PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

UNA PROPUESTA PARA ARTICULAR ÁREA Y MEDIDA USANDO LA TSD, EN ALUMNOS DE NIVEL SUPERIOR

Tesis para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTADO POR:

MIHÁLY ANDRÉ MARTÍNEZ MIRAVAL

Asesor:

DR. FRANCISCO UGARTE GUERRA

Miembros del jurado:

Dra. María José Ferreira da Silva
Dr. Saddo Ag Almouloud
Dr. Francisco Ugarte Guerra

LIMA - PERÚ

2015

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi padre, Éthel Martínez, por ser un ejemplo de fortaleza y de sabiduría, por inculcarme valores y principios con los que rijo mi vida, por ser mi mejor amigo siempre leal y justo, por ser mi ejemplo a seguir; a mi madre, Soledad Miraval, por ser un ejemplo de sacrificio y de fuerza, por enseñarme día a día el significado de amor incondicional; y a mis hermanos, Janis Martínez y Katiushka Martínez, por ser un ejemplo de inspiración y de lucha constante para alcanzar las metas por más altas que las coloquen.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, que día a día me apoyó con sabios consejos, dándome la confianza y la seguridad de poder lograr el estudio que aquí presento. En especial a mis padres que siempre me motivaron a culminar este proyecto y a emprender otros dedicados a la investigación.

Al Dr. Francisco Ugarte, por apoyarme en todo momento y enseñarme lo que es realizar una investigación de calidad, por colocarme vallas altas e incentivarme a superarlas, por confiar en mí y demostrarme que con esfuerzo y dedicación se pueden lograr grandes cosas, por su paciencia y sus consejos dados tanto en el desarrollo de nuestra investigación como hacia mi persona, y por su amistad la cual valoro y aprecio.

A la Dra. Jesús Flores, por ser la persona que desde un inicio me motivó e inspiró a realizar este trabajo de investigación, por su apoyo incondicional al momento de pedirle un consejo, y por su don de gente, su amistad y por su trato especial y divertido que siempre ha tenido hacia mi persona.

A la Dra. María José Ferreira y al Dr. Saddo Ag Almouloud, por sus observaciones y correcciones hacia mi trabajo con el fin de mejorarlo.

A Verónica Neira, por su gran apoyo en el desarrollo de mi investigación, por presionarme y motivarme en todo momento a lograr este objetivo, y por brindarme su amistad que la considero sincera y valiosa.

Finalmente, a los estudiantes de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas que participaron en esta experiencia educativa, y por su interés, colaboración y entusiasmo mostrados al desarrollar las actividades de aprendizaje.

RESUMEN

Esta tesis tiene como objetivo analizar el aprendizaje de los estudiantes de primer ciclo de la carrera de Administración de una universidad de Lima, al trabajar una secuencia didáctica, mediada por el GeoGebra, que los lleve a modificar y a manipular un procedimiento flexible con rectángulos, que les permita adquirir la noción de que pueden aproximarse tanto como quieran a la medida de un área, limitada bajo ciertas condiciones, y expresar dicha aproximación como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos.

Debido a que los estudiantes conocen fórmulas de geometría y procedimientos de cálculo para obtener la medida de áreas poligonales, pero desconocen cómo determinar la medida de un área no poligonal o qué procedimiento emplear para aproximarse a dicha medida, nos planteamos responder a partir de nuestra investigación la siguiente interrogante: ¿Una secuencia didáctica, mediada por el GeoGebra, permitirá articular la concepción que tiene los estudiantes acerca de la medida del área, como un número asociado al área obtenido mediante fórmulas de geometría, y un procedimiento flexible que permita aproximar ese número tanto como se quiera y expresar dicha aproximación como una adición de términos?

Para esta investigación hemos elegido como referencial teórico algunos aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) tanto para el diseño como el análisis suscitado por la situación didáctica diseñada para esta investigación y que está centrada en el objeto matemático área y medida. Asimismo, hemos elegido como referencial metodológico aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) donde analizaremos las fases que conforman su proceso experimental.

Para analizar los resultados obtenidos de la secuencia didáctica, confrontamos el análisis a priori con el análisis posteriori para observar si los resultados fueron o no previstos por el investigador. Esta forma de realizar el análisis nos permitió concluir que el estudiante presenta dificultades para adaptar a su aprendizaje la manera de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos de aproximación como una adición de términos.

Palabras clave: Área, medida de un área, GeoGebra, dialécticas.

ABSTRACT

This thesis aims to analyse the students learning process in the first term of their Business Administration studies in a university from Lima, when working a didactic sequence, regulated by GeoGebra, that leads them to modify and manipulate a flexible procedure with rectangles that allows them to acquire the conception that they can approximate, as much as they require, the measure of an area, limited under certain conditions, and express such approximation as the addition of the measures of each one of the rectangles areas.

Considering that students know geometry formulas and calculus procedures to obtain the measure of polygonal areas, but they don’t know how to determine the measure of a non-polygonal area or what procedure to use to approximate this measure, we plan to answer, from our research, the following question: Will a didactic sequence, regulated by GeoGebra, allow the articulation of the conception that students have regarding the measurement of an area as a number associated to it calculated through geometry formulas and a flexible procedure that allows to approximate that number as much as it is required, and to express that approximation as an addition of terms?

For this research, we have selected as theoretical framework some aspects from the Theory of Didactical Situations from Brousseau (1986), so much for the design as for the analysis raised by the didactic situation designed for our research, and which is focused on the mathematical object of area and measurement. Furthermore, we have chosen as methodological framework aspects from the Didactic Engineering from Artigue (1995), where we will analyse the phases that make up its experimental process.

To analyse the results of the didactic sequence, we faced the analysis carried out at first with the subsequent analysis to observe whether or not the results were correctly predicted by the researcher. This form of conducting the analysis allowed us to conclude that the student presents difficulties in adapting the way of expressing the sum of the areas of the approximation rectangles as an addition of terms to their learning process.

Keywords: area, measure of an area, GeoGebra, dialectics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La relación entre la noción de área e integral definida forma parte de los contenidos de cualquier curso de cálculo diferencial e integral. Para su estudio, se parte de dos supuestos: el estudiante ha trabajado la noción de área en la escuela y, es capaz de calcular la medida del área de una región limitada por segmentos de rectas o por curvas conocidas (como la de una semicircunferencia). Este cálculo lo realiza a partir de las propiedades de la medida y las fórmulas conocidas para las medidas de las áreas de rectángulos y círculos, y bajo estos supuestos, los cursos presentan la integral definida como una herramienta que permite calcular la medida de áreas distintas a las mencionadas. En adelante estas áreas podrán estar limitadas por curvas (gráficas de funciones continuas). Cabe señalar que la importancia del cálculo de la medida del área (o el número asociado al área), radica en la interpretación que el estudiante pueda dar a dicho número, lo que justifica que este contenido aparezca en la formación básica de muchas especialidades y, al mismo tiempo, justifica la pertinencia de nuestra investigación.

Si una región no se encuentra limitada totalmente por segmentos de recta o por curvas conocidas como semicircunferencias, los estudiantes presentan dificultades para obtener la medida del área de dicha región o describir un procedimiento que les permita aproximarse a dicha medida, ya que no pueden relacionarla con una figura geométrica impidiéndoles así utilizar las propiedades y fórmula previamente estudiadas. Investigaciones como las de Olave (2005) describen las dificultades que presentan algunos estudiantes para obtener la medida del área de una región; asimismo, Ribeiro (2002) y Porres (2011) utilizan la tecnología como herramienta para analizar el aprendizaje de los estudiantes para obtener la medida del área de una región limitada por una función cuadrática, el eje x y dos rectas verticales, y describen las dificultades de los estudiantes tanto interpretativas como del manejo de comandos del *software* utilizado.

En nuestra práctica docente, en una universidad de Lima, en el curso de Cálculo de la Facultad de Administración, no se propone una definición formal de la medida del área, para lo cual se emplearía diferentes conceptos como los de propiedades de una medida, fórmulas de figuras geométricas, funciones, aproximaciones, sumas, límites, gran parte de ellos trabajados en el colegio y el resto en el curso que llevan en la actualidad. La justificación dada podría resumirse en que la "construcción" del concepto de medida del área los alejaría del objetivo principal del curso que es el de la interpretación del valor numérico del área en términos propios de la carrera. De esta manera se pierde una excelente oportunidad de movilizar los conocimientos que los estudiantes tienen acerca de un problema conocido.

Como producto de nuestra investigación, pretendemos construir una propuesta, tomando en cuenta la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), que permita al estudiante ser capaz de adaptar un procedimiento de aproximación para aproximar la medida del área tanto como quiera. En dicha propuesta, buscamos que el estudiante adquiera el aprendizaje por sus propios medios.

Por las características del objeto matemático área y medida, creemos que es beneficioso para el estudiante el empleo de recursos tecnológicos, ya que con estos medios el estudiante centra su atención en la interpretación de resultados numéricos (aproximaciones a la medida del área) y gráficos (aproximación de la región mediante rectángulos), y no en la realización de cálculos cada vez más complejos y gráficos repetitivos, desarrollando en él habilidades de argumentación y justificación de procedimientos y resultados.

Es así que nace la idea de diseñar e implementar un conjunto de actividades secuenciadas en el tiempo, donde el estudiante utilice sus conocimientos previos de áreas, funciones y límites, adquiridos en la etapa escolar y en el curso actual, que lo lleven a articular su noción de la medida del área como un número obtenido a partir de una fórmula y un procedimiento que le permita aproximarse tanto como quiera a dicho número.

A continuación presentamos nuestro trabajo compuesto de cuatro capítulos:

En el primer capítulo, presentamos la problemática en torno a la concepción que presentan los estudiantes acerca del área y su medida; abordando algunos aspectos planteados en otras investigaciones relacionadas con la concepción de medida del área, con las dificultades al trabajar los aspectos conceptuales involucrados en la construcción del procedimiento de aproximación de la medida del área, y algunas propuestas que creemos facilitan la adquisición del aprendizaje esperado. Asimismo, presentamos algunas investigaciones que muestran la importancia del GeoGebra, como una herramienta que facilita las representaciones dinámicas al trabajar la Geometría, al trabajar ciertos temas matemáticos, como el área y su medida, debido a que involucran en su desarrollo a la Geometría Dinámica.

En el segundo capítulo, indicamos por qué elegimos ciertos aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (TSD) como marco teórico de nuestra investigación; del mismo modo presentamos los conceptos y términos básicos de la TSD y los tipos de interacciones entre el profesor, los estudiantes, el saber y el medio presentes en el desarrollo de la secuencia de actividades diseñada; todo ello con ejemplos que faciliten la interpretación conceptual y terminológica de la teoría relacionada con nuestra propuesta de situación didáctica. Del mismo modo, en este capítulo señalamos que escogimos ciertos aspectos de la ingeniería didáctica (ID) de Artigue como metodología para nuestra investigación, ya que nos permite comparar los análisis a priori y a posteriori de cada actividad que forma parte de nuestra situación didáctica.

En el tercer capítulo, estudiamos el área. Primero describimos un aspecto histórico que muestra la evolución del concepto de área y medida del área. Luego proponemos una definición formal de la medida del área de una región propuesta en un libro de texto universitario. Finalmente en este capítulo, realizamos un estudio didáctico del área basándonos en un texto didáctico y en otro universitario.

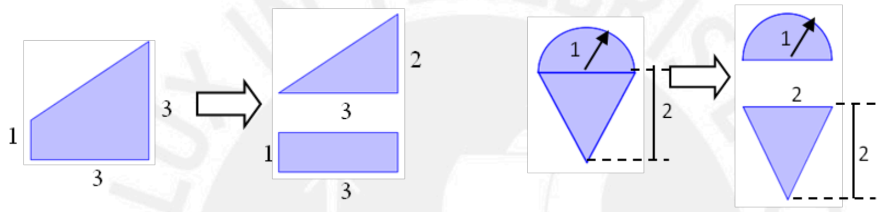
En el último capítulo, realizamos una caracterización de los sujetos de nuestra investigación y en qué nos basamos para su selección, describimos la secuencia de actividades y mostramos los diferentes objetivos que se pretenden alcanzar en cada actividad y en su conjunto, y presentamos la experimentación y análisis de la secuencia didáctica, por actividad y en conjunto (situación didáctica) que consiste en la descripción, en las variables didácticas, en las fases asociadas a la TSD de cada ítem y de cada actividad.

Debemos resaltar que la presente tesis forma parte del proyecto internacional *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT* desarrollado entre la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y la Pontificia Universidad Católica del Sao Paulo (PUC-SP) de Brasil. Este proyecto cuenta con el apoyo del *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) y *la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Sao Paulo* (FAPESP).

CAPÍTULO I – LA PROBLEMÁTICA

En base a nuestra experiencia como docentes, tomamos como una de las hipótesis de nuestra investigación, que los estudiantes del curso Cálculo conciben el área como un número, el cual asocian a una región limitada por segmentos de rectas, o a una región cuya área se calcula por fórmulas ya establecidas.

Un ejemplo de los procedimientos y uso de fórmulas de geometría plana que los estudiantes utilizan para obtener la medida del área de las regiones se muestra en la figura 1.



$$\text{Área} = 1\times 3 + \frac{2\times 3}{2} = 6\,\text{u}^2 \qquad \text{Área} = \frac{\pi(1)^2}{2} + \frac{2\times 2}{2} = 3{,}57\,\text{u}^2$$

Figura 1. Fórmulas de geometría plana y propiedades de áreas.
Fuente: Propia

En ambos casos se parte de una región que llamaremos R. Si R se descompone en dos regiones R_1 y R_2 (como lo muestra la figura) y la intersección de ambas es vacía, un punto o un segmento, podemos afirmar que la medida del área de R es igual a la adición de las medidas de las áreas de R_1 y R_2. Esta descomposición se realiza para utilizar las fórmulas para hallar la medida del área de un triángulo, de un rectángulo y de un semicírculo, conocidos por los estudiantes.

Sin embargo, cuando la región no se encuentra limitada por segmentos de recta ya sea total o parcialmente (ver figura 2), los estudiantes presentan dificultades para calcular la medida de su área, ya que no logran relacionarla con ninguna fórmula previamente estudiada y no atinan a proponer ni a describir un procedimiento que les permita aproximar dicha medida.

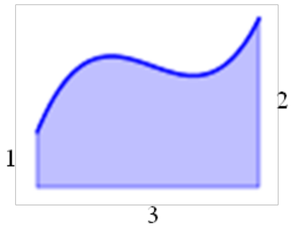


Figura 2. Región limitada parcialmente por segmentos de recta
Fuente: Propia

Por lo anteriormente expuesto, nos planteamos que el desconocimiento de un procedimiento de aproximación de áreas explica las dificultades de los estudiantes para articular la concepción que tiene acerca del área, como un número asociado a una región limitada solamente por segmentos de rectas (o por curvas que encierran una región cuya área se puede calcular por fórmulas), y la idea intuitiva de cómo aproximar ese número (medida del área de la región) tanto como se quiera, lo que a su vez se reflejaría en las dificultades de comprender la definición de medida de área como la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos.

A continuación presentamos los antecedentes de nuestra investigación y la forma en la cual abordamos el tema. Estos antecedentes se relacionan con la concepción de los estudiantes sobre el objeto matemático área y medida, las dificultades que aparecen al trabajar los aspectos conceptuales de dicho objeto matemático, y algunas propuestas que permiten una mejor adecuación del tema en el proceso de enseñanza - aprendizaje del cálculo. Asimismo, presentamos la justificación y la relevancia de nuestro trabajo, la tarea de investigación que pretendemos llegar a responder y los objetivos que esperamos que los estudiantes logren alcanzar.

1.1 Antecedentes

Las dificultades arriba señaladas aparecen reportadas en investigaciones en Didáctica de la Matemática anteriores. Olave (2005) señala que los estudiantes tienen un concepto de área ligada al uso de una fórmula debido a la instrucción recibida en la etapa escolar, lo cual les impide determinar la medida del área de superficies que no están limitas por segmentos de rectas ya que no disponen de una fórmula para calcularlas. La autora señala que en la etapa escolar se realizan actividades para medir superficies obteniendo un número que representa el área buscada; sin embargo, en los años posteriores, el área no se mide sino que se calcula a partir de fórmulas.

Esta forma de conceptualizar el área por los estudiantes no es la única. Turegano (1998) considera clave para el aprendizaje del concepto de área: "- construir la noción de *área* como magnitud autónoma; - construir una aplicación "medida" entre superficies y números que se pueda extender al máximo de superficies planas" (p. 235); con esto se hace explícito que se deba construir primero la magnitud antes de definir la aplicación "medida" que permite asignarle un número.

Asimismo, Turegano (1993) estableció, a partir de los datos obtenidos en una serie de cuestionarios y entrevistas realizadas a un grupo de estudiantes de Bachillerato (semejante a los estudios pre-universitarios en Perú), que los estudiantes emplean tres imágenes o nociones distintas del concepto de área que se diferencian cada una de ellas por el nivel de razonamiento empleado:

- Un estudiante manifiesta una imagen **primitiva** del área si sólo admite la noción de área que está caracterizada por una concepción por parte del entendimiento humano de las formas espaciales en lo referente a su extensión. A veces, llega un poco más lejos, asignando un número a un determinado polígono (generalmente, triángulo o rectángulo) como medida de su área obtenida por medio de una fórmula. Las características a destacar en estos estudiantes son las siguientes: admitir que las superficies rectilíneamente limitadas tienen área; que el área depende de la forma de la superficie, y, por lo tanto, su medida viene determinada por el uso de una fórmula; imposibilidad de admitir que se puede determinar el área de superficies no rectilíneamente limitadas.
- Un estudiante pone en evidencia una imagen **operativa** del área si alcanza el concepto de área, y, por lo tanto, asigna propiedades a la noción, pero no da una descripción explícita de qué entiende por área junto con sus propiedades, que ni siquiera menciona, pero que usa correctamente. Utiliza la palabra "área" en dos sentidos: unas veces para significar una cantidad física; otras veces, como medida de esa cantidad. Las características a destacar en estos estudiantes son las siguientes: conservación del área mediante el cambio de posición o disposición de sus partes; utiliza propiedades de adición (…); admite la posibilidad de poder asignar un número a cualquier superficie, aunque no conozca procedimiento para hacerlo.

- Un estudiante pone en evidencia una imagen **descriptiva** del área si es capaz de describir por medio del lenguaje qué entiende por área ligándolo a sus propiedades que puede nombrar (…). Parten de que hay algo que llamamos área y que todos tenemos una idea clara de ella, y que, al medirla, le asignan un número, bien con un proceso finito o infinito, según el caso. En el supuesto de los procesos infinitos que se emplean en el cálculo de áreas, es evidente en ellos que deben converger, puesto que el área existe y el área es el límite. Las características de estos estudiantes son las siguientes: hablan de la propiedad aditiva (…); hablan de asignar un número a cualquier dominio [superficie], esté o no rectilíneamente limitado, y conozcan o no un procedimiento para calcularla. (Turegano 1993, p. 254-256)

De los 27 estudiantes entrevistados (de un total de 89 estudiantes que componían la muestra), la autora menciona que el 25,9% presenta una imagen primitiva del área, el 66,7% una imagen operativa y el 7,4% una imagen descriptiva. Asimismo, constata la falta de estrategias que los estudiantes tienen para resolver problemas de cálculo de medidas de áreas, pero afirma que sí utilizan de forma correcta el área de forma operativa.

A partir de un test realizado a 67 estudiantes de una universidad de Lima, donde en una de las preguntas se solicitó determinar la medida del área de una región similar al de la figura 2, pero con ejes coordenados y cuadrícula, o describir un procedimiento que les permita hacerlo, se obtuvo la siguiente estadística: el 88% de los estudiantes colocó “no sé”, “ni idea”, “no se me ocurre”, etc., el 7% realizó algunos trazos adicionales formando figuras geométricas (mayormente trapecios, triángulos y rectángulos), y el 5% aproximó la región con figuras geométricas y dio una medida aproximada del área. Por los comentarios realizados, notamos que los estudiantes sabían de la existencia de una medida del área pero mostraron un gran desinterés en tratar de obtenerla. Corroboramos con ello lo mencionado por la investigadora.

Bajo la perspectiva de diferenciar los procedimientos de construcción empleados por los estudiantes para obtener la medida del área de una región, Olave (2005) realizó una investigación para detectar qué estrategias emplean los estudiantes para calcular la medida del área de figuras limitadas por la gráfica de una función no negativa definida en un intervalo $[a;b]$, el eje de las abscisas, y las rectas de ecuaciones $x=a$ y $x=b$; para lo cual trabajó con la función $f(x)=x(6-x)$ definida en el intervalo $[0;6]$.

Entre las conclusiones vertidas por Olave (2005), a partir de las respuestas de 35 estudiantes de tercer año de Bachillerato Diversificado (entre 16 y 18 años de edad), resaltamos las siguientes:

- *Uso de particiones*: La estrategia de usar una partición, aparece casi en la tercera parte de los casos. Las particiones son trabajadas con métodos que identificamos con los métodos rectangular y trapezoidal. Todo esto nos hace pensar que mediante el diseño de actividades adecuadas, es posible que los estudiantes adquieran las herramientas necesarias para el abordaje de la integral de Riemann.
- *Acotar-Aproximar*: Sostenemos que los estudiantes no están pensado en que al presentar una figura por inclusión con la región, están haciendo un trabajo de acotación. Es por ello que recomendamos, que el tratamiento de las cotas superiores e inferiores, deberá ocupar un lugar importante en las actividades de aula dentro del contexto de cálculo de áreas.
- *Imagen del área como fórmula*: Encontramos que gran parte de los estudiantes tiene la imagen de área asociada a una fórmula. Esto podría en gran medida obstaculizar la determinación de áreas para las cuales no conocen una fórmula. En este sentido sería deseable, en la etapa escolar, se pospusiera la presentación de las fórmulas para el cálculo de áreas hasta tanto el estudiante no haya adquirido la noción de área.
- *Procesos infinitos*: Si bien cinco estudiantes señalan que el procedimiento que han utilizado puede realizarse indefinidamente, debemos destacar que, en general, los estudiantes no generan procesos infinitos ni sistematización en los procedimientos para calcular el área de figuras no rectilíneamente delimitadas. No pueden ver un camino que les permita calcular el área en forma exacta porque consideran imposible la división de la región en “infinitas” figuras. (Olave 2005, p.158-160).

De los resultados obtenidos por la investigadora, el 67,5% de los estudiantes de la muestra utiliza figura geométricas conocidas para aproximar la medida del área de una región (rectángulo, triángulo, trapecio), un 20% realiza una partición sobre alguno de los ejes y el resto no sabe o no contesta. De estos números, la autora concluye que un pequeño porcentaje de los estudiantes utiliza una estrategia de aproximación con particiones del intervalo, siendo esta la estrategia que mejor se acomoda para definir el área, y presentar una definición formal del concepto de integral.

En base a esta consideración, pensamos apropiado diseñar una secuencia didáctica para que el estudiante adquiera una estrategia de aproximación, donde se utilice un procedimiento flexible, en base a rectángulos, que le permita aproximarse tanto como se quiera a la medida de un área; y para solventar la dificultad en la que incurre el estudiante al trabajar con diferentes particiones del intervalo, que incluyen el dibujo de rectángulos y el cálculo de sus respectivas áreas, proponemos el uso de un *software* matemático poniendo a prueba el uso de la tecnología en la enseñanza y/o aprendizaje de ciertos objetos matemáticos, tales como el área.

Hasta el momento hemos mencionado que existe dificultad en los estudiantes para asignar un número (medida del área) a un área que no está totalmente limitada por segmentos de rectas. Dada la amplitud de regiones que cumplen con esta especificación, centraremos nuestro estudio en regiones limitadas por la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo dado y el eje x del plano cartesiano. Nos limitamos a este tipo de regiones por su practicidad al trabajar con valores positivos que el estudiante relaciona directamente con la medida del área de un rectángulo, así como también porque la altura de cada rectángulo la puede identificar como una imagen de la función. Creemos que de esta manera se le facilita al estudiante el aprendizaje del procedimiento de aproximación el cual se puede extender luego a cualquier para la aproximación de la medida de cualquier región.

A continuación intentaremos explicar algunas de las dificultades al trabajar ciertos conceptos que se ubican dentro del campo conceptual del análisis y que forman parte del proceso de construcción del procedimiento de aproximación de la medida del área. Para ello utilizamos la caracterización que plantea Artigue (1998) que categoriza las dificultades de la siguiente manera:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual: los números reales, las funciones, y las sucesiones, objetos que están siempre en fase de construcción cuando se empieza la enseñanza del Análisis.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico. (p. 2).

En base a nuestra experiencia como docentes cuando se trata el tema de funciones (imagen y pre-imagen de una función tanto gráfica como algebraicamente) y de límites (al analizar el comportamiento de una función cuando la variable se aproxima a un número real o cuando tiende al infinito) con estudiantes de primer ciclo de una universidad de Lima, hemos encontrado de manera reiterada dificultades que se relacionan directamente con el proceso de construcción de la medida del área. Entre ellos figuran los siguientes:

(i) Relacionar la altura de cada rectángulo, dibujado por el programa, con la imagen de la función en alguno de los extremos de su base (ver figura 3).

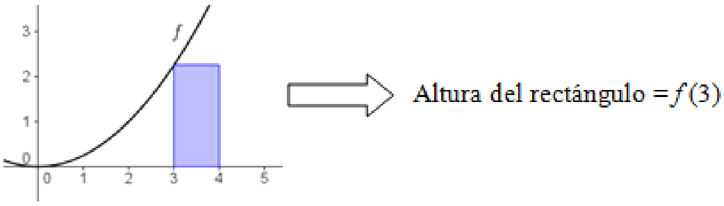


Figura 3. Gráfica y altura de un rectángulo.
Fuente: Propia.

En el procedimiento de aproximación, el estudiante debe expresar el área de los rectángulos como la imagen de la función en alguno de los extremos de cada base; en la figura 3, si toma el extremo izquierdo de la base la aproximación será por defecto, pero si toma el extremo derecho, la aproximación será por exceso. Si al estudiante se le dice que ubique en el gráfico la imagen f (3) y que describa qué mide del rectángulo, es probable que indique que mide la altura; sin embargo, si le preguntamos cuál es la altura del rectángulo, es probable que no sepa cómo expresarlo.

En relación al objeto función, Artigue (1998) señala la presencia de dificultades que “resultan de los procesos de traducción de un registro semiótico a otro, especialmente las dificultades de traducción del registro gráfico al registro algebraico” (p. 4).

(ii) Aproximar la medida del área de una región tanto como se quiera a partir de la suma de las áreas de rectángulos, partiendo del hecho de que la diferencia entre la medida del área y su aproximación no se acerca rápidamente a cero debido a las limitaciones de las herramientas con las que contamos.

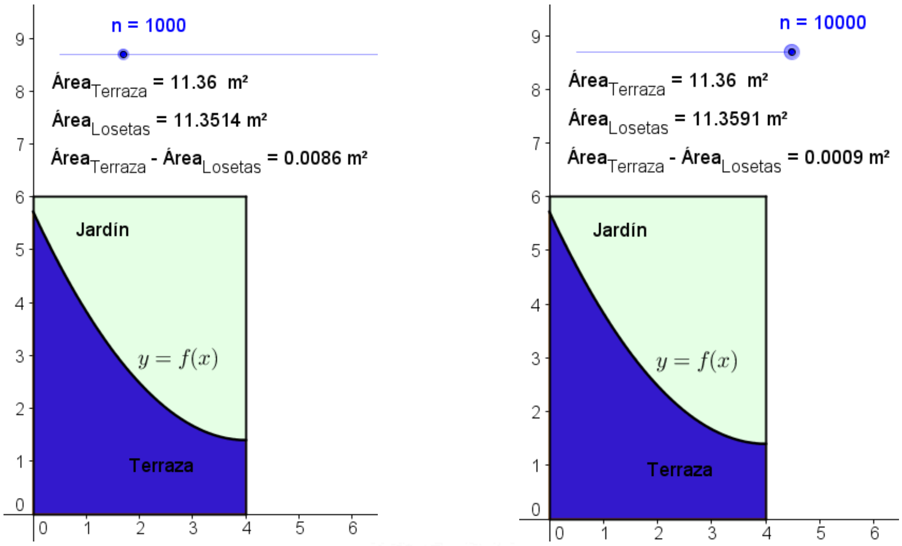


Figura 4. Medida del área de la terraza, de su aproximación y de la diferencia para 1000 y 10000 rectángulos.
Fuente: Propia.

Observamos de la figura 4 que al pasar de 1000 a 10000 rectángulos, la diferencia entre la medida del área de la región y su aproximación solo ha disminuido en 0,0077 m^2, y si se dibujaran más rectángulos ya no se apreciaría movimiento ni en el gráfico ni en las medidas de las áreas, por las limitaciones del *software*. Esto podría traer dificultades al interpretar resultados. Por esta razón y en relación a la ruptura del pensamiento algebraico, Artigue (1998) señala que "se tiene que desarrollar una visión de la igualdad asociada a la idea de "proximidad local infinita", es decir asociada al hecho de que, si para una distancia adecuada, $\forall \varepsilon > 0\ d(A,B) < \varepsilon$, entonces A = B" (p. 6).

(iii) Intuir que para mejorar la aproximación de la medida del área se deben seguir dibujando más rectángulos, sin tener la certeza de encontrar un número real que brinde la mejor aproximación.

Gracias a la tecnología los estudiantes pueden intuir que si siguen aumentando el número de rectángulos se aproximan más a la medida del área; sin embargo, es probable que mencionen que con 20000 rectángulos mejora la aproximación, y otro estudiante señale que con 100000 rectángulos, hasta que alguien mencione que con infinitos rectángulos la aproximación mejora. Allí aparece una dificultad porque el infinito no es un número real; y para emplear el término infinito necesitamos trabajar con límites.

Al respecto, D'Amore (2009) afirma que "el concepto de infinito, necesario en la práctica escolar y en la práctica matemática, es difícil de manejar correctamente" (p.

130); y lo considera como un ejemplo de obstáculo epistemológico proporcionado por la historia de la matemática.

Del mismo modo, Turegano (1993) afirma que “el aprendizaje del cálculo no pasa por una fase previa de carácter experimental” siendo esta una posible causa del fracaso de sus estudiantes en la comprensión de los conceptos de cálculo, dentro de los cuales figura hablar del infinito.

(iv) Expresar la medida del área de los rectángulos como la adición de la medida de las áreas de cada uno de ellos de forma simbólica.

En la figura 5 observamos la medida del área ($m(A)$) de 4 y de 100 rectángulos expresadas en términos de la imagen de la función. En el primer caso, pensamos que el proceso de generalización (o reducción) no es complejo y se puede expresar como $m(A) = \sum_{i=1}^{4} 1\times f(i)$; sin embargo, si no se recurren a símbolos para la base y para las particiones regulares generadas en el eje *x*, el proceso de generalización posiblemente se dificulte, $m(A) = b\times \sum_{i=1}^{100} f(x_i)$. En nuestra investigación no pretendemos que el estudiante generalice (o reduzca) la adición de términos, pero sí que la exprese correctamente.

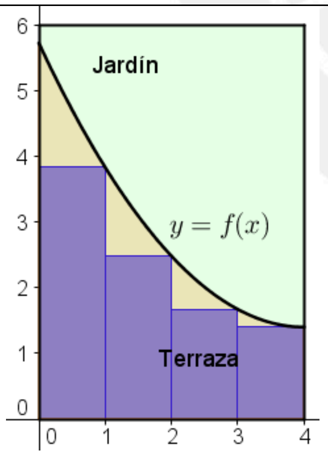
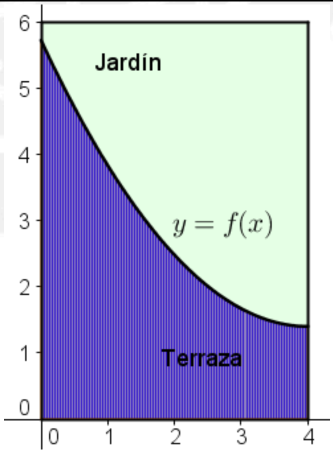
	
4 rectángulos $m(A) = 1\times f(1) + 1\times f(2) +$ $1\times f(3) + 1\times f(4)$ u^2.	100 rectángulos $b = 0{,}04\,\mathrm{u}$; $x_1 = 0{,}04$; $x_2 = 0{,}08$; …; $x_{99} = 3{,}96$; $x_{100} = 4$, $m(A) = b\times f(x_1) + b\times f(x_2) + \ldots + b\times f(x_{99}) + b\times f(x_{100})$ u^2.

Figura 5. Medida del área de 4 y 100 rectángulos expresadas simbólicamente.

Parte de esta dificultad se da porque los estudiantes aprendieron el tema de "sumas" en la etapa escolar, y no lo volvieron a ver en la universidad. Velásquez (2012), que trabajó con estudiantes de 14 y 15 años, afirma que "los estudiantes de grado noveno presentan dificultad para solucionar problemas, reconocer elementos asociados a situaciones de variación (establecer regularidades y patrones de comportamiento), usar distintas formas de representación (recodificar) y llevar a cabo procesos de generalización" (p. 5).

A partir de las investigaciones de Turegano (1993 y 1998), Olave (2005), Artigue (1998), D'Amore (2009) y Velásquez (2012), podemos resaltar dos situaciones problemáticas relacionadas: la primera, la ausencia de un procedimiento flexible que permita al estudiante recuperar su concepto de área, en particular la noción de medida de área, como un número calculado por fórmulas y la idea de poder aproximarse tanto como se quiera a dicho número; y la segunda, la dificultad al trabajar ciertos conceptos que forman parte del campo del análisis presentes en el procedimiento de aproximación por rectángulos. Por estos motivos creemos necesaria la realización de nuestra investigación, ayudando así a facilitar el paso hacia la definición de la medida del área como la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos.

Cabe señalar que nuestra investigación se centra en que el estudiante adquiera la idea de aproximación a un valor determinado y que si lo deseara podría seguir aproximándose cada vez más; ello con miras a que el estudiante entienda por qué la medida de un área se define posteriormente como el límite de una suma de áreas de rectángulos cuando el número de rectángulos tiende al infinito.

Una vez definido el enfoque que presenta nuestra investigación, debemos pensar en la manera en que generaremos una situación didáctica que le permita al estudiante construir el nuevo conocimiento. Pensamos que resultaría más beneficioso para el estudiante trabajarlo mediante un *software* matemático en lugar de utilizar solamente lápiz y papel; y utilizando una metodología activa en lugar de una puramente expositiva. Las razones en las que basamos estas aseveraciones son las siguientes:

(i) El concepto de área y su medida se presta para el trabajo con geometría dinámica.

El estudiante debe relacionar los análisis gráfico y algebraico a medida que el número de rectángulos aumenta. Esto resulta casi imposible de ejecutarse utilizando solo lápiz y papel. La idea es conseguir que el estudiante interprete y justifique sus conjeturas, no que se centre en realizar cálculos y dibujos repetitivos y complejos (en el sentido de incremento de cálculos).

(ii) Desarrollar en los estudiantes diferentes habilidades y capacidades.

Si la metodología es expositiva, pensamos que el estudiante cumple la función de observador. En cambio, bajo una metodología activa, el estudiante es el actor de su propio aprendizaje, y en el proceso puede desarrollar capacidades y habilidades argumentativas, de discusión, de responsabilidad por asumir su aprendizaje de forma individual y colectivamente. D'Amore (2005) señala que, en relación al área, "la mayor parte de las situaciones que el docente propone para su aprendizaje son didácticas, mientras que, pocas veces, recurre a situaciones a-didácticas. (…) La construcción de un aprendizaje significativo debería pasar a través de situaciones a-didácticas" (p. 134-135). Cabe señalar que el término *situación a-didáctica* se refiere al aprendizaje de los estudiantes sin la intervención del profesor en lo que respecta al saber en juego (este término se describirá con mayor amplitud en el Capítulo 2 de nuestra investigación).

En investigaciones sobre el aprendizaje mediante el uso de un *software* matemático, tales como Rodríguez (2011) se menciona que en la actualidad, las tendencias en la enseñanza de la matemática manifiestan la importancia de diseñar y aplicar estrategias metodológicas que apunten al uso de la tecnología como un medio para que el estudiante obtenga conclusiones, valide hipótesis y realice observaciones, las cuales difícilmente se consiguen realizar con otros medios. Como resultado del uso del GeoGebra al trabajar con estudiantes de sétimo grado los temas de Clasificación de cuadriláteros y Áreas de superficies planas, el investigador evidenció los siguientes aspectos positivos: incremento del interés por las matemáticas, desarrollo de la competencia argumentativa e interpretativa de los estudiantes, interpretación y uso de funciones en problemas de modelación, construcción de su propio conocimiento de forma significativa, entre otros.

Debido al elevado índice de desaprobados de los estudiantes universitarios del curso Cálculo Diferencial Integral I (CDI I), Amorim et al. (2011) perciben que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de función, de límite, de derivada y de integral. En palabras de los investigadores

> Com relação a limites de uma função muitos ainda apresentam dificuldades em diferenciar imagem de uma função com o seu limite em um ponto, no que diz respeito à

> derivada uma das dificuldades está em relacionar a parte algébrica com a gráfica e com relação à integral o problema este em relacionar a área limita por uma função ou entre funções.
>
> Rezende (2003, p. 07) ressalta que a dificuldade na aprendizagem desses dois últimos acontece devido à falta de amadurecimento das ideias de infinito e o entendimento que o limite de "uma sequência **tende**, mas não alcança, o seu ponto limite". (p. 3).

Compartimos lo mencionado por los autores acerca de las dificultades en ciertos temas de Cálculo, en particular lo concerniente a la integral y su relación con la medida del área de regiones limitadas por las gráficas de funciones, dado que esto último se relaciona directamente con nuestro trabajo de investigación, en el sentido de brindar un procedimiento que permita facilitar la comprensión de la definición de la medida de un área.

Los investigadores ofrecieron una alternativa para abordar los conceptos de función, de límite, de derivada y de integral (en este último se trató la relación de la integral definida con la medida de un área determinada bajo el gráfico de una función) a partir de una secuencia de actividades utilizando el *software* GeoGebra.

La elección del GeoGebra se dio porque, en palabras de Amorim et al. (2011),

> Sua interface dispõe de uma janela de Álgebra e outra de Geometria, em que cada objeto geométrico criado possui uma correspondência algébrica, ou seja, existe uma interatividade entre a zona gráfica e zona algébrica de modo que tudo que é construído na zona gráfica o próprio *software* algebriza mostrando uma expressão algébrica que represente tal figura construída. Por ser um programa de Geometria Dinâmica, o GeoGebra facilita a investigação dos alunos, que podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, fazer conjecturas e testá-las, além de relacionar os conteúdos algébricos e geométricos. A sua manipulação estimula docentes e discentes a tentar usá-lo em suas práticas, porque quando é feito qualquer tipo de manipulação simultaneamente ocorre a alteração da figura sem alterar sua estrutura de construção. (p. 4).

Nosotros nos planteamos utilizar el GeoGebra con estudiantes para que no centran sus esfuerzos en realizar cálculos y gráficos repetitivos y cada vez más trabajosos; ese esfuerzo lo emplean en la interpretación simultánea de resultados numéricos y gráficos al aumentar de forma dinámica el número de rectángulos de aproximación; asimismo se dediquen a realizar conjeturas y a ponerlas a prueba sobre la aproximación de los resultados hacia un valor determinado.

Es importante señalar la existencia de investigaciones que emplean métodos de aproximación para calcular la medida del área de una región, por medio de la medida de áreas de rectángulos y utilizando un *software* matemático, tales como Ribeiro (2002) que propone el uso de programa Maple (instalado en los laboratorios de su centro de trabajo). En su investigación trabaja con una función fija: $f(x) = x^2, x \in [0; 2]$, y utiliza rectángulos de alturas iguales a las imágenes de la función en el extremo izquierdo, el derecho y en el punto medio de cada subintervalo generado. La metodología propuesta es la de brindarle a los estudiantes los comandos del programa y una serie de preguntas que respondieron utilizando lo observado en el monitor de sus computadoras. El investigador señala que los estudiantes presentaron dificultades:

- En un primer momento, hubo una inseguridad de los estudiantes frente a las preguntas y, principalmente, en relación al uso del computador/*software*.
- Al comparar las respuestas escritas de las parejas con los comentarios, se constató que ellos presentan dificultades en expresarse por escrito utilizando un lenguaje matemático.
- Dificultad de la aplicación del concepto de dominio e imagen de una función en nuevas situaciones – problema.
- Dificultad en desarrollar cálculos que necesiten transformar números de la representación decimal o décimas periódicas a la representación fraccionaria.
- Dificultades en desarrollar cálculos con aproximaciones numéricas.
- La mayoría de los estudiantes tiene la concepción de que el infinito es un número real.
- Algunos de los estudiantes tienen la concepción de que la tendencia a cero es igual a cero y que la tendencia al infinito es igual a un número “bastante grande”.
- La mayoría de los estudiantes no tienen el significado de área de una figura y del número obtenido por medio de algoritmos.
- La mayoría de los estudiantes no tienen el significado matemático de “tendencia” o de “aproximarse”. (Ribeiro 2002, p. 147), traducido por el autor.

A diferencia de ese trabajo, nosotros trabajamos con una familia de funciones determinada al variar algunos parámetros con la herramienta “Deslizador” del GeoGebra. Otras diferencias que encontramos son las siguientes:

- El objetivo de nuestra propuesta es aproximar la medida del área tanto como se pueda a partir de un procedimiento que utiliza la medida del área de rectángulos. Esto como paso previo a definir la medida del área como una suma de las medidas de áreas de infinitos rectángulos.
- Los estudiantes no utilizan comandos del GeoGebra. Trabajan con *applets* diseñados por nosotros en base al uso de deslizadores.
- El dibujo de rectángulos y la medida de sus áreas se realizan juntos de forma dinámica, al manipular los deslizadores.
- Los estudiantes trabajan de forma individual, grupal y entre grupos; esto último a modo de discusión.
- Se han diseñado los *apletts* teniendo en consideración las dificultades antes mencionadas con la intención de reducirlas y a su vez facilitar la interpretación de resultados.

En conclusión sobre el uso de la tecnología, las investigaciones de Amorim et al. (2011) y de Rodríguez (2011) son relevantes porque nos permite justificar el uso del GeoGebra como herramienta tecnológica para tratar el área y su medida; así como también lo es la investigación de Ribeiro (2002) por su aporte al tratamiento de la medida del área usando a partir de otro *software*.

A partir de las investigaciones revisadas y de nuestra postura al respecto, queda claro que nuestra labor como profesores no solo se centra en impartir conocimientos, sino que se trata de buscar alternativas didácticas que faciliten que los estudiantes aprendan ciertos temas matemáticos. Además, estas alternativas didácticas deben ser diseñadas de modo que el estudiante: sea partícipe y construya su propio aprendizaje a partir de sus conocimientos previos, que utilice las herramientas tecnológicas que faciliten sus cálculos e interpretaciones, que le permitan realizar un mejor análisis de la situación planteada, y que comprenda la razón del proceso realizado.

De lo expuesto hasta el momento, pensamos que las dificultades, ya sean de cálculo o procedimentales, que aparecen cuando al estudiante se le presenta una región plana con un contorno desconocido para él y solamente cuenta con su enfoque de la medida del área como un número calculado por una fórmula, podrían reducirse articulando la concepción que tienen los estudiantes acerca de la medida del área, como un número asociado a una región limitada solamente por segmentos de rectas, y un procedimiento flexible que permita aproximar ese número tanto como se quiera.

Con ello estamos brindando al estudiante una herramienta que le ayude a profundizar la noción de área, recuperando conocimientos previos y creando la necesidad de aprender las nociones de límite asociando un procedimiento con un problema que los estudiantes conocen desde su educación inicial: el cálculo de medidas de áreas.

1.2 Justificación del tema de investigación

El objeto matemático área y medida forma parte de los contenidos de cualquier curso de cálculo diferencial e integral, y su estudio se enfoca, generalmente, como una de las aplicaciones de la herramienta integral definida para el cálculo de la medida de áreas de regiones planas. Sin embargo, tratar la medida del área a partir de integrales definidas (en un inicio) no le permite al estudiante utilizar sus conocimientos previos de funciones, aproximaciones, sumas, límites, y de conocimientos anteriores (escolares), para realizar una construcción donde intente dar solución al problema: “Calcular la medida del área de una región limitada por curvas diferentes a los segmentos de circunferencia”.

Cabe señalar que la importancia del cálculo de la medida del área (el número asociado al área), radica en la interpretación que el estudiante pueda dar a dicho número, lo que justifica que este contenido aparezca en la formación básica de muchas especialidades.

En nuestra práctica docente en una universidad de Lima, en el curso de Cálculo no se propone una definición formal de área, y por consiguiente de integral definida, pero sí se muestra a los estudiantes la relación que existe entre ambas: la integral definida se enfoca como una herramienta que permite obtener la medida de las áreas de regiones distintas a las conocidas por los estudiantes. De esta manera, se pierde una gran oportunidad de que el estudiante adquiera o aprenda un procedimiento de cálculo basado en sus conocimientos previos, obtenidos en la universidad y en su etapa escolar, que le permita enfrentar un problema conocido y analizar los resultados obtenidos al utilizar el procedimiento, con miras a que entienda por qué la medida del área se define como una suma de medidas de infinitos rectángulos. Además, que el estudiante trabaje un problema contextualizado, y no abstracto, utilizando la tecnología, que evita los cálculos y gráficos engorrosos realizados a lápiz y papel, donde interprete los resultados numéricos y gráficos según el contexto de la pregunta, creemos que resulta beneficioso para el aprendizaje del estudiante.

Por lo escrito en el párrafo anterior, pretendemos construir una propuesta basada en aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), que permita al estudiante adaptar a su aprendizaje un procedimiento de aproximación y sea capaz de utilizarlo con el fin de aproximarse tanto como quiera a la medida de un área.

El uso de la TSD es de gran importancia en el campo de la Didáctica de la Matemática porque brinda una manera de enseñar, basada en situaciones didácticas, donde se le da al estudiante la responsabilidad de su propio aprendizaje a partir de ciertas interacciones con un medio propuesto y monitoreado por el profesor.

Desde nuestra perspectiva, la educación debe tener una tendencia constructivista, de modo que el saber que se pretende enseñar sea construido por el estudiante. En nuestro caso en particular y por las características del objeto matemático área y medida, creemos que es beneficioso, para que logre su adquisición, el apoyo en recursos tecnológicos, para centrar su atención en la interpretación y no en los cálculos y gráficos repetitivos. Bajo este pensamiento, nosotros debemos brindarle al estudiante todas las herramientas y condiciones necesarias para que pueda desenvolverse apropiadamente en el proceso de adquisición del saber; y en dicho proceso desarrolle habilidades para argumentar y justificar sus procedimientos, suposiciones y resultados.

Es así que nace la idea de diseñar e implementar una secuencia de situaciones, donde el estudiante o grupo de estudiantes utilicen sus conocimientos previos, adquiridos en la etapa escolar y en el curso previo al cálculo diferencial e integral, para crear nuevos conocimientos que los lleven a la adquisición de un nuevo saber.

Por otra parte, hemos revisado diferentes trabajos y revistas, y no hemos encontrado investigaciones en Educación Matemática en el Perú que aborde el tema de la forma en la cual estamos proponiendo y que además utilice el GeoGebra como apoyo tecnológico. Respecto al extranjero, no hemos encontrado investigaciones centradas únicamente en la medida del área; hemos encontrado solo algunas que utilizan la tecnología, ninguna que emplee el GeoGebra, y presentan como objeto matemático la integral definida, y trabajan con una función cuadrática fija mostrando un procedimiento similar a los encontrados en los libros de texto universitario.

Por todas las razones antes mencionadas, percibimos la existencia de un problema y justificamos la relevancia para realizar una investigación.

1.3 Preguntas y objetivos de la investigación

De acuerdo con lo ya expuesto, nos planteamos la siguiente tarea de investigación:

¿Una secuencia didáctica, mediada por el GeoGebra, permitirá articular la concepción que tiene los estudiantes acerca de la medida del área, como un número asociado al área obtenido mediante fórmulas de geometría, y un procedimiento flexible que permita aproximar ese número tanto como se quiera y expresar dicha aproximación como una adición de términos?

Objetivo general

De la formulación anterior, se desprende el siguiente objetivo de la investigación:

Analizar el aprendizaje de los estudiantes al trabajar una secuencia didáctica, mediada por el GeoGebra y basada en aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas y de la metodología de la Ingeniería Didáctica, que los lleve a modificar y a manipular un procedimiento flexible con rectángulos, que les permita adquirir la noción de que pueden aproximarse tanto como quieran a la medida de un área, limitada bajo ciertas condiciones, y expresar dicha aproximación como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos de forma simbólica.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar y analizar las concepciones y dificultades que presentan los estudiantes de primer año de la carrera de Administración de una universidad de Lima en relación al estudio del objeto matemático área y medida.
2. Diseñar una secuencia didáctica basada en aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas, eligiendo apropiadamente un número finito de variables didácticas a movilizar que permita analizar si el conocimiento fue o no adquirido por los estudiantes.
3. Implementar y ejecutar con estudiantes de primer ciclo universitario la propuesta diseñada.
4. Analizar los resultados obtenidos luego de la aplicación de la secuencia didáctica a los estudiantes, comparándolos con los comportamientos esperados por el profesor al

diseñar la secuencia bajo ciertos aspectos de la metodología de la Ingeniería Didáctica.

En el siguiente capítulo abordaremos acerca de la metodología de investigación utilizada en nuestro trabajo y de la teoría en la que descansa nuestra investigación.

CAPÍTULO II – MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este capítulo presentamos una breve explicación de los elementos de la Teoría de ´las Situaciones Didácticas (TSD): situación didáctica, situación a-didáctica, dialécticas, contrato didáctico, entre otros conceptos que están presentes tanto como en el diseño como en el análisis suscitados por la situación didáctica diseñada para esta investigación y que está centrada en el objeto matemático área y medida. Asimismo, describimos de forma concisa la metodología de la Ingeniería Didáctica y las fases que conforman su proceso experimental: análisis preliminar (concepciones y dificultades de los estudiantes relacionados al área y su medida, el enfoque de su enseñanza en los distintos niveles educativos, su desarrollo histórico, etc., abordados en los capítulos 1 y 3), la concepción y el análisis *a priori* de las situaciones didácticas, la experimentación y el análisis *a posteriori* (desarrollados en el capítulo 4).

En palabras de Fregona et al. (2011) "desde la teoría de situaciones se caracteriza la Didáctica de la Matemática como área de investigación que trata los fenómenos de comunicación de los saberes matemáticos y sus transformaciones" (p. 9). Asimismo, en palabras de los investigadores, la Didáctica de la Matemática o Educación Matemática "se las identifica con la enseñanza de la matemática, aunque también se las reconoce como área de investigación en la cual la enseñanza de las matemáticas es uno de sus objetos de estudio, entre otras problemáticas abordadas desde diversas perspectivas teóricas" (p. 15).

En base a lo mencionado en el párrafo anterior sobre la comunicación de saberes, trataremos de centrar la enseñanza en el estudiante, de modo que lo hagamos partícipe de su aprendizaje. La docencia ya no implica solo dar los conceptos de determinados temas y esperar a que los estudiantes los aprendan; consiste en colocar al estudiante en una situación donde pueda utilizar sus conocimientos previos para actuar sobre el problema y así generar nuevos aprendizajes e idear nuevas estrategias de resolución; consiste en hacer que el estudiante logre transmitir a otros sujetos estos aprendizajes o estrategias adquiridos y pueda validarlos con propuestas y planteamientos razonables que sean indicadores que midan, de alguna manera, si el aprendizaje se obtiene o está en proceso de obtenerse. Por estos aspectos, creemos que se justifica la elección de la Teoría de Situaciones Didácticas para lograr que el estudiante consiga el aprendizaje deseado relacionado al área y su medida.

Teniendo en cuenta cómo la Teoría de Situaciones concibe la enseñanza (explicado en el capítulo 2.1) diseñamos una secuencia didáctica de carácter experimental, tomando en cuenta ciertos análisis preliminares referentes al objeto matemático de nuestra investigación: epistemológicos, cognitivos y didácticos. Esta secuencia fue implementada en el aula y presentamos un análisis basado en el contraste del producto dado por los estudiantes (respuestas, procedimientos, ideas, estrategias) con nuestro análisis previo de lo que esperamos que respondan o actúen los estudiantes al interactuar con el medio creado por el investigador. Esta forma de enfocar nuestro análisis justifica la elección de la metodología de la ingeniería didáctica; la cual se caracteriza, en palabras de Artigue (1995), por ser «un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza» (p. 36).

2.1 Aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas

Esta teoría considera fundamental para la enseñanza las interacciones entre el profesor y el estudiante mediadas por el saber en una situación de enseñanza (ver figura 6). Este saber escolar puede ser cambiado por saber matemático contextualizado en una institución educativa (con profesores, alumnos y medio).

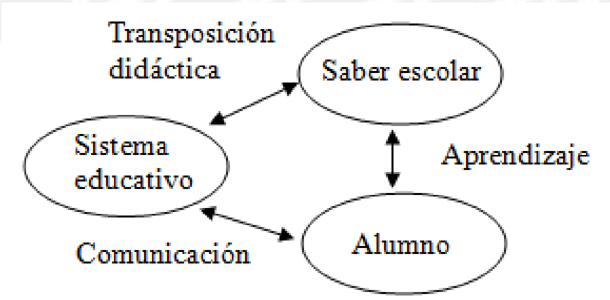


Figura 6. Esquema tripolar de la enseñanza para la TSD.
Fuente: Brousseau (2007, p.13)

Entendemos por transposición didáctica a la interacción entre el sistema educativo y el saber, en la cual se transforma el saber en un contenido a enseñar dentro de una institución educativa. En palabras de Chevallard (2005)

> Un contenido de saber que ha sido designado como un saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El "trabajo" que transforma de un

> objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado *transposición didáctica*. (p. 45).

En nuestra investigación, intentamos que el estudiante aprenda cómo aproximarse a la medida del área tanto como desee, esto como paso previo para definir el área como una suma de áreas de infinitos rectángulos. La búsqueda por facilitar la comprensión de definiciones matemáticas hace que el trabajo de transposición no termine.

La teoría de situaciones didácticas busca crear un modelo de interacción entre el estudiante, el saber y el medio en el cual el aprendizaje se debe desarrollar. El aprendizaje del estudiante tiene lugar a partir de una serie de situaciones (que pueden ser ejercicios, problemas, retos, etc.) que acepta desarrollar, y que conducen a modificaciones en su comportamiento que lo lleve a obtener el aprendizaje esperado.

En palabras de Brousseau (2007)

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios; un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p. 30).

2.1.1 Conceptos y términos básicos

Los conceptos y términos de la teoría de situaciones didácticas que utilizaremos en nuestra investigación, Brousseau (1986) los adapta a partir de la noción que tiene de *juego*, que en sus palabras lo considera como una “actividad física o mental, meramente gratuita, generalmente fundamentada sobre la convención o la ficción, que no tiene en la conciencia del que expone otra finalidad que ella misma, otro objetivo que el placer que procura” (p. 28). El investigador señala que el juego está organizado bajo un sistema de reglas que definen un éxito o un fracaso; se emplean diferentes términos tales como partida, estrategia, táctica, estado de conocimiento de un jugador y conocimiento determinante logrado por la elección única del estado de juego caracterizado por una táctica; y, según el estado del juego, se utilizan distintos instrumentos y se emplean diferentes procedimientos o estrategias.

Del mismo modo, Lalande (1972 citado por González, 2014) considera el juego como “la organización de una actividad dentro de un sistema de reglas que definen un éxito y un fracaso” (p. 12).

Brousseau (2007) compara el juego con un dispositivo diseñado para enseñar un conocimiento. El autor señala que el dispositivo comprende un medio material que puede ser un problema o un ejercicio, y las reglas de interacción de un sujeto con el dispositivo; pero al final lo que producirá un efecto de enseñanza es el funcionamiento efectivo del dispositivo.

Este dispositivo mediante el cual el sujeto logra el aprendizaje adaptándose e interactuando con un medio creado por el profesor, habiendo o no la intervención del profesor en el transcurso del proceso, lo cual no niega la presencia del profesor, el investigador lo considera una situación didáctica.

A continuación presentamos los conceptos y términos básicos de la teoría que son de interés y forman el marco teórico de nuestra investigación.

- **Situaciones Didácticas**

Entendemos por situación didáctica al conjunto de todas las relaciones que se dan entre el sistema educativo, representado por el profesor – investigador, los estudiantes y el medio, con la intención de que el estudiante adquiera un saber.

En palabras de Brousseau (1986, citado por Porres, 2011), una situación didáctica se define como

> Un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos en un determinado medio, comprendiendo, eventualmente, instrumentos, objetos y un sistema educativo, representado por el profesor, con la finalidad de posibilitar a estos alumnos un saber constituido o en vías de constitución. El trabajo del alumno debería, al menos en parte, reproducir las características del trabajo científico propiamente dicho, como garantía de una construcción efectiva de conocimientos pertinentes. (p. 140-141).

Brousseau (2007) señala que una situación didáctica se caracteriza por las interacciones que tienen los estudiantes con los problemas planteados por el profesor; esta acción de darle al estudiante dichos problemas se llama *devolución*, y tiene por objetivo provocar el desenvolvimiento autónomo del estudiante, a partir de las interacciones en las que se vea envuelto. El profesor le da la responsabilidad a los estudiantes del desarrollo de una situación de aprendizaje y al mismo tiempo, el profesor acepta las consecuencias de esa transferencia.

El desenvolvimiento de los estudiantes de forma autónoma dentro de la situación didáctica es una parte esencial e importante en el proceso de aprendizaje. El investigador llama a esta parte *situación a-didáctica*, concepto que desarrollaremos luego de definir el *medio* y las *variables didácticas*.

En nuestra investigación, diseñamos una situación didáctica centrada en lograr la articulación entre los conceptos de área y medida, específicamente para un área limitada solamente por segmentos de rectas. Presentamos un procedimiento flexible que permita aproximar ese número tanto como se quiera. Esto lo realizamos como un paso previo para la comprensión de la definición de área como la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos.

- **Medio**

Entendemos por medio a un sistema independiente diseñado por el profesor con el fin de hacer reflexionar al estudiante sobre los conocimientos que va adquiriendo, a partir de la información que este recibe en respuesta a su acción sobre dicho sistema. Esta respuesta puede reforzar el conocimiento nuevo que adquiere el estudiante en el proceso de adquisición del saber, o hacerle modificar o cambiar su procedimiento si el resultado dado no es coherente a lo esperado por el estudiante. En la secuencia de actividades desarrollada en nuestra investigación, el estudiante interactúa con los *applets* diseñados en GeoGebra que muestran, de forma dinámica, las gráficas de los rectángulos y la suma de las medidas de sus áreas permitiendo así que el estudiante realice una interpretación de los resultados, reforzando o modificando sus conocimientos nuevos; de igual modo el estudiante interactúa con otros sujetos (compañeros o profesor) para presentar sus procedimientos, intercambiar opiniones y justificar sus resultados, de modo que este estudiante da y recibe de ellos una retroalimentación que se convierte luego en aprendizaje. Todo este sistema que le permite al estudiante construir su aprendizaje forma parte del medio creado por el profesor – investigador.

Es por ello que el medio en nuestra investigación es sumamente importante para la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático área y medida.

En palabras de Aliaga et. al (2005)

> El concepto de *medio* incluye entonces tanto una problemática matemática inicial que el sujeto enfrenta, como un conjunto de relaciones -esencialmente matemáticas también-

> que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia la realidad con la que interactúa. (p. 20).

Brousseau (2007) considera al medio como “un sistema autónomo, antagonista del sujeto, y es de este del que conviene hacer un modelo, en cuanto especie de autómata” (p. 15).

- **Variables didácticas**

Entendemos por variable didáctica a las condiciones de la situación didáctica que el profesor puede variar a voluntad con el objetivo de que el estudiante sea capaz de resolver la situación y adquiera el aprendizaje esperado. Una primera selección de valores para las variables debe ocasionar el encaminamiento de una estrategia básica de resolución; pero es necesaria una nueva selección de valores que permitan el desarrollo de la situación a-didáctica pretendida.

El investigador designa como *variable cognitiva* a “una variable de la situación tal que por la elección de valores diferentes puede provocar cambios en el conocimiento óptimo. Entre las variables cognitivas, las *variables didácticas* son las que puede fijar el docente” (Brousseau 2007, p. 32).

Bartolomé y Fregona presentan así la noción de variable didáctica,

> Las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de estas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación. El docente (Brousseau, 1995) “puede utilizar valores que permitan al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permite entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondientes a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes.” (Citado por Panizza, 2003, p. 10).

A modo de ejemplificar una situación para enseñar la división euclídea, Brousseau (2007) propone la “carrera al 20” que consiste en buscar números que tengan el mismo resto al dividir 20 entre 3. En palabras del investigador

> Los valores 20 y 3 que aparecen en la definición de la “carrera al 20” son valores concretos de sendas variables de la situación matemática. Pueden cambiarse para dar origen a un cambio en el juego que provoca una modificación de la estrategia óptima (si bien el conocimiento matemático asociado sigue siendo el mismo). (Brousseau, citado por Chevallard et al. 1997, p. 215)

En la secuencia didáctica construida en esta investigación, el estudiante deberá calcular la medida del área de una región (como las actividades son contextualizadas, la región es una terraza). Inicialmente, se le presenta al estudiante los modelos de terrazas mostrados en la figura 7 (a), para estos modelos el estudiante emplea fórmulas de geometría para obtener la medida del área de un trapecio, de un rectángulo y de un semicírculo. Pero luego se le presenta un modelo de terraza como el que se muestra en la figura 7 (b) donde el borde superior es diferente a un arco de circunferencia (desconocido por ellos) y se le pide hacer lo mismo (hasta se le indica que aproxime la medida del área ya que sabemos que no lo va a poder calcular). Ese cambio de área genera inestabilidad en el estudiante ya que suponemos que no conoce fórmulas que le permita calcular ese tipo de medidas de área ni conoce un procedimiento que le permita aproximar dicha medida. Al pasar de los modelos de la figura 7 (a) al modelo de la figura 7 (b) se ha cambiado el valor de la variable, que para nosotros es el “borde superior de la región”, pasa de ser un segmento de recta o una semicircunferencia, a una curva diferente a la ya mencionadas.

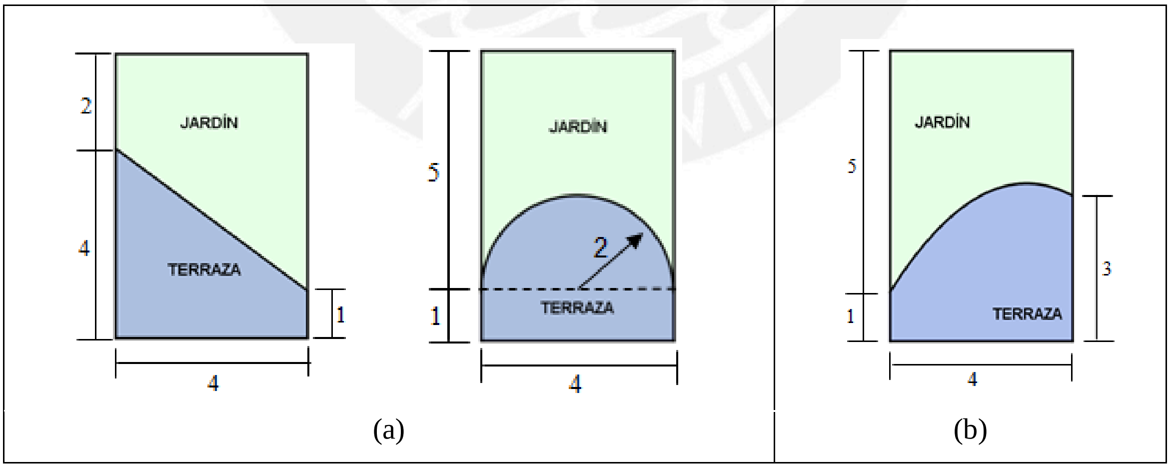


Figura 7. (a) Terrazas con borde superior conocido. (b) Terraza con borde superior desconocido.
Fuente: Propia

En nuestra investigación se han considerado como variables didácticas al borde superior de la región y al número de rectángulos de aproximación (ambos se explicarán en la sección 2.2 del capítulo 2). Sin embargo, existen otras variables didácticas al trabajar el objeto matemático área y medida, como la forma de la curva (si su abertura es hacia arriba o hacia abajo), los valores que toma la variable x en los extremos de los intervalos generados por la partición regular que brindan aproximaciones por defecto o por exceso, la posición de la gráfica de la función en un intervalo dado (por encima o por debajo del eje x), etc., pero no las hemos considerado debido a la magnitud de nuestra investigación.

- **Situaciones a-didácticas**

Entendemos por situación a-didáctica, a una situación que permite al estudiante construir y adquirir un conocimiento por sus propios medios, a partir de diferentes tipos de interacciones que tiene con el medio propuesto por el profesor; sin que el propósito de enseñar el conocimiento haya sido expuesto al estudiante. Estas interacciones se dan cuando el estudiante actúa sobre el medio y toma decisiones sobre la resolución de los problemas planteados en la situación; cuando comunica a otro estudiante, mediante un lenguaje común a ambos de forma oral o escrita, sus estrategias y resultados; cuando valida sus propuestas de forma frente al resto de estudiantes; etc. Estos diferentes tipos de interacciones presentes en una situación a-didáctica lo explicaremos en mayor amplitud en la sección 1.3 del capítulo 2.

Brousseau (2007) afirma que una situación a-didáctica es una situación en la cual la intención de enseñar no es revelada al estudiante, pero es construida por el profesor con la intención de lograr que el estudiante se adapte al medio e interactúe con él, con la finalidad de que adquiera el saber. En palabras del investigador

> el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno (…) debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. (…) No habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. (Brousseau 2007, p. 31).

- **Contrato didáctico**

El autor señala que Filloux, en el año 1974, introduce el término “contrato pedagógico” haciendo referencia a las relaciones u obligaciones establecidas entre los docentes, los estudiantes y la sociedad. El investigador con la intención de extender este contrato a la enseñanza en educación introdujo el término “contrato didáctico”.

Entendemos por contrato didáctico a las reglas establecidas para el buen desenvolvimiento, tanto de los estudiantes que son los sujetos de investigación como del profesor – investigador que intenta que aprendan un nuevo conocimiento, en el desarrollo de la secuencia didáctica. Por ejemplo, antes de empezar el desarrollo de las actividades de nuestra investigación se les comunicará a los estudiantes que trabajarán de forma individual, en parejas y entre parejas a modo de discusión, en diferentes ítems que conforman la actividad; ya en el desarrollo de la actividad el profesor – investigador no debe dar pistas que le faciliten al estudiante la adquisición del conocimiento que desea que aprendan y el estudiante debe entender que si el profesor no lo ayuda es por algo relacionado a su aprendizaje.

En términos de Brousseau (1986)

> En todas las situaciones didácticas, el profesor intenta hacer saber al alumno lo que él quiere que haga. Teóricamente, el paso de la información y de la consigna del profesor a la respuesta esperada, debería exigir por parte del alumno el poner en acción en conocimiento considerado, ya esté en proceso de aprendizaje o sea ya conocido. Sabemos que el único medio de «hacer> matemáticas, es buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a ese respecto, plantear nuevas interrogantes. El maestro debe pues efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la transmisión del problema correcto. Si esta transmisión se opera, el alumno entra en juego y si termina por ganar, el aprendizaje se logra. (…) Se entabla entonces una relación que determina –explícitamente, en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, en enseñante y el enseñado, tiene la responsabilidad de producir y de lo que será de una u otra manera, responsable ante otro. Ese sistema de obligaciones recíprocas se asemeja a un contrato. Lo que nos interesa aquí es el *contrato didáctico*, es decir la parte de ese contrato que es específica del < contenido >: el conocimiento matemático considerado. (p. 12).

El investigador indica que si el contrato didáctico es estricto y solo se refiere a las reglas de comportamiento del profesor y estudiante dentro de la situación, entonces la relación didáctica estará condenada al fracaso. Es posible que haya una ruptura del contrato en ciertas circunstancias, por ejemplo, que el estudiante no sepa cómo resolver un problema que el profesor estimaba que sí lo iba a entender; en ese momento debe aparecer un nuevo contrato que dependa del estado del conocimiento del estudiante.

El autor señala también la presencia de algunos efectos del contrato didáctico que pueden afectar el proceso de enseñanza – aprendizaje; por ejemplo, el efecto Topaze y el control de la incertidumbre, en el cual el estudiante llega a la solución de un problema pero no por sus propios medios, sino porque el profesor sugiere la respuesta de forma disimulada.

Por ejemplo, para calcular la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos, los estudiantes requieren conocer la altura de cada rectángulo que viene dada por una regla de correspondencia. Muchas veces los estudiantes no entienden cuál es la altura o no se imaginan cómo calcularla, y preguntan: ¿cómo hago para hallar la altura?, posiblemente el profesor les responda "evalúa la función en el punto", generando dicho efecto. A raíz de ello, como en nuestra investigación trabajamos con la medida de áreas de rectángulos, nosotros nos preguntamos: ¿cómo reducir o evitar que se dé este intercambio de información tan directa?

Por ese motivo, nosotros evitamos darle la regla de correspondencia de la función y más bien diseñamos el *applet* con un punto móvil sobre la curva de modo que el estudiante vea un par ordenado, interprete qué representa cada coordenada del punto y relacione la ordenada del punto con la altura de cada rectángulo. La figura 8 muestra lo que observaría el estudiante al movilizar dicho punto.

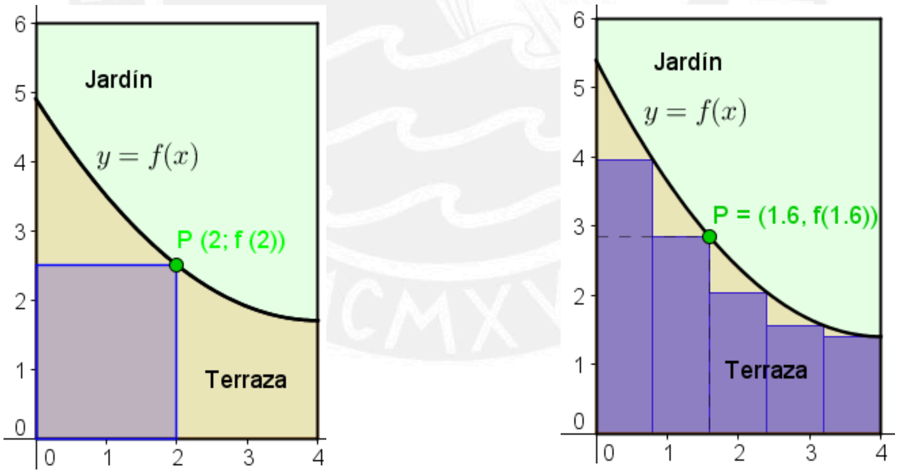


Figura 8. Punto móvil P

Lo que intentamos es que los estudiantes interactúen primero con el *software*, y que el *applet* sea el mediador que le permita interactuar con la situación, de ese modo el profesor evita dar la respuesta simple: "evalúa en la regla de correspondencia", en todo caso, lo más que podrá decirle es que movilice el punto P a ver qué ocurre.

Una de las finalidades del diseño de los *applets* es darle al estudiante una herramienta para que pueda interactuar con la actividad y tener respuesta a preguntas o tener acceso a datos necesarios para resolver dicha actividad, evitando preguntarle al profesor o evitando simplemente que el profesor le dé la respuesta sino que la respuesta sea obtenida por el estudiante en interacción con el software.

Hemos descrito hasta el momento ciertos conceptos básicos de la Teoría de las Situaciones Didácticas que se relacionan con nuestra investigación: situación didáctica, situación a-didáctica, medio, variable didáctica y contrato didáctico. A continuación presentamos cuatro conceptos más relacionados a las interacciones entre el estudiante, el profesor y el medio que hacen que el conocimiento llegue al estudiante de distintas maneras.

2.1.2 Tipos de dialécticas

La teoría de las situaciones didácticas clasifica las interacciones en cuatro fases: de acción, de formulación, de validación y de institucionalización, las cuales se pueden modelar en diferentes situaciones. En cada una de ellas, la relación entre el estudiante y el saber es distinta. En las tres primeras fases, el estudiante interactúa con el medio y si el profesor interviene por algún motivo es para devolverle una pregunta o una situación que lo haga nuevamente responsable de su aprendizaje. En la última fase, el profesor formaliza el conocimiento y le da el estatus de saber.

Brousseau (2007) distingue tres tipos de interacciones que se dan en una *situación a-didáctica* entre el estudiante con su medio:

- El tipo “acción” que consiste en utilizar y modificar los propios conocimientos del estudiante a partir de la información obtenida del medio.
- El tipo “comunicación” que consiste en brindar información a otro sujeto con el fin de modificar sus conocimientos.
- El tipo “prueba” que consiste en validar o justificar un proceso, un procedimiento o un conocimiento adquirido.

Estas interacciones no solo se deben enfocar desde un punto de vista procedimental (secuencia de procesos de acción, formulación y validación), sino como un importante plan educativo: “el de hacer del alumno un ser racional, social, autónomo y responsable, capaz de comprender cómo se establece y se comparte una verdad en una sociedad, mediante debates a la vez democráticos y constructivos” (Brousseau 1999, p. 20).

El autor categoriza las situaciones de acuerdo a estas interacciones:

Situación a-didáctica de acción

Entendemos por situación a-didáctica de acción a la situación donde el estudiante actúa, o decide como actuar sobre ella. Para ello, el estudiante utiliza sus conocimientos previos y sus estrategias para desarrollar los problemas planteados, sin la intervención del profesor. Esta interacción le brinda al estudiante información sobre su acción; en el mejor de los casos puede reforzar sus conocimientos y estrategias, y aprender otras que utilice a lo largo del desarrollo de la situación; caso contrario, si los resultados no son los esperados por el estudiante, le da la opción de cambiar su estrategia de resolución y de enfocar el problema con otra perspectiva. Esta situación genera en el estudiante nuevos conocimientos y refuerza otros que son necesarios en el proceso de construcción de un nuevo saber.

En palabras de Brousseau (2007), una situación de acción

> consiste en elegir directamente los estados del *medio* antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad, el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (retroalimentación), a anticipar sus reacciones y a tenerlo en cuenta en sus propias acciones futuras. (p. 24)

El esquema de la figura 9 muestra la interacción que se genera entre el sujeto y su medio en una situación a-didáctica de acción.

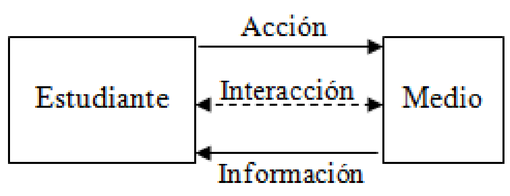


Figura 9. Situación a-didáctica de acción.
Fuente: Adaptado de Brousseau (2007, p. 25)

A modo de ejemplificar una situación a-didáctica de acción que se desprende de la "carrera al 20", en un juego entre dos jugadores, Brousseau (citado por Chevallard et al. 2005) señala que "cada jugador produce únicamente una serie de decisiones, no tiene ningún interés en indicar sus estrategias. Toma el juego en un cierto estado y lo deja en otro" (p. 237).

Como el objetivo de nuestra investigación es que el estudiante aprenda un procedimiento flexible de aproximación que le permita aproximarse tanto como lo desee a la medida de un área, una situación a-didáctica de acción la podemos apreciar en nuestra investigación cuando los estudiantes toman el control del deslizador propuesto en el *applet* de la actividad 2, diseñado por el investigador en el GeoGebra, y lo manipula de forma exploratoria, de modo que relaciona el valor del deslizador con el número de rectángulos que se dibujan (ver figura 10).

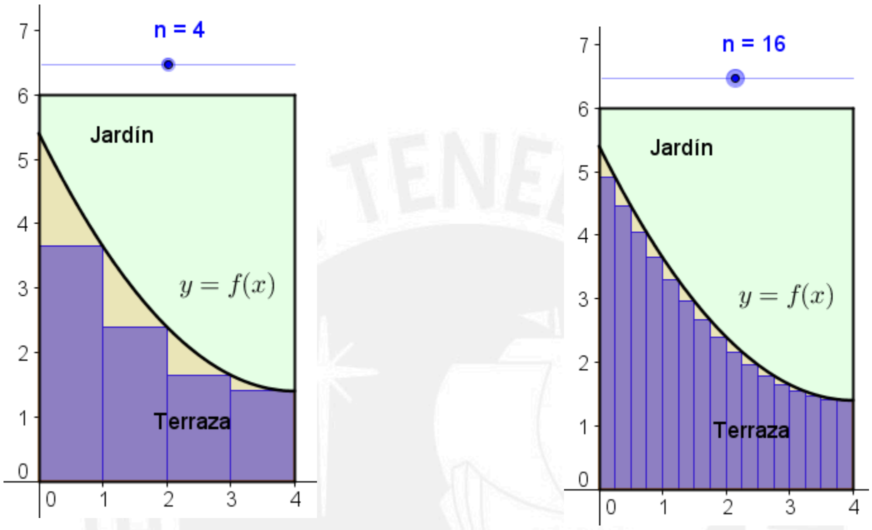


Figura 10. Dibujo de rectángulos con el deslizador.
Fuente: Propia.

Pensamos que esta es una fase principalmente de acción, porque se busca garantizar de que todos los estudiantes reconozcan la relación entre el número de rectángulos y el *n* del deslizador. La mayor parte de nuestros estudiantes estarán en la fase de acción porque se van a encontrar adaptándose al medio; que significa que está reconociendo que al mover el deslizador a la izquierda o a la derecha, en un caso disminuye el número de rectángulos y en el otro aumenta; lo que no niega de que algunos estudiantes ya empiecen a formular y a relacionar en número de rectángulos con la aproximación a la medida del área, sin embargo esa fase de formulación la hemos dejado para un ítem posterior de la misma actividad y para la actividad 3.

Situación a-didáctica de formulación

Entendemos por situación a-didáctica de formulación a la situación donde el estudiante (emisor) intercambia información con uno o más sujetos (receptores). El estudiante está interesado en compartir lo que va aprendiendo a lo largo de la situación y de esa manera generar un lenguaje que sea comprensible por todos. Esta información puede ser la comunicación de un resultado o de una estrategia de resolución, que tiene por objetivo modificar los conocimientos de la otra persona.

Brousseau (2007) afirma que,

> La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El medio que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información. (p. 25).

El esquema de la figura 11 muestra la interacción que se genera entre el sujeto y su medio en una situación a-didáctica de formulación. Para este esquema asumimos que el estudiante A comunica su estrategia al estudiante B. Este actúa sobre el medio que devuelve la información al estudiante A corroborando así si el mensaje dado es correcto o no.

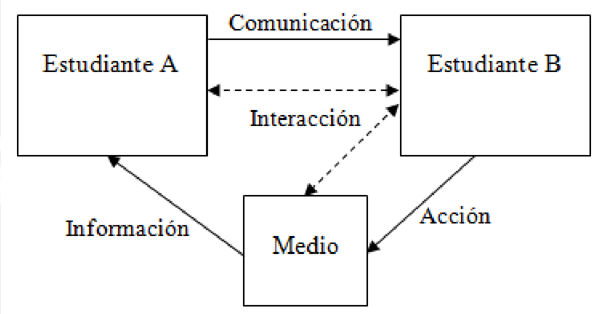


Figura 11. Situación a-didáctica de formulación.
Fuente: Adaptado de Brousseau (2007, p.26).

A continuación presentamos una situación a-didáctica de formulación que se desprende de la “carrera al 20”. En términos de Brousseau (citado por Chevallard et al. 2005),

> Los alumnos son agrupados en dos equipos que compiten el uno contra el otro. En cada grupo se asignan letras a los alumnos. A la llamada del profesor los dos alumnos designados por la letra nombrada van a disputar una partida en la pizarra. Los restantes alumnos no tienen derecho a intervenir ni a hablar. El equipo del jugador ganador se adjudica un punto. Entre partida y partida los alumnos de un mismo equipo discuten entre ellos las mejores estrategias. El éxito de cada equipo depende de la acción y de la comprensión que cada jugador manifiesta de las estrategias que se discuten. (p. 237).

Una situación a-didáctica de formulación la podemos apreciar en nuestra investigación cuando, por ejemplo, el estudiante observa los valores numéricos mostrados por el GeoGebra y formula a su compañero de dupla o al profesor – investigador de que *S* calcula la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos (ver figura 12). En esta fase también hay acción porque el estudiante va a actuar sobre el medio, y no es la primera vez que lo hace, ya está familiarizado con él; esto le va a permitir en nuestra idea de construcción y en nuestra manera de ir a la par con la teoría, prestar mayor atención a otras cosas, por eso es que pensamos que el común de los estudiantes va a pasar a la etapa de formulación. Esto no quita que haya estudiantes que sigan en la fase de acción, en el juego de manipular los deslizadores, y no lleguen a la siguiente fase. Por eso hemos hecho lo anterior y lo hemos reservado para acción, para que ahora ya no haya esa novedad de que muevo el deslizador y veo el número de rectángulos, sino que ahora aparece el *S* y deben interpretarlo a partir de la observación de los valores numéricos y gráficos. Nosotros hemos construido la situación o la pregunta para que formulen, ya que construimos la situación guiados por la teoría. Hasta el momento, bajo nuestra concepción, el estudiante para por la fase de acción al manipular deslizadores y adaptarse al medio (ya que nunca han visto un *applet* en este programa); acto siguiente, añadimos al número de rectángulos una cantidad, una información adicional que está relacionada con la medida del área de los rectángulos, y que ocurre cuando manipulan el deslizador, las cantidades van cambiando.

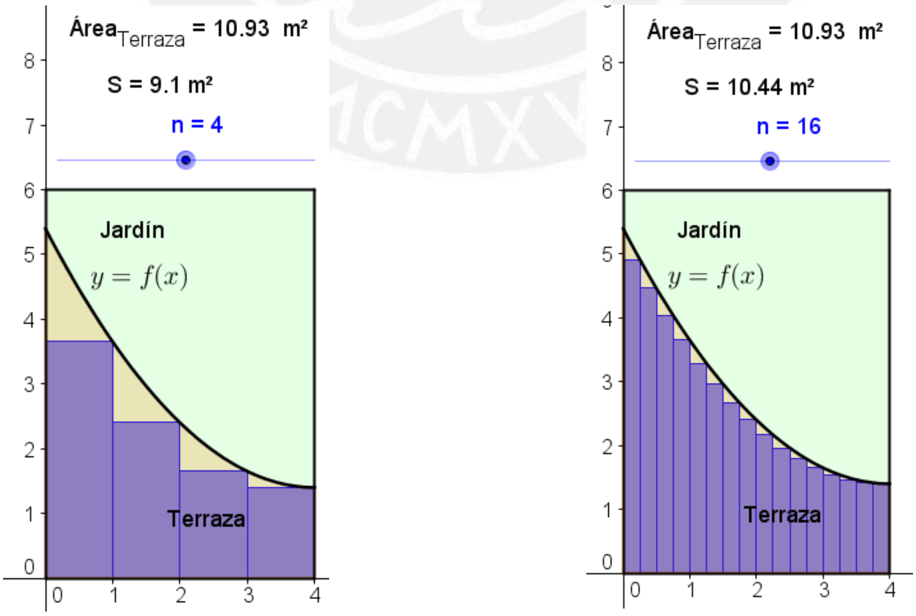


Figura 12. Suma de las medidas de las áreas de 4 y 16 rectángulos
Fuente: Propia

Es posible que haya estudiantes que vienen ya de una etapa de formulación y ahora lo reforzarán, pero nosotros trabajamos con el promedio de estudiantes. Sospechamos, intuimos, proponemos, que esta es una pregunta en la que en su mayoría llegarán a la fase de formulación, pero no quita que lleguen a la fase de validación.

Situación a-didáctica de validación

Entendemos por situación a-didáctica de validación a la situación donde el estudiante (proponente) debe demostrar a otras personas (oponentes) la validez de sus estrategias, procedimientos y resultados referidos al desarrollo de los problemas de la situación. Los oponentes, que han trabajado las mismas tareas, pueden corroborar lo expuesto por el proponente, pedirle la aclaración si existen dudas, o rechazar lo expuesto y presentar su propia propuesta.

En palabras de Brousseau (2007), una situación de validación

> permite distinguir un nuevo tipo de formulación: el emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente. Se supone que poseen las mismas informaciones necesarias para tratar una cuestión. Cooperan en la búsqueda de la verdad, es decir, en vincular de forma segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando hay dudas. (p. 26-27)

El esquema de la figura 13 muestra la interacción que se genera entre el sujeto y su medio en una situación a-didáctica de validación. Para este esquema asumimos que el estudiante A desea demostrar la validez de su modelo A (estrategias, resultados, teorías, etc.) de desarrollo de un problema al estudiante B. Este actúa sobre el medio utilizando el modelo de A y analiza la información recibida.

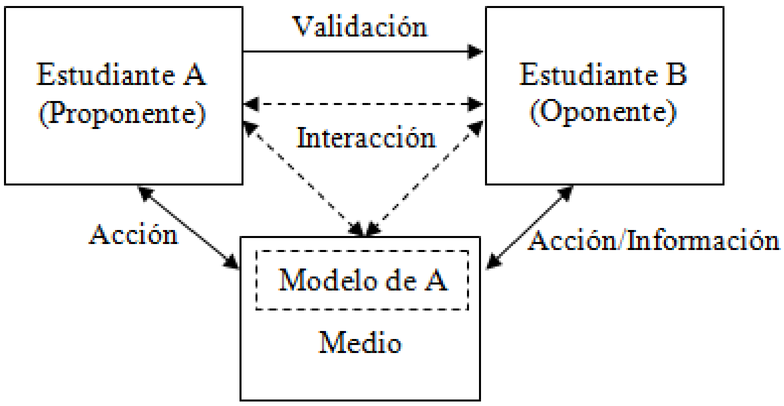


Figura 13. Situación a-didáctica de validación.
Fuente: Adaptado de Brousseau (2007, p. 27).

A continuación presentamos una situación a-didáctica de validación que se desprende de la "carrera al 20". En términos de Brousseau (citado por Chevallard et al. 2005),

> El profesor cambia el juego. Cada equipo, después de la discusión, puede proponer una declaración o un método para ganar; puede criticar una declaración del otro equipo e intentar probar que es falsa y, por último, puede obligar a jugar una partida utilizando el método que ha propuesto. En esta última fase los alumnos aprenden sin intervención del profesor: a enunciar "teoremas" (como, por ejemplo, "es necesario jugar 17"), a discutir su validez ("yo he jugado 17 y he perdido"), y a producir demostraciones ("si él juega 17, yo solo puedo jugar 18 o 19, en los dos casos él podrá decir 20"). (p. 238).

Una situación a-didáctica de validación la podemos apreciar en nuestra investigación por ejemplo, cuando un estudiante, en base a los resultados numéricos y gráficos mostrados en la figura 14, afirma que al aumentar el número de rectángulos la suma de las medidas de las áreas de todos ellos se aproximan a la medida del área de la región, justificando que al aumentar el número de rectángulos, estos se hacen más angostos y ocupan un mayor espacio en la terraza; del mismo modo, que las regiones no cubiertas por los rectángulos se van reduciendo y por eso la medida del área de dichas regiones es cada vez menor.

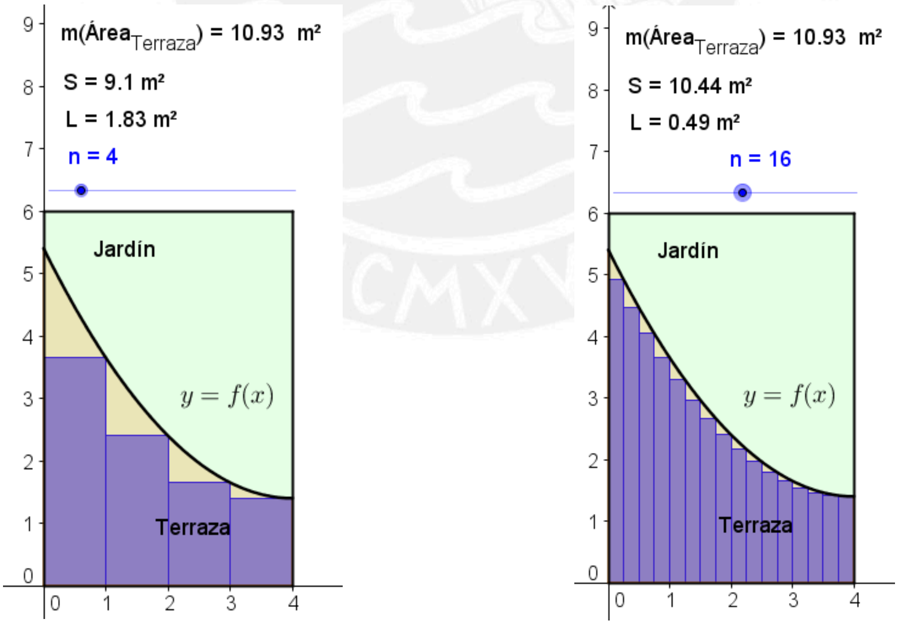


Figura 14. Medida del área de dos regiones distintas sobre la terraza (S y L) para 4 y 16 rectángulos
Fuente: Propia

Ahora le damos al estudiante otro dato: la diferencia entre la medida del área y la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos, representada por la letra L. Para ello hemos generado otra pregunta para ayudar a los estudiantes a que alcancen la fase de validación si es que no han llegado aún. Para nosotros llegar a la fase de validación significa que los estudiantes puedan enunciar y justificar, que la diferencia que la suma de las áreas de los rectángulos se aproximan a la medida del área de la región, y que la diferencia entre ambas se aproxima a cero. Nuestras actividades están diseñadas pensando en un alumnado heterogéneo, de modo que se garantice que el promedio de estudiantes alcance la fase de validación, pero somos conscientes que puede haber estudiantes que realizaron la validación sin la necesidad de darles como dato la diferencia entre la medida del área de la región y la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos.

Acabamos de mencionar los diferentes tipos de dialécticas que se dan en una situación a-didáctica. Brousseau (2007) también distingue un tipo de dialéctica que se da en una *situación didáctica* entre el profesor y el par estudiante – medio; a esta fase se le conoce como *situación didáctica* de institucionalización y la describimos a continuación.

Situación didáctica de institucionalización

Entendemos por situación a-didáctica de institucionalización a la situación donde el profesor formaliza el conocimiento puesto en juego, a partir de la producción de los estudiantes, y le da el estatus de saber. Esta intervención es necesaria porque se debe explicar de manera formal todo lo relacionado al conocimiento que se ha trabajado.

En palabras del autor, una situación didáctica de institucionalización se da porque los profesores

> debían dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, brindarles un estado a los eventos de la clase en cuanto resultados de los alumnos y resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones, (…) dar a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes. (Brousseau 2017, p. 28).

Una situación didáctica de institucionalización la podemos apreciar en nuestra investigación cuando el profesor, al finalizar la secuencia de actividades, formaliza lo que se ha pretendido que el estudiante aprenda: a articular la noción que tienen de área, como un número asociado a una región obtenido a partir de fórmulas de geometría, y un procedimiento flexible, que le permita aproximar ese número tanto como se quiera, y expresar dicha aproximación como una adición de las áreas de cada uno de los rectángulos. Para ello se utilizarán las respuestas de los estudiantes y apoyados del GeoGebra se modificará el número de rectángulos hasta 10 000, de modo que el estudiante observe que la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos cada vez más se aproxima a la medida del área de la terraza (esta institucionalización se considera que es **local** porque se utilizan las estrategias y las respuestas brindadas por los estudiantes en la explicación dada por el profesor); del mismo modo, se señala cuál es el objetivo de expresar la aproximación como una suma de las medidas de las áreas de cada rectángulos, con miras a definir posteriormente la medida del área como el límite de la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos (siendo este la institucionalización del nuevo saber).

Los conceptos básicos de esta teoría descritos en la sección 1 del capítulo 2 fueron tomados en cuenta para la elaboración de la secuencia didáctica que le permitirá al estudiante interactuar con el medio para lograr el aprendizaje del saber en juego.

2.2 Aspectos de la Ingeniería Didáctica

En esta sección describiremos brevemente las características de la metodología empleada en nuestra investigación, la *ingeniería didáctica*, la cual se caracteriza, en palabras de Artigue (1995), por ser “un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (p. 36).

Bajo esta caracterización, en nuestra investigación hemos tomando en cuenta ciertos análisis preliminares (epistemológicos, cognitivos y didácticos) referentes al área y su medida. La secuencia didáctica la trabajaremos en el aula y contrastaremos el producto dado por los estudiantes (respuestas, procedimientos, ideas, estrategias) con nuestro análisis previo de lo que esperamos que respondan o actúen al interactuar con el medio creado por el investigador.

2.2.1 Noción y características

Noción de la Ingeniería Didáctica

Entendemos por ingeniería didáctica a una metodología basada en el desarrollo de experiencias en clase, teóricamente justificadas, cuyo esquema y análisis es secuencial: primero se realizan ciertos análisis preliminares, se propone la secuencia didáctica, se ejecuta, se observa y se analiza el producto de los estudiantes comparándolo con lo que el investigador esperaba obtener.

La noción de Ingeniería Didáctica surgió a comienzos de los años ochenta. En palabras de la autora,

> Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tienen que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (Artigue 1995, p. 33-34)

Características de la Ingeniería Didáctica

Como ya se mencionó con anterioridad, una de las características propias de la ingeniería didáctica, según Artigue (1995), es por ser una metodología experimental que se basa en intervenciones didácticas en clase basadas en la concepción, realización observación y análisis de secuencias de enseñanza.

En nuestro trabajo, hemos revisado investigaciones acerca de la manera cómo ha concebido históricamente el área y su medida, qué noción tiene los estudiantes al respecto y cómo se enseña el objeto matemático en los diferentes niveles educativos; en base a ello se ha diseñado una secuencia didáctica que la hemos implementado en aula con el fin de que el estudiante logre articular su concepto de área como un número obtenido por fórmulas de geometría, y un procedimiento flexible que le permita aproximarse a ese número tanto como quiera.

Respecto a la manera en la que se realiza el análisis de resultados, siendo esta otra de las características importantes de la ingeniería didáctica, la investigadora señala que

> las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los

> estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. (Artigue 1995, p. 37)

Por ese motivo, en nuestra investigación hemos realizado una validación interna contrastando lo que esperamos que respondan los estudiantes (desde el punto de vista de resultados numéricos, procedimentales, racionales e intuitivos) y lo que realmente sucedió en las actividades diseñadas por el investigador.

2.2.2 Fases

La investigadora señala que en la ingeniería didáctica se distinguen cuatro fases:

Fase 1: Análisis preliminar

Entendemos por análisis preliminar al análisis previo realizado para identificar las concepciones de los estudiantes sobre el objeto matemático área y medida, la manera en la que se aborda dicho objeto en los centros de estudio, su desarrollo histórico, los problemas o dificultades surgidos en la enseñanza y aprendizaje de dicho objeto matemático, entre otros, de modo que nos permita plantear ciertas hipótesis, la pregunta de investigación y los objetivos que pretendemos conseguir.

En los análisis preliminares que se realizan teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación, se debe tener presente, en palabras de Artigue (1995),

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis didáctico, referente a la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. (p. 38)

En relación a nuestra investigación; en cuanto al análisis epistemológico, procedemos a mostrar los aspectos históricos de la construcción de la noción de área y medida, desde el cálculo de áreas de regiones limitadas por segmentos, a partir de fórmulas, hasta la etapa en la que el Análisis para definir formalmente dicha noción. Esto se puede apreciar en el capítulo 3 de nuestra investigación, en donde se recurrió a investigaciones y libros de texto tales como Olave (2005), D’Amore (2005), Boyer (1986), entre otros.

En cuanto al análisis didáctico; estudiamos el libro de texto D’Amore (2005) donde se muestran ciertos conceptos y la manera en la que se enseña la noción de área en los diferentes niveles educativos: primaria, secundaria y universitaria, así como también la manera en la cual el texto de consulta: Stewart (2001), enfoca la enseñanza el objeto matemático área y medida. Esto se puede apreciar en el Capítulo III de nuestra investigación.

En cuanto al análisis cognitivo; exploramos las concepciones que presentan los estudiantes del objeto matemático; así como también las dificultades y los obstáculos que aparecen. Por ejemplo, para nosotros un obstáculo que se presenta en la construcción del objeto matemático área y su medida es la de pasar de un registro gráfico a un registro algebraico, en el sentido de reconocer la altura de un rectángulo como la imagen de una función en un punto.

Esto lo indica Artigue (1998), cuando menciona que la presencia de dificultades “resultan de los procesos de traducción de un registro semiótico a otro, especialmente las dificultades de traducción del registro gráfico al registro algebraico” (p. 4).

Pensamos que trabajar el tema de imagen de una función es un obstáculo cognitivo porque por más que el estudiante ya cuente con conocimientos previos relacionados con funciones: ha determinado la imagen de la función en un punto, ha graficado una función por tabulación, ha determinado la imagen y pre-imagen de puntos gráficamente, etc.; presenta dificultades para reconocer la altura de un rectángulo como la imagen de la función. Nosotros intentamos subsanar, minimizar, y suavizar dichas dificultades utilizando un punto móvil diseñado en el *applet*, que se desplaza sobre la curva y muestra las coordenadas del punto, de modo que el estudiante pueda relacionar la altura de un rectángulo como la imagen de la función.

En cuanto al análisis del campo de restricciones; trabajaremos con cuatro estudiantes de una universidad de Lima, ordenados en dos duplas. Los laboratorios están equipados con computadoras para un máximo de 30 estudiantes, pero están disponibles previa reserva ajustada a la disponibilidad de los estudiantes; además no tienen el GeoGebra instalado en las computadoras para lo cual se necesita de un permiso del encargado del laboratorio.

Fase 2: La concepción y el análisis a priori

Entendemos por concepción a la generación de la idea para iniciar la ingeniería, la cual se fundamenta a partir de los análisis preliminares en donde se detalla qué conceptos tienen los estudiantes sobre el objeto matemático de estudio, así como también de las dificultades y de los errores más frecuentes que se presentan.

Según Artigue (1995), “la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares” (p. 38).

En esta segunda fase, la autora señala que el investigador actúa sobre un conjunto de variables llamadas *variables de comando*, las cuales son adecuadas para el problema estudiado. De estas variables de comando se distinguen dos tipos: variables macro-didácticas, relacionadas a la organización global de la Ingeniería; y las variables micro-didácticas, relacionadas a la organización de una secuencia o una fase.

En nuestra investigación pretendemos que el estudiante aprenda un conocimiento matemático a partir de una secuencia didáctica diseñada por el investigador, y para ello controlamos y variamos ciertas condiciones (variables didácticas) que le permita al adquirir dicho conocimiento. Por ese motivo, nos enfocamos en el trabajo con variables micro-didácticas las cuales describiremos a continuación.

Variables micro-didácticas

Asociadas a la organización local de la ingeniería. Para estudiar las condiciones que permitan construir el conocimiento matemático y que el control, manipulación o variación de esas condiciones provoque en el estudiante un cambio de estrategia de resolución y por lo tanto el conocimiento para resolver la situación, hemos considerado las siguientes variables didácticas, aunque no son las únicas que existen:

a. Borde superior de la región

Consideramos como variable didáctica al borde superior de la región porque influye directamente en el cálculo de la medida de áreas, y al cambiar su forma genera un cambio en la estrategia de los estudiantes; pasan de calcular la medida del área mediante fórmulas de geometría a utilizar aproximaciones para lograrlo.

A continuación presentamos un ejemplo de las posibles formas que puede presentar nuestra variable didáctica:

- Borde superior de la región como segmento de recta y/o arco de circunferencia

Cuando el borde superior de la región toma las formas mostradas en la figura 15(a) y 15(b), un segmento de recta AB, es probable que estudiante utilice las fórmulas que les permite hallar las medidas del área de un rectángulo y de un triángulo respectivamente. Si el borde superior de la región toma la forma mostrada en la figura 15(c), un arco de circunferencia AB, es probable que estudiante utilice la fórmula que le permite hallar la medida del área de una región circular (en nuestra investigación solo se trabaja con semicírculos o un cuarto de círculo). Si el borde superior de la región toma la forma mostrada en la figura 15(d), un arco de circunferencia AB y un segmento de recta BC, es probable que estudiante realice trazos adicionales en la región para transformarla en dos o más regiones de las cuales conoce una fórmula para calcular la medida de su área.

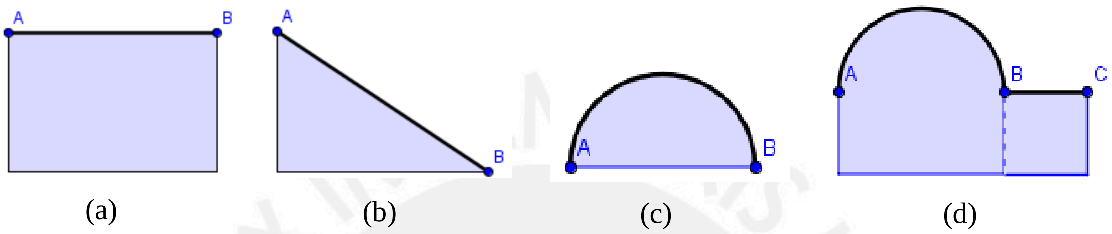


Figura 15. Borde de una región.
Fuente: Propia

- Borde superior de la región como una curva que no es un segmento de recta ni un arco de circunferencia

Cuando el borde superior de la región toma la forma mostrada en la figura 16(a), una curva AB que no es un segmento de recta ni un arco de circunferencia, el estudiante no conoce una fórmula que le permite hallar la medida del área de la región. De esa manera, aproximará la medida del área utilizando, probablemente, figuras geométrica conocidas (por exceso en la figura 16(b) y por defecto en la figura 16(c), en ambos casos con un rectángulo y un triángulo). ¿Qué tanto se podrá aproximar? Pensamos que no mucho porque no conoce ningún procedimiento de aproximación que le ayude a aproximarse tanto como él quiera a la región.

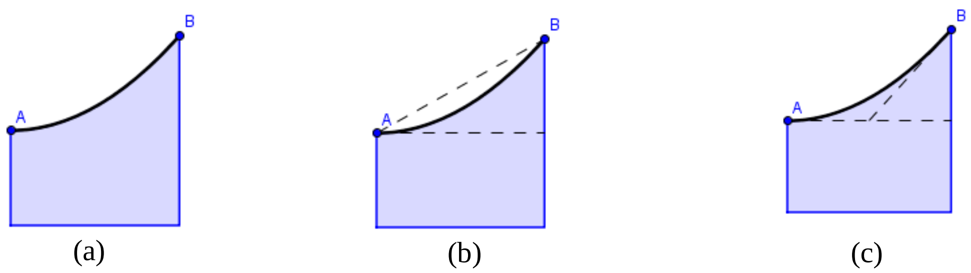


Figura 16. Borde de una región y trazos adicionales.
Fuente: Propia

b. Número de rectángulos de aproximación

Consideramos como variable didáctica al número de rectángulos de aproximación porque tiene inferencia directa en tres aspectos a tomar en cuenta en nuestra secuencia didáctica: la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos (que llamaremos aproximación), la diferencia entre la medida del área y su aproximación y la expresión de la aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo. Las dos primeras relacionadas con la manipulación de un procedimiento que le permita aproximar la medida del área tanto como quiera, y la última relacionada con la expresión simbólica de la aproximación.

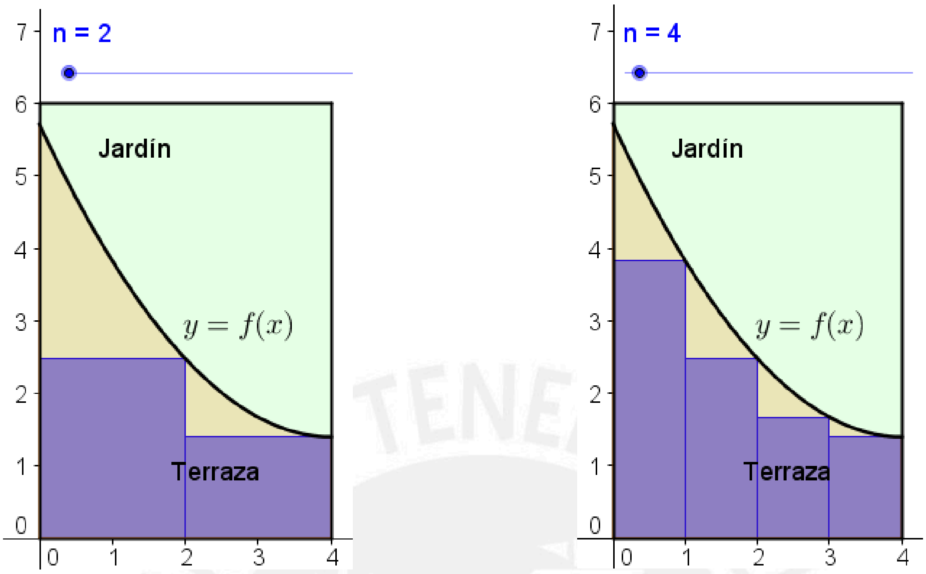
Del mismo modo, creímos conveniente la elección del número de rectángulos de aproximación como nuestra variable didáctica porque en los *applets*, diseñados en GeoGebra para cada actividad, la hacemos variar manipulando un deslizador, en cambio la medida de la aproximación y la diferencia de medida de áreas varían según el número de rectángulos de aproximación.

Cabe señalar que somos conscientes de que la aproximación, la diferencia entre la medida del área y su aproximación, los elementos que componen la adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo y el número de rectángulos de aproximación están relacionados entre sí; ya que por ejemplo, si se tiene como dato que la diferencia entre la medida del área y su aproximación es igual a 0,1 m^2, los estudiantes podrían obtener a partir del *applet* cuántos rectángulos se necesitan dibujar y cuánto suma las medida de las áreas de todos ellos; y realizando una operación simple obtener la medida de la base de cada rectángulo y plantear luego la adición de medidas de áreas individuales.

A continuación presentamos un ejemplo de los posibles valores que puede tomar nuestra variable didáctica, relacionada con que el estudiante exprese la aproximación realizada como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos (los valores de la variable relacionados con con la manipulación de un procedimiento que le permita aproximar la medida del área tanto como quiera se verán en el capítulo 4):

- Número de rectángulos de aproximación para los valores 2 y 4

Como los estudiantes trabajan con una función continua definida en $[0;4]$, si se dibujan dos o cuatro rectángulos de aproximación, el intervalo se subdivide en dos o cuatro partes iguales. Esto les permite obtener la medida de la base de cada rectángulo sin efectuar ningún cálculo, relacionar las alturas de los rectángulos como la imagen de la función en un número entero, efectuar dos o cuatro productos y sumar las expresiones (ver figura 17).



Medida del área A de los dos rectángulos: $m(A) = 2\times f(2) + 2\times f(4)\ \text{u}^2$.

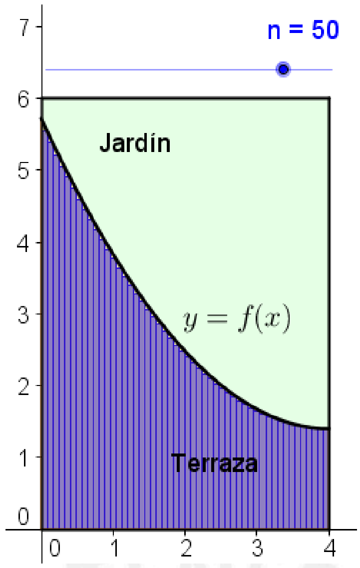
Medida del área A de los cuatro rectángulos: $m(A) = 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3) + 1\times f(4)\ \text{u}^2$

Figura 17. Número de rectángulos de aproximación para los valores 2 y 4.
Fuente: Propia

- Número de rectángulos de aproximación para valores mayores a 4

Al trabajar en el mismo intervalo, si se dibujan más de cuatro rectángulos, por ejemplo 50, el intervalo $[0;4]$ del eje x se divide en 50 partes iguales. Para ese valor, el estudiante debe calcular cuánto mide la base de cada rectángulo, debe determinar el valor de las subdivisiones generadas en el intervalo a partir de la medida de la base de los rectángulo, debe relacionar las alturas de los rectángulos como la imagen de la función en un número fraccionario, debe efectuar 50 productos y sumar las expresiones planteadas (ver figura 18).

Los valores que toman las variables son diferentes en cada actividad. Estas se presentarán en el capítulo 4 de nuestra investigación, y se describirán por actividad. El objetivo cambiar el valor de la variable es ir introduciendo al estudiante en el planteamiento de la suma de las medidas de las áreas de todos los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos.



Medida del área de los 50 rectángulos:

$$m(A) = 0{,}08\times f(0{,}08) + 0{,}08\times f(0{,}16) + \ldots + 0{,}08\times f(3{,}92) + 0{,}08\times f(4)\ \text{u}^2.$$

Figura 18. Número de rectángulos de aproximación para el valor 50.
Fuente: Propia

El objetivo del análisis a priori es analizar previamente si los cambios realizados en las variables didácticas permitieron controlar los comportamientos de los estudiantes y darles sentido.

En palabras de Artigue (1995),

> El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (p. 45)

En nuestra investigación, realizamos el análisis *a priori* de forma específica. Cada actividad, de las cuatro que conforman la secuencia didáctica, presenta tareas (1, 2, 3…), ítems (a, b, c, …), y sub – ítems (i, ii, iii, …). Hemos realizado el análisis a priori por ítem y sub – ítem, de esa manera describimos mejor lo sucedido en la fase de experimentación. En este análisis argumentamos lo que esperamos que el estudiante responda, señalando las dificultades que podría presentar en el desarrollo de los problemas.

Cabe señalar que en nuestro análisis relacionamos el comportamiento de los estudiantes y la manera en la que se construye el aprendizaje, con cada fase de la teoría de las situaciones didácticas propuesto por Brousseau (2007); fases por las que tienen que pasar los estudiantes en el proceso para obtener el aprendizaje del objeto matemático área y medida.

Fase 3: La experimentación

Según Artigue (1995), es la fase donde se pone en funcionamiento todo el dispositivo construido. Esta fase inicia cuando el investigador, los observadores y el grupo de estudiantes objeto de la investigación se reúnen en el aula donde se llevará a cabo el proceso de aprendizaje. Allí se genera el contrato didáctico que precisa las obligaciones y el comportamiento de cada uno de los participantes, se aplican de los instrumentos diseñados y se registran las observaciones realizadas.

Fase 4: Análisis a posteriori y validación

En palabras de Artigue (1995), esta fase

> se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se complementan con frecuencia con otros (…), como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. (…) En la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (p. 48).

El producto de los estudiantes, luego de la fase de experimentación, fue recogido de forma física (actividades impresas con las respuestas de los estudiantes) y de forma audible (grabaciones realizadas por el profesor – investigador de ciertas respuestas de los estudiantes).

La validación de las hipótesis formuladas por el investigador, se efectuó a partir de la comparación entre el producto dado por los estudiantes y lo que esperábamos que ellos respondan al desarrollar la secuencia didáctica.

A continuación presentamos una breve reseña histórica del concepto de área y su estudio dos textos universitarios y en uno didáctico.

CAPÍTULO III – ÁREA Y MEDIDA

A continuación presentamos una aproximación histórica de los aspectos teóricos relacionados con la medida del área. Mencionamos algunos aspectos que a nuestro entender son relevantes debido a que no podemos asegurar con exactitud en qué momento surgió este concepto matemático, por lo tanto vamos a realizar un recorrido a lo largo de la historia y entender el proceso de construcción del mismo.

Presentamos también el estudio realizado en un libro de E. Stewart sobre el objeto matemático área y medida, en el que se muestra el proceso de construcción para determinar la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función cuadrática, definida en un intervalo dado, y el eje *x*; y se ofrece una definición formal de área. Asimismo, realizamos un estudio didáctico del objeto matemático área y medida en el texto de B. D'Amore, donde se aprecia el enfoque didáctico de la medida del área en los niveles educativos primaria, secundaria y universitario.

En nuestra investigación nos centramos, como ya lo hemos mencionado, en la medida de áreas con ciertas características particulares.

3.1 Evolución histórica del concepto de medida de área

Según Facco (2003), numerosos ejemplos concretos muestran que en el periodo 2000 – 1600 a.C., los babilonios conocían reglas generales para calcular el área de rectángulos, de triángulos rectángulos e isósceles, del trapecio rectángulo y el volumen de un paralelepípedo rectángulo. Asimismo, en el periodo 1850 – 1650 a.C. aproximadamente, investigadores ratifican la aparición de ciertos documentos: libros sagrados y papiros, que dan fe en cuanto al origen del uso de la geometría.

Boyer (1986) señala que uno de los papiros más extensos fue comprado por Henry Rhind. Por lo que se le conoce como Papiro de Rhind, no tan a menudo como Papiro de Ahmes, en honor al escriba que lo copió en el año 1650 a.C. En dicho papiro se presenta, en el problema 49, el cálculo de la medida del área de la superficie de un rectángulo de ancho 10 y largo 2. En el problema 51, se presenta el cálculo de la medida del área de un triángulo isósceles de altura 13 y base 4, donde se tomó la mitad de lo que nosotros llamaríamos la base y se multiplicó por la altura; para la justificación de este método se sugiere dividir el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, y desplazar uno de ellos de modo que se forme un rectángulo (ver figura 19), propiedad que veremos más adelante.

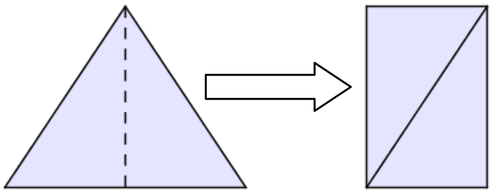


Figura 19. Dibujo de un rectángulo a partir de un triángulo isósceles.
Fuente propia

Análogamente, en el problema 52, Ahmes calcula la medida del área de un trapecio isósceles de base mayor 6, base menor 4 y la distancia entre ellas 20; toma la semisuma de las bases, formando un rectángulo, y la multiplica por 20 (ver figura 20).

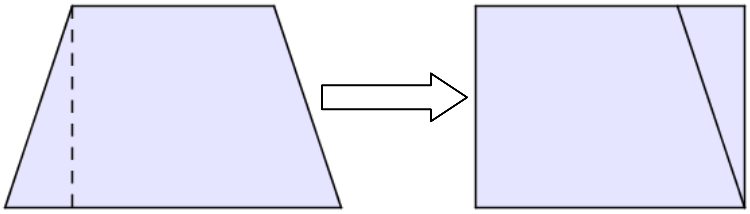


Figura 20. Dibujo de un rectángulo a partir de una trapecio isósceles.
Fuente: Propia

La figura 21 muestra una foto del papiro de Rhind en la que se trabajan los problemas 49, 51 y 52.

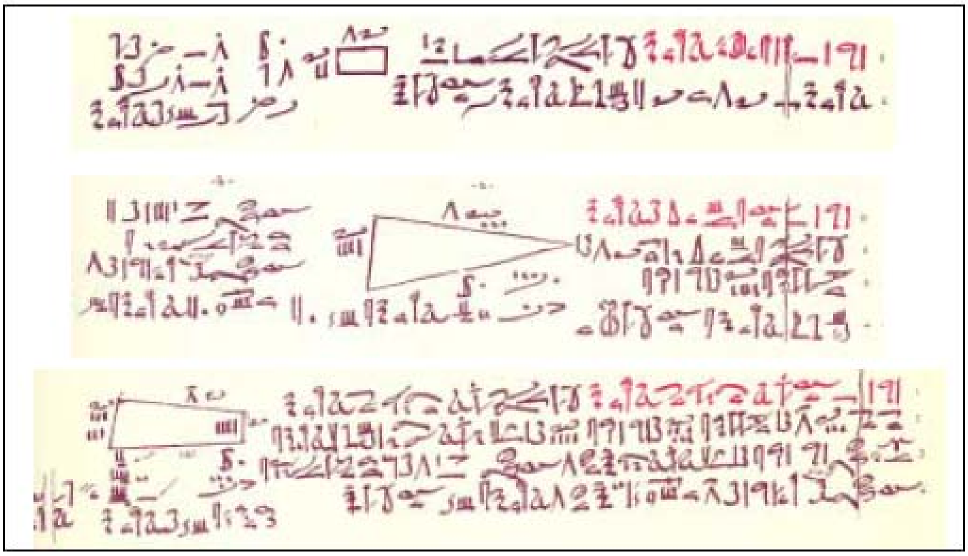


Figura 21. Problemas 49, 51 y 52 del Papiro de Rhind.
Fuente: Facco (2003, p. 20)

A modo de complementar la información dada hasta el momento, D'Amore (2009) menciona que la historia del área se pierde en la antigüedad, aunque se encontraron, tanto en tabletas sumerias, de 3 000 años a.C., como en los papiros egipcios de 2 000 años a.C., referencias a este tema en problemas que incluían la medida de las áreas de ciertas figuras: parcelas de terrenos, planos de palacios, etc., o simples figuras. El autor señala que en muchos de estos documentos, por ejemplo en las tabletas sumerias, se encontraron formas de determinar la medida del área de un cuadrado a partir de la medida de su diagonal, o la medida del área de un hexágono regular a partir de la medida de su lado.

Olave (2005) afirma que en la Antigua Grecia "se inventan y desarrollan mecanismos para la resolución de problemas particulares, vinculados al cálculo de medidas de áreas de figuras no poligonales, caracterizados por la exactitud en los resultados presentados y la rigurosidad en los razonamientos" (p. 24); figuran entre estos resultados la Cuadratura de las lúnulas, el método de exhausción, entre otros.

Entre los griegos que precedieron a Arquímedes (287-212 a. C.), que hicieron grandes aportes a la demostración de fórmulas del cálculo de medidas de áreas, señala D'Amore (2009), se distinguieron Tales de Mileto (¿624-548? a. C.), en cuyo tiempo y mucho antes ya eran conocidos los cálculos de medidas de áreas de las figuras planas más comunes; Demócrito de Abdera (quien nació alrededor de 460 a. C.), que se le atribuye haber encontrado la fórmula para hallar el volumen de una pirámide dividiendo entre tres el producto de la medida del área de la base por la altura; Euclides de Alejandría (siglo IV-III a. C.), en cuyo tiempo dichas fórmulas para calcular las medidas de áreas de figuras planas ya estaban perfectamente demostradas, entre otros.

Entre los trabajos realizados sobre la medida del área de figuras no poligonales sobresalen Eudoxo de Cnido, Hipócrates de Chios y Arquímides.

En palabras de Boyer (1986),

> Los matemáticos anteriores habían sugerido ya que lo mejor que uno podía intentar era inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras indefinidamente, con lo que las figuras rectilíneas se iban aproximando cada vez más a la curvilínea, pero lo que no sabían era cómo cerrar el razonamiento, ya que la idea de límite les era desconocida y lo seguiría siendo durante más de dos milenios. (p. 128).

Boyer (1986) manifiesta que se encontró en la obra Historia de la Matemática de Eudemo, un breve fragmento referido a la obra de Hipócrates de Chios (nació en torno al 430 a.C.) y su trabajo con la cuadratura de las lúnulas (según el autor, una lúnula es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos). El teorema de Hipócrates enuncia que “segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases” (Boyer 1986, p. 98).

En palabras del investigador “el teorema de Hipócrates sobre los círculos y los cuadrados circunscritos parece ser la primera afirmación precisa sobre la medida de figuras curvilíneas en el mundo griego” (Boyer 1986, p. 99).

Otro gran personaje griego, señala el autor, parece haber sido Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.) quien con su imaginación dio la clave para resolver el problema de la comparación entre figuras curvilíneas y rectilíneas, bajo el siguiente lema que afirma que: “dadas dos magnitudes que tengan una razón (es decir, que sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero), entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra” (Boyer 1986, p. 128-129).

Según el investigador, para Arquímedes este lema sirve de base al método de exhausción, método utilizado por Arquímedes para calcular la medida del área de un segmento de parábola (procedimiento que explicaremos más adelante). La proposición que constituye la base de dicho método es la siguiente (extraído de los Elementos de Euclides, volumen III, página 14):

> Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano. (Boyer 1986, p. 129).

El autor distingue a Arquímedes (287-212 a. C.) como el matemático más importante de toda la antigüedad por sus inventos en maquinaria de guerra, por su reputación en astronomía y principalmente por los productos de su pensamiento.

Boyer señala que de los tratados que se refieren al método de exhausción, el más popular fue el de la cuadratura de la parábola, que permite calcular la medida del área del segmento de parábola. Arquímedes logró demostrar rigurosamente por este método, que explicaremos en seguida, que la medida del área K de un segmento parabólico

APBQC (ver figura 22) es igual a cuatro tercios de la medida del área de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura.

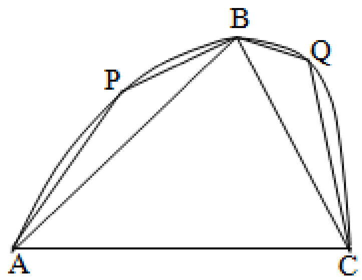


Figura 22. Cuadratura de la parábola.
Fuente: Boyer (1986, p. 174)

A continuación presentamos el procedimiento:

> Demuestra en primer lugar que el área del más grande triángulo inscrito *ABC*, con base *AC*, es igual a cuatro veces la suma de los correspondientes triángulos inscritos con bases cada uno de los segmentos *AB* y *BC*. Continuando el proceso que sugiere esta relación, parece claro que el área *K* del segmento parabólico *ABC* vendrá dada por la suma de la serie infinita $T+\frac{T}{4}+\frac{T}{4^2}+\cdots+\frac{T}{4^n}+\cdots$, que es $\frac{4}{3}T$. (Boyer 1986, p. 175).

Según el investigador, Arquímedes no habla de sumas infinitas porque los procesos infinitos no eran aceptados en su época; tampoco usaba la palabra *parábola*, sino ortotoma o sección de un cono rectángulo.

En relación al cálculo de la medida del área de figuras cónicas, D'Amore (2009) comenta que para el cálculo de la medida del área de la circunferencia ya existían sistemas aproximados para dicho cálculo tanto en tabletas asirias, como en las babilónicas y en los jeroglíficos egipcios. El autor señala también que Arquímedes de Siracusa no dio un valor sino un intervalo de valores comprendido entre $3+\frac{1}{7}$ y $3+\frac{10}{71}$, dando a entender que determinar un valor para π era una labor compleja y que no se contaban con los instrumentos matemáticos oportunos para obtenerlo; solo Ferdinand von Lindemann (1852-1939) en 1882, entendió la verdadera naturaleza de π, mostrando que era un número real trascendente, cuyo valor es 3,14159265358979323846264338327950288… Hoy se sabe que la fórmula que calcula la medida del área de un círculo de radio *r* es igual a $\pi\times r^2$.

D’Amore (2009) señala que se encontró un papiro de 1 500 a.C. donde se calcula la medida del área de un círculo de diámetro *d* de la siguiente manera: $\mathrm{A} = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, de este se deduce que para los egipcios de esa época, π vale $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, es decir, aproximadamente 3,1329…

En relación a la medida del área de la elipse, Boyer (1986) manifiesta que Arquímedes, en su trabajo *Sobre conoides y esferoides*, calcula la medida del área de una elipse completa, y menciona que las áreas de las elipses son entre sí como los rectángulos construidos sobre sus ejes. En investigador acota que esto es lo mismo que decir que “el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es πab, o bien que el área de una elipse es igual al área de un círculo cuyo radio sea la media geométrica de los dos semiejes de la elipse” (p. 176).

D’Amore (2009) comenta que entre los años 200 a. C. al 1 600 d. C. la geometría no interesaba mucho a los romanos que dominaron el mundo después de Arquímedes. Solo hasta el renacimiento y gracias a las obras de François Viéte (1540-1603) y de René Descartes (1596-1650), nace una nueva forma de concebir la geometría, llamada “analítica”, que llevó a un notable despertar de los estudios geométricos.

Olave (2005) señala que en los siglos XVI, XVII y XVIII, se deja momentáneamente de lado los métodos rigurosos y se da valor a la intuición, impulsando así el desarrollo del Cálculo. En esta etapa se plantean métodos generales para la resolución de una cantidad considerable de problemas. Algunos de los matemáticos involucrados en estas tareas fueron Cavalieri, Fermat, Pascal, Descartes y Barrow. Se destaca este último porque, en palabras de la autora, “es el primero en establecer una relación entre los problemas de tangentes y las cuadraturas con un razonamiento de carácter geométrico en detrimento de lo analítico y lo algebraico, impidiendo un desarrollo algorítmico de sus descubrimientos” (p. 31).

Boyer (1986) indica que los problemas de cuadraturas se centraban en el cálculo de las medidas de áreas, aunque incluían también los cálculos de las medidas de longitudes y de volúmenes. El interés radicaba en expresar los resultados en forma numérica y no por medio de figuras, longitudes o volúmenes equivalentes.

Entre los principales exponentes de la época, señala el autor, figuran los siguientes:

Buonaventura Cavalieri (1598-1647) que utilizó razonamientos similares a los de Arquímedes para tratar los temas de cálculo de medidas de áreas y de volúmenes, basándose en el concepto de los indivisibles (áreas formadas por segmentos rectilíneos) que aparece por primera vez en su libro *Geometría Indivisibilibus el año* 1635. La idea fundamental en la que basó su libro fue que un área se puede considerar formada por segmentos rectilíneos o indivisibles. Cavalieri calculó la integral de las potencias x^k para k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9.

Pierre de Fermat (1601-1665) descubrió en el año 1629 o más tarde un teorema relativo al área encerrada bajo las curvas $y = x^m$, que en esencia era el teorema que publicó Cavalieri en 1635 y 1647, pero ya no estaba limitado a valores enteros de m entre 1 y 9, sino se podía utilizar tanto para valores enteros y fraccionarios. Para ello, consideremos la curva $y = x^n$, y supongamos que se desea calcular la medida del área comprendida bajo la curva, entre los valores $x = 0$ y $x = a$. Fermat subdividía el intervalo de $x = 0$ a $x = a$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando los puntos de abscisas a, aE, aE^2, aE^3, …, donde E es un número menor que 1; en estos puntos considera las ordenadas de los correspondientes puntos de la curva, aproximando el área bajo la curva por medio de rectángulos circunscritos tal como se indica en la figura 23.

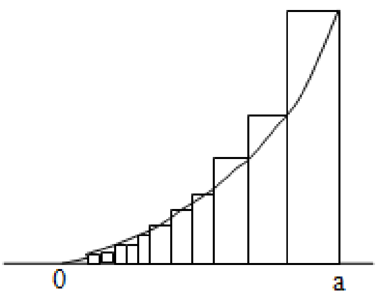


Figura 23. Rectángulos circunscritos a la región.
Fuente: Boyer (1986, p. 442)

La medida de las áreas de los sucesivos rectángulos, empezando por el mayor, vienen dadas por los términos de la progresión geométrica $a^n(a - aE)$, $a^nE^n(aE - aE^2)$,

$a^n E^{2n}(aE^2 - aE^3),\ldots$, y la suma de estos infinitos términos es $\dfrac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}}$ o $\dfrac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$.

Según E tiende a 1, es decir, según los rectángulos se van haciendo cada vez más estrechos, la suma de la medida de las áreas de todos estos se va aproximando cada vez más a la medida del área bajo la curva. Y haciendo $E=1$ en la fórmula anterior, obtenemos $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$, que da la medida del área de la región bajo la curva.

La creación o fundación del Cálculo, señala Boyer (1986), aparece con Isaac Newton (1642-1727) y con Gottfried W. Leibniz (1645-1716).

En investigador señala que en los párrafos traducidos de los *Principia* (tomados del libro *Mathematical Principles of Natural Philosophy*), Newton presenta un claro intento por definir el límite de una función; esto se aprecia en el Lema I, de la Sección I del Libro I que se titula “El hecho de las razones primera y últimas entre cantidades, con la ayuda del cual demostramos las proposiciones que siguen”, que enuncia lo siguiente:

> Cantidades, y la razón de cantidades, uue [que] en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales. (Boyer 1986, p. 500).

El autor señala también que Newton no fue el primero en realizar diferenciaciones e integraciones, ni las relaciones entre ambas. Su creación se enfocó más en el afianzamiento de estos elementos en un algoritmo aplicable a todas las funciones, tanto algebraicas como trascendentes. En los *Principia*, a continuación del Lema II, Newton escribe,

> Este es un caso particular, o mejor un corolario de un método general que se extiende, sin ningún cálculo molesto, no sólo al trazado de tangentes a cualquier línea curva, ya sea geométrica o mecánica o dispuesta de cualquier manera con respecto a líneas rectas u otras curvas, sino también a la resolución de otros tipos más abstrusos de problemas acerca de las curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad de curvas, etc. (…) Este método lo he entretejido con el otro consistente en trabajar con ecuaciones reduciéndolas a series infinitas. (Boyer 1986, p. 501).

Asimismo, el autor señala que en la obra de Leibniz jugó un papel muy importante las series infinitas, en este caso las numéricas. Leibniz calculó la suma de los inversos de los números de la forma $\frac{2}{n(n+1)}$, descomponiéndolo en una adición de dos fracciones $2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)$, consiguiendo que la suma de la serie infinita es igual a 2, con lo que concluyó que podría sumar cualquier serie infinita.

En palabras de Boyer (1986), Leibniz

> Se dio cuenta (…) de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las *diferencias* de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias, así como las cuadraturas dependen de la suma de las ordenadas o de los rectángulos infinitamente estrechos que constituyen el área. (p. 505).

Olave (2005) menciona que ya entre los siglos XIX y XX se produce la definitiva fundamentación rigurosa de los conceptos de derivada e integral. Esta tarea la inician Cauchy (1789–1857) y Bolzano (1781–1848), y la culmina Weierstrass (1815–1897).

Boyer (1986) señala que Cauchy, sin tomar en consideración la geometría, los infinitésimos y las velocidades de cambio, formula la siguiente definición de límite (vista en el volumen III de las *Oeuvres completes* de Cauchy): “Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama límite de todos los demás”. (Boyer 1986, p. 647).

El investigador señala que en siglo XVIII la integración y la diferenciación se consideraban operaciones inversas; sin embargo cuando la función era discontinua, la derivada no existiría mientras que la integral podría calcularse sin dificultad. En ese sentido las curvas discontinuas pueden determinar un área bien definida. Entonces Cauchy decidió retornar el sentido geométrico de la integral como medida del área, definiéndola como el límite de una suma, tomando la imagen de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo. Si $S_n=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$, entonces S es el límite de S_n, según la longitud de los intervalos (x_i-x_{i-1}) que disminuyen indefinidamente.

El autor comenta que las ideas de Cauchy respecto a los fundamentos del cálculo eran similares a las ideas desarrolladas por Bolzano, coincidiendo entre ellas: las analogías de la aritmetización del cálculo; y definiciones de límite, derivada, continuidad y convergencia. Sin embargo, no se presentaron indicios de que ambos llegaron a encontrarse, y la obra de Bolzano fue ignorada por sus contemporáneos.

Boyer (1986) señala que a modo de recuperar o volver a descubrir la obra de Bolzano, Weierstrass lo divulgó entre los matemáticos como un teorema que lleva el nombre de Bolzano – Weierstrass: "Todo conjunto acotado *S* que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números), tiene al menos un punto de acumulación o punto límite" (p. 692).

El investigador señala que Weierstrass contribuyó al programa de aritmetización presentando una definición depurada del concepto de límite, en vista que Cauchy hacía uso de expresiones como valores sucesivos, aproximarse indefinidamente, o tan pequeño como uno quiera, y Weierstrass consideraba que no contaba con la precisión que se espera de los matemáticos. En vista de ello, Heine en su obra *Elemente* de 1972 (bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass) define el límite de una función $f(x)$ en x_0 así: "Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$" (Boyer 1986, p. 696).

Finalmente, señala el autor, Bernhard Riemann (1826 – 1866) mostró que la idea de integral requería una definición más minuciosa que la propuesta por Cauchy, inspirada en una visión geométrica del área limitada bajo una curva, y propuso una definición de integral definida basado en el concepto de sumas superiores e inferiores, la cual se utiliza en la actualidad y se le conoce como Integral de Riemann.

La intención de nuestra investigación no es que el estudiante defina la medida del área como el límite de la suma de la medida de las áreas de infinitos rectángulos, sino de que el estudiante articule su concepto de medida de área, con un procedimiento, mediante rectángulos, que le permita aproximar dicha medida tanto como desee. Es por eso que en la reseña histórica hemos hecho hincapié a los inicios del cálculo de medidas de áreas de regiones planas rectilíneas y de los intentos por obtener la medida del área de regiones curvilíneas.

3.2 Estudio didáctico del objeto matemático área y medida en un texto universitario

En nuestra investigación estudiamos el objeto matemático área y medida. Para ello pretendemos que el estudiante utilice un procedimiento que le permita aproximarse tanto como desee a la medida del área. En ese procedimiento, el estudiante trabaja con diferentes funciones, con rectángulos inscritos y circunscritos a la región, con particiones regulares del intervalo, con sumas de medidas de áreas expresadas como la adición de medidas de áreas de rectángulos, con la diferencia entre la medida del área y la suma de la medida del área de los rectángulos, entre otros.

Un procedimiento comparable al utilizado en nuestra investigación (comparable sobre todo en el uso de rectángulos inscritos y circunscritos a la región y el cálculo de medidas de áreas) lo observamos en Stewart (2001). Allí se propone una solución para calcular la medida del área de una región *S* que se encuentra limitada por la gráfica de la función positiva y continua *f*, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje *x* (ver figura 24).

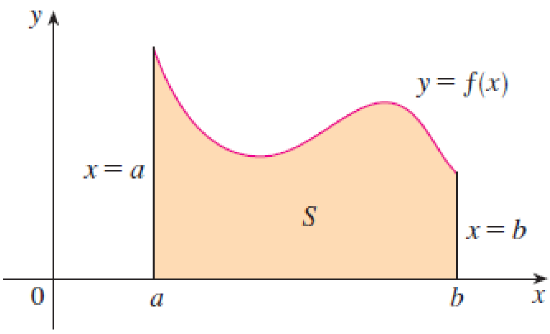


Figura 24. Región limitada por la gráfica de *f*, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje *x*.
Fuente: Stewart (2001, p. 367)

En el libro se señala que el problema de hallar la medida del área de la región *S* radica en el hecho de que todos sus lados no son rectos. Por tal motivo, se propone realizar una aproximación de la medida del área *S* por medio de la medida de áreas de rectángulos. A modo de ejemplo, se trabaja con la función $f(x) = x^2$ para $x \in [0; 1]$.

La figura 25 muestra la región parabólica *S* limitada por la gráfica de la función *f*, las rectas: $x = 0$, $x = 1$ y el eje *x*.

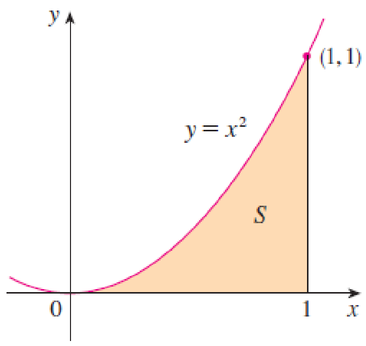


Figura 25. Región limitada por la gráfica de $y = x^2$, las rectas $x = 0$, $x = 1$ y el eje *x*.
Fuente: Stewart (2001, p. 368)

Para dar solución a este problema, se plantea dividir *S* en cuatro regiones más pequeñas como se muestra en la figura 26(a), las cuales se aproximan usando rectángulos de base igual al ancho de cada franja y altura igual a los valores de la función en los puntos extremos de la derecha de los intervalos generados [ver figura 26(b)] o de altura igual a los valores de la función en los puntos extremos de la izquierda [ver figura 26(c)].

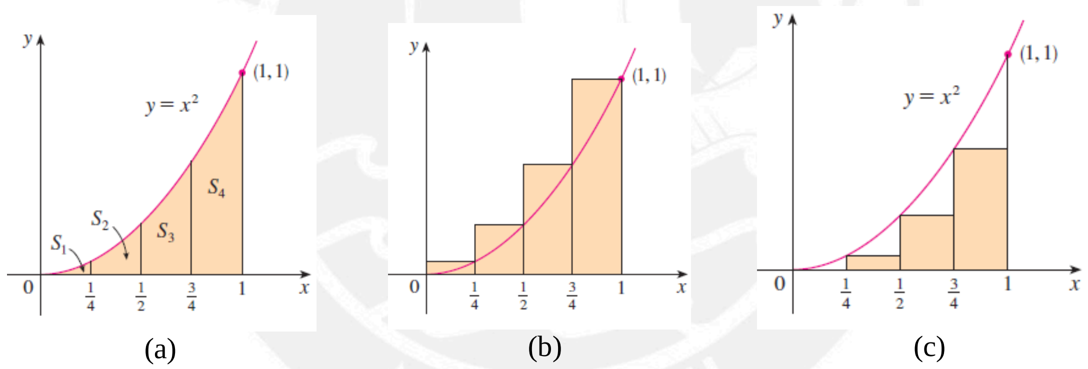


Figura 26. (a) División de la región *S* en cuatro franjas. (b) Cuatro rectángulos circunscritos a la región *S*. c) Cuatro rectángulos inscritos a la región *S*.
Fuente: Stewart (2001, p. 368)

A partir de los rectángulos dibujados en las figuras 26(b) y 26(c), se calculan $R_4 = 0{,}46875$, que es la suma de las medidas de las áreas de los cuatro rectángulos que circunscriben a la región, y $L_4 = 0{,}21875$, que es la suma de las medidas de las áreas de los cuatro rectángulos que se inscriben a la región (el subíndice 4 de *R* y *L* representa en número de franjas en las que se divide *S*). De esa forma se han encontrado estimaciones superior e inferior para la medida del área *S*, denotada por *A*:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

Stewart (2001) propone repetir el experimento con un número mayor de franjas. En la figura 27 se muestra la división de la región *S* en ocho franjas de anchos iguales.

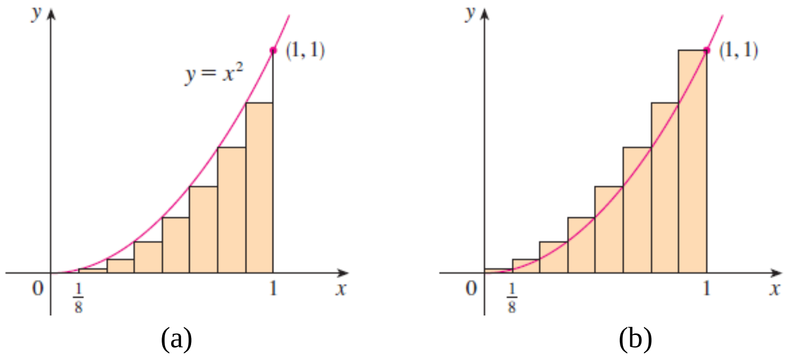


Figura 27. (a) Ocho rectángulos inscritos a *S*. (b) Ocho rectángulos circunscritos a *S*.
Fuente: Stewart (2001, p. 369)

La suma de las medidas de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8) son respectivamente 0,2734375 y 0,3984375. De esa forma se encuentran mejores estimaciones inferior y superior para *A*:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375$$

Trabajando de esta forma, se concluye que se pueden obtener mejores estimaciones al incrementar el número de franjas. La figura 28 muestra los resultados de la suma de las medidas de las áreas para *n* rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos izquierdos (L_n) o con los puntos extremos derechos (R_n).

Cuando se utilizaron 1 000 franjas se halló que la medida del área *A* se encontraba entre los valores 0.3328335 y 0.3338335, obteniendo así una buena aproximación para $A \approx 0{,}3333335$ (promedio de ambos valores)

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Figura 28. Aproximaciones de la medida del área *S* para *n* rectángulos inscritos y circunscritos a dicha región.
Fuente: Stewart (2001, p. 369)

Stewart (2001) plantea dividir el área S en n franjas, de modo que cuando n tienda al infinito se logre ver a qué valor tenderá la medida del área S. Para ello trabaja solamente con R_n.

La figura 29 se muestra la construcción que se realizará con n rectángulos.

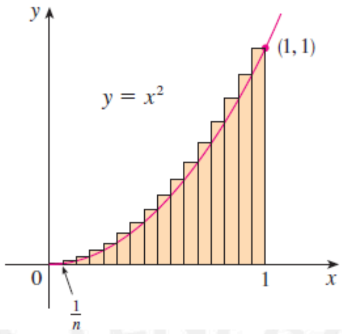


Figura 29. Dibujo de n rectángulos circunscritos a S.
Fuente: Stewart (2001, p. 369)

Se sabe que R_n es la suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos dibujados en la figura 29, donde cada rectángulo tiene base igual a $\frac{1}{n}$ y sus alturas son los valores de la función $y = f(x)$ en los puntos $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$, iguales a $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, \left(\frac{n}{n}\right)^2$.

De este modo, la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos queda planteada así:

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)$$

La suma de los cuadrados de los n primeros números enteros positivos se puede agrupar mediante la siguiente fórmula:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \cdots (1)$$

Luego de aplicar el límite cuando n tiende al infinito al producto de $\frac{1}{n^3}$ con la expresión (1) se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \text{Lím}_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \text{Lím}_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{3}$$

Stewart (2001) menciona que también se puede demostrar, de forma idéntica, que las sumas inferiores de aproximación también tienden a $\frac{1}{3}$, es decir, $\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$.

A partir de este resultado, se concluye que la medida del área *S* tiende al valor $\frac{1}{3}$, a medida que el número de rectángulos tiende al infinito.

Luego de que se presenta la construcción del cálculo de la medida del área para una función particular, se generaliza para un área *S* mostrada en la figura 22.

Se empieza por subdividir *S* en *n* franjas: $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de anchos iguales como se muestra en la figura 30. El ancho del intervalo $[a;b]$ es *b – a*, de modo que el ancho de cada franja es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, donde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, …, $x_n = b$.

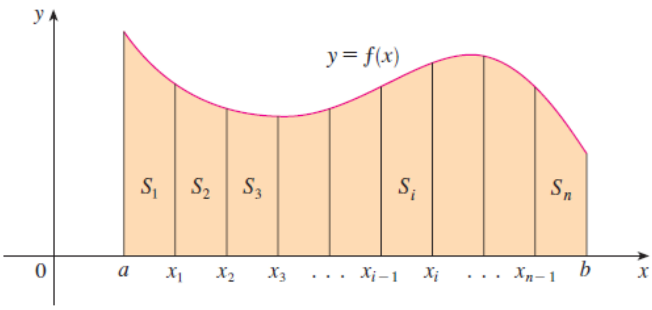


Figura 30. Subdivisión de *S* en *n* franjas.
Fuente: Stewart (2001, p. 371)

La *i-ésima* franja, S_i, se aproxima con un rectángulo de ancho Δx y altura, $f(x_i)$. Este valor de *f* es la imagen de los puntos extremos de la derecha de cada intervalo (ver figura 31).

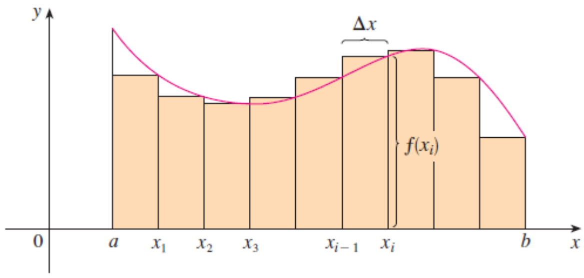


Figura 31. Altura de los rectángulos como imagen de una función.
Fuente: Stewart (2001, p. 371)

Stewart (2001) concluye que la medida del área *S* se aproxima con la suma de las medidas de las áreas de estos rectángulos,

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Esta aproximación va mejorando a medida que se incrementa el número de franjas, es decir, cuando $n \to \infty$. De ese modo, se define la medida del área *A* de *S* (o como se enuncia en el texto área *A* de la región *S*) de la siguiente manera (ver figura 32):

Definición El **área** *A* de la región *S* que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua *f* es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \right].$$

Figura 32. La medida de un área como la suma infinita de medidas de áreas de rectángulos.
Fuente: Stewart (2001, p. 372)

También se menciona que la definición mostrada en la figura 32 siempre existe dado que *f* es continua, y que también se puede probar que se obtiene el mismo valor si se toman los puntos extremos de la izquierda, es decir:

$$A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty}\left[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x \right]$$

Finalmente, se propone otra forma de plantear la medida del área *S*, que consiste en tomar la altura del *i-ésimo* rectángulo como el valor de *f* en cualquier número x_i^* en el *i-ésimo* subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$. A los números $x_1^*, x_1^*, \ldots, x_n^*$ les llama **puntos muestra.**

La figura 33 muestra los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestra diferentes. La expresión más general para la medida del área *S* es

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x$$

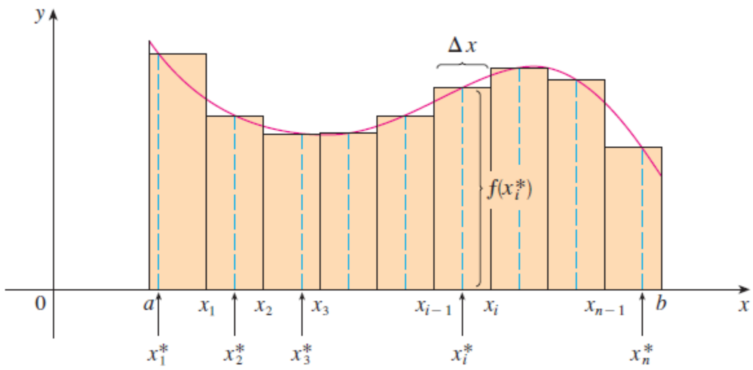


Figura 33. Rectángulos de aproximación usando puntos muestra.
Fuente: Stewart (2001, p. 372).

Destacamos a continuación la manera como explica Stewart (2001) el concepto de medida del área e identificaremos las posibles dificultades que se pueden presentar en su propuesta.

- El concepto de medida del área no es tratado como un tema aparte, sino como el medio para definir a la integral definida como el límite de una suma de infinitos términos.
- El concepto de medida del área se explica a partir de un método de aproximación que implica la suma de las medidas de las áreas de rectángulos inscritos y circunscritos a un área limitada por la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2$ y el eje *x*, desde $x = 0$ a $x = 1$. Creemos que realizar la construcción de la medida del área utilizando una función cuadrática hace que el estudiante piense que se puede realizar sin dificultad el mismo procedimiento para una función diferente, por ejemplo, para $f(x) = e^x$ o para $f(x) = \sqrt{x}$; lo cual no es cierto.
- Se realiza una partición regular de n subintervalos, y se calcula la medida del área de cada uno de los rectángulos. Esta adición de términos se presenta así: $R_n = \dfrac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$, luego se afirma que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En primer lugar, dicha fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos no aparece en el libro, eso significa que posiblemente el estudiante no lo recuerde; y en segundo lugar, si cambiamos de función por una raíz o una

exponencial, pensamos que generaría en el estudiante una dificultad aún mayor al no conocer ninguna fórmula de agrupamiento.

- Se deduce que las aproximaciones (por exceso y por defecto) mejorarán cuando n tienda al infinito, y para eso se aplican los límites a ambas sumas. El resultado es 1/3. A partir de este resultado numérico se define la medida del área ($m(A)$) como el límite de las sumas de las medidas de las áreas de los rectángulos de aproximación: $m(A) = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$. Pensamos que introducir el término infinito y aplicar los límites en el infinito a una suma, pueden generar dificultades en la evolución del aprendizaje del lector.

Para formalizar la idea, Stewart (2001) propone un ejemplo de desarrollo para aplicar lo visto en la construcción de la medida del área. En el ejemplo 3 (ver figura 34) se pide encontrar una expresión para la medida de un área y luego estimar la medida del área para cuatro y diez particiones regulares.

Ejemplo 3. Sea A el área de la región que está debajo de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
(a) Con los puntos extremos derechos, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe este límite.
(b) Estime el área al tomar los puntos muestra como los puntos medios y con cuatro subintervalos; luego con diez subintervalos.

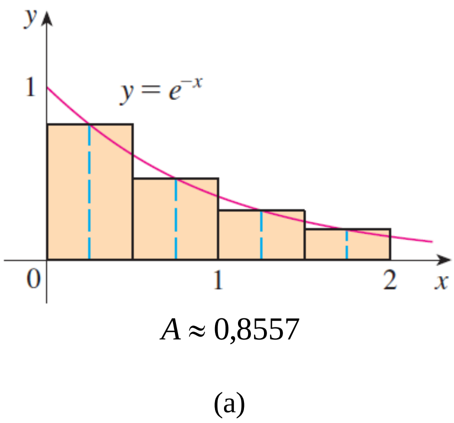
Figura 34. Planteamiento del ejemplo 3
Fuente: Stewart (2001, p. 373)

En el desarrollo se llega a la siguiente expresión para la medida del área de la región:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right]$$

Stewart (2001) señala que es difícil evaluar el siguiente límite a mano, y que en la siguiente sección lo hallarán aplicando un método diferente (refiriéndose al uso de integrales definidas).

Para dar respuesta a la parte (b) del ejemplo 3, se muestra además de los resultados numéricos, la gráfica de la función y los dibujos de los rectángulos según la partición regular realizada (ver figura 35).



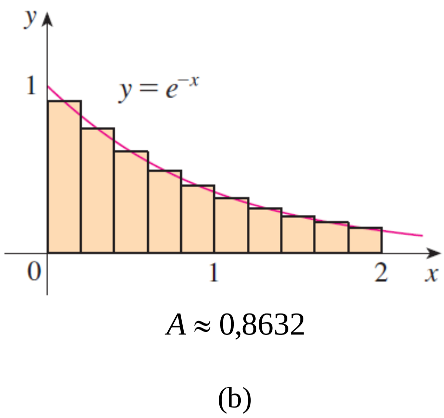


Figura 35. (a) Estimación de la medida del área con cuatro rectángulos, (b) Estimación de la medida del área con diez rectángulos.
Fuente: Stewart (2001, p. 374)

Nosotros creemos que el proceso descrito en el libro es coherente; sin embargo, pensamos que los estudiantes pueden presentar ciertas dificultades en algunas etapas, sobre todo si no se enseñan, previamente, los conceptos de sumatorias, de agrupación de términos y de fórmulas de sumatorias.

En nuestra investigación trabajamos todo el proceso de forma dinámica utilizando la tecnología. No trabajamos solamente con una función, sino con la gráfica de una curva que varía según ciertos parámetros. No queremos que el estudiante realice cálculos complejos, sino que se enfoque en la interpretación de resultados y la validación de sus formulaciones. Además, no pretendemos que el estudiante calcule la medida del área, sino que comprenda la noción de que puede aproximarse tanto como quiera a dicha medida.

3.3 La medida del área en los diferentes niveles educativos a partir del estudio de un texto didáctico

Para analizar la manera de cómo se introduce a los estudiantes la medida del área en los diferentes niveles educativos, hemos tomado en consideración el libro de texto de D'Amore (2009), por nuestro interés en analizar un libro didáctico escrito por uno de los autores que ha realizado diversas publicaciones en lo que se refiere a la didáctica de la matemática.

Cabe señalar que en nuestra investigación nos restringimos al estudio didáctico de la medida de áreas planas, como rectángulos, triángulos, trapecios, u otras figuras no limitadas necesariamente por segmentos de recta; y no a la medida del área de superficies de sólidos tridimensionales (superficies laterales o totales de cubos, prismas, cilindros, conos, entre otros).

Antes de definir el concepto de área debemos tener presente los conceptos de magnitud, cantidad, medida y unidad de medida. En palabras de Gonzales (2014)

> Llamaremos *magnitud* a toda propiedad susceptible de ser cuantificada, por ejemplo, la longitud, la masa, el tiempo, el precio, etc. Llamaremos *cantidad* al resultado de la medida, es decir al par (medida, unidad) donde la *medida* es un número real positivo y la *unidad* viene dada por el sistema de unidades elegido. En adelante escribiremos la medida y a continuación la unidad. Por ejemplo, en lugar de (3, *kg*) escribiremos 3 *kg* y diremos que 3*kg* es una cantidad de magnitud donde 3 es la medida y *kg* es la *unidad de medida*. (p. 45)

En base a estas definiciones diremos que el área es una magnitud en el sentido que puede ser cuantificada. En nuestro trabajo nosotros fijamos la unidad de medida (u^2) y articulamos el área con su medida (número real positivo) bajo un procedimiento de aproximación. Este procedimiento nos permitirá determinar ese número. La figura 36 ilustra las definiciones presentadas.

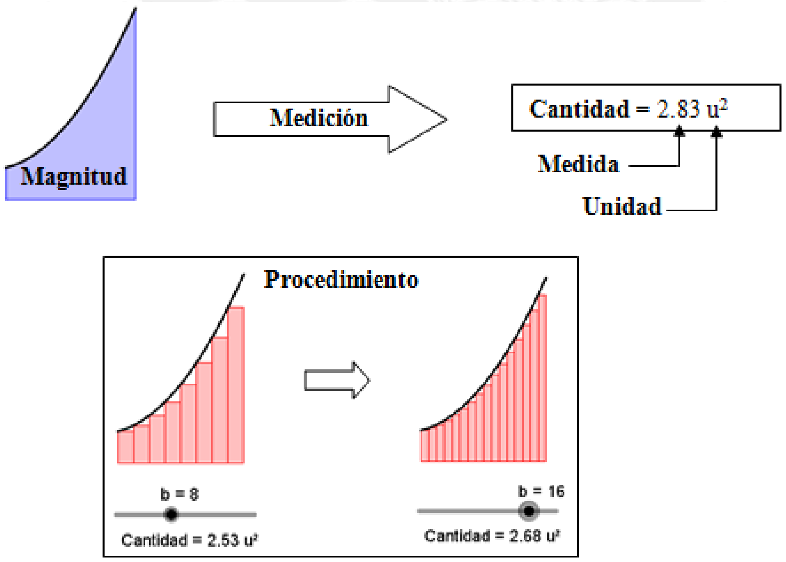


Figura 36. Conceptos asociados al área y su medida
Fuente: Propia.

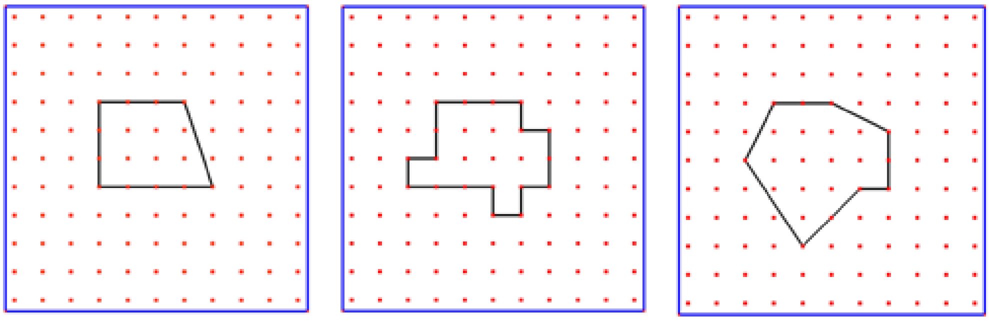
D'Amore (2009) menciona que en geometría existen palabras ambiguas como superficie y área; así, en matemática se debe distinguir que "superficie es una parte del plano, mientras área es la medida bidimensional, es decir un número real acompañado de una oportuna unidad de medida (por ejemplo, respectivamente cm^2 o m^2)" (p. 22). Observamos que D'Amore (2009) define superficie a una parte del plano, en los términos de nuestra definición lo que corresponde a nuestra noción de área. Para el investigador el término área es la medida de dicha superficie, que consta de un número acompañado de una unidad de medida, lo que para nosotros viene a ser la medida del área.

Presentamos a continuación el uso de métodos y de fórmulas para calcular la medida de las áreas en los niveles educativos: primaria, secundaria y universitaria.

Método para medir áreas poligonales: Teorema de Pick

En la etapa escolar primaria, para el cálculo de medidas de áreas poligonales se utilizan cuadrados de superficie unitaria como unidad de medida.

Uno de los métodos empleados para el cálculo de medidas de áreas es el Teorema de Pick. Se considera un plano cuadriculado y se dibuja en él tres polígonos distintos, de modo que los vértices del polígono coincidan con los puntos de la cuadrícula. Se puede observar en cada polígono de la figura 37, que un número determinado de puntos se ubica en los lados (que llamaremos C) y otros, en el interior de cada polígono (que llamaremos I).



Polígono 1 Polígono 2 Polígono 3

Figura 37. Tres diferentes polígonos.
Fuente: D'Amore (2009, p. 36)

Los valores de C e I, para cada uno de estos tres polígonos son los siguientes: Polígono 1, C = 11, I = 6; Polígono 2, C = 18, I = 5; y Polígono 3, C = 10, I = 12.

Si consideramos el cuadrado de la cuadrícula como unidad de medida de superficie, la medida del área de cada polígono sería la siguiente: Polígono 1 = 10,5 cuadrados; Polígono 2 = 13 cuadrados; y Polígono 3 = 16 cuadrados.

De estos ejemplos se desprende que la medida del área de un polígono tiene una relación estrecha con los valores de C e I. Dicha relación fue demostrada, en el año 1899, por Georg Pick: "*El área de cualquier polígono sobre un geoplano está dada por:* $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{2} + \mathrm{I} - 1$" (D'Amore 2009, p. 37).

Medida del área de las figuras elementales

En la etapa escolar secundaria, para el cálculo de medidas de áreas planas se utilizan fórmulas de geometría, y postulados que permiten dividir el área en una o más partes y calcular su medida a partir de la suma de las medidas de las áreas en las cuales fue dividida. Entre las fórmulas enseñadas para calcular medidas de áreas figuran por ejemplo, la del rectángulo, triángulo, trapecio, círculo, entre otros.

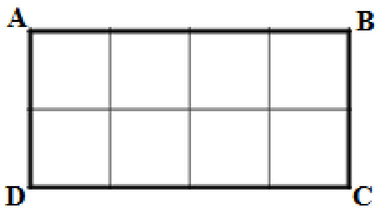
<u>Postulado de la adición sobre áreas</u>

Londoño (2006) muestra el postulado 24.1.2 sobre la adición de medidas de áreas:

> El área de una región o superficie plana es la suma de las áreas de las regiones en las cuales ha sido dividida.
>
> Si la superficie o región plana la denotamos por R y las regiones componentes por R_i, entonces:
>
> Área de $R \equiv a(R) \equiv R = a(R_1) + a(R_2) + ...a(R_n)$ sí y solo sí $R_i \cap R_j = \phi$ o $R_i \cap R_j =$ punto o $R_i \cap R_j =$ segmento, siendo $R = (R_1 \cup R_2 \cup ...R_n)$. (p. 353).

<u>Medida del área del rectángulo</u>

La medida del área de un rectángulo que tiene lados consecutivos a y b es igual a $a \times b$. También se puede escribir como ab. Esto se puede interpretar también como b cuadraditos unitarios, tomados a veces (ver figura 38).



$\overline{\mathrm{AB}} = a$

$\overline{\mathrm{BC}} = b$

Para nuestro ejemplo, a es igual a 4 y b es igual 2. Es decir, se tienen dos cuadraditos unitarios, tomados cuatro veces.

Figura 38. Medida del área de un rectángulo.
Fuente: Adaptado de D'Amore (2009, p. 32)

Como se ve en la figura, hemos trabajado con números naturales para *a* y *b*, pero estos se pueden extender para números reales.

A continuación presentamos las fórmulas para calcular la medida de áreas poligonales que se enseñan a los estudiantes, y cómo se obtienen dichas fórmulas partir del trabajo con rectángulos.

<u>Medida de áreas poligonales</u>

D'Amore (2009) menciona que "cuando se tiene una fórmula para encontrar el área del rectángulo, que intuitivamente se entiende y se acepta, todo el resto es consecuencia de ésta" (p. 32).

En el caso de un cuadrado, *a* y *b* son iguales, por lo tanto la medida del área del cuadrado es igual a a^2.

En el caso de un triángulo, si la base mide *b* y la altura mide *h*, la medida de su área es $\frac{b \times h}{2}$. En el triángulo ABC (ver figura 39), la medida del área de dicho triángulo es la mitad de la medida del área del rectángulo de dimensiones iguales a la medida de BC y AH, siendo AH la altura relativa al lado BC.

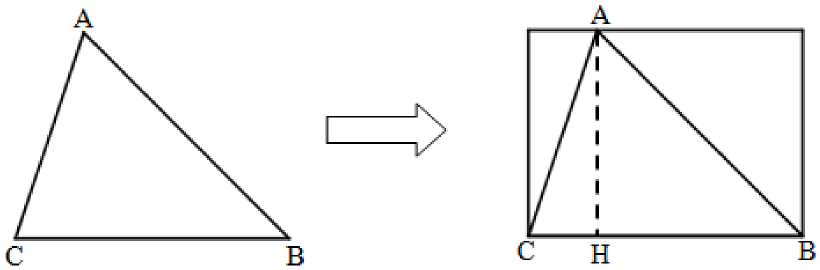


Figura 39. Medida del área de un triángulo.
Fuente: Adaptado de D'Amore (2009, p. 33)

En el caso de un paralelogramo, si la base mide *b* y la altura mide *h*, la medida de su área es $b \times h$. En el paralelogramo ABCD (ver figura 40), se corta un triángulo ABE y se traslada a la ubicación DCF. La medida del área del paralelogramo es igual que la medida del área del rectángulo de dimensiones iguales a las medidas de EF y BH.

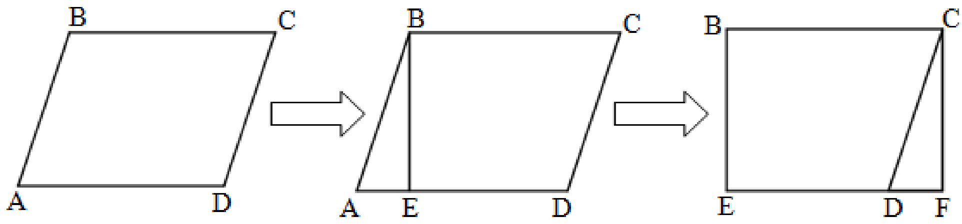


Figura 40. Medida del área de un paralelogramo.
Fuente: Adaptado de D'Amore (2009, p. 33)

En el caso de un rombo, si la diagonal mayor mide *D* y la diagonal menor mide *d*, la medida de su área es $\frac{D \times d}{2}$. En el rombo ABCD (ver figura 41), la medida del área de dicho rombo es igual a la mitad de la medida del área de un rectángulo de dimensiones iguales a las medidas de AC y BD, siendo AC y BD las diagonales del rombo.

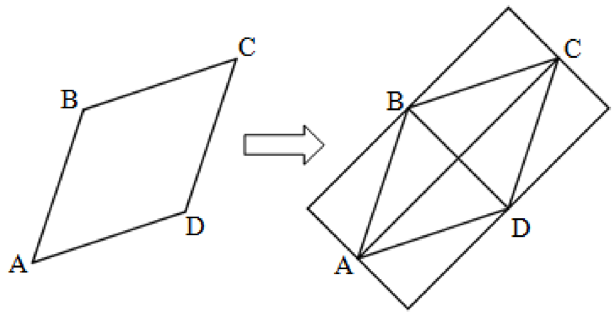


Figura 41. Medida del área de un rombo.
Fuente: Adaptado de D'Amore (2009, p. 34)

En el caso de un trapecio, si la base mayor mide *B*, la base menor mide *b* y su altura mide *h*, la medida de su área es $\frac{(B+b) \times h}{2}$. En el caso de un trapecio ABCD (ver figura 42), se corta el triángulo BCE, donde E es el punto medio del lado CD, y se transporta a la posición DEF. La medida del área del trapecio es igual a la medida del área del triángulo ABF, cuya medida es la mitad de la medida del área del rectángulo de dimensiones iguales a la medida de AF y BH, siendo BH la altura relativa al lado AF

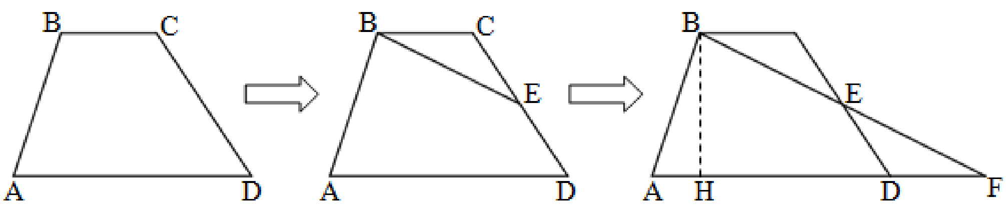


Figura 42. Medida del área de un trapecio.
Fuente: Adaptado de D'Amore (2009, p. 34)

Esta forma de calcular la medida del área de los polígonos tradicionales, se puede extender también para el cálculo de medidas de áreas de polígonos regulares y de polígonos en general. Por lo tanto, a partir de la medida del área del rectángulo, todas las medidas de las áreas de las demás figuras se pueden obtener de forma intuitiva o realizando ciertos cortes específicos. Cabe señalar que las medidas de muchas áreas poligonales se pueden calcular también a partir de la medida de áreas triangulares.

A continuación presentamos la manera cómo se enseña a los estudiantes a aproximar la medida de áreas no poligonales, y cómo se obtiene dicha aproximación a partir del trabajo con rectángulos.

Medida de áreas de figuras no poligonales

En la etapa universitaria, para el cálculo de medidas de áreas planas se utiliza la integral definida. En la mayoría de las carreras, en particular la de Administración, la integral definida se enfoca como una fórmula que permite solucionar el problema del cálculo de medidas de áreas complejas; dejando de lado la etapa procedimental que se logra a partir de aprendizaje de métodos de aproximación.

Llamamos área no poligonal, a un área cuyo contorno presenta curvas. Para algunas de ellas existen fórmulas que permiten calcular la medida de sus áreas, por ejemplo, la medida del área de un círculo de radio r es igual a $\pi \times r^2$, y de ella se desprende el cálculo de la medida de áreas circulares. Pero si el contorno ya no es de una sección de circunferencia, es necesario encontrar instrumentos que nos permitan calcular la medida de dichas áreas siendo estas más complejas.

D'Amore (2009) señala que para hallar la medida de áreas más complejas se tuvo que esperar al análisis, disciplina que se desarrolló, aproximadamente, después del siglo XVIII, bajo la operación llamada "integración".

Cabe aclarar que nosotros no pretendemos en nuestra investigación que el estudiante calcule la medida de las áreas, sino que aprenda un procedimiento que le permita aproximarse a la medida del área tanto como quiera, por ese motivo mostraremos según nuestra conveniencia, el razonamiento utilizado para llegar a la operación de integración.

El procedimiento mostrado por el investigador se muestra a continuación.

Sea el área *S* limitada por la curva $y = f(x)$, el eje *x* del plano cartesiano, y las rectas $x = \mathrm{A}$ y $x = \mathrm{B}$, y se pretende calcular su medida. Para ello dividimos el segmento AB en *n* segmentos iguales y trazamos por los extremos de dichos segmentos rectas paralelas al eje *y* hasta encontrar la curva; con esto generamos franjas (ver figura 43) que al sumar la medida de sus áreas nos permite obtener la medida del área *S*.

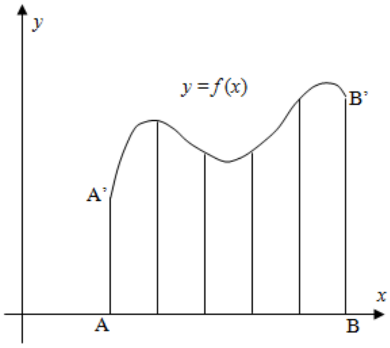


Figura 43. División del área *S* en *n* franjas.
Fuente: D'Amore (2009, p. 39)

Si consideramos rectángulos inscritos a cada franja y calculamos la medida de sus áreas, la suma de todas ellas da una aproximación por defecto a la medida del área *S*; y si consideramos rectángulos circunscritos a cada franja y calculamos la medida de sus áreas, la suma de todas ellas da una aproximación por exceso a la medida del área *S* (ver figura 44).

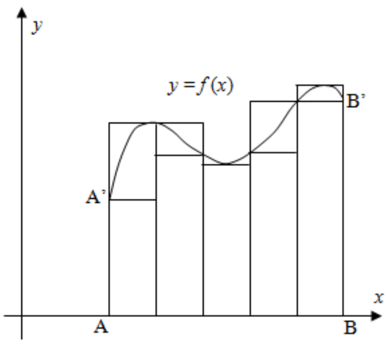


Figura 44. Dibujo de cinco rectángulos inscritos y circunscritos al área *S*.
Fuente: D'Amore (2009, p. 40)

Se postula de forma intuitiva, que si *n* crece las dos aproximaciones son siempre mejores y la diferencia entre ambas disminuye; ambas se aproximan cada vez más a la medida del área *S* (ver figura 45).

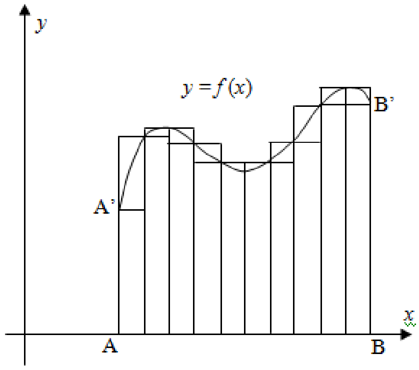


Figura 45. Dibujo de *n* rectángulos inscritos y circunscritos a la región *S*.
Fuente: D'Amore (2009, p. 40)

Del mismo modo el autor señala que, intuitivamente, si *n* crece hacia el infinito los rectángulos inscritos y circunscritos serán tan delgados que sus áreas coinciden y por lo tanto coincide con el área buscada. Entonces, si se suman las medidas de las áreas de todos los rectángulos se encontrará la medida del área deseada.

Esta forma de explicar el cálculo de la medida de un área no poligonal difiere de la presentada en Stewart (2001) en que no se utiliza una función particular, por ende no se trabajan con valores numéricos, no se utiliza el término límite, y busca desarrollar en el estudiante la sobre todo un análisis intuitivo.

En relación a la diferencia entre el cálculo de medidas de áreas poligonales y no poligonales, Olave (2005) señala que enseñar a utilizar fórmulas para calcular la medida del área podría en gran medida obstaculizar la determinación de las medidas de áreas para las cuales los estudiantes no conocen la fórmula. En este sentido, señala que "sería deseable, en la etapa escolar, se pospusiera la presentación de las fórmulas para el cálculo de áreas hasta tanto el estudiante no haya adquirido la noción de área" (p. 159)

Por este motivo, nuestra investigación se centra en buscar que el estudiante articule su concepto de medida del área, como un número asignado a una región obtenido a partir de una fórmula de geometría, y un procedimiento flexible que le permita aproximar dicha medida, mediante rectángulos, tanto como se quiera; esto como paso previo a la definición de integral definida.

Medida del área y los aspectos curriculares de la asignatura de los sujetos de la investigación

Citamos a continuación los temas enseñados a los estudiantes relacionados directamente con el proceso de aprendizaje del objeto matemático área y medida:

- Fundamentos de álgebra
  - Números reales. Cálculo y estimación.
  - Aplicaciones de ecuaciones de primer y segundo grado en una variable.
  - Intervalos y operaciones.
- Gráfica de ecuaciones en el plano
  - El plano cartesiano. Gráfica de ecuaciones.
- Funciones y sus gráficas
  - Función: dominio y rango.
  - Gráfico de funciones.
  - Lectura de gráficas.
  - Funciones básicas y transformaciones gráficas.
  - Función cuadrática y polinómica. Aplicaciones a la optimización.
  - Álgebra (operaciones) de funciones.
- Límites
  - Tendencias: límite de una función en un punto, límites infinitos y límites en el infinito.

El objeto matemático área y medida forma parte de los contenidos de cualquier curso de cálculo diferencial e integral, y su estudio se enfoca, generalmente, como una de las aplicaciones de la herramienta integral definida para el cálculo de medidas de áreas planas. Sin embargo, tratar la medida del área a partir de integrales definidas (en un inicio) no le permite al estudiante utilizar sus conocimientos previos de funciones, aproximaciones, sumas y hasta de límites, para realizar una construcción donde intente dar solución a un problema conocido: “calcular la medida de un área limitada por curvas diferentes a los segmentos de circunferencia”.

El tema “medida del área” se enseña a los estudiantes de una universidad de Lima a partir de la herramienta integral definida. La herramienta se introduce comparando los resultados obtenidos al calcular, manualmente, la medida de un área poligonal en el primer cuadrante limitada por la gráfica de una función lineal y el eje x, en un intervalo dado; y el valor numérico mostrado por la calculadora luego de plantear la integral definida de la función en dicho intervalo.

En el desarrollo de la secuencia de actividades diseñada para nuestra investigación, los estudiantes utilizan diversos artefactos creados por el investigador. En palabras de Chumpitaz (2013), un artefacto

> Puede entenderse como una cosa susceptible de su uso, elaborada para inscribirse en actividades intencionales, es decir, la intencionalidad es causa de su existencia.
>
> Cada artefacto es diseñado para producir una clase de efectos y le corresponden posibilidades de transformaciones de los objetos de la actividad.
>
> Puede ser un medio material como un regla, una chaquitaclla (instrumento agrícola para el labrado utilizado en zonas andinas), un computador, entre otros. También puede ser un medio simbólico como el código Morse, la iconografía inca, el lenguaje algebraico, un gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares, etc. (p. 25).

Según esta definición, los artefactos materiales utilizados por estudiantes son la computadora, los *applets* en GeoGebra, las calculadoras, las actividades entregadas físicamente; así como también, el lenguaje matemático y simbólico, las representaciones gráficas de las funciones, entre otros.

El GeoGebra nos permitirá realizar el proceso de construcción del conocimiento de forma dinámica. No trabajamos solamente con una función, sino con la gráfica de una curva que varía según ciertos parámetros. No queremos que el estudiante realice cálculos complejos, sino que se enfoque en la interpretación de resultados y la validación de sus formulaciones. Además, no pretendemos que el estudiante calcule la medida del área, sino que comprenda la noción de que puede aproximarse tanto como quiera a dicha medida.

A continuación presentamos todo lo concerniente a la experimentación realizada y el análisis de la información recogida por el profesor – investigador.

CAPITULO IV – EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

En este capítulo caracterizamos a los sujetos de la investigación y describimos los aspectos de su selección; describimos para qué fue diseñada cada actividad que conforma la secuencia didáctica y presentamos la división de tareas en ítems y sub-ítems, el tiempo destinado a cada una de ellas, los materiales entregados y las fechas en las cuales se realizaron cada una de las actividades. Presentamos el objetivo de nuestra investigación: articular la concepción que tiene los estudiantes acerca de la medida del área, como un número asociado al área obtenido mediante fórmulas de geometría, y un procedimiento flexible que permita aproximar ese número tanto como se quiera y expresar dicha aproximación como una adición de términos, y como lo hemos disgregado en dos objetivos de aprendizaje, cada uno de ellos relacionado a una situación distinta, asimismo diferenciamos los objetivos secundarios y su relación con los objetivos de aprendizaje. Relatamos el desenvolvimiento de la experimentación, realizamos los análisis a priori y a posteriori de la secuencia de actividades planteada, todo ello por cada sub-ítem, ítem, tarea y actividad, según los aspectos de la Teoría de Situaciones Didácticas y de la metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica, contrastamos dichos análisis para saber si la movilización de variables permitió controlar el comportamiento de los estudiantes y emitimos nuestra conclusiones y recomendaciones sobre el proceso de construcción implementado. Finalmente, realizamos un análisis global de la secuencia didáctica, por cada situación, donde justificamos si los estudiantes alcanzaron o no los objetivos de aprendizaje.

4.1 Caracterización y selección de los sujetos de la investigación

Participaron cuatro estudiantes del curso Matemática Básica de una universidad de Lima. Los estudiantes fueron organizados en dos duplas: la dupla A conformada por los integrantes A1 y A2, y la dupla B por B1 y B2.

Todos los estudiantes contaban con conocimientos previos adquiridos en su etapa escolar en el nivel secundario, acerca de la noción de medida del área a partir de fórmulas de geometría plana y de la aplicación del postulado de división de áreas y adición de sus medidas (ya sea que haya sido enseñado o empleado de forma intuitiva). Del mismo modo contaban con conocimientos previos adquiridos en su etapa universitaria, en el primer ciclo de su carrera, acerca de: intervalos y sus características (división, unión, intersección), funciones y sus características (gráfica, imagen, pre-imagen, dominio, rango, operaciones), y límites (existencia, cálculo de límites, límites infinitos, límites en el infinito).

La selección de los sujetos no fue de forma aleatoria y se realizó entre la semana 8 y 9 de clases, entre las dos primeras semanas de octubre del 2014. En un primer momento, el profesor - investigador le comentó a un grupo aproximado de 20 estudiantes en la primera semana de setiembre, que estaba desarrollando la tesis y que en algún momento del ciclo necesitaría del apoyo de algunos de ellos para el desarrollo de actividades que validen la investigación. Estas actividades se iban a desarrollar dentro de la universidad pero en horario fuera de clase; lo llamó "Apoyo a la investigación" para darle la debida importancia. Notamos que hubo siete estudiantes interesados. La selección realizada por el profesor – investigador fue a partir del promedio de notas acumulado hasta la semana 7 y la participación activa de los estudiantes realizando ejercicios en la pizarra. Se eligió a un estudiante de los siete que tenía la nota más alta, dos con una nota intermedia, y uno con la nota más baja pero aprobada. Las duplas se formaron con los estudiantes de mayor y menor nota, y con los estudiantes de notas intermedias. La idea de separarlos de ese modo ya fue mencionado con anterioridad.

4.2 Descripción de la secuencia didáctica y objetivos de aprendizaje

Llevaremos a cabo la experimentación en un laboratorio de una universidad de Lima. Participará un observador que tiene el grado de Magíster de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. A continuación describimos la secuencia didáctica y los objetivos que esperamos que logren los estudiantes.

La secuencia didáctica consta de cuatro actividades diseñadas considerando el estudio del objeto matemático área y medida, en un contexto de modelación, y puestas en práctica de forma secuencial con el objetivo de analizar el aprendizaje de los estudiantes al trabajar una secuencia didáctica, que los lleve a modificar y a manipular un procedimiento flexible con rectángulos, que les permita adquirir la noción de que pueden aproximarse tanto como quieran a la medida de un área, limitada bajo ciertas condiciones, y expresar dicha aproximación como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos (objetivo general de nuestra investigación).

Este objetivo general lo hemos desagregado en dos objetivos de aprendizaje:

Objetivo de aprendizaje 1. El estudiante aprende a manipular un procedimiento con rectángulos para aproximar la medida de un área limitada por dos rectas paralelas, una recta perpendicular a ellas, y una curva, tanto como quiera.

Para que el estudiante logre alcanzar este objetivo de aprendizaje hemos diseñado la Situación 1, cuyas tareas, ítems y su-ítems se encuentran desagregados a lo largo de la secuencia de actividades y están relacionados con los conceptos de aproximación hacia la medida del área (cuando realicemos el análisis por cada tarea, ítem y sub – ítem indicaremos cuáles de ellos corresponden a esta situación).

Objetivo de aprendizaje 2. El estudiante aprende a expresar la aproximación realizada como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos.

Para que el estudiante logre alcanzar este objetivo de aprendizaje hemos diseñado la Situación 2, cuyas tareas, ítems y su-ítems se encuentran desagregados a lo largo de la secuencia de actividades y están relacionados al planteamiento de una expresión que muestra la adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo (cuando realicemos el análisis por cada tarea, ítem y sub – ítem indicaremos cuáles de ellos corresponden a esta situación).

4.3 Experimentación y análisis de la secuencia didáctica

La experimentación se realizó en cuatro días distintos, uno para cada actividad. Las actividades se trabajaron de tres formas diferentes: individual, grupal y entre grupos, esta última a modo de debate. La idea de hacerlo así fue motivar al estudiante a que exponga sus estrategias y procedimientos, a que trabaje de forma activa, a que justifique sus resultados, a que critique constructivamente el trabajo de otros, etc. No debemos confundir la manera de trabajar las actividades con las fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas por las que queremos que el estudiante pase. Es decir, si un estudiante trabaja de forma individual no implica que solo llegue a una fase de acción, o que cuando trabaje en parejas solo llegue a la fase de formulación. El que alcance cierta fase irá de acuerdo a su respuesta o comportamiento a partir de lo que observa.

Además, los ítems de las actividades están diseñados para asegurarnos de que la mayoría de estudiante alcance alguna de las fases: acción, formulación o validación, descrita por la TSD; pero en un ítem diseñado para que el estudiante alcance la fase de acción, podría ya estar formulando una hipótesis a partir de su observación. Del mismo modo para los ítems diseñados para alcanzar las fases de formulación y validación.

Las fases de la TSD alcanzadas por los estudiantes (para cada situación propuesta) se mostrarán en el análisis por ítem de cada actividad que presentaremos a lo largo de la sección 3 del capítulo 4.

A partir de los resultados obtenidos de los análisis realizados en cada actividad, se efectuará en la sección 4 del capítulo 4 el análisis general de la secuencia didáctica.

A continuación desarrollaremos la descripción, el análisis a priori, el análisis a posteriori y la comparación entre ambos análisis de forma detallada por sub – ítem, ítem y tarea de cada actividad; asimismo, realizaremos observaciones y conclusiones de cada tarea y de toda la actividad.

Es necesario mencionar que en el material impreso dado a los estudiantes, donde se formulan las tareas, ítems y sub – ítems, se utilizó la frase “calcular áreas” para referirnos a calcular la medida del área; esto lo hicimos porque es la manera común y corriente con la que los estudiantes trabajan. Presentimos que si hubiéramos colocado la expresión “medida del área” en las hojas, podría haber generado una distracción que queríamos evitar, ya que los estudiantes no están acostumbrados a utilizar dichos términos.

4.3.1 Descripción, objetivos, variables didácticas, fases asociadas de la TSD de cada ítem y de la actividad 1

La actividad 1 propuesta en nuestra investigación fue la siguiente:

Actividad 1: División del terreno

El señor Martínez tiene en su casa un terreno disponible de 4x6 m^2 y quiere usarlo como área de esparcimiento. Por ello, planea colocar una terraza y un jardín, pero no sabe qué modelo elegir de los cuatro modelos que le ha propuesto su esposa (ver figura 1), hechos a partir de segmentos de rectas y/o circunferencias.

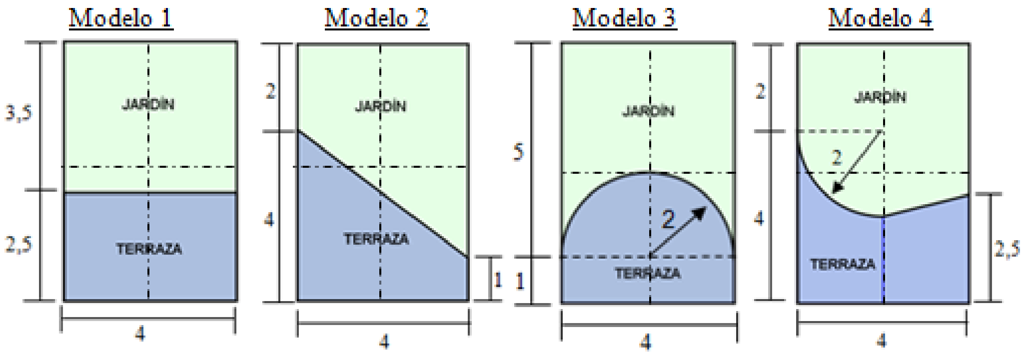


Figura 1. Modelo de terrazas

1. Uno de los criterios que tomará el señor Martínez para decidir qué modelo elegir es que se cumpla la siguiente proporción: $0{,}5 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 0{,}67$.

   a. Describa qué procedimiento le permitiría calcular el área de la terraza en cada uno de los modelos.

   b. Según el criterio dado, ¿qué modelo de terraza elegiría el señor Martínez? Justifique.

2. Al señor Martínez le han presentado dos nuevos modelos de terrazas (ver figura 2), hechos a partir curvas que no son secciones de circunferencia.

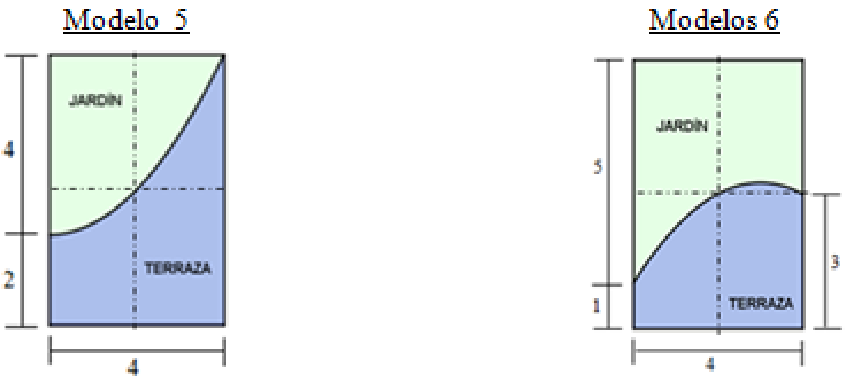


Figura 2. Nuevos modelo de terrazas

a. Describa qué procedimiento le permitiría aproximar el área de la terraza en cada uno de los modelos.

b. A partir del procedimiento descrito en la pregunta 2 (a), calcule el área aproximada de la terraza e indique cuál de los dos modelos elegiría el señor Martínez (Utilice el mismo criterio: $0{,}5 \leq \frac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 0{,}67$). Justifique.

c. ¿Podría calcular el área de la terraza para ambos casos? Si su respuesta es afirmativa, dé el valor numérico del área; de lo contrario, explique por qué no los podría calcular.

La actividad 1 está diseñada para que el estudiante utilice sus conocimientos previos sobre la noción de área y medida, de fórmulas de geometría y la noción de aproximación, y se vea en la necesidad de aprender un procedimiento que le permita aproximar la medida del área porque no cuenta con las herramientas necesarias para hacerlo.

Es pertinente aclarar que las tareas, ítems y sub – ítems de esta actividad no forman parte de la situación 2. En esta actividad los estudiantes todavía no tienen contacto con el método de aproximación con rectángulos, por ese motivo no tienen que expresar una aproximación como una adición de las medidas de las áreas de rectángulos.

Las tareas, ítems y sub – ítems de esta actividad sí forman parte de la situación 1 porque generan en el estudiante la necesidad de aprender un procedimiento que les permita aproximarse a la medida de áreas no poligonales, y algunas de las tareas están relacionadas a la idea intuitiva de aproximación.

En esta actividad el estudiante interactuará con el *medio* propuesto por el profesor – investigador (el profesor, su pareja de dupla, la otra pareja y las tareas de la actividad impresa). Como en esta actividad no se ha planificado un objetivo de aprendizaje y solo se va a trabajar a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, las tareas se han diseñado para que ellos se ubiquen en la *fase de acción* propuesta en la TSD para la **situación 1**.

En esta actividad los estudiantes trabajan con la variable didáctica “borde superior de la región”. La tabla 1 muestra qué valores toma dicha variable y en qué tareas en particular se trabaja directamente con ella para la situación 1.

Tabla 1. Variables didácticas trabajadas en la situación 1 asociadas a la actividad 1.

Variable didáctica	Valores	Tareas
Borde superior de la región	▪ Formas conocidas: - Segmento de recta. - Arco de circunferencia (semicircunferencia o un cuarto de circunferencia). - Combinación de los dos anteriores. ▪ Formas desconocidas: - Curvas diferentes a segmentos de rectas y arcos de circunferencia.	1, 2 y 3

Forma de trabajo de la actividad 1

La experiencia se llevará a cabo de la siguiente manera:

- El tiempo estimado es de dos horas, sin embargo podría ser mayor debido a que es la primera actividad que se realiza.
- Se trabajará en un aula de una universidad de Lima.
- Se trabajará con dos duplas: A y B. La dupla A tiene por integrantes a A1 y a A2; la dupla B tiene por integrantes a B1 y a B2.
- Al inicio de la sesión se entregará a cada estudiante el documento físico de la actividad a desarrollar y se explicará la manera en la que se desarrollará la sesión (comportamientos de los estudiantes y del profesor a lo largo de la sesión, es decir, aspectos del *contrato didáctico*).
- Las tareas 1 y 2 se trabajarán de la siguiente manera: primero se trabajarán de forma individual por un tiempo (de esa forma observamos si cada estudiante tiene una solución distinta para cada tarea); y luego, por otro lapso de tiempo se trabajarán en parejas para comparar resultados y opiniones sobre los resultados. Finalmente, se procederá a una discusión grupal, donde se espera aclarar ciertos resultados (esto se verá en el análisis que se realizará por tarea). La tarea 3 se trabajará solo en parejas a modo de observar cómo transmiten la información entre ellos.

A continuación realizaremos la descripción, el análisis a priori, el análisis a posteriori y la comparación entre ambos análisis de forma detallada por ítem de la actividad 1; asimismo, realizaremos observaciones y conclusiones relacionadas a dicha actividad.

ACTIVIDAD 1: DIVISIÓN DEL TERRENO

El señor Martínez tiene en su casa un terreno disponible de 4x6 m^2 y quiere usarlo como área de esparcimiento. Por ello, planea colocar una terraza y un jardín, pero no sabe qué modelo elegir de los cuatro modelos que le ha propuesto su esposa (ver figura 44), hechos a partir de segmentos de rectas y/o circunferencias.

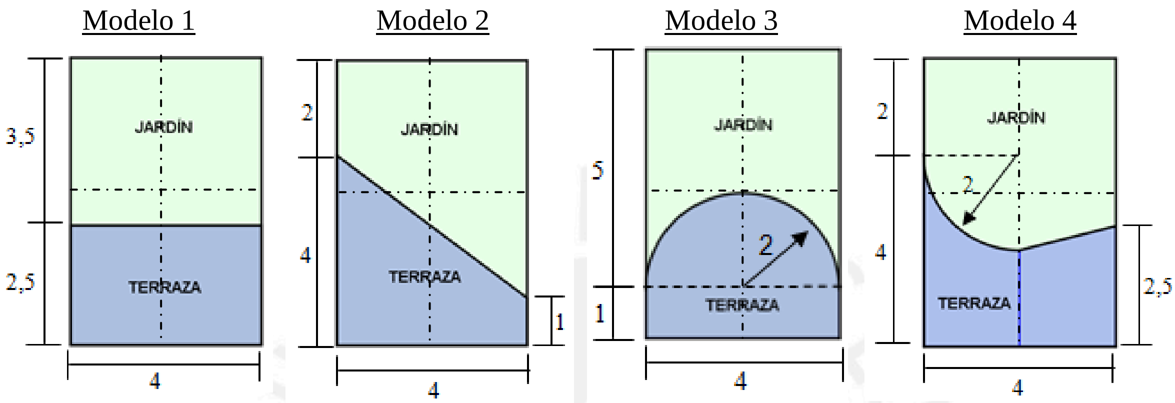


Figura 46. Modelos de terraza

1. Uno de los criterios que tomará el señor Martínez para decidir qué modelo elegir es que se cumpla la siguiente proporción: $0{,}5 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 0{,}67$.

En esta tarea, los estudiantes ya trabajan con la variable "borde superior de la región" para segmentos de recta y/o arcos de circunferencia.

Como se quiere observar la manera en que el estudiante determina la medida del área de la terraza y luego ver qué estrategia utiliza para obtener la medida del área del jardín, planteamos una proporción que sea razonable entre ambas medidas y un criterio que le permita al estudiante escoger entre alguno de los cuatro modelos. El trabajo con proporciones se volverá a ver en la actividad 2 pero allí el estudiante utilizará un *applet* diseñado en GeoGebra para elegir el borde superior de la terraza.

El objetivo de esta tarea es evidenciar que el estudiante utiliza figuras geométricas y fórmulas de geometría para calcular la medida de áreas y que de ser necesario realiza divisiones al área para calcular las medidas de forma independiente.

a. Describa un procedimiento que le permita calcular el área de la terraza para cada uno de los modelos.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajarán de forma individual porque pretendemos obtener una muestra de los distintos procedimientos que realizarían los estudiantes, relacionados al cálculo de medidas de áreas de figuras conocidas.

Se pretende justificar que los estudiantes conocen un procedimiento que les permita calcular la medida del área, siempre y cuando estén limitadas por segmentos de recta y/o arcos de circunferencia. También se pretende observar cómo reaccionan los estudiantes cuando el borde superior de la región se hace más complejo, sin llegar a ser una curva desconocida por ellos.

Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para describir el procedimiento que utilizarían para calcular la medida del área de la terraza en los tres primeros modelos; sin embargo, pensamos que presentarán dificultades en el modelo 4 debido a la forma del borde superior de la región.

Es probable que utilicen fórmulas de geometría plana (para calcular la medida de las áreas de rectángulos, de triángulos, de trapecios y de secciones circulares) y, en algunos de los modelos, dividan la terraza en dos o más partes, para luego sumar sus respectivas medidas de área.

Es probable que los estudiantes pregunten si tienen que calcular la medida de las áreas de los cuatro modelos de terraza; en ese caso, el profesor – investigador responderá con la siguiente pregunta: ¿les piden en el ítem que calculen la medida del área de las terrazas?

Pensamos que podrían realizar los siguientes procedimientos:

Modelo 1: Utilizarán la fórmula para hallar la medida del área del rectángulo.

Modelo 2: Podrían utilizar la fórmula para hallar la medida del área de un trapecio, o podrían dividir el área en una región triangular y en otra rectangular para luego sumar la medida de sus áreas. Pensamos que ambas tienen la misma probabilidad de ocurrencia pero se inclinarán por la segunda ya que es posible que no recuerden la fórmula para hallar la medida del área de un trapecio.

Modelo 3: Dividirán la terraza en una región rectangular y en otra semicircular; luego hallarán las respectivas medidas de sus áreas a partir de fórmulas y las sumarán.

<u>Modelo 4</u>: Podrían dividir el área en una región trapezoidal y en una rectangular seccionándole un cuarto de círculo (ver figura 47, opción 1), o podrían dividir el área en una región cuadrangular, una triangular y una rectangular seccionándole un cuarto de círculo (ver figura 47, opción 2). En cualquiera de los dos casos hallarán la medida de las áreas de cada parte y las sumarán para obtener la medida del área total. Pensamos que los estudiantes elegirán el primer procedimiento descrito, aunque es probable que presenten dificultades para hacerlo y hasta haya estudiantes que no logren describir un procedimiento.

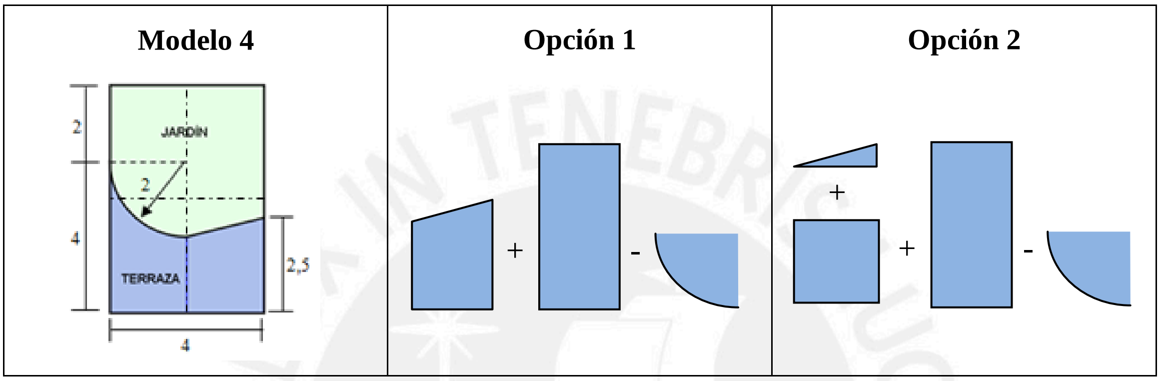


Figura 47. Descomposición de la terraza del Modelo 4 en figuras geométricas.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* de la situación 1 al elegir y describir un procedimiento de cálculo.

Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el ítem, A2 y B1 preguntaron si tenían que calcular la medida de las áreas de las terrazas; el profesor – investigador les preguntó: ¿Les piden en el ítem que calculen la medida del área de las terrazas? Los estudiantes corroboraron lo que ya sabían y siguieron trabajando.

A continuación presentamos los procedimientos para calcular la medida del área de cada modelo de terraza presentados por los estudiantes:

<u>Modelo 1</u>: El resultado dado por los estudiantes fue previsto por el profesor investigador. Todos los estudiantes coincidieron en que calcularían la medida del área de la terraza utilizando la fórmula que calcula la medida del área de un rectángulo.

<u>Modelo 2</u>: Del mismo modo que en el modelo 1, se previó el resultado que darían los estudiantes. Dos de los estudiantes: A1 y B2, describieron que utilizarían la fórmula para calcular la medida del área del trapecio (A1 colocó $(B+b)\times h/2$; B2 colocó

$(B \times b) \times h / 2$); A2 y B1 describieron que dividirían la región en un triángulo y un rectángulo trazando una línea adicional, y luego hallarían las respectivas medidas sus áreas con fórmulas.

Observamos que B2 cometió un error al plantear la fórmula para hallar la medida del área de un trapecio. No hubo intervención del profesor – investigador en ese caso porque en el siguiente ítem iban a trabajar en duplas y se esperaba que de la discusión que se realice, logren solucionar los inconvenientes por ellos mismos.

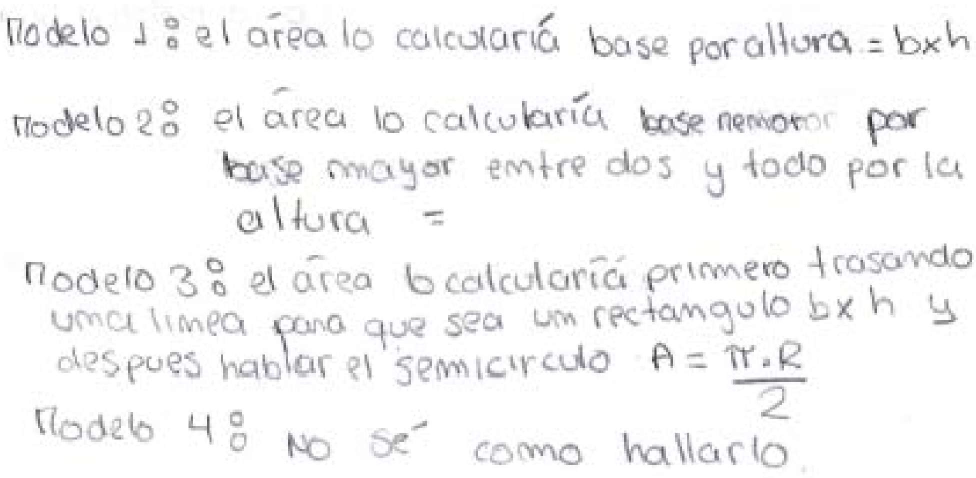
Modelo 3: El resultado dado por los estudiantes fue previsto por el profesor investigador. Todos los estudiantes coincidieron en que calcularían la medida del área de la terraza dividiéndola en un rectángulo y en un semicírculo sumando las respectivas medidas de sus áreas (A1 colocó en vez de semicírculo, de dividiría entre 2 la medida del área de una circunferencia)

Modelo 4: Se previó que los estudiantes presentarían dificultades para describir un procedimiento que calcule la medida del área de la terraza, sin embargo, de los resultados obtenidos observamos que los procedimientos de los estudiantes, ya sean completos o incompletos fueron previstos por el profesor – investigador. A1 y A2 realizaron una descripción incompleta, solo indicaron que a la medida del área de un rectángulo de 2×4 m^2 le restarían la medida del área de un cuarto de círculo. B2 escribió en el material físico: “no sé como hallarlo”, pero le explicó al profesor – investigador, señalando el gráfico con su dedo, que debería sumar la medida de las áreas de las dos regiones (de un trapecio y de un rectángulo sin un cuarto de círculo). El profesor – investigador le indicó que lo que había dicho lo escriba en la hoja pero el estudiante no lo hizo.

La figura 48 muestra la respuesta dada por B2. Observamos en esta respuesta que el estudiante no recuerda algunas fórmulas de geometría y se le dificulta expresar con palabras un procedimiento de división del área para poder calcular su medida.

Corroboramos que los estudiantes relacionan las áreas con figuras geométricas (rectángulos, triángulos, trapecios, semicírculo, un cuarto de círculo); además realizan trazos adicionales para buscar dichas formas.

Observamos que a medida que el borde superior de una región (variable didáctica) se vuelve más complejo, tres de los cuatro estudiantes presentaron dificultades para describir correctamente un procedimiento que les permita calcular la medida del área.


Modelo 1: el área lo calcularía base por altura = bxh

Modelo 2: el área lo calcularía base menor por base mayor entre dos y todo por la altura =

Modelo 3: el área lo calcularía primero trasando una linea para que sea un rectangulo bxh y despues hablar el semicirculo $A = \frac{\pi . R}{2}$

Modelo 4: No sé como hallarlo.

Figura 48. Respuesta al ítem 1a dado por A2

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de acción* de la situación 1 porque eligieron y describieron, de forma escrita u oral, un procedimiento de cálculo.

b. Según el criterio dado, ¿qué modelo de terraza elegiría el señor Martínez? Justifique.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajarán de manera individual por un lapso de tiempo, y luego comunicarán a sus respectivas parejas sus procedimientos, estrategias y cálculos para corroborar los resultados y los diferentes planteamientos realizados. La idea de hacerlo de esta manera es observar cómo hallan las medidas de las áreas por ellos mismos, cómo comparan los resultados obtenidos y cómo discuten si estos son distintos.

La pregunta propuesta en el ítem no es directa ya que tiene que volver a leer y ubicar en la lectura cuál es el criterio que le permitirá al señor Martínez elegir un modelo de terraza. Por este motivo se espera que los estudiantes pregunten si solo deben calcular la medida del área de la terraza (ya que posiblemente lo relacionen con el ítem anterior); si esto ocurre el profesor – investigador les preguntará: ¿cuál es el criterio que le permite al señor Martínez elegir un modelo de terraza?

Como los estudiantes tienen que calcular la medida de dos áreas diferentes, de la terraza y del jardín, se espera que para calcular la medida del área de la terraza usen fórmulas de geometría, y para calcular la medida del área del jardín realicen la diferencia entre la medida del área del patio (igual a 24 m^2) y la de la terraza. Es probable también que algunos estudiantes intenten calcular la medida del área del jardín usando fórmulas de geometría o divisiones del área total.

Se espera que los estudiantes calculen correctamente y sin dificultad la proporción entre la medida del área de la terraza y la medida del área del jardín, que es la condición del criterio dado, para los modelos 1 y 2 porque el borde superior de la terraza es un segmento de recta. Para el cálculo de la proporción en el modelo 3, pensamos que la dificultad podría aparecer si no recuerdan la fórmula que permite calcular la medida del área de un semicírculo, ya que el borde superior no es un segmento de recta sino una semicircunferencia.

Se espera que los estudiantes presenten dificultades para calcular la proporción en el modelo 4 debido a la forma del borde superior de la región y por las diversas divisiones de la terraza que deberán hacer. Es posible que no recuerden la fórmula para calcular la medida del área de un cuarto de círculo.

Para efectos de expresar lo que se desea calcular llamaremos P a la proporción entre la medida del área de la terraza $m(A_T)$ y la medida del área del jardín $m(A_J)$. Se espera que los estudiantes realicen los siguientes cálculos para cada uno de los modelos:

Modelo 1: $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{2{,}5 \times 4}{24 - 10} = 0{,}71$ o $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{2{,}5 \times 4}{3{,}5 \times 4} = 0{,}71$. Para este modelo es probable que los estudiantes se inclinen por el segundo planteamiento.

Modelo 2: $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{1 \times 4 + (3 \times 4)/2}{24 - 10} = 0{,}71$, $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{(1+4) \times 4/2}{24 - 10} = 0{,}71$, $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{1 \times 4 + (3 \times 4)/2}{(2+5) \times 4/2} = 0{,}71$ o $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{(1+4) \times 4/2}{(2+5) \times 4/2} = 0{,}71$. Para este modelo es probable que los estudiantes se inclinen por el primer planteamiento o por el último.

Modelo 3: $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{1 \times 4 + (\pi \times 2^2)/2}{24 - 10{,}28} = 0{,}75$. Es probable que algunos estudiantes no recuerden la fórmula para calcular la medida del área de un semicírculo. En ese caso, podrían plantear erróneamente lo siguiente: $m(A_{semicírculo}) = (\pi \times 2)/2$ o $m(A_{semicírculo}) = (2 \times \pi \times 2)/2$.

Modelo 4: $P = \frac{m(A_T)}{m(A_J)} = \frac{2\times 2 + (2\times 0{,}5)/2 + 2\times 4 - (\pi \times 2^2)/4}{24-9{,}36} = 0{,}64$. Es probable que algunos estudiantes no recuerden la fórmula para calcular la medida del área de un semicírculo. En ese caso, podrían plantear erróneamente lo siguiente: $m(A_{semicírculo}) = (\pi \times 2)/4$ o $m(A_{semicírculo}) = (2\times \pi \times 2)/4$. Para este modelo se espera que algunos estudiantes no realicen ningún cálculo e indiquen que no saben cómo hacerlo.

Luego de un tiempo razonable y de observar el avance de los estudiantes, se procederá a trabajar en duplas. Se espera que en parejas revisen los resultados y procedimientos, que corrijan los errores si es que los hay, que expliquen los procedimientos de cálculo y las fórmulas empleadas, todo ello a fin de que los estudiantes por ellos mismos recuerden y refuercen sus conocimientos previos.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* al relacionar una o más fórmulas de geometría con un tipo específico de área, y que calculen su medida.

Descripción y análisis a posteriori

Observamos que los estudiantes se demoraron en interpretar el ítem. No sabían qué tenían que hacer hasta que B1 preguntó si tenían que hallar la medida de las áreas de las terrazas; el profesor – investigador le devolvió la siguiente pregunta: ¿cuál es el criterio que le permitirá al señor Martínez elegir un modelo de terraza? En ese momento, los estudiantes regresaron a la primera página del material y le prestaron atención a la proporción planteada.

A continuación presentamos los procedimientos para calcular la proporción entre las medida de las área de la terraza y del jardín presentados por los estudiantes.

Modelo1: El resultado dado por los estudiantes fue previsto por el profesor investigador. Todos los estudiantes obtuvieron la proporción correcta: un estudiante planteó la proporción así $P = \frac{m(A_T)}{m(A_J)} = \frac{2{,}5\times 4}{24-10} = 0{,}71$, mientras que el resto lo planteó así $P = \frac{m(A_T)}{m(A_J)} = \frac{2{,}5\times 4}{3{,}5\times 4} = 0{,}71$.

Modelo 2: El resultado dado por los estudiantes fue previsto por el profesor investigador; hubo algunos errores y olvido de fórmulas pero se aclararon al trabajar en parejas. Solo A1 y B1 llegaron a la proporción correcta: A1 planteó $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{(1+4)\times 4/2}{(2+5)\times 4/2} = 0{,}71$ y B1 planteó $P = \dfrac{m(A_T)}{m(A_J)} = \dfrac{1\times 4 + (3\times 4)/2}{24-10} = 0{,}71$.

A2 obtuvo que la medida del área de la terraza es 10 m^2 pero colocó 20 m^2 (siendo 14 m^2) como medida del área del jardín; A1 le hizo ver a A2 su error, le dijo que en el modelo 2 la medida del área del jardín era 14 m^2 (lo justificó mostrándole su fórmula). B2 planteó mal la fórmula para calcular la medida del área de un trapecio: $\dfrac{(1\times 4)}{2}\times 4$; B1 le hizo ver a B2 que su proporción para el modelo 2 no era correcta, le dijo que la medida del área de la terraza salía 10 m^2 (lo justificó mostrándole su procedimiento de división en dos regiones: una triangular y una rectangular); B2 afirmó “seguro que mi fórmula no está bien”

<u>Modelo 3</u>: El resultado dado por los estudiantes no fue previsto por el profesor investigador. Ninguno de los estudiantes calculó correctamente la proporción. A1 y B2 calcularon correctamente la medida del área de la terraza, pero no la medida del área del jardín. Intentaron calcularla con fórmulas en vez de restarle a 24 m^2 (medida del área del patio) la medida del área de la terraza. A2 colocó un valor numérico errado para la medida del área del semicírculo y no escribió qué fórmula utilizó. B1 no lo intentó porque no recordaba la fórmula para calcular la medida del área de un semicírculo.

Al momento de trabajar en duplas A1 y B2 comunicaron a sus compañeros de dupla cuál era la fórmula para calcular la medida del área de un semicírculo. Luego, la dupla A no avanzó en el cálculo porque no sabían cómo hallar la medida del área del jardín; sin embargo, B1 fue el único estudiante que comentó dentro de su dupla que para hallar la medida del área del jardín habría que realizar la diferencia entre las medidas del área del patio y de la terraza. El profesor – investigador realizó una discusión entre grupos y le cedió la palabra a B1 para que explicara cómo halló la medida del área del jardín.

La figura 49 muestra la respuesta dada por A1.

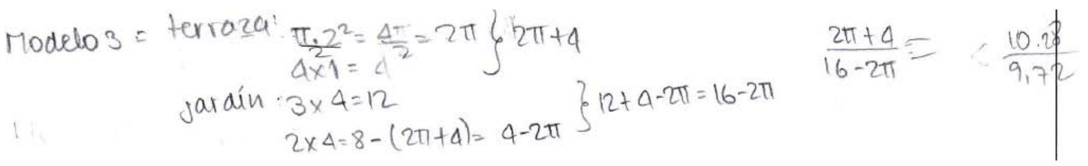


Figura 49. Respuesta al ítem 1b Modelo 3 dada por A1

<u>Modelo 4</u>: Se previó que los estudiantes presentarían dificultades para realizar el cálculo de la medida del área de la terraza. A2, B1 y B2 no supieron cómo calcular la medida del área de la terraza por dos motivos: no recordaban la fórmula para calcular la medida del área de un cuarto de círculo y no sabían cómo dividir el área para usar las fórmulas que sí conocían; estos tres estudiantes no realizaron ningún cálculo. A1 determinó correctamente la proporción. A1 le explicó su procedimiento a A2 y este comentó: "si hubiera sabido la fórmula para calcular el área del círculo, hubiera calculado (la proporción) el modelo 4". El profesor – investigador conversó con los integrantes de la dupla B para que le comentaran oralmente cómo hallarían la medida del área de la terraza, ellos indicaron que tenían que dividir la región pero no sabían por dónde empezar, que eran muchos cálculos.

En la discusión entre parejas, A1 le explicó a la dupla B su procedimiento y resultado.

La figura 50 muestra la respuesta dada por A1. Presentamos esta respuesta porque fue el único estudiante que la resolvió.

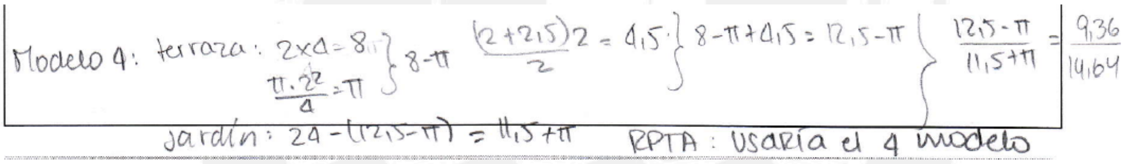


Figura 50. Respuesta al ítem 1b dada por A1

Corroboramos que los estudiantes recordaron con facilidad las fórmulas para hallar la medida de las áreas de un rectángulo, de un triángulo y de un trapecio (aunque un estudiante planteó mal la fórmula para hallar la medida del área de un trapecio); pero solo dos estudiantes recordaron la fórmula para calcular la medida del área de un semicírculo y de un cuarto de círculo.

El desarrollo de la tarea 1 empezó de forma individual con la intención de observar qué conocimientos previos de fórmulas y de procedimientos de cálculo de medidas de áreas presentaban los estudiantes. El profesor – investigador no tuvo la necesidad de intervenir cuando se presentaron errores u olvidos de fórmulas porque se esperaba que entre ellos lo solucionaran en la parte de parejas (y así sucedió). El profesor – investigador intervino cuando los estudiantes no supieron qué procedimiento de división del área realizar, sin embargo esperó a que en la discusión grupal se aclaren las dificultades. En la discusión entre parejas donde un estudiante explicaba su procedimiento se notó que el estudiante que exponía se sintió motivado al explicar a sus compañeros un procedimiento que el resto no sabía cómo realizar.

Observamos que a medida que el borde superior de la región se hace más complejo, la medida del área también se hace más complicada y trabajosa, ya que la dificultad que también se hizo presente fue la de descomponer el área en dos o más partes para calcular la medida de sus área de forma individual.

Reconocemos que los estudiantes recordaron por ellos mismos las fórmulas de geometría plana que vieron en su etapa escolar, y conocieron diferentes maneras de dividir las regiones para formar figuras geométricas y obtener la medida de sus áreas.

Podemos afirmar que los estudiantes se ubicaron en la *fase de acción* porque relacionaron una o más fórmulas de geometría para cada tipo región, y por calcular la proporción.

2. Al señor Martínez le han presentado dos nuevos modelos de terrazas (ver figura 51), hechos a partir de segmentos de rectas y curvas que no son arcos de circunferencia.

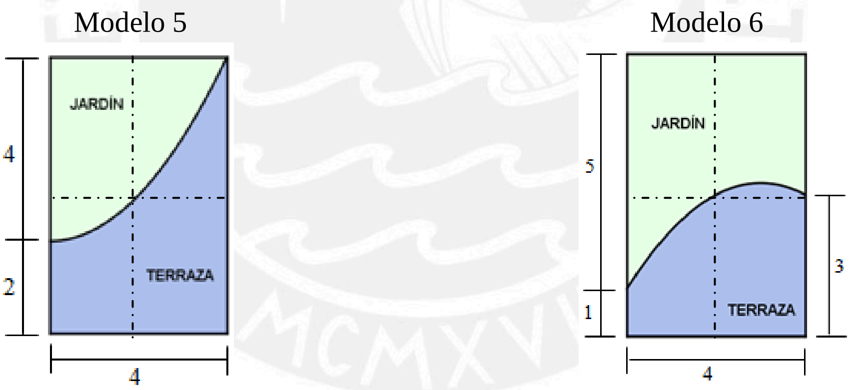


Figura 51. Nuevos modelos de terrazas.

En esta tarea cambiamos la variable “borde superior de la región” para curvas diferentes a segmentos de recta o arcos de circunferencia. Pensamos que este cambio generará cierta inestabilidad en los estudiantes porque no podrán calcular la medida de las áreas de las terrazas al no conocer ninguna fórmula que les permita hacerlo.

Los objetivos de esta tarea son evidenciar que los estudiantes emplean figuras geométricas y fórmulas de geometría para aproximar la medida del área y que los estudiantes reconozcan la necesidad de aprender un procedimiento que les permita aproximar la medida del área.

a. Describa un procedimiento que le permita aproximar el área de la terraza para cada uno de los modelos.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajarán de forma individual porque pretendemos obtener una muestra de cómo conciben la idea de aproximación de forma gráfica, ya que pensamos que los estudiantes presentan algún concepto o idea sobre la palabra aproximación.

Se pretende justificar que los estudiantes no conocen un procedimiento que les permita aproximar la medida de un área no poligonal.

Se espera que los estudiantes presenten dificultades para dar una respuesta, probablemente por alguna de las siguientes razones: no han utilizado el término “aproximar” bajo el contexto planteado; no recuerden o no sepan cómo aproximar la medida del área a partir de las medidas de las áreas de figuras geométricas; si dibujan figuras geométricas, tal vez no sepan si esa aproximación es la mejor; quizás no sepan si es correcto dibujar figuras geométricas que se salgan de la región sombreada, entre otras dificultades que se pueden presentar.

Se espera que los estudiantes intenten aproximar la medida del área de la terraza a partir de la suma de las medidas de las áreas de figuras geométricas conocidas, tales como rectángulos, triángulos, trapecios o regiones circulares. Es probable que se les dificulte la redacción y solo dibujen trazos adicionales en la figura como respuesta.

Es probable que los estudiantes traten de cubrir la mayor parte de la terraza con figuras geométricas cada vez más pequeñas; sin embargo, al no saber cómo calcularían la medida de sus áreas posiblemente no lo den como respuesta.

La figura 52 muestra algunos procedimientos que creemos podrían realizar los estudiantes.

Solo hemos realizado tres aproximaciones por cada modelo pero sabemos que hay muchas más; lo que será común a todos es el uso de figuras geométricas.

Modelo 5: Pensamos que los estudiantes aproximarán la medida del área por defecto (las dos primera figuras) o por exceso (última figura). Es probable también que el estudiante aproxime la medida del área del jardín con la medida del área de un cuarto de círculo de radio 4 m.

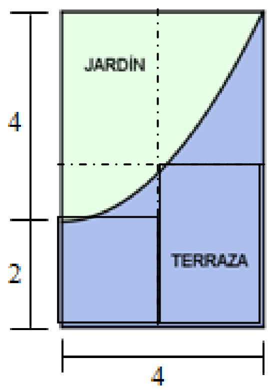
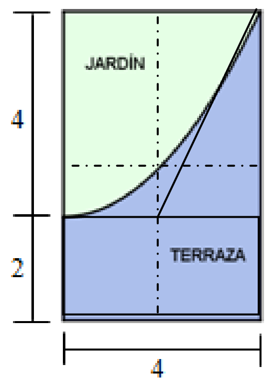
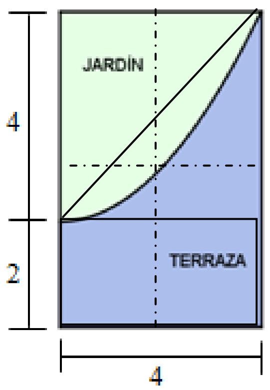
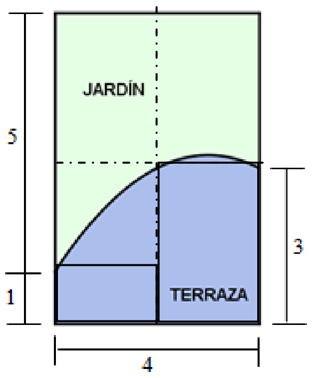
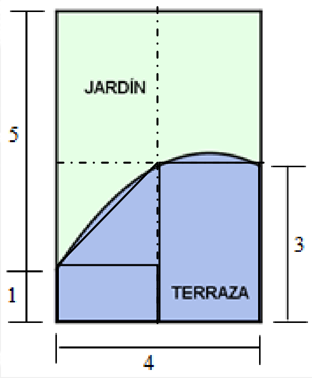
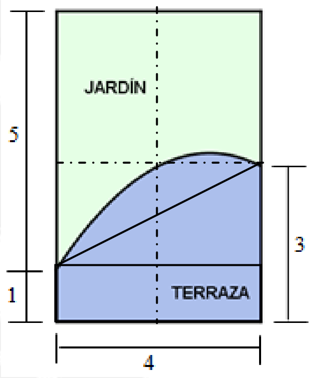
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Utilizando dos rectángulos y sumando la medida de sus áreas.</td>
<td>Utilizando un rectángulo y un triángulo y sumando la medida de sus áreas.</td>
<td>Utilizando un rectángulo y un triángulo y sumando la medida de sus áreas.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3"><u>Modelo 6</u>: Pensamos que los estudiantes aproximarán la medida del área por defecto.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Utilizando dos rectángulos y sumando la medida de sus áreas.</td>
<td>Utilizando dos rectángulos y un triángulo, y sumando la medida de sus áreas.</td>
<td>Utilizando un rectángulo y un triángulo, y sumando la medida de sus áreas.</td>
</tr>
</table>

Figura 52. Posibles trazos adicionales para aproximar la medida del área de las terrazas.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* al optar por algún procedimiento que les permita aproximar la medida del área.

Descripción y análisis a posteriori

Luego de que los estudiantes leyeron el texto, no realizaron ningún trazo ni escribieron nada como respuesta en un lapso de cinco minutos aproximadamente. Solo B1 preguntó al profesor – investigador sobre la palabra “aproximar”, que no entendía qué tenía que hacer en la pregunta; se le contestó que utilice la misma palabra en otro contexto y que lo aplique en su caso. Que se realice esta pregunta fue previsto por el profesor –

investigador, ya que el estudiante no ha utilizado la palabra aproximar en un contexto similar.

Luego, el profesor – investigador les preguntó a los estudiantes por qué no empezaban con la resolución del ítem; los estudiantes respondieron que no sabían con qué figura aproximarla, si utilizar rectángulos, triángulos o regiones circulares, que estaban buscando una figura que mejor se aproxime. Este modo de pensar fue previsto por el profesor – investigador ya que los estudiantes se concentraron en buscar figuras geométricas de dimensiones conocidas para poder calcular la medida de sus áreas y lograr una mejor aproximación; sin embargo, solo se les pedía que describan un procedimiento de aproximación.

A1 y B1 consultaron si sus construcciones podían salirse de la región sombreada (idea de aproximación por exceso); se les contestó con la siguiente pregunta: ¿haciéndolo de esa manera, les daría un valor aproximado de la medida del área?, a lo que respondieron que sí, y siguieron trabajando. Esta pregunta realizada por los estudiantes corrobora la dificultad de lo que el profesor – investigador presentía sobre el tratar de aproximar una región con figuras geométricas que excedan a la región.

A continuación presentamos los procedimientos de aproximación de la medida del área de cada modelo de terraza:

Modelo 5: Los resultados presentados por los estudiantes fueron previstos por el profesor investigador, los estudiantes utilizaron rectángulos, triángulos y sectores circulares para aproximar el área de la terraza; dos estudiantes realizaron una aproximación por defecto, uno por exceso y uno presentó un resultado incoherente.

A1 realizó una aproximación por exceso dibujando dos rectángulos de diferente medida de base (uno de los rectángulos fue la mitad inferior de todo el patio, y el otro rectángulo el cuarto superior derecho del patio). A2 describió que aproximaría la medida del área de la terraza sumando la medida de las áreas de dos rectángulos, luego aproximaría la medida del área del jardín como si fuera un cuarto de círculo y restaría ambos resultados; por lo visto el razonamiento utilizado por estudiante no fue coherente. B1 realizó una aproximación por defecto utilizando un rectángulo de 2×4 m^2. B2 aproximó la medida del área del jardín como si fuera un cuarto de círculo y propuso restar dicha medida del total (debió ser al revés).

La figura 53 muestra la respuesta dada por A1.

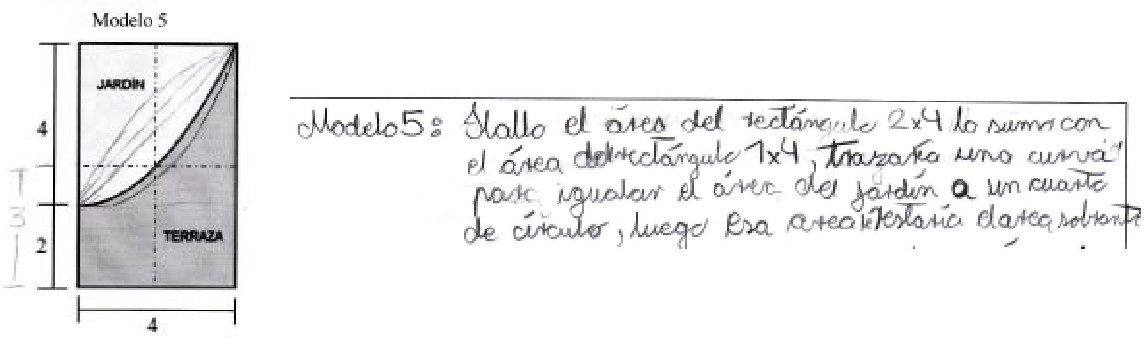


Figura 53. Respuesta al ítem 2a Modelo 5 dada por A2

<u>Modelo 6</u>: Los resultados presentados por los estudiantes fueron previstos por el profesor investigador, los estudiantes utilizaron rectángulos, triángulos y sectores circulares para aproximar el área de la terraza; dos estudiantes realizaron una aproximación por defecto, uno por exceso y uno presentó un resultado incoherente.

A1 realizó una aproximación por exceso dibujando un solo rectángulo (mitad inferior de todo el patio). A2 describió que aproximaría la medida del área de la terraza a un cuarto de círculo y luego lo restaría con la medida del área de las partes restantes; observamos otra vez que su procedimiento no es claro. B1 realizó una aproximación por defecto dibujando un trazo adicional y formando un triángulo. B2 realizó una aproximación por defecto dibujando un rectángulo, un cuadrado y un triángulo. La figura 54 muestra la descripción del procedimiento realizado por B2 ya que se ajusta a uno de los modelos presentados en la figura 51.

El desarrollo de este ítem les demandó a los estudiantes mucho tiempo, porque trataron de dibujar figuras geométricas de modo que se cubra la terraza casi en su totalidad. B1 y B2 comentaron al profesor – investigador que sí podían dibujar más triángulos pequeños pero que ya no sabían cómo calcular la medida de sus áreas.

Luego de un tiempo prudente, se les comunicó a los estudiantes que decidan por la aproximación que crean conveniente y que pasen al siguiente ítem.

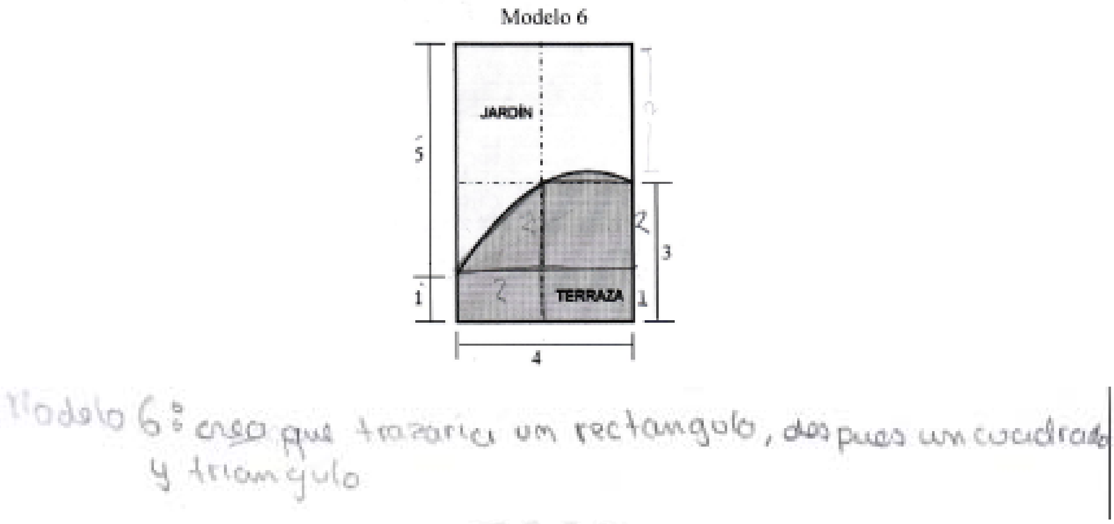


Figura 54. Procedimiento descrito por B2

Si bien es cierto que los estudiantes respondieron al ítem, sus respuestas las escribieron excediendo el tiempo esperado para dicha resolución. Por lo visto y comentado por ellos, nunca habían trabajado con una región de ese tipo. Trataron de buscar una figura que se aproxime más a la forma de la terraza y no sabían si podían salirse de la terraza con la figura (aproximación por exceso).

Podemos afirmar que se llegó a la *fase de acción* de la situación 1 porque todos los estudiantes eligieron figuras geométricas para aproximar el área de la región.

b. A partir del procedimiento descrito en la pregunta 2(a), calcule el área aproximada de la terraza e indique cuál de los dos modelos elegiría el señor Martínez (Utilice el mismo criterio: $0{,}5 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 0{,}67$ *). Justifique.*

Análisis a priori

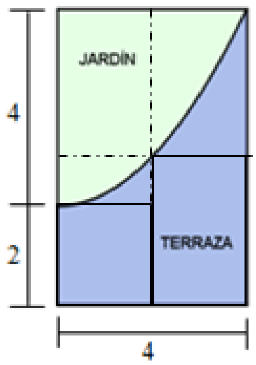
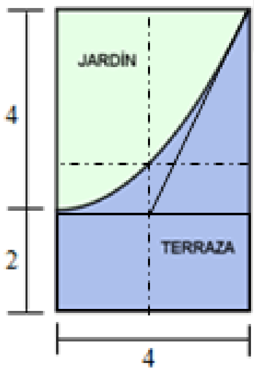
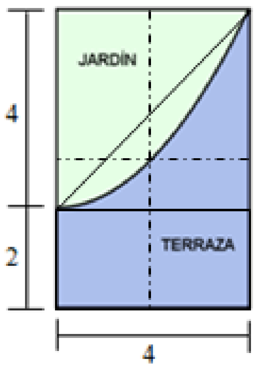
En este ítem los estudiantes trabajarán de manera individual por un lapso de tiempo, y luego comunicarán a sus respectivas parejas sus procedimientos de aproximación a la medida del área de la terraza y sus cálculos y resultados obtenidos. Esto lo hacemos con el fin de que los estudiantes comprendan que existen diferentes maneras de aproximar la medida del área, algunas por exceso y otras por defecto, y que estas aproximaciones pueden mejorar.

Como los estudiantes ya tuvieron una experiencia similar en el ítem b de la tarea 1, se espera que no presenten dificultades para obtener la proporción para cada modelo.

En el caso que en la dupla se hayan dado los dos tipos de aproximación, por exceso y por defecto, el profesor – investigador preguntará: ¿qué diferencia hay entre ambas aproximaciones? Se espera que respondan que en un caso la aproximación es mayor a la medida del área de la terraza y en el otro menor. Otra pregunta que se piensa hacer es la siguiente: ¿será posible mejorar la aproximación? Se espera que respondan que sí se puede mejorar la aproximación dibujando figuras más pequeñas en los espacios que no están cubiertos.

En el caso que en la dupla solo se haya dado un tipo de aproximación, o por exceso o por defecto, el profesor – investigador preguntará: ¿Es posible mejorar la aproximación? Se espera que respondan que sí se puede mejorar la aproximación dibujando figuras más pequeñas en los espacios que no están cubiertos. Más adelante, en una discusión grupal, se comentará sobre los tipos de aproximación que se pueden dar.

La figura 55 muestra las proporciones para las aproximaciones realizadas en la figura 51. Solo se han colocado tres modelos por cada figura, ya que pensamos que los estudiantes aproximarán la terraza con figuras poligonales, sin embargo sabemos que hay diferentes formas de realizar la aproximación. Es probable también que algún estudiante utilice un cuarto de círculo para aproximar la medida del área del jardín en el modelo 5 o la medida del área de la terraza para el modelo 6.

<u>Modelo 5</u>:		
		
$P=\frac{m(T)}{m(J)}=\frac{2\times2+2\times3}{24-10}$ $=0{,}71$	$P=\frac{m(T)}{m(J)}=\frac{2\times4+(2\times4)/2}{24-12}$ $=1$	$P=\frac{m(T)}{m(J)}=\frac{2\times4+(4\times4)/2}{24-16}$ $=2$

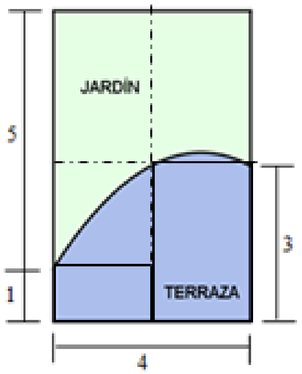
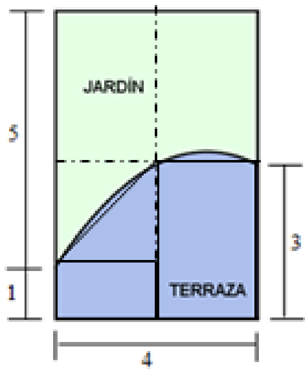
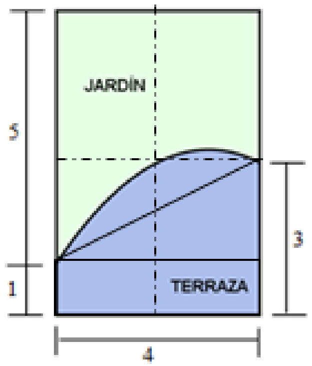
<table>
<tr><td colspan="3"><u>Modelo 6</u>:</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$P = \frac{m(T)}{m(J)} = \frac{1\times 2 + 2\times 3}{24-8}$
$= 0{,}5$</td>
<td>$P = \frac{m(T)}{m(J)} = \frac{1\times 2 + 2\times 3 + (2\times 2)/2}{24-10}$
$= 0{,}71$</td>
<td>$P = \frac{m(T)}{m(J)} = \frac{1\times 4 + (2\times 4)/2}{24-8}$
$= 0{,}5$</td>
</tr>
</table>

Figura 55. Posibles proporciones entre las medidas de las áreas de la terraza y del jardín.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* al calcular la medida del área aproximada del jardín y la terraza y elegir el modelo que cumpla con la proporción.

Descripción y análisis a posteriori

Todos los estudiantes empezaron a calcular la medida de las áreas de las figuras geométricas que aproximaban la terraza, y la medida del área del jardín la calcularon haciendo la diferencia entre el área del patio (que mide 24 m^2) y la medida del área de la terraza. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

<u>Modelo 5</u>: Los resultados obtenidos por los estudiantes fueron previstos parcialmente por el profesor – investigador. Se esperaba que los estudiantes no presentaran dificultades para calcular las medidas de las áreas, pero dos estudiantes no lo pudieron hacer; los motivos fueron los siguientes: dibujaron figuras geométricas y no supieron como hallar las medidas de sus áreas (B1), y el razonamiento utilizado no fue el correcto (A2).

A1 realizó una aproximación de la terraza por exceso y obtuvo la medida del área de 18 m^2 y una proporción igual a 3. A2 dio resultados incoherentes (la medida del área de la terraza fue de 26,26 m^2, siento la medida del área total del patio 24 m^2). El profesor – investigador no intervino para guiar al estudiante A2 porque esperaba que lo hiciera el estudiante A1 luego de trabajar en parejas. En la interacción dada entre ambos estudiantes, A1 le mostró a A2 su procedimiento y le indicó que sus resultados no eran coherentes. A2 trató de explicar su procedimiento y por qué obtuvo dichos valores pero no supo cómo hacerlo.

La figura 56 muestra la respuesta dada por A2 (en la figura 53 se describe su procedimiento).

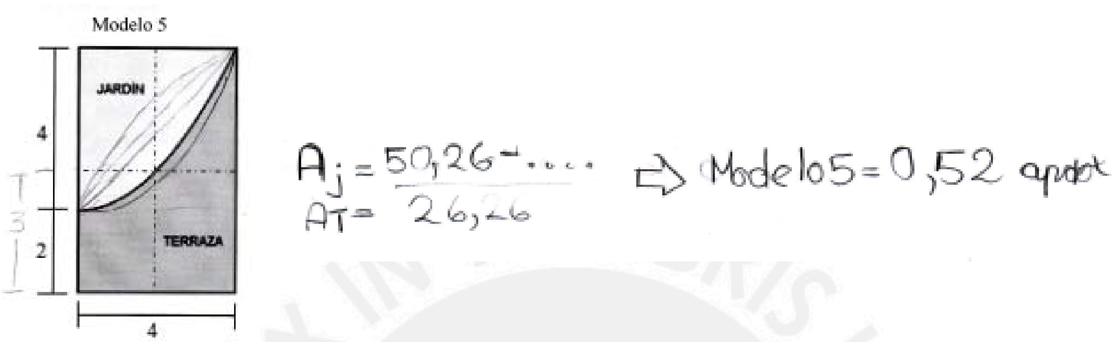


Figura 56. Respuesta al ítem 2a Modelo 5 dada por A2.

B2 aproximó la medida del área del jardín con la medida del área de un cuarto de círculo, y la medida del área de la terraza la obtuvo a partir de la diferencia entre las medidas del área del patio y del jardín; obtuvo como medida del área de la terraza 12,56 m^2 y una proporción igual a 0,91. B1 solo obtuvo la medida del área de la terraza que le salió 8 m^2. El profesor – investigador no intervino para guiar al estudiante B1 porque esperaba que lo hiciera el estudiante B2 luego de trabajar en parejas. En la interacción dada entre ambos estudiantes, B1 le explicó a B2 que no sabía cómo hallar la medida del área del jardín; B2 le explicó cómo hacerlo y luego B1 comentó: “ahora sí sé porque ya me lo explicaste”. El procedimiento dado por B2 fue previsto por el profesor – investigador como una posibilidad de cálculo.

Modelo 6: A1 realizó una aproximación de la terraza por exceso y obtuvo una medida de área de 12 m^2 y una proporción igual a 1. A2 dio resultados incoherentes (la medida del área de la terraza fue de 50,26 m^2, siento la medida del área total del patio 24 m^2). En la discusión en parejas A1 le explicó a A2 su procedimiento.

B2 utilizó un rectángulo, un cuadrado y un triángulo para su aproximación por defecto, pero cometió un error al calcular la medida del área del rectángulo (debió ser 1×4 pero colocó 1×1), todo lo demás lo hizo correctamente. B1 solo obtuvo la medida del área de la terraza que le salió 6 m^2. En la discusión en parejas, B2 le explicó a B1 su procedimiento y en la explicación B2 se dio cuenta del error cometido.

La figura 57 muestra la respuesta dada por B2 (en la figura 54 se describe su procedimiento).

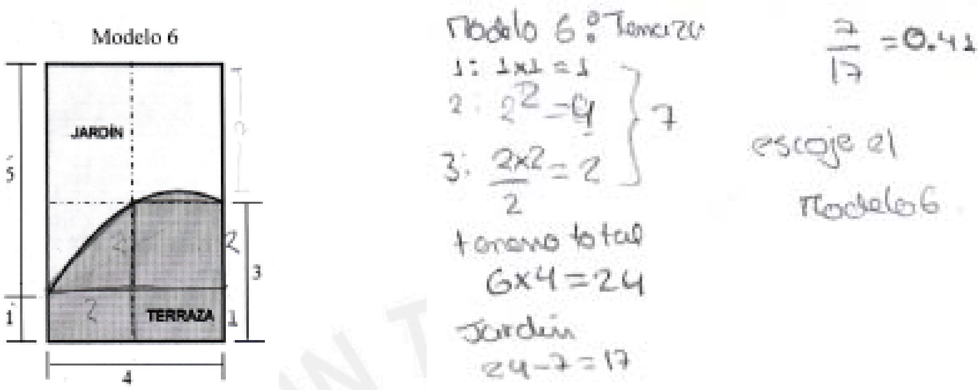


Figura 57. Cálculos realizados por B2 en el ítem 2b

Luego de la interacción dentro de cada dupla, el profesor – investigador decidió comparar los resultados de la aproximación de la medida del área de la terraza para el modelo 6 obtenido por A1 y por B2, y les preguntó: ¿qué diferencia hay entre ambas aproximaciones? A1 respondió que en su caso el rectángulo usado para aproximar la medida del área se salía de la terraza y en el de B2 no, ya que sus figuras estaban dentro de la terraza. En ese momento el profesor mencionó que si el número que aproxima a la medida del área es menor se dice que es una aproximación por defecto; pero si es mayor, es por exceso.

Luego se hizo una nueva pregunta: ¿cuál de ellas creen que aproxima más la medida del área? B2 respondió que la suya porque cubría más la terraza.

La rueda de preguntas se terminó con la siguiente: ¿será posible mejorar la aproximación? A1 comentó que sí, que dibujando figuras más pequeñitas, pero ya sería muy difícil hallar la medida de sus áreas; B1, B2 y A2 corroboraron el comentario.

Las respuestas dadas por los estudiantes fueron previstas por el profesor – investigador.

Corroboramos que los estudiantes emplearon figuras geométricas y fórmulas de geometría para aproximar la medida del área.

Podemos afirmar que los estudiantes se ubicaron en la *fase de acción* porque calcularon las medidas de las áreas aproximadas y eligieron un modelo de terraza. Si bien es cierto que el cálculo inicial de algunos estudiantes fue incorrecto, por la discusión e intercambio de ideas realizados creemos que ahora sí podrían hacerlo correctamente.

c. ¿Podría calcular el área de la terraza para ambos casos? Si su respuesta es afirmativa, dé el valor numérico del área; de lo contrario, explique por qué no los podría calcular.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajarán en parejas porque se pretende desde el inicio que discutan y planteen una justificación de por qué no pueden calcular exactamente la medida del área de la terraza. En los ítems anteriores los estudiantes presentaron diferentes procedimientos de aproximación y de cálculo; comprendieron intuitivamente cuando una aproximación es mejor que otra (a partir de las respuestas dadas a las preguntas hechas por el profesor – investigador); por eso pensamos que adquirieron herramientas para brindar una opinión que responda a la pregunta planteada.

Se espera evidenciar que los estudiantes no son capaces de calcular la medida de las áreas que no presentan un borde superior conocido por ellos; asimismo, justificar que son conscientes de que no conocen una fórmula que les permita hallar la medida del área o que no conocen un procedimiento que les permita acercarse cada vez más a dicha medida.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* al relacionar los conceptos de medida de área y aproximación, y que reconozcan la necesidad de aprender un procedimiento que le permita aproximar dicha medida.

Descripción y análisis a posteriori

Los estudiantes leyeron la pregunta y afirmaron que no podían calcular la medida del área de la terraza para ambos modelos. La figura 58 muestra la respuesta dada por la dupla A.

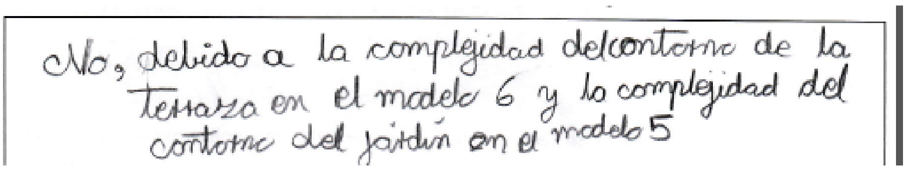

No, debido a la complejidad del contorno de la terraza en el modelo 6 y la complejidad del contorno del jardín en el modelo 5

Figura 58. Respuesta de la dupla A al ítem c de la tarea 2.

El profesor – investigador decidió realizar una discusión grupal para que todos los estudiantes den su punto de vista acerca de la pregunta. Los comentarios vertidos por los estudiantes sobre el ítem c de la tarea 2 fueron los siguientes:

- A1 mencionó “no conocemos fórmulas para esas regiones”;
- A2 dijo “el contorno no era parte de una figura geométrica”;
- B1 señaló “los modelos 5 y 6 no son exactos, no son precisos, a comparación de los primeros (modelos 1,2, 3 y 4) que usan una formula determinada, sumas, restas, en cambio en la otra usas aproximaciones”; y
- B2 expresó “se puede hallar el área si se asume que la región es un cuarto de circulo” (en este caso el estudiante propone cambiar la curva por un cuarto de circunferencia).

El profesor – investigador confirmó lo dicho por los estudiantes; que para ese tipo de regiones no poligonales no se conocen fórmulas de geometría para determinar la medida de sus áreas, que se deben realizar otro tipo de procedimientos de cálculo que este momento no conocen aún.

Luego de la discusión grupal corroboramos que cuando el borde superior de la región es una curva diferente a segmentos de recta o arcos de circunferencia, el estudiante no sabe cómo calcular la medida del área de la región porque no es una figura geométrica conocida y no conoce una fórmula para hallarla. Asimismo, no justificaron un procedimiento que les permita aproximarse cada vez más a la medida del área, solo dieron algunas ideas como completar los espacios que faltan con figuras más pequeñas pero veían muy complejo el calcular la medida de sus áreas.

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes, podemos afirmar que todo lo mencionado fue previsto por el profesor – investigador. Notamos que los estudiantes no se sienten cómodos realizando cálculos complejos, sobre todo si los realizan manualmente, por ese motivo creemos que evitar que realicen dichos cálculos y que destinen el tiempo en interpretar los resultados sería beneficioso en su aprendizaje. Afirmamos que los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias para aproximar la medida del área; que conocen fórmulas de geometría pero no conocen un procedimiento que les permita utilizarlas.

Luego de la discusión entre duplas desarrollada al finalizar la tarea 2, el profesor – investigador realizó una *institucionalización local* a partir de los resultados obtenidos por los estudiantes a lo largo de toda la actividad 1. Señaló que con esta actividad se buscó que utilicen sus conocimientos previos de fórmulas de geometría, de noción de área y medida y de aproximación, de modo que los utilicen para el cálculo de medidas de áreas conocidas (los cuatro primeros modelos de terraza) y para la aproximación de la medida de áreas desconocidas por ellos (los modelos de terraza 5 y 6). Les preguntó: ¿ustedes querían realizar una mejor aproximación a la figura? Todos dijeron que sí pero no sabían cómo hacerlo. El profesor – investigador les señaló que uno de los objetivos de la actividad era que vean la necesidad de aprender un nuevo procedimiento que les ayude a realizar esas aproximaciones que en un primer momento se les dificultaba. Los estudiantes corroboraron la intención de la primera actividad.

Observaciones generales de la actividad 1

Luego de la experimentación, del recojo de información, de realizar los análisis a priori y a posteriori, y compararlos de forma detallada por cada ítem, concluimos lo siguiente:

- ✓ Los estudiantes alcanzaron la fase de acción de la **situación 1** específica para esta actividad.
- ✓ Se evidenció que si la variable didáctica “borde superior de la región” toma formas conocidas, los estudiantes no presentan dificultades para empezar a trabajar, conocen procedimientos y la existencia de fórmulas de cálculo que le permitan hallar las medidas del área. Sin embargo, al cambiar la forma del borde, desconocido para los estudiantes, describir un procedimiento que permita aproximarse a la medida del área se hace difícil para ellos. Se justificó que los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias ni conocen un procedimiento que les permita brindar una mejor aproximación a la medida del área. Cabe mencionar que notamos que hubo indicios de completar los espacios sobrantes con figuras más pequeñas pero al no poder calcular sus respectivas medidas de áreas los estudiantes desistieron de ello.
- ✓ Las tres formas de trabajar las tareas: individual, en parejas y entre grupos, permitió que los estudiantes discutan y se apoyen mutuamente para conseguir los objetivos trazados. Además, se observó que los estudiantes se motivaron al momento de justificar sus resultados frente a la otra dupla.
- ✓ Pensamos que los resultados hubieran sido similares si se eliminaban o si se cambiaba el orden algunos ítems, o si se trabajaba todo en parejas. Esto lo mencionamos pensando en optimizar el tiempo y ver la posibilidad de trabajarlo en hora de clase como una motivación previa.

4.3.2 Descripción, objetivos, variables didácticas, fases asociadas de la TSD de cada ítem y de la actividad 2

La actividad 2 propuesta en nuestra investigación fue la siguiente:

Actividad 2: Colocación de losetas en la terraza.

Al señor Martínez le mostraron una simulación por computadora de los diferentes modelos de terrazas y como quedarían enchapados con losetas, según sus requerimientos. Esto se hizo a partir de un programa interactivo (*applets* en GeoGebra) basado en el uso de deslizadores.

Los requerimientos dados por el señor Martínez fueron los siguientes:

- La proporción entre la terraza y el jardín es $0{,}75 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 1$.
- Para abaratar los costos, las losetas deben ser rectangulares y de dimensiones iguales. De esa manera resulta más sencillo y económico realizar los cortes a medida.
- Por cuestiones de uniformidad, cada loseta se debe colocar en la base de la terraza y debe coincidir con el borde superior de la misma, en al menos un punto.

1. Abra el archivo **S2_P1.ggb** y manipule los deslizadores *a* y *b* ubicados en la vista gráfica: <u>División del terreno</u>.

a. Elija un par de valores de *a* y *b* que hagan que se cumpla la proporción dada.

A continuación trabaje en la vista gráfica: <u>Dibujo de loseta rectangular</u>. (Utilice los valores hallados de *a* y *b*).

b. (i) Mueva el punto *P* y complete la tabla:

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta			
Área de la loseta			

¿Presentó alguna dificultad para completar la tabla? Explique.

(ii) Dibuje una loseta cuya base mida 4 m., e indique qué calcula de la loseta la imagen $f(4)$.

2. Al señor Martínez le mostraron por computadora un nuevo modelo de terraza, en donde se simula la colocación de losetas. Abra el archivo **S2_P2A.ggb** y manipule el deslizador *n* ubicado en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. Explique qué cree usted que calculan los valores que toma S (o S_1, para la otra pareja).

b. Dibuje cuatro losetas con el deslizador *n*.

(i) ¿Las alturas de las losetas son las imágenes de *f* en el extremo derecho o izquierdo de cada base?

(ii) Exprese S (o S_1, para la otra pareja) como la suma de las áreas de cada una de las losetas dibujadas.

c. El señor Martínez desea enchapar la terraza con losetas rectangulares, con la condición de que la región de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas (o las partes de las losetas que sobrepasan a la terraza, para la otra pareja) sea la menor posible.

(i) ¿Cuántas losetas cree usted que se deberían dibujar con el deslizador *n* para esto ocurra? Justifique.

(ii) Exprese S (o S_1, para la otra pareja) como la suma de las áreas de cada una de las losetas dibujadas en la pregunta c. (i). Justifique.

(iii) Calcule el área de la terraza que queda sin cubrir por las losetas (o el área de las partes de las losetas que sobrepasan a la terraza, para la otra pareja) dibujadas en (i).

(iv) Si se dibujaran más losetas de las permitidas por *n*, ¿el valor hallado en c. (iii): aumentaría, disminuiría, o permanecería igual? Explique.

d. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en el ítem c., responda a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuántas losetas se deberían dibujar con *n* y en qué forma se deberían ubicar en la terraza, de modo que la suma de las áreas de todas ellas se aproxime más al área de la terraza? Justifique.

(ii) Si se colocaran más losetas de las permitidas por *n*, ¿qué cree usted que suceda con los valores de S y S_1: se alejarían, llegarían a ser iguales, se acercarían pero no llegarían a ser iguales? Explique.

Es pertinente mencionar que como en la tarea 2 de esta actividad, los estudiantes trabajaron con dos *applets* distintos, es decir trabajaron con dos materiales distintos que se distinguían por una frase y por un símbolo, decidimos agregar entre paréntesis, en algunos de los ítems de la actividad mostrada en la página anterior, lo que aparecía en el material del compañero de dupla; esto lo hicimos para simplificar la lectura y realizar una mejor comparación (en los anexos de nuestra investigación presentamos ambos materiales).

La actividad 2 está diseñada para ir introduciendo al estudiante en el empleo de rectángulos para realizar aproximaciones de la medida de un área (recién en el ítem d de la tarea 2, analizaremos si el estudiante toma conciencia de que está aprendiendo un procedimiento de aproximación). Asimismo, esta actividad está diseñada para que el estudiante relacione la altura de un rectángulo como la imagen de una función, a fin de que pueda expresar la aproximación a la medida del área como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos (recién en el sub – ítem 2 del ítem c de la tarea 2, analizaremos si el estudiante presenta o no dificultades para expresar la aproximación realizada como una adición de términos). En esta actividad los estudiantes utilizan e interactúan con los *applets* en GeoGebra (programa utilizado solo por el profesor en las clases del curso previo al desarrollo de las actividades) como parte del medio diseñado por el profesor – investigador. Con estos *applets* pretendemos evitar que el estudiante realice gráficas y cálculos repetitivos y tediosos, y lograr que centre su atención en interpretar los resultados obtenidos, tanto numéricos como gráficos. Cabe señalar que al estudiante no se le enseña los comandos del programa; nosotros hemos diseñado *applets* basados en deslizadores de modo que el estudiante observe cómo se modifican las gráficas, como se incrementan los rectángulos y cómo varía el cálculo de medidas de áreas de forma dinámica.

Es esta actividad se han planteado tareas, ítems y sub – ítems que forman parte, algunos de la situación 1 (relacionados con la idea de aproximación) y otros de la situación 2 (relacionados con el planteamiento de las medidas de las áreas de los rectángulos de forma individual). Cuando realicemos el análisis por ítem lo describiremos al detalle; así como también la fase de la TSD que es alcanzada por los estudiantes.

En esta actividad el estudiante interactuará con el *medio* propuesto por el profesor – investigador (el profesor, su pareja de dupla, la otra pareja, el *applet* en GeoGebra y las tareas de la actividad impresa). Como en esta actividad no se ha planificado un objetivo de aprendizaje, pero se introduce al estudiante en dos temas nuevos para él: el de la aproximación a la medida del área con rectángulos, y a que puede expresar dicha aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos, se han diseñado tareas para que los estudiantes se ubiquen en las *fase de acción* y de *formulación* propuestas en la TSD para ambas situaciones.

En esta actividad los estudiantes trabajan con las variables didácticas: "borde superior de la región" y "número de rectángulos de aproximación". Las tablas 2 y 3 muestran qué valores toman dichas variables y en qué tareas en particular se trabaja directamente con ellas para las situaciones 1 y 2 respectivamente.

Tabla 2. Variables didácticas trabajadas en la situación 1 asociadas a la actividad 2.

Variable didáctica	Valores	Tarea
Número de rectángulos de aproximación	▪ Entre 1 y 8 rectángulos (visto en el programa): - Para rectángulos inscritos: Aproximación por defecto: de 5,60 a 9,98 m^2 Diferencia entre la medida del área y su aproximación: de 0,95 a 5,33 m^2 - Para rectángulos circunscritos: Aproximación por exceso: de 11,98 a 21,60 m^2 Diferencia entre la medida del área y su aproximación: de 1,05 a 10,67 m^2 ▪ Para más de 8 rectángulos (asumido de forma intuitiva): - Para rectángulos inscritos y/o circunscritos: Aproximación por exceso y por defecto: los valores se alejan, se acercan pero no llegarán a ser iguales, se acercan y sí llegarán a ser iguales	2

Tabla 3. Variables didácticas trabajadas en la situación 2 asociadas a la actividad 2.

Variable didáctica	Valores	Tarea
Borde superior de la región	▪ Forma conocida: - Segmento de recta ▪ Formas desconocidas: - Curvas diferentes a segmentos de rectas y arcos de circunferencia	1 y 2
Número de rectángulos de aproximación	▪ 1, 2 y 4 rectángulos: - Medida de la base: número entero - Valor de *x* para determinar la imagen de la función: número entero ▪ 3, 5, 6, 7 y 8 rectángulos: - Medida de la base: número fraccionario - Valor de *x* para determinar la imagen de la función: número fraccionario	2

Forma de trabajo de la actividad 2

La experiencia se llevará a cabo de la siguiente manera:

- El tiempo estimado es de dos horas, sin embargo podría ser mayor debido a que es la primera actividad que se realiza utilizando los *applets* en GeoGebra.
- Se trabajará en un aula de una universidad de Lima.
- Se trabajará con dos duplas: A y B. La dupla A tiene por integrantes a A1 y a A2; la dupla B tiene por integrantes a B1 y a B2.
- Al inicio de la sesión se instalará en cada máquina el programa GeoGebra, se guardarán en el Escritorio de cada computadora los archivos a utilizar que contienen los *applets* diseñados en GeoGebra, se entregará a cada estudiante el documento físico de la actividad a trabajar y se explicará la manera en la que se desarrollará la sesión (comportamientos de los estudiantes y del profesor a lo largo de la sesión, es decir, aspectos del *contrato didáctico*).
- En la tarea 1 todos los estudiantes utilizarán el mismo *applet*. Primero se trabajará de forma individual, por un lapso de tiempo, para que cada estudiante maneje libremente los deslizadores y grafique una función que sea diferente a la de los demás. Luego, se trabajará en parejas para comparar gráficas y resultados. Finalmente se procederá a una discusión grupal. De ser necesario el profesor – investigador realizará una intervención.
- En los ítems a, b y c de la tarea 2 los integrantes de cada dupla trabajarán de forma individual porque utilizarán un *applet* distinto; en un caso se dibujarán rectángulos inscritos al área y en otros, circunscritos. Se permitirá el intercambio de información entre las duplas en lo relacionado a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos. De ser necesario el profesor – investigador realizará una intervención.
- En el ítem d de la tarea 2 se trabajará en parejas y con ambos *applets*. Ambos integrantes trabajarán los sub - ítems a partir de los resultados obtenidos en los ítems a, b y c de la tarea 2. Luego de un lapso de tiempo se procederá a una discusión grupal donde se espera estandarizar algunos resultados (esto se verá en el análisis que se realizará por tarea).

A continuación realizaremos la descripción, el análisis a priori, el análisis a posteriori y la comparación entre ambos análisis de forma detallada por ítem de la actividad 2; asimismo, realizaremos observaciones y conclusiones relacionadas a dicha actividad.

ACTIVIDAD 2: COLOCACIÓN DE LOSETAS EN LA TERRAZA

Al señor Martínez le mostraron una simulación por computadora de los diferentes modelos de terrazas y cómo quedarían enchapados con losetas, según sus requerimientos. Esto se hizo a partir de un programa interactivo (*applets* en GeoGebra) basado en el uso de deslizadores.

Los requerimientos dados por el señor Martínez fueron los siguientes:

- La proporción entre la terraza y el jardín es $0{,}75 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 1$.
- Para abaratar los costos, las losetas deben ser rectangulares y de dimensiones iguales. De esa manera resulta más sencillo y económico realizar los cortes a medida.
- Por cuestiones de uniformidad, cada loseta se debe colocar en la base de la terraza y debe coincidir con el borde superior de la misma, en al menos un punto.

1. Abra el archivo **S2_P1.ggb** y manipule los deslizadores *a* y *b* ubicados en la vista gráfica: División del terreno.

En esta tarea los estudiantes trabajan con las variables didácticas “borde superior de la región” y “número de rectángulos de aproximación”; pero estas no son modificadas por el profesor – investigador. En el primer caso, los estudiantes ya trabajan con un borde superior diferente al de un arco de circunferencia; y en el segundo caso, los estudiantes solo trabajan con un rectángulo.

El objetivo de la tarea es evidenciar que los estudiantes no presentan dificultades para manipular los deslizadores del GeoGebra y tampoco al interpretar las condiciones dadas textualmente. Asimismo, se espera lograr que los estudiantes relacionen las alturas de los rectángulos con las imágenes de una función.

a. Elija un par de valores de a y b que hagan que se cumpla la proporción dada.

Análisis a priori

En este ítem que se muestra a continuación, los estudiantes trabajarán de forma individual. Es importante notar que el programa permite trabajar con una gran variedad de curvas que se obtienen al manipular los deslizadores *a* y *b*, sin la necesidad de restringirnos a una sola. De ese modo, el estudiante podrá apreciar, más adelante, que el procedimiento que aprenderá es flexible y se adapta a cualquier tipo de curva, siempre que sea continua.

Pretendemos que los estudiantes tomen control de los deslizadores *a* y *b* y los coloquen de tal modo que se cumpla que la proporción entre las medidas del área de la terraza y del jardín, dada en el texto.

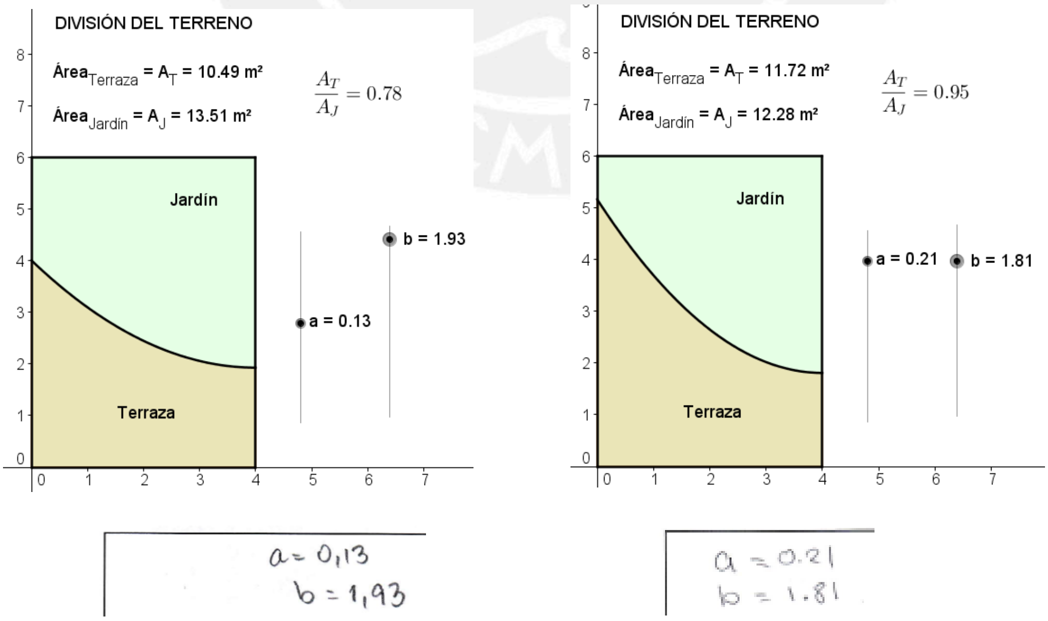
Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para abrir el programa, para ubicar los archivos donde se diseñaron los *applets* y para elegir dos valores de *a* y *b* que cumplan con la proporción dada

Es probable que presenten algunas dificultades al manipular los deslizadores ya que es la primera vez que trabajan con ellos. Si esto ocurriese, el profesor – investigador guiará al estudiante para que lo haga correctamente.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* de la situación 1 al escoger un par de valores de los deslizadores que cumplan con dicha proporción.

Descripción y análisis a posteriori

La experiencia se llevó con total normalidad y todos obtuvieron un resultado que se ajustaba a lo requerido en el texto. Los estudiantes estuvieron motivados al utilizar el GeoGebra para trabajar problemas de matemática. La figura 59 muestra algunos modelos de terrazas dibujados por los estudiantes.



(a) (b)

Figura 59. (a) Deslizadores elegidos por A1. (b) Deslizadores elegidos por B2.

A2 y B1 tuvieron dificultades para manipular los deslizadores; pero sus propios compañeros les explicaron. Podemos afirmar que tanto los resultados como las dificultades en el manejo de los deslizadores fueron previstos por el profesor – investigador.

Podemos afirmar que los estudiantes se ubicaron en la *fase de acción* de la situación 1 ya que actuaron sobre los deslizadores y obtuvieron resultados coherentes.

Corroboramos que los estudiantes no presentaron dificultades para manipular los deslizadores y elegir ciertos valores para que cumplan las condiciones dadas en el texto.

A continuación trabaje en la vista gráfica: Dibujo de loseta rectangular. (Utilice los valores hallados de *a* y *b*).

b. (i) Mueva el punto P y complete la tabla:

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta			
Área de la loseta			

¿Presentó alguna dificultad para completar la tabla? Explique.

(ii) Dibuje una loseta cuya base mida 4 m., e indique qué calcula de la loseta la imagen $f(4)$.

Análisis a priori

En el sub - ítem (i) los estudiantes trabajarán de forma individual por un lapso de tiempo porque se pretende analizar si alguno de ellos relaciona la altura del rectángulo dibujado con la imagen de la función para un valor determinado de *x*. Luego de ello compararan y discutirán sus resultados con su pareja de dupla. Ya estando en parejas trabajarán el sub – ítem (ii). Al final del desarrollo del ítem se realizará una discusión grupal para validar ciertos resultados o para que el profesor – investigador los aclare. La intervención del profesor se realizará en la discusión grupal ya que pretendemos que el estudiante por sus propios medios relacione la altura del rectángulo con la imagen de la función.

Se ha diseñado en el *applet* un punto móvil *P* que se mueve por todo el borde superior de la región (gráfica de la función *f*) y dibuja un rectángulo cuya medida de base es igual a x y la medida de la altura igual a $f(x)$. Este punto P fue diseñado con la intención de que los estudiantes reconozcan por ellos mismos que existe una relación entre la altura del rectángulo y la imagen de la función; de ese modo tratamos de evitar que los estudiantes pregunten: ¿cómo hallo la altura del rectángulo?

La figura 60 muestra lo que grafica el punto P cuando x igual a 2,5.

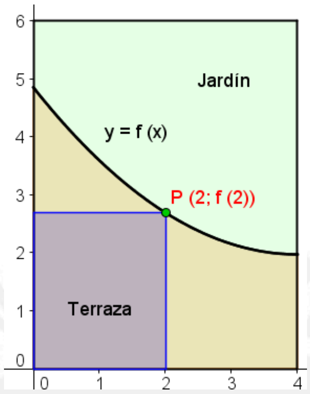


Figura 60. Loseta de base igual a 2 m. y altura f (2).

Se espera que el estudiante mueva el punto P y que la abscisa de dicho punto coincida con los valores de x dados en la tabla. Creemos que los estudiantes no presentarán dificultades para mover el punto P ni para ubicar los valores de x, ya que tienen conocimientos previos del plano cartesiano.

En el sub – ítem (i) es probable que los estudiantes presenten dificultades para completar la tabla en lo que respecta a la altura de cada loseta, ya que pensamos que buscarán dar un valor numérico y no expresarlo como la imagen de la función. Es probable que los estudiantes consulten al profesor – investigador si pueden dar un valor aproximado de la altura; en ese caso se les responderá con la siguiente pregunta: ¿en la tabla les piden que calculen un valor aproximado? La idea de devolverles una pregunta es esperar a ver qué responden; además se espera que algún estudiante plantee las alturas como la imagen de la función y lo pueda comunicar a su compañero o al resto de estudiantes en una discusión grupal.

Se espera que los estudiantes que expresaron correctamente la altura como una imagen, no tenga dificultades para obtener la medida de las áreas de las losetas. En ese caso, responderán tal y como se muestra en la tabla 4 (la idea de que los estudiantes hayan trabajado el ítem a de la tarea 1 de forma individual es justamente para que observen que las expresiones de la tabla dadas como resultado son las mismas sin importar con qué función hayan trabajado).

Tabla 4. Medidas de la altura y del área de una loseta.

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta	$f(1)$ m.	$f(2,5)$ m.	$f(3,2)$ m.
Área de la loseta	$1,0\times f(1)$ m^2.	$2,5\times f(2,5)$ m^2.	$3,2\times f(3,2)$ m^2.

Sin embargo, es muy probable que den un valor aproximado de la altura guiándose en los valores que toma *f* en el eje Y; y lo mismo ocurrirá para el cálculo del área. Si ambos estudiantes completaron la tabla con valores numéricos se espera que comenten cómo aproximaron dichos valores.

Se espera que los estudiantes indiquen que sí tuvieron dificultades para calcular la altura de cada rectángulo porque no tenían la medida exacta, por ese motivo dieron un valor aproximado.

Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para responder que *f*(4) calcula la medida de la altura de la loseta en el sub – ítem (ii); esto debido a que en la pregunta se menciona que *f*(4) es la imagen de la función y eso le permitirá al estudiante relacionar de forma directa la imagen con la altura. La figura 61 muestra el rectángulo que observarán los estudiantes.

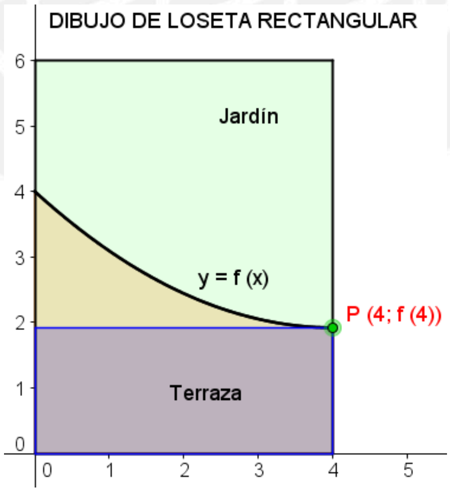


Figura 61. Loseta de base igual a 4 m. y altura $f(4)$.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* para la situación 2 al actuar sobre el punto *P*, completar la tabla con valores aproximados y mencionar que *f*(4) calcula la medida de la altura de la loseta.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* para la situación 2 si relacionaron la altura de cada rectángulo con la imagen de la función y lo comunicaron a su compañero de dupla.

Descripción y análisis a posteriori

Los estudiantes manipular sin dificultad el punto *P* ubicado en la vista gráfica: Dibujo de loseta rectangular. Esto fue previsto por el profesor – investigador.

La figura 62 muestra lo observado A1 (solo mostramos lo observado por A1 porque cada estudiante trabajó con una curva diferente), para un valor de *x* igual a 1.

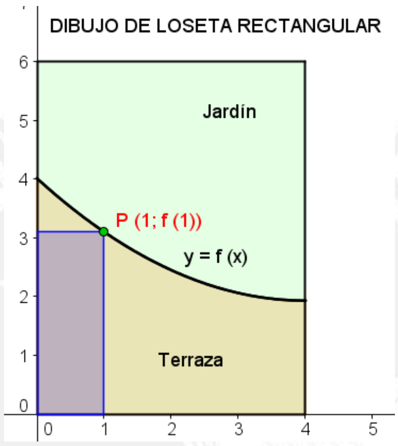


Figura 62. Loseta de base igual a 1 m. y altura *f* (1).

Todos los estudiantes en el sub – ítem (i), al no tener un valor exacto de la altura, intentaron dar un valor numérico aproximado de la altura de cada rectángulo. A2 y B1 cambiaron la escala del eje *y* del plano cartesiano (se ubicaron en el eje y con el *mouse* lo deslizaron hacia arriba) y mejoraron su aproximación.

La figura 63 muestra dicho cambio de escala.

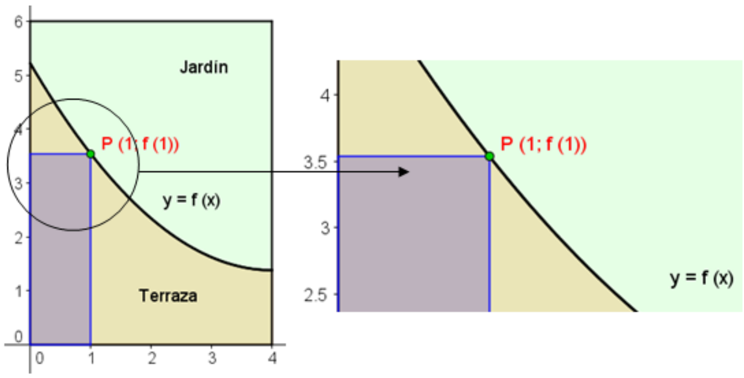


Figura 63. Cambio de escala realizada por A2 (curva para $a = 0{,}24$ y $b = 1{,}38$).

Ningún estudiante expresó la altura de las losetas como imagen de la función. La figura 64 muestra las respuestas dadas por los estudiantes A1 y B2.

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta	3,1	2,2	2
Área de la loseta	3,1	5,5	6,4

(a)

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta	3.8	2.7	1.9
Área de la loseta	1x3.8=3.8	2.7x2.5 6.75	4x1.9 7.6

(b)

Figura 64. (a) Tabla mostrada por A1. (b) Tabla mostrada por B1.

B1 no completó la tabla porque no sabía cómo hallar la medida de cada loseta. Comentó que no le pedían un valor aproximado de la altura.

Estos resultados fueron previstos parcialmente por el profesor – investigador, ya que presentimos que los estudiantes iban a tener dificultades en completar la tabla correctamente, pero pensamos que algún estudiante iba a conseguir expresar la altura como la imagen de la función.

Estas dificultades lo demuestran las respuestas dadas por ellos a la pregunta: ¿Presentó alguna dificultad para completar la tabla? (ver figura 65).

Sí, no habia un valor exacto en la altura, solo era una aproximación

(a)

Si, porque me falto determinar la altura de la loseta

(b)

Figura 65. (a) Dificultad de A1. (b) Dificultad de B1.

Esta dificultad en relacionar la imagen de la función con la altura de rectángulo puede darse por muchas razones: los estudiantes asumen que al pedirles una altura tienen que dar un valor numérico, o por trabajar en clase con reglas de correspondencia y hallar la imagen evaluando un valor de x en la función, o porque la pregunta no fue directa al no indicarles que lo expresen en términos de la imagen de la función, entre otras razones.

Respecto a lo observado del desarrollo del sub – ítem (ii), todos los estudiantes manipularon el punto P y lo ubicaron en $(4;\, f(4))$. Luego mencionaron que $f(4)$ calcula la altura del rectángulo dibujado. Esto fue previsto por el profesor – investigador.

En la discusión dentro de cada dupla, A1 y A2 compararon los resultados de sus tablas y A2 le enseñó a A1 cómo podía agrandar la gráfica para ver mejor la aproximación de la altura; lo mismo ocurrió con la dupla B. B2 le preguntó a B1 por qué no había completado la tabla; B1 le respondió que no sabía exactamente cuánto medían las alturas y no quería dar un valor aproximado.

La discusión grupal fue moderada por el profesor – investigador. Este les preguntó a los estudiantes por qué en la tabla colocaron valores aproximados de la altura y en el sub – ítem (ii) aceptaron que la altura del rectángulo era $f(4)$. A1 mencionó que dio un valor aproximado de la altura porque no le decían que lo expresara utilizando la función. Luego se le preguntó a los integrantes de la dupla B, ¿cómo llenarían la tabla utilizando las imágenes de f? Se demoraron un poco en responder pero lo hicieron correctamente, dijeron: $f(1)$, $f(2{,}5)$ y $f(3{,}2)$.

En ese momento, el profesor – investigador intervino y les señaló que como la esquina superior derecha del rectángulo coincide en un punto de la curva, la imagen de la función en el extremo derecho de la base mide exactamente la altura del rectángulo. Les mencionó también que si conociéramos la regla de correspondencia de la función podríamos encontrar la altura exacta pero de forma numérica. En conclusión, señaló que a partir de ahora las alturas de los rectángulos se expresarán como la imagen de la función en algún extremo de su base.

Esta intervención del profesor – investigador se realizó para que los estudiantes no sigan tratando de dar valores aproximados de las alturas y en las tareas a realizar posteriormente utilicen dicha relación.

Se evidenció la dificultad mencionada por Artigue (1998) en la traducción del registro gráfico al registro algebraico al trabajar con funcione, ya que los estudiantes no relacionaron la altura del rectángulo con la imagen de la función en alguno de los extremos de la base.

Corroboramos que se logró evidenciar que los estudiantes no presentan dificultades para manipular los deslizadores del GeoGebra y tampoco al interpretar las condiciones dadas en el texto. Sin embargo, los estudiantes por ellos mismos no consiguieron relacionar las alturas de los rectángulos con las imágenes de una función.

Podemos afirmar que los estudiantes se ubicaron en la *fase de acción* de la situación 2, ya que solo compararon resultados numéricos y cómo los obtuvieron, pero no se llegó a formular que la altura exacta de los rectángulos eran las imágenes de la función.

2. Al señor Martínez le mostraron por computadora un nuevo modelo de terraza, en donde se simula la colocación de losetas. Abra el archivo **S2_P2A.ggb (o S2_P2B.ggb)** y manipule el deslizador *n* ubicado en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

En la esta tarea se han fijado los valores de los deslizadores *a* y *b*. El objetivo de ello es introducir al estudiante en el dibujo de rectángulos inscritos y circunscritos a una misma área, y en la noción de aproximaciones con rectángulos a la medida de dicha área, ya sea por exceso o por defecto, (decimos introducción a la noción de aproximación porque se han diseñado los *applets* para que el estudiante trabaje con un máximo de ocho rectángulos). Para lograr esto los integrantes de cada una de las duplas trabajarán con *applets* distintos.

En los ítems a, b y c de la tarea 2 que se muestran a continuación, los estudiantes trabajarán de forma individual por un lapso de tiempo (A1 y B1 trabajarán con el archivo **S2_P2A.ggb** que presenta una aproximación por defecto, y A2 y B2 trabajarán con el archivo **S2_P2B.ggb** que presenta una aproximación por exceso) y luego, en el ítem d de la misma tarea, compartirán con su compañero de dupla sus procedimientos y estrategias de resolución. Al finalizar la tarea se realizará una discusión entre grupos para estandarizar ciertos resultados.

En esta tarea los estudiantes trabajan con la variable “número de rectángulos de aproximación” la cual varía mediante el deslizador *n*.

Los objetivos de la tarea 2 son analizar si el estudiante concibe la idea de aproximación por exceso y por defecto; analizar qué intuye el estudiante sobre las diferentes aproximaciones a medida que *n* aumenta; observar si el estudiante es capaz de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos; y justificar que el estudiante no presenta dificultades para adaptar a su aprendizaje un procedimiento de aproximación que emplea rectángulos. Cabe señalar que como el estudiante manipula en todo momento los deslizadores eligiendo valores distintos del mismo, y relaciona el área y su medida de forma verbal, gráfica y numérica en la mayoría de ítems; el cumplimiento o no de estos objetivos lo describiremos al final del análisis del ítem.

a. Explique qué cree usted que calculan los valores que toma S (o S_1, para la otra pareja).

Análisis a priori

En este ítem se trabajará de forma individual ya que se espera que en el ítem d, al trabajar en parejas, comparen sus procedimientos y resultados. Se pretende observar si los estudiantes relacionan correctamente los distintos valores numéricos que se generan al manipular el deslizador *n*, con la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que se van dibujando.

Se espera que A1 y B1 comenten que *S* calcula la suma de las medidas de las áreas de las losetas inscritas a la terraza (o que se ubican por debajo de la curva, o ubicados dentro de la terraza, o de otra manera). Es probable que los estudiantes solo mencionen que *S* calcula la medida del área de los rectángulos (o losetas) sin mencionar alguna característica sobre su posición en la terraza.

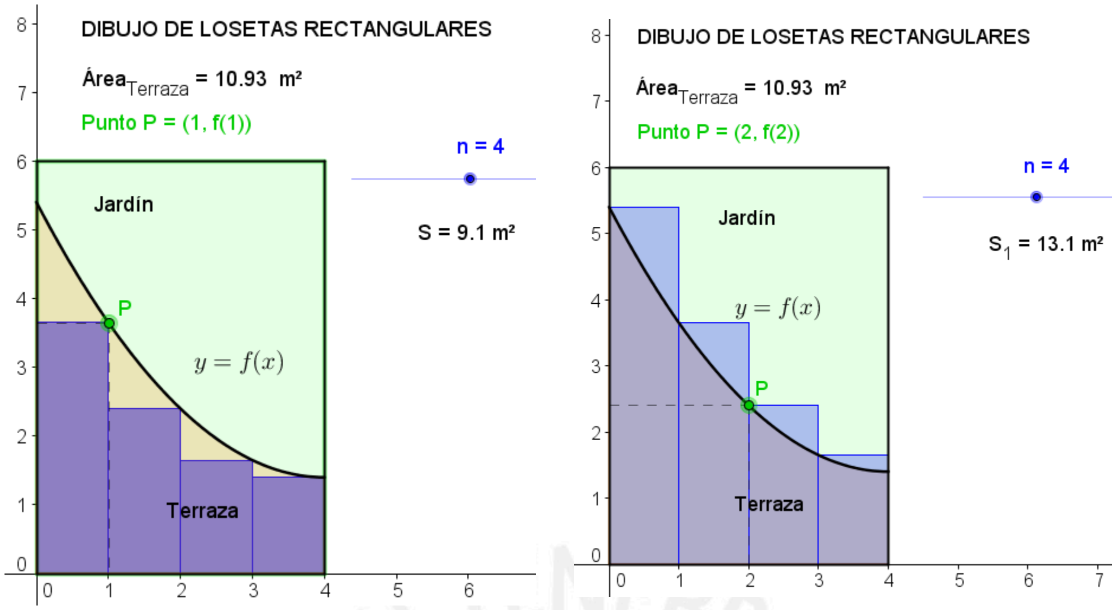
Se espera que A2 y B2 comenten que S_1 calcula la suma de las medidas de las áreas de las losetas circunscritas a la terraza (o que se ubican por encima de la curva, o que sobrepasan la terraza, o de otra forma). Es probable que los estudiantes solo mencionen que S_1 calcula la medida del área de los rectángulos (o losetas) sin mencionar alguna característica sobre su posición en la terraza.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* de la situación 1 al relacionar el valor numérico mostrado en el GeoGebra con la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos

Descripción y análisis a posteriori

Los estudiantes movilizaron el deslizador *n* y observaron cómo se dibujaban los rectángulos dinámicamente.

La figura 66 muestra lo que observaron los estudiantes en el monitor de la computadora, por ejemplo para $n = 4$.



(a) (b)

Figura 66. (a) Rectángulos inscritos. (b) Rectángulos circunscritos.

Luego de movilizar el deslizador *n*, tres de los cuatro estudiantes describieron a S y a S_1, como la medida del área de las losetas (ver figura 67). Sin embargo, el estudiante A1 describió de forma escrita y oralmente lo siguiente: “creo que está calculando el área aproximada de la terraza”. La respuesta dada por estudiantes fue prevista por el profesor – investigador.

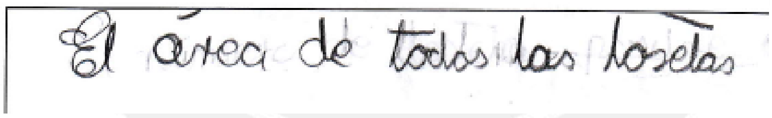

El área de todas las losetas

Figura 67. Interpretación de S_1 dada por A2.

Los estudiantes están acostumbrados a responder según lo que ven y de forma muy sintética; posiblemente si hubieran tenido los dos tipos de aproximaciones hubieran tratado de distinguirlos y describir qué diferencia encontraban entre ambos. El profesor – investigador intervino en el desarrollo de dicho ítem y le preguntó a cada estudiante: ¿podrías describir cómo se colocan las losetas en la terraza? A1 y B1 comentaron que las losetas están debajo de la curva; A2 y B2 comentaron que las losetas se salen de la terraza.

Resaltamos que A1 no solo se fijó en que el valor numérico mostrado calcula la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos, sino que ese número es una aproximación de la medida del área de la terraza; afirmamos que al comunicar al profesor –

investigador dicha conjetura a partir de lo desarrollado en el ítem A1 llegó a la *fase de formulación* de la situación 1.

En general afirmamos que los estudiantes se ubicaron en la *fase de acción* de la situación 1 ya que relacionaron correctamente el valor numérico con la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos.

b. Dibuje cuatro losetas con el deslizador n.

(i) ¿Las alturas de las losetas son las imágenes de f en el extremo derecho o izquierdo de cada base?

(ii) Exprese S (o S_1, para la otra pareja) como la suma de las áreas de cada una de las losetas dibujadas.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajarán de forma individual ya que se espera que en el ítem d, al trabajar en parejas, comparen sus procedimientos y resultados. Asimismo se pondrán en contacto con la variable "número de rectángulos de aproximación" trabajando solo con cuatro rectángulos. Los sub – ítems de este ítem forman parte de la situación 2.

Con el sub – ítem (i) se pretende observar si los estudiantes identifican de qué extremo de la base se está obteniendo la imagen de la función para calcular la altura del rectángulo.

Se espera que A1 y B1 reconozcan que las alturas de las losetas son las imágenes de *f* en el extremo derecho de cada base, y que A2 y B2 reconozcan que las alturas de las losetas son las imágenes de *f* en el extremo izquierdo de cada base. Pensamos que los estudiantes no presentarán dificultades en reconocer lo mencionado anteriormente ya que en la tarea 1 de la actividad, el profesor – investigador intervino para mostrarles a los estudiantes cómo relacionar la altura del rectángulo con la imagen de la función en el extremo derecho de cada base. Posiblemente A2 y B2 presenten dificultades ya que en su caso trabajan con la imagen en el extremo izquierdo de la base.

Con el sub – ítem (ii) se pretende analizar si los estudiantes son capaces de plantear la suma de las medidas de las áreas de cuatro rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Se espera que A1 y B1 expresen la suma S de la siguiente manera: $S = 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3) + 1\times f(4)$ m^2. Pensamos que los estudiantes no presentarán dificultades en el desarrollo del sub – ítem, ya que la forma en la que se dibujan las losetas es similar a lo explicado en la tarea 1. Se espera que A2 y B2 expresen S_1 de la siguiente manera: $S_1 = 1\times f(0) + 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3)$ m^2. Es probable que presenten dificultades para expresar las alturas de las losetas como imágenes de la función en el extremo izquierdo de cada base, porque la forma de dibujar las losetas es diferente a lo explicado en la tarea 1.

Cabe la posibilidad de que se cometan algunos errores ya que es la primera vez que los estudiantes expresan una suma de las medidas de las áreas de rectángulos como una adición de términos compuestos por imágenes de la función. Además, en la tarea 1 se trabajó solo con un rectángulo y en este sub –ítem se trabaja con cuatro.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de acción* de la situación 2, si relacionan la altura de cada rectángulo con la imagen de la función en alguno de los extremos de la base y si realizan algún planteamiento que represente la adición de las medidas de las áreas de los cuatro rectángulos (este planteamiento podría tener algún tipo de error, sobre todo al reconocer la altura como imagen). Si los estudiantes comunican al profesor – investigador que las alturas de los rectángulos son las imágenes de la función en el extremo derecho (o izquierdo) de cada base y plantean correctamente la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas individuales se ubicarán en la *fase de formulación* de la situación 2.

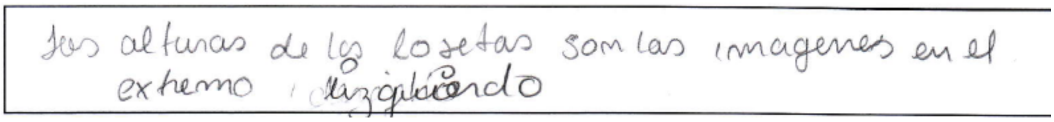
Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el texto del sub – ítem (i) y de dibujar cuatro rectángulos con el deslizador *n* para cada *applet* (ver figura 66), A1, A2 y B2 no presentaron dificultades para responder correctamente; solamente B1 contestó que eran las imágenes en el extremo izquierdo, siendo en su caso en el extremo derecho. Las respuestas dadas por los estudiantes fueron previstas parcialmente por el profesor – investigador ya que no se esperaba que el estudiante B1 se equivocara. El profesor – investigador no intervino por dos motivos: el primero era observar si modificaba su respuesta al trabajar el sub – ítem (ii) ya que en ese caso iba a plantear la medida del área de cada rectángulo; y en segundo lugar, observar si se presentaban dificultades en los otros estudiantes al trabajar el sub - ítem (ii), de modo que se tenga realizar una intervención más general del profesor – investigador.

La figura 68 muestra las respuestas dadas por dos estudiantes en ambos casos.


En el extremo derecho

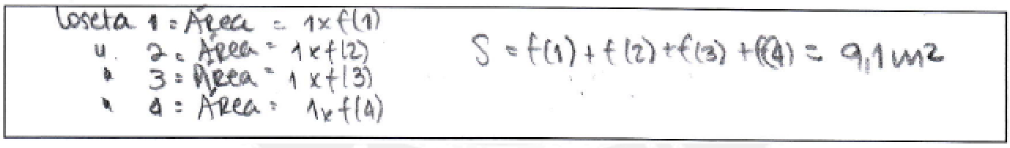
(a)


Las alturas de las losetas son las imagenes en el extremo izquierdo

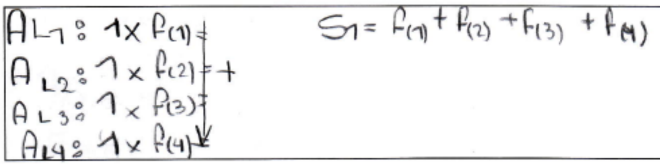
(b)

Figura 68. (a) Extremo de la base según A1. (b) Extremo de la base según B2.

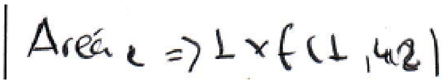
En el desarrollo del sub – ítem (ii), A1 expresó la suma S correctamente; sin embargo, A2 planteó la suma S_1 tomando de forma equivocada las imágenes de la función. B1 y B2 también se equivocaron en el planeamiento, trataron de plantear ambas sumas como en la tarea 1, con un solo término. La figura 69 muestra cómo plantearon individualmente S y S_1 como una adición de las medidas de cada uno de los cuatro rectángulos dibujados (en la figura 64 se pueden observar los cuatro rectángulos observados por los estudiantes).


Loseta 1 : Área = 1 × f(1)
" 2 : Área = 1 × f(2)
" 3 : Área = 1 × f(3)
" 4 : Área = 1 × f(4)
S = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 9,1 m2

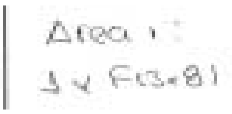
(a)


AL1 : 1 × f(1)
AL2 : 1 × f(2)
AL3 : 1 × f(3)
AL4 : 1 × f(4)
S1 = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)

(b)


Área1 => 1 × f(1,42)

(c)


Área 1:
1 × F(3,8)

(d)

Figura 69. (a) S según A1 (b) S_1 según A2 (c) S según B1 (d) S_1 según B2

Una vez terminado el desarrollo del sub - ítem (ii), el profesor – investigador juntó a los integrantes de cada dupla para que comparen sus resultados y vean las dos formas en las cuales se colocaron los rectángulos. Esto se hizo porque se observó muchas dificultades en el planteamiento de cada suma y era necesario realizar una intervención más general para que en el desarrollo del siguiente ítem no se vuelvan a cometer los mismos errores.

A1 y A2 compararon sus resultados y se dieron cuenta de que eran iguales. Luego de comparar la colocación de las losetas en cada *applet*, A1 le dijo a A2: "la altura del primer rectángulo es $f(0)$"; en ese momento A2 se dio cuenta que se había equivocado al tomar mal la imagen de la función.

En la otra dupla no hubo intercambio de información porque ningún integrante sabía qué hacer, solo B1 se dio cuenta que había cometido un error en el sub – ítem (i) y lo rectificó. El profesor – investigador intervino para explicar a la dupla B cómo tenían que realizar ese tipo de planteamientos. Les hizo notar que habían colocado correctamente la medida de la base de cada rectángulo, pero que las sumas S y S_1 estaban compuestas de cuatro términos, cada uno de ellos correspondía a la medida del área de cada rectángulo. Como B1 ya había corregido su error y ya sabía que las alturas de los rectángulos eran las imágenes de la función en el extremo derecho de cada base, se le preguntó cuál era la altura de la primera loseta; el estudiante respondió que $f(1)$. Luego por ellos mismos se dieron cuenta que en un caso $S = f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$ y en el otro $S_1 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$. B1 y B2 comentaron que entendieron la explicación; que ellos creyeron que debían utilizar lo visto en el ítem anterior y estaban buscando la forma de expresar ambas sumas como una sola medida de área.

Podemos afirmar que los resultados de la dupla A fueron previstos por el profesor – investigador; sin embargo, no se previeron los resultados de la dupla B.

Luego de la comunicación entre ambos integrantes, observamos que la dupla A determinó correctamente la medida de la base, reconoció la altura como la imagen de la función y planteó la suma como una adición de término; sin embargo, la dupla B solo obtuvo correctamente la medida de la base.

Podemos afirmar que la dupla A llegó a la *fase de formulación* de la situación 2; pero la dupla B solo llegó a la *fase de acción* de la misma situación ya que no hubo una comunicación o intercambio de información certera entre los integrantes de la dupla.

c. El señor Martínez desea enchapar la terraza con losetas rectangulares, con la condición de que la región de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas sea (o que las partes de las losetas que sobrepasan la terraza, para la otra pareja) la menor posible

(i) ¿Cuántas losetas cree usted que se deberían dibujar con el deslizador n para esto ocurra? Justifique.

(ii) Exprese S (o S_1, para la otra pareja) como la suma de las áreas de cada una de las losetas dibujadas. Justifique.

(iii) Calcule el área de la terraza que queda sin cubrir por las losetas (o el área de las partes de las losetas que sobrepasan a la terraza, para la otra pareja) dibujadas en (i).

(iv) Si se dibujaran más losetas de las permitidas por n, ¿el valor hallado en el sub – ítem (iii): aumentaría, disminuiría, o permanecería igual? Explique.

Análisis a priori

En este ítem se trabajará de forma individual ya que se espera que en el ítem d, al trabajar en parejas, comparen sus procedimientos y resultados. Asimismo el profesor investigador cambiará la variable didáctica “número de rectángulos de aproximación” para un número de rectángulos mayor a cuatro. Los sub – ítems de este ítem forman parte de las situaciones 1 y 2.

Con el sub – ítem (i) se pretende observar si los estudiantes identifican las expresiones: “la región de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas sea la menor posible” y “las partes de las losetas que sobrepasan la terraza sea la menor posible”, con áreas determinadas de la figura mostrada en el monitor de sus computadoras. Es importante que el estudiante identifique dichas regiones porque calculará la medida de sus áreas al incrementar el número de rectángulos. Dicha medida le dará la idea de que se aproxima cada vez más a la medida del área (esto lo analizará en la actividad 3). Este sub – ítem corresponde a la situación 1.

Se espera que los estudiantes manipulen el deslizador *n* y dibujen hasta ocho losetas (máximo valor que toma *n*).

Como A1 y B1 trabajarán con el mismo *applet*, se espera que concluyan que dibujando ocho losetas el área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas es el menor posible. Se espera que justifiquen gráficamente, indicando que al dibujar más losetas se cubre más espacio de la terraza; o analíticamente indicando que la suma S aumenta a medida que n aumenta, es decir, la diferencia entre la medida del área y su aproximación es menor. Es probable que mencionen que la mínima diferencia es 10,93 – 9,98 = 0,95 m^2. Como A2 y B2 trabajaron con el mismo *applet*, se espera que concluyan que dibujando ocho losetas el área de las losetas que sobrepasan la terraza es la menor posible. Se espera que justifiquen gráficamente, indicando que al dibujar más losetas estas tendrán una base menor, lo cual hace que las partes de las losetas que sobrepasan la terraza sean menores; o analíticamente indicando que la suma S_1 disminuye a medida que n aumenta, es decir, la diferencia entre la medida del área y su aproximación es menor. Es probable que mencionen que la mínima diferencia es 11,98 – 10,93 = 1,05 m^2. Es probable que solo presenten como respuesta: ocho losetas, y no redacten la justificación, sino que lo expresen oralmente.

Con el sub – ítem (ii), luego de cambiar la variable “número de rectángulos de aproximación” a ocho rectángulos que es lo máximo que mostrado en el programa (según lo diseñado por el profesor – investigador), se pretende observar si los estudiantes intuyen que la medida de la base de cada rectángulo disminuye, que el número de términos de la adición aumenta, y que las imágenes de la función dependen de la partición regular generada por los rectángulos en el eje x. Este sub – ítem corresponde a la situación 2.

Se espera que los estudiantes logren expresar la suma de las medidas de las áreas de las ocho losetas como una adición de las medidas de las áreas de cada una de ellas, ya que se realizó una breve explicación al respecto en el ítem anterior. Sin embargo, es probable que presenten dificultades para plantear las sumas S o S_1, ya que en el ´tem anterior se trabajó con rectángulos cuyas bases medían 1 m. y los valores generados por la partición regular del eje x eran números enteros. Al cambiar la variable didáctica, la medida de la base de cada rectángulo disminuye ocasionando con ello que las imágenes de la función dependan de la partición generada en el eje x por los ocho rectángulos, siendo estos números racionales. Pensamos que por ese motivo los estudiantes presentarán dificultades.

Es probable que haya estudiantes que no se percaten que el ancho del patio mide 4 m. y asuman 1 m. como medida de cada uno de los ocho rectángulos, en vez de 0,5 m. También es probable que haya estudiantes que asuman como las alturas de los rectángulos, la imagen de la función para valores de x iguales a 0, 1, 2,…, 8. Ambos errores podrían aparecer al intentar repetir lo trabajado en el sub – ítem anterior, dándonos la idea de que los estudiantes realmente no comprendieron la explicación dada por el profesor - investigador.

Se espera que A1 y B1 no presenten dificultades para determinar las alturas de cada loseta, ya que son las imágenes en el extremo derecho de cada base (se puede observar la curva, ya que los rectángulos se inscriben a la terraza); sin embargo, A2 y B2 podrían presentar dificultades porque las alturas de los rectángulos son las imágenes en el extremo izquierdo de cada base (no se observa claramente la curva, ya que los rectángulos se circunscriben a la terraza).

Se espera que los estudiantes planteen lo siguiente para las sumas S y S_1:

- $S = 0{,}5\times f(0{,}5) + 0{,}5\times f(1) + 0{,}5\times f(1{,}5) + 0{,}5\times f(2) + 0{,}5\times f(2{,}5) + 0{,}5\times f(3) + 0{,}5\times f(3{,}5) + 0{,}5\times f(4)\ \text{m}^2$.
- $S_1 = 0{,}5\times f(0) + 0{,}5\times f(0{,}5) + 0{,}5\times f(1) + 0{,}5\times f(1{,}5) + 0{,}5\times f(2) + 0{,}5\times f(2{,}5) + 0{,}5\times f(3) + 0{,}5\times f(3{,}5)\ \text{m}^2$.

Sin embargo, pensamos que la mayoría de estudiantes no logrará hacerlo.

Con el sub – ítem (iii) se pretende evidenciar que el estudiante reconoce qué área queda sin cubrir por las losetas o qué área corresponde a las partes de las losetas que sobrepasan la terraza; y que saben cómo calcular la medida de dichas áreas. Este sub – ítem corresponde a la situación 1.

Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para obtener las medidas pedidas. Se espera que A1 y B1 señalen que la medida del área de la terraza que queda sin cubrir por las losetas es 10,93 – 9,98 = 0,95 m^2; y que A2 y B2 señalen que la medida del área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza es 11,98 – 10,93 = 1,05 m^2.

Con el sub – ítem (iv) se pretende analizar qué intuye el estudiante acerca de la diferencia entre la medida del área y su aproximación cuando se dibujan más de ocho rectángulos (el *applet* está diseñado para dibujar ocho rectángulos como máximo). Este sub – ítem corresponde a la situación 1

Se espera que A1 y B1 no presenten dificultades para indicar que si el número de losetas es mayor a ocho, la medida del área de la terraza que queda sin cubrir por ellas será menor a 0,95 m^2. Del mismo modo para A2 y B2, se espera que indiquen que si el número de losetas es mayor a ocho, la medida del área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza será menor a 1,05 m^2. Es probable que justifiquen su respuesta señalando que si el número de losetas se incrementa, el área de la terraza no cubierta por las losetas o las partes de las losetas que quedan fuera se hacen más pequeñas.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* para la situación 1 si intuyen que se necesitan ocho losetas para que la región de la terraza que queda sin cubrir y las partes de las losetas que sobrepasan a la terraza sean las menores posibles; si calculan correctamente la medida del área para esas regiones cuando se dibujan ocho rectángulos; y si señalan que las medidas de dichas áreas disminuyen si se dibujaran más rectángulos. Los estudiantes se ubicarán en la *fase de validación* si además señalan que la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación se aproxima a cero o si indican que S y S_1 se aproximan a la medida del área de la terraza.

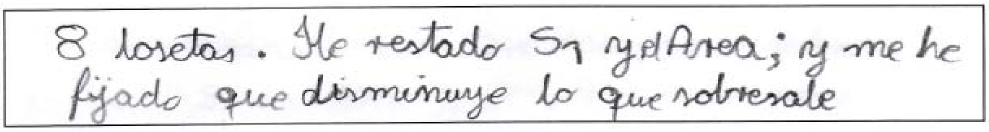
Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* para la situación 2 si plantean una adición de términos para cada suma y son capaces de explicar al profesor - investigador cuál fue su procedimiento. Los estudiantes alcanzarán la *fase de acción* si intentan realizar un planteamiento coherente utilizando las imágenes de la función.

Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el texto del sub – ítem (i) y de mover el deslizador n tomando valores desde 1 hasta 8, todos los estudiantes respondieron que con ocho losetas la región que queda sin cubrir y las partes de las losetas que sobrepasan la terraza son las menores. Esta respuesta fue prevista por el profesor – investigador.

Concluimos que los estudiantes identificaron sin dificultad a qué área se referían las expresiones: “la región de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas sea la menor posible” y “las partes de las losetas que sobrepasan la terraza sea la menor posible”. Asimismo, se notificó que los estudiantes realizaron dos tipos de análisis: gráfico y analítico, para darse cuenta que con ocho losetas las áreas señaladas eran las menores.

Se le preguntó a cada estudiante por la justificación de la respuesta y atinaron a comentar que al aumentar los rectángulos los espacios se hacen más pequeños, o que el sobrante de las losetas disminuye; la respuesta dada vino acompañada de la manipulación del deslizador. Al preguntarles por qué sucedía eso, no supieron qué responder. Ningún estudiante mencionó que las bases de las losetas disminuían o que los rectángulos se hacían más estrechos. La figura 70 muestra la respuesta dada por A2 y B1.



(a)

(b)

Figura 70. (a) Rpta. de A2 al sub – ítem 2c (i). (b) Rpta. de B1 al sub – ítem 2c (i).

Luego de leer el texto del sub – ítem (ii), los estudiantes empezaron a desarrollar la pregunta. Esta vez tres de los estudiantes colocaron ocho términos en la adición y uno solo colocó trece términos, pero ningún estudiante expresó correctamente las sumas S o S_1 como una adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo. Se presentaron los siguientes errores:

- Solo A2 obtuvo correctamente la medida de la base de cada rectángulo. A1 colocó como medida de cada base 1 m.; B1 mostró bases que se incrementaban en 0,5 m.; y B2 igualó la medida de cada base al valor de x generado por la partición regular.
- A1 y B1 obtuvieron correctamente las alturas de cada rectángulo. A2 tomó para calcular las alturas de los rectángulos las imágenes de la función en x: 0, 1, 2,…, 7, y B2 tomó valores de x dispersos.

La figura 71 muestra las ocho losetas vistas por los integrantes de cada dupla, y las respectivas medidas de las áreas de cada una de ellas propuestas por los estudiantes.

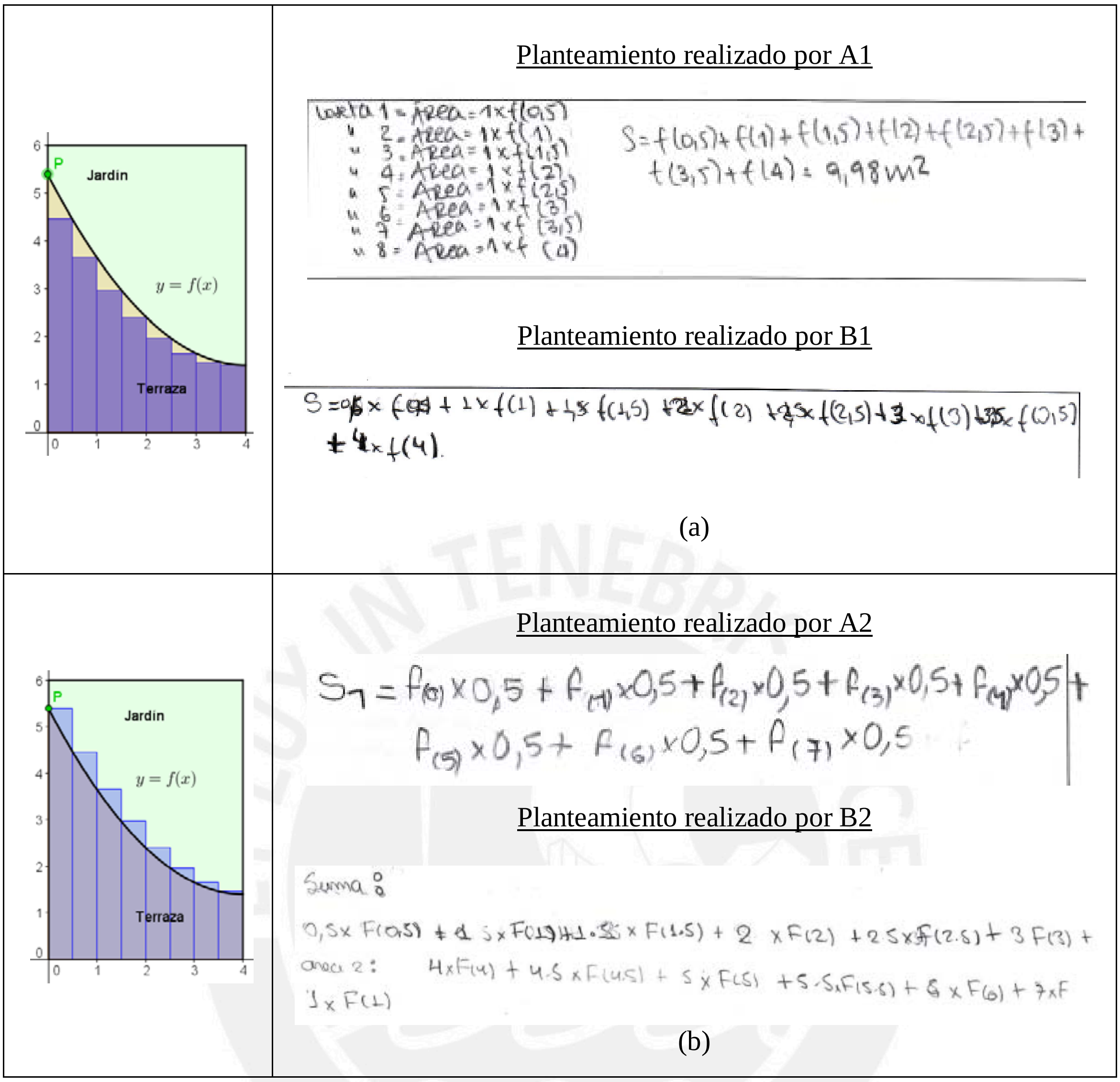


Figura 71. (a) Adición de medidas de áreas para rectángulos inscritos a la terraza. (b) Adición de medidas de áreas para rectángulos circunscritos a la terraza.

Las dificultades que posiblemente aparecerían fueron previstas por el profesor – investigador; sin embargo, no fue previsto que ningún estudiante iba a conseguir realizar un planteamiento correcto.

Pensamos que los errores aparecieron porque los estudiantes buscan modelos ya enseñados para adaptarlos a un nuevo modelo; por ejemplo, que hayan colocado que las bases miden 1m. o que la base sea igual al valor de *x* de la partición. En el primer caso asumimos que es por el ítem anterior que se trabajó con bases de 1 m., y en el segundo, por el cálculo de la medida del área del rectángulo dibujado en la tarea 1.

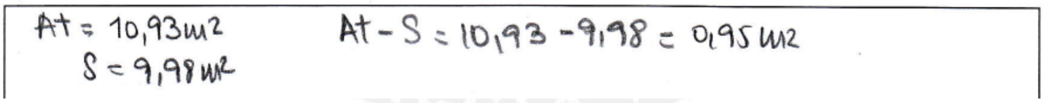
El profesor – investigador les preguntó a los integrantes de la dupla B si la medida de la base de cada uno de los ocho rectángulos dibujados iba aumentando; ellos dijeron que no y se sorprendieron de haber colocado esas medida. De igual modo, se le preguntó a

A2 cómo había hallado que la base medía 0,5 m., y él comentó según el dibujo que “dos losetas entran en 1 (señalando la primera partición regular del eje *x*)”; luego se le preguntó por qué había tomado las imágenes para *x* iguales a 5, 6 y 7, y él respondió que estaba pensando en el número de rectángulos.

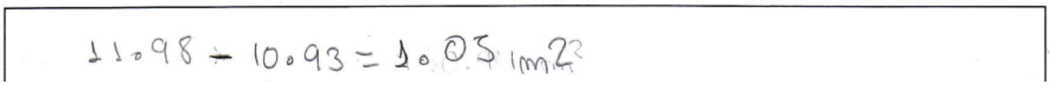
En ese momento el profesor intervino y les preguntó de forma general a todos los estudiantes: ¿las bases de los ocho rectángulos tienen la misma medida o no? A2 dijo: “sí, y miden 0,5 m.”, todos los estudiantes estuvieron de acuerdo. Luego, el profesor – investigador dibujó con el GeoGebra ocho rectángulos de alturas iguales a la imagen de la función en el extremo derecho de cada base (aproximación por defecto) y lo mostró en el monitor de su computadora. Les preguntó a los estudiantes: ¿cuál es la altura del primer rectángulo?, B1 contestó: “*f* (0,5)”; luego le preguntó a B2: ¿y del segundo?, B2 contestó: “*f* (1)”. Entonces, el profesor – investigador les explicó que como hay ocho rectángulos, la adición debe tener ocho términos; que la idea es plantear la medida del área de cada rectángulo de forma individual y luego sumarlas.

Corroboramos que luego de cambiar la variable “número de rectángulos de aproximación” se intensificaron los errores referidos al cálculo de medidas de áreas.

Luego de leer el texto del sub – ítem (iii), todos los estudiantes identificaron sin dificultad qué medida de área se pedía calcular y lo calcularon correctamente según lo previsto por el profesor - investigador. La figura 72 muestra la respuesta dada dos de los estudiantes.



(a)



(b)

Figura 72. (a) Área sin cubrir según A1. (b) Área que sobrepasa la terraza según B2.

Finalmente, luego de leer el texto del sub – ítem (iv), todos los estudiantes indicaron que al aumentar el número de rectángulos a más de ocho, la medida hallada en el sub – ítem anterior disminuiría; esta respuesta fue prevista por el profesor investigador. La figura 73 muestra algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

Disminuiría, ya que se haría más el área de las losetas y por lo tanto el área de la terraza que quedaría sin cubrir sería menos.

(a)

yo creo que disminuye porque si aumentan sus losetas disminuye su valor, debido a que las areas de la loseta disminuyen,

(b)

Figura 73. (a) Área sin cubrir según A1. (b) Área que sobrepasa según B2.

Podemos afirmar que gracias a las bondades del GeoGebra, al permitir trabajar con representaciones dinámicas de geometría, les facilitó a los estudiantes poder intuir rápidamente que la medida del área hallada en el sub – ítem anterior disminuye a medida que el número de rectángulos aumenta, sin realizar manualmente ningún cálculo o gráfica.

Podemos afirmar, luego del desarrollo del ítem, que los estudiantes manipularon los deslizadores y eligieron ciertos valores para responder a las preguntas; que relacionaron el área y su medida de forma verbal, gráfica y numérica; y que intuyeron que a medida que el número de rectángulos se incrementa, la diferencia entre la medida del área y su aproximación disminuye. Sin embargo, tres estudiantes no lograron calcular correctamente la medida de la base de cada rectángulo; dos no pudieron relacionar correctamente la altura de cada rectángulo como la imagen de la función en alguno de los extremos de la base; y ninguno pudo realizar un buen planteamiento de la suma de las medidas de las áreas de los ocho rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de formulación* de la situación 1 porque reconocieron ciertas regiones, calcularon la medida de sus áreas e intuyeron que dichas medidas disminuirían al aumentar el número de rectángulos de aproximación.

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de acción* de la situación 2 porque hubo un intento por expresar ambas sumas como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos, sin embargo no se consiguió hacerlo correctamente habiéndose dado una explicación previa en un ítem anterior.

d. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en la pregunta 2 c., responda a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuántas losetas se deberían dibujar con n y en qué forma se deberían ubicar en la terraza, de modo que la suma áreas de todas ellas se aproxime más al área de la terraza? Justifique.

(ii) Si se colocaran más losetas de las permitidas por n, ¿qué cree usted que suceda con los valores de S y S_1: se alejarían, llegarían a ser iguales, se acercarían pero no llegarían a ser iguales? Explique.

Análisis a priori

En este ítem se trabajará en parejas ya que para su desarrollo se necesita de la información obtenida de forma individual por cada integrante. Luego se procederá a una discusión grupal para corroborar y estandarizar ciertos resultados. El profesor investigador cambiará el valor de la variable didáctica "número de rectángulos de aproximación" para un número de rectángulos mayor a ocho. Los sub – ítems de este ítem forman parte de la situación 1.

Con el sub – ítem (i) se pretende observar si el estudiante reconoce cuándo una aproximación es mejor que otra; se procura analizar de qué manera justifica su elección; si lo hace a partir de mismo gráfico o si utiliza el valor de la diferencia entre la medida del área de la terraza y la suma de las medidas de las áreas de los ocho rectángulos.

Se espera que los estudiantes reunidos en parejas manipulen el deslizador *n* diseñado para cada *applet*, muestren sus resultados escritos en el material y compartan lo que entienden por las sumas S y S_1.

Luego, se espera que utilicen el valor hallado de la diferencia entre la medida del área y su aproximación para ocho rectángulos en el sub – ítem (iii) del ítem b, y justifiquen que el menor de ellos es el que más se aproxima a la medida del área de la terraza. Se espera que den como respuesta que se necesitan ocho losetas; que lo justifiquen numéricamente comparando ambos valores: 0,95 m^2 cuando la aproximación es por defecto y 1,05 m^2, si es por exceso. Asimismo, elijan los rectángulos inscritos a la región como los que brindan la mejor aproximación.

Con el sub – ítem (ii) se pretende observar si el estudiante reconoce o intuye que al aumentar el número de rectángulos, las sumas S y S_1 se están aproximando al mismo valor y si podría darse el caso que lleguen a ser iguales. Para este caso hemos cambiado la variable didáctica “número de rectángulos de aproximación” para valores mayores a 8. Se pretende analizar si el estudiante reconoce o intuye que al aumentar el número de rectángulos, las sumas S y S_1 se están aproximando al mismo valor y si podría darse el caso que lleguen a ser iguales.

Como los estudiantes observarán en sus computadoras que a medida que el número de rectángulos aumenta, la suma S aumenta y los rectángulos que se dibujan van reduciendo los espacios de la terraza que no se cubren por las losetas, y la suma S_1 disminuye y las partes de las losetas que sobrepasan la terraza se hacen cada vez más pequeñas; se espera que los estudiantes afirmen, intuitivamente, que los valores de las sumas S y S_1 se acercan cada vez más pero por utilizar rectángulos nunca llegarán a ser iguales.

Es probable que algunos estudiantes piensen que dichas sumas sí podrían llegar a ser iguales y empleen un razonamiento más analítico donde intenten calcular el número de rectángulos para que esto ocurra. Es posible que los estudiantes presenten dificultades para dar su respuesta porque no tienen valores numéricos que comparar.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* de la situación 1 si comparan los resultados obtenidos y eligen la menor diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación; asimismo, si indican que ambas sumas se aproximan pero no llegarán a ser iguales sin brindar ninguna justificación. En cambio, si los estudiantes advierten el uno al otro que la suma S aumenta y que la suma S_1 disminuye al aumentar el número de rectángulos, y por lo tanto se están aproximando cada vez más a la medida del área de la terraza, se ubicarán en la *fase de validación* de la situación 1.

Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el texto del sub – ítem (i), ambas duplas compartieron lo que habían hecho en los ítems anteriores.

Los estudiantes ya sabían que uno trabajaba con losetas inscritas a la terraza y el otro, con losetas circunscritas. A1 le dijo a A2: “en mi caso S aumenta y el área de los huecos es 0,95”, A2 le respondió: “acá S_1 disminuye y lo que sobra es 1,05”. Una conversación similar ocurrió en la otra dupla. Las respuestas dadas por los estudiantes fueron previstas por el profesor – investigador.

La figura 74 muestra la respuesta dada por la dupla A.

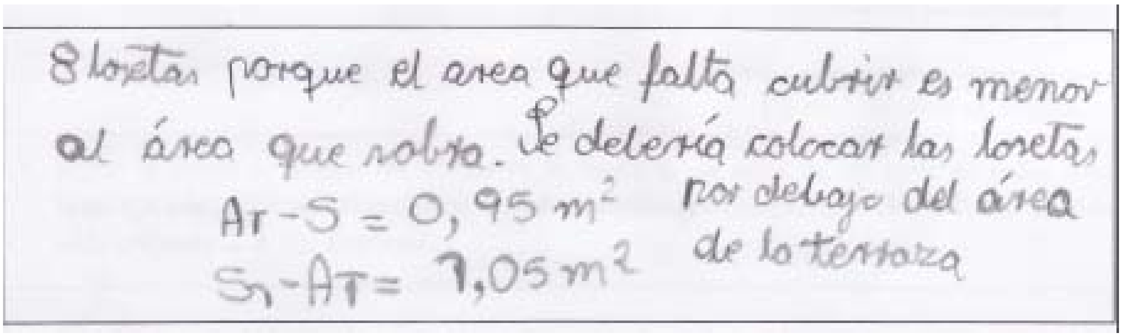

8 losetas porque el area que falta cubrir es menor
al área que sobra. Se debería colocar las losetas
$A_T - S = 0,95\ m^2$ por debajo del área
$S_1 - A_T = 1,05\ m^2$ de la terraza

Figura 74. Mejor aproximación de la terraza

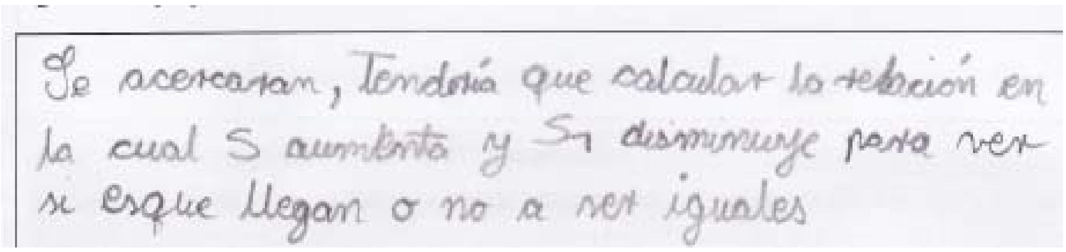
Luego de leer el texto del sub – ítem (ii), ambas duplas compartieron sus ideas para dar respuesta a pregunta planteada. Cada dupla abordó el sub – ítem bajo los dos diferentes tipos de razonamiento: gráfico y analítico.

Los integrantes de la dupla A discutieron sobre la probabilidad de que las sumas S y S_1 lleguen a ser iguales. A1 escribió en su material impreso: “se acercarían, posiblemente llegarían a igualarse en un momento determinado. Quizás cuando lleguen a aumentarse 3 losetas más”. A2 le comentó al profesor investigador lo siguiente: “tendría que ver la relación que hay, o sea en cuánto aumenta en el caso de mi compañera, y en el mío en cuánto disminuye, para ver si en algún momento llegan a ser iguales o no”. El profesor – investigador le preguntó a A2 por la forma en que hallaría tal relación, este respondió lo siguiente: “primero, en n igual a 8, (S) es 9,98; en n (igual a) 7 es 9,84, entonces lo resto y veo de cuánto en cuánto va aumentando por cada loseta, y si la relación es similar para el otro, va a llegar a ser la misma cantidad”.

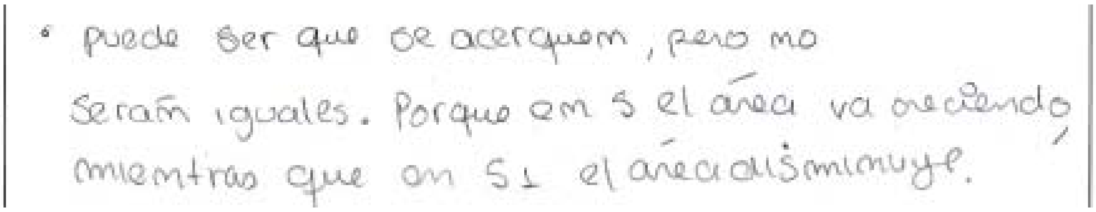
Los integrantes de la dupla B realizaron un análisis gráfico y mencionaron que las sumas S y S_1 se aproximarían; sin embargo, presentaron dudas al indicar que nunca llegarían a ser iguales por la forma de los rectángulos.

Ambas respuestas dadas por los estudiantes fueron previstas por el profesor investigador.

La figura 75 muestra los resultados de ambas duplas.


Se acercarán, Tendría que calcular la relación en
la cual S aumenta y S_1 disminuye para ver
si esque llegan o no a ser iguales

(a)


• puede ser que se acerquen, pero no serán iguales. Porque en S el área va creciendo mientras que en S_1 el área disminuye.

(b)

Figura 75. (a) Rpta. de la dupla A a 2d (ii). (b) Rpta. de la dupla B a 2d (ii).

Luego del intercambio de información entre parejas, se procedió a una discusión grupal que fue moderada por el profesor – investigador.

En relación al sub – ítem (i), la dupla B mencionó que la mejor aproximación se consigue colocando ocho losetas por debajo de la curva (rectángulos inscritos al área) ya que la diferencia entre la medida del área de la región y su aproximación es menor que cuando se colocan de la otra manera (rectángulos circunscritos al área). La dupla A corroboró lo mencionado por ellos.

El profesor investigador confirmó lo dicho por ambas duplas acerca de los dos tipos de aproximación; mencionó que el visto por A1 y B1 era una aproximación por defecto; y lo visto por A2 y B2, por exceso.

En relación al sub – ítem (ii), la dupla A mencionó la posibilidad de que ambas sumas, S y S_1, sean iguales y A2 explicó su procedimiento de comprobación. B2 comentó "nosotros creemos que no serán iguales porque son rectángulos", B1 dijo "siempre habrá huecos". La dupla A se dio cuenta del análisis hecho por la otra dupla y comentaron que tenía sentido lo que dijeron.

El profesor – investigador le comentó a los integrantes de la dupla A que el procedimiento empleado para verificar si ambas sumas llegarían a ser iguales no era correcto por que el aumento en un caso y la disminución en el otro, no era constante; que su planteamiento serviría si el borde superior de la terraza fuera una recta. No se realizó ningún comentario más, para no adelantar lo que se vería en la siguiente actividad.

Afirmamos que los estudiantes tienen clara la idea de aproximación a la medida del área. Los estudiantes intuyeron que cuánto más pequeña sea la diferencia entre la medida del área y la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos de aproximación, la aproximación es mejor.

Notamos también que al cambiar el valor de la variable "número de rectángulos de aproximación" para valores mayores a los mostrados por el GeoGebra, los estudiantes se vieron en la necesidad de cambiar sus estrategias para tratar de brindar una respuesta. Percibimos que los estudiantes comprenden que se está realizando una aproximación con rectángulos, pero todavía no tiene claro el procedimiento ni los resultados que se esperan obtener. Al no contar con valores numéricos que comparar y trabajar con un número pequeño de rectángulos, los estudiantes no pudieron dar una respuesta certera a la última pregunta; vemos que existe la necesidad de incrementar el número de rectángulos para analizar si los estudiantes brindan una respuesta más segura acerca del procedimiento de aproximación que intentamos que aprendan.

Afirmamos que los estudiantes adquirieron la noción de que al aumentar el número de rectángulos la aproximación mejora.

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de formulación* de la situación 1 porque comunicaron al compañero de dupla lo que cada uno observó en el *applet* que trabajó, y formularon una conjetura como respuesta a la pregunta sin tener valores numéricos que la avalen.

Luego de la discusión entre duplas desarrollada al finalizar el ítem d, el profesor – investigador realizó una *institucionalización local* a partir de los resultados obtenidos por los estudiantes a lo largo de toda la actividad 2. Primero se preguntó a los estudiantes qué era lo nuevo que habían visto en el desarrollo de la actividad: ellos mencionaron el trabajo con la computadora, el dibujo de rectángulos, calcular las medidas de las áreas de los rectángulos (no mencionaron nada acerca de un procedimiento de aproximación). A continuación, el profesor – investigador les señaló que uno de los objetivos de esta actividad era introducirlos a la noción de aproximación mediante rectángulos. La idea de ir aumentando el número de losetas que se colocan en el piso de la terraza era que notaran qué estaba pasando con los espacios no cubiertos por ellas (o qué pasaba con las partes de las losetas que sobresalían de la terraza); les dijo que ustedes concluyeron que esos espacios vacíos en la terraza o las partes de las losetas que excedían a la terraza se iban reduciendo. Les comentó que esa reducción nos da la idea de aproximación ya sea por defecto o por exceso.

Asimismo, el profesor – investigador les señaló que el otro objetivo de esta actividad era introducirlos al planteamiento de la adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo dibujado. La forma en que se colocaron las losetas rectangulares, haciendo coincidir uno de los vértices del lado superior de cada rectángulo con el borde superior de la región, se realizó para que puedan relacionar la altura de cada rectángulo con la imagen de la función. Se les dijo que la expresión que ellos obtuvieron calculaba el valor numérico mostrado por el GeoGebra, que si hubieran conocido la regla de correspondencia de la función, lo hubieran corroborado.

Finalmente, se mencionó que los *applets* en GeoGebra se diseñaron para que cumplan dos objetivos: simplificar los procesos de dibujar losetas y de calcular la suma de las medidas de sus áreas que son repetitivos y tediosos, y para poder interpretar qué es lo que sucede con los dibujos de losetas y con la suma de las medidas de sus áreas al aumentar o disminuir el número de losetas.

Observaciones generales de la actividad 2

Luego de la experimentación, del recojo de información y de realizar los análisis a priori y a posteriori, y compararlos de forma detallada por cada ítem, concluimos lo siguiente:

- ✓ Los estudiantes alcanzaron la *fase de formulación* de la **situación 1** específica para esta actividad. Lograron intuir a partir de una discusión en parejas que la aproximación a la medida de un área mejora al incrementar el número de rectángulos de aproximación; del mismo modo supieron cómo comparar qué aproximación es mejor.
- ✓ Los estudiantes alcanzaron la *fase de acción* de la **situación 2** específica para esta actividad. Se introdujo la noción de relacionar la altura de los rectángulos con la imagen de la función en alguno de los extremos de la base; sin embargo, les resultó complicado expresar dichas alturas como imágenes; asimismo, no lograron expresar correctamente la suma de las medidas de las áreas de ocho rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.
- ✓ Se evidenció que al cambiar el valor de la variable “número de rectángulos de aproximación” para la situación 1, hizo que el estudiante plantee diferentes estrategias o razonamientos para analizar si las aproximaciones realizadas por exceso y por defecto podrían llegar a ser iguales. En cambio, no se necesitó cambiar la variable para la situación 2, ya que tres estudiantes presentaron dificultades para plantear la adición de las medidas de las áreas para cuatro rectángulos, y cuando se cambió el valor de la variable a ocho rectángulos, ninguno lo puedo hacer.

- ✓ Las tres formas de trabajar las tareas: individual, en parejas y entre grupos, y al trabajar de forma separada las aproximaciones para luego hacer que los estudiantes compartan lo que observaron y comparen sus resultados, permitió que los estudiantes conseguir los objetivos trazados.
- ✓ Trabajar con deslizadores en el GeoGebra permitió al estudiante optimizar su tiempo en la interpretación de resultados y no en la graficación y cálculos tediosos. Permitió también que los estudiantes trabajen con una variedad de curvas para el borde superior de la región, dejando de lado el uso de reglas de correspondencia de las funciones.

4.3.3 Descripción, objetivos, variables didácticas, fases asociadas de la TSD de cada ítem y de la actividad 3

La actividad 3 propuesta en nuestra investigación fue la siguiente:

Actividad 3A (B): Terraza con losetas.

El señor Martínez, luego de ver la simulación de la terraza enchapada con losetas rectangulares, le consultó al diseñador del programa si podría realizar la animación pero con losetas más delgadas de modo que las medidas de las áreas de las regiones (terraza y jardín) sean aproximadas a valores enteros.

1. Abra el archivo **S3_P1.ggb y** trabaje en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. (i) Manipule el deslizador *n* y determine cuántas losetas se deben dibujar de modo que la suma de sus áreas sea igual al área de la terraza. Justifique numéricamente.

(ii) Para el número hallado en (i), ¿por qué las losetas no cubren totalmente la terraza si sus áreas son iguales? Explique.

b. ¿Está de acuerdo con el hecho de que la suma de las áreas de las losetas y el área de la terraza que no se cubre con ellas, no varíen si se dibujan más de 19 losetas? Explique.

2. Abra el archivo **S3_P2A.ggb y** trabaje en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. (i) Manipule el deslizador *n* y determine cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas (o el área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza, para la otra pareja) sea menor a 0,1 m^2.

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

b. (i) ¿Cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas (o el área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza, para la otra pareja) sea menor a 0,01 m^2?

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

3. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en la tarea 2, responda a las siguientes preguntas.

a. Si se dibujan 1 000 losetas, ¿se podría afirmar que ya se cubrió toda la terraza? Explique.

b. ¿Cuántas losetas se deberían dibujar como mínimo para que L y R sean menores a 0,001 m^2? Justifique.

c. (i) ¿Qué tendría que hacer para que la suma de las áreas de las losetas se aproxime más al área de la terraza? Explique.

(ii) ¿Qué tanto se podría aproximar al área de la terraza dibujando losetas rectangulares? Indique cuántas losetas cree usted que podrían dibujar para conseguir dicha aproximación.

(iii) Para el número indicado en (ii), plantee la suma de las áreas de todas las losetas como la adición de las áreas de cada una de ellas.

Es pertinente mencionar que como en la tarea 2 de esta actividad, los estudiantes trabajaron con dos *applets* distintos, es decir trabajaron con dos materiales distintos que se distinguían por una frase y por un símbolo, decidimos agregar entre paréntesis, en algunos de los ítems de la actividad mostrada en esta página y en la anterior, lo que aparecía en el material del compañero de dupla; esto lo hicimos para simplificar la lectura y realizar una mejor comparación (en los anexos de nuestra investigación presentamos ambos materiales).

La actividad 3 está diseñada para que el estudiante aplique lo visto y trabajado en la actividad 2, pero ahora para un número mayor de rectángulos (hasta 2000) dibujados con el GeoGebra, y aprenda a manipular un procedimiento para aproximar la medida de un área, así como también aprenda a expresar dicha aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos expresado de forma simbólica.

Es esta actividad se han planteado tareas, ítems y sub – ítems que forman parte, algunos de la situación 1 (relacionados al aprendizaje de un procedimientos de aproximación) y otros de la situación 2 (relacionados al aprendizaje del planteamiento de las medidas de las áreas de los rectángulos de forma individual). Cuando realicemos el análisis por ítem lo describiremos al detalle; así como también la fase de la TSD que es alcanzada por los estudiantes.

En esta actividad el estudiante interactuará con el *medio* propuesto por el profesor – investigador (el profesor, su pareja de dupla, la otra pareja, el *applet* en GeoGebra y las tareas de la actividad impresa). Como en esta actividad sí se han planificado dos objetivos de aprendizaje, se han diseñado tareas para que los estudiantes se ubiquen en las *fases de acción*, de *formulación* y *de validación* propuestas en la TSD para ambas situaciones.

En esta actividad los estudiantes trabajan con la variable didáctica: “número de rectángulos de aproximación”. Las tablas 5 y 6 muestran qué valores toma dicha variable y en qué tareas en particular se trabaja directamente con ella para las situaciones 1 y 2 respectivamente.

Tabla 5. Variables didácticas trabajadas en la situación 1 asociadas a la actividad 3.

Variable didáctica	**Valores**	**Tarea**
Número de rectángulos de aproximación	▪ Entre 1 y 2000 rectángulos (visto en el programa): - Para rectángulos inscritos: Aproximación por defecto: de 5,60 a 11,3557 m^2 Diferencia entre la medida del área y su aproximación: de 0,0043 a 5,76 m^2 - Para rectángulos circunscritos: Aproximación por exceso: de 11,52 a 22,88 m^2	1, 2 y 3

	Diferencia entre la medida del área y su aproximación: de 0,0043 a 11,52 m^2 ▪ Para más de 2000 rectángulos (asumido de forma intuitiva): - Para rectángulos inscritos y/o circunscritos: Aproximación por exceso y por defecto: los valores se acercan cada vez más a la medida del área pero no llegan a ser iguales, o los valores se acercan cada vez más a la medida del área y sí llegan a ser iguales	

Tabla 6. Variables didácticas trabajadas en la situación 2 asociadas a la actividad 3.

Variable didáctica	**Valores**	**Tarea**
Número de rectángulos de aproximación	▪ Entre 1 y 2000 rectángulos (visto en el programa): - Medida de la base: número fraccionario - Valor de *x* para determinar la imagen de la función: número fraccionario ▪ Para más de 2000 rectángulos (asumido de forma intuitiva): - Medida de la base: número fraccionario o una expresión simbólica - Valor de *x* para determinar la imagen de la función: número fraccionario o una expresión simbólica	2 y 3

En esta actividad fijamos la variable didáctica: “Borde superior de la región”, ya que nuestro objetivo es observar si el estudiante adquiere la noción de que puede aproximarse tanto como quiera a la medida del área y expresar dicha aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos. Si modificáramos el borde superior, los resultados numéricos serían distintos para todos los estudiantes y pretendemos que comparen resultados similares entre cada dupla.

Forma de trabajo de la actividad 3

La experiencia se llevará a cabo de la siguiente manera:

- El tiempo estimado es de dos horas, sin embargo podría ser mayor debido a que hay más preguntas de discusión.
- Se trabajará en un aula de una universidad de Lima.
- Se trabajará con dos duplas: A y B. La dupla A tiene por integrantes a A1 y a A2; la dupla B tiene por integrantes a B1 y a B2.
- Al inicio de la sesión se instalará en cada máquina el programa GeoGebra, se guardarán en el Escritorio de cada computadora los archivos a utilizar que contienen los *applets* diseñados en GeoGebra, se entregará a cada estudiante el documento

físico de la actividad a trabajar y se explicará la manera en la que se desarrollará la sesión (comportamientos de los estudiantes y del profesor a lo largo de la sesión, es decir, aspectos del *contrato didáctico*).

- En la tarea 1 todos los estudiantes utilizarán el mismo *applet*. Primero se trabajará de forma individual, por un lapso de tiempo, para que cada estudiante maneje libremente los deslizadores y grafique una función que sea diferente a la de los demás. Luego, se trabajará en parejas para comparar gráficas y resultados. Finalmente se procederá a una discusión grupal. De ser necesario el profesor – investigador realizará una intervención.
- En la tarea 2 los integrantes de cada dupla trabajarán de forma individual porque utilizarán un *applet* distinto; en un caso se dibujarán rectángulos inscritos al área y en otros, circunscritos. Se permitirá el intercambio de información entre las duplas en lo relacionado a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos. De ser necesario el profesor – investigador realizará una intervención.
- La tarea 3 se trabajará en parejas y con ambos *applets*. Ambos integrantes trabajarán los sub - ítems a partir de los resultados obtenidos en los ítems a y b de la tarea 2. Luego de un lapso de tiempo se procederá a una discusión grupal donde se espera validar algunos resultados (esto se verá en el análisis que se realizará por tarea).

A continuación realizaremos la descripción, el análisis a priori, el análisis a posteriori y la comparación entre ambos análisis de forma detallada por ítem de la actividad 3; asimismo, realizaremos observaciones y conclusiones relacionadas a dicha actividad.

ACTIVIDAD 3: TERRAZA ENCHAPADA CON LOSETAS RECTANGULARES

El señor Martínez, luego de ver la simulación de la terraza enchapada con losetas rectangulares, le consultó al diseñador del programa si podría realizar la animación pero con losetas más delgadas y de modo que las áreas de las regiones (terraza y jardín) sean aproximadas a valores enteros.

1. Abra el archivo **S3_P1.ggb y** trabaje en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

En esta tarea todos los estudiantes trabajarán con el archivo **S3_P1.ggb**. Los ítems de esta tarea corresponden a la situación 1.

Se pretende analizar si los estudiantes, según su conveniencia, realizan un análisis gráfico o un análisis numérico del área y su medida, cuando el número de losetas aumenta, esto a partir de que se ha diseñado un *applet* que redondea los valores numéricos de las medidas de las áreas a valores enteros. En esta tarea, los estudiantes ya trabajan con la variable "número de rectángulos de aproximación" para un número de losetas entre 1 y 50.

Cabe señalar que se ha diseñado el *applet* para que el estudiante observe cómo varía la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos (aproximación a la medida del área de la terraza), y la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación, cuando el número de rectángulos varía.

a. (i) Manipule el deslizador n y determine cuántas losetas se deben dibujar de modo que la suma de sus áreas sea igual al área de la terraza. Justifique.

(ii) Según su respuesta dada en (i), ¿por qué las losetas no cubren totalmente la terraza si sus áreas son iguales? Explique.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajarán de forma individual en el sub – ítem (i) porque se pretende observar qué análisis prioriza el estudiante para dar su respuesta: si el gráfico (mirando en dibujo de losetas en la terraza) o el numérico (viendo el resultado de las medidas de las áreas mostradas por el programa) ya que el *applet* se ha diseñado para que los valores numéricos de las medidas de las áreas se aproximen a valores enteros. Luego del desarrollo del sub – ítem los estudiantes se colocarán en parejas para comparar y comunicar el tipo de análisis utilizado; a continuación trabajará el sub – ítem (ii) en parejas.

Con el sub – ítem (i), luego de que los estudiantes manipulen el deslizador *n*, se espera que noten que hay una inconsistencia en los valores que muestra el programa. Se aprecia gráficamente que la medida del área de la terraza es mayor a la medida del área que ocupan las losetas en el piso ya que estas no lo cubren con exactitud; sin embargo, las cantidades numéricas indican lo contrario.

Es probable que los estudiantes comenten al profesor – investigador que las losetas no cubren totalmente a la terraza y por eso las medidas de las áreas no son iguales; si esto ocurre, se les responderá: ¿Y cómo interpretan los resultados numéricos (que muestran que a partir de un número de rectángulos ambas medidas son iguales)? De esta manera le dejamos al estudiante la responsabilidad de decidir si da un número de losetas o si responde que las medidas de las áreas no serán iguales.

Se espera que den como respuesta que se deben dibujar 19 losetas, ya que para ese valor los estudiantes observan en el *applet* lo siguiente: $\text{Área}_{\text{Terraza}} = 11\ m^2$ y $\text{Área}_{\text{Losetas}} = 11\ m^2$; aunque también podrían dar como respuesta cualquier valor en el intervalo entre 19 y 50, ya que el programa muestra la igualdad de dichas medidas.

Si los estudiantes enfocan la pregunta en el sentido de que al ser iguales las medidas de las áreas, su diferencia debe ser cero: $\text{Área}_{\text{Terraza}} - \text{Área}_{\text{Losetas}} = 0\ m^2$ (esta diferencia se observa en el *applet*) podrían dar como respuesta que la igualdad de medidas ocurre dibujando 16 losetas; aunque también podrían dar como respuesta cualquier valor en el intervalo entre 16 y 50 ya que en ese intervalo dicha diferencia es igual a cero.

Pensamos que los estudiantes justificarán sus resultados numéricamente, por encima de un análisis grafico, y darán el intervalo de valores entre 19 y 50 losetas como respuesta.

Con el sub – ítem (ii) se pretende analizar si los estudiantes tienen la idea intuitiva de que si las medidas de las áreas de la terraza y de las losetas son iguales, las losetas deberían cubrir exactamente a la terraza. Además, se pretende observar si los estudiantes se dan cuenta de que el problema está en que el programa redondea los valores de las medidas de las áreas a números enteros, ya que la medida de las áreas de las losetas sí debería aumentar.

Se espera que los estudiantes comenten que no están de acuerdo con los valores numéricos que arroja el programa; que a medida que el número de rectángulos aumente para valores mayores a 19, la suma de las medida de las área de todos ellos debería aumentar y que la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación debería disminuir. También se espera que justifiquen que los resultados son aproximados a valores enteros.

Es probable que señalen que la suma de las medidas de las áreas sí debería variar, pero no sepan contestar por qué no lo hacen. Tal vez mencionen que el programa no calcula bien la medida de las áreas.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* de la situación 1, si en la discusión en parejas se comunica al otro que los valores que muestra el GeoGebra no son correctos, que a medida que se aumenta en número de rectángulos, la suma de las medidas de las áreas de todos ellos y la diferencia entre la medida del área y su aproximación deberían aumentar y disminuir respectivamente, pero que esto no ocurre porque el programa redondea las medidas a valores enteros. Si el estudiante brinda un intervalo de losetas como respuesta y no justifica apropiadamente se ubicará en la *fase de acción*.

Descripción y análisis a posteriori

Una vez abierto el archivo y luego de leer el texto del sub – ítem (i), todos los estudiantes manipularon el deslizador n y lo movieron hasta tomar su valor final, $n = 50$. Los estudiantes comentaron que las medidas de las áreas no eran iguales porque se observaba en el gráfico que quedaban espacios de la terraza sin cubrir (ver figura 76).

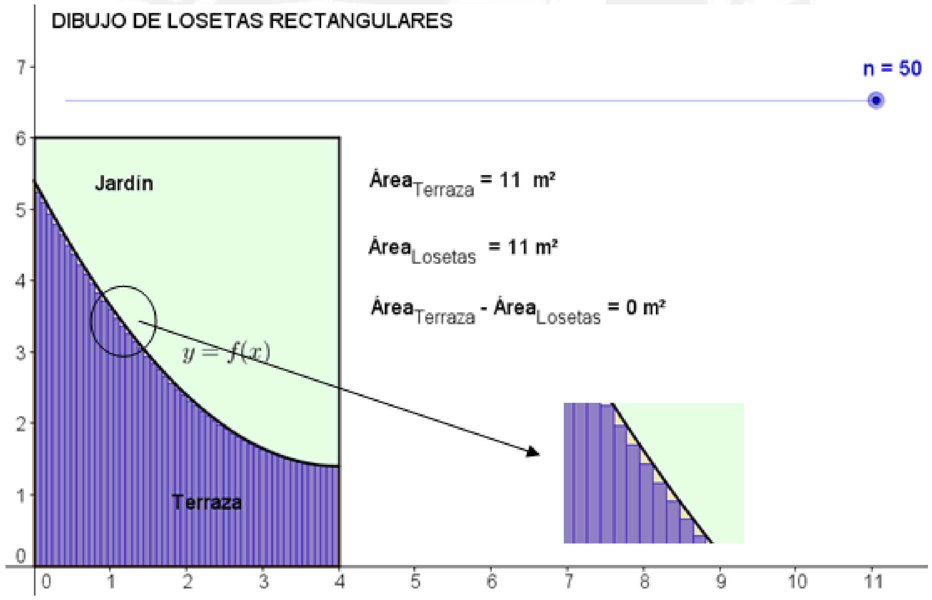


Figura 76. Terraza enchapada con 50 losetas.

Se observó que inicialmente los estudiantes se inclinaron por utilizar un análisis gráfico.

El estudiante A2 utilizó el *mouse* para agrandar la figura y se lo mostró al profesor – investigador como justificación a su respuesta. El profesor – investigador le devolvió como respuesta la siguiente pregunta: ¿y cómo interpretas los resultados numéricos?

La misma pregunta se les hizo a todos los integrantes: ¿y cómo interpretas los resultados numéricos? B1 manipuló el deslizador y lo pasó de n = 50 a n = 30 y comentó que no había variación en la medida del área; sin embargo, B2 dijo que sí (al igual que los integrantes de la dupla A), y mostró en su monitor la variación de las medidas de las áreas cuando el número de rectángulos era pequeño (menor a 10). Luego comentó: “A partir de 19 (losetas) todo es igual”.

El profesor – investigador le preguntó a B1: ¿Cómo debería ser la gráfica si la medida del área de la terraza es igual a la suma de las medidas de las áreas de las losetas?, este respondió: “debería cubrirlo todo, pero en este caso (no lo cubre) quizás por la forma de las losetas que terminan en forma rectangular, pueden agrandarse o achicarse pero siempre terminan en forma rectangular, además las divisiones están determinadas por una curva”.

Los estudiantes entraron en conflicto al ver los valores numéricos, porque dudaron si las medidas de las áreas eran iguales o no. La figura 77 muestra la respuesta dada por A1 (similar a las respuestas dadas por el resto de estudiantes).

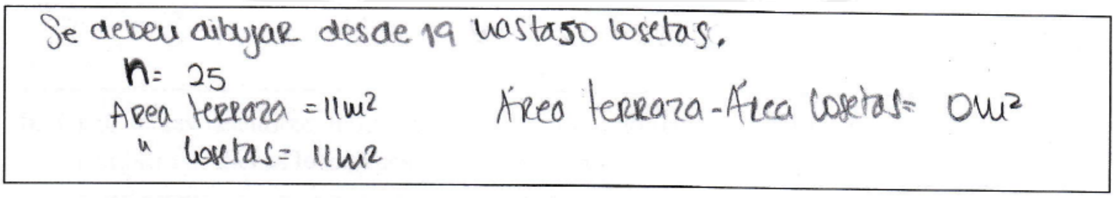


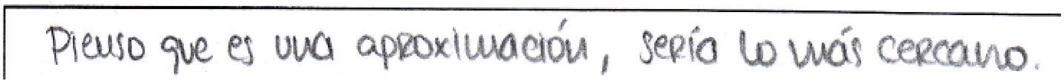
Figura 77. Respuesta dada por A1.

Luego de comparar ambos análisis se aprecia que las respuestas y comentarios hechos por los estudiantes en la experimentación fueron previstos por el profesor – investigador. Sin embargo, no presentimos que los estudiantes, inicialmente, no le prestaran atención a los valores numéricos y colocaran el deslizador *n* en su máximo valor (que es 50).

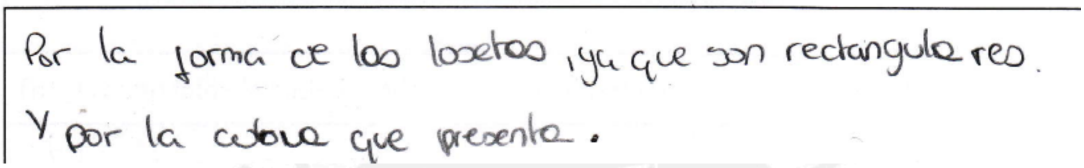
Luego de leer el texto del sub – ítem (ii), se corroboró que la dupla A entiende claramente qué ocurre con el programa; sin embargo, la dupla B no lo tiene muy claro.

La dupla A concluyó que las medidas de las áreas no son iguales; A1 mencionó: “no deberían ser iguales pero como ya están muy aproximados, entonces (el programa) lo redondea”; A2 confirmó que lo que muestran los resultados numéricos son solo aproximaciones, que las áreas no deberían ser iguales. Esta respuesta fue prevista por el profesor – investigador, observamos que los estudiantes se inclinaron por un análisis gráfico

La dupla B concluyó con dudas que las medidas de las áreas sí son iguales, pero que las losetas no cubren totalmente a la terraza por la siguiente razón (explicada por B1): “Debido a la forma de la curva, y a que se trabaja con losetas rectangulares”. La figura 78 muestra ambas respuestas. Esta respuesta no fue prevista por el profesor – investigador; observamos que en los estudiantes prevaleció un análisis numérico. No hubo intervención del profesor – investigador porque esperaba que en siguiente ítem los estudiantes se dieran cuenta de que su respuesta no era correcta.



(a)



(b)

Figura 78. (a) Comparación de la dupla A. (b) Comparación de la dupla B.

Podemos afirmar que los estudiantes de la dupla A llegaron a la fase de formulación porque se dieron realizaron un análisis gráfico en vez de uno numérico y se dieron cuenta de que había un error. En cambio los integrantes de la dupla B se quedaron en la *fase de acción* ya que eligieron utilizar un tipo de análisis para dar la respuesta pero este análisis no fue el correcto.

b. ¿Está de acuerdo con el hecho de que la suma de las áreas de las losetas y el área de la terraza que no se cubre con ellas, no varíen si se dibujan más de 19 losetas? Explique.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajan en parejas para comunicar sus puntos de vista y observar qué opinión prevalece entre ambas duplas.

Se pretende analizar si el estudiante tiene la idea intuitiva de que al aumentar el número de losetas para valores mayores a 19, la suma de las medidas del área de las losetas debería aumentar y la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación debería disminuir.

Se espera que los estudiantes comenten que no están de acuerdo con los valores numéricos que arroja el programa; que señalen lo escrito en el párrafo anterior y justifiquen que los resultados son aproximados por el programa a valores enteros.

Es probable que señalen que la suma de las medidas de las áreas sí debería variar, pero no sepan contestar por qué no lo hacen. Tal vez mencionen que el programa no calcula bien la medida de las áreas.

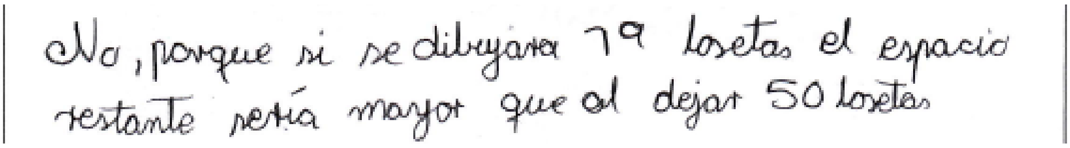
Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* de la situación 1 si a partir de un intercambio de ideas basadas en las nociones de aproximación adquiridas en la actividad 2, comuniquen a su pareja la presencia de un problema con el programa, ya que este redondea los números a valores enteros. Si los estudiantes no justifican apropiadamente sus respuestas o si han realizado una interpretación incorrecta de los resultados, los estudiantes se ubicarán en la *fase de acción*.

Descripción y análisis a posteriori

Se observó en la experiencia que la dupla B presentó dificultades para dar la respuesta. Inicialmente, trataron de justificar por qué los valores numéricos de las medidas de las áreas no cambiaban, y esto fue lo que comentó oralmente B2: “no debería variar porque cuando las losetas se hacen más pequeñas, es como si las losetas grandes se dividieran en pedazos más pequeños, por eso no varían. Eso hace también que el otro valor (diferencia en la medida del área y su aproximación) tampoco varíe”. B1 le manifestó que sí deberían variar porque los espacios no cubiertos por las losetas se hacían más pequeños; sin embargo B1 aceptó lo que dijo B2. La respuesta final dada por los estudiantes no fue prevista por el profesor – investigador.

Al ver que había dudas en la respuesta, el profesor – investigador intervino y les indicó que manipulasen el deslizador y que no miraran los valores numéricos; luego les preguntó: ¿qué creen que sucede con la suma de las medidas de las áreas de las losetas?, ambos estudiantes mencionaron que la medida del área aumentaba, pero que el programa no lo mostraba. B1 mencionó: “debe ser un problema de configuración”.

La dupla A no presentó dificultades para dar su respuesta. Estaban seguros de que la suma de las medidas de las áreas de las losetas debía aumentar y que la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación debía disminuir. Esta fue la justificación que dio oralmente A1 (luego de intercambiar opiniones con A2): “pienso que cuando son menos losetas el espacio es más grande, entonces no deberían ser iguales. Si son 19 losetas no va ser igual a que haya 50. Por eso, el área de las losetas debería aumentar y el otro (refiriéndose a la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación) debería disminuir”. La figura 79 muestra las respuestas dadas por cada dupla (por lo visto y explicado por la dupla B, al referirse a la medida del área de la terraza quisieron decir la medida del área de la terraza que no se cubre por las losetas).


No, porque si se dibujara 19 losetas el espacio restante seria mayor que al dejar 50 losetas

(a)


no porque cuando aumento más losetas el área del terraza debería disminuir

(b)

Figura 79. (a) Justificación de la dupla A. (b) Justificación de la dupla B.

Corroboramos que los estudiantes se dieron cuenta de que al aumentar el número de rectángulos de aproximación, la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación debería ser cada vez menor.

El profesor – investigador realizó una discusión entre los grupos al final del desarrollo de la tarea 1.

Le cedió la palabra a la dupla A para que explicaran sus resultados del sub - ítem (i) del ítem a de la tarea 1; esta fue su respuesta: “del gráfico vemos que las (medidas de las) áreas de la terraza y de las losetas no son iguales porque quedan espacios sin cubrir”; el profesor les volvió a preguntar: ¿y por qué colocaron en su respuesta que la medida del área de la terraza sí eran igual a la suma de las medidas de las áreas de las losetas cuando este número estaba entre 19 y 50? Ellos respondieron que pensaron que se les pedía que identifiquen para qué valores de *n* se daba la igualdad numérica. La dupla B comentó que ellos pensaron lo mismo.

El profesor investigador le cedió la palabra a la dupla B para que expliquen sus resultados del sub – ítem (ii) del ítem a de la tarea 1; esta fue su respuesta: “nosotros respondimos que las (medidas de las) áreas sí eran iguales pero las losetas no la cubrían debido a la curva y porque las losetas eran rectangulares”, la dupla A refutó que las medidas de las áreas no eran iguales y que ellos pensaban que el programa redondeaba los números y mostraban una aproximación. B2 aceptó lo mencionado por la dupla A al decir: “tienes razón”.

Nuevamente, y ya para el ítem b de la tarea 1, los integrantes de la dupla A mencionaron que lo mismo ocurría con la suma de la medida del área de las losetas y la medida del área de la terraza que no se cubre por ellas; que sí deberían variar. Los integrantes de la dupla B continuaron y señalaron que: “(la medida del área) el área de las losetas debería aumentar y la otra disminuir (refiriéndose al área de los espacios de la terraza que quedan sin cubrir por las losetas)”.

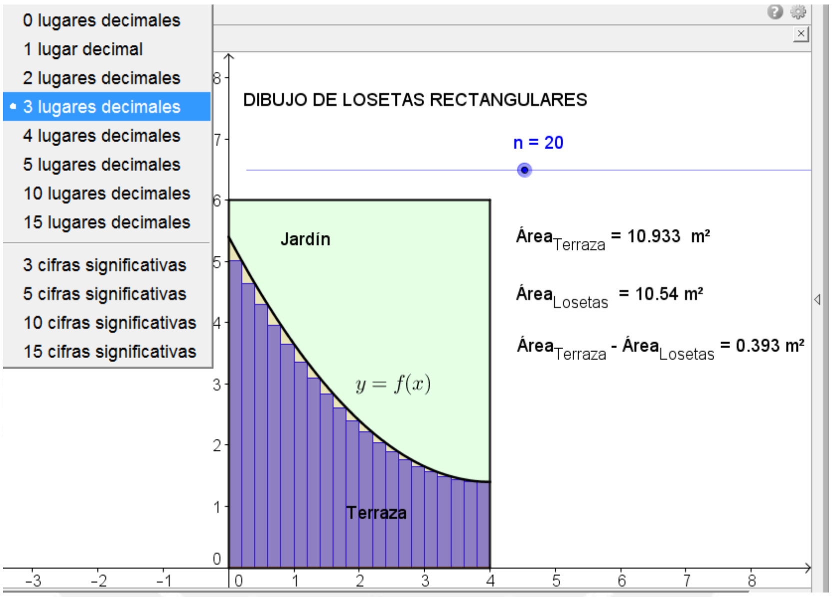


Figura 80. Aproximación de la medida del área con números de tres decimales.

Luego de estas intervenciones, el profesor – investigador confirmó las respuestas dadas por los estudiantes utilizando el GeoGebra. Cambió la forma de redondear los números colocándolo ahora a 3 lugares decimales (ver figura 80); luego movió el deslizador desde 1 hasta 50 y los estudiantes observaron lo que sucedía en realidad, corroborando sus propios razonamientos. Se notó que se sintieron motivados por haber comprendido de forma intuitiva lo que sucedía.

Corroboramos que los estudiantes reconocen que al aumentar el número de rectángulos, la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos de aproximan a la medida del área de la terraza; también reconocieron que la diferencia entre las medidas del área de la terraza y de su aproximación disminuye.

Podemos afirmar que los estudiantes sí llegaron a la *fase de formulación* de la situación 1, ya que luego de una discusión entre los integrantes de la dupla A, o los integrantes de la dupla B y el profesor – investigador, se brindaron respuestas coherentes.

2. Abra el archivo **S3_P2A.ggb** (o **S3_P2B.ggb**) y trabaje en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

En esta tarea los estudiantes trabajarán de forma individual porque cada estudiante trabajará con un *applet* distinto y lo que se pretende es que luego en la tarea 3 compartirán dentro de cada dupla sus procedimientos y estrategias de resolución (A1 y B2 trabajarán con el archivo **S3_P2A.ggb** que presenta una aproximación por defecto, y A2 y B1 trabajarán con el archivo **S3_P2B.ggb** que presenta una aproximación por exceso). Cuando se entregó el material físico a los integrantes de la dupla B, no nos percatamos que lo dimos de forma cruzada; sin embargo, no hay problema que se haga de esa manera ya que los estudiantes trabajan gran parte de la experimentación en parejas.

El sub – ítem (i) corresponde a la situación 1 y los sub – ítems (ii) y (iii) a la situación 2.

En esta tarea, los estudiantes trabajan con la variable didáctica “número de rectángulos de aproximación” para un número de losetas entre 1 y 2000. Cabe mencionar que para $n \geq 264$, ya no se observa variación en la gráfica (se observa que la terraza está totalmente pintada); por tal motivo analizaremos también si el estudiante es consciente de que ya no puede guiarse por la vista, sino que debe recurrir al cálculo numérico.

Cabe señalar que se ha diseñado el *applet* para que el estudiante observe cómo varía la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos (aproximación a la medida del área de la terraza), y la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación, cuando el número de rectángulos varía. Para este último, los estudiantes que trabajen con el archivo **S3_P2A.ggb** observarán lo siguiente: L = $\text{Área}_{\text{Terraza}}$ - $\text{Área}_{\text{Losetas}}$, y para los que utilicen el archivo **S3_P2B.ggb** será R = $\text{Área}_{\text{Losetas}}$ – $\text{Área}_{\text{Terraza}}$.

Como las actividades se han diseñado de forma secuencial, los estudiantes trabajarán con la misma forma de terraza de la actividad 2, por ese motivo hemos fijado la variable “borde superior de la región”.

a. (i) Manipule el deslizador n y determine cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas (o la *el área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza, para la otra pareja) sea menor a 0,1 m^2.*

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

Análisis a priori

En este ítem se trabajará de forma individual por un lapso de tiempo ya que los estudiantes trabajarán con *applets* distintos; luego se trabajará en parejas para cotejar ciertos planteamientos y resultados. Pretendemos en este ítem que el estudiante observe cómo se va completando el área con rectángulos y cómo varía la medida del área de ciertas regiones particulares. Asimismo, pretendemos realizar una intervención luego de la discusión entre grupos que se efectúe al finalizar el desarrollo del sub – ítem (iii) para mostrarles a los estudiantes una manera de trabajar el planteamiento de medidas de áreas individuales de forma simbólica.

Con el ítem (i) se pretende observar si el estudiante relaciona el valor de L con la medida del área de la terraza que no se cubre con las losetas y R con la medida del área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza. Asimismo, corroborar que el estudiante reconoce que debe movilizar el deslizador n y buscar el menor número de rectángulos de modo que la variable sea menor a 0,1 m^2.

Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para obtener el respectivo número de losetas para cada caso. Es posible que realicen la siguiente pregunta solo por corroborar que lo han entendido correctamente: ¿tengo que responder el menor valor o alguno que cumpla? Si esto ocurre, el profesor – investigador leerá con los estudiantes el texto y hará hincapié en la palabra “menor”.

Se espera que todos los estudiantes concluyan que si se dibujan 87 losetas como mínimo, la medida del área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas (medida propuesta para A1 y B2) o que la medida de las áreas de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza (medida propuesta para A2 y B1) es menor a 0,1 m^2. Para la justificación, los estudiantes colocarán el resultado que observan en el monitor de su computadora: $L = \text{Área}_{\text{Terraza}} - \text{Área}_{\text{Losetas}} = 0{,}0989 \text{ m}^2$ o $R = \text{Área}_{\text{Losetas}} - \text{Área}_{\text{Terraza}} = 0{,}0997 \text{ m}^2$, o se lo mostrarán al profesor – investigador directamente de la computadora.

Es posible que den un valor mayor por dos motivos: porque no entendieron que se pedía el mínimo número de losetas o por la sensibilidad del deslizador.

Con el ítem (ii) se pretende analizar si el estudiante calcula correctamente la medida de la base de cada rectángulo. Hasta el momento, el estudiante no se ha visto en la necesidad de hallar dicha medida. Recordemos que en la actividad 2 los estudiantes trabajaron con rectángulos de 0,5 m. o 1 m. de base, obteniendo dicha medida directamente de la partición regular generada en el eje *x* o visualmente.

Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para hallar la medida de la base de cada rectángulo. Se espera que dividan el ancho de la terraza que mide 4 m., entre el número de losetas hallado en el sub – ítem anterior, 87 losetas u otro número diferente a él, y obtengan como medida: $\frac{4}{87} = 0{,}046$ m. aproximadamente.

Si los estudiantes presentaran dificultades, probablemente se deba a que hasta el momento no han tenido que realizar un cálculo para obtenerlas. Tal vez piensen en realizar (o realicen) alguna de las siguientes divisiones: $\frac{87}{4}$ o $\frac{\text{Área}_{\text{Losetas}}}{87}$.

Con el ítem (iii) se pretende analizar si los estudiantes son capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos $m(\text{Área}_{\text{Losetas}})$ como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos, para un número mayor de rectángulos.

Se espera que A1 y B2 planteen la siguiente expresión para los rectángulos inscritos al área: $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = 0{,}046 \times f(0{,}046) + 0{,}046 \times f(0{,}092) + \ldots + 0{,}046 \times f(4)$ m^2. De igual modo, se espera que A2 y B1 planteen la siguiente expresión para los rectángulos inscritos al área: $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = 0{,}046 \times f(0) + 0{,}046 \times f(0{,}046) + \ldots + 0{,}046 \times f(3{,}954)$ m^2. Luego de finalizar el desarrollo de este sub – ítem, los integrantes de cada dupla comunicarán a su compañero sus resultados y procedimientos de cálculo.

Pensamos que los estudiantes podrían presentar dificultades al representar la altura de cada loseta como la imagen de la función en los extremos de cada base, porque la partición regular generada en el eje *x* casi no se aprecia (en la actividad 2 el estudiantes trabajó solo con ocho rectángulos). Asimismo, también le agrega complejidad al cálculo el trabajar con muchos decimales.

Al finalizar el desarrollo del ítem (iii) y luego de la discusión grupal que se efectúe para estandarizar los resultados, el profesor – investigador realizará una intervención a partir de los resultados de los estudiantes para enseñarles a los estudiantes cómo podrían expresar la adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos pero de forma simbólica. El objetivo de ello es que se simplifique la expresión para que los estudiantes ya no trabajen con decimales. Este objetivo tiene también otra intención a futuro (pero no para nuestra investigación), que es la de facilitar al estudiante la comprensión de que dicha adición se puede expresar de forma reducida mediante la letra sigma ($\sum$), esto como uno de los pasos previos que se deben realizar para brindar una definición formal de la medida del área.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* de la situación 1 al relacionar la expresión textual con una región de la gráfica, y al elegir un valor de *n* para el cual cumpla la condición dada.

Se espera que los estudiantes alcancen la *fase de validación* para la situación 2 si justifican correctamente cómo realizaron el planteamiento de la adición de términos. Si los estudiantes solo comunican a sus compañeros de grupo cómo realizaron el procedimiento pero todavía presentan dudas acerca del cálculo de las medidas de las bases y sobre la relación entre la altura de cada rectángulo y la imagen de la función, se ubicarán en la *fase de formulación*. Si los estudiantes siguen cometiendo errores en planteamiento pero expresan a su manera la adición, se ubicarán en la *fase de acción*.

Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el texto del sub – ítem (i) y de mover el deslizador *n*, los estudiantes tuvieron dificultades para determinar el menor número que hacía que la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación sea menor a 0,1 m^2. Las dificultades que se presentaron figuraron las siguientes:

- Demora en reconocer de qué área su medida tenía que ser menor a 0,1 m^2.
- Demora en reconocer qué número es menor a 0,1 m^2.
- Demora en seleccionar el número de losetas debido a la sensibilidad del deslizador *n*.

El profesor – investigador se acercó a preguntar a cada estudiante por su avance en el desarrollo del sub - ítem. Esto fue lo que observamos:

- En la dupla A, A1 quiso corroborar si $L = \text{Área}_{\text{Terraza}} - \text{Área}_{\text{Losetas}}$ era el que debía ser menor a 0,1 m^2. Se le dijo que analice lo que calcula cada uno de los valores numéricos mostrados por el programa. A1 y A2 indicaron que habían diferentes números de losetas que hacían que L y R sea menor a 0,1 m^2. El profesor – investigador leyó nuevamente la pregunta junto con A1 e hizo hincapié en la pregunta "cuántas losetas se deben dibujar como mínimo".

- En la dupla B, B2 no leyó bien la pregunta ya que no se percato de que le daban un número de comparación para la medida del área. B1 no sabía qué número era menor a 0,1 m^2; preguntó si 873 losetas era la respuesta, ya que con ese valor $R = \text{Área}_{\text{Losetas}} - \text{Área}_{\text{Terraza}} = 0{,}0099\ m^2$. El profesor – investigador le dijo a B2 que lea bien la pregunta, que había una condición que no había tomado en cuenta; luego le dijo a B1 que redujera el número de losetas y que comparara el valor de R con 0,1.

Luego de un tiempo, y después de leer con detenimiento el sub – ítem, todos los estudiantes llegaron correctamente a la respuesta escribiendo que 87 losetas es el menor número que hace que la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación sea menor a 0,1 m^2. Los resultados fueron previstos por el profesor investigador, aunque nos equivocamos al pensar que no iban a tener dificultades en el desarrollo del sub – ítem.

Observamos que en el desarrollo del sub – ítem (ii), todos los estudiantes presentaron dificultades para calcular la medida de la base de cada rectángulo.

Las estrategias y preguntas realizadas por los integrantes de la dupla A fueron las siguientes:

- A1 empezó a dividir con su calculadora diferentes números para saber si alguno era coherente. El profesor – investigador observó que realizó las siguientes divisiones: $\frac{87}{4}$, $\frac{m(\text{Área}_{\text{Losetas}})}{87} = \frac{11{,}2611}{87}$, $\frac{4}{87}$. Luego preguntó si la medida de la base de cada loseta se calculaba con la fórmula $\frac{b \times h}{2}$. El profesor – investigador le sugirió que se haga la misma pregunta pero para un número más pequeño de rectángulos.
- A2 amplió su dibujo con el *mouse* para ver si de esa manera podía apreciar la base de cada loseta en el monitor de su computadora. Luego pensó en voz alta: "87 losetas deben entrar en un ancho de 4 m.", entonces le formuló al profesor – investigador lo siguiente: "divido 87 entre 4", y se respondió a él mismo, "es 4 entre 87".

Luego de un lapso de tiempo, los estudiantes trabajaron en parejas y revisaron sus cálculos, ambos integrantes llegaron a la respuesta correcta (ver figura 81), aunque A1 se equivocó en las unidades y A2 no las colocó.

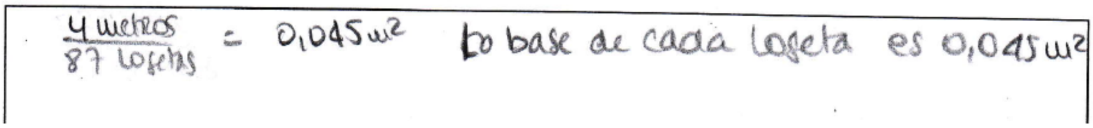


Figura 81. Medida de la base de cada uno de los 87 rectángulos dada por la dupla A.

Las estrategias y preguntas realizadas por los integrantes de la dupla B fueron las siguientes:

- Para hallar la medida de la base de cada loseta, ambos integrantes de la dupla dividieron la suma de las medidas del área de las losetas entre el número de losetas y obtuvieron el siguiente resultado: $\frac{m(\text{Área}_{\text{Losetas}})}{87}=\frac{11{,}2611}{87}=0{,}13\,\text{m}.$ aproximadamente (ver figura 80). No se percataron que estaban hallando la medida del área promedio de cada loseta.

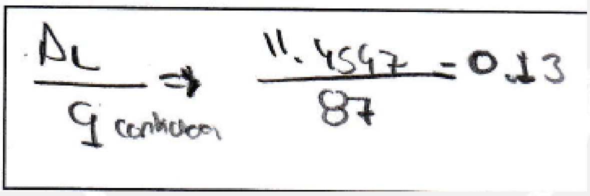


Figura 82. Medida de la base de cada uno de los 87 rectángulos dada por la dupla B.

Luego de un lapso de tiempo, los estudiantes trabajaron en parejas y compararon sus respuestas. El profesor – investigador intervino y les indicó que realizaran el mismo cálculo para un número pequeño de rectángulos y que vean si cumple. No se dio más explicación al respecto porque se iba a realizar una discusión grupal al finalizar el desarrollo del sub – ítem (iii).

Los resultados de los estudiantes no fueron previstos por el profesor – investigador, así como tampoco imaginamos que iban a tener tanta dificultad para realizar dicho cálculo. Esto sugiere que al cambiar de valor a la variable "número de rectángulos de aproximación", los estudiantes presentan aún más dificultades.

Luego del desarrollo del sub – ítem (iii), solo un estudiante no presentó dificultades para expresar la suma de las medidas de las áreas de las losetas como una adición de las medidas de las áreas de cada una de ellas. Ahora, la dificultad se centró en obtener las alturas de los rectángulos. Algunas respuestas y justificaciones dadas por los estudiantes al respecto las mostramos a continuación:

- A1 le comentó al profesor – investigador cuál iba a ser su procedimiento: "las alturas son a partir del lado derecho de la base, entonces el primer rectángulo tiene área igual a $0{,}045 \times f(0{,}045)$, y el resto se va multiplicando por 2, por 3 y así hasta el final". Cabe señalar que en la actividad 2, A1 no presentó dificultades para reconocer las alturas cómo imágenes pero sí para calcular la medida de la base. La figura 83 muestra su respuesta.

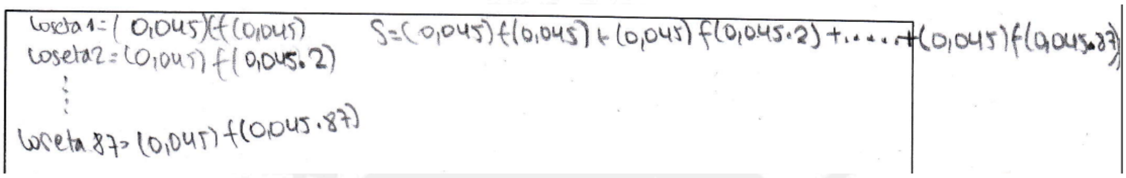

loseta 1 = (0,045)(f(0,045)
loseta2 = (0,045) f(0,045·2)
⋮
loseta 87 = (0,045) f(0,045·87)
S = (0,045) f(0,045) + (0,045) f(0,045·2) + ... + (0,045) f(0,045·87)

Figura 83. Aproximación como adición de áreas individuales dada por A1.

Aunque A2 trató de diferenciar las alturas de cada loseta, cometió el mismo error observado en la actividad 2: afirmó que todas las alturas de cada una de las 87 losetas medían lo mismo (ver figura 84).

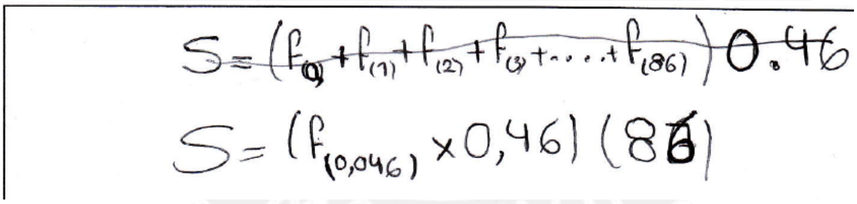

$S = (f_{(0)} + f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + \dots + f_{(86)})\,0.46$
$S = (f_{(0{,}046)} \times 0{,}46)(86)$

Figura 84. Aproximación como adición de áreas individuales dada por A2.

Luego del tiempo planificado, A1 le mostró a A2 su procedimiento y le dijo cómo debía obtener las alturas. A2 comprendió cuál había sido su error.

- En el caso de la dupla B, ninguno sabía cómo plantear las alturas; sin embargo, B1 intentó hacerlo simbólicamente (ver figura 85), y eso fue lo que compartió con B2. El profesor – investigador le preguntó a B1 qué significaban los símbolos: h, h_1 y h_2; el estudiante señaló: "son las alturas de las losetas, se tiene que usar f pero no sé cómo hacerlo".

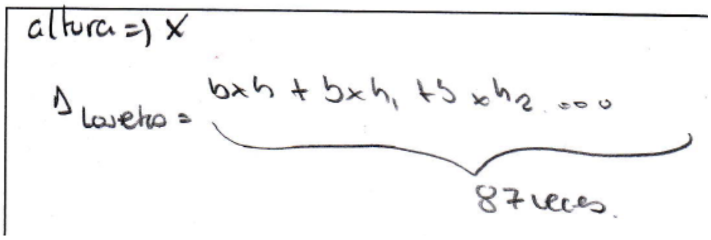


Figura 85. Aproximación como adición de áreas individuales dada por B1

Observamos que solo un estudiante logró realizar un planteamiento correcto de la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos; sin embargo, los otros tres estudiantes cometieron diferentes errores tanto para calcular la medida del área como para calcular la medida de las alturas. Estos resultados no fueron previstos por el profesor – investigador, suponíamos que iban a tener dificultades pero no que no iban a poder realizar un planteamiento habiéndoles explicado el procedimiento en la actividad 2.

En el intercambio de información entre los integrantes de cada dupla, corroboramos que A2 aprendió de A1, luego que este le explicara su procedimiento adaptándolo al de su compañero (ya que ambos presentaban diferentes aproximaciones, por exceso y por defecto). Del mismo modo, B1 le mostró a B2 su planteamiento simbólico distinguiendo que las alturas son diferentes; sin embargo, no se pudieron expresar las alturas como esperábamos.

Una vez terminado la resolución del ítem a, se procedió a la discusión grupal que fue moderada por el profesor – investigador.

La dupla B expresó que se necesitaban dibujar 87 losetas como mínimo para cumplir la condición dada, y que la medida de las bases la obtuvieron dividiendo la suma de las medidas de las áreas de las losetas entre 87; mencionaron también que les resultó difícil expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de medidas de cada uno de ellos. A2 refutó la forma de calcular la medida de la base; señaló lo siguiente: “se van a poner 87 losetas en un ancho de 4 m., la base se calcula dividiendo 4 entre 87”; esta intervención fue aceptada como cierta por la dupla B.

Finalmente, A1 explicó cómo había planteado la adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo, y la dupla B aceptó lo dicho por A1 y no lo refutó.

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de formulación* de la situación 1, ya que relacionaron cada expresión con su respectiva área y eligieron un número correcto de rectángulos para comparar la medida del área planteada.

Podemos afirmar que A1 formuló y validó su procedimiento frente a todos los estudiantes, el estudiante alcanzó la *fase de validación* de la situación 2. Sin embargo, el resto de estudiantes al no conseguir realizar un planteamiento correcto de la expresión, es decir, no hallar correctamente la medida de la base de cada rectángulo y afirmar que no sabían cómo plantear las alturas, solo alcanzó la *fase de acción.*

Luego del intercambio de información entre duplas, el profesor investigador realizó una *institucionalización local* para formalizar lo que había comentado A1.

Primero dibujó en la pizarra una curva (con su respectivo plano cartesiano); luego dibujó tres rectángulos consecutivos partiendo del eje *y* y dos al otro extremo llegando hasta $x = 4$, en el medio colocó puntos suspensivos. Luego, junto con los estudiantes halló la medida de la base de cada rectángulo y la llamó *b*, $b = \frac{4}{87} \approx 0{,}045\,\text{m}$. A continuación le preguntó a los estudiantes por los valores numéricos que se generan en el eje *x* por la partición regular, y ellos mencionaron (apoyados por sus calculadoras): 0; 0,045; 0,09 y 0,135.

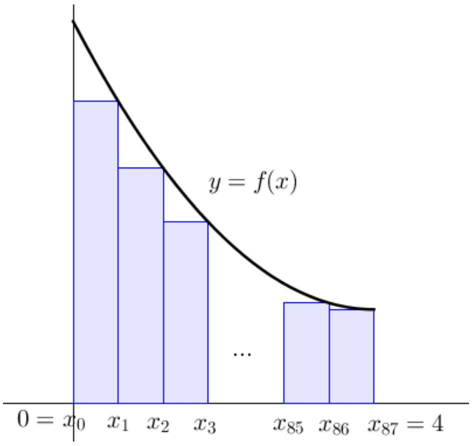
El profesor – investigador les sugirió que, como el número de rectángulos iba a variar, asignen una notación simbólica a dichos valores, es decir, $x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}045;\ x_2 = 0{,}09;\ x_3 = 0{,}135$, y les preguntó a los estudiantes qué símbolos colocarían al final; ellos respondieron: $x_{85};\ x_{86};\ x_{87}$ (cada uno con sus respectivos valores numéricos). Luego, le pidió a A1 que expresara cómo había trabajado el cálculo de áreas y el profesor – investigador lo escribió en la pizarra:

$$m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = 0{,}045 \times f(0{,}045) + 0{,}045 \times f(0{,}09) + \ldots + 0{,}045 \times f(3{,}955) + 0{,}045 \times f(4)\ \text{m}^2.$$

Para terminar, les pidió a los integrantes de la dupla B que expresaran lo mismo pero de forma simbólica; los estudiantes dieron su respuesta y lo escribió en la pizarra:

$$m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = b \times f(x_1) + b \times f(x_2) + \ldots + b \times f(x_{86}) + b \times f(x_{87})\ \text{m}^2.$$

La figura 86 muestra lo escrito y dibujado por el profesor – investigador. De forma similar se hizo para las losetas circunscritas a la región.



$$m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = 0{,}045 \times f(0{,}045) + 0{,}045 \times f(0{,}09) + \ldots + 0{,}045 \times f(3{,}955) + 0{,}045 \times f(4)\ \text{m}^2$$

$$m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = b \times f(x_1) + b \times f(x_2) + \ldots + b \times f(x_{86}) + b \times f(x_{87})\ \text{m}^2$$

Figura 86. Aproximación expresada en forma simbólica.

b. (i) ¿Cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas (o el área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza, para la otra pareja) sea menor a 0,01 m^2?

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

Análisis a priori

En este ítem los estudiantes trabajarán de forma individual por un lapso de tiempo para corroborar que han comprendido la explicación realizada por ellos mismos en la discusión grupal y en la institucionalización local realizada por el profesor investigador; la diferencia entre este ítem y el anterior es que ahora trabajarán con más de 700 rectángulos y ya no se observa movimiento en la gráfica (aparece toda la terraza pintada). Luego compararán sus resultados y procedimientos.

Se espera que todos los estudiantes trabajen sin dificultad el sub – ítem (i) y concluyan que dibujando 869 losetas como mínimo, la medida del área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas es menor a 0,01 m^2; esto a raíz que observarán en su computadora que para ese valor L = Área$_{\text{Terraza}}$ - Área$_{\text{Losetas}}$ = 0,0099 m^2, R = Área$_{\text{Losetas}}$ – Área$_{\text{Terraza}}$ = 0,0099 m$^{2.}$ Es posible que den un valor mayor por la sensibilidad del deslizador.

Es probable que den valores mayores a 869, como 871, 873, u 876 ya que para estos cuatro valores (según lo que se observa al movilizar el deslizador *n*) la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación es 0,0099 m^2. Sin embargo, el menor número es 869 losetas.

Se espera que todos los estudiantes trabajen sin dificultad el sub – ítem (ii) y dividan el ancho de la terraza, que mide 4 m. entre el número de losetas hallado en el sub – ítem anterior, 869 losetas u otro número que no sea el menor, y obtengan como medida: $\frac{4}{869} = 0{,}0046$ m. aproximadamente.

Se espera que todos los estudiantes trabajen sin dificultad el sub – ítem (iii) y expresen correctamente la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Se espera que todos los estudiantes le asignen letras o símbolos a la medida de la base de los rectángulos, $b = \frac{4}{869} = 0{,}0046$, y a la partición regular que se genera en el intervalo $[0;4]$ del eje *x* al dibujar 869 rectángulos: x_0, x_1, …, x_{869}. Se espera que A1 y B2 realicen el siguiente planteamiento: $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = b \times f(x_1) + b \times f(x_2) + \ldots + b \times f(x_{869})$ y que A2 y B1 obtengan la siguiente expresión: $\text{Área}_{\text{Losetas}} = b \times f(x_0) + b \times f(x_1) + \ldots + b \times f(x_{868})$. La expresión cambiará según el número de losetas que los estudiantes asignaron en el sub – ítem (ii).

Al final del desarrollo del ítem, los estudiantes se reunirán en duplas para comparar resultados y explicar sus procedimientos.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* de la situación 1 al relacionar la expresión textual con una región de la gráfica, y al elegir un valor de *n* para el cual cumpla la condición dada.

Se espera que los estudiantes alcancen la *fase de validación* para la situación 2 si justifican correctamente cómo realizaron el planteamiento de la adición de términos. Si los estudiantes solo comunican a sus compañeros de grupo cómo realizaron el procedimiento pero todavía presentan dudas acerca del cálculo de las medidas de las bases y sobre la relación entre la altura de cada rectángulo y la imagen de la función, se ubicarán en la *fase de formulación*. Si los estudiantes siguen cometiendo errores en planteamiento pero expresan a su manera la adición, se ubicarán en la *fase de acción*.

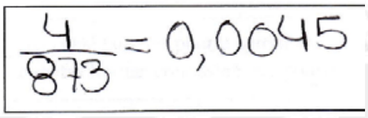
Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el sub - ítem (i), los estudiantes movilizaron el deslizador y eligieron un valor de n mayor al del ítem anterior que cumplía con la condición planteada, que la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación sea menor a $0.01m^2$. Se corroboró con ello que los estudiantes se dieron cuenta que al aumentar el número de rectángulos la aproximación mejora.

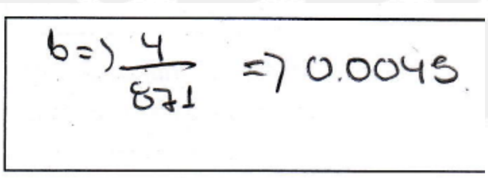
A1 y B1 dieron como respuesta que se lograba con 871 losetas, B2 escribió que con 876 losetas y A2 indicó que con 873 losetas. Las respuestas dadas por los estudiantes fueron previstas por el profesor – investigador.

Observamos que los estudiantes no presentaron dificultades en el desarrollo del sub – ítem (ii). Todos dividieron el ancho del patio entre el número de losetas descrito en la tarea anterior. Esto fue previsto por el profesor – investigador.

La figura 87 muestra algunas de las respuestas de los estudiantes.



(a)



(b)

Figura 87. (a) Medida de la base dada por A2. (b) Medida de la base dada por B1.

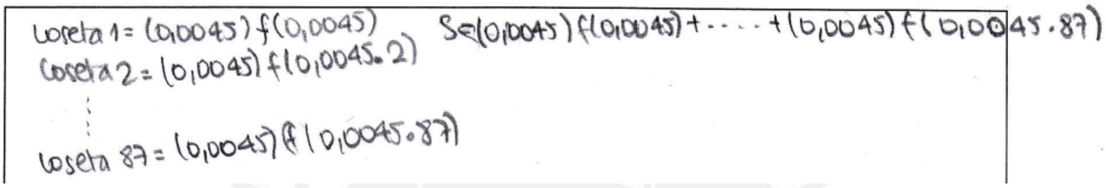
Se corroboró que los estudiantes comprendieron la manera en la que deben calcular la medida de las bases de las losetas que se dibujan en el espacio dado.

Observamos que las dificultades en el desarrollo del sub – ítem (iii) se redujeron pero siguieron apareciendo errores, por ese motivo los resultados de los estudiantes no fueron previstos por el profesor investigador. Los estudiantes realizaron sus propios planteamientos y luego se reunieron en parejas para compararlos.

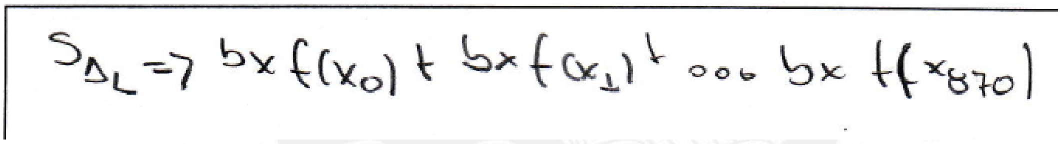
Observamos que los integrantes de la dupla A hallaron correctamente la medida de las bases de cada loseta pero al momento de expresar la adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo trabajaron con 87 losetas en vez de 869. El profesor – investigador les preguntó por qué habían colocado 87 losetas, y ellos respondieron que no se dieron cuenta, que utilizaron el número hallado en el ítem anterior.

En la dupla B, B1 respondió correctamente a la pregunta; sin embargo B2 se confundió tanto en la medida de las bases como en las alturas. Ya en parejas, B1 le explicó su procedimiento a B2 y este lo entendió.

La figura 88 muestra las respuestas de dos estudiantes.



(a)



(b)

Figura 88. (a) Aproximación de la medida del área expresada por A1. (b) Aproximación de la medida del área expresada por B1 (donde $b = \frac{4}{871}$).

El trabajar primero de forma individual nos permite observar que por más que se realice una explicación formal sobre cómo se puede obtener la altura de cada rectángulo como la imagen de una función, hay estudiantes que les cuesta realizar dicho planteamiento.

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de formulación* de la situación 1, ya que relacionaron cada expresión con su respectiva área y eligieron un número correcto de rectángulos para comparar la medida del área planteada.

Podemos afirmar que B1 formuló y validó su procedimiento frente a su compañero y al profesor - investigador, el estudiante alcanzó la *fase de validación* de la situación 2; del mismo modo la dupla A estuvo cerca de llegar a dicha fase pero al equivocarse en el número de rectángulos no lo consiguió. B2 solo alcanzó la *fase de acción* porque lo intentó pero cometió varios errores.

3. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en la tarea 2, responda a las siguientes preguntas.

En esta tarea se trabajará en parejas porque se desea que los dos integrantes interpreten los dos tipos de aproximación, por exceso y por defecto; luego discutan entre ellos planteando sus opiniones y finalmente los validen en una discusión grupal. El profesor investigador cambiará el valor de la variable didáctica "número de rectángulos de aproximación" para un número de rectángulos mayor a 2000 (número que ya no es observado por los estudiantes), de modo que podamos observar y analizar lo qué intuyen los estudiantes sobre el procedimiento de aproximación. Los ítems y sub – ítems a, b, c (i) y c (ii) corresponden a la situación 1; el sub – ítem (iii) del ítem c corresponde a la situación 2.

a. Si se dibujan 1 000 losetas, ¿se podría afirmar que ya se cubrió toda la terraza? Explique.

Análisis a priori

Se pretende observar si los estudiantes al ver la terraza totalmente pintada piensan que con 1 000 losetas se consiguió cubrirla exactamente; esto implicaría que la medida del área de la región se llegó alcanzar a partir de la suma de las medidas de las áreas de 1 000 rectángulos.

Se espera que los estudiantes se fijen tanto en la gráfica como en los resultados numéricos de L y R mostrados por el programa (ambos miden la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación, el primero por defecto y el segundo por exceso), porque ya no se aprecia la variación que produce el seguir dibujando más rectángulos (para la aproximación por defecto a partir de 264 losetas ya no se ve variación en el gráfico, se aprecia la terraza totalmente pintada; en el otro tipo de aproximación ya no hay cambio a partir de 287 losetas) y señalen que todavía no se ha cubierto la terraza. Se espera que justifiquen que para 1000 losetas, las medidas de L y R no son cero (el programa muestra que para 1 000 losetas $L = R = 0{,}0086\ m^2$)

Es probable que algún estudiante mencione que la terraza sí se cubre totalmente cuando las losetas se dibujan por encima de la curva (o que están circunscritas a la región). Si esto ocurre, el profesor – investigador le preguntará al estudiante si cree que lo cubre exactamente; se espera que el estudiante responda que no porque R no es cero, y eso significa que todavía hay partes de las losetas que sobrepasan la terraza.

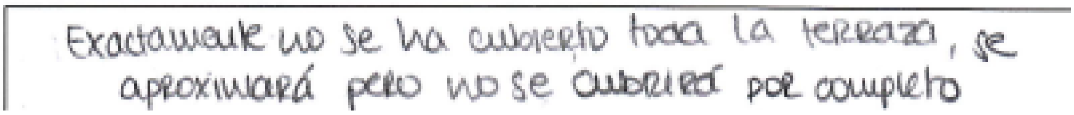
Se espera que los estudiantes alcancen la *fase de formulación* para la situación 1 si un estudiante comunica al otro que no se cubre la terraza por los motivos expuestos en el párrafo anterior. Si un estudiante señala que nunca se llegará a cubrir exactamente la terraza pero se puede aproximar tanto como desee a la medida del área, afirmaremos que el estudiante alcanzó *la fase de validación*.

Descripción y análisis a posteriori

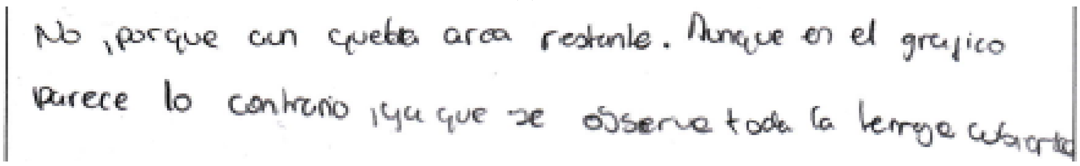
Luego de la discusión entre parejas, A1 mencionó que con 1 000 losetas ya se había cubierto la terraza porque no vio movimiento en la figura, mencionó: “las losetas ya son palitos”; en cambio A2, a partir de la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación, le indicó a A1 lo siguiente: “en el tuyo todavía no lo cubre”. A2 señaló basándose en que su aproximación es por exceso, que las losetas sí cubren la terraza, (justificó numéricamente comparando el valor de la medida del área de la terraza y su aproximación). En ese momento el profesor – investigador le preguntó: ¿y lo cubre exactamente?, A2 respondió: “en ninguno lo cubre exactamente”

Los integrantes de la dupla B realizaron ambos análisis, mencionaron que gráficamente parece que se cubre toda la terraza, pero que al ser la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación diferente de cero, no se puede afirmar que las losetas cubren a la terraza.

Ambas respuestas fueron previstas por el profesor investigador. La figura 89 muestra las respuestas dadas por ambas duplas.


Exactamente no se ha cubierto toda la terraza, se aproximará pero no se cubrirá por completo

(a)


No, porque aun queda area restante. Aunque en el grafico parece lo contrario, ya que se observa toda la terraza cubierta

(b)

Figura 89. (a) Rpta. de la dupla A al ítem 3a. (b) Rpta de la dupla B al ítem 3a.

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de formulación* para la situación 1, ya que hubo intercambio de información; A2 corrigió a A1, y B1 y B2 pensaron de la misma manera confirmando sus razonamientos.

b. ¿Cuántas losetas se deberían dibujar como mínimo para que L y R sean menores a 0,001 m^2? Justifique.

Análisis a priori

Para este ítem, como la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación está relacionada con la variable "número de rectángulos de aproximación", decidimos cambiar el valor de dicha diferencia de medidas para observar qué procedimiento de cálculo utilizan los estudiantes para determinar el número de losetas a colocar.

Se pretende corroborar que el estudiante reconoce que tiene que aumentar el número de losetas para obtener una mejor aproximación. Pretendemos observar también qué procedimiento realiza para obtener dicho número de rectángulos.

Se espera que los estudiantes intuyan que si siguen aumentando el número de losetas, L y R (aproximaciones por defecto y por exceso a la medida del área de la terraza) sí lleguen a medir 0,001 m^2.

Como el *applet* está diseñado para que solo se dibujen 2 000 losetas, y con estas losetas $L = R = 0{,}0043$ m^2, es probable que algunos estudiantes solo respondan que L y R sí llegarían a 0,001 m^2 pero no sabrían con cuántas losetas lo lograrían. Sin embargo, puede haber estudiantes que intenten encontrar alguna proporción que relacione el número de losetas con la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación, y den un número aproximado de losetas.

Se espera que los estudiantes se ubiquen en la *fase de formulación* para la situación 1 si comunica a su compañero de dupla que se puede llegar a dicha diferencia pero que se necesitarían colocar más losetas de los que se permite el GeoGebra.

Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer la pregunta, los estudiantes movilizaron el deslizador y lo colocaron en su máximo valor. Dentro de cada dupla, ambos estudiantes observaron los valores de L y R

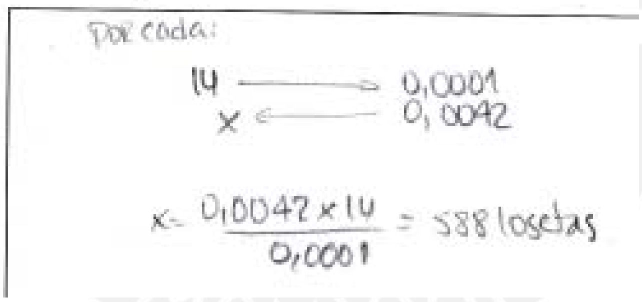
y comentaron el uno al otro que ya no se podía aumentar el número de rectángulos pero que sí se podía llegar a 0,001 m^2.

A2 señaló: “va disminuyendo (la diferencia de medidas), entonces si aumentamos más losetas se podría llegar a 0,001”. El profesor – investigador les preguntó: ¿y con cuántas losetas llegarían a ese valor?, A2 respondió: “creo que con cada dos losetas, se disminuye 0,001 (…) es un poco difícil”; A1 señaló: “de 1742 hay un resultado, (la diferencia de medidas) es 0,0050 y de 1756, (la diferencia de medidas) cambia a 0,0049”. Observamos que los integrantes de la dupla A son más analíticos, intentaron buscar alguna relación entre el número de losetas y la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación.

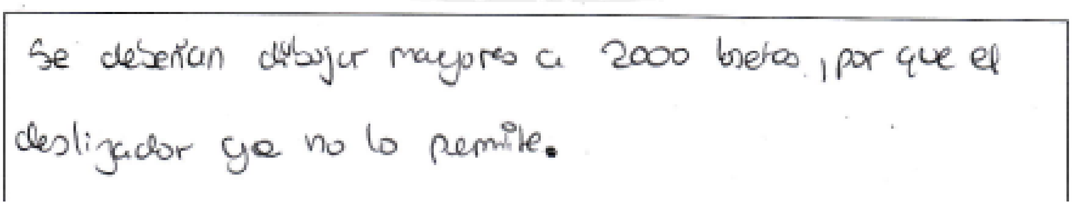
Los integrantes de la dupla B corroboraron que la diferencia entre el área de la terraza y su aproximación sí llegarían a ser 0,001 m^2, pero no sabían qué procedimiento utilizar para hallar dicho número de losetas.

Ambas respuestas fueron previstas por el profesor – investigador.

La figura 90 muestra las respuestas dadas por ambas duplas.



(a)



(b)

Figura 90. (a) Rpta. de la dupla A al ítem 3b. (b) Rpta. de la dupla B al ítem 3b.

Se corroboró que los estudiantes intuyen que necesitan dibujar más rectángulos para aproximarse más a la medida del área. Notamos que al cambiar la variable “número de rectángulos de aproximación” y trabajar de forma intuitiva, los estudiantes no pudieron determinar el número de rectángulos que dé solución a la pregunta, sin embargo se observó que los estudiantes trataron de encontrar dicho número de rectángulos aplicando diferentes estrategias. Nosotros no esperábamos que determinen un número exacto, sino que pretendíamos observar cómo enfocaban los estudiantes a la pregunta.

Podemos afirmar que los estudiantes llegaron a la *fase de formulación* para la situación 1, ya que hubo intercambio de información por parte de la dupla A al discutir en la manera como calcular un número de losetas, y en la dupla B al afirmar, luego de una discusión entre ellos, que sí se puede obtener un número de losetas pero que no cuentan con las herramientas para hacerlo.

c. (i) ¿Qué tendría que hacer para que la suma de las áreas de las losetas se aproxime más al área de la terraza? Explique.

(ii) ¿Qué tanto se podría aproximar al área de la terraza dibujando losetas rectangulares? Indique cuántas losetas cree usted que podrían dibujar para conseguir dicha aproximación.

(iii) Para el número indicado en (ii), plantee la suma de las áreas de todas las losetas como la adición de las áreas de cada una de ellas.

Análisis a priori

Luego del desarrollo del ítem se pretende corroborar que los estudiantes reconocen que pueden aproximarse tanto como lo deseen a la medida del área (objetivo de aprendizaje de la situación 1) y que son capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de todos los rectángulos como una adición de las medidas de cada uno de los rectángulos de forma simbólica (objetivo de aprendizaje de la situación 2).

Con el sub – ítem (i) se pretende analizar si los estudiantes han adaptado a su aprendizaje que para aproximarse cada vez más a la medida de un área, se deben seguir aumentando rectángulos.

Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para afirmar que tendrían que aumentar el número de losetas para que la suma de las medidas de las áreas de las losetas se aproxime cada vez más a la medida del área de la terraza.

Con el sub – ítem (ii) se pretende analizar si los estudiantes han adaptado a su aprendizaje la noción de que puede aproximarse tanto como quiera a la medida del área. Recordamos que para este sub - ítem hemos cambiado el valor de la variable “número de rectángulos de aproximación”, ya que el estudiante tiene que responder de forma intuitiva qué tanto se podría aproximar a dicha medida.

Se espera que los estudiantes respondan que se pueden aproximar tanto como quieran (o bastante, o muy cerca) a la medida del área pero nunca llegarán a ser iguales, porque se utilizan rectángulos; tal vez que pueden aproximarse mucho pero siempre quedarán espacios sin cubrir o partes de las losetas que sobrepasen la terraza.

Es probable que señalen que con 10 000, 100 000, u otro número mayor de losetas las medidas del área y su aproximación serían casi iguales. Se espera que algún estudiante mencione que con infinitos rectángulos la aproximación es aún más cercana, pero igual no llegarían a ser iguales.

Con el sub – ítem (iii) se pretende analizar si los estudiantes han adaptado a su aprendizaje el poder expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos de forma simbólica.

Para este sub - ítem hemos cambiado el valor de la variable “número de rectángulos de aproximación” porque el estudiante trabajará con un número muy grande de rectángulos (descrito por él) o con infinitos rectángulos (que no es un número entero pero para el estudiante puede representar un número muy grande). En ambos casos analizaremos cómo presenta la adición de medidas de áreas individuales.

Se espera que los estudiantes no presenten dificultades para plantear la suma de las medidas de las áreas de las losetas: $m(\text{Área}_{\text{Losetas}})$ como una adición de las medidas de las áreas de cada una de ellas, siempre y cuando hayan respondido en el sub – ítem anterior un número entero de losetas. Por ejemplo, si dieron como respuesta 10 000 losetas, se espera que hayan planteado lo siguiente:

$m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = b\times f(x_1)+b\times f(x_2)+\ldots+b\times f(x_{10000})$ m^2, para la aproximación por defecto y $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = b\times f(x_0)+b\times f(x_1)+\ldots+b\times f(x_{9999})$ m^2, para la aproximación por exceso, donde $b=\dfrac{4}{10000}=0{,}0004$ m.

Si el estudiante mencionó que la aproximación mejoraría con infinitas losetas, posiblemente presente dificultades para hallar la medida de la base de cada loseta. Se espera que hayan planteado lo siguiente:

$m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = b\times f(x_1) + b\times f(x_2) + \ldots + b\times f(x_\infty)$ m^2, para la aproximación por defecto y $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = b\times f(x_0) + b\times f(x_1) + \ldots + b\times f(x_\infty)$ m^2, para la aproximación por exceso, donde b es la medida de la base de cada loseta.

Si los estudiantes validan que al aumentar el número de rectángulos la diferencia entre la medida del área de la terraza y la suma de las medidas de las áreas de todos ellos se reduce y que pueden aproximarse tanto como lo deseen a la medida del área de la terraza, entonces se ubicarán en la *fase de validación* para la situación 1.

Si los estudiantes logran expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de la medida de las áreas de cada uno de ellos de forma simbólica, y explican el procedimiento que siguieron para obtenerlo, se ubicarán en la *fase de validación* para la situación 2

Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el sub - ítem (i), los estudiantes estuvieron de acuerdo de que la aproximación mejora al aumentar el número de rectángulos. El profesor – investigador les preguntó a cada dupla en qué basaban su respuesta, ambas duplas comentaron que en ambos dibujos, a medida que se dibujaban más losetas la terraza se iba pintando cada vez más; además indicaron que L y R (recordemos que L y R calculan la diferencia entre las medidas del área de la terraza y de su aproximación por defecto y por exceso respectivamente) se hacían cada vez más pequeños. Estas respuestas fueron previstas por el profesor – investigador.

La figura 91 muestra la respuesta de la dupla B (similar a lo escrito por la dupla A).

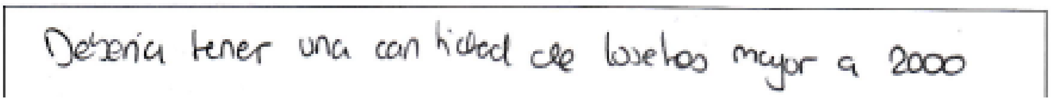

Debería tener una cantidad de losetas mayor a 2000

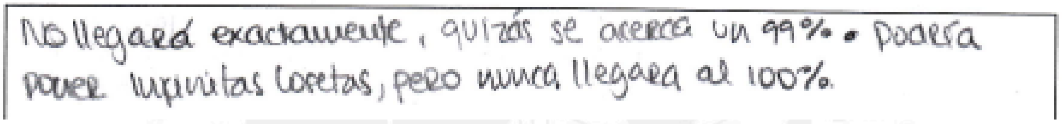
Figura 91. Respuesta de la dupla B al sub - ítem 3c (i).

Los estudiantes no tuvieron dificultades para desarrollar el sub – ítem (ii). El profesor – investigador se acercó a la dupla A y les preguntó que tanto se podrían acercar a la medida del área; A1 respondió: “No al 100%, tal vez un 99% (…) debería colocar infinitas losetas pero nunca llegaría”, A2 señaló: “pero el infinito no tiene límite, igual no llegará exactamente a cubrirla (…) la cubrirá al 99,9%”

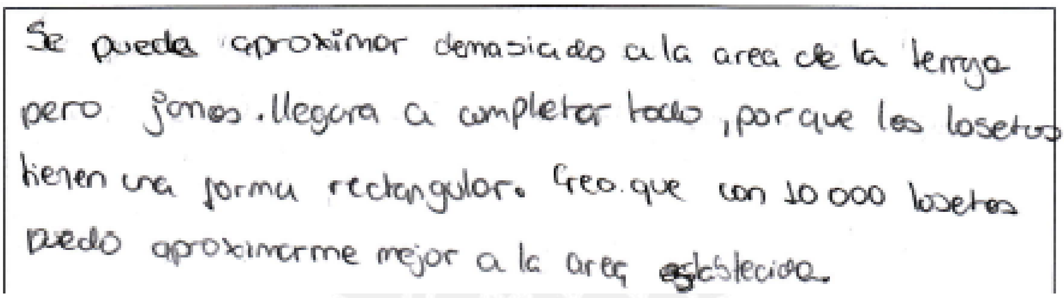
Los integrantes de la dupla B discutieron sobre la cantidad de losetas que se deberían colocar tomando como base al resultado mostrado de la diferencia de medidas de áreas de la terraza y su aproximación. B1 le preguntó al profesor – investigador: ¿se puede cambiar en el programa el número de losetas hasta 10 000? El profesor investigador les enseñó cómo hacerlo modificando las características del deslizador en el GeoGebra. Ambos integrantes comenzaron a explorar con 2500 losetas, llegaron a probar hasta con 10 000 losetas y de acuerdo a ello dieron su respuesta.

Lo integrantes de la dupla B comentaron que no se podrá cubrir el área bajo la curva ya que las losetas son rectangulares y siempre van a quedar espacios por debajo de la curva o por encima de la curva, dieron como solución que se corten las esquinas que sobran y se peguen en los espacios que falta cubrir.

Ambas respuestas fueron previstas por el profesor – investigador. La figura 92 muestra la respuesta de ambas duplas.


No llegará exactamente, quizás se acerca un 99% . Podería poner infinitas losetas, pero nunca llegará al 100%.

(a)


Se puede aproximar demasiado a la area de la terraza pero jamas llegara a completar todo, porque las losetas tienen una forma rectangular. Creo que con 10 000 losetas puedo aproximarme mejor a la area establecida.

(b)

Figura 92. (a) Rpta. de la dupla A a 3c (ii). (b) Rpta. de la dupla B a 3c (ii).

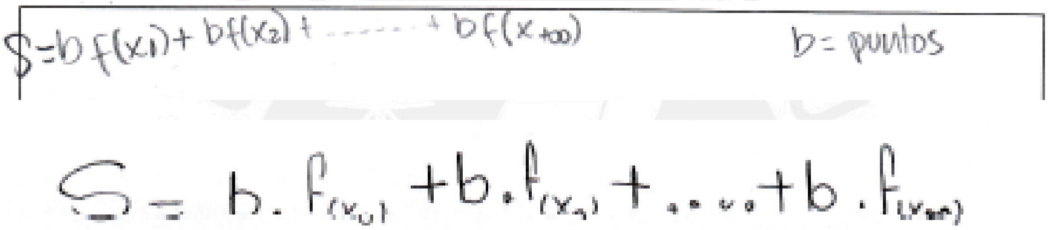
Se corroboró que los estudiantes intuyen que pueden aproximarse tanto como quieran al área de una región. Asimismo, ambas duplas ratificaron que la aproximación nunca llegará a ser igual a la medida del área porque se utilizan rectángulos.

La dupla A dio como respuesta que con infinitas losetas se logra estar lo suficientemente próximo a la medida del área. La dupla B señaló que con 10 000 losetas estarían muy cerca a la medida del área, pero si el programa no se ralentizara al asignarle al deslizador ese número, hubieran colocado uno mucho mayor.

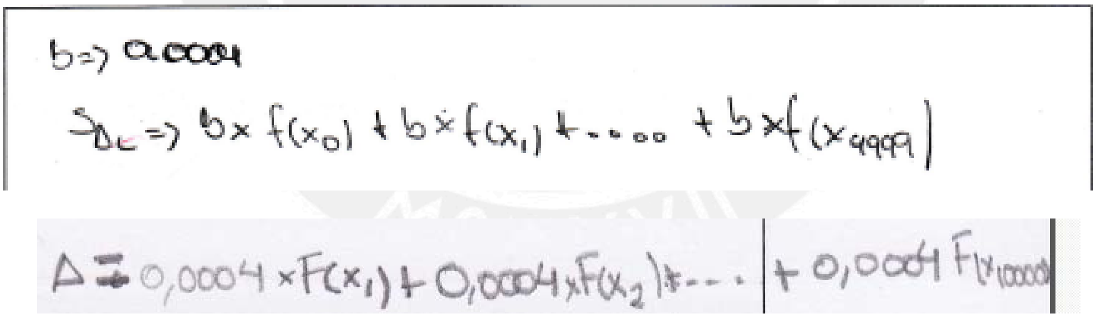
Para el sub – ítem (iii), observamos que los estudiantes ya sabían qué hacer. En ambas duplas discutieron sobre todo si la adición empezaba con x_0 o con x_1; para salir de dudas disminuyeron el número de rectángulos para poder realizar un buen planteamiento.

Como la dupla A mencionó que deberían colocar infinitas losetas, el profesor – investigador le preguntó a A1: ¿cuánto mediría la base de cada loseta?, este respondió: “4 entre infinito, (las bases) serían como puntos”. Los integrantes de la dupla A plantearon correctamente ambas aproximaciones como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos.

La dupla B trabajó para 10 000 losetas y plantearon correctamente ambas aproximaciones como una adición de medidas de áreas individuales. La figura 93 muestra la respuesta de ambas duplas.



(a)



(b)

Figura 93. (a) Expresiones dadas por la dupla A. (b) Expresiones dadas por la dupla B.

Observamos que los estudiantes fueron capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de las losetas como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos. Se cambió el valor de la variable “número de rectángulos de aproximación” y los estudiantes cambiaron sus estrategias, utilizando la retroalimentación de ítem anteriores y de la intervención hecha por el profesor – investigador.

La discusión grupal realizada para explicar y justificar los resultados obtenidos de la tarea 3 fue moderada por el profesor – investigador.

En relación al ítem a, la dupla A explicó que con mil losetas no se cubre exactamente la terraza, ya que la diferencia entre la medida del área de la terraza y su aproximación no era igual a cero. La dupla B mencionó que eso se debía por aproximar utilizando rectángulos.

En relación al ítem b, la dupla B mencionó que se debían colocar más de 2 000 losetas para que L y R (diferencia entre la medida del área y su aproximación, por defecto y por exceso respectivamente) sean menores a 0,001 m^2, pero que el programa no lo permitía. La dupla A explicó que ellos intentaron hallar el número de losetas encontrando una relación entre la diferencia de las medidas del área de la terraza y su aproximación. B1 mencionó que parecía complejo ese procedimiento.

El profesor – investigador intervino y mencionó que el procedimiento realizado por ellos cumpliría si la gráfica de la función fuera una recta y no una curva. Luego, les enseñó a cambiar las características del deslizador para corroborar que sí se llega a esa medida, y colocó en el GeoGebra que se dibujen hasta 10 000 losetas; los estudiantes señalaron que con 9122 losetas L era igual a 0,0009 m^2, y con 9111 R valía 0,0009 m^2. Estos valores son referenciales ya que el programa se ralentiza si se colocan números muy grandes en los deslizadores.

Para los sub – ítems 3c (i) y 3c (ii), la dupla A mencionó que se deberían dibujar más losetas para aproximarse cada vez más a la medida del área de la terraza, que la mejor aproximación se da con infinitas losetas. La dupla B corroboró lo dicho por la dupla A, pero mencionaron que ellos utilizaron 10 000 losetas porque el programa no permite dibujar más ya que se pone lento. La dupla A señaló que el número de losetas que hace que estén más próximos a la medida del área de la terraza debe ser un número muy grande y por eso dijeron el infinito.

Para el sub – ítems 3c (iii), la dupla B mostró su planteamiento de la adición de las medidas de las áreas individuales para cada tipo de aproximación y explicaron cómo calcularon la medida de la base y como determinaron las alturas según la imagen en alguno de los extremos de cada base. La dupla A corroboró lo dicho por sus compañeros y afirmó que ellos colocaron la letra b a la medida de la base porque las losetas ya eran como puntos y no sabían cómo hallar sus medidas. En ambos casos, las expresiones estuvieron correctamente planteadas.

Podemos afirmar que los estudiantes alcanzaron la *fase de validación* para la situación 1 al aprender a manipular un procedimiento con rectángulos para aproximar la medida de un área. Asimismo, podemos afirmar que los estudiantes alcanzaron la *fase de validación* para la situación 2 al aprender a expresar la aproximación realizada, de forma simbólica, como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos.

Luego de la discusión grupal, el profesor – investigador realizó una *institucionalización local* a partir de los resultados presentados por los estudiantes. Antes de realizar dicha institucionalización, el profesor – investigador realizó la siguiente pregunta a ambas duplas: ¿Qué podrían opinar acerca del objetivo de la actividad desarrollada? Las respuestas fueron las siguientes:

Dupla A: “En algunas figuras no se puede de repente hallar las áreas con fórmulas concretas. Entonces a través de este programa con los rectángulos podemos aproximar al área más cercana. Creo que no se puede calcular el área exacta pero sí la que más se aproxima”.

Dupla B: “La figura adecuada para hallar o determinar una aproximación así sea cual fuera el área indeterminada es un rectángulo, y aparte de eso podemos llegar a una aproximación, creo que el rectángulo se presta para aproximar muy pero muy cerca a una figura”.

El profesor – investigador les indicó a los estudiantes que esta actividad buscó que aprendieran a que pueden utilizar un procedimiento con rectángulos (nuevo para ellos) para aproximar la medida del área de una región tanto como quieran (por eso se trabajó hasta con 2 000 rectángulos), y que aprendan a expresar dicha aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos, de forma simbólica. Se hizo hincapié en que el borde superior de la región era la gráfica de cualquier función (positiva y continua), que por eso no se necesitó conocer su regla de correspondencia para realizar todo el procedimiento de aproximación.

Se comentó que ambos aprendizajes están relacionados: el primero busca que se obtenga una idea intuitiva de aproximación hacia un número, que en nuestro caso fue la medida del área de la terraza; y el segundo busca desarrollar un razonamiento analítico como paso previo a la definición de medida de área como la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos, que en nuestro caso fue el planteamiento de la adición de las medidas de las áreas de cada una de las losetas colocadas sobre el piso de la terraza. Se mencionó que en nuestra investigación no se pretendía que llegaran a la idea de infinito, pero sí que se dieran cuenta que podían seguir aproximándose cada vez más a un número y para ello podían seguir aumentando indefinidamente el número de rectángulos. Esto se explicó en la pizarra de la siguiente manera:

Nosotros queríamos aproximar la medida del área de la terraza *R*, $m(A_R)$, utilizando la suma de las medidas de las áreas de *n* losetas rectangulares de la siguiente manera (el símbolo $\approx$ representa que es una aproximación):

$$m(A_R) \approx b \times f(x_1) + b \times f(x_2) + \cdots + b \times f(x_n) \text{ m}^2,$$

donde *b* representa a la medida de la base de cada uno de las *n* losetas y $x_1; x_2; \cdots; x_n$ representan a los valores del eje *x* generados al dibujar las losetas (partición regular).

Se mencionó que la idea de trabajar con símbolos era reducir la adición de términos utilizando la letra griega sigma (∑), así:

$$m(A_R) \approx b \times f(x_1) + b \times f(x_2) + \cdots + b \times f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} b \times f(x_i)$$

Los estudiantes mencionaron que vieron sumatorias en el colegio pero que ya no se acordaban.

El profesor – investigador les dijo a la dupla B que para ellos *n* valía 10 000 y que para la dupla A *n* valía infinito; ellos asintieron. Les dijo a los estudiantes que todos concluyeron que al aumentar el número de losetas, la aproximación mejoraba y nos acercábamos cada vez más la medida del área de la terraza y que podían acercarse tanto como quisieran.

En ese momento presentimos que el estudiante estaba en condiciones de ir un poco más allá de lo buscado en la actividad y realizamos una institucionalización del saber, con la intención de que los estudiantes sepan para qué les serviría lo trabajado en las actividades. Les dijo que si el número de rectángulos aumenta cada vez más de forma indefinida, decimos que tiende al infinito, y la medida del área de la terraza se alcanza y se define así:

$$m(A_R) = \underset{n \to +\infty}{Lim} \sum_{i=1}^{n} b \times f(x_i)\,.$$

Los integrantes de la dupla A mencionaron que ellos pensaron que la aproximación más cercana a la medida del área se daba con infinitos rectángulos. El profesor – investigador les dijo que el infinito no es un número, y por eso se utilizan límites para indicar que el número de rectángulos tiende a ser un número muy grande.

El profesor – investigador les comentó que el objetivo de la actividad era que aprendieran un procedimiento flexible con rectángulos que les permita aproximarse cada vez más a la medida del área y expresar dicha aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos. Les dijo también que nuestra intención era la de dar un paso que facilite la comprensión de la definición formal de área, donde se emplea el límite en el infinito, ya que dicha definición posiblemente lo aprendan en un curso posterior.

Observaciones generales de la actividad 3

Luego de la experimentación, del recojo de información y de realizar los análisis a priori y a posteriori, y compararlos de forma detallada por cada ítem, concluimos lo siguiente:

- ✓ Los estudiantes alcanzaron la fase de validación para la **situación 1** al validar que obtuvieron la noción de que pueden aproximarse tanto como quieran a la medida de un área.
- ✓ Los estudiantes alcanzaron la fase de validación para la **situación 2** al validar que son capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos. Pensamos que esto sucedió gracias al empleo de símbolos tanto para la base como para la partición regular generada en el eje *x*.
- ✓ Se corroboró que los estudiantes adaptaron a su aprendizaje un nuevo procedimiento de aproximación mediante rectángulos.
- ✓ Se corroboró que por las bondades del GeoGebra al trabajar con geometría dinámica se facilitó el análisis y la interpretación de resultados. El estudiante observó al mismo tiempo cómo se dibujaban los rectángulos y cómo variaba la suma de la medida de sus áreas, asunto que es difícil de realizar solo con lápiz y papel.

✓ Las tres formas de trabajar las tareas: individual, en parejas y grupal, permitió analizar mejor las fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau. Se corroboró que en cada fase los estudiantes por ellos mismos obtuvieron ciertos conceptos necesarios para la comprensión general de la actividad.

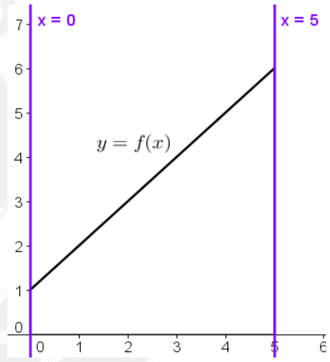
4.3.4 Descripción, objetivos, variables didácticas, fases asociadas de la TSD de cada ítem y de la actividad 4

La actividad 4 propuesta en nuestra investigación fue la siguiente:

Actividad 4: Área de regiones planas.

1. Abra el archivo **S4_P1A.ggb** y trabaje en la vista gráfica: Área de una región plana.

a. (i) Sombree en la figura la región limitada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x = 0$ y $x = 5$, y el eje *x*. ¿Cómo hallaría el área de dicha región? Explique.



(ii) Dibuje 1000 rectángulos con el deslizador *n*. ¿Cuánto mide la diferencia entre el área de la región sombreada y su aproximación (*S*)?

(iii) Exprese *S* como la adición de las áreas de cada uno de los rectángulos dibujados en (ii).

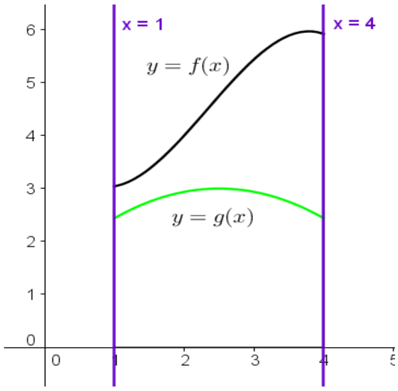
Abra el archivo **S4_P1B.ggb** y trabaje en la vista gráfica: Área de una región plana.

b. (i) Si se dibujaran 20 000 rectángulos, ¿cuánto cree usted que podría medir el área de la región limitada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x = 1{,}3$ y $x = 4{,}2$, y el eje *x*? Justifique.

(ii) Dibuje 850 rectángulos y exprese *S* como la adición de las áreas de cada uno de ellos.

2. Abra el archivo **S4_P2.ggb** y manipule los deslizadores *a*, *b*, *n* y n_1 ubicados en la vista gráfica: Área de una región plana, según se indique en cada pregunta.

a. Sombree en la figura la región limitada por las gráficas de las funciones *f* y *g*, y las rectas $x=1$ y $x=4$. ¿Cómo hallaría el área de dicha región? Explique.



b. Calcule (o aproxime) el área de la región limitada por las gráficas de las funciones *f* y *g*, y las rectas $x=1$ y $x=4$.

La actividad 4 está diseñada para corroborar que el estudiante aprendió a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos y que incorporó a su aprendizaje un procedimiento con rectángulos que le permita aproximar la medida del área tanto como quiera (en esta actividad se trabaja con tres tipos de áreas diferentes a las vistas en las actividades 1, 2 y 3).

Es esta actividad se han planteado tareas, ítems y sub – ítems que forman parte, algunos para corroborar que se logró el objetivo de aprendizaje de la situación 1 (relacionados al procedimiento de aproximación) y otros para corroborar que se logró el objetivo de aprendizaje de la situación 2 (relacionado con el planteamiento de las medidas de las áreas de los rectángulos de forma individual).

En esta actividad el estudiante interactuará con el *medio* propuesto por el profesor – investigador (el profesor, su pareja de dupla, la otra pareja, el *applet* en GeoGebra y las tareas de la actividad impresa). Como esta actividad se ha diseñado para corroborar el aprendizaje de los estudiantes, pretendemos validar los ha adquirido.

En la actividad 4 los estudiantes trabajan con las variables didácticas: “borde superior de la región” y “número de rectángulos de aproximación”. Las tablas 7 y 8 muestran qué valores pueden tomar las variables y en qué tareas se trabajan directamente con ellas en cada una de las situaciones.

Tabla 7. Variables didácticas trabajadas en la situación 1 asociadas a la actividad 4.

Variable didáctica	Valores	Tarea
Borde superior de la región	▪ Forma conocida: - Segmento de recta ▪ Formas desconocidas: - Curvas diferentes a segmentos de rectas y arcos de circunferencia	1, 2 y 3
Número de rectángulos de aproximación	▪ Entre 1 y 1 500 rectángulos (vistos por el programa) - Uso de fórmulas para medir el área exacta (medida desconocida) - Uso del procedimiento para aproximar la medida del área (medida desconocida) ▪ 20 000 rectángulos (no visto por el programa) - Uso del procedimiento para aproximar la medida del área (medida desconocida)	1, 2 y 3

Tabla 8. Variables didácticas trabajadas en la situación 2 asociadas a la actividad 4.

Variable didáctica	Valores	Tarea
Borde superior de la región	▪ Forma conocida: - Segmento de recta ▪ Formas desconocidas: - Curvas diferentes a segmentos de rectas y arcos de circunferencia	1, 2 y 3
Número de rectángulos de aproximación	▪ Entre 1 y 1 000 rectángulos (vistos por el programa) - Medida de la base: número fraccionario (ancho del área: intervalo $[0;5]$ del eje *x*. - Valor de x_0 generado por la partición regular: 0 ▪ 20 000 rectángulos (no visto por el programa) - Medida de la base: número fraccionario (ancho del área: intervalo $[1{,}3;4{,}2]$ del eje *x*. - Valor de x_0 generado por la partición regular: 1,3	1

Forma de trabajo de la actividad 4

La experiencia se llevará a cabo de la siguiente manera:

- El tiempo estimado es de una hora, sin embargo podría ser mayor debido a que en la actividad trabaja con regiones diferentes a las trabajadas en las actividades 2 y 3.
- Se trabajará en un aula de una universidad de Lima.

- Se trabajará con dos duplas: A y B. La dupla A tiene por integrantes a A1 y a A2; la dupla B tiene por integrantes a B1 y a B2.
- Al inicio de la sesión se instalará en cada máquina el programa GeoGebra, se guardarán en el Escritorio de cada computadora los archivos a utilizar que contienen los *applets* diseñados en GeoGebra, se entregará a cada estudiante el documento físico de la actividad a trabajar y se explicará la manera en la que se desarrollará la sesión (comportamientos de los estudiantes y del profesor a lo largo de la sesión, es decir, aspectos del *contrato didáctico*).
- La tarea 1 se trabajará de la siguiente manera: Todos los integrantes utilizarán el archivo **S4_P1A.ggb** para desarrollar el ítem a y el archivo **S4_P1B.ggb** para desarrollar el ítem b. Se trabajará en parejas para generar la discusión entre los integrantes de cada dupla.
- La tarea 2 se trabajará de la siguiente manera: Todos los integrantes utilizarán el archivo **S4_P2.ggb**. Se trabajará en parejas para generar la discusión entre los integrantes de cada dupla.
- La tarea 3 se trabajará de la siguiente manera: Todos los integrantes utilizarán el archivo **S4_P3.ggb**. Se trabajará en parejas para generar la discusión entre los integrantes de cada dupla.

A continuación realizaremos la descripción, el análisis a priori, el análisis a posteriori y la comparación entre ambos análisis de forma detallada por ítem de la actividad 4; asimismo, realizaremos observaciones y conclusiones relacionadas a dicha actividad.

ACTIVIDAD 4: ÁREA DE REGIONES PLANAS

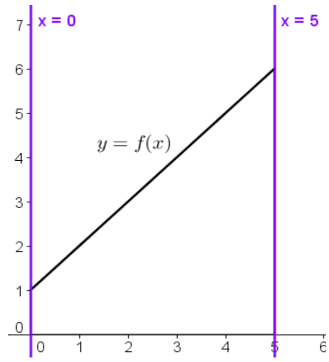
1. Abra el archivo **S4_P1A.ggb** y trabaje en la vista gráfica: Área de una región plana.

En esta tarea se pretende observar si los estudiantes reconocen un área a partir de ciertas condiciones dadas textualmente; si utilizan fórmulas de geometría o un procedimiento de aproximación con rectángulos para calcular o aproximar respectivamente la medida de dicha área; y si pueden expresar dicha aproximación como una adición de términos. Los sub – ítems (i) y (ii) forman parte de la situación 1 y el sub – ítem (iii) forma parte de la situación 2.

a. (i) Sombree en la figura la región limitada por la gráfica de la función f, las rectas $x=0$ y $x=5$, y el eje x. ¿Cómo hallaría el área de dicha región? Explique.

(ii) Dibuje 1000 rectángulos con el deslizador n. ¿Cuánto mide la diferencia entre el área de la región sombreada y su aproximación (S)?

(iii) Exprese S como la adición de las áreas de cada uno de los rectángulos dibujados en (ii).



Análisis a priori

En este ítem pretendemos corroborar que el estudiante adaptó a su aprendizaje un procedimiento de aproximación de la medida del área y que lo puede aplicar en situaciones no contextualizadas.

Con el sub – ítem (i) se pretende observar si el estudiante reconoce un área a partir de condiciones de borde; asimismo analizar qué método emplearía para calcular la medida del área de dicha región.

Se espera que los estudiantes sombreen el trapecio limitado por las rectas verticales, el eje *x* y la gráfica de la función.

Se espera que los estudiantes señalen que utilizarían una fórmula para calcular la medida del área de un trapecio: $\frac{(1+6)\times 5}{2} = 17{,}5\ \text{m}^2$, o que dividirían el área en una región rectangular y otra triangular y sumen las respectivas medidas de sus áreas: $\frac{5\times 5}{2} + 5\times 1 = 17{,}5\ \text{m}^2$. Pensamos que ambos procedimientos de cálculo tienen la misma probabilidad de ejecutarse. Como solo les piden que describan un procedimiento, es probable que no presenten el valor numérico de la medida del área.

Con el sub – ítem (ii) se pretende evidenciar que los estudiantes utilizan fórmulas de geometría para calcular la medida del área limitadas por segmentos de recta y que identifican, según la pregunta, de qué área se desea determinar su medida.

Se espera que los estudiantes calculen la medida del área del trapecio tal como lo describieron en el sub – ítem anterior. Se espera que presenten como respuestas que la diferencia entre la medida del área y su aproximación es igual a $17{,}5 - 17{,}4888 = 0.012$ u^2.

Con el sub – ítem (iii) se pretende corroborar que los estudiantes son capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Se espera que los estudiantes hallen la medida de la base de cada loseta y den como respuesta que mide $\frac{5}{1000} = 0{,}005\,\text{u}$; y que expresen las alturas de las losetas como imágenes de la función en el extremo izquierdo de cada base. Se espera que planteen la siguiente expresión: $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = 0{,}005 \times f(x_0) + \ldots + 0{,}005 \times f(x_{999})$. Sin embargo, es probable que no se fijen en qué extremo de la base se está determinando la imagen de la función, y presenten lo siguiente: $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = 0{,}005 \times f(x_1) + \ldots + 0{,}005 \times f(x_{1000})$.

Se espera validar que los estudiantes aprendieron a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Descripción y análisis a posteriori

Luego de que los estudiantes leyeron el texto del sub – ítem (i), observamos que ambas duplas reconocieron cuál era el área limitada por las rectas verticales, la gráfica de la función y el eje *x*.

La dupla A señaló que utilizaría la fórmula para calcular la medida del área de un trapecio y la dupla B, que dividiría el área en dos regiones: una triangular y una rectangular. Estas respuestas fueron previstas por el profesor – investigador.

La figura 94 muestra la respuesta dada por la dupla B.

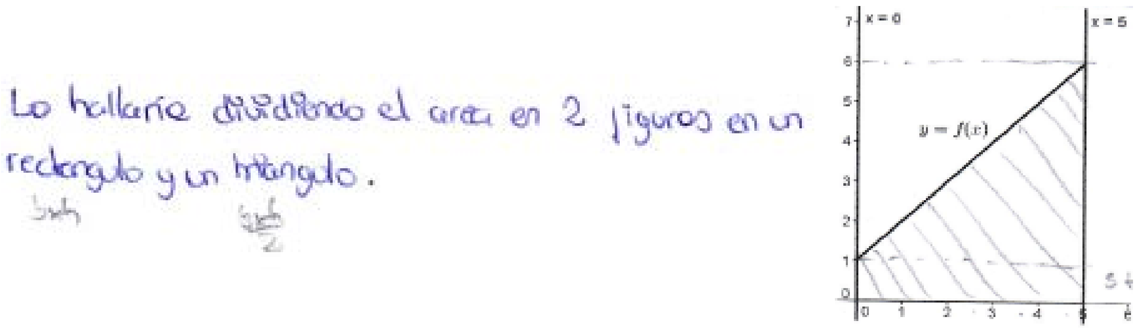


Figura 94. Región sombreada y procedimiento mostrado por la dupla B.

Se corroboró que los estudiantes sabían calcular la medida del área, por ese motivo no se vieron en la necesidad de utilizar un procedimiento de aproximación.

Luego de leer el texto del sub – ítem (ii), todos los estudiantes movieron el deslizador y lo colocaron en n = 1000. Luego hallaron la diferencia entre la medida del área del trapecio con su aproximación (en el programa la aproximación se representa por la suma S). Ambas duplas llegaron a la respuesta correcta. Las respuestas dadas por los estudiantes fueron previstas por el profesor – investigador.

La figura 95 muestra la respuesta dada por la dupla A.

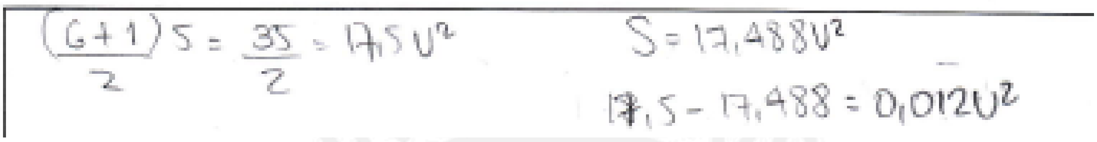


Figura 95. Diferencia entre la medida del área de la región y su aproximación (dupla A).

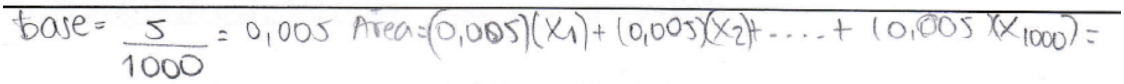
Se corroboró que los estudiantes utilizaron fórmulas de geometría para obtener la medida del área y reconocieron que se les pedía la diferencia entre la medida del área y su aproximación.

Luego de la lectura del sub – ítem (iii), observamos que todos los estudiantes calcularon correctamente la medida de la base de cada rectángulo, pero tuvieron problemas a la hora de determinar las alturas de las losetas ya que ningún estudiante lo hizo correctamente.

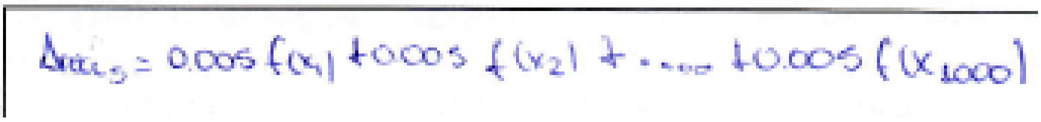
La dupla A asumió como la altura del primer rectángulo a x_1 en vez de $f(x_0)$, como altura del segundo rectángulo a x_2 en vez de $f(x_1)$ y así hasta el último rectángulo que consideraron de altura igual a x_{1000}. Los integrantes de la dupla B también se equivocaron al relacionar la altura de cada rectángulo con la imagen de la función en alguno de sus extremos. Estos resultados no fueron previstos por el profesor investigador.

La figura 96 muestra la respuesta dada por la dupla B.

El profesor – investigador intervino y le preguntó a la dupla A qué interpretaban por x_1 y dijeron que creían que era la altura del primer rectángulo. El profesor – investigador les hizo la siguiente pregunta: ¿las alturas de los rectángulos no se relacionaban con las imágenes de la función? Los estudiantes respondieron que sí pero no se acordaban cuál era la notación, que lo habían visto hace dos semanas. El profesor – investigador no quiso intervenir para ver si los estudiantes corregían su error para el siguiente ítem.



(a)



(b)

Figura 96. (a) Adición de medidas de áreas expresada por la dupla A. (b) Adición de medidas de áreas expresada por la dupla B.

De la misma forma les preguntó a la dupla B si estaban seguros de su expresión; ambos estudiantes colocaron pocos rectángulos y se dieron cuenta de que el lado derecho del primer rectángulo coincidía con el eje *y*, por ese motivo debieron empezar con x_0.

Se corroboró que los estudiantes presentaron dificultades para identificar las alturas de las losetas como las imágenes de la función.

Por estos resultados no podemos corroborar que los estudiantes aprendieron a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Abra el archivo **S4_P1B.ggb** y trabaje en la vista gráfica: Área de una región plana.

b. (i) Si se dibujaran 20 000 rectángulos, ¿cuánto cree usted que podría medir el área de la región limitada por la gráfica de la función f, las rectas $x = 1{,}3$ *y* $x = 4{,}2$*, y el eje x? Justifique.*

(ii) Dibuje 850 rectángulos y exprese S como la adición de las áreas de cada uno de ellos.

Análisis a priori

En este ítem se pretende observar si los estudiantes reconocen un área a partir de ciertas condiciones dadas textualmente, y si utilizan fórmulas de geometría o el procedimiento con rectángulos para calcular o aproximar la medida del área respectivamente. En este ítem hemos modificado las variables didácticas “número de rectángulos de aproximación", para analizar si el estudiante comprende la idea de que puede seguir aproximándose cada vez más a la medida del área; y "borde superior de la región", para observar cómo trabaja el estudiante con regiones limitadas por una recta paralela al eje *y*. El sub – ítem (i) forma parte de la situación 1 y el sub – ítem (ii) forma parte de la situación 2.

Con el sub – ítem (i) se pretende corroborar si los estudiantes utilizan un procedimiento para aproximarse cada vez más a la medida del área. Los estudiantes cuando trabajen con el archivo **S4_P1B.ggb** observarán en el monitor de sus computadoras lo que aparece en la figura 97.

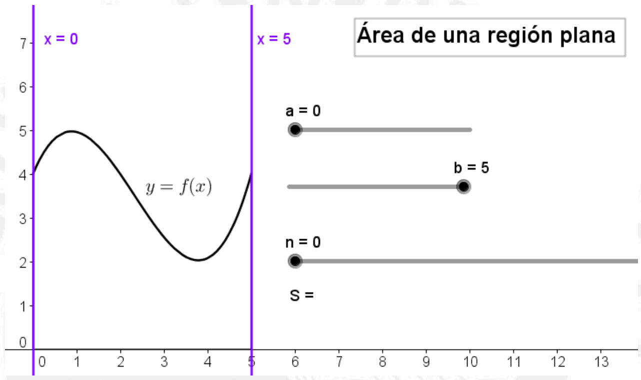


Figura 97. *Applet* diseñado en el archivo S4_P1B.ggb.

Se espera que los estudiantes manipulen todos los deslizadores y descubran por ellos mismos qué papel desempeñan en el *applet*.

Se espera que asignen los siguientes valores a los deslizadores: $a = 1{,}3$ y $b = 4{,}2$. Para aproximar la medida del área, se espera que los estudiantes coloquen $n = 1000$ y observen que la suma de las medidas de las áreas de los 1 000 rectángulos es igual a 8,976 u^2. Se espera que para 20 000 rectángulos intuyan que la medida del área se aproxima a 8,98 u^2; sin embargo, es probable que mencionen que la medida del área se aproxima a 9 u^2, ya que es el número entero más cercano.

Con el sub – ítem (ii) se pretende corroborar que los estudiantes son capaces de expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Se espera que los estudiantes calculen correctamente la medida de la base de los rectángulos. Para el desarrollo de esta parte, el área ya no está limitada por el eje Y del plano cartesiano sino por la recta $x = 1{,}3$; por tal motivo, se espera que realicen el siguiente cálculo: $\dfrac{4{,}2 - 1{,}3}{850} = 0{,}0034\,\mathrm{u}$.

Se espera que presenten como respuesta la siguiente adición de términos: $m(\text{Área}_{\text{Losetas}}) = 0{,}0034 \times f(x_1) + \ldots + 0{,}0034 \times f(x_{850})$; sin embargo, es probable que siga habiendo dificultades para obtener dicha expresión.

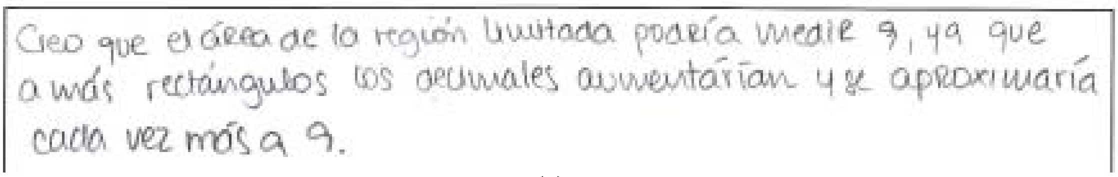
Se espera validar que los estudiantes utilizan un procedimiento con rectángulos para aproximar la medida de un área tanto como deseen, así como también validar que aprendieron a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Descripción y análisis a posteriori

Para el desarrollo del sub - ítem (i), todos los estudiantes movilizaron los deslizadores y comentaron entre ellos que *a* y *b* servían para mover las rectas verticales.

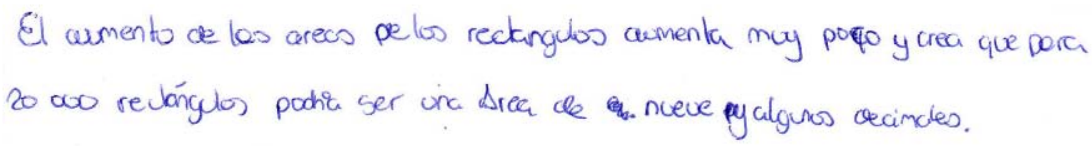
Ambas duplas comentaron que el valor de *S* (suma de las medidas de las áreas de las losetas) seguirá aumentando a medida que *n* aumenta. La dupla A indicó que con 20 000 losetas la medida del área podría medir 9 u^2. La dupla B señaló algo parecido, B1 comentó lo siguiente: "(*S*) va a aumentar pero va a aumentar poquito, puede ser nueve punto y algo". Ambas respuestas fueron previstas por el profesor – investigador.

La figura 98 muestra la respuesta dada por la dupla A.



Creo que el área de la región limitada podría medir 9, ya que a más rectángulos los decimales aumentarían y se aproximaría cada vez más a 9.

(a)



El aumento de las areas de los rectangulos aumenta muy poco y creo que para 20 000 rectangulos podría ser un área de nueve y algunos decimales.

(b)

Figura 98. (a) Aproximación de la medida del área de la región según la dupla A. (a) Aproximación de la medida del área de la región según la dupla B.

Se corroboró que los estudiantes han adaptado a su aprendizaje un procedimiento con rectángulos que les permite aproximar la medida de un área tanto como se quiera.

En el desarrollo del sub – ítem (ii), observamos que todos los estudiantes calcularon correctamente la medida de la base de cada rectángulo.

La dupla A cometió el mismo error de la tarea 1, tomaron como las alturas de cada rectángulo: $x_1;\ x_2;\ldots;\ x_{850}$, y la dupla B expresó correctamente la suma S como una adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo. Observamos que la respuesta dada por la dupla B fue prevista por el profesor – investigador, sin embargo no lo fue para la dupla A que cometieron el mismo error. Pensamos que iban a cambiar su planteamiento luego de indicarles en la tarea 1 que las alturas de los rectángulos se relacionan con las imágenes de la función,

La figura 99 muestra la respuesta dada por la dupla B.

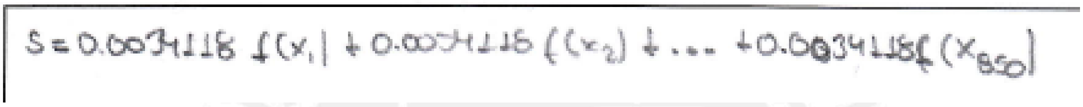


Figura 99. Suma *S* expresada por la dupla B.

Se corroboró que los estudiantes presentan dificultades al momento de expresar, de forma simbólica, la suma de las medidas de las áreas los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

Al finalizar el desarrollo de la tarea 1, se realizó una discusión grupal que fue moderada por el profesor – investigador.

Para los sub – ítems (i) y (ii) del ítem a, la dupla A explicó cómo hallaron la medida del área del trapecio, y cuánto medía la diferencia entre la medida del área de la región y su aproximación para 1 000 losetas. La dupla B corroboró los resultados.

Luego, para el sub - ítem (iii) del ítem a, la dupla A explicó cómo halló la medida de la base de cada rectángulo y mostró la adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo solicitada. La dupla B señaló que en dicha expresión no habían colocado la función, que la altura no era x_1 sino $f(x_1)$. En ese momento, la dupla A se dio cuenta de su error y le dieron la razón a la dupla B. El profesor – investigador mostró en el monitor de su computadora el área con cinco rectángulos de aproximación y preguntó si corroboraban sus respuestas; los estudiantes se dieron cuenta que habían tomado mal las imágenes.

Para el sub – ítem (i) del ítem b, la dupla B explicó que para determinar el área limitada tuvieron que mover los deslizadores, y para aproximar la medida de su área tuvieron que utilizar el procedimiento de aproximación. Ellos señalaron que la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos no podía variar mucho de lo que se mostraba en el programa con 1 000 losetas, ya que al colocar 20 000 losetas el aumento en la suma de las medidas era muy pequeña, la medida del área pedida debería de ser nueve y algunos decimales. La dupla A mencionó que para ellos la suma S llegaba a 9 u^2, porque el aumento de la suma de las medidas de los rectángulos al colocar 20 000 iba a ser mínimo. El profesor – investigador les indicó que la aproximación era aún menor, ya que la medida del área era igual a 8,97985 u^2.

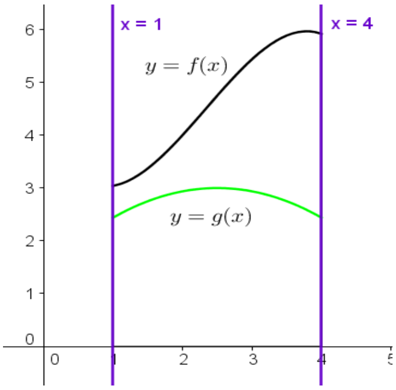
Luego, para el sub – ítem (ii) del ítem b, la dupla B explicó cómo halló la medida de la base de cada rectángulo y mostró la expresión pedida. La dupla A corroboró los resultados dados los sus compañeros.

Por estos resultados corroboramos que los estudiantes adaptaron a su aprendizaje el empleo de un procedimiento de aproximación con la intención de aproximarse cada vez más a la medida del área. Sin embargo, no podemos validar que los estudiantes aprendieron a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos.

2. *Abra el archivo* ***S4_P2.ggb*** *y manipule los deslizadores a, b, n y* n_1 *ubicados en la vista gráfica: Área de una región plana, según se indique en cada tarea.*

En esta tarea se pretende observar si los estudiantes reconocen un área a partir de ciertas condiciones dadas textualmente, y si utilizan fórmulas de geometría o el procedimiento con rectángulos para calcular o aproximar la medida del área respectivamente. En este ítem hemos modificado las variables didácticas “borde superior de la región”, para observar cómo trabaja el estudiante con regiones limitadas superior e inferiormente por curvas. Los ítems a y b forman parte de la situación 1.

a. Sombree en la figura la región limitada por las gráficas de las funciones *f* y *g*, y las rectas $x = 1$ y $x = 4$. ¿Cómo hallaría el área de dicha región? Explique.



b. Calcule (o aproxime) el área de la región limitada por las gráficas de las funciones *f* y *g*, y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

Análisis a priori

En esta tarea se pretende observar si los estudiantes reconocen un área a partir de ciertas condiciones dadas textualmente, y qué procedimiento utilizarían para calcular su medida. En este caso se ha cambiado la forma del área, ya no está limitada por el eje *x*, sino por otra curva.

Con el ítem a pretendemos analizar si los estudiantes son capaces de reconocer otro tipo de áreas limitadas por las gráficas de dos funciones y por dos rectas paralelas al eje *y*. Del mismo modo, se pretende observar cómo utilizan el procedimiento de aproximación con rectángulos para aproximar la medida del área.

Se espera que los estudiantes sombreen el área limitada entre las curvas y las rectas paralelas al eje *y*. Pensamos que presentarán dificultades para describir un procedimiento que les permita calcular la medida del área sombreada. Posiblemente mencionen que dibujar un rectángulo y quitarle el área de las regiones no sombreadas, o aproximarlo con figuras geométricas. Al ser un área limitada por las gráficas de dos funciones, es poco probable que mencionen en aproximar con rectángulos la medida del área bajo la curva de *f* y luego restarle a ella la medida del área aproximada bajo la curva de *g*.

Con el ítem b pretendemos observar si los estudiantes utilizan fórmulas de geometría o un procedimiento de aproximación con rectángulos para calcular o aproximar la medida del área respectivamente.

Los estudiantes trabajarán con el archivo **S4_P2.ggb**. Se espera que manipulen todos los deslizadores y descubran por ellos mismos qué papel desempeñan en el *applet*. Por ejemplo, la figura 100 muestra lo que observarían los estudiantes para los valores: $a = 1$, $b = 4$, $n = 10$ y $n_1 = 10$.

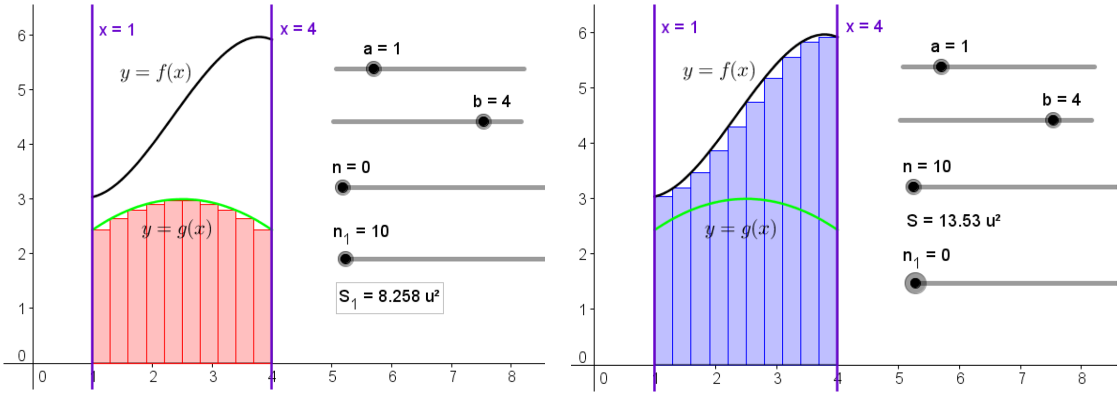


Figura 100. Deslizadores para $a = 1$, $b = 4$, $n = 10$ y $n_1 = 10$.

Se espera que asignen los siguientes valores a n y n_1: $n = 1500$ y $n_1 = 1500$ (máximo valor alcanzado por los deslizadores según el diseño), y luego realicen la siguiente operación $S - S_1$ y obtengan como resultado aproximado de la medida del área: $S - S_1 = 13{,}977 - 8{,}436 = 5{,}541\,\text{u}^2$.

Es probable que den un valor mayor, por ejemplo, 5,6 u^2, ya que tienen la noción de mejorar la aproximación si se agregan más rectángulos.

Se espera validar que los estudiantes utilizan un procedimiento con rectángulos para aproximar la medida de un área tanto como deseen

Descripción y análisis a posteriori

Luego de leer el texto del ítem a, todos los estudiantes identificaron y sombrearon correctamente la región limitada.

Al momento de describir un procedimiento, los estudiantes discutieron y atinaron a dar soluciones coherentes, pero no justificaron cómo lo hallarían.

El profesor – investigador les preguntó por la forma en la que hallarían la medida de las áreas de las regiones que no están sombreadas; los estudiantes no supieron qué responder. Luego de ello no hubo intervención alguna porque se esperaba que luego de manipular los deslizadores se dieran cuenta cómo podían aproximar la medida del área sombreada.

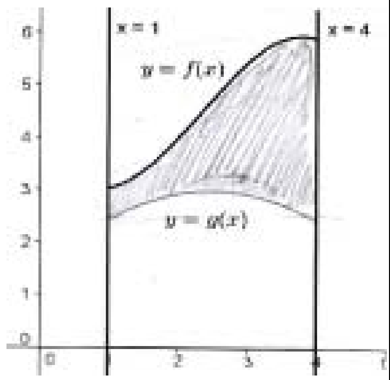
La figura 101 muestra las respuestas dadas por ambas duplas.

Podemos trazar algunos líneas y hallar el área de todo, luego quitarle las partes que no están sombreadas

(a)

completando la gráfica, para tener un rectángulo y de hay le resto las áreas ~~de~~ ~~...~~ que no esten sombreadas.

(b)



(c)

Figura 101. (a) Rpta. de la dupla A (b) Rpta. de la dupla B. (c) Región sombreada.

Para el desarrollo del ítem b, los estudiantes movilizaron los deslizadores y comentaron entre ellos que *a* y *b* servían para mover las rectas verticales, y que *n* dibujaba rectángulos debajo de *f* y n_1, debajo de *g*.

Los integrantes de la dupla A colocaron los deslizadores *n* y n_1 hasta lo máximo posible por el programa, 1500 rectángulos, y luego restaron las sumas *S* y S_1, que son las sumas de las áreas de los rectángulos bajo *f* y bajo *g* respectivamente, y dieron como respuesta que la medida del área aproximada era 5,541 u^2. Esta respuesta fue prevista por el profesor – investigador.

Los integrantes de la dupla B utilizaron solo 15 rectángulos para realizar la aproximación de la medida del área sombreada. Esto no fue previsto por el profesor – investigador, ya que pensamos que iban a buscar una mejor aproximación tomando hasta 1500 rectángulos.

La figura 102 muestra la respuesta dada por la dupla B.

Calculamos la aproximación del area:

$n - n_1 \Rightarrow$ 13.64 - 8.321

15 rectangulos 5.356 u^2

Figura 102. Aproximación de la medida del área de la región dada por la dupla B.

El profesor – investigador le preguntó a B1 por qué había aproximado la medida del área con 15 rectángulos; este respondió: “porque podía ver bien los gráficos, y era más fácil trabajarlo con las mismas cantidades”. Le volvió a preguntar: ¿qué hubiera pasado si colocabas más rectángulos?, el estudiante mencionó que la aproximación hubiera sido mejor.

Los estudiantes afirmaron que con rectángulos pueden aproximar la medida de cualquier área. Que inicialmente no habían pensado en esa forma de hallarlo.

Por estos resultados corroboramos que los estudiantes adaptaron a su aprendizaje el empleo de un procedimiento de aproximación con la intención de aproximarse cada vez más a la medida del área.

Observaciones generales de la actividad 4

Luego de la experimentación, del recojo de información y de realizar los análisis a priori, a posteriori y contrastarlos, de forma detallada por ítem, concluimos lo siguiente:

- ✓ Se observó que los estudiantes fueron capaces de reconocer un área limitada bajo ciertas condiciones dadas textualmente.
- ✓ Se corroboró que los estudiantes incorporaron a su aprendizaje un procedimiento con rectángulos que les permita aproximar la medida del área tanto como se quiera.
- ✓ Se corroboró que los estudiantes no aprendieron a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos. Se observó que todavía presentan dificultades para expresar la altura de los rectángulos como las imágenes de la función.
- ✓ Se corroboró que por las bondades del GeoGebra al trabajar con geometría dinámica se facilitó el trabajo y la interpretación de resultados. El estudiante observó al mismo tiempo cómo se dibujaban los rectángulos y cómo variaba la suma las medidas de sus áreas, asunto que es difícil de realizar solo con lápiz y papel.

4.4 Análisis global de la secuencia didáctica

A partir de los resultados obtenidos y de la experimentación realizada de la secuencia didáctica, efectuaremos el siguiente análisis:

- ➢ La secuencia didáctica estuvo compuesta por cuatro actividades, cada una con un objetivo en particular. La actividad 1 tuvo por objetivo que los estudiantes vean la necesidad de aprender un procedimiento que les permita aproximarse cada vez más a la medida del área de una región, ya que con las herramientas y los procedimientos que conoce no le son suficientes. La actividad 2 tuvo por objetivo introducir a los estudiantes en el uso de rectángulos como una figura geométrica que les permita realizar aproximaciones a la medida de un área, y que puedan expresar dicha aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo. La actividad 3 tuvo por objetivo que los estudiantes aprendan a utilizar un procedimiento que les permita aproximarse tanto como lo deseen a la medida de un área, y que dicha aproximación la pueda expresar como una adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo pero de forma simbólica. La actividad 4 tuvo por objetivo corroborar el aprendizaje obtenido por los estudiantes en la actividad 3 y aplicarlos al cálculo de medidas de áreas en ejercicios no contextualizados.

- La secuencia didáctica presentó dos objetivos de aprendizaje: el primero relacionado con la idea intuitiva de poder aproximarse tanto como quiera a la medida de un área, y el segundo relacionado con expresar dicha aproximación como una adición de las medidas de las áreas de cada rectángulo. Para el logro del primer objetivo se diseñó la situación 1 y para conseguir el segundo objetivo se diseño la situación 2. Estas situaciones se desarrollaron juntas a lo largo de la secuencia didáctica, y a cada una de ellas les correspondió un sub – ítem, un ítem o una tarea en particular en cada una de las actividades. Por ejemplo, los sub – ítems, ítems y tareas relacionados al reconocimiento de alturas como imágenes de la función, a la identificación de los valores de x generados por la partición regular, al cálculo de la medida de las bases de los rectángulos, al planteamiento de la medida del área de un rectángulo y a la expresión de la aproximación realizada como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos, forman parte de la situación 2; el resto de sub – ítems, ítems y tareas que están relacionados con la idea de aproximación, donde se observa que al aumentar el número de rectángulos, la suma de las áreas de todos ellos y la diferencia entre la medida del área y su aproximación se aproximan a un valor particular forman parte de la situación 1.
- Luego del desarrollo de la secuencia didáctica concluimos que el objetivo general de nuestra investigación, que era analizar el aprendizaje de los estudiantes al trabajar una secuencia didáctica, que los lleve a modificar y a manipular un procedimiento flexible con rectángulos, que les permita adquirir la noción de que pueden aproximarse tanto como quieran a la medida de un área, limitada bajo ciertas condiciones, y expresar dicha aproximación como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos, no se cumplió porque no se alcanzaron a la vez ambos objetivos de aprendizaje.

- Afirmamos que el GeoGebra permitió una mejor interpretación de los procesos seguidos en la construcción del conocimiento que pretendíamos que los estudiantes aprendieran. Al poder observar el estudiante cómo varían las gráficas y los cálculos numéricos dinámicamente, les permitió relacionarlos y optimizar el tiempo en la observación, análisis e interpretación de resultados, en vez de destinar su tiempo en gráficas y cálculos repetitivos.
- La posibilidad que da el GeoGebra de que una de las variables que es el “borde superior de la región” pueda ser modificada según nuestra conveniencia, haciéndola cada vez más compleja, ya no es una limitación. A diferencia de otras investigaciones como las de Ribeiro (2002) y Porres (2011) donde solo se ha trabajado con una sola función.
- Concluimos que trabajar las alturas de los rectángulos como las imágenes de la función en alguno de los extremos de la base, y no con valores numéricos para las alturas, permitió que el estudiante realice un planteamiento similar para cualquier tipo de curva, generalizando de esa manera el procedimiento de aproximación a la medida del área.
- Concluimos que las tres formas de trabajar las tareas: individual, en parejas y grupal, permitió realizar un mejor análisis de las fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau. Observamos que en las discusiones grupales los estudiantes estuvieron muy motivados de exponer sus productos y que sean aceptados por el resto generando un cambio en las estrategias de sus compañeros; a su vez, aceptando las críticas y refutaciones que sus compañeros les hacían. Esta forma de interacción es la propuesta en una universidad de Lima de la cual los sujetos de la investigación son estudiantes.
- Recomendamos que en el diseño de las actividades no haya mucho texto en las tareas porque los estudiantes tienden a complicarse en la lectura; asimismo sugerimos utilizar la misma simbología tanto en el material impreso como en el *applet* en GeoGebra. Por ejemplo, se menciona en el texto “la suma de las medidas de las áreas de las losetas” y en el programa se representa por S; también se menciona en el texto “la medida del área de la terraza que no se cubre por las losetas” y en el programa se representa por L. Nuestra idea era que el estudiante por sí mismo relacione la letra con la medida de un área expresada textualmente, pero una vez hecho esto tal vez debimos colocar en las tareas solo las representaciones simbólicas.

- Corroboramos las dificultades mencionadas por Turegano (1993), Olave (2005), Artigue (1998) respecto a las nociones que presentan los estudiantes relacionados al área y su medida, al cálculo de medidas de áreas y a la conversión del registro gráfico al algebraico cuando se trabajan con funciones. Para este último, diseñamos en uno de los *applets* un punto móvil que se desplazaba por toda la curva dando las coordenadas de los puntos, de modo que el estudiante reconozca a la altura del rectángulo como la imagen de la función, pero no dio resultado. Asimismo se realizaron intervenciones periódicas relacionadas con expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos, sin embargo, no se logró el objetivo de aprendizaje.
- A partir de este trabajo nos damos cuenta que podemos realizar ciertas modificaciones a la secuencia didáctica y analizar si con esos cambios se ha facilitado la adquisición del conocimiento. Esto se haría con la intención de trabajarla en horario de clase (dos horas lectivas), a modo de introducción al tema de integral definida, utilizando una metodología activa y usando la tecnología como instrumento facilitador de discusiones.

4.5 Conclusiones

A partir del desarrollo de la secuencia didáctica, del recojo de la información de cada una de las actividades y del análisis en conjunto de todas ellas, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Luego de realizar la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori de los sub – ítems, ítems y tareas relacionados a la situación 1, afirmamos que se validó que los estudiantes adaptaron a su aprendizaje un procedimiento con rectángulos que les permite aproximar la medida del área tanto como lo deseen. Esto a raíz de que los estudiantes, a partir de nuestra secuencia didáctica, fueron intuyendo poco a poco que la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos se iban aproximando por exceso y por defecto a la medida del área; además, intuyeron que la diferencia entre la medida del área y su aproximación se iba reduciendo cada vez más y se iba aproximando a cero, a medida que el número de rectángulos aumentaba y se hacía cada vez más grande; incluso los estudiantes tomaron a bien pensar que cuando el número de rectángulos tiende al infinito dicha aproximación es la mejor.

- Luego de realizar la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori de los sub – ítems, ítems y tareas relacionados a la situación 2, no se logró validar que los estudiantes aprendieran a expresar la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos como una adición de las medidas de las áreas de cada uno de ellos. Esto a raíz de la presencia de muchos errores en sus planteamientos, a pesar de que constantemente hubo intervenciones del profesor – investigador al respecto. Si bien es cierto que al final de la actividad 3, todos los estudiantes expresaron correctamente la suma de las medidas de áreas como una adición de términos, recordemos que en esa misma actividad realizamos dos intervenciones, una para explicar a los estudiantes cómo trabajar de forma simbólica, y otra porque observamos que todavía presentaban errores. Además, en la actividad 4, todos se equivocaron en una de las tareas referidas a dicho planteamiento.

CONSIDERACIONES FINALES

La enseñanza y/o aprendizaje de Cálculo a nivel universitario, en particular del tema de área y su medida, la falta de investigaciones referidas a dicho objeto matemático que traten poco a poco de crear caminos para articular las distintas nociones adquiridas de área y medida en los diferentes niveles educativos, la existencia de herramientas tecnológicas como el GeoGebra, específicas para el trabajo de Geometría Dinámica, motivaron la realización de este estudio.

La manera en la que se realizó la secuencia didáctica, tratando que los estudiantes aprendan de modos distintos, ya sea de forma individual, grupal o entre grupos, e impulsando a que justifiquen coherentemente sus resultados, pensamos que fue beneficioso y a la vez motivador para los estudiantes.

El uso del GeoGebra permitió una mejor interpretación de los procesos seguidos en la construcción del conocimiento. Los estudiantes al poder observar cómo varían las gráficas y los cálculos numéricos dinámicamente, enfocaron el tiempo en la observación, análisis e interpretación de resultados, en vez de destinarlo en gráficas y cálculos repetitivos. La posibilidad que brinda el GeoGebra de manipular, movilizar y agotar diferentes variables involucradas en la adquisición de la noción de área y medida, la hace una herramienta muy potente y recomendable para el desarrollo de investigación donde se emplee la geometría dinámica.

Es importante mencionar que solo hemos considerado dos variables didácticas para conseguir los objetivos planificados; sin embargo, se pudo considerar también: la posición de la curva en el plano (funciones positivas, negativas o una combinación de ambas), la concavidad de las curvas, alturas como imágenes de la función en cualquier punto de la base, áreas limitadas totalmente por curvas, etc. Estas variables no trabajadas en nuestra secuencia didáctica creemos que pueden movilizarse también con el GeoGebra mediante el uso de deslizadores. La idea es definir un número de variables didácticas y agotarlas totalmente dentro de un conjunto de situaciones didácticas con el objetivo de lograr una situación fundamental.

El objetivo general de nuestra investigación, que era analizar el aprendizaje de los estudiantes al trabajar una secuencia didáctica, que los lleve a modificar y a manipular un procedimiento flexible con rectángulos, que les permita adquirir la noción de que pueden aproximarse tanto como quieran a la medida de un área, limitada bajo ciertas condiciones, y expresar dicha aproximación como la adición de las medidas de las áreas de cada uno de los rectángulos, no se cumplió porque los estudiantes no consiguieron por ellos mismos realizar el planteamiento de la adición de medidas de áreas individuales. Teníamos la seguridad de que el estudiante sí iba a conseguir dicho objetivo, ya que venían con conocimientos previos de intervalos y funciones, además de las intervenciones que realizaría el profesor – investigador para explicar ciertos detalles a tomar en cuenta en los procedimientos de solución (con las características de una institucionalización local) de ese tema en particular, por ese motivo diseñamos la situación 2 con preguntas distribuidas en las actividades pero en la sesión siguiente quedaba claro que no se alcanzaba el aprendizaje.

La idea de que el estudiante logre obtener ambos aprendizajes es dar un paso previo para que comprenda la definición de medida del área como la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos, aprendizaje que aún pensamos que se podrá alcanzar partiendo de las situaciones diseñadas y de los resultados obtenidos.

De los resultados obtenidos creemos haber aportado un objetivo de aprendizaje importante pero la situación presentada debe aún modificarse. Creemos que se debería implementar una situación diferente para conseguir dicho objetivo, que junto a nuestra situación 1 y a otras situaciones donde se logre expresar la medida del área como el límite de una suma, se pueda pensar en situaciones didácticas cuyo objetivo de aprendizaje sea expresar la medida del área, como expresar la medida del área como el límite de una suma de Riemann o la medida del área como integral definida.

Nosotros hemos trabajado en las actividades con áreas limitadas por la gráfica de una función definida en un intervalo dado, y los ejes coordenados x e y. Sin embargo, no importaría si la región no estuviera limitada por dichos ejes y sí por rectas paralelas o verticales a ellos, ya que nosotros podríamos mover los ejes según nuestra conveniencia.

Es importante resaltar que se puede prescindir de los ejes coordenados y de la noción de función para el procedimiento que nosotros empleamos. Bajo las características de borde de las áreas trabajadas en nuestra investigación (áreas limitadas por dos rectas paralelas, una recta perpendicular a ambas y una curva), los estudiantes lo único que necesitan para su aproximación es subdividir la recta que es perpendicular a las dos rectas paralelas, y medir las alturas desde dicha recta a la curva. Lo importante de nuestra investigación es dar un procedimiento para el cálculo de medidas de áreas que sea independiente del sistema de referencia.

Pensamos que esto no debería aprenderse recién en los cursos de cálculo, este procedimiento podría ser introducido antes de la etapa universitaria, dado que no se requiere un sistema de referencia ni la noción de función, sino solamente la noción de medida del área de un rectángulo.

Posteriormente a nuestra investigación, se podría adaptar la situación didáctica a un contexto secundario. Tratar de incorporar esta herramienta de cálculo en niveles anteriores. En nuestra investigación, los estudiantes han trabajado con una curva sin saber que era la gráfica de una función; o que el ancho de un terreno era el dominio de dicha función.

En la realidad el estudiante no va a tener la regla de correspondencia de una función, va a tener una curva y va a querer calcular la medida de un área, entonces el procedimiento que le damos le va a permitir aproximar dicha medida. Como la imagen $f\ (x)$ de la función es simplemente una altura; el estudiante solo necesita, para aproximar el área, medir la altura, multiplicarla por la longitud del subintervalo y luego sumar.

Para implementar esto con la tecnología, se podría utilizar el GeoGebra que presenta las herramientas: *Figura a mano alzada*, para dibujar curvas; *Polígono*, para dibujar rectángulos; y *Distancia o longitud*, para medir segmentos.

A modo de reflexión, observemos que el objetivo central de nuestra investigación era presentar una herramienta para que los estudiantes la pudieran adaptar y modificar para calcular la medida de distintas áreas, y hemos obtenido algunos resultados alentadores. Sin embargo, en el trabajo que hemos hecho se utiliza el GeoGebra, las curvas son funciones que los estudiantes no conocen pero pueden modificar, hay sistemas de referencia, las alturas de los rectángulos son la imagen de una función; sin embargo se puede prescindir de esa noción y que las alturas sean simplemente longitudes y que las funciones sean curvas. Si se visualiza nuestro trabajo desde ese punto de vista, se podrían calcular las medidas de las áreas y modificar nuestras actividades para llevarlas a la educación secundaria y ver si los estudiantes pueden apropiarse de esta herramienta que les va a permitir calcular la medida del área, cosa que no pueden hacer tal y como hemos observado. Pueden hallar las medidas de áreas poligonales pero cuando el área está definida por curvas no tienen una herramienta y esta herramienta está a su alcance.

Si los estudiantes de secundaria ya conocieran el procedimiento de aproximación y estuvieran familiarizados con la herramienta, pensamos que resultaría más sencillo, por los resultados que hemos alcanzado, presentar la integral definida asociándola al problema de definir la medida del área.

Notamos que hay una ruptura entre lo que saben los estudiantes sobre la medida del área en primaria, lo que saben de secundaria y lo que pretendemos enseñarles nosotros en la universidad. Por ese motivo hemos tratado dar un primer paso, pero este primer paso creemos que debería darse en niveles educativos inferiores, en la medida de áreas de superficies poligonales.

REFERENCIAS

Aliaga, H., Bressan, A. & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Amorim, F., Costa, G & Salazar, J. V. (2011). Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo. Anais de *XIII CIAEM-IACME, 26-30 de junho*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. Recuperado de: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1649.pdf

Artigue, M., Douady, R, Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y cambios curriculares?* Vol. 1, pp. 40-55. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, pp 33-115. Recuperado de:http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5CFundamentos Brousseau.pdf

Brousseau, G. (1999). Educación y Didáctica de las matemáticas. Trabajo presentado en el *V Congreso Nacional de Investigación Educativa. 30-31 de octubre y 1-2 de noviembre*. Aguascalientes, pp. 1-39. Recuperado de: www.matetam.com/sites/default/files/discurso_ags.doc

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascon, J. (2005). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. México D. F.: Alfaomega.

Chumpitaz, D. (2013). Génesis instrumental: un estudio del proceso de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería. [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4514

D'Amore, B. & Fandiño, M. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Magisterio.

Facco, S. (2003). *Conceito de área. Uma proposta de ensino – aprendizajem*. [Tesis de Maestría]. PUC-SP. Brasil. Recuperado de http://www.pucsp.br/ pensamentomatematico/dissertacao_sonia_facco.pdf

Fregona, D. & Orús, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

González, A. (2014). Estrategias utilizadas por estudiantes universitarios al intentar ganar juegos de estrategia bipersonales. [Tesis de Maestría]. Instituto Politécnico nacional. Mexico. Recuperado de https://mariosanchezaguilar.files. wordpress.com/2014/10/tesis_angelina_gonzale_peralta_2014.pdf

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción: en un texto universitario*. [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5225

Londoño, J. (2006). *Geometría Euclidiana*. Recuperado de https://deymerg.files. wordpress.com/2011/07/geucap07.pdf

Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva.* [Tesis de Maestría]. Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México, D.F. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/olave_2005.pdf

Panizza, M. (2003). *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB: Análisis y Propuestas*. Buenos Aires: Paidós.

Porres, M. (2011). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías*. [Tesis Doctoral]. Universidad de Valladolid. España. Recuperado de http://uvadoc.uva.es/handle/10324/949

Ribeiro, J. (2002). *Conceito de integral: Uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem*. [Tesis de Maestría]. PUC-SP. Brasil. Recuperado de http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-06-20T09:54:45Z3573/Publico/dissertacao_jose_manuel_melo.pdf

Rodríguez, C. (2011). *Construcción de polígonos regulares y cálculo de áreas de superficies planas utilizando el programa geogebra: una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo*. [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/5849/1/8410010.2012.pdf

Stewart, J (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México, D. F.: Thomson Editores.

Turégano, P. (1993). Estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas. Actas del *IV Congreso Internacional sobre la Investigación en la Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas., 13-16 de setiembre.* Barcelona. Recuperado de http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista9/9_26.pdf

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias,* pp. 233-249. Recuperado de: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21531/21365

Velásquez, F. (2012). *El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del Aprendizaje Significativo*. [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/9508/1/71229671.2013.pdf

ANEXOS

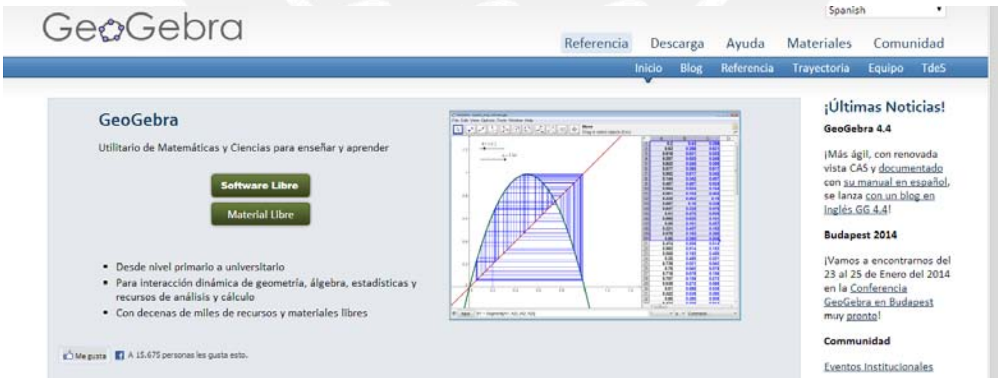
GEOMETRÍA DINÁMICA Y GEOGEBRA

Dentro de los aspectos generales que presenta el GeoGebra, podemos mencionar los siguientes:

- Es un software de ambiente libre para Geometría Dinámica con alto potencial didáctico y pedagógico. Se puede utilizar para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde el nivel primario hasta un nivel universitario.
- Es portátil ya que se pueden almacenar en un USB.
- Se puede ejecutar en Windows, Mac 0S X, Linux o Solaris.
- Cuenta con una gran cantidad de recursos y materiales de uso libre.
- Es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo.

De acuerdo con Hohenwarter et al. (2009), el trabajo con el GeoGebra es de mucha utilidad para los estudiantes porque les facilita la creación de construcciones matemáticas y de modelos para diferentes indagaciones interactivas.

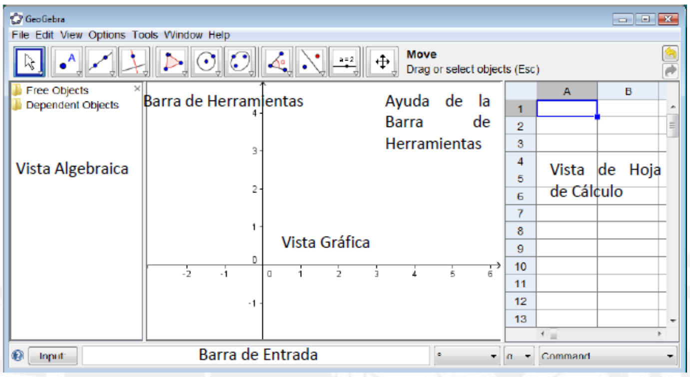
Se puede acceder al GeoGebra a partir de su página *web* y descargar de allí los instaladores del programa, así como también las guías, los tutoriales y los manuales de apoyo para su uso (ver figura).



Página web de GeoGebra en español
Fuente: www.geogebra.org/cms/es/

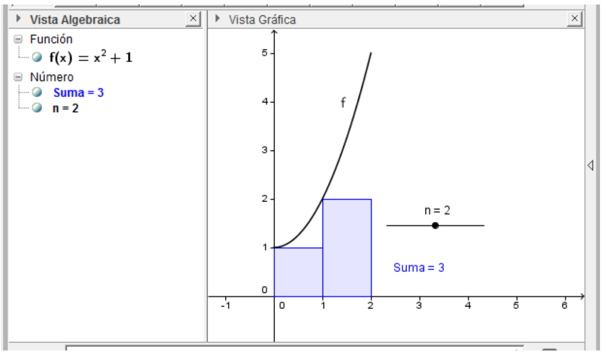
El GeoGebra ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una *Vista Gráfica*, una *Vista Algebraica* y una *Vista de Hoja de Cálculo*, lo que permite apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (como en el caso de rectángulos, gráficos de funciones), algebraica (como reglas de correspondencia de funciones, sumas), y en celdas de una hoja de cálculo (tabulaciones). Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás asimilando los cambios producidos en cualquiera de ellas.

Las construcciones geométricas se pueden realizar empleando las herramientas de construcción disponibles en la *Barra de Herramientas* o a partir de los comandos que se pueden ingresar directamente desde la *Barra de Entrada*. Cabe señalar que todo objeto creado en la *Vista Gráfica*, tiene también su correspondiente representación en la *Vista Algebraica* (ver figura).



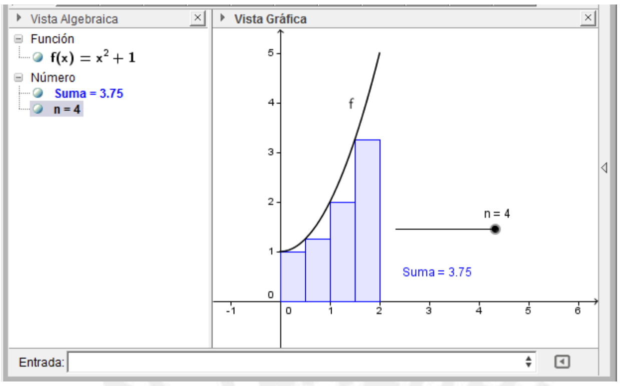
Vistas múltiples de los objetos matemáticos
Fuente: Hohenwarter et al. (2009, p. 13)

El GeoGebra muestra en forma automática, en las *vistas algebraica* y *gráfica*, las construcciones que se realizan. En la figura por ejemplo, se graficó una función *f*, se dibujaron dos rectángulos mediados por el deslizador *n* de la *barra de herramientas* y se calculó la suma de las áreas de ambos rectángulos.



Vistas algebraica y gráfica para $n = 2$.

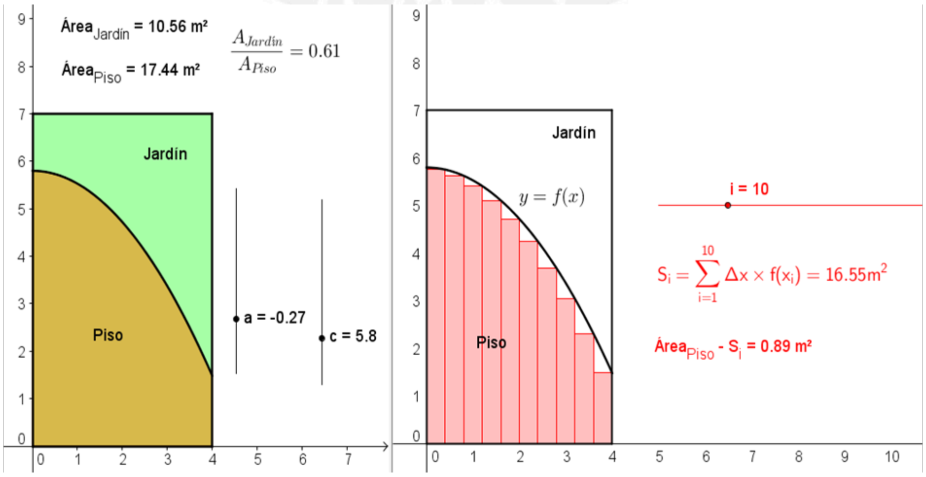
Como todas las representaciones del objeto se vincula dinámicamente, al manipular el deslizador y modificar su valor podemos apreciar el cambio que sucede en la suma y en el dibujo de los rectángulos, tanto en la *vista gráfica* como en la *vista algebraica* (ver figura).



Vistas algebraica y gráfica para n = 4.

El objetivo de nuestra investigación no es que el estudiante aprenda los comandos del GeoGebra ni que construya deslizadores; lo que queremos es que el estudiante utilice el GeoGebra como un instrumento que le facilite los cálculos y los gráficos para interpretar los resultados numéricos y gráficos, con el fin de que articule el concepto de área con la definición de área como una suma de áreas de infinitos rectángulos.

En ese sentido hemos diseñado e implementado ambientes basados en deslizadores, donde el estudiante los manipule y construya su propio aprendizaje. Estos ambientes son llamados *applets*. La figura muestra un ejemplo de lo que el estudiante observará en el monitor de su computadora.



Applets en GeoGebra.

Las investigaciones de Rodríguez (2011) y Amorim et al. (2011) señalan que el GeoGebra es de gran utilidad para trabajar con geometría dinámica, ya que permite obtener nociones de ciertos conceptos que difícilmente se consiguen realizar con otros medios. Asimismo, permite validar hipótesis, retroalimentar de los errores, criticar y cuestionar argumentos y fomentar la capacidad de argumentar ideas.

Es por eso que pensamos que esta herramienta permitirá al estudiante trabajar la noción de área y articular su concepto con la definición.

SECUENCIA DIDÁCTICA

MATEMÁTICA BÁSICA PARA ADMINISTRADORES
Situación 1: División del terreno.

El señor Martínez tiene en su casa un terreno disponible de 4x6 m^2 y quiere usarlo como área de esparcimiento. Por ello, planea colocar una terraza y un jardín, pero no sabe qué modelo elegir de los cuatro modelos que le ha propuesto su esposa (ver figura 1), hechos a partir de segmentos de rectas y/o circunferencias.

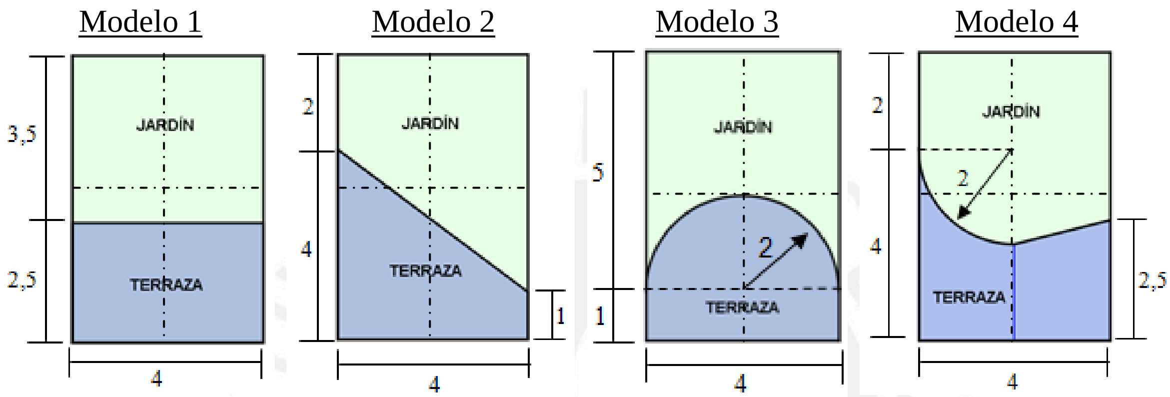


Figura 1. Modelo de terrazas

1. Uno de los criterios que tomará el señor Martínez para decidir qué modelo elegir es que se cumpla la siguiente proporción: $0{,}5 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 0{,}67$.

   a. Describa qué procedimiento le permitiría calcular el área de la terraza en cada uno de los modelos.

b. Según el criterio dado, ¿qué modelo de terraza elegiría el señor Martínez? Justifique.

2. Al señor Martínez le han presentado dos nuevos modelos de terrazas (ver figura 2), hechos a partir curvas que no son secciones de circunferencia.

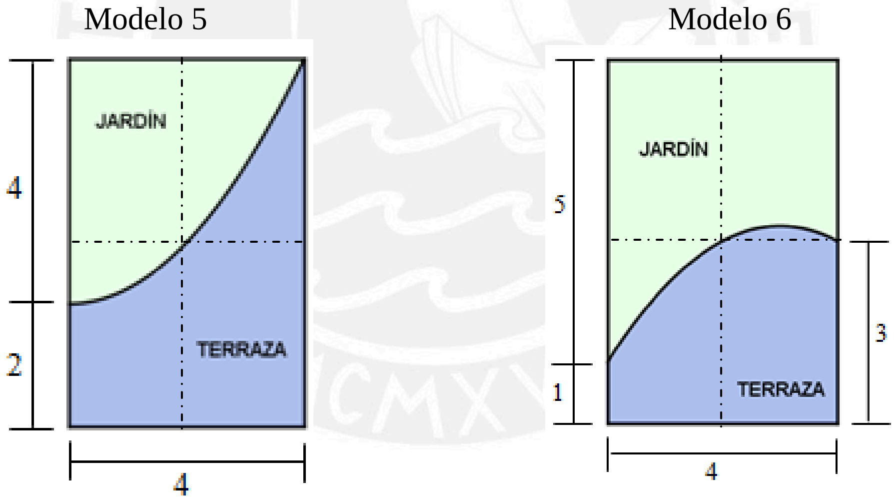


Figura 2. Nuevos modelos de terrazas.

a. Describa qué procedimiento le permitiría aproximar el área de la terraza en cada uno de los modelos.

b. A partir del procedimiento descrito en la pregunta 2 (a), calcule el área aproximada de la terraza e indique cuál de los dos modelos elegiría el señor Martínez (Utilice el mismo criterio: $0{,}5 \leq \frac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 0{,}67$). Justifique.

c. ¿Podría calcular el área de la terraza para ambos casos? Si su respuesta es afirmativa, dé el valor numérico del área; de lo contrario, explique por qué no los podría calcular.

MATEMÁTICA BÁSICA PARA ADMINISTRADORES

Situación 2A: Colocación de losetas en la terraza.

Al señor Martínez le mostraron una simulación por computadora de los diferentes modelos de terrazas y como quedarían enchapados con losetas, según sus requerimientos. Esto se hizo a partir de un programa interactivo (*applets* en GeoGebra) basado en el uso de deslizadores.

Los requerimientos dados por el señor Martínez fueron los siguientes:

- La proporción entre la terraza y el jardín es $0{,}75 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 1$.

- Para abaratar los costos, las losetas deben ser rectangulares y de dimensiones iguales. De esa manera resulta más sencillo y económico realizar los cortes a medida.

- Por cuestiones de uniformidad, cada loseta se debe colocar en la base de la terraza y debe coincidir con el borde superior de la misma, en al menos un punto.

1. Abra el archivo **S2_P1.ggb** y manipule los deslizadores *a* y *b* ubicados en la vista gráfica: División del terreno.

a. Elija un par de valores de *a* y *b* que hagan que se cumpla la proporción dada.

A continuación trabaje en la vista gráfica: Dibujo de loseta rectangular. (Utilice los valores hallados de *a* y *b*).

b. (i) Mueva el punto *P* y complete la tabla:

x	1	2,5	3,2
Altura de la loseta			
Área de la loseta			

¿Presentó alguna dificultad para completar la tabla? Explique.

(ii) Dibuje una loseta cuya base mida 4 m., e indique qué calcula de la loseta la imagen $f(4)$.

2. Al señor Martínez le mostraron por computadora un nuevo modelo de terraza, en donde se simula la colocación de losetas. Abra el archivo **S2_P2A.ggb** y manipule el deslizador *n* ubicado en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. Explique qué cree usted que calculan los valores que toma *S*.

b. Dibuje cuatro losetas con el deslizador *n*.

(i) ¿Las alturas de las losetas son las imágenes de *f* en el extremo derecho o izquierdo de cada base?

(ii) Exprese *S* como la adición de las áreas de cada una de las losetas dibujadas.

c. El señor Martínez desea enchapar la terraza con losetas rectangulares, con la condición de que la región de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas sea la menor posible.

(i) ¿Cuántas losetas cree usted que se deberían dibujar con el deslizador *n* para esto ocurra? Justifique.

(ii) Exprese *S* como la adición de las áreas de cada una de las losetas dibujadas en la pregunta c. (i). Justifique.

(iii) Calcule el área de la terraza que queda sin cubrir por las losetas dibujadas en (i).

(iv) Si se dibujaran más losetas de las permitidas por n, ¿el valor hallado en c. (iii): aumentaría, disminuiría, o permanecería igual? Explique.

d. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en la pregunta 2 c., responda a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuántas losetas se deberían dibujar con n y en qué forma se deberían ubicar en la terraza, de modo que la suma de las áreas de todas ellas se aproxime más al área de la terraza? Justifique.

(ii) Si se colocaran más losetas de las permitidas por n, ¿qué cree usted que suceda con los valores de S y S_1: se alejarían, llegarían a ser iguales, se acercarían pero no llegarían a ser iguales? Explique.

MATEMÁTICA BÁSICA PARA ADMINISTRADORES

Situación 2B: Colocación de losetas en la terraza.

Al señor Martínez le mostraron una simulación por computadora de los diferentes modelos de terrazas y como quedarían enchapados con losetas, según sus requerimientos. Esto se hizo a partir de un programa interactivo (*applets* en GeoGebra) basado en el uso de deslizadores.

Los requerimientos dados por el señor Martínez fueron los siguientes:

- La proporción entre la terraza y el jardín es $0{,}75 \leq \dfrac{\text{Área}_{\text{Terraza}}}{\text{Área}_{\text{Jardín}}} \leq 1$.
- Para abaratar los costos, las losetas deben ser rectangulares y de dimensiones iguales. De esa manera resulta más sencillo y económico realizar los cortes a medida.
- Por cuestiones de uniformidad, cada loseta se debe colocar en la base de la terraza y debe coincidir con el borde superior de la misma, en al menos un punto.

1. Abra el archivo **S2_P1.ggb** y manipule los deslizadores *a* y *b* ubicados en la vista gráfica: División del terreno.

a. Elija un par de valores de *a* y *b* que hagan que se cumpla la proporción dada.

A continuación trabaje en la vista gráfica: Dibujo de loseta rectangular. (Utilice los valores hallados de *a* y *b*).

b. (i) Mueva el punto *P* y complete la tabla:

X	1	2,5	3,2
Altura de la loseta			
Área de la loseta			

¿Presentó alguna dificultad para completar la tabla? Explique.

(ii) Dibuje una loseta cuya base mida 4 m., e indique qué calcula de la loseta la imagen *f* (4).

2. Al señor Martínez le mostraron por computadora un nuevo modelo de terraza, en donde se simula la colocación de losetas. Abra el archivo **S2_P2B.ggb** y manipule el deslizador *n* ubicado en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. Explique qué cree usted que calculan los valores que toma S_1.

b. Dibuje cuatro losetas con el deslizador *n*.

(i) ¿Las alturas de las losetas son las imágenes de *f* en el extremo derecho o izquierdo de cada base?

(ii) Exprese S_1 como la adición de las áreas de cada una de las cuatro losetas dibujadas.

c. El señor Martínez desea enchapar la terraza con losetas rectangulares, con la condición de que las partes de las losetas que sobrepasan la terraza sea la menor posible.

(i) ¿Cuántas losetas cree usted que se deberían dibujar con el deslizador *n* para esto ocurra? Justifique.

(ii) Exprese S_1 como la adición de las áreas de cada una de las losetas dibujadas en la parte c. (i). Justifique.

(iii) Calcule el área de las partes de las losetas dibujadas en (i) que sobrepasan la terraza.

(iv) Si se dibujaran más losetas de las permitidas por n, ¿el valor hallado en c. (iii): aumentaría, disminuiría, o permanecería igual? Explique.

d. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en la pregunta 2 c., responda a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cuántas losetas se deberían dibujar con n y en qué forma se deberían dibujar en la terraza, de modo que la suma de las áreas de todas ellas se aproxime más al área de la terraza? Justifique.

(ii) Si se colocaran más losetas de las permitidas por n, ¿qué cree usted que suceda con los valores de S y S_1: se alejarían, llegarían a ser iguales, se acercarían pero no llegarían a ser iguales? Explique.

MATEMÁTICA BÁSICA PARA ADMINISTRADORES

Situación 3A: Terraza con losetas.

El señor Martínez, luego de ver la simulación de la terraza enchapada con losetas rectangulares, le consultó al diseñador del programa si podría realizar la animación pero con losetas más delgadas y de modo que las áreas de las regiones (terraza y jardín) sean aproximadas a valores enteros.

1. Abra el archivo **S3_P1.ggb y** trabaje en la vista gráfica: <u>Dibujo de losetas rectangulares</u>.

a. (i) Manipule el deslizador *n* y determine cuántas losetas se deben dibujar de modo que la suma de sus áreas sea igual al área de la terraza. Justifique numéricamente.

(ii) Para el número hallado en (i), ¿por qué las losetas no cubren totalmente la terraza si sus áreas son iguales? Explique.

b. ¿Está de acuerdo con el hecho de que la suma de las áreas de las losetas y el área de la terraza que no se cubre con ellas, no varíen si se dibujan más de 19 losetas? Explique.

2. Abra el archivo **S3_P2A.ggb y** trabaje en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. (i) Manipule el deslizador *n* y determine cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas sea menor a 0,1 m^2.

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

b. (i) ¿Cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de la terraza que queda sin cubrir por dichas losetas sea menor a 0,01 m^2?

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

3. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en la pregunta 2, responda a las siguientes preguntas.

a. Si se dibujan 1 000 losetas, ¿se podría afirmar que ya se cubrió toda la terraza? Explique.

b. ¿Cuántas losetas se deberían dibujar como mínimo para que L y R sean menores a 0,001 m^2? Justifique.

c. (i) ¿Qué tendría que hacer para que la suma de las áreas de las losetas se aproxime más al área de la terraza? Explique.

(ii) ¿Qué tanto se podría aproximar al área de la terraza dibujando losetas rectangulares? Indique cuántas losetas cree usted que podrían dibujar para conseguir dicha aproximación.

(iii) Para el número indicado en (ii), plantee la suma de las áreas de todas las losetas como la adición de las áreas de cada una de ellas.

MATEMÁTICA BÁSICA PARA ADMINISTRADORES

Situación 3B: Terraza con losetas.

El señor Martínez, luego de ver la simulación de la terraza enchapada con losetas rectangulares, le consultó al diseñador del programa si podría realizar la animación pero con losetas más delgadas y de modo que las áreas de las regiones (terraza y jardín) sean aproximadas a valores enteros.

1. Abra el archivo **S3_P1.ggb y** trabaje en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. (i) Manipule el deslizador *n* y determine cuántas losetas se deben dibujar de modo que la suma de sus áreas sea igual al área de la terraza. Justifique numéricamente.

(ii) Para el número hallado en (i), ¿por qué las losetas no cubren totalmente la terraza si sus áreas son iguales? Explique.

b. ¿Está de acuerdo con el hecho de que la suma de las áreas de las losetas y el área de la terraza que no se cubre con ellas, no varíen si se dibujan más de 19 losetas? Explique.

2. Abra el archivo **S3_P2B.ggb y** trabaje en la vista gráfica: Dibujo de losetas rectangulares.

a. (i) Manipule el deslizador *n* y determine cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza sea menor a 0,1 m^2.

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

b. (i) ¿Cuántas losetas se deben dibujar como mínimo para que el área de las partes de las losetas que sobrepasan la terraza sea menor a 0,01 m^2?

(ii) ¿Cuánto mide la base de cada loseta hallada en (i)?

(iii) Exprese la suma de las áreas de las losetas halladas en (i), como la adición de las áreas de cada una de ellas.

3. A partir de los resultados obtenidos por usted y por su compañero en la pregunta 2, responda a las siguientes preguntas.

a. Si se dibujan 1 000 losetas, ¿se podría afirmar que ya se cubrió toda la terraza? Explique.

b. ¿Cuántas losetas se deberían dibujar como mínimo para que L y R sean menores a 0,001 m^2? Justifique.

c. (i) ¿Qué tendría que hacer para que la suma de las áreas de las losetas se aproxime más al área de la terraza? Explique.

(ii) ¿Qué tanto se podría aproximar al área de la terraza dibujando losetas rectangulares? Indique cuántas losetas cree usted que podrían dibujar para conseguir dicha aproximación.

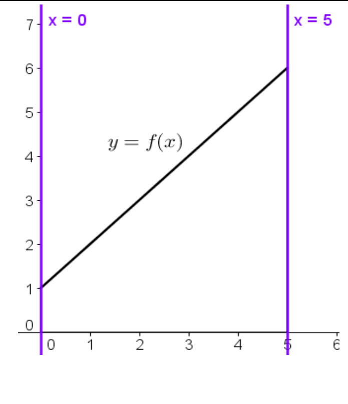
(iii) Para el número indicado en (ii), plantee la suma de las áreas de todas las losetas como la adición de las áreas de cada una de ellas.

MATEMÁTICA BÁSICA PARA ADMINISTRADORES

Situación 4: Área de regiones planas.

1. Abra el archivo **S4_P1A.ggb** y trabaje en la vista gráfica: Área de una región plana.

a. (i) Sombree en la figura la región limitada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x=0$ y $x=5$, y el eje X. ¿Cómo hallaría el área de dicha región? Explique.



(ii) Dibuje 1000 rectángulos con el deslizador *n*. ¿Cuánto mide la diferencia entre el área de la región y su aproximación (*S*)?

(iii) Exprese *S* como la adición de las áreas de cada uno de los rectángulos dibujados en (ii).

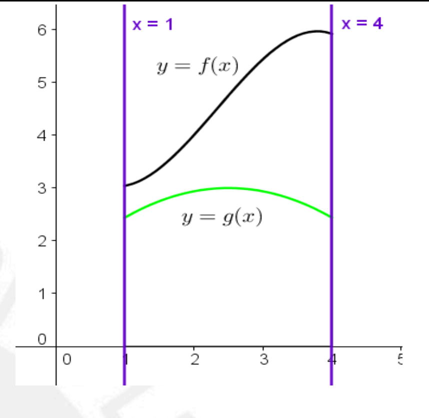
Abra el archivo **S4_P1B.ggb** y trabaje en la vista gráfica: Área de una región plana.

b. (i) Si se dibujaran 20 000 rectángulos, ¿cuánto cree usted que podría medir el área de la región limitada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x=1{,}3$ y $x=4{,}2$, y el eje X? Justifique.

(ii) Dibuje 850 rectángulos y exprese *S* como la adición de las áreas de cada uno de ellos.

2. Abra el archivo **S4_P2.ggb** y manipule los deslizadores *a*, *b*, *n* y n_1 ubicados en la vista gráfica: Área de una región plana, según se indique en cada pregunta.

a. Sombree en la figura la región limitada por las gráficas de las funciones *f* y *g*, y las rectas $x=1$ y $x=4$. ¿Cómo hallaría el área de dicha región? Explique.



b. Calcule (o aproxime) el área de la región limitada por las gráficas de las funciones *f* y *g*, y las rectas $x=1$ y $x=4$.