

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



PUCP

**NIVELES DE RAZONAMIENTO SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE
QUE ALCANZAN LOS ESTUDIANTES DEL PRIMER AÑO DE
SECUNDARIA AL ABORDAR ACTIVIDADES SOBRE
PARALELOGRAMOS**

Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas que
presenta

LUZ MARÍA JARA PEREDA

Dirigido por

CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2015

En primer lugar agradecer a Dios por su protección y brindarme las fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida y a la virgen santísima por todos sus cuidados.

Dedicar de manera muy especial a mis queridos padres Juana y Julio porque inculcaron en mí el deseo de superación, respeto y perseverancia. Fueron para mí el mejor modelo de bondad y sacrificio, agradecerles porque siempre confiaron en mí.

A mi esposo Ángel por su apoyo, confianza en todo momento y por ser el mejor padre y el amoroso abuelo.

A mis hijos Ángel y Andrea porque son y serán mi motivo de mi lucha y superación. A Carol por confeccionar mis materiales, a mis queridos nietos Fabián y Brigith por ser tan adorables y a mi sobrina Daniela.

A mis hermanos y familiares que me alentaron a no desmayar y seguir adelante.

AGRADECIMIENTO

Al Ministerio de Educación del Perú, quien por medio del Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

Al programa de maestría de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

De manera especial a mi asesora Dra. Cecilia Gaita Iparraguirre, por su trabajo profesional digno de admiración y respeto, el apoyo que me brindo en todo momento, sus orientaciones y paciencia que me motivaron a realizar un trabajo de investigación con seriedad y responsabilidad.

Mi gratitud a la directora de la maestría Dra. Jesús Flores Salazar, por su respaldo constante, palabras de aliento en mis momentos más difíciles, por su paciencia, confianza, sobre todo por su gran profesionalismo y a la vez agradecerle por las recomendaciones que me brindo como parte del jurado.

A la memoria de mi querido padre Julio, que a pesar que no esté físicamente, siento su respaldo y ánimo para continuar adelante.

A mi madre Juanita, por ser el mejor modelo de madre, por sus sabios consejos, dedicación, amor y cuidado.

A la profesora Cintya Gonzales Hernández, por ser parte de los miembros de mí jurado.

A mis compañeros de la maestría

A mis hijos y nietos por sus muestras de cariño y amor.

A mi esposo por su comprensión y protección que me motiva a continuar y no desmayar.

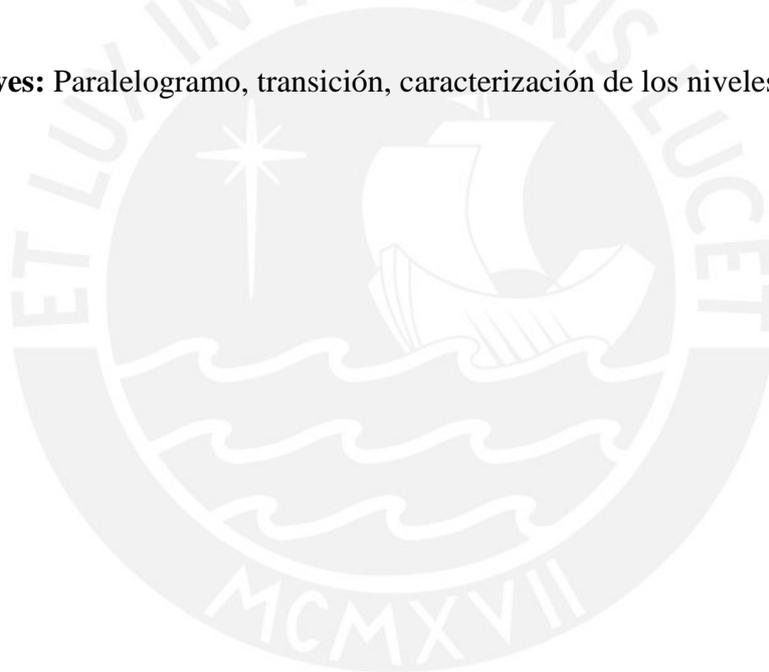
RESUMEN

En el presente trabajo se muestra de qué manera se pueden adaptar los niveles de razonamiento geométrico, propuesto por el modelo de Van Hiele, para un tópico específico: los paralelogramos. La validez de dicha propuesta se realiza ilustrando de qué manera se pueden reconocer en las respuestas de las estudiantes algunas de las características específicas definidas para cada nivel.

En consecuencia, nuestro trabajo de investigación debe responder a la siguiente pregunta: ¿qué nivel de razonamiento respecto al objeto paralelogramos evidencian los estudiantes de primer año de secundaria al aplicar una secuencia de actividades basada en el modelo van Hiele?

La metodología empleada en el trabajo será de corte cualitativo y se considerará tres momentos: descripción de la actividad, análisis de la actividad y la interpretación de los resultados.

Palabras claves: Paralelogramo, transición, caracterización de los niveles, cualitativa.

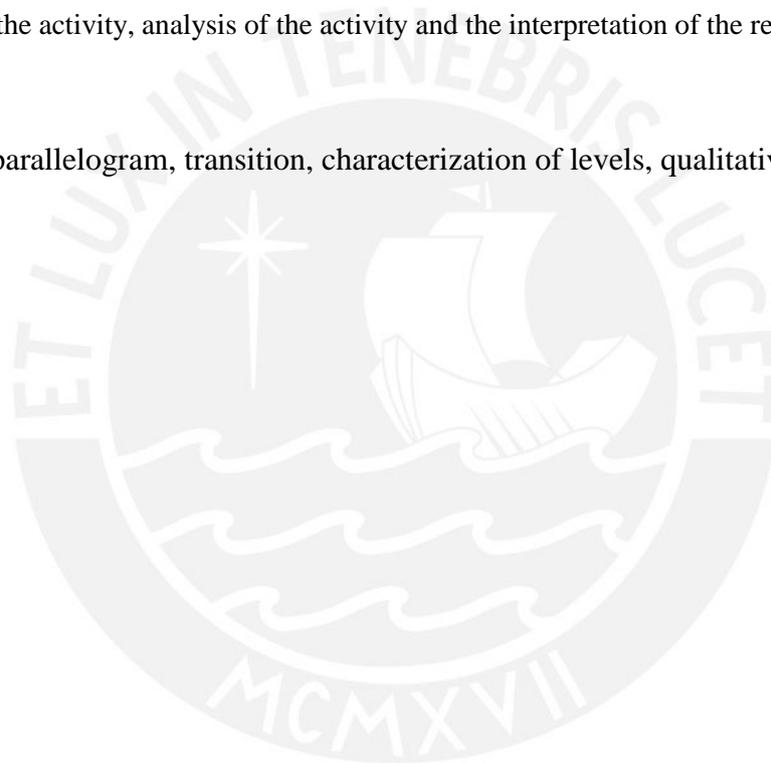


ABSTRACT

In the present work, it shows how you can adjust the levels of geometric reasoning proposed by the model of Van Hiele for a specific topic: the parallelograms. The validity of such a proposal is made to illustrate how they can be recognized in the answer of student some of the specific characteristics defined for each level.

In consequence, our work of investigation must answer to the following question: what level of reasoning with regard to the object parallelograms demonstrate the students of the first year of secondary on having applied a sequence of activities based on the model of Van Hiele? The methodology used in the work will be of qualitative cut and will be considered three moments: description of the activity, analysis of the activity and the interpretation of the results.

Key words: parallelogram, transition, characterization of levels, qualitative.



LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Discretitud de la adquisición de los niveles de Van Hiele.....	15
Figura 2. Continuidad de la adquisición de los niveles de Van Hiele.....	16
Figura 3. Clasificación de los Cuadriláteros	20
Figura 4. Área del Rectángulo y del Cuadrado	21
Figura 5. Polígono.....	22
Figura 6. Área de un Rectángulo.....	22
Figura 7. Área de un romboide.....	23
Figura 8. Área del rombo	24
Figura 9. Área del cuadrado.	24
Figura 10. Concepto de paralelogramo y trapecio	25
Figura 11. Romboide y trapecio.....	26
Figura 12. Conceptos de paralelogramos.....	26
Figura 13. Paralelogramos.....	27
Figura 14. Clasificación de los Cuadriláteros	28
Figura 15. Competencias, capacidades e indicadores de logro	29
Figura 16. Cuadriláteros.....	30
Figura 17. No Cuadriláteros.....	31
Figura 18. Diagonales en un paralelogramo.....	31
Figura 19. Tipos de Cuadriláteros	32
Figura 20. Paralelogramos.....	32
Figura 21. Rectángulos.....	33
Figura 22. Rombo.....	34
Figura 23. Demostración de un Rombo	34
Figura 24. Cuadrado.....	35
Figura 25. Romboide.....	36
Figura 26. Trapecio	36
Figura 27. Trapecio Isósceles.....	37

Figura 28. Trapecio Rectángulo37

Figura 29. Clasificación Jerárquica de los Cuadriláteros38

Figura 30. Paralelogramos.....102

Figura 31. Identificación de Paralelogramos.....103

Figura 32. Construcción de paralelogramos104

Figura 33. Cuadriláteros.....106

Figura 34. Clasificación de los Paralelogramos109

Figura 35. Semejanzas y diferencias de cuadriláteros.....110



LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Indicadores de desempeño que corresponden a cada grado en donde se encuentra el objeto de estudio.....	52
Tabla 2: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 1, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.....	54
Tabla 3: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 2, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.....	55
Tabla 4: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 3, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.....	56
Tabla 5: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 4, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.....	57
Tabla 6: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 5, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.....	58
Tabla 7: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 6, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.....	59
Tabla 8: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 7, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.....	60
Tabla 9: Análisis de las respuestas del estudiante 1	64
Tabla 10: Análisis de las respuestas del estudiante 2	70
Tabla 11: Análisis de las respuestas del estudiante 3	76
Tabla 12: Análisis de las respuestas del estudiante 4	81
Tabla 13: Análisis de las respuestas del estudiante 5	86
Tabla 14: Identificación de los niveles del estudiante 1	91
Tabla 15: Identificación de los niveles del estudiante 2.....	92
Tabla 16: Identificación de los niveles del estudiante 3.....	93
Tabla 17: Identificación de los niveles del estudiante 4.....	93
Tabla 18: Identificación de los niveles del estudiante 5.....	94
Tabla 19: Actividad 1. Respuesta de los estudiantes.....	111
Tabla 20: . Actividad 2.Resultado del estudiante 1	113
Tabla 21: Actividad 2. Resultado del estudiante 2	114

Tabla 22: Actividad 2. Resultado del estudiante 3.....	115
Tabla 23: Actividad 2. Resultado del estudiante 4.....	116
Tabla 24: Actividad 2. Resultado del estudiante 5.....	117
Tabla 25: Actividad 3. Resultado del estudiante 1.....	117
Tabla 26: Actividad 3. Resultado del estudiante 2.....	118
Tabla 27: Actividad 3. Resultado del estudiante 3.....	118
Tabla 28 : Actividad 3. Resultado del estudiante 4.....	119
Tabla 29: Actividad 3. Resultado del estudiante 5.....	119
Tabla 30: Actividad 4. Resultado del estudiante 1.....	120
Tabla 31: Actividad 4. Resultado del estudiante 2.....	120
Tabla 32: Actividad 4. Resultado del estudiante 3.....	121
Tabla 33: Actividad 4. Resultado del estudiante 4.....	121
Tabla 34: Actividad 4. Resultado del estudiante 5.....	121
Tabla 35: Actividad 5. Resultado del estudiante 1.....	122
Tabla 36: Actividad 5. Resultado del estudiante 2.....	123
Tabla 37: Actividad 5. Resultado del estudiante 3.....	124
Tabla 38: Actividad 5. Resultado del estudiante 4.....	125
Tabla 39: Resultado de la actividad del estudiante 5. Actividad 5.....	126
Tabla 40: Resultado de la actividad del estudiante 1. Actividad 6.....	127
Tabla 41: Resultado de la actividad del estudiante 2. Actividad 6.....	128
Tabla 42: Resultado de la actividad del estudiante 3. Actividad 6.....	129
Tabla 43: Resultado de la actividad del estudiante 4. Actividad 6.....	130
Tabla 44: Resultado de la actividad del estudiante 5. Actividad 6.....	131
Tabla 45: Resultado de la actividad del estudiante 1. Actividad 7.....	132
Tabla 46: Resultado de la actividad del estudiante 2. Actividad 7.....	133
Tabla 47: Resultado de la actividad del estudiante 3. Actividad 7.....	134
Tabla 48: Resultado de la actividad del estudiante 4. Actividad 7.....	135
Tabla 49: Resultado de la actividad del estudiante 5. Actividad 7.....	136

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	12
CAPÍTULO I: LA PROBLEMÁTICA	14
1.1. ANTECEDENTES	14
1.2 JUSTIFICACIÓN	17
1.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	28
1.4. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.....	29
CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO PARALELOGRAMOS	30
2.1 ESTUDIO DE LOS PARALELOGRAMOS	30
2.2. CLASIFICACIÓN JERÁRQUICA DE LOS CUADRILÁTEROS	38
CAPÍTULO III: ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO CONSIDERADO EN LA INVESTIGACIÓN	39
3.1. LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA	40
3.2. LAS FASES DEL MODELO DE VAN HIELE.....	43
3.3 DESCRIPCIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO PARA LOS PARALELOGRAMOS	45
3.4. MARCO METODOLÓGICO.....	50
3.5. METODOLOGIA “ESTUDIO DE CASO”	50
CAPÍTULO IV: DISEÑO DE ACTIVIDADES	52
4.1. DISEÑO DE ACTIVIDADES Y RESPUESTAS ESPERADAS.....	53
CAPÍTULO V: IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS	61
5.1. APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES	61
5.2. ASIGNACIÓN DE NIVELES EN LAS RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES ...	63
5.3. NIVELES DE RAZONAMIENTO IDENTIFICADOS EN LOS ESTUDIANTES ..	91
CONCLUSIONES	95
ANEXOS 1: ACTIVIDADES DISEÑADAS.....	102

ANEXO 2: RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES	111
ANEXO 3: ESCANEADO DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	137



INTRODUCCIÓN

La presente investigación tiene como fundamento teórico al modelo de Van Hiele, que está constituido por niveles de razonamiento y como enfoque metodológico, a la investigación cualitativa que permitirá interpretar las respuestas de los estudiantes.

Para nuestra investigación, se adaptaron los niveles de razonamiento para el tema de paralelogramos y se definieron características que permitirán reconocer en las respuestas de los estudiantes rasgos de algunos de estos niveles.

Al tomar como base el modelo de Van Hiele, se consideran dos aspectos importantes del modelo: descriptiva en la que se identifica una secuencia de razonamientos llamados “Niveles de razonamiento” y, la instructiva que sugiere a los docentes como ayudar a los estudiantes alcanzar un nivel superior.

La investigación responderá a la pregunta ¿qué nivel de razonamiento respecto al objeto paralelogramo evidencian los estudiantes de primer año de secundaria al aplicar una secuencia de actividades basadas en el modelo de Van Hiele?

A continuación presentaremos la estructura de la investigación compuesta por VI capítulos:

En el primer capítulo, se presenta el problema de investigación, en el diversos investigadores explican los razonamientos que desarrollan los estudiantes cuando realizan actividades geométricas basadas en el modelo de Van Hiele.

En el segundo capítulo, presentamos el objeto matemático “paralelogramos” cuyas definiciones y propiedades serán fundamentales para nuestra investigación.

En el tercer capítulo, se presenta aspectos importantes como: el marco teórico de la investigación al modelo de Van Hiele y la descripción de los niveles de razonamiento para los paralelogramos.

En el cuarto capítulo, presentamos el marco metodológico bajo un enfoque cualitativo, utilizando como metodología al “estudio de caso”

En el quinto capítulo, presentamos el diseño de las actividades que contempla dos aspectos importantes: la caracterización de cada uno de los niveles para los paralelogramos y los indicadores que permitirán identificar a cada uno de los niveles.

En el sexto capítulo, se presenta la implementación y el análisis de las respuestas de los sujetos de estudio para cada una de las actividades y los niveles identificados de cada uno de los estudiantes.

Finalmente, se presentan las conclusiones que responden a nuestros objetivos.

Concluimos nuestro trabajo de investigación presentando las referencias y anexos.



CAPÍTULO I: LA PROBLEMÁTICA

Este capítulo presenta investigaciones que han centrado su interés en la identificación y análisis de las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en especial del objeto paralelogramos en la Educación Secundaria.

En este sentido, la teoría de Van Hiele a través de diversas exploraciones determinó que durante el proceso de aprendizaje de la geometría, el estudiante avanza por una serie de niveles de pensamiento que son consecutivos, que no están asociados con la edad y para poderlos alcanzar se deben de realizar actividades adecuadas que permitan apropiarse de manera escalonada cada uno de estos niveles.

Por tal motivo nuestra investigación se centra en el Modelo de razonamiento de Van Hiele que permite identificar de qué manera evolucionan los estudiantes en su comprensión respecto a un objeto geométrico. Este capítulo presentamos los antecedentes, justificación, el problema de investigación y los objetivos de la investigación.

1.1. ANTECEDENTES

Muchos investigadores pretenden explicar los razonamientos que se desarrollan cuando los estudiantes realizan actividades geométricas. En las últimas cuatro décadas, varias teorías han tratado de describir y explicar los diferentes niveles de desarrollo cognitivo.

Entre una de las teorías importantes sobre el razonamiento geométrico, es la teoría de Van Hiele, que surge como una posible solución a la gran cantidad de dificultades que encontraban los estudiantes a la hora de aprender geometría, esto les permitió identificar una secuencia de tipos de razonamiento llamado los “niveles de razonamiento”. Al respecto Van Hiele (1957) mencionó un aspecto importante en su investigación como:

Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aun así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el alumno alcance nivel superior de pensamiento. (p. 289).

Asimismo, los aportes de Fuys, Geddes, Lovett y Tischler (1988) describen como un aprendiz identifica nombres, compara y opera en figuras geométricas y están de acuerdo que el alcanzar un nivel de razonamiento, facilita la adquisición de los niveles para otros conceptos.

(p.1)

De la misma forma, Lastra (2005) para su investigación, utilizó el modelo de Van Hiele para verificar a través de una prueba tipo objetiva y de observación los logros de aprendizaje en estudiantes de escuelas críticas. (p.22)

Guillén (1997) utiliza para su investigación el modelo de Van Hiele y establece una serie de descriptores que le permitieron caracterizar los tres primeros niveles de pensamiento geométrico para sólidos. (pp. 105-106)

En un primer artículo seleccionado, Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Bautista, Peñas y Ruiz (1994), ofrecen una propuesta curricular para la enseñanza de la geometría en polígonos, triángulos y cuadriláteros. A su vez diseñan actividades didácticas de acuerdo al modelo de Van Hiele y utilizan caracterizaciones para cada uno de los niveles, que facilitarán al estudiante transitar por cada uno ellos. (p. 36)

Gutiérrez y Jaime (1991) introducen el concepto de “grados de adquisición” de los niveles y a su vez menciona que el modelo de Van Hiele permite determinar la forma como como se produce la evolución del razonamiento geométrico y la manera de cómo ayudar a los estudiantes a mejorar su capacidad de razonamiento para alcanzar el nivel superior de pensamiento (p. 49).

Inicialmente, el Modelo de Van Hiele asumía que el paso de un nivel a otro se producía de manera brusca, llamando a este proceso como: Discretitud de la adquisición de los niveles de Van Hiele. La figura 1 muestra este supuesto esquematizándolo con una “escalera”.

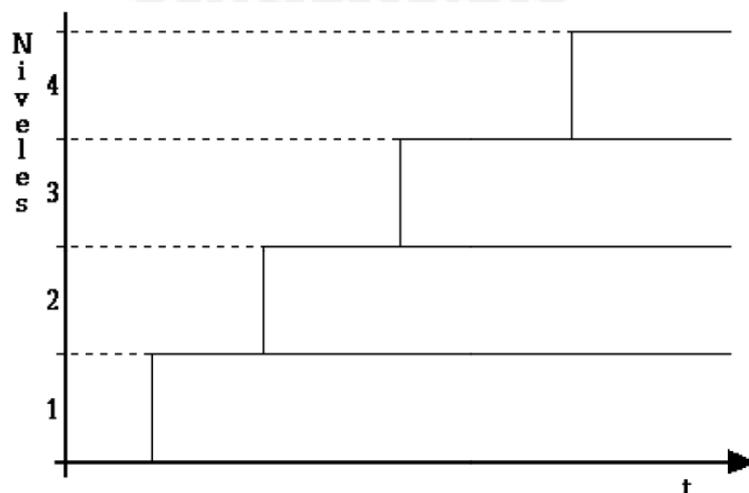


Figura 1. Discretitud de la adquisición de los niveles de Van Hiele

Fuente: Jaime (1993, p. 16)

Posteriormente, Jaime (1993), Gutiérrez y otros (1991) realizan aportes importantes al modelo, señalando que los estudiantes pueden razonar simultáneamente en dos niveles consecutivos.

En la fig. 2 se presenta un esquema en donde se evidencia la existencia de estudiantes que pueden encontrarse en dos niveles consecutivos, esto llevó a que algunos investigadores consideren los “grados de adquisición”.

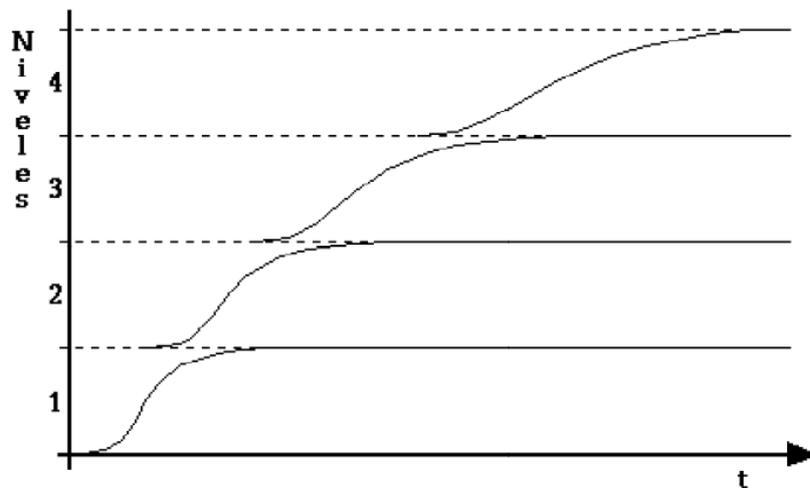


Figura 2. Continuidad de la adquisición de los niveles de Van Hiele.
Fuente: Jaime (1993, p. 17)

Por ello, las últimas investigaciones consideraron que el proceso de la continuidad de la adquisición de los niveles tiene mayor relevancia y produce mejores resultados en el análisis del razonamiento de los estudiantes. Es decir, no se produce de manera brusca, existe un periodo de transición, donde se combinan momentos de razonamiento de dos niveles consecutivos.

A su vez, todas estas investigaciones acerca de los niveles de Van Hiele, llegaron a un común acuerdo, si el estudiante alcanza un nivel de razonamiento para un determinado concepto, este proceso facilitará la adquisición de los niveles para los otros conceptos.

Desde este enfoque, el papel del profesor será brindar orientaciones didácticas oportunas, que permitan al estudiante pasar de un nivel de pensamiento a otro más avanzado, cuyo objetivo es promover el desarrollo del pensamiento geométrico.

Preocupado por esta situación, Maguiña (2013) diseña una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros, bajo el enfoque de las fases de aprendizaje del modelo de Van

Hiele, para transitar de un nivel de razonamiento geométrico a otro superior, dirigidas para estudiantes de cuarto grado de educación secundaria en una institución particular.

Para nuestra investigación, se adaptaran los niveles de razonamiento para los paralelogramos y de acuerdo a las respuestas de los estudiantes asociarlas a las características que se encuentran definidas en cada uno de los niveles, Según el marco teórico el paso de un nivel a otro se realizará de manera gradual o en un periodo de transición .

1.2 JUSTIFICACIÓN

Nuestro trabajo de investigación presenta dos aspectos importantes de acuerdo al modelo de Van Hiele, el primero es evidenciar como se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes a través de actividades basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, donde a través de una adecuada instrucción, podrá comprender lo que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel y como el docente al organizar estas actividades puede ayudar a los estudiantes alcanzar estos niveles, para la comprensión de los paralelogramos.

En este trabajo se presentaran caracterizaciones para cada uno de los niveles, que permitan al estudiante adquirir un nivel de razonamiento adecuado.

Justificación general

Las investigaciones descritas hacen referencia de las dificultades que encuentran los estudiantes cuando desarrollan actividades geométricas, obteniéndose un bajo nivel de razonamiento, así como problemas en el aprendizaje de los contenidos sobre paralelogramos.

La teoría desarrollada por Van Hiele surgió como una solución a las dificultades que encontraban los estudiantes para aprender geometría. En dicho modelo teórico se consideran niveles de razonamiento geométrico que van dando muestras de un progreso gradual en el aprendizaje de los conceptos geométricos (Ramírez, 2014).

A pesar de los esfuerzos, que el Ministerio de Educación (MINEDU) en el diseño curricular para el área de matemática, busca que el estudiante que desarrolle su pensamiento integral y crítico, el cual lo oriente a desarrollar y aplicar estrategias para la resolución de problemas, muchas investigaciones demuestran que la mayor parte de los estudiantes no alcanzan los conocimientos exigidos por dicho ministerio y como consecuencia manifiestan un bajo nivel de razonamiento en el área de matemática.

En el Perú (2012), el diseño curricular nacional para estudiantes de matemática de primer año de secundaria en geometría, el tema esencial para este grado son la clasificación de los polígonos, donde nuestro objeto de estudio está inmerso, llamado cuadriláteros. En nuestra experiencia docente encontramos que los estudiantes tienen dificultad no solo para definir cuadriláteros, sino también para clasificarlos, debido a estas dificultades se hace necesario buscar herramientas que permitan que los estudiantes desarrollen su capacidad de razonamiento. El Ministerio de Educación del Perú, brinda fascículos llamados Rutas de Aprendizaje que son herramientas muy importantes cuya finalidad es mejorar capacidades conocimientos y actitudes de los estudiantes.

Dentro de estos fascículos en el número 3, se encuentran diversos investigadores que presentaron una propuesta orientadora para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, entre ellos el modelo de Van Hiele. Este último en el cual se basa nuestra investigación, explícita los niveles por los estudiantes deben transitar empezando desde el nivel 1 al 5, a su vez mencionan las características específicas de cada nivel. Esto muestra que es pertinente la elección del marco teórico considerado en esta investigación.

Además, como un aporte adicional Perú (2010), entrega a todos los maestros a nivel nacional en sus respectivas áreas, un documento llamado “orientaciones para el trabajo pedagógico”. En el capítulo 2.2 se encuentran estrategias para la enseñanza de las matemáticas y propone utilizar el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, cuyos niveles se encuentran secuenciados del 0- 4 y utilizar las fases de aprendizaje para organizar sus actividades. (p. 69)

Es importante señalar, que los estándares expresan las metas de aprendizaje que deben ser logradas por los estudiantes al concluir un ciclo, esto permitirá identificar el nivel de desempeño de los estudiantes y diseñar actividades adecuada para cada ciclo cuyo indicador para el VI Ciclo es:

Discrimina información e identifica relaciones no explícitas de situaciones referidas a atributos, localización y transformación de objetos, y los expresa con modelos referidos a formas bidimensionales compuestas relaciones de paralelismo, perpendicularidad, posiciones y vistas de cuerpos geométricos. Selecciona y usa el modelo más pertinente a una situación y comprueba si este le permitió resolverla. Expresa usando reglas y propiedades de formas bidimensionales. (Perú 2010, p. 51)

Como resultado de un trabajo de investigación realizado por Corberán et al. (1994) se encontró que los estudiantes no se encontraban preparados para el curso de geometría, porque sus resultados evidenciaban diferentes niveles de razonamiento, sugiriendo a los docentes que desarrollen procedimientos adecuados para mejorar el aprendizaje del estudiante.

En particular, las investigaciones desarrolladas por Morales y Maje (2011) señalan que una de las características más relevantes en relación a los esquemas mentales que se forman los estudiantes es que están supeditadas por figuras prototípicas y a su apariencia global, donde los estudiantes logren identificar, nombrar y comparar.

Tratamiento matemático del concepto de paralelogramo en los textos didácticos

Es importante resaltar que el MINEDU distribuye textos escolares a todas las instituciones nacionales, de modo que dichos libros juegan un papel fundamental para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, en particular de los paralelogramos.

Aunque textos escolares no deberían ser el único recurso empleado por el docente para el diseño de sus clases, en la práctica tienen una gran influencia en el maestro y se convierte en un elemento que refleja lo que este hace en clase.

Para esta investigación mostraremos el tratamiento que reciben los paralelogramos en dichos textos. Se prestará especial atención a la forma en la que se introducen las definiciones, clasificaciones, propiedades y a cómo estas podrían contribuir al proceso de construcción del pensamiento geométrico. Además, se buscará identificar posibles obstáculos didácticos originados por la forma en la que se organiza en el texto, en relación a los paralelogramos.

Como el tema de investigación son los paralelogramos y estos parecen el Diseño Curricular Nacional (2012) en grados previos al primero de secundaria, se analizaron también los libros de 5to y 6to grado de primaria.

Debemos señalar que en algunos casos las figuras escaneadas que aparecen en los textos fueron mejoradas para una mejor presentación.

Matemática 5to. de Primaria Bruño (2011)

En la revisión del libro didáctico de matemática para 5to. grado de primaria se encontró que la representación muestra una clasificación particional de paralelogramos. Según esto, un cuadrado sería un rectángulo, debido a que tienen ángulos rectos. Respecto a la definición de rectángulo solo menciona que sus ángulos deben ser rectos, no exige ninguna condición sobre

la medida de los lados opuestos. De manera análoga, relaciona al rombo que sus lados tienen la misma longitud y no señala ninguna condición sobre los ángulos consecutivos y opuestos. Según esto, un cuadrado también sería un rombo por tener los lados de la misma longitud.

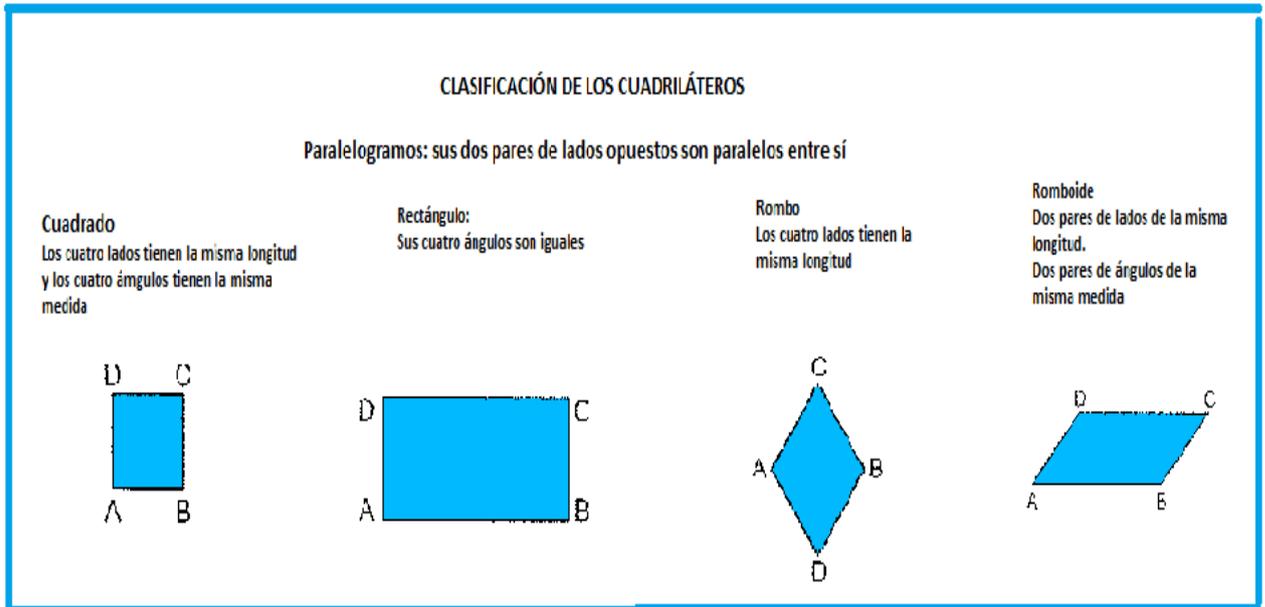


Figura 3. Clasificación de los Cuadriláteros
Fuente: Bruño (2011 a, p. 52)

En la figura 3, del texto de Bruño, clasifica a los cuadriláteros de manera particional, pero muestra una característica común para el cuadrado, rectángulo y rombo el tener sus cuatro lados de la misma longitud, no utiliza la palabra congruentes para no confundir a los estudiantes.

El texto incorpora situaciones problemáticas y actividades complementarias, utilizando un lenguaje sencillo pero formal.

Matemática 6to. de Primaria Bruño (2011)

El libro de matemática para 6to. de primaria presenta ilustraciones, información histórica, actividades individuales y grupales, a su vez aparecen notas que amplían la información. En el capítulo sobre el tema de paralelogramos, encontramos el tema “Aplicación de fórmulas”, iniciando con una actividad en donde los estudiantes construirán figuras geométricas donde se les pide construir un cuadrado, al trazar una diagonal se señala que este se transforma en dos triángulos; con los dos triángulos se les pide que formen polígonos. Finalmente, en un papel rectangular se les pide que tracen una diagonal y con la nueva figura obtenida calcular sus áreas. Todo ello se hace con la finalidad de introducir a los estudiantes en el cálculo de áreas

de figuras geométricas como rectángulo, cuadrado, rombo, trapecio y paralelogramo.

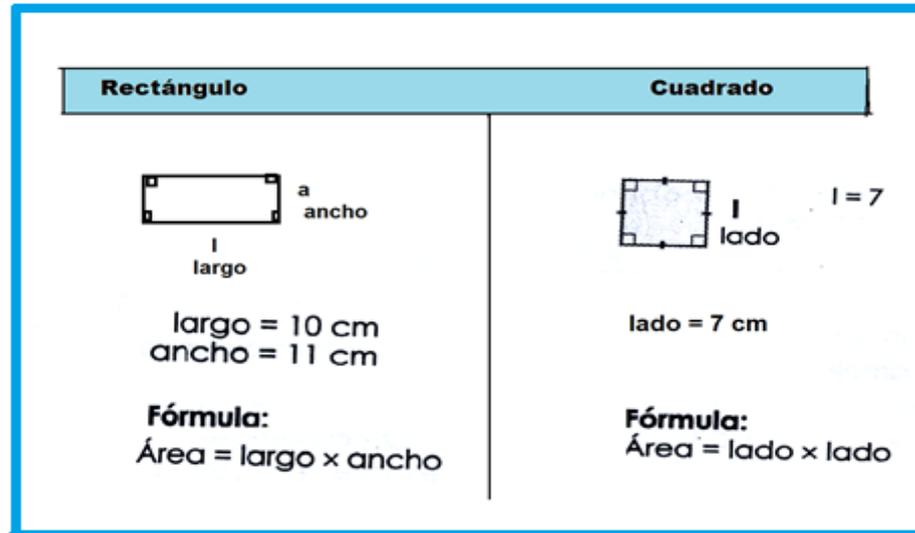


Figura 4. Área del Rectángulo y del Cuadrado

Fuente: Bruño (2011 b, p. 52)

Como se observa en la figura 4, el autor realiza las actividades enfocadas al cálculo de áreas de manera independiente, usando fórmulas para obtener áreas. Este proceso de enseñanza aprendizaje está basado en la memorización de fórmulas, no considera las habilidades de visualización y construcción de figuras.

Matemática 1 de Secundaria. Norma (2012)

En el texto de primero de secundaria, se ha encontrado el objeto de estudio paralelogramo aparece cuando se presenta la clasificación de los polígonos a su vez muestra información importante que los polígonos son figuras cerradas. Respecto a la clasificación de los polígonos, esta se hace según el número de lados y la medida de estos, así como de sus ángulos. Se asignan nombres a los polígonos según el número de lados.

Un polígono es una figura geométrica cerrada formada por tres o más segmentos consecutivos no alineados

Los polígonos se clasifican de la siguiente forma:

Según la medida de sus lados y ángulos		Según el número de lados
Equiláteros: sus lados tienen igual medida.		Triángulo: 3 lados
Equiángulos: sus ángulos tienen igual medida.		Cuadrilátero: 4 lados
Regulares: son equiláteros y equiángulos a la vez.		Pentágono: 5 lados
Irregulares: sus lados y ángulos no tienen igual medida.		Hexágono: 6 lados
		Heptágono: 7 lados
Convexos: todos sus ángulos interiores miden menos de 180°.		Octágono: 8 lados
		Nonágono: 9 lados
Cóncavos: tienen uno o más ángulos internos cuya medida es mayor que 180°.		Decágono: 10 lados
		Undecágono: 11 lados
		Dodecágono: 12 lados
		Icoságono: 20 lados

Figura 5. Polígono
Fuente: Norma (2012, p. 179)

De otro lado, en el texto se trata de justificar la fórmula para calcular el área de un paralelogramo, al mostrar cómo un paralelogramo se puede obtener a partir de un rectángulo, como se observa en la figura 6.

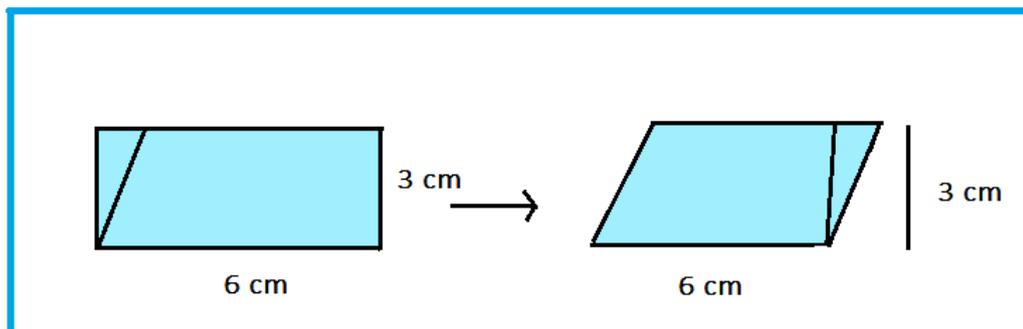


Figura 6. Área de un Rectángulo
Fuente: Norma (2012, p. 181)

Consideramos que la justificación debería darse siguiendo el proceso inverso, es decir que se debe transformar el romboide en rectángulo, trazando la altura y trasladar esta área al otro extremo, la figura queda convertida en un rectángulo, como se observa en la figura 7.

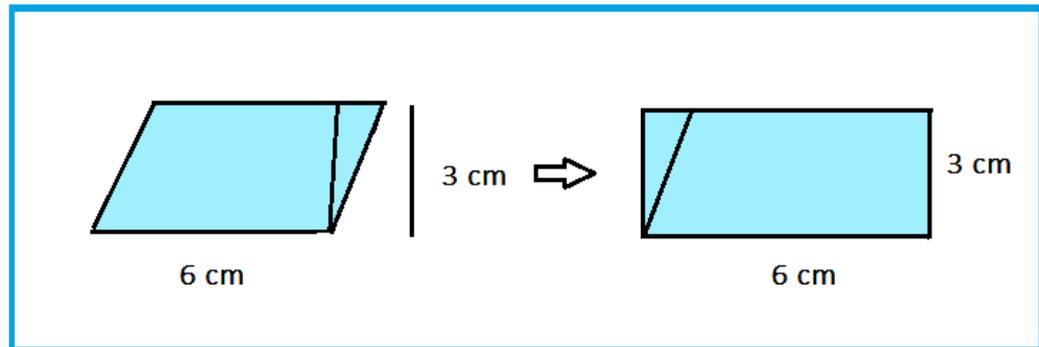
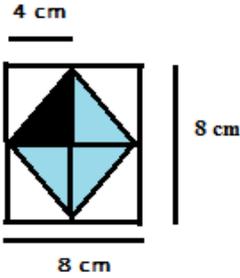


Figura 7. Área de un romboide
Fuente: Norma (2012, p. 181)

También se observa que la justificación se apoya únicamente en las figuras, no se enfatizan las propiedades de ese cuadrilátero, que son las que realmente justifican el procedimiento. Dichas propiedades son que los lados opuestos son iguales, los lados opuestos son paralelo y que sus ángulos opuestos son iguales.

El autor describe el procedimiento para calcular el área de un rombo, a partir de su descomposición en cuatro triángulos rectángulos iguales. Sin embargo, como parte de los argumentos señala que dicho rombo ha sido ubicado dentro de un rectángulo; en realidad, pudo ser más específico e indicar que cada triángulo rectángulo está inscrito dentro de un cuadrado. Así, para calcular el área del rombo, primero determina el área del triángulo rectángulo que está sombreado de un color oscuro y luego lo multiplica el resultado de esta área por cuatro, que es la cantidad de triángulos rectángulos. Determina el área del rectángulo y deduce finalmente que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo, como se observa en la figura 8.

Área del rombo
El área de un rombo es igual a cuatro veces el área de cada uno de los triángulos cerrados



Área del rombo: $4 (\text{ triángulos}) = \frac{4 (4 \times 4)}{2} = 32$

Área del rectángulo: $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$

Entonces el área del rombo es igual a la mitad del área del rectángulo que lo contiene.

Figura 8. Área del rombo
Fuente: Norma (2012, p. 181)

La mayor parte de las actividades propuestas se refieren al cálculo de áreas. En particular, el autor sólo pide calcular el área de un cuadrado y a su derecha tiene a un rombo, al parecer en este gráfico olvidaron preguntar por el área del rombo. Es esta parte el autor asume que los estudiantes relacionen que el cuadrado y el rombo tienen una característica en común; tienen lados de la misma medida, pero no se evidencia el procedimiento como en los anteriores ejercicios. Puede darse el caso que el estudiante piense que ambos gráficos tienen la misma área. El autor espera que el estudiante utilice fórmulas para determinar el área del cuadrado. En este tipo de problemas el estudiante aplica fórmulas de manera mecánica, como se observa en figura 9

Calcular el área del cuadrado

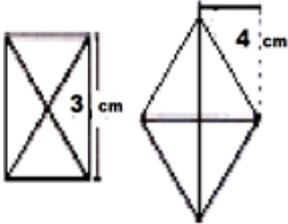


Figura 9. Área del cuadrado.
Fuente: Norma (2012, p. 181)

Así, respecto a las actividades propuestas se encontró que estas no promueven que los estudiantes reconozcan las diferencias que existen entre diversas figuras, como el rectángulo, el romboide, cuadrado y el rombo, más allá de las formulas asociadas.

Matemática 1 de secundaria - De la Cruz (1985)

Dado que en este texto las definiciones y las propiedades de los paralelogramos son presentadas de manera más clara, ha sido considerado también como parte de estudio que inicialmente solo contemplaba los textos oficiales. El autor de este libro aborda el estudio de las formas geométricas en dos y tres reconociendo y aplicando fórmulas referentes a áreas y volúmenes. Para el estudio los cuadriláteros, el autor los clasifica en paralelogramos y trapecios, según tengan dos pares o un par de lados paralelos.

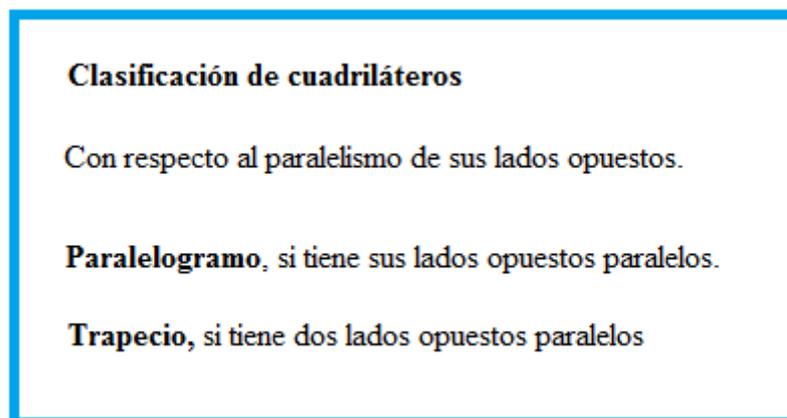


Figura 10. Concepto de paralelogramo y trapecio
Fuente: De la Cruz (1985, p. 251)

A manera de ejemplo, se presentan las figuras, en donde se muestra que el texto rescata ideas centrales como el concepto de paralelismo para distinguir a los paralelogramos de los trapecios como tipo de cuadrilátero. Esta definición es relevante para el estudiante porque de esta manera podrá agrupar figuras geométricas que cumplen estas características.

En este gráfico, el autor hace una diferencia entre un romboide y un trapecio, donde se puede observar que el romboide tiene dos pares de lados paralelos de la misma medida, en cambio en el trapecio se evidencia que solo tiene un solo par de lados paralelo pero no tienen la misma medida, como se observa en la figura 11.

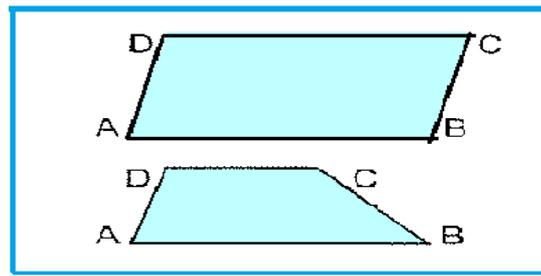


Figura 11. Romboide y trapecio.
Fuente: De la Cruz (1985, p. 251)

Aunque los paralelogramos se presentan por figuras prototípicas, se rescata el que estas sean agrupadas por tener una característica común: todos ellos tienen lados paralelos. Pero también, se establecen distinciones, así por ejemplo, se señala que la primera figura es un rectángulo porque tiene cuatro ángulos rectos, el rombo se caracteriza por tener lados iguales pero ángulos no rectos, el cuadrado es el cuadrilátero de lados iguales y de ángulos rectos y los romboides por tener lados paralelos de la misma medida, como se observa en la figura 12.

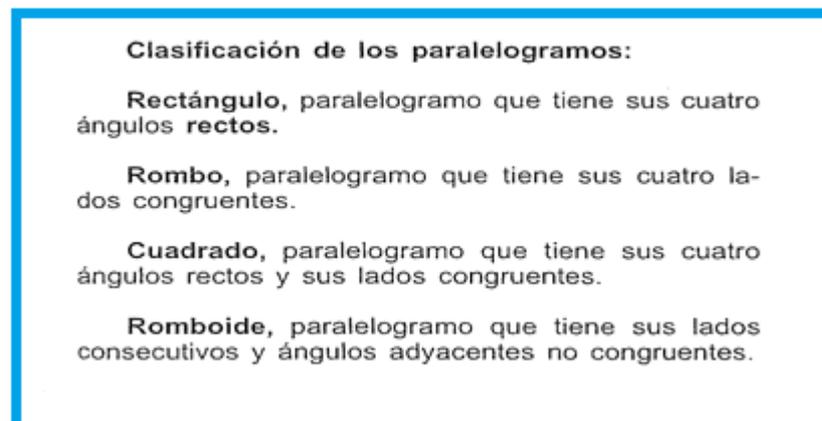


Figura 12. Conceptos de paralelogramos.
Fuente: De la Cruz (1985, p. 251)

Además se puede establecer relaciones entre las propiedades, como el que un rectángulo y un cuadrado tienen ángulos rectos y se menciona que un cuadrado es un caso particular del rectángulo. De la misma manera, se señala que el cuadrado y el rombo tienen lados de igual medida y se establece que el cuadrado es un caso particular de rombo, como se observa en la fig. 13

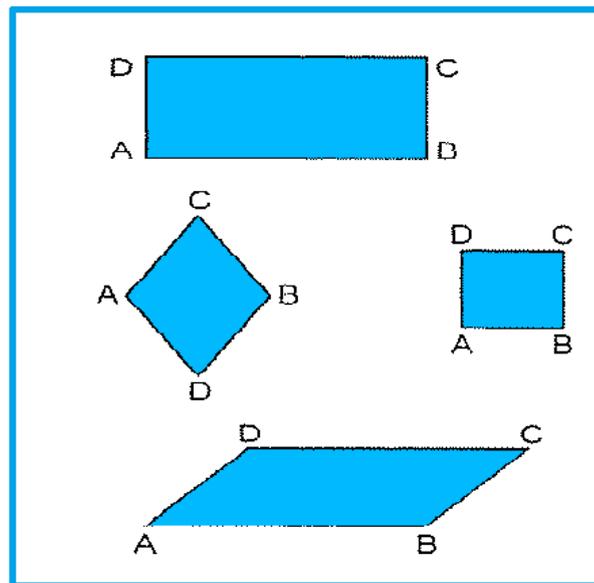


Figura 13. Paralelogramos.
Fuente: De la Cruz (1985, p. 251)

A manera de síntesis, presentamos las siguientes reflexiones:

En el análisis de cada texto, observamos que el objeto de estudio es enfocado de diversas maneras. Así por ejemplo, en el texto de 5to grado, el autor clasifica a los cuadriláteros, dividiéndolos en paralelogramos y trapecios. En el conjunto de paralelogramos se encuentran los cuadrados, los rombos, los rectángulos y el romboide, enfatizándose en las propiedades que distinguen a unos de otros.

Mientras que en el de sexto grado el énfasis está puesto en el cálculo de áreas de los distintos tipos de paralelogramos a partir de la descomposición de estas figuras en varios triángulos y emplear el área de un triángulo. De esta manera, en el sexto grado ya no se enfatiza en los elementos de los cuadriláteros y las relaciones entre sus lados y ángulos, si no en el cálculo de magnitudes tales como el área.

De otro lado, en la mayor parte de los textos se propone iniciar los temas a partir de definiciones formales sin considerar momentos para explorar sobre los saberes previos de los estudiantes considerar preguntas que permitan construir las definiciones. Al respecto, se sugiere plantear actividades que permitan que los estudiantes reconozcan los elementos y las relaciones entre ellos, que son fundamentales y deben estar presentes en las definiciones.

Del estudio realizado se plantea la necesidad de incorporar actividades sobre paralelogramos que enfatizan en el reconocimiento de propiedades y características que los relacionan y

distinguen. Por ejemplo, se podrían plantear preguntas para que los estudiantes distingan entre paralelogramos que tienen ángulos rectos de los que no los tienen, de modo que concluyan que en el primer conjunto se encuentran los cuadrados y rectángulos, mientras que en el segundo grupo están el Rombo y Romboide

Lo anterior permitirá luego organizar los resultados obtenidos en esquemas como el siguiente:

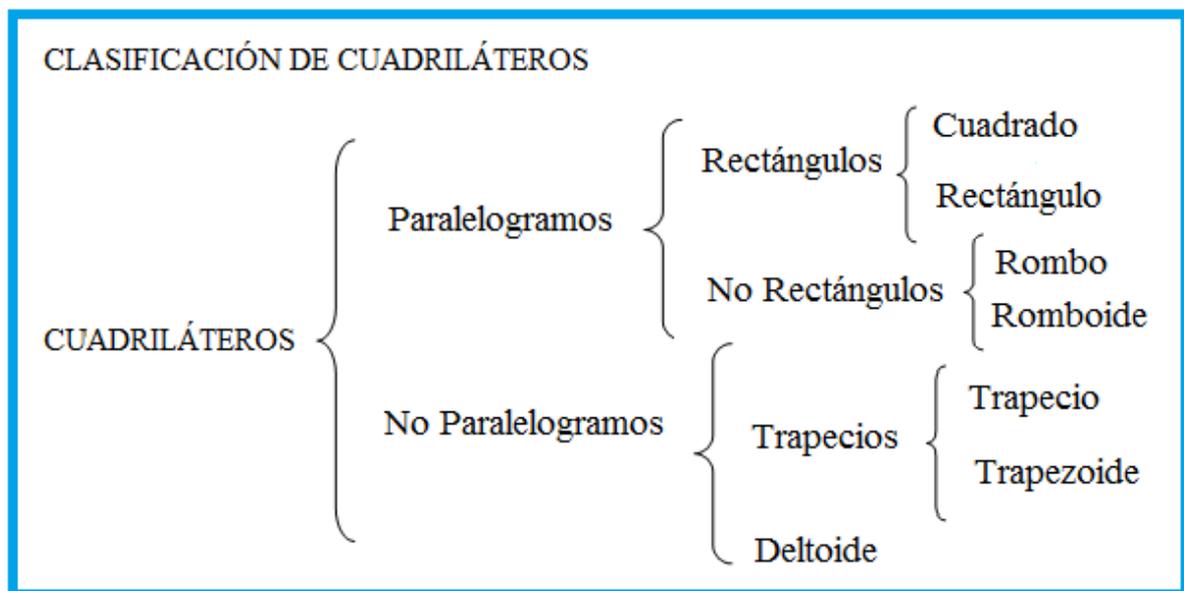


Figura 14. Clasificación de los Cuadriláteros

Del estudio de los textos se tiene que al parecer en el nivel previo (la primaria) no se han planteado actividades que propicien la adquisición de niveles de razonamiento avanzados, como el nivel 2 o 3, según el modelo van Hiele.

Es necesario que los textos consideren actividades que propicien la evolución de niveles de razonamiento.

1.3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

De lo anterior se han encontrado argumentos que justifican la necesidad de diseñar actividades, en particular para el tema de paralelogramos, teniendo en cuenta un modelo para el aprendizaje de dicho concepto. Como una etapa previa se hace necesario realizar un diagnóstico sobre los niveles de razonamiento que se propician cuando se desarrollan actividades basadas en textos como los descritos. Por ello se plantea realizar una investigación con la finalidad de identificar el nivel de razonamiento geométrico que han alcanzado estudiantes en cuya formación se han empleado los textos oficiales. A partir de los resultados encontrados se plantearán recomendaciones.

Será importante considerar que los contenidos geométricos en base a los cuales se construirán las actividades exploratorias estén de acuerdo a los que se describen en los documentos oficiales como el Diseño Curricular Nacional que contempla un organizador para geometría y medición. Entre los contenidos específicos se encuentran los cuadriláteros, clases, propiedades, áreas y perímetros.

En el siguiente cuadro se presenta la competencia específica para los paralelogramos, así como los indicadores de desempeño de las capacidades que se desarrollarán durante el nivel.

COMPETENCIAS	CAPACIDADES	INDICADORES DE LOGRO
3. Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma y movimiento.	3.1. Matematiza situaciones	3.1.3. Identificamos características de los objetos de su entorno según sus lados, ángulos, paralelismo o perpendicularidad y los expresa en un modelo basado en paralelogramos. 3.1.4. Usa un modelo basado en paralelogramos al plantear o resolver una situación.

Figura 15. Competencias, capacidades e indicadores de logro

Ante esta situación, planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿qué nivel de razonamiento evidencian los estudiantes de primer año de secundaria cuando realizan actividades con el objeto paralelogramo, de acuerdo al modelo Van Hiele?

1.4. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Objetivo general

Determinar los diferentes niveles de razonamiento, así como los conocimientos y habilidades, que poseen los estudiantes de primer año de secundaria, en relación al objeto paralelogramos, a través de una secuencia de actividades diseñadas según el modelo Van Hiele.

Objetivos específicos:

- Adaptar los niveles de razonamiento según el modelo de Van Hiele para el caso de los paralelogramos, a partir de los construidos en investigaciones previas para los cuadriláteros.
- Identificar el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes de primer año de secundaria, al interpretar las respuestas en las actividades implementadas.

CAPÍTULO II: OBJETO MATEMÁTICO PARALELOGRAMOS

2.1 ESTUDIO DE LOS PARALELOGRAMOS

A continuación, se aborda el concepto de paralelogramo desde una perspectiva formal y para ello se ha recurrido a la revisión del texto de Geometría Plana cuyo autor es Helfgott (1970). En dicho libro se presenta la definición del objeto matemático paralelogramo a través de construcciones y se señalan las propiedades que satisfacen dicho objeto, obteniéndose estas a partir de las definiciones y propiedades previas. Se asume como conceptos previos el de punto y segmento.

La presentación de los paralelogramos se hace como parte del estudio de los cuadriláteros.

CUADRILÁTEROS.

Sean A_1 , A_2 , A_3 , y A_4 cuatro puntos distintos del plano. Construimos los segmentos $A_1 A_2$; $A_2 A_3$; $A_3 A_4$ y $A_4 A_1$. La unión de estos segmentos recibe el nombre de cuadrilátero si se cumplen las siguientes propiedades

- (i) No es posible que descansen, sobre una misma recta, dos de estos segmentos con un punto en común.
- (ii) Dos segmentos cualesquiera solo pueden intersectarse en sus extremos.

Así, las siguientes figuras son cuadriláteros:

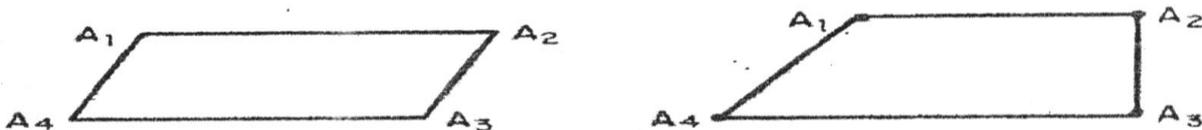


Figura 16. Cuadriláteros
Fuente: Helfgott (1970, p. 97)

Elementos de un cuadrilátero

Los elementos de un cuadrilátero son los siguientes:

4 vértices: puntos de intersección de los lados que conforman el cuadrilátero.

4 lados: segmentos que unen los vértices contiguos.

2 diagonales: segmentos cuyos extremos son dos vértices no contiguos.

4 ángulos interiores: el determinado por dos lados contiguos.

Propiedades de los cuadriláteros:

- Los lados opuestos son los que no tienen ningún vértice en común. Así en la figura 1, $A_1 A_4$ y $A_2 A_3$; $A_1 A_2$ y $A_3 A_4$ son ejemplos de pares de lados opuestos.
- Los lados consecutivos son los que tienen un vértice en común. Así, en la figura 1, $A_1 A_4$ y $A_4 A_3$; $A_4 A_3$ y $A_3 A_2$; $A_3 A_2$ y $A_2 A_1$; $A_2 A_1$ y $A_1 A_4$ son pares de lados consecutivos.
- Los ángulos opuestos son llamados ángulos opuestos por el vértice es decir: A_4 y A_2 ; A_1 y A_3 son pares de vértices opuestos.
- La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°
- Desde un vértice se puede trazar solo una diagonal.

Mientras que en los siguientes gráficos se muestran figuras que no son cuadriláteros:



Figura 17. No Cuadriláteros
Fuente: Helfgott (1970, p. 97)

Clasificación de los cuadriláteros:

Los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos y no paralelogramos.

- Los paralelogramos son cuadriláteros que tiene dos pares de lados opuestos paralelos. Se clasifican en rectángulos, cuadrados, rombos y romboides.
- Los paralelogramos son cuadriláteros que tienen sólo un par de lados paralelos se llama trapecio.
- Los paralelogramos que no tienen ningún lado paralelo se llama trapecoide.
- Una diagonal es cualquier segmento que une dos vértices no consecutivos del cuadrilátero. Las siguientes líneas punteadas denotan diagonales:

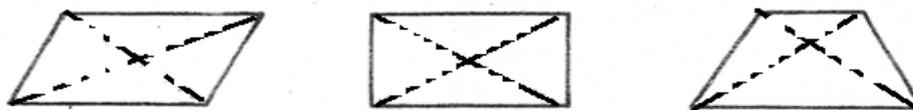


Figura 18. Diagonales en un paralelogramo
Fuente: Helfgott (1970, p. 98)

En el texto se señala que en adelante solo se trabajará con cuadriláteros convexos.

Los cuadriláteros se clasifican en: paralelogramos, rectángulos y trapecios. A su vez se estudia al rombo como caso especial de paralelogramos y el cuadrado como caso especial del rombo.

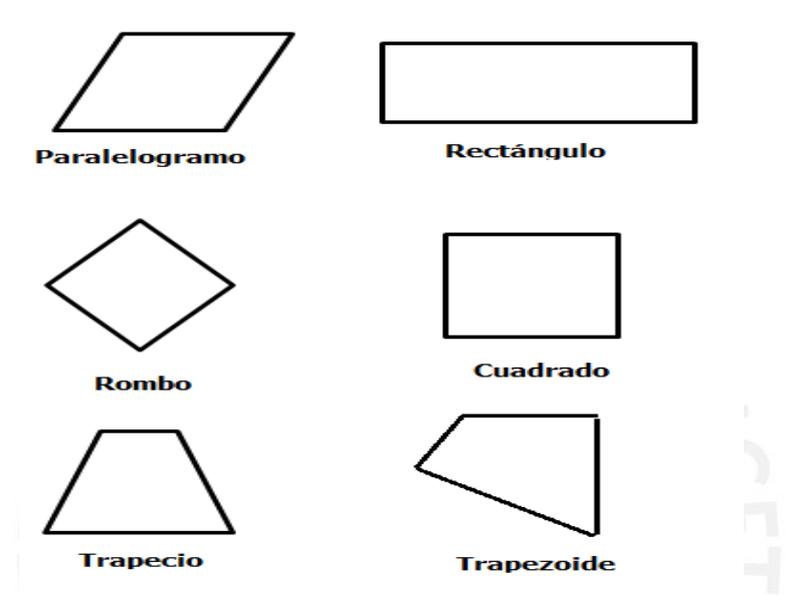


Figura 19. Tipos de Cuadriláteros
Fuente: Helfgott (1970, p. 98)

PARALELOGRAMOS

Se define paralelogramo como un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

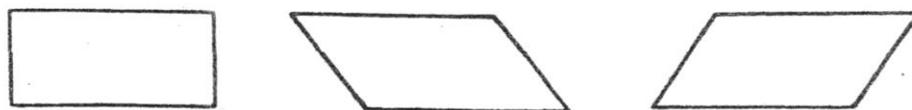


Figura 20. Paralelogramos
Fuente: Helfgott (1970, p. 98)

Los elementos de un paralelogramo son sus lados, vértices, ángulos y diagonales.

Propiedades

- Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos y el paralelogramo es un rectángulo.
- Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, entonces el paralelogramo es un rectángulo.
- La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.
- En un paralelogramo, dos lados opuestos cualesquiera son congruentes.
- En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.
- En un paralelogramo, dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.
- Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.
- Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

CLASES DE PARALELOGRAMOS

RECTÁNGULO

Un rectángulo es un paralelogramo que posee un ángulo interior recto.

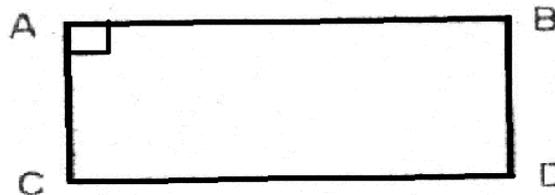


Figura 21. Rectángulos
Fuente: Helfgott (1970, p. 105)

Propiedades

- Las diagonales de un rectángulo son congruentes.
- Al trazar las diagonales de un rectángulo se forman dos triángulos congruentes.
- Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes entonces se trata de un rectángulo.

ROMBO

Un rombo es un paralelogramo con los cuatro lados congruentes entre sí.

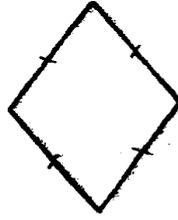


Figura 22. Rombo

Fuente: Helfgott (1970, p. 1079)

ELEMENTOS DE UN ROMBO:

Lados: el rombo tiene cuatro lados iguales.

Ángulos: tiene cuatro ángulos (dos α y dos β) iguales dos a dos. Los ángulos interiores, como en todo cuadrilátero suman 360° (2π radianes).

Diagonales: las diagonales son segmentos que unen los vértices no consecutivos. Tiene dos diagonales (D y d) desiguales y perpendiculares. Se cortan en el centro del rombo. Las diagonales son las bisectrices de los ángulos. También son ejes de simetría.

Teorema

En un rombo las diagonales son perpendiculares entre sí.

Demostración

Consideremos el rombo de la figura. Como estamos frente a un paralelogramo podemos afirmar que $AE = EC$ (recordar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan).

Tratándose de un rombo tendremos que $AB = BC$. El teorema LLL asegura que $\triangle AEB \cong \triangle CEB$. En particular $\alpha \cong \beta$. Por ende $\alpha = \beta = 90^\circ$

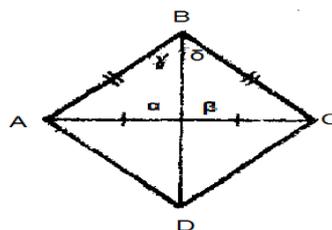


Figura 23. Demostración de un Rombo

Fuente: Helfgott. (1970, p. 105)

Propiedades

- Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un rombo.
- En un rombo las diagonales se intersecan formando ángulos rectos.
- Los ángulos opuestos en un rombo son congruentes.
- Todos los lados de un rombo tienen la misma medida.

CUADRADO

- Un cuadrado es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí.

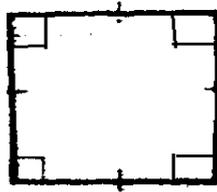


Figura 24. Cuadrado
Fuente: Helfgott (1970, p. 109)

Comentario

Una manera equivalente de definir un cuadrado es tomando en cuenta que es un rectángulo con lados congruentes. Como todo cuadrado es, al mismo tiempo, paralelogramo, rombo, y rectángulo, las proposiciones referidas a estas figuras geométricas son válidas cuando tratamos con cuadrados.

Así por ejemplo, dado un cuadrado podemos afirmar que sus diagonales gozan de las siguientes propiedades:

- Se cortan en su punto medio.
- Son congruentes.
- Son perpendiculares entre sí.
- Bisecan a los ángulos interiores.

ROMBOIDE

Paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales, es decir, solamente sus lados opuestos son iguales y sus ángulos opuestos iguales

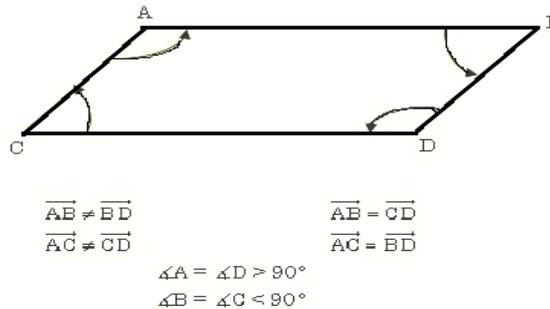


Figura 25. Romboide
Fuente: Helfgott (1970, p. 110)

TRAPECIO

Un cuadrilátero es un trapecio si posee dos lados opuestos paralelos mientras que los otros dos lados opuestos no son paralelos.

- Estos lados paralelos son conocidos como las bases del trapecio mientras que los pares de ángulos (α, α') y (β, β') son conocidos como los ángulos de la base del trapecio.
- Los lados paralelos se denominan base mayor y base menor.
- La distancia entre los lados paralelos se llama altura.

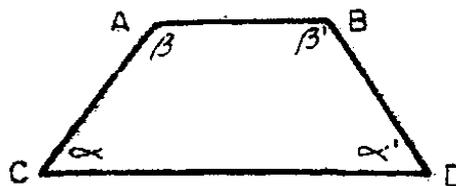
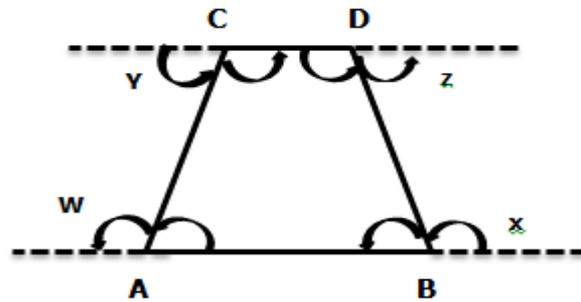


Figura 26. Trapecio
Fuente: Helfgott (1970, p. 110)

Se clasifican en:

- Trapecios Isósceles.
- Trapecios Rectángulos

Trapezio Isósceles.- Es aquel que tiene los lados no paralelos de igual longitud.



$AC = BD$; donde AB y CD son las bases del trapezio
 $\angle A$ y $\angle W$; $\angle B$ y $\angle C$; $\angle C$ y $\angle Y$; $\angle D$ y $\angle Z$ son ángulos adyacentes:

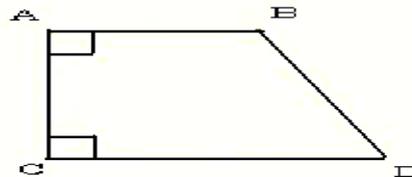
Siendo:

$$\angle A = \angle B \text{ y } \angle C = \angle D$$

$$\angle X = \angle W \text{ y } \angle Y = \angle Z$$

Figura 27. Trapecio Isósceles
 Fuente: Helfgott (1970, p. 110)

Trapezio Rectángulo.- Es aquel que tiene un lado perpendicular a las bases, formando un ángulo recto con cada base.



\overline{AB} y \overline{CD} Son las bases
 $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CD}$

$$\therefore \angle A = \angle C = 90^\circ$$

Figura 28. Trapecio Rectángulo
 Fuente: Helfgott (1970, p. 111)

Propiedades

- En un trapezio isósceles los ángulos base son congruentes.
- En un trapezio isósceles las diagonales son congruente.

Se consideró al trapezio para demostrar a través de su definición y clasificación no son considerados paralelogramos.

2.2. CLASIFICACIÓN JERÁRQUICA DE LOS CUADRILÁTEROS

Una forma de clasificar los paralelogramos es la que se muestra en la figura 29, se observa que los rectángulos y rombos son subconjuntos de los paralelogramos. Los primeros tienen todos sus ángulos rectos; en ese conjunto se ubican el cuadrado y el rectángulo. En el segundo grupo se encuentran los paralelogramos cuyos cuatro lados miden igual; en ese conjunto se encuentran el rombo y el cuadrado. Estos a su vez se intersecan en un polígono común, el cuadrado. Además de estos dos conjuntos, existen cuadriláteros que son paralelogramos pero que no tienen cuatro lados iguales, ni cuatro ángulos rectos; ese es el caso de los cuadriláteros que se encuentran fuera de los dos conjuntos anteriores, a ellos se les denomina romboides.

Se dice que esta clasificación es jerárquica porque un cuadrado es un rectángulo; un cuadrado es un rombo y un rectángulo es un paralelogramo. Existen otras clasificaciones como las particionales en donde los cuadrados no son rectángulos ni rombos, ni los rectángulos y rombos son paralelogramos, pero en este trabajo se considerará la clasificación jerárquica descrita anteriormente.

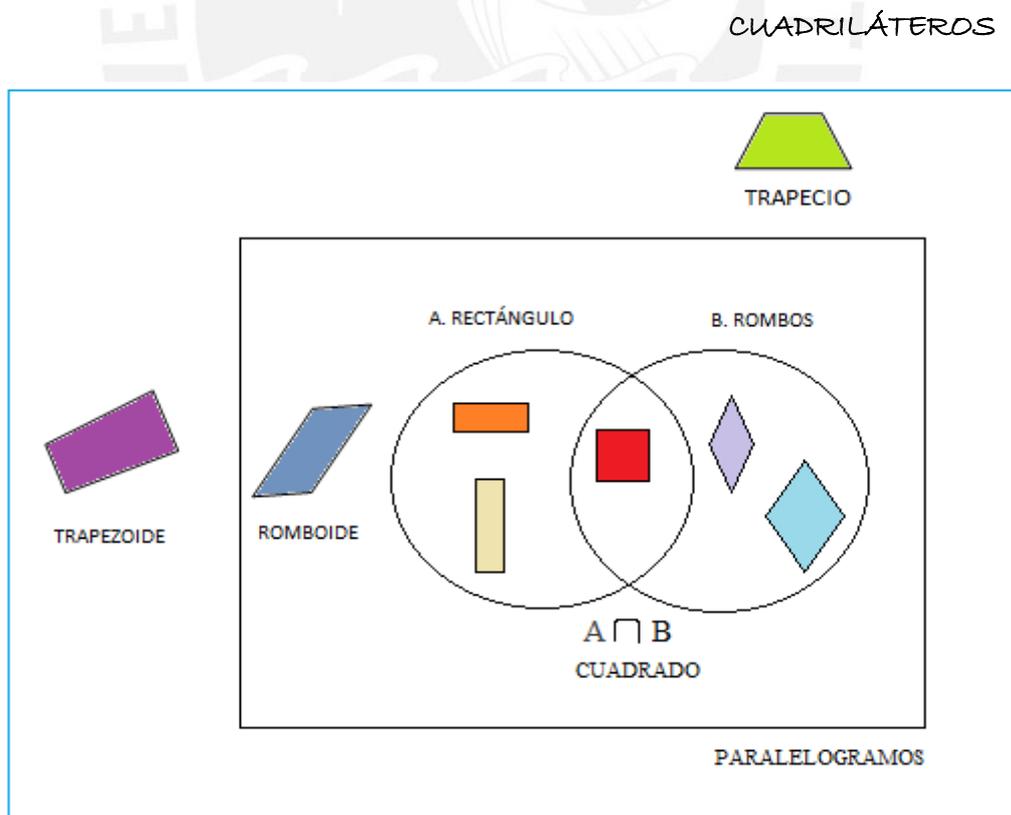


Figura 29. Clasificación Jerárquica de los Cuadriláteros

Fuente: Adaptado de Villiers (1986, p. 2)

CAPÍTULO III: ELEMENTOS DEL MARCO TEÓRICO CONSIDERADO EN LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentaremos como marco teórico de la investigación al Modelo Van Hiele. Este es un modelo para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, que guía la enseñanza y evalúa las habilidades de los estudiantes, a la vez brinda herramientas para reconocer el nivel en que se encuentran. Así mismo, este modelo señala que la base de la geometría tiene dos elementos importantes, el lenguaje utilizado y la significatividad de los contenidos.

Al principio el modelo de Van Hiele, mencionaba que el paso de un nivel a otro se producía de manera brusca, como un salto. Sin embargo, investigaciones posteriores como Jaime y Gutiérrez. (1990), evidenciaban que algunos estudiantes mostraban características de dos niveles consecutivos, esto significaba que estos estudiantes se encontraban en una transición de un nivel de razonamiento, donde se combinaban momentos de razonamiento de dos niveles consecutivos.

De acuerdo a este modelo, el estudiante es guiado por actividades adecuadas para cada nivel, que se inicia desde el reconocimiento de figuras de manera global, conocido como el primer nivel; luego pasa al segundo nivel cuando reconoce características y propiedades y finaliza cuando expresa definiciones formales.

Una de las hipótesis centrales de modelo es que la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes se produce en cinco niveles consecutivos, esto son: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor. Así mismo, presenta una propuesta con pautas esenciales para el maestro con la finalidad que pueda ubicar al estudiante en un determinado nivel de razonamiento según sus respuestas.

Jaime (1993) en su investigación asigna grados de adquisición en los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele y determina que existe un progreso continuo en la adquisición de cada uno de estos niveles.

3.1. LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

El modelo de Van Hiele establece modelos para el aprendizaje y también para la enseñanza. De esta manera Coberán et al. (1994), menciona que este modelo proporciona a los estudiantes dos aspectos importantes: descriptivo e instructivo.

El descriptivo se basa en los niveles de razonamiento a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento del estudiante desde el inicio del proceso de aprendizaje.

El instructivo está dirigido a los profesores y describe la manera como deben abordar las clases y las estrategias que se deberían emplear para favorecer en el tránsito de los estudiantes de un nivel a otro.

Descripción general de los niveles de razonamiento

Es conveniente indicar que existen diversas opiniones en cuanto a la cantidad de niveles, inicialmente el modelo de Van Hiele consideró solo tres niveles (los niveles 2, 3 y 4 de la clasificación actual), pero fue necesario añadir un nivel inicial que permitiera recoger información básica relacionada con la parte visual del razonamiento.

Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992) toman en cuenta la teoría de Van Hiele y mencionan que un estudiante inicia su razonamiento cuando construye su imagen mental, sin tomar en cuenta sus elementos y propiedades, su destreza es sólo visual.

Así, este modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo. El estudiante se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior.

Los cinco niveles considerados en dicho trabajo son los siguientes:

Nivel 1 (Visualización). Reconoce, nombra y compara figuras de forma global y no reconoce sus elementos. Este nivel es conocido como el más elemental de razonamiento.

En este nivel los estudiantes:

- Tienen limitaciones para describir figuras.

- No reconocen las partes de las figuras ni sus propiedades.
- Relacionan nombres de figuras, pero no establecen diferencias entre ellas.
- Utilizan un vocabulario básico para hablar de las figuras, escribirlas, etc.

Nivel 2 (Análisis). Tiene conocimiento de los componentes matemáticos, propiedades básicas y comienza a establecer relaciones intuitivas.

Los estudiantes en este nivel:

- Reconocen que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos.
- Enuncian propiedades de manera informal.
- No relacionan propiedades unas con otras.
- No pueden realizar clasificaciones lógicas.

Nivel 3 (Clasificación). Relaciona y clasifica figuras en forma lógica pero muy sencilla.

Los estudiantes en este nivel:

- Poseen capacidad de razonamiento formal.
- Son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras.
- Pueden dar definiciones matemáticas correctas.
- Describen figuras de manera formal.
- Entienden demostraciones explicadas por el profesor, pero no son capaces de construirlos por sí mismos.
- No comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.
- Conocen propiedades, las relacionan pero no las pueden demostrar.

Nivel 4 (Deducción Formal). Corresponde a un razonamiento de tipo deductivo, se comprende el sentido de los axiomas.

En este nivel los estudiantes:

- Pueden formular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso.
- Realizan demostraciones mediante razonamientos deductivos formales.
- Comprenden y desarrollan demostraciones formales.
- Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas como: axiomas, definiciones, teoremas, términos no definidos.
- Tienen la posibilidad de llegar al mismo resultado mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5 (Rigor). Trabaja con una variedad de sistemas axiomáticos.

En este nivel los estudiantes tienen la:

- Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos al usual.
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
- Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

Características del modelo de Van Hiele

En el modelo de Van Hiele se identifican características muy importantes que brindan a los educadores una guía para tomar decisiones instructivas.

Estas características del modelo de van Hiele son:

- Es imposible alcanzar un nivel sin haber pasado por el nivel anterior, es decir que el progreso de los estudiantes es **secuencial**.

- Lo que es **implícito** en un nivel de pensamiento, en el nivel siguiente se vuelve **explícito**.
- Cada nivel está asociado a un tipo especial de **lenguaje** (símbolos lingüísticos) y tiene también asociado un significado particular de los contenidos (conexión de estos símbolos dotándolos de significado).

Dos estudiantes con distinto nivel no pueden entenderse. De acuerdo con Jaime (1993), el modelo de Van Hiele abarca dos aspectos básicos:

- **Descriptivo:** mediante este se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso.
- **Instructivo:** marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los Estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran.

3.2. LAS FASES DEL MODELO DE VAN HIELE

Los Van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje que permite el desplazamiento del estudiante de un nivel a otro, a su vez guían al docente en diseñar actividades de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro.

Asimismo, Fouz (2006) señala que el paso de un nivel a otro es un proceso complejo y menciona la importancia el organizar las actividades y los materiales durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La descripción de cada una de estas fases fue tomada por Corberán et al. (1994) y de otros investigadores. Las fases de aprendizaje correspondientes al Modelo de Van Hiele, son las siguientes:

Fase 1: **Información.**

Esta fase cumple dos propósitos, el profesor a través de preguntas observará el conocimiento previo que tiene los estudiantes acerca del tema y lo ubicará en el nivel en que se encuentre el estudiante y a su vez dirigirá al estudiante hacia el objeto de estudio.

Fase 2: **Orientación dirigida.**

Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteado por los mismos estudiantes), con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos. El método empleado por el profesor y los materiales

utilizados deben ser seleccionados cuidadosamente y estar atento a las preguntas de sus estudiantes hacia la solución.

De acuerdo con Jaime (1993), esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Al respecto cita a Van Hiele, quien señala que "(...) las actividades de la segunda fase, si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior" (Jaime 1993, p. 10). El papel del profesor resulta primordial en esta fase, ya que debe seleccionar las actividades adecuadas para permitir al estudiante aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para el nuevo nivel de razonamiento. Corberán et al. (1994) indican sobre la planificación de la fase 2 que "(...) una planificación cuidadosa de la secuencia tendrá en cuenta la necesidad de conseguir pequeños éxitos que estimulen su autoestima y favorezcan una actitud positiva hacia las matemáticas" (p. 36).

Fase 3: **Explicitación**

Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Deben aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel.

En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, a partir de conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios anteriores, elementos, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

Fase 4: **Orientación libre**

En esta fase los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean

más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna.

Por otra parte, el profesor debe ayudar a los estudiantes en la resolución de los problemas. En palabras de Van Hiele (1986, citado por Jaime 1993), "donde los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales" (p. 11).

Así mismo, los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

Fase 5: **Integración.**

Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos. Se trata de lograr una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si esto se ha conseguido.

3.3 DESCRIPCIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO PARA LOS PARALELOGRAMOS

Corberán et al. (1989) consideró para la descripción de cada uno de los niveles una serie de descriptores que permiten caracterizar los niveles de Van Hiele. Para nuestra investigación se han realizado caracterizaciones para cada uno de los niveles para nuestro objeto de estudio llamado paralelogramo. Esto se hizo a partir del estudio matemático que permitió identificar

definiciones y propiedades, que luego fueron tomadas en cuenta en la definición de los niveles de razonamiento 1, 2 y 3 para los paralelogramos.

Nivel 1 Visualización

En este nivel se espera que el estudiante utilice destrezas visuales, identifique a los paralelogramos dentro de un grupo de figuras geométricas pero, que aún no muestre conocer sus propiedades.

Las características de este nivel son:

- 1 a. Reconoce a los romboides dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia, no reconoce sus elementos y características.
- 1 b. Reconoce a los rectángulos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.
- 1 c. Reconoce a los rombos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.
- 1 d. Reconoce a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual, pero todavía no concibe al cuadrado ni como rectángulo ni como un rombo.
- 1 e. Utiliza expresiones ambiguas o imprecisas para mencionar características de los paralelogramos.

Por ejemplo:

Quando describe un romboide como la figura que tiene lados verticales, queriéndose referir a lados paralelos.

- 1 f. Incluye atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos.

Por ejemplo:

Un cuadrado tiene 2 lados horizontales.

- 1 g. Dibuja diversas clases de paralelogramos, pero no mencionan sus elementos y propiedades.
- 1 i. Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.
- 1 j. Muestra limitaciones para describir diversas clases de paralelogramos.
- 1 k. Realiza comparaciones basándose en su apariencia global.

Nivel 2: Análisis

En este nivel se espera que el estudiante pueda combinar los aspectos visuales y las propiedades de las figuras, reconozca los elementos y propiedades de los paralelogramos, pero muestre dificultad para establecer relaciones entre los diversos tipos de paralelogramos.

Las características de este nivel son:

2 a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.

Por ejemplo:

- Reconoce que un cuadrado es un paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.
- Reconoce que un rectángulo es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos y diagonales.
- Reconoce que un rombo tiene cuatro lados iguales y ángulos opuestos iguales.
- Reconoce que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.
- Reconoce que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
- Reconoce que el romboide no tiene cuatro lados iguales y no tiene ángulos rectos

2 b. Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.

Por ejemplo:

- No reconocerá que un cuadrado es un rectángulo o que un cuadrado es un rombo.

2 c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.

- El tener lados paralelos.
- El tener ángulos opuestos iguales

2 d. Define un tipo de paralelogramo mencionando más condiciones de las que se requieren.

Por ejemplo:

- Define un cuadrado con más condiciones de las que necesitan como: tienen cuatro lados iguales, cuatro ángulos iguales, cuatro ángulos opuestos iguales, lados opuestos paralelos.

2 e. Utiliza un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos pero incluye expresiones informales.

Por ejemplo:

- Dice lados iguales.

2 f. Tiene dificultad para seguir demostraciones.

Nivel 3: Deducción Informal

En este nivel se espera que los estudiantes interpreten los enunciados verbales que involucran propiedades de paralelogramos y reconozcan las condiciones suficientes que los definen y siguen demostraciones deductivas. Por ejemplo, en este nivel se usaría “lados congruentes”.

La caracterización de este nivel está dada por lo siguiente:

3 a. Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo y puede establecer relaciones de inclusión entre los distintos tipos de paralelogramos.

Por ejemplo:

- Reconoce que un cuadrado es un rombo o que un cuadrado es un rectángulo.

3 b. Reconoce propiedades comunes y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos.

Por ejemplo:

- Tanto el cuadrado como el rombo tienen diagonales perpendiculares.
- Tanto el rectángulo y el romboide tienen diagonales que se intersecan en su punto medio.
- Establece relaciones de semejanzas y diferencias entre el cuadrado y rombo.
- Establece relaciones de semejanzas y diferencias entre el rectángulo y romboide.
- Establece relaciones de semejanzas y diferencias entre el rectángulo y rombo

3 c. Definen un tipo de paralelogramo mencionando solo condiciones suficientes.

Por ejemplo:

- Para definir al paralelogramo solo hace referencia a que es un cuadrilátero que posee dos pares de lados paralelos.

- Para definir al rectángulo sólo hace referencia a que es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos.

3 d. Reconoce que hay propiedades que se desprende de las definiciones.

Por ejemplo:

- En un rectángulo las diagonales miden igual.
- En un cuadrado las diagonales son perpendiculares.

3 e. Utiliza un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos incluyendo expresiones formales como:

- Para referirse a lados iguales, emplea expresiones como lados congruentes o lados de igual medida.
- Para referirse a los ángulos, emplea expresiones como ángulos congruentes o ángulos de igual medida.

3 f. Puede seguir demostraciones.

Cada una de estas caracterizaciones descritas en cada uno de los niveles, permitirá asociarlas con las respuestas de los estudiantes y describir su nivel de razonamiento.

3.4. MARCO METODOLÓGICO

Nuestra investigación se realizará bajo un enfoque cualitativo, a través de un estudio de casos, que es un instrumento muy importante para esta investigación, estará orientado a desarrollar procedimientos y elementos donde se encuentran presentes los sujetos de estudio y las actividades planificadas para cada una de las fases de razonamiento, a su vez se requiere de la interpretación de situaciones que merecen ser investigadas en un tiempo determinado, considerando las circunstancias que influyen durante este proceso de investigación.

Así mismo, Yin (2009) distingue tres actividades relevantes en una investigación como:

- Exploratorio: consiste en utilizar los resultados para formular preguntas de investigación.
- Descriptivo: describe lo que sucede en un caso particular.
- Explicativo: Facilita la interpretación.

3.5. METODOLOGIA “ESTUDIO DE CASO”

A través del estudio de caso, esta investigación permitirá guiar el diseño, la ejecución y el análisis del proceso investigativo contextualizado a partir del objeto de estudio paralelogramo. Para describir el nivel de razonamiento del estudiante, se utilizará el diseño metodológico de un estudio de caso cualitativo donde el protagonista principal es el estudiante.

Según, Stake (1998) que a través del estudio de caso el investigador puede alcanzar una mayor comprensión de un caso en particular para comprender los niveles alcanzados por los estudiantes.

Se destaca la presencia de un experto en el tema que observe el desarrollo del caso, alguien que recoja con objetividad el desarrollo del mismo y que al tiempo lo analice, describa y dé a conocer los resultados obtenidos en la investigación.

Por tal motivo Rodríguez et al. (1996) señala que el estudio de caso se basa en el razonamiento inductivo de conceptos que surgen de un análisis minucioso de los datos, dando lugar a nuevos conceptos, ampliar su experiencia o confirmar lo que se conoce del tema.

El desarrollo metodológico constará de tres momentos: el primero será el análisis de la actividad, el segundo corresponderá a una descripción de la actividad y el tercero mostrará los resultados de la actividad

Para nuestra investigación, se describirá el grado de adquisición del razonamiento geométrico en el cual se ubican los estudiantes y realizar un análisis detallado de la información recolectada.

Es importante mencionar que la metodología empleada permitirá obtener datos cualitativos que serán elaborados en tres aspectos: descripción, análisis e interpretación. La recolección de la información se hizo a través de un video en cada una de las actividades.

Según Merriam (1998), los estudios de casos en educación se presentan de tres formas diferentes como:

- Estudio de caso descriptivo, consiste en presentar un informe detallado del caso.
- Estudio de caso interpretativo, su aporte es descriptivo, pero sin fundamentación teórica.
- Estudio de caso evaluativo, describe y emite juicios de valor que permiten al investigador tomar decisiones.

Cada una de las actividades propuestas nos permitirá hacer un diagnóstico de cada una de las características del nivel predominante y predecir de acuerdo a las respuestas de los estudiantes.

CAPÍTULO IV: DISEÑO DE ACTIVIDADES

Uno de los propósitos fundamentales de nuestra investigación fue asociar las respuestas de los estudiantes, a cada una de las características definidas en cada uno de los niveles, con la finalidad de identificar el nivel razonamiento que poseen los estudiantes del 1er. grado de secundaria sobre dicho en objeto de estudio llamado paralelogramo. En este proceso, se hará necesario interpretar cómo se produce la evolución del razonamiento de los estudiantes cuando se encuentran inmersos en la resolución de tareas geométricas.

Según el modelo teórico adoptado, las habilidades de razonamiento están en función de los niveles. En particular en lo que se refiere a los paralelogramos, se realizó una caracterización de los niveles en el capítulo anterior y se propusieron indicadores para identificar cada nivel.

De otro lado, los contenidos geométricos sobre los que tratarán los problemas de la propuesta didáctica, deberán tener relación con los contenidos previstos para estudiantes del 1er. año de secundaria. Perú (2012). También se deberá tener en cuenta los indicadores de desempeño del mapa de progreso de geometría, que describe el desarrollo progresivo de la competencia en geometría.

Estos indicadores permiten medir el logro de los objetivos y hacer un seguimiento de los avances para cada grado y hacer un análisis de los contenidos en donde se encuentra el objeto matemático llamado paralelogramo.

En la tabla 1, se presentan los indicadores de desempeño adaptado del diseño curricular para el objeto de estudio paralelogramo.

Tabla 1: Indicadores de desempeño que corresponden a cada grado en donde se encuentra el objeto de estudio.

Grados	Indicadores
4to. grado de Primaria	<ul style="list-style-type: none"> - Identifica ángulos en objetos de su entorno y compara su medida respecto al ángulo recto. - Usa un modelo basado en paralelogramos al plantear o resolver un problema.
5to. grado de Primaria	<ul style="list-style-type: none"> - Identifica las características y propiedades geométricas explícitas según su perímetro y área en objetos y superficies de su entorno, expresándolos en un modelo basado en cuadriláteros y triángulos. - Aplica propiedades de los cuadriláteros o triángulos al plantear o resolver un problema.

6to. grado de Primaria	- Identifica características y propiedades geométricas en objetos de su entorno, expresándolos en figuras geométricas bidimensionales (círculo, circunferencia, polígonos regulares hasta 10 lados).
1 ero. de Secundaria	- Organiza medidas, características y propiedades geométricas de figuras y superficies las expresa en un modelo referido a figuras poligonales.

Por tal motivo, se hace necesario diseñar actividades que permiten reconocer los distintos niveles de razonamiento que poseen estudiantes de 1er. grado de secundaria y que estas involucren los conocimientos y respondan a los indicadores descritos para este grado.

4.1. DISEÑO DE ACTIVIDADES Y RESPUESTAS ESPERADAS

A través de las actividades diseñadas se pretende reconocer el nivel de comprensión que poseen los estudiantes respecto a los paralelogramos.

CARACTERÍSTICAS DE LOS SUJETOS DE ESTUDIO.

La presente investigación se llevó a cabo con estudiantes del primer año de secundaria de la Institución Educativa República de Colombia – UGEL 03 ubicada en el distrito de Breña, departamento de Lima. Los estudiantes tenían entre 12 y 14 años y son varones.

Para esta investigación se trabajó con cinco estudiantes, con un rendimiento heterogéneo en matemáticas; algunos con un muy buen desempeño, mientras que otros presentaban dificultades.

Para este estudio se hace una descripción de los niveles de van Hiele de razonamiento a través de una implementación de actividades que se realizó en un ambiente reservado especialmente para el desarrollo de esta investigación. Al final de las actividades, se aplicó una socialización. Todo el trabajo realizado se registró a través de una filmación.

El trabajo realizado en la sección 4.2 ha permitido caracterizar los niveles de razonamiento de los estudiantes, que permitan facilitar su interpretación y describir los aportes de cada uno de ellos.

A continuación en la tabla 2, se presenta un esquema en donde se describen las actividades que se implementarán, el objetivo que se pretende cada una de ellas es que en las fases se ubiquen las respuestas esperadas, así como el nivel de razonamiento que se asignaría a cada

una de ellas. El investigador describirá el avance del razonamiento de cada estudiante de acuerdo a las características de cada uno de niveles.

Tabla 2: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 1, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y FASES ASOCIADAS	RESPUESTAS ESPERADAS	NIVEL QUE SE ASIGNARÍA A DICHA RESPUESTA
<p>Identificar características en común en una visión global para los paralelogramos</p> <p>Fases asociadas:</p> <p>De Información.</p>	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Reúne al cuadrado y al rombo como formas cuadradas, los concibe de una forma global pero no establece la relación entre sus ángulos. A su vez asume que el cuadrado inclinado toma la forma de un rombo.</i></p>	<p><i>Si el estudiante reconoce a los cuadriláteros por su forma global, pero aún desconocen sus elementos y propiedades.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 1 de “Visualización”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Tiene la capacidad de distinguir propiedades de los cuadriláteros dentro de un grupo de figuras.</i></p>	<p><i>Si el estudiante reconoce al rectángulo es un cuadrilátero con 4 ángulos rectos y diagonales iguales.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 2 de “Análisis”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Reconoce que el cuadrado y el rombo son cuadriláteros que tienen diagonales perpendiculares.</i></p>	<p><i>Si el estudiante establece relación de diagonales perpendiculares en un rombo y en un cuadrado.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 3 de “Deducción Formal”.</p>

En la tabla 3, se muestran las respuestas esperadas de los estudiantes a una actividad que requiere que reconozcan paralelogramos tomando en cuenta sus características.

Tabla 3: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 2, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y FASES ASOCIADAS	RESPUESTAS ESPERADAS	NIVEL QUE SE ASIGNARÍA A DICHA RESPUESTA
<p>Reconocer paralelogramos de acuerdo a sus características</p> <p>Fase asociada:</p> <p>De Información.</p>	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Identifica al cuadrado, rectángulo, rombo y romboide por su forma pero utiliza un lenguaje muy básico como:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Cuadrado figura de lados iguales.</i> - <i>Rectángulo figura que tiene dos lados más grandes y los otros dos más pequeños.</i> - <i>Rombo es un cuadrado inclinado.</i> - <i>Romboide es un rectángulo inclinado.</i> 	<p><i>Si el estudiante utiliza un vocabulario básico para definir paralelogramos, desconociendo sus elementos y propiedades.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 1 de “Visualización”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Reconoce los elementos y propiedades de los paralelogramos de acuerdo a sus características.</i> 	<p><i>Si el estudiante señala que un paralelogramo está formado por lados, vértices, ángulos y diagonales.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 2 de “Análisis”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>Define al rombo como el cuadrilátero que tiene diagonales perpendiculares.</i> 	<p><i>Si el estudiante define al rombo como un cuadrilátero que tiene diagonales de diferente longitud y son perpendiculares.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 3 de “Deducción Formal”.</p>

En la tabla 4 se muestran las respuestas esperadas a una actividad que requiere que construyan.

Tabla 4: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 3, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y FASES ASOCIADAS	RESPUESTAS ESPERADAS	NIVEL QUE SE ASIGNARÍA A DICHA RESPUESTA
<p>Construir paralelogramos señalando sus propiedades</p> <p>Fases asociadas:</p> <p>De Información.</p>	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Reconoce al rombo, pero al graficar no señala sus características, su construcción es de manera empírica sin utilizar herramientas para su comprensión.</i></p>	<p><i>Si el estudiante al graficar no señala las características de cada uno de los paralelogramos.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 1 de “Visualización”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Grafica al rombo, señala sus características y propiedades en el gráfico.</i></p>	<p><i>Si el estudiante reconoce por sus características que es un rombo, lo grafica teniendo en cuenta sus propiedades.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 2 de “Análisis”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Relaciona las propiedades del rectángulo y del romboide al tener lados opuestos iguales.</i></p>	<p><i>Si el estudiante reconoce que unas propiedades se derivan de otras y definen a cada uno de los paralelogramos.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 3 de “Deducción Formal”.</p>

En la tabla 5 se muestran las respuestas esperadas de los estudiantes, teniendo en cuenta las características de cada nivel, para identificar paralelogramos de acuerdo a las medidas de sus lados y ángulos.

Tabla 5: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 4, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y FASES ASOCIADAS	RESPUESTAS ESPERADAS	NIVEL QUE SE ASIGNARÍA A DICHA RESPUESTA
<p>Reconocer paralelogramos al relacionar las medidas de sus lados y ángulos</p> <p>Fases asociadas:</p> <p>De Información.</p>	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Tiene dificultad para medir los ángulos e incluye atributos irrelevantes para describir a los paralelogramos.</i></p>	<p><i>Si el estudiante habitualmente describe paralelogramos por su aspecto físico o visual.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 1 de “Visualización”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Utilizan propiedades para reconocer paralelogramos.</i></p>	<p><i>Si el estudiante menciona sus características, pero incluye expresiones informales.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 2 de “Análisis”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Reconoce que en los paralelogramos se establecen relaciones entre sus propiedades</i></p>	<p><i>Si el estudiante reconoce que unas propiedades se derivan de otras.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 3 de “Deducción Formal”.</p>

En la tabla 6 se muestran las respuestas esperadas de los estudiantes, teniendo en cuenta la caracterización de cada nivel, para relacionar paralelogramos de acuerdo a características comunes.

Tabla 6: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 5, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y FASES ASOCIADAS	RESPUESTAS ESPERADAS	NIVEL QUE SE ASIGNARÍA A DICHA RESPUESTA
<p>Relacionar y grafica de acuerdo a sus propiedades</p> <p>Fase asociada:</p> <p>De Información.</p>	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Completa enunciados que caracterizan a los paralelogramos y los grafica, pero no tiene una definición formal</i></p>	<p><i>Si el estudiante utiliza propiedades ambiguas para describir, comparar y ordenar paralelogramos.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 1 de “Visualización”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Expresa propiedades para cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionarlos</i></p>	<p><i>Si el estudiante utiliza propiedades para reconocer a los paralelogramos, pero no las pueden relacionar las perciben de manera aislada.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 2 de “Análisis”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Expresa definiciones para cada uno de los paralelogramos y establece relación entre sus propiedades</i></p>	<p><i>Si el estudiante define a cada uno de los paralelogramos y establece relación entre sus ángulos y lados.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 3 de “Deducción Formal”.</p>

En la tabla 7 se muestran las respuestas esperadas de los estudiantes, que permite establecer características comunes entre los paralelogramos.

Tabla 7: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 6, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y FASES ASOCIADAS	RESPUESTAS ESPERADAS	NIVEL QUE SE ASIGNARÍA A DICHA RESPUESTA
<p>Establecer características comunes entre los paralelogramos</p> <p>Fase asociada:</p> <p>De Información.</p>	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Reconoce a los paralelogramos por su apariencia visual, pero no como están formados.</i></p>	<p><i>Si el estudiante reconoce al paralelogramo, pero no expresa elementos y propiedades, solo reconoce una figura.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 1 de “Visualización”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Expresa características y los clasifica, pero no puede establecer relaciones entre ellas.</i></p>	<p><i>Si los estudiantes expresan un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades, pero no pueden realizar demostraciones.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 2 de “Análisis”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Relaciona propiedades entre los paralelogramos teniendo en cuenta sus característica y luego las define.</i></p>	<p><i>Si el estudiante identifica sus características y establece relación entre sus ángulos y lados.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 3 de “Deducción Formal”.</p>

En la tabla 8 se muestra las respuestas esperadas de los estudiantes, teniendo en cuenta la caracterización de cada nivel, para reconocer las semejanzas y diferencias entre paralelogramos.

Tabla 8: Fases y niveles que se podrían identificar en el desarrollo de la actividad 7, teniendo en cuenta las fases y los niveles de razonamiento de Van Hiele.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y FASES ASOCIADAS	RESPUESTAS ESPERADAS	NIVEL QUE SE ASIGNARÍA A DICHA RESPUESTA
<p>Reconoce semejanzas y diferencias entre los paralelogramos</p> <p>Fase asociada:</p> <p>De Información.</p>	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Hacen referencia a prototipos visuales para caracterizar a los paralelogramos</i></p>	<p><i>Si el estudiante dentro de un grupo de figuras no señala elementos ni características, impidiendo establecer semejanzas y diferencias.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 1 de “Visualización”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Reconoce a las figuras que tiene relación entre lados y ángulos, pero aun no pueden expresar una definición formal.</i></p>	<p><i>Si el estudiante menciona las características, pero cuando deben definirlo suelen enunciar más condiciones de las que ya son suficientes.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 2 de “Análisis”.</p>
	<p>Una respuesta que podría asociarse a la característica, sería la siguiente:</p> <p><i>Establece relación de semejanza y diferencia entre los lados y ángulos utilizando propiedades.</i></p>	<p><i>El estudiante relaciona propiedades, entienden demostraciones pero no las pueden demostrar.</i></p> <p>El nivel que se le asignaría de acuerdo a su respuesta sería el nivel 3 de “Deducción Formal”.</p>

CAPÍTULO V: IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

5.1. APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Para esta investigación, se aplicaron siete actividades que permitieron a los estudiantes evolucionar su nivel de razonamiento con respecto al objeto de estudio llamado paralelogramo, estas actividades tuvieron una duración de cuatro horas y un pequeño refrigerio en la mitad de la sesión. Se les explicó a los estudiantes en qué consistía la actividad; luego se socializa a través de preguntas que permitieron identificar sus conocimientos acerca del objeto de estudio paralelogramo. Se les motivó de manera constante para trabajar en un ambiente positivo.

Antes de iniciar la investigación se proporcionó a cada estudiante materiales como: regla, transportador, lápiz, borrador, colores y papelógrafos, que fueron utilizados en el desarrollo de cada una de las actividades. La profesora del curso participo como observadora de la actividad.

A continuación, se describirá cómo se desarrollaron las actividades.

La aplicación de la actividad 1 tuvo una duración de 30 minutos. Las preguntas se relacionaron con la fase de información, contenía tres preguntas, en la primera pregunta se les solicitó a los estudiantes que agrupen figuras con características en común como: lados paralelos opuestos, lados paralelos iguales, ángulos opuestos y ángulos rectos. La segunda pregunta consistió en que agrupen figuras que tengan dos pares de lados opuestos paralelos y la tercera pregunta se les pidió que señalen figuras que tengan al menos un ángulo recto. Los resultados evidenciaron que los estudiantes asociaban cuadrados, rombos, rectángulos y romboides a figuras prototípicas, desconociendo sus elementos y propiedades.

La aplicación de la actividad 2 tuvo una duración de 20 minutos; trabajaron la actividad de manera individual; se pidió a los estudiantes que señalaran figuras con características similares dado un grupo de cuadriláteros. Tenían que identificar figuras que tuvieran dos pares de lados opuestos paralelos y luego en las siguientes preguntas se les iba añadiendo otras condiciones a estas figuras con dos pares de lados opuestos paralelos como: reconocer ángulos rectos, lados congruentes y figuras que no tuvieran ángulos ni lados congruentes. Se observó que la mayor parte de los estudiantes reconocieron figuras de dos pares de lados opuestos paralelos, pero en la última pregunta donde se les pidió ubicar el paralelogramo que

no tuviera ni ángulos ni lados congruentes, la mayor parte de los estudiantes tuvieron errores, sólo un estudiante logró señalar al cuadrilátero que tenía esa característica.

La aplicación de la actividad 3 tuvo una duración de 30 minutos; los estudiantes trabajaron de manera individual cada una de las preguntas, el propósito de la actividad consistió en que los estudiantes utilicen sus conocimientos adquiridos para dibujar paralelogramos de acuerdo a las características mencionadas. Se les presentó cuatro ejercicios, en cada uno de ellos se evidenciaban características diferentes. En sus resultados, se observó que construyeron paralelogramos y consideraron sus lados paralelos congruentes que es una condición importante de los paralelogramos, pero tuvieron dificultad en mencionar sus elementos.

La aplicación de la actividad 4 tuvo una duración de 40 minutos; se relacionó con la fase de orientación dirigida, la maestra brinda indicaciones importantes a los estudiantes para medir los lados y ángulos de diversos cuadriláteros. A su vez, se les pidió establecer la relación entre sus lados y ángulos para determinar si el cuadrilátero es un paralelogramo. Al determinar la medida de los lados encontraron relación de congruencia entre sus lados opuestos paralelos, de la misma manera ocurrió con los ángulos opuestos. Esta actividad permitió que los estudiantes observen dos condiciones importantes para que el cuadrilátero sea un paralelogramo debía tener: lados opuestos paralelos de la misma medida al igual que sus ángulos. La dificultad estuvo en medir ángulos obtusos de los trapecios. El objetivo de esta actividad fue que el estudiante reconozca si las figuras eran paralelogramos.

La aplicación de la actividad 5 tuvo una duración de 20 minutos; se relacionó con la fase de orientación dirigida. Se pidió a los estudiantes establecer una relación entre dos cuadriláteros y mencionar las semejanzas y las diferencias, los estudiantes debieron encontrar características comunes entre esos dos paralelogramos como: el rectángulo con el rombo que tienen lados congruentes y la diferencia se encontraba en sus ángulos, los estudiantes pudieron reconocer las características que los une. La mayor parte de los estudiantes tuvieron dificultades para expresarlos por escrito.

La aplicación de la actividad 6 tuvo una duración de 20 minutos; la actividad se trabajó de manera individual. Esta actividad consistió en reunir paralelogramos que tienen características en común y establecer una organización jerárquica entre los paralelogramos. Se les presentó tres situaciones, en la primera se encontraban cuatro figuras como: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide cuyas características en común es tener dos pares de lados opuestos

paralelos, la respuesta de los estudiantes fue que todos son paralelogramos; en la segunda pregunta se reunió dos figuras cuya característica es que tengan 4 ángulos rectos, donde se encontraron al rectángulo y un cuadrado, algunos de los estudiantes lo llamarón rectángulo y un estudiante lo llamó rectangulares. En la última pregunta se reúnen dos figuras que no tienen ángulos rectos, se obtuvieron dos respuestas diferentes: perpendiculares y romboides. En general, respecto a esta pregunta, los estudiantes mostraron dudas y no pudieron mencionar la respuesta correcta.

La aplicación de la actividad 7 tuvo una duración de 20 minutos; consistió en que los estudiantes expresaran conceptos formales para definir a los paralelogramos y relacionarlos con sus propiedades. La actividad se realizó de manera individual, se les presentó un grupo de palabras en donde se encontraban propiedades y nombres de algunos paralelogramos como: cuadrado, rombo, rectángulo y romboide. Estas palabras fueron ubicadas en cinco enunciados incompletos donde se relacionaban al paralelogramo con su propiedad, finalmente debió de graficar al paralelogramo y señalar sus características. Durante su desarrollo se pudo observar que algunos estudiantes tuvieron confusiones cuando relacionaron ángulos opuestos congruentes y mencionaron solo a un paralelogramo. En este caso si el estudiante domina propiedades no debió utilizar esta propiedad porque caracteriza a todos los paralelogramos. La mayor parte de los estudiantes lo hizo.

5.2. ASIGNACIÓN DE NIVELES EN LAS RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES

En el anexo 2 se encuentran los escaneos de las respuestas que dieron los estudiantes en cada una de las actividades.

En la tabla 9 se describirán las respuestas del estudiante 1 y estas se interpretarán teniendo en cuenta los elementos teóricos considerados. La respuesta del estudiante daría indicios de su nivel de razonamiento o comprensión respecto a los paralelogramos.

Tabla 9: Interpretación de las respuestas del estudiante 1

ESTUDIANTE 1		
ACTIVIDADES	DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA	INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS.
<p>Actividad 1</p> <p>Se presentaron doce figuras y se pidió a los estudiantes que las reunieran de acuerdo a características comunes.</p> <p>(Ver anexo 117)</p>	<p><i>Agrupar de la siguiente manera señalando las razones para ello:</i></p> <p>El estudiante 1, señaló que las figuras: 2 y 11; 6 y 4; 5 y 8; 1 y 3, eran parecidos y que tenían lados paralelos. Hizo el mismo con las figuras: 6 y 4; 1 y 10; 5 y 8, e indicó que tenían dos pares de lados paralelos. Finalmente señaló las figuras: 1; 3 y 10, y mencionó que tenían por lo menos un ángulo recto.</p>	<p>El que el estudiante haya agrupado a las figuras 2 y 11 muestra que se está basando en atributos visuales ya que ambos tienen la forma de romboide; sin embargo, no incluyó en este grupo a las figuras 5 y 8 que también eran romboides. Probablemente no lo hizo porque consideró que eran diferentes ya que las longitudes de los lados “horizontales” eran más pequeña que la del otro par de lados. Es decir, tuvo en cuenta un atributo irrelevante al hacer la agrupación.</p> <p>De otro lado, en cada agrupación que realizó sí mencionó un atributo relevante: las figuras presentaban lados paralelos.</p> <p>Es decir, ha reconocido una característica común entre figuras de apariencia diferente. Su respuesta evidencia características del nivel 1, como:</p> <p>En el último ejercicio el estudiante agrupó a las figuras 1, 3 y 10 señalando un atributo que hacía referencia a sus elementos y no a su apariencia: todas ellas tenían por lo menos un ángulo recto.</p> <p>Las respuestas del estudiante, mostró tres características del nivel 1 y una característica del nivel 2 como:</p> <p><i>1.a. Reconoce a los romboides dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.f. Incluye atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos</i></p> <p><i>1.k. Realiza comparaciones basándose en su apariencia global</i></p> <p><i>2. b.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante al inicio de la actividad su percepción fue visual, pero luego reconoce una característica importante para todos los paralelogramos. Transita por dos niveles 1 y 2, pero no mostró ninguna evidencia del nivel 3.</p>

<p>Actividad 2</p> <p>Se presentó cuatro preguntas que estaban enfocadas a reconocer paralelogramos teniendo en cuenta sus características.</p> <p>(Ver anexo 119)</p>	<p><i>Señala las razones de su elección para cada una de figuras.</i></p> <p>El estudiante 1, en la primera pregunta reconoció al rectángulo, rombo, cuadrado y romboide como figuras que tienen dos pares de lados paralelos.</p> <p>En la segunda pregunta reconoció al cuadrado y el rectángulo como figuras que tienen dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.</p> <p>En la tercera pregunta reconoció al cuadrado y el rombo como figuras que tienen dos pares de lados paralelos y cuatro lados congruentes.</p> <p>En la cuarta pregunta reconoció al romboide como una que tiene dos pares de lados paralelos sin lados ni ángulos congruentes.</p>	<p>El estudiante consideró un atributo importante para estas figuras, que era tener dos pares de lados paralelos opuestos.</p> <p>Reconoció ángulos rectos en cuadrados y rectángulos, de la misma manera lo hizo para el cuadrado y el rombo en reconocer lados congruentes.</p> <p>Demostró aún mayor conocimiento al reconocer al romboide como la única figura que no tenía ni lados ni ángulos congruentes.</p> <p>De acuerdo a su respuesta, el estudiante mostró dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>En esta actividad la percepción ya no sólo es visual, reconoce dos características importantes que lo ubican en el nivel 2.</p>
<p>Actividad 3</p> <p>Se solicitó que construyeran paralelogramos de acuerdo a sus características y los señale en sus gráficos.</p> <p>(Ver anexo 123)</p>	<p><i>En sus construcciones se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>El estudiante 1, en la primera pregunta construyó un rombo y señaló a sus lados.</p> <p>En la segunda pregunta construyó un cuadrado y señaló a sus lados.</p> <p>En la tercera pregunta construyó un rectángulo y mencionó solo a sus cuatro ángulos rectos.</p> <p>En la cuarta pregunta construyó un romboide y menciono solo a sus ángulos.</p>	<p>Evidenció desconocimiento de ciertos elementos como: diagonales y ángulos.</p> <p>Al dibujar al rombo tuvo en cuenta sus lados paralelos de igual medida, señaló sus lados iguales, pero no reconoció a sus diagonales perpendiculares, vértices y ángulos, al parecer una solo dos aspectos, la imagen prototipo y a sus lados, no tomó en cuenta otros elementos. Al parecer su imagen es solo visual.</p> <p>Al dibujar al cuadrado consideró que sus lados opuestos paralelos tuvieran la misma medida y señaló a sus lados, pero no reconoce a sus diagonales perpendiculares, ángulos rectos, ni vértices. Sigue con su imagen visual.</p> <p>Al dibujar al rectángulo tuvo en cuenta sus lados opuestos paralelos congruentes y a sus ángulos rectos, pero no a sus diagonales iguales y vértices. Se observa que reconoce a sus ángulos rectos, a pesar que lo reconoció en el cuadrado. Mejora su apreciación al reconocer a sus ángulos.</p> <p>Finalmente dibujó al romboide, consideró sus lados opuestos paralelos congruentes y a sus ángulos opuestos iguales, pero le faltó considerar a</p>

		<p>sus diagonales.</p> <p>De acuerdo a sus repuestas, mostró dos característica del nivel 1 como:</p> <p><i>1.g. Dibuja diversas clases de paralelogramos, pero no mencionan sus elementos y propiedades.</i></p> <p><i>1.i. Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p>Esta actividad estuvo orientada al nivel 2, pero el estudiante tuvo dificultad en reconocer sus elementos y propiedades, sus respuestas muestran características del nivel 1</p>
<p>Actividad 4 Se presentó 5 cuadriláteros, se les pidió determinar si la figura es un paralelogramo teniendo en cuenta las medidas de lados y ángulos. (Ver anexo 126)</p>	<p><i>Muestra las siguientes razones al medir sus lados y ángulos de diversos cuadriláteros:</i></p> <p>Primera pregunta determinó las medidas de lados y ángulos del cuadrado y lo llamó paralelogramo porque tenía lados iguales.</p> <p>Segunda pregunta determinó las medidas de sus lados, pero no de sus ángulos, reconoció que la figura era un romboide llama paralelogramo, porque tienen dos pares de lados iguales.</p> <p>Tercera pregunta no determinó la medida de los ángulos, pero sí de sus lados, reconoció que no era un paralelogramo porque no tiene lados opuestos paralelos.</p> <p>Cuarta pregunta no determinó la medida de los ángulos, pero sí de sus lados, reconoció que no era un paralelogramo porque no tenía lados opuestos paralelos.</p> <p>Quinta pregunta determinó la medida de lados y ángulos del rectángulo, reconoció que era un paralelogramo</p>	<p>Se observó que el estudiante tuvo dificultad para calcular los ángulos, pero esto no le dificultó para determinar si es o no un paralelogramo.</p> <p>Pudo reconocer que el cuadrado es un paralelogramo, porque encontró que las medidas de sus lados eran congruentes al relacionar que sus lados tenían la misma medida.</p> <p>De la misma manera lo hizo con el romboide, al mencionar un atributo importante el tener dos pares de lados iguales, si hubiese determinado las medidas de sus ángulos, hubiese comprobado que sus ángulos opuestos eran congruentes.</p> <p>Para los dos ejercicios de trapecios mencionó un atributo irrelevante al mencionar que no es un paralelogramo porque no tiene lados iguales, al parecer no conoce la definición de trapecio, porque al observar la figura se hubiese dado cuenta que un trapecio tiene solo un par de lados opuestos paralelos.</p> <p>Para el rectángulo, al mencionar que tiene dos pares de lados opuestos, se estaría refiriendo a cualquier paralelogramo, le faltó mencionar a sus ángulos rectos para que sea un rectángulo.</p> <p>De acuerdo a su respuesta, el estudiante mostró tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintos.</i></p> <p><i>2.c Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p><i>2.d. Define un tipo de paralelogramo mencionando más condiciones de las que se requieren.</i></p> <p>En la respuesta del estudiante, mencionó propiedades y elementos de los paralelogramos,</p>

	<p>porque tenía dos pares de lados iguales.</p>	<p>mostró características del nivel 2.</p>
<p>Actividad 5</p> <p>Determinó semejanzas y diferencias entre diversos paralelogramos.</p> <p>(Ver anexo 128)</p>	<p><i>Expresó las siguientes razones para las semejanzas y diferencias:</i></p> <p>Primera pregunta mencionó que la semejanza entre el cuadrado y el rombo eran sus cuatro lados iguales y su diferencia estaba en sus ángulos.</p> <p>Segunda pregunta mencionó que la semejanza entre el rectángulo y romboide eran sus dos pares de lados opuestos paralelos iguales y su diferencia estaba en sus ángulos.</p> <p>Tercera pregunta mencionó que la semejanza entre el rectángulo y rombo tienen dos pares de lados opuestos iguales y su diferencia estaba en sus lado</p>	<p>El estudiante en sus respuestas le faltó expresar más condiciones para determinar sus semejanzas y diferencias.</p> <p>El estudiante encontró que la semejanza entre un cuadrado y un rombo son sus cuatro lados iguales, pero le faltó considerar a sus diagonales perpendiculares.</p> <p>Pudo encontrar que la semejanza entre un rectángulo y un romboide eran sus dos pares de lados opuestos iguales, pero le faltó considerar que tienen en común diagonales iguales.</p> <p>Pudo determinar que la semejanza entre un rectángulo y rombo eran sus dos pares de lados opuestos paralelos, pero le faltó mencionar que la diferencia se encontraba en sus diagonales.</p> <p>De acuerdo a sus respuestas, el estudiante mostró dos características del nivel 2 y dos características del nivel 3 como:</p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.b. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p><i>3.a.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo y puede establecer relaciones de inclusión entre los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>3.b.Reconoce propiedades comunes y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante tránsito por los niveles 2 y 3, pudo encontrar: relaciones de semejanza y diferencia y propiedades comunes entre dos paralelogramos. Esta transición lo ubicó en el nivel 3.</p>
<p>Actividad 6</p> <p>Se pidió que encuentren el nombre del paralelogramo de acuerdo a sus características.</p> <p>(Ver anexo 133)</p>	<p><i>De acuerdo a las características en común, se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta mencionó que el romboide, cuadrado, rectángulo y rombo, al tener dos pares de lados opuestos paralelos los</p>	<p>El estudiante a través de las características, pudo encontrar el nombre en común entre figuras como es el caso de:</p> <p>Reconoció que las figuras al tener sus dos pares de lados opuestos paralelos se trataban de paralelogramos. Su respuesta evidenció que reconoce al cuadrado, rectángulo, rombo y romboide como paralelogramos.</p> <p>El estudiante observó dos características para</p>

	<p>llamó paralelogramos</p> <p>Segunda Pregunta mencionó que el rectángulo y cuadrado, al tener dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos los llamó rectángulos.</p> <p>Tercera pregunta mencionó que el rombo y el romboide, al tener dos pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto los llamó romboides.</p>	<p>llamarlos rectángulos al cuadrado y al rectángulo, esto significaría que considera al cuadrado como caso particular de rectángulo.</p> <p>Pero no ocurrió lo mismo con el rombo y el romboide, no pudo establecer la relación jerárquica, expresó un atributo irrelevante al mencionar que eran romboides.</p> <p>De acuerdo a sus repuestas, mostró tres características del nivel 2 y dos características del nivel 3 como:</p> <p>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</p> <p>2.d.Define un tipo de paralelogramo mencionando más condiciones de las que se requieren.</p> <p>2.e. Utiliza un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos pero incluye expresiones informales.</p> <p>3.a Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo y puede establecer relaciones de inclusión entre los distintos tipos de paralelogramos.</p> <p>3.b.Reconoce propiedades comunes y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos.</p> <p>El estudiante dejó de lado su apreciación visual y llega a establecer relación entre sus propiedades, ubicándolo en el nivel 3</p>
<p>Actividad 7</p> <p>Se presentó cinco enunciados, que deberían ser completados con palabras que expresaban nombres de paralelogramos y otras se referían a las propiedades.</p> <p>(Ver anexo 138)</p>	<p><i>Las razones que dio al completar los enunciados fueron:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Mencionó que un paralelogramo que tiene 4 ángulos congruentes es un cuadrado. - Mencionó que el paralelogramo que tiene ángulos opuesto congruentes entonces es un rectángulo. - Mencionó que el paralelogramo que tiene diagonales perpendiculares entonces es un rombo. 	<p>El estudiante pudo relacionar paralelogramos con sus propiedades, pero no debió utilizar la propiedad de los ángulos opuestos, debido a que esta propiedad es para todos los paralelogramos.</p> <p>Al utilizar la propiedad de cuatro ángulos congruentes para el cuadrado, lo relacionó por sus ángulos rectos, pero también pudo haber utilizado la propiedad de cuatro lados congruentes o diagonales perpendiculares.</p> <p>Para el rectángulo no debió utilizar la propiedad de ángulos opuestos congruentes porque generaliza a todos los paralelogramos, debió utilizar la propiedad de las diagonales que se intersecan en su punto medio.</p> <p>Para el rombo si utilizó la propiedad que lo caracteriza que es tener diagonales perpendiculares.</p>

	<ul style="list-style-type: none"> - Mencionó que el rectángulo tiene las diagonales que se intersecan en su punto medio. - Mencionó que el paralelogramo que tiene ángulos opuestos congruentes es un romboide. 	<p>Hizo lo correcto para el rectángulo, al mencionar que sus diagonales se intersecan en su punto medio.</p> <p>Para el romboide debió utilizar la propiedad de las diagonales que se intersecan en su punto medio y no utilizar ángulos opuestos congruentes.</p> <p>De acuerdo a sus respuestas, el estudiante mostró dos características del nivel 2 y dos características del nivel 3 como:</p> <p><i>2.a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p><i>3.a.Reconoce propiedades comunes y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos</i></p> <p><i>3.c.Define un tipo de paralelogramo mencionando solo condiciones suficientes.</i></p> <p>El estudiante tránsito por dos niveles de razonamiento, los niveles 2 y 3 no solo reconoce elementos y propiedades, llegó a establecer propiedades comunes entre los paralelogramos, ubicándolo en el nivel 3</p>
--	--	---

En la tabla 10 se describirán las respuestas del estudiante 2, en ella se interpretarán teniendo en cuenta los elementos teóricos considerados. La respuesta del estudiante daría indicios de su nivel de razonamiento o comprensión respecto a los paralelogramos.

Tabla 10: Interpretación de las respuestas del estudiante 2

ESTUDIANTE 2		
ACTIVIDADES	DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA	INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS.
<p>Actividad 1</p> <p>Se presentaron 12 figuras y se pidió a los estudiantes que las reunieran de acuerdo a características comunes.</p> <p>(Ver anexo p. 117)</p>	<p><i>Agrupar de la siguiente manera señalando las razones para ello:</i></p> <p>Señaló que las figuras 1, 3 y 10 son paralelos.</p> <p>A las figuras 4, 6 y 8 mencionó que eran rectangulares.</p> <p>Señaló que las figuras 7 y 9 son trapecios.</p> <p>Hizo lo mismo con las figuras 5, 11 y 12 e indicó que tenían forma vertical.</p> <p>Mencionó a las figuras 4, 6 y 8 tenían dos pares de lados paralelos.</p> <p>Mencionó que las figuras 1,3 y 10 tienen al menos un ángulo recto.</p>	<p>Para el estudiante las únicas figuras que son paralelogramos son 1, 3 y 10, para él sus lados paralelos deben tener una sola dirección, que es la vertical. Lo que está haciendo es considerar un atributo irrelevante. Para las figuras 4, 6 y 8, las denomina rectangulares porque consideró que eran rectángulos “inclinados” o direcciones que no son ni verticales ni horizontales, pero dejó de lado a otras figuras como las figuras 1, 2, 5, 10 y 11. Luego mencionó como trapecios a las figuras 7 y 9, al parecer agrupó a estas figuras por el parecido, por tal motivo dejó de lado a la figura 12, porque no la reconoce como trapecio, luego mencionó un atributo irrelevante a las figuras 5, 11 y 12 llamándolas verticales, si agrupó por su forma no debió considerar a la figura 12, pero si debió considerar a las figuras 2 y 8, por lo que nos hace suponer que desconoce a los romboides.</p> <p>Desconoció a los paralelogramos dentro de un grupo de figuras debido a que consideró solo a las figuras 4, 6 y 8 que al parecer tenían la misma forma, pero en esta agrupación debió haber considerado a la figura 5.</p> <p>Para la última pregunta, evidenció conocimiento de ángulo recto al señalar a las figuras 1, 3 y 10 tenían por lo menos un ángulo recto.</p> <p>El estudiante en su respuesta mostró tres características del nivel 1 como:</p> <p><i>1.e.Utiliza expresiones ambiguas o imprecisas para mencionar características de los paralelogramos.</i></p> <p><i>1.f. Incluye atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos.</i></p> <p><i>1.i.Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante, mencionó atributos irrelevantes y ambiguos, al no reconocer sus elementos y</p>

		propiedades lo ubica en el nivel 1.
<p>Actividad 2</p> <p>Se presentó 4 preguntas que estaban enfocadas a reconocer paralelogramos teniendo en cuenta sus características.</p> <p>(Ver anexo p. 120)</p>	<p><i>Señala las razones de su elección para cada una de figuras:</i></p> <p>Primera pregunta señaló que el rectángulo, rombo, cuadrado y romboide tienen dos pares de lados paralelos.</p> <p>Segunda pregunta señaló que el cuadrado y el rectángulo tienen dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.</p> <p>Tercera pregunta señaló al cuadrado y al rombo como figuras que tienen dos pares de lados paralelos y cuatro lados congruentes.</p> <p>Cuarta pregunta señaló al romboide, cometa y al trapecio como figuras que tienen dos pares de lados paralelos sin lados ni ángulos congruentes.</p>	<p>El estudiante consideró un atributo relevante para agrupar figuras que tengan dos pares de lados paralelos, pero se observó lo siguiente:</p> <p>Distinguió a los cuadrados, rectángulos, romboides y rombos porque tienen dos pares de lados opuestos paralelos.</p> <p>Para el cuadrado y rectángulo, reconoció características comunes a sus ángulos rectos.</p> <p>De la misma manera lo hizo para el cuadrado y el rombo, reconoció que sus lados deben ser congruentes.</p> <p>Pero en la último ejercicio no hizo la agrupación adecuada, porque tanto el cometa y al trapecio no tienen sus lados opuestos paralelos. Tal vez pensó en la condición de no tener lados congruentes, pero la segunda condición era no tener ángulos congruentes, esta condición no la cumple el trapecio. Al parecer desconoce que el romboide cumple con esta propiedad. Conoce los elementos del paralelogramo, por tal motivo no tuvo errores en tres preguntas, la dificultad estuvo relacionar propiedades como el no tener ángulos ni lados congruentes y que tengan dos pares de lados opuestos paralelos.</p> <p>Según su respuesta, mostró cuatro características del nivel 1 y dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>1.b Reconoce a los rectángulos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.c.Reconoce a los rombos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.d.Reconoce a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual, pero todavía no concibe al cuadrado ni como rectángulo ni como un rombo.</i></p> <p><i>1.i.Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p><i>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p>

		En esta actividad reconoce paralelogramos por su apariencia visual, luego reconoce propiedades. Transita por los niveles 1 y 2, pero mostró dificultad en relacionarlos. Finalmente lo ubica en el nivel 2, porque mencionó la condición de los paralelogramos.
<p>Actividad 3</p> <p>Se solicitó que construyeran paralelogramos de acuerdo a sus características y los señale en sus gráficos.</p> <p>(Ver anexo p. 123)</p>	<p><i>En sus construcciones se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta construyó un rombo y señaló solo lados, desconociendo a los ángulos y diagonales perpendiculares.</p> <p>Segunda pregunta construyó un cuadrado y señaló solo lados, desconociendo a los ángulos y diagonales.</p> <p>Tercera pregunta construyó un rectángulo, pero no a sus ángulos y diagonales.</p> <p>Cuarta pregunta construyó un romboide, pero no mencionó a sus lados, diagonales ni a sus lados paralelos.</p>	<p>El estudiante no pudo señalar los elementos, a pesar que en la actividad anterior si las pudo distinguir. Así por ejemplo:</p> <p>Cuando dibujó al rombo consideró que sus lados opuestos tuvieran la misma medida, pero no consideró a los vértices, ángulos, ni a sus diagonales perpendiculares.</p> <p>Al dibujar un cuadrado, consideró que sus lados opuestos paralelos sean congruentes, pero no ubicó a sus ángulos rectos ni a sus diagonales perpendiculares.</p> <p>Al dibujar un romboide, tomó en cuenta que sus lados opuestos sean congruentes, pero no ubicó a sus ángulos ni a sus diagonales congruentes.</p> <p>La respuesta del estudiante mostró dos características del nivel 1:</p> <p><i>1.i.Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p><i>1.j.Muestra limitaciones para describir diversas clases de paralelogramos.</i></p> <p>En su respuesta el estudiante no mostró conocimiento de paralelogramos, su apreciación es solo visual, tiene dificultad en mencionar elementos y propiedades, estas características lo ubican en el nivel 1.</p>
<p>Actividad 4</p> <p>Se presentó 5 cuadriláteros, se les pidió determinar si la figura es un paralelogramo teniendo en cuenta las medidas de lados y ángulos.</p> <p>(Ver anexo p. 126)</p>	<p><i>Muestra las siguientes razones al medir sus lados y ángulos de diversos cuadriláteros:</i></p> <p>Primera pregunta determinó las medidas de los lados y ángulos, reconoció que la figura era un paralelogramo porque tenía 4 ángulos iguales y 4 lados paralelos.</p> <p>Segunda pregunta tuvo dificultad en medir los ángulos, pero</p>	<p>El estudiante pudo reconocer figuras que eran paralelogramos, pero no mostró definiciones relevantes para cada una de ellas, como:</p> <p>Para el cuadrado no brindó una característica relevante, mencionó cuatro lados paralelos. Al parecer su relación se basa en la forma visual, en su respuesta debió haber mencionado sus lados congruentes y ángulos rectos.</p> <p>Reconoció que los trapecios no son paralelogramos, pero brindó una característica irrelevante como no tener lados iguales, desconoce la definición de trapecio, no tomó en cuenta en el gráfico a las medidas de los lados y ángulos.</p> <p>Determinó que se trataba de un rectángulo debido a las medidas halladas, pero no brindó una definición relevante, ya que mencionó: ángulos</p>

	<p>reconoció que la figura era un paralelogramo que tiene 4 lados iguales y 4 ángulos iguales.</p> <p>Tercera pregunta no determinó las medidas de los ángulos, pero sí de sus lados, reconoció la figura no era un paralelogramo porque tiene lados diferentes y ángulos desiguales.</p> <p>Cuarta pregunta tuvo dificultad en medir sus ángulos, pero reconoció a la figura no era un paralelogramo porque tiene lados diferentes y ángulos desiguales.</p> <p>Quinta pregunta determinó la medida de sus ángulos y de sus lados, reconoció a la figura era un paralelogramo porque tiene ángulos iguales y lados iguales</p>	<p>iguales y lados iguales. Esta característica es propia del cuadrado.</p> <p>De acuerdo a su respuesta, el estudiante mostró dos características como:</p> <p><i>2.a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>En su respuesta, el estudiante reconoció algunas características y propiedades en los paralelogramos, de acuerdo a estas características lo ubican en el nivel 2.</p>
<p>Actividad 5</p> <p>Determinó semejanzas y diferencias entre diversos paralelogramos.</p> <p>(Ver anexo p. 129)</p>	<p><i>Expresó las siguientes razones para las semejanzas y diferencias:</i></p> <p>Primera pregunta mencionó que la semejanza entre el cuadrado y el rombo eran que son paralelogramos iguales y la diferencia estuvo en sus ángulos.</p> <p>Segunda pregunta reconoció que entre el rectángulo y romboide tienen diagonales iguales y la diferencia está en sus ángulos.</p> <p>Tercera pregunta reconoció que entre el rectángulo y rombo son paralelos y su diferencia está en sus ángulos y diagonales.</p>	<p>El estudiante en sus respuestas le faltó expresar más condiciones para determinar sus semejanzas y diferencias como:</p> <p>La respuesta que brindó para la semejanza entre un cuadrado y un rombo fue irrelevante al mencionar que son paralelogramos iguales, al parecer desconoce propiedades, porque debió mencionar a sus cuatro lados iguales y diagonales perpendiculares.</p> <p>Para la semejanza entre el rectángulo y romboide, le faltó adicionar que tienen ángulos opuestos iguales y que la diferencia se encontraba en sus ángulos.</p> <p>Entre el rectángulo y rombo mencionó como semejanza que son paralelas, pero no menciona que lados, porque se esperaba que responda que tienen dos pares de lados opuestos paralelos, pero si mencionó dos características relevantes como a sus ángulos y diagonales diferentes.</p> <p>De acuerdo a su respuesta, presenta cuatro características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por</i></p>

		<p><i>elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p><i>2.d. Define un tipo de paralelogramo mencionando más condiciones de las que se requieren.</i></p> <p>En esta actividad, el estudiante deja su percepción visual y reconoce propiedades, pero tiene dificultad en relacionarlos, por tal motivo el estudiante llegó sólo al nivel 2.</p>
<p>Actividad 6</p> <p>Se pidió que encuentren el nombre del paralelogramo de acuerdo a sus características.</p> <p>(Ver anexo p. 134)</p>	<p><i>De acuerdo a las características en común, se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta mencionó que el romboide, cuadrado, rectángulo y rombo al tener dos pares de lados opuestos paralelos se llaman paralelogramos</p> <p>Segunda Pregunta mencionó que el rectángulo y cuadrado al tener dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos se llaman rectángulos.</p> <p>Tercera pregunta no pudo nombrar la relación para el rombo y el romboide al tener dos pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	<p>El estudiante reconoció al paralelogramo y los agrupó figuras de acuerdo a sus características comunes como:</p> <p>Reconoció que todas las figuras que tienen dos pares de lados opuestos paralelos son paralelogramos. Al parecer tiene conocimiento de la característica general para todo paralelogramo.</p> <p>A su vez reconoció que el rectángulo y cuadrado al tener dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos se llaman rectángulo. De acuerdo a esta respuesta el estudiante reconoce que el cuadrado es un caso particular de rectángulo.</p> <p>En cambio para el rombo y romboide no pudo encontrar el nombre del paralelogramo, a pesar que en la condición indica que no tengan ángulos rectos, al parecer no puede establecer la condición jerárquica al señalar que entre ambos al no tener ángulos rectos son paralelogramos no rectángulos.</p> <p>De acuerdo a sus respuestas muestra dos características del nivel 2 y dos características del 3 como:</p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p><i>2.d.Define un tipo de paralelogramo mencionando más condiciones de las que se requieren.</i></p> <p><i>3.a.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo y puede establecer relaciones de inclusión entre los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>3.b.Reconoce propiedades comunes y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos.</i></p>

		<p>La respuesta del estudiante, mostró la transición de los niveles 2 y 3, no sólo puede establecer relaciones entre sus propiedades, también reconoce propiedades comunes, estas características lo ubican en el nivel 3.</p>
<p>Actividad 7</p> <p>Se presentó cinco enunciados, que deberían ser completados con palabras que expresaban nombres de paralelogramos y otras se referían a las propiedades. (Ver anexo p.139)</p>	<p><i>Las razones que dio al completar los enunciados fueron:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un cuadrado. - Si un paralelogramo tiene romboide entonces es un rombo - Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio entonces es un romboide. - Si un paralelogramo es un ángulo opuesto congruente tiene rombo. - Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces es un rectángulo. 	<p>El estudiante tuvo dificultad en relacionar a los paralelogramos con sus propiedades. Se observaron los siguientes enunciados:</p> <p>Reconoció que el cuadrado tiene sus cuatro ángulos congruentes, pero no señaló otras características como cuatro lados congruentes o diagonales perpendiculares, al parecer tiene una apreciación prototipo del cuadrado.</p> <p>En el siguiente enunciado se equivocó al reunir dos paralelogramos en un mismo enunciado, esta dificultad es debido al desconocimiento de las propiedades</p> <p>Reconoció en el romboide diagonales que se intersecan en su punto medio, pero no lo pudo evidenciar en su dibujo. Tiene solo una imagen visual del romboide.</p> <p>Para el rombo y el rectángulo no debió relacionarlos con la propiedad de ángulos opuestos congruentes, debido a que esta propiedad es general para todos los paralelogramos, pero en su gráfico no evidenció esta característica.</p> <p>La respuesta del estudiante, mostró tres características del nivel 1 como:</p> <p><i>1.d. Reconoce a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual, pero todavía no concibe al cuadrado ni como rectángulo ni como un rombo.</i></p> <p><i>1.i. Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p><i>1.k. Realiza comparaciones basándose en su apariencia global.</i></p> <p>En esta actividad, el estudiante no pudo establecer relación entre sus propiedades, su apreciación es solo visual. Su respuesta mostró características del nivel 1.</p>

En la tabla 11 se describirán las respuestas del estudiante 3, en ella se interpretarán teniendo en cuenta los elementos teóricos considerados. La respuesta del estudiante daría indicios de su nivel de razonamiento o comprensión respecto a los paralelogramos.

Tabla 11: Interpretación de las respuestas del estudiante 3

ESTUDIANTE 3		
ACTIVIDADES	DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA	INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS.
<p>Actividad 1</p> <p>Se presentaron 12 figuras y se pidió a los estudiantes que las reunieran de acuerdo a características comunes.</p> <p>(Ver anexo p.110)</p>	<p><i>Agrupar de la siguiente manera señalando las razones para ello:</i></p> <p>Señaló que las figuras 1 y 10 tenían lados paralelos, rectangulares y forma horizontal.</p> <p>A las figuras 2 y 11 señaló que tenían lados paralelos, rectangulares y forma vertical.</p> <p>Señaló que las figuras 4 y 6 tenían lados paralelos y forma de rombo.</p> <p>Asimismo para las figuras 3 y 8 mencionó que tenían lados paralelos y forma cuadrada.</p> <p>Mencionó que las figuras 9 y 7 tenían lados diferentes.</p>	<p>El estudiante mencionó un atributo relevante para sus figuras agrupadas “lados paralelos” pero a su vez mencionó condiciones que no se requerían, eligió figuras por sus formas pero no por sus características, brindó atributos irrelevantes, de la misma manera lo hizo para las figuras 2, 11, 4 y 6. Luego reunió las figuras 3 y 8 considerando que ambos son cuadrados, pensó que la figura 8 era un cuadrado “inclinado”. Al parecer desconoce al romboide por su forma, al confundirlo como un cuadrado. Según la caracterización de los niveles, el estudiante tiene un nivel 1 y 2 porque reconocen a los paralelogramos de manera global, pero desconoce cómo están formados.</p> <p>La respuesta del estudiante, mostró cuatro características del nivel 1 y dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>1.e. Utiliza expresiones ambiguas o imprecisas para mencionar características de los paralelogramos.</i></p> <p><i>1.f. Incluye atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos.</i></p> <p><i>1.i. Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p><i>1.j. Muestra limitaciones para describir diversas clases de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p><i>2.d. Define un tipo de paralelogramo mencionando más condiciones de las que se requieren.</i></p> <p>El estudiante mostró desconocimiento de paralelogramos al mencionar atributos irrelevantes, pero mencionó una condición importante de los paralelogramos, esta característica lo ubica en el nivel 2.</p>

<p>Actividad 2</p> <p>Se presentó 4 preguntas que estaban enfocadas a reconocer paralelogramos teniendo en cuenta sus características.</p> <p>(Ver anexo p. 114)</p>	<p><i>Señala las razones de su elección para cada una de figuras:</i></p> <p>Primera pregunta reconoció al rectángulo, cuadrado y romboide como figuras que tienen dos pares de lados paralelos.</p> <p>Segunda pregunta reconoció al cuadrado y el rectángulo como figuras que tienen dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.</p> <p>Tercera pregunta reconoció al cuadrado como la única figura que tiene dos pares de lados paralelos y cuatro lados congruentes.</p> <p>Cuarta pregunta reconoció al rombo, rectángulo, romboide y cuadrado como figuras que tienen dos pares de lados paralelos sin lados ni ángulos congruentes.</p>	<p>El estudiante no reconoció al rombo como una figura de dos pares de lados paralelos, pero sí reconoció al romboide, esto evidencia que aún no tiene claro la definición de paralelogramos.</p> <p>No reconoció al rombo como la figura de dos pares de lados paralelos y cuatro lados congruentes. Aun no puede establecer características comunes entre el cuadrado y el rombo.</p> <p>En el último ejercicio, no entendió escoger figuras sin lados y ángulos congruentes, al parecer no entendió la palabra congruente, pero si la palabra hubiese sido iguales, no habría escogido ni al rombo ni al cuadrado por sus lados y cuadrado.</p> <p>Según su respuesta, el estudiante mostró una dos características del nivel 2, como:</p> <p><i>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante reconoce las propiedades de los paralelogramos, pero tiene dificultad en relacionarlas, esta característica lo ubica en el nivel 2.</p>
<p>Actividad 3</p> <p>Se solicitó que construyeran paralelogramos de acuerdo a sus características y los señale en sus gráficos</p> <p>(Ver anexo p. 117)</p>	<p><i>En sus construcciones se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta construyó un rombo con sus vértices, señaló lados, no mostró ángulos opuestos iguales ni diagonales perpendiculares.</p> <p>Segunda pregunta construyó un cuadrado con sus vértices, lados, diagonales perpendiculares y los 4 ángulos rectos.</p> <p>Tercera pregunta construyó un rectángulo con sus vértices, señalo diagonales, lados y ángulos.</p> <p>Cuarta pregunta construyó un romboide con sus vértices,</p>	<p>Construyó paralelogramos y mencionó algunos de sus elementos.</p> <p>Las únicas figuras que reconoció todos sus elementos fueron al cuadrado y al rectángulo, pero en las otras figuras tuvo dificultad como:</p> <p>En el rombo no pudo señalar a sus ángulos opuestos ni a sus diagonales perpendiculares.</p> <p>De la misma manera le ocurrió para el romboide, no señaló a sus diagonales.</p> <p>Según la caracterización de los niveles, mostró dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>Esta actividad le permitió reconocer elementos y propiedades de los paralelogramos, esta</p>

	mencionó sus ángulos rectos y lados pero no sus diagonales.	característica lo ubica en el nivel 2.
<p>Actividad 4 Se presentó 5 cuadriláteros, se les pidió determinar si la figura es un paralelogramo teniendo en cuenta las medidas de lados y ángulos. (Ver anexo p. 120)</p>	<p><i>Muestra las siguientes razones al medir sus lados y ángulos de diversos cuadriláteros:</i></p> <p>Primera pregunta determinó la medida de los lados y ángulos del cuadrado y lo llamó paralelogramo porque tenía lados opuestos paralelos.</p> <p>Segunda pregunta determinó la medida de sus lados pero no a los ángulos del romboide, reconoció que era un paralelogramo, porque tiene lados opuestos paralelos.</p> <p>Tercera pregunta no determinó la medida de los ángulos, pero sí de sus lados, reconoció que no era un paralelogramo porque no tenía lados opuestos paralelos.</p> <p>Cuarta pregunta no determinó la medida de los ángulos, pero sí de sus lados, reconoció que no era un paralelogramo porque no tenía lados opuestos paralelos.</p> <p>Quinta pregunta determinó la medida de lados y ángulos del rectángulo, reconoció que era un paralelogramo porque tiene lados opuestos paralelos.</p>	<p>El estudiante tuvo problemas en determinar las medidas de los ángulos, pero no tuvo inconvenientes en señalar si eran o no paralelogramos.</p> <p>Para el cuadrado y el romboide mostró una característica relevante el tener sus lados opuestos paralelos, pero no menciona como deben ser sus medidas.</p> <p>Para las figuras llamadas no paralelogramos mostró un atributo irrelevante al mencionar que estas figuras no tienen lados paralelos. No fue correcta esta característica debido a que el trapecio tiene un par de lados opuestos paralelos.</p> <p>Su respuesta, mostró tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>2 a. Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2 b. Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>Al reconocer que los paralelogramos están formados por elementos y propiedades, muestra características del nivel 2.</p>
<p>Actividad 5 Determinó semejanzas y diferencias entre diversos paralelogramos.</p>	<p><i>Expresó las siguientes razones para las semejanzas y diferencias:</i></p> <p>Primera pregunta reconoció que la semejanza entre el cuadrado y rombo eran sus lados paralelos y su</p>	<p>El estudiante tenía que establecer relaciones de semejanza y de diferencia, solo mencionó una característica relevante para todas las figuras como el tener sus lados paralelos, pero debió adicionar otras semejanzas como:</p> <p>Para el cuadrado y el rombo le faltó mencionar a sus lados y diagonales perpendiculares como semejanza.</p> <p>Para el rectángulo y el romboide le faltó adicionar</p>

<p>(Ver anexo p. 123)</p>	<p>diferencia estaba en sus ángulos.</p> <p>Segunda pregunta reconoció que la semejanza entre el rectángulo y romboide eran sus lados paralelos y su diferencia estaba en sus ángulos.</p> <p>Tercera pregunta reconoció que la semejanza entre el rectángulo y rombo eran sus lados paralelos y su diferencia están en sus lados.</p>	<p>diagonales iguales.</p> <p>Para el rectángulo y rombo no consideró como semejanza sus ángulos opuestos iguales y en su diferencia no solo eran sus lados, también estaba en sus diagonales.</p> <p>De acuerdo a sus respuesta mostró dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.b Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante en su respuesta, reconoció algunas propiedades, pero le faltó adicionar más condiciones, que le permitan llegar al nivel 3.</p>
<p>Actividad 6</p> <p>Se pidió que encuentren el nombre del paralelogramo de acuerdo a sus características.</p> <p>(Ver anexo p. 128)</p>	<p><i>De acuerdo a las características en común, se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta mencionó que el romboide, cuadrado, rectángulo y rombo al tener dos pares de lados opuestos paralelos se llaman paralelogramos</p> <p>Segunda Pregunta mencionó que el rectángulo y cuadrado al tener dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos se llaman rectángulos.</p> <p>Tercera pregunta mencionó que el rombo y el romboide al tener dos pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto se llaman perpendiculares.</p>	<p>El estudiante a través de las características pudo encontrar el nombre común entre las figuras como:</p> <p>Reconoció a través de la característica de dos pares de lados opuestos que las figuras eran paralelogramos</p> <p>Asimismo reconoció que entre el rectángulo y el cuadrado al tener cuatro ángulos rectos los llamó rectángulos, esto indicaría que al cuadrado lo estaría reconociendo como un caso particular de rectángulo. Pero no ocurrió lo mismo al relacionar al rombo con el romboide, no pudo relacionar cuando se le mencionó ningún ángulo recto, llamándolos perpendiculares, esta respuesta es irrelevante porque estas figuras de acuerdo a sus características, se refería a los no rectángulos.</p> <p>De acuerdo a su respuesta, mostró dos característica del nivel 2 como:</p> <p><i>2.b Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>En su respuesta, utiliza un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos, pero la dificultad surgió cuando tuvo que nombrar a los paralelogramos por sus características, esto lo ubico en el nivel 2.</p>
<p>Actividad 7</p>	<p><i>Las razones que dio al completar los enunciados fueron:</i></p>	<p>En esta actividad el estudiante tuvo dificultad en relacionar paralelogramos con sus propiedades, además colocó una propiedad que no debió ser</p>

<p>Se presentó cinco enunciados, que deberían ser completados con palabras que expresaban nombres de paralelogramos y otras se referían a las propiedades.</p> <p>(Ver anexo p. 133)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un cuadrado. - Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio entonces es un rombo. - Si un paralelogramo tiene 4 lados congruentes entonces es un cuadrado. - Si un paralelogramo es un rectángulo tiene las diagonales perpendiculares. - Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces es un romboide. 	<p>utilizada porque generaliza a todos los paralelogramos. Esta propiedad se refería a los ángulos opuestos congruentes.</p> <p>El único paralelogramo que reconoció su propiedad fue el cuadrado, porque mencionó dos condiciones relevantes como sus cuatro lados y cuatro ángulos congruentes.</p> <p>Otra dificultad que se evidenció fue en las diagonales del rombo y del rectángulo, esta confusión de debe a que desconoce las propiedades de los paralelogramos.</p> <p>Según la caracterización de los niveles mostró dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p>En esta actividad, el estudiante tuvo dificultades en relacionar propiedades entre los paralelogramos, estas características ubican al estudiante en el nivel 2.</p>
--	---	---

En la tabla 12 se describirán las respuestas del estudiante 4, en ella se interpretarán teniendo en cuenta los elementos teóricos considerados. La respuesta del estudiante daría indicios de su nivel de razonamiento o comprensión respecto a los paralelogramos.

Tabla 12: Interpretación de las respuestas del estudiante 4

ESTUDIANTE 4		
ACTIVIDADES	DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA	INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS.
<p>Actividad 1</p> <p>Se presentaron 12 figuras y se pidió a los estudiantes que las reunieran de acuerdo a características comunes. (Ver anexo p. 111)</p>	<p><i>Agrupar de la siguiente manera señalando las razones para ello:</i></p> <p>Señaló que las figuras 6 y 4 tenían bordes triangulares. Para las figuras 1 y 10 mencionó que eran paralelas. Señaló que las figuras 2 y 11 tenían bordes triangulares. Para las figuras 5 y 8 mencionó que eran congruentes. Mencionó que la figura 3 tenía ángulos rectos.</p>	<p>El estudiante utilizó expresiones ambiguas para caracterizar a las figuras 4, 6, 2 y 11 Su apreciación fue más visual, restringido solo a figuras prototipo.</p> <p>Mencionó que las figuras 1 y 10 eran los únicos paralelogramos, al parecer los agrupó por su forma. De la misma manera agrupó las figuras 5 y 8 e indicó que eran congruentes, su apreciación sigue siendo por su forma, al parecer no reconoce a los romboídes, porque hubiese agrupado a más figuras. Al parecer desconoce a los diferentes tipos de paralelogramos.</p> <p>Según la caracterización de los niveles, el estudiante mostró tres características del nivel 1 como:</p> <p><i>1.e.Utiliza expresiones ambiguas o imprecisas para mencionar características de los paralelogramos.</i></p> <p><i>1.f. Incluye atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos.</i></p> <p><i>1.i.Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante no pudo llegar al nivel 2, debido a que utiliza definiciones ambiguas para describir paralelogramos.</p>
<p>Actividad 2</p> <p>Se presentó 4 preguntas que estaban enfocadas a reconocer paralelogramos teniendo en cuenta sus características. (Ver anexo p.115)</p>	<p><i>Señala las razones de su elección para cada una de figuras:</i></p> <p>Primera pregunta reconoció al rectángulo, romboide y el cometa como figuras que tenían dos pares de lados paralelos. Segunda pregunta reconoció que el romboide y el</p>	<p>El estudiante al no reconocer al rombo, evidenció desconocimiento de lados paralelos, porque además dejó de lado al cuadrado.</p> <p>Su evidencia se hizo más notoria cuando señaló al cometa como la figura que tenía dos pares de lados opuestos paralelos.</p> <p>En el último ejercicio al mencionar al cometa y al trapecio como figuras de dos pares de lados opuestos paralelos, evidenció desconocimiento de propiedades.</p>

	<p>rectángulo son figuras que tenían dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.</p> <p>Tercera pregunta señaló que el cuadrado y el rombo son figuras que tenían dos pares de lados paralelos y cuatro lados congruentes.</p> <p>Cuarta pregunta señaló que el cometa y el trapecio son figuras que tenían dos pares de lados paralelos sin lados ni ángulos congruentes.</p>	<p>Según su respuesta, el estudiante mostró cinco características del nivel 1 como:</p> <p><i>1.a. Reconoce a los romboides dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1 b. Reconoce a los rectángulos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1 c. Reconoce a los rombos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.d. Reconoce a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual, pero todavía no concibe al cuadrado ni como rectángulo ni como un rombo</i></p> <p><i>1i. Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos</i></p> <p>La dificultad del estudiante, estuvo en que reconoció algunos paralelogramos por su forma global, pero no como están formados, por tal motivo no pudo llegar al nivel 2.</p>
<p>Actividad 3</p> <p>Se solicitó que construyeran paralelogramos de acuerdo a sus características y los señale en sus gráficos.</p> <p>(Ver anexo p. 118)</p>	<p><i>En sus construcciones se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta construyó un rombo y señaló solo lados, desconociendo a los vértices, ángulos y diagonales perpendiculares.</p> <p>Segunda pregunta construyó un cuadrado y señaló solo lados, no menciona ángulos y diagonales.</p> <p>Tercera pregunta construyó un rectángulo, solo mencionó los lados, pero no señaló sus 4 ángulos rectos ni sus diagonales.</p> <p>Cuarta pregunta construyó un romboide, señaló sus lados, pero no señala sus diagonales y ángulos.</p>	<p>En cada uno de sus dibujos se evidenció desconocimiento de ciertos elementos como:</p> <p>Al dibujar al rombo señaló lados paralelos de igual medida, pero no reconoció ángulos, vértices y diagonales perpendiculares, la imagen que tenía es un prototipo. Al parecer su imagen es solo visual.</p> <p>Al dibujar al cuadrado consideró que sus lados opuestos paralelos tuvieran la misma medida y señaló a sus lados, pero no reconoce a sus diagonales perpendiculares, ángulos rectos, ni vértices. Sigue con su imagen visual.</p> <p>Al dibujar al rectángulo tuvo en cuenta sus lados opuestos paralelos congruentes, pero no reconoce a sus diagonales iguales, ángulos rectos ni vértices.</p> <p>Finalmente dibujó al romboide, consideró sus lados opuestos paralelos congruentes, pero no consideró: ángulos opuestos iguales ni diagonales.</p> <p>De acuerdo a su respuesta, mostró cuatro características del nivel 1 como:</p> <p><i>1.a. Reconoce a los romboides dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia, no reconoce sus elementos y características.</i></p>

		<p><i>1 b. Reconoce a los rectángulos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1 c. Reconoce a los rombos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.d.Reconoce a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual, pero todavía no concibe al cuadrado ni como rectángulo ni como un rombo.</i></p> <p>Al parecer el estudiante tiene una imagen mental de las figuras, porque desconoció algunos elementos y propiedades, motivo por el cual no pudo llegar al nivel 2.</p>
<p>Actividad 4 Se presentó 5 cuadriláteros, se les pidió determinar si la figura es un paralelogramo teniendo en cuenta las medidas de lados y ángulos. (Ver anexo p. 120)</p>	<p><i>Muestra las siguientes razones al medir sus lados y ángulos de diversos cuadriláteros:</i></p> <p>Primera pregunta encontró la medida de sus ángulos y reconoció que la figura es un paralelogramo porque tiene 4 lados iguales</p> <p>Segunda pregunta determinó las medidas de sus ángulos y lados, reconoció que la figura era un paralelogramo llamado romboide porque tienen 2 pares de lados opuestos iguales.</p> <p>Tercera pregunta no determinó las medidas de sus ángulos, reconoció que la figura no era un paralelogramo e indicó porque no tiene 2 pares de lados iguales.</p> <p>Cuarta pregunta. no determinó las medidas de sus ángulos, reconoció que la figura no era un paralelogramo e indicó porque no tiene 2 pares de lados iguales</p> <p>Quinta pregunta calculó las medidas de lados y ángulos,</p>	<p>El estudiante tuvo dificultad para medir los ángulos, reconoció al cuadrado y mencionó a los lados y no a sus ángulos. En el romboide no mencionó la relación de sus ángulos. En el rectángulo no expresó la característica de lados opuestos paralelos congruentes. El estudiante a pesar de tener las medidas de sus lados y ángulos no las tomó en cuenta.</p> <p>Su respuesta, evidenció dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>En su respuesta, mencionó que el paralelogramo tiene sus lados opuestos iguales, que le permitió llegar al nivel 2.</p>

	reconoció que la figura es un rectángulo y lo llamó paralelogramo porque encontró 2 lados iguales.	
<p>Actividad 5</p> <p>Determinó semejanzas y diferencias entre diversos paralelogramos.</p> <p>(Ver anexo p. 124)</p>	<p><i>Expresó las siguientes razones para las semejanzas y diferencias:</i></p> <p>Primera pregunta reconoció que entre el cuadrado y rombo tenían en común cuatro lados iguales y su diferencia estaba en sus ángulos.</p> <p>Segunda pregunta reconoció que entre el rectángulo y romboide tenían en común lados iguales y la diferencia estaba en sus ángulos.</p> <p>Tercera pregunta reconoció que entre el rectángulo y rombo tenían en común cuatro lados iguales y su diferencia estaba en sus ángulos.</p>	<p>El estudiante expresó elementos insuficientes para las semejanzas y de la misma forma lo hizo para sus diferencias. Es decir solo habla de lados y ángulos, pero aún es insuficiente porque no menciona otras características.</p> <p>De acuerdo a su respuesta, presentó tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>En su respuesta, reconoció algunos elementos de un paralelogramo, no llegó al nivel 3 porque no pudo determinar semejanzas y diferencias entre los paralelogramos.</p>
<p>Actividad 6</p> <p>Se pidió que encuentren el nombre del paralelogramo de acuerdo a sus características.</p> <p>(Ver anexo p. 129)</p>	<p><i>De acuerdo a las características en común, se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta mencionó que el romboide, cuadrado, rectángulo y rombo al tener dos pares de lados opuestos paralelos se llaman paralelogramos</p> <p>Segunda Pregunta mencionó que el rectángulo y cuadrado al tener dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos se llaman rectángulos.</p> <p>Tercera pregunta mencionó que el rombo y el romboide al tener dos pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto se llaman perpendiculares</p>	<p>El estudiante en esta actividad pudo reconocer a los paralelogramos y a los rectángulos a través de sus características en común, pero no ocurrió lo mismo con el último ejercicio que se refería a los no rectángulos. Consideró a las últimas figuras como rombos, por tal motivo las llamó perpendiculares.</p> <p>De acuerdo a sus respuestas mostró tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a .Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.b. Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos</i></p> <p>El estudiante no llegó al nivel 3, porque tuvo dificultad en reconocer el nombre del paralelogramo de acuerdo a sus características.</p>

<p>Actividad 7</p> <p>Se presentó cinco enunciados, que deberían ser completados con palabras que expresaban nombres de paralelogramos y otras se referían a las propiedades.</p> <p>(Ver anexo p. 134)</p>	<p><i>Las razones que dio al completar los enunciados fueron:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un cuadrado. - Si un paralelogramo tiene diagonales perpendiculares entonces es un rombo. - Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio entonces es un romboide. - Si un paralelogramo es un ángulo opuesto congruente tiene rectángulo. - Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces es un rombo. 	<p>En esta actividad colocó una propiedad que no debió ser utilizada para ningún enunciado.</p> <p>Esta propiedad se refiere a los ángulos opuestos congruentes, esta condición es para todos los paralelogramos, el estudiante mencionó para el rombo. Por lo que su respuesta es incorrecta.</p> <p>En la penúltima respuesta debió colocar primero el nombre del paralelogramo y luego su propiedad, no hizo lo correcto</p> <p>Según la caracterización de los niveles, la respuesta del estudiante mostró tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante no pudo llegar el nivel 3, porque reconoce algunas propiedades, pero tiene dificultad en relacionarlas.</p>
--	--	--

En la tabla 13 se describirán las respuestas del estudiante 5, en ella se interpretarán teniendo en cuenta los elementos teóricos considerados. La respuesta del estudiante daría indicios de su nivel de razonamiento o comprensión respecto a los paralelogramos.

Tabla 13: Análisis de las respuestas del estudiante 5

ESTUDIANTE 5		
ACTIVIDADES	DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA	INTERPRETACIÓN DE LAS RESPUESTAS.
<p>Actividad 1</p> <p>Se presentaron 12 figuras y se pidió a los estudiantes que las reunieran de acuerdo a características comunes. (Ver anexo p. 111)</p>	<p><i>Agrupar de la siguiente manera señalando las razones para ello:</i></p> <p>Señaló que las figuras 1 y 10 son rectangulares. Mencionó que la figura 3 era un cuadrado. Señaló que las figuras 5 y 11 eran paralelos.</p>	<p>El estudiante reconoció a los rectángulos, al parecer tiene una imagen visual, porque para las demás figuras señaló atributos irrelevantes, como cuadrado a la figura cuadrada.</p> <p>Al parecer desconoce la característica de los paralelogramos, porque escoge sólo dos figuras por sus formas parecidas.</p> <p>Según la caracterización de los niveles, el estudiante tránsito por dos características del nivel 1 y una característica del nivel 2 como:</p> <p><i>1.e. Utiliza expresiones ambiguas o imprecisas para mencionar características de los paralelogramos.</i></p> <p><i>1.j. Muestra limitaciones para describir diversas clases de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c. Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>Al inicio de la actividad, utilizó definiciones ambiguas para describir paralelogramos, pero mencionó una condición importante que le permitió llegar al nivel 2.</p>
<p>Actividad 2</p> <p>Se presentó 4 preguntas que estaban enfocadas a reconocer paralelogramos teniendo en cuenta sus características. (Ver anexo p. 116)</p>	<p><i>Señala las razones de su elección para cada una de las figuras:</i></p> <p>Primera pregunta reconoció que el rectángulo, rombo, cuadrado y romboide tenían dos pares de lados paralelos. Segunda pregunta reconoció que el romboide, cuadrado y el rectángulo tienen dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos. Tercera pregunta señaló que el cuadrado</p>	<p>En esta actividad el estudiante evidenció desconocimiento de propiedades que impidió señalar a las figuras que cumplían esta condición.</p> <p>Reconoció a los paralelogramos por su característica general como el tener dos pares de lados opuestos paralelos.</p> <p>No reconoce la propiedad del romboide, porque mencionó tener cuatro ángulos rectos.</p> <p>Reconoce a los paralelogramos que tienen cuatro lados congruentes, es decir conoce el significado de congruencia.</p> <p>Pero en el último ejercicio, se le pidió dos condiciones, no tener lados ni ángulos congruentes,</p>

	<p>es y el rombo son figuras que tienen dos pares de lados paralelos y cuatro lados congruentes.</p> <p>Cuarta pregunta señaló que el rombo, rectángulo y romboide tienen dos pares de lados paralelos sin lados ni ángulos congruentes.</p>	<p>al parecer desconoce las propiedades de del rombo y del rectángulo.</p> <p>Según su respuesta, el estudiante mostró dos características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.b. Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante llegó al nivel asignado para esta actividad, reconoció algunas propiedades de los paralelogramos.</p>
<p>Actividad 3</p> <p>Se solicitó que construyeran paralelogramos de acuerdo a sus características y los señale en sus gráficos.</p> <p>(Ver anexo p. 118)</p>	<p><i>En sus construcciones se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta construyó un rombo, pero no señaló a ninguna de las características indicadas.</p> <p>Segunda pregunta construyó un cuadrado y señaló solo a sus ángulos, desconociendo a sus lados y diagonales.</p> <p>Tercera pregunta construyó un rectángulo, solo mencionó sus diagonales, pero no a sus ángulos ni lados.</p> <p>Cuarta pregunta construyó un romboide, pero no mencionó a ninguna de sus características.</p>	<p>El estudiante evidenció desconocimiento de algunos elementos en varias construcciones como:</p> <p>Dibujó al rombo y no mencionó a ninguno de sus elementos, al parecer solo tiene una imagen visual de la figura.</p> <p>Reconoció ángulos en el cuadrado, no considera en el grafico que sus lados opuestos son iguales, que es la condición para los cuadrados.</p> <p>Al dibujar al rectángulo, no consideró que sus lados opuestos sean iguales, que es una condición relevante del cuadrado.</p> <p>Para el caso del romboide, no señaló ningún elemento, pero consideró a que sus lados opuestos sean iguales.</p> <p>De acuerdo a sus respuestas, mostró dos característica del nivel 1 y una características del nivel 2 como:</p> <p><i>1.g.Dibuja diversas clases de paralelogramos, pero no mencionan sus elementos propiedades.</i></p> <p><i>1.i.Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p>El estudiante al graficar tuvo dificultad en mencionar elementos, reconoció algunos de ellos, esta característica lo ubicó en el nivel 2.</p>

<p>Actividad 4</p> <p>Se presentó 5 cuadriláteros, se les pidió determinar si la figura es un paralelogramo teniendo en cuenta las medidas de lados y ángulos.</p> <p>(Ver anexo p.120)</p>	<p><i>Muestra las siguientes razones al medir sus lados y ángulos de diversos cuadriláteros:</i></p> <p>Primera pregunta encontró las medidas de los lados y los ángulos y reconoció que la figura era un cuadrado e indicó que es solo es un paralelogramo.</p> <p>Segunda pregunta se equivocó en determinar la medida de sus ángulos y mencionó que la figura si es un paralelogramo llamado romboide.</p> <p>Tercera pregunta se equivocó en hallar la medida de los ángulos y reconoció que el trapecio no es un paralelogramo.</p> <p>Cuarta pregunta se equivocó en determinar las medidas de los ángulos, reconoció al trapecio que no es un paralelogramo.</p> <p>Quinta pregunta determinó las medidas de los ángulos y reconoció al rectángulo como un paralelogramo</p>	<p>El estudiante reconoció al cuadrado y al rectángulo, pero no mencionó porque son paralelogramo, al parecer su apreciación es solo visual.</p> <p>No expresó características muy relevantes para indicar porque el romboide era un paralelogramo, De la misma manera sucedió con los trapecios, no mencionó porque no era un paralelogramo.</p> <p>Su respuesta evidenció tres características del nivel 1 como:</p> <p><i>1.a.Reconoce a los romboides dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.b.Reconoce a los rectángulos dentro de un grupo de figuras solo por su apariencia visual, no reconoce sus elementos y características.</i></p> <p><i>1.d.Reconoce a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual.</i></p> <p>La respuesta del estudiante, es solo visual, no reconoce elementos ni propiedades, motivo por el cual se ubicó en el nivel 1</p>
<p>Actividad 5</p> <p>Determinó semejanzas y diferencias entre diversos paralelogramos.</p> <p>(Ver anexo p.125)</p>	<p><i>Expresó las siguientes razones para las semejanzas y diferencias:</i></p> <p>Primera pregunta reconoció que entre el cuadrado y rombo tienen en común sus lados y la diferencia estuvo en sus ángulos.</p> <p>Segunda pregunta reconoció que entre el rectángulo y romboide tienen en común lados paralelos y lados diferentes y la diferencia está en sus ángulos.</p> <p>Tercera pregunta reconoció que entre el rectángulo y rombo son paralelogramos y su</p>	<p>El estudiante evidenció conocimiento de propiedades, pero es insuficiente porque no expresó a sus diagonales, ángulos opuestos, lados opuestos.</p> <p>De acuerdo a su respuesta evidenció tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas</i></p> <p><i>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>En su respuesta, expresó algunas propiedades pero no pudo establecer relaciones de semejanzas y diferencia entre paralelogramos, motivo por el cual</p>

	diferencia estaba en sus ángulos.	no llegó al nivel 3.
<p>Actividad 6</p> <p>Se pidió que encuentren el nombre del paralelogramo de acuerdo a sus características.</p> <p>(Ver anexo p.130)</p>	<p><i>De acuerdo a las características en común, se evidenciaron las siguientes razones:</i></p> <p>Primera pregunta mencionó que el romboide, cuadrado, rectángulo y rombo al tener dos pares de lados opuestos paralelos se llaman paralelogramos</p> <p>Segunda Pregunta mencionó que el rectángulo y cuadrado al tener dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos se llaman rectángulos.</p> <p>Tercera pregunta mencionó que el rombo y el romboide al tener dos pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto se llaman perpendiculares.</p>	<p>El estudiante pudo reconocer que la característica común entre el cuadrado, rectángulo, rombo y romboide son las figuras que tienen dos pares de lados opuestos paralelos.</p> <p>De la misma manera lo hizo para las figuras que tienen dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos.</p> <p>Pero en el último ejercicio, relaciona al rombo y romboide por su forma, pero no tomó en cuenta la característica que menciona que no tuvieran ángulos rectos.</p> <p>De acuerdo a sus respuestas el estudiante mostró una características del nivel 1 y tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>1.i.Tiene dificultad en reconocer propiedades en diversos paralelogramos.</i></p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p><i>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</i></p> <p><i>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</i></p> <p>El estudiante no pudo llegar al nivel 3, debido a que no pudo establecer relaciones entre los paralelogramos.</p>
<p>Actividad 7</p> <p>Se presentó cinco enunciados, que deberían ser completados con palabras que expresaban nombres de paralelogramos y otras se referían a las propiedades.</p> <p>(Ver anexo p.135)</p>	<p><i>Las razones que dio al completar los enunciados fueron:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un cuadrado. - Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio es un rombo. - Si un paralelogramo tiene 4 lados congruentes entonces 	<p>El estudiante tuvo dificultades en algunos enunciados como:</p> <p>Se equivocó al relacionar dos propiedades en el segundo y en el último enunciado.</p> <p>Reconoció en el cuadrado dos características importantes como sus cuatro ángulos congruentes y cuatro lados iguales.</p> <p>De la misma manera reconoció que el rectángulo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio.</p> <p>Según la caracterización de los niveles, la respuesta del estudiante mostró tres características del nivel 2 como:</p> <p><i>2.a.Reconoce que existen varios tipos de paralelogramos</i></p>

	<p>es un cuadrado</p> <p>- Si un paralelogramo es un rectángulo tiene las diagonales que se intersecan en su punto medio.</p> <p>- Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces sus diagonales son perpendiculares</p>	<p><i>y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas.</i></p> <p>2.b.Reconoce las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tiene dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos.</p> <p>2.c.Reconoce características generales para todos los paralelogramos.</p> <p>El estudiante tuvo dificultad en relacionar propiedades, motivo por el cual no llegó al nivel 3.</p>
--	--	---

Los resultados de la investigación revelaron que dos de los estudiantes transitaron por dos niveles, además cada una de las actividades tuvieron una secuencia lógica de acuerdo al modelo teórico de Van Hiele, que se inicia desde la “Visualización” que permitió a los estudiantes reconocer a los paralelogramos de manera global, luego en el “Análisis” permitió al estudiante identificar componentes matemáticos y finalmente en la “Clasificación” le permitió relacionar figuras de manera lógica . Todo este proceso ayudo al estudiante mejorar su capacidad de razonamiento.

Los resultados evidenciaron lo siguiente:

- 1 estudiante mostró más característica del nivel 1, con un grado de adquisición alto.
- 3 estudiantes mostraron más características del nivel 2, con grado de adquisición intermedio.
- 1 estudiante mostró más característica del nivel 2, con grado de adquisición alto e indicios del nivel 3.

5.3. NIVELES DE RAZONAMIENTO IDENTIFICADOS EN LOS ESTUDIANTES

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

A partir del análisis realizado, se puede notar que no es posible asignar un único nivel de razonamiento a cada estudiante, puesto que estos se encuentran en un periodo de transición en el que se combinan razonamientos en los tres niveles. Esto corrobora los principios del modelo teórico adoptado, el modelo Van Hiele.

Para esta interpretación determinamos las características para cada uno de los niveles con respecto al objeto de investigación llamado paralelogramo; luego se identifica en cada una de las actividades las respuestas que brindaron los cinco estudiantes que serán relacionadas con las características de cada nivel de acuerdo al modelo de Van Hiele. Por eso, es necesario recordar que: hemos identificado 10 características relacionadas al primer nivel 1; para el nivel 2 se identificó 6 características y para el nivel 3 se identificó 6 características. (ver pp. 46-49)

De acuerdo al cuadro, podemos concluir los niveles asignados para cada uno de los estudiantes como:

Estudiante 1:

En el caso del estudiante 1, podemos señalar que en sus respuestas predominan características asociadas al nivel de razonamiento 2; sin embargo, también se han identificado respuestas que evidencian un nivel de razonamiento 1 y algunas del nivel 3.

En la tabla 14 se señalan cuáles son las características de cada uno de los niveles que fueron identificadas en cada una de las actividades desarrolladas por el estudiante 1.

Tabla 14: Identificación de los niveles del estudiante 1

NIVELES DE RAZONAMIENTO	NIVEL 1							NIVEL 2							NIVEL 3						
	ACTIVIDADES							ACTIVIDADES							ACTIVIDADES						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
X		X							X		X	X	X	X					X	X	X
X		X							X		X	X	X	X					X	X	X
X											X		X								

Si bien en algunas actividades sus respuestas se apoyaron en argumentos que se desprendían de las figuras, en otras mostró reconocer propiedades de los paralelogramos y expresó algunas definiciones. Aunque en algunas respuestas evidenció tener problemas para relacionar

distintas propiedades, en otras pudo establecer semejanzas y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos.

Estudiante 2

En el caso del estudiante 2, podemos señalar que en sus respuestas predominan características asociadas al nivel de razonamiento 1; debido a que su percepción es más visual. Sin embargo, también se han identificado en sus respuestas algunas evidencias de un nivel de razonamiento 2 y muy pocas del nivel 3.

En la tabla 15 se señalan cuáles son las características de cada uno de los niveles que fueron identificadas en cada una de las actividades desarrolladas por el estudiante 2.

Tabla 15: Identificación de los niveles del estudiante 2

NIVELES DE RAZONAMIENTO	NIVEL 1							NIVEL 2							NIVEL 3						
	ACTIVIDADES							ACTIVIDADES							ACTIVIDADES						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
X	X	X				X		X		X	X	X								X	
X	X	X				X		X		X	X	X								X	
X	X					X					X	X									
	X										X										

Como se observa, el estudiante en la segunda actividad tránsito por dos niveles el 1 y 2, al inicio reconoció a los paralelogramos por su apariencia visual, luego mencionó que los paralelogramos están formados por elementos y propiedades. A partir de la actividad 4 se identificó respuestas que mostraron un nivel de razonamiento 2 en proceso e incluso mejoró en la actividad 6, porque tránsito por dos niveles el 2 y el 3, porque pudo establecer relaciones entre sus propiedades.

Estudiante 3

En el caso del estudiante 3, podemos señalar que en sus respuestas predominan características asociadas al nivel de razonamiento 2; sin embargo, también se han identificado respuestas que evidencian un nivel de razonamiento 1 pero ninguna evidencia del nivel 3.

En la tabla 16 se señalan cuáles son las características de cada uno de los niveles que fueron identificadas en cada una de las actividades desarrolladas por el estudiante 3.

Tabla 16: Identificación de los niveles del estudiante 3

NIVELES DE RAZONAMIENTO	NIVEL 1							NIVEL 2							NIVEL 3						
	ACTIVIDADES							ACTIVIDADES							ACTIVIDADES						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
X	X						X	X	X	X	X	X	X								
X							X	X	X	X	X	X									
X										X											
X																					

En el caso del estudiante 3, podemos señalar que en sus respuestas predominan características asociadas a dos niveles en las dos primera actividades, al principio mostró limitaciones para describir paralelogramos, estas evidencias lo identifican en el nivel 1; luego en la misma actividad reconoce sus propiedades, tal como se muestra en la tabla 16. En la cuarta actividad mostró más características del nivel 2, pudo reconocer características y propiedades pero tuvo dificultad en relacionarlas, razón por la cual no llega al nivel 3.

Estudiante 4

En el caso del estudiante 4, podemos señalar que en sus respuestas predominan la misma cantidad de características para los niveles 1 y 2, pero ninguna del nivel 3, tal como se muestra en la tabla 17.

En la tabla 17 se señalan cuáles son las características de cada uno de los niveles que fueron identificadas en cada una de las actividades desarrolladas por el estudiante 4.

Tabla 17: Identificación de los niveles del estudiante 4

NIVELES DE RAZONAMIENTO	NIVEL 1							NIVEL 2							NIVEL 3						
	ACTIVIDADES							ACTIVIDADES							ACTIVIDADES						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
X	X	X								X	X	X	X								
X	X	X								X	X	X	X								
X	X	X									X	X	X								
X	X	X																			

En el caso del estudiante 4, mostró las mismas características en los niveles 1 y 2. Las tres primeras actividades están relacionadas con el nivel 1 como se muestra en la tabla 17, estas características mencionaron que el estudiante reconoció paralelogramos sólo por su apariencia visual, pero a partir de la actividad 4, reconoció propiedades y características de los paralelogramos, ubicándolo en el nivel 2. No logró llegar al nivel 3, debido a que no pudo establecer relaciones de semejanza y diferencia entre los paralelogramos.

En el caso del estudiante 5 predominan características asociadas al nivel de razonamiento 2; sin embargo también se han identificado algunas respuestas que evidencia un nivel de razonamiento 1 pero no hay evidencias del nivel de razonamiento 3.

En la tabla 18 se señalan cuáles son las características de cada uno de los niveles que fueron identificadas en cada una de las actividades desarrolladas por el estudiante 5.

Tabla 18: Identificación de los niveles del estudiante 5

NIVELES DE RAZONAMIENTO	NIVEL 1							NIVEL 2							NIVEL 3						
	ACTIVIDADES							ACTIVIDADES							ACTIVIDADES						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
X		X	X		X		X	X	X		X	X	X								
X		X	X					X			X	X	X								
			X								X	X	X								

En el caso del estudiante 5, en la primera actividad transita por dos niveles el 1 y 2, muestra más características del nivel 1, pero atribuye una característica importante que es que todos los paralelogramos tienen lados opuestos paralelos, ubicándolo en el nivel 2, pero no menciona propiedades ni características, tal como se muestra en la tabla 18. A partir de la actividad 5, mostró más características del nivel 2, predominan características asociadas al nivel de razonamiento 2, porque reconoció propiedades y características de los paralelogramos, tuvo dificultad en establecer relaciones y diferencias entre los paralelogramos, razón por la cual no llegó al nivel 3 de razonamiento de Van Hiele.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los antecedentes y al modelo de Van Hiele que es el marco teórico que utilizamos en la investigación, es importante mencionar en la investigación adaptamos los niveles de razonamiento para los paralelogramos.

Pensamos por ello que el objetivo general: **Determinar los diferentes niveles de razonamiento, así como los conocimientos y habilidades que poseen los estudiantes de primer año de secundaria, en relación al objeto paralelogramo, a través de la aplicación de una secuencia de actividades diseñadas según el modelo de van Hiele**, fue alcanzado debido a que los estudiantes no solo lograron alcanzar el nivel 2, también observamos que aplicaron conocimientos matemáticos y habilidades en el desarrollo de cada una de las actividades que planteamos.

Atendiendo al modelo teórico adoptado, más que asignar un nivel de razonamiento a los estudiantes, lo que se hizo fue asociar sus respuestas a las características definidas en cada uno de los niveles. En el trabajo se confirmó el supuesto del marco teórico según el cual, el paso de un nivel de razonamiento a otro se realiza de manera gradual, de modo que en un determinado momento el estudiante podrá encontrarse en un periodo de transición en el que se combinan razonamientos de un nivel y de otro nivel.

En la investigación determinamos que los estudiantes se encontraban en un periodo de transición en el que combinan dos niveles razonamiento, según el modelo de Van Hiele, lo que nos permitió responder a nuestra pregunta de investigación *¿qué nivel de razonamiento evidencian los estudiantes de primer año de secundaria cuando realizan actividades con el objeto paralelogramo, de acuerdo al modelo Van Hiele?*

En relación al primer objetivo específico: **Adaptar los niveles de razonamiento según el modelo de Van Hiele para el caso de los paralelogramos, a partir de los construidos en investigaciones previas para los cuadriláteros**. Para nuestra investigación, la adaptación de los niveles de razonamiento, permitió reconocer rasgos en las respuestas de los estudiantes. Así, se consideró como rasgo de un razonamiento de nivel 1 el que el estudiante reconozca un tipo particular de paralelogramo (romboides, rectángulos, rombos) dentro de un grupo de figuras por su apariencia, pero no haciendo referencia a sus elementos y características. También el que pueda reconocer a los cuadrados dentro de un grupo de figuras por su apariencia visual, pero todavía no los conciba ni como un caso particular de rectángulo ni de

rombo. Otros rasgos del primer nivel serán que el estudiante emplee expresiones ambiguas o imprecisas para mencionar características de los paralelogramos. También que incluya atributos irrelevantes para describir clases de paralelogramos. Además, dibuje diversas clases de paralelogramos, pero no mencione sus elementos ni propiedades. En el primer nivel mostrará dificultad para reconocer propiedades de los diversos tipos de paralelogramos, así como limitaciones para describirlos.

De otro lado, en relación al nivel 2, se consideró como rasgo de un razonamiento de este nivel el que reconozca que existen varios tipos de paralelogramos y que están formados por elementos y poseen propiedades distintas. También el que reconozcan las propiedades de cada tipo de paralelogramo, pero tienen dificultad en relacionar los distintos tipos de paralelogramos. En ese mismo nivel, se ubicarán respuestas en la que se muestre que el estudiante reconoce características generales para todos los paralelogramos, así como aquellas en las que define un tipo de paralelogramo, mencionando más condiciones de las que se requieren. Otros rasgos de este nivel son el que utilice un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos pero incluye expresiones informales. También muestra dificultad para seguir demostraciones.

En relación al nivel 3, se consideró como rasgo de un razonamiento de este nivel el que el estudiante reconozca las propiedades de cada tipo de paralelogramo y puede establecer relaciones de inclusión entre los distintos tipos de paralelogramos. También cuando reconoce propiedades comunes y diferencias entre los distintos tipos de paralelogramos. En ese mismo nivel, los estudiantes definen un tipo de paralelogramo mencionando solo condiciones suficientes. También reconoce que hay propiedades que se desprende de las definiciones. Otros rasgos de este nivel es el empleo de un lenguaje adecuado para referirse a las propiedades de los paralelogramos incluyendo expresiones formales. Puede seguir demostraciones.

En relación al objetivo 2: **Identificar el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes de primer año de secundaria, al interpretar las respuestas en las actividades implementadas.**

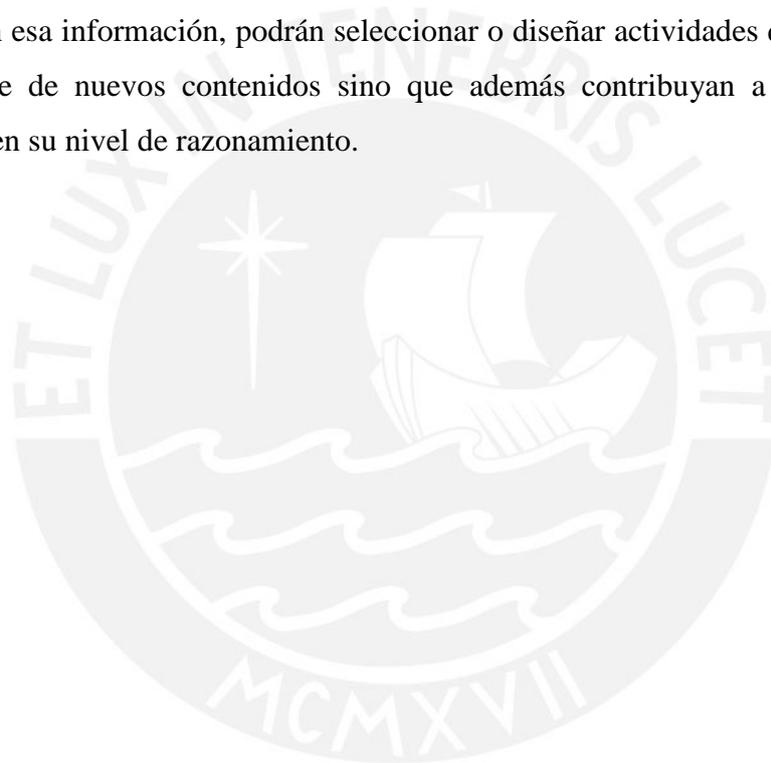
Para esta identificación, la interpretación de las respuestas de los estudiantes en cada una de las actividades permitió asociar sus respuestas a las características que se evidenciaban en cada nivel. Por ello, no se presentan resultados categóricos según los cuales los estudiantes se ubican en un único nivel, si no que se tiene en cuenta para cuales de los niveles se presentaron

más rasgos y se hace una descripción cualitativa de estos. Para determinar el nivel de razonamiento, lo más importante no es evaluar las respuestas de los estudiantes, sino el porqué de sus respuestas.

Presentamos algunas sugerencias para investigaciones futuras a partir del trabajo realizado:

Pensamos que se hace necesario que los docentes de matemática consideren un espacio para hacer un diagnóstico del nivel de razonamiento predominante en los estudiantes antes de iniciar un determinado tema de geometría.

También, con esa información, podrán seleccionar o diseñar actividades que no solo permitan el aprendizaje de nuevos contenidos sino que además contribuyan a que los estudiantes evolucionen en su nivel de razonamiento.



REFERENCIAS

- Aguilar, R. y Iglesias, M. (2013). La geometría de los cuadriláteros en los libros de texto de educación primaria. *Revista Dialnet*, 1(2), pp. 151- 174. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4832960>
- Alfonso, M. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de van Hiele*. (Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna, España). Recuperado de: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/58/Articulo01.pdf>
- Aparicio, H. y Solano, L. (2011). *Modelo Van Hiele una estrategia didáctica para el aprendizaje de triángulos y cuadriláteros*. (Tesis de Maestría, Universidad la Salle, México). Recuperado por <http://repository.lasalle.edu.co/ha>.
- Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro*. (Tesis de doctorado sobre la geometría Escolar). Universidad de Extremadura. Recuperado de: http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/2004%20Barrantes_Blanco_recuertos.pdf
- Blanco, L. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa*. 1 6(2), pp. 107-132. Recuperado de http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/2004%20Barrantes_Blanco_recuertos.pdf
- Bruño. (2011 a). *Matemática 5to. grado de Primaria*. Grupo editorial Bruño. Lima-Perú.
- Bruño. (2011 b). *Matemática 6to. grado de Primaria*. Grupo editorial Bruño. Lima-Perú.
- Corberán, R. Huerta, P. Margarit, J. Peñas, A. Ruiz, E. (1989). *Didáctica de la geometría: Modelo de Van Hiele*. Edición Castellana. Universidad de Valencia-España. pp. 10- 34. Recuperado de: https://books.google.com.pe/books?id=wD7oIPysOsQC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta M., Jaime A., Bautista, J., Peñas A. y Ruiz E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid-España. Recuperado de: <http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=ACqLekjJuBIC&oi=fnd&pg>
- Cardona, S. Rave, J. y Muñoz, J. (2011) *Una propuesta para la interpretación de conceptos e ideas matemáticas y físicas*. Universidad de Antioquia. Recuperado de: <http://core.ac.uk/download/pdf/19450224.pdf>
- De la Cruz, M. (1985). *Matemática 1*. Editorial Luren. Lima-Perú.
- De Villiers, M. (1986). *Rol y función de una clasificación jerárquica en las matemáticas*. Universidad de Stellenbosch. Recuperado de: <http://www.geometriadinamica.cl/postimg/clascuadv2.pdf>
- Grupo L.A.C.E (2013). *Los estudios de casos*. Barcelona: Universidad de Barcelona. Recuperado de: http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/33367/7/reunid_Los%20estudios%20de%20caso_2012.pdf

- Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele. *Revista de matemática: Sigma*. (28), pp. 33-58. Recuperado de: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_28/5_test_geometri co.pdf
- Fuys, Geddes, Lovett y Tischler (1988). *La teoría de Van Hiele*. Journal for Research in Mathematics. Libro 3. Recuperado de: <http://academic.sun.ac.za/mathed/malati/vanHiele.pdf>
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de sólidos*. Educación Matemática, pp. 103-125. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/405/40516306.pdf>
- Gutiérrez, A. Jaime, A. y Fortuny, J. (1991). *Un paradigma alternativo para evaluar la adquisición de los niveles de Van Hiele*. Diario de Investigación en Educación Matemática. (3), pp. 237-251. Recuperado de <http://edumat.uab.cat/GutJaiFor91.pdf>
- Hiele, V. (1986). *The Van Hiele Theory*. Universidad de Utrecht Holanda. Capítulo 2, pp. 36-59. Recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/The%20Van%20Hiele%20Theory.**httplibrary.uws.edu.auadt-NUWSuploadsapprovedadt-NUWS2007082.pdf
- Helfgott, M. (1991). *Geometría Plana*. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Huerta, P. (1997). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía solo: Un análisis de comparado con una integración necesaria. *Investigación didáctica*, pp. 291-309. Recuperado de <http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21580/21414>
- Jaime, A. Chapa, F. y Gutiérrez. A. (1992). *Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de textos de E.G.B.* Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Valencia. Epsilon (23), pp. 49-62. Recuperado de: <http://www.uv.es/angel.gutierrez/papers.html>
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele*. Colección "Ciencias de la Educación" (4), pp. 295-384. Recuperado de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. (Tesis Doctoral, Universidad de Valencia). Recuperado de: <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista "Ciencias de la Educación"* (1) pp. 83-97. Recuperado de <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf>
- Lastra, S. (2005). *Propuesta Metodológico de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas*. (Tesis en Maestría, Universidad de Chile). Recuperado de: www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra
- Maguiña, A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele*. (Tesis en Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Recuperado de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4733>

- Mederos, O. y Ruiz, A. (2007). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, pp. 8-14. Recuperado <http://www.sinewton.org/numeros/>
- Merriam, S. (1998). Investigación Cualitativa y aplicaciones de casos de estudio en educación. Biblioteca del Congreso. San Francisco. Recuperado de:
- Moise, E y Downs, F. (1966). *Geometría Moderna*. Massachusetts, EE.UU: Editorial Addison Wesley. Recuperado de: <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- Morales, C. y Majé, R. (2011). *Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros*. (Tesis de maestría, Universidad de la Amazonia, Colombia). Recuperado de http://scholar.google.es/scholar?cites=5388631841299045951&as_sdt=2005&scioldt=0,5&hl=es
- Norma (2012). *Matemática I*. Ministerio de Educación. Recuperado de: <http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivos>
- Perú, Ministerio de Educación (2007). *Materiales Educativos y el aprendizaje de la matemática*. Editorial El Nosedal. Recuperado de: http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s1_f5.pdf
- Perú, Ministerio de Educación (2012). *Diseño Curricular Nacional*. Lima. Recuperado de: <http://www.santillana.com.pe/>
- Perú, Ministerio de Educación (2015). *Indicadores de desempeño*. Lima. Recuperado de: <http://es.scribd.com/doc/270406673/Dcn-Curricular-2015>
- Perú, Ministerio de Educación (2010). *Orientaciones para el trabajo pedagógico del área de matemática*. Lima. Recuperado de: <http://ebr.minedu.gob.pe/des/pdfs/otpmatematica2010.pdf>
- Perú, Ministerio de Educación (2015). *Rutas de aprendizaje*. Lima. Recuperado de: <http://recursos.perueduca.pe/rutas/secundaria.php#>
- Ramírez, N. (2014). *Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo de Van Hiele y Geogebra*. (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de: www.bdigital.unal.edu.co/39484/1/44005486.2014.pdf
- Restrepo, J. (2008). Concepciones sobre didáctica de las matemáticas en profesores de educación básica. *Revistas Horizontes pedagógico*. 1 (12), p. 2. Recuperado de: <http://ibero-revistas.metabiblioteca.org/index.php/rhpedagogicos/article/view/116/89>
- Rodríguez, G. Gil, J. García, E. (1996). Metodología de la Investigación Cualitativa. México. *Ediciones Aljibe*. pp. 1-13. Recuperado de: https://psicologiaysociologia.files.wordpress.com/2013/03/rodricc81guez-gil-y-garcicc81a-1996_-estudio-de-casos.pdf
- Salvador, R. y Rodríguez, A. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. 1 (95). Ministerio de Educación y Cultura, Madrid. Recuperado de: http://scholar.google.es/scholar?q=gutierrez+modelo+de+van+hiele&btnG=&hl=es&as_sdt=0%2C5

- Shaughnessy, B. (1986). Las fase de aprendizaje propuestas por Van Hiele. *Revista de investigación en educación matemática*, 17 (1), pp. 31-48. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/749317?seq=1#page_scan_tab_contents
- Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata. Madrid-España. pp. 11-155. Recuperado de: http://investigacionsocial.sociales.uba.ar/files/2013/03/STAKE_investigacion-con-estudio-de-casos.pdf
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2011). El Modelo Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Revista Uniciencia*, 27 (1). Recuperado de: <http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/4944>
- Wikispaces Classroom (s.f.) Los Cuadriláteros. Revista jc3mat82. Recuperado de <http://jc3mat82.wikispaces.com/LOS+CUADRILATEROS>
- Yin, R. (2009). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage Publications. California. pp. 93-95. Recuperado de: http://www.hampp-ejournals.de/hampp-verlag/services/get?file=/frei/ZfP_1_2012_93
- Yin, R. Merriam, S. Stake, R. (2015). Three Approaches to Case Study Methods in education. *The Qualitative Report*. 20(1), pp. 134-152. Recuperado de: <http://www.nova.edu/ssss/QR/QR20/2/yazan1.pdf>
- Zapata, M. y Blanco, L. (2009). Los estudiantes para profesores y sus concepciones sobre la matemática y su enseñanza aprendizaje. *Revista de educación dialnet.unirioja.es*. 12 (4) pp. 109-122. Recuperado de: http://www.aufop.com/aufop/uploaded_files/articulos/1259998427.pdf
- Zúñiga, R. (2013). *Diseño de una secuencia didáctica en torno a la demostración: el caso de las propiedades de los cuadriláteros en grado octavo de educación básica*. (Tesis en Maestría, Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de: <http://www.bdigital.unal.edu.co/10740/#sthash.BbDMralw.dpuf>

ANEXOS 1: ACTIVIDADES DISEÑADAS

ACTIVIDAD 1

I.- Con las siguientes figuras, responde a las siguientes preguntas:

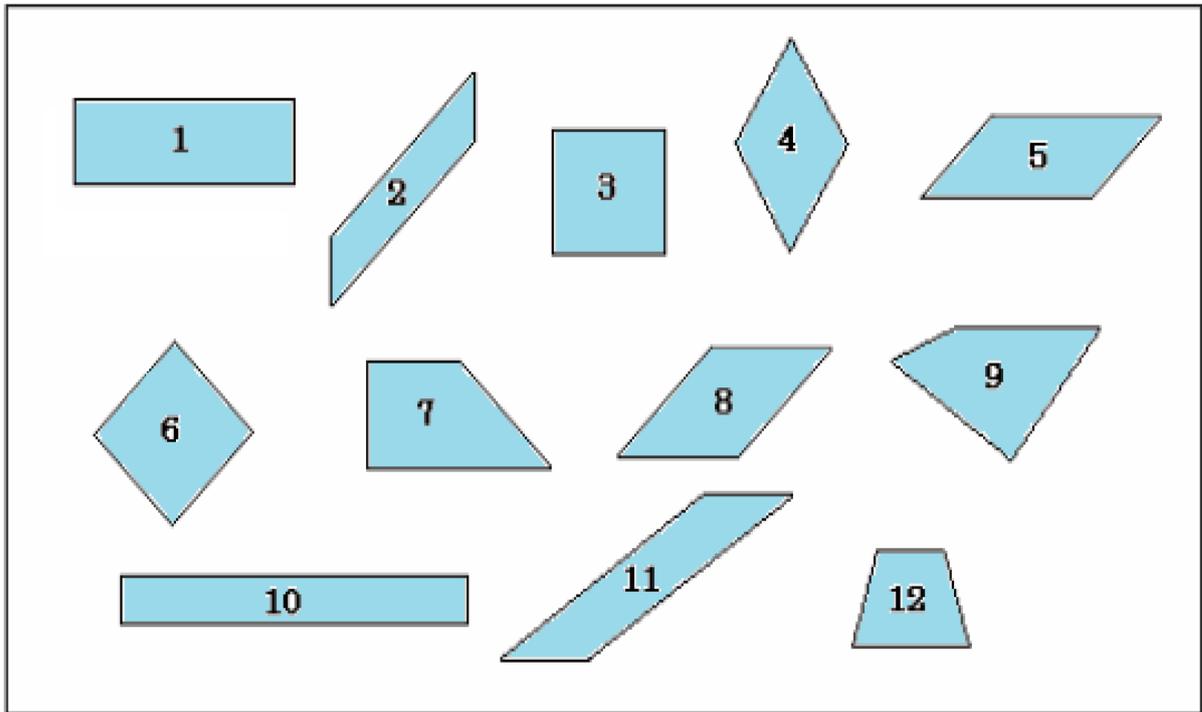


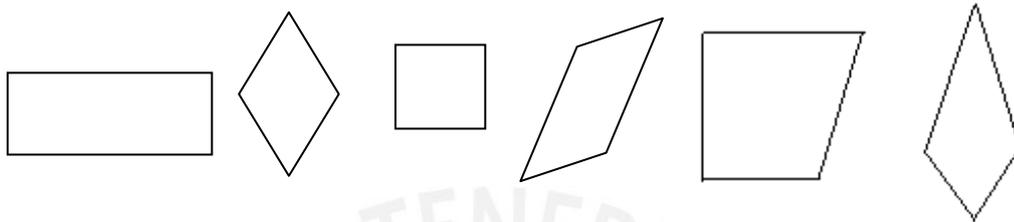
Figura 30. Paralelogramos
Actividad adaptada de Corberan (1994, p. 48)

- ¿Qué figuras tienen características en común? Señala cuál es la característica
- ¿Qué figuras tienen dos pares de lados paralelos?
- ¿Qué figuras tienen por lo menos un ángulo recto?

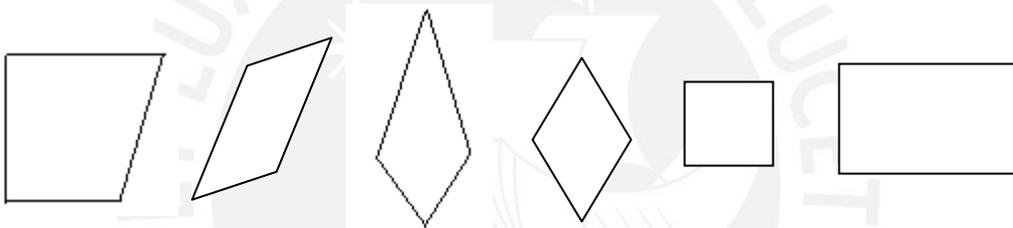
ACTIVIDAD 2

I. Señala los cuadriláteros que respondan a cada pregunta:

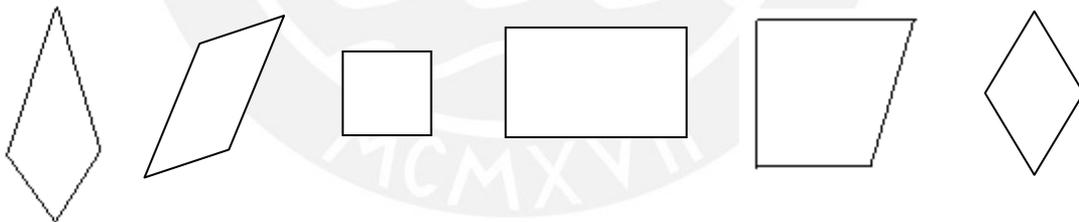
a) ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?



b) ¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos?



c) ¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?



d) ¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?

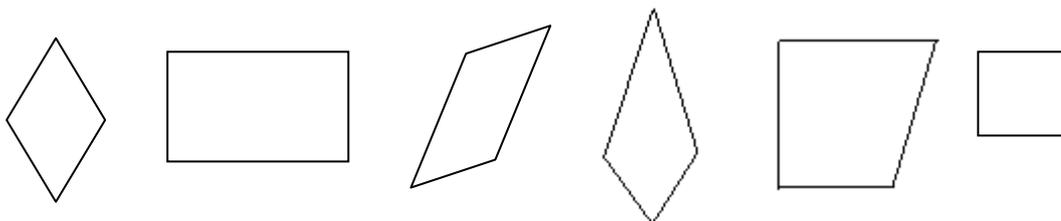
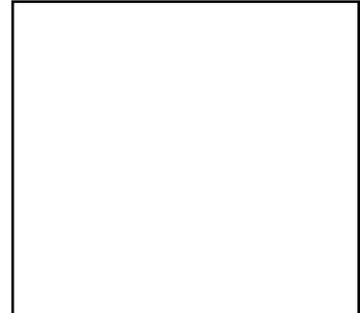


Figura 31. Identificación de Paralelogramos.

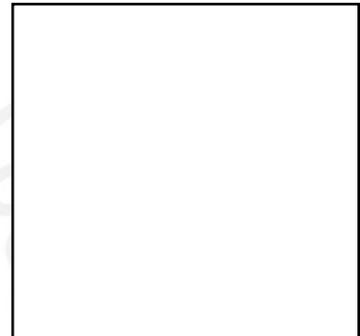
ACTIVIDAD 3

Construye paralelogramos que cumplan las condiciones que se encuentran a la izquierda y señala lo indicado

- a) Un paralelogramo que tenga:
4 lados iguales, diagonales perpendiculares y
ángulos opuestos iguales.



- b) Un paralelogramo que tenga:
4 ángulos rectos, 4 lados iguales y diagonales
perpendiculares.



- c) Un paralelogramo que tenga:
Diagonales iguales y 4 ángulos rectos.



- d) Un paralelogramo que tenga:

Lados paralelos iguales, diagonales iguales y
ángulos opuestos iguales.

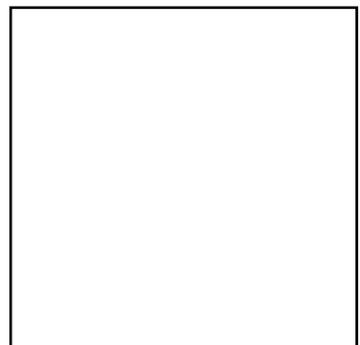
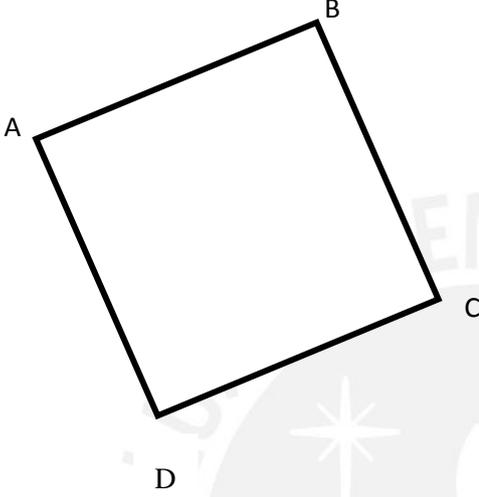
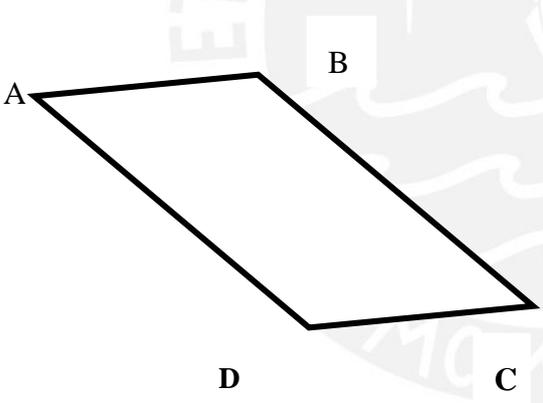
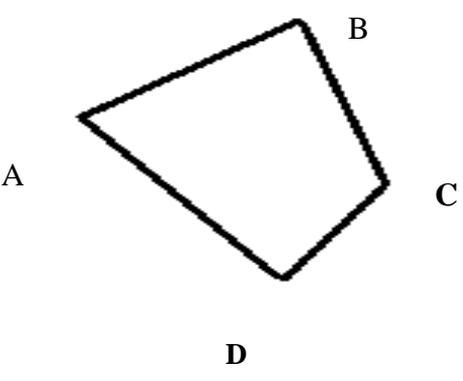


Figura 32. Construcción de paralelogramos

ACTIVIDAD 4

I. Utiliza tus instrumentos para medir los lados y ángulos de los siguientes cuadriláteros; luego responde a la pregunta.

CUADRILÁTEROS	Medida de los lados	Medida de los ángulos	¿La figura es un paralelogramo?
	AB = BC = CD = AD =	$\angle A =$ $\angle B =$ $\angle C =$ $\angle D =$	
	AB = BC = CD = AD =	$\angle A =$ $\angle B =$ $\angle C =$ $\angle D =$	
	AB = BC = CD = AD =	$\angle A =$ $\angle B =$ $\angle C =$ $\angle D =$	

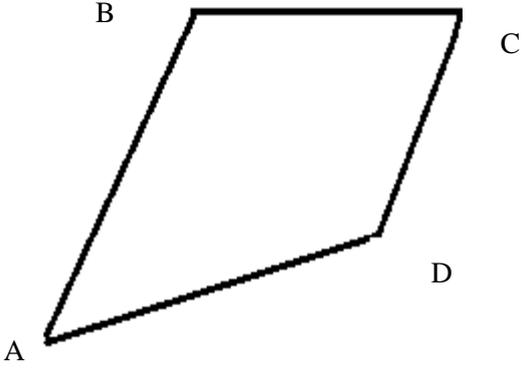
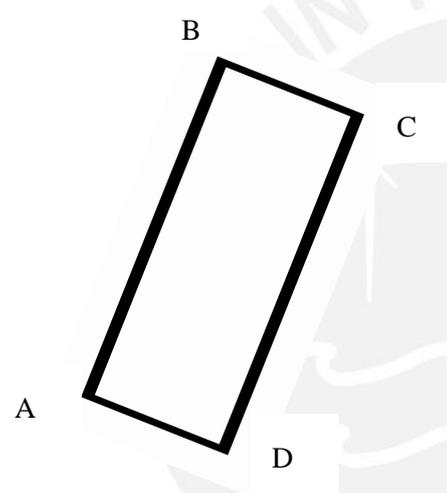
	<p>AB =</p> <p>BC =</p> <p>CD =</p> <p>AD =</p>	<p>< A =</p> <p>< B =</p> <p>< C =</p> <p>< D =</p>	
	<p>AB =</p> <p>BC =</p> <p>CD =</p> <p>AD =</p>	<p>< A =</p> <p>< B =</p> <p>< C =</p> <p>< D =</p>	

Figura 33. Cuadriláteros.

ACTIVIDAD 5

Lee cada enunciado y coloca la letra que está debajo de cada recuadro que corresponda al enunciado. Luego dibuja el paralelogramo que cumple con el enunciado.

4 LADOS
CONGRUENTES

A

4 ÁNGULOS
CONGRUENTES

B

ROMBO

C

LAS DIAGONALES
SE INTERSECAN
EN SU PUNTO

D

ÁNGULOS
OPUESTOS
CONGRUENTES

E

SUS DIAGONALES
SON
PERPENDICULARES

F

CUADRADO

G

RECTÁNGULO

H

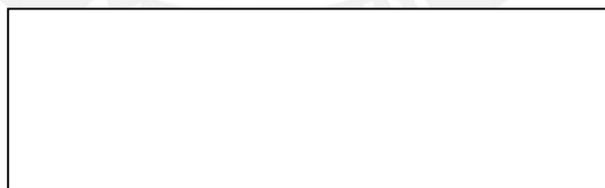
ROMBOIDE

I

Observa el ejemplo:

Si un paralelogramo es un G entonces tiene A

a) Si un paralelogramo tiene entonces es un



b) Si un paralelogramo tiene entonces es un



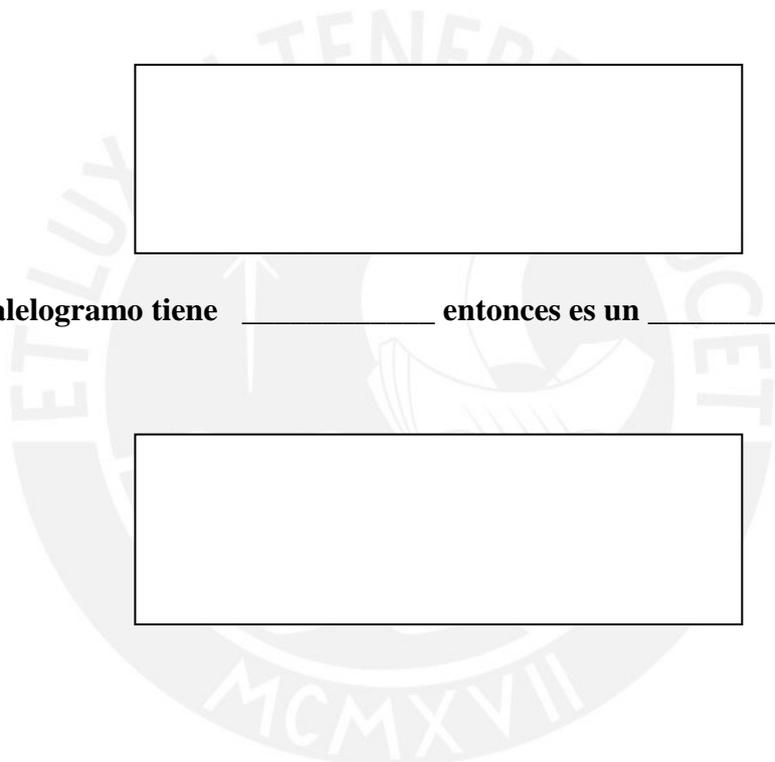
c) Si un paralelogramo tiene _____ entonces es un _____



d) Si un paralelogramo es un _____ tiene _____



e) Si un paralelogramo tiene _____ entonces es un _____



ACTIVIDAD 6

Responde a las siguientes preguntas, teniendo en cuenta su característica

FIGURAS	CARACTERÍSTICAS	¿CÓMO SE LLAMAN A TODAS ESTAS FIGURAS?
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos</p>	
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos</p>	
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	

Figura 34. Clasificación de los Paralelogramos

ACTIVIDAD 7

Responde a las siguientes preguntas, teniendo en cuenta su característica

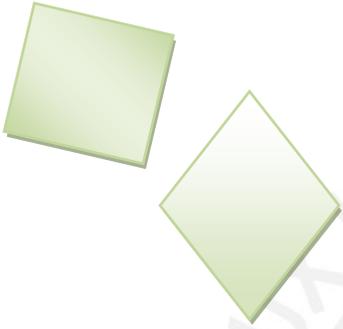
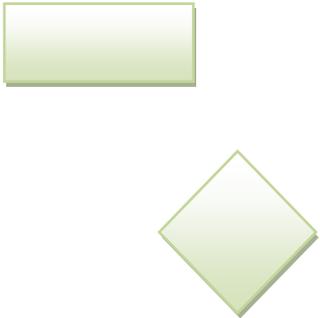
CUADRILÁTEROS	¿Qué semejanzas tienen estos cuadriláteros?	¿Qué diferencias tienen estos cuadriláteros?
		
		
		

Figura 35. Semejanzas y diferencias de cuadriláteros

ANEXO 1: RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES

ACTIVIDAD 1

Tabla 19: Actividad 1. Respuesta de los estudiantes

ESTUDIANTES	RESPUESTAS		
Grado: 1 ero. Secundaria	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué figuras tienen características en común? 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué figuras tienen dos pares de lados paralelos? 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué figuras tiene por lo menos un ángulo recto?
Estudiante 1.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 2 y 11 son parecidos tienen lados paralelos. ▪ 6 y 4 son parecidos tienen lados paralelos. ▪ 5 y 8 son parecidos tienen lados paralelos. ▪ 1 y 3 tienen lados paralelos. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 6 y 4. ▪ 1 y 10. ▪ 5 y 8 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 ▪ 3 ▪ 10
Estudiante 2.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1, 3 y 10 son paralelos. ▪ 4,6 y 8 son rectangulares. ▪ 7 y 9 son trapecios. ▪ 5, 11 y 12 son verticales. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 ▪ 6 ▪ 8 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 ▪ 3 ▪ 10
Estudiante 3	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 y 10 lados paralelos, rectangulares con forma horizontal. ▪ 2 y 11 lados paralelos, rectangulares y tienen forma vertical. ▪ 4 y 6 lados paralelos, tienen forma de rombo. 	Rectángulo	<ul style="list-style-type: none"> ▪ El rectángulo. ▪ El cuadrado. ▪ El rombo.

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 3 y 8 lados paralelos, son de figura cuadrada. ▪ 9 y 7 lados diferentes. 		
Estudiante 4.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 y 6 sus borde son triangulares. ▪ 1 y 10 son paralelos. ▪ 2 y 11 sus bordes son triangulares. ▪ 8 y 5 son congruentes. ▪ 3 tiene ángulo recto. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 y 10 ▪ 4 y 6 ▪ 2 y 11 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 3
Estudiante 5.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 y 10 rectangulares ▪ 3 cuadriculado. ▪ 5 y 11 paralelos. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Cuadrado. ▪ Rectángulo ▪ Triángulo. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelas ▪ Opuestos

Tabla 20: Actividad 2.Resultado del estudiante 1

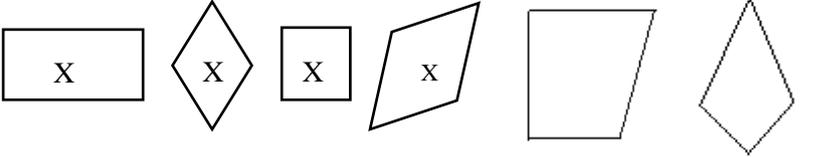
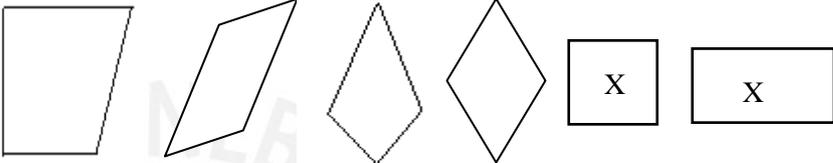
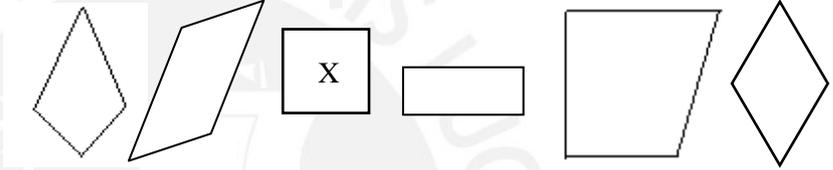
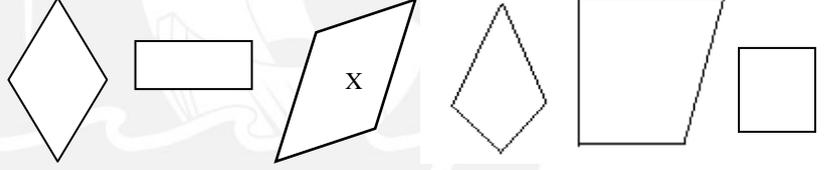
Respuesta: Estudiante 1	
¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?	
¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?	

Tabla 21: Actividad 2. Resultado del estudiante 2.

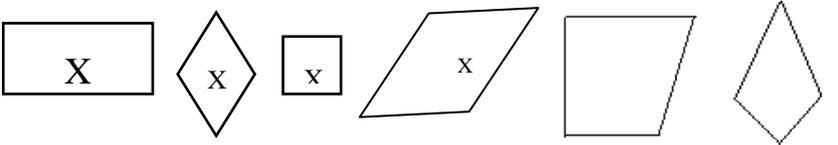
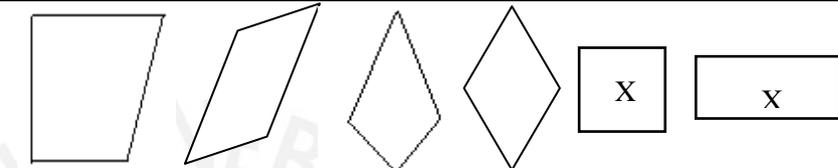
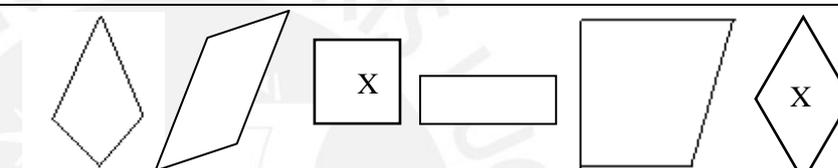
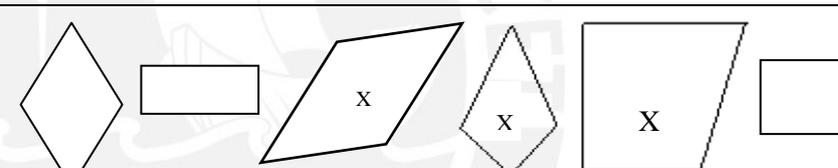
Respuesta: Estudiante 2	
¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?	
¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?	

Tabla 22: Actividad 2. Resultado del estudiante 3.

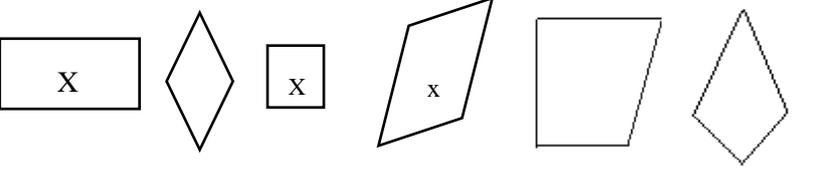
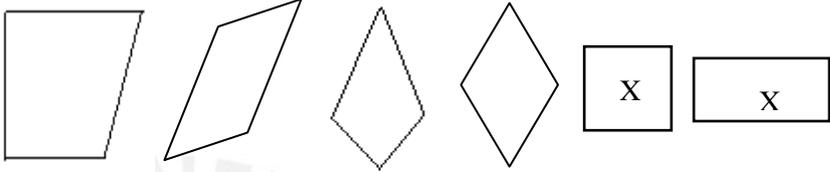
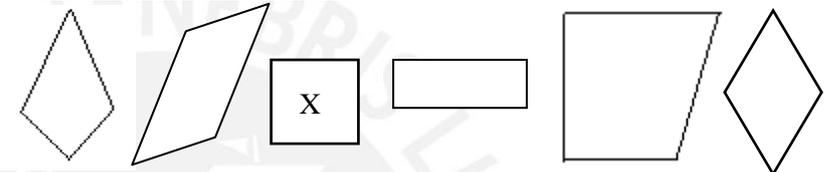
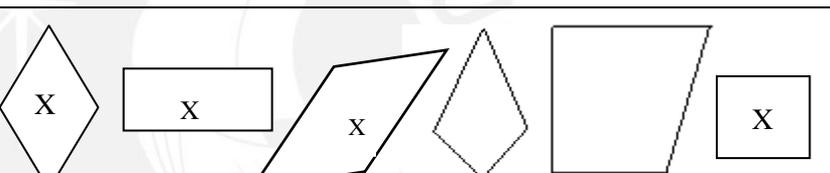
Respuesta: Estudiante 3	
¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?	
¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?	

Tabla 23: Actividad 2. Resultado del estudiante 4.

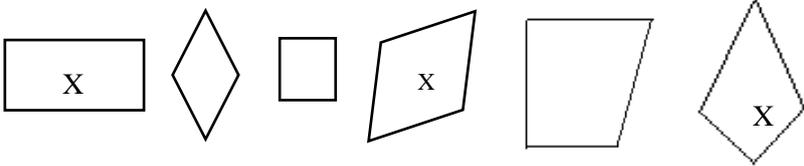
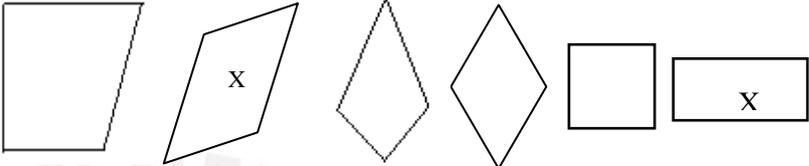
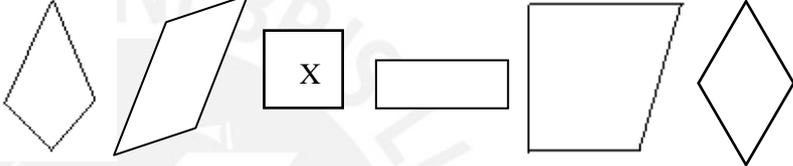
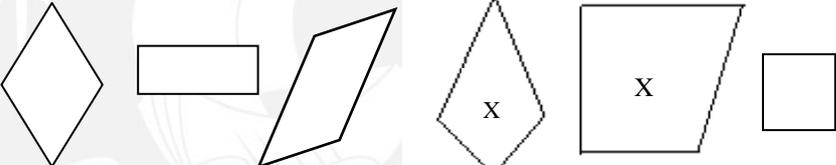
Respuesta: Estudiante 4	
¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?	
¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?	

Tabla 24: Actividad 2. Resultado del estudiante 5.

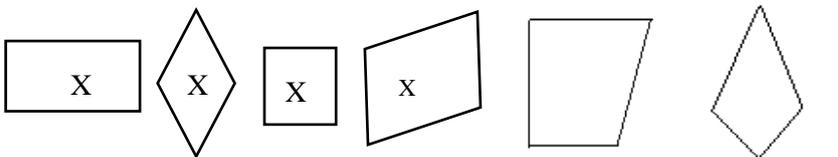
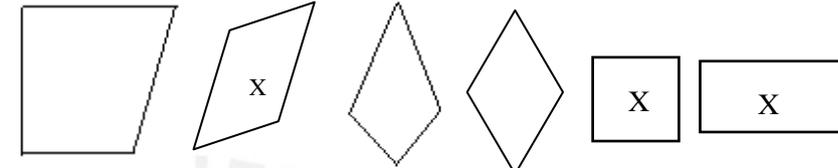
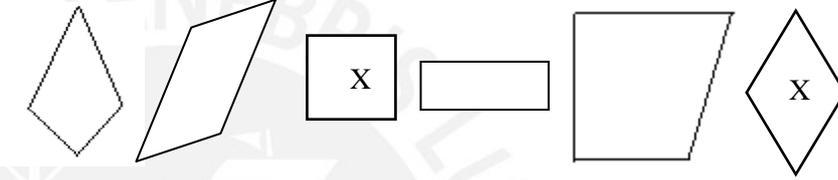
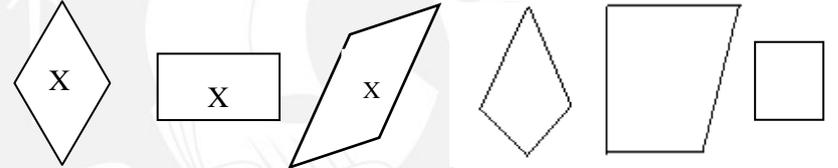
Respuesta: Estudiante 5	
¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos?	
¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?	
¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?	

Tabla 25: Actividad 3. Resultado del estudiante 1.

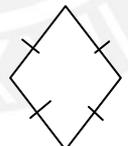
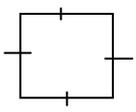
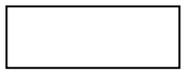
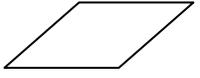
Respuesta: Estudiante 1		
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> 4 lados iguales, diagonales perpendiculares y ángulos opuestos iguales 		Señala los 4 lados, pero no diagonales ni los ángulos opuestos iguales
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> 4 ángulos rectos, 4 lados iguales y diagonales perpendiculares 		Señala los lados, pero no los ángulos rectos ni las diagonales perpendiculares
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> Diagonales iguales y 4 ángulos rectos 		Señala los lados, pero no las diagonales iguales y los ángulos rectos
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> Lados paralelos iguales, diagonales iguales y ángulos opuestos iguales. 		Señala los ángulos opuestos iguales, pero no las diagonales y los lados paralelos

Tabla 26: Actividad 3. Resultado del estudiante 2.

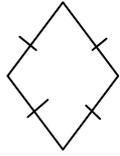
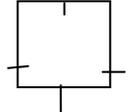
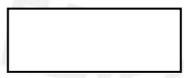
Respuesta: Estudiante 2		
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 lados iguales, diagonales perpendiculares y ángulos opuestos iguales 		<p>Señala los 4 lados, pero no diagonales ni los ángulos opuestos iguales</p>
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 ángulos rectos, 4 lados iguales y diagonales perpendiculares 		<p>Señala los lados, pero no los ángulos rectos ni las diagonales perpendiculares</p>
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Diagonales iguales y 4 ángulos rectos 		<p>Señala los lados, pero no las diagonales iguales ni los ángulos rectos</p>
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Lados paralelos iguales, diagonales iguales y ángulos opuestos iguales. 		<p>Señala los ángulos opuestos iguales, pero no las diagonales y los lados paralelos</p>

Tabla 27: Actividad 3. Resultado del estudiante 3.

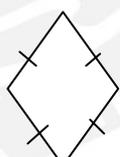
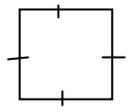
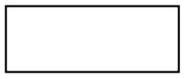
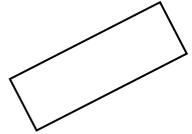
Respuesta: Estudiante 3		
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 lados iguales, diagonales perpendiculares y ángulos opuestos iguales 		<p>Señala los 4 lados, pero no diagonales ni los ángulos opuestos iguales</p>
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 ángulos rectos, 4 lados iguales y diagonales perpendiculares 		<p>Señala los lados, diagonales perpendiculares y ángulos rectos.</p>
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Diagonales iguales y 4 ángulos rectos. 		<p>Señala los ángulos rectos y las diagonales iguales.</p>
<p>Un paralelogramo que tenga:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Lados paralelos iguales, diagonales iguales y ángulos opuestos iguales. 		<p>Señala los lados paralelos iguales, ángulos rectos, pero no las diagonales y los ángulos opuestos iguales</p>

Tabla 28 : Actividad 3. Resultado del estudiante 4.

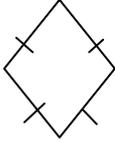
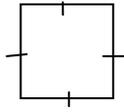
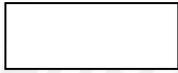
Respuesta: Estudiante 4		
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 lados iguales, diagonales perpendiculares y ángulos opuestos iguales 		Señala los 4 lados, pero no diagonales ni los ángulos opuestos iguales
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 ángulos rectos, 4 lados iguales y diagonales perpendiculares 		Señala los lados, pero no los ángulos rectos ni las diagonales perpendiculares
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Diagonales iguales y 4 ángulos rectos 		No señala ninguna de sus características
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Lados paralelos iguales, diagonales iguales y ángulos opuestos iguales. 		Señala los lados paralelos, pero no las diagonales y ángulos opuestos iguales

Tabla 29: Actividad 3. Resultado del estudiante 5.

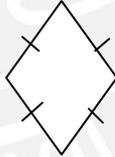
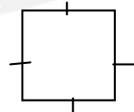
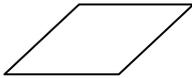
Respuesta: Estudiante 5		
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 lados iguales, diagonales perpendiculares y ángulos opuestos iguales 		No señala ni lados, ni diagonales perpendiculares ni los ángulos opuestos iguales
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ 4 ángulos rectos, 4 lados iguales y diagonales perpendiculares 		Señala los ángulos rectos, pero no los lados ni las diagonales perpendiculares
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Diagonales iguales y 4 ángulos rectos 		Señala las diagonales iguales, pero no los ángulos rectos.
Un paralelogramo que tenga: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Lados paralelos iguales, diagonales iguales y ángulos opuestos iguales. 		No señala ninguna característica

Tabla 30: Actividad 4. Resultado del estudiante 1.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 1			
Cuadrilátero	Mide lados	Mide ángulos	Responde porque es un paralelogramo
Cuadrado	SI	SI	La figura si es un paralelogramo, porque tiene 4 ángulos iguales y 4 lados paralelos
Romboide	Si	NO	La figura si es un paralelogramo, porque tiene 4 lados iguales y 4 ángulos iguales
Trapezio	SI	NO	La figura no es porque tiene lados diferentes y ángulos desiguales.
Trapezio	SI	NO	La figura no es un paralelogramo, porque tiene lados diferentes y ángulos desiguales
Rectángulo	SI	SI	La figura es un paralelogramo, porque tiene ángulos iguales y lados iguales

Tabla 31: Actividad 4. Resultado del estudiante 2.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 2			
Cuadrilátero	Mide lados	Mide ángulos	Responde porque es un paralelogramo
Cuadrado	SI	SI	Sí, porque sus lados son iguales
Romboide	Si	Si	Sí, porque tiene dos pares de lados iguales
Trapezio	SI	SI	No, porque no tiene lados iguales
Trapezio	SI	SI	No, porque no tiene lados iguales
Rectángulo	SI	SI	Sí, porque tiene dos pares de lados iguales

Tabla 32: Actividad 4. Resultado del estudiante 3.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 3			
Cuadrilátero	Mide lados	Mide ángulos	Responde porque es un paralelogramo
Cuadrado	SI	NO	Sí, porque tiene lados opuestos paralelos
Romboide	Si	SI	Sí, porque tiene lados opuestos paralelos
Trapecio	SI	NO	No, porque no tiene lados opuestos paralelos
Trapecio	SI	NO	No, porque no tiene lados opuestos paralelos
Rectángulo	SI	SI	Sí, porque tiene lados opuestos paralelos

Tabla 33: Actividad 4. Resultado del estudiante 4.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 4			
Cuadrilátero	Mide lados	Mide ángulos	Respuesta
Cuadrado	SI	SI	Sí, porque tiene 4 lados iguales.
Romboide	Si	SI	Sí, porque tiene lados iguales
Trapecio	SI	NO	No, porque no tiene dos lados iguales
Trapecio	SI	NO	No, porque no tiene lados iguales
Rectángulo	SI	SI	Sí, porque tiene los dos lados iguales

Tabla 34: Actividad 4. Resultado del estudiante 5.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 5			
Cuadrilátero	Mide lados	Mide ángulos	Responde porque es un paralelogramo
Cuadrado	SI	SI	Sí es un paralelogramo
Romboide	Si	NO	Sí es un paralelogramo
Trapecio	SI	NO	No es un paralelogramo
Trapecio	SI	NO	No es un paralelogramo
Rectángulo	SI	SI	Sí es un paralelogramo

Tabla 35: Actividad 5. Resultado del estudiante 1.

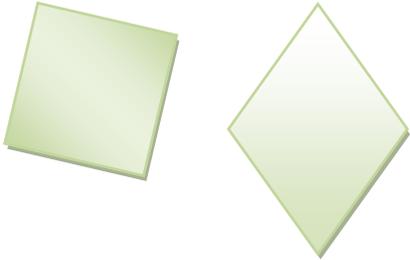
RESPUESTA: ESTUDIANTE 1		
CUADRILÁTEROS	¿Qué semejanzas tienen estos cuadriláteros?	¿Qué diferencias tienen estos cuadriláteros?
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son paralelogramos ▪ Son paralelos 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sus ángulos
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sus lados son paralelos y paralelogramos 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sus ángulos
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son paralelos ▪ Son paralelogramos 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sus lados

Tabla 36: Actividad 5. Resultado del estudiante 2.

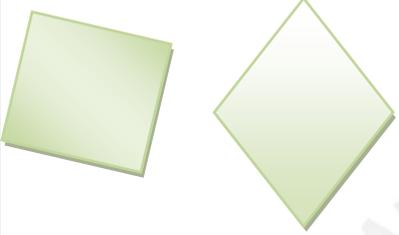
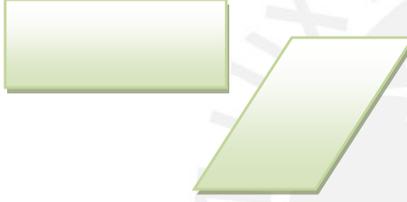
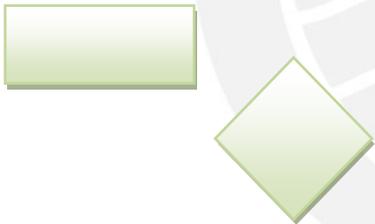
RESPUESTA: ESTUDIANTE 2		
CUADRILÁTEROS	¿Qué semejanzas tienen estos cuadriláteros?	¿Qué diferencias tienen estos cuadriláteros?
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son paralelogramos iguales 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son diferentes sus ángulos
	Tienen diagonales iguales	Son ángulos diferentes
	Son paralelos	Sus ángulos y diagonales son diferentes

Tabla 37: Actividad 5. Resultado del estudiante 3.

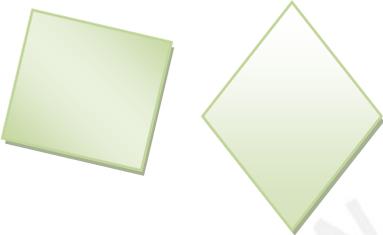
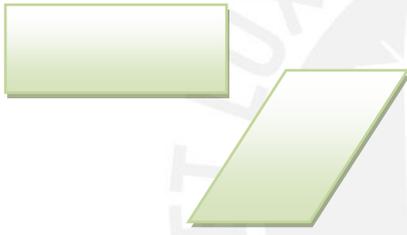
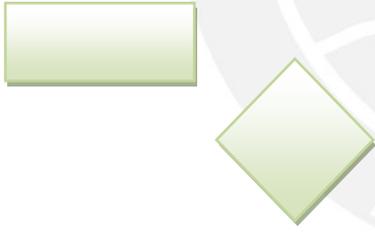
RESPUESTA: ESTUDIANTE 3		
CUADRILÁTEROS	¿Qué semejanzas tienen estos cuadriláteros?	¿Qué diferencias tienen estos cuadriláteros?
	<ul style="list-style-type: none"> Tiene 4 lados iguales 	<ul style="list-style-type: none"> Son diferentes sus ángulos
	<ul style="list-style-type: none"> Tiene 4 lados Tiene 2 pares de lados opuestos iguales 	<ul style="list-style-type: none"> Son diferentes sus ángulos
	<ul style="list-style-type: none"> Tiene 4 lados. Tienen 2 pares de lados opuestos iguales 	<ul style="list-style-type: none"> Todos su lados no son iguales

Tabla 38: Actividad 5. Resultado del estudiante 4.

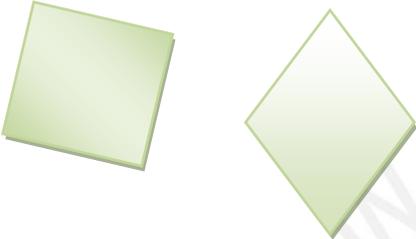
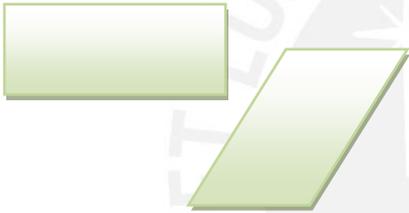
RESPUESTA: ESTUDIANTE 4		
CUADRILÁTEROS	¿Qué semejanzas tienen estos cuadriláteros?	¿Qué diferencias tienen estos cuadriláteros?
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tiene 4 lados iguales 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ángulos diferentes
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tiene lados iguales 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ángulos diferentes
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tiene 4 lados. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ángulos diferentes

Tabla 39: Actividad 5. Resultado de la actividad del estudiante 5.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 5		
CUADRILÁTEROS	¿Qué semejanzas tienen estos cuadriláteros?	¿Qué diferencias tienen estos cuadriláteros?
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Semejanza en sus lados 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son diferentes sus ángulos
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tiene 4 lados ▪ Tiene 2 pares de lados opuestos iguales 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son diferentes sus ángulos
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son paralelos 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Todos su lados son diferentes al igual sus lados

Tabla 40: Actividad 6. Resultado de la actividad del estudiante 1.

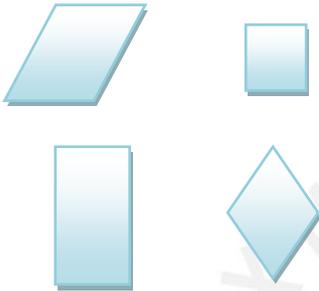
RESPUESTA: ESTUDIANTE 1		
FIGURAS	CARACTERÍSTICAS	¿CÓMO SE LLAMAN A TODAS ESTAS FIGURAS?
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son paralelogramos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son rectángulos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Son Romboide

Tabla 41: Actividad 6. Resultado de la actividad del estudiante 2.

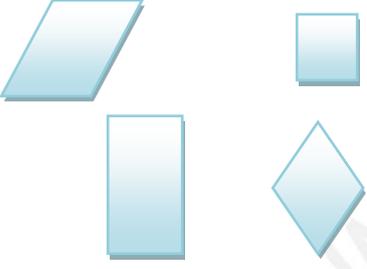
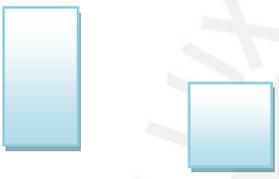
RESPUESTA: ESTUDIANTE 2		
FIGURAS	CARACTERÍSTICAS	¿CÓMO SE LLAMAN A TODAS ESTAS FIGURAS?
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelogramos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Rectángulos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ No responde

Tabla 42: Actividad 6. Resultado de la actividad del estudiante 3.

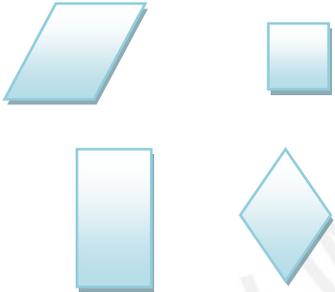
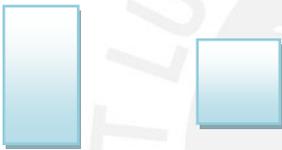
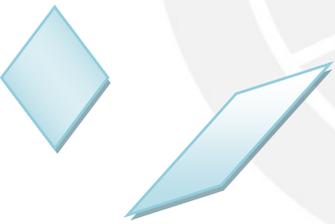
RESPUESTA: ESTUDIANTE 3		
FIGURAS	CARACTERÍSTICAS	¿CÓMO SE LLAMAN A TODAS ESTAS FIGURAS?
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos</p>	<ul style="list-style-type: none"> Se llaman paralelogramos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos</p>	<ul style="list-style-type: none"> Rectángulos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	<ul style="list-style-type: none"> Se llaman perpendiculares

Tabla 43: Actividad 6. Resultado de la actividad del estudiante 4.

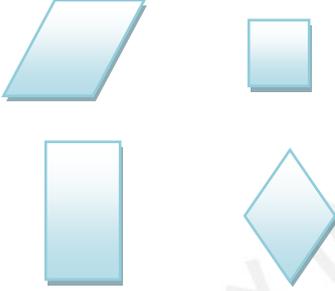
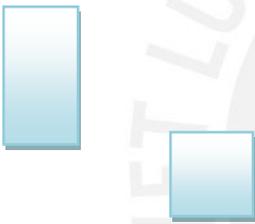
RESPUESTA: ESTUDIANTE 4		
FIGURAS	CARACTERÍSTICAS	¿CÓMO SE LLAMAN A TODAS ESTAS FIGURAS?
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelogramos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Rectangulares
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Perpendiculares

Tabla 44: Actividad 6. Resultado de la actividad del estudiante 5.

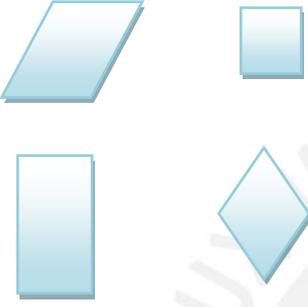
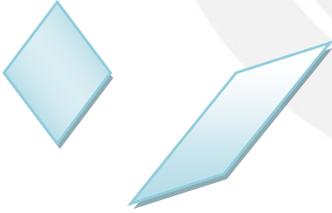
RESPUESTA: ESTUDIANTE 5		
FIGURAS	CARACTERÍSTICAS	¿CÓMO SE LLAMAN A TODAS ESTAS FIGURAS?
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Paralelogramos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Rectángulos
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Perpendiculares

Tabla 45: Actividad 7. Resultado de la actividad del estudiante 1.

Respuesta: Estudiante 1		
COMPLETA ENUNCIADOS	Grafica	Resultado
Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un Cuadrado .		Correcto
Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces es un Rectángulo		Incorrecto
Si un paralelogramo tiene diagonales perpendiculares entonces es un Rombo		Correcto
Si un paralelogramo es un Rectángulo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio		Correcto
Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos iguales entonces es un Romboide		Correcto

Tabla 46: Actividad 7. Resultado de la actividad del estudiante 2.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 2		
COMPLETA ENUNCIADOS	Grafica	Resultado
Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un Cuadrado .		Correcto
Si un paralelogramo tiene diagonales perpendiculares entonces es un Rombo		Correcto
Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio entonces es un Romboide		Correcto
Si un paralelogramo es un ángulo opuesto congruente tiene Rombo		Incorrecto
Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces es un Rectángulo		Correcto

Tabla 47: Actividad 7. Resultado de la actividad del estudiante 3.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 3		
COMPLETA ENUNCIADOS	Grafica	Resultado
Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un Cuadrado .		Correcto
Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio entonces es un Rombo		Incorrecto
Si un paralelogramo tiene 4 lados congruentes entonces es un Cuadrado		Correcto
Si un paralelogramo es un Rectángulo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio		Correcto
Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces es un Romboide		Correcto pero no la figura

Tabla 48: Actividad 7. Resultado de la actividad del estudiante 4.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 4		
COMPLETA ENUNCIADOS	Grafica	Resultado
Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un Cuadrado .		Correcto
Si un paralelogramo tiene sus diagonales perpendiculares entonces es un Rombo		Correcto
Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio entonces es un Romboide		Correcto
Si un paralelogramo es un ángulo opuesto tiene Rectángulo		Incorrecto
Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos congruentes entonces es un Rombo		Correcto

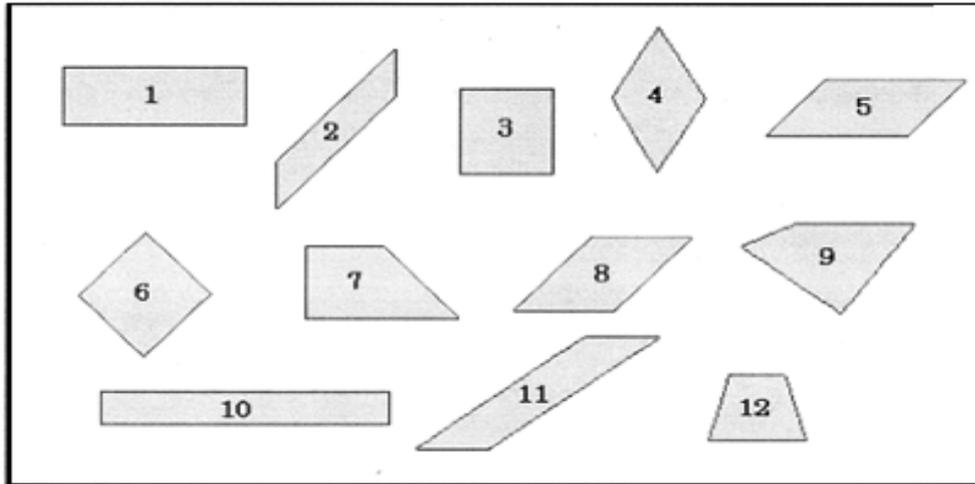
Tabla 49: Actividad 7. Resultado de la actividad del estudiante 5.

RESPUESTA: ESTUDIANTE 5		
COMPLETA ENUNCIADOS	Grafica	Resultado
Si un paralelogramo tiene 4 ángulos congruentes entonces es un Cuadrado .		Correcto
Si un paralelogramo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio entonces es un Rombo		Incorrecto
Si un paralelogramo tiene 4 lados congruentes entonces es un Cuadrado		Correcto
Si un paralelogramo es un Rectángulo tiene diagonales que se intersecan en su punto medio		Correcto
Si un paralelogramo tiene ángulos opuestos iguales entonces es una diagonal perpendicular		Incorrecto

ANEXO 2: ESCANEADO DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

ACTIVIDAD 1

I.- Con las siguientes figuras, responde a las siguientes preguntas:



a) ¿Qué figuras tienen características en común? Señala cual es la característica.

2, 11 → Características: son paralelos, Tienen lados paralelos.
 6, 4 → Características: son paralelos, " " "
 5, 8 → Características: son paralelos, " " "
 1, 10 → Características: Tienen lados paralelos.



ACTIVIDAD 2

a) ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros presentan 2 pares de lados opuestos paralelos?

b) ¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos?

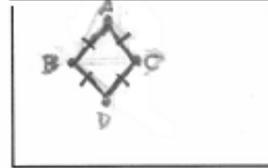
c) ¿Cuáles tienen 2 pares de lados opuestos paralelos y 4 lados congruentes?

d) ¿Cuáles son figuras con 2 pares de lados opuestos paralelos y sin ángulos congruentes y sin lados congruentes?

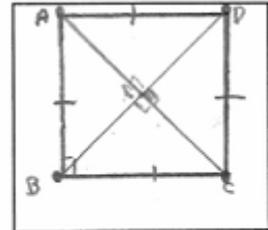


ACTIVIDAD 3

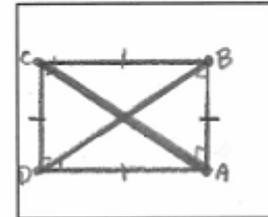
- a) Un paralelogramo que tenga:
4 lados iguales, diagonales perpendiculares y
ángulos opuestos iguales.



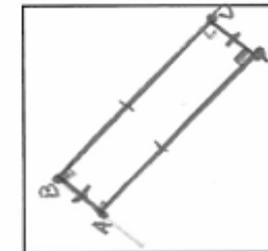
- b) Un paralelogramo que tenga:
4 ángulos rectos, 4 lados iguales y diagonales
perpendiculares.



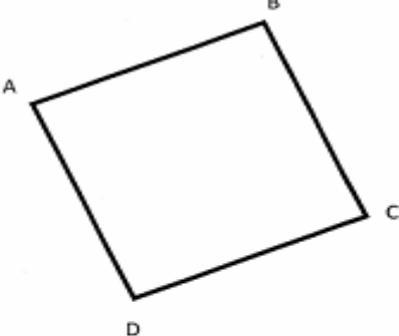
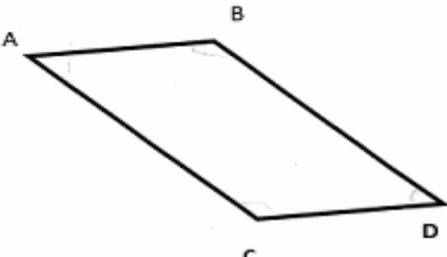
- c) Un paralelogramo que tenga:
Diagonales iguales y 4 ángulos rectos.



- d) Un paralelogramo que tenga:
Lados paralelos iguales, diagonales iguales y
ángulos opuestos iguales.



ACTIVIDAD 4

CUADRILÁTEROS	Medida de los lados	Medida de los ángulos	¿La figura es un paralelogramo?
	$AB = 4\text{cm}$ $BC = 4\text{cm}$ $CD = 4\text{cm}$ $AD = 4\text{cm}$	$\angle A = 90$ $\angle B = 90$ $\angle C = 90$ $\angle D = 90$	la figura si es un paralelogramo porque tiene 4 angulos iguales y 4 lados paralelos.
	$AB = 3\text{cm}$ $BC = 4,3\text{cm}$ $CD = 3\text{cm}$ $AD = 4,3\text{cm}$	$\angle A = 45$ $\angle B = 50$ $\angle C = 50$ $\angle D = 45$	la figura si es un paralelogramo porque tiene 4 lados iguales y 4 angulos iguales.



ACTIVIDAD 5

FIGURAS	CARACTERÍSTICAS	¿CÓMO SE LLAMAN A TODAS ESTAS FIGURAS?
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos</p>	<p>Son Paralelogramos</p>
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y 4 ángulos rectos</p>	<p>Son rectángulos.</p>
	<p>2 pares de lados opuestos paralelos y ningún ángulo recto</p>	<p>Son Romboides.</p>

ACTIVIDAD 6

CUADRILÁTEROS	¿Que semejanzas tienen estos cuadriláteros?	¿Que diferencias tienen en estos cuadriláteros?
	<ul style="list-style-type: none"> - Tienen 4 lados - Tienen 4 lados iguales. 	<ul style="list-style-type: none"> - Son diferentes en sus ángulos.
	<ul style="list-style-type: none"> - Tienen 4 lados - Tienen 2 pares de lados opuestos iguales. 	<ul style="list-style-type: none"> - Son diferentes en sus ángulos.
	<ul style="list-style-type: none"> - Tienen 4 lados - Tienen 2 pares de lados opuestos iguales. 	<ul style="list-style-type: none"> - Todos sus lados no son iguales.

ACTIVIDAD 7

a) Si un paralelogramo tiene D entonces es un C

b) Si un paralelogramo tiene A entonces es un G

c) Si un paralelogramo es un H tiene F

d) Si un paralelogramo tiene E entonces es un I