva del autor, el estudiante debe proporcionar un argumento de tipo empírico.

Desde la perspectiva matemática no es factible realizar una demostración puesto que la relación entre los número enteros y racionales se da mediante la definición de una aplicación f entre el conjunto de los números entero $\mathbb{Z}$ y el conjunto B de los números racionales el cual detallamos en la sección correspondiente a nuestro objeto matemático (ver Capítulo 2, p. 24).

f) Tarea 6-1s: Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: No todo número racional es entero.

Observemos que, así como en el caso anterior, el autor emplea el término “comprueba” y, no explica en el manual para el docente a qué se refiere cuando usa este término. Sin embargo, él sugiere que se empleen ejemplos para dicha comprobación. De aquí que, creemos que la tarea sí tiene el propósito de que se proporcione fundamento para ella. Sin embargo, al ser enunciada la tarea mediante “compruebe mediante ejemplos”, dicha tarea no tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática o que se determine el valor de verdad para dicho enunciado.

Desde la perspectiva matemática, para este caso concreto, notamos que dar un ejemplo de número racional que no es un número entero (digamos $2/3$) es suficiente para demostrar la validez la propiedad en cuestión (“No todo número racional es entero”).

De este modo, observamos que la perspectiva del autor y la perspectiva matemática sí son compatibles, ya que lo que se exige por el autor, es lo que se esperaría para validar matemáticamente la propiedad dada.

g) **Tarea 7-1s: Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.**

En esta tarea, de manera similar que las anteriores, el autor del libro de texto emplea el término “comprueba”, aunque no explica su significado en el manual para el docente. Sin embargo, cuando sugiere que dicha comprobación se haga mediante ejemplos, creemos que el autor tiene la intención de que se proporcione fundamento para la validez del enunciado presentado (“Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor”) y que ese fundamento este referido a un argumento de tipo empírico (ver Capítulo 3, p. 42), el que no calificaría como demostración matemática.

Desde la perspectiva matemática, la tarea tiene el propósito que se proporcione una demostración basada en la densidad del conjunto de los números racionales, el cual es sustentado mediante el argumento de que entre dos números racionales siempre existe un número racional. La respectiva demostración se detalla en la sección correspondiente a nuestro objeto matemático (ver Capítulo 2, p. 27).

h) **Tarea 8-1s: Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$**

En esta tarea, de manera análoga, el autor emplea la expresión “comprueba mediante ejemplos”, lo que nos indica que si la tarea sí tiene el propósito de que se proporcione fundamento para la propiedad dada, en este caso mediante un argumento de tipo empírico (ver Capítulo 3, p. 42), el que no calificaría como demostración matemática. Asimismo, la tarea al ser expresada mediante el enunciado “entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta” el autor tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática o que se determine la veracidad para cada uno de los tres casos.

Desde la perspectiva matemática, la tarea tiene el propósito de que se proporcione fundamento a la propiedad dada como verdadera. En este caso específico es posible realizar una demostración (ver Capítulo 2, p. 26).

i) **Tarea 9-1s: Demuestra la siguiente propiedad: $\boldsymbol{a^0 = 1, \forall a \neq 0}$**

En primera instancia notamos que en el enunciado de la propiedad no precisa qué valores puede tomar a, solamente se indica que a no puede tomar el valor cero. Al mismo tiempo, para el análisis de esta tarea hemos indagado en el libro de texto correspondiente al 1° grado de secundaria, y en la sección correspondiente a la potenciación en $\mathbb{Q}$ se enuncia esta propiedad, entonces amerita una demostración. Pero para tal propósito se requieren de definiciones que proporcionen argumentos para la demostración, pero no encontramos ellas. Inclusive al indagar en las secciones correspondientes a la potenciación de números naturales, la propiedad en cuestión se enuncia en los siguiente términos "todo número diferente de cero elevado a cero se convierte en unidad" (Perú, 2012a, p. 50). Entonces, de manera puntual afrimamos que no existen argumentos para realizar la respectiva demostración. En este caso concreto, no tenemos más indicios para indagar la perspectiva del autor del libro de texto, puesto que no hay solucionario para esta tarea en el respectivo manual para el docente.

Ahora bien, realizaremos nuestro análisis desde la perspectiva matemática. Ayres (1992) basa sus estudios en los axiomas de Peano, de acuerdo al cual el cero no existe. Entonces, en referencia a este autor no es posible realizar la demostración de la propiedad enunciada líneas arriba.

En cambio, Carranza (2015) define por inducción la potencia de un número natural cualquiera a, de la siguiente forma:

a) Ponemos $a^0 = 1$
b) Se supone definido a^h y hacemos $a^{h+1} = a^h a$

Debido a ello, esta tarea no amerita demostración matemática, puesto que la tarea corresponde a una definición.

Esta situación se genera debido a que en el manual para el docente, el autor no sugiere demostración alguna para la tarea que propone, en la sección de tareas sobre *Razonamiento y Demostración*. Asimismo, en la definición de procesos cognitivos que el autor considera aparentemente como "claves" para conocimiento de los docentes, vemos que incluye lo que constituye "demostrar". Para el autor del libro de texto, demostrar es "la fundamentación de un resultado, proposición o su refutación" (Perú, 2012a, p. 5), sin embargo no se especifica cuál es el tipo de argumentos que son válidos para presentar dicha fundamentación. Por lo cual no podemos determinar con precisión la perspectiva del autor, ya que él puede considerar como aceptables argumentos que, desde la perspectiva matemática no lo serían.

j) Tarea 10-1s: Demuestra la siguiente propiedad: $a^m . a^n = a^{m+n}$

Desde la perspectiva del autor de libro de texto esta tarea es una propiedad, entonces es factible realizar una demostración, siempre y cuando se precise que $m \geq 1\ y\ n \geq 1$. Notemos primero que, así como en el caso de la tarea inmediata anterior, en el enunciado de la propiedad no se indica qué valores puede tomar $a,\ m$ o n. Supongamos que, de acuerdo a lo que usualmente trabajan los alumnos de este nivel educativo, a puede tomar valores racionales, en cambio a m y m les corresponde valores naturales positivos.

Bajo estas condiciones, es factible hacer un análisis. Esta tarea tiene el propósito de que se proporcione fundamento a la propiedad dada. Explícitamente se pide que se demuestre la propiedad, lo cual desde la perspectiva matemática, implicaría que se presente una demostración matemática que considere la definición de potenciación en $\mathbb{N}$, a partir de "$a^n = b$, n recibe el nombre de exponente e indica la cantidad de veces que se multiplica la base a, así:

Para $a \neq 0$ y $m \geq 1\ y\ n \geq 1$, entonces:

$$a^m . a^n = \underbrace{a \ldots a}_{m\ veces} . \underbrace{a \ldots a}_{n\ veces} = \underbrace{a \ldots a}_{m+n\ veces} = a^{m+n}$$

Así como comentamos en el caso de la tarea anterior, en la guía para el docente, el autor no sugiere demostración alguna para la tarea propuesta. Asimismo, en la definición de procesos cognitivos que el autor considera aparentemente como "claves" para conocimiento de los docentes, vemos que él incluye lo que constituye "demostrar" como "la fundamentación de un resultado, proposición o su refutación" (Perú, 2012a, p. 5).

k) Tarea 11-1s. Determina si la afirmación es verdadera o falsa: "Si se multiplica un número racional negativo por su recíproco, el producto es 1". Justifica tu respuesta.

De acuerdo a lo planteado por el autor del libro de texto, esta tarea hace referencia a una afirmación que es general. Específicamente, la tarea tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática, la cual quedaría expresada de manera afirmativa "Sí": "Es verdad que si se multiplica un número racional negativo por su recíproco, el producto es 1" o de manera negativa "No": "No es verdad que si se multiplica un número racional negativo por su recíproco, el producto es 1", puesto que el autor solicita que el alumno determine la veracidad o falsedad de la afirmación dada.

También, la tarea tiene el propósito de proporcionar argumento para la afirmación matemática, puesto que adicionalmente la tarea exige que se justifique la respuesta, es decir se debe proporcionar una serie de argumentos que muestren la veracidad de la afirmación.

Desde la perspectiva del autor, no podemos precisar cuál es el tipo de fundamento que el autor espera que el estudiante presente, puesto que no hallamos evidencia alguna en el manual para el docente (en lo que podría ser la solución del problema), o en relación a las consideraciones que él asume sobre "justificar", como sí sucedió en el caso de "demostrar" para los dos problemas anteriores, aunque no de manera precisa.

Desde la perspectiva matemática, por otro lado, la tarea tiene el propósito de que se proporcione fundamento para la respuesta esperada, debido a que para justificar el enunciado en cuestión es necesario que se proporcionen argumentos para la afirmación matemática, mediante una demostración. Para lograr tal propósito se debe apelar a la definición del recíproco de un número racional, detallada en el capítulo 2 (p. 24).

l) Tarea 12-1s. Determina si la afirmación es verdadera o falsa: "Si se divide un número racional entre su recíproco, el cociente es 1". Justifica tu respuesta.

Esta tarea tiene el propósito que se formule una aseveración matemática como primera respuesta a la tarea planteada. En este caso, el alumno puede responder afirmativamente mediante el enunciado "es verdad que si se divide un número racional entre su recíproco, el cociente es 1" o negativamente mediante el enunciado "es falso que si se divide un número racional entre su recíproco, el cociente es 1". Sin embargo, tal como lo plantea el autor del libro de texto, no basta con proporcionar una de estas respuestas, sino que es necesario que se proporcionen argumentos que respalden dichas aseveraciones.

Es en ese sentido, con el propósito de que tales respuestas posean soporte matemático, la tarea exige proporcionar fundamentos que respalden a la repuesta dada, puesto que explícitamente se pide una justificación, aunque el autor no precisa su concepción referente a la justificación.

En cambio, desde la perspectiva matemática, es factible realizar la demostración apoyándonos en la definición del recíproco de un número racional, el cual hemos abordado en el capítulo 2 (p. 24).

m) Tarea 13-1s. Determina si la afirmación es verdadera o falsa: "Si se multiplica un número racional por su opuesto, el producto es 1". Justifica tu respuesta.

Mediante esta tarea, el autor del libro de texto tiene el propósito que se responda de manera afirmativa (Sí) mediante la afirmación "es verdad que si se multiplica un número racional por su opuesto, el producto es 1" o negativa (No) mediante el enunciado "es falso que si se multiplica un número racional por su opuesto, el producto es 1". De antemano, no sólo basta con determinar la veracidad o falsedad del enunciado, sino se hace necesario proporcionar una justificación que respalde a tal respuesta.

Asimismo, puesto que en la tarea se pide que se justifique la respuesta, sin embargo el autor del libro de texto no precisa el concepto de justificación en el respectivo manual para el docente. De ahí que no es posible establecer con precisión cuál es el propósito del autor del libro de texto.

En cambio, desde la perspectiva matemática, es posible justificar el enunciado apelando a la propiedad del opuesto de un número racional planteada por Carranza (2015), la cual es mostrada en el capítulo 2 (p. 22).

n) Tarea 14-1s. Determina si la afirmación es verdadera o falsa: "Si se multiplica un número racional por su opuesto, se obtiene el cuadrado de dicho número racional". Justifica tu respuesta.

En esta tarea, observamos que el autor del libro de texto requiere que el estudiante responda afirmativamente mediante la aseveración "es verdad que si se multiplica un número racional por su opuesto, se obtiene el cuadrado de dicho número racional" o negativamente con una enunciado tal como "es falso que si se multiplica un número racional por su opuesto, se obtiene el cuadrado de dicho número racional".

De manera asimilar que en las tareas anteriores, en esta tarea se pide justificar la respuesta, porque es necesario que se respalde tales respuestas mediante una secuencia de argumentaciones válidas en el contexto matemático.

En cuanto a nuestra observación desde la perspectiva matemática es realizable la demostración apoyándonos en la definición del opuesto de un número racional detallada en el capítulo 2 (p. 22).

5.1.3. Consideraciones finales para el libro de texto del 1° grado de secundaria

Enseguida presentamos aspectos relevantes fruto del análisis del libro de texto del primer grado de secundaria de la EBR del Perú. Para tal propósito hemos sintetizado la información tomando en cuenta aspectos centrales de nuestro marco teórico, los cuales corresponden a los propósitos que tiene las tareas matemáticas analizadas.

Observamos que en el libro de texto del primer grado de secundaria no se observan tareas que se enfoquen al propósito de que se formule alguna generalización matemática, mediante la identificación de patrones o al planteamiento de conjeturas.

En lo referente al propósito de que se responda de manera afirmativa (Sí) o negativa (No) a una pregunta planteada, hemos hallado que 8 de las 14 tareas tienen este propósito, en ella hay coincidencias en ambas perspectivas. Estas tareas se caracterizan por ser enunciadas mediante preguntas puntuales mediante la utilización de términos tales como “responde…”, “determina si la afirmación es verdadera o falsa”, “se puede afirmar…” y “¿es cierto lo anterior?”.

Asimismo, de las tareas analizadas, 6 del total tienen el propósito de que se proporcione un argumento que no es una demostración matemática. Específicamente esto se da cuando el autor del libro de texto pide ejemplos para las comprobaciones. Esto sucede porque el autor del libro de texto muestra diferente concepción sobre demostración, el cual no coincide con la perspectiva matemática.

En lo referente al propósito de que se proporcione una demostración matemática, desde la perspectiva del autor del libro de texto hay 5 tareas que responden a este propósito, cuyas evidencias se muestran cuando el autor plantea los enunciados mediante el uso de términos “demuestra” y “justifica”. Sin embargo desde la perspectiva matemática, 12 de las 14 tareas se adecuan a este propósito. Esto nos indica que la mayoría de tareas halladas en el libro de texto analizado son factibles a ser demostradas, pero tendría que someterse dichas demostraciones a procesos de validación en la interacción docente alumno en el aula de clase.

Finalmente cabe puntualizar que de las 14 tareas analizadas 2 no corresponden al marco analítico de *Razonamiento y Demostración*, puesto que pese a ser enunciados como propiedades, se tratan de definiciones matemáticas los cuales no pueden ser sometidos a procesos de demostración.

5.2. Análisis del libro de texto del 2° grado de secundaria

En el manual para el docente del libro de texto del 2° grado de secundaria, Perú (2012b, pp. 8-39), en la Unidad 1 denominada *Relaciones lógicas en mi entorno y sistemas numéricos*, se abordan los temas sobre la base de definiciones, conceptos, propiedades, ejemplos y algunos problemas contextualizados. En el mencionado texto, los ejercicios y problemas se presentan en 16 grupos entre actividades con ayuda del maestro, actividades individuales, actividades en parejas, actividades en grupos, entre otros. Luego de una revisión exhaustiva, hemos hallado 9 tareas que se relacionan con *Razonamiento y Demostración.*

Enmarcados en nuestro marco metodológico, iniciaremos el estudio de las tareas matemáticas correspondientes al 2° grado de secundaria, mediante la codificación de las tareas, para luego para luego proceder a su análisis correspondiente.

5.2.1. Codificación de las tareas del libro de texto del 2° grado de secundaria

En la codificación de las tareas hemos considerado una numeración correlativa del 1 al 9 para indicar el número de la tareas de *Razonamiento y Demostración*, y seguida de un guión y 2s, lo que cual precisa que se refiere al análisis del libro de texto del 2° de secundaria.

De acuerdo a nuestra observación, las tres primeras tareas se presentan en la figura 19. Dichas tareas son consideradas por el autor del libro de texto en la página correspondiente a los saberes previos, en el bloque de *Razonamiento y Demostración*, el cual es uno de los procesos transversales del área de matemática, según el DCN de la EBR (Perú, 2009, p. 316).

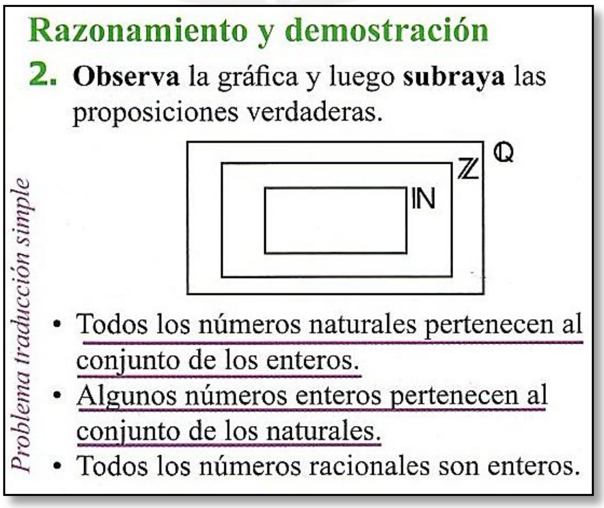


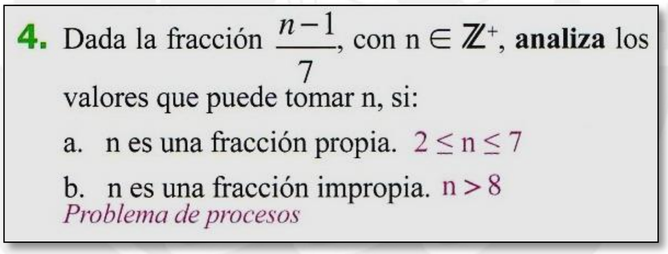
Figura 19. Tareas: 1-2s, 2-2s y 3-2s
Fuente: Matemática 2 Secundaria. Manual para el docente (Perú, 2012b, p. 10)

Como podemos observar en la figura 19, se generan tres tareas (1-2s, 2-2s y 3-2s), los cuales, de acuerdo a los propósitos de nuestro estudio ameritan ser analizados, por separado, a la luz de nuestro marco teórico.

Tabla 15. Tareas: 1-2s, 2-2s y 3-2s

Pág.	Código	Tarea
10	1-2s	Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. "Todos los números naturales pertenecen al conjunto de los enteros".
10	2-2s	Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. "Algunos números enteros pertenecen al conjunto de los naturales".
10	3-2s	Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. "Todos los números racionales son enteros".

El segundo grupo de dos tareas de *Razonamiento y Demostración* están presentes en la figura 20, el cual es presentado al inicio de la unidad 1, en la sección correspondiente a los saberes previos. Ambas tareas, por su naturaleza, son viables a ser analizadas mediante nuestro marco teórico de *Razonamiento y Demostración.*


4. Dada la fracción $\frac{n-1}{7}$, con n $\in \mathbb{Z}^{+}$, **analiza** los valores que puede tomar n, si:

a. n es una fracción propia. $2 \leq n \leq 7$

b. n es una fracción impropia. $n > 8$

Problema de procesos

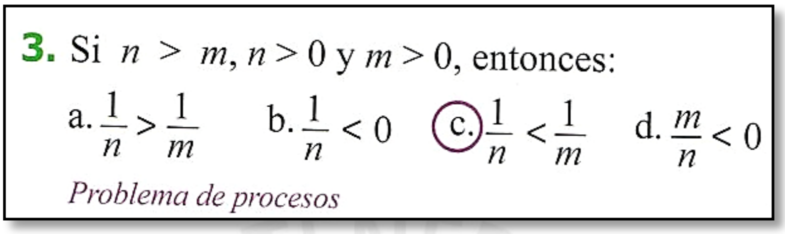
Figura 20. Tarea 4-2s y tarea 5-2s
Fuente: Matemática 2 Secundaria. Manual para el docente (Perú, 2012b, p. 10)

A pesar de que el enunciado se presenta como un solo problema, nosotros diferenciamos dos tareas en este enunciado, cada uno con condiciones y restricciones diferentes. Es por esta razón que hemos decidido analizarlos por separado tal como se detalla en la tabla 16.

Tabla 16. Tarea 4-2s y tarea 5-2s

Pág.	Código	Tarea
10	4-2s	Dada la fracción $\frac{n-1}{7}$, con $n \in \mathrm{Z}^{+}$, analiza los valores que puede tomar *n*, si *n* es una fracción propia.
10	5-2s	Dada la fracción $\frac{n-1}{7}$, con $n \in \mathrm{Z}^{+}$, analiza los valores que puede tomar *n*, si *n* es una fracción impropia.

El tercer grupo de tareas que podemos observar en la figura 21 se halla en la parte de evaluación de proceso del libro de 2° grado de secundaria, en las secciones finales de la unidad. El enunciado condicional es propuesto mediante la declaración del antecedente en la que hay que determinar el consecuente entre cuatro alternativas para hacer que dicha proposición sea verdadera.


3. Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces:

a. $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ b. $\frac{1}{n} < 0$ c. $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$ d. $\frac{m}{n} < 0$

Problema de procesos

Figura 21. Tareas: 6-2s, 7-2s, 8-2s y 9-2s
Fuente: Matemática 2 Secundaria. Manual para el docente (Perú, 2012b, p. 30)

Observamos que en este problema, aunque de manera implícita, se solicita responder cuatro problemas incluidos indirectamente en el enunciado del problema planteado. Nosotros presentamos en la tabla 17 la separación del problema original el cual se muestra en la figura 21 en las tareas implícitas de *Razonamiento y Demostración* que detectamos.

Tabla 17. Tareas: 6-2s, 7-2s, 8-2s y 9-2s

Pág.	Código	Tarea
30	6-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$?
30	7-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{1}{n} < 0$?
30	8-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$?
30	9-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{m}{n} < 0$?

Enseguida, con el propósito de poder vislumbrar al detalle las tareas codificadas, realizamos el análisis correspondiente en la que consideramos la perspectiva del autor del libro de texto y la perspectiva matemática.

5.2.2. Análisis de las tareas del libro de texto del 2° grado de secundaria

Una vez precisadas las tareas de *Razonamiento y Demostración* encontradas en el libro de texto del 2° grado de secundaria, orientadas bajo nuestro marco teórico detallado en el Capítulo 3. Asimismo, bajo el soporte matemático referente a los números racionales, detallado en el Capítulo 2, nos enfocamos en cada una de las 9 tareas para un análisis detallado y pormenorizado.

a) Tarea 1-2s. Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. "Todos los números naturales pertenecen al conjunto de los enteros".

Al observar el solucionario en el manual para el docente respectivo, notamos que la intención del autor es que el estudiante se remita únicamente al gráfico, y sobre esta base que subraye la proposición en caso sea verdadera. De acuerdo a nuestro marco teórico, esta tarea tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática. En este caso la respuesta sería enunciada: "Es verdad que todos los números naturales pertenecen al conjunto de los enteros". Sin embargo, la tarea no trae consigo la intención de que se proporcione argumentos para la afirmación matemática, puesto que sólo se pide que se subraye, sin argumentar la respuesta correspondiente.

Por otro lado, podemos distinguir que esta tarea, desde la perspectiva matemática, es una afirmación que es de carácter general y verdadera. La veracidad de esta tarea debe ser argumentada a partir de la construcción del conjunto de números enteros en términos de las definiciones detalladas en la sección correspondiente al estudio de nuestro objeto matemático (ver Capítulo 2, p. 24).

b) Tarea 2-2s. Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. "Algunos números enteros pertenecen al conjunto de los naturales".

Desde la perspectiva del autor, esta tarea tiene el propósito de verificar la veracidad de la afirmación respecto a la relación entre el conjunto de los números naturales y enteros, mediante el enunciado: "Es verdad que algunos números enteros pertenecen al conjunto de los naturales". Además, en base a nuestra observación en el solucionario del manual para el docente, la proposición se muestra subrayada por ser verdadera. De esta observación aseveramos que la intención del autor es que el estudiante se remita únicamente al gráfico y sobre esa base realice el subrayado, sin argumentar la respuesta.

Por otra parte, podemos precisar que esta tarea tampoco tiene la intención de que se proporcione argumentos para la afirmación, desde la perspectiva del autor del libro de texto. Desde la perspectiva matemática, debido a que el enunciado es de carácter particular y verdadero. La veracidad de este enunciado puede ser argumentada a partir del concepto de números enteros positivos, el cual está detallado en la sección correspondiente al sistema de los números enteros (Carranza, 2015, p. 60).

c) Tarea 3-2s. Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. "Todos los números racionales son enteros".

Desde la perspectiva del autor del libro de texto, la tarea tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática en el sentido de determinar su veracidad o falsedad. En el manual del docente para el 2° grado, no se halla subrayada, lo cual significa que dicha proposición es falsa, el cual incluso de puede responder sólo observando la figura 17. La respuesta esperada se enunciaría de la siguiente manera: "es falso que todos los números racionales son enteros. Por ser un enunciado general y es falso, desde la perspectiva matemática, la tarea tiene el propósito de que se proporciones argumentos para la afirmación matemática, en este caso mediante una demostración matemática. Según la naturaleza de la tarea, basta con dar un contraejemplo para demostrar que el enunciado es falso, así por ejemplo: dado $\frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$, pero $\frac{1}{11} \notin \mathbb{Z}$, con ello podemos afirmar que "es falso que todos los números racionales son enteros".

d) Tarea 4-2s. Dada la fracción $\frac{n-1}{7}$, con *n* ϵ Z^{+}, analiza los valores que puede tomar *n*, si *n* es una fracción propia.

En este caso, para que esta tarea sea válida, es necesario corregir el error que se presenta puesto que observamos que primero se enuncia afirmando que ***n*** pertenece a los enteros positivos, para luego mostrar una contradicción en el sentido que si *"**n*** es una fracción propia". Entonces, para realizar nuestro análisis hemos procedido a corregir el enunciando de la forma siguiente: "si la fracción dada es una fracción propia".

Por otra parte, en el manual para el docente, se define "analizar" como "diferenciar y separar las partes de una operación o todo con la finalidad de conocer cómo se relacionan", lo cual no es tan claro para poder vislumbrar que la tarea tenga el propósito de dar una demostración.

Esta tarea requiere del análisis para valores numéricos que se adecúan a las condiciones y restricciones, los cuales se adecuan a la forma general dada. De ello, desde la perspectiva matemática, precisamos que la tarea tiene el propósito de que se proporcione argumentos para una afirmación matemática, de acuerdo a nuestro marco teórico.

Luego de esta aclaración, es posible analizar la tarea observando que la tarea planteada tiene el propósito de analizar los valores que puede tomar ***n*** mediante una demostración. Una manera de demostrar la afirmación es partiendo de la pregunta ¿Qué valores enteros positivos puede tomar n para que $\frac{n-1}{7}$ sea una fracción propia?, ante el cual se espera que se responda cuáles son esos valores, así: "si n toma los valores mayores que 1, y menores que 8 entonces $\frac{n-1}{7}$ será una fracción propia".

e) Tarea 5-2s. Dada la fracción $\frac{n-1}{7}$, con *n* ϵ Z^{+}, analiza los valores que puede tomar *n*, si *n* es una fracción impropia.

Del mismo modo que en la tarea anterior, para que esta tarea sea válida, debemos corregir el error que se presenta ya que observamos que en el enunciado se afirma que ***n*** pertenece a los enteros positivos, luego se pide que se analice si "***n*** es una fracción propia", surgiendo una contradicción. Es por esta razón que hemos procedido a corregir el enunciando de la forma siguiente: "si la fracción dada es una fracción impropia".

El término "clave" para identificar la tarea dada como una tarea de razonamiento y demostración fue "analizar". El cual en el manual para el docente se explica el significado adoptado para este término en el sentido de "diferenciar y separar las partes de una operación o todo con la finalidad de conocer cómo se relacionan", razón por la cual no podemos identificar la perspectiva del autor del libro de texto, acorde a nuestro marco teórico.

Desde la perspectiva matemática la tarea tiene el potencial de que se exija una demostración matemática que valide la elección de los valores encontrados para n. Desde esta perspectiva, la forma en la que esta elección quede validada es, por ejemplo, con la verificación de los casos elegidos para el cumplimiento de la definición de fracción impropia. Partiendo de la pregunta ¿Qué valores enteros positivos puede tomar n para que $\frac{n-1}{7}$ sea una fracción impropia?, ante el cual se espera que se responda cuáles son esos valores, así: "si n toma los valores mayores que 8, entonces $\frac{n-1}{7}$ será una fracción impropia".

f) Tarea 6-2s. Si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces: ¿$\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$?

Esta tarea es presentada por el autor del libro de texto a partir de aclarar que *n > m, n > 0 y m > 0,* esto ayuda a analizar con objetividad la mencionada tarea, aunque adolece de la precisión de que $m\ y\ n\ \in \mathbb{Q}$.

La tarea tiene el propósito que se formule un enunciado como respuesta a la tarea planteada. Ante el cual se podría responder afirmativamente mediante el enunciado "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es verdad que $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$" o negativamente mediante el enunciado "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es falso que $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$". Sin embargo, tal como lo plantea el autor del libro de texto, esta tarea puede ser resuelta sólo indicando si es verdadero o falso, sin la necesidad de mostrar algún argumento, basta con proporcionar una de estas respuestas.

Desde la perspectiva matemática es necesario que se proporcionen argumentos que respalden la respuesta. Además, la tarea tiene el propósito de que se proporcione argumentos para una afirmación matemática, mediante una demostración. Pues tratándose de una afirmación general solo es necesario un contraejemplo para demostrar su falsedad. Tal es que dado: 7>3, entonces $\frac{1}{7} > \frac{1}{3}$ es falso puesto que al comprobar resulta lo contrario (1)(3) < (7)(1).

g) Tarea 7-2s. Si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces: ¿$\frac{1}{n} < 0$?

La tarea tiene el propósito de que se responda de manera afirmativa (Sí) mediante el enunciado "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es verdad que $\frac{1}{n} < 0$" o negativa (No) a una pregunta planteada con la expresión "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es falso que $\frac{1}{n} < 0$"

Desde la perspectiva matemática, la tarea tiene el propósito de que se proporcione argumentos para la afirmación matemática. En este caso por ser una afirmación de carácter general, la tarea tiene el propósito de que se proporcione una demostración matemática, mediante un contraejemplo: Dado, 9>4, entonces $\frac{1}{9} < 0$ es falso puesto que es evidente que $\frac{1}{9} > 0$.

h) Tarea 8-2s. Si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces: ¿$\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$?

De la misma manera que en las dos tareas anteriores, desde la perspectiva del autor del libro de texto esta tarea tiene el propósito que se formule una afirmación matemática mediante una respuesta afirmativa "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es verdad que $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$" o una respuesta negativa "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es falso que $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$"

Desde la perspectiva matemática, la respuesta que se espera hace referencia a la veracidad de una afirmación que es general es por ello, afirmamos que la tarea tiene el propósito de que se proporcione argumentos para una afirmación matemática, mediante una demostración matemática el cual se puede hallar en Ayres (1992, p.63).

i) Tarea 9-2s. Si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces: ¿$\frac{m}{n} < 0$?

Como podemos observar, la tarea planteada tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática, de manera afirmativa "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es verdad que $\frac{m}{n} < 0$" o negativa "si *n > m, n > 0 y m > 0,* entonces es falso que $\frac{m}{n} < 0$".

Desde la perspectiva matemática, la respuesta dada hace referencia a la veracidad de una afirmación que es general. En ella también, podemos afirmar que la tarea tiene el propósito de que se proporcione argumentos para dicha afirmación matemática, en este caso mediante una demostración matemática, mediante un contraejemplo. Así como 9>4, entonces $\frac{9}{4} < 0$ es falso puesto que es evidente que $\frac{9}{4} > 0$.

5.2.3. Consideraciones finales para el libro de texto del 2° grado de secundaria

De nuestro estudio realizado respecto a las tareas presentes en el libro de texto del segundo grado de secundaria llegamos a concluir que no hay tareas que respondan al propósito de que se formule alguna generalización matemática, a través de patrones o conjeturas.

En lo referente al propósito de que se responda de afirmativamente (Sí) o negativamente (No) a una pregunta planteada, hemos hallado 7 de las 9 tareas tienen este propósito y se observa que hay coincidencia en ambas perspectivas. Además, de las tareas analizadas, ninguna de ellas tiene el propósito de que se proporcione un argumento que no es una demostración matemática, desde la perspectiva del autor del libro de texto así como también desde la perspectiva matemática.

Finalmente, en lo referente al propósito de que se proporcione una demostración matemática, las 9 tareas responden a este propósito desde ambas perspectivas.

CONSIDERACIONES FINALES

Conforme expusimos en secciones anteriores, la enseñanza de las matemáticas, se desarrolla en un contexto cambiante, pero en lo que se refiere específicamente a los libros de texto de la Educación Básica Regular (EBR) en el Perú y a los libros de texto estadounidense y japoneses mostrados en la revista "*International Journal of Educational Research*" en su edición 64 del 2014, se evidencia un bajo índice de tareas que se relacionan a procesos del *Razonamiento y Demostración.*

La perspectiva de *Razonamiento y Demostración*, bajo los parámetros de nuestro marco teórico, nos ha permitido realizar un análisis detallado sobre los propósitos de las tareas matemáticas presentes en los libros de texto de matemática de la EBR de Perú, puesto que nos ha enmarcado para distinguir si las tareas tienen el propósito de que se formule una afirmación matemática o de que se proporcione argumentos para dicha afirmación matemática.

Nuestro marco teórico, nos permitió describir el propósito que tiene cada una de las tareas identificadas en el sentido que si la tarea se basa en la identificación de un patrón o en alguna conjetura; también si la respuesta que se espera hace referencia a una afirmación que es general o que no es general; asimismo si la tareas tienen el propósito de que se proporcione un argumento empírico o un argumento de tipo lógico o, de que si dicha tarea tiene el propósito de que se proporcione un ejemplo genérico o una demostración.

De acuerdo a lo argumentado en el párrafo anterior, consideramos que nuestro marco teórico en *Razonamiento y Demostración*, se adecua de manera pertinente y coherente a la intención de analizar las tareas matemáticas identificadas en los libros de texto objeto de nuestro estudio, los cuales fueron codificadas previamente.

La metodología empleada en el trascurso de nuestro estudio nos permitió realizar un análisis sistemático de las tareas matemáticas y confirmar o invalidar la existencia de los procesos de *Razonamiento y Demostración* en los libros de texto de matemática a través de la codificación y análisis respectivo a la luz de nuestro marco teórico.

En lo que refiere al primer objetivo: *Identificar las tareas que tienen el propósito de desarrollar alguna habilidad de Razonamiento y Demostración, de acuerdo al marco analítico de Stylianides*. A través de nuestro estudio hemos logrado identificar, en ambos libros de texto 23 tareas, de los cuales 14 corresponden al 1° grado de secundaria y 9 al 2°

grado de secundaria, que por sus características se relacionan a los procesos involucrados en *Razonamiento y Demostración*. Para lograr tal propósito hemos fijado como nuestros sujetos de estudio a dos libros de texto de matemática de la EBR del Perú, puesto que allí se hallaron la mayor cantidad y variedad de tareas inmersas en procesos del *Razonamiento y Demostración*.

Respecto al segundo objetivo específico: *Describir el propósito que cada una de las tareas identificadas tiene en el desarrollo de Razonamiento y Demostración.*

Del total de tareas analizadas hemos logrado precisar que ninguna de ellas se relaciona a la identificación de patrones ni al planteamiento de conjeturas, procesos que son sumamente importantes para iniciar a los estudiantes en las actividades de *Razonamiento y Demostración*. Sin embargo, 15 tareas de las analizadas, vistas desde ambas perspectivas, tienden a buscar que se respondan de manera afirmativa (Sí) o negativa (No) o que establezcan la veracidad o falsedad de las afirmaciones. Esto por supuesto, no conlleva a involucrar a los estudiantes en la demostración matemática, debido a que solo se limitan a generar una respuesta concreta sin proporcionar argumentos que la respalden.

Por otra parte, en 6 tareas que requieren una demostración matemática, el autor del libro de texto del 1º grado de secundaria induce a que se resuelvan mediante argumentos empíricos, es decir mediante ejemplos que se adecuen a las condiciones de la tarea, es por ello que sólo 6 tareas son enunciadas para ser demostradas. Sin embargo en el libro de texto del 2º grado de secundaria, las nueve tareas tienen el propósito de que se proporcione una demostración matemática, según la perspectiva del autor del libro de texto y la perspectiva matemática.

En relación a nuestro objetivo general: *Analizar las tareas sobre Razonamiento y Demostración para el tema números racionales presentes en los libros de texto de matemática del primer y segundo grado de secundaria distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú.*

De los análisis realizados en cada una de las 23 tareas halladas en ambos libros de texto distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú, hemos obtenido importantes hallazgos. Bajo el respaldo de nuestros objetivos específicos hemos logrado identificar, codificar y disgregar tareas de grupos de tareas afines para realizar el análisis por separado. Es así que podemos concluir, que pese a la cantidad de tareas encontradas, aún resulta insuficiente este número para lograr que en el desarrollo de habilidades ligadas al *Razonamiento y*

Demostración cobre relevancia en las próximas ediciones de libros de texto distribuidos por el Estado peruano.

Asimismo, debemos puntualizar que todas las tareas halladas fueron extraídas de secciones correspondientes a actividades para el estudiante. Sin embargo, ninguna de este tipo de tareas es desarrollada por los autores de libros de texto, tampoco se detallan en los manuales para el docente.

Las tareas halladas generalmente han sido presentadas en los libros de texto como tareas propuestas para el estudiante, muchas de ellas mediante preguntas abiertas. En las indagaciones correspondientes no hallamos alguna tarea que sea resuelta por los autores de los libros de texto, principalmente.

PERSPECTIVAS FUTURAS

Al concluir nuestro estudio, surge la expectativa de indagación científica, como consecuencia de la reflexión permanente sobre la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica Regular. En este caso particular, a partir de nuestras indagaciones y análisis de las tareas matemáticas desarrolladas y propuestas en los libros de texto distribuidos por el gobierno peruano, reafirmamos nuestra postura de que un libro de texto editado tome en cuenta procesos involucrados en *Razonamiento y Demostración* y que además cuide la coherencia entre la perspectiva matemática y la perspectiva del autor del libro de texto. Entonces es necesario, mostrar avances importantes para que a futuro, en investigaciones de esta índole se consideren también la perspectiva del docente y la perspectiva del estudiante, puesto en que en el cruce de información desde las cuatro perspectivas consolidará propósitos generados en la presente investigación.

Una mayor amplitud de análisis en los libros de texto peruanos tendientes a promover el desarrollo de procesos ligados al *Razonamiento y Demostración* coadyuvará a que en las propuestas curriculares en marcha se logren implementar actividades y estrategias que involucren al estudiante en procesos relacionados a identificar patrones, plantear conjeturas, proporcionar argumentos que no califican como demostración y proporcionar demostración matemática.

Puesto que nuestro propósito inicial fue realizar el análisis de las tareas matemáticas en los libros de texto a partir del 3° grado de primaria, pero que en transcurso de nuestras indagaciones hallamos que las tareas matemáticas en la que se involucran procesos de *Razonamiento y Demostración* fluctúan entre 0 y 2 tareas en cada grado, específicamente orientados a la identificación de patrones.

Es propicio plantear la necesidad de generar investigaciones que involucren las cuatro perspectivas para el análisis de libros de texto, puesto que ello nos permitirá poseer una visión integral de los procesos de *Razonamiento y Demostración*. Esta manera de abordar las matemáticas permitirá que se generen actividades y estrategias que permitan a los estudiantes a involucrarse en procesos de *Razonamiento y Demostración* desde los primeros grados de la EBR, y consecuentemente logren un desarrollo progresivo de sus competencias matemáticas.

REFERENCIAS

Ayres, F. (1992), *Algebra Moderna*. México D.F.: McGRAW-HILL.

Carranza, C. (2015), *Algebra*. Lima: Academia Nacional de Ciencias.

Crespo, C. (2005), *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. (Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, México). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/crespo_2005.pdf

Bardin, L. (2002), *El análisis de contenido*. Madrid: Ediciones Akal S.A. Recuperado de https://books.google.com.pe/books/about/An%C3%A1lisis_de_contenido.html?id=IvhoTqll_EQC

Barrantes, H. (2005), *Introducción a la matemática.* San José: Editorial Universidad Estatal a Distancia [Versión de Google Libros]. Recuperado de https://books.google.com.pe/books/about/Introducci%C3%B3n_a_la_Matem%C3%A1tica.html?hl=it&id=O_3cYlM8h8AC

Bieda, K., Ji, X., Drwencke, J. y Picard, A. (2014), Reasoning and proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, pp. 71-80. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0883035513000682

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, pp. 15-30. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/280527242_EL_PAPEL_Y_LA_FUNCION_DE_LA_DEMOSTRACION_EN_MATEMATICAS

Davis, J., Smith, D., Roy, A. y Bilgic, Y. (2014). Reasoning and proving in algebra: The case of two reform oriented U.S. textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64, pp. 92-106. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0883035513000761

Egoavil, J. (2015), *Fundamentos de Matemática: Introducción al nivel universitario.* Lima: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas UPC [Versión de Google Libros]. Recuperado de https://books.google.com.pe/books?isbn=6123180029

Fujita, T. y Jones, K. (2014). Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, 64, pp. 81-91. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0883035513001213

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21(1), pp. 6-13. Recuperado de http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01809605

Henningsen, M. y Stein, M. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), pp. 524-549. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/749690

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación. Quinta Edición.* México: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Hilbert, D. (1953), *Fundamentos de la Geometría*. Madrid: Instituto Jorge Juan de Matemáticas.

Huete, M. (2002), *El conjunto de los números racionales.* San José: Editorial Universidad Estatal a Distancia [Versión de Google Libros]. Recuperado de https://books.google.com.pe/books?isbn=9977640165

Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5, pp. 61-88. Recuperado de http://www.fmf.uni-lj.si/~lavric/conceptions%20of%20proof%20(Knuth).pdf

Lay, S. (2009). Good proofs depend on good definitions: examples and counterexamples in arithmetic. *ICMI Study*,19(2), pp. 27-30. Recuperado de http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_2.pdf

McCrory, R. y Stylianides, A. (2014). Reasoning-and-proving in mathematics textbooks for prospective elementary teachers. *International Journal of Educational Research,* 64, pp. 119-131. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0883035513001109

NCTM (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Ordoñez, C. (2014). *La construcción de la noción de división y divisibilidad de números naturales, mediada por justificaciones, en alumnos de tercer grado de nivel primario*. (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5653

Perú, Ministerio de Educación (2007). *Proyecto Educativo Nacional al 2021*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/DeInteres/xtras/PEN-2021.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/normatividad/reglamentos/DisenoCurricularNacional.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2012a). *Matemática 1 Secundaria. Manual para el docente*. Lima: Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2012b). *Matemática 2 Secundaria*. *Manual para el docente* Lima: Editorial Norma.

Perú, Ministerio de Educación (2013). *Mapas de progreso del aprendizaje: números y operaciones*. Lima. Recuperado de http://www.sineace.gob.pe/wp-content/uploads/2014/10/MapasProgreso_Matematica_NumerosOperaciones.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2014). *Normas y Orientaciones para el Desarrollo del Año Escolar 2015 en la Educación Básica*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/campanias/pdf/norma_tecnica_eb2015.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2015a). *Rutas del Aprendizaje IV Ciclo*. Lima. Recuperado de http://recursos.perueduca.pe/rutas/documentos/Primaria/Matematica-IV.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2015b). *Rutas del Aprendizaje V Ciclo*. Lima. Recuperado de http://recursos.perueduca.pe/rutas/documentos/Primaria/MatematicaV.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2015c). *Rutas del Aprendizaje VI Ciclo*. Lima. Recuperado de http://recursos.perueduca.pe/rutas/documentos/Secundaria/Matematica-VI.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2015d). *Modificatoria del Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima. Recuperado de http://ccec.edu.pe/files/RM-199-2015-MINEDU-Modifica-DCN-2009.pdf

Quispe, W. (2011). *La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con sus operaciones básicas y propiedades elementales.* (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle). Recuperado de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_doctorado/Tesis-Wenceslao.pdf

Stein, M., Grover, B, y Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal Summer*, 33(2), pp. 455-488. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/1163292

Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), pp. 289-321. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/30034869

Stylianides, G. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), pp. 9 – 16. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/40248592

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, pp. 258 – 288. Recuperado de http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986060903253954

Stylianides, G. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, 63, pp. 63-70. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0883035514000068

Stylianides, G. & Stylianides, A. (2009a). Faciliting the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), pp. 314-352. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/40539339

Stylianides, A. & Stylianides, G. (2009b). Proof contructions and evaluation. *Educational Studies in Mathematics,* 72(2), pp. 237 – 253. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/40284620

Vallejo, E. (2012). *Análisis y propuesta en torno a las justificaciones en la enseñanza de la divisibilidad en el primer grado de secundaria.* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/1609

ANEXOS

ANEXO 1

<table>
<tr><th colspan="3">INSTRUMENTO PARA EL ANÁLISIS DE LIBRO DE TEXTOS</th></tr>
<tr><th colspan="3">Desde la perspectiva matemática</th></tr>
<tr><td rowspan="4">a) ¿La tarea tiene el propósito de que se formule una afirmación matemática?</td><td rowspan="2">a.1) ¿La tarea tiene el propósito de que se formule alguna generalización matemática?</td><td>a.1.1) ¿La tarea se basa en la identificación de algún patrón? ¿El patrón identificado es plausible o está bien definido?</td></tr>
<tr><td>a.1.2) ¿La tarea se basa en alguna conjetura?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a.2) ¿La tarea tiene el propósito de que se responda de manera afirmativa (Sí) o negativa (No) a una pregunta planteada?</td><td>a.2.1) ¿La respuesta que se espera hace referencia (indirecta) a la veracidad de una afirmación que es general?</td></tr>
<tr><td>a.2.2) ¿La respuesta que se espera hace referencia (indirecta) a la veracidad de una afirmación que no es general?</td></tr>
<tr><td rowspan="4">b) ¿La tarea tiene el propósito de que se proporcione argumentos para una afirmación matemática?</td><td rowspan="2">b.1) ¿La tarea tiene el propósito de que se proporcione una demostración matemática?</td><td>b.1.1) ¿La tarea tiene el propósito de que se proporcione un ejemplo genérico?</td></tr>
<tr><td>b.1.2) ¿La tarea tiene el propósito de que se proporcione una demostración?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b.2) ¿La tarea tiene el propósito de que se proporcione un argumento que no es una demostración matemática?</td><td>b.2.1) ¿La tarea tiene el propósito de que se proporcione un argumento empírico?</td></tr>
<tr><td>b.2.2) ¿La tarea tiene el propósito de que se proporcione un argumento del tipo lógico?</td></tr>
</table>

ANEXO 2

Codificación de tareas - 1° de secundaria

Pág.	Código	Tarea
105	1-1s	Observa el mapa y explica tu respuesta dando ejemplos. ¿Se puede afirmar que cada región del mapa representa 1/24 del total?
105	2-1s	Observa el mapa y explica tu respuesta dando ejemplos. ¿Cómo se puede demostrar que las 10 regiones colindantes con el océano representan 1/10 del total? ¿Es cierto lo anterior?
110	3-1s	Responde: ¿A todo número racional le corresponde un punto sobre la recta numérica?
110	4-1s	Responde: ¿Corresponde a cada punto de la recta un número racional?
110	5-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Todo número entero es racional.
110	6-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: No todo número racional es entero.
110	7-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
110	8-1s	Comprueba mediante ejemplos que se cumple la propiedad: Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
116	9-1s	Demuestra la siguiente propiedad: $a^0 = 1, \forall\, a \neq 0$
116	10-1s	Demuestra la siguiente propiedad: $a^m . a^n = a^{m+n}$
126	11-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se multiplica un número racional negativo por su recíproco, el producto es 1”. Justifica tu respuesta.
126	12-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se divide un número racional entre su recíproco, el cociente es 1”. Justifica tu respuesta.
126	13-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se multiplica un número racional por su opuesto, el producto es 1”. Justifica tu respuesta.
126	14-1s	Determina si la afirmación es verdadera o falsa: “Si se multiplica un número racional por su opuesto, se obtiene el cuadrado de dicho número racional”. Justifica tu respuesta.

ANEXO 3

Codificación de tareas - 2° de secundaria

Pág.	Código	Tarea
10	1-2s	Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. “Todos los números naturales pertenecen al conjunto de los enteros”.
10	2-2s	Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. “Algunos números enteros pertenecen al conjunto de los naturales”.
10	3-2s	Observa la gráfica y luego si la proposición siguiente es verdadera, subráyela. “Todos los números racionales son enteros”.
10	4-2s	Dada la fracción $\frac{n-1}{7}$, con $n \in Z^{+}$, analiza los valores que puede tomar *n*, si *n* es una fracción propia.
10	5-2s	Dada la fracción $\frac{n-1}{7}$, con $n \in Z^{+}$, analiza los valores que puede tomar *n*, si *n* es una fracción impropia.
30	6-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$?
30	7-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{1}{n} < 0$?
30	8-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$?
30	9-2s	Si $n > m$, $n > 0$ y $m > 0$, entonces: ¿$\frac{m}{n} < 0$?