PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

PROCESO DE VISUALIZACIÓN DE CUADRILÁTEROS: UN ESTUDIO CON PROFESORES DE NIVEL SECUNDARIO

Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Presentada por: Cecilia Gómez Mendoza

Asesora : Dra. Jesús Victoria Flores Salazar

Jurado : Dr. Saddo Ag Almouloud

Jurado : Dra. Katia Vigo Ingar

Lima – Perú

2015

A mis padres Reynaldo Gómez y Cecilia Mendoza
por haber inculcado en mí el amor por los estudios.

AGRADECIMIENTO

A los profesores de la Escuela de Posgrado, por sus enseñanzas y exigencia a lo largo de estos años de estudio. A la decisión acertada de escoger como centro de estudios a la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Un agradecimiento especial a mi asesora Dra. Jesús Flores, por sus enseñanzas, sus recomendaciones y críticas constructivas, siempre con un trato cordial y alentándome en todo momento a seguir avanzando.

A los miembros del jurado, Dr. Saddo Ag Almouloud y Dra. Katia Vigo por sus sugerencias y observaciones, las cuales me ayudaron a mejorar mi trabajo.

A los profesores becarios de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas del convenio-Pronabec que gentilmente participaron en esta investigación.

A mis compañeras Flor Carrillo y Rocío Figueroa por formar con ellas un excelente equipo de estudio, sin su acogida hubiera sido muy difícil el camino, espero seguir compartiendo aulas y cumplir los retos acordados.

Finalmente, a mi querido esposo Gustavo y a mis hijos Diego y Lorena, por la paciencia y apoyo durante todos estos años. Espero ser modelo para que comprendan que un futuro profesional se forja estudiando.

La autora

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo analizar cómo un estudio de Cuadriláteros que desarrolla el proceso de visualización mediado por el Geogebra contribuye en la formación de profesores de nivel secundario. Utilizamos como referencial teórico la teoría de Registro de Representación Semiótica y su ampliación al proceso de Visualización de Duval. En cuanto a la metodología, nos apoyamos en la Ingeniería Didáctica de Artigue. Con respecto a la parte experimental de la investigación realizamos una secuencia de cuatro actividades, las cuales fueron elaboradas para que los profesores desenvuelvan el proceso de visualización de Cuadriláteros. Por ello, nos centramos en el registro figural y analizamos la articulación de las aprehensiones secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva de este registro. Observamos que los profesores movilizaron sus conocimientos previos pertinentes para el estudio de cuadriláteros, ya que consiguieron realizar tratamientos en el registro figural al utilizar herramientas específicas del Geogebra y especialmente la función “arrastre”. Sin embargo, percibimos que tuvieron problemas para coordinar este registro con su discurso. Finalmente, consideramos que los profesores de secundario lograron articular las aprehensiones: perceptiva-operativa, perceptiva-discursiva y perceptiva-operativa-discursiva, lo que nos indica que desarrollaron procesos de visualización del objeto matemático cuadriláteros.

Palabras claves: Cuadrilátero, Aprehensiones, Visualización, Geogebra.

INDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTAS DE CUADROS

CONSIDERACIONES INICIALES

La presente investigación aborda el estudio de la visualización de cuadriláteros desde la perspectiva de Duval (1999), mediado por el software Geogebra. Pensamos que nuestra investigación contribuye al estudio de este objeto matemático y especialmente a su enseñanza, ya que estamos interesados en analizar el proceso de visualización que desarrollan profesores de matemática del nivel secundario de la Educación Básica Regular del Perú, en relación a cuadriláteros.

Debemos resaltar que la presente tesis forma parte del proyecto internacional *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT* desarrollado entre la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y la Pontificia Universidad Católica del Sao Paulo (PUC-SP) de Brasil. Este proyecto cuenta con el apoyo del *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) y *la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Sao Paulo* (FAPESP).

A continuación presentamos la estructura de la investigación, compuesta de tres capítulos:

En el primer capítulo, presentamos la problemática de la investigación en el que revisamos investigaciones que tienen relación con las interferencias entre el objeto matemático y su representación, el dominio de la percepción sobre lo conceptual, la importancia de la reconfiguración de la figura y la influencia positiva de los ambientes de geometría dinámica como mediador entre significante y su significado, para lo cual realizamos una descripción del software Geogebra y las herramientas que se emplearán en nuestra investigación, también tratamos algunos aspectos de la teoría de registros de representación semiótica y visualización en el sentido de Duval, específicamente las aprehensiones que se movilizan en el proceso de visualización, justificamos la problemática, formulamos la pregunta, los objetivos de nuestra investigación, y presentamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) como base metodológica de nuestra investigación.

En el segundo capítulo presentamos aspectos históricos relacionado con el estudio del cuadrilátero que muestran evidencias desde los egipcios y griegos referencias que nos ayudarán al estudio del objeto matemático, que desde la perspectiva de Duval muestran que realizaban reconfiguraciones de una figura e identificaban unidades figurales de dimensión 0 y 1 de una figura, asignándole una nomenclatura, para luego emplearlas en teoremas y demostraciones, que fueron reproducidos en los seis primeros tomos de la obra *Los Elementos* de Euclides, en el que se enuncia como aporte de Euclides la propiedad del paralelismo, la construcción del paralelogramo y la clasificación de los cuadriláteros. Todos ellos serán expuestos en el estudio matemático del cuadrilátero, que inicia con la definición, luego la clasificación, definición y demostración de las propiedades del paralelogramo que incluyen al rectángulo, rombo y cuadrado.

En el tercer capítulo presentamos el experimento, que comprende: la descripción de los sujetos de investigación, la descripción de la secuencia de cuatro actividades, instrumentos, recursos; el análisis de las actividades, con sus respectivos análisis a *priori* y *a posteriori* de las acciones de los profesores; y resultados del experimento.

Finalmente presentamos las consideraciones finales del estudio, en relación al marco teórico y metodológico, la pregunta de investigación, al objetivo general, y a las perspectivas futuras.

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA

En el presente capítulo presentamos la problemática que comprende los antecedentes de la investigación sobre las interferencias entre el objeto matemático y su representación, el dominio de la percepción sobre lo conceptual y el empleo de las herramientas de los ambientes de geometría dinámica como mediador para el aprendizaje de la noción de la figura geométrica, debido a que nuestra investigación está interesada en cómo un estudio de cuadriláteros, que desarrolla el proceso de visualización mediado por el Geogebra, contribuye a la formación de profesores de nivel secundario**.** Luego, aspectos del referencial teórico, la justificación del tema de investigación, la pregunta y sus respectivos objetivos, finalmente la metodología y procedimientos.

1.1 ANTECEDENTES

Como estamos interesados en la visualización de cuadriláteros según la perspectiva de Duval, buscamos investigaciones de referencia como las de Almeida (2007), Mailoi (2002), Flores y Moretti (2006), Larios (2006) y Laborde (1994) que tienen relación con nuestro estudio y que utilizan ambientes de geometría dinámica.

Presentamos la investigación de Almeida (2007), que plantea la existencia de rupturas entre significante (representación) y significado (concepto matemático), que originan errores en la resolución de problemas geométricos. La autora, basándose en la noción de campo conceptual propuesta por Vergnaud refiere que un concepto sobre algo se forma cuando hay interacción entre sus invariantes, que dan el significado al concepto. El método adoptado por la investigadora fue analizar los trazos y justificaciones de las acciones tomadas por un grupo de estudiantes del curso de Licenciatura en Dibujo y Plástica de la Universidad Federal de Pernambuco-UFPE Brasil en la resolución de problemas de construcciones geométricas en el plano, en relación a propiedades de equidistancia y marcado de ángulos, como temas introductorios al estudio de la geometría plana, utilizando instrumentos tradicionales de dibujo, como regla y compás. La investigadora presenta las siguientes evidencias de interferencia entre la representación y los significados sobre el concepto de un objeto geométrico en las estrategias adoptadas por los estudiantes en la resolución de problemas. Observó que los estudiantes al presentar la solución, ellos en relación a una construcción propuesta, verificó que las respuestas presentadas independientemente si están o no correctas la solución presentada era semejante a la respuesta correcta. Otra observación fue que los estudiantes optaron por resolver el problema con ayuda de los instrumentos de dibujo, adicionando elementos o trazos con el fin de atender las exigencias del enunciado y la que se esperaba en términos de la configuración de la solución.

Almeida (2007) señala que en la parte experimental, en algunos casos, a pesar que el objetivo era realizar construcciones los estudiantes resolvían atendiendo a lo que veían.

La autora afirma que las estrategias de los estudiantes se centraron en satisfacer la configuración que ellos proyectan en la mente o en la representación final a ser obtenida. De modo general, la investigadora concluye que algunas de las estrategias de los estudiantes han sido influenciadas por la percepción basada en la representación del objeto geométrico, otras han sido influenciadas por la reproducción de modelos pre-concebidos y en otros privilegian algunos elementos en detrimentos de otros.

Por lo que Flores y Moretti (2006) señalan que deber haber un cambio de mirada de las figuras y no abordarlas exclusivamente por la percepción. Por tal motivo, recurrimos a sus estudios sobre la reconfiguración de las figuras geométricas, para la resolución del cálculo de áreas. Este cambio de mirada, señalan los autores, es sobre la organización de un conjunto de las formas de una figura que conduce a diversas reconfiguraciones y que reagrupadas forman un nuevo todo. Eso de acuerdo a la teoría de registros de Representación Semiótica es la aprehensión operatoria de la figura y que distingue 3 tipos de modificación: mereológica, óptica y posicional.

Los investigadores estudian básicamente la modificación mereológica de la figura porque de acuerdo con ellos permite la operación de la reconfiguración y la función heurística de las figuras en la resolución de problemas. Además presentan dos ejemplos de reconfiguración de áreas sombreadas realizadas a estudiantes de 5to año de primaria en ambos casos los investigadores muestran que los estudiantes realizaron reconfiguraciones sobre las figuras que les permitieron buscar la configuración de otra figura conocida lo que les permitió hallar el área solicitada. Concluyen que de esta forma las posibilidades heurísticas de una figura no sólo requieren de habilidades visuales, también de otras competencias como son los conocimientos matemáticos, que permitan concluir la actividad que se trabaje en geometría.

Por otro lado, las competencias matemáticas del estudiante, se debe en gran parte a la preparación de los profesores en el área. Como nuestro estudio se realiza con profesores del nivel secundario, mencionamos la investigación de Mailoi (2002) que tiene como objetivo que profesores de matemática de nivel secundario de Brasil desarrollen conocimientos entorno al objeto matemático Cuadriláteros y además conozcan teorías del área de educación matemática, como la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría de Registros de Representación Semiótica con el fin de propiciar una reflexión de sus prácticas en el aula. En la investigación participaron diez profesores de nivel secundario que formaron grupos de trabajo. Para analizar la participación y desenvolvimiento de los profesores, la autora estableció seis categorías, las cuatro primeras corresponden a las dificultades que presentan con relación a la geometría, sobre aspectos conceptuales y visuales, situaciones y libros didácticos; las dos últimas categorías a la visión de investigación y registros de representación. Las actividades fueron diseñadas tomando en cuenta las cuatro fases de acción, formulación, validación e institucionalización propuesta por Brousseau, y la mayoría de las actividades fueron trabajadas en diferentes registros (enunciado verbal, representación figural y discurso matemático) desde la perspectiva de Duval. El objeto matemático fue analizado desde varios tópicos: aspectos visuales, definición, propiedades, conversión de registros, construcciones geométricas, conjeturas, demostraciones, contraejemplos, teorema recíproco y discusión entre el grupo de profesores. La metodología adoptada permitió que los profesores participantes vivencien dos momentos: en el primero, se propone que los profesores se pongan en el lugar de sus estudiantes para resolver situaciones-problemas y en el segundo momento como profesores realicen una reflexión sobre investigaciones en la que se usa la Teoría de Situaciones y la Teoría de Registros de Representación Semiótica para relacionarlas con su práctica docente. Con respecto al desarrollo de la secuencia de actividades, se pudo observar desde la teoría de registros de representación, lo siguiente: dificultad en verbalizar conceptos, es decir explicar el concepto de un objeto geométrico y el empleo del registro en lenguaje matemático, se obtuvo expresiones como: “punto medio de la recta AB”, “recta tangente a un punto”, la investigadora afirma que no es consecuencia de fallas conceptuales, sino al poco contacto con el registro discursivo; necesidad de trabajar con diferentes registros como son el registro figural y el registro del discurso matemático, los profesores afirmaron que no estaban acostumbrados a verbalizar una construcción, lo que implica que le dan mayor importancia al aspecto visual que conceptual, porque para ellos es más fácil presentar una figura que su definición, también menciona la autora que se apoyan en aspectos visuales para justificar conjeturas. Maioli (2002) observó que hasta entonces los profesores no le habían dado la importancia a los cambios de registro en matemática, por lo que uno de los logros de esta investigación es que los profesores reconocieron la importancia de representar un objeto matemático de varias formas. Con relación a las dificultades en el área de geometría, la autora observó el uso de términos inadecuados, confusión entre propiedades y definiciones, concepto de que la diagonal de un polígono es siempre interna, la idea de “base” en el contexto de geometría está siendo confundida con la idea de base en el sentido común, lo que lleva a trabajar con la base en posición horizontal, además observó que los profesores no requerían la demostración de un resultado observado experimentalmente. Sobre las actividades propuestas para que realicen demostraciones, en un primero momento les fue difícil, para luego de varios intentos lograr emplear propiedades y un lenguaje adecuado para la demostración, como consecuencia los profesores reflexionaron sobre sus prácticas en el sentido que usualmente dan a sus estudiantes los conceptos sin recurrir a estrategias que les permitan apropiarse de ellos; sobre las definiciones que se enuncian en los libros didácticos, en un primer momento los profesores toman al texto como una autoridad sin posibilidad de cuestionarlo, pero con la discusión y reflexión que se realizó en la investigación, Maioli (2002) señala que esa posición se fue modificando. Finalmente, la discusión del referencial teórico provoca en el grupo de profesores, reflexiones sobre sus prácticas en el sentido de reconocer que no diseñan actividades que cumplan las fases como estrategias didácticas y los cambios de registro propuestas por Brousseau y Duval respectivamente.

Otro aspecto de nuestro interés corresponde a los recursos que podemos emplear en el diseño de nuestras secuencias de actividades, para ello revisamos trabajos realizados en ambientes de geometría dinámica. En ese sentido, presentamos la investigación de Laborde (1994) que tiene como objetivo analizar las características del ambiente de geometría dinámica Cabri II, porque constituye un medio para el aprendizaje de la noción de figura geométrica. Señala que la figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente (significado) dado con todos sus dibujos, siendo el primer elemento el referente y el segundo elemento uno de los dibujos que lo representa (significante), este segundo elemento pertenece al universo de todos los dibujos posibles del referente.

Laborde (1994) señala que la percepción interviene en la construcción de una interpretación, siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva; también agrega que la enseñanza tradicional de la geometría en hoja de papel centra su atención en la lectura geométrica y desecha la lectura espacial del dibujo, significa que desconoce la existencia del *dominio de interpretación del dibujo* (todas las propiedades del objeto). La autora refiere que frente a esta necesidad han surgido ambientes de aprendizaje informáticos que ofrecen un sistema de representación de objetos geométricos mediante dibujos en la pantalla de la computadora y pueden ser construidos con el uso de las herramientas dados en un lenguaje geométrico (elementos geométricos: punto, recta, segmentos, rectas paralelas, etc.) Un dibujo construido utilizando el lenguaje geométrico al aplicarle el desplazamiento o “arrastre” conservará sus propiedades, lo que permitirá caracterizar al objeto geométrico y a la vez favorecerá el uso de conocimientos geométricos.

El “arrastre” es la principal característica de los ambientes geometría dinámica, como el Cabri-geómetra II, porque ofrece una retroacción a las acciones. Esto significa que puede realizar otra acción basada en sus conocimientos sobre el mismo dibujo, en la repetición confronta con el mismo problema, lo que permite reevaluar sus acciones. Este proceso es decisión del estudiante sin la intervención del profesor, y de esta manera los hace razonar.

En ese sentido, el Cabri-Geómetre II con ayuda del "arrastre" permite observar si un dibujo ha sido construido en base a la percepción, es decir, sin tomar en cuenta los conocimientos matemáticos. Concluye la autora que el reconocimiento espacial de las propiedades geométricas no es espontánea, es un objeto de estudio, por lo que la asociación entre lo visual y geométrico (como herramienta de modelización de lo visual) es limitado en un ambiente de lápiz y papel, lo que no ocurre en los ambientes de geometría dinámica porque es una herramienta que facilita esta asociación. Laborde (1994) señala que los ambientes de geometría dinámica ofrecen posibilidades de organización de un medio para su aprendizaje por tres razones: los fenómenos visuales adquieren importancia por el dinamismo de estos ambientes, ellos son controlados por la teoría como resultado de una modelización gráfica y no hay límites en la presentación de situaciones geométricas que pueden ser visualizadas.

Por otro lado, la investigación de Larios (2006) se centra en la problemática que enfrentan los estudiantes sobre el conflicto entre los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos, que se dan en un ambiente de geometría y cómo este ambiente influye en su aprendizaje.

El investigador se basa en la teoría de los Conceptos Figurales de Fischbein, donde considera que las figuras geométricas son objetos con propiedades conceptuales, y ligados a su representación, ya sea mental, en físico lápiz y papel o en la pantalla de una computadora. El autor aclara que los conceptos figurales son entidades mentales que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño) y al mismo tiempo poseen cualidades conceptuales (idealidad, abstracción, generalidad y perfección), estas propiedades conviven.

En su investigación participan estudiantes de tercero de secundaria, en el que desarrollan doce actividades, bajo el siguiente esquema: realizar construcciones y observar propiedades geométricas de paralelismo, y la construcción de la figura original a partir de las propiedades observadas. Para ello, se diseñaron actividades donde debían identificar polígonos construidos a partir de los puntos medios de triángulos, cuadriláteros y hexágonos, y la observación de propiedades geométricas como el paralelismo que surge a consecuencia del uso de los puntos medios. En un primer momento, los estudiantes analizan las construcciones por medio del “arrastre” que permite al usuario modificar forma y posición de los objetos geométricos, sin alterar sus relaciones geométricas con las que fueron construidos, para luego dar argumentos que justifiquen sus observaciones, y en otro momento obtener la figura de otra que representaría una figura formada por los puntos medios. En el desarrollo de las actividades, se observa lo siguiente: los estudiantes no consideran relevante el paralelismo de los lados del polígono formado por los puntos medios del triángulo, cuadrilátero y hexágono. Por el contrario, la mayoría observó propiedades que están más cerca de su percepción visual y conocimientos previos, por ejemplo se refieren a la longitud de sus lados, posición, y forma del cuadrilátero, pero muy pocos al uso de la propiedad del paralelismo. Larios (2006) señala que los estudiantes priorizan los aspectos figurales que los conceptuales. Con respecto, a la visualización de las figuras geométricas, el autor observa dos fenómenos cognitivos relacionados con aspectos figurales, al cual llama “rigidez geométrica”; este ocurre cuando hay una incapacidad del individuo para manejar mentalmente una figura geométrica al no estar en una cierta posición, traslación o cambio de forma (cambio de posición de sus lados o los ángulos se modifican), atribuye este fenómeno al conflicto entre aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos, y el otro fenómeno es el arrastre inicio-fin, se refiere a que los estudiantes no perciben los cambios intermedios de esta transformación y los consideran como caso particulares de la construcción. Afirma que solamente observan la construcción inicial y final. En este caso el aspecto figural es usado como referencial de un concepto figural y no como recurso heurístico por lo tanto los conceptos figurales no serán aprendidos. Con el uso de ambientes dinámicos el beneficio no es automático, pues mientras se logra abordar algunos problemas relacionados con el aprendizaje, aparecen otros, es decir los estudiantes tienden a priorizar algunas propiedades que otras y hacen un mejor manejo de las propiedades cuando las figuras están en posición “estándar” o las actividades requieren de medición y del cálculo.

Estas investigaciones son relevantes para nuestro estudio porque muestran las interferencias entre significante y significado de objetos geométricos; es decir, entre el objeto matemático y su representación, la importancia del tratamiento de las figuras que no solo requieren de habilidad visuales sino de conocimientos matemáticos, las dificultades que presentan los profesores en verbalizar una representación figural, ya sea en lenguaje natural o simbólico, en otro aspecto, la influencia positiva de los software de los ambientes que tiene como característica principal el "arrastre" para identificar las propiedades que caracterizan a un objeto geométrico, y el uso de sus herramientas para la construcción de figuras. Finalmente, la tendencia de los estudiantes a verbalizar el aspecto figural en detrimento del aspecto conceptual y a identificar las propiedades cuando las representaciones de los objetos geométricos se encuentran en posición estándar.

A partir de la revisión de las investigaciones, como se mencionó en un párrafo anterior, surge el interés de conocer cómo un estudio de cuadriláteros, que desarrolla el proceso de visualización mediado por el geogebra, contribuye en la formación de profesores de nivel secundario

Para ello es necesario describir algunos aspectos de este ambiente computacional que será empleando como recurso en nuestra investigación.

1.2 AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA GEOGEBRA

Con el desarrollo de la tecnología, se piensa que la implementación de recursos informáticos en los colegios secundarios es necesaria, por ello pensamos que la política educativa debe permitir la capacitación de profesores. En ese sentido estamos de acuerdo con Levy (2001) cuando afirma que toda tecnología en el contexto escolar trae la necesidad de capacitar en primer lugar a los profesores y después a los estudiantes, con el fin de que haya una perfecta interacción en el proceso de enseñanza y el aprendizaje ocurra de forma estimulante en una nueva perspectiva.
Es así que también otro investigador, Valente (1999) señala que:

> el computador puede ser un importante recurso para promover la información o facilitar el proceso de construcción de conocimientos […] en el análisis de los software es posible entender que el aprender no debe estar restringido al software, más es la interacción del alumno con el software (p. 89).

La interacción con el software permitirá que el estudiante actúe de forma autónoma, permitiendo un autoaprendizaje.

También Almeida (1998) considera importante la preparación del profesor para que actúe como mediador entre el conocimiento y el estudiante. Señala al respecto:

> Para que el profesor tenga condiciones de crear ambientes de aprendizaje que puedan garantizar ese movimiento (continúo de construcción y reconstrucción de conocimientos) es preciso reestructurar el proceso de formación, al cual asume la característica de continuidad. Hay necesidad de que el profesor sea preparado para desarrollar competencias tales como: estar abierto a aprender, actuar a partir de temas emergentes en contexto y de interés de los alumnos, promover el desenvolvimiento de proyectos cooperativos, asumir actitudes de investigador del conocimiento y del aprendizaje del alumno, propiciar la reflexión, la depuración y el pensar sobre el pensar, dominar recursos computacionales, identificar las potencialidades de aplicación de esos recursos en la práctica pedagógica, desarrollar un proceso de reflexión en la práctica y sobre la práctica, reelaborando continuamente teorías que orienten su actitud de mediador (p. 2).

La formación de profesores no solo radica en la preparación del uso de las diferentes herramientas informáticas, también es necesaria una reflexión sobre sus propias prácticas.

Determinar que tecnología usar para que este proceso de construcción del conocimiento se realice, es una preocupación recurrente en los educadores, tal como lo afirma (Ponte, Ribeiro y Santos, 2012).

Valente (1999) señala que es importante el análisis de los softwares educacionales, en términos de construcción del conocimiento y el papel del profesor para que esto suceda. Por tal motivo el autor realiza la siguiente categorización de los softwares educacionales:

Tutoriales: Consiste en la presentación de la información de un contenido organizada de acuerdo a una secuencia pedagógica. La limitación del tutorial radica que no verifica si la información fue procesada por el usuario. Los software tipo ejercicios y práctica entran en esta categoría.

Programación: Cuando el usuario programa la computadora, el programar implica que el usuario utilice conceptos, estrategias y un estilo de resolución de problemas. Para el autor al programar se identifican las siguientes acciones como: descripción (conceptos, estrategias)-ejecución (descripción a través de un lenguaje de programación)-reflexión (sobre el producido en el computador)-depuración (búsqueda de nuevas informaciones para modificar la producción anterior)-descripción, y nuevamente se repite el ciclo, son las que realiza el estudiante en la adquisición de conocimientos, pero es importante que la interacción con la computadora sea mediada por el profesor para que en el proceso de aprender del usuario comprenda sus ideas y pueda intervenir en forma pertinente.

Simulaciones: Consisten en modelos dinámicos y simplificados del mundo real y permiten explorar diversas situaciones. El usuario puede elaborar conjeturas, hipótesis, mostrarlas y analizar resultados.

Juegos educacionales: Los juegos tienden a desafiar y motivar al usuario con respecto a la exploración de un contenido, pero es probable que esa competencia pueda favorecer o desfavorecer el aprendizaje, porque el usuario no sabrá y no será consciente si las estrategias o conceptos usados son las correctas.

De acuerdo a la categoría realizada por Valente (1999), el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Geogebra pertenece a la categoría de *Simulaciones*, recurso que hemos considerado en nuestra investigación, Gravina (2001) define a los AGD como "micromundos que concretizan un dominio teórico, en el caso de la geometría euclidiana, en la construcción de sus objetos y sus representación que pueden ser manipuladas directamente en la pantalla del computador" (p. 82), es decir a través de los elementos geométricos que ofrecen en sus diferentes menús, por ejemplo: punto, segmento, recta, círculos, rectas paralelas; al realizar la construcción de un objeto a partir de sus propiedades que lo definen, este ambiente ofrece la manipulación o al "arrastre" de las representaciones de las figuras geométricas, manteniendo las relaciones geométricas con las que fueron construidas.

De acuerdo con Salazar (2009) "esa manipulación permite mejorar la visualización, además de facilitar diferentes puntos de vista relacionados a una misma figura" (p. 48) y Leung (2012) "una característica clave del AGD es su capacidad para representar visualmente invariantes geométricos en medio de variaciones simultáneas inducidas por el *arrastre* de actividades" (p. 2). El autor muestra en un ejemplo que al utilizar el arrastre puede haber dos tipos de invariantes: directas e indirectas. (Ver Figura 1).

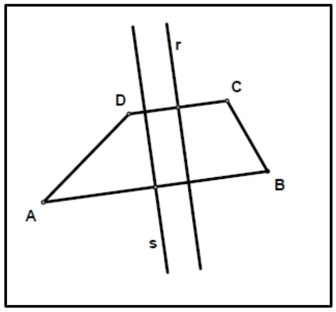


Figura 1: Trapecio con vértices A, B, C y mediatrices r, s.
Fuente: Leung (2012, p. 3)

El paralelismo AB y CD, la mediatrices r y s se construyen invariantes, porque todas se conservan de manera simultánea durante el arrastre. Los puntos A, B y C son puntos que se pueden mover a cualquier lugar de la pantalla (invariantes directas), mientras que D se puede mover a lo largo de la línea paralela a AB a través de C. Las mediatrices r y s se mueven (invariantes indirectas) dependiendo del movimiento de B o C. El autor señala que una relación entre invariantes es un invariante en sí, esto sucede con las mediatrices r y s, concluye "si dos líneas son respectivamente perpendiculares a dos líneas paralelas, a continuación, las dos primeras líneas son paralelas". Según Leung hay dos modalidades de arrastre:

Arrastrar para la prueba: consiste en arrastrar para comprobar la presencia de propiedades conocidas en una figura dinámica.

Arrastrar para buscar /por descubrimiento: consiste en arrastrar para buscar nuevas propiedades de la figura. Por ejemplo: si la situación propuesta consiste en formular conjeturas sobre la figura, este tipo de arrastre se utiliza para descubrir nuevas propiedades a través de la percepción de los invariantes y las relaciones entre ellos.

A continuación presentaremos algunos aspectos del Geogebra, como habíamos mencionado anteriormente será un recurso mediador en el estudio de los Cuadriláteros.

EL GEOGEBRA

El Geogebra por ser un programa de libre acceso facilita el acercamiento de los profesores y estudiantes, debido a que lo pueden utilizar en el aula y en sus casas. Es útil para enseñar y aprender en todos los niveles educativos.

En la última versión del Geogebra 5.0 se conjugan la geometría interactiva de dos y tres dimensiones (2D y 3D respectivamente), álgebra, análisis y estadísticas, donde incorpora el Álgebra Simbólica Computacional (CAS en inglés) que permite trabajar con fracciones, ecuaciones y fórmulas que incluyen variables indefinidas. Las ventanas que muestra la versión 5.0 la presentamos en la figura 2.

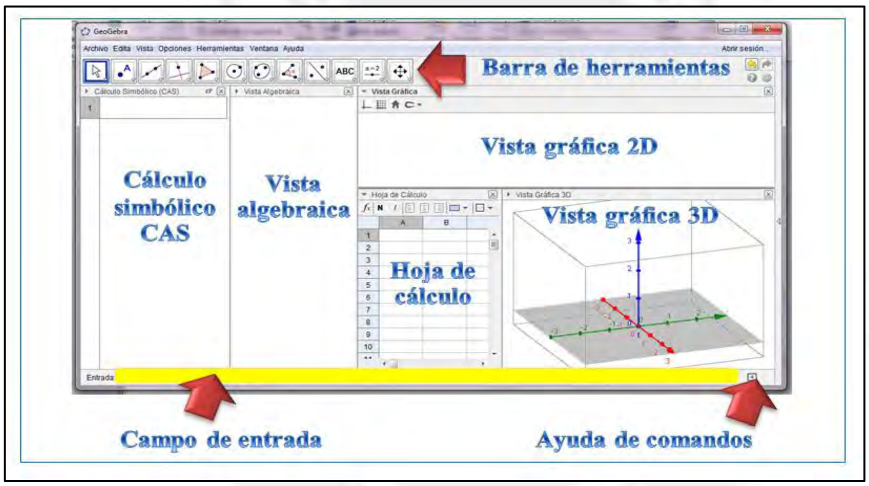


Figura 2: Ventanas de la nueva versión del Geogebra 5.0

Lo primero que se puede destacar del programa Geogebra es que a partir de los elementos que se encuentran en la **Barra de herramientas** se pueden realizar construcciones en la **Vista Gráfica** y en simultáneo se pueden ver las coordenadas y ecuaciones de los elementos en la **Vista Algebraica**.

Para el estudio que realizaremos solo haremos uso de la **Vista gráfica 2D**, porque permite realizar construcciones geométricas y modificarlas dinámicamente. El Geogebra muestra al inicio la siguiente ventana predeterminada. (Ver Figura 3).

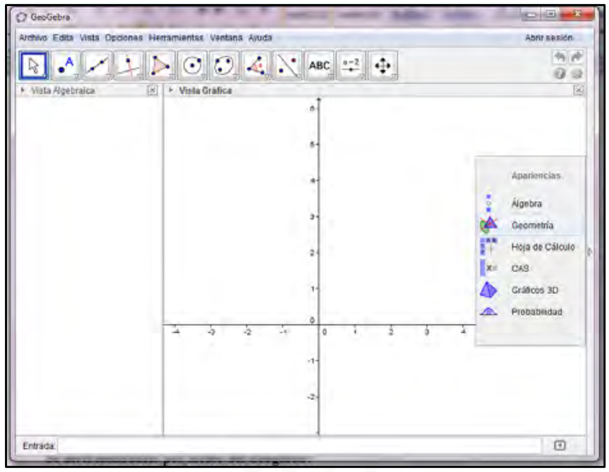


Figura 3: Ventana predeterminada de inicio del Geogebra 5.0

Se puede acceder a la vista gráfica 2D (Figura 4) desde el menú **Apariencias,** y luego **Geometría.**

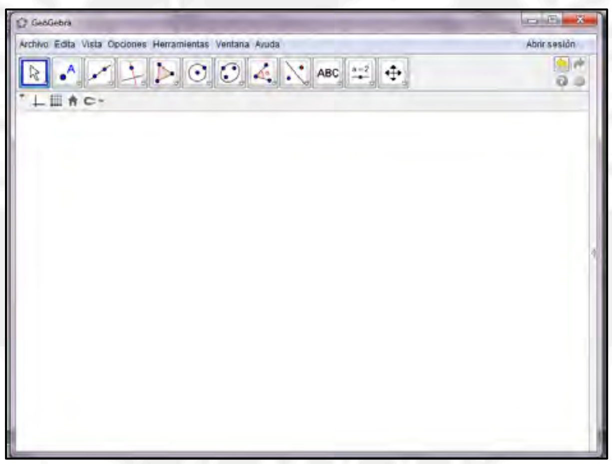


Figura 4: Vista gráfica 2D para el estudio de los Cuadriláteros

En la vista gráfica 2D se muestra la barra de herramientas, en ella se pueden encontrar **objetos iniciales** u objetos libres como puntos, rectas, círculos, etc. y **objetos geométricos dependientes** como puntos medios, mediatrices y lugares geométricos en general.

Con respecto a las construcciones que se realizarán en nuestra investigación, hemos considerado que se seleccionarán las siguientes herramientas: (ver Cuadro 1)

Cuadro 1: Función de algunas herramientas del Geogebra

Herramienta	Iconos	Construcción
Elige y mueve		Permite trasladar y seleccionar objetos incluso varios a la vez presionando la tecla de Control.
Nuevo punto		Crea un punto en el plano.
Punto de intersección.		Selecciona dos objetos, para crear todos los puntos de intersección.
Medio o centro		Marca dos puntos y se traza un punto que equidista y es colineal a los dos puntos.
Recta		Marca dos puntos y se traza la recta que pasa por los dos puntos.
Segmento		Selecciona dos puntos y queda definido un segmento.
Recta perpendicular		Selecciona una recta (semirrecta o segmento) y un punto, donde quedará definida una recta que pase por el punto y perpendicular a la primera recta.
Rectas paralelas		Selecciona una recta y un punto, quedará definida una recta paralela a la primera recta.
Mediatriz		Selecciona segmento o los extremos del segmento, se definirá una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.
Polígono		Construye polígono marcando como mínimo tres puntos, se inicia en el primer punto y termina en el primer punto.
Circunferencia (centro, punto)		Traza circunferencia en la pantalla, con punto, arrastre y punto se define el radio de la circunferencia.
Texto	ABC	Permite añadir comentarios, etiquetas y símbolos.

Estas herramientas facilitarán la movilización de conocimientos matemáticos y el desenvolvimiento de estrategias de los profesores en el desarrollo de las actividades.

Con respecto a las actividades propuestas en el experimento, algunas de ellas han sido adaptadas del grupo de actividades que ofrece la página web del Geogebra.

A continuación, presentamos aspectos teóricos desde la perspectiva de Duval (1999), específicamente las diferentes aprehensiones que se movilizan en el proceso de visualización de una figura.

1.3 ASPECTOS DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA Y VISUALIZACIÓN

Nuestra investigación estudia la visualización geométrica de los registros figurales por medio de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y su ampliación a la Visualización (1999).

De acuerdo con Duval (1999) las representaciones semióticas son sistemas de signos, considerados como medios de exteriorización de representaciones mentales, sirven para la comunicación y son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Para el autor, el desarrollo de las representaciones mentales se produce por la interiorización de las representaciones semióticas, de la misma manera que las representaciones mentales son una interiorización de las percepciones. Además, expresa que la pluralidad de los sistemas semióticos permite una diversificación de las representaciones de un objeto matemático, y la pluralidad aumenta la capacidad cognitiva del sujeto y de sus representaciones mentales.

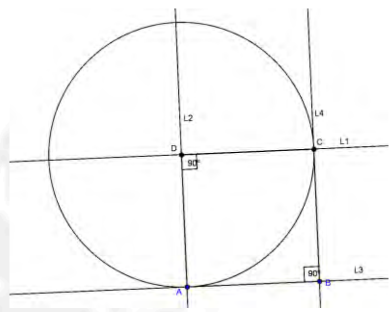
Es así que afirma: "en matemática una representación semiótica sólo es interesante en la medida que se pueda transformar en otras representaciones, y no en función del objeto representado" (Duval 2011, p. 52). Son esas transformaciones que producen nuevos conocimientos, esas transformaciones son las operaciones semióticas y un registro se caracteriza por las operaciones que le son específicas.

Por ejemplo, las figuras geométricas, el lenguaje algebraico, gráfico y la lengua natural, son sistemas diferentes y tienen aprendizajes específicos. Estos sistemas particulares de representaciones semióticas, según el investigador son **registros de representación semiótica**.

Primero, debemos entender qué es un registro. El investigador afirma que para que una representación semiótica pueda ser un registro de representación semiótica, debe permitir tres actividades cognitivas: **formación, tratamiento y conversión**. A continuación desarrollaremos cada una de estas actividades cognitivas:

La formación es una representación dentro un sistema semiótico particular, para expresar una representación mental o para evocar un objeto real. La formación implica una selección de relaciones y de datos en el contenido a representar. Esta selección se hace en función de unidades y de reglas de formación que son propias de cada registro cognitivo en el que la representación es un producto. La **formación** debe respetar reglas, por ejemplo en la Cuadro 2 se muestra la regla de formación de una representación geométrica de un cuadrado.

Cuadro 2: Construcción geométrica de un cuadrado

Regla de formación del cuadrado ABCD	Representación figural
1. Dos rectas perpendiculares L_1 y L_2, cuyo punto de intersección es D. 2. Punto A que pertenece a la recta L_2. 3. Una circunferencia Q_1 de centro D y radio $\overline{DA}$. 4. Punto C intersección de la recta L_1 y la circunferencia Q_1. 5. Recta L_3 tangente a la circunferencia Q_1 en el punto A. 6. Recta L_4 tangente a la circunferencia Q_1 en el punto C.	

Estamos de acuerdo con Duval cuando afirma que, las reglas de conformidad permiten el reconocimiento de las representaciones asociadas a una expresión algebraica, un esquema, una figura geométrica, etc. Con respecto a las figuras geométricas ellas presentan tres características que les confiere un poder cognitivo particular: primero tienen un valor intuitivo sobre lo que "se ve sobre la figura", se le asocia a un objeto como imágenes dibujadas que ellas representan y son construidas instrumentalmente con la regla, con un compás o con un software. El conocimiento de las reglas no implica que sea suficiente para la comprensión de las representaciones dadas. La formación de representaciones semióticas de acuerdo con Duval (2009) es más compleja que la aplicación de las reglas de conformidad, porque implica la selección de signos o caracteres de un contenido percibido, imaginado o representado en función de la representación de un registro escogido.

Para Duval (2004) una representación, sea en el papel o en una pantalla de una computadora, a nivel perceptivo destaca algo identificable, que es susceptible de algunas variaciones visuales que pueden agruparse en dos grandes tipos:

- Las variaciones ligadas al número de dimensiones: 0 (un punto), 1 (una línea) o 2 (superficie).
- Las variaciones cualitativas: variación de forma, tamaño, orientación, color, etc.

Toda figura geométrica de acuerdo con Duval, combina dos tipos de variación, la variable visual cualitativa (forma) con la variable de dimensión que permite definir las unidades figurales elementales de la representación geométrica. Ver figura 5

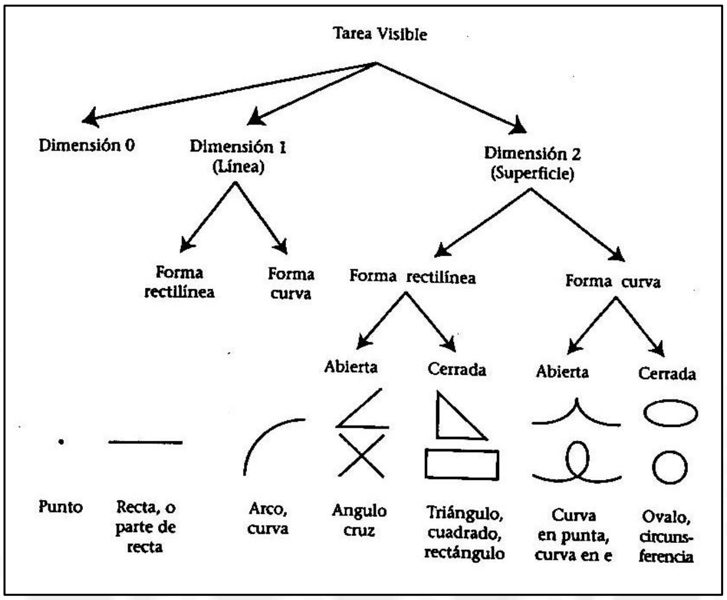
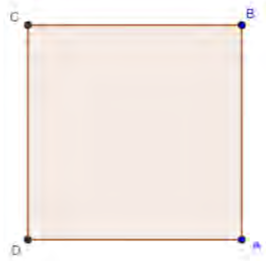


Figura 5: Clasificación de unidades figuras
Fuente: Duval (2004, p. 159)

Para el autor unidades figurales como el triángulo, cuadrado, un segmento o un punto, no provoca ninguna ambigüedad a nivel perceptivo de las unidades figurales. Lo que salta a la vista o a nivel perceptivo son las unidades figurales de dos dimensiones sobre las unidades figurales de 1 y 0 dimensiones. Estas unidades figurales son unidades elementales del registro de representación de las figuras geométricas.

Por ejemplo, en la Cuadro 3 la representación del objeto matemático cuadrado (dimensión 2) es una configuración de segmentos (dimensión 1) y puntos (dimensión 0). Si queremos definir el objeto matemático, para pasar de lo figural a su discurso se recurre a las unidades figurales de dimensión 1 y 0 es decir, se realiza una cambio dimensional.

Cuadro 3: El cuadrado, de su representación figural al discursivo

Representación	Discurso	Dimensión
	Vértices: A, B, C y D	0
	Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$	1
	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	1
	$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong DA$	1
	$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle CDA = m\sphericalangle DAB$=90°	
	Cuadrado: ABCD	2

Tratamiento

El tratamiento de una representación de acuerdo con Duval (2004) es una transformación de la representación interna a un registro de representación.

Duval (2009) asegura que,

> No existe, por ejemplo, ningún aprendizaje de reglas de tratamiento propias del registro de las figuras geométricas. Las tareas de construcción de figuras solicitan solamente la coordinación entre el registro discursivo (más particularmente un empleo especializado de la lengua natural) y reglas de formación para la realización de las figuras. (p. 62).

En el caso de las figuras geométricas la posibilidad de los tratamientos figurales está vinculada con las posibilidades de modificaciones de la figura que surgen de las relaciones de las partes con el todo, estas modificaciones según el autor pueden ser físicas o mentales e independientemente de todo conocimiento matemático.

Tomemos como ejemplo la figura 6, si realizamos un trazo $\overline{DH}$ sobre la configuración de un romboide este queda dividido en dos sub-figuras el triángulo AHD y el trapecio $HBCD$, trasladando luego la sub-figura AHD obtenemos una nueva configuración.

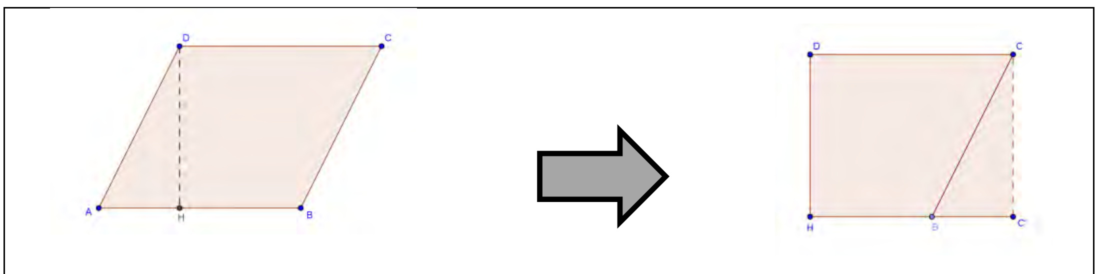


Figura 6: Relación parte-todo

Conversión

La conversión según Duval (2009) es una transformación externa que hace pasar de una representación a otra. Requiere de la coordinación de representaciones en el individuo que la efectúa. La conversión requiere que percibamos la diferencia entre el contenido de una representación (noesis) y aquello que la representa (semiosis), el autor explica que se establece un lazo entre la *noesis* y la *semiosis.* Si el lazo no se establece la conversión se torna imposible o incomprensible.

Así, afirma que: “Las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el cual el cambio de registro se efectúa. Y es la misma situación para el pase del discurso en lengua natural y las figuras en geometría” (Duval, 2009, p. 61).

Los dos tipos de transformación: tratamiento y conversión, que establecen la dinámica cognitiva de toda actividad matemática, implementan las operaciones cognitivas propias de cada tipo de representación utilizado.

El autor menciona que las representaciones están dadas por tipos de registros.

Tipos de registros

De acuerdo con Duval (2009), los registros discursivos son el registro de lengua natural y el registro algebraico, y los no discursivos son el registro gráfico y el figural.

Para nuestro estudio nos centraremos en el registro figural y en el registro de lengua natural. En el registro figural porque las operaciones propias del registro nos permitirán o conducirán a resolver situaciones y/o actividades, y el registro de la lengua natural porque permitirá recoger el conocimiento que ha interiorizado el profesor participante, a partir de las transformaciones realizadas en el registro figural.

Sobre el registro de la lengua natural, Duval (2011) afirma que:

> es un registro y no un código, según la tesis estructuralista. Esa diferencia radical se traduce por el hecho de que el lenguaje consiste primero en las operaciones discursivas y no en las palabras de un léxico y en una gramática. (p. 70).

La coordinación entre el registro figural y del registro de lengua natural nos conducirán desde la perspectiva de Duval a la visualización de las figuras geométricas.

LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS Y LA VISUALIZACIÓN

Como afirma Duval (2004) para las figuras geométricas no existen reglas de tratamiento, propias en este registro, debido a la complejidad de ver una figura. Para ello, según el investigador es importante establecer una diferencia entre dos maneras de ver: la primera, relacionada con la discriminación perceptual del mundo físico (visión) y la segunda, propia de la comprensión de las matemáticas (visualización).

Duval (2003) señala:

> La visión permite la aprehensión simultánea, inmediata y directa. En ese sentido *ver* es […] reconocer alguna cosa al primer golpe de vista. (p. 45).
> Visualización es la acción de producir una representación, […] debe permitir distinguir e identificar […] lo que se representa. (p. 42).

El investigador señala que *ver* es reconocer las formas, ya sea contornos cerrados yuxtapuestos, superpuestos o separados. Pero las formas también pueden ser relacionadas con objetos de la realidad.

Las figuras geométricas pueden ser reconocidas de diversas maneras por sus formas o por sus unidades figurales, es posible que al reconocer una excluya a otra. El autor menciona que ver matemáticamente una figura es ir más allá del simple ver, la percepción, también señala que las figuras geométricas tienen un papel ***intuitivo y heurístico***, porque permiten realizar operaciones sobre la figura como: dividir, ampliar, reducir, rotar y trasladar lo que permite anticipar los resultados y seleccionar una solución al planteamiento de una situación y/o actividad.

La función *heurística* de la figura en el desarrollo de una actividad matemática se sustenta en el tipo de aprehensión que sugiere para la solución de situaciones y/o actividades.

Así Duval (1999) plantea cuatro tipos de aprehensiones de una figura: perceptual, operatoria, discursiva y secuencial.

La **aprehensión perceptiva** se caracteriza por la simple identificación de las formas de una figura dada. Por ejemplo, cuando dos unidades figurales de dimensión 2 están separadas no hay dificultad en reconocerlas, como muestra la figura 7.

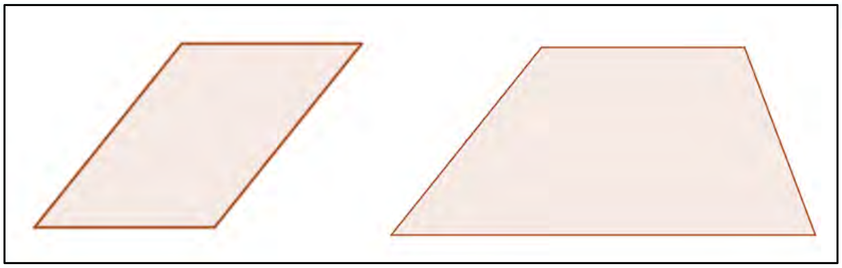


Figura 7: Dos unidades figurales de dimensión 2

No sucede lo mismo cuando dos unidades figurales de dimensión 2 están integradas en una configuración (trapecio), como la figura 8, el trazo realizado sobre la configuración puede ayudar o inhibir la identificación y representación de un trapecio. Este tipo de aprehensión puede tener una función facilitadora o inhibidora en el desarrollo de situaciones y/o actividades.

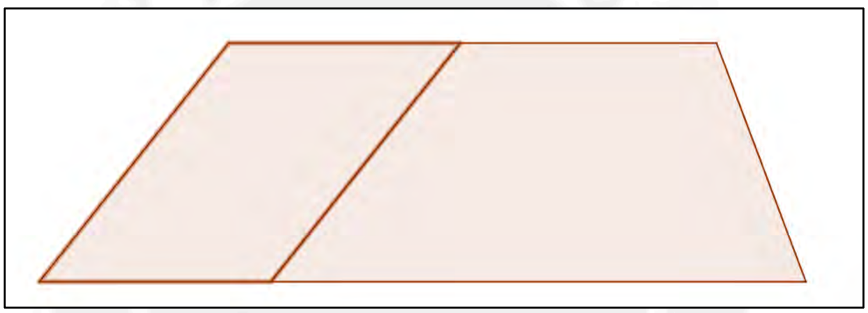


Figura 8: Configuración de un trapecio

De acuerdo con Duval (2004) la introducción a una figura geométrica es discursiva, significa que es necesaria una indicación verbal para señalar a una figura como la representación de un objeto geométrico.

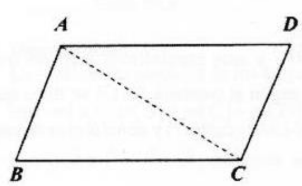
La **aprehensión discursiva,** asocia configuraciones o sub-configuraciones con afirmaciones matemáticas, es decir hay una interacción entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos.

El autor señala que puede darse dos versiones discursivas: la primera se refiere a la **versión argumentativa**, se puede realizar sin recurrir a definiciones, teoremas y a términos matemáticos, por ejemplo cuando se resuelve una problema aplicando reconfiguraciones; y la segunda es la **versión deductiva** que requiere para la explicación de cada paso un cambio de dimensión, una configuración de dos dimensiones debe considerarse como subconfiguraciones de dimensión 1 para aplicar las definiciones. En el caso de la versión argumentativa, no se requiere un cambio de dimensión, en este caso hay una congruencia entre la aprehensión operatoria y la actividad discursiva.

Según Duval (2004) se entiende por **congruencia** el pasar de un registro de representación a otro de forma nítida, donde se cumplen tres condiciones: correspondencia de significado entre las unidades que la representan, mismo orden posible de aprehensión de esas unidades en las dos representaciones y la conversión de una unidad figural de partida en una sola unidad en el registro de llegada.

En la Figura 9, se debe demostrar que en todo paralelogramo, cualquiera de sus diagonales determina dos triángulos congruentes. La demostración se realiza relacionando la configuración de la figura con propiedades del paralelogramo y congruencia de triángulos. En este caso se ha realizado una aprehensión discursiva.

En todo paralelogramo una cualquiera de las diagonales determina dos triángulos congruentes (figura 16.6).



Hipótesis: $ABCD$ es paralelogramo
$\overline{AC}$ diagonal
Tesis: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Figura 16.6

Demostración

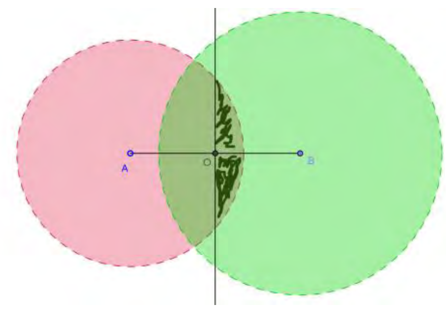
$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, por la definición del paralelogramo $ABCD$.

$D\hat{A}C \cong B\hat{C}A$ por ser ángulos alternos internos entre paralelos ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$). Por la misma razón $B\hat{A}C \cong D\hat{C}A$ y los dos triángulos tienen a AC común. Luego $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ por A-L-A.

Figura 9: Aprehensión discursiva deductiva de una figura
Fuente: Londoño (2006, p. 184)

La a**prehensión secuencial** se refiere al orden de la construcción de la figura. En la Cuadro 4, se realiza una secuencia de indicaciones para realizar una construcción geométrica.

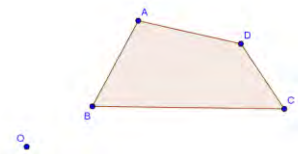
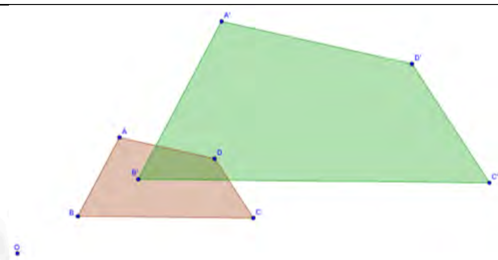
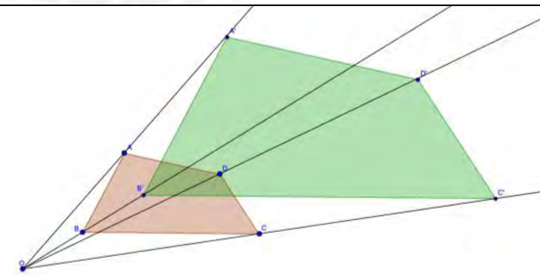
Cuadro 4: Aprehensión secuencial de una construcción geométrica

Aprehensión secuencial	
Pasos	**Construcción Geométrica**
Paso 1: Trace el segmento $\overline{AB}$ de 6 cm.	
Paso 2: Ubique el punto O que divide al segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales.	
Paso 3: Trace la mediatriz del segmento $\overline{AB}$	
Paso 4: Trace los puntos que se encuentren a una distancia menor que 4 cm de A.	
Paso 5: Trace los puntos que se encuentren a una distancia menor que 5 cm de B	
Paso 6: Sombrea la zona que está más cerca de B que de A.	

La **aprehensión operatoria** está centrada en las modificaciones (física o mental) que se pueden hacer sobre una figura (configuración inicial), la aplicación de una operación cognitiva que genera ideas y permita resolver una situación y/o actividad. Esta comprende tres tipos de modificaciones figurales: *óptica, posicional (rotación y traslación) y mereológica (parte/todo).*

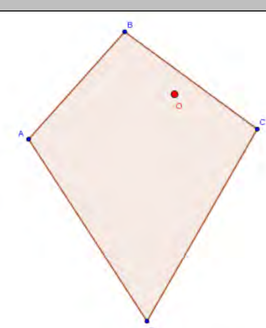
La modificación ***óptica***, es la correspondencia entre una figura y otra semejante, ya sea por ampliación o reducción por un factor de proporcionalidad. En la Cuadro 5, tenemos dos cuadriláteros semejantes resultado de una homotecia de factor positivo 2.

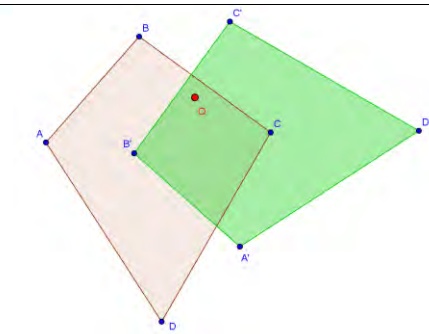
Cuadro 5: Modificación óptica-por ampliación de un trapecio

Modificación óptica	
Trapezoide ABCD, se define la homotecia en el punto O.	
El Trapecio ABCD (figura inicial) se le aplica la transformación geométrica homotecia, con factor de conversión 2.	
	

La modificación **posicional**, está relacionada con la variación de orientación, rotación y traslación de una figura, manteniendo la misma forma y tamaño. Por ejemplo en la Cuadro 6, el cuadrilátero ABCD ha sido rotado 90° con centro O en sentido antihorario, la modificación posicional es una rotación.

Cuadro 6: Modificación posicional de un cuadrilátero ABCD

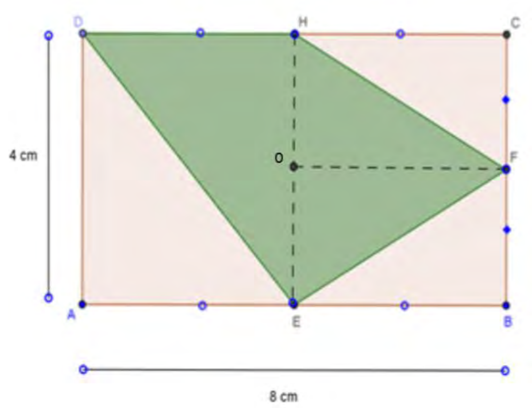
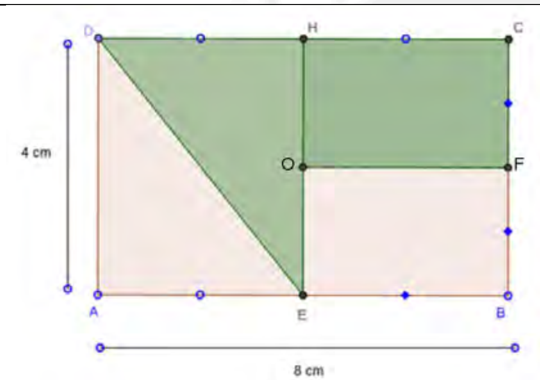
Modificación posicional	
Cuadrilátero ABCD, se define la rotación en el punto O.	

Al cuadrilátero ABCD se aplica la transformación geométrica rotación, centro O y ángulo 90° en sentido antihorario.	

La modificación **mereológica**, según Duval (1999) es la que mediante trazos sobre la figura, la convierte en unidades figurales de la misma dimensión (nuevas subconfiguraciones) y su *reconfiguración* consiste en la división de la figura en sub-figuras, su comparación y reagrupamiento de un contorno diferente al inicial. La modificación mereológica permite la exploración visual de la figura inicial para detectar las propiedades geométricas que van a resolver una situación y/o actividad. Además, esta operación es utilizada para justificar propiedades matemáticas. Esta modificación puede ser: estrictamente homogénea (su descomposición se hace en unidades de la misma forma de la figura inicial), homogénea (su descomposición se hace en unidades diferentes de mayor o menor tamaño de la figura inicial, pero todas de la misma forma); y heterogénea (se hacen unidades de diferentes formas).

En el ejemplo, ver Cuadro 7, se observa la reconfiguración de una figura inicial DEFH, para llegar a una nueva configuración diferente a la inicial, el discurso adopta una versión argumentativa y es congruente con las modificaciones realizadas en la figura.

Cuadro 7: Modificación Mereológica – Reconfiguración

Modificación mereológica	
 (a)	**Aprehensión operatoria: modificación mereológica** Se realizan trazos sobre la figura DEFH, identificación de unidades figurales de dos dimensiones: triángulos DEH, EFO y FOH.
 (b)	**Aprehensión operatoria: modificación mereológica (reconfiguración)** El triángulo EFO se trasladó a la región FCH. El cuadrilátero DEFH (figura inicial) se reconfiguró en una nueva figura DEOFC. La modificación es heterogénea porque la nueva figura quedó dividida en dos figuras de la misma dimensión y área, pero de diferentes formas: triángulo DEH y el rectángulo OFCH.

Cuando nos referimos al registro figural, consideramos importante mencionar que Salazar (2009) define el registro figural dinámico, al registro figural utilizado en ambientes de Geometría Dinámica. En nuestra investigación, al mencionar el registro figural nos estaremos refiriendo al registro figural dinámico, porque como se trabaja con el Geogebra, esta cumple la condición señalada por Salazar.

Por otro lado, de todas las aprehensiones, la aprehensión operatoria y discursiva cumple un papel importante porque su articulación en los procesos de visualización nos conducirá a la visualización geométrica.

VISUALIZACIÓN GEOMÉTRICA

Según Duval (2004) la exploración de una figura geométrica, comienza con las aprehensiones operatorias porque permite desplegar a la figura en sub-figuras en algunos casos no perceptibles a simple vista; estas sub-figuras son reorganizaciones perceptivas diferentes que representan algunas o todas las unidades figurales. El acceso a las sub-figuras es independiente de otra, pero si las sub-figuras tienen las mismas unidades figurales de dimensión 2, 1 o 0, permitirá formar una secuencia de sub-figuras.

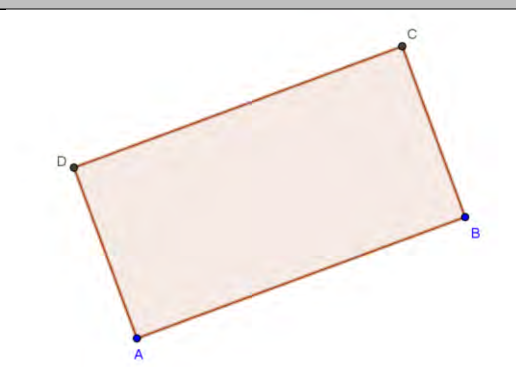
En el caso del planteamiento de una situación y/o actividad por medio de los datos y la pregunta se establece una figura de partida y una sub-figura de llegada, cuando estas figuras se identifican es posible ver la secuencia de sub-figura intermediarias que permiten pasar de una figura inicial a una de llegada. El éxito de la exploración de un problema planteado va a depender de la articulación de las aprehensiones operatorias de la figura y un manejo discursivo de definiciones, propiedades y teoremas.

El autor señala que la relación entre la figura y su discurso se da con la conexión entre sus unidades figurales y las expresiones referenciales. La función heurística tiende a privilegiar las unidades figurales de dimensión 2 sobre unidades figurales de menor dimensión. Y en forma contraria las definiciones y teoremas tienden a privilegiar unidades de dimensión 1 y 0. Entonces la función heurística de la figura privilegia unidades figurales mayores a aquella en que el razonamiento describe unidades menores. Al respecto Duval lo describe como la **no congruencia dimensional**, característica de la coordinación entre figura y el discurso.

La articulación entre figura y discurso se dan en dos niveles de funcionamiento del razonamiento deductivo: **local y global**. Para el autor la articulación local, es la que se apoya en las unidades figurales de dimensión 0 o 1, por ejemplo nombra los vértices (Punto A, B y C) y los lados (Segmento $\overline{AB}, \overline{BC}\ y\ \overline{AC}$) de una figura. La articulación global es la que concierne al proceso de resolución de problemas, se da en correspondencia entre la visión de una secuencia de sub-figuras y el encadenamiento de los pasos deductivos. Si el estudiante alcanza la coordinación entre el registro figural y la organización deductiva del discurso, se dice entonces que ha alcanzado la articulación global que es esencial en la actividad geométrica.

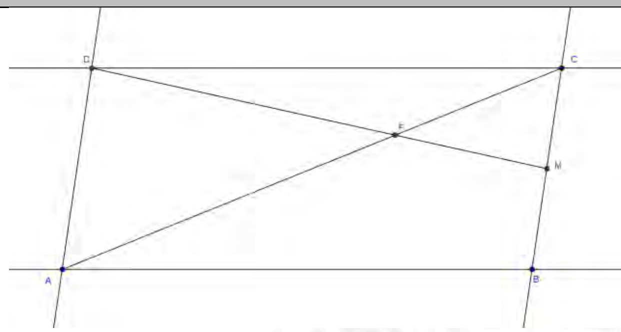
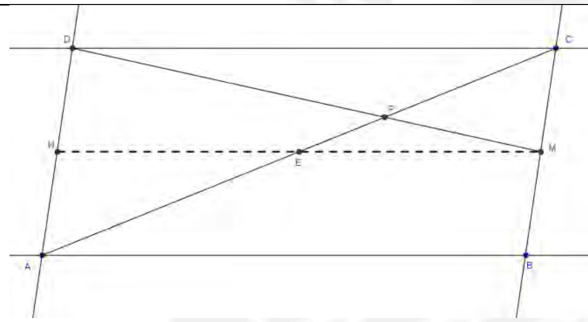
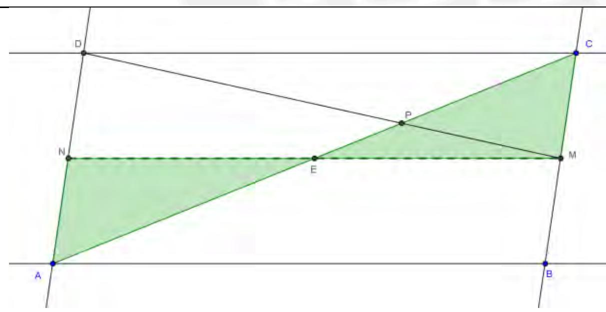
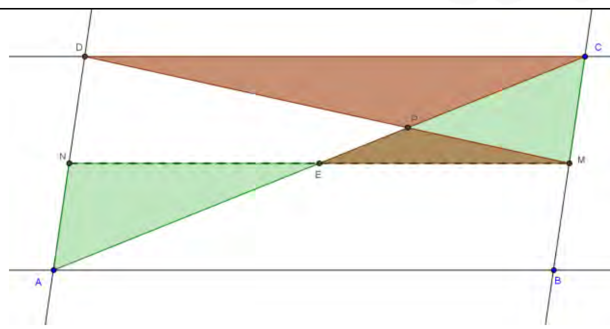
Para describir una figura geométrica realizamos una articulación local porque hay una coordinación entre las unidades figurales de la representación y sus expresiones referenciales, como se muestra en la Cuadro 8. En este caso tenemos la representación figural de un rectángulo y la descripción de sus unidades figurales de dimensión 1 y 0 en lenguaje natural.

Cuadro 8: Articulación local

<table>
<tr><th colspan="2">Articulación local</th></tr>
<tr><th>Representación de un rectángulo ABCD</th><th>Lenguaje natural</th></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Vértices A, B, C y D.</td></tr>
<tr><td>Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD} y\ \overline{DA}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{AB} \parallel \overline{CD}\ \ y\ \ \overline{AD} \parallel \overline{BC}$</td></tr>
<tr><td>$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BCD = m\sphericalangle CDA = m\sphericalangle DAB = 90°$</td></tr>
</table>

En la resolución de un situación y/o actividad, como se muestra en la Cuadro 9, la solución de una situación propuesta parte de una aprehensión secuencial, porque deben construir la figura a partir de los datos del problema. Luego por medio de la aprehensión operatoria y perceptiva sustentada en conocimientos matemáticos se realizan trazos sobre la figura para aplicar propiedades de congruencia y semejanza de triángulos, los pasos deductivos se expresan a través de la aprehensión discursiva deductiva.

Cuadro 9: Articulación global

<table>
<tr><th colspan="2">Articulación global</th></tr>
<tr><td colspan="2">Demuestre que en un paralelogramo, el segmento de recta con extremos un vértice y el punto de un lado opuesto, se intersecan con una diagonal del paralelogramo en un punto de trisección del segmento de recta.</td></tr>
<tr><th>Secuencia de sub-figuras</th><th>Procedimiento</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A partir de los datos de la situación planteada, se sigue un orden en la construcción (aprehensión secuencial).
En el paralelogramo ABCD, con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{CD}$, se traza el segmento de recta $\overline{BM}$, con M punto medio de $\overline{CD}$, que interseca a la diagonal $\overline{AC}$ en el punto P.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Veremos que P es punto de trisección de $\overline{DM}$; esto es, P divide a $\overline{DM}$ en una razón de 2 a 1, lo que equivale a tener $\overline{DP} = 2\overline{PM}$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>En efecto, por M se traza el segmento $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$, con N punto medio de $\overline{AD}$. Luego $\overline{MN}$ interseca a la diagonal $\overline{AC}$ en el punto E y se forma $\Delta AEN \cong \Delta CEM$, por el criterio ALA, y E es punto medio de $\overline{AC}$ y de $\overline{MN}$, o sea $CD = MN = 2EM$.
Se aplican modificaciones mereológicas en la figura inicial, para aplicar propiedades de congruencia.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Por otro lado, como $\overline{EM} \parallel \overline{CD}$, se tiene $\Delta EPM \approx \Delta CPD$, por criterio AAA, y se cumple $\frac{ME}{CD} = \frac{PM}{DP}$, y de esto $\frac{1}{2} = \frac{PM}{DP}$.
Luego, $DP = 2PM$.

Se identifican partes de un todo, dos triángulos, para aplicar propiedades de semejanza.</td></tr>
</table>

Como estamos interesados en el proceso de Visualización, tomamos la postura de Duval es decir, que nuestro estudio estará enfocado en analizar cómo un estudio de cuadriláteros, que desarrolla el proceso de visualización mediado por el Geogebra, contribuye en la formación de profesores de educación secundaria. Para el autor la visualización es identificar las formas de acuerdo a sus restricciones internas de organización o en base a deducciones efectuadas e identificar la representación en función de sus propiedades que han sido enunciadas en definiciones o en teoremas.

La Teoría de Registros de Representación y Visualización, según Duval (1999) nos permitirá analizar el proceso de visualización que desarrollan los profesores en la secuencia de actividades propuestas mediado por el Geogebra, tomando en cuenta sus conocimientos previos, los tratamientos en el registro figural que dependerá de sus habilidades visuales para vincularlos a justificaciones matemáticas como definiciones y teoremas, y su coordinación con el registro de la lengua natural.

A continuación presentamos la justificación de la investigación que se sustenta en las investigaciones revisadas en los antecedentes, en los resultados PISA 2012 y en la IV Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil (2005) del Ministerio de Educación del Perú a estudiantes de secundaria, sobre las dificultades que presentan en la resolución de problemas de geometría.

1.4 JUSTIFICACIÓN

En las investigaciones en el área de Educación Matemática presentadas en los antecedentes como las de Almeida (2007), Flores y Moretti (2006), Laborde (1992), Larios (2006) y Maioli (2002) muestran que hay una necesidad de desarrollar las habilidades visuales, por ser un factor importante en la enseñanza de la geometría, que no solo corresponde a los estudiantes, sino también a los profesores, ya que son ellos los que deben presentar el contenido y diseñar sus estrategias de enseñanza. Por lo que pensamos que es necesario que elaboren secuencias de actividades en las que sus estudiantes tengan que realizar tratamientos en las figuras geométricas como cambio de posición, dividir la figura, etc. que les permitan diferenciar el objeto geométrico (significado) de su representación (significante), además de verbalizar por medio de un discurso matemático, lo que implica la movilización de diferentes registros. En nuestra investigación, la movilización de registros será avalada por el referencial teórico la Teoría de los Registros de Representación y para comprender como se dan estos procesos de visualización es importante identificar y analizar qué factores interviene en este proceso, lo que la Visualización desde la perspectiva de Duval nos dará los subsidios.

En cuanto al uso de la geometría dinámica, las investigaciones presentadas también resaltan la característica principal el "arrastre". Esta característica brinda innumerables posibilidades de tratamientos de la figura, aspecto que no es contemplado cuando se trabaja con lápiz y papel.

Además de las investigaciones presentadas buscamos documentos oficiales como el elaborado por la Unidad de Medición de Calidad del Ministerio de Educación del Perú (2013) en relación a la evaluación PISA 2012, menciona que: "tres de cuatro estudiantes peruanos muestran desempeños inferiores al nivel dos de la escala y el 45,4% de los estudiantes del país están por debajo del nivel 1 en la sub-escala Espacio y forma" (pp. 38-39).

Este resultado muestra que los estudiantes cometen errores al resolver problemas en los que se hace necesario realizar representaciones geométricas, identificar sus elementos y propiedades, este resultado es coherente con lo que Duval (1999) explica:

> La actividad matemática en los cursos de geometría se realiza en dos registros: el de las figuras y el de la lengua natural. Uno para designar las figuras y sus propiedades; el otro, para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis. . Pero no se trata simplemente de un cambio de registro [...] los tratamientos efectuados separada y alternativamente en cada uno de los dos registros no bastan para que este proceso llegue a algún resultado; es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. La originalidad de los procesos de geometría con otras formas de actividad matemática, tiene que ver con que es absolutamente necesaria la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de las figuras y los del discurso teórico en lengua natural. (p.147)

Por otro lado, los resultados de la evaluación PISA 2012 confirman que los estudiantes están lejos de alcanzar dicha coordinación.

También, la IV Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil (2005) muestra entre una de sus observaciones que los errores en los temas de geometría que presentan los estudiantes se debería a la enseñanza de las nociones geométricas de manera abstracta y repetitiva, descontextualizadas del cotidiano y en la que predomina en la práctica docente una postura tradicional de la enseñanza de las matemáticas, porque presenta definiciones aisladas y poco conectadas.

Además, por mi experiencia profesional enseñando a estudiantes de nivel secundario, he observado en los estudiantes, dificultades en resolver problemas geométricos que impliquen realizar tratamientos sobre la figura y verbalizarlos empleando un discurso matemático.

A partir de estas premisas, surge nuestro interés por investigar cómo se desenvuelve el proceso de visualización en profesores de secundaria cuando trabajan con el objeto matemático cuadriláteros, cuando se utiliza el ambiente de geometría dinámica (AGD) Geogebra como herramienta para el desarrollo de este proceso ya que el "arrastre" que este ambiente posee favorece el razonamiento matemático y la visualización, en el sentido de Duval. La pertinencia del objeto matemático, surge debido a que está considerado en el Diseño Curricular Nacional (DCN) del Perú, además nos permite movilizar registros el figural y discursivo, realizar conjeturas y demostraciones. Finalmente, consideramos que nuestra investigación es relevante porque no existe ningún estudio realizado en el Perú sobre los procesos de visualización de algún objeto matemático en el sentido de Duval y más aún esta investigación en Cuadriláteros y en formación de profesores de nivel de secundaria,

A continuación presentamos la pregunta de investigación y sus objetivos.

1.5 PREGUNTA Y OBJETIVOS

Como estamos interesados en el estudio de Cuadriláteros nuestra investigación pretende responder la siguiente pregunta:

¿Cómo un estudio de cuadriláteros que desarrolla el proceso de visualización mediado por el Geogebra contribuye en la formación de profesores de nivel secundario?

Para responder nuestra pregunta de investigación nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo General:

Analizar cómo un estudio de cuadriláteros, que desarrolla el proceso de visualización mediado por el Geogebra, contribuye en la formación de profesores de nivel secundario.

Objetivos específicos

- Identificar las aprehensiones secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva que desarrollan los profesores al estudiar cuadriláteros mediado por el Geogebra.

- Analizar la articulación entre las aprehensiones que realizan los profesores en el estudio de cuadriláteros cuando usan el software Geogebra.

Para responder la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos de la tesis utilizamos la metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica de Artigue et al (1995), que presentamos a continuación:

1.6 METODOLOGÍA Y PROCEDIMIENTOS

METODOLOGÍA

Consideraremos como metodología de investigación aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue et al (1995), con el fin de construir una secuencia de actividades y así estudiar el proceso de visualización en el desarrollo de problemas sobre cuadriláteros en un grupo de profesores de nivel secundario, usando como recurso el Geogebra.

Aspectos de la Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica se caracteriza según Artigue (1995) por desarrollar un esquema experimental en el planeamiento de una clase, desde la concepción, realización, y análisis de la secuencia de enseñanza, cuya validación es interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori y a posteriori*. La Ingeniería Didáctica de acuerdo con Artigue (1995) tiene las siguientes fases:

Análisis preliminar

Una investigación no solo se fundamenta en el marco teórico didáctico y en los conocimientos didácticos adquiridos en el dominio estudiado, también es importante considerar el análisis en las siguientes dimensiones: Epistemológico, Cognitivo y Didáctico.

En nuestro estudio distinguiremos en el análisis preliminar dos dimensiones: la epistémica y cognitiva.

En la dimensión epistémica desarrollamos una breve mirada histórica y la definición formal de objeto matemático, cuadriláteros. En la dimensión cognitiva presentamos investigaciones como las de Maioli (2002), Almeida (2007), Flores y Moretti (2006), Larios (2006) y Laborde (1994) que tienen relación con nuestro estudio que se dan con el reconocimiento de configuraciones geométricas y sus limitaciones, y los ambientes de geometría dinámica como mediadores entre el conocimiento geométrico y el usuario.

Concepción y análisis *a priori*

Según Artigue (1995) en esta segunda fase se distingue dos tipos de variables macro y micro didáctica, en el primero relacionado con el objeto de estudio y el segundo con el tipo de actividad propuesta a los profesores. En el análisis *a priori* se describen y prevén los comportamientos posibles, como un control de significados, del profesor como resultado de la construcción de su conocimiento matemático.

En la concepción se han creado una secuencia de actividades en el estudio de cuadriláteros mediado por el Geogebra. En el análisis *a priori* de las actividades se propone las posibles acciones por parte de los profesores en relación de las aprehensiones en el proceso de visualizar cuadriláteros desde la perspectiva de Duval.

La experimentación

Esta fase se inicia desde el momento en que se da el contacto del investigador con los estudiantes que son objeto de la investigación. En la experimentación se dan las condiciones para la realización de la recogida de datos y la aplicación de los instrumentos.

Con respecto a nuestro estudio hemos estructurado esta parte, se realiza la explicitación de los objetivos, las condiciones de cómo se realiza la investigación a los profesores que participarán y la aplicación de las actividades diseñadas con relación a nuestro objeto de estudio, el cuadrilátero. En la aplicación participaron el profesor del curso, el investigador como observador y un segundo observador.

Análisis a *posteriori* y validación

En esta última fase de la ingeniería didáctica, en base al conjunto de datos recolectados en la experimentación como son las observaciones en las secuencia de la enseñanza y producciones de los estudiantes. La validación se fundamenta en la confrontación de los análisis *a priori* y a *posteriori.*

En nuestro estudio se realizará el análisis de cada actividad y se analizará si los profesores articularon las aprehensiones, así como también se validará las conjeturas del análisis *a priori*.

A continuación presentamos nuestro objeto de estudio, cuadriláteros, desde una mirada histórica y su estudio matemático.

CAPÍTULO 2: CUADRILÁTEROS

En el presente capítulo se revisan aspectos históricos relacionados con el estudio del cuadrilátero desde la perspectiva euclidiana, que tienen su origen según datos históricos, desde antes de la creación de la escritura.

A continuación, aspectos históricos del cuadrilátero:

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

En esta parte presentamos aspectos históricos acerca del objeto matemático hasta Euclides porque nos permitirá tener como base para analizar la visualización del Cuadrilátero desde la perspectiva de Duval e importante para comprender como se estudia Cuadriláteros en la actualidad. Con respecto al estudio del origen de la geometría Boyer (2007) señala que las primeras consideraciones geométricas del hombre pre-histórico son muy antiguas, sus dibujos y figuras sugieren una preocupación con las relaciones espaciales originadas posiblemente en su sentimiento estético y el placer que le daba la belleza de las formas. Esa necesidad lo conduciría a descubrimientos geométricos subconscientes. El autor señala que no hay fuentes que revelen el origen de la geometría y que Heródoto y Aristóteles no se arriesgaron en proporcionar fuentes sobre el origen de la Matemáticas; el primero indica que a partir de la civilización egipcia, su origen se debió posiblemente a la necesidad práctica y Aristóteles refiere sobre su origen en el hacer sacerdotal y ritual. Heródoto sostuvo que el origen de la Geometría se dio en Egipto; posiblemente los geómetras egipcios o "estiradores de cuerdas" las usaban para medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del Nilo borraban continuamente sus fronteras o como apoyo para trazar las bases de sus templos.

Además, menciona que hay evidencias de problemas geométricos en un papiro egipcio que data de 1650 A.C llamado papiro Ahmes; en uno de los problemas muestra que el área de un triángulo isósceles era hallada tomando la mitad de su base multiplicada por la altura, Ahmes justificaba su método sugiriendo que el triángulo isósceles se podía dividir en dos triángulos rectángulos, o si uno de ellos era desplazado formaban un rectángulo, lo que nos indica que ya tenían una noción de cuadriláteros. Como se aprecia en la figura 10, los egipcios realizaron una reconfiguración del triángulo isósceles para llevarlo a una nueva configuración, el rectángulo.

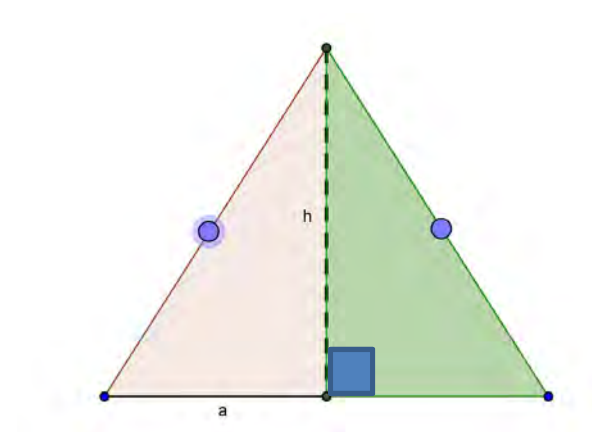
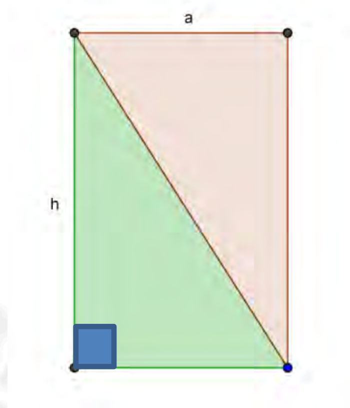
<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$A_{\Delta} = a\ x\ h$</td><td>$A_{\square} = a\ x\ h$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Donde a es la base y h es la altura del triángulo.</td></tr>
</table>

Figura 10: Justificación propuesta por Ahmes

En otro problema similar al anterior menciona la transformación de un trapecio isósceles en un rectángulo, tomaban la suma de la bases y la multiplicaban por la altura. Con todo esto el autor señala que se inicia la teoría de congruencia y la idea de prueba en geometría. Pero una deficiencia en su geometría era la falta de distinción entre hallar medidas exactas y medidas aproximadas. En un papiro de aproximadamente 1500 AC muestra ejemplos de triángulos, trapecios, rectángulos y un cuadrilátero cualquiera. Y la regla para hallar el área de un cuadrilátero cualquiera consistía en el producto de las medidas de los lados opuestos. Lo que indica que la intención era relacionar las figuras geométricas, mas no se conocen teoremas o demostraciones formales en la matemática egipcia, pero si es rescatable las comparaciones geométricas entre los perímetros y áreas de círculos (cuadrados), por ejemplo, Ahmes señala que el área de un campo circular de diámetro 9u es la misma que el de un cuadrado de lado 8u. Si se utiliza la fórmula $A = \pi r^2$ la aproximación es mínima. La matemática desarrollada por lo egipcios se basaba en cálculos; la geometría se presenta como una rama de la aritmética aplicada.

Según Eves (1969) menciona que los griegos vieron lo que los egipcios hicieron y se basaron en sus principios, no solo apreciaron la geometría práctica, sino también su interés teórico, buscaron demostraciones deductivas de las leyes generales del espacio, que estaban en las bases de todas las aplicaciones prácticas de la geometría. Pitágoras afirmaba que los lados del triángulo rectángulo formaban cuadrados y la suma de los cuadrados de sus lados era igual al cuadrado del lado mayor.

En el período Jónico y Pitagórico, Thales de Mileto 585 AC basándose en hipótesis y conclusiones, asentará las bases de la futura geometría axiomática. Rendón (2010) señala que Los Elementos de Hipócrates fue la primera obra que recoge los conocimientos geométricos hasta esos momentos, emplea en forma sistemática la hipótesis, teorema y demostración; utiliza una nomenclatura para representar los elementos de las figuras geométricas por letras: puntos, rectas, segmentos, etc. Euclides reprodujo los contenidos de los elementos de Hipócrates en los libros I, II, III y IV.

A Euclides (300 A.C) se le atribuye la obra *Los Elementos* divididos en 13 libros más, de los cuales los 6 primeros se refieren a la geometría plana elemental, los elementos geométricos, la estructura general de los Elementos se fundamenta en descripciones, definiciones, postulados y axiomas, en el sólo considera el plano. En el libro I está la mayor parte de las proposiciones que se enseña en el nivel secundario, contiene entre otras la propiedad de rectas paralelas (llevando al hecho de ser la suma de los ángulos y lados de un triángulo igual a dos ángulos rectos) y la construcción del paralelogramo. En especial la definición 22, se refiere a los cuadriláteros. En Vera (1970),

> Definición 22. De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular, pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular, y llámense trapecios las demás figuras cuadriláteras. (pp.703 - 704).

En la definición 22 del libro I se realiza una clasificación de los cuadriláteros según: sus lados congruentes (equilátera), ángulos rectos (rectangular), los no equiláteros y no rectangulares, y los trapecios. En la figura 11, realizamos un esquema de la clasificación propuesta en la definición 22, y señalamos como C al conjunto de los Cuadriláteros y como sus subconjuntos: E los equiláteros, R los rectangulares, M como los Romboides y al conjunto de los Trapecios como el complemento de la unión de los equiláteros (E), rectangulares (R) y romboides (M).

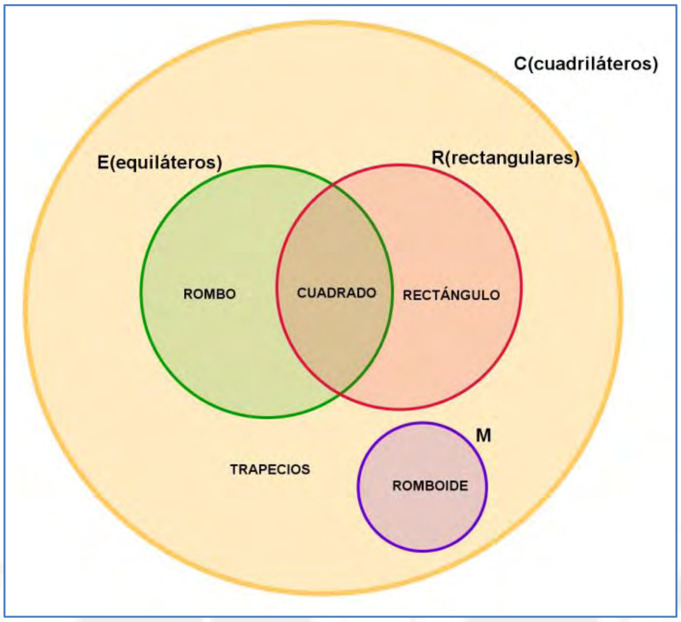


Figura 11: Clasificación de Cuadriláteros.

El libro I termina con la demostración del teorema de Pitágoras y su recíproca.

La revisión de la reseña histórica nos ayudó a comprender que desde la época de los egipcios ya se recurría a la prueba que consistía en dividir un figura para desplazar una de sus partes y formar una nueva configuración con el fin de justificar un problema, lo que desde la perspectiva de Duval sería la reconfiguración de una figura que consiste en dividirla en subfiguras y realizar desplazamientos ya sea en la pantalla de una computadora o mentalmente con el fin de justificar la solución de un problema. Otro aspecto, es el aporte de los griegos en el empleo de esquemas de teoremas y demostraciones de modo sistemático, además fueron los primeros en aplicar una nomenclatura específica para representar las figuras geométricas por letras: puntos, segmentos y superficies, y de enunciar una primera clasificación de cuadriláteros, estas referencias son importantes porque desde el enfoque teórico de nuestra investigación la visualización de una figura se inicia con la identificación de unidades de dimensión 0 y 1, la reconfiguración para luego organizarlas a través de pasos deductivos apoyados en definiciones y teoremas al que Duval lo denomina articulación local y global respectivamente. Desde nuestra mirada presente tomamos como base esta postura, para la organización matemática del objeto matemático, cuadriláteros y en la elaboración de nuestras secuencias de actividades.

A continuación, nos centraremos en el estudio del objeto matemático, Cuadriláteros.

2.2 ESTUDIO MATEMÁTICO

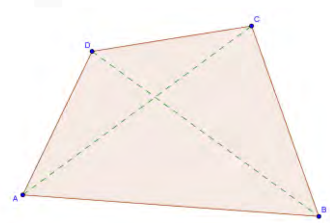
En el estudio de Cuadriláteros, nos basamos en dos textos en el que tomaremos como principal la Geometría Básica de Verástegui (2005) y algunas definiciones como aporte de la Geometría Euclidiana de Londoño (2006).

El investigador Verástegui (2005) define cuadriláteros como:

> Son polígonos de cuatro lados: P_4 (P_n nomenclatura de los polígonos de n lados).
> Dado un cuadrilátero P_4
> i) Dos lados que no tienen extremo común se llama **lados opuestos** de P_4, y cuando tienen un extremo común se llaman **lados consecutivos o adyacentes** de P_4.
> ii) Dos ángulos interiores que no tienen lado común se llaman **ángulos consecutivos o adyacentes** de P_4. (p. 58)

Por otro lado, Londoño (2006) como parte de la definición de cuadriláteros, describe sus unidades figurales, tal como se muestra en la Cuadro 10.

Cuadro 10: Definición de cuadrilátero

Definición	Cuadrilátero
• Polígono convexo • Vértices A, B, C y D • Lados: $\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD}\ y\ \overline{DA}$ • Ángulos interiores: $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C\ y\ \sphericalangle D$ • Diagonales: $\overline{DB}\ y\ \overline{AC}$	

El autor presenta la siguiente clasificación atendiendo al comportamiento de sus lados (longitudes, paralelismo o perpendicularidad) o la medida de sus ángulos, a continuación presentamos el siguiente esquema que se muestra en la figura 12.

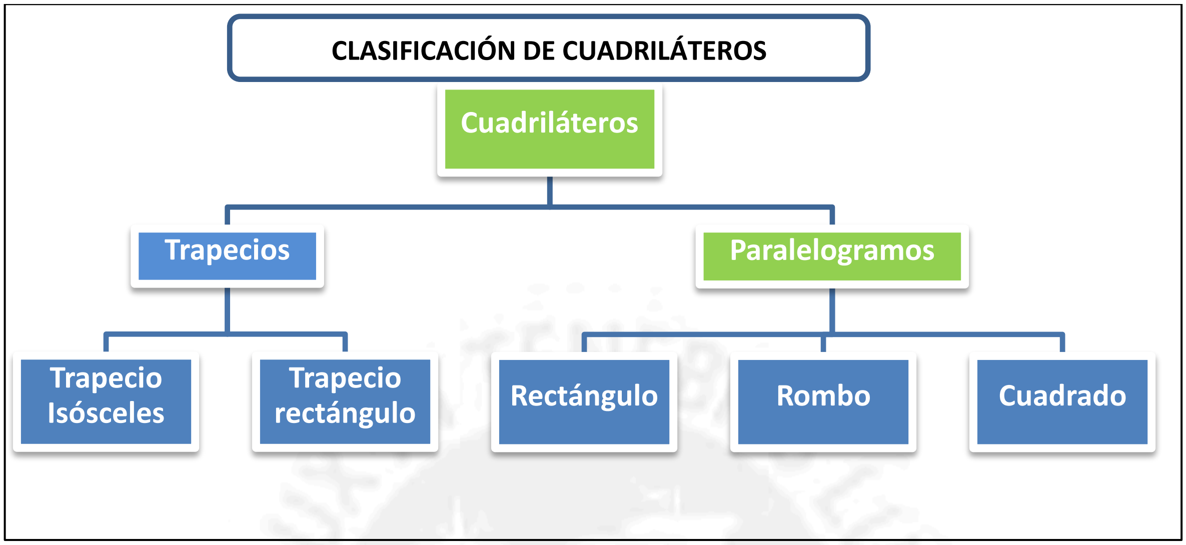


Figura 12: Clasificación de Cuadriláteros. Londoño (2005)

En cuanto a la clasificación de cuadriláteros (ver figura 12) adoptamos la de Londoño (2006), porque nos ayuda no solo a entender sus propiedades, también a establecer relaciones entre ellos, además va en concordancia con la manera como hemos organizado las actividades, nos centraremos en los paralelogramos y su respectiva clasificación: rectángulo, rombo y cuadrado, cuyas características comunes dependerá del paralelismo de sus lados, congruencia de sus lados, igualdad de ángulos y posición relativa de sus diagonales.

De acuerdo a la clasificación realizada por Londoño (2006), nos orientaremos a las propiedades del paralelogramo que pertenece a este grupo.

A continuación, Verástegui (2005) define el Paralelogramo y demuestra sus tres propiedades:

Dado un cuadrilátero P_4 con vértices los puntos A, B, C y D.

i) P_4 se llama ***paralelogramo*** si los lados opuestos son paralelos dos a dos. (Ver figura 13).

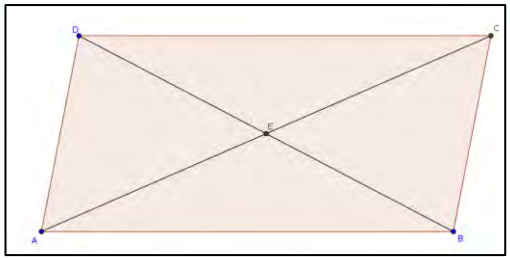


Figura 13: Paralelogramo ABCD

ii) Demostración de las tres propiedades del paralelogramo, propuesta por Verástegui: (Ver figura 14)

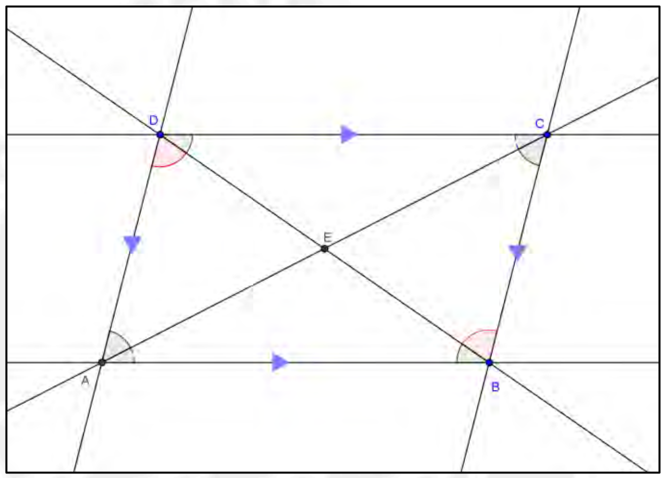


Figura 14: Propiedades del Paralelogramo P

Teorema: Dado un paralelogramo ***P***, se cumplen:
Sea P el paralelogramo ABCD, donde $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.
Trazando la diagonal $\overline{AC}$, la recta $\overleftrightarrow{AC}$ es transversal a las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}\ y\ \overleftrightarrow{DC}$ y, por el teorema de las rectas paralelas cortadas por una secante, los ángulos alternos internos:$ABD \cong \sphericalangle BDC\ y \sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BAC$. Luego,$\Delta ABC \cong \Delta BAD$ siendo $\overline{BD}$ lado común y por criterio ALA.
i) Sus lados opuestos, dos a dos, son congruentes o tienen longitudes iguales.
Los lados correspondientes son congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DA}$; es decir, los lados opuestos, dos a dos, tienen longitudes iguales.
ii) Sus ángulos internos opuestos, dos a dos, tiene medidas iguales.
Los ángulos correspondientes son congruentes: $\sphericalangle DCB \cong \sphericalangle BAD$ y, trazando la otra diagonal y por un proceso análogo, se tiene $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle ABC$. Luego, los ángulos internos opuestos, dos a dos, tienen medidas iguales.
iii) Sus diagonales se interceptan en sus puntos medios.
Sea E punto de intersección de las diagonales y como del proceso anterior se tiene $\Delta BCD \cong \Delta BAD$ y $\Delta ACD \cong \Delta ABC$, entonces los ángulos correspondientes son congruentes: $\sphericalangle EDC \cong \sphericalangle EBA$ y $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle EAB$; y como $DC = AB$, por criterio

ALA resulta que $\Delta EDC \cong \Delta EBA$. De esto $ED = EB$ y $EC = EA$; es decir, E es punto medio de las diagonales. Verástegui (2005, p. 91)

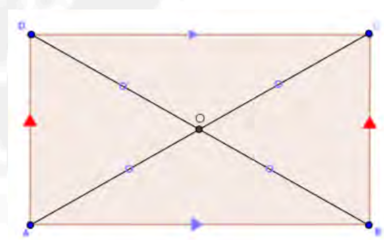
De acuerdo con Duval (2004), en una demostración debe haber una congruencia entre la aprehensión operatoria y la justificación deductiva en el que se requiere, para la explicación de cada paso, un cambio de dimensión.

En la demostración de Verástegui, se efectúa un cambio de dimensión, convirtiendo las unidades de dimensión 2 en unidades de dimensión 1 (rectas paralelas, segmentos congruentes, la diagonal que corta a las rectas paralelas). En la figura, las marcas hechas sobre los lados de la figura y el trazo de la diagonal nos muestra las aprehensiones operatorias realizadas en la figura, para luego relacionar las unidades dimensión 1 y asociarlas a propiedades de congruencia de triángulos.

El autor, señala que las tres propiedades del paralelogramo incluyen a los rectángulos, rombos y cuadrados, por lo que describiremos en cada una de ellas sus propiedades:

a) **Rectángulo:**

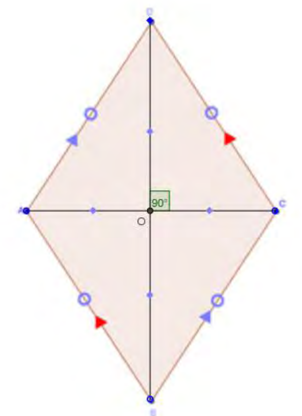
Cuadro 11: Rectángulo ABCD

Propiedades del Rectángulo		
Lenguaje verbal	**Lenguaje matemático**	**Representación figural**
1. Es un cuadrilátero convexo y es un paralelogramo. 2. Todos sus ángulos son rectos. 3. Sus lados opuestos son congruentes dos a dos. 4. Las diagonales son congruentes y se bisecan.	Cuadrado ABCD Vértices: A, B, C y D $\boldsymbol{m\measuredangle A = m\measuredangle B = m\measuredangle C = m\measuredangle D = 90°}$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\boldsymbol{\overline{AD} \parallel \overline{BC}}$ y $\boldsymbol{\overline{AB} \parallel \overline{DC}}$ $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO} \cong \overline{DO}$	

La representación figural del cuadro 11, se apoya con la descripción de las unidades figurales de dimensión 0 y 1, en el que se emplea un lenguaje simbólico. Además en su representación las marcas realizadas sobre sus unidades figurales de dimensión 1, muestran la relación entre ellas, como la propiedad del paralelismo. Esta relación servirá para relacionar más adelante las unidades figurales de dimensión 2. Se ha establecido entre la figura y la descripción de sus propiedades una relación espacial y conceptual.

b) **Rombo:**

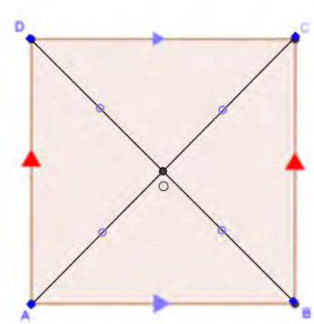
Cuadro 12: Rombo ABCD

Propiedades del Rombo		
Lenguaje verbal	**Lenguaje matemático**	**Representación figural**
1. Un paralelogramo es un rombo. 2. Las diagonales del paralelogramo bisecan los ángulos opuestos. 3. Las diagonales del paralelogramo son perpendiculares. 4. Dos lados adyacentes del paralelogramo son congruentes	Paralelogramo ABCD Vértices: A, B, C y D $m\sphericalangle A = m\sphericalangle C \ y \ m\sphericalangle B = m\sphericalangle D$ $\overline{\boldsymbol{AD}} \parallel \overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}} \parallel \overline{\boldsymbol{DC}}$ $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ $\overline{\boldsymbol{AB}} \cong \overline{\boldsymbol{BC}} \cong \overline{\boldsymbol{CD}} \cong \overline{\boldsymbol{AD}}$	

En el cuadro 12, se realiza la descripción de las unidades figurales de dimensión 0 y 1. Con el trazo de las diagonales la figura queda dividida en cuatro subfiguras. Las marcas sobre las unidades figurales de dimensión 1 describen la relación entre ellas, lados congruentes y paralelos dos a dos, así como la relación de sus diagonales como segmentos perpendiculares. La descripción de sus propiedades se da solo en la dimensión 0 y 1, además la figura cumple su función heurística, porque a partir de los trazos realizados se podría seguir relacionando las unidades figurales de dimensión 2.

c) **Cuadrado:**

Cuadro 13: Cuadrado ABCD

Propiedades del Cuadrado		
Lenguaje verbal	**Lenguaje matemático**	**Representación figural**
1. Un cuadrado es un paralelogramo. 2. Todos sus ángulos son rectos. 3. Sus lados opuestos son congruentes dos a dos. 4. Las diagonales son congruentes y se bisecan, formando un ángulo de 90°.	Paralelogramo ABCD Vértices: A, B, C y D $\boldsymbol{m\sphericalangle A \cong m\sphericalangle B \cong m\sphericalangle C \cong m\sphericalangle D = 90°}$ $\overline{\boldsymbol{AD}} \parallel \overline{\boldsymbol{BC}}$ y $\overline{\boldsymbol{AB}} \parallel \overline{\boldsymbol{DC}}$ $\overline{\boldsymbol{AB}} \cong \overline{\boldsymbol{BC}} \cong \overline{\boldsymbol{CD}} \cong \overline{\boldsymbol{AD}}$ $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO} \cong \overline{DO}$ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$	

En el cuadro 12, la descripción se realiza nombrando las unidades de dimensión 0 y 1. En la figura, se observa la relación entre sus unidades figurales, lados y diagonales, como segmentos congruentes y paralelos dos a dos. La figura cumple su función heurística porque a partir de los trazos realizados se puede seguir relacionando las subfiguras de dimensión 2.

Por otro lado, Verástegui (2005) señala en un párrafo anterior que el cuadrado, el rombo y el rectángulo cumplen con las tres propiedades del paralelogramo, esto implica que hay una relación entre ellos, por lo que, al realizar la reconfiguración al Paralelogramo se obtendrá la configuración de un Rectángulo, y al reconfigurar un Rombo se obtendrá la configuración de un cuadrado o rectángulo, siempre mantendrá las propiedades que caracterizan a un paralelogramo.

En el estudio que realizaremos con profesores se ha tomado en cuenta la operación de reconfiguración para analizar cómo se desarrollan esas habilidades visuales, que también requieren de conocimientos matemáticos, tomando como referencia los estudios de Flores y Moretti (2006).

Queremos agregar, con respecto a la relación de los registros discursivo y figural, las figuras en todos los casos están en posición estándar y representadas en el papel, no podrá generar mayores conexiones en el estudiante, de ahí la importancia de emplear los AGD, porque cuando hay una interacción entre sus invariantes del objeto representado, se dará mayor significado al concepto, tal como lo afirman Laborde (1994) y Almeida (2007) en sus investigaciones.

A continuación presentamos la parte experimental con sus respectivos análisis *a priori y a posteriori*, en el marco de la teoría de la representación semiótica y visualización.

CAPÍTULO 3: EL EXPERIMENTO

En el presente capítulo presentamos la descripción de los sujetos de investigación, el experimento, sus análisis *a priori y a posteriori* de acuerdo a la metodología de la Ingeniería Didáctica.

3.1 DESCRIPCIÓN

En esta parte de la descripción, presentamos a los sujetos de investigación, la organización de la secuencia de actividades, a seguir la aplicación por medio de la observación y cuáles serán los instrumentos y recursos empleados.

Sujetos de la investigación

El grupo elegido fueron quince profesores de la Carrera Pública Magisterial de la Modalidad de Educación Básica Regular del nivel secundario, que cursan estudios de maestría en Enseñanza de las Matemáticas con mención en Educación Secundaria en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

El grupo consta de cuatro mujeres y once varones mayores de 30 años, cinco de ellos tienen menos de 10 años de experiencia, tres entre 10 y 20 años y el resto del grupo con más de 20 años. Son Licenciados en Educación con experiencia en el nivel secundario y todos ellos indican que han trabajo en colegios estatales y tres en colegios particulares. Además, afirman que han seguido algún curso de capacitación en los últimos tres años.

En cuanto a la estructura del Sistema Educativo en el Perú, se divide en dos etapas: Básica Regular y Superior. La Educación Básica Regular se divide en tres niveles articulados que son: Educación Inicial, Primaria y Secundaria. La Educación Básica Regular tiene siete ciclos de los cuales los dos primeros corresponden a Educación Inicial, los tres siguientes a Educación Primaria (dos grados por ciclo) y finalmente dos ciclos de Educación Secundaria. Los profesores elegidos se movilizan en el nivel Secundaria y se rigen bajo los lineamientos del Diseño Curricular Nacional (DCN). Los temas de Geometría y Medición se enseñan en los tres niveles, el tema de Cuadriláteros se va profundizando con cada cambio de nivel, así en el cuarto año de secundaria se realiza un estudio más profundo del objeto matemático.

Los profesores participantes que forman parte de esta investigación cuentan con conocimientos del uso del Geogebra (software de Geometría Dinámica), cabe resaltar que esto facilitó el desarrollo de las actividades de construcción, demostración y exploración de las figuras por medio del arrastre, propiedad del software que permite realizar cambios en la configuración de la figura.

Las actividades se realizaron en el laboratorio de informática de la universidad, en dos sesiones de 3 horas cada una.

Del grupo de quince profesores fueron elegidos tres profesores por ser representativos del grupo: el profesor Gustavo, el profesor Fernando y la profesora Lidia. Escogidos por los siguientes criterios, el profesor Gustavo, tiene capacidad para representar con exactitud ideas y proporcionar explicaciones matemáticas es deductivo y axiomático; en el caso del profesor Fernando, le falta un conocimiento más específico, porque no se basa en teoremas o postulados, para argumentar su respuesta se apoya en sus conocimientos previos y por el tipo de respuesta que da, es calculista; y la profesora Lidia, tiene de ambos, cuenta con conocimientos previos geométricos y se apoya en la práctica docente. Para el análisis de las actividades mencionaremos primero de manera global al grupo y luego de manera individual los profesores antes mencionados.

El experimento

Elaboramos cuatro actividades en la que utilizamos el Geogebra (Ver Cuadro 14)

Cuadro 14: Actividades del experimento

Actividad	Nombre	Descripción
1	Paralelogramo	En la primera actividad movilizan conocimientos previos como el Teorema de los puntos medios y propiedades sobre la congruencia de lados y ángulos internos opuestos, y la intersección de las diagonales en sus puntos medios, fundamentales para el desarrollo de la siguiente actividad.
2	Configuraciones	En la segunda actividad relacionaron la intersección de dos figuras es un cuadrado, triángulo y un cuadrilátero cualquiera.
3	Reconfiguraciones	En la tercera actividad realizaron modificaciones en la configuración de una figura, para justificar una propiedad.

4	Arrastre	En la cuarta actividad aplicaron el arrastre del software Geogebra como recurso para relacionar y justificar la congruencia de dos segmentos.

La observación

En la aplicación participamos la investigadora como observadora, otra investigadora como segunda observadora y la formadora profesora del curso de Geometría Euclidiana en el Plano y en el Espacio.

Instrumentos

Los instrumentos utilizados fueron:

- Fichas de actividades: se elaboraron 4 actividades, cada una con un objetivo específico, la solución de las actividades fueron desarrolladas en las fichas o en la pantalla del geogebra.
- Archivos actividad 2.ggb, actividad 3.ggb y actividad 4. ggb: en cada archivo se presenta los gráficos de cada actividad.

Recursos

Los recursos utilizados fueron:

- Software geogebra: recurso que se utilizó como apoyo en el desarrollo de las actividades.
- Computadoras
- Lápiz y papel
- Proyector
- Pizarra acrílica

3.2 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

A continuación presentamos el análisis de las cuatro actividades aplicadas, con su respectivo objetivo, análisis *a priori y a posteriori*.

Las secuencias de actividades comienzan con la demostración del paralelismo de los lados de un cuadrilátero inscrito, porque será un referente para las siguientes actividades donde se relacionarán las unidades figurales de dimensión 1 y 2.

Actividad 1: PARALELOGRAMO

Objetivo: Construir e identificar las propiedades de un paralelogramo en el cuadrilátero inscrito EFGH.

La figura 15 muestra la Actividad 1.

ACTIVIDAD 1

Utilice las herramientas del Geogebra y construya un cuadrilátero ABCD cualquiera. Luego, marque los puntos medios E, F, G y H de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, y construya los segmentos EF, FG, GH y HE.

Ahora mueva el punto A y responda en la hoja ***¿cuál es la naturaleza del cuadrilátero EFGH?*** Justifique matemáticamente su respuesta.

Figura 15: Actividad

Análisis a *priori*

Los quince profesores construirán el cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero inscrito EFGH, siguiendo las instrucciones y haciendo uso de las herramientas del Geogebra como: punto, segmento, punto medio y polígono, lo que implica que estarían desarrollando su aprehensión secuencial. En la construcción se sigue un orden dimensional, lo que facilita los AGD.

A continuación arrastrarán el vértice A, que será de apoyo para identificar propiedades conocidas, conocimientos previos, como el paralelismo de sus lados opuestos del cuadrilátero EFGH, lo que significa que estarían desarrollando sus aprehensiones perceptiva.

Luego trazarán las diagonales del cuadrilátero ABCD, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, que les permitirá realizar otras exploraciones a la figura. En este caso esperamos que la figura quede divida en cuatro triángulos AOB, BOC, COD y DOA, y apliquen el teorema de los puntos medios. Los triángulos serán vistos como unidades figurales que no modifican al cuadrilátero, todas estas acciones se reconocen como modificación mereológica. (Ver Figura 16). Según Flores y Moretti (2006) las modificaciones mereológicas no solo requiere habilidades visuales, también conocimientos matemáticos. En este caso se requiere conocer el teorema de los puntos medios.

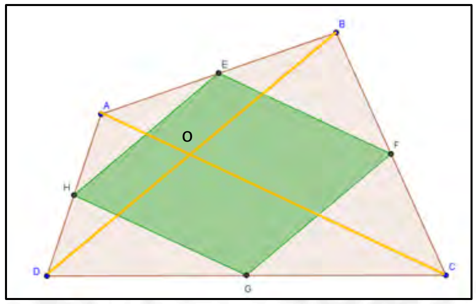


Figura 16: Aprehensión operatoria 1 – Actividad 1

Y en otra acción, pensamos que reconozcan cuatro triángulos superpuestos ABC, ACD, BCD y ABD, porque identifican 4 nuevas subconfiguraciones de la figura original, lo que implica que están desarrollando desde la perspectiva de Duval sus aprehensiones perceptivas.

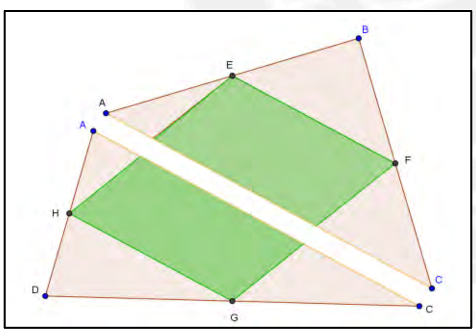


Figura 17: Descomposición mereológica 1

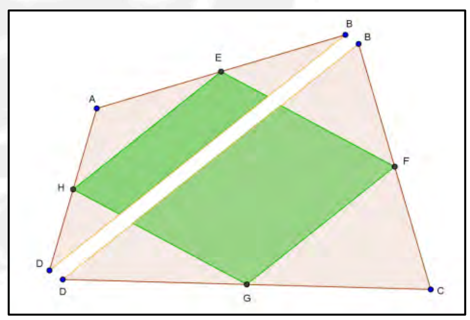


Figura 18: Descomposición mereológica 2

En el sentido de Duval (1999), se espera que los profesores realicen la articulación de sus aprehensiones perceptiva y operatoria (modificación mereológica de la figura inicial), y desplieguen sus conocimientos matemáticos aplicando el teorema de los puntos medios a los triángulos ABC y ACD (Figura 17), cuyo lado común es el segmento $\overline{AC}$, de tal manera que justifiquen matemáticamente que el segmento $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ y el segmento $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$ respectivamente, para relacionar por transitividad el paralelismo de los segmentos: $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$. En forma análoga en la Figura 18, se espera verifiquen que los segmentos $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$. Todo proceso deductivo será expresado a través de la aprehensión discursiva, empleando un discurso matemático, donde se efectúe un cambio de registro, del figural al discursivo. Esperamos que a partir de la articulación de sus aprehensiones perceptivas, operatoria (mereológica) y discursiva, justifiquen que el cuadrilátero inscrito EFGH, tiene dos pares de lados paralelos y por lo tanto concluir que es un paralelogramo.

Análisis *a posteriori* de la producción de los profesores

En general, observamos que tres del grupo de quince profesores solo nombraron a la figura, pensamos que solo se guiaron de su sentido *ver*, es decir lo que vio al primer golpe de vista. Siete profesores guiados por su percepción midieron los lados y ángulos opuestos del cuadrilátero inscrito EFGH. Pensamos que sus procedimientos en relacionar las unidades figurales de dimensión 1 no son suficientes para identificar las propiedades del paralelogramo, es posible que tengan dificultades de expresar verbalmente una figura. Otros cinco profesores, lograron articular las aprehensiones en el registro figural, porque realizaron trazos adicionales y utilizaron el teorema de los puntos medios para justificar y responder la cuestión planteada. La figura genera a partir de la aprehensión perceptual maneras de proceder como el trazo de las diagonales del cuadrilátero ABCD cumpliendo su papel heurístico, concluyendo que el cuadrilátero inscrito EFGH es un paralelogramo. Solo la tercera parte del grupo de profesores hicieron lo que habíamos previsto en el análisis *a priori*.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo

El profesor *Gustavo*, como se observa en la Figura 19, realizó la construcción del cuadrilátero ABCD y del cuadrilátero EFGH, siguiendo las pautas de construcción de ambos cuadriláteros, como habíamos previsto en el análisis *a priori.*

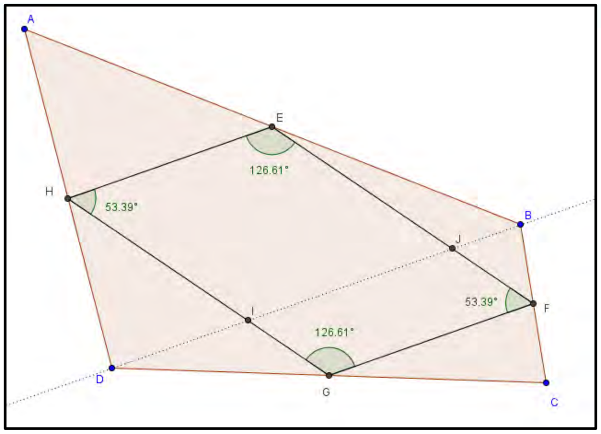


Figura 19: Representación figural – Actividad 1 – Profesor Gustavo

Pensamos que empleando la función arrastre, le permitirá observar diferentes configuraciones del cuadrilátero inscrito, para asociar las propiedades que le son invariantes. Además de acuerdo con Laborde (1994) el arrastre le ofrece una retroacción a sus acciones, significa que podrá realizar otras acciones en base a los conocimientos que tiene del objeto matemático, lo que contribuirá en la articulación de su aprehensión perceptiva y operatoria, para realizar modificaciones mereológicas sobre la figura. (Ver figura 20).

El cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

Figura 20: Discurso – Actividad 1 – Profesor Gustavo

Luego mide los ángulos del cuadrilátero EFGH para verificar una de las propiedades del paralelogramo, en este caso recurre a sus conocimientos previos “la medida de los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes”

En la figura 20 como primera acción traza la diagonal BD, así como lo afirma en el paso (i) (ver figura 21), dividiendo al cuadrilátero ABCD en dos triángulos ABD y BCD. En este caso realiza una modificación mereológica, con la intención de relacionar los triángulos.

i) Se traza la diagonal DB.

Figura 21: Discurso i – Actividad 1 – Profesor Gustavo

Luego en el paso (ii) (ver figura 22), con la afirmación “como H y E son puntos medios de DA y BA, respectivamente, el ΔAHE es semejante al ΔADB” pensamos que está refiriéndose al teorema de los puntos medios que está asociada al teorema de Thales para luego relacionar por semejanza los triángulos AHE y ADB, lo que implica que los segmentos HE y DB son paralelos, aunque no lo menciona en el paso (ii). En este caso el profesor se basó en propiedades de triángulos semejantes, diferente a lo que habíamos supuesto *a priori*. En base a esta premisa concluye que las medidas de los segmentos HI, EJ, y HE, IJ son iguales, creemos que esta afirmación se deriva de su aprehensión perceptiva de la configuración y conocimientos previos de los lados paralelos del cuadrilátero EFGH. La afirmación $m\overline{HI} = m\overline{EJ}\ y\ m\overline{HE} = m\overline{IJ}$ no tiene un sustento deductivo, no se evidencian los pasos intermedios para llegar a esta conclusión.

ii) Como H y E son puntos medios de DA y BA respectivamente Δ AHE es semejante a Δ ADB $\Rightarrow m\,\overline{HI} = m\,\overline{EJ}$ y $m\,\overline{HE} = m\,\overline{IJ}$

Figura 22: Discurso ii – Actividad 1 – Profesor Gustavo

En el paso (iii), ver figura 23, de forma similar al paso (ii) relaciona por semejanza los triángulos FCG y BCD, concluyendo que los segmentos que:

$$m\overline{FG} = m\,\overline{IJ}\ y\ m\,\overline{JF} = m\,\overline{IG}.$$

iii) Como F y G son puntos medios de BC y DC respectivamente ΔFCG es semejante a ΔBCD $\Rightarrow m\,\overline{FG} = m\,\overline{IJ}$ y $m\,\overline{IF} = m\,\overline{IG}$.

Figura 23: Discurso iii – Actividad 1 – Profesor Gustavo

En el paso (iv), como se muestra en la Figura 24, a partir de conclusiones anteriores en (ii) y (iii), relaciona las siguientes medidas de segmentos $\overline{EJ} = \overline{HI}\ y\ \overline{JF} = \overline{IG}$, como:

$\overline{EJ} + \overline{JF} = \overline{HI} + \overline{IG}$ Concluyendo que $\overline{HG}$ y $\overline{EF}$ tienen la misma medida.

iv) $\overline{HE}$, $\overline{IJ}$ y $\overline{GF}$ tienen la misma medida; $\overline{EJ} = \overline{HI}$ y $\overline{JF} = \overline{IG} \Rightarrow \overline{EJ} + \overline{JF} = \overline{HI} + \overline{IG}$ $\Rightarrow \overline{HG}$ y $\overline{EF}$ tienen la misma medida.

v) El cuadrilátero HGFE es un paralelogramo porque sus lados opuestos tienen la misma medida

Figura 24: Discurso iv y v – Actividad 1 – Profesor Gustavo

Pensamos que las implicancias descritas en el paso (ii), (iii) y (iv) no tiene congruencia entre registro figural y el discursivo, se observa que hay conocimiento matemático pero presenta dificultades para articular sus aprehensiones operatoria y discursiva, porque deja oculta la necesidad de verificar las siguientes proposiciones: $\overline{EJ} = \overline{HI}$ y $\overline{JF} = \overline{IG}$ así como el paralelismo de dichos pares de segmentos.

Análisis *posteriori* de la producción del profesor Fernando

El profesor *Fernando*, no ha realizado ninguna construcción solo ha elaborado un discurso descriptivo no previsto en el análisis *a priori*, porque señala características de un paralelogramo (ver figura 25), pensamos recurre a sus conocimientos previos, señalando propiedades del paralelogramo como la suma de sus ángulos interiores es 360°, la congruencia de sus lados dos a dos y ángulos opuestos. En su descripción emplea un lenguaje natural, creemos que el profesor tiene poco contacto con el registro discursivo, porque no emplea un lenguaje matemático que describa las propiedades, no hay una congruencia entre los tratamientos en la figura y el discurso.

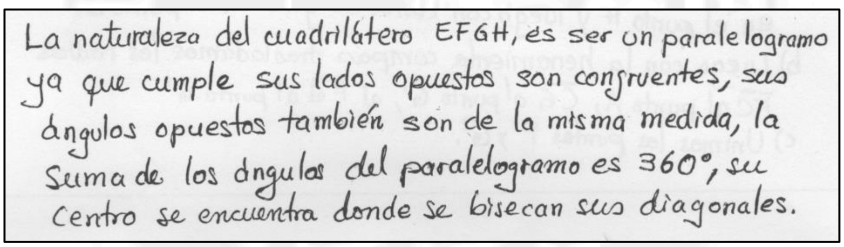

La naturaleza del cuadrilátero EFGH, es ser un paralelogramo ya que cumple sus lados opuestos son congruentes, sus ángulos opuestos también son de la misma medida, la suma de los ángulos del paralelogramo es 360°, su centro se encuentra donde se bisecan sus diagonales.

Figura 25: Discurso – Actividad 1 – Profesor Fernando

Pensamos desde la perspectiva de Duval, el profesor está en proceso de visualizar, porque recurre a sus conocimientos previos del paralelogramo, lo que implica que reconoce la configuración del cuadrilátero como tal.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia

La profesora *Lidia*, como se observa en la figura 26 sigue las indicaciones para la construcción de los cuadriláteros ABCD y EFGH, como habíamos previsto en el análisis *a priori*. Luego adiciona un trazo sobre la figura, el segmento BD, pero no hay un discurso que sustente este procedimiento.

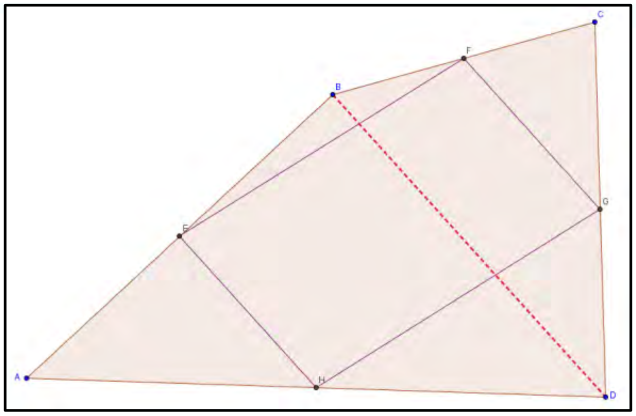


Figura 26: Representación figural – Actividad 1 – Profesora Lidia

Pensamos que la profesora ha realizado el arrastre de la figura, (ver figura 27) que nos indica que a partir de su aprehensión perceptiva moviliza conocimientos previos identificando a la figura como Paralelogramo, luego describe sus propiedades.

El cuadrilátero EFGH cumple lo siguiente:
- Los lados EF y GH son paralelos, es decir $EF // GH$.
- Los lados EH y FG son paralelos, es decir $EH // FG$.
- Las longitudes de los lados también son iguales. $EF = GH$ y $EH = FG$
- Además la medida de los ángulos opuestos son: iguales: $m(F\hat{E}H) = m(H\hat{G}F)$ y $m(E\hat{H}G) = m(E\hat{F}G)$

Por lo tanto el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo.

Figura 27: Discurso – Actividad 1 – Profesora Lidia

En este caso no realiza ningún tratamiento y justificación matemática que pruebe que la figura es un paralelogramo, justamente el papel heurístico de la figura permitirá descubrir el tercer enunciado que lleve a la organización de un razonamiento deductivo. Se observa en su discurso una descripción de las propiedades del paralelogramo, como la relación de paralelismo y congruencia de sus lados y ángulos opuestos. Si bien es cierto que a partir de su argumentación, sin necesidad de una representación puede identificarse la configuración de un paralelogramo, no responde a la cuestión planteada que es justificar matemáticamente la naturaleza del cuadrilátero inscrito. La profesora solo recurrió a su percepción y conocimientos previos.

Actividad 2

En la actividad dos se presentan tres posibles casos que pueden desarrollar los profesores en el experimento. El análisis de cada actividad se presenta en el siguiente orden: análisis *a priori*, análisis *a posteriori* del grupo en general y el análisis *posteriori* de los profesores Gustavo, Fernando y Lidia.

A continuación, la actividad 2 (Ver figura 28).

ACTIVIDAD 2

Abra el archivo **Actividad_2** en la que los cuadrados ABCD y EFSH son congruentes y el cuadrado EFSH que está inscrito en una circunferencia, gira alrededor del centro del cuadrado ABCD.

Manipule el punto ***S*** de tal manera que la intersección de las figuras forme la configuración de un triángulo, un cuadrado y un cuadrilátero cualquiera.

¿Cuál es la relación del área formada por la intersección de las figuras con el área del cuadrado ABCD? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida de área del software).

Figura 28: Actividad 2

Se muestra a continuación la situación propuesta en la Actividad 2 representado en el software Geogebra, ver la figura 29.

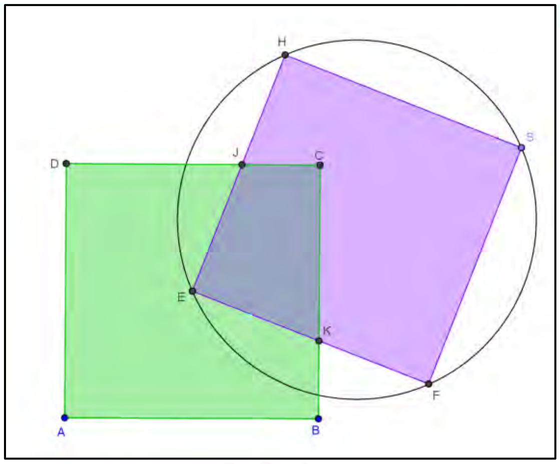


Figura 29: Actividad 2-Representación

Caso 1:

Objetivo: Relacionar el área de intersección de las figuras ABCD y EFSH, cuando forman un cuadrado, con el área del cuadrado ABCD.

Análisis a *priori* – Caso 1

Los quince profesores por medio de los datos de la actividad propuesta y por el planteamiento de la pregunta, se espera que establezcan una figura de partida y una de llegada. Cuando estas figuras se identifican, como afirma Duval, es posible que identifiquen la secuencia de sub-figuras que permitan llegar a la figura final. En este caso los profesores conocen que la figura final de la intersección de las figuras es un cuadrado, es posible que hagan uso del arrastre para acercarse a la configuración de la figura y desarrollen su aprehensión operatoria para realizar modificaciones mereológicas en el cuadrado ABCD. Pensamos que a partir de sus conocimientos previos de mediatriz de un segmento, recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento, empleen la herramienta mediatriz, realicen modificaciones mereológicas sobre el cuadrado ABCD, trazando las mediatrices L_1 y L_2 con el uso de las herramientas del Geogebra de los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, dividiendo al cuadrado en cuatro regiones. (Ver figura 30).

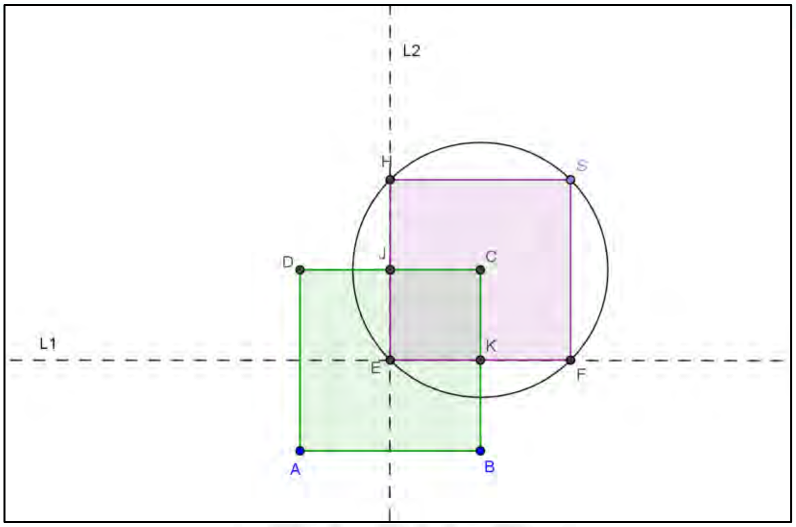


Figura 30: Análisis *a priori* – Actividad 2 – Caso 1

Es posible a través de la articulación de su aprehensión percepción identifiquen cuatro regiones cuadradas, que será sustentado con la siguiente propiedad "si una recta es perpendicular a una segunda recta, también es perpendicular a cualquier recta paralela a la segunda recta" con el siguiente discurso, en primer lugar la perpendicularidad de las prolongaciones de las mediatrices, L_1 es paralela al segmento $\overline{BC}$ y L_2 es perpendicular al segmento $\overline{DC}$ entonces L_2 es perpendicular a la recta L_1, y luego la intercepción de las prolongaciones de las mediatrices L_1 y L_2 con los segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{AD}$ pasan por su punto medio respectivamente. Por lo tanto concluirán que el cuadrado ABCD queda dividido en cuatro regiones cuadrangulares.

Pensamos que aplicando el arrastre a la figura EFSH desde el vértice S hasta que sus lados $\overline{EH}\ y\ \overline{EF}$ se superpongan con las mediatrices L_1 y L_2 comprobarán que la intersección de las figuras coincide con una región cuadrangular, por lo tanto es un cuadrado que representa la cuarta parte del área del cuadrado ABCD.

En este caso esperamos que la articulación sea global, donde se realice un encadenamiento de pasos deductivos y se establezca una articulación entre las aprehensiones perceptivas, mereológicas y empleando un discurso deductivo.

Análisis *a posteriori* de la producción de los profesores– Caso 1

Revisando los procedimientos de los quince profesores, solo cuatro del grupo realizaron el procedimiento según lo previsto en el análisis *a priori* logrando articular las aprehensiones perceptiva, mereológica y discursiva, pensamos que a partir de la percepción de la figura final trazaron la mediatriz de dos lados consecutivos (aprehensión mereológica) o paralelas que pasan por el punto medio de un segmento, dividiendo al cuadrado ABCD en cuatro cuadrados congruentes, complementando con un discurso que lo sustente, logrando coordinar el registro figural y discursivo. Uno de ellos menciona la aplicación del arrastre para verificar que el área de intersección de las figuras encaje exactamente sobre una de las subfiguras del cuadrado ABCD. Por otro lado siete profesores solo coordinaron su aprehensión perceptiva y operatoria (mereológica), realizando trazos sobre el cuadrado ABCD como: puntos medios de los lados del cuadrado, segmentos que unen los puntos medios de dos lados opuestos o en otros casos mediatrices pero no fundamentaron con un discurso matemático que describa las conexiones entre cada paso, solo uno de ellos recurrió a la fórmula del área del cuadrado, creemos que no realizaron un discurso porque presentan dificultades en relacionar un representación figural con un discurso descriptivo o deductivo, ellos solo realizaron los tratamientos pero no coordinaron el registros figural y discursivo. También dos recurren a la medición, uno de ellos mide los lados del cuadrado EKCJ (área de intersección de las figuras ABCD y EFSH) y el lado del cuadrado ABCD para relacionar la medida de sus lados y por consecuencia sus áreas, y en otro caso traslada distancias utilizando la circunferencia para confirmar la congruencia de los lados del cuadrado que forma la intersección de las figuras ABCD y EFSH. Las acciones que realizan están en dirección de atender las exigencias del enunciado, la figura debe tener lados congruentes. Y dos profesores del grupo en general se guiaron de su percepción concluyendo que la intersección de las figuras forma un cuadrado. De acuerdo con Laborde (1994), cuando solo la percepción interviene en una interpretación geométrica es porque el lector no tiene sólidos conocimientos teóricos.

Haciendo una extensión sobre el uso del geogebra revisamos dos protocolos de construcción, observando lo siguiente: en ambos casos los profesores realizaron el arrastre del cuadrado EFSH hasta que la intersección de las figuras sea según su percepción un cuadrado, uno de ellos para comprobarlo trazó una paralela al lado $\overline{CD}$ del cuadrado ABCD que pase por el punto E de tal forma que la recta sobreponga uno de los lados del cuadrado EFSH como se puede apreciar en la Figura 31- I, y el otro verificó el punto de intersección del lado $\overline{EH}$ del cuadrado EFSH con el lado $\overline{DC}$ del cuadrado ABCD utilizando la herramienta “medio o centro” (ver figura 31-II).

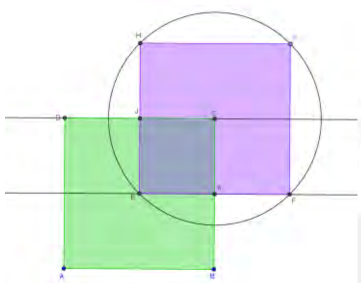
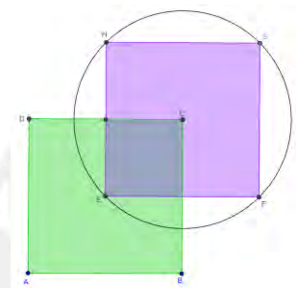
I	II
 (a)	 (b)

Figura 31: Uso del geogebra (a) y (b) - Actividad 2 - Caso 1

El protocolo de construcción nos confirma que la herramienta “rectas paralelas” y “medio o centro” de los EGD son mediadores semióticos porque corroboran la percepción sobre las representaciones y sus significados. Ver figura 32.

(a)	(b)
16 Recta j — Recta que pasa por D, C	13 Punto J — Punto de intersección de e_1, c 14 Punto K — Punto de intersección de h_1, b

Figura 32: Protocolo de construcción (a) y (b) de la figura 32

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo – Caso 1

El profesor Gustavo, como se observa en la figura 33, pensamos que sobrepone los cuadrados ABCD y EFSH hasta formar según su percepción un cuadrado y para verificar la congruencia de los segmentos $\overline{JE}$ y $\overline{EK}$ traza la circunferencia con centro E, afirmando lo siguiente *“EK y EJ son segmentos de la misma medida”*.

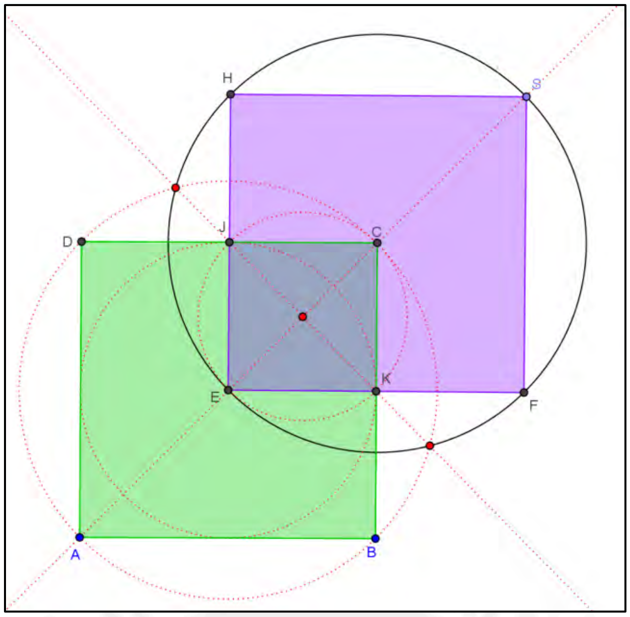


Figura 33: Representación - Actividad 2 - Caso 1 - Profesor Gustavo

Luego traza otra circunferencia de radio $\overline{CE}$ con centro en E, para comprobar la congruencia de los cuadrados ABCD y EFSH, aunque en la propuesta de la actividad se había señalado como dato la congruencia de los cuadrados.

A continuación, ubica los puntos de intersección de las circunferencias trazando una recta que pasa por ambos puntos y otra por sus centros E y C (modificación mereológica), ambas rectas contienen a las diagonales de la figura EJCK, pensamos que movilizan sus conocimientos previos de circunferencias secantes porque la intersección de ambas rectas forman un ángulo recto, sus tratamientos se describen en forma argumentativa, ya que afirma lo siguiente: "*EJCK es un cuadrado porque sus diagonales son perpendiculares y los segmentos iguales*", para finalmente concluir que el cuadrilátero EJCK es un cuadrado y representa la cuarta parte de cualquiera de los dos cuadrados ABCD o EFSH. Creemos que las herramientas del Geogebra contribuyeron a verificar propiedades o a establecer relaciones entre las unidades figurales de dimensión 0 y 1, como: rectas, segmentos y puntos. Con los trazos realizados sobre la figura, se evidencia que hay conocimiento matemático, porque primero verifica la perpendicularidad de las diagonales del cuadrado, luego traza otra circunferencia cuyo radio parte del punto de intersección de las diagonales a uno de los vértices del cuadrado EJCK. Lo que observamos es que hay una predominancia visual en el cuadrado EKCJ, desviando su atención a la pregunta de la actividad. En el proceso coordina su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva, donde la aprehensión operatoria es congruente con la justificación argumentativa, porque hay una correspondencia entre las unidades figurales de dimensión 1 con las proposiciones que se refieren a estas unidades.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Fernando – Caso 1

En el caso del profesor Fernando, pensamos que realiza como primera acción el arrastre del cuadrado EFSH para tener una idea de las figuras solicitadas, pero cuando se solicita que la intersección de las figuras forme un cuadrado creemos que para verificar su percepción traza los puntos medios de los lados DC y BC, empleando la herramienta "punto medio" para construir un cuadrado. (Ver Figura 34).

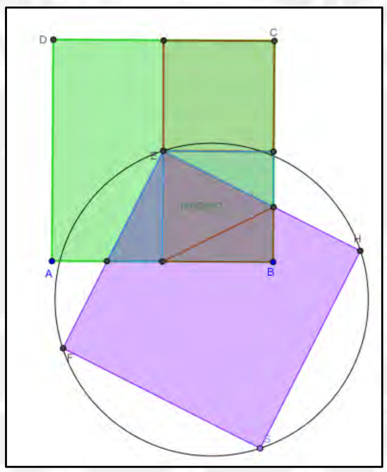


Figura 34: Representación figural - Actividad 2 – Caso 1 –Profesor Fernando

El profesor Fernando al realizar el trazo del cuadrado solo moviliza su aprehensión operatoria-mereológica pero no evidencia una aprehensión discursiva al respecto porque no justifica los trazos realizados sobre la figura. Solo realizó los tratamientos para verificar que la intersección de las figuras ABCD y EFSH forme un cuadrado, no atendiendo finalmente a la pregunta. Pensamos que en su práctica docente solo se apoya en aspectos visuales para justificar sus conjeturas.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia – Caso 1

En el caso de la profesora Lidia, suponemos que arrastra el cuadrado EFSH hasta según su percepción lo asemeje a un cuadrado, como se muestra en la figura 36.

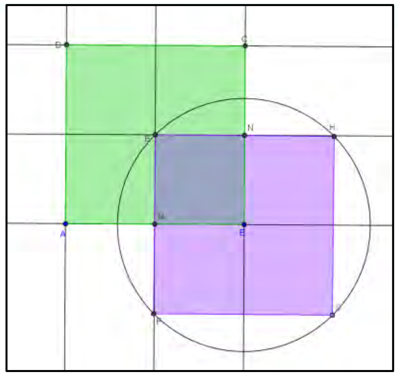


Figura 35: Representación – Actividad 2 – Caso 1 – Profesora Lidia

Evidenciamos en el protocolo de construcción (ver figura 36) que la profesora Lidia ubicó los puntos medios M y N del lado $\overline{AB}\ y\ \overline{BC}$ y utilizó la herramienta “medio o centro” para verificar si la intersección del segmento $\overline{EF}$ con el segmento $\overline{AB}$ es el punto M y la intersección del segmento $\overline{EH}$ con el segmento $\overline{BC}$ es el punto N.

Punto N	Punto medio de C, B
Punto M	Punto medio de A, B

Figura 36: Protocolo de construcción –Actividad 2 - Caso 1 - Profesora Lidia

Se observa que utiliza las herramientas del Geogebra para realizar modificaciones mereológicas sobre la figura. Luego traza según el protocolo de construcción las rectas $EM\ y\ EN$ (aprehensión operatoria-mereológica) aunque en su discurso realizado en la pantalla del Geogebra señala el trazo de rectas paralelas a los lados del cuadrado ABCD tal como se muestra en la figura 37.

CUANDO LA FIGURA SUPERPUESTA ES UN CUADRADO

Luego de trazar rectas paralelas a los lados del cuadrado ADCB se observa que el cuadrado ADCB se divide en cuatro cuadrados congruentes, lo cual nos muestra que el área del cuadrado superpuesto (cuadrado ENBM) es la cuarta parte del área del cuadrado ADBC

Figura 37: Discurso – Actividad 2 – Caso 1 – Profesora Lidia

Pensamos asume la profesora Lidia el paralelismo porque las rectas pasan por el punto medio de un lado y el centro del cuadrado ABCD dividiendo al cuadrado en cuatro subfiguras. Concluimos que hay una articulación y congruencia entre las aprehensiones operatoria y discursiva, porque la profesora ha dado evidencia de ello. En ese sentido su articulación es global.

Caso 2:

Objetivo: Relacionar el área de intersección de las figuras ABCD y EFSH, cuando forman un triángulo, con el área del cuadrado ABCD.

Análisis *a priori* – Caso 2:

En el segundo caso, pensamos que los 15 profesores, comenzarán con el arrastre del vértice S, hasta coincidir los puntos J y K con los vértices B y C respectivamente. Conjeturamos que a partir de la percepción de la configuración de la intersección de las figuras (ΔBEC) sobre el cuadrado ABCD, realizarán los trazos de las diagonales $\overline{AC}\ y\ \overline{BC}$, ver figura 38.

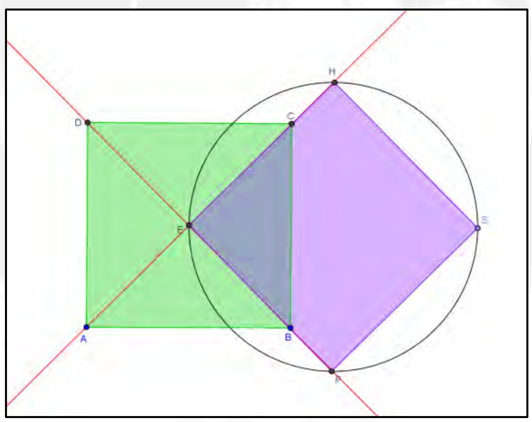


Figura 38: Análisis *a priori* – Actividad 2 – Caso 2

Realiza una modificación mereológica dividiendo la configuración del cuadrado ABCD en cuatro regiones triangulares, lo que implica una articulación entre la aprehensión perceptiva y operatoria (mereológica), con la finalidad de aplicar propiedades de congruencia de triángulos, con el siguiente discurso: las diagonales $\overline{AC}\ y\ \overline{BD}$ se cortan en su punto medio, entonces $\overline{EA} \cong \overline{EB} \cong \overline{EC} \cong \overline{ED}$ y por propiedad de triángulos congruentes, caso LLL, los triángulos $\Delta BEC, \Delta AEB, \Delta DEA\ y\ \Delta DEC$ son congruentes. Por lo que se concluye que el triángulo ΔBEC es la cuarta parte del cuadrado ABCD. El arrastre del Geogebra les permitirá examinar su construcción y buscar propiedades invariantes. El proceso de solución del problema es de nivel global por la articulación entre la secuencia de sub-figuras y pasos deductivos expresado mediante un discurso, relevante para el desarrollo de los procesos de visualización, tal como lo afirma Duval.

Análisis *a posteriori* de los profesores - Caso 2

En general observamos que un profesor del grupo de quince profesores realiza la justificación de acuerdo a lo previsto en al análisis *a priori* logrando articular las aprehensiones en el registro figural, a partir de la percepción de la figura triangular que se logra con ayuda del arrastre, traza las diagonales del cuadrado ABCD, y su discurso lo sustenta con propiedades de congruencia de triángulos. Lo que nos indica que el profesor realiza una buena coordinación entre los registros figural y discursivo.

Observamos también, que cuatro profesores realizan el arrastre del cuadrado EFSH hasta formar, según su percepción, un triángulo. Luego realizan trazos adicionales (altura del triángulo) y mediatrices que dividen al cuadrado ABCD en cuatro cuadrados congruentes, pensamos que esa acción fue realizada para reconfigurar el triángulo porque al trazar la altura de dicha representación queda divido en dos triángulos rectángulos. Al trasladar uno de los triángulos, la figura queda con una nueva configuración (aprehensión operatoria-reconfiguración), cuya superficie coincide con uno de los cuadrados congruentes. Sus procedimientos en el discurso lo sustentan con propiedades de congruencia de triángulos. En este caso, hay una coordinación del registro del figural al discursivo.

Dos profesores con ayuda del arrastre guiados por su percepción formaron el triángulo que conforma la intersección de las figuras, en este caso su justificación se inició con el trazo de las diagonales y la circunferencia que circunscribe al cuadrado ABCD, lo que según Duval es la aprehensión operatoria-mereológica, porque el cuadrado queda dividido en cuatro triángulos. En el discurso estas acciones se realizaron con el propósito de justificar la congruencia de los cuatro triángulos que dividen al cuadrado ABCD.

Observamos que las acciones de los tres grupos de profesores fueron diferentes, sin embargo lograron articular en todos los casos las aprehensiones (perceptiva, operatoria y discursiva), lo que conforme desde la perspectiva de Duval es una articulación global. Las herramientas del Geogebra cumplieron su función mediadora, lo que contribuyó en la percepción de las unidades figurales como: segmentos y áreas.

Otro grupo de siete profesores que consideramos se encuentra en proceso de articular las aprehensiones, pues guiados por su percepción forman el área triangular, realizan trazos adicionales (altura del triángulo) para dividir al triángulo en dos triángulos congruentes, en su discurso se apoyan en la medición de longitudes del triángulo (base y altura) y en otros casos en el uso de fórmulas de área del cuadrado y triángulo, movilizan sus conocimientos previos como el cálculo de áreas, además observamos que solo realizan tratamientos en el registro figural. Creemos que solo articulan su aprehensión perceptiva y operatoria.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo – Caso 2

En el caso del profesor Gustavo pensamos que realiza la rotación del cuadrado EFSH hasta que los puntos J y K se intersecan y la configuración de la intersección de las figuras sea un triángulo. Creemos que la configuración inicial le aporta información, porque en su discurso se evidencia lo siguiente: *se traza la circunferencia de radio EC donde:*

$$m\overline{EC} = m\overline{ED} = m\overline{EA} = m\overline{EB}.$$

Luego traza las diagonales del cuadrado ABCD tal como se puede ver en la siguiente figura (ver figura 39).

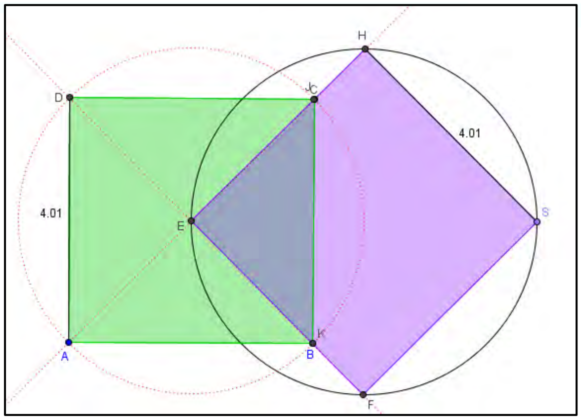


Figura 39: Representación figural – Actividad 2 – Caso 2 – Profesor Gustavo

El profesor Gustavo afirma que: *DB y AC son perpendiculares por ser las diagonales del cuadrado*, lo que evidencia una articulación entre su aprehensión operatoria y discursiva. Además identifica los triángulos que conforman el cuadrado ABCD tal como lo señala en su discurso: *los triángulos AED, DEC, CEB y BEA son congruentes, por lo tanto tienen la misma área.* Esta acción caracteriza a una modificación mereológica, lo que evidencia la asociación de propiedades de congruencia y elementos geométricos que verifican dicha propiedad. Aunque no va más allá, en el sentido de demostrar que los triángulos son congruentes. Esta manera de proceder evidencia coordinaciones entre aprehensiones operatorias y discursivas, permitiendo al profesor obtener ideas claves y generar un discurso teórico. Por ello afirmamos que la articulación de las aprehensiones se encuentra a nivel global y lo conducirá a la visualización matemática en palabras de Duval.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Fernando – Caso 2

En el caso del profesor Fernando observamos que ha realizado el arrastre hasta formar el triángulo BEC (ver figura 40) y evidenciamos que ubica el punto medio del segmento BC. Como se observa toma medidas de los segmentos BC y EG, con la finalidad de hallar el área del triángulo y no realiza alguna relación con la medida del área del cuadrado ABCD. Utiliza las herramientas del Geogebra como: punto medio y medida, para realizar modificaciones mereológicas trazando el segmento EG

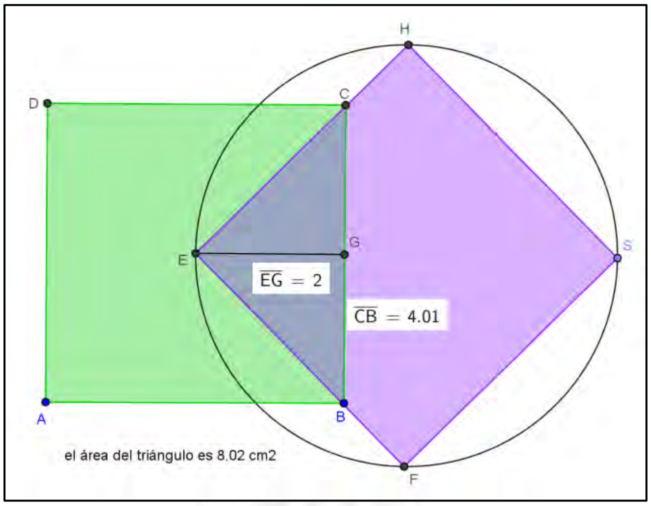


Figura 40: Representación figural – Actividad 2 – Caso 2 – Profesor Fernando

Se evidencia en el discurso realizado en el Geogebra, la reconfiguración del cuadrado dividiéndolo en dos triángulos para formar otro triángulo (ver figura 41).

> Primeramente se puede apreciar que al construir un cuadrado y luego un triángulo al compararlos puedo saber que la s figuras ocupan la misma superficie por que puedo partir al cuadrado en dos triangulos y formar el triángulo encontrado

Figura 41: Discurso – Actividad 2 – Caso 2 – Profesor Fernando

Lo que observamos es que el profesor Fernando coordina las aprehensiones perceptivas y operatorias, su discurso se apoya en la representación figural y no emplea un lenguaje matemático solo es descriptivo, aunque hay congruencia entre sus aprehensiones operatorias y descriptivas, se evidencia que tiene poca relación con el registro discursivo. Todo su razonamiento se realiza empleando unidades figurales de dimensión 2, y se apoya en la conclusión del caso 1, porque solo comprueba que el triángulo se reconfigura en un cuadrado. Para Duval, la diferencia entre un discurso descriptivo y deductivo, es que debe haber un cambio de dimensión, las unidades de dimensión 2 deben considerarse como unidades de dimensión 0 y 1.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia – Caso 2

La profesora Lidia como habíamos previsto *a priori* creemos guiada por la configuración inicial traza las diagonales del cuadrado ABCD identificando cuatro triángulos de áreas equivalentes, está acción mediada por el Geogebra caracteriza a la modificación mereológica (ver figura 42).

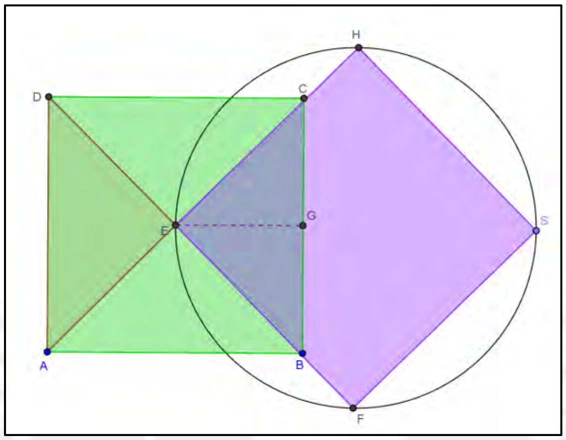


Figura 42: Representación figural – Actividad 2 – Caso 2 – Profesora Lidia

Por otro lado, el discurso que la profesora presenta para este razonamiento es el siguiente: *el cuadrado ADCB, se puede descomponer en cuatro triángulos que tienen las mismas áreas,* corresponde a una descripción. Otra acción que observamos es el uso de fórmulas para demostrar la relación del área del cuadrado ABCD y del triángulo, como lo describe en su discurso: *si suponemos que el radio de la circunferencia es r entonces el lado del cuadrado ADCB es 2r y su área es 4r.r […] el área del triángulo BEC=r.r*, este procedimiento sirvió para tener otro sustento que avale los tratamientos realizados en la figura. Se puede decir que hay una congruencia entre la aprehensión operatoria y discursiva.

Caso 3

Objetivo: Relacionar el área de intersección de las figuras ABCD y EFSH, cuando forman un cuadrilátero cualquiera, con el área del cuadrado ABCD.

Análisis a *priori* – Caso 3

Pensamos que los quince profesores, con ayuda del arrastre del Geogebra les facilitará tener diferentes puntos de vista de la configuración de la intersección de las figuras ya sea en la forma, posición e invariantes geométricos que propiciará el desarrollo de las aprehensiones perceptivas y operatorias. Como se puede observar en las posiciones I, II, III y IV de la figura 43, el cuadrilátero de área M gira alrededor del punto E, ningún par de lados son paralelos y las invariantes son dos ángulos internos que miden 90°.

Diferentes posiciones y configuraciones de la intersección de las figuras ABCD y EFSH

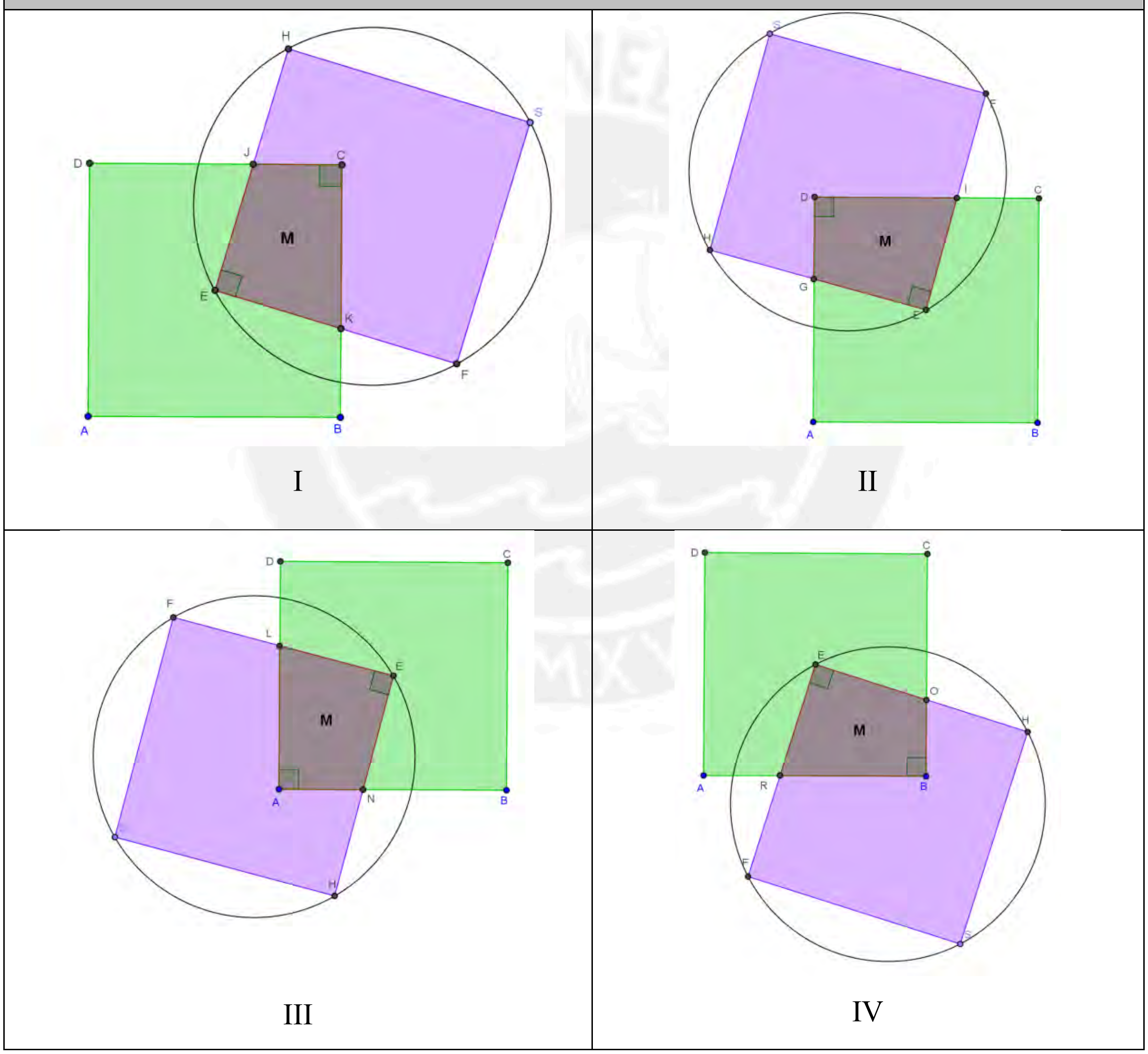


Figura 43: Diferentes posiciones y formas de la intersección de las figuras ABCD y EFSH.

En la situación propuesta, los profesores deben establecer la relación del área de la intersección de las figuras ABCD y EFSH con respecto al área del cuadrado ABCD. Pensamos, si toman la posición I de la figura 43, realizarán el trazo de la mediatriz de dos lados consecutivos $\overline{DC}\ y\ \overline{CB}$, como consecuencia una de las mediatrices dividirá al cuadrado EJCK en dos subfiguras (triángulo y cuadrilátero) es posible que los profesores lo observen, además el cuadrado ABCD quedará divido en 4 regiones cuadrangulares. En este caso, ellos habrán realizado una modificación mereológica para establecer una relación entre las nuevas sub-figuras (regiones triangulares y cuadrangulares). De acuerdo con Duval la secuencia de sub-figuras (triángulos y cuadriláteros) de la misma dimensión los conducirá a identificar la figura final que se muestra a continuación. Ver figura 44.

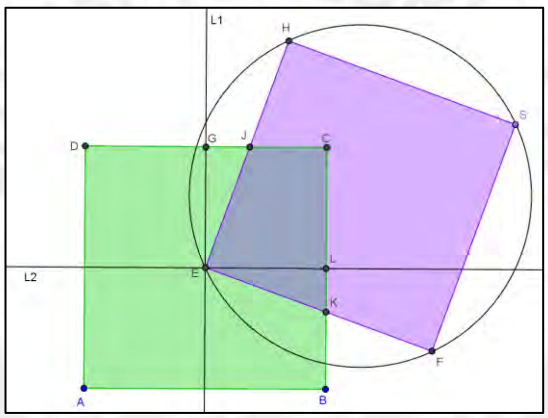


Figura 44: Modificación mereológica - trazo de mediatrices L1 y L2 sobre el cuadrado ABCD.

Esperamos que con el arrastre del vértice S puedan discriminar las regiones triangulares y cuadrangulares, lo que nos indicaría que están desarrollando su aprehensión operatoria (ver figura 45).

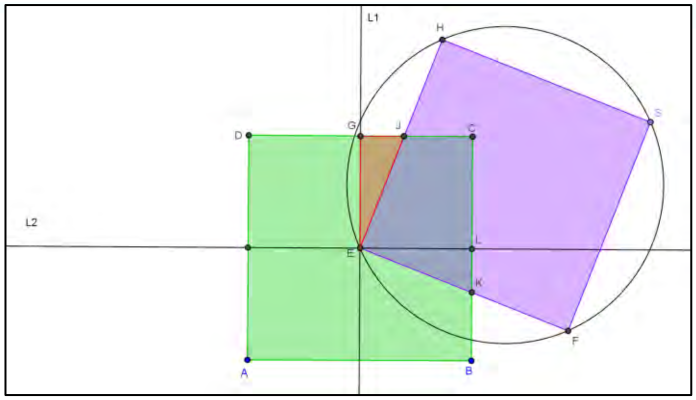


Figura 45: Modificación mereológica en los cuadrados ABCD y EFSH.

A partir de la identificación de las regiones triangulares, suponemos que relacionarán los triángulos $\Delta EKL\ y\ \Delta EJG$ con la propiedad de congruencia de triángulos (caso ALA), al comparar y trasladar el triángulo ΔEKL sobre la zona triangular ΔEJG. Esta acción caracteriza una aprehensión operatoria de reconfiguración, construyendo un contorno diferente al anterior, como se puede apreciar en la figura 46. La figura cumple su función heurística por la diversidad de operaciones que los profesores pueden realizar sobre ella.

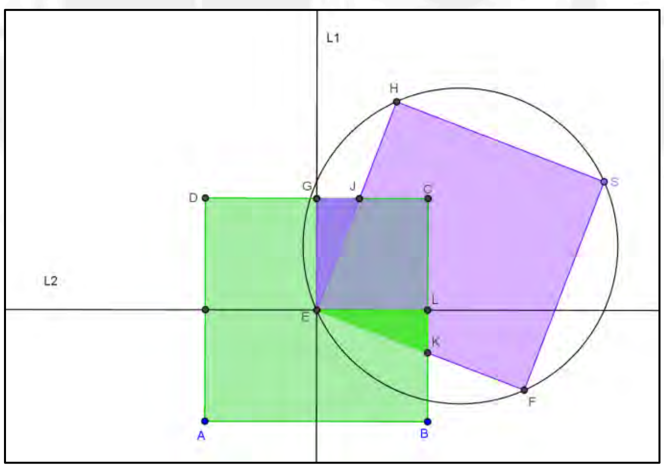


Figura 46: Reconfiguración del cuadrilátero ELCJ.

Esperamos que los profesores en el proceso articulen las aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, logrando una articulación global, y desarrollen la visualización como condición necesaria para el aprendizaje de la geometría.

Análisis *a posteriori* de la producción de los profesores – Caso 3

De los quince profesores, se observa que 5 de ellos articulan las aprehensiones tal como lo habíamos previsto *a priori*, es decir que parten del análisis de la figura y realizan trazos a partir de las modificaciones operatorias mereológicas. Por ello pensamos que identifican los triángulos, los relacionan y cambian de posición. A esta acción la identificamos desde la perspectiva de Duval como aprehensión operatoria de reconfiguración. Además los profesores realizan aprehensiones discursivas asociando afirmaciones matemáticas como propiedades de congruencia de triángulos. Creemos que el Geogebra como ambiente dinámico influyó en el desarrollo de las aprehensiones y que el arrastre permitió discriminar las figuras, agregar nuevos elementos y relacionar sus unidades figurales (segmentos y ángulos).

Ocho profesores con procedimientos similares al grupo anterior realizaron modificaciones mereológicas y de reconfiguración, pero la diferencia está en el discurso porque emplean una argumentación descriptiva, sin partir de la relación de las unidades figurales 0 y 1. En el desarrollo desde la perspectiva de Duval hay congruencia entre el desarrollo de las aprehensiones operatorias y discursivas.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo – Caso 3

El profesor Gustavo como se observa en la figura 47, ha tomado otra estrategia diferente a lo previsto *a priori*, agrega nuevos elementos sobre el área del cuadrado ABCD y realiza las siguientes acciones: marca los puntos medios de los lados BC y DC, el polígono MCNE, los segmentos MJ, NK, EJ y EK midiendo cada segmento, los triángulos MEJ y ENK nombrándolos como “S” y “T” respectivamente, y el polígono EJCN nombrándolo “V”. Lo que implica que la figura cumple su función heurística y el profesor Gustavo apoyándose en las herramientas del geogebra: puntos medios y la función “arrastre” le permite reevaluar sus acciones, tal como lo afirma Laborde (1994). Según Duval la secuencia de subfiguras lo conducirá a la solución del problema. Pensamos que la medición de segmentos es para confirmar la congruencia de triángulos EMJ y ENK.

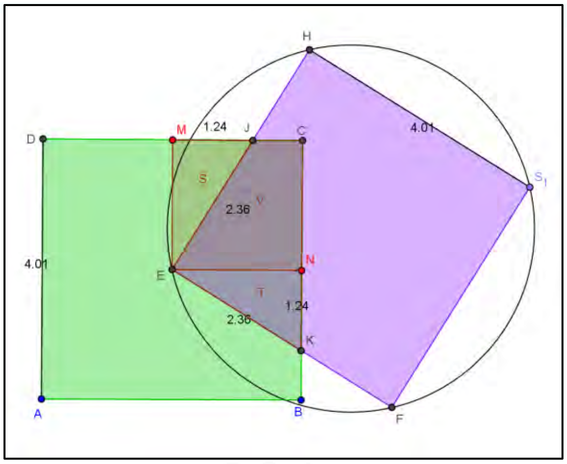


Figura 47: Representación figural – Actividad 2 – Caso 3 – Profesor Gustavo

Se evidencia en el discurso describe aprehensiones operatorias como: *El cuadrilátero EJCK tiene como medida de área la suma de V y T igual a la cuarta parte del cuadrado*, *las áreas S y V forman un cuadrado y las áreas S y T son iguales,* lo que demuestra una asociación de subfiguras, concluyendo de la siguiente manera: *las áreas T y V suman la cuarta parte del área del cuadrado*. Observamos que no ha recurrido a alguna definición o teorema, pero sí a una descripción de los procesos deductivos que lo justifican. Hay una congruencia entre la representación figural y la descripción que realiza. Su justificación argumentativa fundamentada en la aprehensión operatoria, no implica que este a la altura de demostrar el resultado, tal como lo afirma Duval.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Fernando – Caso 3

El profesor Fernando a partir de la configuración inicial de la intersección de las figuras, observamos que realiza trazos adicionales como medio de soporte perceptivo, según se muestra en la figura 48 para identificar una secuencia de subfiguras, tal como habíamos previsto *a priori*, Lo que implica que está desarrollando sus aprehensión operatoria.

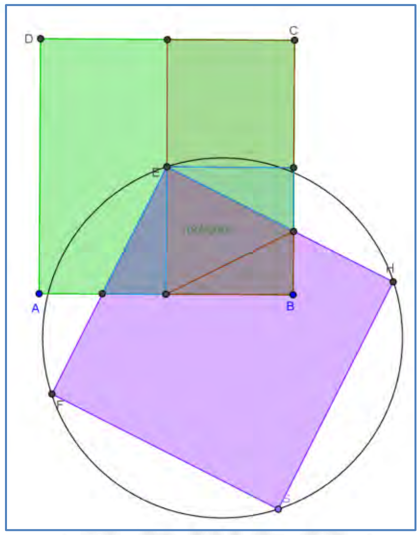


Figura 48: Representación figura – Actividad 2 – Caso 3 – Profesor Fernando

En su discurso describe, realizado en el Geogebra, *que formo un cuadrilátero y ubico puntos medios de los lados y trazo segmentos puedo visualizar triángulos que al unirlos formo un cuadrado* (ver figura 49).

Si formo un cuadrilátero y ubico puntos medios de los lados y trazo segmentos puedo visualizar triángulos que al unirlos formo un cuadrado.

Figura 49: Discurso – Actividad 2 – Caso 3 – Profesor Fernando

Pensamos que se refiere a una relación de congruencia entre triángulos y a la reconfiguración del cuadrilátero, no es muy clara su descripción. Es posible que el profesor usualmente se movilice solo en el registro figural. Aunque tiene conocimiento matemáticos, se observa que le falta desarrollar tratamientos en el registro discursivo y por consecuencia la coordinación entre el registro figural y discursivo.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia – Caso 3

En el caso de la profesora Lidia creemos con ayuda del arrastre del Geogebra tuvo diferentes puntos de vista de la configuración de la intersección de las figuras ABCD y EFSH y tomo una configuración como punto de partida para realizar el análisis de la figura, trazó mediatrices y adicionó otro elemento, una recta que pasa por los puntos A y C. Creemos que realiza estas acciones como medio de apoyo perceptivo y desarrollo de su aprehensión operatoria lo que permitirá identificar otras subconfiguraciones, como regiones triangulares. Estas acciones demuestran la función mediadora del Geogebra, además al aplicar el arrastre pensamos que pudo percibir la congruencia de los lados de algunas subconfiguraciones y la relación de los triángulos EOJ y EKG.

Empleando la herramienta "compás" verificó su percepción trasladando la distancia del segmento OJ al segmento GK con el fin de comprobar su congruencia (ver figura 50), a diferencia de lo que pensamos *a priori*, la profesora compara y verifica la congruencia solo de dos lados de los triángulos EOJ y EKG para fundamentar la congruencia de los triángulos con el caso LLL. Para finalmente, realizar reconfiguraciones tal cual lo menciona en su discurso *haciendo un traslado del triángulo rectángulo GEK a la posición del triángulo EOJ, ya que ambos triángulos son congruentes* por el caso LLL.

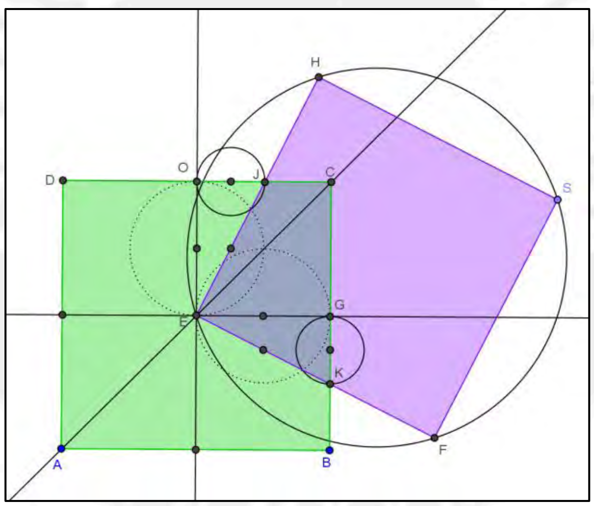


Figura 50: Representación figural – Actividad 2 – Caso 3 – Profesora Lidia

En comparación con el profesor Gustavo ambos recurrieron a la medición para relacionar la medida de los lados de los triángulos, el profesor para justificarlo se guio de su percepción y operaciones de reconfiguración, en cambio la profesora Lidia se guio de su percepción, operaciones de reconfiguración y propiedades de congruencia en base a mediciones. Aunque produce razonamientos cuyas expresiones podrían parecer pasos deductivos, son argumentaciones debido a que es necesario señalar los pasos intermedios, hay una predominancia de sus acciones en el registro figural.

Actividad 3

En la actividad 3 se han planteado tres situaciones, nombradas como Parte A, Parte B y Parte C. Cada una de ellas contiene el análisis *a priori*, el análisis *a posteriori* del grupo y el análisis *a posteriori* de los profesores Gustavo, Fernando y Lidia.

PARTE A

Objetivo: Reconfigurar el cuadrilátero ABCD.

Abra el archivo **Actividad_3** y usando todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de rotación del Geogebra (nota: puede hacer trazos auxiliares):

- Realice la rotación de 180° del triángulo$\triangle HDG$ con centro de giro en el punto H.
- Realice la rotación de 180° del triángulo $\triangle EBF$ con centro de giro en el punto E.
- Responda en la hoja:
  - **¿Cuál es la nueva figura que se formará si reubica el triángulo $\triangle FCG$?**
  - **¿Qué procedimientos utilizó para realizar la reubicación? Explique.**

Figura 51: Actividad 3 – Parte A

Se muestra a continuación en la figura 52, la Actividad 3 propuesta en el Geogebra.

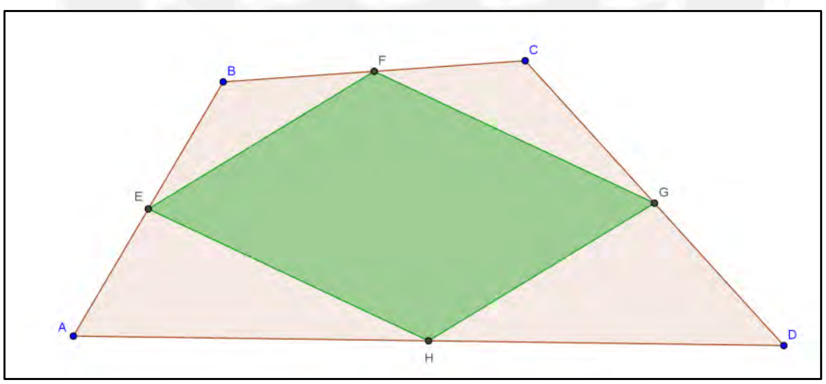


Figura 52: Actividad 3-Representación

Análisis *a priori* - Parte A

Pensamos que los quince profesores, con la limitación del enunciado "menos la herramienta de rotación del Geogebra", evaluarán otras acciones para la construcción del triángulo HDG. En ese sentido, recurrirán a sus conocimientos previos de simetría central, como prolongar los lados HG y HD, porque el centro de giro es el punto H. Luego haciendo uso del “compás” del Geogebra hallarán el punto G_1 que equidista y pertenece a la recta HG; luego el punto que equidiste del punto D será el punto A porque H es punto medio del segmento AD. Luego usando la herramienta polígono construirán el triángulo AHG_1 (Ver figura 53). Estas acciones nos permitirán analizar la aprehensión secuencial y operatoria de modificación posicional con variación de rotación con centro de giro en el punto H, que posiblemente desarrollen los participantes. En este caso el Geogebra se presenta como un mediador porque permitirá movilizar sus conocimientos previos y a evaluar sus acciones.

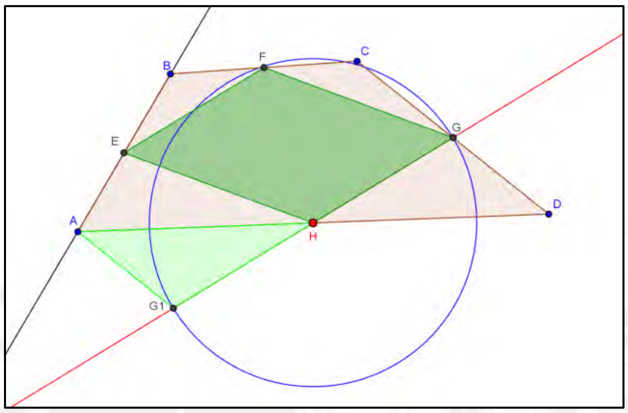


Figura 53: Rotación del triángulo ΔD_1HG_1 – Actividad 3 – Parte A

De forma similar rotarán el triángulo EBF y construirán el triángulo F_1EA con centro de giro en el punto E. (ver figura 54). Lo que pensamos es que no habrá dificultades en la construcción, porque en una investigación realizada con profesores de nivel secundario dan cuenta que no presentaron dificultades al seguir instrucciones de construcción pero sí cuando debían pasar del registro figural al discursivo.

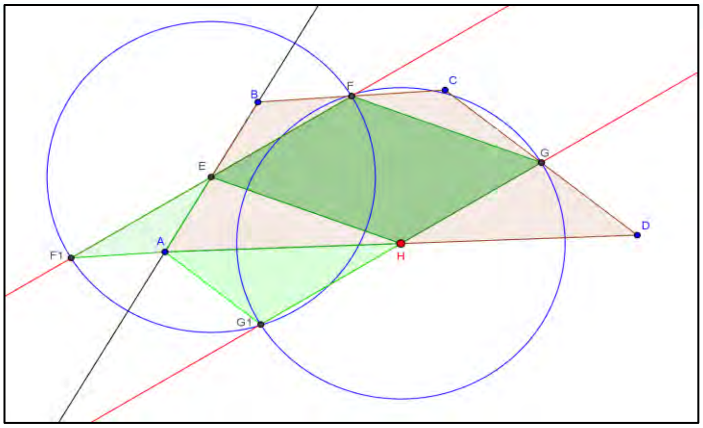
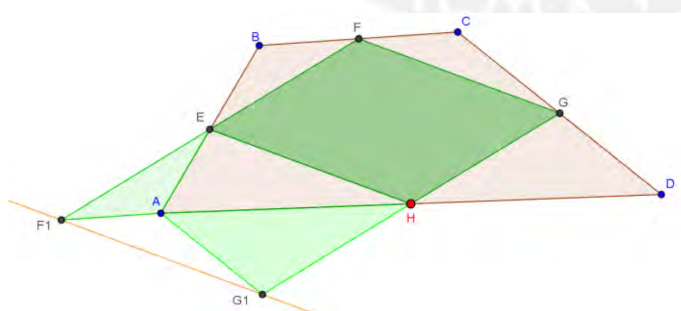
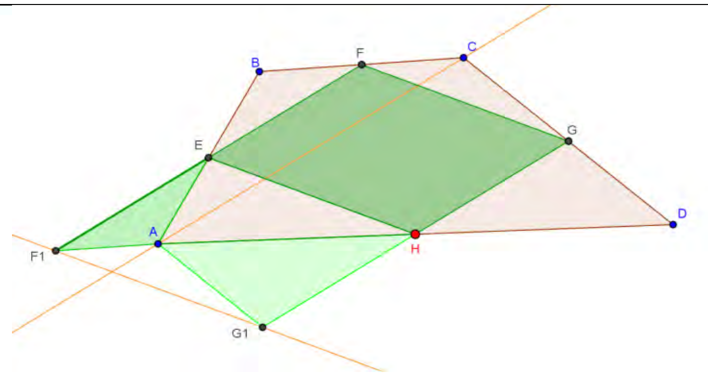
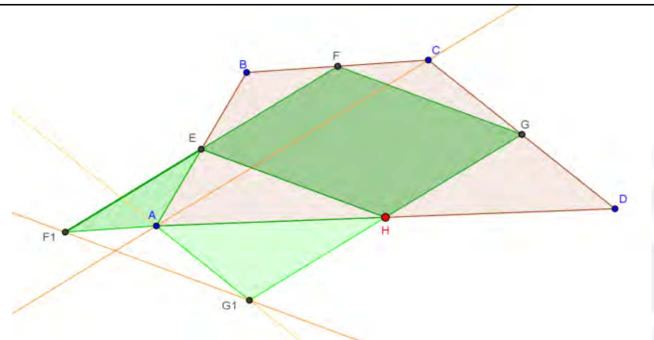
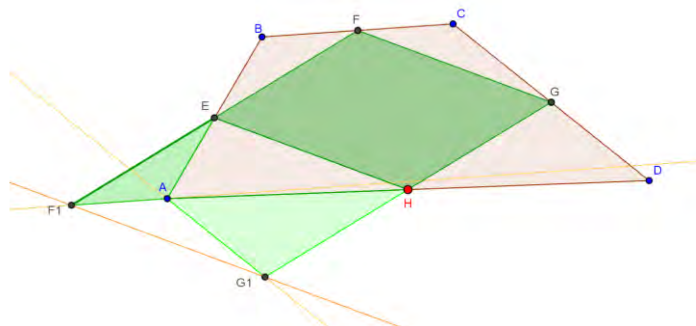
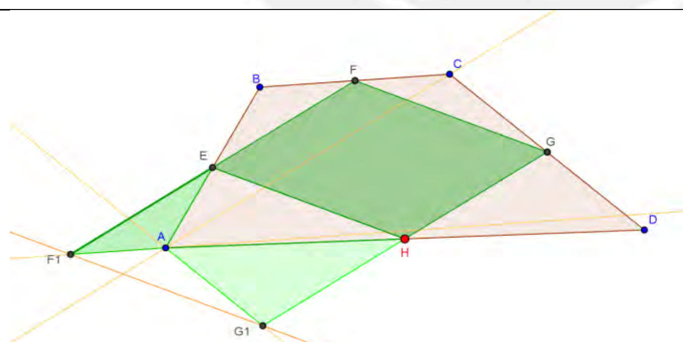


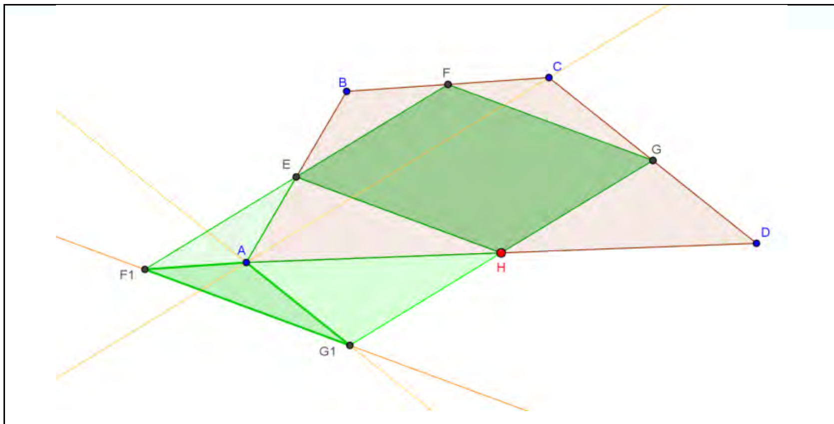
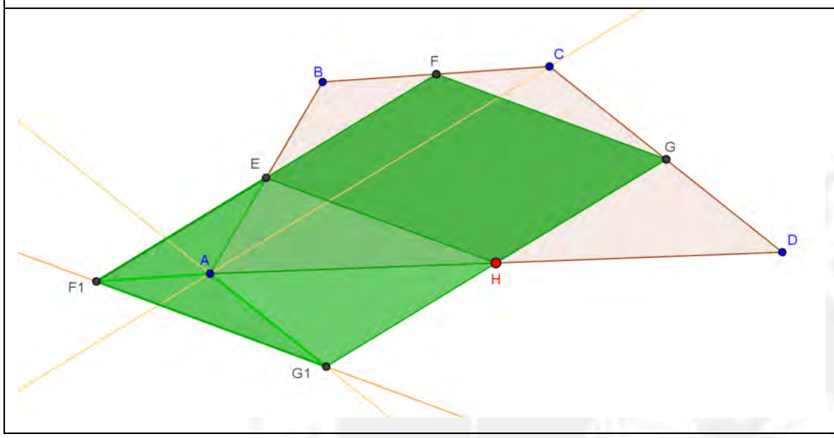
Figura 54: Rotación del triángulo F_1EA – Actividad 3 – Parte A

A la pregunta ¿Cuál es la nueva figura que se formará si se reubica el triángulo FCG? Pensamos, que en un primer momento, considerarán visualmente la configuración de un paralelogramo EHG_1F_1 mediante su percepción tendrán la idea que el triángulo FCG es congruente con el triángulo F_1AG_1. Y para responder ¿Qué procedimiento utilizó para realizar la reubicación? Enseguida se muestra los procedimientos que se espera realicen para reconfigurar el triángulo F_1AG_1: (Ver Cuadro 15)

Cuadro 15: Reconfiguración del triángulo FCG – Actividad 3 – Parte A

Reconfiguración del triángulo FCG	
	i) Usando la herramienta “Paralela” trazan una recta paralela al segmento $\overline{FG}$ que pase por el punto F_1 para verificar que el segmento $\overline{F_1G_1}$ es paralelo al segmento $\overline{FG}$. Al cortar las prolongaciones de las rectas EF Y HG, comprobarán que los segmentos $\overline{FG}$ y $\overline{F_1G_1}$ son congruentes porque ser la figura F_1G_1GF un paralelogramo cumple que sus lados dos a dos son congruentes.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>ii) Usando la herramienta "Paralela" trazan la recta AC paralela al segmento $\overline{F_1F}$ y por propiedad de transitiva , se puede afirmar que:
$\overline{F_1F} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{G_1G}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>iii) Usando la herramienta "Paralela" trazan una recta paralela al segmento $\overline{CG}$ que pase por el punto A para verificar que el segmento $\overline{AG_1}$ es paralelo al segmento $\overline{CG}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>iv) Usando la herramienta "Paralela" trazan una recta paralela al segmento $\overline{FC}$ que pase por el punto F_1 para verificar que el segmento $\overline{F_1A}$ es paralelo al segmento $\overline{FC}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>v) Por el caso LLL de congruencia de triángulos, se puede afirmar que: $\Delta FCG \cong \Delta F_1AG_1$</td>
</tr>
</table>

	Reconfiguración del cuadrilátero $ABCD$.
	La nueva configuración es el paralelogramo EHG_1F_1.

Esperamos desde la perspectiva de Duval al coordinar las aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, podrán aplicar modificaciones mereológicas y posicionales en coordinación con un discurso que va más allá de lo descriptivo y el Geogebra cumplirá su papel mediador entre la percepción sobre las figuras y las propiedades, se espera que la articulación sea global. Por tal, creemos que si siguen estos procedimientos van a visualizar.

Análisis *a posteriori* de la producción de los profesores - Parte A

Los 15 profesores al realizar la construcción de los triángulos $EBF\ y\ HGD$ utilizaron la herramienta “ángulo dada su amplitud” para rotar ambos triángulos con un ángulo de 180°, se esperaba en el *a priori* utilicen propiedades de simetría central en cada triángulo. Lo que nos indica que no hubo dificultad en seguir las instrucciones. Luego respondieron que la nueva figura es un paralelogramo o cuadrilátero, lo que nos indica que mentalmente reconfiguraron el triángulo FCG.

Con respecto a los procedimientos que realizaron en la reubicación del triángulo FCG, 10 profesores usaron la herramienta "compás" trasladando medidas, creemos para verificar si la configuración que mentalmente tienen del triángulo F_1AG_1 representa la misma configuración del triángulo FCG. Otros 2 profesores trazan rectas paralelas a los lados del triángulo FGC que pasan por los vértices del triángulo F_1AG_1, con esto comprobaron que ambos son congruentes, tal como se había previsto en el análisis *a priori*. Pensamos que las herramientas del Geogebra y la función "arrastre" ayudaron a desarrollar su aprehensión operatoria para conducirlos al empleo de propiedades de congruencia y paralelismo.

El grupo en general logró realizar la rotación de los triángulos, en el proceso trasladaron medidas e identificaron la nueva configuración de la figura, además por los procedimientos antes descritos se observa que tienen los conocimientos matemáticos, pero la diferencia radica en que muy pocos lograron justificar con una argumentación deductiva.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo – Parte A

El profesor Gustavo responde que la nueva figura es otro paralelogramo $IFGJ$ (ver figura 55), lo que no estaba previsto en el análisis *a priori*. Creemos que tal afirmación se debe porque la percepción tiende a interpretar primero las figuras conocidas, tal como lo afirma Duval.

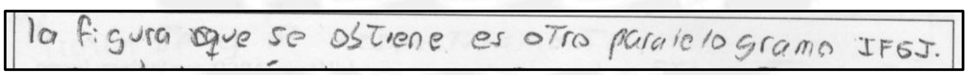

la figura que se obtiene es otro paralelogramo IFGJ.

Figura 55: Discurso – Actividad 3 – Parte A – Profesor Gustavo

Para responder la segunda pregunta, señala que recurre la herramienta "compás" para trasladar medidas. Estas acciones caracterizan a las aprehensiones operatorias como se muestra en la figura 56.

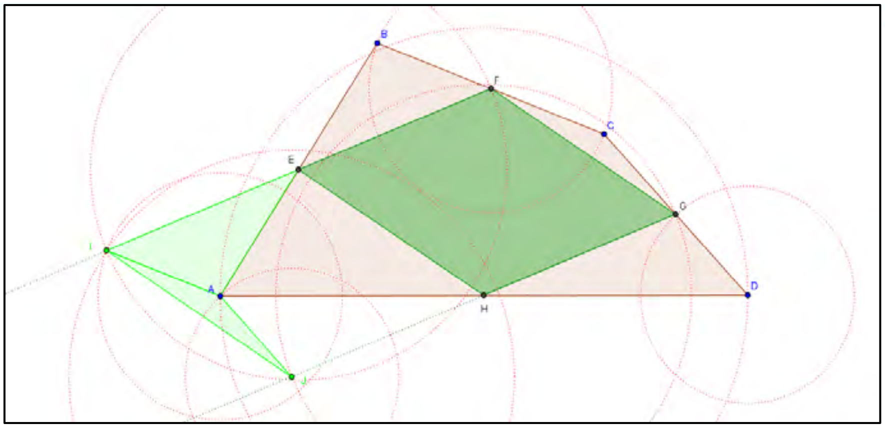


Figura 56: Representación figural – Actividad 3 – Profesor Gustavo

En su discurso señala que con ayuda de la herramienta "compás" confirma la congruencia de los lados del triángulo FCG y AIJ mencionando el caso LLL. Lo que nos indica, que la herramienta "compás" del Geogebra, empleada para la construcción es un mediador semiótico porque facilitó la traslación y comparación de distancias con el fin de relacionar triángulos congruentes, desarrollando la articulación entre su aprehensión perceptiva y operatoria. Pero no indica necesariamente que produce razonamientos cuyas expresiones podrían parecer pasos deductivos, en realidad son argumentaciones porque se apoya en propiedades de congruencias aplicando mediciones, es necesario señalar los pasos intermedios que lo llevarían a esta conclusión.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Fernando – Parte A

El profesor Fernando realiza la rotación de los triángulos BEF y GHD, para ello utiliza la herramienta "ángulo dada su amplitud" y construye los triángulos F´EA´ y AHG´ según como habíamos previsto en el análisis *a priori*. Estas acciones caracterizan a las aprehensiones operatorias. (Ver figura 57).

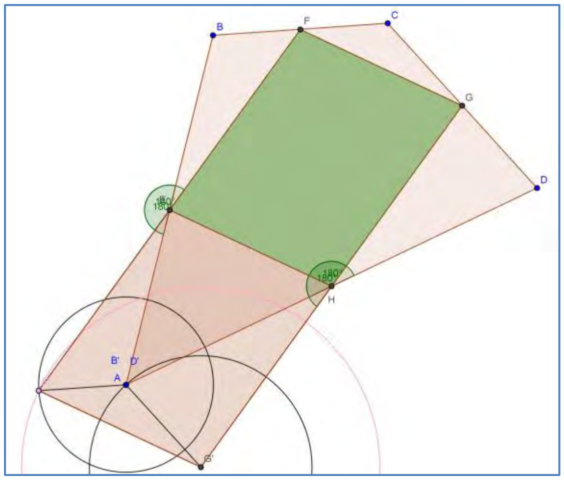


Figura 57: Representación figural – Actividad 3 – Parte A – Profesor Fernando

Y para reubicar el triángulo FCG usa la herramienta "compás" para trasladar distancias y verificar mediante la percepción que los lados del triángulo F´AG´ sean congruentes con los lados del triángulo FCG, tal como lo describe en su discurso desarrollado en la pantalla del Geogebra (ver figura 58).

La nueva figura que se formará es el cudrilátero FGG`F`.

Para la reubicación se procedió:
Realizar la rotación de ángulos de 180° con la herramienta ángulo dada su amplitud,
primero con centro de giro en el unto H y luego con centro de giro en el punto E.

Luego con la herramienta compás trasladamos los radios FC al punto A, CG al punto G`, el FG al punto G`.
Unimos los puntos F`y G`.

Figura 58: Discurso – Actividad 3 – Parte A – Profesor Fernando

Todas estas acciones caracterizan a las aprehensiones operatorias de reconfiguración. Concluye que la nueva figura es un paralelogramo cuyos vértices son FGF´G´, en este caso pensamos que su percepción lo lleva a identificar según Duval una figura conocida.

Observamos que el profesor Fernando ha coordinado su aprehensión perceptiva y operatoria, y su discurso es congruente con las operaciones realizadas en la figura. Pensamos, tiene los conocimientos matemáticos pero no ve necesario demostrarlo, su argumento se sustenta en la medición, en este caso pensamos que para el profesor lo toma como algo evidente.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia – Parte A

La profesora Lidia realiza la rotación de los triángulos empleando las herramientas “ángulo dada su amplitud” y “compás” para construir los triángulos F´EA y AHG´, como habíamos previsto en el análisis *a priori* (ver figura 59).

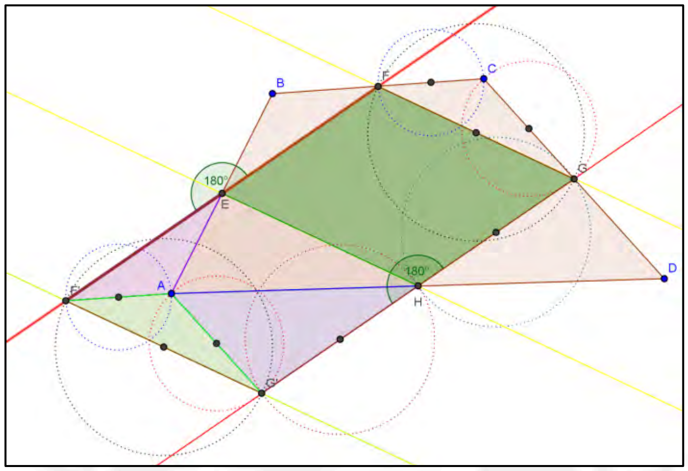


Figura 59: Representación figural – Actividad 3 – Parte A – Profesora Lidia

Para reubicar el triángulo FCG, utilizó la herramienta “compás” para trasladar las medidas de los lados del triángulo FCG y verificar la congruencia con los lados del triángulo F´AG´. Estas acciones caracterizan a las aprehensiones operatorias. Su discurso es congruente con las operaciones realizadas en la figura. (Ver figura 60).

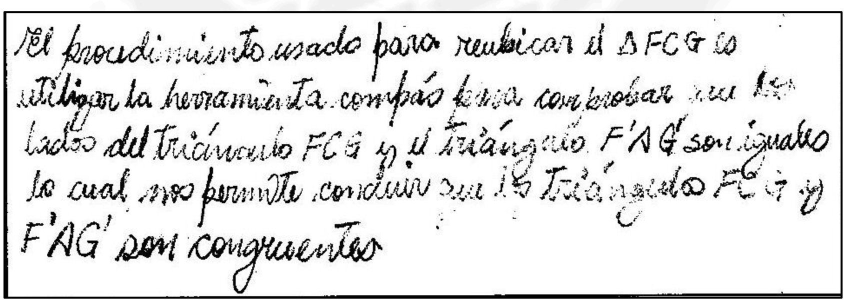

El procedimiento usado para reubicar el ΔFCG es utilizar la herramienta compás para comprobar que los lados del triángulo FCG y el triángulo F'AG' son iguales lo cual nos permite concluir que los triángulos FCG y F'AG' son congruentes

Figura 60: Discurso 1 – Actividad 3 – Parte A – Profesora Lidia

La profesora Lidia identifica a la nueva figura como un paralelogramo. (Ver figura 61).

La nueva figura que se formará si se reubica el Trián-
gulo FCG es un cuadrilátero que se conoce como
paralelogramo

Figura 61: Discurso – Actividad 3 – Parte A – Profesora Lidia

Observamos que las herramientas: “Ángulo dada su amplitud” y “compás” del Geogebra, cumplieron su papel mediador porque facilitó desarrollar la percepción y el tratamiento sobre las figuras. Su discurso es congruente con las operaciones realizadas en el registro figural, articulando su aprehensión perceptiva y operatoria, en cuanto a su discursivo es descriptivo porque se basa en las operaciones realizadas en la figura. Por lo que su visualización está en proceso.

PARTE B

Objetivo: Relacionar la nueva figura y el cuadrilátero EFGH.

A continuación, la actividad 3, parte B en la figura 62:

- **Arrastre el vértice A y responda: ¿Cuál es la relación que existe entre la nueva figura y el cuadrilátero EFGH? Explique.**

Figura 62: Actividad 3 – Parte B

Análisis *a priori* - Parte B

Se espera que los quince profesores a partir de la función “arrastre” puedan manipular directamente sobre la construcción, creemos que mediante la percepción podrán identificar propiedades de paralelismo entre sus lados, Leung lo llama “arrastre de prueba”, para verificar visualmente que los cuadriláteros EFGH y EHG_1F_1 mantienen la misma configuración en forma y tamaño, lo que atenuará la percepción para discriminar las subconfiguraciones a partir de su aprehensión operatoria de reconfiguración (simetría central) realizadas a los triángulos EBF (S), FCG (P) y GDH (G), cuyas configuraciones se mueven con un giro de 180° a las regiones **S1** y **Q1,** respectivamente, lo que los llevará a identificar un paralelogramo constituido por la unión de las regiones S1, P1 (triángulo F_1AG_1), Q1 y R (triángulo AEH). (Ver figura 63).

Todo este procedimiento será sustentado con el siguiente razonamiento deductivo: los triángulos $\Delta EBF \cong \Delta EAF_1$, $\Delta HGD \cong \Delta AHG_1$ son congruentes por propiedad de simetría axial, por lo que lados $\overline{EF} \cong \overline{EF_1}$, $\overline{GH} \cong \overline{HG_1}$ y por propiedad de transitividad los segmentos $\overline{F_1G_1} \cong \overline{EH} \cong \overline{FG}$ son congruentes.

$FG \parallel EH \parallel F_1G_1$ y $F_1F \parallel G_1G$ donde E es punto medio del segmento F_1F y H punto medio de GG_1. Por lo tanto: $EFGH \cong EHG_1F_1$

Los profesores justificarán que la relación entre la nueva figura y el cuadrilátero EFGH es 1.

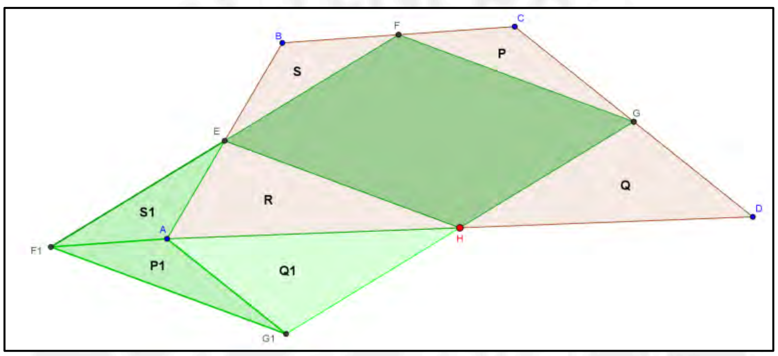


Figura 63: Análisis *a priori* - Actividad 3 – Parte B

Observamos que la figura cumple su función heurística, porque podrán aplicar modificaciones mereológicas y posicionales en articulación con un discurso matemático. Y el Geogebra cumplirá su papel mediador entre la percepción sobre las figuras y las propiedades. Por lo que, creemos que si siguen estos procedimientos van a visualizar.

Análisis *a posteriori* de la producción de los profesores- Parte B

Del grupo de quince profesores, siete profesores responden que $EHG_1F_1 \cong FGHE$, pensamos que en un primer momento al aplicar el arrastre, amplificando o contrayendo la figura, desarrollaron sus aprehensiones perceptivas. Como habíamos previsto en el análisis *a priori*, los profesores sustentaron sus aprehensiones operatorias con propiedades de una rotación de 180°, al identificar lados congruentes como los segmentos:

$$\overline{EF} \cong \overline{EF_1}, \qquad \overline{GH} \cong \overline{HG_1}, \qquad \overline{F_1G_1} \cong \overline{EH} \cong \overline{FG}$$

Sus proposiciones partieron de unidades figurales de dimensión 1 para justificar que los cuadriláteros EFGH y EHG_1F_1 son congruentes. Estas acciones evidencian coordinaciones entre su aprehensión operatoria y discursiva, en este grupo hubo dos profesores que usaron rectas paralelas para demostrar la congruencia de los cuadriláteros EFGH y EHG_1F_1, lo que se había previsto en el *a priori*. Creemos que hay buena articulación de sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, porque sus tratamientos se encadenan con un razonamiento deductivo, la articulación entre sus aprehensiones los conducirán a la visualización.

Otro grupo de seis profesores identificaron como nueva figura al cuadrilátero FGG_1F_1, y no a la figura EHG_1F_1. Pensamos desde la perspectiva de Duval, que al identificar las figuras por superposición, privilegiaron visualmente al cuadrilátero FGG_1F_1 porque es una figura conocida, y no a identificar las subfiguras o formas que conforman este cuadrilátero. Observamos también que no lo sustentan con un discurso, solo se guían de lo que perciben, asociando las subfiguras en su mente al efectuar un arrastre de prueba. Finamente mencionan que la relación es de 2 a 1. Es posible que no argumenten porque creen que no es necesario, Duval lo describe como lo “evidente” porque “eso se ve en el dibujo” y la cuestión se asume como verdadera, también puede ser como consecuencia de que los profesores solo movilizan sus conocimientos en el registro figural.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo - Parte B

El profesor Gustavo comienza el análisis de la figura desde su percepción porque menciona que: *la figura IFGL es un paralelogramo cuya área es igual al doble del área del paralelogramo EFGH*, esta respuesta no estaba prevista en el *a priori*. Luego, con ayuda del arrastre creemos haya identificado propiedades invariantes de paralelismo, congruencia y relación de medidas de sus lados. En su discurso sustenta la congruencia de los paralelogramos EFGH y IEHL en base a la relación de medidas de una figura rotada 180° como fue previsto en el análisis *a priori*, comprobando que el paralelogramo EFGH es congruente con el paralelogramo IEHL, aunque en un inicio se esperaba que su respuesta se refiera a la relación de los cuadriláteros EFGH e IEHL, pero los pasos deductivos expuestos son los esperados. Lo que implica que el profesor Gustavo realizó una articulación de su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva, finalmente concluye que el paralelogramo IFGL tiene el doble de área del paralelogramo EFGH, su respuesta desde la perspectiva de Duval nos indica que tiende a percibir entre un conjunto de figuras superpuestas una figura conocida. En su discurso desarrollado en la pantalla del Geogebra, muestra los pasos deductivos y tratamientos en la representación (ver figura 64), que ya fueron observados en un párrafo anterior:

la figura ILGF es un paralelogramo cuya área es igual al doble del área del paralelogramo EFGH
los segmentos IE y EF tienen la misma medida (por rotacion del triángulo EBF)
los segmentos FG y IL tienen la misma medida (por reubicacion del triangulo FCG)
los segmentos HG y HL tienen la misma medida (por rotacion del triangulo HGD)
el segmento EH une los puntos medios de IF y LG
por lo tanto el paralelogramo IEHL es congruente con el paralelogramo EFGH
el paralelogramo EEHL tiene la misma área que el paralelogramo EFGH.
por lo tanto el area del paralelogramo ILGF es el doble del área del paralelogramo EFGH

Figura 64: Discurso – Actividad 3 – Parte B – Profesor Gustavo

En este caso la articulación de sus aprehensiones lo conducirá a alcanzar una articulación global, es decir una coordinación de registros figural y discursivo, de acuerdo a lo desarrollado por el profesor Gustavo podemos afirmar que ha desarrollado la articulación de sus aprehensiones.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Fernando - Parte B

El profesor Fernando menciona lo siguiente: *la relación que existe entre la nueva figura y el cuadrilátero EFGH es que su área es de 2 a 1*, pensamos se refiere como nueva figura al cuadrilátero FGG´F´. Creemos que solo ha relacionado las unidades figurales de dimensión 2, al no dar mayor sustento. En este caso es posible que el profesor solo se haya guiado de su aprehensión perceptiva y modificaciones mereológicas realizadas en su mente, lo que nos indica que su visualización está en proceso.

Análisis *posteriori* de la producción de la profesora Lidia - Parte B

La profesora Lidia identifica la nueva figura como el cuadrilátero F´FGG´, su respuesta no corresponde a lo que habíamos previsto *a priori*, la profesora percibe una figura conocida en una superposición de figuras y lo relaciona con el cuadrilátero EFGH. Además identifica el lado FF´ como el doble del lado EF del cuadrilátero EFGH, esta afirmación determina la relación 2 a 1, también señala la congruencia de los lados F´G´ y FG y el paralelismo de F´G´// EH // FG y F´F//G´G, tal como se muestra en la figura 65.

> La nueva figura que es el cuadrilátero F'FGG' y el cuadri-
> látero EFGH son dos paralelogramos el lado F'F de la
> nueva figura es el doble del lado EF del cuadrilátero EFGH,
> además los lados F'G' del nuevo cuadrilátero es igual al
> lado FG del cuadrilátero EFGH, además F'G' //EH//FG y
> F'F//G'G.

Figura 65: Discurso – Actividad 3 – Parte 4 _ Profesora Lidia

Observamos en su discurso la relación de sus unidades figurales de dimensión 1 porque asocia los segmentos con propiedades de paralelismo. Además percibe al cuadrilátero F´FGG´ como nueva figura se esperaba identifiquen a EHG´F´, desde la perspectiva de Duval, hay una articulación entre su aprehensión operatoria y discursiva por ello afirmamos que la articulación de la profesora se encuentra a nivel global, la interacción de estos procesos discursivos y operatoria le permitirá visualizar.

PARTE C

Objetivo: Justificar la relación entre la áreas del cuadrilátero ABCD y EFGH.

A continuación se muestra la actividad 3 – Parte C. (ver figura 66)

- **¿Cuál es la relación entre las áreas del cuadrilátero ABCD y EFGH? Justifique su respuesta.**

Figura 66: Actividad 3 – Parte C

Análisis *a priori* - Parte C

Pensamos que los quince profesores a partir de la justificación realizada en la parte B confirmen la relación:

$$\square EFGH = \triangle F_1EA + \triangle EAH + \triangle AHG_1 + \triangle F_1AG_1$$

Para concluir que el área del cuadrilátero $EFGH \cong EHG_1F_1$.

Con lo anterior se espera que los profesores reconfiguren el cuadrilátero EHG_1F_1 al asociar los triángulos: F_1EA con EBF, F_1AG_1 con FCG y AHG_1con HGD.

Pensamos que al coordinar la aprehensión perceptiva y operatoria, realicen la siguiente equivalencia, con el siguiente discurso:

$$\square ABCD = \underbrace{\triangle AEH + \triangle EBF + \triangle FCG + \triangle GHD}_{\square EFGH} + \square EFGH$$

Al desarrollar su aprehensión operatoria, esperamos realicen lo siguiente:

$$\square ABCD = \square EFGH + \square EFGH \leftrightarrow \square ABCD = 2\ x\ \square EFGH$$

Al coordinar sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas concluirá matemáticamente:

$$\frac{1}{2} x \square ABCD = \square EFGH\ .$$

Expresando su respuesta en lenguaje natural "La relación de áreas de los cuadriláteros ABCD y EFGH es de 2 a 1".

Al realizar los profesores una conexión entre los tratamientos figurales y pasos deductivos, podemos confirmar que su articulación es global y por lo tanto es posible que visualicen la relación de áreas.

Análisis *a posteriori* de la producción de los profesores - Parte C

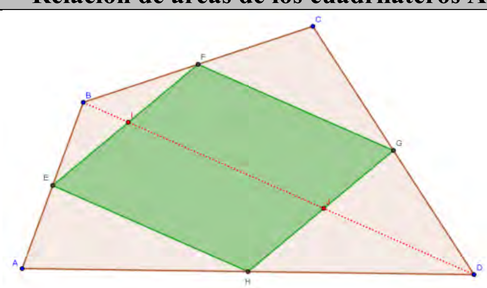
De los quince profesores, cinco profesores justifican según lo previsto en el análisis *a priori*, ya sea sustentando con propiedades de congruencia y paralelismo, y otros reconfigurando las regiones, respondiendo que la relación del área del cuadrilátero ABCD y EFGH es de 2 a 1. Lo que nos indica que la figura cumplió su función heurística permitiendo realizar reconfiguraciones en la mente, evidenciando una articulación entre aprehensiones operatorias y discursivas. Otros 7 profesores solo responden que la relación es de 2 a 1, pensamos que solo la reconfiguración fue mental porque no lo sustentan, es posible que en sus prácticas se guíen solo de lo visual. Y tres profesores no lograron responder como se esperaba, dos de ellos señalaron que las áreas ABCD y EFGH son iguales, creemos que los profesores neutralizaron su percepción del cuadrilátero EFGH y solo se guiaron de las áreas externas, los triángulos: $EBF, FCG, GDH\ y\ AEH$ a este cuadrilátero, según Duval ciertas unidades de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2 o tienen dificultades para discriminar figuras por superposición.

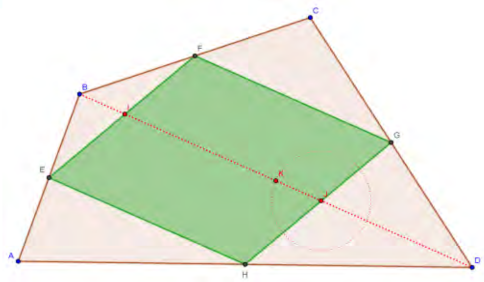
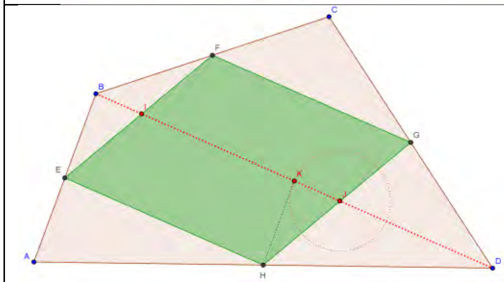
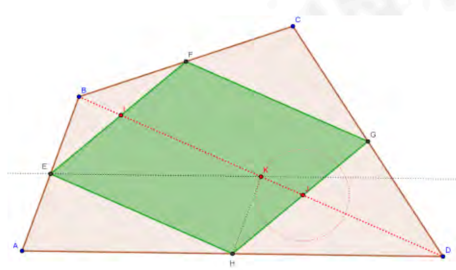
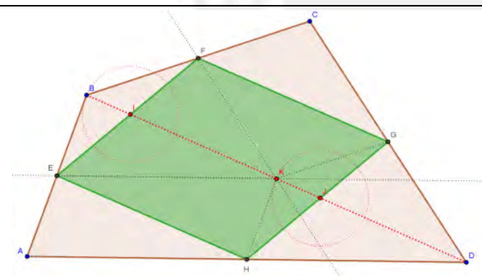
Y otro profesor señaló "el área del cuadrilátero ABCD no llega a ser el doble del cuadrilátero EFGH" aunque respondió las preguntas anteriores, sin sustento matemático guiado de su percepción, en este último guiándose nuevamente de su percepción no logró identificar la relación de las áreas. Lo que nos indica que la percepción puede favorecer o inhibir en algunos casos, según lo afirma Duval.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo – Parte C

El profesor Gustavo realizó el análisis de la figura con un procedimiento no previsto en el análisis *a priori*, se observa una articulación entre sus aprehensiones, porque realizó trazos sobre el cuadrilátero EFGH, dividiéndolo en subconfiguraciones (triángulos y paralelogramos), sustentado sus aprehensiones operatorias con propiedades de paralelismo, para luego en su discurso relacionar por congruencia los triángulos EBF, FCG, GDH y AEH externos al cuadrilátero EFGH con las subconfiguraciones del cuadrilátero EFGH, En la Cuadro 16 se muestra al detalle los tratamientos realizados sobre la figura:

Cuadro 16: Representación figural – Actividad 3 – Profesor Gustavo

Relación de áreas de los cuadriláteros ABCD y EFGH – Justificación del profesor Gustavo	
	En su discurso menciona lo siguiente: *al trazar la diagonal BD corta al paralelogramo EFGH en los puntos I y J*, esta acción se identifica como aprehensión operatoria de modificación mereológica.

	Usando la herramienta "compás" traslada la distancia BI trazando una circunferencia con centro en J, luego halla la intercepción con la diagonal BD. Los procedimientos nos indican perceptivamente la traslación del triángulo EBI porque el segmento JH es congruente con el segmento EI.
	Traza el segmento KH, paralelo al segmento AE y EB. Con este último trazo el triángulo EBI fue trasladado a la región HKJ. Esta acción nos indica que está desarrollando su aprehensión operatoria.
	Describe en su discurso lo siguiente: *se traza la paralela a AD que pasa por E y corta a la diagonal BD en el punto K*, con el trazo de la recta y el segmento HK se obtiene el paralelogramo AEKH. Con la articulación de sus aprehensiones perceptivas y operatorias, relaciona subfiguras congruentes como los triángulos: EBI y HKJ; AEH y EHK, para luego afirmar lo siguiente: *El área del triángulo ABD es el doble del cuadrilátero EJKH.*
	Luego realiza otras modificaciones mereológicas equivalente a la realizada en el triángulo ABD. Traza la recta FK (paralela al segmento CD) y el segmento KG, obteniendo otro paralelogramo FCGK. Nuevamente relaciona subfiguras en el triángulo BCD, para concluir con la siguiente afirmación: *el área del cuadrilátero ABCD es el doble del cuadrilátero EFGH.*

Creemos que las modificaciones mereológicas no se hubieran podido realizar sin un conocimiento matemático, el profesor muestra una articulación entre sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, por lo que su articulación es global y ha logrado visualizar la relación entre los cuadriláteros ABCD y EFGH. Lo que observamos es que el profesor Gustavo ha mejorado progresivamente su sustento discursivo con respecto a las actividades anteriores.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Fernando – Parte C

El profesor Fernando identifica a los cuadriláteros ABCD y EFGH como figuras que tienen la misma área tal como lo afirma en su discurso (ver figura 68).

La relación entre las áreas del cuadrilátero ABCD y EFGH es que son iguales.

Figura 67: Discurso – Actividad 3 – Parte C – Profesor Fernando

Pensamos que el error se origina porque neutraliza su percepción del cuadrilátero EFGH y centra su atención en los triángulos EBF, FCG, HDG y EAH, y no considera al cuadrilátero ABCD como la unión de subfiguras. Creemos también desde la perspectiva de Duval que estas figuras de dimensión 2 sobresalen sobre otras figuras de la misma dimensión por tal motivo considera a los triángulos externos y no al cuadrilátero EFGH. Observamos que las acciones realizadas por el profesor son evidencia que su aprehensión perceptiva tiene mayor preponderancia, por lo que no discrimina las partes del todo y viceversa. De acuerdo con Duval, para no permanecer solo en la percepción, es importante generar actividades en el registro figural que se inicia con la identificación de la unidades figurales y luego efectuar modificaciones posibles de las partes con el todo.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia - Parte C

La profesora Lidia afirma lo siguiente: *el área del cuadrilátero EFGH es la mitad del cuadrilátero ABCD*. Luego partiendo de la congruencia de los cuadriláteros EFGH y F´EG´H (justificada en la Parte B) sustenta su afirmación, tal como se muestra en la figura 68:

El área del cuadrilátero EFGH es la mitad del cuadrilátero ABCD, el paralelogramo EFGH y el paralelogramo F'EG'H son congruentes, por lo tanto tienen el mismo área, además: $\Delta F'AG \cong \Delta FCG$; $\Delta F'EA \cong \Delta EBF$ lo cual nos permite afirmar que el área del paralelogramo F'FGG' es igual al área del cuadrilátero ABCG, pero como el paralelogramo F'FGG' contiene dos veces al paralelogramo EFGH, entonces podemos concluir que el área del cuadrilátero EFGH es la mitad del área del cuadrilátero ABCD

Figura 68: Discurso – Actividad 3 – Parte C – Profesora Lidia

Creemos que mentalmente reconfigura los triángulos del cuadrilátero F´EG´H sobre las regiones congruentes del cuadrilátero ABCD y lo adiciona al cuadrilátero EFGH, porque la profesora muestra en su discurso la conexión entre los tratamientos de la figura y los pasos deductivos de un prueba, identificando los triángulos congruentes $\Delta F\acute{A}G \cong \Delta FCG$ y $\Delta F\acute{}EA \cong \Delta EBF$, por lo que podemos afirmar que hay una congruencia entre la aprehensión operatoria y discursiva, lo que nos lleva a pensar que está visualizando la relación de los cuadriláteros.

Actividad 4

Objetivo: Justificar la congruencia de dos unidades figurales, los segmentos $\overline{LP}$ y $\overline{PQ}$.

La actividad 4, se muestra en la figura 69

Abra el archivo **Actividad_4** y muestre (utilizando herramientas y recurso del Geogebra) que los segmentos LP y OP tienen la misma longitud (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida del software).

Figura 69: Actividad 4

Se muestra a continuación la situación propuesta en la Actividad 4, representada en el software Geogebra: (Ver figura 70).

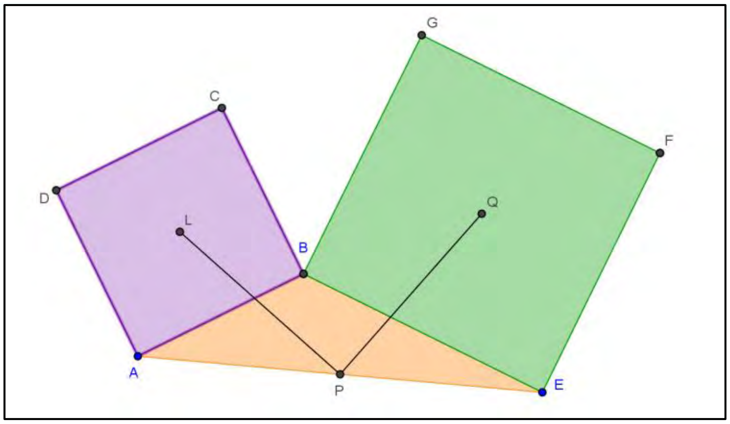
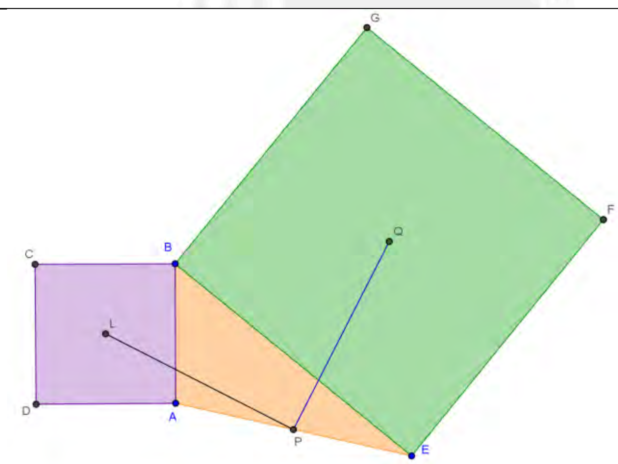


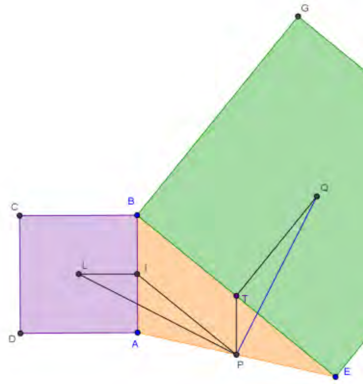
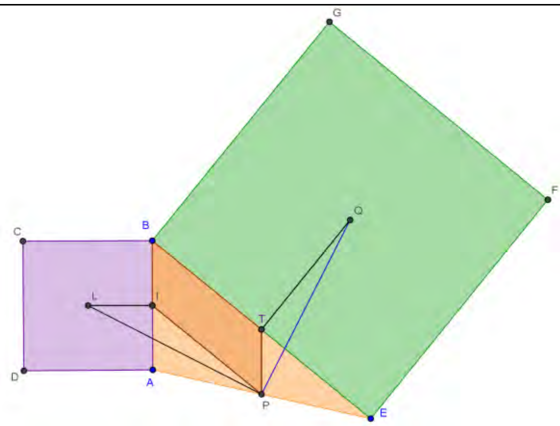
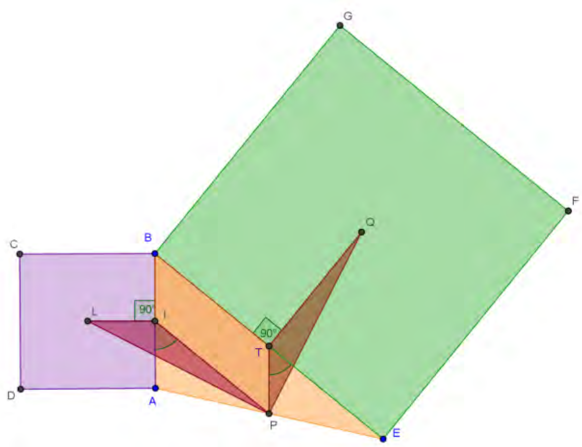
Figura 70: Actividad 4-Representación

Análisis *a priori*

Conjeturamos que los 15 profesores haciendo uso del recurso geogebra y de sus herramientas podrán realizar las siguientes acciones, tal como se demuestra en la Cuadro 17:

Cuadro 17: Análisis *a priori* – Actividad 4

Análisis *a priori* – Actividad 4	
	El análisis de la figura parte de las diferentes configuraciones que pueden obtener con el uso de la función “arrastre” del geogebra e identificar la presencia de propiedades conocidas e invariantes como: P punto medio del segmento AE, el ángulo que forman los segmentos LP y PQ es invariante, la invariante de las configuraciones de las figuras ABCD y BEFG, y buscar nuevas propiedades, proyectando modificaciones mereológicas para responder la cuestión de la actividad.

	Pensamos a partir de sus aprehensiones operatorias realizarán modificaciones mereológicas como: marcar los puntos medios I y T del lado AB y BE respectivamente, para unir cada punto con el punto P. A partir de la percepción que tienen de la unión de los puntos PLI y PTQ, trazan los segmentos LI y QT para obtener dos triángulos.
	Para relacionar los lados BI y PT con el teorema de los puntos medios por lo que BIPT es un paralelogramo, entonces los segmentos $BI \cong TP$ y $BT \cong IP$. Las acciones evidencian una articulación entre la aprehensión operatoria y discursiva.
	Pensamos al identificar T como punto medio del lado BE e I como punto medio del lado AB, podrán relacionar por congruencia los segmentos BT y TQ, y BI y LI. Entonces $LI \cong TP$ e $IP \cong TQ$. Como BIPT es un paralelogramo, entonces los ángulos ∢AIP≅∢PTE, los ángulos ∢AIL=90° y ∢ETQ=90°, entonces los triángulos ⊿LIP≅⊿PTQ por el caso LAL. Por lo tanto LP≅PQ. Esperamos que los profesores al realizar los procedimientos descritos puedan visualizar la cuestión solicitada de la actividad.

En este caso, el encadenamiento de subfiguras de dimensión 2, no conducen a la solución del problema, la articulación de la aprehensión perceptiva y operatoria, comienzan con la identificación de unidades figurales de dimensión 0 y 1, por lo tanto la actividad discursiva requiere, para la explicación de cada paso, efectuar un cambio de dimensión para aplicar las definiciones y teoremas.

A partir de las unidades figurales de los triángulos LIP y PTQ justificarán la congruencia de los segmentos LP y PQ, Esperamos logren visualizar a partir de la articulación de sus aprehensiones y con el apoyo del Geogebra a través de la función arrastre tal como lo afirma Leung pueda facilitar diferentes puntos de vista relacionados a una misma figura, con el fin de identificar propiedades, invariantes y nuevas propiedades.

Análisis *a posteriori* de la producción de los profesores

Observamos en los procedimientos de los quince profesores lo siguiente, seis de ellos emplearon la circunferencia para trasladar distancias y verificar la congruencia de los segmentos LP y PQ, pensamos aquí, ignoraron la indicación de la pregunta "muestre (utilizando herramientas y recurso del Geogebra) que los segmentos LP y OP tienen la misma longitud" y se dejaron llevar por su percepción pues en la actividad se señalaba que la representación mostraba dos segmentos congruentes.

Otros cinco profesores también utilizaron la circunferencia para verificar la congruencia de los segmentos, además unieron los puntos L y Q para formar un triángulo, trazar su altura y mediatriz, al verificar que los dos últimos trazos estaban superpuestos, afirmaron que el triángulo LPQ era un triángulo isósceles de lados congruentes LP y PQ. Pensamos guiados por su percepción los profesores vieron mentalmente una configuración triangular por la posición de los segmentos LP y PQ por lo que realizaron una secuencia de modificaciones mereológicas centradas en los segmentos, distrayendo su atención en otras unidades figurales. Creemos que se debe porque los segmentos (dimensión 1) sobresalían sobre un conjunto de figuras superpuestas, por tal motivo se centraron en el análisis de estas unidades figurales. Otro factor es la fuerte congruencia entre el enunciado y la figura, según Duval (2004) puede constituir un obstáculo para la resolución del problema, esto sucede cuando las unidades figurales a tomar en cuenta no son visibles en la figura.

Finalmente, un grupo de cuatro profesores justificaron de acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori*, al realizar trazos adicionales como segmentos y rectas, no realizaron ninguna medición y solo sustentaron con un discurso deductivo en base a propiedades de congruencia y paralelismo.

Análisis *a posteriori* de la producción del profesor Gustavo

Con respecto al procedimiento del profesor Gustavo pensamos que inicia su análisis realizando el arrastre de la figura como apoyo para identificar propiedades conocidas e invariantes y propiedades desconocidas de la configuración. Producto de la articulación de su aprehensión perceptiva y operatoria, identifica los puntos medios S y T de los lados de los cuadrados ABCD y BEFG para realizar el trazo de sus mediatrices, tal como lo describe en su discurso que se muestra en la figura 71.

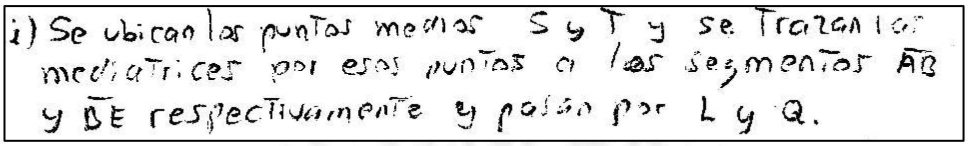

i) Se ubican los puntos medios S y T y se trazan las mediatrices por esos puntos a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$ respectivamente y pasan por L y Q.

Figura 71: Discurso i – Actividad 4 – Profesor Gustavo

El profesor Gustavo coordina su aprehensión operatoria y discursiva porque fundamenta los tratamientos realizados en la figura, tal como se muestra en la figura 72.

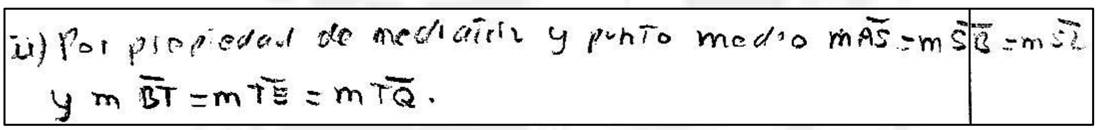

ii) Por propiedad de mediatriz y punto medio $m\overline{AS} = m\overline{SB} = m\overline{SL}$ y $m\overline{BT} = m\overline{TE} = m\overline{TQ}$.

Figura 72: Discurso ii – Actividad 4 – Profesor Gustavo

Luego realiza otras aprehensiones operatorias mereológicas, como se muestra en la figura 73.

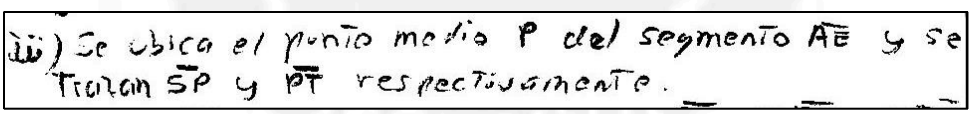

iii) Se ubica el punto medio P del segmento $\overline{AE}$ y se trazan $\overline{SP}$ y $\overline{PT}$ respectivamente.

Figura 73: Discurso iii – Actividad 4 – Profesor Gustavo

Con las modificaciones mereológicas realizadas, el profesor relaciona unidades figurales de dimensión 1, en este caso segmentos. Además cuando menciona lo siguiente: *como SP une puntos medios entonces SP = BT = TE*, pensamos se refiere al teorema de los puntos medios, para relacionar la igualdad de los segmentos SP, BT y TE, tal como lo describe en la figura 74.

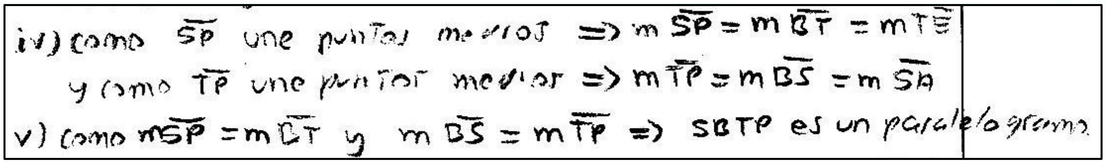


Figura 74: Discurso iv y v – Actividad 4 – Profesor Gustavo

Producto de la articulación de su aprehensión perceptiva y operatoria relaciona otras unidades figurales de dimensión 1, en este caso segmentos, para fundamentar la congruencia de los triángulos LSP y QTP, como consecuencia responde la cuestión de la actividad 4, tal como se muestra en la figura 75.

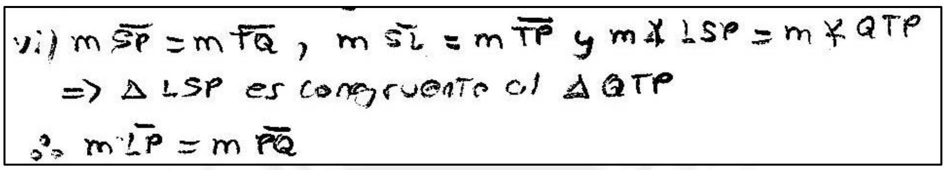


Figura 75: Discurso vi – Actividad 4 – Profesor Gustavo

En la representación figural realizada por el profesor Gustavo, se muestra evidencia de sus aprehensiones, por ejemplo las marcas que relacionan las unidades figurales son muestra de su aprehensión operatoria lo que implica indirectamente un discurso de sus procesos deductivos, tal como se muestra en la figura 76.

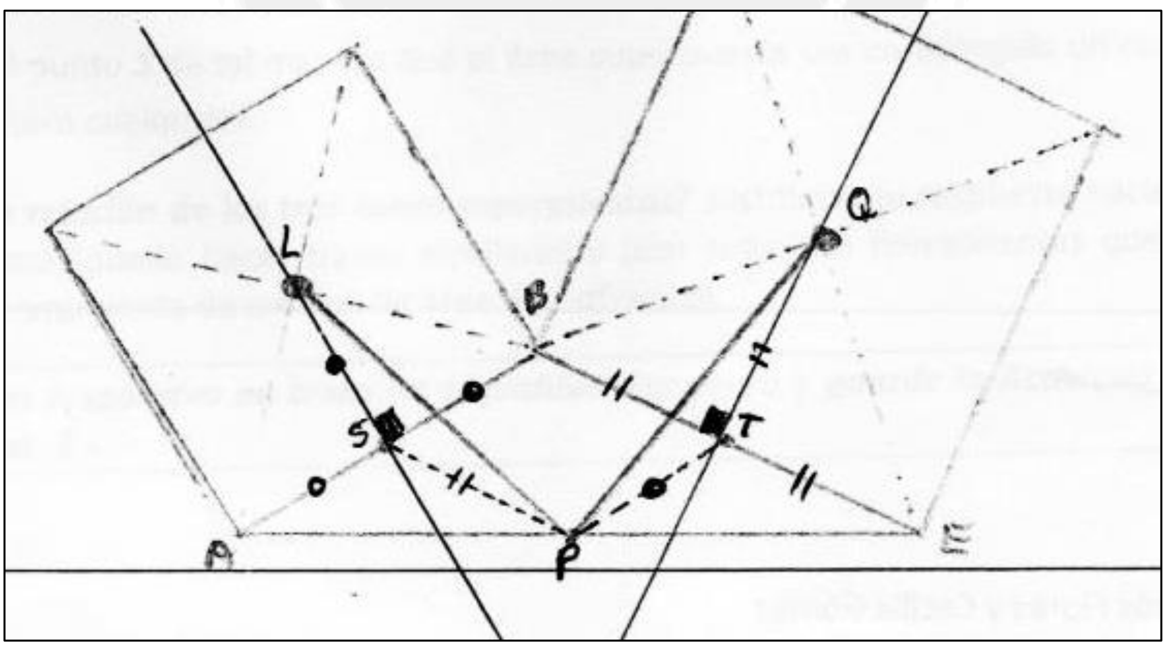


Figura 76: Representación figural – Actividad 4 – Profesor Gustavo

Observamos desde la perspectiva de Duval, el profesor Gustavo en el desarrollo de la actividad ha desplegado una variedad de subfiguras que a simple vista no son inmediatamente perceptibles, lo que implica que ha desarrollado su aprehensión operatoria. Y en su discurso, se evidencia una articulación entre su aprehensión operatoria de la figura e inferencias que movilizan sus conocimientos matemáticos, por lo que el profesor ha logrado una articulación global.

Análisis *posteriori* de la producción del profesor Fernando

Pensamos que los procedimientos del profesor Fernando se inician con modificaciones mereológicas relacionadas a los segmentos LP y PQ, porque distrae su atención en otras unidades figurales. Realiza trazos sobre la figura une con un segmento los puntos L y P para formar un triángulo, mide sus ángulos interiores y sustenta la configuración de un triángulo isósceles LPQ, porque la recta FP representa la altura, mediana y mediatriz del lado no congruente (ver figura 77).

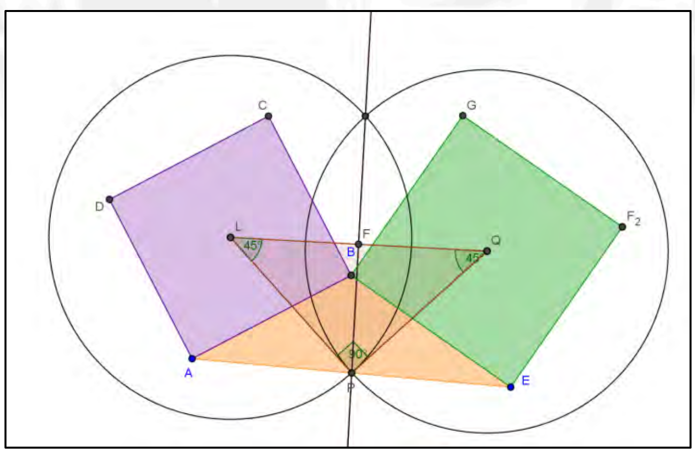


Figura 77: Representación figural – Actividad 4 – Profesor Fernando

Finalmente traza dos circunferencias de radio LP y PQ respectivamente para confirmar una vez más que los segmentos son congruentes. Las acciones del profesor se han dirigido como si solo existieran los dos segmentos, lo que nos confirma que neutralizó las demás representaciones guiándose de la percepción de la figura, relacionó la configuración de los segmentos LP y PQ con una figura conocida, un triángulo. El argumento que plantea se apoya en mediciones y conocimientos previos del triángulo isósceles, como la coincidencia de trazos en la altura y mediatriz del lado no congruente. En la revisión de los procedimientos del profesor, observamos que siempre se apoya en su percepción y en verificar distancias ya sea midiendo o trasladando distancias. En este caso, es necesario desarrollar primero tratamientos en el registro figural para realizar conexiones con el registro discursivo.

Análisis *a posteriori* de la producción de la profesora Lidia

Con respecto al procedimiento de la profesora Lidia utiliza el arrastre como apoyo para identificar propiedades conocidas e invariantes y propiedades desconocidas de la configuración. Pensamos como resultado de la articulación de su aprehensión perceptiva y operatoria, identifica los puntos medios M y N de los segmentos AB y BE, respectivamente, para relacionar unidades figurales, como los segmentos AM, MB y LM, también los segmentos BN, NE y QN, tal como lo demuestra en su discurso. (Ver figura 78).

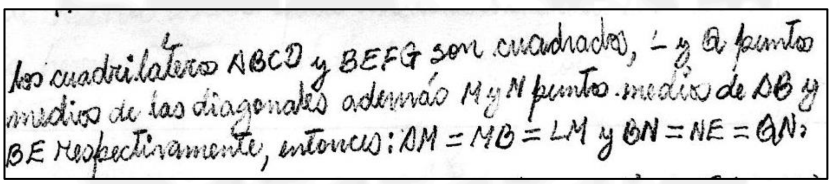

Los cuadriláteros ABCD y BEFG son cuadrados, L y Q puntos medios de las diagonales además M y N puntos medios de AB y BE respectivamente, entonces: AM = MB = LM y BN = NE = QN;

Figura 78: Discurso i – Actividad 4 – Profesora Lidia

A continuación, en su discurso asocia las unidades figurales, creemos con un hecho matemático, el teorema de los puntos medios, porque menciona lo siguiente: *En el triángulo ABE, MP=BN por ser base media (mitad de BE)*, tal como se muestra en la figura 79.

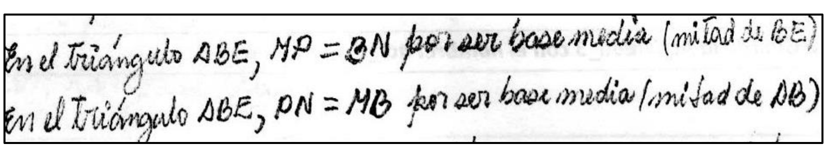

En el triángulo ABE, MP = BN por ser base media (mitad de BE)
En el triángulo ABE, PN = MB por ser base media (mitad de AB)

Figura 79: Discurso ii – Actividad 4 – Profesora Lidia

A partir del procedimiento anterior, señala que MBNP es un paralelogramo, estableciendo la relación entre los lados del cuadrilátero y la congruencia de sus ángulos opuestos. Se observa una articulación entre su aprehensión operatoria y discursiva, para concluir que los triángulos LMP y PNB son congruentes por el caso LAL, y también los segmentos LP y PQ, tal como se muestra en la figura 80.

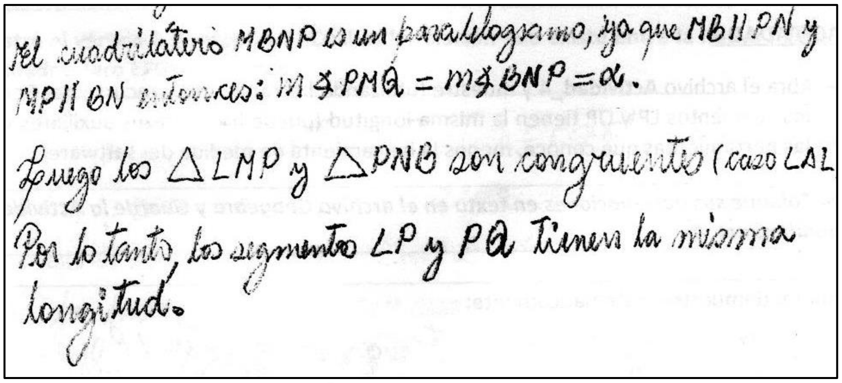

yel cuadrilátero MBNP es un paralelogramo, ya que MB // PN y MP // BN entonces: m∡PMQ = m∡BNP = α.
Luego los △LMP y △PNB son congruentes (caso LAL
Por lo tanto, los segmentos LP y PQ tienen la misma longitud.

Figura 80: Discurso iii – Actividad 4 – Profesora Lidia

En la representación gráfica, se muestra evidencia de su aprehensión operatoria, por las marcas que realiza en los segmentos, tal como se observa en la figura 81.

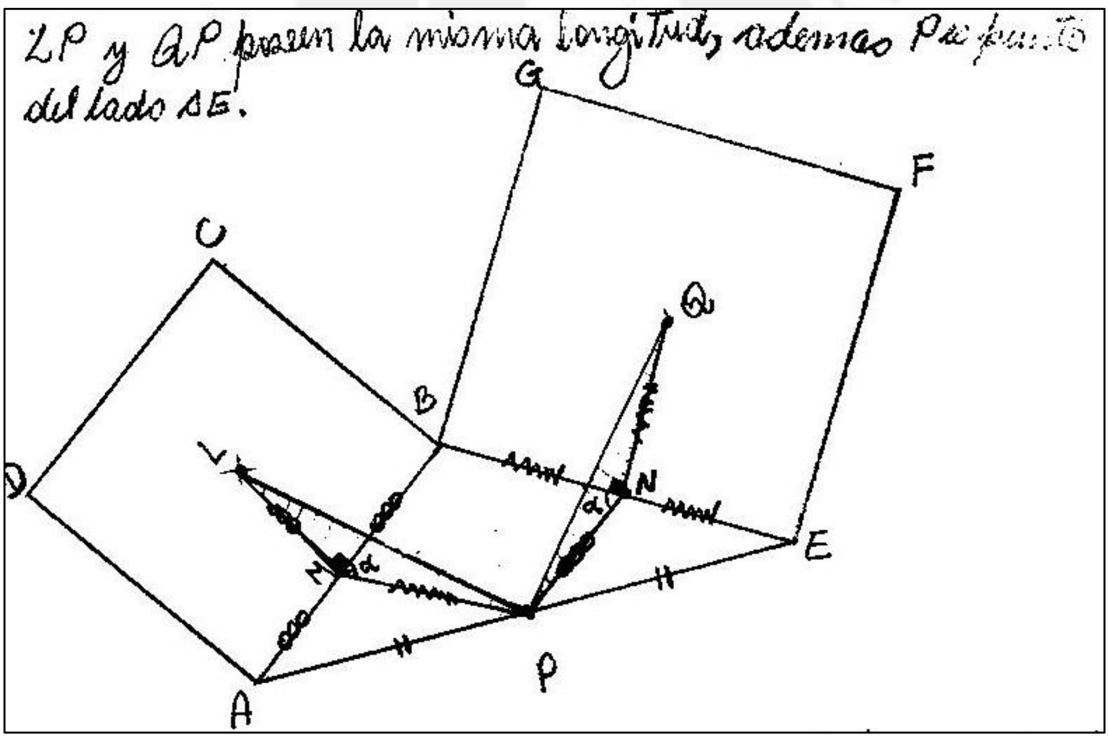


Figura 81: Representación figural – Actividad 4 – Profesora Lidia

Observamos que la profesora Lidia ha desplegado una variedad de subfiguras como los triángulos $\Delta LMP, \Delta QPN$ y el cuadrilátero MPNB, que a simple vista no son perceptibles, lo que implica que ha desarrollado su aprehensión operatoria porque ha relacionado unidades figurales de dimensión 0, los puntos medios M y N de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$, y de dimensión 1, $\overline{LM} \cong \overline{AM} \cong \overline{MB}$ y $\overline{QN} \cong \overline{BN} \cong \overline{NE}$, luego por el teorema de los puntos medios, la congruencia de los segmentos $\overline{MB}\ y\ \overline{PN}$ y $\overline{MP}\ y\ \overline{BN}$. Con la articulación de su aprehensión operatoria y discursiva, lo que implica una coordinación de registros, podemos concluir que su articulación es de nivel global.

Resultados del Experimento

En las actividades de construcción, actividad 1 y 3, las herramientas "polígono", "segmento", "ángulo dada su amplitud" y "compás" del Geogebra facilitó el desarrollo de la aprehensión secuencial, logrando seguir un orden de construcción, lo que significa que los profesores movilizaron sus conocimientos geométricos, como segmentos, polígono, rectas paralelas y rotación de una figura.

En el desarrollo de las actividades 1, 2 y 3, las representaciones figurales cumplieron su función heurística, permitiendo la exploración de sus unidades figurales de dimensión 2.

La función "arrastre" del Geogebra*,* permitió a los profesores dinamizar la figura, para que a través de las diferentes configuraciones puedan reevaluar sus acciones y realizar las modificaciones mereológicas pertinentes.

En la actividad 1, cuyo objetivo fue justificar matemáticamente que el cuadrilátero formado por los puntos medios de un cuadrilátero es un paralelogramo, pudimos darnos cuenta que la mayoría de profesores recurrieron a sus conocimientos previos de la figura, describiendo sus unidades figurales: lados opuestos congruentes y paralelos, y la congruencia de ángulos opuestos. En otros casos recurrieron a realizar mediciones para confirmar la congruencia de lados y ángulos.

En la actividad 2, caso 1, observamos en el protocolo de construcción del Geogebra que dos profesores, emplearon el arrastre de la figura hasta que según su percepción sea un cuadrado, para luego con el trazo de rectas paralelas confirmar su percepción. Lo que corrobora que las herramientas “rectas paralelas” del software es un mediador entre el objeto matemático y su representación.

En la actividad 2, caso 2, se cumplió con el objetivo, los profesores coordinaron sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas. Pensamos porque solo se debieron hacer dos trazos, y poder identificar cuatro triángulos congruentes. Lo que no sucedió en el caso 1, donde solo coordinaron su aprehensión perceptiva y operatoria; pensamos, tal vez orientados por las modificaciones mereológicas que realizaron mentalmente, o porque la pregunta fue tan elemental que no vieron necesario justificarla. En el caso 3, también coordinaron sus aprehensiones perceptivas y operatorias, pero empleando un lenguaje descriptivo en su justificación, el uso de la función “arrastre” facilitó la reconfiguración de la figura.

En la actividad 3, los profesores lograron deducir la relación de áreas de los cuadriláteros ABCD y EFGH, aunque diez profesores de quince, emplearon un lenguaje descriptivo para justificar la relación. Creemos, que favorecieron las indicaciones iniciales para reconfigurar algunas subconfiguraciones del cuadrilátero ABCD. Otro factor, que influyó, es que la situación propuesta no implicó un cambio de dimensión.

Con respecto a la actividad 3, un profesor no estableció la relación 2 a 1 entre las áreas de dos cuadriláteros, pensamos en este caso, anuló mentalmente las subconfiguraciones adyacentes del cuadrilátero EFGH, o no identificó al cuadrilátero ABCD como un todo.

En la actividad 4, donde el objetivo era demostrar la congruencia de dos segmentos que se intersecan en uno de sus extremos, la mayoría de los profesores se guio solo de su percepción, optando solo por medirlos o confirmar la congruencia de sus medidas empleando la herramienta “compás”. Consideramos, se debió a que los elementos a analizar estaban a primera vista, lo que de acuerdo a Duval se tiende a percibir los elementos que se encuentran a “primera vista” o “lo conocido”. Otro grupo, también guiado por su percepción, relacionaron los dos segmentos como parte de la configuración de un triángulo isósceles, completaron la configuración y describieron sus propiedades. También pensamos, que las dificultades se presentaron porque primero debieron identificar unidades figurales de dimensión 1, segmentos, diferente a la dimensión de la configuración inicial, según Duval se tiende a reconocer las subfiguras, triángulos y cuadriláteros, de igual dimensión que la representación inicial. Lo que nos indica que la figura no cumplió su función heurística, pensamos debido a que las modificaciones mereológicas (trazos) se realizaron desde una dimensión menor que la figura. También puede ser porque hay una fuerte congruencia entre el enunciado y la organización perceptiva de la figura.

Con respecto a los profesores Gustavo y Lidia, sus procedimientos fueron mejorando en el orden que se dieron las actividades, en el sentido de realizar mejores coordinaciones entre sus aprehensiones.

Observamos que la mayoría de profesores tienen los conocimientos matemáticos necesarios (conocimiento de propiedad de paralelismo, teorema del punto medio y congruencia de triángulos), que se evidenció en el registro figural. En todas las actividades se solicitó justificar sus procedimientos, la mayoría optó por una versión discursiva, y muy pocos por una versión deductiva.

CONSIDERACIONES FINALES

Tomando en cuenta los antecedentes que presentamos, así como los informes que incluimos en la justificación de la investigación, podemos afirmar que los estudiantes de secundaria muestran dificultades al resolver problemas sencillos de Geometría, debido a que hay interferencias entre el objeto matemático y su representación, se da mayor importancia a lo visual que a lo conceptual, hay una pobre conexión entre el registro figural y discursivo y tienden a identificar las propiedades de una figura cuando se encuentra en posición estándar. Además, la importancia del uso de herramientas tecnológicas, permiten interpretar en un ambiente dinámico todas las propiedades que caracterizan a una figura geométrica, lo que no se podría hacer en hoja de papel. Estas informaciones son relevantes, porque nos permitieron ver la importancia de realizar esta investigación con profesores de secundaria, ya que son ellos los que van trabajar directamente con los estudiantes, esperamos que nuestra investigación sea un aporte al cambio en la enseñanza de la Geometría, especialmente en el estudio de las nociones de Cuadriláteros, incluyendo para ello herramientas tecnológicas como es el Geogebra, debido a que actualmente estas herramientas se están empleando, cada vez más, en la enseñanza de la Geometría en los colegios de nivel Básica Regular. Por otro lado, los aspectos históricos fueron fundamentales porque nos permitieron conocer, cuál ha sido la evolución y desarrollo de estas nociones de Cuadriláteros a través de la historia, referencias obligatorias en el estudio del Cuadrilátero, la clasificación realizada por Euclides abre otras posibilidades de investigación.

A continuación, en las presentes consideraciones finales, presentamos aspectos que juzgamos importantes en la tesis como: marco teórico y metodológico utilizado, los principales resultados de la parte experimental y nuevas perspectivas de investigación.

Con relación al marco teórico y metodológico

Consideramos que la teoría de Registros de Representación Semiótica y su ampliación al proceso de Visualización, sustentado por Duval (1999) nos ayudó a comprender que las representaciones de los objetos geométricos no tienen un tratamiento específico y que depende de las habilidades visuales y de los conocimientos matemáticos, donde es indispensable el aprendizaje por separado de las operaciones que se efectúan en cada registro. Los tratamientos realizados como la reconfiguración es una operación fundamental en el registro figural relacionados con la posibilidad de modificaciones que surgen de las partes con el todo y estas modificaciones están vinculadas a justificaciones matemáticas, así mismo respecto a la lengua natural, es importante hacer la diferenciación entre un discurso de tipo argumentativo o deductivo, como afirma el autor ello implica diferentes formas de funcionamiento cognitivo del razonamiento. Todos estos factores nos permitieron analizar la contribución del proceso de visualización mediado por el geogebra para la formación de profesores de nivel secundario en el estudio de cuadriláteros a través una secuencia de actividades, donde despliegan sus conocimientos previos, en la articulación de sus aprehensiones secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva. Por otro lado, empleamos la metodología de investigación la Ingeniería Didáctica de Artigue et al (1995), porque nos ofreció subsidios para orientar nuestra investigación. Desarrollamos las cuatro fases que la metodología propone: Análisis preliminar, concepción, y el análisis *a priori,* experimentación y análisis *a posteriori* y validación. Los estudios preliminares nos dieron referencia sobre las interferencias entre el significado y significante, las dificultades que presentan los profesores para realizar el cambio de registro y la importancia de la utilización de los AGD que posibilita una distinción entre lo visual y geométrico, según lo afirma Laborde y Capponi (1994). Las actividades planteadas en la experimentación fueron diseñadas para observar y analizar el desarrollo de las coordinación entre los tratamientos figurales y discursivos, y las posibles causas de sus interferencias, aunque en general se evidenció que dicha coordinación está en proceso y que es necesario desarrollarla por separado, tal como recomienda Duval (2004). Se empleó como mediador el Geogebra, sus herramientas y la función arrastre, para analizar cómo influye en el desarrollo de las aprehensiones de los profesores para visualizar el objeto matemático Cuadriláteros. Además, prever las posibles acciones, analizar sus respuestas y validarlo con nuestro análisis *a priori.*

Con relación a la pregunta de investigación y al objetivo general

A continuación presentamos los principales resultados de la investigación. Con respecto a la pregunta: *¿Cómo un estudio de cuadriláteros que desarrolla el proceso de visualización mediado por el Geogebra contribuye en la formación de profesores de nivel secundario?*

Nuestra investigación respondió a la pregunta, porque los profesores en el desarrollo de la secuencia de actividades han evidenciado la articulación de sus aprehensiones en forma progresiva lo que significa que han desarrollado el proceso visualización, por ejemplo: en la primera actividad, la mayoría de los profesores tuvo un desenvolvimiento de las aprehensiones perceptivas y operativas, con ayuda de las herramientas y la función arrastre lograron identificar las propiedades del paralelogramo, al relacionar sus unidades figurales, para luego describirlo empleando un lenguaje discursivo y en otros casos un lenguaje formal. En la segunda actividad, que consta de tres casos se observó lo siguiente: en el primer caso, la mayoría de los profesores para verificar su percepción, recurrieron a las herramientas del Geogebra para relacionar las unidades figurales de dimensión 0 y 1 para luego realizar trazos sobre la figura e identificar la relación de unidades figurales de dimensión 2, lo que implica que hubo una articulación de sus aprehensiones perceptivas y operatorias, otros solo se apoyaron en su percepción; en el segundo caso, todos los profesores, a partir de las modificaciones mereológicas realizadas en la figura, relacionaron las subfiguras con propiedades de congruencia de triángulos, estableciendo una articulación entre sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, aquí se evidencia claramente que hubo visualización con respecto a la relación de áreas; en el tercer caso, los profesores realizaron reconfiguraciones, sustentado con un discurso que lo asocia a propiedades de congruencia, en esta actividad la función arrastre ayudó a establecer relaciones entre unidades figurales de dimensión 2. Podemos decir que, los profesores participantes, en la segunda actividad evidenciaron el desarrollo de sus aprehensiones perceptivas, las operatorias y en menor grado las discursivas. La actividad favoreció el desarrollo de sus aprehensiones, sobretodo de las operatorias. En la tercera actividad, todos los profesores desarrollan su aprehensión secuencial, a partir de instrucciones, desplegaron sus conocimientos matemáticos, con ayuda de las herramientas del Geogebra, comprobando que seguir instrucciones no es una actividad que genere problemas al profesor. Luego, guiados por su percepción, al identificar figuras superpuestas, realizan modificaciones mereológicas de reconfiguración, que lo sustentan con un discurso, en algunos casos con un discurso que describe la reconfiguración del cuadrilátero y otros con un discurso formal sustentado con propiedades de congruencia y paralelismo. Finalmente, en la cuarta actividad, por el tratamiento que se debió realizar fue de mayor complejidad, aunque, pocos profesores lograron demostrarlo formalmente, debido a que implicó el análisis de la figura a partir de sus unidades figurales de dimensión 1 y 0. Se observó que hubo un desarrollo de las aprehensiones perceptivas, es posible que haciendo uso del arrastre hayan identificado propiedades conocidas y desconocidas de la configuración, lo que permitió la relación de las unidades figurales, y realizar modificaciones mereológicas, a la par, con un discurso que muestra una articulación de sus aprehensiones. Por lo tanto, concluimos que la visualización de cuadriláteros se ha dado, mediado por las herramientas y la función arrastre del Geogebra.

Con respecto al cumplimiento de nuestro objetivo general, *analizar cómo un estudio de cuadriláteros que desarrolla el proceso de visualización mediado por el Geogebra contribuye en la formación de profesores de nivel secundario*, podemos decir lo siguiente:

Se logró alcanzar el objetivo general porque los profesores, lograron seguir indicaciones de construcción, al emplear las herramientas del Geogebra para limitar las propiedades de la figura que representaban, lo que nos indica que han desarrollado su aprehensión secuencial. En el análisis de las propiedades de la figura lograron identificar y relacionar unidades figurales de dimensión 0, 1 y 2, realizando trazos adicionales como rectas y segmentos, favoreció la función “arrastre” para relacionar unidades figurales de dimensión 2 y la herramienta “compás” para trasladar distancias y determinar la congruencia de dos o más segmentos, lo que nos indica que articularon su aprehensión perceptiva y operatoria. Con respecto a la justificación solicitada fue mejorando conforme se iba desarrollando la secuencia de actividades, sus argumentos en algunos casos con mayor dominio la descriptiva y en otros una argumentación deductiva, recurriendo al teorema de puntos medios y congruencia de triángulos, lo que nos muestra que hubo una articulación de sus aprehensiones y evidenciaron conocimientos matemáticos. Otro aspecto que se observó fueron los tratamientos realizados al presentar su justificación en el papel, realizaron marcas en las unidades figurales de dimensión 1 de la figura, lo que muestra la articulación de sus aprehensiones perceptivas y operatorias, el discurso de los tratamientos pueden ser interpretado a partir de la relación que establecen las marcas. Los profesores que recurrieron a este procedimiento, llegaron a justificarlo formalmente. Por otro lado, la mayoría de profesores, en el desarrollo de las actividades 2 (Caso 3) y 3, en la que se debían relacionar las áreas de dos figuras, lo lograron, a partir de las modificaciones mereológicas de reconfiguración, asociando las subfiguras con propiedades de congruencia de triángulos, lo que permitió analizar el desarrollo de las coordinaciones entre sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas. En la última actividad, algunos profesores presentaron dificultades en el desarrollo del problema debido a que presentaba dos figuras superpuestas, de diferentes dimensiones, la cuestión de la actividad fue analizar la relación de las medidas de dos segmentos. Se observó que los participantes solo centraron su atención en estas unidades figurales, y no percibieron la relación de las figuras de dimensión 2 con los segmentos. Por otro lado, otro grupo logró demostrarlo matemáticamente, lo que nos lleva a concluir que hubo un desarrollo de las aprehensiones que los conducirá a la visualización y a la resolución del problema.

Finalmente, nuestra investigación nos ayudó a comprender las acciones del profesor cuando justifica, como desarrolla sus procesos deductivos, que dificultades presentan en la articulación de sus aprehensiones en el registro figural y como el ambiente de geometría dinámica, Geogebra, influye en el desarrollo de la visualización. Además, observamos si el profesor desarrolla sus aprehensiones podrá crear situaciones del objeto matemático que propicie en sus estudiantes el desarrollo de esta habilidad.

Perspectivas futuras

Consideramos necesario realizar otras investigaciones referentes al papel que juegan esta importantísima actividad cognitiva en formación de profesores como:

Investigar el desarrollo de la articulación de las aprehensiones, en el estudio de los cuadriláteros con profesores de nivel primario, mediado por el Geogebra.

Investigar el proceso de visualización en el estudio de poliedros, con profesores de nivel secundario, mediado por ambientes de geometría dinámica (Cabri, Geogebra, etc.)

Investigar cómo en una formación de profesores que enseñan Geometría influye el uso de un ambiente de tecnología orientada a potenciar la visualización de representaciones en la Geometría plana y espacial.

REFERENCIAS

Almeida, I, Santos, M. C. (2007). A visualização como fator de ruptura nos conceitos geométricos. XVIII *Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico*–GRAPHICA. Artigos. Paraná.

Almeida, M. E. (1998). Novas tecnologias e formação de professores reflexivos. *Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino* ENDIPE, pp.2-3. Recuperado de http://endipe.pro.br/site/

Artigue, M. Douady, R., Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Grupo Editorial Iberoamérica.

Almeida, M. E. (1998). Educação e Informática de professores: os computadores na escola. São Paulo: Cortez, Recuperado de www.divertire.com.br/educacional

Boyer, C. (2007). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1era ed.).Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2003). *Voir en mathématiques*. Matemática educativa. *Aspectos de la investigación actual. Centro de Investigación y Estudios Avanzados* IPN, pp. 41-47.

Duval, R. (2004). *Semiósis y pensamiento humano*. Myriam Vega Restrepo (Trad.). Cali Colombia: Merlin I.D.

Duval, R. (2009). *Semiosis e pensamento humano*: *Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira-São (Trad.). Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas/organização*. Marlene Alves (Trad.). I. ed. San Paulo: PROEM, 2011.

Eves, H. (1969). Estudio de las geometrías, tomo II. México: Hispano- Americana

Flores y Moretti (2006). As Figuras geométricas suporte para a aprendizagem em geometria: um estudio sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat,* 1(1), 5-13.

Gravina, M.A. (2001). *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético – dedutivo*. (Tesis doctoral en Informática en Educación). Universidad Federal de Rio Grande del Sur, Porto Alegre, Brasil.

Laborde, C., Capponi, B. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-geomètre. *Em Aberto*, 14(62). Recuperado de http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/search/results

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Relime*, 9(3), 361-382. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2168369

Leung, A. (2012). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. *12th International Congress on Mathematical Education.* COEX, Seoul, Korea.

Levy, P. A. (2001). Conexão Planetária: *o mercado, o ciberespaço, a consciência*. São Paulo: 34. Recuperado de http://www.unitau.br/unindu/artigos/pdf386.pdf

Maioli, Marcia. (2002). *Uma Oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros.* (Tesis de Maestría em Educación Matemática). Pontifícia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Perú, Ministerio de Educación. (2005). Unidad de Medición de la Calidad. *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe de resultados Formación matemática: Tercer grado y Quinto de secundaria.* Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe

Perú: Ministerio de Educación (2013). PISA 2012: *Primeros resultados. Informe Nacional del Perú*. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc

Ponte, A., Ribeiro, S., José, M., (2012). O uso do computador como ferramenta de mediação pedagógica no Sistema municipal de educação. *The 4th International Congress on University*. Taubate, SP. Brazil. Recuperado de http://www.unitau.br/unindu/artigos/pdf386.pdf

Rendón, A. (2010). Elementos de Geometría Métrica. pp. 11-16 Recuperado el http://todogeometria.wordpress.com/2011/05/29/breve-historia-de-la-geometria/#comment-87

Salazar, J. V. F. (2009). *Génesis Instrumental y Cabri 3D*. (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontifícia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Valente, J.A. (1999). Análisis de los diferentes tipos de software usados en la Educación (versión en español). O Computador na Sociedade do Conhecimento, pp. 89-96. Recuperado de http://www.nied.unicamp.br/oea

Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Tomo 1, parte C. Madrid: Aguilar, S.A.

ANEXOS

PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS

Nombres y apellidos: ____

Fecha: 03/10/14

ACTIVIDAD 1

Utilice las herramientas del Geogebra y construya un cuadrilátero ABCD cualquiera. Luego, marque los puntos medios $E, F, G\ y\ H$ de los lados $AB, BC, CD\ y\ DA$, respectivamente, y construya los segmentos $EF, FG, GH\ y\ HE$.

Ahora mueva el punto A y responda en la hoja ***¿cuál es la naturaleza del cuadrilátero EFGH?*** Justifique matemáticamente su respuesta.

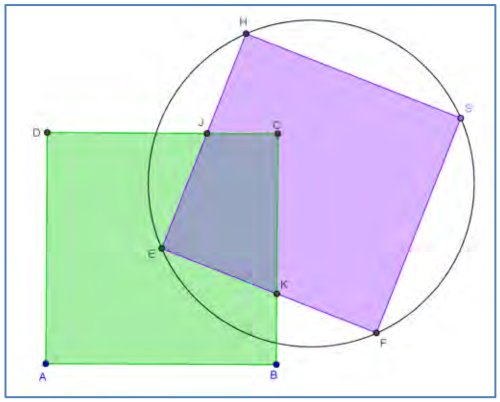
ACTIVIDAD 2

Abra el archivo **Actividad_2** en la que los cuadrados ABCD y EFSH son congruentes y el cuadrado EFSH que está inscrito en una circunferencia, gira alrededor del centro del cuadrado ABCD.

Manipule el punto ***S*** de tal manera que la intersección de dos figuras forme la configuración de un triángulo, un cuadrado y un cuadrilátero cualquiera.

¿Cuál es la relación del área de intersección de las figuras con el área del cuadrado ABCD? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida de área del software).

Archivo: **Actividad_2.ggb**



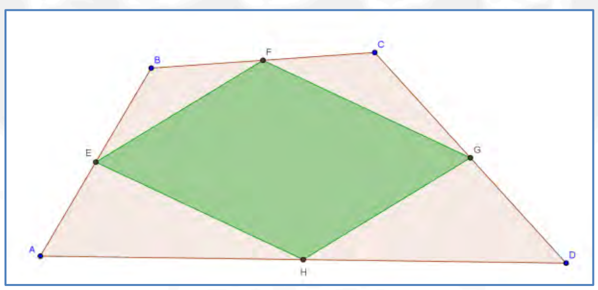
✍ ***Coloque sus respuestas en texto en el archivo Geogebra y guarde la Actividad_2 con el nombre: act_2***

ACTIVIDAD 3

💻 Abra el archivo **Actividad_3** y usando todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de rotación del Geogebra (nota: puede hacer trazos auxiliares):

- Realice la rotación de 180° del triángulo $\triangle HDG$ con centro de giro en el punto H.
- Realice la rotación de 180° del triángulo $\triangle EBF$ con centro de giro en el punto E.
- Responda en la hoja:
  - **¿Cuál es la nueva figura que se formará si reubica el triángulo $\triangle FCG$?**
  - **¿Qué procedimientos utilizó para realizar la reubicación? Explique.**

Archivo: Actividad_3.ggb



- **Arrastre el vértice A y responda: ¿Cuál es la relación que existe entre la nueva figura y el cuadrilátero EFGH? Explique.**

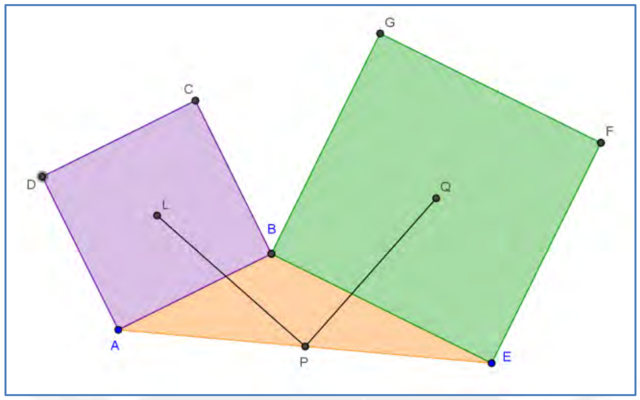
- **¿Cuál es la relación entre las áreas del cuadrilátero ABCD y EFGH? Justifique su respuesta.**

💾 ***Guarde la Actividad_3 con el nombre: act_3***

ACTIVIDAD 4

💻 Abra el archivo **Actividad_4** y muestre (utilizando herramientas y recurso del Geogebra) que los segmentos LP y OP tienen la misma longitud (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida del software).

Archivo: Actividad_4.ggb



✍ ***Coloque sus observaciones en texto en el archivo Geogebra y Guarde la Actividad_4 con el nombre: act_4***

Ahora, demuestre matemáticamente: