PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSTGRADO

El Teorema de Lévy-Steinitz y algunas de sus generalizaciones

Tesis para optar el grado de Magister en Matemáticas

Presentado por:

Alfredo Sotelo Pejerrey

Bajo la orientación del Doctor:

Julio César Alcántara Bode

Presidente: Dr. Valqui Haase, Christian Holger

Segundo miembro: Dr. Alcántara Bode, Julio César

Tercer miembro: Dr. Ortiz Fernández, Jesús Alejandro

Lima - Perú

2013

Índice

Dedicatoria

A Dios:

Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos.

A mi madre Flor:

Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos y valores que me ha inculcado para ser una persona de bien, pero mas que nada por su amor.

A mi padre Alfredo:

Por los ejemplos de perseverancia que me ha infundido siempre y por el valor mostrado para salir adelante.

A mis familiares:

A mi hermano Ray, por ser ejemplo de ser un hermano mayor; a mi cuñada Vanesa y a mi sobrino Saúl.

A Milagros:

Por su amor incondicional, por su compañia y la gran confianza que me ha brindado.

A mi asesor:

Dr. Julio Alcántara Bode por su gran apoyo y motivación para la elaboración de esta tesis, y por impulsar el desarrollo de mi formación profesional.

Al Dr. José Bonet Solves, catedrático de la Universidad Politécnica de Valencia:

Por sus valiosos apuntes de clase, para el desarrollo de este trabajo de tesis.

Resumen

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n$ una serie en un espacio vectorial topológico E, $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección y la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} X_{P(n)}$ convergente en E, llamaremos a esta última serie un reordenamiento convergente de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n$. Por $S(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n)$ denotaremos al conjunto de todas las sumas de los reordenamientos convergentes de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n$. Cuando $E = \mathbb{R}^k$ y $S(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n) \neq 0$, Steinitz (1913) probó que $S(\sum\limits_{n\geqslant 1} X_n)$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^k$, que es lo primero que pretendemos estudiar. Este resultado de Steinitz falla drásticamente en espacios de Banach de dimensión infinita, el contraejemplo fue propuesto por Marcinkiewicz trabajando en el espacio $L_2[0,1]$.

La segunda parte del trabajo esta enfocado en el teorema de Banaszczyk (1990), que extiende el resultado de Steinitz a espacios Fréchet Nucleares.

Introducción

En el cuerpo de los números reales un resultado clásico de Riemann (1854) afirma que si tenemos una serie condicionalmente convergente entonces al cambiar el orden de los sumandos es posible hacerla converger a cualquier número deseado, o hacerla diverger. En el caso de series de números complejos condicionalmente convergentes podemos reordenar las partes reales (o imaginarias) y obtener cualquier suma prefijada; pero esta misma reordenación también afecta a la parte imaginaria (o real), pudiendo esta diverger, por tanto hacer que toda la serie de términos complejos diverja y no habremos conseguido nada. Entonces podemos preguntarnos:
¿Cuál es el correspondiente teorema para series de números complejos?
P. Lévy (1905) probó que "el conjunto de todas las reordenaciones de una serie de números complejos es el vacío o la traslación de un subespacio vectorial real".
Este resulatdo fue generalizado a un espacio vectorial real n-dimensional por E. Steinitz (1913) que es uno de los capítulos que pretendemos estudiar en este trabajo de tesis de una manera accesible e interesante.
De la misma manera nos podemos preguntar:
¿Cuál es la situación para espacios de Banach infinito dimensionales, se cumplirá el resultado de Steinitz?
La respuesta a esta pregunta es negativa gracias a un contraejemplo propuesto por Marcinkiewicz en el espacio $L_2[0,1]$.
Ahora lo natural es estudiar a que tipos de espacios se puede extender el resultado de Steinitz, es decir, dar condiciones a ciertos espacios de dimensión infinita para que el teorema de Steinitz se mantenga.

Por ejemplo, W. Banaszczyk en [13] y [14], probó que un espacio de Fréchet es Nuclear si y sólo si se cumple el teorema de Lévy-Steinitz.

Capítulo 1

El Teorema de Lévy-Steinitz

El objetivo principal en este capítulo es demostrar el Teorema de Lévy-Steinitz, previamente a esto, empezaremos definiendo series absoluta y condicionalmente convergentes en espacios de Banach, así como, reordenaciones y demostrar el Teorema de Riemann que nos dará una idea de como demostrar el Teorema de Lévy-Steinitz.

1.1. Serie de Vectores y Reordenaciones

Sea E un espacio de Banach y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de vectores en E.

- Si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|a_n\|$ converge, decimos que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente.
- Si $\sum_{n\geqslant 1} a_{\varphi(n)}$ converge, para cualquier $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyección, decimos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es incondicionalmente convergente.
- Si $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge pero no incondicionalmente, decimos que $\sum_{n>1} a_n$ es condicionalmente convergente.

Cabe mencionar que si $E = \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie en $\mathbb{R}^k$, decimos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es condicionalmente convergente si $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge pero no absolutamente. Esto es debido a que convergencia incondicional y absoluta en $\mathbb{R}^k$ son equivalentes.

Ejemplo 1.1.

Si $E = \mathbb{R}$

- $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2^n}$ es absolutamente convergente.
- $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente (Criterio de Leibniz).

Teorema 1.1. *Si* $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *es una serie de números reales que converge absolutamente entonces* $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *converge.*

Prueba.

Sea $\sum_{n \geqslant 1} |a_n|$ convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{cases} p_n = a_n, & a_n \geqslant 0 \\ p_n = 0, & a_n < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_n = -a_n, & a_n \leqslant 0 \\ q_n = 0, & a_n > 0 \end{cases}$$

luego $p_n \geqslant 0$, $q_n \geqslant 0$, $p_n + q_n = |a_n|$ y $p_n - q_n = a_n$

Como $p_n \leqslant |a_n|$ y $q_n \leqslant |a_n|$ y $\sum_{n \geqslant 1} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n \geqslant 1} p_n$ y $\sum_{n \geqslant 1} q_n$ convergen.

Así $\sum_{n \geqslant 1} a_n = \sum_{n \geqslant 1} p_n - q_n$ converge ■

Observación 1.1. El inverso del Teorema 1.1 es falso, basta considerar la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Definición 1.1. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Sean $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n \geqslant 1} b_n$ dos series en un espacio vectorial tales que $b_n = a_{\varphi(n)}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ entonces se dice que $\sum_{n \geqslant 1} b_n$ es una reordenación de $\sum_{n \geqslant 1} a_n$.

Ejemplo 1.2. Sea $S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Una reordenación de S_1 es $S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$

Teorema 1.2. *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *una serie de números reales absolutamente convergente de suma* S *entonces cada reordenación de* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *es también absolutamente convergente y de suma* S.

Prueba.

Como $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente, por Teorema 1.1 es convergente, luego denotemos a su suma por S.

Sea $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ una reordenación cualquiera de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, luego

$$b_n = a_{\varphi(n)},\ n = 1, 2, 3, \cdots\ ,\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ una biyección}$$

luego

$$|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| = |a_{\varphi(1)}| + |a_{\varphi(2)}| + \cdots + |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |a_n| < \infty$$

Además como $\sum_{n\geqslant 1} |b_n|$ tiene sumas parciales acotada superiormente y creciente, así $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge absolutamente. Faltaría demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.

Para ello consideremos las sumas parciales k_n, S_n, t_n de $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ respectivamente, es decir

$$\begin{aligned} k_n &= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ t_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \end{aligned}$$

Para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_N - S| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \sum_{n\geqslant 1} |a_{N+n}| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.1}$$

pues (S_n) converge a S y $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente.

Luego para cualquier n se tiene

$$|t_n - S| \leqslant |t_n - S_N| + |S_N - S| < |t_n - S_N| + \frac{\epsilon}{2} \tag{1.2}$$

Escojamos un $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, \cdots, N\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(M)\}$, esto es posible pues al ser φ biyectiva entonces en la enumeración de $\varphi(1), \cdots \varphi(M)$ eventualmente aparecerán los primeros índices $1, 2, \cdots, N$

Ahora tomando $n > M$ entonces $\varphi(n) > N$ ya que $n > M > M - 1 > \cdots > 1$, así, $\varphi(n) \notin \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(M)\}$ por ser φ inyectiva; por la condición de haber elegido M se tiene que $\varphi(n) \notin \{1, 2, \cdots, N\}$ luego $\varphi(n) > N$.

Y también

$$\begin{aligned} |t_n - S_N| &= |b_1 + \cdots + b_n - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &= |a_{\varphi(1)} + \cdots + a_{\varphi(n)} - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ |t_n - S_N| &= |a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{\varphi(n)}| \end{aligned}$$

Por último para $n > M$ se tiene

$$|t_n - S_N| \leqslant |a_{N+1}| + \cdots + |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} |a_{N+n}| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{por (1.1)}$$

Así en (1.2)

$$|t_n - S| < |t_n - S_N| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Por lo tanto: $\sum\limits_{n \geqslant 1} b_n$ converge a S. ■

Observación 1.2. Del teorema anterior concluimos que para series absolutamente convergentes, todos los reordenamientos conducen a series que son también convergentes al mismo valor. Tal hecho es muy diferente en series condicionalmente convergentes, veamos el siguiente ejemplo. Sabemos que:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es condicionalmente convergente.

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Luego

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \\ \frac{S}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots \end{aligned}$$

Sumando

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

esta última serie contiene todos los términos de S en orden diferente, es decir, $\frac{3S}{2}$ es una reordenación de S, sin embargo convergen a sumas diferentes.

Así concluimos que los reordenamientos en series condicionalmente convergentes introducen cierto grado de anarquía, pues es posible hacerlos converger a cualquier valor predeterminado o diverger tal y como nos lo dice Riemann.

1.2. Teorema de Riemann

Teorema de Riemann (1854)

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de números reales condicionalmente convergente y sea λ cualquier número real (o bien $\lambda = \pm\infty$) entonces existe un reordenamiento $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ que converge a λ (o bien, cuando $\lambda = \pm\infty$, que diverge a $\pm\infty$).

Prueba.

Caso 1: $\lambda < \infty$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $p_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$, $q_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$. Si $a_n \geqslant 0$ entonces $p_n = a_n$ y $q_n = 0$, mientras que si $a_n < 0$ entonces $p_n = 0$ y $q_n = -a_n$, y además $p_n - q_n = a_n$.

También $\sum\limits_{n\geqslant 1} p_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} -q_n$ son divergentes a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

A los términos p_n los llamaremos términos positivos de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, mientras que a los términos $-q_n$ los llamaremos términos negativos de $\sum a_n$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, veamos como reordenar $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ para que la serie converja a λ.

- **Etapa 1**

  Escoger tantos términos positivos (digamos k_1 términos) tales que su suma supere por primera vez a λ, esto es

  $$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > \lambda$$

esto es posible ya que $\sum_{n\geqslant 1} p_n = +\infty$

Continuamos sumando ahora los términos negativos (digamos r_1 de ellos) tales que su suma sea por primera vez inferior a λ, esto es

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} < \lambda$$

esto es posible ya que $\sum_{n\geqslant 1} -q_n = -\infty$

- **Etapa 2**

  A continuación sumese tantos términos positivos (digamos k_2 de ellos) hasta que por primera vez se tenga que

  $$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} > \lambda$$

  Continuése con tantos términos negativos (digamos r_2 de ellos) hasta que por primera vez se tenga que

  $$p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{r_1}+p_{k_1+1}+p_{k_1+2}+\cdots+p_{k_2}-q_{r_1+1}-q_{r_1+2}-\cdots-q_{r_2} < \lambda$$

y continuando con este proceso indefinidamente, obtenemos una serie cuyos términos son los mismos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ en orden diferente, es decir, la serie obtenida es una reordenación de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Veamos que sucede con las sumas parciales de esta nueva serie. Para esto necesitamos ver la etapa m.

Al final de esta etapa se suman términos negativos (r_m de ellos) hasta que por primera vez se tenga

$$\begin{aligned} S_m = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots \\ - q_{r_2} + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_{r_{m-1}+1} - \cdots - q_{r_m} < \lambda \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pero como

$$\begin{aligned} p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} + \cdots \\ + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_{r_{m-1}+1} - \cdots - q_{r_m-1} > \lambda \end{aligned}$$

Sumando $-q_{r_m}$ se tiene

$$S_m > \lambda - q_{r_m}$$

Por (1.3) se tiene $0 < \lambda - S_m < q_{r_m}$

Cuando $m \to \infty$, $S_m \to \lambda$

Caso 2: $\lambda = +\infty \vee \lambda = -\infty$

Hagamos la prueba para $\lambda = +\infty$, el otro caso es similar

- **Etapa 1**

  Sumamos los primeros términos positivos (digamos k_1 de ellos) hasta que por primera vez su suma sea mayor o igual a 1, es decir

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} \geqslant 1$$

  Sumando un único término negativo se tiene

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 \leqslant 1$$

- **Etapa 2**

  Súmese tantos términos positivos (digamos k_2 de ellos) hasta que por primera vez la suma sea $\geqslant 2$, es decir,

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} \geqslant 2$$

  luego súmese un único término negativo, entonces

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 \leqslant 2$$

Continuando indefinidamente obtenemos una nueva serie que tiene los mismo términos de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ pero en orden diferente, es decir, es una reordenación de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y además viendo este procedimiento en la etapa m tenemos que

$$S_m = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_m \leqslant m \tag{1.4}$$

pero

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} \geqslant m$$

sumando $-q_m$ se tiene

$$S_m \geqslant m - q_m$$

Por (1.4) $0 \leqslant m - S_m \leqslant q_m$

haciendo $m \to \infty$, tenemos que $S_m \to \infty$ ■

Definición 1.2. Sea $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ una serie en un espacio de Banach E; al conjunto $S\left(\sum_{n\geqslant 1} X_n\right)$ lo definiremos por

$$S\left(\sum_{n\geqslant 1} X_n\right) = \left\{X \in E / X = \sum_{n\geqslant 1} X_{p(n)} \text{ para } p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ biyección}\right\}$$

Observación 1.3. Cuando $E = \mathbb{R}$ y consideramos $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ una serie absolutamente convergente de suma S el Teorema 1.2 nos permite afirmar que $S(\sum_{n\geqslant 1} X_n) = \{S\}$. También por el teorema de Riemann se tiene $S(\sum_{n\geqslant 1} X_n) = \mathbb{R}$ cuando $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ es condicionalmente convergente.

Ahora podemos preguntarnos

¿Qué sucede si consideramos series de vectores?

La respuesta a esto es la que nos conlleva a estudiar el Teorema de Lévy-Steinitz.

1.3. Teorema de Lévy-Steinitz

Para responder la interrogante anterior consideremos $E = \mathbb{R}^2$ y la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}, 0\right) = \left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, 0\right)$$

luego

$$S\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, 0\right) = \mathbb{R} \times \{0\}$$

no es todo $\mathbb{R}^2$, pero es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$. Este fenómeno fue observado por Lévy para $\mathbb{R}^2$ en 1905 y por Steinitz para $\mathbb{R}^k$ con $k \in \mathbb{N}$ en 1913. El enunciado del teorema es el siguiente:

"El conjunto de sumas de todas las reordenaciones de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ es el vacío o la traslación de un subespacio"

En nuestra notación si $\sum_{k\geqslant 1} X_k$ una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ convergente entonces

$$S(\sum_{k\geqslant 1} X_k) = \{\text{traslación de un subespacio}\},$$

veamos los detalles:

Primero demostremos el siguiente lema técnico:

1.3.1. El Teorema del Confinamiento Poligonal

Para cada "n", existe una constante C_n tal que si $\{v_i; i = 1, \cdots, m\}$ es una familia finita de vectores en $\mathbb{R}^n$ cuya suma es cero y $\|v_i\| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$, entonces existe una permutación P de $(2, \cdots, m)$ tal que

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} \right\| \leqslant C_n \ \text{ para todo j} \tag{1.5}$$

Además podemos tomar $C_1 = 1$ y $C_n \leqslant \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$ para todo "n".

Prueba.

Caso n=1 (Idea del Teorema de Riemann)

Si $v_1 > 0$, escogemos $P(2)$ tal que $v_{p(2)} < 0$; y continuamos escogiendo los v negativos hasta que la suma (por primera vez) sea negativa. Es decir,

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} < 0$$

Escogemos el siguiente v positivo y continuamos escogiendo los v positivos hasta que por primera vez la suma de todos los vectores escogidos sea positiva. Es decir,

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} + \cdots + v_{P(k_2)} > 0$$

Continuamos de esta manera hasta que todos los v sean usados y como $|v_i| \leqslant 1$ para todo i, entonces

$$0 \leqslant v_1 + v_{P(2)} \leqslant v_1 \leqslant 1$$

$$0 \leqslant v_1 + v_{P(2)} + v_{P(3)} \leqslant v_1 \leqslant 1$$

$$\vdots$$

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} \leqslant 0$$

$$\text{Pero } \ v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1-1)} \geqslant 0$$

Sumando $v_{P(k_1)}$ se tiene

$$v_{P(k_1)} \leqslant v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1-1)} + v_{P(k_1)} \leqslant 0$$

entonces

$$0 \leqslant |v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)}| \leqslant |v_{P(k_1)}| \leqslant 1$$

De manera similar

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} \leqslant v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} + v_{P(k_1+1)} \leqslant 0$$

luego

$$|v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} + v_{P(k_1+1)}| \leqslant |v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)}| \leqslant 1$$

Continuando con este proceso, concluimos que cada suma parcial está entre 0 y 1, por tanto $C_1 = 1$

Caso general

Haremos la prueba por inducción.

Asumamos que $n > 1$ y que $C_{n-1} < \infty$, además consideremos $\{v_i\}$ una colección de vectores satisfaciendo la hipótesis.

Como $\{v_i\}$ es finito, hay un número finito de posibles sumas parciales de los v que empiezan con v_1; sea L una suma parcial con norma máxima entre todas esas sumas parciales.

Entonces

$$L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s \text{ donde } \{u_1, \cdots + u_s\} \subset \{v_i\}$$

Sea $\{w_1, \cdots, w_t\}$ los otros v tal que

$$L + w_1 + \cdots + w_t = 0$$

Afirmación 1 $\langle u_i, L\rangle \geqslant 0$ para todo i

Supongamos que $\langle u_i, L\rangle < 0$ para algún i

luego $-\dfrac{\langle u_i, L\rangle}{\|L\|} > 0$ entonces $\|L\| - \dfrac{\langle u_i, L\rangle}{\|L\|} > \|L\|$

Así $\|L - u_i\| \geqslant \left\langle L - u_i, \dfrac{L}{\|L\|}\right\rangle > \|L\|$

lo cual contradice la maximalidad de $\|L\|$

Afirmación 2 $\langle v_1, L\rangle \geqslant 0$

Supongamos que $\langle v_1, L\rangle < 0$

entonces

$$\|v_1 - L\| \geqslant \left\langle v_1 - L, \frac{-L}{\|L\|}\right\rangle = \|L\| - \frac{1}{\|L\|}\langle v_1, L\rangle > \|L\|$$

Así $\|v_1 - L\| > \|L\|$

Como $-L = w_1 + \cdots + w_t$ entonces

$$\|v_1 + w_1 + \cdots + w_t\| > \|L\|$$

lo cual contradice la maximalidad de L

Afirmación 3 $\langle w_i, L\rangle \leqslant 0$ para todo i

Supongamos que $\langle w_i, L\rangle > 0$ para algún i.

entonces

$$\|L + w_i\| \geqslant \left\langle L + w_i, \frac{L}{\|L\|}\right\rangle = \|L\| + \frac{\langle w_i, L\rangle}{\|L\|} > \|L\|$$

luego $\|L + w_i\| > \|L\|$

Como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ entonces

$$\|v_1 + u_1 + \cdots + u_s + w_i\| > \|L\|$$

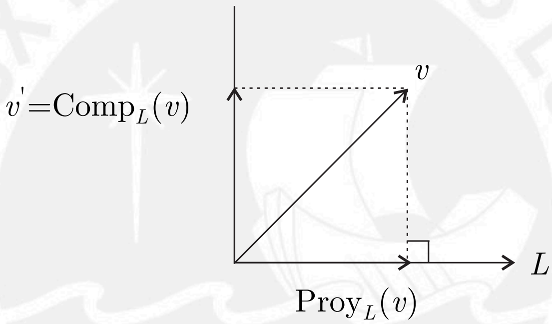
Así $v_1 + u_1 + \cdots + u_s + w_i$ sería una suma parcial de norma mayor que la de L.

Usaremos la hipótesis inductiva en el espacio $(n-1)$-dimensional

$$L^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n / \langle v, L \rangle = 0\}$$

Sea

$$v' = v - \frac{\langle v, L \rangle L}{\|L\|^2}$$



Como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ y

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1 - \frac{\langle v_1, L \rangle L}{\|L\|^2} \in L^{\perp} \\
u_i' &= u_i - \frac{\langle u_i, L \rangle L}{\|L\|^2} \in L^{\perp} \text{ para } i = 1, 2, \cdots, s
\end{aligned}$$

entonces

$$v_1' + u_1' + \cdots + u_s' = v_1 + u_1 + \cdots + u_s - \frac{\langle v_1 + u_1 + \cdots + u_s, L \rangle L}{\|L\|^2}$$

Como $v_1 + u_1 + \cdots + u_s = L$ se tiene

$$v_1' + u_1' + \cdots + u_s' = L - \frac{\langle L, L \rangle L}{\|L\|^2} = 0$$

Similarmente se prueba que $w_1' + \cdots + w_t' = 0$

luego por la hipótesis inductiva, existe una permutación Q de $(1, 2, \cdots, s)$ tal que

$$\left\| v_1' + \sum_{i=1}^{j} u_{Q(i)}' \right\| \leqslant C_{n-1} \text{ para todo } j = 1, 2, \cdots, s \tag{1.6}$$

y también existe una permutación R de $(2, \cdots, t)$ tal que

$$\left\| w_1' + \sum_{i=2}^{j} w_{R(i)}' \right\| \leqslant C_{n-1} \text{ para todo } j = 2, \cdots, t \tag{1.7}$$

Pongamos $R(1) = 1$ Como $\langle v_1, L\rangle \geqslant 0$ y $\langle w_i, L\rangle \leqslant 0$, escogemos el más pequeño r, por ejemplo r_1, tal que

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{R(i)}, L\right\rangle \leqslant 0 \tag{1.8}$$

esto es posible ya que definiendo

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} / \langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{k} \left\langle w_{R(i)}, L\right\rangle \leqslant 0 \right\} \subset \mathbb{N}$$

se tiene que $A \neq \varnothing$ porque $t \in A$, luego A posee mínimo, a este mínimo llamemoslo r_1.

Similarmente podemos escoger el más pequeño s_1 que cumpla

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{R(i)}, L\right\rangle + \sum_{i=1}^{s_1} \left\langle u_{Q(i)}, L\right\rangle \geqslant 0 \tag{1.9}$$

luego el más pequeño r_2 tal que

$$\langle v_1, L\rangle + \sum_{i=1}^{r_1} \left\langle w_{R(i)}, L\right\rangle + \sum_{i=1}^{s_1} \left\langle u_{Q(i)}, L\right\rangle + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \left\langle w_{R(i)}, L\right\rangle \leqslant 0$$

y así sucesivamente.

Ponemos los vectores en el siguiente orden

$$(v_1, w_{R(1)}, w_{R(2)}, \cdots, w_{R(r_1)}, u_{Q(1)}, \cdots, u_{Q(s_1)}, w_{R(r_1+1)}, \cdots, w_{R(r_2)}, \cdots)$$

es decir ubicamos los vectores $\{v_i\}$ según la permutación P como sigue

$$v_{P(i)} = \begin{cases} v_1, \;\; i = 1 \\ w_{R(i)}, \;\; i = 2, \cdots, r_1 \\ u_{Q(i-r_1)}, \;\; i = r_1 + 1, \cdots, r_1 + s_1 \\ w_{R(i-s_1)}, \;\; i = r_1 + s_1 + 1, \cdots, s_1 + r_2 \\ \quad\quad \vdots \end{cases}$$

luego sea $j = 2, \cdots, m$ y llamemos $a = v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}$

la idea es acotar $\| \operatorname{Proy}_L a\|$ y $\| \operatorname{Comp}_L a\| = \|a^{'}\|$ para luego usar el teorema de Pitágoras y obtener una cota para "a".

Afirmación 4 $\|a^{'}\| \leqslant 2C_{n-1}$

en efecto,

como

$$a^{'} = a - \frac{\langle a, L\rangle L}{\|L\|^2} = v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} - \frac{\left\langle v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}, L \right\rangle L}{\|L\|^2}$$

$$a^{'} = {v_1}' + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}^{'}$$

entonces

$$\|a^{'}\| = \|v_1^{'} + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}^{'}\|$$

Por (1.6) y (1.7) tenemos

$$\|a^{'}\| \leqslant C_{n-1} + C_{n-1} = 2C_{n-1} \tag{1.10}$$

Afirmación 5 $\| \operatorname{Proy}_L a\| \leqslant 1$

Por (1.8) y la afirmación 3 tenemos

$$0 \leqslant \frac{\left\langle v_1 + w_{R(1)}, L \right\rangle}{\|L\|} \leqslant \frac{\left\langle v_1, L \right\rangle}{\|L\|} \leqslant \|v_1\| \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \frac{\left\langle v_1 + w_{R(1)} + w_{R(2)}, L \right\rangle}{\|L\|} \leqslant \frac{\left\langle v_1, L \right\rangle}{\|L\|} \leqslant \|v_1\| \leqslant 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{\left\langle v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1-1)}, L \right\rangle}{\|L\|} \geqslant 0$$

Sumando $\dfrac{\left\langle w_{R(r_1)}, L \right\rangle}{\|L\|}$

$$0 \geqslant \frac{\left\langle v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1),L} \right\rangle}{\|L\|} \geqslant \frac{\left\langle w_{R(r_1)}, L \right\rangle}{\|L\|}$$

entonces

$$\left|\frac{\left\langle v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1)}, L\right\rangle}{\|L\|}\right| \leqslant \frac{\left|\left\langle w_{R(r_1)}, L\right\rangle\right|}{\|L\|} \leqslant \|w_{R(r_1)}\| \leqslant 1 \tag{1.11}$$

De manera similar por (1.9) y la afirmación 1 tenemos

$$\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle + \left\langle u_{Q(1)}, L\right\rangle \leqslant 0$$

$$\frac{\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle}{\|L\|} \leqslant \frac{\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle + \left\langle u_{Q(1)}, L\right\rangle}{\|L\|} \leqslant 0$$

luego por (1.11) se tiene

$$\frac{\left|\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle + \left\langle u_{Q(1)}, L\right\rangle\right|}{\|L\|} \leqslant \frac{\left|\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle\right|}{\|L\|} \leqslant 1$$

También

$$\frac{\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle}{\|L\|} \leqslant \frac{\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle + \left\langle u_{Q(1)} + u_{Q(2)}, L\right\rangle}{\|L\|} \leqslant 0$$

Por (1.11) se tiene

$$\frac{\left|\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle + \left\langle u_{Q(1)} + u_{Q(2)}, L\right\rangle\right|}{\|L\|} \leqslant \frac{\left|\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle\right|}{\|L\|} \leqslant 1$$

y por (1.9)

$$\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{s_1-1} u_{Q(i)}, L\right\rangle \leqslant 0$$

Sumando $\left\langle u_{Q(s_1)}, L\right\rangle$ tenemos

$$0 \leqslant \frac{\left\langle v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{s_1} u_{Q(i)}, L\right\rangle}{\|L\|} \leqslant \frac{\left\langle u_{Q(s_1)}, L\right\rangle}{\|L\|} \leqslant \|u_{Q(s_1)}\| \leqslant 1$$

De manera análoga se puede hacer para los demás $v_{P(i)}$ que sobran.

Ahora como

$$\operatorname{Proy}_L a = \frac{\langle a, L\rangle L}{\|L\|^2} = \frac{\left\langle v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}, L \right\rangle L}{\|L\|^2}$$

$$\|\operatorname{Proy}_L a\| = \frac{\left|\left\langle v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}, L \right\rangle\right|}{\|L\|}$$

y por todo lo visto anteriormente llegamos a que

$$\|\operatorname{Proy}_L a\| = \frac{\left|\left\langle v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}, L \right\rangle\right|}{\|L\|} \leqslant 1 \text{ para todo } j$$

Por lo tanto por las afirmaciones 4 y 5 concluimos que

$$\|a\|^2 = \|\operatorname{Comp}_L a\|^2 + \|\operatorname{Proy}_L a\|^2 \leqslant 4C_{n-1}^2 + 1$$

luego

$$\left|v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}\right| \leqslant \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$$

■

Ahora el objetivo es probar " el teorema del reordenamiento" siendo este un ingrediente esencial para la prueba del Teorema de Lévy-Steinitz.

Para su prueba es necesario demostrar la siguiente consecuencia del teorema del confinamiento poligonal:

Lema 1.1. *Si* $\{v_i : i = 1, 2, \cdots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\left\|\sum_{i=1}^{m} v_i\right\| \leqslant \epsilon$, $\|v_i\| \leqslant \epsilon$ *para todo* i*,entonces existe una permutación* P *de* $(1, \cdots, m)$ *tal que*

$$\|v_{P(1)} + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}\| \leqslant \epsilon(C_n + 1) \textit{ para } 1 \leqslant r \leqslant m$$

Prueba.

Definimos $v_{m+1} = -v_1 - v_2 - \cdots - v_m$ entonces $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{v_i}{\epsilon} = 0$ y $\left\|\frac{v_i}{\epsilon}\right\| \leqslant 1$, para todo i

luego por el teorema de confinamiento poligonal, existe una permutación P de $(2, \cdots, m+1)$ tal que

$$\left\| \frac{v_1}{\epsilon} + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{\epsilon} v_{P(i)} \right\| \leqslant C_n \text{ para } 2 \leqslant r \leqslant m$$

De aquí

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} \right\| \leqslant \epsilon C_n$$

Sea $P(1) = 1$ tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{r-1} v_{P(i)} \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{r} v_{P(i)} \right\| + \|v_{P(r)}\| \leqslant \epsilon C_n + \epsilon$$

luego

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} v_{P(i)} \right\| \leqslant \epsilon(C_n + 1) \text{ para } 1 \leqslant r \leqslant m$$

■

1.3.2. El Teorema del Reordenamiento

En $\mathbb{R}^n$, si una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de una serie de vectores converge a S, y si la sucesión de términos de la serie converge a "0", entonces existe un reordenamiento de la serie cuya suma es S.

Prueba.

Sea $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$. Para cada m se tiene $S_m = \sum_{i=1}^{m} v_i$. Asumimos que $S_{m_k} \to S$ para alguna subsucesión S_{m_k}, y debemos mostrar como reordenar los $\{v_i\}$ tal que toda la sucesión de sumas parciales converga a S.

Veamos

$$\text{Sea } \delta_k = \|S_{m_k} - S\| \text{ entonces } \delta_k \to 0$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - \sum_{i=1}^{m_k} v_i - v_{m_{k+1}} \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - S \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{m_k} v_i - S \right\| + \|v_{m_{k+1}}\|
\end{aligned}$$

entonces de la definición de δ_k se tiene

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\| \leqslant \delta_{k+1} + \delta_k + \|v_{m_{k+1}}\|$$

Ahora para cada k definimos

$$\epsilon_k = \text{máx}\{\delta_{k+1} + \delta_k,\ \sup\{\|v_i\| : i \geqslant m_k\}\}$$

entonces $\epsilon_k \to 0$ y $\left\|\displaystyle\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\| < 2\epsilon_k$

También $\|v_i\| \leqslant \epsilon_k \leqslant 2\epsilon_k$ para $i \geqslant m_k$

luego por el lema 1.1, para cada k existe una permutación P_k de $m_k+1, \cdots, m_{k+1}-1$ tal que

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{r} v_{P_k(i)}\right\| \leqslant 2\epsilon_k(C_n + 1) \text{ para } r = m_k + 1, \cdots, m_{k+1} - 1$$

Ahora ordenemos los $\{v_i\}$ como sigue

$$(\underbrace{v_1, v_2, \cdots, v_{m_k}}_{\text{los mantenemos en su posición}}, \underbrace{v_{m_k+1}, v_{m_k+2}, \cdots, v_{m_{k+1}-1}}_{\text{y ordenamos estos términos de acuerdo a } p_k})$$

En este arreglo si $m_k + 1 \leqslant m \leqslant m_{k+1} - 1$

entonces

$$S_m = \sum_{i=1}^{m_k} v_i + \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}$$

y $S_m - S_{m_k} = \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}$

luego haciendo $k \to \infty$ y sabiendo que $S_{m_k} \to S$

$$\|S_m - S_{m_k}\| = \left\|\sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}\right\| \leqslant 2\epsilon_k(C_n + 1) \to 0$$

Por lo tanto

$$S_m \to S$$

■

Antes de enunciar y probar el Teorema Lévy-Steinitz necesitamos también otra consecuencia del Teorema de Confinamiento Poligonal

Lema 1.2. *Si* $\{v_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, $w = \sum_{i=1}^{m} v_i$, $0 < t < 1$ *y* $\|v_i\| \leqslant \epsilon$ *para todo* i, *entonces existe una permutación* P *de* $(2, \cdots, m)$ *y un* r *entre 2 y* m *tal que*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} - tw \right\| \leqslant \epsilon\sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$$

Prueba.

Asumamos que $w \neq 0$ ya que si $w = 0$

entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{v_i}{\epsilon} = 0 \text{ y } \left\| \frac{v_i}{\epsilon} \right\| \leqslant 1$$

Luego por el teorema del confinamiento poligonal existe una permutación P de $(2, \cdots, m)$ tal que

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} \right\| \leqslant \epsilon\sqrt{4C_{n-1}^2 + 1},\ 2 \leqslant r \leqslant m$$

así se tendría lo pedido.

Veamos el caso para $n = 1$

multiplicando por -1 si es necesario asumamos que $w > 0$

Sea S el más pequeño i tal que

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_S > tw \tag{1.12}$$

entonces

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{S-1} \leqslant tw$$

luego por 1.12 y sabiendo que $|v_S| \leqslant \epsilon$ se tiene

$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_{S-1} + v_S - tw| \leqslant |v_S| \leqslant \epsilon$$

Así para el caso $n = 1$ se tiene el Lema con $C_{n-1} = C_0 = 0$

Notar también que en este caso ningún reordenamiento es necesario para obtener una apropiada suma parcial.

Ahora veamos el caso general para $\mathbb{R}^n$, $n > 1$

como $w = \sum_{i=1}^{m} v_i$

Sea $v_i^{'} = v_i - \frac{\langle v_i, w\rangle w}{\|w\|^2}$

entonces

$$\sum_{i=1}^{m} v_i^{'} = \sum_{i=1}^{m} v_i - \frac{\left\langle \sum_{i=1}^{m} v_i, w \right\rangle w}{\|w\|^2} = 0$$

y como $\|v_i\| \leqslant \epsilon$ se tiene $\|v_i^{'}\| \leqslant \epsilon$ y por tanto $\left\|\frac{v_i^{'}}{\epsilon}\right\| \leqslant 1$

luego por el Teorema del confinamiento poligonal existe una permutación P de $(2, \cdots, m)$ tal que

$$\left\|\frac{v_1^{'}}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}v_{P(2)}^{'} + \cdots + \frac{1}{\epsilon}v_{P(j)}^{'}\right\| \leqslant C_{n-1} \text{ para todo } j = 2, \cdots, m \tag{1.13}$$

También tenemos que

- $\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \left\langle v_{P(2)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \cdots + \left\langle v_{P(m)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle = \|w\|$
- $\left|\frac{\langle v_i, w\rangle}{\|w\|}\right| \leqslant \frac{\|v_i\|\|w\|}{\|w\|} \leqslant \epsilon$ para todo i

y similarmente al caso $n = 1$ escogemos un r tal que

$$\left|\left\langle v_1, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \left\langle v_{P(2)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle + \cdots + \left\langle v_{P(r)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle - t\|w\|\right| \leqslant \epsilon \tag{1.14}$$

Observar que en este caso a comparación del caso $n = 1$ los $\left\langle v_i, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle$ hacen el papel de los v_i.

Ahora definamos

$$a = v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw$$

veamos que sucede con $\|a^{'}\|$ y $\|\operatorname{Proy}_w a\|$

- $a' = a - \dfrac{\langle a, w\rangle w}{\|w\|^2} = v_1' + v_{P(2)}' + \cdots + v_{P(r)}'$

  Por (1.13) se tiene

$$\|a'\| = \|v_1' + v_{P(2)}' + \cdots + v_{P(r)}'\| \leqslant \epsilon C_{n-1} \tag{1.15}$$

- $\operatorname{Proy}_w a = \dfrac{\langle a, w\rangle w}{\|w\|^2}$ y $\|\operatorname{Proy}_w a\| = \dfrac{|\langle a, w\rangle|}{\|w\|}$

  Primero observemos (1.14)

$$\left|\left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle - t\|w\|\right| \leqslant \epsilon$$

como

$$\begin{aligned}\left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle - t\|w\| &= \left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw + tw, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle - t\|w\| \\ &= \left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle\end{aligned}$$

entonces

$$\left|\left\langle v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)} - tw, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle\right| \leqslant \epsilon$$

Según como hemos definido "a" concluimos que

$$\left|\left\langle a, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle\right| \leqslant \epsilon$$

así

$$\|\operatorname{Proy}_w a\| \leqslant \epsilon \tag{1.16}$$

Por lo tanto de (1.15) y (1.16) tenemos que

$$\|a\| = \left\|v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} - tw\right\| \leqslant \sqrt{\epsilon^2 C_{n-1}^2 + \epsilon^2} \leqslant \epsilon\sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$$

■

Ahora podemos finalmente probar el resultado principal

1.3.3. Teorema de Lévy-Steinitz

El conjunto de sumas de todas las posibles reordenaciones de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ es o bien el vacío o la traslación de un subespacio.

Prueba.

Sea $\sum\limits_{i\geqslant 1} v_i$ una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ y

$$S\left(\sum_{i\geqslant 1} v_i\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i\geqslant 1} v_{P(i)} \text{ para } P : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ biyección}\right\}$$

Supongamos que $S\left(\sum\limits_{i\geqslant 1} v_i\right) \neq \varnothing$

Reemplazando v_1 por $v_1 - v$, donde v es cualquier elemento de $S(\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i)$ podemos asumir que $0 \in S(\sum\limits_{i\geqslant 1} v_i)$. Así solo debemos probar que $S(\sum\limits_{i\geqslant 1} v_i)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Sea $S_1, S_2 \in S(\sum\limits_{i\geqslant 1} v_i)$ y $\{\epsilon_m\}$ una sucesión de números positivos que converge a 0.

Como un reordenamiento converge a S_1, luego existe un conjunto finito I_1 de enteros positivos tal que $1 \in I_1$ y $\left\|\sum\limits_{i\in I_1} v_i - S_1\right\| < \epsilon_1$

Como un reordenamiento converge a 0, existe un conjunto finito J_1 de enteros positivos tal que $J_1 \supset I_1$ y

$$\left\|\sum_{i\in J_1} v_i - 0\right\| < \epsilon_1$$

(Elegir este J_1 lo suficientemente grande hasta que contenga a I_1)

Además existe un conjunto $K_1 \supset J_1$ tal que

$$\left\|\sum_{i\in K_1} v_i - S_2\right\| < \epsilon_1$$

De igual manera existe un conjunto $I_2 \supset K_1$ y $I_2 \supset \{2\}$ tal que

$$\left\|\sum_{i\in I_2} v_i - S_1\right\| < \epsilon_2$$

(Elegir este I_2 lo suficientemente grande hasta que contenga a K_1 y a $\{2\}$ si es que no lo tuviera) luego, procediendo de la misma manera, construimos inductivamente conjuntos I_m, J_m y K_m de enteros positivos tal que

$$\{1, \cdots, m-1\} \subset K_{m-1} \subset I_m \subset J_m \subset K_m$$

y

$$\left\| \sum_{i \in I_m} v_i - S_1 \right\| < \epsilon_m, \quad \left\| \sum_{i \in J_m} v_i - 0 \right\| < \epsilon_m \text{ y } \left\| \sum_{i \in K_m} v_i - S_2 \right\| < \epsilon_m$$

Para cada m ordenamos los índices en J_m de modo que los que estén en I_m se ubiquen al comienzo, también ordenamos los índices en K_m de tal manera que los que estén en J_m se ubiquen al comienzo. Luego ordenamos los índices de I_{m+1} de tal modo que los que estén en K_m se ubiquen al comienzo. Así existe una permutación P y sucesiones crecientes

$$\{i_m\}, \{j_m\}, \{k_m\} \text{ tal que } i_m < j_m < k_m < i_{m+1} \text{ y}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1 \right\| < \epsilon_m \tag{1.17}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)} \right\| < \epsilon_m \tag{1.18}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{k_m} v_{P(k)} - S_2 \right\| < \epsilon_m \text{ para cada } m \tag{1.19}$$

Notar que de (1.18) y (1.19) llegamos a que

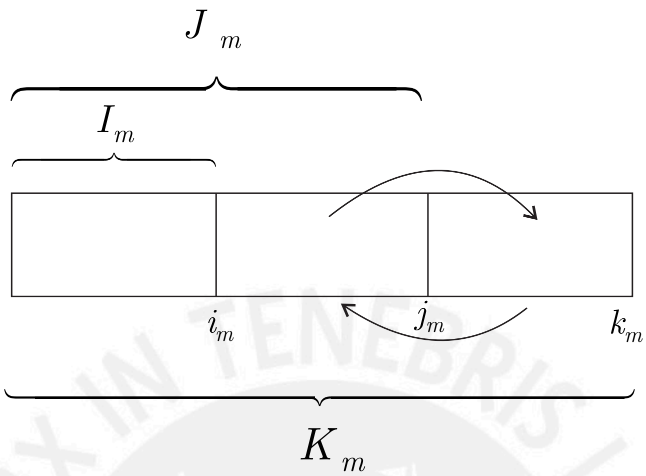
$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - \sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)} - S_2 \right\| < \epsilon_m + \epsilon_m = 2\epsilon_m \tag{1.20}$$

y de (1.17) y (1.20) tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - (S_1 + S_2) \right\| < 3\epsilon_m \tag{1.21}$$

luego para cada m, reordenamos los vectores
$\{v_{P(i)} : i = i_m + 1, \cdots, k_m\}$ intercambiando los vectores

$\{v_{P(i)} : i = i_m + 1, \cdots, j_m\}$ con los vectores $\{v_{P(i)} : i = j_m + 1, \cdots, k_m\}$



Haciendo la reordenación escrita (1.21) quedaría como

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} - (S_1 + S_2) \right\| < 3\epsilon_m$$

esto muestra que existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales $\sum_{i=1}^{m} v_{P(i)}$ que converge a $S_1 + S_2$. Además como $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i) \neq \varnothing$, $v_{(P(i))} \to 0$ el teorema del reordenamiento nos permite afirmar que $S_1 + S_2 \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$

Faltaría demostrar que si $S \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ entonces $St \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Pero por la aditividad de $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ ya demostrada tendríamos que para $t \in \mathbb{Z}^+$ y $S \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ se tiene que $St \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$.

Así es suficiente probar para los casos en que $t \in (0,1)$ y $t = -1$

Caso $t \in (0,1)$

Empecemos con el arreglo P usado para probar la aditividad de $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$

Fijemos $t \in (0,1)$

y sea $\delta_m = \sup\{\|v_{P(i)}\| : i = j_m + 1, \cdots, k_m\}$

Sea también

$$u_m = \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \ \text{ y } \ w_m = u_m + S_2$$

entonces por (1.20),

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \right\| < 2\epsilon_m \tag{1.22}$$

Así por el lema 1.2 existe una permutación Q_m de $\{P(j_m+1), \cdots, P(k_m)\}$ y un r_m entre j_m+1 y k_m tal que

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - t(S_2+u_m) \right\| \leqslant M\delta_m$$

donde $M = \sqrt{4C_{n-1}^2+1}$

entonces de (1.22) tenemos que

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS_2 \right\| \leqslant M\delta_m + 2\epsilon_m$$

y por (1.18) se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS_2 \right\| < \epsilon_m + M\delta_m + 2\epsilon_m = 3\epsilon_m + M\delta_m$$

Por lo tanto, existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales que converge a tS_2. Por el teorema del reordenamiento concluimos que $tS_2 \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$.

caso $t = -1$

Como de (1.18) y (1.19) tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (0 - S_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m$$

entonces

$$\left\| \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-S_2) \right\| < \epsilon_{m+1} + \epsilon_m$$

luego de esta última desigualdad y de (1.18) se tiene

$$\left\|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-S_2)\right\| < \epsilon_{m+1} + 2\epsilon_m$$

luego para cada m, reordenamos los vectores $\{v_{P(i)},\ i = j_m + 1, \cdots, j_{m+1}\}$ intercambiando los vectores $\{v_{P(i)},\ i = j_m + 1, \cdots, k_m\}$ con los vectores $\{v_{P(i)},\ i = k_m + 1, \cdots, j_{m+1}\}$.

Con esta reordenación obtenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (-S_2)\right\| < \varepsilon_{m+1} + 2\varepsilon_m.$$

Finalmente el teorema del reordenamiento implica que

$$-S_2 \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$$

■

Observación 1.4. Como cualesquiera dos espacios de dimensión finita y de igual dimensión son isomorfos, el Teorema de Lévy-Steinitz se cumple en cualquier espacio finito dimensional.

Observación 1.5. En el Teorema del confinamiento poligonal el menor valor de C_n que satisface (1.5) es llamada la constante de Steinitz de $\mathbb{R}^n$.

Trabajando en el teorema del confinamiento poligonal con un espacio vectorial con producto interno E de dimensión finita y denotando a su constante de Steinitz por $S(E)$ se tiene los siguientes resultados:

- Steinitz probó que $S(E) \leqslant 2\dim(E)$. Ver [18]
- $S(E) \leqslant \dim(E)$. Ver [19]
- Si $\dim(E) = 2 \Rightarrow S(E) \leqslant \frac{3}{2}$. Ver [15]
- Si E es un espacio euclidiano de dimensión n entonces $S(E) \geqslant \dfrac{(n+3)^{1/2}}{2}$. Ver [19] y si $n = 2 \Rightarrow S(E) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ver [15]

Capítulo 2

Reordenaciones en Espacios de Dimensión Infinita

Ahora lo natural es estudiar si es posible extender el Teorema de Lévy-Steinitz a espacios de dimensión infinita. El primer intento se hizo en espacios de Banach, veamos los detalles:

2.1. Contraejemplo de Marcinkiewicz

Recordemos que el espacio vectorial normado $L_2[0,1]$ está definido por

$$L_2[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} / f \text{ es medible según Lebesgue y } \|f\|_2 < \infty$$

donde, $\|f\|_2 = \left(\int_{[0,1]} |f|^2\right)^{1/2}$

Ahora consideremos las siguientes funciones en $L_2[0,1]$. Aquí χ_A denota la función característica de A.

$$x_{i,k} = \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]},\ y_{i,k} = -x_{i,k},\ 0 \leqslant i < \infty,\ 0 \leqslant k < 2^i$$

Claramente $\|x_{i,k}\|^2 = 2^{-i}$ para cada i, k. Luego

$$(x_{0,0} + y_{0,0}) + (x_{1,0} + y_{1,0}) + (x_{1,1} + y_{1,1}) + (x_{2,0} + y_{2,0}) + \cdots = 0$$

$x_{0,0}+(x_{1,0}+x_{1,1}+y_{0,0})+(x_{2,0}+x_{2,1}+y_{1,0})+(x_{2,2}+x_{2,3}+y_{1,1})+\cdots = 1$, ver figura 2.1

Ninguna reordenación converge a la función constante 1/2 porque todas las sumas parciales son funciones con valores enteros. Así el conjunto de sumas de la serie $\sum_{i,k} x_{i,k}$ no es un subespacio afín.

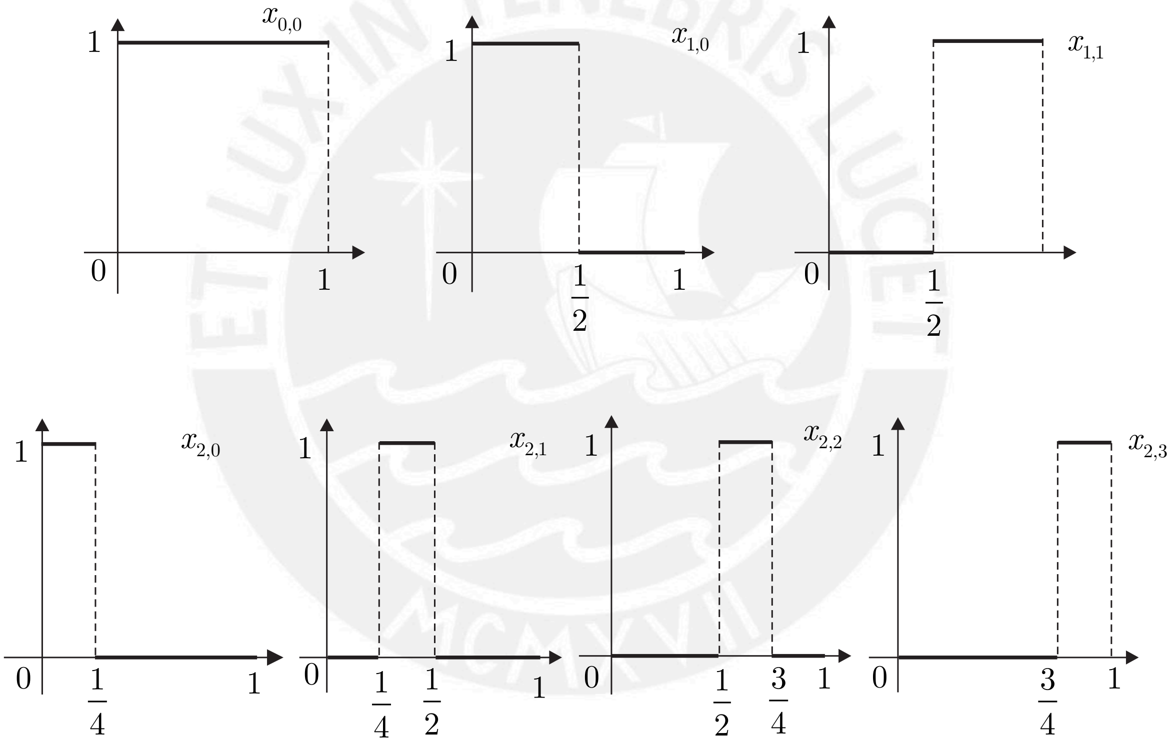


Figura 2.1:

Sabiendo que el teorema de Lévy - Steinitz falla drásticamente en espacios de Banach de dimensión infinita, podemos preguntarnos:

¿Puede extenderse el Teorema de Lévy Steinitz para ciertos espacios de dimensión infinita?

La respuesta a esto nos motiva a estudiar el Teorema de Banaszczyk, que extiende el Teorema de Lévy-Steinitz a espacios Fréchet Nucleares.

2.2. Teorema de Banaszczyk

El objetivo en esta sección es probar el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Banaszczyk). *Sea* $\sum_{i\geqslant 1} u_i$ *una serie convergente en un espacio Fréchet Nuclear* E*. Entonces*

$$S\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right) = \Gamma_0\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right) + \sum_{i\geqslant 1} u_i \tag{2.1}$$

donde:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right) &= \{f \in E' : \sum_{i\geqslant 1} |f(u_i)| < \infty\} \text{ es un subespacio de } E' \\ \Gamma_0\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right) &= \{u \in E : f(u) = 0, \forall f \in \Gamma\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)\} \text{ es un subespacio cerrado de } E \end{aligned}$$

Este es un resultado muy profundo. Para su prueba es necesario usar muchas herramientas del análisis funcional, empecemos recordando algunos resultados de teoría espectral.

2.2.1. Algunos resultados de teoría espectral para operadores compactos

Definición 2.1. Sea X e Y espacios de Banach. Sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, es decir, un operador lineal y continuo de X a Y. Se dice que T es compacto si $\overline{T(U_x)}$ (donde U_x es la bola unitaria cerrada en X) es compacto en Y o equivalentemente si toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, la sucesión $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

En lo que sigue H denotará a un espacio de Hilbert y $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H, H)$.

Teorema 2.2. *Sea* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un operador compacto y autoadjunto. Entonces,* $\|T\|$ *o* $-\|T\|$ *es un autovalor de* T*.*

Demostración.

Si $T = 0$, el resultado es trivial. Supongamos entonces $T \neq 0$, como T es autoadjunto entonces $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$, existirá una sucesión $(x_n)_{n\geqslant 1}$ en la esfera unitaria de H tal que $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \to \|T\|$, es decir,

$$\langle Tx_n, x\rangle \to \|T\| \text{ o } \langle Tx_n, x_n\rangle \to -\|T\|$$

Supongamos que converge a $\|T\|$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|Tx_n - \|T\|x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n\rangle + \|T\|^2 \\ &\leqslant 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0 \end{aligned}$$

de donde $(Tx_n - \|T\|x_n) \to 0$

dado que T es compacto, existe alguna subsucesión (Tx_{k_n}) que converge a algún $y \in H$.

Luego: $\|T\|x_{k_n} \to y$ entonces $x_{k_n} \to \frac{y}{\|T\|}$

Por continuidad de T,

$$Tx_{k_n} \to \frac{T(y)}{\|T\|}$$

Por unicidad de límite $y = \frac{T(y)}{\|T\|}$ entonces $\|T\|y = T(y)$

Solo falta comprobar que $y \neq 0$. Pero,

$$\|T\| = \|T\|\|x_{k_n}\| \to \|y\|$$

y como $T \neq 0$ entonces $y \neq 0$. ■

Lema 2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y sea M un subespacio invariante por T, es decir, tal que $T(M) \subset M$. Entonces, $M^\perp$ es invariante por T^* (adjunta de T). En particular, si T es autoadjunto, entonces $M^\perp$ es invariante por T también.*

Prueba.

Sea $y \in M^\perp$. Entonces, dado $x \in M$, $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$ pues $T(M) \subset M$. Así $T^*y \in M^\perp$, de donde $T^*(M^\perp) \subset M^\perp$ ■

Teorema 2.3 (Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos). *Si T un operador compacto autoadjunto sobre H. Existe un sistema ortonormal $x_1, x_2, \cdots$ de autovectores de T con autovalores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ tal que, para cada $x \in H$ se tiene*

$$Tx = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$$

Si la sucesión $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ es infinita, entonces converge a cero.

Prueba.

Pongamos $H_1 = H$ y $T_1 = T$. Por el Teorema 2.2, T_1 tiene un autovalor λ_1 con $|\lambda_1| = \|T_1\|$. Sea x_1 un autovector unitario. Pongamos ahora $H_2 = \{x_1\}^{\perp}$, que es un subespacio cerrado de H_1. El lema 2.1 garantiza que $T(H_2) \subset H_2$. Sea T_2 la restricción de T a H_2. Claramente, T_2 es un operador compacto y autoadjunto en H_2, de donde, si es no nulo, tendrá un autovalor λ_2 con $|\lambda_2| = \|T_2\| \leqslant \|T_1\| = |\lambda_1|$. Sea x_2 un autovector unitario asociado a λ_2 (y, si $\lambda_1 = \lambda_2$, ortogonal a x_1). Entonces, el conjunto $\{x_1, x_2\}$ es ortonormal. Sea $H_3 = \{x_1, x_2\}^{\perp}$. Entonces, H_3 es un subespacio cerrado de H y $H_3 \subset H_2$ y nuevamente por el lema 2.1, $T(H_3) \subset H_3$. Repetimos el argumento con $T_3 = T\,|_{H_3}$, que vuelve a ser un operador compacto autoadjunto en H_3.

Continuando así, el proceso o bien $T_n = 0$ para algún n, se obtiene una sucesión (λ_n) de autovalores de T y un sistema ortonormal de autovectores $\{x_1, x_2, \cdots\}$ tales que $|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\| \leqslant \|T_n\| = |\lambda_n|$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$. Si (λ_n) es una sucesión infinita, entonces $(\lambda_n) \to 0$, ya que se puede probar que el conjunto de todos los autovalores de un operador compacto T posee un único posible punto de acumulación $\lambda = 0$ (ver [28], pag. 284, teorema 2).

Veamos ahora que T se puede representar de la forma indicada:

Caso 1. $T_{n+1} = 0$ para algún n.

Sea $y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j$. Es claro que $y_n \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^{\perp}$, de donde

$$0 = T_{n+1}(y_n) = Tx - \sum_{j=1}^{n} x_j \langle x, x_j \rangle x_j$$

ya que $y_n \in \{x_1, \cdots, x_n\}^\perp = H_{n+1}$ y así $T\,|_{H_{n+1}} = T_{n+1}$.

Caso 2. $T_n \neq 0$ para todo n.

Sea, como antes, $y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j \in \{x_1, \cdots, x_n\}^\perp$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|Tx - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, x_j \rangle x_j\| = \|T_{n+1} y_n\| &\leqslant \|T_{n+1}\| \|y_n\| = |\lambda_{n+1}| \|x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j\| \\ &\leqslant 2|\lambda_{n+1}| \|x\| \to 0 \end{aligned}$$

y así $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$. ■

Observación 2.1. El conjunto $\{x_1, x_2, \cdots\}$ es una base ortonormal de $\overline{\mathrm{Im}(T)}$.

Para cada k, se tiene $Tx_k = \lambda_k x_k$, de donde $x_k = \frac{1}{\lambda_k} T x_k \in \mathrm{Im}(T)$.

Así $\{x_1, x_2, \cdots\}$ es una sucesión ortonormal dentro del espacio de Hilbert $\overline{\mathrm{Im}(T)}$. Además, si $x \in H$, entonces

$$Tx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

luego $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots\}$ es denso en $\overline{\mathrm{Im}(T)}$. Por lo tanto, es una base ortonormal.

Definición 2.2. Un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ se dice que es positivo si $\langle Tx, x \rangle \geqslant 0$ $\forall x \in H$.

Observación 2.2. Es sencillo probar que todo operador positivo es autoadjunto. (Ver [29], pag. 313, teorema 12.32).

Corolario 2.1. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ un operador compacto. Entonces existen una sucesión de números reales no negativos $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ y sistemas ortonormales $\{x_n\}$ en H_1 e $\{y_n\}$ en H_2 tales que, para todo $x \in H_1$, se tiene

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n \tag{2.2}$$

Además, si la sucesión (λ_n) es infinita, esta converge a cero.

Prueba. Es una consecuencia directa del teorema 2.3, trabajando con el operador positivo, autoadjunto y compacto T^*T. (Ver [10], pag. 149, teorema 16.3). ■

Observación 2.3. A la representación (2.2) se le llama "Representación Schmidt del operador T".

El siguiente teorema, el lector puede encontrarlo en [27], Pag. 337, teorema 14.

Teorema 2.4 (Descomposición polar)**.** *Sea V un espacio vectorial finito dimensional con producto interno y T un operador lineal en V. Entonces existe un operador unitario U en V y un operador positivo P en V tal que*

$$T = UP$$

El operador P es único. Si T es inversible, U también es único.

Observación 2.4. Del teorema 2.4 el operador T también puede ser expresado de la forma $T = QU$ donde $Q = UPU^{-1}$ es también un operador positivo y tiene los mismos autovalores que P.

Notaciones: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = (\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C})$. Si $A, B \subset V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se definen

- $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ y $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$
- Si A tiene un solo elemento, $A = \{x\}$, se escribe $x + B$ en lugar de $A + B$.
- Si D denota la bola unitaria cerrada de $\mathbb{K}$, se define el conjunto:

$$DA = \{\lambda a : a \in A, \lambda \in D\}$$

Definición 2.3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = (\mathbb{R}\ o \mathbb{C})$ y $A \subset V$ se llama

a) Convexo si $tA + (1 - t)A \subset A$ para todo $t \in [0, 1]$.

b) Equilibrado si $DA \subset A$ (y por tanto $DA = A$)

c) Absolutamente convexo si es equilibrado y convexo.

Es fácil ver que un conjunto A es absolutamente convexo si y solo si $\alpha A + \beta B \subset A$ para escalares α y β que verifiquen $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$

2.2.2. Diámetro de Kolmogorov

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Consideremos subconjuntos absolutamente convexos $U, V \subset E$.

Escribimos $V \prec U$ si V es absorbido por U, es decir, si existe $t > 0$ tal que $V \subset tU$. Para $V \prec U$ y cualquier $F \subset E$ subespacio vectorial definimos

$$d(V, U; F) = \text{ínf}\{\delta > 0 : V \subset \delta U + F\}$$

Definición 2.4. Para $V \prec U$ y cada $k = 1, 2, 3, \cdots$ definimos el diámetro de Kolmogorov

$$d_k(V, U) = \text{ínf}\{d(V, U; F) : \dim F < k\}$$

Lema 2.2. *Sean E, F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y sean U, V subconjuntos absolutamente convexos de E con $U \prec V$.*

a) Para cada operador $\phi : E \to F$ se tiene

$$d_k(\phi(U), \phi(V)) \leqslant d_k(U, V)$$

b) Para cada operador $\phi : F \to E$ con $\phi(F) = E$, se tiene

$$d_k(\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V)) = d_k(U, V)$$

c) Para cada operador $\phi : E \to F$ invertible se tiene

$$d_k(\phi(U), \phi(V)) = d_k(U, V)$$

d) $d_k(U, V) \geqslant d_{k+1}(U, V)$ para todo $k \in \mathbb{N}$

e) Si $U_0 \subset U \prec V \subset V_0$ entonces $d_k(U_0, V_0) \leqslant d_k(U, V)$, para todo k.

f) Si $\dim E = n$ entonces $d_{n+k}(U, V) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Prueba.

Son consecuencias directas de la definición del diámetro de Kolmogorov. ■

Una desigualdad muy conocida en espacios con producto interno es la desigualdad de Bessel, el lector interesado puede encontrarlo en [10] o cualquier otro texto de análisis funcional.

Teorema 2.5. *Sea $\{e_n\}$ un sistema ortonormal en un espacio con producto interno H. Entonces para todo $x \in H$ se cumple*

$$\sum_{k \geqslant 1} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Teorema 2.6. *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert, U_{H_1}, U_{H_2} sus bolas unitarias cerradas, $T : H_1 \to H_2$ lineal y continua. Entonces si T es compacto y $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle y_n$ es la representación Schmidt de T entonces*

$$\lambda_n = d_n(TU_{H_1}, U_{H_2}) \;\; n = 1, 2, \cdots$$

Prueba.

Sea $F = \operatorname{Span}\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$. Entonces $\dim F = m$ y para $x \in U_{H_1}$ tenemos

$$Tx \in \sum_{n \geqslant m+1} \lambda_n \langle x, x_n\rangle y_n + F.$$

Como $\{x_n\}$ es un sistema ortonormal, por la desigualdad de Bessel llegamos a que

$$\|\sum_{n \geqslant m+1} \lambda_n \langle x, x_n\rangle y_n\|^2 = \sum_{n \geqslant m+1} \lambda_n^2 |\langle x, x_n\rangle|^2 \leqslant \lambda_m^2 \sum_{n \geqslant m+1} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leqslant \lambda_m^2$$

Por lo tanto $d_m(TU_{H_1}, U_{H_2}) \leqslant \lambda_m$.

La desigualdad inversa es trivial si $\lambda_m = 0$, entonces supongamos que $\lambda_m > 0$ y

$$TU_{H_1} \subset \delta U_{H_2} + F, \;\; \dim F < m \tag{2.3}$$

Sea $h_1, \cdots, h_u$, $u < m$, una base de F. Existe una solución no trivial $y \in \operatorname{Span}\{y_1, \cdots, y_m\}$ de las ecuaciones $\langle y, h_j\rangle = 0$, $j = 1, \cdots, u$. Por lo tanto $y \in F^{\perp}$.

Podemos escoger $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ tal que

$$y = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \alpha_n y_n = T(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n) = Tx \tag{2.4}$$

Como $x \neq 0$, escribamos $x' = tx$ y $y' = ty$ donde $t = \frac{1}{\|x\|}$ y tendremos

$$y' = Tx' \ \text{ y } \ y' \in F^{\perp}$$

Así en (2.4) podemos asumir que $\|x\| = \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^2 = 1$. Para $f \in F$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|Tx - f\|^2 &= \|y - f\|^2 = \|y\|^2 + \|f\|^2 \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{m} \lambda_n^2 |\alpha_n|^2 \geqslant \lambda_m^2 \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^2 \\ &= \lambda_m^2 \end{aligned}$$

entonces $\delta \geqslant \lambda_m$. Como δ y F, en (2.3), fueron arbitrariamente escogidos, hemos probado que

$$d_m(TU_x, U_y) \geqslant \lambda_m$$

■

2.2.3. Espacios localmente convexos nucleares

Definición 2.5. Un espacio vectorial topológico E es un $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ espacio vectorial con una topología el cual hace las aplicaciones suma $f : E \times E \to E$ y multiplicación por un escalar $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ continuas.

Una topología τ en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial es claramente una topología del espacio vectorial si y solo si los siguientes enunciados son válidos:

1. Para cada $x, y \in E$ y cada vecindad U de $x + y$ existen vecindades V de x y W de y, tal que $V + W \subset U$.

2. Para cada $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 \in E$ y cada vecindad U de $\lambda_0 x_0$ existe $\varepsilon > 0$ y una vecindad V de x_0 tal que:

$$\{\lambda V : |\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon, \ v \in V\} \subset U$$

Observación 2.5. En todo espacio vectorial topológico E se cumple lo siguiente:

a) Para cada $y \in E$, la traslación $x \mapsto x + y$ es un homeomorfismo. En particular las vecindades de cada $x \in E$ son de la forma

$$x + V = \{x + v : v \in V\},$$

donde V es una vecindad de cero.

b) Para cada vecindad de cero U en E existe una vecindad de cero V en E con $V + V \subset U$.

c) Para cada vecindad de cero U en E existe una vecindad de cero $W \subset U$ con

$$W = \{\lambda w : |\lambda| \leqslant 1, w \in W\}$$

d) Para cada vecindad de cero U en E tenemos $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} nU$, ya que para cada $x \in E$ la sucesión $(\dfrac{x}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Por observación 2.5, en todo espacio vectorial topológico, existe una base de vecindades cero de $\mathcal{U}$, de conjuntos equilibrados y absorventes (i.e., $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} nU$), donde para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V + V \subset U$. Además si una topología τ en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E tiene estas propiedades, entonces (E, τ) es un espacio vectorial topológico.

Definición 2.6. Un espacio localmente convexo E es un espacio vectorial topológico en el cual cada punto tiene una base de vecindades de conjuntos convexos.
Una topología localmente convexa, en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, es una topología τ en E el cual hace a (E, τ) un espacio localmente convexo.

Lema 2.3. *Para un espacio vectorial topológico E los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *E es localmente convexo.*

2. *E tiene una base de vecindades de cero que son convexos.*

3. *E tiene una base de vecindades de cero que son absolutamente convexos.*

Prueba.
Como las traslaciones de conjuntos convexos son convexos, la equivalencia de (1) y (2) se obtiene de la observación 2.5 (a). Como todo conjunto absolutamente convexo es convexo, solo necesitamos probar (2) → (3).
Sea U una vecindad de cero arbitraria. Entonces por la hipótesis existe una vecindad convexa de cero $V \subset U$, y por observación 2.5 (c), existe una vecindad equilibrada de cero $W \subset V$. Para la cápsula convexa W_0 de W tenemos que $W_0 \subset V \subset U$. W_0 es absolutamente convexo ya que para $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$ en W_0 y $\lambda, u \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| + |u| \leqslant 1$ tenemos

$$\lambda x + uy = \sum_{j=1}^{n} |\lambda|\alpha_j(\frac{\lambda}{|\lambda|}x_j) + \sum_{j=1}^{m} |u|\beta_j(\frac{u}{|u|}y_j) + (1 - |\lambda| - |u|) \cdot 0 \in W_0$$

■

Lema 2.4. *Si E es un espacio localmente convexo, entonces para cualquier vecindad de cero absolutamente convexa U en E se cumple:*

1. *El funcional de Minkowski $\|\cdot\|_U : x \to \inf\{t > 0 : x \in tU\}$, de U, es una seminorma continua en E.*

2. $\overset{\circ}{U} = \{x \in E : \|x\|_U < 1\} \subset U \subset \{x \in E : \|x\|_U \leqslant 1\} = \overline{U}$

3. $\frac{1}{2}\overline{U} \subset \overset{\circ}{U}$

Prueba. (1) es sencillo de la definición y (3) es consecuencia directa de (2), así que solo probemos (2). Las inclusiones

$$\{x \in E : \|x\|_U < 1\} \subset U \subset \{x \in E : \|x\|_U \leqslant 1\}$$

son claras de la definición del funcional de Minkowski. Obviamente $\{x \in E : \|x\|_U < 1\} \subset \overset{\circ}{U}$ y $\overline{U} \subset \{x \in E : \|x\|_U \leqslant 1\}$. Para probar las otras inclusiones, notar que para cada $x \in \overset{\circ}{U}$ existe un $\varepsilon > 0$ con $(1+\varepsilon)x \in \overset{\circ}{U}$. Así, $\|x\|_U \leqslant (1+\varepsilon)^{-1} < 1$. Si $\|y\|_U \leqslant 1$ para un $y \in E$, entonces $\frac{1}{t}y \in U$ para cada $t > 1$ y así $y = \lim_{t \downarrow 1} \frac{1}{t} y \in \overline{U}$. ■

Observación 2.6. Del lema anterior (3) se tiene que todo espacio localmente convexo tiene una base de vecindades de cero que son absolutamente convexos y cerradas.

Definición 2.7. Sea E un espacio localmente convexo. Una colección $\mathcal{U}$ de vecindades de cero en E es llamado un sistema fundamental de vecindades de cero, si para cada vecindad de cero U existe un $V \in \mathcal{U}$ y un $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon V \subset U$.

Una familia $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ de seminormas continuas en E es llamada un sistema fundamental de seminormas, si los conjuntos

$$U_\alpha = \{x \in E : \|x\|_\alpha < 1\}, \quad \alpha \in A,$$

forma un sistema fundamental de vecindades de cero.

De acuerdo a esto, no es difícil probar que todo sistema fundamental de seminormas $(\| \ \|_\alpha)_{\alpha \in A}$ en un espacio localmente convexo E, tiene las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in E$, con $x \neq 0$ existe un $\alpha \in A$ tal que $\|x\|_\alpha > 0$.

2. Para $\alpha, \beta \in A$ existe $\gamma \in A$ y un $C > 0$ tal que $\text{máx}(\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta) \leqslant C\|\cdot\|_\gamma$.

Lema 2.5. *Todo espacio localmente convexo E posee un sistema fundamental de seminormas.*

Prueba.

Por el lema 2.3, E tiene una base de vecindades de cero $\mathcal{U}$ de conjuntos absolutamente convexos. Entonces por el lema 2.4, $(\|\cdot\|_U)_{U \in \mathcal{U}}$ es una familia de seminormas continuas en E. Si V es una vecindad de cero cualesquiera en E, existe un $U \in \mathcal{U}$ con $U \subset V$, luego por el lema 2.4 (2) se tiene

$$\{x \in E : \|x\|_U < 1\} \subset U \subset V$$

Así $(\|\cdot\|_U)_{U \in \mathcal{U}}$ forma un sistema fundamental de seminormas. ■

Observación 2.7. Si un sistema fundamental de seminormas $\mathcal{U}$ es numerable entonces podemos asumir que $\mathcal{U} = \{\|\cdot\|_k : k \in \mathbb{N}\}$ donde $\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \cdots$. Esto es posible escribiendo $\|x\|_k = \underset{j=1,2,\cdots,k}{\text{máx}} P_j(x)$ donde $\{P_j : j \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de seminormas numerable.

Lema 2.6. *Para un espacio localmente convexo E, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *E es metrizable.*

2. *E tiene una base numerable de vecindades de cero.*

3. *E tiene un sistema fundamental de seminormas numerable.*

4. *Una métrica invariante por traslaciones genera la topología de E.*

Prueba. (1) → (2) y (4) → (1) son obvias.

Para mostrar (2) → (3) asumamos que $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ es una base de vecindades de cero absolutamente convexos. Pongamos $\|\cdot\|_k = \| \ \|_{U_k}$. Entonces $\|\cdot\|_k$ son seminormas continuas. Si p es una seminorma continua, entonces podemos escoger k tal que $U_k \subset \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$. Esto implica $p(x) \leqslant \|x\|_k, \forall x \in E$.

Finalmente, para (3) → (4), sea

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x-y\|_k}{1+\|x-y\|_k}$$

Es un ejercicio elemental mostrar que $d(\cdot,\cdot)$ es una métrica invariante por traslaciónes que induce la topología de E. ■

Lema 2.7. *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de seminormas en E con las propiedades (1) y (2) de la definición 2.7. Entonces existe una única topología localmente convexa en E, para el cual $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ es un sistema fundamental de seminormas.*

Prueba.

Para cada $x \in E$, $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$, sea

$$U_{\alpha,\varepsilon}(x) = \{y \in E : \|y-x\| < \varepsilon\}$$

Entonces la colección de conjuntos

$$\mathbb{O} = \{G \subset E : \text{para cada } x \in G \text{ existe un } \alpha \in A, \varepsilon > 0 \text{ con } U_{\alpha,\varepsilon}(x) \subset G\}$$

Es una topología en E localmente convexa, para el cual $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ es un sistema fundamental de seminormas.
Si existe otra topología $\mathbb{O}'$ con las propiedades dadas, entonces $U_{\alpha,\varepsilon}(x) \in \mathbb{O}'$, para todo $x \in E$, $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$. Esto implica $\mathbb{O} \subset \mathbb{O}'$. Para mostrar que $\mathbb{O}' \subset \mathbb{O}$, sea $U \in \mathbb{O}'$ con $0 \in U$. Entonces existen $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$ con $U_{\alpha,\varepsilon}(0) = \varepsilon U_\alpha(0) = \varepsilon U_\alpha \subset U$. Como $\mathbb{O}$ y $\mathbb{O}'$ son invariante por traslaciones, se tiene que $\mathbb{O}' = \mathbb{O}$. ■

Observación 2.8. El lema 2.7 es usado frecuentemente para definir espacios localmente convexos como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales en el que una familia $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ de seminormas, satisfaciendo las propiedades (1) y (2) de la definición 2.7, han sido dadas.

Entre las clases de espacios localmente convexos resaltan los espacios de Fréchet, bornológicos, Schwartz, nucleares, etc. Todo el estudio anterior, sobre el diámetro de Kolmogorov y los espacios localmente convexos, fue necesario para ahora definir formalmente un espacio localmente convexo nuclear.

Definición 2.8. Un espacio localmente convexo E se dice que es nuclear si para cada $c > 0$, $m = 1, 2, \cdots$ y una seminorma p prehilbertiana continua (i.e., una seminorma que satisface $p^2(u+v) + p^2(u-v) = 2p^2(u) + 2p^2(v)$) existe otra seminorma q prehilbertiana continua tal que

$$d_k(B_q, B_p) \leqslant ck^{-m} \quad \text{para todo } k$$

donde $B_p = \{u \in E : p(u) \leqslant 1\}$ es llamada la bola unitaria cerrada con respecto a la seminorma p.

Si E es un espacio Fréchet Nuclear (un espacio localmente convexo nuclear metrizable y completo) entonces $\{B_{p_n}\}_{n\geqslant 1}$ es una base de vecindades de cero con $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots$ (ver observación 2.7 y Lema 2.6).
Informalmente, esto significa que si nos damos una bola unitaria cerrada de alguna seminorna, es posible encontrar otra bola unitaria cerrada, de otra seminorma, contenida en la original o que para alguna vecindad de cero V existe otra vecindad de cero contenida en V.

Hay varias definiciones de espacios nucleares, la utilidad de cada una de ellas depende del contexto en que se trabaje. Probar la equivalencia de estas definiciones es un trabajo no trivial.

2.2.4. Teorema de Banaszczyk

Algunos lemas previos son necesarios para la prueba del Teorema de Banaszczyk. Previamente definamos una elipsoide en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.9. Una aplicación afín $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación de la forma $Tx = Ax + b$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector constante. Un elipsoide C n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ con centro b es la imagen de la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^n$ bajo una aplicación afín no singular, i.e.,

$$C = T(U_n) = A(U_n) + b$$

con T aplicación afín no singular ($\det A \neq 0$) y U_n la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.9. Sea C un elipsoide en $\mathbb{R}^n$, luego

$$\begin{aligned} C =& T(U_n), T \text{ aplicación afín no singular} \\ =& A(U_n) + b, \quad A \text{ lineal y } \det A \neq 0 \end{aligned}$$

Por el teorema 2.4

$$\begin{aligned} =& PU(U_n) + b, \quad P \text{ positivo y } U \text{ unitario} \\ C =& P(U_n) + b \end{aligned}$$

donde los autovalores de P son llamados los semiejes principales de C.

Lema 2.8. *Sea C un elipsoide n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ con semiejes principales $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Sea P un paralelepípedo rectangular circunscrito a C. Entonces*

$$diam P = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)^{1/2}.$$

Prueba. Podemos asumir que el centro de C es el origen. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal tal que $T(U_n) = C$. Tomamos una base ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$ cuyos vectores son paralelos a los ejes del paralelepípedo P. Entonces

$$P = \left\{ \sum_{k=1}^{n} t_k e_k : |t_k| \leqslant S_k, \ \ k = 1, \cdots, n \right\}$$

donde $S_k > 0$ es la mitad del tamaño de la arista paralela a e_k.

Para cada $k = 1, \cdots, n$, se tiene

$$S_k = \sup_{u \in U_n} \langle Tu, e_k \rangle = \sup_{u \in U_n} \langle u, T^* e_k \rangle = \|T^* e_k\| \tag{2.5}$$

Veamos que

$$\frac{1}{2} \text{diam} P = \left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \right)^{1/2} \qquad (*)$$

en efecto,

Sean $x, y \in P$ entonces $x = \sum_{k=1}^{n} t_{1k} e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} t_{2k} e_k$ con $|t_{ik}| \leqslant S_k$ $k = 1, 2$. Entonces

$$\|x - y\|^2 = \| \sum_{k=1}^{n} (t_{1k} - t_{2k}) e_k \|^2 = \sum_{k=1}^{n} |t_{1k} - t_{2k}|^2$$

como

$$|t_{1k} - t_{2k}|^2 \leqslant 2^2 S_k^2 \text{ entonces } \|x - y\| \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \right)^{1/2}$$

luego

$$\sup_{x, y \in P} \|x - y\| \leqslant 2 \left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

Sea $x = \sum_{k=1}^{n} S_k e_k \in P$ y $y = \sum_{k=1}^{n} -S_k e_k \in P$ entonces

$$\|x - y\|^2 = \|2 \sum_{k=1}^{n} S_k e_k\|^2 = 2^2 \left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \right)$$

luego

$$\|x - y\| = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \right)^{1/2} \tag{2.7}$$

De (2.5), (2.6) y (2.7) $\sup_{x, y \in P} \|x - y\| = \text{diam} P = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \right)^{1/2} = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} \|T^* e_k\|^2 \right)^{1/2}$

- **Afirmación:** $\sum_{k=1}^{n} \|T^* e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2$

  en efecto

  Como $\{e_j\}_{j=1}^n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ entonces $Te_k = \sum_{j=1}^{n} \langle Te_k, e_j\rangle e_j$

  Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\langle Te_k, e_j\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\langle e_k, T^* e_j\rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |\langle T^* e_j, e_k\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|T^*(e_j)\|^2\end{aligned}$$

Al número $\left(\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2\right)^{1/2}$ se le llama la norma Hilbert-Schmidt del operador T y de la afirmación cambiando e_k por e_i' donde $\{e_i'\}_{i=1}^n$ es otra base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ se deduce que

$$\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2 = \sum_{i=1} \|Te_i'\|^2$$

es decir la norma Hilbert-Schmidt de un operador no depende de la base ortonormal. Finalmente por teorema 2.4 $T = UP$, U unitario, P positivo con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ luego del teorema 2.3

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \langle x, x_n\rangle$$

de donde $\{x_n\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Entonces

$$\begin{aligned}UPx &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \langle x, x_n\rangle U(x_n) \\ Tx &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \langle x, x_n\rangle y_n \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Por lo tanto de $(*)$

$$\mathrm{diam}P = 2\left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2\right)^{1/2} = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2\right) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \|Tx_n\|^2\right) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)^{1/2}$$

■

Lema 2.9. *Sea C un elipsoide n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ con semiejes principales*

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$$

entonces $d_k(C, U_n) = \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$

Prueba. Como $C = T(U_n)$, T lineal y $\det T \neq 0$; luego por el Teorema 2.4 $T = UP$, U unitaria y P positivo con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ luego por Teorema 2.3

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n, \ \{x_n\}_{i=1}^{n} \text{ es una base ortonormal de } \mathbb{R}^n$$

Entonces

$$\begin{aligned} UPx &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \langle x, x_n \rangle U(x_n) \\ Tx &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n \end{aligned}$$

es la representación Schmidt del operador T.

Aplicando el Teorema 2.6 concluimos que

$$\lambda_k = d_k(T(U_n), U_n) = d_k(C, U_n), \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

■

Observación 2.10. Sea C un elipsoide n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ con semiejes principales $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, luego $T(U_n) = C$ con T lineal y $\det T \neq 0$. Queremos calcular $d_k(U_n, C)$, pero como $\frac{1}{\lambda_1} \geqslant \frac{1}{\lambda_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{\lambda_n}$ y del Lema 2.2 (b) tenemos que

$$d_k(U_n, C) = d_k(T^{-1}(U_n), T^{-1}(C)) = d_k(T^{-1}(U_n), U_n)$$

entonces $d_k(T^{-1}(U_n), U_n) = \lambda_k^{-1}$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Lema 2.10. *Sea C un elipsoide n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ con centro en cero y semiejes principales $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tal que*

$$\lambda_1^{-2} + \cdots + \lambda_n^{-2} \leqslant 1 \tag{2.9}$$

Sea M un subespacio afín $(n-1)$-dimensional en $\mathbb{R}^n$ con

$$M \cap U_n \neq \emptyset \tag{2.10}$$

entonces $C \cap M$ es un elipsoide $n-1$ dimensional; denotando sus semiejes principales por $u_1, \cdots, u_{n-1}$, se verifica

$$u_1^{-2} + \cdots + u_{n-1}^{-2} \leqslant 1 \tag{2.11}$$

Prueba.
Por (2.9), $U_n \subset C$, y por lo tanto de (2.10) $C \cap M \neq \emptyset$.
Como M es un subespacio afín $(n-1)$-dimensional en $\mathbb{R}^n$, entonces $M = x + N$, donde N subespacio $(n-1)$-dimensional en $\mathbb{R}^n$.
Como $M \cap U_n \neq \emptyset$ entonces $N \cap U_n \neq \emptyset$. Luego consideremos un isomorfismo f de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(C) = U_n$, luego $C \cap N = f^{-1}(U_n) \cap f^{-1}(A) = f^{-1}(U_n \cap A) = f^{-1}(U_{n-1})$ donde A subespacio $(n-1)$-dimensional en $\mathbb{R}^n$.
Finalmente
$\Rightarrow$ $C \cap M = x + f^{-1}(U_{n-1})$ es un elipsoide $(n-1)$-dimensional.
Asumamos que los semiejes principales de C estan en orden creciente:

$$\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

Entonces por la observación 2.10

$$d_k(U_n, C) = \lambda_k^{-1} \tag{2.12}$$

Similarmente, denotando por μ el centro de la elipsoide $C \cap M$, $M_0 = M - u$ y asumiendo que los semiejes principales $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1}$ de $C \cap M$ esten en orden creciente, obtenemos

$$d_k(U_n \cap M_0, (C \cap M) - u) = \mu_k^{-1} \tag{2.13}$$

Sea $N = f(M)$, $N_0 = f(M_0)$, $D = f(U_n)$

$D = f(U_n)$ y $v_k = \lambda_k^{-1}$; entonces $v_1, \cdots, v_n$ son los semiejes principales de la elipsoide D. Por condición (2.9)

$$v_1^2 + \cdots + v_n^2 \leqslant 1 \tag{2.14}$$

Sea P un paralelepípedo rectangular circunscrito a D tal que una de sus caras $(n-1)$-dimensionales es paralela a N_0. De (2.14) y del lema 2.8 tenemos que $P \subset U_n$. Por construcción, $D \subset P$ y $N_0 \cap D \neq \varnothing$ ya que $M_0 \cap U_n \neq \varnothing$.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \to N_0$ la proyección ortogonal. Entonces es claro que $\pi(P)$ es un paralelepípedo rectángular $(n-1)$-dimensional que circunscribe al elipsoide $\pi(D)$; además, $\pi(P) \subset (U_n \cap N) - f(u)$, luego diam$\pi(P) \leqslant 2$ (trabajando con la métrica euclidiana) y por lema 2.8

$$\sum_{k=1}^{n} d_k^2(\pi(D), (U_n \cap N) - f(u)) \leqslant 1 \tag{2.15}$$

y como $D \cap N_0 \subset \pi(D)$, por el lema 2.2 (e), (2.15) implica que

$$\sum_{k=1}^{n-1} d_k^2(D \cap N_0), (U_n \cap N) - f(u)) \leqslant 1 \tag{2.16}$$

finalmente como f^{-1} es un isomorfismo, por Lema 2.2 (c) concluimos que

$$\begin{aligned} d_k(D \cap N_0, (U_n \cap N) - f(u)) &= d_k(f^{-1}(D \cap N_0), f^{-1}((U_n \cap N) - f(u))) \\ &= d_k(U_n \cap M_0, (C \cap M) - u) = u_k^{-1} \end{aligned}$$

Así de (2.13) y (2.16) obtenemos (2.11). ■

Lema 2.11. *Sea A un espacio euclidiano afín n-dimensional y P un paralelepípedo n-dimensional en A tal que la medida de cada una de sus aristas es menor o igual a 1. Sea C un elipsoide n-dimensional en A con semiejes principales $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tal que $\lambda_1^{-2} + \cdots + \lambda_n^{-2} \leqslant 1$. Si P contiene el centro de C, entonces C contiene alguna arista de P.*

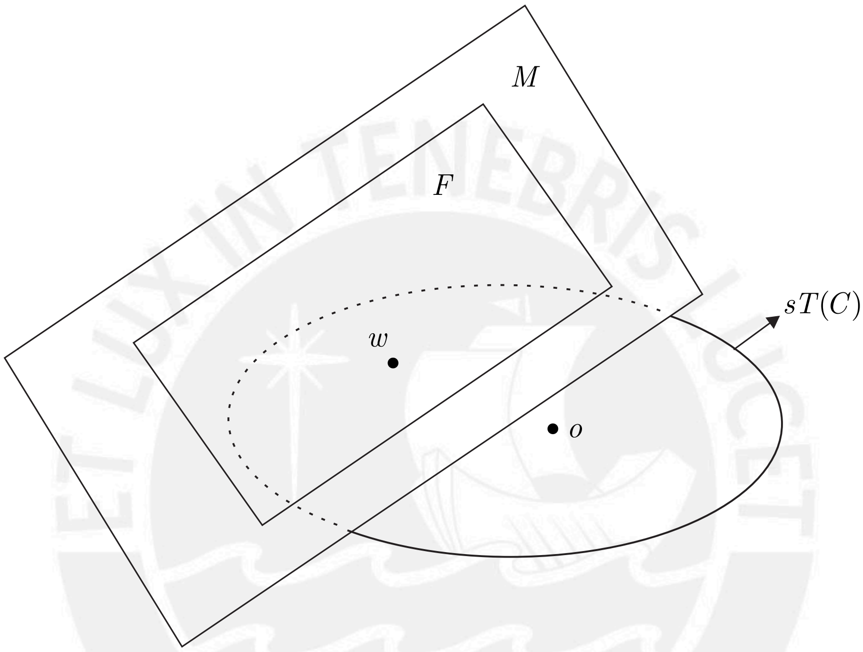
Prueba.

Usaremos inducción sobre n. Para $n = 1$, el lema es trivial. Supongamos que el lema es cierto para espacios $(n-1)$-dimensionales, $n \geqslant 2$. Sea u el centro de C. Podemos encontrar una isometría afín $T : A \to \mathbb{R}^n$ con $Tu = 0$.

Definamos

$$s = \sup\{r > 0 : rT(C) \subset T(P)\}$$

Sea F una cara $(n-1)$-dimensional de $T(P)$ tangente al elipsoide $sT(C)$. Sea w el punto en común de F y $sT(C)$ y M un subespacio afín $(n-1)$-dimensional de $\mathbb{R}^n$ que contiene a F.



Luego como las aristas de $T(P)$ son menores o iguales a uno, tenemos que $M \cap U_n \neq \varnothing$.

Luego por el lema 2.10 tenemos que $T(C) \cap M$ es un elipsoide $(n-1)$-dimensional, y si $u_1, \cdots, u_{n-1}$ son sus semiejes principales, entonces

$$u_1^{-2} + \cdots + u_{n-1}^{-2} \leqslant 1$$

Como w es el centro de $T(C) \cap M$ y $w \in F$, la hipótesis inductiva afirma que alguna arista de F esta contenida en $T(C) \cap M$.

Esto significa que $T(C)$ contiene alguna arista de $T(P)$, es decir, C contiene alguna arista de P. $\blacksquare$

Para cada $s \in \mathbb{N}$, denotemos a I_s a la colección de todos los subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, s\}$.

Lema 2.12. *Sea $p \geqslant q$ dos seminormas prehilbertianas en un espacio vectorial E, tal que*

$$\sum_{k \geqslant 1} d_k^2(B_p, B_q) \leqslant 1 \tag{2.17}$$

Tomemos $b \in E$ y $v_1, \cdots, v_s \in B_p$ con $s \geqslant 2$. Si un vector $y \in E$ pertenece al conjunto

$$conv\{b + \sum_{i \in I} v_i : I \in I_s\} \tag{2.18}$$

entonces existe algún $j \in I_s$ tal que $1 \leqslant card\, J \leqslant s - 1$ y $b + \sum_{i \in J} v_i \in B_q + y$.

Prueba.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que p, q son normas y $v_1, \cdots, v_s$ son linealmente independientes. Así, podemos asumir que $E = \mathbb{R}^s$ y $B_p = U_s$. Entonces el conjunto de (2.18), denotado por P, es un paralelepípedo s-dimensional y $B_q + y$ un elipsoide s-dimensional en $\mathbb{R}^s$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ son los semiejes principales de $B_q + y$, entonces, por (2.17), tenemos que

$$\lambda_1^{-2} + \cdots + \lambda_s^{-2} \leqslant 1$$

En virtud del lema 2.11, existe una arista de P contenida en $B_q + y$. Como $s \geqslant 2$, se tiene que $B_q + y$ contiene algún vértice de P distinto de b y $\sum_{i=1}^{s} v_i$. Como todo vértice de P tiene la forma $b + \sum_{i \in J} v_i$ para algún $J \in I_s$, $1 \leqslant \text{card}\, J \leqslant s - 1$, esto completa la prueba del lema. ■

Sea $\sum_{i \geqslant 1} u_i$ una serie convergente en un espacio vectorial topológico E. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea

$$Z_m\left(\sum_{i \geqslant 1} u_i\right) = \left\{\sum_{i \in I} u_i : I \subset \{m, m+1, \cdots\} \text{ finito}\right\}$$

Definimos

$$U\left(\sum_{i \geqslant 1} u_i\right) = \bigcap_{m \geqslant 1} \overline{Z_m\left(\sum_{i \geqslant 1} u_i\right)}$$

En lo que sigue denotaremos a $Z_m\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$ simplemente por Z_m.

Lema 2.13. *Sea* $\sum_{i\geqslant 1} u_i$ *una serie convergente en un espacio vectorial topológico, entonces* $U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$ *es un subgrupo aditivo cerrado de* E.

Prueba.
Trivialmente $U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$ es cerrado. Veamos que es un subgrupo aditivo de E.
Sea $x, y \in U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$, debemos probar que $-x \in U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$ y que $x+y \in \left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$.
En efecto

$*$) Fijemos $m \in \mathbb{N}$, U vecindad de cero, entonces por observación 2.5 existe V vecindad de cero tal que $V + V \subset U$.

Como $\sum_{i\geqslant 1} u_i$ es convergente, existe $n \geqslant m$ tal que para todo $N \geqslant n$ tenemos $\sum_{i=n}^{N} u_i \in V$.

En particular $x \in \overline{Z_n}$, es decir, cualquier vecindad de x, digamos $x+V$, satisface

$$(x + V) \cap Z_n \neq \varnothing$$

entonces

$$x - \sum_{i\in I} u_i \in V, \quad I \subset \{n, n+1, \cdots\} \text{ finito} \tag{2.19}$$

Sea $N' = \text{máx}\{\text{máx}\, I, n\}$, $T = \{n, n+1, \cdots, N'\}$, entonces de (2.19)

$$x + \sum_{i\in T-I} u_i = \underbrace{x - \sum_{i\in I} u_i}_{\in V} + \underbrace{\sum_{i=n}^{N'} u_i}_{\in V} \in U$$

Claramente $T - I \subset \{m, m+1, \cdots\}$ finito, y como U es equilibrado entonces $-x - \sum_{i\in T-I} u_i \in U$

luego

$$(-x+U)\cap Z_m \neq \varnothing, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto $-x \in \overline{Z}_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$

entonces

$$-x \in \bigcap_{m\geqslant 1} \overline{Z}_m = U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$$

$**)$ Como $y \in U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$ entonces $y \in \overline{Z}_R$ con $R = k+1$, $k = \max I$, esto es

$$(y+V)\cap Z_{k+1} \neq \varnothing$$

en consecuencia

$$y - \sum_{i\in J} u_i \in V, \; J \subset \{k+1, k+2, \cdots\} \text{ finito}$$

luego como $I \cap J = \varnothing$ se tiene

$$x + y - \sum_{i\in I\cup J} u_i = \underbrace{\left(x - \sum_{i\in I} u_i\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(y - \sum_{i\in J} u_i\right)}_{\in V} | \in U$$

Claramente $I \cup J \subset \{m, m+1, \cdots\}$

entonces

$$((x+y)+U)\cap Z_m \neq \varnothing, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto $x+y \in \overline{Z}_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$

entonces

$$x + y \in \bigcap_{m\geqslant 1} \overline{Z}_m = U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$$

$\blacksquare$

Lema 2.14. *Sea* $\sum_{i\geqslant 1} u_i$ *una serie convergente en un espacio localmente convexo metrizable y completo* E*. Entonces*

$$A\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right) = \sum_{i\geqslant 1} u_i + U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$$

donde

$$A\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right) = \left\{w \in E : \text{existe } \rho \text{ una permutación de } \mathbb{N} \text{ y una sucesión } j_1 < j_2 < \cdots \text{ tal que } w = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{j_n} u_{\rho(i)}\right\}$$

Prueba.

"$\supset$" Como E es espacio localmente convexo metrizable, entonces por el lema 2.6 existe una base numerable de vecindades de cero $(U_n)_{n\geqslant 1}$

Sea $x \in \sum_{i\geqslant 1} u_i + U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$

Sea $n_0 = 1$, existe V vecindad de cero tal que $V + V \subset U_1$

Por el lema 2.13 se tiene

$$-x + \sum_{i\geqslant 1} u_i \in U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$$

entonces

$$-x + \sum_{i\geqslant 1} u_i \in \overline{Z}_m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}$$

en particular

$$-x + \sum_{i\geqslant 1} u_i \in \overline{Z}_{n_0}$$

luego para cualquier U vecindad de cero se cumple que

$$\left(\left(-x + \sum_{i\geqslant 1} u_i\right) + U\right) \cap Z_{n_0} \neq \varnothing$$

en particular

$$\left(\left(-x+\sum_{i\geqslant 1}u_i\right)+V\right)\cap Z_{n_0}\neq\varnothing$$

Así existe $J_1\subset\{n_0,n_0+1,\cdots\}$ finito tal que

$$-x+\sum_{i\geqslant 1}u_i-\sum_{i\in I_1}u_i\in V$$

Como V es equilibrado entonces

$$x-\sum_{i\geqslant 1}u_i+\sum_{i\in I_1}u_i\in V \tag{2.20}$$

Además existe $n_1>\text{máx}\{\text{máx}\, I_1,n_0\}$ tal que

$$\sum_{i\geqslant 1}u_i-\sum_{i=1}^{n_1-1}u_i\in V \tag{2.21}$$

De (2.20) y (2.21) obtenemos

$$\underbrace{x-\sum_{i\geqslant 1}u_i+\sum_{i\in I_1}u_i}_{\in V}+\underbrace{\sum_{i\geqslant 1}u_i-\sum_{i=1}^{n_1-1}}_{\in V}\in U_1$$

entonces

$$x-\sum_{i=1}^{n_1-1}+\sum_{i\in I_1}u_i\in U_1$$

Procediendo por inducción, encontramos

$$I_k\subset\{n_{k-1},n_{k-1}+1,\cdots\}\ \text{ finito y}$$

$$n_k>\text{máx}(\text{máx}\, I_k,n_{k-1})\ \text{ tal que}$$

$$x-\sum_{i=1}^{n_k-1}u_i+\sum_{i\in I_k}u_i\in U_k$$

Sea $T_k=\{n_{k-1},n_{k-1}+1,\cdots,n_k-1\}$, entonces tenemos

$$x-\sum_{i=1}^{n_k-1}u_i+\sum_{i\in I_k}u_i=x-\sum_{i=1}^{n_{k-1}-1}u_i-\sum_{i=n_{k-1}}^{n_k-1}u_i+\sum_{i\in I_k}u_i=x-\underbrace{\sum_{i=1}^{n_{k-1}-1}u_i-\sum_{i\in T_k-I_k}u_i}_{\triangle_k}\in U_k$$

Ahora, sea $j_k = n_k - 1 - |I_i|$ y construimos una permutación δ de los naturales con

$$\delta(\{n_{k-1}, \cdots, j_k\}) = T_k - I_k$$

$$\delta(\{j_k + 1, \cdots, n_k - 1\}) = I_k \text{ para todo } k$$

Por último

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{j_k} u_{\delta(i)} = \lim_{k\to+\infty} (\triangle_k) = x$$

" $\subset$ " Sea $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ creciente y δ una permutación de $\mathbb{N}$ tal que

$$x = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{j_k} u_{\delta(i)}$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$, U vecindad de cero. Sea $n > m$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i\geqslant 1} u_i \in U,\ \{1, 2, \cdots, n\} \subset \{\delta(1), \delta(2), \cdots, \delta(j_k)\} \text{ y}$$

$$x - \sum_{i=1}^{j_k} u_{\delta(i)} \in U.$$

Sea $I = \{\delta(1), \delta(2), \cdots, \delta(j_k)\} - \{1, 2, \cdots, n\}$ entonces $\sum\limits_{i\in I} u_i \in Z_m$ y

$$x - \sum_{i\geqslant 1} u_i - \sum_{i\in I} u_i = \underbrace{x - \sum_{i=1}^{j_k} u_{\delta(i)}}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i\geqslant 1} u_i}_{\in U} \in U + U$$

Por lo tanto

$$x - \sum_{i\geqslant 1} u_i \in \overline{Z}_m \text{ para todo } m$$

luego

$$x \in \sum_{i\geqslant 1} u_i + U\left(\sum_{i\geqslant 1} u_i\right)$$

■

Un corolario del Teorema de Hahn-Banach que será de utilidad para el siguiente lema es:

Corolario 2.2. Sea $C \subset E$ un conjunto abierto convexo y $x_0 \in E$ con $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in C$. (Ver [22].)

Lema 2.15. *Sea* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *una serie convergente en un espacio nuclear completo. Entonces*

$$U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = \Gamma_0\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)$$

Prueba.

Denotemos a nuestro espacio nuclear por E. Probemos que

$$\Gamma_0\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) \subset U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)$$

La otra inclusión es trivial. Sea $w \in E \backslash U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)$. Como $U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)$ es cerrado y no contiene a w, existe una seminorma q prehilbert continua tal que

$$(w + B_q) \cap U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = \varnothing.$$

Por definición de $U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)$, existe un índice m tal que $w + B_q \in \overline{Z_m}$, es decir,

$$q\left(w - \sum_{i \in I} u_i\right) > 1, \text{ para cualquier } I \subset \{m, m+1, \cdots\} \text{ finito.} \tag{2.22}$$

Por definición de nuclearidad, podemos encontrar otra seminorma p prehilbert continua con $p \geqslant q$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B_p, B_q) \leqslant \frac{1}{4} \tag{2.23}$$

Aumentando el valor de m, si es necesario, podemos asumir que

$$p(u_i) \leqslant 1 \text{ para todo } i \geqslant m \tag{2.24}$$

Sea

$$Q = \left\{\sum_{i=m}^{l} t_i u_i : t_i \in [0,1], \ l \text{ no fijo}\right\}$$

Afirmamos que

$$Q \cap \left(w + \frac{1}{2} B_q \right) = \varnothing \tag{2.25}$$

Supongamos lo contrario. Entonces existen $t_m, \cdots, t_l \in [0,1]$ tal que

$$y = \sum_{i=m}^{l} t_i u_i \in w + \frac{1}{2} B_q \tag{2.26}$$

Podemos asumir que $s = l - m \geqslant 2$. Denotemos a $v_i = u_{i+m-1}$ para $i = 1, \cdots, l-m+1$. De (2.23) y (2.24) y el lema 2.12 con $b = 0$ y q reemplazado por $\frac{1}{2}q$, vemos que

$$q\left(y - \sum_{i \in J} u_i \right) \leqslant \frac{1}{2} \text{ para } J \subset \{m, \cdots, l\} \tag{2.27}$$

De (2.26) y (2.27) obtenemos que $q\left(w - \sum_{i \in J} u_i \right) \leqslant 1$, el cual contradice (2.22). Esto prueba (2.25). Así en virtud del corolario del teorema de Hahn-Banach, existe $f \in E'$ que separa estrictamente w de Q

$$\sup_{u \in Q} f(u) < f(w) \tag{2.28}$$

En particular,

$$f\left(\sum_{i \in I} u_i \right) < f(w) \text{ para cualquier } I \subset \{m, m+1, \cdots\} \text{ finito} \tag{2.29}$$

Como la serie $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ converge, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} f(u_i)$ converge. Por lo tanto, dee (2.29) y el Teorema de Riemann, tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} |f(u_i)| < \infty$, es decir, $f \in \Gamma\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \right)$. De (2.28) obtenemos que $f(w) \neq 0$ ya que $0 \in Q$. Así $w \notin \Gamma_0\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \right)$. ■

Lema 2.16. *Sean $B \subset C \subset D$ tres elipsoides con el mismo centro n-dimensionales en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B, C) \leqslant 1 \tag{2.30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(C, D) \leqslant \frac{1}{4} \tag{2.31}$$

Para cualesquiera $u_1, \cdots, u_l \in B$ *y* $a \in C$ *con* $a + \sum_{i=1}^{l} u_i \in C$*, existe una permutación* φ *de* $\{1, \cdots, l\}$ *tal que*

$$a + \sum_{i=1}^{j} u_{\varphi(i)} \in D \ \ (j = 1, 2, \cdots, l)$$

Prueba.

Aplicaremos inducción sobre n. Para $n = 1$, el lema es trivial. Fijemos un entero $m \geqslant 2$ y supongamos que el lema es cierto para $n = m - 1$. Probaremos que también es cierto para $n = m$.

Sea $F \subset G \subset H$ tres elipsoides en $\mathbb{R}^m$ centradas en cero, tal que

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2(F, G) \leqslant 1 \tag{2.32}$$

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2(G, H) \leqslant \frac{1}{4} \tag{2.33}$$

(2.34)

Vamos a probar que:

$$(*) \quad \begin{cases} \text{para cualesquiera } w_1, w_2 \cdots, w_l \in F \text{ y } b \in G \text{ con } b + \sum_{i=1}^{l} w_i \in G, \text{ existe} \\ \text{una permutación } \delta \text{ de } \{1, \cdots, l\} \text{ tal que } b + \sum_{i=1}^{j} w_{\delta(i)} \in H \ \ (j = 1, \cdots, l) \end{cases}$$

Para probar $(*)$, aplicaremos inducción sobre l. Para $l = 1$, no hay nada que probar. Fijemos un entero $s \geqslant 2$ y supongamos que $(*)$ es verdadero para todo $l < s$. Probaremos que $(*)$ es verdadero para $l = s$.

Tomemos cualesquiera $V_1, \cdots, v_s \in F$ y $b \in G$ con $b + \sum_{i=1}^{s} v_i \in G$. Tenemos que encontrar una permutación ρ de $\{1, \cdots, s\}$ tal que

$$b + \sum_{i=1}^{j} v_{\rho(i)} \in H \ \ (j = 1, \cdots, s) \tag{2.35}$$

Consideremos dos casos.

Caso 1: La cápsula convexa del conjunto

$$Z = \left\{ b + \sum_{i \in I} v_i : I \in I_s \right\}$$

contiene al cero. Sean p y q normas en $\mathbb{R}^m$ con $B_p = F$ y $B_q = G$. Entonces de (2.32) y el lema 2.12 con $y = 0$, existe un $J \in I_s$ tal que $1 \leqslant \operatorname{card} J \leqslant s-1$ y $b + \sum_{i \in J} v_i \in G$. Denotemos a $r = \operatorname{card} J$ y sean $w_1, \cdots, w_r$ los elementos consecutivos del conjunto $\{v_i\}_{i \in J}$. Por nuestra hipótesis inductiva $(*)$ es verdad para $l = r$, existe una permutación δ de $\{1, \cdots, r\}$ tal que

$$b + \sum_{i=1}^{j} w_{\delta(i)} \in H \quad (j = 1, \cdots, r)$$

En otras palabras, podemos ordenar los elementos de J en una sucesión $\rho(1), \cdots, \rho(r)$ tal que

$$b + \sum_{i=1}^{j} v_{\rho(i)} \in H \quad (j = 1, \cdots, r) \tag{2.36}$$

Ahora, sean $w'_1, \cdots, w'_{s-r}$ los elementos consecutivos del conjunto $\{v_i\}_{i \notin J}$. Sea $l = s - r$ en $(*)$ y reemplazando b por $b + \sum_{i \in J} v_i$, vemos que existe una permutación τ de $\{1, \cdots, s-r\}$ tal que

$$b + \sum_{i \in J} v_i + \sum_{i=1}^{j} w'_{\tau(i)} \in H \quad (j = 1, \cdots, s-r)$$

En otras palabras, podemos ordenar los elementos de $\{1, \cdots, s\} \backslash J$ en una sucesión

$$\rho(r+1), \cdots, \rho(s-r)$$

Tal que

$$b + \sum_{i \in J} v_i + \sum_{i=r+1}^{j} v_{\rho(i)} \in H \quad (j = r+1, \cdots, s) \tag{2.37}$$

Entonces ρ es una permutación de $\{1, \cdots, s\}$ y (2.35) se obtiene de (2.36) y (2.37).

Caso 2: Supongamos ahora que cero no pertenece a la cápsula convexa de Z. Así, en virtud del corolario del Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional f en $\mathbb{R}^m$ con

$$f(u) > 0, \quad \text{para todo } u \in Z \tag{2.38}$$

Sea $h = \sup\{f(u) : u \in G\}$. Evidentemente, Z es simétrico con respecto al punto medio del segmento que une b y $b + \sum_{i=1}^{s} v_i$. Como el punto medio pertenece a G, de (2.38) se tiene que

$$f(u) < 2h, \quad \text{para todo } u \in Z \tag{2.39}$$

Podemos asumir que $H = U_m$ y que $\ker f = \mathbb{R}^{m-1}$, Sea $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ la proyección ortogonal. Por el lema 2.2 a), llegamos a que

$$\sum_{k=1}^{m-1} d_k^2(\pi(F), \pi(G)) < \sum_{k=1}^{m} d_k^2(F, G)$$

Por lo tanto, de (2.32), obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{m-1} d_k^2(\pi(F), \pi(G)) \leqslant 1 \tag{2.40}$$

Podemos encontrar un paralelepípedo rectángular P m-dimensional circunscrito a G tal que una de sus caras sea paralela a $\mathbb{R}^{m-1}$. De (2.33) y el lema 2.8 tenemos que $2P \subset U_m$. Así, llegamos a que

$$2\pi(P) \subset W = \pi(U_m \bigcap f^{-1}(2h)) \tag{2.41}$$

Obviamente $\pi(P)$ es un paralelepípedo $(m-1)$ dimensional circunscrito al elipsoide $(m-1)$ dimensional $\pi(G)$. De (2.41) y el lema 2.8 obtenemos

$$\sum_{k=1}^{m-1} d_k^2(\pi(G), W) \leqslant \frac{1}{4} \tag{2.42}$$

Denotemos a $B = \pi(F)$, $C = \pi(G)$ y $D = W$. Entonces de (2.40) y (2.42) obtenemos (2.30) y (2.31), respectivamente. Luego, sea $n = m - 1$, $l = s$, $a = \pi(b)$ y $u_i = \pi(v_i)$ para $i = 1, \cdots, l$. Entonces $a \in C$, $u_1, \cdots, u_l \in B$ y

$$a + \sum_{i=1}^{l} u_i = \pi(b) + \sum_{i=1}^{s} \pi(v_i) = \pi\left(b + \sum_{i=1}^{s} v_i\right) \in \pi(G) = C$$

Luego, las hipótesis del lema 2.16 son satisfechas. Como se asumió verdadero, el lema 2.16, para $n = m - 1$, entonces existe una permutación ρ de $\{1, \cdots, s\}$ tal que

$$\pi(b) + \sum_{i=1}^{j} \pi(v_{\rho(i)}) \in W \quad (j = 1, \cdots, s) \tag{2.43}$$

De (2.38), (2.39) y (2.43) concluimos que

$$b + \sum_{i=1}^{j} v_{\rho(i)} \in L = \pi^{-1}(W) \bigcap f^{-1}([0, 2h]) \quad (j = 1, \cdots, s)$$

Finalmente, no es difícil darse cuenta que $L \subset U_m$. Esto prueba (2.35). ■

Corolario 2.3. Sean $p \geqslant q \geqslant r$ tres seminormas pre-Hilbert en un espacio vectorial, tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B_p, B_q) \leqslant 1 \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B_q, B_r) \leqslant \frac{1}{4}$$

Para cualesquiera $u_1, \cdots, u_l \in B_p$ y $a \in B_q$ con $a + \sum_{i=1}^{l} u_i \in B_q$, existe una permutación φ de $\{1, \cdots, l\}$ tal que

$$a + \sum_{i=1}^{j} u_{\varphi(i)} \in B_r \text{ para } j = 1, \cdots, l$$

Prueba. Es consecuencia directa del Lema anterior. ■

Prueba del Teorema 2.2 (Banaszczyk)

Denotemos a nuestro espacio Fréchet nuclear por E. En virtud del lema 2.15, es suficiente probar que

$$S\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) = U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

Luego, por el lema 2.14, existe una permutación δ de $\mathbb{N}$ y una sucesión $j_1 < j_2 < \cdots$ tal que $w = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{j_n} u_{\delta(i)}$. Podemos encontrar una sucesión $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots$ de seminormas prehilbert en E tal que $\{B_{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de vecindades de cero en E y por definición de nuclearidad se consigue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B_{p_{n+1}}, B_{p_n}) \leqslant \frac{1}{4} \tag{2.44}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Incrementandose j_n, si es necesario, podemos asumir que

$$p_{n+1}\left(w - \sum_{i=1}^{j_n} u_{\delta(i)}\right) \leqslant 1 \tag{2.45}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y que

$$p_{n+2}(u_{\delta(i)}) \leqslant 1 \tag{2.46}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $i > j_n$.

Fijemos un índice arbitrario n. Reemplazando n por $n+1$ en (2.44), obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(B_{p_{n+2}}, B_{P_{n+1}}) \leqslant 1 \tag{2.47}$$

y reemplazando n por $n+1$ en (2.45), obtenemos que

$$p_{n+1}\left(w - \sum_{i=1}^{j_{n+1}} u_{\delta(i)}\right) \leqslant 1 \tag{2.48}$$

ya que $p_{n+1} \leqslant p_{n+2}$. Por (2.44) - (2.48) y el corolario del lema 2.16 tenemos que existe una permutación ρ_n del conjunto $\{\delta(j_n+1), \cdots, \delta(j_{n+1})\}$ tal que

$$p_n\left(w - \sum_{i=1}^{j_n} u_{\delta(i)} - \sum_{i=j_n+1}^{l} u_{\rho_n(\delta(i))}\right) \leqslant 1 \tag{2.49}$$

para $l = j_n + 1, \cdots, j_{n+1}$.

Sea ρ una permutación de $\mathbb{N}$ definida por

$$\rho(i) = \begin{cases} \rho_n(\delta(i)) & , \quad j_n + 1 \leqslant i \leqslant j_{n+1} \\ i & , \quad i \leqslant j_1 \end{cases}$$

Como (2.49) es verdad para todo n, entonces

$$p_n\left(w - \sum_{i=1}^{l} u_{\rho(i)}\right) \leqslant 1 \quad (l > j_n : n \in \mathbb{N})$$

Esto significa que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} u_{\rho(i)}$ converge a w. Así $w \in S\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)$, el cual prueba que

$$U\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \subset S\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right).$$

La otra inclusión es una consecuencia trivial del Lema 2.14.

Observación 2.11. Si omitimos la nuclearidad en el teorema de Banaszczyck, en [13] se prueba que existe una serie que no satisface (2.1).

Observación 2.12. Chasco y Chobanyan en [20] dieron algunas condiciones a una serie $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ convergente en un espacio localmente convexo metrizable, para que el conjunto $S\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right)$ tenga la forma de (2.1).

Concluimos el trabajo mencionando algunos problemas abiertos

1) Encontrar espacios concretos y condiciones en una serie convergente para que su conjunto de sumas de reordenamientos convergentes tenga la forma de (2.1).

2) ¿contiene todo espacio de Fréchet no nuclear una serie cuyo conjunto de sumas de reordenamientos convergentes consista en dos puntos?

3) ¿Existe una serie en un espacio de Banach cuyo conjunto de sumas de reordenamientos convergentes es un subespacio afín no cerrado?

Bibliografía

[1] T.M. APOSTOL,*Análisis Matemático.* Segunda edición, Ed. Reverté. Barcelona 2006.

[2] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis.* MC Graw - Hill, New York, 1953.

[3] E.L. LIMA, *Curso de Análisis Matemático.* Vol. 1 (8va edición). Poyecto Euclides, IMPA, 1994.

[4] M.I. KADETS y V.M. KADETS, *Series in Banach Spaces.* Birkhausen Verlag. Besel, 1997.

[5] J. DIESTEL, *Sequences and Series in Banach Spaces.* Springer, New York, 1984.

[6] J. DIESTEL, H.JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely Summing Operators.* Cup (1995).

[7] H.H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces.* 3^{rd} printing, Berlin-Heidelberg - New York 1971.

[8] W. BANASZCZYK, *Additive Subgroups of Topological Vector Spaces.* Springer - Verlag, Berlin Heidelberg 1991.

[9] J.R. RETHERFORD, *Hilbert Spaces: Compact Operators and the Trace Theorem.* Cambridge University Press 1993.

[10] R. MEISE y D. VOGT, *Introduction to Functional Analysis.* Clarendon Press, Oxford, 1977.

[11] A. PIETSCH, *Nuclear Locally Convex Spaces.* Springer, Berlin, 1972.

[12] D. VOGT, *Lectures on Fréchet Spaces.* Bergishe Universität Wuppertal, Sommersemster 2000.

[13] W. BANASZCZYK, *Rearrangement of Series in Nonnuclear Spaces.* Studia Math 107 (1993), 213 - 222.

[14] W. BANASZCZYK, *The Steinitz Theorem on rearrangement for Series for Nuclear Spaces.* J. Reine Angew. Math 403(1990), 187 - 200.

[15] W. BANASZCZYK, *The Steinitz Constant of the Plane.* J. Reine Angew. Math. 373(1987), 218-220.

[16] P. ROSENTHAL, *The Remarkable Theorem of Lévy and Steinitz.* Amer. Math. Monthly 94.4(1987), 342-351.

[17] J. ALCÁNTARA BODE, *Reorderings of Series in Banach Spaces and Some Problems in Number Theory.* International Journal of Pure and Applied Mathematics. 17(2004), 319 - 326.

[18] E. STEINITZ, *Bedingt Konvergente Reihen and Konvexe Systeme.* J. Reine Angew. Math. 143(1913), 128 - 175.

[19] V.S. GRINBERG and S.V. SEVASTYANOV, *Value of the Steinitz Constant.* Funktsional. Anal. i Prilozhen.14 (1980), 56 -57.

[20] M.J. CHASCO y S. CHOBANYAN, *On Rearrangement of Series in Locally Convex Spaces.* Michigan Math. J. 44.3(1977), 607 - 617.

[21] J. BONET Y A. DEFANT, *The Levy-Steinitz Rearrangement Theorem for Duals of Metrizable Spaces.* Israel J. Math. 117(2000), 131 - 156.

[22] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer; 1st Edition.edition (November 10, 2010).

[23] A. WALD, *Bedingt Konvergente Reihen Von Vektoren im* R_w, Ergebn.math.kolloqu. 5(1933), 13-14.

[24] S. ROLEWICZ, *Metric linear spaces*, second enlarged edition, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa 1984.

[25] H. JARCHOW, *Locally Convex Spaces,* B.G. Teubner, Stuttgart (1981).

[26] L. NARICI and E. BECKENSTEIN, *Topological Vector Spaces,* Second Edition (2010).

[27] HOFFMAN, K., and R. KUNZE. *Linear Algebra.* Prentice-Hall Inc., 1961.

[28] K. YOSIDA, *Functional Analysis.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1980.

[29] W. RUDIN, *Functional analysis*, New York 1973.