

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ  
ESCUELA DE POSGRADO



**COMPRENSIÓN DEL OBJETO TRIÁNGULO EN ESTUDIANTES DEL SEXTO  
GRADO DE PRIMARIA A TRAVÉS DE UNA PROPUESTA BASADA EN EL  
MODELO VAN HIELE**

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que  
presenta

VALENTÍN CHECYA SOTTA

Dirigido por

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

San Miguel, 2015



*A mi esposa Felícitas e hijos Naguev, Erick y  
Witmar, por el gran apoyo moral que me brindaron  
en todo momento.*

## AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Educación del Perú, que por mediante el Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo-PRONABEC, nos permitió acceder a la Beca Presidente de la República denominada “Beca Docente de Posgrado para estudios de Maestría en Ciencias de la Educación en el Perú 2014”.

A Maestría en Enseñanza de las Matemáticas por intermedio de la Directora Dra. Jesús Victoria Flores Salazar, por contribuir en nuestra formación académica, humanística y científica; a través de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

A la distinguida docente Dra. Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre, nuestra eterna gratitud por contribuir en el asesoramiento constante en el desarrollo de nuestro trabajo de investigación, gracias a su guía y orientación oportuna y precisa se hizo realidad el caro anhelo de nuestra investigación.

A los miembros del jurado Dra. Jesús Flores Salazar y al Dr. Gerson Pastre de Oliveira, por dedicar su valioso tiempo en la revisión y aprobación del contenido de nuestro trabajo de investigación.

A nuestra alma mater Pontificia Universidad Católica del Perú a través del señor Rector Dr. Marcial Rubio Correa por habernos acogido y contribuido en nuestra formación académica, humanística y científica.

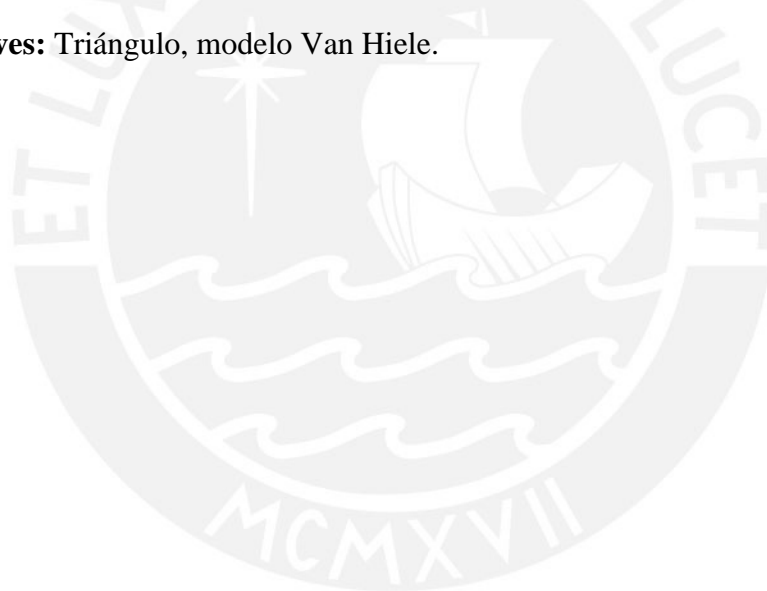
A los docentes quienes han coadyuvado en nuestro desarrollo profesional.

A los compañeros profesores por compartir sus experiencias.

## RESUMEN

La investigación titulada “Comprensión del objeto triángulo en estudiantes de sexto grado de primaria a través de una propuesta basada en el modelo Van Hiele”, nos ha permitido trabajar en el seno de la investigación cualitativa, tomando como metodología el estudio de casos, en el marco de la teoría del modelo Van Hiele, ya que es una de las teorías que tratan sobre el estudio de la geometría. Como objetivo hemos considerado analizar el nivel de comprensión del objeto triángulo en los estudiantes del sexto grado de educación primaria a través de una propuesta según el modelo Van Hiele. Para cuyo efecto hemos aplicado los instrumentos de investigación a tres estudiantes del sexto grado en la IE 57002 de la ciudad de Sicuani, Departamento de Cusco. Los resultados obtenidos muestran una evolución en su nivel de comprensión del triángulo, porque los sujetos investigados presentan rasgos del nivel 2 según el modelo teórico de nuestra investigación.

**Palabras claves:** Triángulo, modelo Van Hiele.



## ABSTRACT

The research titled "Understanding the triangle object for students of sixth- grade through a proposal based on the Van Hiele model", have allowed us to work in the focus of qualitative research, based on methodology of cases study in the frame Van Hiele Theory model, since it is one of the theories about the study of geometry. We considered as an objective analyze the level of understanding the triangle object on sixth grade students of primary education through a proposal by the Van Hiele model. For this proposal we have applied the research instruments on three sixth grade students at EI 57002 school in Sicuani city, Cusco. The results obtained show an evolution in their level of understanding of the triangle, because the people researched have signs of Level 2 according to the theoretical model of our research.

**Key Words:** Triangle, Van Hiele model



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Formas de triángulos .....	17
Figura 2. Texto de matemática de 1er grado .....	19
Figura 3. Texto de matemática de 1er grado .....	20
Figura 4. Texto de matemática de 2do grado .....	20
Figura 5. Texto de matemática de 2do grado .....	21
Figura 6. Texto de matemática de 3er grado .....	22
Figura 7. Texto de matemática de 3er grado .....	22
Figura 8. Texto de matemática de 3er grado .....	23
Figura 9. Texto de matemática de 4to grado .....	24
Figura 10. Texto de matemática de 4to grado .....	25
Figura 11. Texto de matemática de 4to grado .....	26
Figura 12. Texto de matemática de 5to grado .....	26
Figura 13. Texto de matemática de 6to grado .....	28
Figura 14. Texto de matemática de 6to grado. ....	29
Figura 15. Texto de matemática de 6to grado .....	30
Figura 16. Texto de matemática de 6to grado .....	31
Figura 17. Triángulos .....	46
Figura 18. Interior y exterior de un triángulo .....	47
Figura 19. Interior y exterior del triángulo .....	47
Figura 20. Región triangular.....	48
Figura 21. LAL.....	49
Figura 22. ALA .....	50
Figura 23. LLL .....	50
Figura 24. Triángulo equilátero e isósceles .....	51
Figura 25. Alturas de Triángulos.....	52

Figura 26. Lados no congruentes del triángulo .....	53
Figura 27. Triángulos especiales .....	54
Figura 28. Semejanza de Triángulos .....	55
Figura 29. Triángulos no semejantes .....	55
Figura 30. Semejanza de Triángulo .....	58
Figura 31. Reconocimiento de una forma triangular .....	58
Figura 32. Relación de triángulos con propiedades .....	65
Figura 33. Actividades con GeoGebra .....	67
Figura 34. Actividad inicial de la sesión. ....	70
<b>Figura 35.</b> Segunda actividad sobre triángulos .....	73
Figura 36. Respuesta del estudiante Elmer a la actividad 2 .....	74
Figura 37. Respuesta del estudiante José Ángel a la actividad 2 .....	75
<b>Figura 38.</b> Respuesta de la estudiante Sheyla a la actividad 2 .....	76
Figura 39. Puntos para construir triángulos .....	77
Figura 40. Respuesta a la actividad 3 del estudiante Elmer .....	78
Figura 41. Respuesta a la actividad 3 del estudiante José Ángel .....	79
Figura 42. Respuesta de la actividad 3, estudiante Sheyla .....	80
Figura 43. Actividad 4, segmentos para construir triángulos .....	81
Figura 44. Respuesta del estudiante Elmer a la actividad 4 .....	82
Figura 45. Respuesta del estudiante José Ángel a la actividad 4 .....	83
Figura 46. Respuesta a la actividad 4 de la estudiante Sheyla .....	84
Figura 47. Característica y tipos de triángulos .....	86
Figura 48. Respuesta a la actividad 5 del estudiante Elmer .....	87
Figura 49. Respuesta del estudiante José Ángel a la actividad 5 .....	88
Figura 50. Respuesta de la estudiante Sheyla, a la actividad 5 .....	89
Figura 51. Preguntas de la actividad con GeoGebra .....	91

Figura 52. Respuesta de Elmer a la actividad con GeoGebra. .... 92

Figura 53. Respuesta de Elmer a la actividad con GeoGebra. .... 93

Figura 54. Respuesta a la actividad con GeoGebra de José Ángel..... 93

Figura 55. Respuesta a la actividad con GeoGebra José Ángel ..... 94

Figura 56. Respuesta de Sheyla a la actividad con GeoGebra ..... 95

**Figura 57.** Respuesta a la actividad con GeoGebra de la estudiante Sheyla ..... 95





## LISTA DE TABLAS

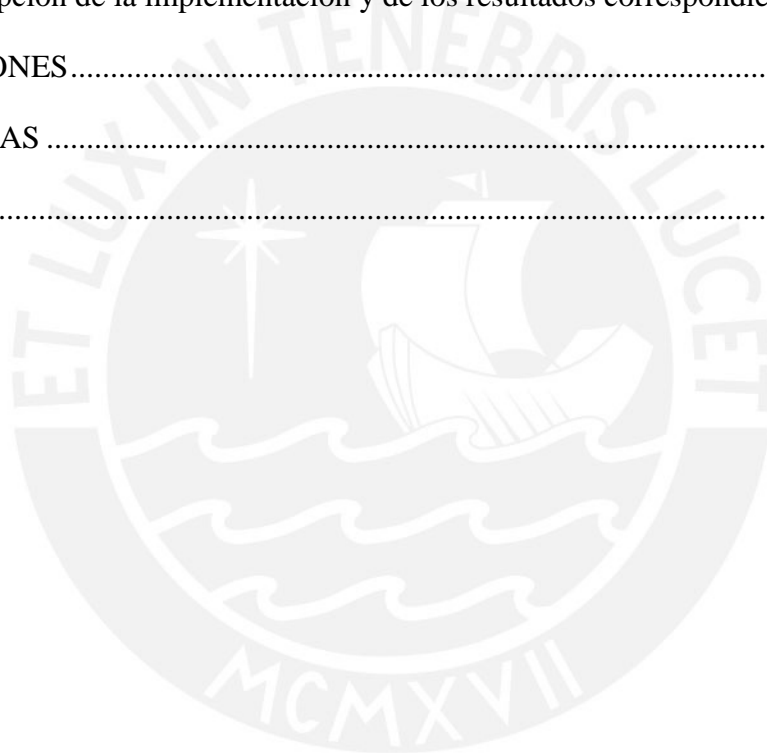
Tabla 1: Reconocimiento de Triangulo .....	61
Tabla 2: Comparación de triángulos.....	62
Tabla 3: Construcción de triángulos.....	62
Tabla 4: Construcción de triángulos a partir de los segmentos dados.....	64
Tabla 5: Distribución de la aplicación de actividades .....	69
Tabla 6: Descripción de los resultados de evolución en los niveles de comprensión .....	97



# Índice

INTRODUCCIÓN.....	12
CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	13
1.1. Antecedentes.....	13
1.2. Justificación del trabajo de investigación.....	16
1.3. Tratamiento de los triángulos en el contexto en el que se desarrolla la investigación ..	18
1.4. Problema de investigación.....	32
1.5. Objetivos.....	33
CAPÍTULO II: ELEMENTOS DEL MODELO VAN HIELE Y LA METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	35
2.1. Los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele.....	36
2.2. Las Fases de aprendizaje del Modelo Van Hiele.....	39
2.3 Aspectos relevantes de la Investigación cualitativa .....	41
2.4. Estudio de caso como metodología de investigación .....	41
Características de un estudio de caso .....	42
El proceso de investigación de un estudio de caso aplicado a nuestra investigación.....	43
CAPÍTULO III: DESCRIPCIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO .....	46
3.1. Definición de triángulo.....	46
3.2. Definición de interior y exterior de un triángulo.....	47
3.3. Congruencia de triángulos .....	48
3.4. Clasificación de triángulos según sus lados y ángulos .....	50
3.5. Alturas de triángulos.....	52
3.6. Algunos teoremas sobre triángulos .....	53
3.8. Triángulos no semejantes .....	55
CAPÍTULO IV: DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES .....	57

4.1. Definición de los niveles de razonamiento para el objeto triángulo a partir del estudio matemático realizado y del modelo teórico adoptado. ....	57
4.2. Diseño de actividades que promuevan la adquisición de los niveles 1 y 2. ....	60
CAPÍTULO V: IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS .....	68
5.1. Aspectos generales .....	68
5.2. Descripción de la implementación y de los resultados correspondientes a la sesión 1. ....	70
5.3. Descripción de la implementación y de los resultados correspondientes a la sesión 2. ....	81
5.4. Descripción de la implementación y de los resultados correspondientes a la sesión 3. ....	90
CONCLUSIONES .....	99
REFERENCIAS .....	102
ANEXOS .....	104



## INTRODUCCIÓN

Esta tesis es producto de un trabajo de investigación realizada durante nuestra formación académica, humanística y científica de estudios de posgrado, que nos ha permitido ingresar al campo de la investigación. Tema abordado es la comprensión del objeto triángulo en estudiantes de sexto grado de educación primaria de 11 y 12 años de edad a través de una propuesta didáctica basada en el modelo Van Hiele.

Nuestra investigación está orientada a identificar la evolución del nivel de comprensión del objeto triángulo en los estudiantes de sexto grado de nivel primario. Tiene características de la investigación cualitativa y se desarrolla a través de la metodología de estudio de casos.

Esta tesis consta de cinco capítulos distribuidos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se describe el planteamiento del problema de estudio, se analiza el tratamiento que brindan los textos de matemática de primero a sexto grado de educación primaria al objeto triángulo y se presenta la pregunta y objetivos de investigación.

En el segundo capítulo hemos considerado elementos del marco teórico del modelo Van Hiele y la metodología de la investigación en particular. Se describen sus dos componentes fundamentales que son los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Así mismo el estudio de casos como metodología de nuestra investigación.

El tercer capítulo lo dedicamos al estudio de la descripción del objeto triángulo a través de la matemática formal para tener conocimiento científico del objeto triángulo y para la elaboración de la propuesta didáctica del objeto de estudio.

El cuarto capítulo está dedicado a la elaboración del diseño de la secuencia de actividades y la definición de las características de los niveles de razonamiento.

En el capítulo 5 presentamos el desarrollo de la implementación y el análisis de los resultados de la aplicación de los instrumentos de nuestra investigación con los tres estudiantes involucrados.

Finalmente, se presentan las conclusiones a lo que hemos arribado después de realizar nuestro trabajo de investigación. Entre las cuales destaca la evolución del nivel de comprensión del objeto triángulo por estudiantes del sexto grado.

## CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La investigación desarrollada se centra en el estudio de la comprensión del objeto triángulo en estudiantes de sexto de primaria de 11 y 12 años de edad, teniendo como referencia el modelo de Van Hiele y resultados de investigaciones previas. En este capítulo se presenta el planteamiento y justificación del problema, así como la pregunta y los objetivos de la investigación

A sí mismo, se incluye el análisis de los textos de matemáticas de primero al sexto grado de educación primaria distribuidos por el Ministerio de Educación, con el propósito de justificar el trabajo de investigación. A través de dicho estudio se analizarán cómo están organizados en relación al objeto de estudio, si guardan relación con las demandas de los documentos oficiales y se identificará si las actividades permiten a los estudiantes evolucionar en su nivel de comprensión según la teoría del modelo Van Hiele.

### 1.1. Antecedentes

Según Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Margarit, Peñas y Ruíz (1994), sostienen que en los diferentes niveles educativos se pueden observar dificultades en el aprendizaje de los contenidos geométricos. Para ello, desarrollan un trabajo de investigación en el que proponen unidades didácticas sobre el desarrollo del razonamiento relacionado con el aprendizaje de los conocimientos geométricos en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

El trabajo de estos autores se apoya en un modelo para la enseñanza y aprendizaje de la geometría; se trata del modelo de razonamiento geométrico propuesto por Van Hiele. El modelo Van Hiele propone niveles de razonamiento geométrico que van desde la Visualización hasta el nivel Lógico Formal. También plantea fases de aprendizaje para que los estudiantes logren adquirir un determinado nivel de comprensión, así como para evolucionar hacia uno superior. Una característica de este modelo es asumir que, para que se produzca el paso de un nivel a otro, es requisito haber alcanzado el nivel de razonamiento anterior. Y otra característica donde cada nivel de razonamiento se le asocia un léxico muy particular.

Corberán (1994) y su grupo de investigadores presentan un diseño y evaluación de una propuesta didáctica de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el

modelo de razonamiento del modelo Van Hiele. Los objetivos del grupo de investigadores fue elaborar una propuesta curricular de la enseñanza y aprendizaje de la geometría plana para los estudiantes de educación secundaria, puesto que la mayoría de los estudiantes presentaban dificultades en su aprendizaje referentes a los contenidos geométricos en particular; además se propicie en los estudiantes una evolución en su nivel de razonamiento con respecto a los contenidos geométricos.

Por eso, el estudio duró por un periodo de dos años y se aplicaron dos pruebas uno al inicio y al final de la investigación. Su objetivo también fue alcanzar que los estudiantes de secundaria alcancen el tercer nivel de razonamiento, realizaron varias actividades sobre los polígonos así como la construcción de los triángulos a través de las propiedades y bajo ciertos criterios como la igualdad de lados y ángulos a través de un conjunto de cuestionarios que han sido desarrollados por los estudiantes.

Los investigadores después de la aplicación de la propuesta didáctica en la enseñanza y aprendizaje de la geometría plana han experimentado en los estudiantes la evolución en los niveles de razonamiento según el modelo Van Hiele, según los contenidos desarrollados en la aplicación de los instrumentos de investigación.

De otro lado, en el trabajo de Patricio (2010) se planteó como objetivo de investigación diseñar actividades utilizando el modelo Van Hiele como fundamento para el aprendizaje de algunos elementos del triángulo, circuncentro y mediatriz, con estudiantes de tercero de secundaria. En dicha investigación se muestra que inicialmente los estudiantes no tenían conocimiento sobre mediatriz y circuncentro. Sin embargo, luego de la implementación de una propuesta basada en el modelo de Van Hiele se logró a través de actividades que los estudiantes alcanzaran el tercer nivel de razonamiento en lo que se refiere a la mediatriz y circuncentro en los triángulos, con apoyo de un software de geometría dinámica. Así, se encontraron resultados del nivel de comprensión de los estudiantes en torno al objeto de estudio con la injerencia del modelo Van Hiele, así mismo la utilización de geometría dinámica contribuyeron a optimizar los aprendizajes en los tópicos geométricos abordados. Los cuales nos van a contribuir en nuestro trabajo de investigación al aplicar la geometría dinámica en alguna de nuestras actividades en torno al objeto de estudio.

En esa misma línea, Gutiérrez (2009) confirma que el modelo de Van Hiele permite reconocer los niveles de comprensión logrados por los estudiantes respecto a la semejanza de triángulos. La metodología empleada contempló actividades, como la contrastación de las respuestas

esperadas y las respuestas emitidas en las evaluaciones tanto personales como grupales de los estudiantes. Inicialmente, no podían establecer la semejanza de triángulos. Luego se realizó la evaluación teniendo en cuenta la respuesta que el estudiante dio a determinada pregunta y no solamente observando la respuesta final; también se consideró el lenguaje y el manejo de conceptos empleados como criterios para la asignación de los niveles.

El mismo autor, luego de la aplicación de una propuesta que considera el empleo de un programa de geometría dinámica GeoGebra, señala que estudiantes de secundaria pudieron establecer la semejanza de triángulos y alcanzaron hasta el tercer nivel del razonamiento del modelo Van Hiele, respecto a la semejanza de triángulos. Este nivel se denomina de Ordenación o Clasificación, y se caracteriza porque pueden deducir propiedades particulares. Sin embargo, encuentra que no todos los estudiantes se ubicarán en tercer nivel de Ordenación o Clasificación.

Lo descrito hasta el momento, sustenta la necesidad de utilizar en la investigación, el GeoGebra en actividades relacionadas con contenidos de temas de los triángulos teniendo como modelo Van Hiele y de esta manera encontrar nuevas evidencias de que las representaciones dinámicas que el software permite realizar favorablemente en el proceso de la enseñanza y aprendizaje.

Al respecto, Bernardis y Moriena (2008) proponen que una programación de actividades para la didáctica de la geometría se debe basar en el conocimiento de los conceptos geométricos a través del uso dinámico de la geometría. Este recurso permite componer y descomponer figuras geométricas en menor tiempo.

Sobre el GeoGebra se puede decir que se trata de un software matemático interactivo de licencia libre, diseñado para ser empleado en ambientes de enseñanza en diferentes niveles educativos. Fue creado por Markus Hohenwarter, como parte de un proyecto educativo iniciado en el 2001 en la universidad de Salzburgo y que se continuó en la universidad de Atlantic, Florida.

El software como herramienta didáctica está constituido especialmente por un procesador matemático, que involucra geometría, álgebra, estadística, que es utilizado en cursos relacionados a geometría, álgebra, cálculo entre otros. Ha sido categorizado como software de geometría dinámica y con él se puede realizar diversas construcciones geométricas que pueden ser modificadas de forma dinámica. En ese proceso la función de arrastre que posee el programa es muy importante ya que permite al estudiante modificar directamente la forma o

posición de los objetos geométricos, preservando sus características y propiedades. Las herramientas básicas del GeoGebra que vamos a utilizar son los puntos y los segmentos en el objeto de estudio.

## 1.2. Justificación del trabajo de investigación

La matemática como una disciplina científica tiene logros muy importantes a nivel cultural e intelectual a través de la historia de la humanidad. Saber matemática puede ser satisfactorio y estimulante, porque la vida diaria requiere cada vez más conocimientos matemáticos y tecnológicos. En particular a través del estudio de la geometría, los estudiantes aprenderán geometría también al contemplar la naturaleza porque ahí están las formas geométricas.

En el currículo peruano se contempla la componente denominada geometría y medida como parte de los contenidos de la estructura curricular. En esta componente se encuentra el tema de triángulos. Sobre las metas de aprendizaje se plantea que al finalizar el V ciclo de educación primaria, equivalente a quinto y sexto grado de primaria, los estudiantes clasifiquen triángulos y cuadriláteros de acuerdo con sus ángulos y lados; también refieren que deben resolver problemas sobre polígonos.

Sin embargo, se ha encontrado que en el libro de matemática del sexto grado de primaria, texto distribuido por el Ministerio de Educación, a todas las escuelas públicas del país, que existen pocas actividades sobre polígonos regulares, y que además el tratamiento que se da a este tema es muy superficial. Así, la presentación de triángulos se limita al caso equilátero y no se encuentra ninguna actividad relevante. Siendo el texto uno de los principales recursos que emplea el docente y no encontrándose en él un soporte adecuado, se hace necesario apoyar en estrategias didácticas las cuales a su vez pueden ayudar a los estudiantes a comprender los temas en estudio, es decir, del tema triángulos se debe considerar conceptos básicos y las clasificaciones acompañado de un conjunto de actividades sugerentes para los profesores y alumnos para poder facilitar la enseñanza para lograr aprendizajes.

Según el modelo socrático, tal como lo señala La Torre (2003), se debe descubrir el conocimiento no como resultado de una enseñanza, sino como consecuencia de una reflexión. En esa medida, señala el autor, que se debe estimular un proceso de reflexión e introspección en el estudiante, para llegar al conocimiento. Los estudiantes aprenden los contenidos matemáticos hasta llegar a familiarizarse con los significados de los conceptos básicos y fundamentales de la matemática.



El profesor tiene que conocer el interés de los estudiantes en el problema para centrar su atención desde el inicio de la actividad.

Por eso, a continuación presentamos algunos objetos de la realidad que adoptan formas triangulares que se relacionan con nuestro objeto de estudio.

### Problemas didácticos

Cuando se describen algunos objetos concretos se le asignan determinadas formas geométricas aunque realmente no las tengan en el sentido estricto. Pensamos por ejemplo, en el instrumento de percusión llamado triángulo, una señal de tránsito que cotidianamente se puede observar en la ciudad que también tiene la forma de un triángulo, así como otros objetos que existen en el contexto con formas triangulares o que finalmente parecen ser triángulos pero realmente no lo son pues no tienen vértices, mucho menos las características que deben tener los triángulos. Así como se muestra en la Figura 1.



**Figura 1.** Formas de triángulos  
**Fuente:** Creación propia

Una situación didáctica podría presentarse al atribuir propiedades de los objetos concretos, como el tener “esquinas” curvas, al objeto matemático abstracto. Y esto se manifestaría en los textos si se señala que figuras como las descritas son triángulos y no se dice que “se parecen a triángulos”. Si este tratamiento se encuentra presente en los textos del nivel primario empleados en el Perú, se estaría promoviendo la adquisición del nivel 1 en el modelo Van Hiele, que corresponde al nivel de visualización.

Por otra parte, los objetos matemáticos no son accesibles a nuestros sentidos y solo podemos representarlos a través de los símbolos o gráficos. Así por ejemplo, los triángulos son cosas abstractas que no se pueden percibir; pero se puede representar a través de un dibujo como objeto imaginario correspondiente. Sabemos que el triángulo no es un objeto de material que se caracterice o que tenga una forma muy peculiar, tampoco una imagen dibujada encima del papel, sino adopta una forma de acuerdo a la definición que han dado varios autores.

Sin embargo, los estudiantes identifican a los triángulos como objetos que tienen sus propias características y elementos como son los lados, vértices y ángulos; los cuales son muy relacionados con los objetos de la realidad.

Así mismo cuando hablamos de figuras o formas geométricas, no nos referimos a ningún tipo de objetos perceptibles; sin embargo, las representaciones, los dibujos y algunos objetos que adoptan formas triangulares porque se encuentran en el contexto y muchas veces está al alcance de los estudiantes sobre todo de educación inicial parte de educación primaria donde los estudiantes manejan sus propios conceptos imaginarios y realizan juegos y trabajos relacionados a la geometría. Entonces es sumamente importante el apoyo de la experiencia para el desarrollo de las actividades educativas relacionadas también al uso inicial del vocabulario geométrico.

En relación a ello, notamos que tanto en las clases de matemáticas y en los textos escolares no se hace la distinción entre el objeto abstracto y su representación. Para encontrar evidencias que refuercen esta hipótesis se describirá la forma en la que los triángulos son tratados en los textos de matemática de educación primaria.

### **1.3. Tratamiento de los triángulos en el contexto en el que se desarrolla la investigación**

A continuación se hará un estudio sobre la forma en la que el concepto triángulo es presentado en los textos de matemáticas de educación primaria, empleados a nivel nacional en todos los colegios públicos. Con este análisis se tendrá un diagnóstico más específico sobre los niveles de razonamiento que se promueve desarrollar a través de las actividades propuestas en la Educación Primaria y sobre los aspectos mencionados en la sección anterior.

#### **Tratamiento de los triángulos en textos de matemática del primero al sexto grado de primaria**

En el marco de nuestra investigación, los textos didácticos son un recurso fundamental y en la mayoría de casos, guían las clases de los docentes de matemáticas. Por ello, existe la necesidad de revisar y analizar los textos de matemática correspondientes a los seis grados de educación primaria, distribuidos por el Ministerio de Educación, con la finalidad de

identificar la forma en la que en ellos se aborda el tema de triángulos. Esto permitirá reconocer limitaciones y aspectos positivos que deberán tomarse en cuenta al plantear una propuesta para la enseñanza de dicho tema.

Posteriormente, se asignará un nivel de razonamiento tentativo, según el modelo Van Hiele, para cada una de las actividades identificadas sobre triángulos. Esto permitirá caracterizar las actividades propuestas.

De lo anterior, quedará justificada la necesidad de diseñar una propuesta para la enseñanza de los triángulos a través de un conjunto de actividades que permita que los estudiantes evolucionen en su nivel de razonamiento, según el modelo Van Hiele.

### **Análisis del texto de matemática del primer grado (estudiantes de 6 años)**

Este texto ha sido editado por la editorial Norma (2012), con la finalidad de poder contribuir con los libros para desarrollar actividades correspondientes al grado.

Luego de revisar el texto referente al tema de triángulos, solo se encontró una actividad que hace referencia a los triángulos; lo cual se muestra en la siguiente Figura 2.



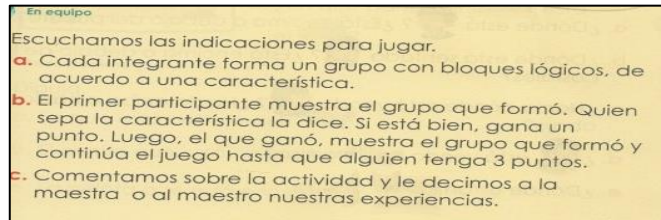
**Figura 2.** Texto de matemática de 1er grado  
Fuente: Editorial Norma (2012, p.11)

En la actividad se muestra que la niña Rosa, los agrupa de acuerdo al color, sin considerar la forma ni el tamaño.

El niño Lalo agrupa los bloques según la forma, sin tomar en cuenta los colores ni el tamaño.

La niña María los agrupa considerando que haya una figura de cada color, sin importar la forma ni el tamaño. En este juego con los bloques también es importante establecer las diferencias y semejanzas.

Luego, se plantea al estudiante que sea él quien agrupe los bloques lógicos, señalando el criterio que sigue. La actividad continúa con preguntas como las mostradas en la Figura 3.



**Figura 3.** Texto de matemática de 1er grado

**Fuente:** Editorial Norma (2012, p.11)

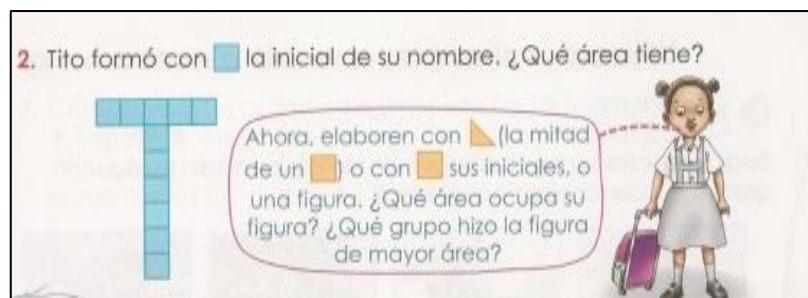
Consideramos que estas actividades corresponden al nivel 1, Reconocimiento o Visualización, ya que para su solución se hace necesario reconocer al triángulo de manera global.

Al respecto, pensamos que se debe propiciar el reconocimiento y agrupamiento con más bloques lógicos; así mismo plantear otras actividades que permitan la evolución progresiva de razonamiento de los estudiantes, acordes a las sugerencias y pautas de las fases del modelo Van Hiele, para poder lograr aprendizajes relacionados a temas geométricos.

### Análisis del texto de matemática del segundo grado

Este texto de matemática de la editorial Norma (2012). Ha sido distribuido por el Ministerio de Educación como textos de guía a todos los estudiantes de educación básica regular del sector estatal, con la finalidad de poder contribuir en el proceso enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de los colegios públicos de la República.

En la siguiente Figura 4 se puede visualizar una actividad desarrollada por un estudiante.



**Figura 4.** Texto de matemática de 2do grado

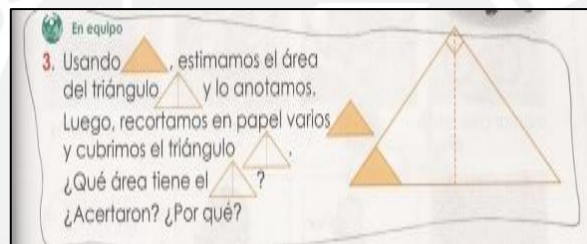
**Fuente:** Editorial Norma (2012, p.151)

En la Figura 4 se puede observar el reconocimiento de los cuadrados y triángulos como figuras que pueden cubrir todo el área de las iniciales de sus nombres, es decir, se busca que los estudiantes estimen el área de una figura empleando como unidad de medida un pequeño cuadrado o triángulo dado. Para lo cual se desarrolla de la siguiente manera:

Tito usa la figura del cuadrado para formar la inicial de su nombre y le preguntan, ¿Qué área tiene? seguramente contará la cantidad de cuadrados que contiene la inicial de su nombre. Luego se les indica que elaboren con los triángulos y así sucesivamente.

En el desarrollo de estas actividades era necesario considerar la comparación de triángulos, ya que de un cuadrado obtienen dos triángulos.

En la Figura 5 se presenta una imagen con triángulos pequeños y un triángulo grande, se les indica que deben cubrir el área del triángulo grande.



**Figura 5.** Texto de matemática de 2do grado

**Fuente:** Editorial Norma (2012, p.151)

Se les presenta un triángulo pequeño como la unidad de medida, para que puedan hacer recortes en papeles, triángulos de la misma medida para que puedan cubrir el área del triángulo grande

Consideramos que actividades como esta, no se asocian a ninguno de los niveles descritos en relación al concepto triángulo ya que lo que busca desarrollar en el niño es la noción de cubrimiento con triángulos pequeños. Lo cual aún no desarrolla ningún nivel de razonamiento.

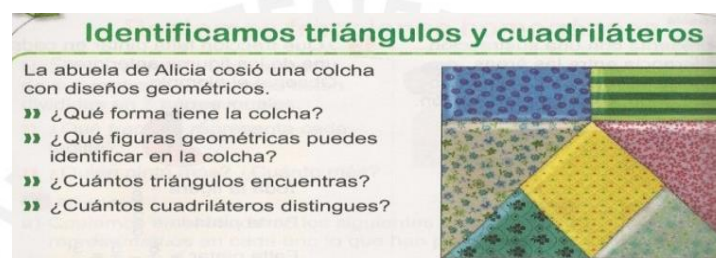
Por lo expuesto, se concluye que en el texto de segundo grado hay muy pocas actividades sobre triángulos, las que además no han sido diseñadas con la intención de reforzar el nivel 1 pero que no permiten la evolución a un siguiente nivel.

En el desarrollo de las actividades del segundo grado se pudo introducir la noción de semejanza de triángulos, aunque solo de manera informal, cuando se trabajó la actividad que hacía referencia triángulos pequeños y grandes.

### Análisis del texto de matemática del tercer grado

Este texto de la editorial Santillana (2012). Ha sido distribuido por el Ministerio de Educación a todos los colegios nacionales, con el único propósito de poder contribuir con el desarrollo de la educación peruana.

A continuación se presenta la Figura 6 con diseños de figuras geométricas. Para lo cual se les hace las siguientes interrogaciones.

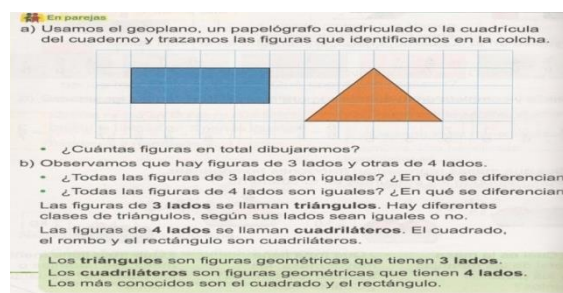


**Figura 6.** Texto de matemática de 3er grado

**Fuente:** Editorial Santillana (2012, p.194)

Los estudiantes identifican la forma de la colcha, luego reconocen las figuras geométricas del cual está formada la colcha. Así mismo identifican los triángulos y los cuadriláteros. Para lo cual los estudiantes deben tener pleno conocimiento de los conceptos de cada una de las figuras geométricas. Al observar la imagen es necesario considerar lo que son las regiones de los polígonos, ya que claramente se visualizan las regiones poligonales.

A continuación pasamos a visualizar e interpretar las siguientes actividades, las que se desarrollan en base a la primera actividad de la Figura 6. Así como se puede observar en la siguiente Figura 7.



**Figura 7.** Texto de matemática de 3er grado

**Fuente:** Editorial Santillana (2012, p.194)

- Los estudiantes trazan en un papel en formato A1 (papel de 8 oficios) que tienen cuadrículas figuras geométricas que hay en la colcha.
- Identifican figuras que tienen tres lados que se llaman triángulos y otras que tienen cuatro lados que se llaman cuadriláteros.
- Establecen diferencias entre las figuras que tienen tres lados, tres ángulos las clasifican según sus lados y ángulos en equilátero, isósceles y escaleno.
- Así mismo reconocen que las figuras como los trapecios de cuatro lados no son iguales, porque tienen diferentes lados y ángulos. Estas se denominan cuadriláteros y entre ellos reconocen los cuadrados, los rectángulos, los rombos, los trapecios; excepto trapecoide.
- Reconocen también que las figuras de tres lados se llaman triángulos y que hay diferentes clases de triángulos, como hemos indicado anteriormente,
- Definen los triángulos solo con la característica de ser figuras con tres lados; no se menciona si se trata de una figura cerrada o abierta.

En efecto, en el texto de tercer grado también se han encontrado definiciones, como se muestra en la Figura 8.

Los **triángulos** son figuras geométricas que tienen **3 lados**.  
 Los **cuadriláteros** son figuras geométricas que tienen **4 lados**.  
 Los más conocidos son el cuadrado y el rectángulo.

**Figura 8.** Texto de matemática de 3er grado  
**Fuente:** Editorial Santillana (2012, p.194)

Hay un intento de definir triángulo, pero solo se hace referencia a una propiedad: el tener tres lados, no se pide que sea una figura cerrada; además no se indica otros elementos que tienen los triángulos que desde luego son importantes en el estudio de los triángulos. Y por lo tanto, debería asumirse que una figura geométrica es una figura cerrada formada por lados y ángulos, lo que no es trivial.

Hay una ligera evolución en relación a cómo se describe este objeto, ya que en grados anteriores solo se hacía referencia a la figura pero no se explicitaban los aspectos anteriores; sin embargo, por lo que se ha mencionado todavía la definición es incompleta.

- Definen los cuadriláteros como figuras geométricas que tienen cuatro lados, pero se centran en los cuadrados y rectángulos.

La Figura 7 hacía referencia a ello.

Estas actividades del tercer grado sobre triángulos están asociadas al nivel 1 de Van Hiele (Reconocimiento o Visualización)

- Reconocen algunos elementos de triángulos y cuadriláteros.

Así, podemos indicar que las actividades sobre los triángulos solo responden a una de las características del nivel 1.

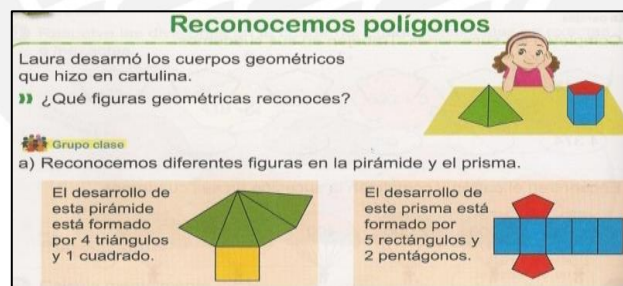
Por lo tanto, se sugiere que se deben considerar actividades relacionadas a los triángulos que conlleven al desarrollo de razonamiento geométrico de los estudiantes, considerando pautas determinadas de acuerdo a las fases del modelo Van Hiele.

Es necesario que los estudiantes tengan conocimiento sobre los elementos de los triángulos.

### Análisis del texto de matemática del cuarto grado

Este texto de la editorial Santillana (2012) para ser distribuidos entre todos los estudiantes de los colegios nacionales, como textos de consulta, acompañada de actividades.

Ahora mostramos la imagen de la Figura 9, donde se puede apreciar dos cuerpos o sólidos geométricos, pirámide y prisma.



**Figura 9.** Texto de matemática de 4to grado  
**Fuente:** Editorial Norma (2012, p.122)

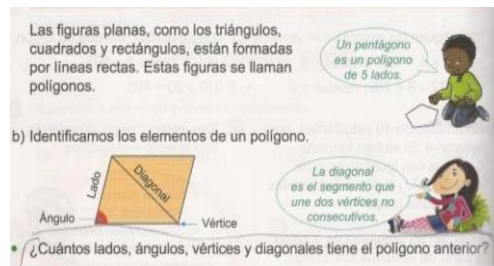
Laura desarmó los cuerpos geométricos. Reconocen diferentes figuras en la pirámide y en el prisma.

La pirámide está formada por cuatro triángulos y un cuadrado, y el prisma está formado por cinco rectángulos y dos pentágonos; con los cuales los estudiantes podrán formar los sólidos geométricos como pirámide y prisma.

Los sólidos geométricos como prisma y la pirámide que aparece en la figura están formados por polígonos regulares, lo cual no está indicado en la Figura 9.



Continuamos visualizando y analizando el contenido de la imagen de la Figura 10.



**Figura 10.** Texto de matemática de 4to grado  
**Fuente:** Editorial Norma (2012, p.122)

Se refiere que las figuras planas como los triángulos, cuadrados y rectángulos, están formadas por líneas rectas, los cuales se denominan polígonos.

Uno de los niños pregunta ¿Qué es un pentágono? es un polígono de cinco lados.

Reconocen los elementos de un polígono.

Los estudiantes aprenden la definición de diagonal, como el segmento que une dos vértices no consecutivos.

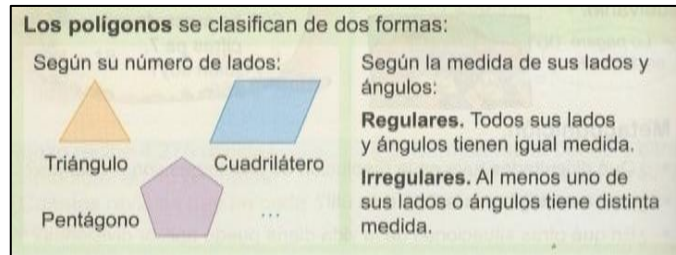
Se les hace una interrogante ¿De cuántos lados, ángulos, vértices y diagonales tiene la figura mostrada?

No se precisa sobre el número de ángulos, ya que la figura tiene trazada una diagonal.

El desarrollo de las actividades nos puede referir que corresponde al primer nivel de razonamiento geométrico según Van Hiele, porque los estudiantes reconocen y visualizan el polígono presentado.

Se debe reconocer los elementos del triángulo en particular, que está formada por tres segmentos cerrados, tres ángulos y tres vértices, con los nombres que los caracteriza. Refiere textualmente que las figuras planas están formadas por líneas rectas; lo correcto debería de ser que las figuras planas están formadas por segmentos, en lugar de líneas rectas.

En seguida presentamos la Figura 11 correspondiente a la clasificación de los polígonos según el número de lados y ángulos, regulares e irregulares. Regulares se dice cuando todos sus lados y ángulos tienen igual medida; en cambio los irregulares al menos uno de sus lados o ángulos tienen distinta medida.



**Figura 11.** Texto de matemática de 4to grado

**Fuente:** Editorial Norma (2012, p.122)

En el desarrollo del contenido de la clasificación de los polígonos, sólo hay una presentación de los polígonos y no hay ninguna actividad que promueva a desarrollar el razonamiento geométrico respecto a la clasificación de los polígonos. Por ello, podemos relacionar al primer nivel de razonamiento del modelo Van Hiele.

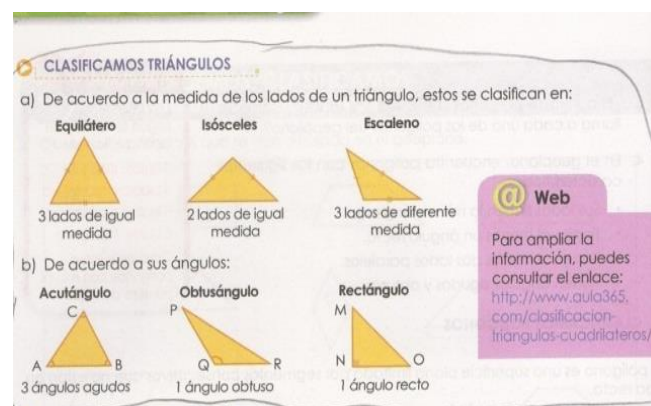
La justificación para esta afirmación es la siguiente:

Al observar las figuras solo identifican polígonos según el número de lados y ángulos, pero no discuten en las propiedades que caracterizan a cada uno de los polígonos, Tampoco se considera actividades para hacer clasificaciones de los polígonos. Además, no es cierto que con tres segmentos se pueda formar un triángulo siempre.

### **Análisis del texto de matemática del quinto grado**

El texto de la editorial Bruño (2012). Los cuales han sido distribuidos a todos los colegios públicos, para que los estudiantes puedan tener como libros de consulta.

El contenido de la presente Figura 12 nos muestra la clasificación de triángulos según la medida de sus lados y ángulos.



**Figura 12.** Texto de matemática de 5to grado

**Fuente:** Editorial Bruño (2012, p.100)

Es así que, en la Figura 12 se puede apreciar solo una presentación de la clasificación de los triángulos según sus lados y ángulos, no hay actividades que exijan a los estudiantes realizar las clasificaciones correspondientes a los triángulos. Esta presentación de las figuras solo sirven para poder visualizar. Por ello, corresponde al primer nivel de razonamiento del modelo Van Hiele.

La justificación para esta afirmación es la siguiente:

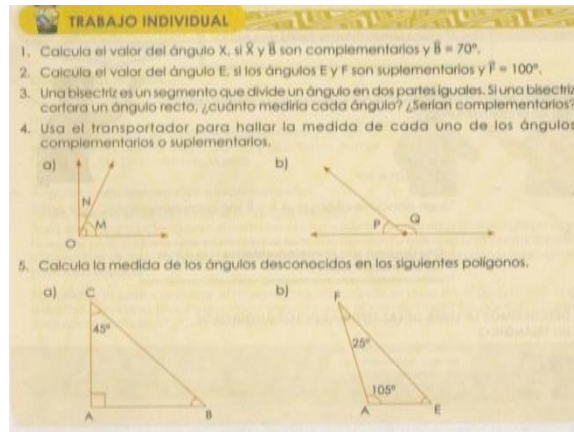
Para poder comprender adecuadamente el contenido de la figura mostrada, no ha exigido que reconozcan en forma explícita las propiedades matemáticas de los triángulos. Sin embargo, hay estudiantes que sí pueden reconocer algunas propiedades o elementos de un triángulo. Entonces es sumamente importante considerar por ejemplo para el triángulo isósceles que está formado por dos lados y dos ángulos iguales.

De otro lado, en el texto se propone también una actividad de comparación en la medida de los lados y ángulos de los triángulos, según las propiedades establecidas. Se sugiere usar instrumentos correspondientes como la regla, el compás y el transportador, para que puedan desarrollar el trazado de distintas clases de triángulos según las propiedades. De esta manera se pueden lograr los objetivos de aprendizaje en torno a los triángulos.

### **Análisis del texto de matemática del sexto grado**

El texto de la editorial El Nocedal (2012), ha sido distribuido con la finalidad de que los estudiantes del 6° grado de educación primaria puedan tener como libro de consulta para el desarrollo de las actividades educativas; de acuerdo con lo que está establecido en el diseño curricular nacional del 2009 y de acuerdo a lo que está estipulado en el documento de los mapas de progreso.

La actividad es asignada para cada estudiante, para que pueda calcular el valor de los ángulos. Así como se muestra en la Figura 13.



**Figura 13.** Texto de matemática de 6to grado

**Fuente:** Editorial El nocedal (2012, p.94)

En el contenido de esta Figura 13 podemos apreciar las siguientes preguntas.

1. Calcula el valor del ángulo X, si X y B son complementarios y el ángulo  $B=70^\circ$

Es una pregunta abierta, se presume que los estudiantes conocen conceptos de ángulos complementarios.

2. Calcula el valor del ángulo E, si los ángulos E y son suplementarios y el ángulo  $F = 100^\circ$

Se presume que los estudiantes conocen conceptos de ángulos suplementarios.

3. Una bisectriz es un segmento que divide un ángulo en dos partes iguales. Si una bisectriz cortará un ángulo recto, ¿cuánto medirá cada ángulo?
4. Haciendo uso del transportador hallan las medidas de los ángulos complementarios y suplementarios en las figuras asignadas.
5. Calcula la medida de los ángulos desconocidos en los siguientes polígonos.

En este ejercicio 5 el estudiante debe resolver usando la propiedad:  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ .

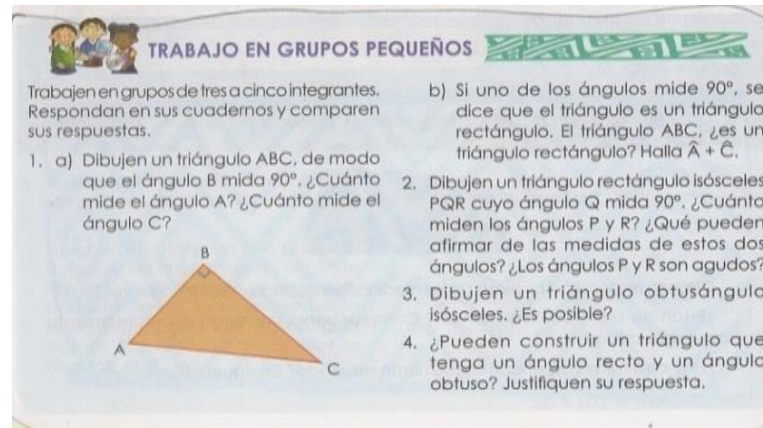
Sin embargo, no se precisa que para desarrollar la pregunta 5 si previamente ha habido actividades concernientes que lo han llevado a descubrir que es cierto este planteamiento, entonces quedará como tarea para averiguar.

La justificación para esta afirmación es la siguiente:

Los enunciados propuestos no enfatizan en la realización de actividades que conllevan a la evolución del razonamiento matemático. Por eso, se considera en el nivel 1 de Visualización o Reconocimiento según el modelo Van Hiele.

Así mismo en este trabajo los estudiantes necesitan hacer un reconocimiento de propiedades y usar las mismas para desarrollar la propuesta de resolución y puedan acceder al nivel 2 de análisis.

A continuación en la Figura 14 se muestra varias actividades que deben ser trabajadas en forma grupal. Luego van a comparar sus respuestas.



**Figura 14.** Texto de matemática de 6to grado.

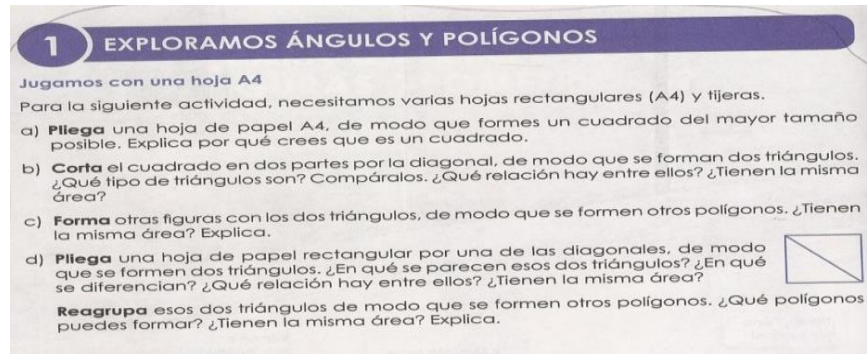
**Fuente:** Editorial El noceal (2012, p.94).

- A nivel grupal dibujan un triángulo ABC, de modo que un ángulo mida  $90^\circ$ . Calculan la medida de los otros ángulos.
- Cuando uno de los ángulos mide  $90^\circ$ , se dice que es un triángulo rectángulo. Calculan la medida de los ángulos A y C.
- Dibujan un triángulo rectángulo isósceles cuyo ángulo Q mide  $90^\circ$  ¿Qué pueden afirmar de las medidas de los dos ángulos P y R si son agudos o no?
- ¿Pueden construir un triángulo que tenga un ángulo recto y un ángulo obtuso? Justifican su respuesta.

La justificación para esta afirmación es la siguiente:

El desarrollo de las tareas asignadas a los estudiantes en pequeños grupos referentes a los triángulos corresponde a algunas características del 2º nivel de razonamiento Van Hiele, ya que al dibujar consideran propiedades que caracterizan a los triángulos.

En la siguiente Figura 15 se puede visualizar la exploración de ángulos y polígonos, utilizando varias hojas de papel A4, con los cuales realizan una serie de actividades programadas.



**Figura 15.** Texto de matemática de 6to grado

**Fuente:** Editorial El nocedal (2012, p.108)

En el contenido de esta página del texto podemos observar las siguientes actividades:

- Exploran ángulos y polígonos haciendo recortes con hojas de papel A4.
- Corta el cuadrado en dos partes por la diagonal, de modo que se formen dos triángulos. ¿Qué tipo de triángulos son? ¿Qué relación hay entre ellos? ¿Tienen la misma área?
- Forma otras figuras con los dos triángulos, de modo que se forman otros polígonos.

Las actividades referidas corresponden al primer nivel de Reconocimiento o Visualización de razonamiento según el modelo Van Hiele, porque responde a algunas características del primer nivel.

Con las tareas asignadas se debe considerar la comparación de los triángulos, porque al cortar el cuadrado en dos partes por la diagonal se obtiene dos triángulos iguales. Las tareas asignadas ayudan en el aprendizaje de los estudiantes sobre triángulos.

A continuación se presenta un conjunto de polígonos con las medidas correspondientes de sus lados, acompañado cada uno con la fórmula que permite hallar el área. Así como se muestra en la siguiente Figura 16.

**Aplicamos una fórmula**  
Para calcular el área de figuras como un rectángulo, un cuadrado, un triángulo, un trapecio, un paralelogramo y un rombo con los datos dados, se puede aplicar una fórmula.  
En tu cuaderno, **calcula** el área de las siguientes figuras.

Rectángulo	Cuadrado	Triángulo
<p>largo = 10 cm ancho = 11 cm</p> <p><b>Fórmula:</b> Área = largo x ancho</p>	<p>l = 7</p> <p><b>Fórmula:</b> Área = lado x lado</p>	<p>base = 5 cm altura = 8 cm</p> <p><b>Fórmula:</b> Área = <math>\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}</math></p>
Paralelogramo	Trapecio	Rombo
<p>altura = 3 cm base = 8 cm</p> <p><b>Fórmula:</b> Área = base x altura</p>	<p>b: base menor a: altura B: base mayor</p> <p>b = 9 cm a = 5 cm B = 18 cm</p> <p><b>Fórmula:</b> Área = <math>(B + b) \times \frac{a}{2}</math></p>	<p>D: diagonal mayor d: diagonal menor</p> <p>D = 17 cm d = 8 cm</p> <p><b>Fórmula:</b> Área = <math>\frac{\text{Diagonal mayor} \times \text{Diagonal menor}}{2}</math></p>

**Figura 16.** Texto de matemática de 6to grado  
**Fuente:** Editorial El noceal (2012, p.110)

Se indica que se debe calcular el área de los polígonos, para lo cual se les asigna los datos correspondientes, para poder calcular el área de las figuras presentadas a través de una fórmula.

Como se puede apreciar en el contenido de la figura, no hay actividades donde los estudiantes puedan desarrollar y así evolucionar su nivel de razonamiento. Solamente se les indica que deben calcular el área de las figuras.

La justificación para esta afirmación es la siguiente:

Reconocen los elementos de los polígonos a través de la asignación de las medidas para hallar el área correspondiente, en lo cual no se enfatiza el desarrollo de los niveles de razonamiento. Por lo tanto, se considera en el primer nivel de reconocimiento o visualización del modelo Van Hiele.

**A manera de síntesis se presenta la siguiente reflexión**

Luego de la revisión y análisis de los seis libros de matemática del primero al sexto grado de educación primaria sobre los triángulos, distribuidos por el Ministerio de Educación, podemos concluir que:

- Las actividades sobre los triángulos en los textos de matemática de primero al sexto grado de educación primaria están asociados, en su mayoría al primer nivel de razonamiento del modelo Van Hiele.
- Si bien se observa que la graduación de las actividades responde a un orden creciente, hace falta considerar actividades que permitan desarrollar diferentes niveles de comprensión.
- Se ha observado que se requiere incluir actividades que conlleven a desarrollar la creatividad y el razonamiento geométrico para poder desarrollar el primer y el segundo nivel de razonamiento del modelo Van Hiele, siempre en función de las sugerencias y pautas de las fases de aprendizaje del modelo de razonamiento de Van Hile .
- La presentación de la definición del triángulo es incompleta, porque solo hace referencia a sus lados, no se menciona si es cerrada o abierta, en algunos libros que hemos analizado está considerada los lados como líneas rectas no como segmentos. Entonces el triángulo no está bien definido de acuerdo a las propiedades y con base científica.
- Según Perú (2009) es el Diseño Curricular Nacional, los contenidos que sí se abordan en los seis libros de texto son vértices, lados y ángulos de las figuras geométricas (triángulos), áreas y perímetros de un polígono, como también la clasificación de los triángulos. Pero al analizar los textos hemos podido observar que hay actividades, pero no necesariamente relacionadas a los triángulos.
- A sí mismo, podemos indicar que el tema de la clasificación de los triángulos sí está contemplada en el DCN, pero sucede que en los libros de matemática de educación primaria que hemos analizado no se desarrolla de manera completa; solo se hace de manera superficial.
- A partir del análisis de las actividades sobre los triángulos en los textos de matemática de educación primaria que hemos realizado deseamos que a través de la secuencia de actividades los estudiantes puedan evolucionar hasta el segundo nivel de razonamiento.

#### **1.4. Problema de investigación**

Existen dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes del sexto de primaria para adquirir una comprensión pertinente del objeto triángulo, más allá de asociarlo solo a una figura prototípica, en la cual no reconocen sus propiedades ni sus elementos. Esto contrasta



con el hecho que las expectativas en la Educación Básica, respecto al aprendizaje del objeto triángulo exigen que los estudiantes comparen, clasifiquen y resuelvan problemas que involucren este concepto, lo que asociamos al menos al segundo nivel de razonamiento, según el modelo Van Hiele.

Consideramos que empleando una propuesta basada en el modelo Van Hiele que contemple desde la fase de información hasta la fase de integración y que incluya algunas actividades para cuya solución se prevea usar un programa de geometría dinámica, se logrará que los estudiantes evolucionen en su comprensión sobre los triángulos.

Dado que los docentes de matemáticas de nuestro país no suelen abordar la problemática descrita con los elementos mencionados, consideramos que esta investigación será un referente relevante para futuros trabajos en esta línea. Planteamos entonces elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de los triángulos a estudiantes de sexto grado y analizar el efecto que esta tiene en la comprensión del concepto triángulo.

De acuerdo a las consideraciones expuestas surge la siguiente interrogante:

¿Cómo evoluciona el nivel de razonamiento de los estudiantes del sexto grado de primaria con respecto al objeto triángulo durante la aplicación de una propuesta didáctica basada en el modelo Van Hiele y el uso del GeoGebra en algunas actividades?

### 1.5. Objetivos

Objetivo general

□ Analizar cómo evoluciona el nivel de razonamiento respecto al objeto triángulo en estudiantes de sexto grado de Educación Primaria a través de una propuesta didáctica basada en el modelo Van Hiele y que algunas actividades contempla el uso del GeoGebra.

Objetivos específicos

- Redefinir las características de los dos primeros niveles de comprensión del objeto triángulo propuestas en trabajos previos, de modo que sea más explícito lo que un estudiante debe hacer para ser ubicado en un determinado nivel.
- Identificar en qué medida la aplicación de la propuesta didáctica ha favorecido la evolución en los niveles de Van Hiele de la comprensión del objeto triángulo.

- Describir en qué medida el uso de una estrategia didáctica consistente con empleo de la adecuada tecnología, que por sus características GeoGebra es adecuado para ello.

En el siguiente capítulo describiremos elementos de la teoría del modelo Van Hiele, que es una teoría que tiene dos componentes fundamentales: Niveles de razonamiento y fases de aprendizaje, y corresponde a una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría.



## CAPÍTULO II: ELEMENTOS DEL MODELO VAN HIELE Y LA METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

Toda investigación requiere de un marco teórico que permita abordar la problemática particular que presenta el estudio. En este trabajo consideramos que el modelo, Van Hiele, es el marco adecuado para nuestro objetivo de investigación. Dicho modelo se enfoca en la enseñanza y aprendizaje de la didáctica de la geometría y la comprensión de los estudiantes en torno a objetos geométricos que se logra a través de los diferentes niveles de razonamientos. Por eso, su finalidad no es el aprendizaje de las actividades, sino la comprensión de conceptos y descubrimiento de las formas de razonamiento.

De la Torre (2003) indica que el modelo Van Hiele se basa en el enfoque constructivista del aprendizaje, porque el estudiante asimila los conocimientos a través de las fases de aprendizaje. Afirma el autor que el profesor debe asegurar el interés de los alumnos en el problema y captar su atención desde el comienzo. El método es bueno siempre y cuando que cada uno de los estudiantes logre la solución a través de su trabajo personal. El profesor solo debe intervenir en determinadas fases. Las conversaciones colectivas deben ser guiadas por el profesor, quien los motive y apoye en las dificultades del problema para que los estudiantes mantengan el interés hasta el desarrollo de la actividad.

Del mismo modo, el investigador afirma que según el modelo Van Hiele es importante motivar a los estudiantes para que pasen de un nivel de pensamiento a uno superior.

Berritzegune (2001) refiere este autor que el modelo Van Hiele permite que “el aprendizaje de la geometría se realiza pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, y no se relaciona con la edad cronológica, así mismo sostiene el autor que luego de haber logrado un determinado nivel recién puede avanzar al siguiente nivel de razonamiento; cabe indicar que cada persona que va adquirir un conocimiento geométrico pasa por todos esos niveles. Dependerá bastante del dominio de la geometría para facilitar el desarrollo de las actividades concernientes a la geometría. Además refiere que existen elementos importantes como el lenguaje utilizado y el significado de los contenidos. El primero indica que cada nivel está unida al dominio de un lenguaje determinado; mientras que el segundo refiere que solamente se puede aprender aquello que corresponde al nivel de razonamiento que tiene la persona en ese momento.

En ese mismo sentido, Guillen (2004) sostiene que el modelo de Van Hiele está formado por dos componentes:

Los distintos niveles de razonamiento geométrico, que van desde el Reconocimiento o visualización que es de carácter intuitivo hasta el razonamiento lógico formal.

Las diferentes fases de aprendizaje donde el profesor organiza actividades de aprendizaje en sus clases para que los estudiantes puedan alcanzar un nivel de razonamiento superior al cual posean.

### **2.1. Los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele**

Los Van Hiele sugieren la existencia de cinco niveles de razonamiento. Las informaciones que presentamos a continuación son resúmenes escritos de los propios esposos Van Hiele y otros autores que posteriormente han investigado sobre las características de los niveles, como el grupo de investigadores como Corberán, et al. (1994, p.15), quienes presentan los cinco niveles y características que contempla el modelo que son los siguientes:

#### **Nivel 1: Reconocimiento o Visualización**

El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Usan propiedades imprecisas de los triángulos para comparar, describir o reconocerlas.
- Hacen referencia a prototipos visuales para identificar triángulos.
- Perciben triángulos en su totalidad, de manera global. Describe solo el aspecto físico de los triángulos.
- Al reconocer o describir triángulos incluyen atributos irrelevantes, de tipo físico o visual.
- Reproducen triángulos a partir de los dibujos y pueden aprender vocabulario geométrico.
- Reconocen triángulos como objetos individuales.
- Comparan y clasifican triángulos de acuerdo a su apariencia global.
- Reconocen partes del triángulo pero no analizan que es lo que presenta el triángulo.

## Nivel 2: Análisis

El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Reconocen que los triángulos están formados por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas.
- Nombran propiedades para identificar un triángulo.
- Comparan triángulos de acuerdo a sus propiedades.
- Hacen prevalecer sus propias definiciones y no aceptan las definiciones dadas por el profesor o por el libro.
- Reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de los triángulos y sus elementos. También pueden deducir propiedades a partir de su experiencia.
- Cuando utilizan varias veces ejemplos con triángulos, pueden hacer generalizaciones.
- Aún no pueden relacionar unas propiedades con otras, no realizan clasificaciones lógicas de triángulos basándose en elementos y propiedades.
- Perciben triángulo de manera aislada, no deducen unas propiedades de otras.
- Aún no comprenden lo que es una demostración matemática.

## Nivel 3: Ordenación o clasificación

Este nivel de razonamiento se caracteriza porque los estudiantes:

- Empiezan a desarrollar su capacidad de razonamiento matemático. Reconocen que unas propiedades de los triángulos se deducen de otras.
- Entienden una demostración explicada en el libro o por el profesor, pero no saben la estructura de una demostración, por eso, aún no son capaces de realizar por si solos.
- Reconocen cómo razonar según el sistema lógico deductivo, pero no el razonamiento de la lógica formal.
- Realizar razonamientos deductivos informales, usando implícitamente reglas lógicas.
- Comprenden demostraciones formales cuando se las explica el profesor o el libro del texto.
- Utilizan dibujos de los triángulos para verificar sus deducciones.
- Pueden clasificar lógicamente diferentes familias de triángulos a partir de propiedades con precisión matemática.

- Comprende el papel de las definiciones y pueden dar definiciones matemáticamente correctas.
- Pueden dar y modificar definiciones y usar inmediatamente definiciones de conceptos nuevos.
- Pueden hacer demostraciones de acuerdo a las definiciones matemáticas.

#### **Nivel 4: Deducción formal**

El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Para comprobar la veracidad de la información matemática tiene que hacer la demostración.
- Efectúan conjeturas y verifican deductivamente.
- Realizan demostraciones de diferentes maneras y pueden compararlas.
- Comprenden las interacciones entre las condiciones necesarias y las suficientes y distinguen entre una implicación y su recíproca.
- Conocen la existencia de las definiciones equivalentes y lo demuestran.
- Entienden la estructura axiomática de las matemáticas.
- Justifican las afirmaciones de manera rigurosa.
- Se completa la formación del razonamiento matemático lógico formal.

#### **Nivel 5: Rigor**

El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Se ubican en el máximo nivel de rigor matemático según, parámetros del momento.
- Desarrollan su actividad matemática sin ningún inconveniente, porque están seguros de su veracidad.
- Pueden analizar y comparar los diferentes sistemas axiomáticos.
- Tienen conocimientos y habilidades propias de un matemático.

## 2.2. Las Fases de aprendizaje del Modelo Van Hiele

El modelo de Van Hiele tiene una componente que permite ofrecer recomendaciones a los profesores de matemática particularmente de geometría para que organicen su enseñanza siguiendo determinadas estrategias, que lleva por nombre “fases de aprendizaje”.

Corberán et al (1994, p .24), presentan la descripción de las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele.

Las características de estas Fases de aprendizaje son las siguientes:

### **Fase 1: Información**

Es una fase de encuentro entre el profesor y los estudiantes, donde el profesor informa a los estudiantes sobre los diversos aspectos que se van a desarrollar, así como las estrategia de trabajo, además informarse de los saberes previos de los estudiantes, sobre que conocimientos se va a tratar. Y ver en qué nivel de razonamiento se encuentran los estudiantes.

### **Fase 2: Orientación dirigida**

En esta fase los estudiantes resuelven actividades y problemas a partir de los materiales entregados por el profesor. El objetivo principal de esta Fase es conseguir que los estudiantes tomen contacto con los métodos de razonamiento del nivel superior de Van Hiele al que se espera que accedan y que descubran, comprendan y aprendan los principales conceptos, propiedades, entre otros del objeto de estudio.

La misión del profesor es conducir a los estudiantes en la línea de la solución, dándoles indicaciones que les ayude a superar las dificultades.

### **Fase 3: Explicitación**

En esta fase los estudiantes en grupo comparten sus experiencias, dialogan sobre lo que han aprendido, indican de qué manera han resuelto las tareas. Así mismo en sus conversaciones se manifiesta el uso del vocabulario nuevo, es decir, deben pasar del vocabulario informal que

ellos han creado al vocabulario estándar. Es importante considerar esta fase, como una actitud continua de diálogo. En esta Fase es importante que surjan puntos de vista distintos al de sus compañeros, ya que ello hará que piensen y analicen sus opiniones antes de emitir sus juicios.

#### **Fase 4: Orientación libre**

En esta Fase los estudiantes están en la capacidad de aplicar y combinar los conocimientos que han aprendido en las fases anteriores para desarrollar nuevas experiencias de aprendizaje. El campo de estudio ya es conocido por los estudiantes, pero aún deben incrementar sus conocimientos concernientes en temas geométricos como en las habilidades de razonamiento. Esto se consigue a través de la resolución constante de problemas por parte de los estudiantes por diversas formas y estrategias didácticas.

Los ejercicios que se van a plantear en esta fase deben tener varios conceptos o propiedades relacionados a la geometría para que los estudiantes tengan que combinar de forma adecuada para llegar a su solución. La tarea del profesor es brindar a los estudiantes estrategias de solución a los diversos problemas y fomentar la discusión sobre diferentes formas de resolución.

#### **Fase 5: Integración**

En el transcurso de las fases anteriores los estudiantes han aprendido nuevos conocimientos, habilidades y nuevo vocabulario, esto les permite aprender otros conocimientos relacionados al campo de estudios, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su alcance. En esta fase deben integrar todos los conocimientos adquiridos durante las sesiones anteriores, tratar de organizarlas y sistematizarlos y no seguir buscando más conocimiento que desde luego no es malo. Así mismo.

Corberán, et al (1994) indican que en esta fase el profesor debe motivar este trabajo proporcionando situaciones de comprensiones que han logrado en las Fases anteriores es decir que las actividades deben desarrollarse en base a los conocimientos adquiridos; más bien se deben sistematizar y organizarlos de manera que sean comprensibles sobre todo en la resolución de problemas.



### **2.3 Aspectos relevantes de la Investigación cualitativa**

Según Hernández (2010). La investigación cualitativa se basa en una perspectiva de la comprensión de la importancia de las acciones de los individuos, indica que la realidad se define a través de las interpretaciones de los integrantes en la investigación de acuerdo a su realidad; además refiere el autor que intervienen varias realidades de quienes participan y la que se produce de la interacción de todos los sujetos de la investigación (p .9).

La investigación que venimos desarrollando, como es el estudio de la comprensión del objeto triángulo en estudiantes de sexto grado de primaria a través de una propuesta didáctica basada en el modelo Van Hiele y cuyo objetivo es analizar la evolución del nivel de razonamiento en los estudiantes mencionados sobre el objeto triángulo; para lo cual se requiere apoyarse en la investigación cualitativa y de una metodología de estudio de casos. Los cuales son aspectos muy importantes, porque nuestra investigación en el seno educación matemática no se reduce sólo a conocer las circunstancias en las que la educación ocurre, sino que además busca determinar los conocimientos y los resultados de la aplicación de los instrumentos de la investigación para mejorar el proceso educativo.

De otro lado, el investigador cualitativo parte de la realidad social, donde las actividades humanas se desarrollan de distintas formas. Por ello, creemos pertinente considerar el estudio de caso como metodología específica de esta investigación. Así, el estudio de caso nos va a permitir observar, entender, analizar y describir el nivel de comprensión del objeto triángulo que alcanzan estudiantes del sexto grado de educación primaria en una situación real.

### **2.4. Estudio de caso como metodología de investigación**

Nuestro trabajo de investigación se desarrolla dentro del contexto de las ciencias humanas, es decir en el campo de la educación, particularmente en el proceso de la comprensión del objeto triángulo. Por ello, creemos pertinente utilizar el estudio de caso como metodología de investigación. El tipo de pregunta de investigación que buscamos está acorde a las características de la metodología del Estudio de Caso. Así mismo va permitir acercarnos al campo de estudio.

Yin, R. (1994). Define un Estudio de Caso como una investigación empírica que estudia un fenómeno en una situación real que se conduce a las situaciones de interés y a los datos observacionales basándose a las fuentes de evidencia y los resultados se obtienen a partir del análisis de los datos (p.13).

Según el autor el estudio de caso permite que el investigador observe, entienda, analice y describa una situación real. Lo importante es que el investigador adquiera conocimiento y experiencia para tomar decisiones y resolver problemas identificados en el estudio de caso.

Un estudio de caso, según los investigadores pretenden conocer una situación bien definida como una persona, una institución, un curso, una disciplina un sistema educativo, una política entre otros. Su objetivo es comprender en “Cómo” y “Por qué” de esas situaciones. Precisamente nuestro trabajo de investigación tiene estrecha relación con los aspectos de aprendizaje y los conocimientos de los estudiantes.

### **Características de un estudio de caso**

Para Ponte, (2006) una investigación sobre Estudio de Casos, tiene las siguientes características:

- Permite utilizar una gran variedad de instrumentos y estrategias, acompañados de técnicas de recolección y análisis de datos muy diversos.
- Es de naturaleza empírica básica y requiere de un trabajo en la vida real.
- Se ubica en un contexto real.
- Tiene bastante contenido descriptivo.
- Es Profunda, tiene alcance analítico, donde se interrogan las situaciones, se confrontan y permite obtener nuevas oportunidades y teorías para posteriores investigaciones.

En una investigación de estudio de casos es importante la teoría para orientar al investigador, tanto en la recolección de datos como de su análisis. Así como responder a cuestiones como: Qué cosas observar, qué datos recoger, qué preguntas hacer.

El objetivo fundamental es proporcionar una mejor comprensión de un caso específico y ayudar a formular hipótesis de trabajo sobre una situación.

Los criterios generales o de calidad para evaluar un estudio de caso de tipo interpretativo, según Goetz y Le Compte (1984) están referidos a que este sea adecuado claro, completo, creíble, significativo, creativo y único.

### **El proceso de investigación de un estudio de caso aplicado a nuestra investigación**

Nuestra investigación se relaciona con el estudio de caso de carácter descriptivo, cuyo objetivo es analizar cómo ocurre un fenómeno dentro de su contexto real.

Nuestra investigación permite el estudio de un objeto o caso, porque vamos a obtener una información más completa del objeto de estudio.

Luego tenemos las partes del estudio de casos.

### **Según Yin (1984) Esta metodología consta de cinco partes:**

- a) Diseño del caso de estudio.
- b) Conducción del caso de estudio: Preparación de recolección de datos.
- c) Conducción del caso de estudio: Recolección de datos.
- d) Análisis del caso de estudio.
- e) Elaboración del reporte de caso de estudio.

A continuación desarrollaremos cada parte según nuestra investigación:

#### **a) Diseño del estudio de caso**

El objetivo de nuestra investigación es analizar el nivel de comprensión del objeto triángulo en los estudiantes del sexto grado de Educación primaria a través de una propuesta didáctica basada en el modelo Van Hiele. Para luego encaminarnos al diseño del estudio de caso propiamente dicho.

Referente a los sujetos que se van a investigar muy detenidamente se consideran a 3 estudiantes elegidos que manifiestan dificultades en su aprendizaje; luego de la actividad 1 donde se tendrá el primer contacto del proceso de nuestra investigación.

El tipo de preguntas de investigación utilizadas en este estudio serán ¿Qué? o bien ¿Cuáles? preguntas de tipo exploratorio.

¿Qué dificultades tiene los estudiantes en la comprensión del objeto triángulo?

¿Cuáles son los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre el objeto de estudio? Para ello, en nuestro estudio buscamos obtener información relevante sobre la evolución del nivel de razonamiento de los estudiantes de 6° grado.

#### **b) Conducción del caso de estudio: Preparación de la recolección de datos.**

El objetivo de esta investigación es analizar cómo los estudiantes de 6° grado evolucionan en su nivel de razonamiento respecto al objeto triángulo.

Se desarrollará la observación, la entrevista y la aplicación de los instrumentos y actividades, las preguntas del caso de estudio, serán para el investigador. Después de identificar el problema es fundamental realizar un conjunto de preguntas para guiar nuestra investigación.

¿Cuál es el nivel de comprensión del objeto triángulo que tienen los estudiantes del sexto grado de primaria antes de nuestra investigación?

- a) ¿En qué nivel de razonamiento se encuentran los estudiantes del sexto grado de primaria?
- b) ¿Cuáles son sus dificultades durante este proceso?
- c) ¿Pueden reconocer los elementos del triángulo?
- d) ¿Pueden reconocer las propiedades del triángulo?
- e) ¿Qué tipo de problemas podemos plantearles de tal manera que sean novedosos y atraigan su interés?
- f) ¿Qué dificultades tendrán al trabajar durante la investigación?
- g) ¿Hasta qué nivel de razonamiento podrán llegar los estudiantes aplicando las fases de aprendizaje según el modelo Van Hile?

#### **c) Conducción del caso de estudio: Recopilación de datos.**

Los datos se obtienen observando, preguntando o examinando. En esta parte se van a seleccionar las estrategias para la obtención de los datos, es decir, los sujetos a examinar, las entrevistas, el estudio de documentos personales y la observación, entre otras. Todo ello desde la óptica del investigador y la del caso de estudio.

Entonces la información que vamos a utilizar para nuestra investigación será a través de:

- **Planteamiento de situaciones problemáticas:**

Consideraremos los problemas contextualizados o adaptados a su realidad e interés, de acuerdo a las fases de aprendizaje del modelo teórico.

- **Observación:**

La observación participante, se refiere al investigador, cómo tales tenemos la responsabilidad de llevar a cabo el proceso de la investigación con la veracidad del caso.

También se realizarán acercamientos previos, ya que se realizarán filmaciones y observaciones de las clases.

**d) Análisis del caso de estudio.**

En nuestra investigación va a seguir la lógica de los análisis cualitativos. Es decir tras establecer una correlación entre los contenidos y los personajes, tareas, situaciones, entre otros, y de nuestro estudio vamos a analizar el nivel de comprensión del objeto triángulo en los estudiantes del sexto grado de primaria. Todas las valoraciones y explicaciones van a surgir de los datos que se vayan a obtener durante nuestra investigación y en relación al marco teórico adoptado.

**e) Elaboración del reporte del caso de estudio**

Comprende los siguientes pasos:

Se diseña el Estudio de Caso, se recoge la información, se analiza la información, se redacta el informe, finalmente se exterioriza. En esta parte se hará una explicación de manera cronológica, es decir, se van a realizar descripciones minuciosas de los acontecimientos más relevantes. Además se va a explicar cómo se ha logrado obtener toda la información (recogida de datos, elaboración de las preguntas, entre otros). Todo ello será de amplio conocimiento del investigador para luego reflexionar sobre el caso de estudio en particular.

## CAPÍTULO III: DESCRIPCIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO

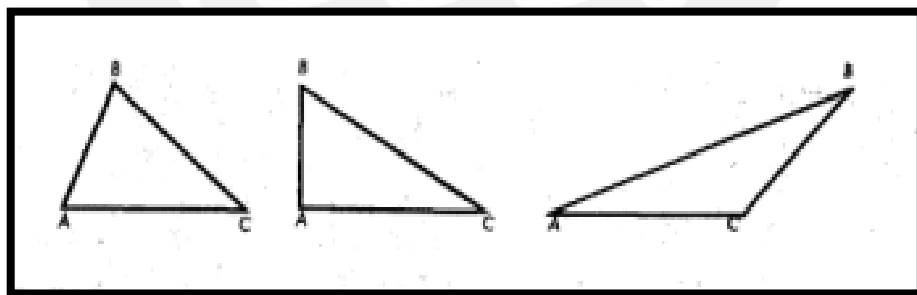
En este capítulo se considera el estudio del objeto matemático triángulo, sobre el cual se lleva a cabo esta investigación, con el propósito de obtener más información sobre sus propiedades y relaciones. De esta manera, se identificarán elementos que permitirán redefinir los niveles propuestos por Van Hiele y que luego serán tomados en cuenta en la elaboración de la propuesta didáctica.

Para el estudio formal del objeto triángulo se considerará como principal fuente de consulta el libro de Geometría Moderna, cuyos autores son Moise y Downs (1966).

En primer lugar se precisarán las definiciones y teoremas que se establecen sobre los triángulos.

### 3.1. Definición de triángulo

En el texto señalado se hace referencia a que un triángulo tiene las siguientes representaciones, como se ve en Figura 17.



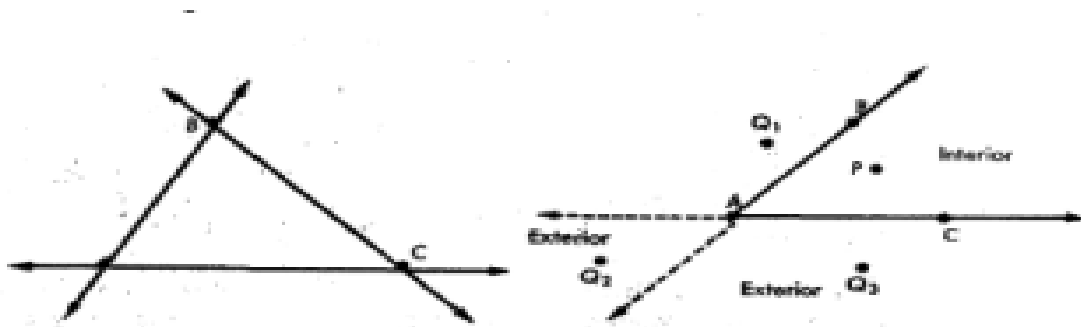
**Figura 17.** Triángulos  
**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 76)

Se define el triángulo de la siguiente manera:

Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$  se llama un triángulo y se denota con  $ABC$ . Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se llaman vértices y los segmentos  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$  se llaman lados.

Todo triángulo ABC determina tres ángulos:  $\sphericalangle BAC$ ,  $\sphericalangle ABC$  y  $\sphericalangle ACB$ . A éstos se llamarán los ángulos del triángulo ABC; frecuentemente podemos designarlos por  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle B$  y  $\sphericalangle C$ .

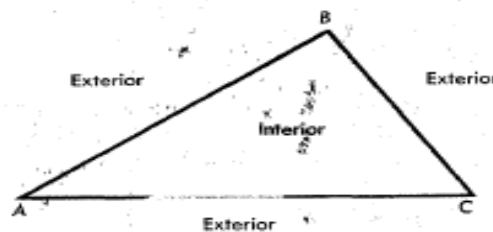
Se notará que cuando dibujamos el interior y el exterior de un triángulo, no necesariamente hemos dibujado sus ángulos. Lo mismo que una universidad no contiene a sus graduados, así, un triángulo no contiene sus propios ángulos. Si queremos dibujar los ángulos, debemos prolongar los lados. Así como se muestra en la siguiente Figura 18.



**Figura 18.** Interior y exterior de un triángulo  
Fuente: Moise y Downs (1966, p. 76)

### 3.2. Definición de interior y exterior de un triángulo

Un punto está en el interior de un triángulo, si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo. Un punto está en el exterior de un triángulo, si está en el plano del triángulo, pero no está en el triángulo o en su interior. Así como se puede observar en la Figura 19.



**Figura 19.** Interior y exterior del triángulo  
Fuente: Moise y Downs (1966, p. 76)

A continuación se esclarece la diferencia entre un triángulo y la región triangular, esta región es para hallar las áreas, así como se muestra en la Figura 20.



**Figura 20.** Región triangular  
**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 291)

Se define una región triangular como la reunión de un triángulo y su interior.

### 3.3. Congruencia de triángulos

Según los autores antes referidos, la congruencia de triángulos se establece cuando hay una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos triángulos.

Dados dos triángulos interesa observar si son de la misma forma y tamaño. Intuitivamente observamos que ello será posible en la medida que podamos recortar los bordes de uno de ellos, trasladarlo y hacer que coincida con el otro, es decir, hacer corresponder los vértices de tal manera que ambas figuras coincidan.

En el caso de ángulos y segmentos, se puede expresar esta idea en término de sus medidas.

#### Definición de ángulos congruentes

Dos ángulos son congruentes, si tienen la misma medida. Dos segmentos son congruentes, si tienen la misma longitud.

#### Teorema

Todo segmento es congruente consigo mismo.

Con estas definiciones previas, ahora se puede enunciar la definición de congruencia entre dos triángulos.



### Definición de triángulos congruentes

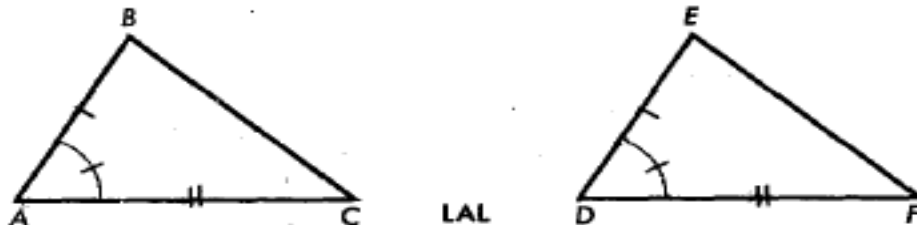
Dos triángulos ABC y DEF son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de dos triángulos según la cual los pares de lados correspondientes son congruentes y los pares de ángulos correspondientes son congruentes. A esa correspondencia se llama una congruencia entre los triángulos ABC y DEF.

### Postulados de congruencia para triángulos

Existen tres casos en los que se establece la congruencia de triángulos. El primer caso, LAL, corresponde a que dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo. La notación LAL representa lado, ángulo, lado.

**Postulado 1.** El postulado lado, ángulo, lado (LAL).

Toda correspondencia LAL es una congruencia. Como se muestra en la Figura 21.



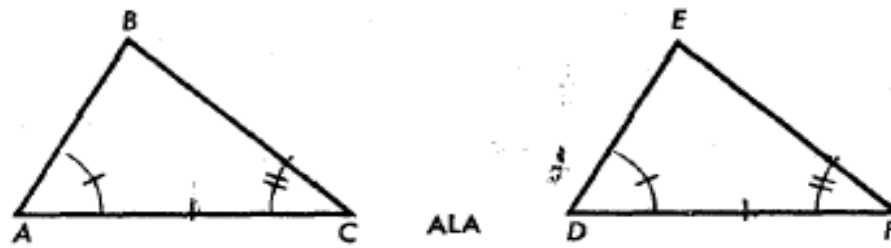
**Figura 21.** LAL

**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 76)

El segundo caso, nos indica que hay una correspondencia ALA, es decir dos ángulos y el lado comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo. La notación ALA representa ángulo, lado, ángulo.

**Postulado 2.** El postulado ángulo, lado, ángulo (ALA).

Toda correspondencia ALA es una congruencia. Como se puede apreciar en la siguiente Figura 22.

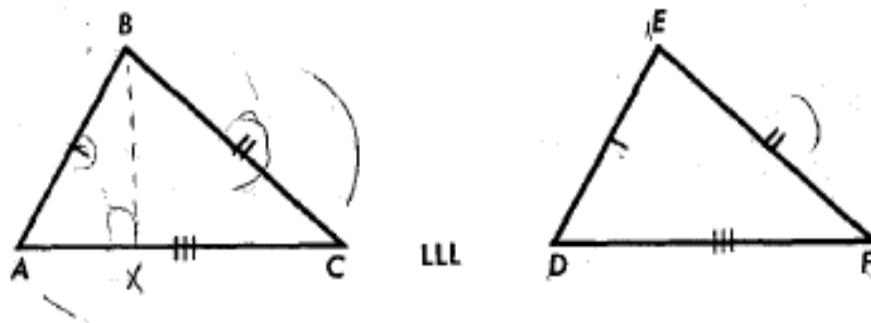


**Figura 22.** ALA  
**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 76)

Finalmente, tenemos el tercer caso de correspondencia LLL donde los tres lados del primer triángulo son congruentes con los lados correspondientes del segundo triángulo. La notación LLL representa lado, lado, lado.

**Postulado 3.** El postulado lado, lado, lado (LLL).

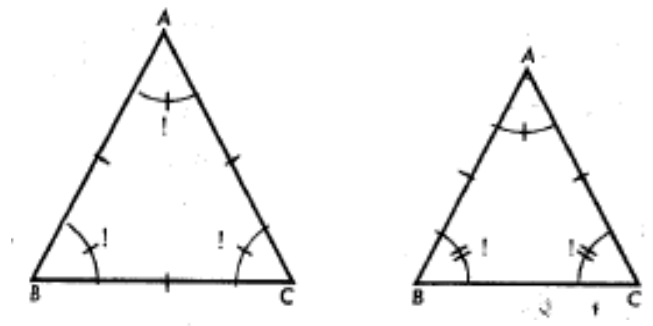
Toda correspondencia LLL es una congruencia. Así como se representa en la siguiente Figura 23.



**Figura 23.** LLL  
**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 76)

### 3.4. Clasificación de triángulos según sus lados y ángulos

Al observar la Figura 24, el primer triángulo es equilátero tiene tres lados congruentes y el segundo triángulo es isósceles tiene dos lados congruentes.



**Figura 24.** Triángulo equilátero e isósceles  
Fuente: Moise y Downs (1966, p. 76)

**Teorema.** El teorema del triángulo isósceles

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

#### **Definición de triángulos isósceles**

Un triángulo con dos lados congruentes se llama isósceles; al otro lado se le denomina base. Los dos ángulos asociados a la base son ángulos en la base. El triángulo opuesto a la base es el ángulo en el vértice.

Utilizando estos términos, podemos enunciar el teorema de la siguiente manera:

Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.

#### **Definición de triángulo equilátero, escaleno y equiángulo.**

Un triángulo con sus tres lados congruentes se llama **equilátero**.

Un triángulo **escaleno** es aquella figura que tiene tres lados y tres ángulos desiguales.

Un triángulo es **equiángulo**, si sus tres ángulos son congruentes.

Utilizando los términos equilátero y equiángulo, enunciamos ahora un teorema que se deduce fácilmente del teorema de la definición de triángulo isósceles. Llamaremos a este teorema el corolario.

**Corolario.**

Todo triángulo equilátero es equiángulo.

**Teorema.** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

**Definición de mediana**

Una mediana de un triángulo es un segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo tiene tres medianas, una para cada vértice.

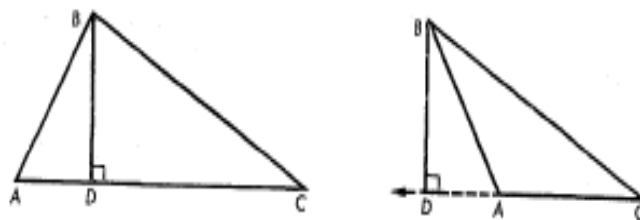
**Definición de bisectriz**

Un segmento es una bisectriz de un ángulo de un triángulo, si está en el rayo que biseca al ángulo del triángulo, y sus extremos son el vértice de ese ángulo y un punto del lado opuesto.

A continuación tenemos las ideas precisas de las alturas que tienen los triángulos.

**3.5. Alturas de triángulos**

En cada una de las representaciones de la Figura 25, el segmento,  $\overline{BD}$  es una altura del triángulo ABC:



**Figura 25.** Alturas de Triángulos  
**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 206)

En cada caso,  $\overline{BD}$  es la perpendicular desde B a  $\overline{AC}$ , y se llama altura desde B a  $\overline{AC}$ .

### Definición de altura

Una altura de un triángulo es un segmento perpendicular, trazado desde un vértice del triángulo a la recta, que contiene al lado opuesto.

### 3.6. Algunos teoremas sobre triángulos

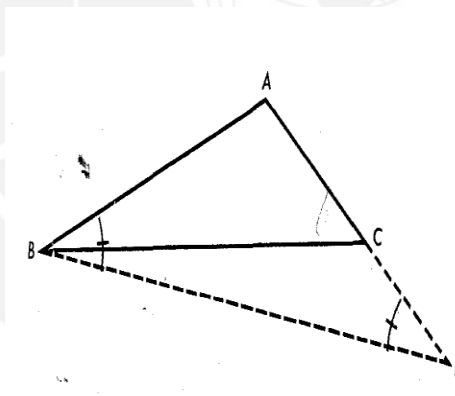
#### Teorema

Para todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos interiores es  $180^\circ$ .

#### Teorema

Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

O de otro modo: En un triángulo cualquiera  $ABC$  si  $\overline{AB}$  es mayor que  $\overline{AC}$ , entonces el ángulo  $C$  es mayor que el ángulo  $B$ , como ocurre en la Figura 26.



**Figura 26.** Lados no congruentes del triángulo  
Fuente: Moise y Downs (1966, p. 77)

#### Demostración

Sea  $D$  un punto de  $\overline{AC}$ . Tal que  $\overline{AD} = \overline{AB}$ . Entonces, el ángulo  $ABD$  es congruente con el ángulo  $D$ , porque los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes. Como  $\overline{AD} = \overline{AB}$  es mayor que  $\overline{AC}$ ,  $C$  tiene que estar entre  $A$  y  $D$ . Por tanto, en virtud del postulado de la adición de ángulos.

La medida ( $m$ ) del ángulo ABD es igual a la medida del ángulo ABC más la medida del ángulo CBD

En consecuencia,

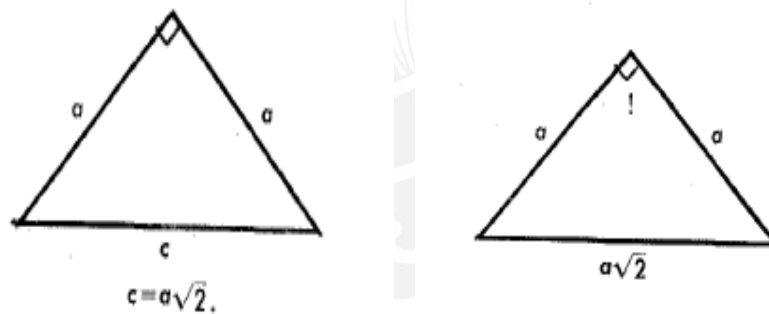
La medida del ángulo ABC es menor que la medida del ángulo ABD

### Teorema 1 del triángulo rectángulo isósceles

En un triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa es  $\sqrt{2}$  veces el largo de un cateto

### Teorema 2 del triángulo rectángulo isósceles

Si la base de un triángulo isósceles es  $\sqrt{2}$  veces el largo de cada uno de los dos lados congruentes, entonces el ángulo opuesto a la base es un ángulo recto. Esto se ilustra en la Figura 27.



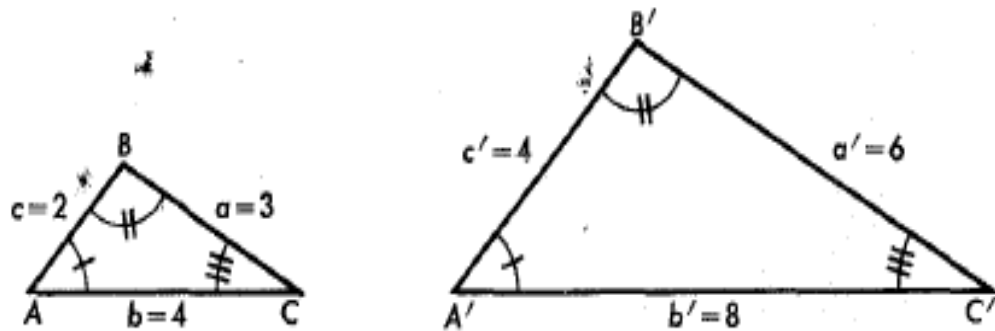
**Figura 27.** Triángulos especiales  
**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 306)

### 3.7. Semejanza de triángulos

Podemos decir que dos figuras geométricas son semejantes, si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Por ejemplo, dos circunferencias cualesquiera son semejantes, porque tienen la misma forma; los cuadrados cualesquiera son semejantes porque tienen la misma relación; dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes, porque tienen la misma relación de correspondencia.

**Moise y Downs (1966)** Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia se llama una semejanza y decimos que los triángulos son semejantes,

p.321. Así como se puede observar en la Figura 28 donde los lados del triángulo  $A'B'C'$  son el doble de los respectivos lados en el triángulo  $ABC$ .

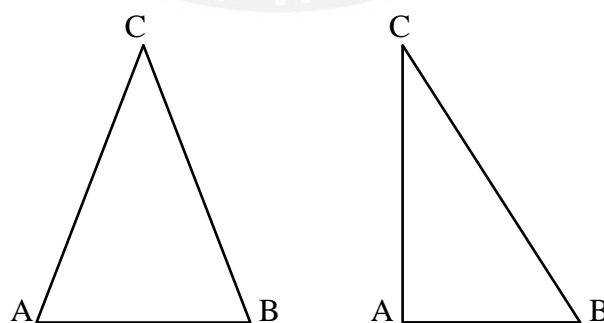


**Figura 28.** Semejanza de Triángulos  
**Fuente:** Moise y Downs (1966, p. 321)

### 3.8. Triángulos no semejantes

Dos triángulos cualesquiera no son semejantes, cuando no guardan la misma relación de correspondencia. Por ejemplo: El segmento  $\overline{AC}$  del triángulo equilátero no tiene relación con el segmento  $\overline{AC}$  del triángulo rectángulo. Por eso, en general, entre un triángulo isósceles y un triángulo rectángulo no hay ninguna relación de correspondencia; pues los lados no son proporcionales, tampoco hay congruencia de sus ángulos. Por consiguiente, estos triángulos no son semejantes.

En la Figura 29 se muestra dos triángulos con estas características.



**Figura 29.** Triángulos no semejantes  
**Fuente:** Construcción propia

A manera de síntesis, señalamos que en este capítulo se ha realizado la descripción del objeto matemático triángulo de manera formal. Para ello se recurrió al texto de Geometría Moderna de los autores Moise y Downs (1966).

A continuación vamos a definir los niveles de razonamiento asociados al triángulo a partir del estudio matemático realizado y del modelo teórico adoptado.





## CAPÍTULO IV: DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES

### 4.1. Definición de los niveles de razonamiento para el objeto triángulo a partir del estudio matemático realizado y del modelo teórico adoptado.

A continuación presentamos las características de los niveles 1 y 2 del modelo Van Hiele correspondientes al objeto matemático triángulo.

Estas características se han definido teniendo en cuenta el modelo inicial genérico propuesto por Corberán (1994) y también el estudio matemático realizado en el capítulo anterior.

Así mismo, también se tendrán en cuenta los logros descritos en los mapas de progreso al terminar sexto grado para contextualizar lo que debería hacer un niño que finaliza el sexto grado de primaria en el Perú, en relación a los triángulos.

#### 4.1.1 Nivel 1: Características del nivel de razonamiento 1.

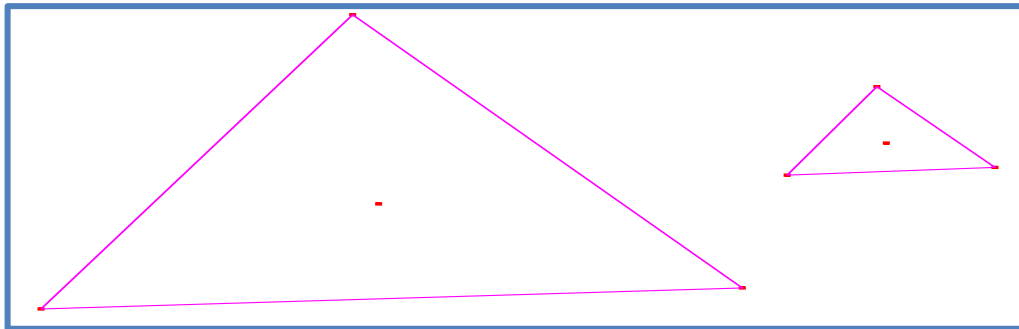
El nivel 1 se conoce como nivel de Reconocimiento o Visualización. Por ello, el razonamiento geométrico de este nivel sobre triángulos, se caracteriza porque los estudiantes:

##### **Característica 1.**

Usan propiedades imprecisas de los triángulos para describirlos, compararlos y ordenarlos.

Por ejemplo, al describir un triángulo hacen referencia a un prototipo de triángulo que suele aparecer en los textos, según el cual uno de los lados siempre se encuentra en posición horizontal, esto no se refiere a el plano euclidiano, o sea, es una referencia en sí misma. Así, aunque no lo expresan verbalmente, cuando se pide que dibujen un triángulo siempre lo hacen así.

Otro ejemplo de una respuesta que nos indica que un estudiante se encuentra en el primer nivel de comprensión de la noción de triángulo sería cuando hacen referencia de que si el triángulo es más grande entonces sus ángulos también son más grandes. También cuando se les da dos triángulos semejantes de distinto tamaño, como los de la Figura 30. Los niños los comparan diciendo que uno es más grande que otro pero no reconocen la relación de semejanza. Así como se muestra en la siguiente Figura 30.



**Figura 30.** Semejanza de Triángulo  
**Fuente:** Construcción propia

### Característica 2

Hacen referencia a prototipos visuales para caracterizar triángulos. En particular, ubican uno de los lados en posición horizontal, basándose probablemente en formas del entorno que inicialmente se asociaron a los triángulos.

Por ejemplo, reconocen que el techo de esta choza, mostrada en la figura 31, adopta la forma triangular.



**Figura 31.** Reconocimiento de una forma triangular  
**Fuente:** Construcción propia

### Característica 3

Al reconocer o describir triángulos incluyen atributos irrelevantes, normalmente de tipo físico o visual, como por ejemplo la orientación en el papel, también cuando se pide que lo describan, se limitan al aspecto físico “es un triángulo amarillo” y no mencionan sus elementos.

#### **Característica 4**

Dada la imagen de un triángulo pueden reproducirlo, es decir, los estudiantes dibujan uno similar, sin reconocer las características y los elementos que este presenta.

#### **Característica 5**

Aunque identifican los elementos de un triángulo los cuales son: lados, ángulos y vértices, no analizan el triángulo en término de estos elementos, sino por el contrario perciben de manera global, como una unidad. Luego comparan y clasifican triángulos basándose en su apariencia global; por ejemplo, señalan que se trata de un triángulo grande o pequeño.

#### **Característica 6**

Pero aún no reconocen explícitamente los elementos ni las propiedades matemáticas de los triángulos. Algunas de esas propiedades son:

- a) Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- b) La suma de los ángulos interiores es  $180^\circ$
- c) En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.
- d) Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos también lo son iguales.

#### **Característica 7**

Pueden reconocer algunos tipos de triángulos como equiláteros, isósceles, etc.; pero aún no explican sus características correspondientes.

#### **Característica 8**

Emplean términos imprecisos como por ejemplo denominan aristas a los lados, o también emplean el término base para referirse al lado en el que parece apoyarse, etc.

#### 4.1.2 Características del nivel de razonamiento 2

El nivel 2 se denomina de Análisis, por ello el razonamiento geométrico de este nivel sobre triángulos se caracteriza porque los estudiantes:

##### Característica 1

Son conscientes de que los triángulos están formados por elementos y que están dotados de propiedades matemáticas.

##### Característica 2

Comparan triángulos mediante el uso explícito de propiedades que hacen referencia a sus elementos.

##### Característica 3

Pueden deducir propiedades a partir de la experimentación. Al comprobar la validez de una afirmación, tratan la geometría como si fuera una ciencia experimental. Algunas de esas propiedades son:

- a) Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- b) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .
- c) En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

##### Característica 4

Sin embargo, todavía no son capaces de relacionar ni deducir unas propiedades de otras, porque perciben cada una de forma aislada y sin relación con los demás; por eso, muestran una ausencia explícita de comprensión de qué es una demostración matemática.

##### Característica 5

Tampoco pueden hacer clasificaciones lógicas de triángulos basándose en elementos y propiedades.

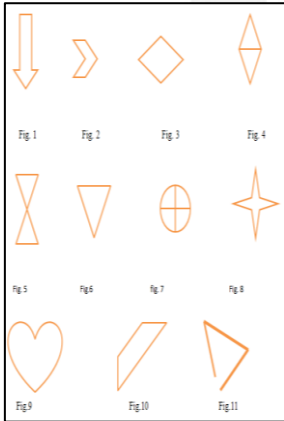
#### 4.2 Diseño de actividades que promuevan la adquisición de los niveles 1 y 2.

A partir de las características definidas previamente se construirán actividades que permitan que los estudiantes evolucionen en los niveles 1 y 2 de comprensión en torno al objeto triángulo.

### Actividad 1. Reconocimiento de triángulo.

Con el desarrollo de la primera actividad buscamos que los estudiantes reconozcan el triángulo o los triángulos en el conjunto de las figuras geométricas presentadas, porque muchos de los estudiantes aún no identifican las características de un triángulo. Precisamente planteamos esta actividad para que los estudiantes del sexto grado de primaria tengan que conocer el objeto triángulo de acuerdo a sus elementos. Efectivamente los estudiantes explorarán que en la figura mostrada se encuentra un solo triángulo que corresponde a la figura 6, el resto son figuras geométricas distintas a un triángulo. Esta actividad está relacionada directamente con la fase de la información porque el investigador obtiene el conocimiento previo que tienen los estudiantes.

**Tabla 1.** Reconocimiento de Triángulo

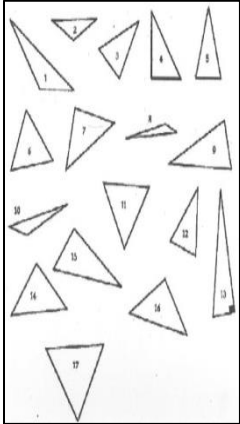
Enunciado	Objetivo	Respuestas esperadas	Nivel de comprensión
<p>Observa las siguientes figuras y cuál de ellas son triángulos.</p> 	<p>Identificar si los estudiantes reconocen a los triángulos de un conjunto de figuras geométricas y distinguen que para ser triángulo debe tener tres lados, ser una figura cerrada.</p>	<p>. La figura 6 es un triángulo.</p> <p>. La figura 7 tiene 4 triángulos.</p> <p>. Las figuras 4 y 5 son triángulos</p>	<p>Característica 1 nivel 1. Concibe al triángulo de forma global</p> <p>No muestra indicios de nivel 1, porque no distingue las características de un triángulo.</p> <p>No presenta señales de nivel 1, porque considera las figuras 4 y 5 como un triángulo.</p>

### Actividad 2. Comparación de triángulos

La segunda actividad se ha preparado para establecer las comparaciones entre los triángulos, es decir, los estudiantes deben reconocer las diferencias y las semejanzas que existen en los triángulos presentados de acuerdo a las características que corresponde a un triángulo. Debe plasmarse esta actividad con la observación directa de las características de los triángulos en

base a la fase de la explicitación de parte de los estudiantes sobre lo que se ha aprendido en la fase de la información en torno al objeto triángulo.

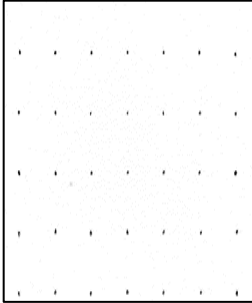
**Tabla 2.** Comparación de triángulos

Enunciado:	Objetivo	Respuestas esperadas	Nivel de comprensión
<p>¿En qué se diferencian y en qué se parecen?</p> 	<p>Reconocer diferencias y semejanzas entre triángulos, haciendo referencia a sus elementos.</p>	<p>.Se parecen en que todas las figuras son triángulos.</p> <p>. Algunos triángulos son grandes y otros pequeños.</p>	<p>Nivel 1, característica 3.</p> <p>Se limitan al aspecto de la imagen.</p> <p>Característica 3, nivel 1.</p> <p>Cuando describe se limitan al aspecto físico.</p>

### Actividad 3. Construcción de triángulos

La siguiente actividad buscará que los estudiantes construyan triángulos en distintas posiciones tomando referencia uno de los puntos de la cuadrícula como vértice. Se realiza esta actividad para que el estudiante pueda reconocer los triángulos en diferentes posiciones ya que suelen conocer al triángulo en una sola posición horizontal. Por eso, los estudiantes al desarrollar esta actividad van aplicar y combinar los conocimientos básicos al construir los triángulos en forma libre, solo en base a la cuadrícula donde los vértices deben ir en cualquiera de los puntos.

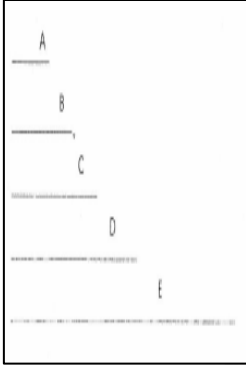
**Tabla 3.** Construcción de triángulos.

Enunciado:	Objetivo	Respuestas esperadas	Nivel de comprensión
Dibuja seis triángulos sobre la cuadrícula de modo que sus vértices sea alguno de los puntos.  	Construir triángulos en distintas posiciones y no solo en la prototípica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Construyan seis triángulos en diferentes posiciones.</li> <li>. Construyan seis triángulos donde los vértices estén en los puntos de la cuadrícula.</li> </ul>	Al construir triángulos identifica algunos elementos, por lo cual se considera el nivel 1, característica 5.

#### Actividad 4. Construcción de triángulos a partir de los segmentos dados

Esta siguiente actividad se ha formulado con la finalidad de que los estudiantes puedan construir triángulos con los segmentos dados, y que reconozcan que no siempre se puede construir triángulos con cualquiera de los segmentos. Entonces los estudiantes comprobarán si se puede construir triángulos utilizando por ejemplo los segmentos A, B y E respectivamente. Y con qué otros segmentos sí se puede construir o no también; entonces en el desarrollo de la actividad irán a descubrir en qué casos se puede o no construir un triángulo, luego explicarán sus razones en base a su experiencia realizada con lápiz y papel.

**Tabla 4.** Construcción de triángulos a partir de los segmentos dados.

Enunciado	Objetivo	Respuesta esperadas	Nivel de comprensión
<p>Con los segmentos dados, forme 3 triángulos.</p> 	<p>Construir tres triángulos con los segmentos dados y reconocer que no siempre es posible hacerlo</p>	<p>. Construyan tres triángulos según las medidas de los segmentos dados. -No se puede construir un triángulo con los segmentos A, B y E porque no se cierra.</p>	<p>. Nivel 1, característica 5 . Construye triángulos con los segmentos dados.</p>

**Actividad 5. Relación de propiedades con tipos de triángulos.**

La actividad 5 se ha diseñado con la finalidad de establecer las relaciones con los tipos de triángulos y las propiedades; porque se asume que los estudiantes tienen conocimiento sobre el tema en particular porque está indicado en el Diseño Curricular Nacional para ser desarrollado en el V ciclo de Educación Básica Regular. Los estudiantes en base a las experiencias de las actividades anteriores deben reconocer los tipos de triángulos y establecer una relación con las características y propiedades de los triángulos.

**Objetivo**

Relacionar cada propiedad con los tipos de triángulos.

**Enunciado**

Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad que le corresponde. Se muestra en la Figura 32.



Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad o propiedades que le correspondan.

Tiene un ángulo de 90 grados.	Triángulo escaleno
Tiene tres lados iguales.	Triángulo equilátero
Tiene dos ángulos iguales.	Triángulo isósceles
Tiene un ángulo obtuso.	Triángulo acutángulo
Tiene tres ángulos iguales.	Triángulo rectángulo
Tiene sólo dos lados iguales.	Triángulo obtusángulo
Tiene todos sus ángulos desiguales.	

¿Podrás construir un triángulo con tres segmentos de longitudes 3cm, 3cm y 6cm? Explica

**Figura 32.** Relación de triángulos con propiedades

**Fuente:** Construcción propia

### Resultados esperados

- El triángulo equilátero tiene tres lados y tres ángulos.
- El triángulo isósceles tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales.
- El triángulo rectángulo tiene un ángulo de  $90^\circ$ .
- Solo reconoce al triángulo equilátero
- El triángulo escaleno tiene tres ángulos diferentes

### Nivel de comprensión

- Nivel 2, característica 2.  
Reconocen algunos tipos de triángulos como escaleno, equilátero, isósceles, entre otros.
- Tiene indicios de nivel 2, característica 3, porque, pueden deducir propiedades a partir de la experimentación. Al comprobar la validez de una afirmación, tratan la geometría como si fuera una ciencia experimental. Algunas de esas propiedades son:

- a) Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- b) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ .
- c) En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

### **Actividad 6. Uso del GeoGebra en la exploración del objeto de estudio.**

En esta actividad vamos a utilizar el software de GeoGebra porque permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos. También permite realizar construcciones de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real, que además, revelarán las relaciones existentes entre la figura construida; también permitirá la transformación dinámica de los objetos que la componen.

Vamos a encontrar diferencias entre el trabajo que se realiza con lápiz y papel o con GeoGebra, para las construcciones geométricas en caso nuestra construcción de triángulos, ya que por su carácter dinámico nos brinda la posibilidad de enriquecer el tratamiento de los contenidos que proponemos en la actividad.

#### **Objetivo**

Utilizar el software Geogebra en la construcción del objeto triángulo con la herramienta punto y segmento. Y mostrar una propiedad de un triángulo.

#### **Enunciado**

Muestra varias preguntas en torno a la construcción de los triángulos con el software GeoGebra, luego de la experimentación cada estudiante responderá a las preguntas planteadas.

ACTIVIDADES CON SOFTWARE DE GEOGEBRA

1.-Se realizará una clase introductoria acerca del uso del programa de Geogebra, con los estudiantes del sexto grado.

2.-Construye triángulos y cambia de posiciones, coloca sus medidas de longitud de los segmentos y la medida de los ángulos.

a) Construye un triángulo que tenga tres lados iguales, indica cuánto suman sus tres ángulos.  
.....

b) Construye un triángulo que tenga dos lados iguales, encuentra la medida de sus ángulos.  
.....

¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales?.....

c) Construye un triángulo que tenga tres lados distintos y suma la medida de sus ángulos.  
.....

¿Encuentras alguna similitud o diferencia en la medida de los ángulos interiores de los triángulos?  
.....

3.-Construye triángulos con las siguientes medidas.

a) 2cm, 2cm y 4cm  
.....

b) 3cm, 3cm y 1cm  
.....

¿Con cuál de las medidas no se puede construir un triángulo, por qué?  
.....

¿Se podrá construir triángulos con cualquiera de las medidas? Si o no, explica.  
.....

**Figura 33.** Actividades con GeoGebra  
**Fuente:** Construcción propia

### Resultados esperados

- Construye triángulos en varias posiciones.
- Calcula las medidas de lados y ángulos del triángulo.
- Construye triángulos isósceles y equiláteros.
- Conjeturar la suma de los ángulos interiores de un triángulo que es  $180^\circ$

### Nivel de comprensión

- Nivel 2, característica 3.  
Pueden deducir propiedades a partir de la construcción de los triángulos.

En el siguiente capítulo se implementa la propuesta elaborada y se presentan resultados obtenidos y el análisis correspondiente.

## CAPÍTULO V: IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

### 5.1. Aspectos generales

En el marco del proceso de la investigación sobre el estudio del objeto triángulo; aplicamos los instrumentos de investigación a través de la secuencia de actividades en el aula del sexto grado sección “B” de la Institución Educativa 57002-Dos de Mayo UGEL Canchis de la ciudad de Sicuani Provincia de Canchis Departamento de Cusco. En esta aplicación participaron 15 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 11 y 12 años de edad. Para el caso de nuestra investigación se ha seleccionado a tres estudiantes Elmer, José Ángel y Sheyla, quienes al finalizar la primera actividad han presentado ciertas dificultades en el reconocimiento del objeto de estudio; entonces es menester realizar la investigación y encontrar cómo van a ir progresando en la evolución referente al nivel de comprensión del objeto triángulo; a través del desarrollo de cada una de las actividades.

Debemos indicar que durante la aplicación de los instrumentos en distintas sesiones, los tres estudiantes han participado de manera comprometida, la docente de aula ha participado como observadora. También se contó con la presencia de una persona que realizó la grabación y filmación correspondiente de todas las actividades desarrolladas durante tres días consecutivos por dos horas pedagógicas por día. La aplicación de las actividades estaba a cargo del investigador que hizo las veces de profesor.

Se contó con el apoyo incondicional de los miembros de la comunidad educativa así como del personal administrativo, quienes colaboraron plenamente en el desarrollo de la aplicación de los instrumentos de nuestra investigación. Ellos tenían pleno conocimiento de los objetivos de nuestra investigación, pues se realizó una reunión previa en donde se dieron estos alcances.

Debemos indicar que el programa de geometría dinámica era nuevo para los estudiantes. Esto explica el que hayan tomado mayor interés en las actividades donde se usó el GeoGebra, ya que permitieron explorar el objeto de estudio. Lo anecdótico ha sido que cuando instalamos el programa del software de GeoGebra días antes, para el día siguiente se habían desaparecido, porque las máquinas estaban congeladas, entonces hemos tenido que instalar de nuevo para el día de la aplicación. Cabe indicar que como investigadores estamos sujetos a múltiples circunstancias, entonces tenemos que saber resolverlos oportunamente y eso es lo que hicimos, porque hubo bastante expectativa sobre la aplicación de los instrumentos de nuestra

investigación sobre el objeto de estudio. Además fue una experiencia que se ha compartido nuestra investigación con los estudiantes y profesores de la institución educativa antes referida.

En el siguiente cuadro mostramos la organización de la aplicación de la secuencia de actividades distribuidas en tres sesiones y los aspectos considerados en el marco de la teoría de nuestra investigación.

**Tabla 5.** Distribución de la aplicación de actividades

Sesiones	Actividades	Aspectos considerados para cada actividad
Primera sesión	Actividad 1. Reconocimiento de las figuras. Actividad 2. Comparación de triángulos. Actividad 3. Dibujo de triángulos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Descripción.</li> <li>❖ Presentación de resultados.</li> <li>❖ Análisis de resultados.</li> </ul>
Segunda sesión	Actividad 4. Construcción de triángulos con los segmentos dados. Actividad 5. Asocian el tipo de triángulo con la propiedad que le corresponde.	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Descripción.</li> <li>❖ Presentación de resultados.</li> <li>❖ Análisis de resultados.</li> </ul>
Tercera sesión	Actividad 6. Uso del GeoGebra en la exploración del objeto de estudio.	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Descripción.</li> <li>❖ Presentación de resultados.</li> <li>❖ Análisis de resultados.</li> </ul>

Hemos organizado la aplicación de los instrumentos en actividades distribuidas en tres sesiones, cada una con duración de dos horas pedagógicas, y en un lapso de tres días consecutivos con la secuencia de actividades debidamente planificadas según la teoría del modelo Van Hiele.

A continuación presentamos las tres sesiones implementadas, se seguirá el siguiente esquema. El primer día estará dedicado a presentar la sesión 1, cada actividad implementada

se describirá e indicará cuáles fueron las respuestas y estas se analizarán; finalmente, se contrastarán con los resultados esperados.

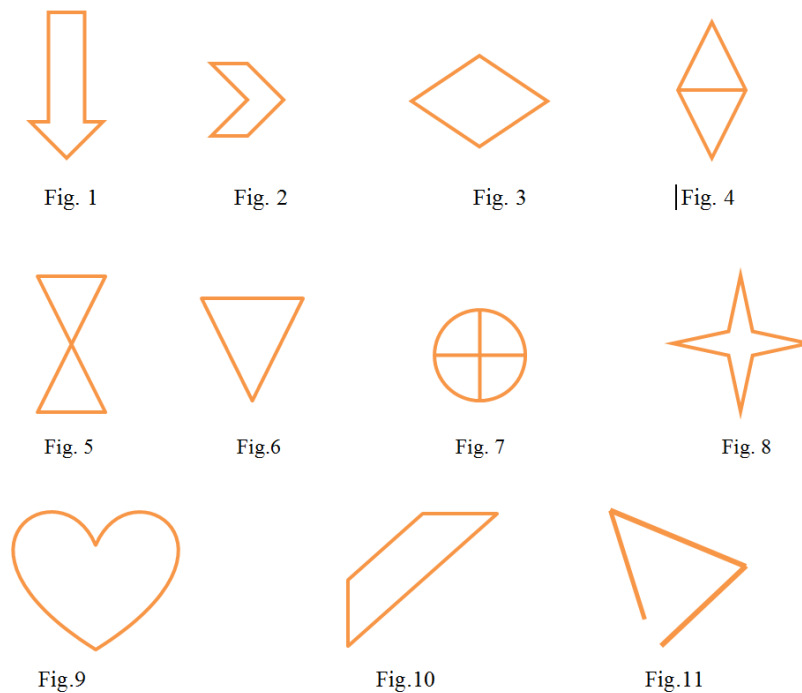
## 5.2. Descripción de la implementación y de los resultados correspondientes a la sesión 1

### Actividad 1

#### Descripción

Se inició la sesión con la presentación de un papelote que mostraba la Figura 34. Para lo cual, los estudiantes observaban muy detenidamente cada una de las figuras que se han presentado unas cuantas con características similares a los triángulos y los demás con otras características, para que los estudiantes visualizaran figuras del papelote en forma espontánea según sus puntos de vista. Cabe indicar que algunas figuras consideradas fueron empleadas en trabajos anteriores. (Corberán, 1994) y otras figuras hemos adaptado de acuerdo a los sujetos que se involucran en la investigación.

Los alumnos reconocen cuáles son las figuras que son triángulos y cuáles no y por qué.



**Figura 34.** Actividad inicial de la sesión.  
**Fuente:** Adaptado de Corberán (1994)

### ❖ Descripción de las interacciones durante la actividad 1

El investigador hace las veces de profesor y se desarrolla el siguiente diálogo con los estudiantes.

**Profesor:** Alumnos hoy vamos a reconocer una figura que es muy conocida para ustedes como es el triángulo. Para lo cual ustedes observen las siguientes figuras que se muestran en el papelote e indiquen, ¿cuál de ellas son triángulos y cuáles no y por qué?

**Estudiante Carlos:** Bueno las figuras 1, 2,3, 7, 8, 9,10, y 11 no son triángulos porque no tienen forma de un triángulo.

**Estudiante Elmer:** La figura 4 tiene dos triángulos y la figura 5 también tiene dos triángulos.

**Estudiante Sheyla:** Las figuras 4 y 5 tienen dos triángulos y la figura 6 tiene un solo triángulo. Entonces habría 5 triángulos.

**Estudiante Luis:** Pero también la figura 11 se parece a un triángulo, se puede arreglar.

**Estudiante José Ángel:** Yo veo que la figura 7 tiene cuatro triángulos, porque tienen tres lados cada uno.

**Profesor:** Para aquellas figuras que se han señalado como triángulos por qué las consideran así.

**Estudiante Anabel:** Porque el triángulo tiene tres aristas o lados y solo hay un triángulo que es la figura 6 el resto de las figuras no son triángulos porque no tienen tres aristas o lados.

**Profesor:** La figura 5 es un triángulo o no es, ¿por qué?

**Estudiantes Fredy y Carlos:** Coinciden que la figura 5 no es triángulo, para que sea triángulo debe tener tres vértices, tres aristas y sus ángulos.

**Estudiante Carlos:** Yo veo solo un triángulo que es la figura 6 porque tiene tres lados el resto no.

**El grupo de estudiantes:** La figura 5 no es un triángulo porque no tiene tres lados o aristas.

Finalmente, luego de las apreciaciones registradas sobre la figura triángulo, los estudiantes indican que para ser triángulo la figura debe tener tres lados, tres vértices, tres ángulos, debe ser cerrado todo sus lados.

### ❖ Análisis de las respuestas brindadas por los estudiantes durante las interacciones

De las respuestas de los estudiantes se nota que ellos reconocen al triángulo como una figura que tiene tres aristas, hacen referencia a los lados.

De los quince estudiantes 13 no comprendieron la pregunta, porque no era encontrar cuántos triángulos habían, sino cuántas figuras eran triángulos, por eso contestaron que habían cinco triángulos, precisamente se dio la aclaración correspondiente.

En la Figura 34 al interior se encuentran las figuras 4 y 5 muestran aparentemente dos triángulos cada una, pero la figura en su conjunto como una sola figura, no representa a un triángulo.

Luego de la explicación 14 estudiantes señalaron que solo había un triángulo representado por la Figura 6 porque tiene tres lados que conocen como aristas y el resto de las figuras no son triángulos porque no tienen sus lados o aristas como conocen los estudiantes referidos que participan de la investigación.

De otro lado, para un estudiante la condición de que los lados debían ser segmentos no estaba presente. Esto se notó cuando el estudiante José Ángel dijo que la figura 7 tenía 4 triángulos. Ello muestra que para este estudiante basta con que la figura tenga tres lados; en su concepción de triángulo no es necesario exigir que esos lados sean segmentos. Por consiguiente podemos indicar que el referido estudiante no está en el nivel 1 del modelo Van Hiele porque aún no reconoce la forma global del triángulo.

Esta primera actividad permitió identificar el grado de conocimiento que los estudiantes poseían sobre triángulos así como el lenguaje que utilizaron para poder identificar a un determinado triángulo, así emplearon términos como tres aristas, los tres vértices y los tres ángulos.

En relación a las respuestas esperadas, según la cual se decía que reconocerían en la figura 6 al único triángulo, podemos decir que 4 estudiantes respondieron así, y con aquellos que no lo hicieron se hizo la discusión respectiva. Con ello se garantizó que tuvieran una visión global del triángulo, podemos indicar que al realizar la contrastación correspondiente con lo esperado y las respuestas emitidas por todos los estudiantes coincidimos solo con 4

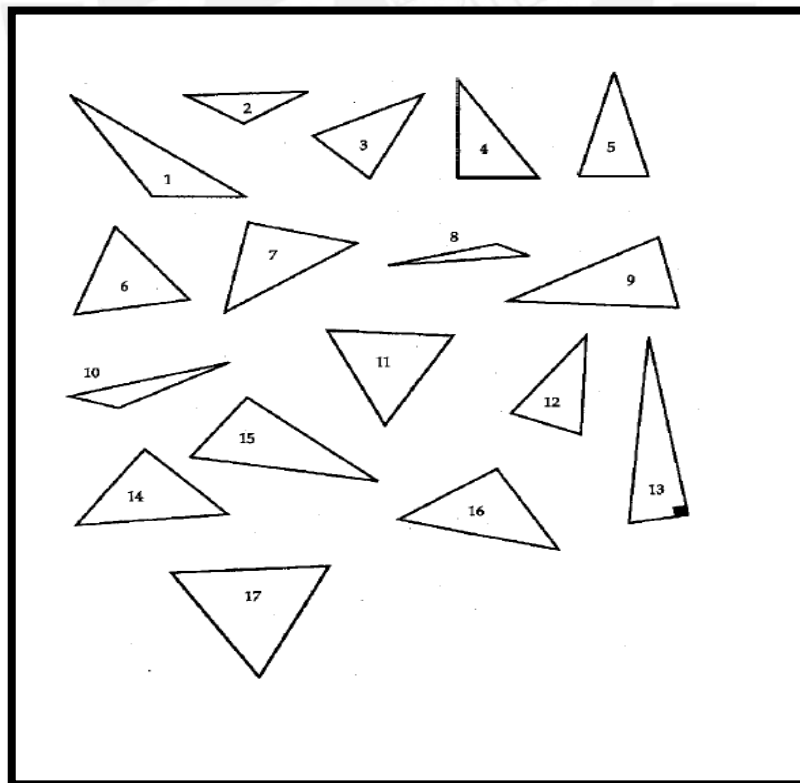


estudiantes que solo había un triángulo en el papelote que hemos presentado. En seguida, se inició la segunda parte de la implementación.

## Actividad 2

### ❖ Descripción

Para el desarrollo de la siguiente actividad se formó tres grupos de trabajo con cinco integrantes cada uno; los tres estudiantes seleccionados porque presentaban dificultades de reconocimiento del triángulo han integrado cada uno de los grupos, luego se les entregó el material correspondiente consistente en un papelote que contenía figuras de triángulos, en seguida cada uno de los tres estudiantes se pusieron a trabajar en grupos distintos para que pudieran comparar los triángulos, de acuerdo a las características del objeto de estudio. El trabajo duró aproximadamente 30 minutos. Después de observar la Figura 35 del papelote cada uno de los tres estudiantes comentaron respecto al contenido del papelote y dieron a conocer sus particulares puntos de vista referentes al objeto de estudio, de acuerdo a las siguientes preguntas planteadas que se muestran a continuación en la siguiente figura 35.



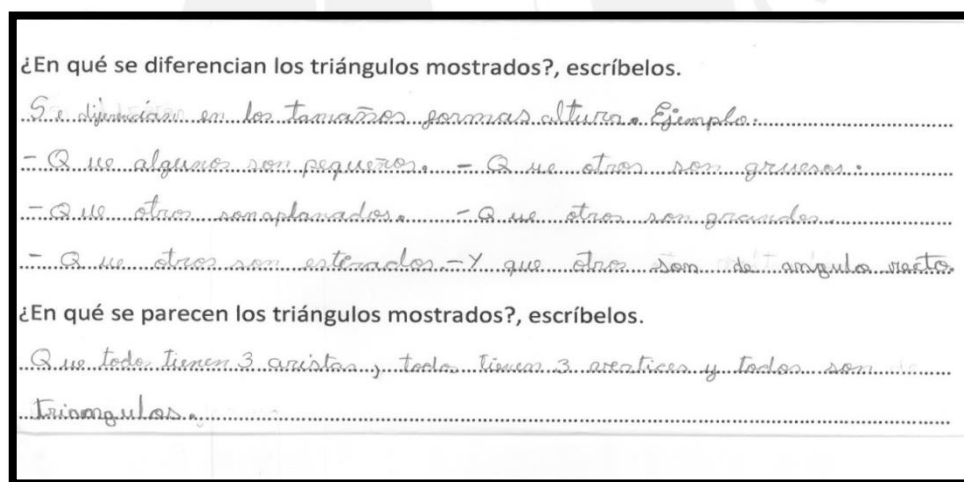
**Figura 35.**Segunda actividad sobre triángulos

**Fuente:** Corberán (1994, p. 67)

### ❖ Presentación de los resultados a la segunda actividad y análisis de las respuestas

Como evidencia presentamos el resultado de la actividad de los tres estudiantes que trabajaron en grupos distintos, porque la dinámica fue en forma grupal con las versiones propias de los estudiantes de acuerdo a las preguntas planteadas respecto al objeto de estudio. Cabe indicar que presentamos las respuestas de los tres alumnos seleccionados para el caso de nuestra investigación correspondiente.

En la Figura 36 se muestran las respuestas del estudiante Elmer, quien presenta atributos irrelevantes para justificar las diferencias. Así, señaló que eran diferentes porque algunos triángulos estaban echados refiriéndose a que tenían un lado en posición horizontal; otros eran pequeños, grandes, largos y que sus aristas eran largas o pequeñas, entre otros atributos irrelevantes.



**Figura 36.** Respuesta del estudiante Elmer a la actividad 2

Sin embargo, encontramos un atributo que sí es importante; esto ocurre cuando el estudiante Elmer hace mención a los ángulos y señala que algunos triángulos son rectos (ángulo de  $90^\circ$ ).

Referente a la siguiente pregunta ¿en qué se parecen los triángulos mostrados? Refiere que todos son triángulos, pues tienen tres vértices y tres lados que el estudiante lo identifica como aristas. Entonces podemos indicar que el referido estudiante al visualizar las figuras trata de

reconocer algunos elementos, razón por la cual manifiesta presentar algunos indicios de acercamiento al nivel 1 del razonamiento que se relaciona con la característica 3 según los niveles del modelo Van Hiele.

Luego analizaremos las respuestas emitidas por el estudiante José Ángel, las cuales se muestran en la Figura 37; según su respuesta, pareciera que no ha entendido la pregunta porque contesta que algunos triángulos son semejantes a otros y que algunos tienen ángulos de 90 grados, menciona que sus bases son grandes y pequeñas; también refiere que las aristas son largas y pequeñas.

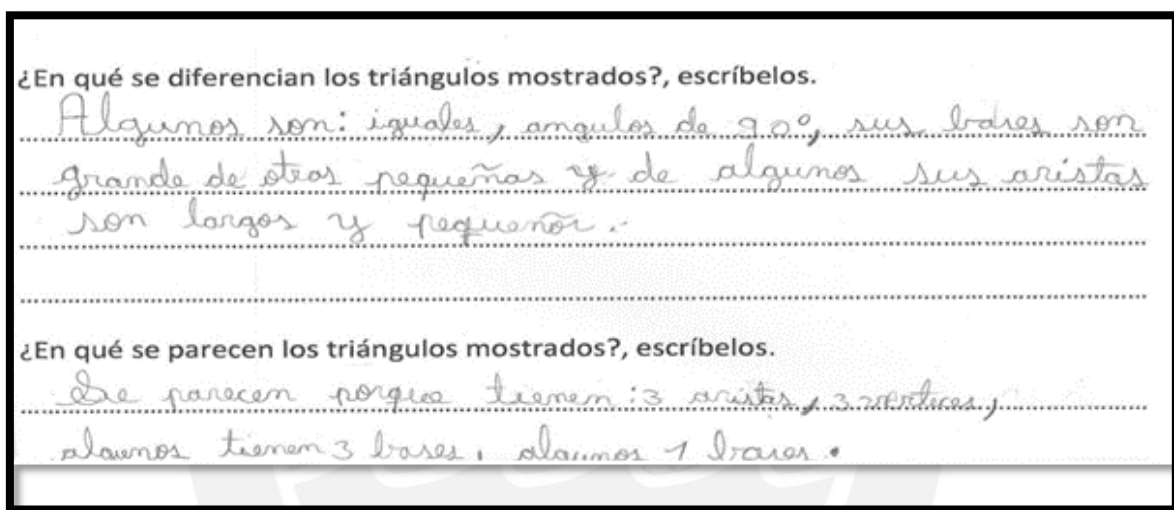


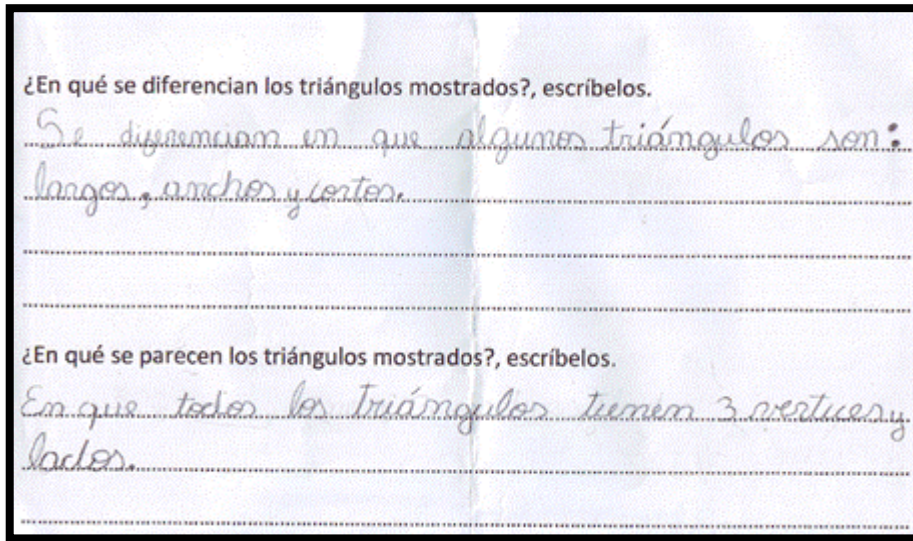
Figura 37. Respuesta del estudiante José Ángel a la actividad 2

En ese mismo sentido, José Luis señala que algunos triángulos son grandes, medianos y otros pequeños, lo que constituyen atributos irrelevantes. Que la respuesta no permite identificar, porque no es posible afirmar categóricamente nada solamente mediante una pregunta.

En cuanto a la pregunta, ¿en qué se parecen los triángulos?, dijo que todos son triángulos, pensamos que en esta parte el estudiante reconoce lo que son los lados como aristas, también reconoce los vértices; refiere asimismo que algunos triángulos mostraban tres bases y otros una sola base, entonces aún le falta identificar lo que son las bases, lo conoce a la figura triángulo como un todo con algunos elementos. Entonces podemos indicar que las respuestas dadas del referido estudiante presentan rasgos del nivel 1 de razonamiento porque se

relaciona con la característica 7 del nivel de razonamiento según la teoría del modelo Van Hiele.

A continuación, mostramos la solución de la estudiante Sheyla, quien al visualizar las características de cada una de las figuras mostradas en el papelote ha tenido que relacionar con sus saberes previos, prueba de ello ha respondido a las interrogaciones planteadas que se muestra en la siguiente Figura 38.



**Figura 38.** Respuesta de la estudiante Sheyla a la actividad 2

Frente a la pregunta ¿en qué se diferencian los triángulos mostrados? Sheyla respondió señalando que los triángulos mostrados en la lámina son largos, refiriéndose a los triángulos con números (1,9, 15,16 y 17), otros son triángulos anchos, para referirse a las figuras que presentan un lado mucho más grande que los otros dos, y otros son cortos, refiriéndose a los triángulos pequeños.

Además Sheyla indicó que todas las figuras mostradas en la lámina eran triángulos; asimismo, nos indica que tienen tres vértices y sus correspondientes lados, aunque no menciona explícitamente que tienen tres lados; suponemos que no lo considera necesario; tampoco hace referencia en su descripción a los ángulos. Por consiguiente, podemos indicar que sus respuestas nos hacen avizorar que la referida estudiante tiene indicios de iniciación para el nivel 1 del razonamiento del modelo Van Hiele, además, se relaciona con la característica 1 del enfoque teórico.

Tomando en cuenta las respuestas de los tres estudiantes seleccionados y de acuerdo con las respuestas esperadas que son las siguientes:

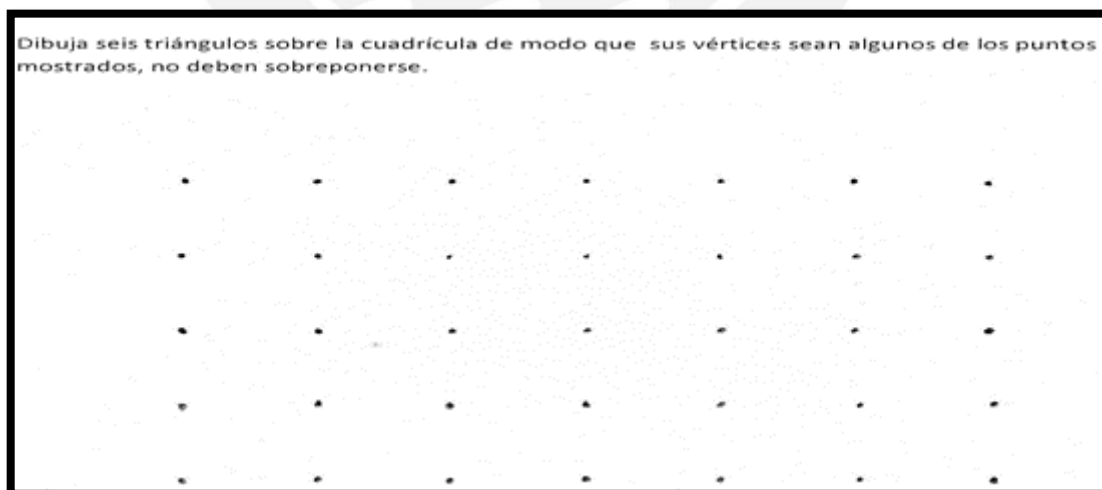
Todas las figuras mostradas son triángulos, unos son grandes y otros pequeños, se encuentran en diferentes posiciones echados, inclinados y parados. Todos los triángulos tienen sus elementos que son lados, ángulos y vértices.

Podemos confirmar que se han encontrado algunas coincidencias entre las respuestas esperadas y las respuestas emitidas por los tres estudiantes que han sido seleccionados para el caso de la investigación correspondiente.

### Actividad 3

#### ❖ Descripción

Para el desarrollo de esta actividad se le entregó una ficha, un lápiz y una regla a cada estudiante para que puedan construir como mínimo seis triángulos sobre la cuadrícula de modo que uno de sus vértices sean algunos de los puntos mostrados y no deben sobreponerse. La actividad duró un promedio de 20 minutos, porque solo era construir seis triángulos con las características correspondientes, es decir, que se tenían que considerarse los elementos del triángulo que son lados, vértices y ángulos. Para tal efecto, han tenido que calcular los espacios necesarios de tal manera que la cantidad mínima de triángulos sea considerada. En seguida mostramos la cuadrícula a través de la figura 39.

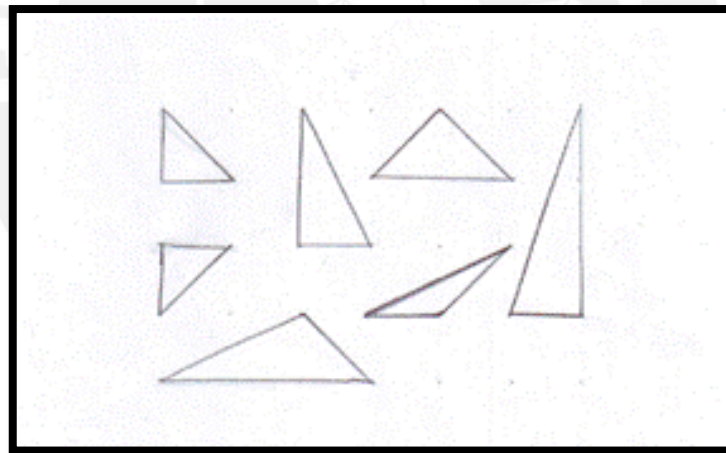


**Figura 39.** Puntos para construir triángulos  
**Fuente:** Creación propia

❖ **Presentación de los resultados a la tercera actividad y análisis de las respuestas**

Los resultados del desarrollo de la actividad que consistía en construir seis triángulos con las características correspondientes. Para lo cual, se hizo evidente la construcción de los triángulos en diferentes posiciones con los elementos y las características pertinentes. Es decir, con los elementos del triángulo que son: lados, vértices y ángulos, al mismo tiempo recordaron la actividad anterior donde han mencionado los elementos del triángulo; ello les ha permitido plasmar los dibujos indicados. Luego, dibujaron los triángulos según las indicaciones correspondientes por medio del uso de los materiales entregados al inicio de la sesión.

En primer lugar mostramos la solución que dio Elmer en la figura 40. Él construyó siete triángulos, uno más de los que se había pedido porque había más espacios donde dibujar, tomando en consideración las instrucciones de la actividad.

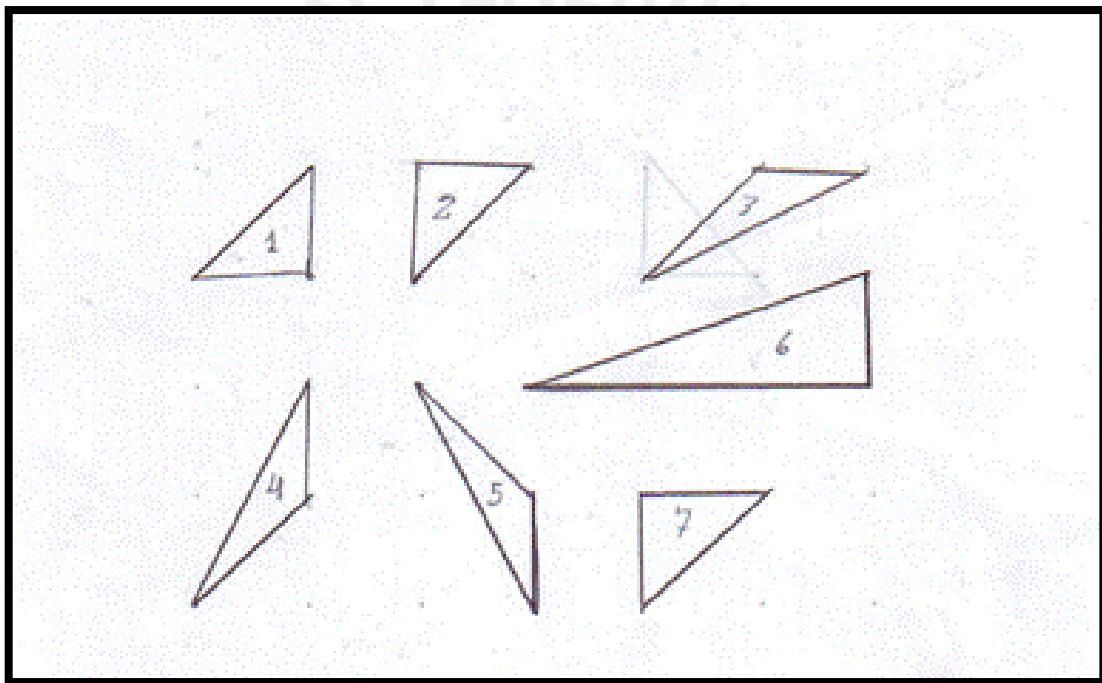


**Figura 40.** Respuesta a la actividad 3 del estudiante Elmer

Se puede apreciar que seis triángulos están en posición horizontal porque generalmente lo trazan así los niños desde corta edad como una figura representativa o prototípica, si lo dibujaba en otra posición hubiese pensado tal vez que no podría ser un triángulo, pero gracias a las figuras mostradas en la actividad 2 donde se muestra a los triángulos en diferentes posiciones; seguramente por eso las ha dibujado en la forma que se presenta en la figura 40; un triángulo ha sido construido en posición vertical, entonces podemos deducir que el referido estudiante reconoce a un triángulo que se encuentre en cualquier posición. Por las

consideraciones referidas podemos indicar que los resultados expuestos por el estudiante presentan evidencias que tienen rasgos del nivel 1 característica 1 según las características del nivel de razonamiento del modelo Van Hiele.

Por otro lado, tenemos la respuesta del estudiante José Ángel, en la Figura 41. Construyó sólo cuatro triángulos (1, 2, 5 y 6) con las características solicitadas. Sin embargo, las figuras (3, 4 y 7) no representan a los triángulos porque aún falta cerrarlos de manera correcta. Entonces para este estudiante le falta definir un triángulo, es decir, para ser un triángulo sus lados deben estar cerrados.

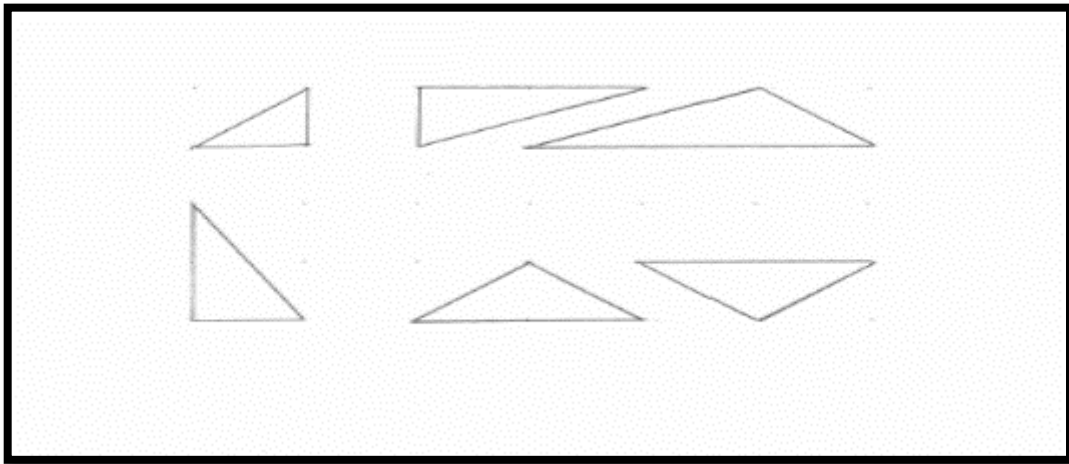


**Figura 41.** Respuesta a la actividad 3 del estudiante José Ángel

Cabe indicar que el referido estudiante José Ángel ha dibujado los triángulos (2, 3, 4, 5 y 7) en una posición diferente a los triángulos 1 y 6 que se encuentran en posición horizontal que generalmente conocen los estudiantes de los primeros años de educación primaria. En esa medida la respuesta dada por el referido estudiante, evidencian que este alumno tiene rasgos del nivel 1, característica 4 del nivel de razonamiento geométrico, porque ha dibujado triángulos según su imaginación sin reconocer las características.

Luego referente a la contratación de la respuesta emitida y la esperada, por el estudiante José Ángel podemos indicar que si ha coincidido con la respuesta esperada.

A continuación presentamos la solución de la estudiante Sheyla en la figura 42 quién construyó efectivamente seis triángulos tomando en cuenta las indicaciones dadas. Ella ha construido los triángulos de manera correcta tomando en cuenta las características pertinentes como sus tres lados, sus tres vértices y sus ángulos correspondientes. Se puede observar que los triángulos construidos están en posición horizontal porque así lo conocen a los triángulos como algo prototípico.



**Figura 42.** Respuesta de la actividad 3, estudiante Sheyla

Podemos indicar que la respuesta emitida por la estudiante Sheyla evidencia de que tiene rasgos del nivel 1, porque se relaciona con la característica 5 del nivel de comprensión según la teoría del modelo Van Hiele, porque ha dibujado los triángulos pero aún no analiza en término de sus elementos, sino por el contrario percibe de manera global.

Tomando en cuenta las respuestas de los tres estudiantes seleccionados y recordando las respuestas esperadas que eran las siguientes:

Los estudiantes construirán seis triángulos, tomando en consideración los puntos de la cuadrícula y considerarán como vértices los puntos de la cuadrícula.

Se concluye que los tres estudiantes han culminado construir el mínimo de triángulos que se ha solicitado, inclusive hubo dos de los estudiantes que construyeron triángulos uno más de lo que se ha solicitado, los puntos han sido considerandos como vértices, a partir de los cuales han trazado los tres segmentos para formar el triángulo.



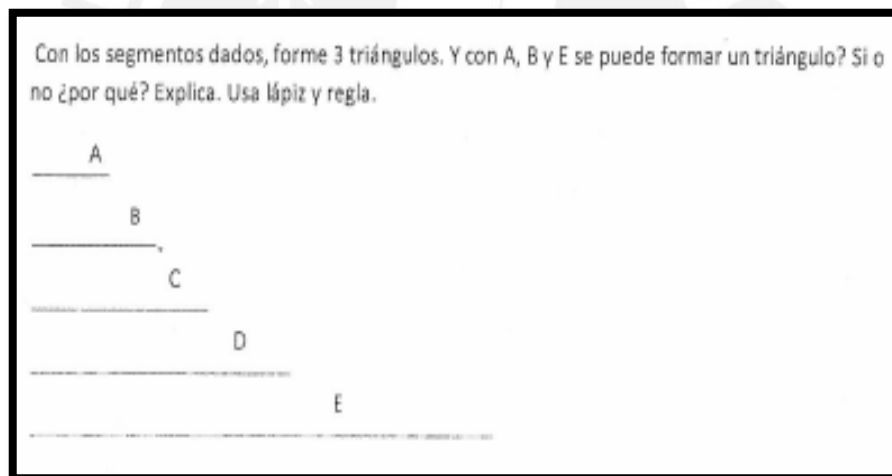
Luego referente a la contratación de las respuestas emitidas y las esperadas, podemos indicar que los tres respuestas emitidas que sí han coincidido con las respuestas esperadas.

### 5.3. Descripción de la implementación y de los resultados correspondientes a la sesión 2

#### Actividad 4

##### ❖ Descripción

Se inicia la sesión con el recuerdo de la clase anterior; luego se le entregó a cada estudiante una ficha de trabajo con las indicaciones correspondientes para el desarrollo de la actividad diseñada. Se entregó un lápiz y una regla de 20 cm a cada estudiante para que pudieran construir triángulos a partir de los segmentos mostrados en la figura 43.



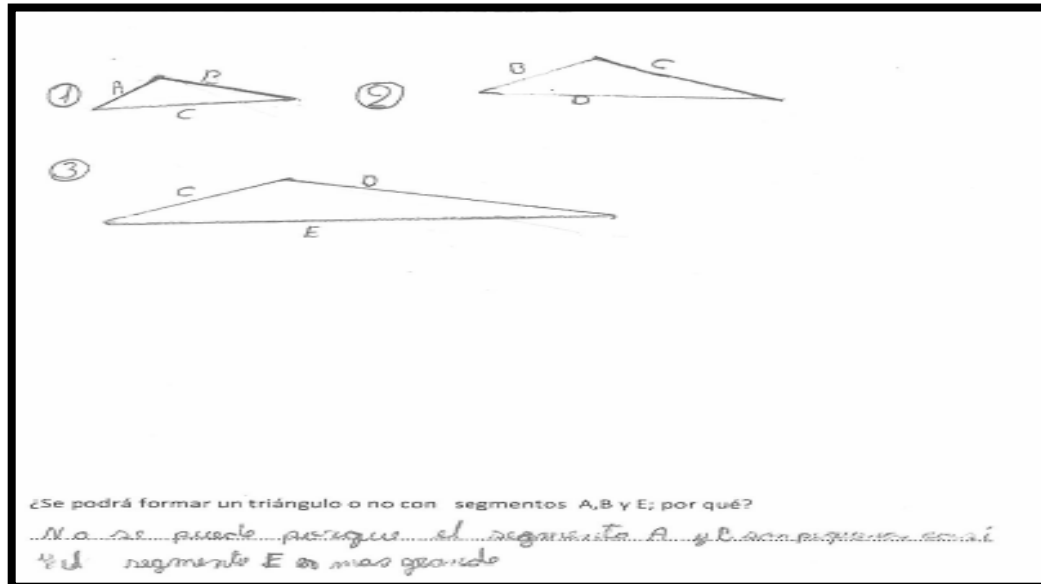
**Figura 43.** Actividad 4, segmentos para construir triángulos

**Fuente:** Creación propia

##### ❖ Presentación de los resultados a la actividad 4 y análisis de la respuesta.

Esta primera actividad de la segunda sesión ha tenido un promedio de duración de 40 minutos, para lo cual cada estudiante ha recibido una ficha de trabajo más un lápiz y una regla para que pudieran construir o formar tres triángulos con los segmentos dados, a sí mismo se le indica que si se puede construir un triángulo con los segmentos A, B y E y justifica su respuesta. La ficha lleva por nombre: Construyendo triángulos.

En primer lugar, se presenta la respuesta del estudiante Elmer en la figura 44 para su análisis correspondiente. El referido estudiante construyó tres triángulos que se ha solicitado con los segmentos dados de la siguiente manera:



**Figura 44.** Respuesta del estudiante Elmer a la actividad 4

El estudiante Elmer construyó los tres triángulos que se ha solicitado con los segmentos dados de la siguiente manera:

El triángulo 1 lo construyó con los segmentos A, B, y C; el triángulo 2 lo construyó con los segmentos B, C y D; y el triángulo 3 los construyó con los segmentos C, D y E.

Para lo cual, primero midió los segmentos y trató de encajar cada uno de los segmentos para formar cada uno de los triángulos pedidos.

Referente a la segunda pregunta que si podría o no construirse un triángulo con los segmentos A, B y E, el estudiante refiere que no se puede construir porque los segmentos A y B, son pequeños y el segmento E es grande. Aunque no trató de construirlo, advirtió que no sería posible hacerlo. Por lo tanto, por los resultados emitidos por el estudiante referente a la actividad en mención se evidencia que tiene rasgos que se relaciona con el nivel 1 del razonamiento (característica 6), porque aún no reconoce los triángulos en función de las propiedades matemáticas, es decir no coincide con una propiedad matemática del triángulo que tiene tres segmentos, tres vértices y tres ángulos.

A continuación, tenemos la respuesta de la actividad del estudiante José Ángel, quien ha construido tres triángulos de acuerdo a las indicaciones correspondientes; además ha tenido que valerse de sus aprendizajes previos para poder graficar los triángulos a partir de los

segmentos dados que por cierto ha tenido que medir para poder construir los triángulos que han sido solicitados para efectos de la investigación del objeto de estudio. Su respuesta se presenta en la Figura 45.

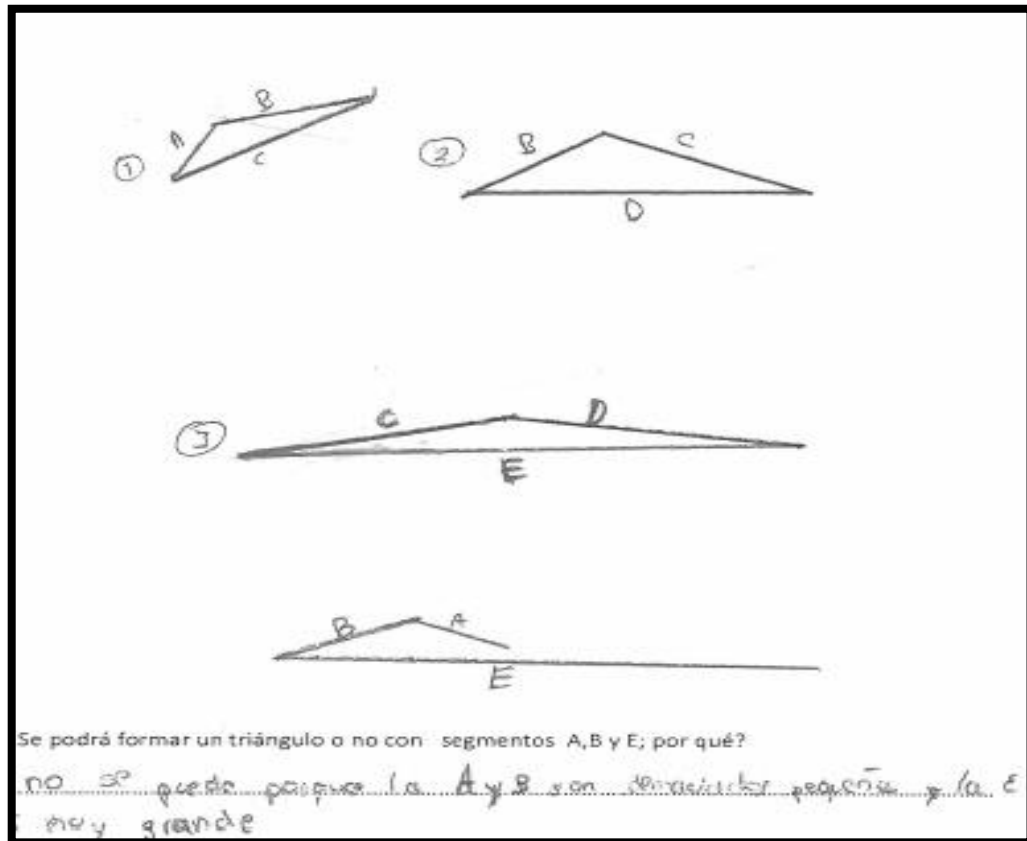


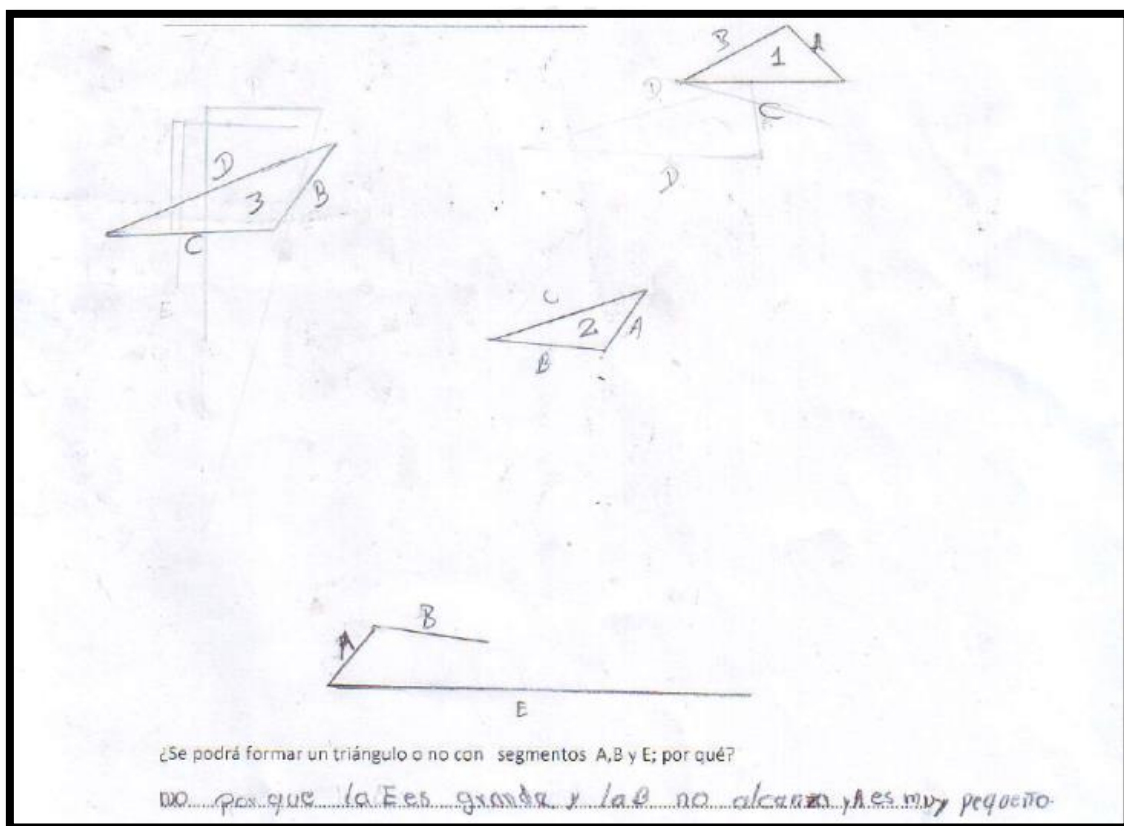
Figura 45. Respuesta del estudiante José Ángel a la actividad 4

En el sentido estricto, notamos que el segmento A ha sido trasladado para formar el triángulo 1 pero sin respetar su longitud, porque no ha tomado la medida del segmento A dado. El triángulo 2 fue construido a partir de los segmentos B, C y D; pero no emite ningún juicio sobre el particular, por lo que se acepta que se puede formar un triángulo a partir de tres segmentos. Pero realmente ¿se podrá construir un triángulo con cualquier segmento? Para ello, se preguntó si se podría construir un triángulo con los segmentos A, B y E dados, respecto al cual el estudiante trata en lo posible construir el triángulo; sin embargo, llega a una conclusión que no se puede construir porque los segmentos A y B son muy pequeños y el segmento E es muy grande. Por consiguiente, por los resultados emitidos y el análisis correspondiente de la respuesta dada por el estudiante, presenta evidencias de que tiene rasgos del nivel 1 y se relaciona con la característica 6 del nivel de comprensión del razonamiento

según el modelo Van Hiele, porque aún no reconoce el triángulo en función de sus propiedades en forma explícita.

Por otro lado, tenemos la respuesta de la estudiante Sheyla quien construyó tres triángulos a partir de los segmentos dados. Para su construcción ha tenido que recurrir a sus saberes previos, es decir, concepto y elementos de un triángulo; Así mismo se ha solicitado que si se podía dibujar un triángulo o no con los segmentos A, B y E a su vez tenía que justificar su respuesta.

A continuación se muestra el resultado de la actividad 1 en la Figura 46.



**Figura 46.** Respuesta a la actividad 4 de la estudiante Sheyla

La referida estudiante ha dibujado dos triángulos (1 y 2) con los mismos segmentos dados A, B y C pero no tomó en cuenta la medida exacta del segmento A de la muestra. En cambio en la construcción del triángulo 3 sí tomó en consideración la medida de los tres segmentos tal como corresponde. La estudiante sí construyó triángulos pero aún no puede construir cuando se le da con las medidas, de ahí la pregunta de que sí podría construirse un triángulo con cualquier segmento, para lo cual se le pide que sí podría o no construir un triángulo con los segmentos A, B y E. Frente a esta pregunta la estudiante dijo que no se puede construir un

triángulo porque el segmento E es grande y el segmento B no alcanza y el segmento A es muy pequeño, según afirma la referida estudiante. Sin embargo, aún no explica cuando un triángulo se puede construir o no. Al igual que sus compañeros, con este caso particular, los estudiantes notan que no es suficiente tener 3 segmentos para construir un triángulo. Debe exigirse alguna condición adicional; sin embargo, estos alumnos todavía no identifican dicha condición.

Al contrastar las respuestas esperadas y las emitidas por la estudiante Sheyla podemos indicar que no coinciden porque los triángulos 1 y 2 no han sido construidos según la longitud de los segmentos dados. En esa medida la respuesta emitida por la estudiante Sheyla presentan evidencias de que tiene rasgos del nivel 1 del razonamiento (característica 5), porque no analiza el triángulo en término de los elementos, sino por el contrario percibe de manera global, como una unidad.

## Actividad 5

### ❖ Descripción

Se entregó una ficha a cada estudiante, luego se hizo las explicaciones correspondientes para el desarrollo de la actividad indicada para que puedan asociar las propiedades de la columna de la derecha con los tipos de los triángulos que están en la columna de la izquierda. Sin embargo, para poder resolver esta actividad necesariamente los estudiantes debieron conocer los conceptos básicos de los triángulos referentes a sus elementos, propiedades y las clasificaciones correspondientes, solo así podían responder a las preguntas de la actividad referida, para el desarrollo de la actividad se dio 35 minutos aproximadamente. Para lo cual presentamos la siguiente Figura 47, para que puedan establecer la relación con los tipos y propiedades de los triángulos.

Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad o propiedades que le correspondan.

Tiene un ángulo de 90 grados.	Triángulo escaleno
Tiene tres lados iguales.	Triángulo equilátero
Tiene dos ángulos iguales.	Triángulo isósceles
Tiene un ángulo obtuso.	Triángulo acutángulo
Tiene tres ángulos iguales.	Triángulo rectángulo
Tiene sólo dos lados iguales.	Triángulo obtusángulo
Tiene todos sus ángulos desiguales.	

Podrás construir un triángulo con tres segmentos de longitudes 3cm, 3cm y 6cm? Explica

**Figura 47.** Característica y tipos de triángulos  
Fuente: Creación propia

❖ **Presentación de los resultados a la actividad 5 y análisis de las respuestas.**


Como evidencia presentamos el resultado del desarrollo de la actividad del estudiante Elmer; para cuyo efecto ha puesto de manifiesto sus aprendizajes previos para poder relacionar las propiedades con el tipo de triángulo que se muestra en la Figura 48.

Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad o propiedades que le correspondan.

- Tiene un ángulo de 90 grados
- Tiene tres lados iguales
- Tiene dos ángulos iguales
- Tiene un ángulo obtuso
- Tiene tres ángulos iguales
- Tiene sólo dos lados iguales
- Tiene todos sus ángulos desiguales.

- Triángulo escaleno
- Triángulo equilátero
- Triángulo isósceles
- Triángulo acutángulo
- Triángulo rectángulo
- Triángulo obtusángulo

¿Podrás construir un triángulo con tres segmentos de longitudes 3cm, 3cm y 6cm? Explicalo.



*si porque los dos lados de 3 cm son iguales y el otro es de 6cm es como si fuera el doble del otro*

Figura 48. Respuesta a la actividad 5 del estudiante Elmer

El referido estudiante ha podido relacionar cuatro respuestas correctas, aún presenta algunas dificultades del conocimiento de los tipos de triángulos, quizá porque en los grados inferiores han desarrollado pocas actividades concernientes con el tema de triángulos. Sin embargo, cabe resaltar que el estudiante tuvo mayor acierto en relación a los otros dos estudiantes, porque reconoce a los triángulos equilátero, isósceles, como también al triángulo obtusángulo y al triángulo rectángulo por las características que le corresponde a los triángulos mencionados.

Ahora referente a la interrogante que si se podría construir un triángulo con tres segmentos de longitudes 3cm, 3cm y 6cm; ha referido que sí se podía construir un triángulo porque que 3cm y 3cm equivalen a 6cm, así como se muestra en la respuesta del indicado estudiante. Cuando contrastamos los resultados esperados con las respuestas obtenidas podemos indicar que no se ha cumplido. Por eso, dado las evidencias del caso del resultado emitido por el

estudiante presenta indicios del nivel 1 que se relaciona con la característica 7 porque puede reconocer tipos de triángulos como equilátero, isósceles entre otros, pero aún no explica sus características correspondientes.


A continuación tenemos el resultado de la actividad del estudiante José Ángel quien, pese a haber intentado encontrar relaciones entre ambas columnas, no tuvo éxito, como se observa en la Figura 49.

NOMBRES Y APELLIDOS: Saso Angel Pisco Jacinto

Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad o propiedades que le correspondan.

· Tiene un ángulo de 90 grados.	Triángulo escaleno
· Tiene tres lados iguales.	Triángulo equilátero
· Tiene dos ángulos iguales.	Triángulo isósceles
· Tiene un ángulo obtuso.	Triángulo acutángulo
· Tiene tres ángulos iguales.	Triángulo rectángulo
· Tiene sólo dos lados iguales.	Triángulo obtusángulo
· Tiene todos sus ángulos desiguales.	

¿Podrás construir un triángulo con tres segmentos de longitudes 3cm, 3cm y 6cm? Explicalo.



si se puede porque de la base se saca la mitad

**Figura 49.** Respuesta del estudiante José Ángel a la actividad 5

El referido estudiante apenas relacionó una sola respuesta correcta, reconoce al triángulo obtusángulo y aún le falta reconocer los otros tipos de triángulos como equilátero, isósceles entre otros que son muy conocidos en el contexto de las matemáticas en educación primaria; además demuestra en su trabajo que hay bastante duda para poder relacionar.

En cuanto a la interrogante que si podría construir un triángulo con las medidas de 3cm, 3cm y 6 cm manifiesta que sí se puede construir inclusive lo ha dibujado según su imaginación, que las medidas eran exactas para un triángulo, lo cual es totalmente incorrecto porque no se puede construir un triángulo con las medidas dadas. Por consiguiente, la respuesta dada por



este estudiante presenta indicios de que tiene rasgos de nivel 1 que se relaciona con la característica 7 del nivel de razonamiento del modelo Van Hiele, porque puede reconocer al menos un tipo de triángulo, pero aún no explica sus características correspondientes.

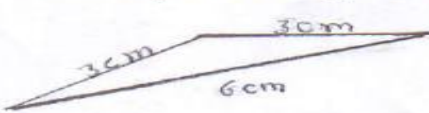
Por otro lado, tenemos el resultado de la estudiante Sheyla, quien previamente ha leído el contenido de la actividad para poder asociar en forma correcta. Sin embargo, aún le falta tener información sobre el tema de tipos y propiedades de los triángulos en particular. Luego presentamos el resultado de la estudiante a través de la Figura 50.

NOMBRES Y APELLIDOS: Sheyla Rosilene Yucra Casa

Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad o propiedades que le correspondan.

· Tiene un ángulo de 90 grados.	→	Triángulo escaleno
· Tiene tres lados iguales.	→	Triángulo equilátero
· Tiene dos ángulos iguales.	→	Triángulo isósceles
· Tiene un ángulo obtuso.	→	Triángulo acutángulo
· Tiene tres ángulos iguales.	→	Triángulo rectángulo
· Tiene sólo dos lados iguales.	→	Triángulo obtusángulo
· Tiene todos sus ángulos desiguales.	→	

¿Podrás construir un triángulo con tres segmentos de longitudes 3cm, 3cm y 6cm? Explicalo.



Si, por que si 3cm, 3cm si da y 6cm tambien da.

**Figura 50.** Respuesta de la estudiante Sheyla, a la actividad 5

La referida estudiante manifiesta solo reconocer al triángulo equilátero y al triángulo obtusángulo y al resto de los triángulos no ha llegado a identificar. Ahora referente a la pregunta que si podría construir un triángulo con las medidas dadas, expresa que sí se puede construir porque las medidas dan exactamente inclusive lo ha dibujado, lo cual no es correcto desde el punto de vista matemático, porque no cumple con la propiedad matemática ya que el

triángulo está formado por tres vértices tres segmentos y tres ángulos. Las respuestas obtenidas difieren de las esperadas, esto ocurre porque el nivel de comprensión de la referida estudiante aún no se relaciona con las características del nivel 2 de comprensión, lo cual nos hace suponer que la referida estudiante respecto a su respuesta presenta indicios del nivel 1 característica 7 porque puede reconocer solo los triángulos equilátero y obtusángulo, pero aún no explica sus características correspondientes del nivel de razonamiento del modelo teórico con el cual venimos trabajando en nuestra investigación.

#### **5.4 Descripción de la implementación y de los resultados correspondientes a la sesión 3.**

##### **Actividad 6 con el uso del GeoGebra en la exploración del objeto de estudio.**

###### **❖ Descripción**

Esta actividad de la tercera sesión de aplicación de los instrumentos de investigación del objeto de estudio se ha realizado haciendo uso del software de GeoGebra. Dado que los estudiantes que participan de la investigación no tenían conocimiento del programa de la geometría dinámica. Se consideró impartir una clase introductoria sobre los conocimientos básicos sobre el uso del GeoGebra y su exploración correspondiente para que los estudiantes pudieran utilizar adecuadamente esta herramienta en la exploración del objeto de estudio.

A sí mismo, se le entregó una ficha a cada estudiante con varias preguntas, así como se muestra en la Figura 51, para que pudieran registrar la información que obtendrían luego de la exploración.

Los resultados esperados del desarrollo de la actividad con el manejo del software de geometría dinámica en la exploración del objeto de estudio, que los estudiantes manipulen las herramientas como los puntos y segmentos y puedan construir el triángulo, además, deben cambiar de posiciones y aumentar y reducir el tamaño de los triángulos, los cuales no se realizan con lápiz y papel, entonces el uso del GeoGebra es muy importante porque también apoya en el aprendizaje de los contenidos geométricos, en este caso ha coadyuvado en la exploración del objeto triángulo. Además reconozcan y muestren algunas características y propiedades de los triángulos cuando trabajan con el GeoGebra.

ACTIVIDADES CON SOFTWARE DE GEOGEBRA

1.-Se realizará una clase introductoria acerca del uso del programa de Geogebra, con los estudiantes del sexto grado.

2.-Construye triángulos y cambia de posiciones, coloca sus medidas de longitud de los segmentos y la medida de los ángulos.

a) Construye un triángulo que tenga tres lados iguales, indica cuánto suman sus tres ángulos.  
.....

b) Construye un triángulo que tenga dos lados iguales, encuentra la medida de sus ángulos.  
.....

¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales?.....

c) Construye un triángulo que tenga tres lados distintos y suma la medida de sus ángulos.  
.....

¿Encuentras alguna similitud o diferencia en la medida de los ángulos interiores de los triángulos?  
.....

3.-Construye triángulos con las siguientes medidas.

a) 2cm, 2cm y 4cm  
.....

b) 3cm, 3cm y 1cm  
.....

¿Con cuál de las medidas no se puede construir un triángulo, por qué?  
.....

¿Se podrá construir triángulos con cualquiera de las medidas? Si o no, explica.  
.....

**Figura 51.** Preguntas de la actividad con GeoGebra

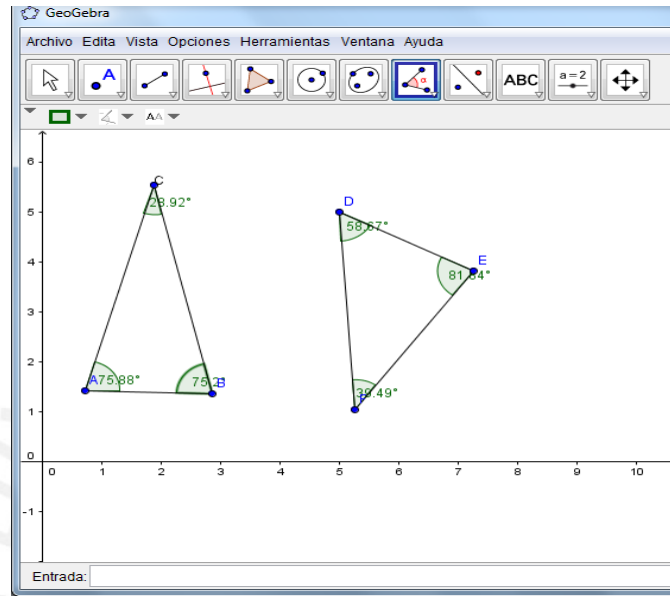
**Fuente:** Creación propia

❖ **Presentación del resultado de la actividad y el análisis de los resultados.**

El objetivo de la actividad ha sido usar las herramientas del software de geometría dinámica para construir triángulos en diferentes posiciones con sus elementos correspondientes así como determinar medidas tanto de los segmentos como de los ángulos. Los estudiantes mostraron poseer una gran habilidad en este aspecto y lograron familiarizarse muy rápidamente con las herramientas como son los puntos segmentos entre otros de geometría dinámica. Según íbamos indicando, los estudiantes construían los puntos, segmentos y los unían para luego formar un triángulo. Después de ubicar los tres puntos trazaron tres segmentos para formar un triángulo y luego realizaron cambios de posición y han tomado los vértices y los segmentos para aumentar y disminuir el tamaño de los triángulos. Es decir, manejaron varias estrategias para construir triángulos, lo cual no se hace con lápiz y papel; luego midieron la longitud de los segmentos así como los ángulos, con la herramienta medida

de ángulo para obtener la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo. Así como se muestra los resultados del trabajo de los estudiantes en las fichas correspondientes.

En primer lugar presentamos el resultado de la actividad realizada por el estudiante Elmer a través de la siguiente Figura 52.



**Figura 52.** Respuesta de Elmer a la actividad con GeoGebra.

El uso del GeoGebra en la exploración del objeto de estudio del referido estudiante tuvo aspectos importantes, porque muy rápidamente logró incursionar y relacionarse con el software del GeoGebra, a través del uso de las herramientas como el punto, los segmentos entre otros en la construcción de los triángulos. A medida que íbamos dando las preguntas con cierta facilidad manejaba y daba respuestas sobre todo en la construcción de los triángulos, el estudiante hacía los cambios de posición, aumentaba y reducía el tamaño de los triángulos a partir de los vértices. Como se puede apreciar en la Figura 52, el estudiante ha construido dos triángulos, puso la medida de los ángulos interiores, llegó a obtener que midiera  $180^\circ$ . Encontró de esta manera una de las propiedades de los triángulos. También asignó la medida de los lados. Por consiguiente, la respuesta dada por Elmer presenta evidencias de que este estudiante tiene rasgos del nivel 2 característica 1 del razonamiento del modelo teórico; porque ha encontrado la suma de los ángulos interiores que es de  $180^\circ$ , el cual corresponde a una de las propiedades de un triángulo. Además se relaciona con las respuestas que nosotros habíamos descrito con anterioridad para el caso de la actividad del uso de la geometría dinámica y la exploración del objeto triángulo, como se muestra en la Figura 53.

ACTIVIDADES CON SOFTWARE DE GEOGEBRA

1.-Se realizará una clase introductoria acerca del uso del programa de Geogebra, con los estudiantes del sexto grado.

2.-Construye triángulos y cambia de posiciones, coloca sus medidas de longitud de los segmentos y la medida de los ángulos.

a) Construye un triángulo que tenga tres lados iguales, indica cuánto suman sus tres ángulos.  
..... $180^\circ$ .....

b) Construye un triángulo que tenga dos lados iguales, encuentra la medida de sus ángulos.  
..... $180^\circ$ .....

¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales?.....

c) Construye un triángulo que tenga tres lados distintos y suma la medida de sus ángulos.  
..... $180^\circ$ .....

¿Encuentras alguna similitud o diferencia en la medida de los ángulos interiores de los triángulos?  
.....*medida igual*.....

3.-Construye triángulos con las siguientes medidas.

a) 2cm, 2cm y 4cm

b) 3cm, 3cm y 1cm

¿Con cuál de las medidas no se puede construir un triángulo, por qué?  
.....*no sale*.....

¿Se podrá construir triángulos con cualquiera de las medidas? Si o no, explica.  
.....*si se puede porque saldrá un triángulo*.....

Figura 53. Respuesta de Elmer a la actividad con GeoGebra.

Por otro lado, analizaremos el trabajo de José Ángel. Podemos indicar que con cierta facilidad empezó a manipular las herramientas para construir los triángulos, cambió de posición entre otras actividades relacionadas al objeto de estudio, así como se muestra en la Figura 54.

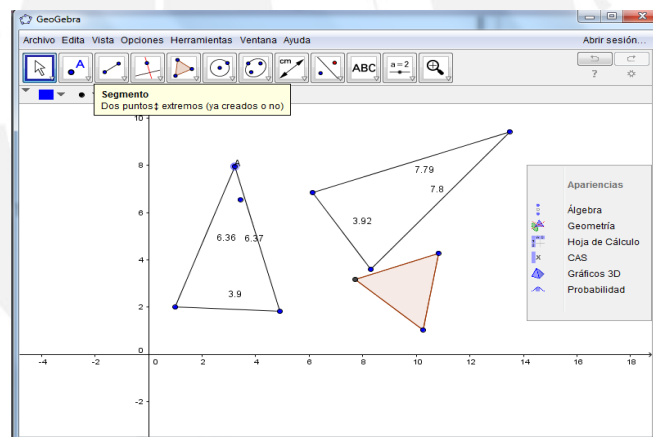


Figura 54. Respuesta a la actividad con GeoGebra de José Ángel

El referido estudiante José Ángel ha construido triángulos usando puntos y segmentos, triángulos que se encuentran en diferentes posiciones en similares condiciones a la Figura 54, ha tomado la medida de los lados; pudo aumentar y reducir de tamaño a partir del vértice, este tipo de movimiento no se hace con lápiz y papel. A continuación se muestra los resultados escritos en la Figura 55.

ACTIVIDADES CON SOFTWARE DE GEOGEBRA

1.-Se realizará una clase introductoria acerca del uso del programa de Geogebra, con los estudiantes del sexto grado.

2.-Construye triángulos y cambia de posiciones, coloca sus medidas de longitud de los segmentos y la medida de los ángulos.

a) Construye un triángulo que tenga tres lados iguales, indica cuánto suman sus tres ángulos.  
..... $180^\circ$ .....

b) Construye un triángulo que tenga dos lados iguales, encuentra la medida de sus ángulos.  
..... $180^\circ$ .....

¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales?.....*isósceles*.....

c) Construye un triángulo que tenga tres lados distintos y suma la medida de sus ángulos.  
..... $180^\circ$ .....

¿Encuentras alguna similitud o diferencia en la medida de los ángulos interiores de los triángulos?  
.....*si se puede formar triángulos*.....

3.- Construye triángulos con las siguientes medidas.

a) 2cm, 2cm y 4cm

b) 3cm, 3cm y 1cm

¿Con cuál de las medidas no se puede construir un triángulo, por qué?  
.....*Toda se puede formar triángulos*.....

¿Se podrá construir triángulos con cualquiera de las medidas? Si o no, explica.  
.....*si se puede formar triángulos*.....

**Figura 55.** Respuesta a la actividad con GeoGebra José Ángel

El referido estudiante José Ángel pudo responder a las actividades encargadas y plasmarlos en la hoja correspondiente; así mismo, llegó a colocar las medidas de los lados y de los ángulos, donde la suma de los tres ángulos interiores de cada uno de los triángulos construidos resultaba  $180^\circ$  entonces se pudo mostrar una de las propiedades de los triángulos. Por lo tanto, frente a la respuesta emitida por el estudiante José Ángel podemos indicar que presenta indicios de nivel 2 característica 1; porque los triángulos están formados por elementos y que están dotados de propiedades matemáticas según las características definidas del nivel de razonamiento del modelo Van Hiele.

Por otro lado, tenemos el resultado de la actividad seis emitido por la estudiante Sheyla a través de la Figura 56 quien ha usado el GeoGebra en la exploración del objeto de estudio, para lo cual ha seguido las indicaciones pertinentes, lo cual se traduce en las siguientes respuestas de la actividad correspondiente, como el uso de las herramientas tales como puntos, segmentos entre otros en la construcción del triángulo.

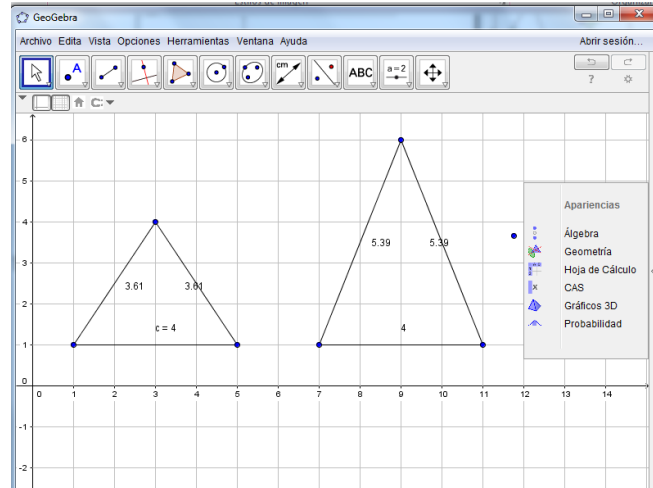


Figura 56. Respuesta de Sheyla a la actividad con GeoGebra

El GeoGebra como recurso didáctico ha permitido a la estudiante Sheyla a manipular las herramientas como los puntos y los segmentos para construir triángulos y cambiar de posiciones en menor tiempo posible entre otras actividades que coadyuvan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La estudiante pudo construir el triángulo isósceles, reconoce que tiene dos lados iguales. Igualmente se muestra los resultados en la Figura 57.

ACTIVIDADES CON SOFTWARE DE GEOGEBRA

- Se realizará una clase introductoria acerca del uso del programa de Geogebra, con los estudiantes del sexto grado.
- Construye triángulos y cambia de posiciones, coloca sus medidas de longitud de los segmentos y la medida de los ángulos.
  - Construye un triángulo que tenga tres lados iguales, indica cuánto suman sus tres ángulos.  
..... $1.80^\circ$ .....
  - Construye un triángulo que tenga dos lados iguales, encuentra la medida de sus ángulos.  
..... $1.80^\circ$ .....

¿Cómo se llama el triángulo que tiene dos lados iguales?.....*isósceles*.....

  - Construye un triángulo que tenga tres lados distintos y suma la medida de sus ángulos.  
..... $1.80^\circ$ .....

¿Encuentras alguna similitud o diferencia en la medida de los ángulos interiores de los triángulos?  
.....*todos... las... ángulos... del... triángulo... miden...  $180^\circ$* .....
- Construye triángulos con las siguientes medidas.
  - 2cm, 2cm y 4cm
  - 3cm, 3cm y 1cm

¿Con cuál de las medidas no se puede construir un triángulo, por qué?  
.....*Si se pueden construir con las dos medidas*.....

¿Se podrá construir triángulos con cualquiera de las medidas? Si o no, explica.  
.....*Si se pueden construir con cualquier medida*.....

Figura 57. Respuesta a la actividad con GeoGebra de la estudiante Sheyla

Seguimos en el proceso del análisis de la respuesta de la estudiante Sheyla en la exploración del objeto de estudio a través del uso de la geometría dinámica; debemos de reconocer también que la referida estudiante tuvo acceso al programa de GeoGebra sin ningún

inconveniente, siguió las indicaciones pertinentes pudo construir varios triángulos con distintas medidas de sus lados cambiando de posición a los triángulos construidos. A sí mismo, pudo mostrar la medida de los tres ángulos interiores y que la suma de los tres ángulos interiores era de  $180^\circ$ , resultado que brindó el programa a través de la suma automática del sistema. Dicha estudiante pudo conjeturar una propiedad a partir de la exploración previa. La respuesta dada por Sheyla presentan evidencias de que la estudiante tiene rasgos del nivel 2 que se relaciona con la característica 1 del nivel de comprensión según la teoría del modelo Van Hiele, que indica que los triángulos están formados por elementos y que están dotados de propiedades matemáticas, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de  $180^\circ$ .

Podemos indicar que el uso del GeoGebra como estrategia didáctica ha permitido en los estudiantes aprender a construir triángulos con tecnología con más velocidad y dinamismo, en ella se aumenta y se reduce de tamaño, el cual no se podía hacer con lápiz y papel. Este recurso permite además componer y descomponer figuras geométricas en menor tiempo y coadyuva en el proceso enseñanza y aprendizaje.

### **Resultados de la evolución en los niveles de comprensión**

A partir de los resultados anteriores, se ha construido la tabla 6 en donde se resume la evolución en los niveles de comprensión respecto al triángulo en los tres estudiantes considerados en nuestro trabajo de investigación.



**Tabla 6.** Descripción de los resultados de evolución en los niveles de comprensión

Actividad	Elmer	José Ángel	Sheyla
01	La respuesta a esta actividad indicó que puede haber alguna dificultad en reconocer la figura. Aún no presenta indicios de ningún nivel.	Su respuesta no permite ubicarle ni siquiera en el nivel 1, porque solo se basa en formas del entorno que se asocia a los triángulos.	Presenta señales incipientes del nivel 1 característica 2, porque hace referencia a prototipos visuales para caracterizar triángulos.
02	Muestra señales de nivel 1, característica 3. Porque al reconocer triángulos incluye atributos irrelevantes de tipo físico y visual.	Presenta evidencias de nivel 1, característica 3. Porque al describir triángulos incluye atributos irrelevantes.	Demuestra señales del nivel 1, característica 1, usa propiedades imprecisas para describir triángulos.
03	Presenta indicios del nivel 1 Característica 1. Porque al dibujar triángulos lo hace en una posición prototípica.	Manifiesta señales del nivel 1, característica 5. Reconoce los lados y vértices, pero percibe triángulos de manera global.	Presenta indicios del nivel 1, característica 5, reconoce lados y vértices, percibe de manera global.
04	Tiene rasgos de nivel 1, característica 6. Porque aún no reconoce propiedades matemáticas en forma explícita.	Presenta evidencias de que tiene rasgos del nivel 1, se relaciona con la característica 6 del nivel de razonamiento	Presentan rasgos de nivel 1 característica 6, aún no reconoce explícitamente las propiedades matemáticas.
05	Presenta indicios del nivel 1 que se relaciona con la característica 7 del nivel de razonamiento. Reconoce triángulos, pero aún no explica sus características.	Presenta indicios de que tiene rasgos de nivel 1, se relaciona con la característica 7 del nivel de razonamiento.	Presenta indicios del nivel 1 característica 7 del nivel de razonamiento. Reconoce algunos triángulos, pero aún no explica sus características del triángulo.
06	Tiene rasgos del nivel 2 característica 1 del razonamiento. Sabe que el triángulo tiene propiedades.	Presenta indicios de nivel 2 característica 1. Sabe que el triángulo tiene propiedades matemáticas.	Tiene señales del nivel 2 que se relaciona con la característica 1 del nivel de comprensión

A partir del análisis realizado, concluimos que el estudiante Elmer ha presentado señales de una evolución en su nivel de comprensión del objeto triángulo ya que al inicio tuvo una dificultad en reconocer la figura triángulo, aún no presentaba indicios de ningún nivel; pero, luego del proceso de instrucción mostró que presentaba la evolución del nivel de comprensión al nivel de los otros dos estudiantes; es así que llegó a presentar indicios de nivel 2 de razonamiento.

A sí mismo, a partir del análisis realizado podemos concluir que el estudiante José Ángel ha mostrado señales de evolución del nivel de comprensión, ya que al inicio de la actividad tuvo alguna dificultad en reconocer la figura, porque aún no reconocía las características de un triángulo y luego del proceso de la instrucción mostró indicios de evolución al nivel 2 de razonamiento geométrico.

También la estudiante Sheyla presenta indicios de evolución en su nivel de comprensión, porque al comienzo ya mostraba rasgos de nivel 1 de comprensión y en el proceso de la aplicación de las actividades de la propuesta didáctica concurre para promover comprensiones acerca del objeto matemático; presenta rasgos del nivel 2 de razonamiento según el modelo Van Hiele.

## CONCLUSIONES

Nuestro trabajo se ha realizado en el marco de la investigación de carácter cualitativo a través de la metodología del estudio de casos; sustentada en la teoría del modelo Van Hiele. Se ha llegado a algunas conclusiones durante el proceso de la investigación acerca del objeto de estudio, las que presentamos asociadas a cada objetivo.

### **Respecto al primer objetivo específico:**

“Redefinir las características de los dos primeros niveles de comprensión del objeto triángulo propuestas por Corberán, de modo que sea explícito lo que un estudiante debe hacer para ser ubicado en un determinado nivel”.

Como resultado de la redefinición de las características de los dos niveles de comprensión llegamos a las siguientes conclusiones:

1. La redefinición de las características de los dos primeros niveles de comprensión ha permitido reconocer los niveles de razonamiento de los estudiantes involucrados en la investigación.
2. La definición de los niveles permitirá ubicar con más precisión los desempeños de los estudiantes en uno u otro nivel.

### **Respecto al segundo objetivo específico:**

“Identificar en qué medida la aplicación de la propuesta didáctica ha favorecido la evolución en los niveles de Van Hiele de la comprensión del objeto triángulo”

Como resultado de la aplicación de la propuesta didáctica en la comprensión del objeto triángulo, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1. La aplicación de la propuesta didáctica ha permitido la evolución del nivel de comprensión de los estudiantes Elmer, José Ángel y Sheyla que son los sujetos de investigación en lo referente al objeto de estudio. Pero al empezar la aplicación de la propuesta didáctica dos de los estudiantes no mostraban siquiera estar en el nivel 1, porque aún no tenían conocimientos sobre el objeto de estudio. Sin embargo, en el transcurso de las actividades han ido evolucionando en su nivel de comprensión sobre el objeto de estudio. Por ello, uno de los estudiantes presenta rasgos de nivel 2 de comprensión, según el modelo Van Hiele

2. Los resultados emitidos por los sujetos investigados muestran que la propuesta didáctica está debidamente estructurada para estudiantes de 6° grado de educación primaria. Prueba de ello, es que presentan indicios de evolución al nivel 2 del razonamiento geométrico.

**Respecto al tercer objetivo específico:**

“Describir en qué medida el uso del GeoGebra en algunas de las actividades propuestas propició la adquisición de un nivel de razonamiento superior.”

A continuación indicamos las conclusiones a los que hemos arribado:

1. El uso de la geometría dinámica en la aplicación de algunas actividades del objeto de estudio ha permitido explorar el objeto de estudio con mayor facilidad en el aprendizaje de las características del triángulo.
2. Los estudiantes, usando GeoGebra, tienen más posibilidades de explorar el objeto de estudio; inclusive, pueden ir a encontrar regularidades, que luego permitan elaborar conjeturas.

Finalmente, en cuanto al objetivo general de nuestro trabajo de investigación:

“Analizar cómo evoluciona el nivel de razonamiento respecto al objeto triángulo en estudiantes del sexto grado de educación primaria a través de una propuesta didáctica basada en el modelo Van Hiele”.

Los resultados y el análisis del estudio de la evolución del nivel de comprensión del objeto triángulo en los estudiantes del sexto grado de educación primaria nos permiten afirmar que este objetivo se ha cumplido, porque los resultados emitidos a través del desarrollo de las actividades por los estudiantes presentan indicios de evolución del nivel de razonamiento con respecto al objeto de estudio. Además, el desarrollo de las actividades de los objetivos específicos se ha realizado en función del objetivo general.

Debemos referir que, al inicio de la aplicación de las actividades de la propuesta didáctica, dos de los estudiantes ni siquiera estaban en el nivel 1. Sólo uno de los estudiantes mostraba inicialmente indicios de nivel 1. Pero, a medida del desarrollo de las actividades, los estudiantes dan muestras de evolución del nivel de razonamiento. Finalmente, presentan rasgos de evolución del nivel 2, al que hemos querido arribar en nuestro trabajo de investigación, porque nuestros estudiantes investigados han logrado asimilar conocimientos sobre las características del objeto de estudio.

### **Recomendaciones respectivas futuras**

La aplicación de los instrumentos de investigación debe ser con mayor tiempo posible para ver los resultados de la evolución del nivel de comprensión de los estudiantes referente al objeto de estudio.

Elaborar más actividades relacionadas a los contenidos geométricos según el ciclo de estudios, o sino también se pueden adaptar los contenidos geométricos al grado de estudios en el momento de la aplicación de los instrumentos de la investigación.

Diseñar actividades que presenten la consolidación del nivel 2 y evolucionar hacia los niveles superiores.

Realizar estudios de investigación con mayor número de estudiantes para poder observar diferentes respuestas luego de la aplicación de los instrumentos de investigación.

Elaborar una propuesta didáctica con contenidos geométricos para estudiantes de educación primaria según el modelo Van Hiele, para coadyuvar en el proceso enseñanza y aprendizaje de la geometría plana.

Es importante que haya aula piloto para facilitar la preparación de los instrumentos, para que la aplicación con los sujetos de investigación sea más precisa, especialmente en la obtención de los resultados.

Finalmente deseo que los profesores tengamos que incursionar en la tarea de la investigación sobre todo en la educación y en pedagogía que tanto necesita nuestra sociedad.

## REFERENCIAS

- Almoloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didáctica da Matemática*. Paraná: Universidade Federal Do Curitiba.
- Artigue, M., Douady R., Moreno, L. (2000). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes
- Benbasat, I., Goldstein, D.K. and Mead, M. (1987) *The Case Research Strategy in Studies of Information Systems*, MISQ, 11, 3, 369-386.
- Bernardis, S. y Moriena, S. (2008). *ICME II the International Congress on Mathematical Education*. Recuperado de <http://icmeII.org/node/1253>.
- Berritzegune, F. (2001). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*. Recuperado el 11 de diciembre del 2009, de <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/testuakonline/04-05/pg-04-05-fouz.pdf>
- Bispo, J. (2012). *As construções Geométricas ea Gênes e Instrumental: o caso da mediatriz*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.
- Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Fundamentos da investigação qualitativa em educação: uma introdução*. Porto.
- Blanco, V. y Barrantes, M. (2003). *Sobre la geometría escolar y su enseñanza aprendizaje. Concepciones de los estudiantes para Maestro en España*. Relime. (vol. 6, pp.107-132).
- Borba, M. (2010). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. São Paulo: Autentica
- Cook, T. y Reichardt, C. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata.
- Corberán, R. Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). “*Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la Enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele*”. C.I.D.E.,
- De la Torre, A. (2003). *El método socrático y el Modelo de Van Hiele*. Lecturas matemáticas, (vol. 26, pp. 99-121)
- Guillen, S. (2004). *El Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática*. Educación Matemática, (vol.16, pp.103-125).
- Godino, J. (2004). *Matemáticas para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado de: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edmuat-maestros/>.Granada.
- Goetz, J. & Le Compte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.
- Guimarães, H. M. (1988). *Ensinar matemática: Concepções e práticas* (Tesis de Maestría), Universidad de Lisboa. Lisboa: APM.

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo Van Hiele: La enseñanza de las isometrías. La evaluación del nivel de razonamiento.* (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, W. (2009). *Niveles de pensamiento alcanzados en situaciones didácticas relativas al concepto de semejanza de triángulos haciendo uso de la geometría dinámica.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Hernández, R. (2010). *Metodología de la investigación.* Interamericana. Editores. Quinta edición: México.
- Jaime P. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo van hiele: La enseñanza de las isometrías del plano: la evaluación del nivel de razonamiento.* Valencia 1993.
- Kilpatrick, J. (1988). *Change and stability in research in mathematics education.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5, 202-204.
- Lastra, S. (2005). *Propuesta Metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas.* (Tesis de Maestría). Universidad de Chile.
- Merriam, S. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education.* 2. ed. Jossey-Bas Inc.
- Moise, E. y Downs, F. (1966). *Geometría Moderna.* Addison-Wesley Iberoamericana, Massachusetts, EE.UU.
- National Council of teache of Mathematic (2000). *Principles and standard for school mathematics.* NCTM. Reston, EEUU.
- Patricio, P. (2010). *El modelo de razonamiento de van Hiele como marco para el aprendizaje de los conceptos de mediatriz y circuncentro en estudiantes de tercero de secundaria utilizando el GeoGebra.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Perú, *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú* (2009).Lima. Recuperado de <http://www.minedu.gob.pe/>
- Ponte, J. (2006). *Estudo de Caso em Educação Matemática.* Boletim de Educação Matemática, vol. 19 (25).
- Rico, L. y Sierra, M. (1994). *Educación matemática en la España del siglo XX.* En J. Killpatrick, L Rico y M Sierra. Educación matemática e investigación. (pp, 99-207) Madrid.
- Yin, R. (1994). *Estudo de caso: planejamento e métodos.* Porto Alegre.
- Yin, R. (1984). *Case study research: design and methods, applied social research methods series, Newbury Park, C.A.* Sage.

## ANEXOS

### SOLUCIONES DE LAS TAREAS PROPUESTAS

#### Tarea propuesta

Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras. Indica aquellas que no son triángulos. Justifica en cada caso.



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6



fig. 7



Fig. 8



Fig.9

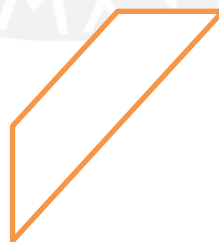


Fig.10



Fig.11



**Solución.**

La figura 6 del recuadro es el único triángulo, pues tiene tres lados, es cerrada, tiene tres ángulos y tres vértices.

**Tarea propuesta.**

Observan los siguientes triángulos, ¿en qué se diferencian y en qué se parecen?

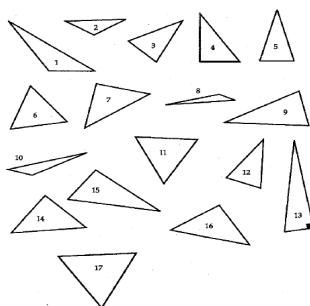


Figura: Triángulos

Fuente: Corberán (1994, p.67)

**Solución.**

Las figuras que se muestran todas son triángulos porque tienen tres lados, tres vértices, tres ángulos y están cerradas.

**Tarea propuesta**

Construye diferentes triángulos, por ejemplo con ángulos de 30, 60 y 90 grados. Utiliza instrumentos de dibujo adecuados.

**Tarea propuesta**

Asocia a cada tipo de triángulo la propiedad o propiedades que le correspondan:

- |                                       |   |                        |
|---------------------------------------|---|------------------------|
| • Tiene un ángulo de 90 grados.       | — | —Triángulo escaleno    |
| • Tiene tres lados iguales.           | — | —Triángulo equilátero  |
| • Tiene dos ángulos iguales           | — | —Triángulo isósceles   |
| • Tiene un ángulo obtuso.             | — | —Triángulo acutángulo  |
| • Tiene tres ángulos iguales.         | — | —Triángulo rectángulo  |
| • Tiene solo dos lados iguales        | — | —Triángulo obtusángulo |
| • Tiene todos sus ángulos desiguales. | — |                        |

Y también se le presentan cuestiones como las que siguen:

¿Podrás construir un triángulo con tres segmentos de longitudes 3; 3 y 6 cm? Explícalo.

Solución.

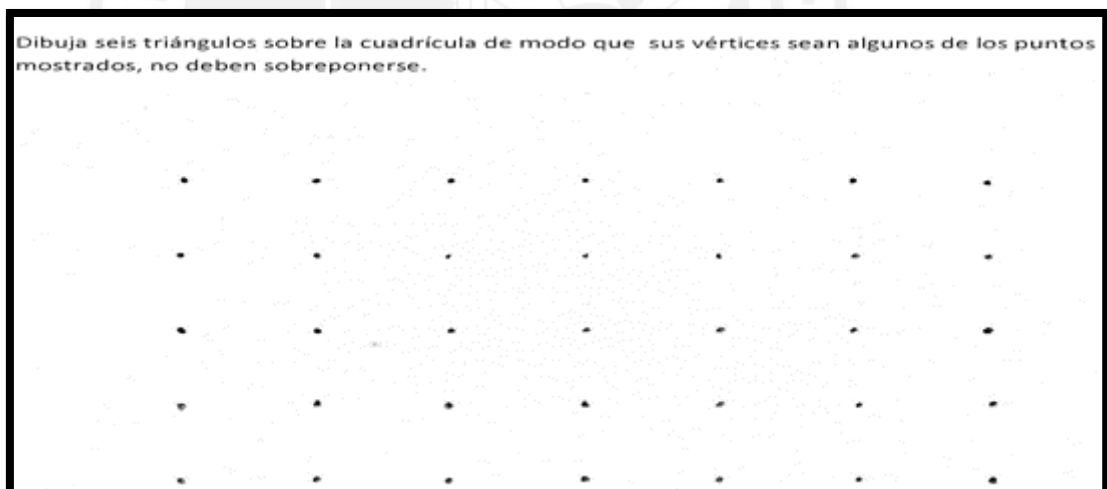
Con las medidas que se dan 3cm ,3cm y 6cm, No se puede construir un triángulo, por que la suma de la medida de los dos lados es igual a la medida del otro lado del triángulo. Para construir un triángulo un lado debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

- ¿Qué hacer para construir un triángulo isósceles cuyos lados miden 3cm, 3cm y 5 cm?

Solución

Sí se puede construir un triángulo isósceles, porque las medidas hacen que se cumpla las propiedades para que sea un triángulo.

### Tarea propuesta



### Actividad sugerente para trabajar con GeoGebra

Abran el programa Geómetra, Desde menú vista, activen solo cuadrícula. Con la herramienta segmento entre dos puntos, grafiquen:

3 segmentos de 5 unidades de largo.

Forman triángulos con las siguientes medidas:

- 1) 10cm; 5cm; 5cm.

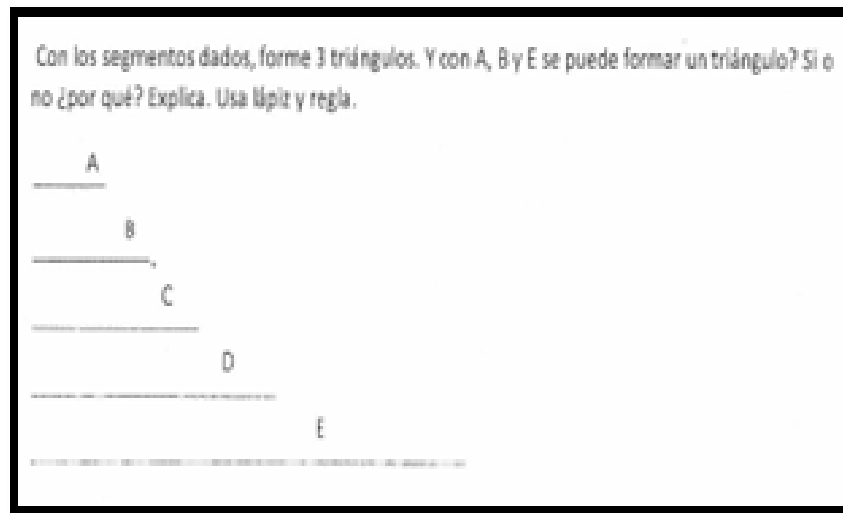
- 2) 10cm; 7cm; 5cm.  
3) 7cm; 5cm; 5cm.

A partir de los resultados, ¿En qué casos pudieron formar un triángulo y en cuáles no?

Solución.

Con las medidas de 10 cm, 5cm y 5cm no se puede construir un triángulo, porque no cumple con una de las propiedades de un triángulo, porque un lado debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

En cambio con las medidas de 10cm, 7cm y 5 cm sí se puede construir un triángulo, porque cumple con una de las propiedades.



Con las medidas de 7cm, 5cm y 5cm se puede construir un triángulo, porque cumple una de las propiedades de un triángulo.

Tarea propuesta.

Tomando los segmentos A, B y C se construye un triángulo, de igual forma con los segmentos B, C y D se forma un triángulo; también con los segmentos C, D y E se forma un triángulo. En cambio con los segmentos A, B y E no se puede formar un triángulo, porque no cumple con una de las propiedades, que para construir un triángulo debe ser un lado menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Entonces podemos concluir diciendo que un triángulo no se puede construir con cualquier segmento.