

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO



Aspectos dinámicos de los homeomorfismos y difeomorfismos del círculo

Tesis para optar el grado de
Magíster en Matemáticas.

Autor

Pedro Iván Suárez Navarro.

Asesor

Dr. Rudy Rosas Bazán.

Jurado

Dr. Alfredo Poirier.

Dr. Roland Rabanal.

LIMA-PERÚ

2014

ASPECTOS DINÁMICOS DE LOS HOMEOMORFISMOS Y DIFEOMORFISMOS DEL CÍRCULO

Pedro Iván Suárez Navarro

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Escuela de Posgrado, de la PUCP, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magíster en Matemática.

Miembros del jurado:

Dr. Alfredo Poirier (presidente)

Dr. Roland Rabanal (miembro)

Dr. Rudy Rosas (asesor)

Lima - Perú

Noviembre - 2014



*Dedicado a mi padres:
Pedro Suárez Girón
y Eymi Navarro Pino,
y a mis hermanos Omar y Sol.*

Agradecimientos

Me resulta difícil resumir la lista de personas que a lo largo de este camino he tenido el gusto de conocer. Me temo que estas líneas no serán suficientes.

Al Dr. Rudy Rosas, por su orientación e inspiración.

A mis padres, por su constante apoyo y por darme esa fortaleza para afrontar y convencerme de que los momentos más difíciles que uno cree tener no son tal cosa, sino más bien, simples circunstancias que resisten un poco antes de ceder, ¡es todo!.

A mis hermanos Omar y Sol, ante todo por ser mis mejores amigos y mayores aliados en cada travesura y aventura que compartimos juntos.

A mis amigos de la maestría: Felipe Torres, Sandro Sosaya, Jorge Mayta, Iris Huaccán, Rina Paucar y Gissela Gonzales, con quienes compartí pocos pero gratos momentos. Especialmente a Juan Mogollón, con quien salimos de Piura dispuestos a ver otra realidad en una ciudad desconocida para nosotros.

A mis infaltables amigos Sonia Rentería, Mayckol Jimenez y Becky Rojas por sus innumerables ocurrencias y su contagiante alegría.

Al Dr. Cesar Carranza, por su apoyo incluso antes de que iniciara la maestría, y porque en esas circunstancias conocí a un buen amigo Carlos Imán, que me apoyó con la estadía en la por entonces desconocida Lima.

A mis profesores de la maestría, en especial al Dr. Christiam Figueroa.

Y finalmente a la PUCP, por otorgarme el fondo Galileo 2014-1 para concluir este trabajo.

Resumen

En el presente trabajo se estudia la dinámica de los homeomorfismos de la circunferencia unitaria desde el punto de vista topológico. A cada homeomorfismo de tal circunferencia se le puede asociar un invariante topológico, conocido como el número de rotación de Poincaré. Se muestra que si f es un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación irracional, entonces f es semiconjugado a una rotación irracional. Cuando el difeomorfismo es de clase C^2 se consigue incluso conjugación topológica. Además, se construye un difeomorfismo de la circunferencia unitaria no transitivo de clase C^1 cuyo número de rotación es irracional.

Palabras Claves: Difeomorfismos de la circunferencia. Número de rotación. Levantamientos. Conjugación topológica. Rotaciones.

Índice general

Introducción	2
1. Preliminares	3
1.1. Dinámica discreta sobre $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$	3
2. Homeomorfismos del toro \mathbb{T}	13
2.1. Levantamientos	13
2.2. El número de rotación	19
2.3. Propiedades del número de rotación	23
2.4. Dinámica tipo racional	27
2.5. Dinámica tipo irracional	34
2.6. Teorema de clasificación de Poincaré	37
3. Difeomorfismos del toro \mathbb{T}	42
3.1. Teorema de Denjoy	43
3.2. El ejemplo de Denjoy	51
3.2.1. Contrucción del conjunto minimal	52
3.2.2. Construcción del difeomorfismo	61
Bibliografía	67

Introducción

El presente trabajo es una introducción al estudio de la teoría clásica de los homeomorfismos de la circunferencia unitaria, cuyos orígenes se remontan a una de las memorias de Henri Poincaré [19], publicada en 1885. En la tercera memoria -sobre el estudio particular de los campos vectoriales no singulares, en el toro - hace su aparición por vez primera un invariante topológico de mucha importancia en el ámbito de la dinámica unidimensional, conocido hoy como número de rotación de Poincaré.

Nuestro trabajo se inspira en dos hechos históricos que marcan el inicio del estudio de los homeomorfismos de la circunferencia unitaria. El primero es debido a Poincaré, quién demuestra que si f es un homeomorfismo de la circunferencia que preserva la orientación con número de rotación $\rho(f)$ irracional, entonces f es semiconjugada a una rotación $R_{\rho(f)}$, es decir, existe una función h continua, sobreyectiva y monótona sujeta a $R_{\rho(f)} \circ h = h \circ f$. El segundo hecho histórico data de 1932, cuando Arnaud Denjoy [8] demuestra que si f es un difeomorfismo de clase C^1 que preserva la orientación con (el logaritmo de la) derivada de variación acotada y número de rotación $\rho(f)$ irracional, entonces la semiconjugación h es de hecho un homeomorfismo; es decir h es una conjugación topológica entre f y $R_{\rho(f)}$. En general, este resultado se obtiene para difeomorfismos de clase C^2 .

En el capítulo 1 presentaremos la circunferencia unitaria, es decir, la frontera del círculo unitario, que denotaremos por \mathbb{T} , y a la que dotaremos de la estructura de grupo cociente inducida por el subgrupo normal de los enteros. Por otro lado, tomaremos prestados los conceptos básicos de la dinámica discreta y los aplicaremos a \mathbb{T} . Haremos una incursión rápida por la dinámica de los homeomorfismos más simples $R_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definidos por $R_\alpha([x]) = [x + \alpha]$, conocidas como rotaciones, las que, dependiendo de si α es un número racional o no, presentan órbitas periódicas o densas en \mathbb{T} .

En el capítulo 2 continuamos con una introducción al estudio de los levantamientos

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de aplicaciones continuas de \mathbb{T} . Definiremos el grado para los levantamientos. A partir de ello nos centraremos en los homeomorfismos de la circunferencia que preservan la orientación. Por otro lado, definiremos el número de rotación

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \pmod{1}$$

para homeomorfismos de grado positivo. Este número mide la rotación media de la órbita de un punto en el círculo por acción de un homeomorfismo. Resumiremos las principales propiedades del número de rotación y clasificaremos la dinámica de los homeomorfismos de \mathbb{T} . Bajo consideraciones de transitividad, garantizaremos por conjugación topológica que los homeomorfismos que preservan orientación se comportan como el modelo básico de las rotaciones irracionales; ésto es lo que anuncia el teorema clásico de clasificación de Poincaré.

Finalmente, en el capítulo 3 haremos una clasificación topológica análoga a la del capítulo 2, pero para el caso de difeomorfismos de la circunferencia de clase C^2 que preservan orientación, lo que se resume en el también clásico teorema de Denjoy. Además, concluiremos con la construcción de un difeomorfismo de la circunferencia de clase C^1 no transitivo y de número de rotación irracional, conocido como el ejemplo de Denjoy. Este ejemplo refleja que la hipótesis de pertenecer a C^2 o C^{1+var} es esencial para obtener conjugación topológica con rotaciones irracionales.

En lo posible hemos tratado de manejar los diversos conceptos y resultados de una manera simple y accesible, cuyos prerrequisitos requieran herramientas de análisis en la recta y topología básica.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo se inicia presentando diferentes conceptos de la dinámica discreta, la mayoría de ellos son directamente tomados de las referencias [3, 4, 5, 9, 13, 14, 22]. Finalizamos el capítulo con un resumen sobre el comportamiento de las órbitas de rotaciones racionales e irracionales.

1.1. Dinámica discreta sobre $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Este trabajo está inmerso en el ámbito de la dinámica discreta sobre espacios de dimensión uno. En tal sentido consideraremos a la circunferencia unitaria, a la cual también llamaremos **toro de dimensión uno**, como el grupo aditivo de los números reales módulo \mathbb{Z} . Este conjunto, denotado por \mathbb{T} , es un espacio de Hausdorff y posee una base numerable de abiertos para su topología. Por tal razón se elige a \mathbb{T} como arena de los acontecimientos, pues tales propiedades topológicas evitan la presencia de “patologías”, como por ejemplo, sucesiones de puntos en \mathbb{T} que convergen a más de un punto. Aún más, \mathbb{T} resulta ser una variedad topológica¹, compacta, y así el “comportamiento en el infinito” no presenta problemas, como en \mathbb{R} .

Como es habitual al trabajar con espacios topológicos, las transformaciones que actúan sobre \mathbb{T} son los homeomorfismos. Cuando adicionalmente estas transformaciones tienen propiedades diferenciables, consideraremos los difeomorfismos actuando sobre \mathbb{T} . Además,

¹Un variedad topológica es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable que es además localmente euclideo.

dotaremos a $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la topología cociente. Es decir, un conjunto U es abierto en \mathbb{T} si y solo si la preimagen $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{R} , donde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ está definida por $\pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}$. Consecuentemente, π es abierta y cuando tenga inversa, será continua.

Definición 1.1. Una biyección continua $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ se denominará **homeomorfismo** si su función inversa es continua. Análogamente, un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable se denominará **difeomorfismo**.

En el conjunto de los homeomorfismos de \mathbb{T} podemos detectar homeomorfismos bastantes simples, como los presentados en la siguiente definición.

Definición 1.2. Una **rotación de ángulo** α es la función $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por $\mathcal{R}_\alpha([x]) = [x + \alpha]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Las rotaciones de ángulo α tendrán un rol importante en el capítulo 2.

Ejemplo 1.3. Una rotación $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es un homeomorfismo, pues \mathcal{R}_α es biyectiva, continua y su inversa $\mathcal{R}_\alpha^{-1} = \mathcal{R}_{-\alpha}$ es continua.

Ejemplo 1.4. La función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por $f([x]) = [2x]$ es continua, sobreyectiva pero no es un homeomorfismo, pues basta observar que cualquier punto de la circunferencia admite dos preimágenes. Geométricamente esta función enrolla la circunferencia en sí misma dos veces.

Estamos interesados en conocer la historia pasada y futura de un punto en \mathbb{T} . Es decir, el conjunto de todas las posibles iteraciones negativas (pasado) e iteraciones positivas (futuro) de f . Ello justifica la necesidad de la siguiente definición.

Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una función continua. La **n -ésima iterada de f** se define como la n -ésima composición de f consigo misma. Es decir, inductivamente escribimos

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z} : m > 0\}$. Por convención pondremos $f^0 = Id$, donde Id es la aplicación identidad.

Cuando f sea invertible, tenemos una definición análoga. La n -ésima iterada de f^{-1} será

$$f^{-n} = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{n \text{ veces}}.$$

1.1. Dinámica discreta sobre $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Definición 1.5. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ un homeomorfismo y sea $x_0 \in \mathbb{T}$. La **órbita** de x_0 por f es el conjunto

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{f^n(x_0) | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Además, la **semiórbita positiva y negativa** de x_0 por f están dadas por los conjuntos $\mathcal{O}_f^+(x_0) = \{f^n(x_0) | n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$ y $\mathcal{O}_f^-(x_0) = \{f^n(x_0) | n \in \mathbb{Z}^-\}$, respectivamente. Cuando f sea entendida en el contexto, denotaremos a la órbita de x_0 simplemente como \mathcal{O}_{x_0} en lugar de $\mathcal{O}_f(x_0)$.

Observemos que pertenecer a la misma órbita es una relación de equivalencia. Por otro lado, resulta importante reconocer cierto tipo de órbitas especiales para a partir de ellas obtener información sobre la dinámica.

Definición 1.6. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una función continua y $x_0 \in \mathbb{T}$. Decimos que x_0 es un **punto fijo** para f , si satisface $f(x_0) = x_0$. Análogamente, x_0 es **punto n -periódico** para f , si cumple $f^n(x_0) = x_0$. Si $f^n(x_0) = x_0$ y $f^j(x_0) \neq x_0$, para todo entero j sujeto a $1 \leq j \leq n - 1$, diremos que x_0 es un **punto periódico de periodo n** . Además, a la órbita de un punto periódico se denominará **órbita periódica**.

Un ejemplo de órbita periódica se presenta cuando en una rotación el ángulo α es un número racional.

Ejemplo 1.7. Sea $R_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una rotación, $\alpha \in \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+\}$. Entonces cada $\mathcal{O}_{[x]}^+$ es periódica. En efecto, cuando $\alpha = \frac{p}{q}$ con p, q relativamente primos, para $[x] \in \mathbb{T}$ con $R_\alpha([x]) = [x + \alpha]$ se obtiene

$$R_{\frac{p}{q}}^2([x]) = R_{\frac{p}{q}}\left(\left[x + \frac{p}{q}\right]\right) = \left[x + 2\frac{p}{q}\right],$$

y, procediendo de manera inductiva, también

$$R_{\frac{p}{q}}^n([x]) = \left[x + n\frac{p}{q}\right], n \in \mathbb{Z}^+.$$

En particular, se logra

$$R_{\frac{p}{q}}^q([x]) = \left[x + q\frac{p}{q}\right] = [x + p] = [x].$$

Así, la órbita $\mathcal{O}_{[x]}^+ = \{[x], R_{\frac{p}{q}}([x]), R_{\frac{p}{q}}^2([x]), \dots, R_{\frac{p}{q}}^{q-1}([x])\}$ es q -periódica.

Algunas órbitas se acumularán sobre órbitas periódicas. Sin embargo, existen casos que estudiaremos en el capítulo 2 donde las órbitas se acumulan en conjuntos excepcionales como un conjunto de Cantor.

Definición 1.8. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una función continua. El ω -límite de un punto $x \in \mathbb{T}$ es el conjunto

$$\omega_f(x) = \{y \in \mathbb{T} \mid \text{existe una secuencia } n_k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{n_k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x) = y\}.$$

De manera análoga, cuando f es invertible, podemos definir α -límite de x como el conjunto

$$\alpha_f(x) = \{y \in \mathbb{T} \mid \text{existe un secuencia } n_k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{n_k \rightarrow +\infty} f^{-n_k}(x) = y\}.$$

Observación 1.9. Se cumple $\omega_f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^m(x) : m \geq n\}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^m(x) : m > n\}}$.

Ejemplo 1.10. Sea $R_\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una rotación de ángulo ρ , como en la definición 1.2. Con $\rho \in \mathbb{Q}$, tenemos

$$\omega_f(y) = \alpha_f(y) = \mathcal{O}_y, \text{ para todo } y \in \mathbb{T}.$$

Por otro lado, para $\rho \notin \mathbb{Q}$ tenemos

$$\omega_f(y) = \alpha_f(y) = \mathbb{T}, \text{ para } y \in \mathbb{T}.$$

Esto es debido a que los conjuntos $\{R_\rho^n(y) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ y $\{R_\rho^{-n}(y) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ son ambos densos en la circunferencia. Esto lo formalizaremos en la proposición 1.17.

Ejemplo 1.11. Sean F_n perturbaciones periódicas de rotaciones, dadas por $F_n(x) = x + \frac{1}{n} + a \sin(2\pi x)$, para $n \in \mathbb{Z}$ y $0 < a < 1/2\pi n$. Los puntos $x_j = \frac{j}{2n}$, donde $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ generan las órbitas periódicas. Basta observar $F(x_j) = x_{j+2}$, así $\{x_j | j \text{ es par}\}$ es una órbita periódica de periodo n y $\{x_j | j \text{ es impar}\}$ es otra órbita periódica de periodo n . Todas las demás órbitas no son periódicas y los conjuntos límites para cualquier punto y no periódico son $\alpha(y) = \mathcal{O}_{x_0}$ y $\omega(y) = \mathcal{O}_{x_1}$.

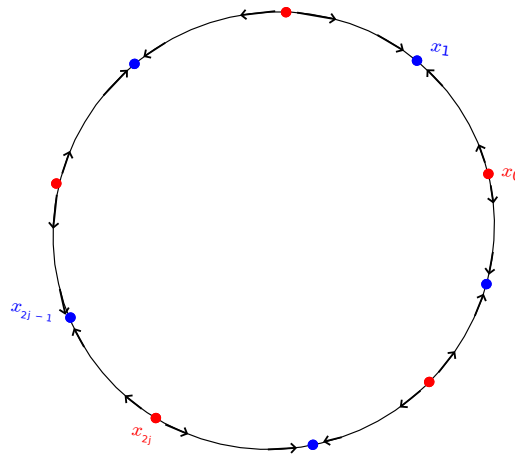


Figura 1.1: Comportamiento de las órbitas para $f(x) = x + \frac{1}{n} + a \sin(2n\pi x)$.

Un conjunto K es **positivamente f -invariante** si cumple $f(K) \subset K$ y **negativamente f -invariante** si cumple $f^{-1}(K) \subset K$. Cuando $f(K) = K$, se dice que K es **f -invariante**.

Proposición 1.12. *Sea $x \in \mathbb{T}$ y $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es un homeomorfismo y $x \in \mathbb{T}$. Entonces $\omega_f(x)$ (resp. $\alpha(x)$) es un conjunto no vacío, cerrado y f -invariante. Además todo conjunto minimal con respecto a las propiedades antes mencionadas es el ω -límite de cierto punto.*

Prueba. Sólo demostraremos las propiedades del conjunto ω -límite.

El conjunto $\omega_f(x)$ es no vacío, pues la compacidad de \mathbb{T} garantiza la existencia de un punto límite de $(f^n(x))$ para cualquier $x \in \mathbb{T}$.

Dado que el conjunto ω -límite se puede escribir como

$$\omega_f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^m(x) : m \geq n\}},$$

la segunda afirmación resulta inmediata.

Ahora probemos que $\omega_f(x)$ es f -invariante. Por la continuidad de f y la igualdad en la observación 1.9, obtenemos

$$\begin{aligned} f(\omega_f(x)) &\subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f\left(\overline{\bigcup_{m \geq n} f^m(x)}\right) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f\left(\bigcup_{m \geq n} f^m(x)\right)} \\ &\subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m \geq n} f^{m+1}(x)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m > n} f^m(x)} \\ &\subset \omega_f(x). \end{aligned}$$

Además, se cumple $\omega_f(x) \subset f(\omega_f(x))$. Dado $y \in \omega_f(x)$, existe una sucesión $(f^{n_k})_k$ para la cual $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x) = y$. De esta manera existe $(f^{n_{k-1}})_k$ para la cual $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_{k-1}}(x) = z \in \omega_f(x)$. Por la continuidad de f , tenemos

$$y = \lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(f^{n_{k-1}}(x)) = f\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_{k-1}}(x)\right) = f(z).$$

De esta manera se concluye la igualdad $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$. (Un argumento análogo para $n < 0$ nos permite probar lo pedido para $\alpha_f(x)$).

Ahora probemos que $\omega_f(x)$ es minimal respecto a estas propiedades. Sea $\emptyset \subseteq C \subset \mathbb{T}$, cerrado, no vacío y f -invariante. Tomemos $x \in C$. Entonces se cumple $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset C$, pues C es f -invariante, y así $\overline{\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}} \subset \overline{C} = C$, pues C es cerrado. Por otro lado se tiene

$$\omega_f(x) = \bigcap_{j \geq 1} \overline{\{f^k(x) : k \geq j\}} \subset \overline{\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}} \subset C.$$

Por lo tanto, cualquier conjunto C cerrado, f -invariante es vacío o contiene a cierto $\omega_f(x)$. Si C es un conjunto minimal entonces $C = \omega_f(x)$. \square

Observación 1.13. El conjunto ω -límite no necesariamente es conexo, pues en algunos casos puede coincidir con un conjunto de Cantor, el cual es totalmente desconexo, como veremos en el ejemplo 1.23.

Definición 1.14. Diremos que una función f es **topológicamente transitiva** si existe $x \in \mathbb{T}$ con $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = \mathbb{T}$. Es decir, existe un punto cuya órbita es densa en \mathbb{T} . Si tuvieramos $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = \mathbb{T}$ para todo $x \in \mathbb{T}$, entonces diremos que f es **minimal**.

Observación 1.15. Cuando una semiórbita es densa en \mathbb{T} , su respectivo conjunto límite es un conjunto minimal respecto a las propiedades de la proposición 1.12.

Ejemplo 1.16. La función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por $f([x]) = [2x]$ posee $2^n - 1$ puntos periódicos. Además f es topológicamente transitiva. En efecto, un cálculo directo nos permite conseguir los puntos fijos para f^n mediante la ecuación $f^n([x]) = [2^n x] = [x]$. Es decir, existe un entero positivo p para el cual $2^n x - x = p$. Entonces $x = \frac{p}{2^n - 1}$, para $p = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Por otro lado, la definición 1.14 es equivalente a la condición de que dados dos conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos U y V existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Para comprobar esto elejimos un intervalo abierto I en U . Entonces se sigue

1.1. Dinámica discreta sobre $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

del hecho de que f duplica la longitud del intervalo en cada iteración que habrá un instante N para el cual el intervalo $f^N(I)$ tendrá longitud mayor que 1, es decir abarcará toda la circunferencia. Luego $f^N(I) \subset f^N(U)$ intersectará inevitablemente al conjunto V .

Consideremos (\mathbb{T}, d) como espacio métrico con métrica d definida por

$$d([x], [y]) = \min\{|a - b| : a \in [x], b \in [y]\}.$$

En particular, cuando $|x - y| < \frac{1}{2}$ tenemos $d([x], [y]) = |x - y|$.

Proposición 1.17. *Para cada $\alpha \notin \mathbb{Q}$, la rotación $R_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es topológicamente transitiva. Además es minimal, pues \mathcal{O}_x^+ es densa en \mathbb{T} para todo $x \in \mathbb{T}$.*

Prueba. Primero veamos que siempre los puntos de la órbita de R_α son distintos dos a dos. Sea $x \in \mathbb{T}$. Si dos puntos de la órbita fueran iguales, entonces existirían números enteros n, m con $n \neq m$ tales que $R_\alpha^n([x]) = R_\alpha^m([x])$. Entonces se cumpliría $[x + n\alpha] = [x + m\alpha]$, lo que implica $(n - m)\alpha \in \mathbb{Z}$. Esto último contradice el hecho de que α es irracional. Luego todos los puntos de la órbita de x son distintos. En particular R_α no tiene puntos periódicos.

Ahora, por la compacidad de \mathbb{T} , debido al teorema de Bolzano Weierstrass, tenemos que $\{R_\alpha^n(x)\}_{n \geq 0}$ admite una subsucesión convergente. Esto significa que ciertos puntos de la órbita están arbitrariamente cercanos unos de otros. Así, dado $\epsilon < \frac{1}{2}$, positivo, existen enteros no negativos p, q sujetos a $p > q$ para los cuales se satisface

$$d(R_\alpha^p(x), R_\alpha^q(x)) < \epsilon.$$

Dado que R_α es una isometría, es decir se cumple $d(R_\alpha^m(x), R_\alpha^m(y)) = d(x, y)$, para $x, y \in \mathbb{T}$ y todo entero m , tenemos en particular $d(R_\alpha^{p-q}(x), x) < \epsilon$. De este modo al elegir $k = p - q$, se tiene $0 < d(R_\alpha^k(x), x) < \epsilon$. Afirmando ahora que el conjunto $\{R_\alpha^{jk}(x); j \in \mathbb{N}\}$ forma una ϵ -red de la circunferencia. En efecto, se tiene $d(R_\alpha^{(j+1)k}(x), R_\alpha^{jk}(x)) = d(R_\alpha^k(x), x) < \epsilon$, pues R_α preserva distancias. De esta manera el subconjunto $\{R_\alpha^{jk}(x); j \in \mathbb{N}\}$ de la órbita de x divide a la circunferencia en intervalos de longitud menor que ϵ . Así, se tiene $\mathbb{T} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_\alpha^{jk}(x), R_\alpha^{jk}(x) + \epsilon)$. Finalmente por la arbitrariedad de ϵ , para cualquier $y \in \mathbb{T}$, habrá alguno de estos intervalos que contenga al punto y . □

Ejemplo 1.18. La función $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por $f([x]) = [3x]$ posee una órbita cuyo conjunto ω -límite es el conjunto ternario de Cantor. En efecto, elijamos $I_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y veamos su preimagen por f , es decir $f^{-1}(I_0) = I_{11} \cup I_{12} \cup I_{13}$, donde $I_{11} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_{12} = (\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$, $I_{13} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Siguiendo un proceso inductivo se contruye el conjunto $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(I_0)$ que coincide con el conjunto ternario de Cantor, Figura

1.2. Por otra parte, sabemos que se cumple $K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, a_n \in \{0, 2\} \right\}$. Es fácil ver que K es invariante por f . En efecto, fijando $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, con $a_n \in \{0, 2\}$, se tiene

$f(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} \right] = \left[a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^n}$. Así f se comporta como una aplicación que desplaza dígitos a la izquierda en la representación en base 3. Esto implica que K es invariante por f . De esta manera la clausura de la órbita es un conjunto de Cantor. Además, existirá un punto en $x \in K$, cuya órbita es densa en K , como se mostrará en el ejemplo 1.23.

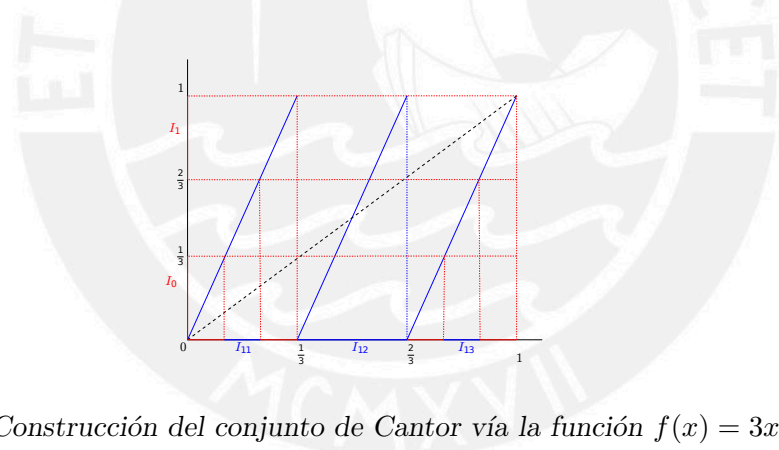


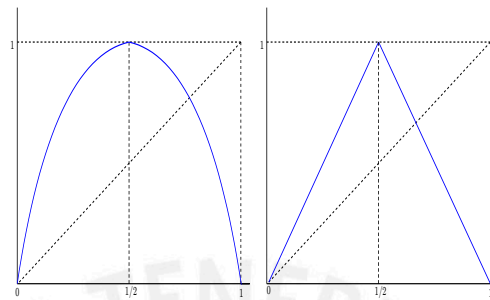
Figura 1.2: Construcción del conjunto de Cantor vía la función $f(x) = 3x \pmod{1}$.

Un concepto clave que permite comparar dinámicas que poseen cierto tipo de complejidad con dinámicas de más simples es la conjugación topológica. Ello nos enseña cuándo dos sistemas dinámicos son en el sentido topológico los “mismos”.

Ejemplo 1.19. La función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = 4x(1 - x)$ tiene un comportamiento dinámico parecido a la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - x) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

en el sentido que el homeomorfismo $h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$ lleva órbitas de una dinámica en otra, es decir, $h(\mathcal{O}_f(x_0)) = \mathcal{O}_g(h(x_0))$, para cualquier punto $x_0 \in [0, 1]$.



(a) Gráfico de f (b) Gráfico de g

Figura 1.3: Comparación de comportamientos dinámicos.

Definición 1.20. Sean $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ funciones continuas. Diremos que $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es una **semiconjugación topológica** entre f y g si h es continua, sobreyectiva y cumple $h \circ f = g \circ h$. Es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{g} & \mathbb{T}, \end{array}$$

conmuta. Cuando h es un homeomorfismo que satisface lo anterior, diremos que h es una **conjugación topológica** y que f y g son **topológicamente conjugados**.

Observación 1.21. La conjugación topológica es de hecho una relación de equivalencia. Por otro lado, la necesidad de sobreyectividad en una semiconjugación responde al hecho de que al tenerse h continua y sobreyectiva a la vez, la imagen vía la función h de cualquier subconjunto denso es también denso.

Ejemplo 1.22. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por $f([x]) = [2x]$ y sea $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones en $\{0, 1\}$. Definamos la función $s : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ para la cual $s((x_1, x_2, \dots)) = (x_2, x_3, \dots)$. Si $x = 0.x_1x_2\dots$ es la representación binaria de x en $[0, 1]$, entonces se tiene $f(x) = 0.x_2x_3\dots$. Así, existe una función $h : \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]$ continua,

sobreyectiva definida por $h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$ tal que $h \circ s = f \circ h$; por lo tanto h es una semiconjugación entre f y s .

Ejemplo 1.23. Sea K el conjunto de Cantor definido en el ejemplo 1.18. Sea $f : K \rightarrow K$ definida por $f([x]) = [3x]$. Podemos construir la función $h : K \rightarrow [0, 1]$ mediante $h(0.x_1x_2\dots) = 0.\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\dots$. Tal función es continua, no decreciente e inyectiva, excepto por el hecho de que existen racionales binarios que poseen dos preimagenes. Por ejemplo $h(\frac{1}{3}) = h(0,0222\dots) = 0,1_{(2)} = \frac{1}{2}$ y $h(\frac{1}{3}) = h(0,2000\dots) = 0,1_{(2)} = \frac{1}{2}$.

Sin embargo, se cumple $h \circ f = g \circ h$, donde $g(x) = [2x]$. Es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{g} & \mathbb{T}, \end{array}$$

conmuta. Finalmente, en el ejemplo 1.16 vimos que g es transitiva. De este modo vía la función h se garantiza que f también lo es.

En el capítulo 2 esta herramienta nos permitirá clasificar los homeomorfismos de la circunferencia. Demostraremos que todos y cada uno de ellos son semiconjugados a rotaciones irracionales. Como ya vimos, la dinámica de las rotaciones es simple y está marcada por su ángulo, tal como se resume a continuación.

Proposición 1.24. *Sea $R_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una rotación. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces cada órbita es periódica en \mathbb{T} .
2. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces cada órbita es densa en \mathbb{T} .

Capítulo 2

Homeomorfismos del toro \mathbb{T}

Denotaremos al grupo de los difeomorfismos de \mathbb{T} de clase C^r por $\text{Diff}^r(\mathbb{T})$, donde r representa la diferenciabilidad. Particularmente, estaremos interesados en los casos $r = 0, 1, 2$, donde $\text{Diff}^0(\mathbb{T})$ es el grupo de homeomorfismos de \mathbb{T} . Sería ambicioso abarcar todo $\text{Diff}^0(\mathbb{T})$. Es por ello que restringiremos nuestro estudio a $\text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$, el subgrupo de $\text{Diff}^0(\mathbb{T})$ formado los homeomorfismos que preservan orientación. Además definiremos un invariante topológico conocido como número de rotación para este tipo de homeomorfismos.

2.1. Levantamientos

Para definir el subgrupo $\text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$, estudiaremos cierto tipo de funciones continuas de la recta real. La aplicación $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ definida por $\pi(x) = [x] = x + \mathbb{Z}$, representará la aplicación cociente. Observemos que π también puede ser vista como la aplicación de recubrimiento de \mathbb{T} y en consecuencia será un homeomorfismo local.

Lema 2.1. *Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una función continua. Dados $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{T}$ sujetos a $\pi(x_0) = p$, $\pi(y_0) = f(p)$, existe $\delta_f > 0$ independiente de x_0, y_0 , y una función $F : [x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f] \rightarrow \mathbb{R}$ continua que cumple $\pi \circ F = f \circ \pi$ y $F(x_0) = y_0$. Además si existe otra función continua $G : [x_0 - \tilde{\delta}_f, x_0 + \tilde{\delta}_f]$ tal que $\pi \circ G = f \circ \pi$ y $G(y_0) = x_0$, entonces $F(x) = G(x)$ en la intersección de sus dominios.*

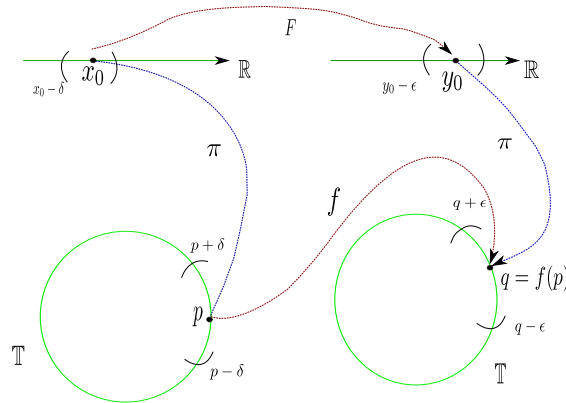


Figura 2.1: Existencia del levantamiento F

Prueba. Como \mathbb{T} es compacto y f es continua, resulta que f es uniformemente continua, es decir, existe $\delta_f < \frac{1}{4}$, positivo, tal que

$$f([p - \delta_f, p + \delta_f]) \subset [f(p) - \frac{1}{4}, f(p) + \frac{1}{4}], \quad (2.1)$$

para cualquier p . Dado que se cumple $\pi([x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f]) = [p - \delta_f, p + \delta_f]$, de (2.1) se tiene $f \circ \pi([x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f]) \subset \pi([y_0 - \frac{1}{4}, y_0 + \frac{1}{4}])$.

Sea $\sigma : [f(p) - \frac{1}{4}, f(p) + \frac{1}{4}] \rightarrow [y_0 - \frac{1}{4}, y_0 + \frac{1}{4}]$ la función inversa de $\pi|_{[y_0 - \frac{1}{4}, y_0 + \frac{1}{4}]}$. Ahora definamos $F : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F = \sigma \circ f \circ \pi$ cerca de x_0 . Como f y σ son funciones continuas, tenemos que F es continua y satisface los requerimientos del lema.

Para la unicidad, sea una función continua $G : [x_0 - \tilde{\delta}_f, x_0 + \tilde{\delta}_f]$ tal que $\pi \circ G = f \circ \pi$ y $G(y_0) = x_0$. Definamos $A = \{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \mid G(x) = F(x)\}$ con $\delta = \min\{\delta_f, \tilde{\delta}_f\} > 0$. Observemos que A no es vacío, pues $x_0 \in A$, ya que se satisface $G(x_0) = y_0 = F(x_0)$. Además A es cerrado, pues se tiene $A = (G - F)^{-1}(0)$ y $G - F$ es continua. Gracias a esto basta probar que A es abierto relativo, pues la conexidad de $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ garantiza que se cumple $F(x) = G(x)$ para $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Tomemos $z \in A$, de modo que se tenga $(G - F)(z) = 0$. Eligamos $\epsilon > 0$ tal que $x \in (z - \epsilon, z + \epsilon)$ implique $|(G - F)(x)| < 1$. Como $\pi \circ G(x) = \pi \circ F(x)$, para $x \in (z - \epsilon, z + \epsilon)$, conduce a $G(x) = F(x) + k_x$ para cierto $k_x \in \mathbb{Z}$, se obtiene

$$|G(x) - F(x)| = |k_x| < 1.$$

De esto último, dada la propiedad $k_x \in \mathbb{Z}$, la única posibilidad es $k_x = 0$. De este modo se logra $G(x) = F(x)$ para todo $x \in (z - \epsilon, z + \epsilon)$. \square

2.1. Levantamientos

Proposición 2.2. *Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una función continua. Entonces existe una función continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ F$; es decir, el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \end{array}$$

es conmutativo. Además, cualquier otra función G con las mismas propiedades de F cumple $G = F + k$, para algún entero k .

Prueba. Fijemos $p \in \mathbb{T}$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sujetos a $\pi(x_0) = p$, $\pi(y_0) = f(p)$. Por el lema 2.1, existe $F : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$ y $F(x_0) = y_0$. Si $x_1 = x_0 + \delta$ y $y_1 = F(x_1)$, definimos $p_1 = \pi(x_1)$, para tener $\pi \circ F(x_1) = f \circ \pi(x_1)$ y $\pi(y_1) = f(p_1)$. Sin embargo podemos aplicar nuevamente el lema 2.1, y así existirá

$$F_1 : [x_1 - \delta, x_1 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$$

continua tal que $\pi \circ F_1 = f \circ \pi$ y $F_1(x_1) = y_1$. Al tenerse $F(x) = F_1(x)$, para $x \in [x_0, x_1]$, queda definida una función en $[x_0 - \delta, x_1 + \delta] = [x_0 - \delta, x_0 + 2\delta]$. Nuevamente proyectando $x_2 = x_0 + 2\delta$ seguimos el procedimiento de manera inductiva. Lo mismo para valores menores que x_0 (a la izquierda de x_0).

Finalmente, sean F y G dos levantamientos de f que cumplen $\pi \circ F = f \circ \pi = \pi \circ G$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Como $\pi(G(x)) = \pi(F(x))$ implica $G(x) - F(x) = k_x \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la continuidad de $G - F$ implica que k_x es constante. Es decir, se ha de tener $G(x) = F(x) + k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. □

Definición 2.3. Dada una función continua $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, un **levantamiento** de f es una función continua $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $f \circ \pi = \pi \circ F$.

Ejemplo 2.4. Sea $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ tal que $\mathcal{R}_\alpha([x]) = [x + \alpha]$. Entonces $F_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F_k(x) = x + \alpha + k$, donde $k \in \mathbb{Z}$, es un levantamiento de \mathcal{R}_α pues verifica $\mathcal{R}_\alpha \circ \pi(x) = \pi \circ F_k(x)$.

Ahora veamos algunas propiedades de los levantamientos.

Lema 2.5. *Sean F y G levantamientos de las funciones continuas $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ y $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, respectivamente. Entonces $F \circ G$ es un levantamiento de $f \circ g$. En particular F^n es un levantamiento de f^n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba. Si F y G son levantamientos de f y g , respectivamente, entonces se tiene $\pi \circ F = f \circ \pi$ y $\pi \circ G = g \circ \pi$. Por tanto se cumple

$$\pi \circ (F \circ G) = (\pi \circ F) \circ G = f \circ (\pi \circ G) = (f \circ g) \circ \pi.$$

El caso particular se sigue de inmediato por un proceso inductivo. \square

Proposición 2.6. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una función continua y F un levantamiento de f . Entonces $F(x+1) - F(x)$ es un número entero independiente de x y de F .

Prueba. Si F es un levantamiento de f tenemos $\pi \circ F(x) = f \circ \pi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular

$$\pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x)).$$

De esta manera $F(x+1) - F(x) \in \mathbb{Z}$ y por los argumentos dados en la proposición 2.2 tenemos que $F(x+1) - F(x)$ es un entero. Además, observemos que por continuidad, lo trabajado es independiente de la elección de x .

Ahora veamos la independencia del levantamiento. Si G es otro levantamiento de f , sabemos por la proposición 2.2 que existe $k \in \mathbb{Z}$ sujeto a $G(x) - F(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular $G(x+1) - F(x+1) = k$. Al restar obtenemos $G(x+1) - G(x) = F(x+1) - F(x)$. \square

Definición 2.7. Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ y F es cualquier levantamiento de f entonces $F(x+1) - F(x)$ es llamado el **grado** de f y es denotado por $\deg(f)$.

Veamos la siguiente propiedad del grado.

Lema 2.8. Sean $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ funciones continuas. Entonces se tiene

$$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g).$$

Como caso particular se tiene $\deg(f^n) = (\deg(f))^n$.

Prueba. En primer lugar probemos que

$$F(x+n) = F(x) + n \deg(f), \tag{2.2}$$

se cumple para todo entero. En efecto, esta igualdad vale para $n = 1$, pues $F(x + 1) = F(x) + \deg(f)$. Si vale para m , entonces, se tiene

$$\begin{aligned} F(x + m + 1) &= F(x + m) + \deg(f) \\ &= F(x) + m \deg(f) + \deg(f) \\ &= F(x) + (m + 1)\deg(f); \end{aligned}$$

y así, por inducción, es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Además considerando $-n$ en lugar de n se sigue fácilmente lo mismo para n negativo. Para tal fin basta considerar $\deg(f) = F(x) - F(x - 1)$.

Ahora empecemos la prueba propiamente dicha. Sean F y G levantamientos de f y g respectivamente. Por el lema 2.5, $F \circ G$ es un levantamiento de $f \circ g$, y así por definición de grado se tiene

$$\begin{aligned} \deg(f \circ g) &= (F \circ G)(x + 1) - (F \circ G)(x) \\ &= F(G(x) + \deg(g)) - F(G(x)) && \text{por (2.2)} \\ &= F(G(x)) + \deg(g)\deg(f) - F(G(x)) \\ &= \deg(f)\deg(g). \end{aligned}$$

Si en particular hacemos $f = g$, se satisface $\deg(f^2) = (\deg(f))^2$ y de manera inductiva también $\deg(f^n) = (\deg(f))^n$. \square

Proposición 2.9. *Si f es un homeomorfismo, entonces $\deg(f) = \pm 1$.*

Prueba. Para la identidad Id es fácil ver que se tiene $\deg(Id) = 1$ y por lema 2.8 síguese $1 = \deg(Id) = \deg(f^{-1} \circ f) = \deg(f^{-1})\deg(f)$; por tanto se deduce $\deg(f^{-1}) = \deg(f) = \pm 1$. \square

Proposición 2.10. *Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ homeomorfismo con $\deg(f) = 1$ y F un levantamiento de f . Entonces se tiene*

1. $F(x + m) = F(x) + m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$;
2. $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
3. La función $\varphi(x) = F^n(x) - x$ es periódica de periodo 1 para todo $n > 0$.

Prueba. Por definición de grado, se sigue directamente $F(x+1) = F(x) + 1$ y por un proceso de inducción se pasa a $F(x+n) = F(x) + n$.

Para la segunda parte, por el ítem (1), la expresión vale para $n = 1$ (pues $n = 0$ es obvio), y al suponer que es verdad para m , tenemos $F^{m+1}(x+1) = F(F^m(x+1)) = F(F^m(x) + 1) = F^{m+1}(x) + 1$.

Finalmente se tiene $\varphi(x+1) = F^n(x+1) - (x+1) = F^n(x) - x = \varphi(x)$. \square

Definición 2.11. Decimos que un homeomorfismo $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ **preserva orientación** si los levantamientos de f son funciones crecientes. En el caso de ser decrecientes diremos que el homeomorfismo **invierte orientación**.

Justamente, a este tipo de homeomorfismos nos referíamos al inicio de este capítulo. Centraremos nuestra atención en este subgrupo de $\text{Diff}^0(\mathbb{T})$ dado por

$$\text{Diff}_+^0(\mathbb{T}) := \{f \in \text{Diff}^0(\mathbb{T}) \mid f \text{ preserva orientación}\}.$$

Elegimos este grupo y no el conjunto $\text{Diff}^0(\mathbb{T})$, pues este último no es cerrado con respecto a la operación de grupo. En realidad, si $f \in \text{Diff}_-^0(\mathbb{T})$ entonces se tiene $f^2 \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$.

Ejemplo 2.12. Los homeomorfismos $f_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ y $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definidos por $f_\alpha(x) = -x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}}$ y $g(x, y) = (x, -y)$, respectivamente invierten orientación.

La siguiente proposición establece una relación entre la orientación del homeomorfismo y su grado.

Proposición 2.13. *Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ un homeomorfismo. Entonces f preserva orientación si y solamente si $\deg(f) = 1$.*

Prueba. Sea F un levantamiento de f . Por la proposición 2.6, tenemos $\deg(f) = \pm 1$. Supongamos $\deg(f) = -1$, es decir $F(x+1) - F(x) = -1$. Dado que f preserva orientación, tenemos que F es una función creciente y por consiguiente, para $x < x+1$ se tiene $F(x) < F(x+1)$, y de esa manera $0 < F(x+1) - F(x) = -1$; lo que obviamente es una contradicción.

Recíprocamente, dado cualquier levantamiento F de f , se sigue de manera inmediata que F , por ser monótona, debe ser creciente puesto que cumple $F(x+1) - F(x) = \deg(f) > 0$. \square

Las rotaciones $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ pertenecen al grupo $\text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14. El levantamiento $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x) = x + \alpha + k$ de \mathcal{R}_α , satisface

$$\text{deg}(\mathcal{R}_\alpha) = \tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x+1) - \tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x) = (x+1+\alpha+k) - (x+\alpha+k) = 1.$$

2.2. El número de rotación

Un invariante topológico es una propiedad de un espacio topológico que no cambia bajo homeomorfismos, aún cuando puedan existir espacios topológicos no homeomorfos con un mismo invariante topológico. Asociaremos a cada elemento de $\text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ un número real cuyas propiedades aritméticas nos proporcionarán información de la dinámica de f . Este invariante, conocido como el número de rotación, aparece inicialmente en un fragmento de la tercera memoria de Poincaré [19, p.231-233]. La siguiente es una traducción libre del autor.

“Ahora vamos a determinar el orden circular en que están dispuestos los puntos $M(i)$ dejando a un lado el caso donde hay un ciclo límite y donde el orden se determina fácilmente. Sea α_0 la longitud del arco $M(0)M(1)$, α_1 la longitud del arco $M(1)M(2)$, ..., y en general α_i la longitud del arco $M(i)M(i+1)$. De ahí tenemos que

$$\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \dots + \alpha_{i+n}}{n},$$

cuando n crezca indefinidamente, tendrá un límite finito, independiente de i más incommensurable con $2\pi r$ ”¹.

Después de dar este vistazo histórico, volvemos a nuestro contexto, en el cual, basándonos en el concepto de levantamiento para homeomorfismos que preservan orientación, definiremos una versión moderna de este límite.

¹En la tercera memoria publicada en 1885, Poincaré estudia el caso de los campos vectoriales no singulares sobre \mathbb{T}^2 . Debemos tener presente que en dicho trabajo el toro de dimensión 2 es visto como una superficie que habita en \mathbb{R}^3 , y no dotada de la estructura de grupo $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Aquí los puntos $M(0), M(1), \dots$ son puntos que se encuentran sobre un meridiano (un círculo) de \mathbb{T}^2 . En este contexto es que aparece originalmente el número de rotación.

Lema 2.15. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales sujeta a

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leq C, \quad (2.3)$$

para todo m, n y alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$ existe.

Prueba. Para $\epsilon > 0$ escojamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2C}{N} < \epsilon$. Dado que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (2.3), de manera inductiva se comprueba

$$|a_{mn} - ma_n| \leq (m-1)C. \quad (2.4)$$

En efecto, fijado n , para $m = 1$, la desigualdad se satisface obviamente. Si para $m \in \mathbb{N}$, se satisface (2.4), se sigue

$$\begin{aligned} |a_{(m+1)n} - (m+1)a_n| &\leq |a_{mn+n} - a_{mn} - a_n| + |a_{mn} - ma_n| \\ &\leq C + (m-1)C = mC. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de 2.4.

Para $n, m \geq N$, usando la expresión (2.4), se obtiene no solo

$$\left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{(m-1)C}{mn} < \frac{C}{n} < \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.5)$$

sino también

$$\left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_m}{m} \right| \leq \frac{(n-1)C}{mn} < \frac{C}{m} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.6)$$

Al sumar las expresiones (2.5) y (2.6), para $n, m \geq N$, tenemos

$$\left| \frac{a_n}{n} - \frac{a_m}{m} \right| \leq \left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_n}{n} \right| + \left| \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_m}{m} \right| < \epsilon.$$

De esta manera $(\frac{a_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por ello converge. \square

Proposición 2.16. Si $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un levantamiento de f , entonces vale lo siguiente.

1. El límite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Este límite es independiente del valor x y será denotado por $\rho(F)$.
3. Si F y G son dos levantamientos de f , entonces $\rho(G) = \rho(F) + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Prueba. Para la existencia, sea $x \in \mathbb{R}$ y definamos $a_n = F^n(x) - x$ y k_n sujeto a $k_n \leq a_n < k_n + 1$. Notemos que se cumple

$$\begin{aligned} |a_{m+n} - a_m - a_n| &= |(F^{m+n}(x) - x) - (F^m(x) - x) - (F^n(x) - x)| \\ &= |(F^m(F^n(x)) - F^m(x)) - (F^n(x) - x)|. \end{aligned}$$

Sin embargo $k_n \leq a_n < k_n + 1$ implica

$$k_n \leq F^n(x) - x < k_n + 1, \quad (2.7)$$

y con ello

$$x + k_n \leq F^n(x) < x + k_n + 1.$$

Al aplicar F^m a esta cadena de desigualdades se obtiene

$$F^m(x + k_n) \leq F^m(F^n(x)) < F^m(x + k_n + 1), \quad (2.8)$$

pues F^m es creciente. Sin embargo, como f es un homeomorfismo de grado 1, lo mismo ocurre para f^m y por definición se tendrá $F^m(x + \ell) = F^m(x) + \ell$ para todo entero ℓ , gracias a la proposición 2.10. En particular, la expresión (2.8) conduce a

$$F^m(x) + k_n \leq F^m(F^n(x)) < F^m(x) + k_n + 1,$$

de donde se obtiene

$$k_n \leq F^m(F^n(x)) - F^m(x) < k_n + 1. \quad (2.9)$$

De las ecuaciones (2.7) y (2.9) concluimos que se cumple

$$|(F^{m+n}(x) - F^m(x)) - (F^n(x) - x)| < |k_n + 1 - k_n| < 1. \quad (2.10)$$

De este modo se cumple $|a_{m+n} - a_m - a_n| < 1$, y por el lema 2.15 el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ existe y concluye la prueba de la parte (1).

Veamos la independendencia respecto al punto de referencia. Supongamos que tal límite exista. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, sujetos a $x < y$, existen $m, k \in \mathbb{Z}$ con los cuales se cumple

$$m \leq x < y \leq m + k. \quad (2.11)$$

Sea F un levantamiento de f . Entonces, puesto que F^n es creciente, tenemos

$$F^n(m) \leq F^n(x) < F^n(y) \leq F^n(m + k),$$

y por ello $|F^n(x) - F^n(y)| < |F^n(m+k) - F^n(m)|$. Además, dado que la proposición 2.10 muestra $F^n(m+k) = F^n(m) + k$, se satisface

$$|F^n(x) - F^n(y)| < |k|. \quad (2.12)$$

Luego las expresiones (2.11) y (2.12) conducen a

$$\left| \frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{F^n(y) - y}{n} \right| \leq \left| \frac{F^n(x) - F^n(y)}{n} \right| + \left| \frac{x - y}{n} \right| < \frac{2|k|}{n}.$$

Al hacer $n \rightarrow +\infty$ se consigue $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(y) - y}{n}$. Por lo tanto $\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ es independiente del punto x elegido. Se cumple de esta manera (2).

Ahora analicemos la dependencia del número de rotación en el levantamiento. Sea F un levantamiento de f y consideremos cualquier otro levantamiento G de f . Gracias a la proposición 2.5 tenemos $G = F + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Así para $G(x) = F(x) + k$ con $x \in \mathbb{R}$, conseguimos

$$G^2(x) = G(F(x) + k) = F(F(x) + k) + k = F^2(x) + 2k,$$

y procediendo de manera inductiva, $G^n(x) = F^n(x) + nk$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \rho(G) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(x) - x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) + nk - x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} + k = \rho(F) + k. \end{aligned}$$

prueba lo pedido. □

Observación 2.17. Cuando elegimos $a_n = F^n(0)$ en (2.10) con $C = 1$, las expresiones (2.5) y (2.6) para $n, m \geq N$ implican

$$\left| \frac{F^m(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}. \quad (2.13)$$

De ahí concluimos que $\left(\frac{F^n(0)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que converge a un número que denotamos $\rho(F)$. Ahora bien, como consecuencia de la expresión (2.13) al hacer $n \rightarrow +\infty$ se obtiene

$$\left| \frac{F^m(0)}{m} - \rho(F) \right| \leq \frac{1}{m}. \quad (2.14)$$

Definición 2.18. El número $\rho(f) = \pi(\rho(F))$ donde $\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ es llamado **número de rotación** de f , donde $\rho(f)$ esta bien definido por la proposición anterior. Esto es, $\rho(f)$ es el único número en $[0, 1)$ para el cual $\rho(f) - \rho(F)$ es un entero.

El número de rotación mide la distancia promedio de un punto x viajando por iterados de F , y cuando se proyecta en la circunferencia, la rotación media por iterados de f .

Ejemplo 2.19. Sea $\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una rotación. Consideremos el levantamiento $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha(x) = x + \alpha + k$, para todo $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Como se cumple $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(x) = x + n\alpha + k$, se alcanza la igualdad

$$\rho(\tilde{\mathcal{R}}_\alpha) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\mathcal{R}}_\alpha^n(x) - x}{n} = \alpha.$$

Es decir, el número de rotación en este caso coincide con el ángulo de rotación.

Observación 2.20. Para funciones continuas $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ con $\deg(f) \neq 1$ el número de rotación no necesariamente existe. Por ejemplo para $F(x) = 2x$, y $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene $F^n(x_0) = 2^n x_0$ y así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n} = x_0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{n} \right) = +\infty.$$

En ciertas ocasiones, para homeomorfismos de la circunferencia de grado 1, debido a que el número de rotación no depende de la elección del punto, será lícito considerar

$$\rho(f) = \pi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n} \right).$$

2.3. Propiedades del número de rotación

Al inicio de este capítulo mencionamos que estudiaríamos un invariante topológico para funciones en $\text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$. En esta sección demostraremos esa afirmación y otras propiedades importantes. Para este fin consideraremos $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función creciente, continua en 0, con $\phi(0) = 0$. Como en [12, p.43], se dice que la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite a ϕ como **módulo de continuidad** si satisface $|F(x) - F(y)| \leq \phi(|x - y|)$, para $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.21. Si $f, g \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades.

1. La función $\rho : \text{Diff}_+^0(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{T}$ es continua en la topología C^0 , inducida por la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|.$$

2. Si f y g son topológicamente semiconjugados, entonces tienen el mismo número de rotación.
3. Si $\rho(f) = 0$, entonces f admite un punto fijo.
4. Si F y G son levantamientos de f y g que conmutan, es decir $F \circ G = G \circ F$, entonces $\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G)$.

Prueba. Primero probemos la continuidad del número de rotación. Es decir, fijado f_0 y dado $\epsilon > 0$, debemos probar que existe $\delta > 0$ tal que para $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ sujeto a $\|f - f_0\|_\infty < \delta$ se cumple $|\rho(f) - \rho(f_0)| < \epsilon$. Sea F_0 levantamiento de f_0 . Tenemos por la proposición 2.10 que F_0 es la suma de la función identidad más una función continua y periódica de periodo 1, en consecuencia F_0 es uniformemente continua. De esta manera F_0 admite una función continua $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\phi(0) = 0$, para la cual

$$|F_0(x) - F_0(y)| \leq \phi(|x - y|). \quad (2.15)$$

En efecto, asumiendo que F_0 es uniformemente continua, basta definir la función $\phi(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} \{|F_0(x) - F_0(y)|\}$. Esta función resulta ser un módulo de continuidad para F_0 , pues satisface las propiedades mencionadas al inicio de esta sección. Por otro lado, para un levantamiento F se tiene que la función $F - Id$ es periódica, y de esta manera se cumple

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - F_0(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |F(x) - F_0(x)|.$$

Luego, para cada entero k , gracias a la expresión (2.14) de la observación 2.17 se tiene $\left| \rho(F_0) - \frac{F_0^k(0)}{k} \right| \leq \frac{1}{k}$. De acá se pasa a

$$\begin{aligned} |\rho(F) - \rho(F_0)| &< \left| \rho(F) - \frac{F^k(0)}{k} \right| + \left| \frac{F^k(0)}{k} - \frac{F_0^k(0)}{k} \right| + \left| \rho(F_0) - \frac{F_0^k(0)}{k} \right|, \\ &< \frac{1}{k} + \left| \frac{F^k(0)}{k} - \frac{F_0^k(0)}{k} \right| + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora para todo δ y todo levantamiento F para los cuales se satisface $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_0(x) - F(x)| < \delta$, encontremos un entero k adecuado del tal manera que el segundo término de (2.16) sea pequeño.

Al tener en cuenta la expresión (2.15), obtenemos

$$\begin{aligned}
 |F_0^2(0) - F^2(0)| &\leq |F_0(F_0(0)) - F_0(F(0))| + |F_0(F(0)) - F(F(0))|, \\
 &\leq \phi(|F_0(0) - F(0)|) + \delta, \\
 &\leq \delta + \phi(\delta).
 \end{aligned}$$

De igual manera pasamos a

$$\begin{aligned}
 |F_0^3(0) - F^3(0)| &\leq |F_0(F_0^2(0)) - F_0(F^2(0))| + |F_0(F^2(0)) - F(F^2(0))|, \\
 &\leq \phi(|F_0^2(0) - F^2(0)|) + \delta, \\
 &\leq \delta + \phi(\delta + \phi(\delta)).
 \end{aligned}$$

Prosiguiendo de manera inductiva, tenemos

$$\begin{aligned}
 |F_0^k(0) - F^k(0)| &\leq |F_0(F_0^{k-1}(0)) - F_0(F^{k-1}(0))| \\
 &\quad + |F_0(F^{k-1}(0)) - F(F^{k-1}(0))|, \\
 &\leq \phi(|F_0^{k-1}(0) - F^{k-1}(0)|) + \delta, \\
 &\leq \delta + \phi(\phi(\dots(\phi(\delta + \phi(\delta)))).
 \end{aligned}$$

Ahora elijamos un entero k para el cual $k > \frac{4}{\epsilon}$ y a continuación $\delta > 0$ para el cual

$$\delta + \underbrace{\phi(\phi(\dots(\phi(\delta + \phi(\delta)))))}_k \leq \frac{k\epsilon}{2}, \quad (2.17)$$

elección solventada en la continuidad de ϕ y la condición $\phi(0) = 0$.

Finalmente, teniendo en cuenta la elección de k , al reemplazar (2.17) en (2.16) se obtiene

$$|\rho(F) - \rho(F_0)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{k\epsilon}{2k} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Por lo tanto, se cumple la continuidad de la función ρ .

Para la segunda parte, sean F, G, H levantamientos de f, g, h , respectivamente, donde $h \circ f = g \circ h$. Para $x \in \mathbb{R}$, la expresión anterior en términos de levantamientos significa

$$\pi(H \circ F)(x) = \pi(G \circ H)(x),$$

es decir $(H \circ F)(x) = (G \circ H)(x) + k$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$. A partir de esto se cumple

$$H \circ F^n(x) = G^n \circ H(x) + nk, \quad (2.18)$$

pues G es de grado 1. Sea $\varphi(x) = H(x) - x$. Así, reordenando (2.18) de manera adecuada, se llega a

$$\begin{aligned} H \circ F^n(x) - F^n(x) + F^n(x) &= G^n \circ H(x) - H(x) + H(x) - x + x + nk \\ F^n(x) + \varphi(F^n(x)) &= (G^n - Id)(H(x)) + \varphi(x) + Id(x) + nk. \end{aligned}$$

Al dividir entre n se pasa a

$$\frac{1}{n}(F^n - Id)(x) + \frac{1}{n}\varphi(F^n(x)) = \frac{1}{n}(G^n - Id)(H(x)) + \frac{1}{n}\varphi(x) + k.$$

Al hacer $n \rightarrow +\infty$, y teniendo en cuenta por la proposición 2.10 que φ es una función acotada, logramos

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(F^n - Id)(x)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(G^n - Id)(H(x))}{n} + k = \rho(G) + k,$$

lo cual confirma la igualdad $\rho(f) = \rho(g)$.

Para la tercera parte, supongamos que f no posee punto fijo; lo cual significa $f([x]) \neq [x]$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Notemos que cuando F es un levantamiento de f tenemos $\pi(F(x)) \neq \pi(x)$ si y solamente si $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$. Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que se cumple $0 < F(x) - x < 1$ al ajustar el levantamiento mediante el entero adecuado. Definamos la función $\phi_0(x) = F(x) - x$. Sabemos por la proposición 2.10 que es ϕ continua y periódica de periodo 1, con lo cual se tiene $\phi_0([0, 1]) = \phi_0(\mathbb{R}) \subset (0, 1)$. Dado que $\phi(x)$ es una función definida sobre el compacto $[0, 1]$, obtiene un valor máximo y mínimo, digamos $x_0, x_1 \in [0, 1]$, es decir se cumple

$$0 < \phi_0(x_0) \leq \phi_0(x) \leq \phi_0(x_1) < 1.$$

Para $\delta = \min\{\phi_0(x_0), 1 - \phi_0(x_1)\} > 0$ se tiene

$$\delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta,$$

es decir

$$x + \delta \leq F(x) \leq x - \delta + 1. \tag{2.19}$$

Dado que F es creciente, y por ser la relación (2.19) válida para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} \delta &\leq F(0) \leq 1 - \delta \\ 2\delta &\leq F(\delta) \leq F^2(0) \leq F(1 - \delta) \leq 1 - \delta + (1 - \delta) \\ &\vdots \\ n\delta &\leq F^n(0) \leq n(1 - \delta) \end{aligned}$$

Al dividir entre n se logra

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta,$$

y cuando $n \rightarrow +\infty$, se obtiene finalmente $\delta \leq \rho(F) \leq 1 - \delta$ y con ello $0 < \rho(f) < 1$, lo cual contradice $\rho(f) = 0$, el supuesto de partida.

Ahora probaremos la última propiedad. Sean F y G levantamientos respectivos de f y g para los cuales se tenga $(F \circ G)(x) = (G \circ F)(x)$. De esta manera se cumple $(F \circ G)^n = G^n \circ F^n = F^n \circ G^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Primero observemos que un proceso análogo al descrito en la observación 2.17, nos permite concluir $|\rho(G) - \frac{G^n(x) - x}{n}| < \frac{1}{n}$. De esta manera, para $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera en \mathbb{R} se logra

$$\left| \rho(G) - \frac{G^n(x_m) - x_m}{n} \right| < \frac{1}{n},$$

por lo cual, $\rho(G) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G^n(x_m) - x_m}{n}$.

Finalmente, de esta manera se tiene

$$\begin{aligned} \rho(F \circ G) - \rho(F) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(F \circ G)^n(x) - x}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G^n(F^n(x)) - x}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G^n(F^n(x)) - F^n(x)}{n} \\ &= \rho(G). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G)$. □

Observación 2.22. Para $f, g \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ con $f \circ g = g \circ f$ también vale $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)$. Para más detalles vea el libro [11, p.155] o el artículo [12, p.22].

2.4. Dinámica tipo racional

Cuando el número de rotación es racional, ocurre algo muy similar a la dinámica de las rotaciones racionales. Específicamente, existen órbitas periódicas. Además, tales órbitas dentro de la circunferencia quedan ordenadas de la misma manera como en una rotación estándar.

Proposición 2.23. *Sea $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$. Entonces $\rho(f)$ es racional si y solo si f tiene un punto periódico. De ser éste el caso, todas las órbitas periódicas tienen el mismo periodo.*

Prueba. Primero asumamos que f posee un punto periódico. Elijamos $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $\pi(x_0) \in \mathbb{T}$ sea periódico de periodo $q \geq 1$. En este caso, para F , levantamiento de f , se tendrá $\pi(x_0) = f^q(\pi(x_0)) = \pi(F^q(x_0))$, de donde obtenemos $F^q(x_0) = x_0 + p$, para cierto entero p . Luego, de esta última expresión, tenemos $F^{2q}(x_0) = F^q(x_0 + p) = F^q(x_0) + p = x_0 + 2p$. Procediendo de manera inductiva logramos

$$F^{nq}(x_0) = x_0 + np.$$

Finalmente calculamos

$$\rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(x_0) - x_0}{nq} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Recíprocamente, sea $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Dado F , un levantamiento de f , resulta que F^k es un levantamiento de f^k . Ahora por la última propiedad de la proposición 2.21, aplicada a f^n , se tiene

$$\rho(f^k) = k\rho(f) \pmod{1}.$$

En particular para $k = q$ tenemos $\rho(f^q) = q \cdot \rho(f) = q \cdot \frac{p}{q} = p \pmod{1} = 0$. Al aplicar el tercer ítem de la proposición 2.21 se concluye que f^q posee un punto fijo. Por lo tanto, f posee un punto periódico de periodo q cuando $\rho(f) = \frac{p}{q}$.

Ahora, cuando se tiene $\rho(f) = \frac{p}{q}$ con p y q primos entre sí, veamos que todos los puntos periódicos tienen periodo q . Sea F un levantamiento de f tal que $\rho(F) = \frac{p}{q}$ y sea $\pi(x)$ un punto periódico para f , sujeto a

$$F^{q'}(x) = x + p', \tag{2.20}$$

para algún $p' \in \mathbb{Z}$. Haciendo el cálculo resulta

$$\frac{p}{q} = \rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nq'}(x) - x}{nq'} = \frac{p'}{q'},$$

y de este modo existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $p' = dp$ y $q' = dq$. Afirmamos que se cumple $F^q(x) = x + p$. En efecto, supongamos se tenga $F^q(x) > x + p$ ó $F^q(x) < x + p$. Sin pérdida de generalidad hurguemos exclusivamente en la posibilidad $F^q(x) > x + p$, pues el otro caso es análogo. Obsérvese que $F^q(x) > x + p$ y el hecho de que $F^q(x) - x$ sea periódica conducen a

$$F^{2q}(x) = F^q(F^q(x)) > F^q(x + p) > x + 2p,$$

y una simple inducción deriva en $F^{dq}(x) > x + dp$. Dado que se cumple $p' = dp$ y $q' = dq$, se tiene entonces la desigualdad

$$F^{q'}(x) > x + p',$$

lo que contradice (2.20). De esta manera $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$ y con ello $\pi(x)$ es un punto periódico de periodo q . \square

Observación 2.24. En la proposición 2.23 es esencial tener $\deg(f) = 1$, pues si consideramos $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ definido por $f([x]) = [2x]$, de grado 2, no es difícil ver que se cumple

$$f([0]) = [0] \text{ y } f^2([1/3]) = [1/3].$$

Así $[0]$ y $[1/3]$ son puntos periódicos para f , de periodos distintos.

Por otro lado, la función $f(x, y) = (x, -y) \in \text{Diff}_-^0(\mathbb{T})$ tiene dos puntos fijos $(1, 0), (-1, 0)$ y los demás puntos son periódicos de período 2. Esto no contradice la proposición 2.23 pues esta f no preserva orientación.

Lema 2.25. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(x_0)$ es punto periódico de periodo q para f con $\rho(f) = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ primos entre sí. Entonces existe un levantamiento para f que satisface $F^q(x_0) = x_0 + p$.

Prueba. Escojamos G un levantamiento cualquiera de f . Al ser G^n un levantamiento de f^n se tiene $\pi(G^q(x_0)) = f^q(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$. De este modo se satisface $G^q(x_0) = x_0 + m$, para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Además, por la proposición 2.10 se tiene $G^q(x_0 + \ell) = G^q(x_0) + \ell$ para todo entero ℓ , y de esta suerte

$$G^{2q}(x_0) = G^q(x_0 + m) = G^q(x_0) + m = x_0 + m + m = x_0 + 2m.$$

Prosiguiendo de manera inductiva, tenemos $G^{nq}(x_0) = x_0 + nm$. Como se cumple

$$\frac{p}{q} = \rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G^{nq}(x_0) - x_0}{nq} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nm}{nq} = \frac{m}{q} \pmod{1},$$

existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{m}{q} = \frac{p}{q} + k$, y con ello obtenemos $m = p + qk$.

Definamos $F(x) = G(x) - k$. Justamente F definido de esta manera es el levantamiento requerido por el lema. Veamos. Aplicando F a x_0 en la expresión anterior se tiene

$$F^2(x_0) = F(G(x_0) - k) = G(G(x_0) - k) - k = G^2(x_0) - 2k.$$

De manera inductiva y teniendo en mente $m = p + qk$ obtenemos

$$F^q(x_0) = G^q(x_0) - qk = x_0 + m - qk = x_0 + p.$$

Hemos probando así que se cumple $F^q(x_0) = x_0 + p$. □

El siguiente resultado muestra que el ordenamiento de los puntos de una órbita periódica por un homeomorfismos de la circunferencia que preserva orientación con número de rotación racional es el mismo ordenamiento de una órbita por la correspondiente rotación.

Dados $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{T}$, elijamos $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in [y_0, y_0 + 1) \subset \mathbb{R}$ para los cuales $\pi(y_i) = x_i$. El **ordenamiento** de los puntos (x_0, \dots, x_n) sobre \mathbb{T} es la permutación σ de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ para la cual se tiene $y_0 < y_{\sigma(1)} < \dots < y_{\sigma(n-1)} < y_0 + 1$. En el siguiente teorema veremos que una única permutación permite ordenar órbitas distintas.

Teorema 2.26. *Sea $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ con $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ donde p y $q \in \mathbb{Z}^+$ son relativamente primos. Entonces para cualquier punto $x \in \mathbb{T}$ periódico de periodo q el ordenamiento de la órbita $\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$ es el mismo ordenamiento de la órbita $\mathcal{O}_{\mathcal{R}_\rho}(0) = \left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \frac{3p}{q}, \dots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}$.*

Prueba. Sea $x_0 \in \mathbb{T}$ punto periódico de periodo q , es decir sujeto a $f^q(x_0) = x_0$. Para efectos de la prueba, pondremos $x_n = f^n(x_0)$. Sea $A = \pi^{-1}(\mathcal{O}_f(x_0))$ y elijamos $y_0 \in \mathbb{R}$ para el cual $x_0 = \pi(y_0)$.

A instancias del lema 2.25, escojamos un levantamiento F de f sujeto a

$$F^q(y_0) = y_0 + p. \tag{2.21}$$

Afirmamos que el conjunto A divide al conjunto $[y_0, y_0 + p)$ en $p \cdot q$ subintervalos. En efecto, cada intervalo $[y_0, y_0 + 1)$ contiene q elementos. Esto se justifica gracias a la identificación entre el conjunto $[y_0, y_0 + 1)/(y_0 \sim y_0 + 1)$ y la circunferencia; y por cumplirse que q es el número de elementos de $\mathcal{O}_f(x_0)$. Luego nuestra afirmación es inmediata, pues tenemos p intervalos $[y_0 + r - 1, y_0 + r)$, donde $r = 1, \dots, p$, cada uno de los cuales contiene q puntos por la identificación antes mencionada.

Al mismo tiempo, el intervalo $[y_0, y_0 + p)$ es particionado en

$$[y_0, F(y_0)), [F(y_0), F^2(y_0)), \dots, [F^{q-1}(y_0), y_0 + p),$$

disjuntos. Además ahí F es un homeomorfismo, en particular una biyección que lleva el intervalo $[F^{i-1}(y_0), F^i(y_0))$ en $[F^i(y_0), F^{i+1}(y_0))$ para $1 \leq i \leq q - 1$. En consecuencia, los q intervalos $[F^i(y_0), F^{i+1}(y_0))$ contienen la misma cantidad de subintervalos. Y dado que por la afirmación anterior $[y_0, y_0 + p)$ posee $p \cdot q$ subintervalos, concluimos que cada uno entre los $[F^{i-1}(y_0), F^i(y_0))$ contiene p subintervalos.

Ahora debido a que aparece un número finito de puntos de $\pi^{-1}(\mathcal{O}_f(x_0))$ en $[y_0, F(y_0))$, existirán $k \in \mathbb{Z}$ y $\ell \in \mathbb{Z}$ para el cual $y_k = F^k(y_0) - \ell$ sea el primer elemento inmediatamente a la derecha de y_0 . Es decir $y_0 < y_k$. Bajo esta consideración se ha de tener también $y_k < y_{2k}$, pues caso contrario se tendría $y_r \in (y_k, y_{2k})$ y con ello $y_{r-k} \in (y_0, y_k)$, lo cual desluce la elección de k . Procediendo de manera inductiva aparece el siguiente orden

$$y_0 < y_k < \cdots < y_{(q-1)k} < y_0 + 1. \quad (2.22)$$

Definamos

$$G = F^k - \ell. \quad (2.23)$$

De esta manera tenemos $y_k = G(y_0)$ y $y_{jk} = G^j(y_0)$ para $j \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$. Y como el intervalo $[y_0, F(y_0))$ posee $p + 1$ puntos, al reescribir la expresión (2.22) logramos

$$G(y_0) < G^2(y_0) < \cdots < G^q(y_0) = y_0 + 1,$$

donde $G^p(y_0) = y_{pk} = F(y_0)$.

También, de manera inductiva sobre la expresión (2.23), al tener en cuenta la igualdad anterior, se pasa a

$$F^{kp}(y_0) - p\ell = G^p(y_0) = F(y_0).$$

Así, al proyectar, se logra

$$\pi(F^{pk}(y_0) - p\ell) = \pi \circ F(y_0),$$

de donde se consigue $f^{kp}(x_0) = f(x_0)$, es decir $f^{kp-1}(x_0) = x_0 = f^q(x_0)$. De esta manera $kp - 1$ es un múltiplo de q , lo que significa se cumple $kp \equiv 1 \pmod{q}$.

Para el remate definimos $\sigma : \{1, \dots, q - 1\} \rightarrow \{1, \dots, q - 1\}$ por $\sigma(j) = jk$ módulo q . Los puntos $x_{\sigma(i)} = x_{ki}$, quedan ordenados en la circunferencia cual

$$x_0 \prec x_{\sigma(1)} \prec x_{\sigma(2)} \prec \cdots \prec x_{\sigma(q-1)}.$$

En este orden $x_{\sigma(i+1)}$ es el primer elemento inmediatamente a la derecha de $x_{\sigma(i)}$ en la orientación positiva en la circunferencia. En particular para $f = R_{\frac{p}{q}}$, al remedar el procedimiento anterior, la órbita de $R_{\frac{p}{q}}(0)$ queda ordenada cual $\{0, \frac{kp}{q}, \frac{2kp}{q}, \dots, \frac{(q-1)kp}{q}\}$, donde $kp \equiv 1 \pmod{q}$. \square

Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una aplicación invertible. Un punto $x \in \mathbb{T}$ es llamado **heteroclínico para una pareja de puntos** $a, b \in \mathbb{T}$, si se satisface $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = a$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = b$. Si $a = b$, entonces x se dice que es un punto **homoclínico** de a . (Ver figura 1.1 para un ejemplo.)

Observemos que este fenómeno ya ocurre para homeomorfismos de intervalos.

Lema 2.27. *Sea $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ un homeomorfismo de un intervalo de la recta en sí mismo tal que los únicos puntos fijos son extremos del intervalo $[a, b]$. Supongamos que se cumple $F(x) > x$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces para cualquier punto $x \in (a, b)$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = b \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} F^{-n}(x) = a.$$

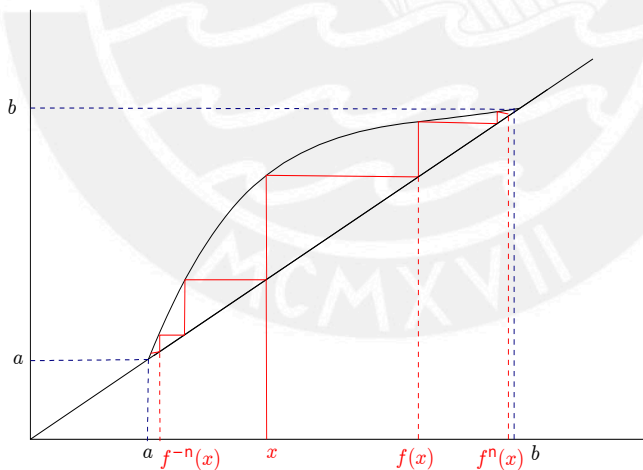


Figura 2.2: Órbitas asintóticas a puntos fijos.

Prueba. Como $F(x) > x$ para todo $x \in (a, b)$, dado $x \in (a, b)$ la sucesión $\{F^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada por b . Por lo tanto, tal sucesión converge a algún punto $c \in [a, b]$. Por la continuidad de F el punto c tiene que ser un punto fijo. Como $F^n(x) > x > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el punto fijo c tiene que ser b . Un argumento análogo muestra $\lim_{n \rightarrow -\infty} F^{-n}(x) = a$. \square

2.4. Dinámica tipo racional

A continuación veremos que cuando f posee una única órbita periódica, ésta es semiestable, en el sentido que repele por un lado y atrae por el opuesto.

Proposición 2.28. *Sea $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ con $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Entonces existen dos posibles tipos de órbitas no periódicas para f .*

1. *Si f admite exactamente una órbita periódica, entonces cualquier otro punto es heteroclínico bajo f^q a dos puntos sobre la órbita periódica. Estos puntos son diferentes si el periodo es mayor que 1.*
2. *Si f tiene más de una órbita periódica, cada punto no periódico es heteroclínico bajo f^q a dos puntos sobre órbitas periódicas distintas.*

Prueba. Supongamos que la órbita periódica es única. Para $x \in \mathbb{T}$ punto periódico de periodo q , tomemos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b \leq a + 1$ para el cual $\pi(a) = x$ y $\pi(b) = y$, con y el primer elemento de la órbita de f que se encuentra inmediatamente a la derecha de x , tal como se hizo en la prueba del teorema 2.26. Por el lema 2.25 podemos escoger un levantamiento F de f condicionado a $F^q(a) = a + p$ y $F^q(b) = b + p$. Ahora, al elegir $G = F^q - p$, se cumple $G(a) = a$, $G(b) = b$. Así $G : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es un homeomorfismo que fija los extremos, y en uso del lema 2.27, todo punto en el intervalo (a, b) es heteroclínico a los extremos fijos.

Dado que $G = F^q - p$ es un levantamiento de f^q , al proceder de manera inductiva conseguimos en $G^n = F^{nq} - np$ un levantamiento para f^{nq} . Así cada punto z es heteroclínico a los puntos a y b , y tenemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} G^n(z) = b$. Teniendo en mente la continuidad de π restringida al intervalo (a, b) , obtenemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \circ G^n(z) = \pi(b)$.

Por otro lado, $\pi(G^n(z)) = (f^q)^n(\pi(z))$ y $\pi(b) = y$ implican

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nq}(\pi(z)) = y.$$

Un procedimiento análogo permite demostrar $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-nq}(z) = x$. En otras palabras, hemos probado que todo $\pi(z) \in (x, y)$ es heteroclínico vía f^q a dos puntos $x, y \in \mathcal{O}_{x_0}$. Es claro que para $q \neq 1$, los puntos x e y son distintos.

Ahora supongamos que la órbita de f no es única. Es decir f tiene más de una órbita periódica. Supongamos por reducción al absurdo que tenemos $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ tales que a y

b son contiguos y que ambos proyectan a una misma órbita en la circunferencia. Afirmamos que f tiene apenas una única órbita, esto representa una contradicción. Veamos. Sean $\pi(a) = x \in \mathbb{T}$ y $\pi(b) = y = f^k(x) \in \mathbb{T}$, entonces $\bigcup_{n=0}^{q-1} f^{nk}(\pi(a, b))$ cubre el complemento de $\{f^n(x)\}_{n=0}^{q-1}$ en la circunferencia y no contiene puntos periódicos. Por invariancia, cada uno de los $f^{nk}(\pi(a, b))$ tampoco lo hace. \square

Observación 2.29. Para el caso de una única órbita fija, tendríamos puntos homoclínicos al punto fijo.

Finalizamos esta sección analizando el problema de conjugación topológica para homeomorfismos con número de rotación racional.

Proposición 2.30. *Sea f es un homeomorfismo para el cual $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Si f es topológicamente conjugada a la rotación $R_{\frac{p}{q}}$, entonces se tiene $F^q = Id$.*

Prueba. Supongamos se tenga $f = h^{-1} \circ R_{\frac{p}{q}} \circ h$ para un homeomorfismo h . Entonces para H levantamiento de h se tiene que $F = H^{-1} \circ R_{\frac{p}{q}} \circ H$ es un levantamiento de f , de esta manera

$$F^q = H^{-1} \circ R_{\frac{p}{q}}^q \circ H = H^{-1} \circ R_p \circ H = H^{-1} \circ H \circ R_p = R_p,$$

dado que R_q conmuta con H (item (1) de la proposición 2.10). Finalmente, al proyectar $f^q = \pi(F^q) = Id$. \square

Observación 2.31. La recíproca de la proposición anterior también es válida, considerando a f de clase $C^r, 0 \leq r \leq \omega$. Para mayores detalles ver [12, p.48].

2.5. Dinámica tipo irracional

En el capítulo 1 vimos que para una rotación irracional las órbitas son densas en toda la circunferencia. En esta sección veremos que, sin embargo, para $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ algunas órbitas barren apenas un conjunto de tipo Cantor y no toda la circunferencia.

Lema 2.32. *Sea $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Elijamos enteros $m < n$, y un punto $x \in \mathbb{T}$. Consideremos el intervalo cerrado $I = [f^m(x), f^n(x)] \subset \mathbb{T}$, con $f^m(x) < f^n(x)$. Entonces para todo $y \in \mathbb{T}$, cierto iterado $f^\ell(y)$ pertenece a I ; es más, este ℓ puede tomarse no negativo.*

Prueba. Sea $I = [f^m(x), f^n(x)]$. De cumplirse $\mathbb{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, con $I_k = f^{-k(m-n)}(I)(x)$, entonces el resultado sería obvio pues $y \in I_\ell$ implica $f^\ell(y) \in I$. Mostremos ahora que, en efecto, los I_k cubren toda la circunferencia. Supongamos lo contrario. Entonces tenemos

$$\mathbb{T} \not\subseteq \bigcup_k I_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} [f^{-(k-1)m+kn}(x), f^{-km+(k+1)n}(x)].$$

Dado que los intervalos I_k son contiguos y solamente coinciden en sus extremos, tenemos que alguno de los extremos de los intervalos I_k , por ejemplo $\{f^{-k(m-n)}(f^n(x))\}_{k=0}^{\infty}$ formarán una sucesión monótona creciente y acotada, y de esta manera convergente. Luego para $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{-k(m-n)}(x_n) = z$ se tendría que z es un punto fijo para $f^{-(m-n)}$ por continuidad. Esto contradice el hecho de que ρ es irracional. \square

Proposición 2.33. *Sea $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces $\omega_f(x)$ es independiente del punto que lo define. Es más, este conjunto compacto y f -invariante es o bien todo \mathbb{T} o, en su defecto, un conjunto de Cantor.*

Prueba. Primero probemos que si $x, y \in \mathbb{T}$, se cumple $\omega_f(x) = \omega_f(y)$. Para $z \in \omega_f(x)$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\ell_n}(x) = z \tag{2.24}$$

para alguna sucesión $\ell_n \in \mathbb{N}$ monótona creciente. Ahora, dado $y \in \mathbb{T}$ y $f^{\ell_n}(x) < f^{\ell_n+1}(x)$, por el lema 2.32 para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger $k_n \in \mathbb{N}$ para el cual se tiene

$$f^{k_n}(y) \in I_n = [f^{\ell_n}(x), f^{\ell_n+1}(x)]. \tag{2.25}$$

Veremos que se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(y) = z$. En efecto, debido a (2.24) tenemos que todo punto límite del intervalo I_n converge a z . Esto implica por (2.25) que los puntos $f^{k_n}(y)$ también convergen a z . Así, se tiene $z \in \omega(y)$, es decir $\omega(x) \subset \omega(y)$. Es claro que por simetría se cumple la inclusión opuesta y por ende la igualdad.

Por otro lado, sabemos por el lema 1.12 que $\omega_f(x)$ es un conjunto cerrado, no vacío, f -invariante y minimal con respecto a los propiedades anteriores. Por lo tanto, los únicos subconjuntos cerrados invariantes de $\omega_f(x)$ son $\omega_f(x)$ y \emptyset . Dado que $\partial\omega_f(x) \subset \omega_f(x)$ es un subconjunto cerrado y f -invariante, tenemos las siguientes alternativas:

- $\partial\omega_f(x) = \emptyset$, y con ello $\omega_f(x) = \mathbb{T}$ (pues $\partial\omega_f(x) = \overline{\omega_f(x)} \cap \overline{\mathbb{T} \setminus \omega_f(x)}$).
- $\partial\omega_f(x) = \omega_f(x)$, y así $\omega_f(x)$ es nunca denso.

En el segundo caso es evidente que $\omega_f(x)$ es perfecto, pues al tenerse $z \in \omega_f(x)$, con x arbitrario, se tiene también $z \in \omega_f(z)$. De esta manera por definición existirá k_n para el cual $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{k_n}(z) = z$. Obligatoriamente ha de tenerse $f^{k_n}(z) \neq z$, pues caso contrario se tendría $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. En conclusión, $\omega_f(x)$ es un conjunto cerrado, perfecto y nunca denso, es decir, un conjunto de Cantor. \square

Proposición 2.34. *Sea F levantamiento de $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ con $\rho(F) \notin \mathbb{Q}$. Fijemos $x \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$, para algún x .
2. $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$, para todo x .
3. $n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$,
4. $R_\rho^{n_1}(0) + m_1 < R_\rho^{n_2}(0) + m_2$

Prueba. Primero, (1) implica (2), pues dados $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, supongamos se tenga

$$F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2. \quad (2.26)$$

Observemos que esta desigualdad estricta ocurre para cualquier $x \in \mathbb{R}$, pues caso contrario se ha de tener $F^{n_1}(x_0) + m_1 = F^{n_2}(x_0) + m_2$ para algún x_0 , y esto implicaría $F^{n_1-n_2}(x_0) = x_0 + m_2 - m_1$. Ahora, el proyectar

$$\pi \circ (F^{n_1-n_2}(x_0)) = \pi(x_0 + m_2 - m_1) = \pi(x_0),$$

conduciría a $f^{n_1-n_2}(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$ y se contradiría el hecho de que f no tiene órbitas periódicas.

Ahora, probemos que (2) implica (3). En efecto, gracias a la independencia de x , podemos tomar $y = F^{-n_2}(x)$ y reemplazar en (2.26), para tener

$$F^{n_1-n_2}(x) < x + m_2 - m_1.$$

Por otro lado $F^{n_1-n_2}$ es un levantamiento, en particular una función creciente, y por ello

$$\begin{aligned} F^{2(n_1-n_2)}(x) &< F^{n_1-n_2}(x + m_2 + m_1) \\ &= F^{n_1-n_2}(x) + (m_2 - m_1) \\ &< x + 2(m_2 - m_1). \end{aligned}$$

Así, procediendo de manera inductiva, para todo entero k logramos

$$F^{k(n_1-n_2)}(x) < x + k(m_2 - m_1).$$

Usando la definición del número de rotación pasamos a

$$\rho(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^{k(n_1-n_2)}(x) - x}{k(n_1 - n_2)} \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Por lo tanto $\rho \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}$ y en consecuencia $\rho n_1 + m_1 \leq \rho n_2 + m_2$. Dada la condición $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, concluimos $\rho n_1 + m_1 < \rho n_2 + m_2$.

Claramente (3) implica (4) por la definición de R_ρ . Finalmente, no es difícil probar que (4) implica (1). Lo cual concluye la prueba. \square

2.6. Teorema de clasificación de Poincaré

En esta sección demostraremos un criterio para determinar cuándo un homeomorfismo de la circunferencia que preserva orientación es topológicamente conjugado a una rotación irracional. Este criterio está basado en la transitividad topológica de los homeomorfismos y tiene presente los dos posibles casos de la proposición 2.33. Para tal fin necesitaremos del lema 7 de la página 65 en [20].

Lema 2.35. *Sean α y β números reales no nulos y $\Lambda = \{n\alpha + m\beta : n, m \in \mathbb{Z}\}$ el subgrupo aditivo de \mathbb{R} generado por éstos. Entonces solo una de las siguientes dos alternativas es viable.*

1. *El subgrupo Λ es discreto. En este caso $\frac{\alpha}{\beta}$ es un número racional no nulo. Es más existe $\sigma > 0$ con el cual se tiene $\Lambda = \{k\sigma : k \in \mathbb{Z}\}$.*
2. *El subgrupo Λ es denso en \mathbb{R} . De ser así $\frac{\alpha}{\beta}$ ha de ser un número irracional.* \square

Corolario 2.36. *El conjunto $\mathcal{B} = \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$ es denso en \mathbb{R} siempre que $\rho \notin \mathbb{Q}$. \square*

Lema 2.37. *Sea una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente para la cual se tiene $F(x + 1) = F(x) + 1$ y $\rho(F) = \rho \notin \mathbb{Q}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ escribimos*

$$\mathcal{A}(x) = \{F^n(x) + m; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Entonces

1. *si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ con el cual $\mathcal{A}(x_0)$ no es denso en \mathbb{R} , entonces F es semiconjugada a una rotación R_ρ por medio de una función H continua, creciente y sobreyectiva sujeta a $H(x + 1) = H(x) + 1$;*
2. *si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ para el cual $\mathcal{A}(x_0)$ es denso en \mathbb{R} , entonces F es un homeomorfismo topológicamente conjugado a la rotación R_ρ .*

Prueba. Sea $\mathcal{B} = \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$. Definamos $H_0 : \mathcal{A}(x_0) \rightarrow \mathcal{B}$ mediante

$$H_0(F^n(x_0) + m) = n\rho + m,$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$. Primero notemos que la función H_0 está bien definida. En efecto, supongamos $F^n(x_0) + m = F^{\tilde{n}}(x_0) + \tilde{m}$, para algunos enteros $n \neq \tilde{n}$, $m \neq \tilde{m}$. En este caso se tiene $\pi(F^n(x_0) + m) = \pi(F^{\tilde{n}}(x_0) + \tilde{m})$ y por lo tanto $f^n(x_0) = f^{\tilde{n}}(x_0)$. Como f no tiene puntos periódicos concluimos $n = \tilde{n}$ y así $m = \tilde{m}$. También, debido a $\rho \notin \mathbb{Q}$, la función H es inyectiva, pues caso contrario, para enteros n_1, n_2, m_1, m_2 se tendría

$$H_0(F^{n_1}(x_0) + m_1) = H_0(F^{n_2}(x_0) + m_2),$$

de donde concluiríamos $\rho = \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2} \in \mathbb{Q}$, la misma contradicción.

Por otro lado, por el lema 2.34, H_0 es monótona creciente. Afirmamos que la función H_0 se puede extender a una función continua $H : \overline{\mathcal{A}(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$. En efecto. Es lícito definir $H(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_0(x_n)$, para $y \in \overline{\mathcal{A}(x_0)}$, $x_n \in \mathcal{A}(x_0)$. Vemos que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} H_0(x_n)$ existe y es independiente de la elección de la secuencia aproximándose a y , pues, por la monotonía de H_0 se tiene que los límites tanto por la derecha y por la izquierda existen y son independientes de la elección de la sucesión. Además, estos límites laterales han de ser iguales, pues, sino, el conjunto $\mathbb{R} \setminus H_0(\mathcal{A}(x_0))$ contendría un intervalo, contradiciendo la densidad de $H_0(\mathcal{A}(x_0)) = \mathcal{B}$.

Ahora extendamos esta función a todo \mathbb{R} . Dado que $\overline{\mathcal{A}(x_0)}$ es un conjunto cerrado, el conjunto $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathcal{A}(x_0)}$ es abierto. Tomemos cualquier componente conexa de $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathcal{A}(x_0)}$, es decir un intervalo (a, b) con extremos en $\overline{\mathcal{A}(x_0)}$. Afirmamos que se satisface $H(a) = H(b)$. Si no, en caso de tener $H(a) < H(b)$, debido a que \mathcal{B} es un conjunto denso en \mathbb{R} por el corolario 2.36, el intervalo $(H(a), H(b))$ contendría algún punto $y_0 \in \mathcal{B}$. Reparando en que H es inyectiva y monótona, conseguimos $H^{-1}(y_0) \in (a, b)$ y así $\mathcal{A}(x_0) \cap I \neq \emptyset$. Esto último contradice la inclusión $I \subset \mathbb{R} \setminus \overline{\mathcal{A}(x_0)}$. Ahora, para cada componente (a, b) de $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathcal{A}(x_0)}$, hacemos $H(x) = H(a) = H(b)$, cuando $x \in (a, b)$. De esta manera queda definida una función continua $\tilde{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, monótona no decreciente, que coincide con H cuando se restringe a $\overline{\mathcal{A}(x_0)}$ y que es localmente constante en cada intervalo del complemento de $\overline{\mathcal{A}(x_0)}$.

Ahora probemos que H es una semiconjugación de F con una rotación irracional de ángulo ρ ; es decir, satisface $\tilde{H} \circ F = R_\rho \circ \tilde{H}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Primero, observemos que la igualdad anterior se cumple para $x \in \mathcal{A}(x_0)$. En efecto, sea $x = F^n(x_0) + m$, para algún $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. Usando la definición de H tenemos

$$\begin{aligned} H \circ F(x) &= H(F^{n+1}(x_0) + m) \\ &= (n+1)\rho + m \\ &= (n\rho + m) + \rho \\ &= H(F^n(x_0) + m) + \rho \\ &= R_\rho \circ H(x). \end{aligned}$$

Por la continuidad de \tilde{H} , lo mismo ocurre para $x \in \overline{\mathcal{A}(x_0)}$.

Finalmente constatamos que se cumple $H(x+1) = H(x) + 1$ para $x \in \mathcal{A}(x_0)$. En efecto, sea $x = F^n(x_0) + m$, para $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} H(x+1) &= H(F^n(x_0) + (m+1)) \\ &= n\rho + (m+1) \\ &= (n\rho + m) + 1 \\ &= H(F^n(x_0) + m) + 1 \\ &= H(x) + 1. \end{aligned}$$

Por la continuidad de \tilde{H} se obtiene $\tilde{H}(x+1) = \tilde{H}(x) + 1$, para $x \in \overline{\mathcal{A}(x_0)}$. Lo cual concluye la prueba de 1).

Para la segunda parte, tal como se definió al inicio de esta demostración, sea $H_0 : \mathcal{A}(x_0) \rightarrow B$ dada por $H_0(F^n(x_0) + m) = n\rho + m$. De igual manera extendemos H_0 a $\overline{\mathcal{A}(x_0)}$ para obtener $\tilde{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora, dado que H es monótona, resulta que \tilde{H} también lo es. Además, dado que se cumple $\overline{B} = \mathbb{R}$, inevitablemente \tilde{H} es sobreyectiva. Luego, con estas dos propiedades juntas, \tilde{H} es un homeomorfismo.

Ahora probemos que se cumple $\tilde{H} \circ F(x) = R_\rho \circ \tilde{H}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La prueba se realiza de manera análoga a lo realizado en la primera parte. Primero logramos $H \circ F(x) = R_\rho \circ H(x)$ cuando $x \in \mathcal{A}(x_0)$, y luego por la continuidad de \tilde{H} lo extendemos a todo $x \in \overline{\mathcal{A}(x_0)} = \mathbb{R}$.

También ha de cumplirse $\tilde{H}(x+1) = \tilde{H}(x) + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Para ello tomemos $x = F^n(x_0) + m$, para los cuales obtenemos $\tilde{H}(x) = H(F^n(x_0) + m) = n\rho + (m+1) = H(x) + 1$. Por continuidad de \tilde{H} , se tiene lo pedido para todo x . \square

Teorema 2.38 (Clasificación de Poincaré). *Sea $f \in \text{Diff}_+^0(\mathbb{T})$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. Si f no es topológicamente transitiva, entonces f es semiconjugada a una rotación irracional $\mathcal{R}_{\rho(f)}$.
2. Si f es topológicamente transitiva, entonces f es topológicamente conjugada a una rotación irracional $\mathcal{R}_{\rho(f)}$.

Prueba. Dado que $\overline{\mathcal{A}(x)}$ se proyecta a la clausura de la órbita de f y como ésta contiene a $\omega_f(\pi(x))$, por la proposición 2.33, se tiene que $x \in \mathbb{T} \rightarrow \omega_f(x) = \omega_f$ es constante, por tal motivo consideremos ω_f el conjunto minimal y elijamos $z_0 = \pi(x_0) \in \omega_f$. Sea F levantamiento de f y \mathcal{O}_{z_0} la órbita de z_0 por f . Observemos que la imagen inversa de la órbita $\pi^{-1}(\mathcal{O}_{z_0})$ es igual al conjunto $\mathcal{A}(x_0) = \{F^n(x_0) + m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ del lema anterior. Definamos $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ por

$$h(\pi(x)) = H(x) \pmod{1}.$$

Sea $\pi(\overline{\mathcal{A}(x_0)}) = \omega_f$.

Para el caso $\omega_f \neq \mathbb{T}$, se sigue directamente de la primera parte del lema 2.37 que h hereda las propiedades de H , es decir h es continua, sobreyectiva, preserva la orientación y además cumple

$$h \circ f = \mathcal{R}_\rho \circ h.$$

Además, obsérvese que por la proposición 2.33, K es un conjunto de Cantor. Consecuentemente, en el caso de una semiconjugación, la dinámica del conjunto de Cantor es casi conjugada a una rotación irracional $R_{\rho(f)}$: es decir, si \sim identifica los extremos de los intervalos complementarios, entonces h es una biyección de ω_f / \sim para \mathbb{T} y de esta manera conjuga $f|_{\omega_f / \sim}$ con R_ρ .

Si $\omega_f = \mathbb{T}$, la prueba se desprende de la segunda parte del lema 2.37 con $\overline{\mathcal{A}(x_0)} = \mathbb{R}$.
□

Observación 2.39. La conjugación h es única, salvo composición con una rotación. Para ver esto, supongamos que h_1, h_2 realizan conjugación topológica entre f y $R_{\rho(f)}$. Sea $\alpha = H_1(x_0) - H_2(x_0)$. Entonces se cumple $H_1(x_0) = R_\alpha \circ H_2(x_0)$. En general para $x = F^n(x_0) + m \in A(x_0)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 H_1(x) &= H_1(F^n(x_0) + m), \\
 &= R_\rho^n \circ H_1(x_0) + m, \\
 &= R_\rho^n \circ R_\alpha \circ H_2(x_0) + m, \\
 &= R_\alpha \circ R_\rho^n \circ H_2(x_0) + m, \\
 &= R_\alpha \circ H_2(F^n(x_0) + m), \\
 &= R_\alpha \circ H_2(x).
 \end{aligned}$$

Por continuidad, la igualdad se extiende a todo $x \in \overline{\mathcal{A}(x_0)} = \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Difeomorfismos del toro \mathbb{T}

En este capítulo final analizaremos condiciones bajo las cuales difeomorfismos de la circunferencia que preservan orientación se conjugan en el sentido topológico con rotaciones irracionales. Veremos que tales condiciones tienen mucho que ver con la diferenciabilidad del difeomorfismo. El propio Poincaré en la tercera de sus memorias [19, p.241] plantea la cuestión de la diferenciabilidad de f , como se aprecia en la siguiente traducción.

“Quedaría ver si esta tercera hipótesis, algunas de cuyas consecuencias acabamos de desarrollar, puede realizarse, o, en otros términos, si es compatible con los tres principios que enunciamos anteriormente con respecto a la ley de consecuencia

$$\omega_1 = \psi(\omega_0)$$

y la forma particular de las ecuaciones diferenciales consideradas.

Puedo afirmar que es compatible con los dos primeros principios en virtud de que la función ψ es continua y creciente. ¿Es también compatible con el tercer principio, en virtud de lo cual la función ψ sería holomorfa? Eso es lo que quedaría por examinar. Habría que, o bien encontrar un ejemplo donde la tercera hipótesis sea realizada, lo que no pude hacer hasta aquí, o bien demostrar la imposibilidad en todos los casos. No pude tampoco llegar a este resultado, y creo, por otra parte, que la hipótesis efectivamente es realizable...”

Sin embargo en 1932, contrariamente a lo que Poincaré suponía probable, Denjoy [8, p.252-254] construye un difeomorfismo no transitivo de clase C^1 con número de

3.1. Teorema de Denjoy

rotación irracional, es decir, que no conjuaga con una rotación irracional. Tal construcción será realizada en la prueba del teorema 3.9.

Por otro lado, para difeomorfismos de clase C^2 con número de rotación irracional siempre se obtiene conjugación con rotaciones irracionales tal como anuncia el teorema 3.4 que pasaremos a demostrar más adelante.

3.1. Teorema de Denjoy

Cuando f es un difeomorfismo de la circunferencia de clase C^2 y F un levantamiento de f , se cumple $F'(x) > 0$ pues F es creciente e invertible. Además la expresión $f'([x]) = F'(x)$ está bien definida y no depende del levantamiento de f .

Lema 3.1. *Sea $f \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T})$ y F un levantamiento de f . Definamos*

$$C = \sup \left\{ \frac{F''(x)}{F'(x)} \mid x \in [0, 1] \right\}.$$

Entonces se cumple

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)} \right| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(y)|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Prueba. Primero notemos que C está bien definida, pues la función $\frac{F''(x)}{F'(x)}$ es continua en el compacto $[0, 1]$. Es más, por la periodicidad de F este supremo es el mismo sobre todo \mathbb{R} . Para $x, y \in \mathbb{R}$ por reglas de derivación tenemos

$$\begin{aligned} \log(F^n)'(x) &= \log F'(F^{n-1}(x)) \cdot F'(F^{n-2}(x)) \cdots F'(x) \\ &= \log \prod_{k=0}^{n-1} F'(F^k(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \log F'(F^k(x)). \end{aligned}$$

De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)} \right| &= |\log(F^n)'(x) - \log(F^n)'(y)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \log F'(F^k(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} \log F'(F^k(y)) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\log F'(F^k(x)) - \log F'(F^k(y))|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dado que $\log F'$ satisface las condiciones del teorema del valor medio, para los $k \in \mathbb{Z}$ existen $\xi_k \in (F^k(x), F^k(y))$ tales que

$$\frac{\log F'(F^k(y)) - \log F'(F^k(x))}{F^k(y) - F^k(x)} = (\log F')'(\xi_k) = \frac{F''(\xi_k)}{F'(\xi_k)}, \quad (3.2)$$

y por consiguiente al reemplazar (3.2) en (3.1) tenemos

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{F''(\xi_k)}{F'(\xi_k)} \right| |F^k(x) - F^k(y)|.$$

Al cumplirse $\left| \frac{F''(\xi_k)}{F'(\xi_k)} \right| \leq C$, obtenemos lo deseado. \square

Denotemos por ℓ_n la longitud del intervalo $F^n((a, b))$, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Lema 3.2 (Distorsión limitada). *Sea $f \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T})$ y F un levantamiento de f . Pongamos $C = \sup \left\{ \frac{F''(x)}{F'(x)} \mid x \in [0, 1] \right\}$. Si $I \subset [0, 1]$ es un intervalo para el cual $\pi(I), \pi(F(I)), \dots, \pi(F^{n-1}(I))$ son intervalos disjuntos entre sí, entonces se cumple*

$$e^{-C} \leq \left| \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)} \right| \leq e^C$$

para todo $x, y \in I$.

Prueba. Sea $x, y \in I$. Por el lema 3.1 tenemos

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)} \right| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(y)|.$$

Dado que se tiene $F^k(x), F^k(y) \in F^k(I)$ e $I, F(I), F^2(I), \dots, F^k(I)$ son disjuntos dos a dos, obtenemos $\sum_{k=0}^{n-1} \ell(F^k(I)) \leq \ell([0, 1]) = 1$. En consecuencia logramos

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)} \right| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \ell(F^k(I)) \leq C, \quad (3.3)$$

de donde se sigue directamente lo pedido. \square

Fijemos ahora

$$0 < \delta < \frac{\ell_0}{C} e^{-(C+1)}, \quad (3.4)$$

y notemos que δ depende apenas de C , el cual a su vez depende en última instancia de la norma C^2 de f . Bajo esta premisa, probemos que podemos aumentar el tamaño de ciertos intervalos por una cantidad uniforme $\delta = \delta(C) > 0$ para obtener otros intervalos para los cuales las longitudes de sus iterados no crecen mucho. Lo antes dicho se formaliza en el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sea $I = [a, b] \subset [0, 1]$ para el cual $\pi(I), \pi(F(I)), \dots, \pi(F^{n-1}(I))$ son disjuntos dos a dos y $J = [a - \delta, b] \supset I$. Entonces se tiene*

$$|(F^n)'(y)| \leq e^{C+1} \frac{\ell_n}{\ell_0},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $y \in J$.

Prueba. Primero probemos $(F^n)'(x) \leq e^C \frac{\ell_n}{\ell_0}$ para todo $x \in [a, b]$. En efecto, de la expresión (3.3) se tiene

$$(F^n)'(x) \leq e^C (F^n)'(y), \text{ para todo } x, y \in [a, b]. \quad (3.5)$$

En uso del teorema del valor medio para F^n , existe $\xi_n \in (a, b)$ tal que

$$(F^n)'(\xi_n) = \frac{(F^n)(b) - (F^n)(a)}{b - a} = \frac{\ell(F^n(I))}{\ell(I)} = \frac{\ell_n}{\ell_0}. \quad (3.6)$$

Aplicando la expresión (3.5) para $x, \xi_n \in [a, b]$ y usando (3.6), tenemos

$$(F^n)'(x) \leq e^C (F^n)'(\xi_n) \leq e^C \frac{\ell_n}{\ell_0}, \text{ para todo } x \in [a, b]. \quad (3.7)$$

Ahora probemos

$$(F^n)'(x) \leq e(F^n)'(a), \text{ para } n \geq 0, x \in [a - \delta, b], \quad (3.8)$$

que nos llevará directamente a lo pedido, pues la expresión (3.7) en particular es válida para $x = a$. Hagamos la prueba por inducción. Para $n = 0$ esto es obvio pues $(F^0)'(x) = 1$.

Supongamos que la expresión es válida para $0 < k < n$. Luego, para $x \in [a - \delta, b]$, en uso del lema 3.1 tenemos

$$\left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(a)} \right| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} |F^k(x) - F^k(a)|. \quad (3.9)$$

Por otro lado, por el teorema del valor medio, existen $\eta_k \in (x, a)$ tales que

$$|F^k(x) - F^k(a)| = |(F^k)'(\eta_k)| |x - a|. \quad (3.10)$$

Al reemplazar (3.10) en (3.9), se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(a)} \right| &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} |(F^k)'(\eta_k)| |x - a| \\ &\leq C\delta \sum_{k=0}^{n-1} |(F^k)'(\eta_k)|, \end{aligned}$$

y por hipótesis inductiva $(F^k)'(\eta_k) \leq e(F^k)'(a) \leq e^{C+1} \frac{\ell_k}{\ell_0}$; se concluye

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(a)} \right| &\leq \frac{Ce^{C+1}\delta}{l_0} \sum_{k=0}^{n-1} l_k \\ &\leq \frac{Ce^{C+1}\delta}{l_0} < 1. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba del lema. □

La siguiente versión del teorema de Denjoy está basada en ideas de Schwartz (1963) y puede ser encontrada en [7, p.40], [10, p.80].

Teorema 3.4 (Versión débil). *Si $f \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T})$, con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, entonces f es transitivo; en consecuencia, resulta topológicamente conjugado a la rotación $R_{\rho(f)}$.*

Prueba. Por el teorema 2.38 bastará probar que algún punto posee órbita densa en la circunferencia; es decir que f es transitivo. Supongamos lo contrario, es decir $K \neq \mathbb{T}$. Dado que $\mathbb{T} \setminus K$ es un conjunto abierto, tomemos I_0 componente conexa en $\mathbb{T} \setminus K$.

Elijamos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < y_0$ para los cuales se tenga $I_0 = \pi((x_0, y_0))$ y sea l_n la correspondiente longitud de los intervalos $\pi^{-1}(f^n(I_0)) \cap [0, 1)$. Al ser estos intervalos disjuntos (pues de lo contrario aparecerían puntos periódicos), se tiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} l_n \leq 1$. De esto último se desprende $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} l_n = 0$, necesariamente.

3.1. Teorema de Denjoy

Sea F un levantamiento de f . Por el lema 3.3 para el intervalo $[x_0, y_0]$ podemos escoger $\delta = \delta(C) > 0$ como en (3.4) con el cual se tiene $(F^n)'(x) \leq e^{C+1} \frac{\ell_n}{\ell_0}$, para todo $x \in [x_0 - \delta, y_0]$. De aquí concluiremos que se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (F^n)'(x) = 0, \text{ uniformemente en } [x_0 - \delta, y_0]. \quad (3.11)$$

En efecto, dado cualquier $\epsilon > 0$ y considerando la conclusión del párrafo anterior sobre ℓ_n , existirá $N = N(\epsilon) > 0$ para el cual se tenga $|\ell_n| < \frac{\ell_0 \epsilon}{e^{C+1}}$, para todo $n \geq N$. De esta manera se cumple

$$|(F^n)'(x)| \leq |e^{C+1}| \left| \frac{\ell_n}{\ell_0} \right| < \epsilon,$$

para todo $n \geq N$, donde $N = N(\epsilon)$ es independiente del valor que x asume en $[x_0 - \delta, y_0]$. Además, por los comentarios hechos sobre la constante C después de la expresión (3.4), el procedimiento antecedido se puede remedar para f^{-1} .

Dado $z_0 = \pi(x_0) \in K$, la órbita \mathcal{O}_{z_0} es densa en K (pues es minimal, proposición 2.33). Así, se tendrá $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(z_0) = z_0$, para una secuencia $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Luego existe k para el cual

$$f^{n_k}(z_0) \in \pi\left(\left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0\right)\right). \quad (3.12)$$

Por (3.11), tenemos también

$$(F^{n_k})'(x) < \frac{1}{2}, \text{ para todo } x \in [x_0 - \delta, y_0]. \quad (3.13)$$

Bajo estas condiciones f^{n_k} posee un punto fijo en $\pi([x_0 - \delta, x_0])$. En efecto, tomemos $x \in [x_0 - \delta, x_0]$. Vemos que F^{n_k} satisface las condiciones del teorema del valor medio sobre $[x, x_0]$. De este modo, existe $\xi_k \in (x, x_0)$ para el cual se tiene

$$(F^{n_k})'(\xi_k) = \frac{F^{n_k}(x) - F^{n_k}(x_0)}{x - x_0}.$$

Dado que se satisface $|x - x_0| < \delta$, usando (3.13) logramos

$$|F^{n_k}(x) - F^{n_k}(x_0)| = (F^{n_k})'(\xi_k)|x - x_0| < \frac{\delta}{2}, \text{ para } x \in [x_0 - \delta, x_0]. \quad (3.14)$$

Por otro lado, expresando (3.12) en términos del levantamiento F , se obtiene

$$|F^{n_k}(x_0) + m_k - x_0| < \frac{\delta}{2} \quad (3.15)$$

para cierto entero m_k . Luego, usando (3.14) y (3.15) se llega a

$$\begin{aligned} |F^{n_k}(x) + m_k - x_0| &< |F^{n_k}(x) - F^{n_k}(x_0)| + |F^{n_k}(x_0) + m_k - x_0| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0]$. Esto implica $f^{n_k}(\pi(x)) \in \pi((x_0 - \delta, x_0))$. De esta manera con la notación $J = \pi([x_0 - \delta, x_0])$, tenemos $f^{n_k}(\pi(x)) \in J$, para todo $\pi(x) \in J$, es decir $f^{n_k}(J) \subset J$. Dado que J es un intervalo, y f^{n_k} es continua, obligatoriamente f^{n_k} tiene un punto fijo. Esto contradice el hecho de que $\rho(f)$ sea irracional. \square

El teorema anterior permite la clasificación de elementos en $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T})$. Aún más, con un poco de esfuerzo adicional se obtiene el mismo resultado para elementos en $\text{Diff}_+^{1+var}(\mathbb{T})$, el conjunto de funciones en $\text{Diff}_+^1(\mathbb{T})$ con derivada de variación acotada.

Una función $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es de **variación acotada** si satisface

$$\text{Var}(\varphi) = \sup \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k) - \varphi(y_k)| < \infty, \quad (3.16)$$

acá el supremo es tomado sobre todos los intervalos abiertos y disjuntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ de \mathbb{T} .

Teorema 3.5 (Denjoy). *Sea $f \in \text{Diff}_+^{1+var}(\mathbb{T})$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces f es topológicamente conjugado a una rotación $R_{\rho(f)}$.*

La demostración de este hecho se puede obtener como un corolario del teorema 3.4. Sin embargo, prescindiremos de éste para resaltar las diferencias en las demostraciones, y observar que en este segundo caso, la demostración depende significativamente del ordenamiento de las órbitas en \mathbb{T} . Para mayores detalles remitimos al lector a [18, p.45],[13, p.401], [7, p.38].

Un intervalo abierto I es **maximal** si para cualquier intervalo abierto no vacío $J \subset \mathbb{T} \setminus K$ con $I \subset J$ se tiene $J = I$.

Lema 3.6. *Si f tiene número de rotación irracional y existe una constante $C > 0$ con la cual se satisface*

$$|(f^n)'(x)| \cdot |(f^{-n})'(x)| \geq C,$$

entonces f es minimal.

3.1. Teorema de Denjoy

Prueba. Supongamos que f no es minimal, y escojamos $x \in \mathbb{T}$ tal que $\omega_f(x) = K \neq \mathbb{T}$. Entonces el conjunto $\mathbb{T} \setminus \omega_f(x)$ es la unión disjunta de intervalos abiertos maximales. Más aún, dado que f es un homeomorfismo, el conjunto K es f -invariante y así las imágenes y preimágenes de cualquiera de estos intervalos son también intervalos maximales.

Para I_0 en $\mathbb{T} \setminus K$ los intervalos $f^n(I_0)$ son disjuntos. En efecto, supongamos que existan números enteros $m > n$ para los cuales $f^m(I_0) \cap f^n(I_0) \neq \emptyset$. Entonces se cumple $f^{m-n}(I_0) \cap I_0 \neq \emptyset$, y por la maximalidad de los intervalos se tiene $f^{m-n}(I_0) = I_0$. Dado que f es continua, se logra $f^{m-n}(\bar{I}_0) = \bar{I}_0$ y junto a esto aparecen puntos periódicos. Esto está mal.

Como de costumbre, pongamos ℓ_n para referirnos a la medida de Lebesgue de estos intervalos I_n , para cada $n \in \mathbb{Z}$, es decir $\ell_n = \int_{I_n} |(f^n)'(x)| dx$ es la longitud del intervalo $f^n(I)$. Dado que todos ellos son disjuntos, se tiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n \leq 1$. Así concluimos que se tiene $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \ell_n = 0$.

Ahora, para $n \geq 1$, teniendo en mente la desigualdad $p+q \geq \sqrt{pq}$ válida para $p, q \geq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \ell_n + \ell_{-n} &= \int_{I_0} (|(f^n)'(x)| + |(f^{-n})'(x)|) dx \\ &\geq \int_{I_0} \sqrt{|(f^n)'(x)| \cdot |(f^{-n})'(x)|} dx \\ &\geq C^{1/2} \ell_0. \end{aligned}$$

Esto impide que se tenga $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \ell_n = 0$. □

Para hacer uso del hecho de que f tiene derivada de variación acotada, necesitamos el siguiente lema. Denotemos $x_k = f^k(x_0)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.7. *Si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es un homeomorfismo con número de rotación irracional, entonces para $x_0 \in \mathbb{T}$ existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los cuales los intervalos*

$$(x_0, x_{-n}), (x_1, x_{-n+1}), \dots, (x_i, x_{-n+i}), \dots, (x_n, x_0)$$

son disjuntos.

Prueba. Por la proposición 2.34 se sabe que el ordenamiento de las órbitas de f sigue el mismo patrón que el ordenamiento de las órbitas de una rotación irracional. Por tanto

no hay pérdida de generalidad si probamos este resultado para rotaciones. En tal caso basta escoger $n > 0$ para el cual se tenga

$$d(x_0, x_{-n}) < d(x_0, x_k), \text{ para todo } 0 \leq |k| < n,$$

pues de esta forma todos los intervalos (x_i, x_{i-n}) , con $0 \leq i \leq n$, son disjuntos. En efecto, supongamos por contradicción que exista $x_r \in (x_i, x_{i-n})$ donde $|r| < n$. Distinguimos dos casos.

Si $i - n \leq r < n$, entonces se tiene

$$x_{r-i} = R_\rho^{-i}(x_r) \in R_\rho^{-i}(x_i, x_{i-n}) = (x_0, x_{-n}),$$

y se cumple

$$d(x_0, x_{r-i}) < d(x_0, x_{-n}).$$

Notemos que $-n < r - i < n$ es incompatible con la elección de n .

Si $i - n > r$, entonces $i > r + n$, y de este modo $x_{n+r} \notin (x_i, x_{i-n})$, pues caso contrario, suponiendo $x_{n+r} \in (x_i, x_{i-n})$, se tendría $x_{n+r-i} \in (x_0, x_{-n})$, lo que llevaría a una contradicción, pues $n + r - i < n$. De esta manera tenemos $x_r \in (x_i, x_{i-n})$ y $x_{n+r} \notin (x_i, x_{i-n})$. Por consiguiente, los intervalos (x_{n+r}, x_r) y (x_i, x_{i-n}) se traslapan y contienen al punto x_i . Es decir, se satisface $x_i \in (x_{n+r}, x_r)$ y por lo tanto también

$$x_{i-n-r} \in (x_0, x_{-n}).$$

Luego se cumple $d(x_0, x_{i-n-r}) < d(x_0, x_{-n})$, y al cumplirse $0 < i - r - n < n$, se obtiene una contradicción con la elección de n . \square

Ahora pasemos a demostrar el teorema 3.5 propiamente dicho.

Prueba del teorema 3.5. Sean $I_n = (x_i, x_{i-n})$ los intervalos cuya existencia queda garantizada por el lema 3.7. Dado que todos ellos son disjuntos, por la definición de

variación (3.16) para $\varphi = \log |f'|$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\log |f'|) &\geq \sum_{i=0}^{n-1} |\log |F'(x_i)| - \log |F'(x_{i-n})|| \\
 &\geq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \log |F'(x_i)| - \sum_{i=0}^{n-1} \log |F'(x_{i-n})| \right| \\
 &= \left| \log \left(\frac{\prod_{i=0}^{n-1} |F'(F^i(x_0))|}{\prod_{i=0}^{n-1} |F'(F^i(x_{-n}))|} \right) \right| \\
 &= \left| \log \left(\frac{|(F^n)'(x_0)|}{|(F^n)'(x_{-n})|} \right) \right|, \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

donde $\text{Var}(\log |f'|) < +\infty$, pues f tiene derivada de variación acotada y se satisface $\text{Var}(\log |f'|) < \sup\{\frac{1}{f'}\} \text{Var}(f')$. Ahora, dado que se cumple $F^n \circ F^{-n} = Id$, por la regla de la cadena tenemos

$$(F^n)'(F^{-n}(x_0))(F^{-n})'(x_0) = (F^n)'(x_{-n})(F^{-n})'(x_0) = 1,$$

y así

$$|(F^{-n})'(x_0)| = \frac{1}{|(F^n)'(x_{-n})|}. \tag{3.18}$$

Reemplazando (3.18) en (3.17) obtenemos

$$|(F^n)'(x_0)| \cdot |(F^{-n})'(x_0)| \geq e^{-\text{Var}(\log |f'|)}.$$

Finalmente aplicamos el lema 3.6 para obtener lo pedido. □

Observación 3.8. En el teorema 3.4 notamos que la conjugación es meramente topológica. En los trabajos [12], [25] se estudia las condiciones para alcanzar conjugación de otro tipo de diferenciabilidad, ya sea C^k, C^∞, C^ω . El tratamiento de estos resultados requieren de algunos tópicos de teoría de la medida y teoría de números. Para mayores detalles remitimos al lector a [7].

3.2. El ejemplo de Denjoy

En el teorema 3.4 la diferenciabilidad de clase C^2 ó C^{1+var} es esencial, en el sentido que este teorema no es válido para difeomorfismos de clase apenas C^1 . A este tipo de difeomorfismos que no cumplen con lo deseable se les conoce como difeomorfismos de Denjoy. En esta sección probaremos su existencia.

Teorema 3.9. *Para cada $\rho \notin \mathbb{Q}$, con $0 < \rho < 1$, existe un $f \in \text{Diff}^1_+(\mathbb{T})$ no transitivo y con número de rotación ρ .*

Seguiremos los siguientes pasos para la construcción del difeomorfismo. Primero construiremos un conjunto K , cerrado, perfecto, con interior vacío y de medida positiva en \mathbb{R} . A continuación definiremos una función $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, no decreciente, sobreyectiva con $H(x + 1) = H(x) + 1$, sujeta a otras condiciones.

En tercer lugar mostraremos la existencia de una $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F \in \text{Diff}^1_+(\mathbb{R})$ y $H \circ F = H \circ R_\rho$, y con K como conjunto minimal. Finalmente, a partir de los levantamientos H y F , induciremos $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ de tal manera que hereden las propiedades de sus levantamientos.

3.2.1. Contrucción del conjunto minimal

Sea $\rho \in (0, 1)$ un número irracional, y $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{R_\rho^n(0) : n \in \mathbb{Z}\}$ para el cual $\pi(y_0) = x_0 \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{O}_{R_\rho}(0)$. Coloquemos $\pi(y_0 + n\rho) = x_n \in \mathcal{O}_{R_\rho}(x_0)$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$, consideremos $y_n \in [0, 1]$ para los cuales $\pi(y_n) = x_n$.

En pocas palabras se tiene $y_n = y_0 + n\rho + m_n \in [0, 1]$ para algún número entero m_n . Por otro lado pongamos $\mathbb{Z}_\rho(y_0) = y_0 + \mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$, conjunto que contiene todos los puntos de la forma $y_0 + m + n\rho$, para $m, n \in \mathbb{Z}$.

Sea $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, una sucesión de números positivos para los cuales

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = \ell < 1, \tag{3.19}$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1, \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \leq \frac{5}{3}. \tag{3.21}$$

Por ejemplo $\ell_n = \frac{1}{(|n| + 2)(|n| + 1)}$ satisface las condiciones antes mencionadas.

La idea para la construcción del conjunto K es hacer una “cirujía” en cada uno de los puntos de y_n , e insertar ahí intervalos de longitud ℓ_n .

Formalizemos esta idea de insertar intervalos. Consideremos los números

$$a_n = (1 - \ell)y_n + \sum_{0 \leq y_i < y_n} \ell_i, \tag{3.22}$$

$$b_n = a_n + \ell_n. \tag{3.23}$$

3.2. El ejemplo de Denjoy

Definamos los intervalos $I_n = (a_n, b_n)$. Veamos que para cada n , los intervalos cumplen $I_n \subset (0, 1)$ y son mutuamente disjuntos. Para la primera parte basta probar $0 < a_n < b_n < 1$. Obviamente se tiene $0 < a_n < b_n$. Por otro lado, debido a $y_n < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} b_n &= a_n + \ell_n \\ &= (1 - \ell)y_n + \sum_{0 < y_i \leq y_n} \ell_i \\ &< (1 - \ell) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n \\ &< (1 - \ell) + \ell = 1. \end{aligned}$$

Ahora probemos que los intervalos son disjuntos. Basta observar que para $y_n < y_m$, con $n \neq m$ se tiene $b_n < a_m$ lo cual lleva a $a_n < b_n < a_m < b_m$. En efecto, de suponerse $y_n < y_m$, tenemos

$$\begin{aligned} a_m &= (1 - \ell)y_m + \sum_{0 < y_i < y_m} \ell_i \\ &> (1 - \ell)y_n + \sum_{0 < y_i < y_m} \ell_i \\ &> (1 - \ell)y_n + \sum_{0 < y_i \leq y_n} \ell_i \\ &> (1 - \ell)y_n + \sum_{0 < y_i < y_n} \ell_i + \ell_n \\ &> a_n + \ell_n = b_n. \end{aligned}$$

Sea la función $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}_\rho(y_0), \\ \ell_n & \text{si } x = y_n, \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Definamos la función $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vía

$$G(x) = (1 - \ell)x + \sum_{0 \leq y < x} \ell(y). \tag{3.24}$$

Bajo esta notación, reescribiendo las expresiones (3.22) y (3.23) se tiene $G(y_n) = a_n$ y $b_n = G(y_n) + \ell_n$.

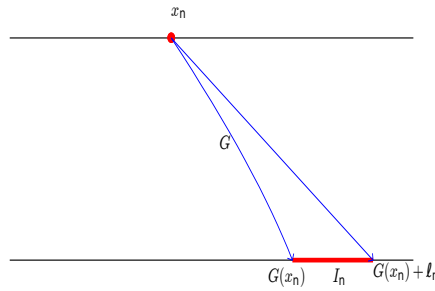


Figura 3.1: Inserción de intervalos

Lema 3.10. *La función continua G es estrictamente creciente y tiene puntos de discontinuidad solo en $\mathbb{Z}_\rho(y_0)$. Además el conjunto $K = \overline{\text{Im}G}$ es cerrado, perfecto y de interior vacío, y la medida de Lebesgue de $K \cap [0, 1]$ está dada por $1 - \ell$.*

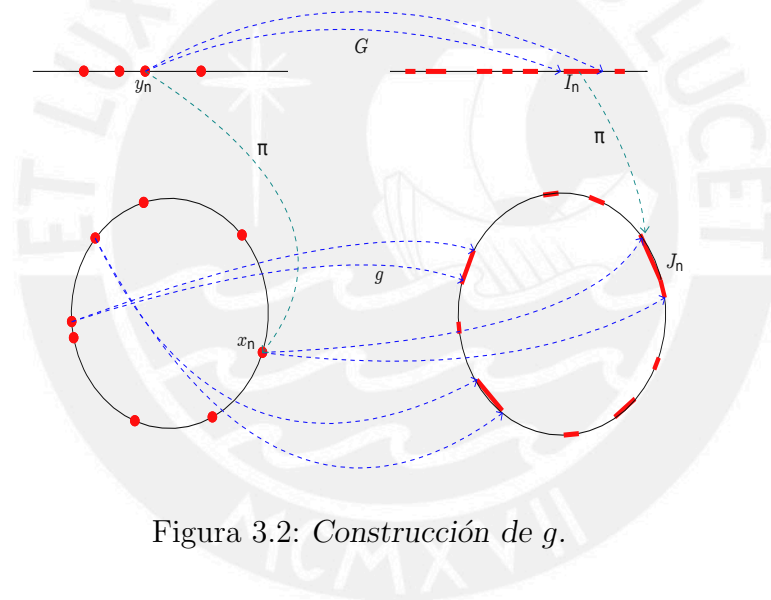


Figura 3.2: Construcción de g .

Prueba. Primero mostremos que G es estrictamente creciente. Tomemos $x, z \in [0, 1] \setminus \{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$ sujetos a $x < z$. Para ellos se tiene

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 - \ell)x + \sum_{0 \leq y < x} \ell(y) \\ &< (1 - \ell)z + \sum_{0 \leq y < x} \ell(y) \\ &< (1 - \ell)z + \sum_{0 \leq y < z} \ell(y) = G(z). \end{aligned}$$

Ahora analizemos la continuidad de G . Dado $x_0 \in [0, 1]$, analizemos dos casos. Veamos primero la continuidad por la izquierda cuando $x_0 = y_n$ para algún n , es decir cuando

3.2. El ejemplo de Denjoy

$G(x_0) = a_n$ y $b_n = G(x_0) + \ell(x_0)$. Consideremos cualquier sucesión estrictamente creciente de puntos $x_k \in [0, 1]$ sujeta a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ con $x_k < x_0$. Debido a que G es estrictamente creciente, se tiene que los $G(x_n)$ forman una sucesión monótona creciente de puntos, acotados por $G(x_0) = a_n$. De esta manera se consigue

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} G(x) \leq a_n.$$

Ahora analizemos la continuidad por derecha. Consideremos cualquier sucesión estrictamente decreciente de puntos $x_k \in [0, 1]$ sujeta a $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0$ con $x_0 < x_k$. Entonces

$$\begin{aligned} G(x_k) &= (1 - \ell)x_k + \sum_{0 \leq y < x_k} \ell(y) \\ &> (1 - \ell)x_0 + \sum_{0 \leq y \leq x_0} \ell(y) \\ &= (1 - \ell)x_0 + \sum_{0 \leq y < x_0} \ell(y) + \ell(x_0) \\ &= G(x_0) + \ell(x_0). \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que $G(x_k)$ es una sucesión monótona decreciente, acotada inferiormente por $G(x_0) + \ell(x_0) = b_n$. Luego $\lim_{k \rightarrow +\infty} G(x_k) \geq b_n$ y por lo tanto

$$b_n \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x).$$

De esta manera se observa que en los puntos $\mathbb{Z}(y_0)$ existe un salto de discontinuidad de longitud al menos ℓ_n .

Ahora probemos que G es continua para cualquier $x_0 \in [0, 1] \setminus \{y_n\}$. Supongamos todo lo contrario, que exista $\epsilon_0 > 0$ y una secuencia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ que cumpla a la vez $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0$ y $|G(x_k) - G(x_0)| \geq \epsilon_0$. Usando la definición de G y considerando la condición $x_0 < x_k$ tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &\leq \left| (1 - \ell)x_k + \sum_{0 < y < x_k} \ell(y) - (1 - \ell)x_0 - \sum_{0 < y < x_0} \ell(y) \right| \\ &\leq (1 - \ell)|x_k - x_0| + \left| \sum_{0 < y < x_k} \ell(y) - \sum_{0 < y < x_0} \ell(y) \right| \\ &\leq (1 - \ell)|x_k - x_0| + \left| \sum_{x_0 \leq y < x_k} \ell(y) \right| \\ &\leq (1 - \ell)|x_k - x_0| + \ell(x_0) + \left| \sum_{x_0 < y < x_k} \ell(y) \right|. \end{aligned}$$

Cuando hacemos $k \rightarrow +\infty$ obtenemos $\epsilon_0 \leq \ell(x_0)$, pues gracias a (3.19) se cumple $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{x_0 < y < x_k} \ell(y) = 0$. Dado que se tiene $x_0 \notin \{y_n\}$ concluimos $\ell(x_0) = 0$, pero obviamente ello resalta una contradicción.

Probemos que $K = \overline{ImG}$ es un conjunto cerrado, perfecto y con interior vacío. Primero observemos que $K = \overline{Im(G)}$ resulta cerrado por definición. Probemos que el interior es vacío. De haber un intervalo abierto I tal que $I \subset K$, tomemos $y \in I$ con $y = G(x)$ con $x \in [0, 1] \setminus \{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$. Teniendo en mente el lema 2.36, por el cual el conjunto $\mathbb{Z}_\rho(y_0)$ denso en $[0, 1]$, habrán muchos $x_{n_j} \in \mathbb{Z}_\rho(y_0)$ con $x < x_{n_j}$ tales que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} x_{n_j} = x.$$

Por la continuidad de G se tendrá entonces

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} G(x_{n_j}) = G(x) \tag{3.25}$$

con $G(x) < G(x_{n_j})$. Por definición $G(x_{n_j}) = a_{n_j}$ y $G(x) \in I$. Entonces por la relación (3.25) habrá $j_0 \in \mathbb{N}$ para los cuales $a_{n_j} \in I$ para todo $j \geq j_0$. Ahora los b_{n_j} también pertenecen a I , pues de $\lim_{j \rightarrow +\infty} \ell_{n_j} = 0$, tenemos $b_{n_j} = a_{n_j} + \ell_{n_j} \in I$ para j suficientemente grande. Entonces, para el intervalo $(a_{n_j}, b_{n_j}) \subset \mathbb{R} \setminus K$ tenemos

$$\emptyset \neq (a_{n_j}, b_{n_j}) \cap I \subset (\mathbb{R} \setminus K) \cap I.$$

Pero esto último contradice la inclusión de I en K .

Ahora vamos a demostrar que K es perfecto. Cuando $z \in K = \overline{ImG}$, existen $z_n \in ImG$ con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z. \tag{3.26}$$

Así se cumple $z_n = G(x_n)$ para $x_n \in [0, 1]$. Por la densidad de $\mathbb{Z}_\rho(y_0)$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen y_{n_j} tales que $\lim_{j \rightarrow +\infty} y_{n_j} = x_n$, donde $y_{n_j} < x_n$. Por la continuidad de G y la propiedad $G(y_{n_j}) = a_{n_j} \in K$ se obtiene

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{n_j} = z_n, \tag{3.27}$$

con $a_j < z_n$. Finalmente por (3.26) y (3.27) existen $a_{n_j} \in K$ con $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{n_j} = z$, donde $a_{n_j} \neq z$, y en consecuencia z es un punto de acumulación de K .

3.2. El ejemplo de Denjoy

Finalmente tenemos $\lambda(K \cap [0, 1]) = \lambda([0, 1]) - \lambda([0, 1] \setminus K) = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1 - \ell$. Queda demostrado de esta manera el lema. □

Observación 3.11. El conjunto K introducido en el lema 3.10 coincide con $\overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Es más, se tiene $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$. En primer notemos que obviamente se cumple $K \subset [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$. Por otro lado, si $y \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, entonces se tiene $\bigcup_{\{i \in \mathbb{Z} : a_i < y\}} I_i \subset [0, y]$. De esta manera se logra $r = \sum_{a_i < y} \ell_i < y$. También, como $y - r$ no puede superar la longitud de K , se tiene $y - r < 1 - \ell$, y en consecuencia $0 < \frac{y - r}{1 - \ell} < 1$. Por densidad existirá una secuencia sujeta a $y_{n_j} \rightarrow \frac{y - r}{1 - \ell}$, además por (3.19) tenemos $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{\frac{y-r}{1-\ell} < y < y_{n_j}} \ell(y) = 0$. Todo junto vía un cálculo directo nos permite encontrar una secuencia $a_{n_j} = G(y_{n_j})$ que converge a y . De esta manera $y \in K$. Para mayores detalles remitimos al lector a [6, p.261].

Ahora extendamos la función G a una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} , que cumpla propiedades análogas a las del lema 3.10. Para tal fin pongamos $y_{n,m} = y_n + m$, $a_{n,m} = a_n + m$, $b_{n,m} = b_n + m$ y $I_{n,m} = I_n + m$, y $K = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} I_{n,m}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.12. *La función definida en el lema 3.10 se puede extender a una función continua $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente, que satisface $G(0) = 0$, $G(x+1) = G(x)+1$, para $x \in \mathbb{R}$ y $G(k) = k$ para $k \in \mathbb{Z}$. Además el conjunto $K = \overline{\text{Im}G}$ es cerrado, perfecto, tiene interior vacío y satisface $K = K + 1$.*

Prueba. Basta para nuestros intereses definir

$$G(x) = \begin{cases} (1 - \ell)x + \sum_{0 \leq y < x} \ell(y) & \text{si } x \geq 0, \\ (1 - \ell)x - \sum_{x < y \leq 0} \ell(y) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde

$$\ell(y) = \begin{cases} \ell_n & \text{si } y = y_{n,m}, \text{ para algún } m, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}_\rho(y_0). \end{cases}$$

Obsérvese que dado que se cumple $0 \notin \mathbb{Z}_\rho(y_0)$, se tiene $G(0) = 0$, pues $\ell(0) = 0$.

Ahora probemos que cumple $G(x + 1) = G(x) + 1$ para todo $x \in (0, 1)$. Primero observemos que para $x \in (0, 1)$, se tiene

$$\sum_{x \leq y < x+1} \ell(y) = \sum_{0 \leq y < 1} \ell(y), \quad (3.28)$$

ya que se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq y < x+1} \ell(y) &= \sum_{x \leq y < 1} \ell(y) + \sum_{1 \leq y < x+1} \ell(y) \\ &= \sum_{x \leq y < 1} \ell(y) + \sum_{1 \leq y_n, 1 < x+1} \ell_n \\ &= \sum_{x \leq y < 1} \ell(y) + \sum_{1 \leq y_n+1 < x+1} \ell_n \\ &= \sum_{x \leq y_n < 1} \ell_n + \sum_{0 \leq y_n < x} \ell_n \\ &= \sum_{0 \leq y < 1} \ell(y). \end{aligned}$$

Ahora, cuando $x \in (0, 1)$, tenemos

$$\begin{aligned} G(x + 1) &= (1 - \ell)(x + 1) + \sum_{0 < y < x+1} \ell(y) \\ &= (1 - \ell)x + \sum_{0 \leq y < x} \ell(y) + (1 - \ell) + \sum_{x \leq y < x+1} \ell(y) \\ &= G(x) + (1 - \ell) + \sum_{x \leq y < x+1} \ell(y) \\ &= G(x) + (1 - \ell) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n \\ &= G(x) + 1. \end{aligned}$$

Finalmente observemos que la relación (3.28) se satisface para cualquier $x \in \mathbb{R}$. En efecto, para $x \in \mathbb{R}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ sujeto a $x - m \in [0, 1)$ y en consecuencia

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = \sum_{x-m \leq y < x-m+1} \ell(y) \quad (3.29)$$

$$= \sum_{x \leq y_n+m < x+1} \ell_n \quad (3.30)$$

$$= \sum_{x \leq y_n, m < x+1} \ell_n = \sum_{x \leq y < x+1} \ell(y). \quad (3.31)$$

Usando esta última expresión y siguiendo un procedimiento análogo al realizado anteriormente se prueba $G(x + 1) = G(x) + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora aprovechando esta

última expresión, dado que se tiene $G(0) = 0$, se sigue de manera inmediata $G(1) = 1$ y $G(k) = k$, para cualquier número entero k .

De esta forma las propiedades del lema 3.10 son heredadas por G . Resta probar que K es invariante por traslaciones por un entero. En efecto, basta reescribir la expresión $G(x + 1) = G(x) + 1$, para $x \in \mathbb{R}$. Es decir $G \circ T_1(x) = T_1 \circ G(x)$, donde $T_1(x) = x + 1$. Entonces se tiene $G(\mathbb{R}) = G(T_1(\mathbb{R})) = T_1(G(\mathbb{R}))$, es decir $T_1(ImG) = ImG$ y junto a ello

$$K = \overline{Im(G)} = \overline{T_1(Im(G))} = T_1(\overline{Im(G)}) = T_1(K).$$

Así finaliza la prueba. □

Definamos la función $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vía

$$H(x) = \begin{cases} G^{-1}(x) & \text{si } x \in \text{int}(K), \\ y_n & \text{si } x \in \bar{I}_n, \end{cases}$$

acá

$$G^{-1}(x) = \frac{1}{1 - \ell} \left(x - \sum_{x < a_n} \ell_n \right).$$

Lema 3.13. *La función H es continua y no decreciente y satisface $H(K) = [0, 1]$. Además cumple $\lambda(K \cap [0, x]) = (1 - \ell)H(x)$ para todo $x \in Im(G)$, donde λ es la medida usual en \mathbb{R} .*

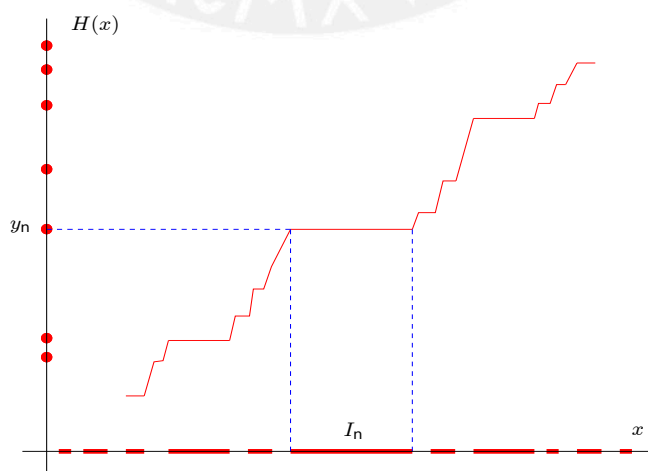


Figura 3.3: Construcción de H , la escalera del diablo.

Prueba. Evidentemente por definición H es continua, constante en los intervalos $[a_n, b_n]$ y creciente en los conjuntos $K \setminus \{a_n; n \in \mathbb{Z}\}$ y $K \setminus \{b_n; n \in \mathbb{Z}\}$. Además, como cumple

$$H(K \setminus \{a_n, b_n\}) = [0, 1] \setminus \{y_n : n \in \mathbb{Z}\},$$

y se tiene $K = \overline{ImG}$, al poner todo junto se obtiene $H(K) = [0, 1]$.

Ahora encontremos la medida de Lebesgue del conjunto K en el intervalo $[0, x] \subset [0, 1]$. Sea $G(y) = x$ para $y \in [0, 1] \setminus \{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Dado que cada uno los subintervalos I_n de $[0, x]$ corresponde a puntos y_n en el intervalo $[0, y]$, (en símbolos se tiene $I_n \subset [0, x]$ si y solamente si $0 < y_n < y$) logramos

$$\begin{aligned} \lambda(K \cap [0, x]) &= \lambda([0, x]) - \lambda([0, x] \setminus K) \\ &= \lambda([0, x]) - \lambda\left(\bigcup_{\{i \in \mathbb{Z}: a_i < x\}} \ell_i\right) \\ &= x - \sum_{y_i < y} \ell_i \\ &= G(y) - \sum_{y_i < y} \ell_i \\ &= (1 - \ell)y = (1 - \ell)H(x), \end{aligned}$$

finalizando así la prueba. □

Ahora extendamos la función H del lema 3.13.

Lema 3.14. *La función $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, no decreciente y es tal que satisfice $H(K) = \mathbb{R}$, $H \circ G = Id$. Además cumple $H(0) = 0$ y $H(x + 1) = H(x) + 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$. En particular satisfice $H(k) = k$ para $k \in \mathbb{Z}$, y para cada $x \in G(\mathbb{R}^+)$ se tiene $\lambda(K \cap [0, x]) = (1 - \ell)H(x)$.*

Prueba. Basta definir $\tilde{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vía

$$\tilde{H}(x) = H(x - [x]) + [x],$$

donde $[x]$ es el menor entero menor o igual que x . Observemos que se tiene $\tilde{H}(0) = H(0) = 0$. Es fácil ver que satisfice las condiciones del lema. Además se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x + 1) &= H(x + 1 - [x + 1]) + [x + 1] \\ &= H(x - [x]) + [x] + 1 \\ &= \tilde{H}(x) + 1. \end{aligned}$$

Obviamente \tilde{H} es una función continua definida en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Por otro lado, por la definición de \tilde{H} se tiene $\tilde{H}(k) = k$, para $k \in \mathbb{Z}$. De esta manera \tilde{H} es continua en \mathbb{R} . Ahora estimemos la medida de Lebesgue del conjunto K en $[0, x]$. Por la definición se tiene $\tilde{H}(k) = k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Debido a $\lambda(K \cap [0, 1]) = 1 - \ell$ y $T_1(K) = K$, vemos que en cada intervalo con extremos enteros tendremos un copia de K , y así, medir el tamaño de K en $[0, k]$, con $k \in \mathbb{Z}$, es en todo sentido, sumar la medida de cada una de sus copias hasta $[0, k]$. Es decir

$$\lambda(K \cap [0, k]) = (1 - \ell)k = (1 - \ell)\tilde{H}(k).$$

Finalmente, para cualquier $x \in ImG$, sea $k = \lfloor x \rfloor$, el cual queda sujeto a $k \leq x < k + 1$. De esta manera se logra

$$\begin{aligned} \lambda(K \cap [0, x]) &= \lambda(K \cap [0, k]) + \lambda(K \cap [k, x]) \\ &= (1 - \ell)k + \lambda(K \cap [0, x - k]) \\ &= (1 - \ell)k + (1 - \ell)H(x - k) \\ &= (1 - \ell)k + (1 - \ell)(\tilde{H}(x) - k) \\ &= (1 - \ell)\tilde{H}(x). \end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba del lema. □

3.2.2. Construcción del difeomorfismo

Primero construiremos un homeomorfismo de tal manera que lleve el intervalo I_n sobre el intervalo el intervalo I_{n+1} , para luego extenderlo a un homeomorfismo de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

Sea $d_n = 6\left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1\right)$. Definamos $\phi : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 + \frac{d_n}{\ell_n^2}(x - a_n)(b_n - x) & \text{si } x \in [a_n, b_n] \\ 1 & \text{si } x \notin \cup_{n \in \mathbb{Z}}(a_n, b_n). \end{cases}$$

Lema 3.15. *La función ϕ es continua, positiva, idénticamente igual a 1 en K y satisface*

$$\int_{a_n}^{b_n} \phi(\tau) d\tau = \ell_{n+1}.$$

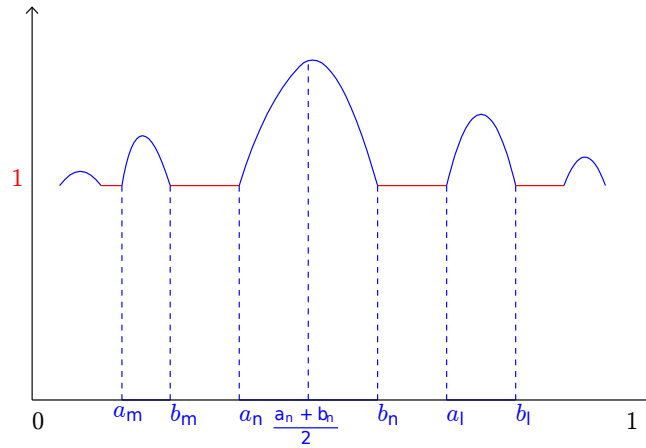


Figura 3.4: Construcción de ϕ .

Prueba. La función ϕ es continua (por ser una parábola) cuando se restringe a $[a_n, b_n]$, y un cálculo directo muestra que la integral en $[a_n, b_n]$ vale lo afirmado, pues los d_n han sido elegidos para ajustar el valor de la integral. Además es positiva, pues, dado que la expresión $\frac{d_n}{\ell_n^2}(x - a_n)(b_n - x)$ alcanza su valor máximo en $\frac{a_n + b_n}{2}$ y que en (3.21) se escogió $\frac{1}{3} \leq \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \leq \frac{5}{3}$ concluimos

$$|\phi(x) - 1| = \left| \frac{d_n}{\ell_n^2}(x - a_n)(b_n - x) \right| \leq \frac{|d_n|}{\ell_n^2} \left(\frac{b_n - a_n}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right| < 1.$$

Como se tiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$ (pues $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$), podemos incluir de una en una las parábolas y utilizar convergencia uniforme a φ , para obtener continuidad global. \square

Por comodidad llamaremos ϕ_n a la restricción de ϕ a $[a_n, b_n]$.

Lema 3.16. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un difeomorfismo $F_n : I_n \rightarrow I_{n+1}$, de clase C^1 con las siguientes propiedades:

- $F'_n(a_n) = F'_n(b_n) = 1$,
- $0 < F'_n(x) \leq 1 + 6 \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right|$, para cada $x \in I_n, n \in \mathbb{Z}$ y
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{|F'_n(x) - 1| : x \in I_n\}) = 0$.

Prueba. Definamos $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ usando la función ϕ_n del lema 3.15 mediante

$$F_n(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^x \phi_n(\tau) d\tau. \tag{3.32}$$

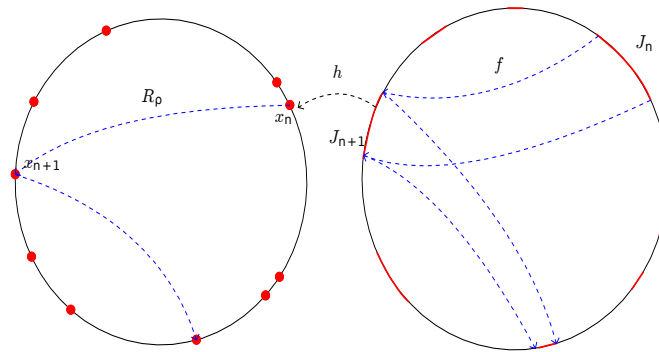


Figura 3.5: Construcción de f_n .

Es fácil ver que F_n satisface las tres propiedades requeridas.

Que F_n sea de clase C^1 es cierto pues cumple $F'_n(x) = \phi_n(x)$ y $\phi_n(x)$ es continua.

Además F_n lleva el intervalo I_n en el intervalo I_{n+1} , pues obviamente satisface $F_n(a_n) = a_{n+1}$ y $F_n(b_n) = a_{n+1} + \ell_{n+1} = b_{n+1}$. Dado que F_n es continua y estrictamente creciente se tiene

$$F_n(I_n) = F_n([a_n, b_n]) = [a_{n+1}, b_{n+1}] = I_{n+1},$$

y así F_n es un difeomorfismo C^1 al ser restringido a I_n .

Además, la derivada de los extremos vale 1 pues $F'_n(a_n) = \phi_n(a_n) = 1$ y de manera análoga se logra $F'_n(b_n) = 1$.

Finalmente, para cada $x \in I_n$ tenemos

$$|F'_n(x) - 1| = \frac{|d_n|}{\ell^2} (x - a_n)(b_n - x) \leq \frac{|d_n|}{\ell^2} (b_n - a_n)^2 = |d_n| = 6 \left| \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} - 1 \right|.$$

De $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$ obtenemos $\lim_{|n| \rightarrow \infty} (\sup_{x \in I_n} |F'_n(x) - 1|) = 0$. □

Teorema 3.17. *Existe un difeomorfismo creciente $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 que satisface $F(x + 1) = F(x) + 1$ y tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple $H|_I \circ F(x) = R_\rho \circ H|_I(x)$.*

Prueba. Definamos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vía $\varphi(x) = \phi(x - [x])$, donde $[x]$ es el mayor número entero menor que x . Obviamente φ es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y junto a $\varphi(k) = \phi(0) = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, continua en \mathbb{R} . Además es una función periódica de periodo 1, pues satisface

$$\varphi(x + 1) = \phi(x + 1 - [x + 1]) = \phi(x + 1 - [x] - 1) = \varphi(x).$$

Ahora, definamos $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vía

$$F(x) = c + \int_0^x \varphi(\tau) d\tau,$$

donde $c = (1 - \ell)\rho + \sum_{0 \leq y_i \leq \rho} \ell_i$ ha sido elegido de esta forma para que F lleve el intervalo $I_{n,m}$ sobre $I_{n+1,m}$. De esta expresión se deduce $F'(x) = \varphi(x)$, y gracias a que φ es continua y positiva en \mathbb{R} , se tiene que F es un difeomorfismo creciente C^1 sobre \mathbb{R} .

Ahora probemos que se tiene $H \circ F(x) = R_\rho \circ H(x)$ para $x \in [0, 1] \setminus \{y_n\}$. Es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} K \setminus \{a_n, b_n\} & \xrightarrow{F} & K \setminus \{a_n, b_n\} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ [0, 1] \setminus \{y_n\} & \xrightarrow{R} & [0, 1] \setminus \{y_n\}, \end{array}$$

conmuta. Analizemos dos casos.

Primero tomemos $x \in K$. Sea $x = a_n$. Al suponer $y_n + \rho < 1$ tenemos

$$H(F(a_n)) = H(a_{n+1}) = y_{n+1} = y_n + \rho = H(a_n) + \rho. \tag{3.33}$$

Dado la propiedad $K = \overline{\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}}$, por continuidad la igualdad sigue siendo válida para K .

Ahora el caso $x \notin K$, es decir $x \in I_n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Si $x \in (a_n, b_n)$ entonces se tiene $F(x) \in (a_{n+1}, b_{n+1})$, y por lo tanto

$$H(F(x)) = y_{n+1} = y_n + \rho = H(x) + \rho.$$

Resta probar $F(x + 1) = F(x) + 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. En efecto, gracias a que φ es periódica de periodo 1 y φ en K vale 1, se tiene

$$\begin{aligned} F(x + 1) &= c + \int_0^{x+1} \varphi(\tau) d\tau \\ &= c + \int_0^x \varphi(\tau) d\tau + \int_x^{x+1} \varphi(\tau) d\tau \\ &= F(x) + \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau \\ &= F(x) + \int_{K \cap [0,1]} \varphi(\tau) d\tau + \int_{\cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n} \varphi(\tau) d\tau \\ &= F(x) + \lambda(K \cap [0, 1]) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_{n+1} \\ &= F(x) + (1 - \ell) + \ell = F(x) + 1. \end{aligned}$$

3.2. El ejemplo de Denjoy

Esto finaliza la prueba de la proposición. □

Corolario 3.18. *Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente tal que $F(x + 1) = F(x) + 1$, y satisface $H \circ F = R_\rho \circ H$, entonces se tiene $F(K) = K$ y el conjunto $\{F^k(x) + r : k, r \in \mathbb{Z}\}$ es denso en K para cada $x \in K$.*

Prueba. Probemos que K es invariante por F . Por el teorema anterior tenemos $F(I_{n,m}) = I_{n+1,m}$, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces dado que F es un homeomorfismo, se tiene

$$\begin{aligned} F(K) &= F(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} I_{n,m}) \\ &= \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} F(I_{n,m}) \\ &= \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} I_{n+1,m} = K. \end{aligned}$$

Ahora probemos que K es un conjunto minimal. Para $x \in K$, consideremos en primer lugar, el caso $x = a_n$ ó b_n . En este caso, teniendo en cuenta $\overline{\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}} = K$ se llega a

$$\overline{\{F^n(a_k) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\{a_{k+n} + m : n, m \in \mathbb{Z}\}} = K.$$

Ahora tomemos cualquier $x \in K$. Debido a que H restringido a $K \setminus \{a_n, b_n\}$ es homeomorfismo sobre $I \setminus \{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$, se tiene

$$F|_{K - \{a_n, b_n : n \in \mathbb{Z}\}} = H^{-1} \circ R_\rho|_{I - \{y_n : n \in \mathbb{Z}\}} \circ H,$$

es decir F es topológicamente conjugado a una rotación irracional sobre K . De esta manera dado que las órbitas por una rotación (translación en el recubrimiento universal) dadas por $\{R_\rho^n(0) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ son densas, las órbitas por F dadas por $\{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ serán densas en K , pues H es un homeomorfismo. □

Finalmente estamos listos para demostrar el teorema 3.9 y dar así por concluido nuestro trabajo.

Prueba del teorema 3.9. Definamos $\alpha_n = \pi(a_n)$, $\beta_n = \pi(b_n)$, $J_n = (\alpha_n, \beta_n)$, $\Lambda = \mathbb{T} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} J_n$. Definamos $f, h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ cuyos levantamientos respectivos serán F y H , contruidos en el lema 3.14 y el teorema 3.17. Entonces f satisface lo que requerimos.

Vemos que se tiene $f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{T})$, pues por el teorema 3.17, el difeomorfismo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 con $F(x + 1) = F(x) + 1$, y F es creciente.

También f es conjugado a una rotación irracional en $\Lambda \setminus \{\alpha_n\}$, pues por el teorema 3.17 el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \setminus \{\alpha_n, \beta_n\} & \xrightarrow{f} & \Lambda \setminus \{\alpha_n, \beta_n\} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{T} \setminus \{x_n\} & \xrightarrow{R_\rho} & \mathbb{T} \setminus \{x_n\} \end{array}$$

conmuta.

El número de rotación de f es justamente ρ , ya que gracias al teorema 3.17, como F es semiconjugada a una rotación R_ρ , tanto F como R_ρ poseen el mismo número de rotación por la proposición 2.21.

Por otro lado, el conjunto $\Lambda = \pi(K)$ es un conjunto f -invariante, perfecto, cerrado, nunca denso y minimal con respecto a esas propiedades por f , por el lema 3.29.

Finalmente, a partir del corolario 3.18, concluimos que cada órbita de f en K es densa en K . De esta manera queda probada la minimalidad.

En resumen, f es un difeomorfismo de la circunferencia de clase C^1 que preserva orientación, con número de rotación irracional y cuyo conjunto minimal es $K \neq \mathbb{T}$. \square

Observación 3.19. A lo largo de la demostración del teorema 3.9 se impusieron condiciones sobre longitudes ℓ_n . Una de ellas, muy misteriosa que apareció en la construcción del conjunto C^1 -minimal para f , fue $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n}{\ell_{n+1}} = 1$. En [15] se analiza si un difeomorfismo que posee un único conjunto C^1 -minimal, para el cual se tiene $\ell_n > \ell_{n+1}$, satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n}{\ell_{n+1}} = 1$. Además se explica porqué no todo conjunto de Cantor se puede considerar como un conjunto C^1 -minimal sobre la circunferencia. Por ejemplo el conjunto de Cantor clásico no cumple este cometido.

Por otro lado en [21] se construyen nuevos ejemplos de subconjuntos de Cantor de \mathbb{T} que no son minimales para un difeomorfismo de la circunferencia de clase C^1 .

La construcción de un difeomorfismo de Denjoy fue relevante para el Teorema de Schweitzer, que brinda un contraejemplo para la conjetura de Seifert para el caso de campos vectoriales de clase C^1 sin órbitas periódicas. Para el estudio de este ejemplo, ver [23].

Bibliografía

- [1] ARANSON S. ,BELITSKY G. ,ZHUZHOMA E. *Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*. American Mathematical Society, 1996.
- [2] ATHANASSOPOULOS K. *Notes on the ergodic theory of dynamical systems from a geometry point of view*. University of Crete, 2002.
- [3] BARREIRA L. AND VALLS C. *Dynamical systems: An introduction*. Springer Verlag, London, 2013.
- [4] BRIN M. AND STUCK G. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [5] BROER H. AND TAKENS F. *Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2010.
- [6] CAMACHO C. *Geometric Theory of Foliations*. Birkhauser, Boston, 1985.
- [7] DE MELO W. AND VAN STREIN S. *One-dimensional dynamics*. Springer, New York, NY, 1993.
- [8] DENJOY A. *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 9^a serie, tome 11, p.333-376, 1932.
- [9] DEVANEY R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publ. Co., 2da edition, New York, 1989.
- [10] GILBERT H. AND ULRICH H. *Introduction to the Geometry of Foliations, Part A*. Vieweg and Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1986.
- [11] GODBILLON C. *Dynamical Systems on Surfaces*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

- [12] HERMAN J. *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations*. Publ. I.H.E.S., n° 49, p. 5-233, 1979.
- [13] KATOK A. AND HASSELBLATT B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [14] KATOK A. AND HASSELBLATT B. *A first course in dynamics with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press, 2003.
- [15] MCDUFF D. *C^1 -minimal sets on the circle*. Annales de L'institut Fourier, tome 31, N°1, p.177-193, 1981.
- [16] MUNKRES J. *Topology*. Prentice Hall, 2da edition, 2000.
- [17] NAVAS A. *Grupo de difeomorfismos del círculo*. Monografías IMCA, 2006.
- [18] NITECKI Z. *Differentiable dynamics: an introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1971
- [19] POINCARÉ H. *Sur les courbes définies par une equation différentielle*, J.Math. Pure et Appl, 4ta serie, p.167-244, 1885.
- [20] POIRIER A. *Aspectos geométricos del análisis complejo*, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, 2005.
- [21] PORTELA A. *New examples of Cantor sets in S^1 that are not C^1 -minimal*. Bull Braz Math Soc, New Series 38(4), 623-633, 2007.
- [22] ROBINSON C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press, Boca Raton, FL. 1995.
- [23] TAMURA I. *Topology of Foliations: An Introduction*. American Mathematical Society, 1992.
- [24] WALSH J. *The Dynamics of Circle Homeomorphism: A Hands-on Introduction*. Mathematics Magazine, Vol.72, N° 1, pp.3-13, 1999.

BIBLIOGRAFÍA

- [25] YOCCOZ J. *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*. Annales scientifiques de l'É.N.S 4^a Série, tome 17, n°3, p.333-359, 1984.



Índice alfabético

Conjugación topológica, 11

Conjunto

α -límite, 6

ω -límite, 6

f -invariante, 7

Ejemplo de Denjoy, 51

Grado, 16

Levantamiento, 15

Número de rotación, 23

Punto

heteroclínico, 32

homoclínico, 32

Periódico, 5

Rotación, 4

Teorema

Clasificación de Poincaré, 40

Denjoy, 46

Toro de dimensión 1, 3

Transitividad topológica, 8

Variación acotada, 48

