

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA



PONTIFICIA
**UNIVERSIDAD
CATÓLICA**
DEL PERÚ

**DETERMINACIÓN DE LOS FACTORES GEOMÉTRICOS
UTILIZADOS EN LOS CÁLCULOS DE FLEXIÓN Y CONTACTO
DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS MEDIANTE SIMULACIÓN
NUMÉRICA**

**Tesis para optar el Título de Ingeniero Mecánico,
que presenta el bachiller:**

Israel Díaz Velazco

ASESOR: Dr. Rosendo Franco Rodríguez

Lima, Noviembre del 2014



RESUMEN

En el mundo de hoy, el engranaje es una pieza fundamental para la transmisión de potencia mecánica en todo tipo de máquinas; su estudio ha sido de vital importancia para dimensionarlo en función de la capacidad de carga del juego de engrane, por esta razón tanto su geometría como el cálculo de los esfuerzos actuantes y permisibles han sido estandarizados por organismos internacionales, siendo los principales motivos de falla, la picadura en el flanco del diente generada por el esfuerzo de contacto y la rotura en la raíz del diente producto del esfuerzo de flexión. La presente tesis busca obtener un factor geométrico unificado para esfuerzos de contacto y otro para esfuerzos de flexión de engranajes cilíndricos mediante simulación numérica. Para ello, se emplearon las siguientes metodologías: 1) Se realizó el cálculo analítico de los esfuerzos actuantes a partir de las normas ISO 6336 y DIN 3990 solo teniendo en cuenta los factores que se utilizan para compensar la aproximación de la geometría, así como cualquier característica geométrica del juego. 2) Se elaboró el modelo de elementos finitos de los engranajes cilíndricos, de diente recto y de diente helicoidal, con la ayuda del modelo geométrico entregado por una macro, la cual contiene las ecuaciones paramétricas que definen la geometría real del diente. Para luego efectuar la comparación de resultados, de donde se encuentra que el esfuerzo de contacto y de flexión actuante, según norma, presenta más de un 80% y más de un 25% de sobredimensionamiento respectivamente. Asimismo, se pasa a determinar el factor geométrico unificado con el propósito de lograr soluciones más económicas y próximas a la realidad. Además, se ha podido apreciar que en las normas técnicas se utilizan algunos factores para compensar aspectos geométricos no contemplados en sus expresiones de cálculo básicas. De esta manera se introduce en el cálculo la influencia del ángulo de hélice, del factor de recubrimiento, del espesor del diente, del punto de aplicación de la carga. Un ejemplo claro es que el efecto del ángulo de hélice genera que las superficies en contacto sean conos truncados y no cilindros como plantea la norma, es por ello que luego se tiene que realizar una compensación mediante el factor de ángulo de hélice.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

TÍTULO : DETERMINACIÓN DE LOS FACTORES GEOMÉTRICOS UTILIZADOS EN LOS CÁLCULOS DE FLEXIÓN Y CONTACTO DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA

ÁREA : Diseño # 273

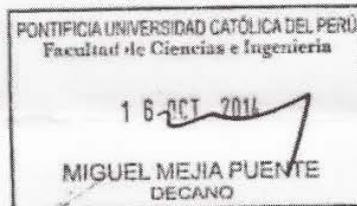
PROPUESTO POR : Dr. Rosendo Franco Rodríguez

ASESOR : Dr. Rosendo Franco Rodríguez

TESISTA : Israel Díaz Velazco

CÓDIGO : 20087102

FECHA : 14 de octubre de 2014



DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS:

La transmisión de potencia mecánica en la industria se realiza, en su gran mayoría, haciendo uso de engranajes. Por esta razón tanto su geometría como el cálculo de los esfuerzos actuantes y permisibles han sido establecidos por normas internacionales. Asimismo, todo ello ha conducido a que numerosos investigadores y autores se especialicen en el tema. Muchos especialistas reconocen que el cálculo de engranajes según normas conlleva al sobredimensionamiento de los mismos, ya que entre otros aspectos las normas no tienen en cuenta la geometría real del diente y el cálculo es aproximado. En el cálculo de los esfuerzos actuantes estas aproximaciones se tratan de compensar con diversos factores, dentro de los cuales se encuentra un número considerable de factores geométricos. En tal sentido el objetivo de la presente tesis es obtener un factor geométrico unificado para el cálculo de los esfuerzos de flexión y otro para el cálculo de los esfuerzos de contacto en engranajes cilíndricos, considerando la geometría real del diente y utilizando la simulación numérica computacional. De esta manera se lograría simplificar los cálculos y a la vez se obtendrían resultados más precisos.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

DETERMINACIÓN DE LOS FACTORES GEOMÉTRICOS UTILIZADOS EN
LOS CÁLCULOS DE FLEXIÓN Y CONTACTO DE ENGRANAJES
CILÍNDRICOS MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA

Introducción

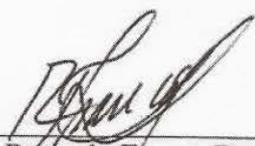
1. Estado del arte de los engranajes cilíndricos.
2. Modelo geométrico del engranaje cilíndrico a partir de un algoritmo automatizado.
3. Análisis de esfuerzos de contacto y de flexión mediante simulación numérica.
4. Obtención del factor geométrico unificado.

Conclusiones

Bibliografía

Anexos

Máximo: 100 páginas


Dr. Rosendo Franco Rodríguez
Asesor





INDICE DE CONTENIDO

RESUMEN.	i
.	
INDICE DE CONTENIDO.	iv
INTRODUCCIÓN.	1
.	
CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS.	3
.	
1.1. Fundamentos teóricos de los engranajes cilíndricos.	3
.	
1.2. Métodos de fabricación.	8
.	
1.3. Corrección de engranajes.	11
1.4. Expresiones analíticas empleadas para la obtención de los parámetros geométricos de un engranaje.	12
.	
1.5. Metodología de cálculo según normas técnicas especializadas e internacionales.	15
.	
1.5.1. Esfuerzo de contacto.	15
1.5.1.1. Expresiones de cálculo según DIN 3990 e ISO 6336.	17
1.5.1.2. Expresiones de cálculo según ANSI/AGMA 2101- C95.	19
1.5.2. Esfuerzo de flexión.	20
1.5.2.1. Expresiones de cálculo según DIN 3990 e ISO 6336.	21
1.5.2.2. Expresiones de cálculo según ANSI/AGMA 2101- C95.	22

1.6.	Determinación de los factores relacionados a la geometría en el esfuerzo actuante según las normas técnicas especializadas e internacionales.	23
1.6.1.	Factores geométricos en el esfuerzo de contacto actuante. . .	24
1.6.1.1.	Factores geométricos según DIN 3990 e ISO 6336. .	24
1.6.1.2.	Factores geométricos según ANSI/AGMA 2101-C95.	26
1.6.2.	Factores geométricos en el esfuerzo de flexión actuante. . . .	26
1.6.2.1.	Factores geométricos según DIN 3990 e ISO 6336. .	26
1.6.2.2.	Factores geométricos según ANSI/AGMA 2101-C95.	28
1.7.	Antecedentes en el cálculo de engranajes mediante simulación. . . .	28
CAPÍTULO 2: MODELO GEOMÉTRICO DEL ENGRANAJE CILÍNDRICO A PARTIR DE UN ALGORITMO AUTOMATIZADO.		31
2.1.	Ecuaciones paramétricas para modelar la geometría de los engranajes cilíndricos.	31
2.1.1.	Ecuación de la Evolvente.	31
2.1.2.	Ecuación de la Evolvente Alargada.	34
2.1.3.	Ecuación de la Trocoide.	35
2.2.	Determinación de la posición crítica para esfuerzo de contacto y para esfuerzo de flexión.	40
2.2.1.	Ubicación crítica para esfuerzo de contacto.	41
2.2.1.1.	El cambio del radio reducido durante el engrane. . .	42
2.2.1.2.	El cambio de la longitud de contacto sumaria durante el engrane.	44
2.2.1.3.	Agrupación de parámetros para determinar el instante crítico de contacto.	46

2.2.2.	Ubicación crítica para esfuerzo de flexión.	48
2.2.2.1.	El cambio de la relación altura-espesor durante el engrane.	49
2.2.2.2.	Agrupación de parámetros para determinar el instante crítico de flexión.	51
2.3.	Macro para la generación del modelo geométrico.	52
 CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE ESFUERZOS DE CONTACTO Y DE FLEXIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA.		56
3.1.	Modelo de elementos finitos.	56
3.1.1.	Propiedades mecánicas del material.	57
3.1.2.	Definición del mallado de elementos finitos.	57
3.1.3.	Condiciones de contacto.	64
3.1.4.	Restricciones.	73
3.1.5.	Condiciones de carga.	73
3.1.6.	Visualización de resultados.	74
3.1.6.1.	Visualización del esfuerzo de contacto.	74
3.1.6.2.	Visualización del esfuerzo de flexión.	76
3.2.	Simulación de los esfuerzos de contacto en engranajes cilíndricos.	77
3.2.1.	Cálculo analítico de 3 variantes.	77
3.2.2.	Simulación numérica de 3 variantes.	78
3.2.3.	Comparación de los resultados obtenidos por simulación con los resultados analíticos.	78
3.2.4.	Determinación de la posición crítica del esfuerzo de contacto con la ayuda de software de simulación.	79
3.3.	Simulación de los esfuerzos de flexión en engranajes cilíndricos.	82

3.3.1. Cálculo analítico de 3 variantes.	82
3.3.2. Simulación numérica de 3 variantes.	83
3.3.3. Comparación de los resultados obtenidos por simulación con los resultados analíticos.	83
3.3.4. Determinación de la posición crítica del esfuerzo de flexión con la ayuda de software de simulación.	83
. . .	
CAPÍTULO 4: OBTENCIÓN DEL FACTOR GEOMÉTRICO UNIFICADO. . .	86
. . .	
4.1. Factor geométrico unificado para esfuerzos de contacto.	86
. . .	
4.1.1. Simulación de múltiples variantes para obtención de curvas. . .	87
. . .	
4.2. Factor geométrico unificado para esfuerzos de flexión.	88
. . .	
4.2.1. Simulación de múltiples variantes para obtención de curvas. . .	88
. . .	
CONCLUSIONES.	90
. . .	
RECOMENDACIONES.	92
. . .	
BIBLIOGRAFÍA.	93
. . .	
ANEXOS.	I
. . .	
ANEXO A: Cálculo analítico del ángulo de giro del piñón a partir de la	

posición de engrane.	I
.	
A.1. Ángulo de contacto global.	I
A.2. Ángulo de contacto del diente.	III
ANEXO B: Elaboración de las curvas a partir de la simulación de múltiples variantes.	V
B.1. Consideraciones generales.	V
.	
B.2. Cálculo analítico.	VI
ANEXO C: Curvas del factor geométrico unificado.	IX
C.1. Factor geométrico unificado para esfuerzo de contacto.	IX
C.2. Factor geométrico unificado para esfuerzo de flexión.	XI
ANEXO D: Tablas de resultados.	XIII

INTRODUCCIÓN

En el mundo actual, no se puede hablar de industria sin mencionar a una máquina, resulta importante esta mención pues ambos conceptos están fuertemente ligados. Por ello, al ser las máquinas piezas fundamentales en la industria, el estudio de sus componentes ha sido de vital importancia para su desarrollo. Uno de los elementos de máquina más significativo en lo que respecta a transmisión mecánica ha sido sin lugar a duda, el engranaje. Su uso masivo ha generado una serie de investigaciones a lo largo de los años, lo cual ha conducido a instituciones internacionales, tales como ISO, AGMA y DIN, normalizar dichos elementos de máquina, no solo desde un punto de vista geométrico sino desde la metodología a emplear para poder calcular la capacidad de carga del juego de engrane.

Cierto grupo de investigadores ha demostrado que los cálculos de los engranajes, según las normas técnicas especializadas, traen consigo un sobredimensionamiento. Una de las principales razones de este problema es el uso de factores para compensar la aproximación de la geometría, ya que los cálculos no se realizan con la geometría real del diente. Frente a este panorama, en la PUCP, se han desarrollado investigaciones donde se ha obtenido no solo las ecuaciones paramétricas que definen la geometría real de engranajes cilíndricos, rectos y helicoidales, sino se ha demostrado con ayuda de software de simulación, en engranajes de dientes rectos para el cálculo de esfuerzos de flexión y en engranajes de dientes helicoidales para el cálculo de esfuerzos de contacto, que lo propuesto por la norma es muy conservador, pues conduce a un diseño que genera un costo innecesario de material.

El presente trabajo busca encontrar de una forma más precisa los factores geométricos utilizados en los cálculos de flexión y contacto de los engranajes cilíndricos. Por ello, se plantean para la tesis los siguientes objetivos:

Objetivo General:

Obtener un factor geométrico unificado para los esfuerzos de flexión y otro para los esfuerzos de contacto de engranajes cilíndricos mediante la aplicación de software de simulación numérica.

Objetivos Específicos:

1. Determinar los factores dependientes de la geometría, para esfuerzos de flexión y contacto, del engranaje a partir de las expresiones de cálculo de las normas técnicas.
2. Revisar las ecuaciones paramétricas halladas en trabajos anteriores que definen la geometría real de engranajes cilíndricos.
3. Revisar y poner a punto las macros desarrolladas en trabajos anteriores para obtener los modelos geométricos de los engranajes cilíndricos.
4. Realizar una batería de simulaciones de parejas de engranajes con la ayuda del software ANSYS MECHANICAL.
5. Obtener un único factor geométrico para esfuerzos de flexión y otro para esfuerzos de contacto.

CAPÍTULO 1

1. ESTADO DEL ARTE DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS.

1.1. Fundamentos teóricos de los engranajes cilíndricos.

Los fundamentos teóricos de los engranajes son importantes para poder entender el funcionamiento de los mismos, son nuestro punto de partida. Por esta razón, en las siguientes líneas se plasman los más relevantes.

1.1.1. Ley de engrane

Para poder entender la importancia de la ley de engrane es fundamental primero definir la relación de transmisión (u), la cual se determina a partir de la relación de la velocidad angular del piñón (ω_1) frente a la velocidad angular de la rueda (ω_2).

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1.1)$$

La relación de transmisión no solo se puede representar mediante una relación de velocidades angulares, sino a través de una relación de diámetros primitivos de ambas ruedas, pues la forma cinemática de representar a la transmisión por engranajes es la de dos ruedas que giran sin deslizamiento, lo cual nos lleva a tener en el punto de contacto, de ambos cilindros, velocidades periféricas iguales, de esta manera se tiene una relación de velocidades angulares inversamente proporcional a los diámetros primitivos de los engranajes.

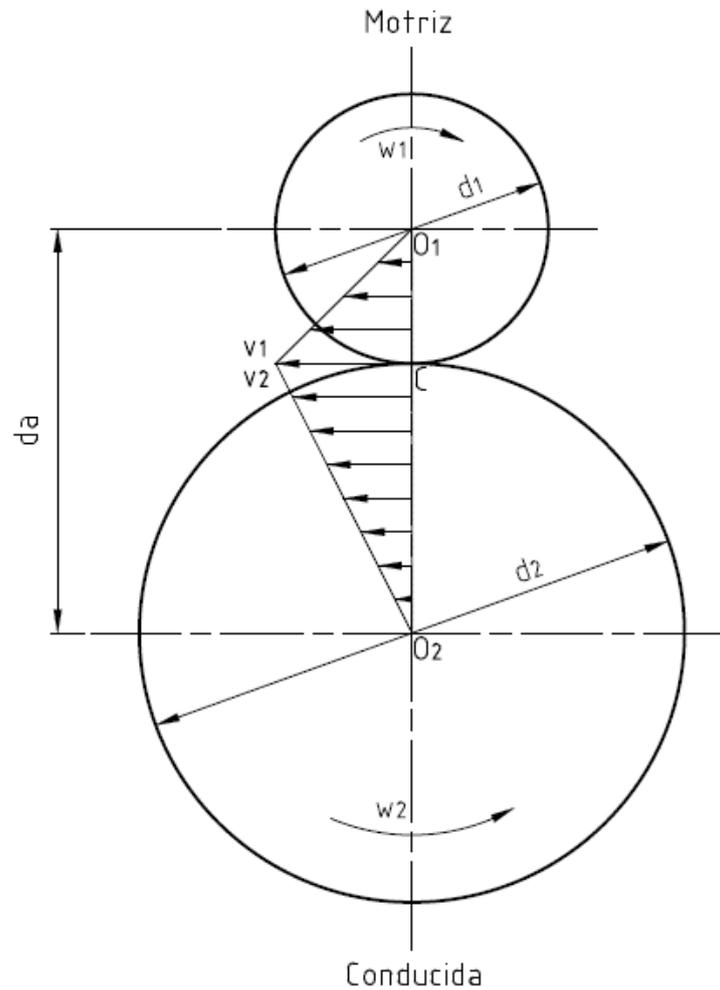


Figura 1-1: Modelo cinemático de una transmisión de engranajes

$$v_1 = \frac{\omega_1 \cdot d_1}{2} \quad (1.2)$$

$$v_2 = \frac{\omega_2 \cdot d_2}{2} \quad (1.3)$$

Como se muestra en la figura 1-1, las velocidades en el punto de contacto son las mismas $v_1 = v_2$, lo cual genera una relación de diámetros primitivos vinculada a la relación de transmisión.

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad (1.4)$$

La ley de engrane señala: “Para que la relación de transmisión entre dos perfiles se mantenga constante, es necesario y suficiente que la normal a los perfiles en el punto de contacto pase en todo instante por un punto fijo de la línea de centros” (Pintor s/a: 8.9). Los perfiles que cumplen esta condición se les denomina perfiles conjugados. Por otro lado, es importante señalar la importancia de una relación de transmisión constante, pues de no serlo se presentan inconvenientes en el funcionamiento del mismo, como son fluctuaciones en las velocidades angulares que generan vibraciones.

1.1.2. Línea de engrane

La línea de engrane comprende los distintos puntos que ocupa el punto de contacto entre los dientes del par de engranajes desde el inicio hasta el fin del contacto. El diente de un engranaje presenta dos flancos de posible contacto, lo cual nos lleva a tener dos posibilidades de orientación para la línea de engrane, en función del sentido de giro y del engranaje motriz (Zabalza 2010: 32), como se muestra en la figura 1-2.

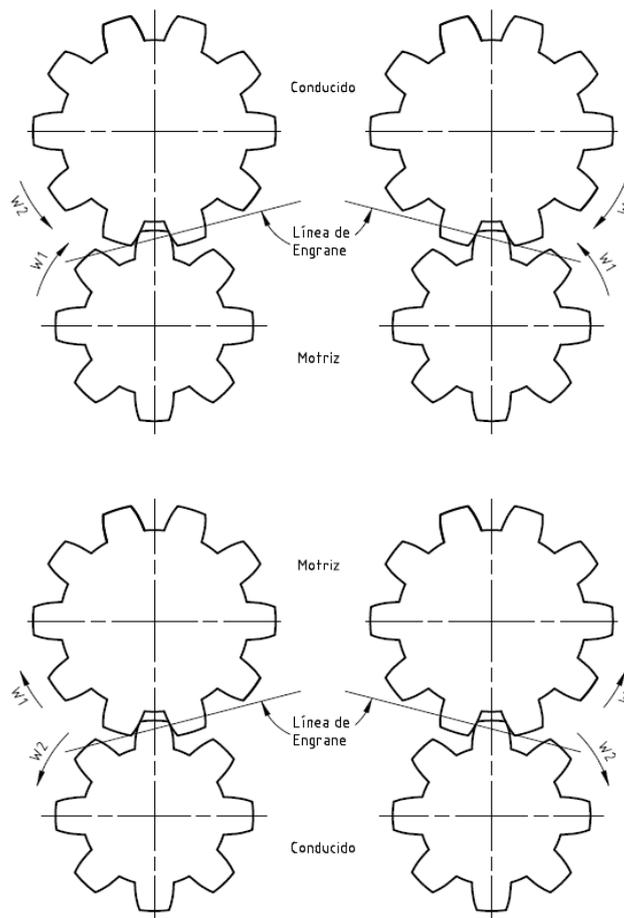


Figura 1-2: Línea de engrane

1.1.3. El perfil del diente

El perfil del diente de un engranaje está formado por dos curvas, una curva evolvente y una curva trocoidal. En general, es importante encontrar perfiles conjugados, que cumplan la ley de engrane y sean de fácil fabricación. Un perfil que cumple con estos requerimientos es el perfil evolvente, por ello es el más utilizado en la industria. Al hacer uso de un perfil evolvente se tiene una gama de características favorables con respecto a otro tipo de perfil, como se menciona a continuación:

- Una característica relevante del perfil evolvente es que ambas ruedas presentan el mismo tipo de perfil, esto reduce la cantidad de herramientas de corte así como una herramienta de corte más simple. Por lo tanto, se tiene una mayor facilidad de fabricación (Infanzón 2010: 12).
- La línea de engrane de un perfil evolvente es una línea recta, lo cual genera un análisis más sencillo de las fuerzas que actúan sobre los dientes de los engranajes (Pintor s/a: 8.11).
- El par de engrane sigue siendo conjugado así se varíe la distancia entre centros, es decir, la corrección del engranaje no afecta a la relación de transmisión constante. “Ello es debido a que la relación de velocidades depende sólo de los radios de la circunferencia base y no de la distancia entre centros” (Pintor s/a: 8.12).

La definición formal de la evolvente es “una curva tal que el lugar geométrico de los centros de curvatura de todos sus puntos forman una circunferencia” (Pintor s/a: 8.11). Por otro lado, una forma intuitiva de definir a la evolvente es mediante la curva descrita por el extremo de una cuerda, manteniéndola tensa en todo momento, que está siendo desenrollada de una circunferencia a la cual se denomina circunferencia base (Zabalza 2010: 38).

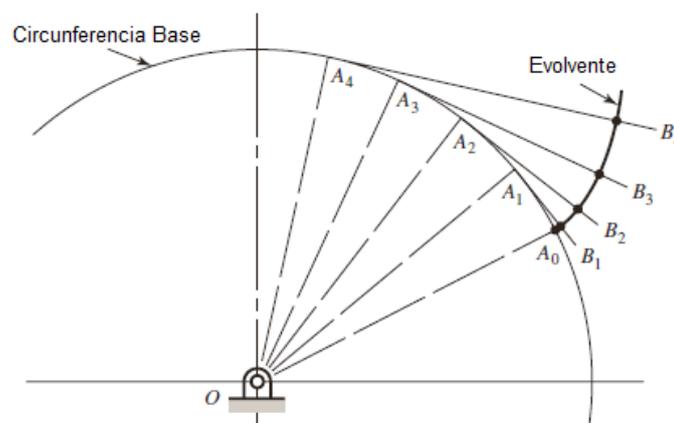


Figura 1-3: Perfil evolvente (Budynas 2011: 679)

La curva presente en la zona del pie del diente no es muy tratada por los autores especializados en el tema y recibe el nombre de trocoide. Durante la fabricación de un engranaje, la zona evolvente del perfil del diente es producida por la parte recta de la herramienta de corte (cremallera o fresa madre), en cambio, la zona trocoidal; por la punta de la misma, es importante señalar que la punta de la herramienta de corte presenta un redondeo, el cual genera la curva mencionada. Además, esta zona se va atenuando conforme se incrementa el número de dientes o mediante una corrección positiva. (Cotaquispe 2004: 14).

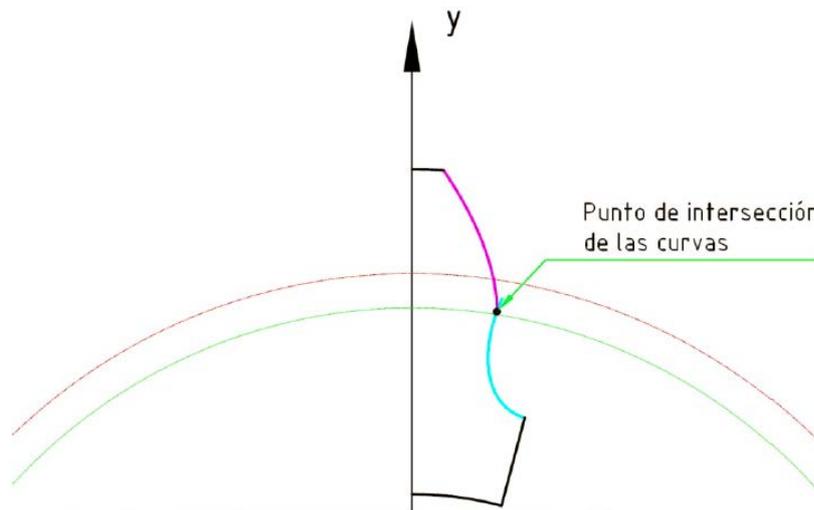


Figura 1-4: Intersección de las curvas del perfil (Infanzón 2010: 49).

1.2. Métodos de fabricación.

Para la manufactura de engranajes se cuenta con una amplia gama de métodos de fabricación, algunos con mayor precisión, otros con una mayor facilidad de fabricación.

En general, los métodos son de generación o de reproducción del perfil de la herramienta de corte. En la reproducción del perfil de la herramienta de corte, el espacio comprendido entre dos dientes viene a ser el perfil de la herramienta de corte. Por otro lado, en el método de generación el perfil del diente está determinado por la forma en cómo actúa la herramienta de corte sobre la pieza de trabajo (Infanzón 2010: 16). Los métodos de fabricación más utilizados son mencionados a continuación:

Fresado con fresa de forma: Este método es usado principalmente para una producción a baja escala, la herramienta de corte es una fresa de forma que posee el perfil del espacio comprendido entre dos dientes de una misma rueda. La desventaja que presenta este método es que para cada módulo y número de dientes se tiene una herramienta corte distinta, si bien en la práctica se cuenta con una serie de fresas para cada módulo, cada una trabaja en un determinado rango de número de dientes. Una desventaja adicional es que produce un perfil de evolvente aproximado. Por ello, en engranajes donde se requiera una mayor precisión, este método no es utilizado.

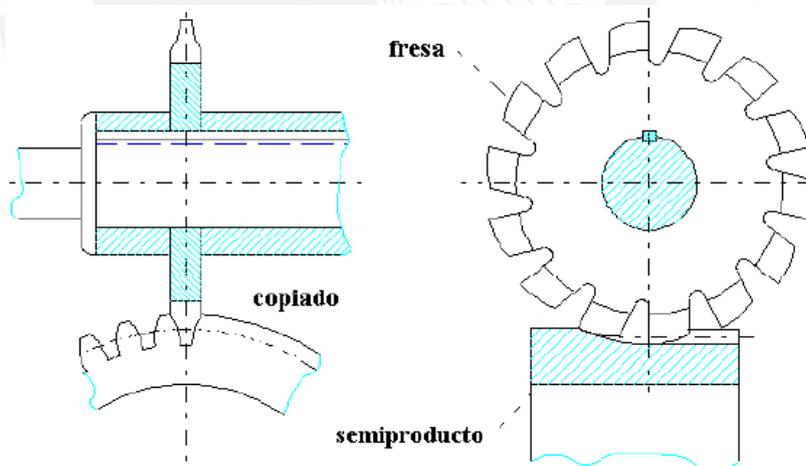


Figura 1-5: Método de fresado con fresa de forma (Vanegas 2010: 7)

Generación con fresa madre: Este método es uno de los más utilizados para la producción en masa como para la producción a baja escala, la herramienta de corte es un tornillo sin fin que gira con la pieza a trabajar como si estuviesen engranando y de esta manera se produce el perfil evolvente. La ventaja que presenta este método es

que para cada módulo normal se tiene solo una herramienta de corte, la cual no depende del número de dientes del engranaje, además se logra una muy buena precisión. Una desventaja es la no manufactura de engranajes internos.

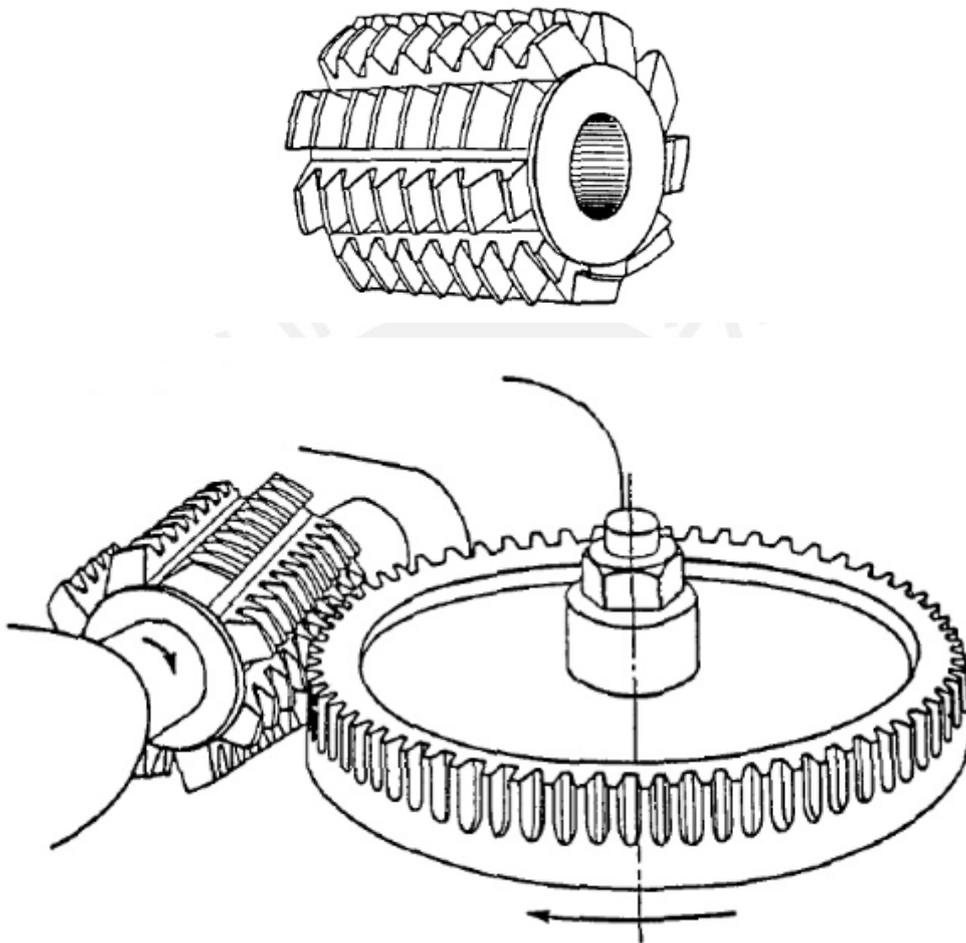


Figura 1-6: Método de generación con fresa madre (Litvin 2004: 277)

Generación por cuchilla - piñón: Este método es muy utilizado para la producción en masa como para la producción a baja escala, la herramienta de corte es un piñón que rota con la pieza a trabajar para producir el perfil evolvente. La ventaja que presenta este método es una muy buena precisión así como la manufactura de engranajes internos.

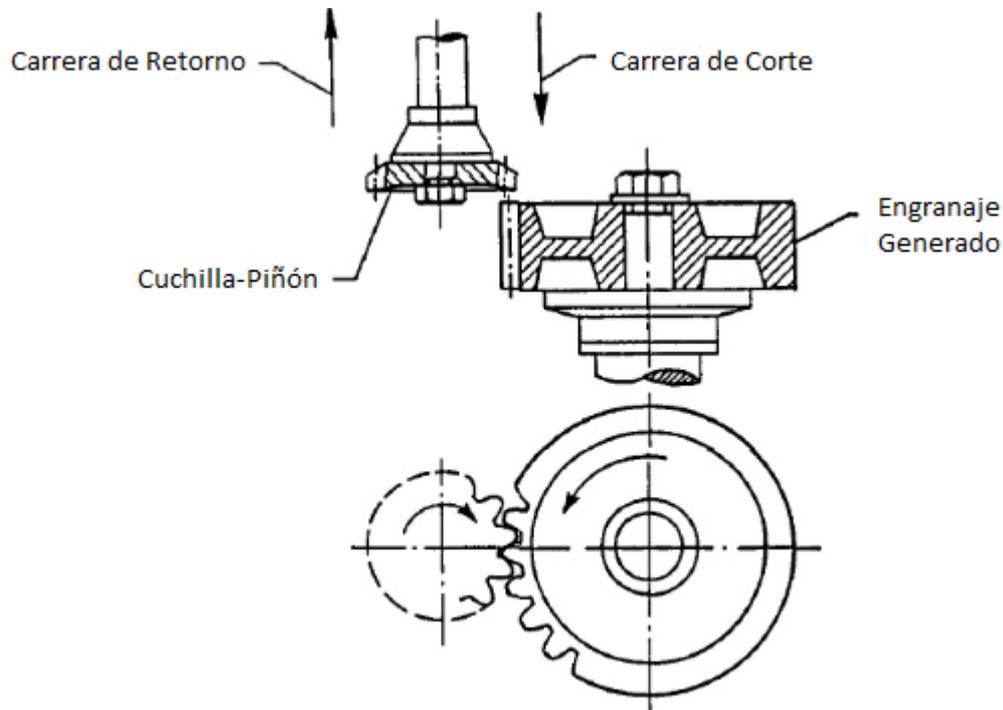


Figura 1-7: Método de generación por cuchilla - piñón (Litvin 2004: 277)

Generación por cuchilla - cremallera: Este método es muy usado para la producción en masa como para la producción a baja escala, la herramienta de corte es una cremallera. La ventaja fundamental de este método, además de una muy buena precisión, es que se tiene una mayor facilidad de fabricación de la herramienta de corte. Un inconveniente es la no manufactura de engranajes internos.

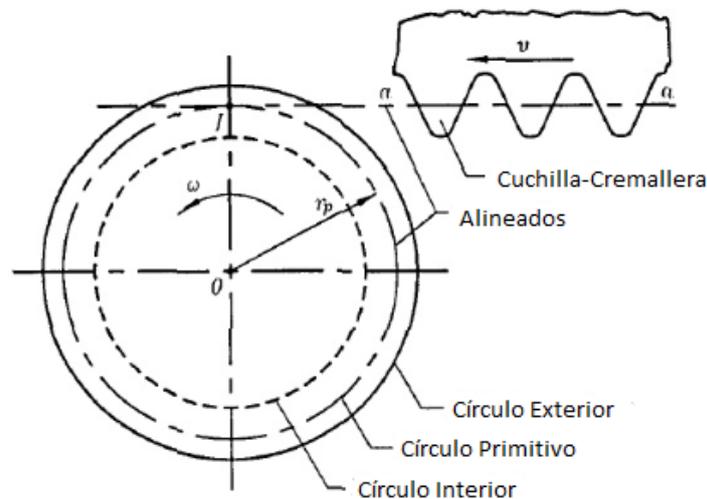


Figura 1-8: Método de generación por cuchilla - cremallera (Litvin 2004: 274)

1.3. Corrección de engranajes.

La corrección de engranajes se da al desplazar la herramienta de corte una determinada distancia del diámetro primitivo, dicho desplazamiento se define como una fracción x del módulo del engranaje. En general, los engranajes pueden ser corregidos de forma positiva ($x+$) o negativa ($x-$), lo cual depende de cuán alejada o acercada este la herramienta de corte del diámetro primitivo. Si la herramienta de corte se aleja de la pieza a trabajar se habla de una corrección positiva, mientras que, si la herramienta de corte se acerca a la pieza a trabajar se habla de una corrección negativa (Infanzón 2010: 18).

La corrección de los dientes nos ayuda de diversas formas, una de ellas es cuando se tiene que fabricar piñones de un bajo número de dientes, pues mientras menor es el número de dientes se produce con mayor intensidad el fenómeno de penetración o socavado del diente, bajo este panorama una corrección positiva evita todos estos inconvenientes. Además, una corrección positiva hace al diente más robusto, lo cual aumenta su resistencia, es decir, su capacidad de carga se incrementa. Una ventaja adicional que presenta la corrección de engranajes es que frente a la necesidad de realizar un montaje se puede modificar la distancia entre centros sin cambiar la relación de transmisión (Cotaquispe 2004: 13).

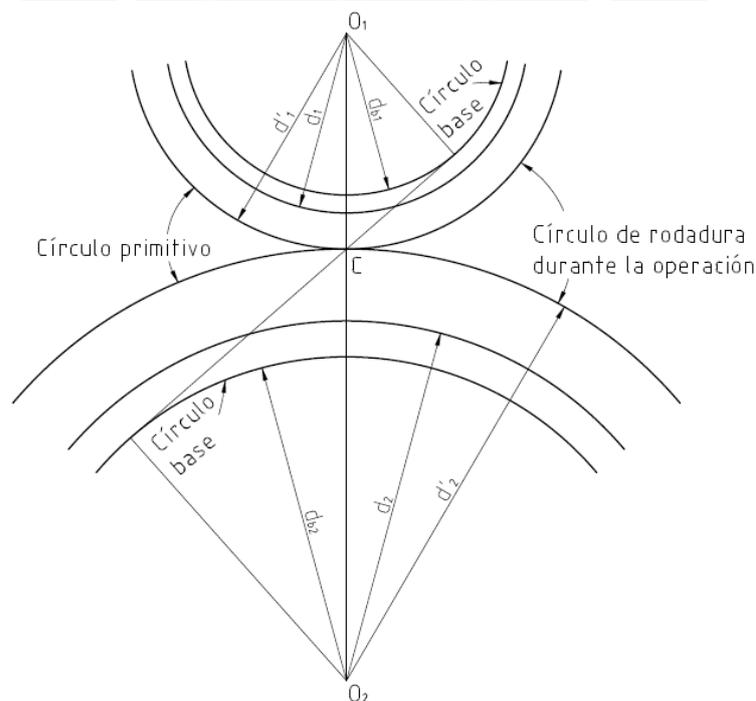


Figura 1-9: Corrección Positiva

1.4. Expresiones analíticas empleadas para la obtención de los parámetros geométricos de un engranaje.

La geometría de los engranajes cilíndricos puede ser determinada una vez conocido cierto grupo de parámetros, entre los cuales se encuentran los parámetros de la herramienta de corte (González 2001: 3), mencionados a continuación:

- z : Número de dientes.
- m : Módulo.
- β : Ángulo de la hélice.
- b : Ancho entre caras del engranaje (sentido axial).
- x : Factor de corrección (positivo o negativo).
- α : Ángulo del perfil de la cremallera de referencia.
- h_a : Factor de altura de la cabeza del diente.
- h_f : Factor de altura del pie del diente.
- c_f : Factor de holgura radial.
- ρ_f : Factor de redondeo del pie del diente.

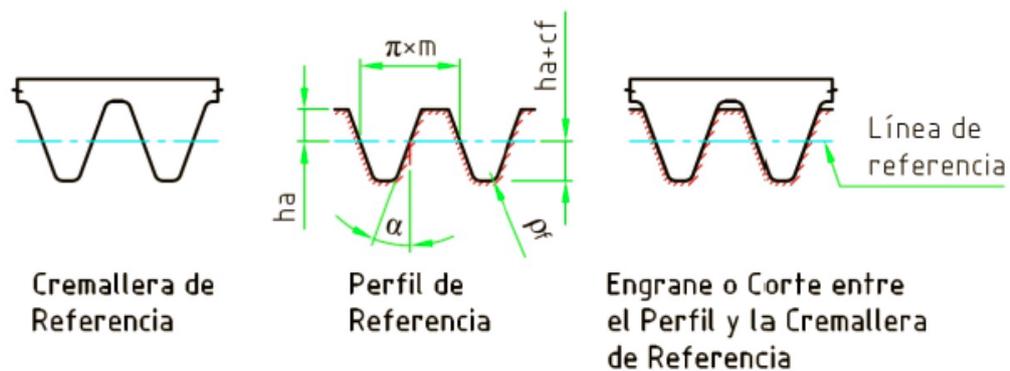


Figura 1-10: Parámetros de la herramienta de corte (Infanzón 2010: 17)

Las expresiones analíticas empleadas para determinar las características geométricas de un engranaje son:

- Relación de transmisión

$$u = \frac{z_2}{z_1} \quad (1.5)$$

- Módulo transversal

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (1.6)$$

- Ángulo de presión transversal

$$\alpha_t = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right) \quad (1.7)$$

- Ángulo de la hélice en el círculo base

$$\beta_b = \tan^{-1}(\cos \alpha_t \cdot \tan \beta) \quad (1.8)$$

- Ángulo de presión transversal corregido

$$ev \alpha'_t = \frac{2 \cdot (x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha_n + ev \alpha_t ; \text{ donde } ev \theta = \tan \theta - \theta \quad (1.9)$$

- Diámetro del círculo primitivo

$$d_1 = m_t \cdot z_1 \quad (1.10)$$

$$d_2 = m_t \cdot z_2 \quad (1.11)$$

- Diámetro del círculo de fondo

$$d_{f1} = d_1 + 2 \cdot m_n \cdot (x_1 - h_a - c_f) \quad (1.12)$$

$$d_{f2} = d_2 + 2 \cdot m_n \cdot (x_2 - h_a - c_f) \quad (1.13)$$

- Diámetro del círculo base

$$d_{b1} = d_1 \cdot \cos \alpha_t \quad (1.14)$$

$$d_{b2} = d_2 \cdot \cos \alpha_t \quad (1.15)$$

- Distancia entre centros corregida

$$a' = \frac{m_t}{2 \cdot \cos \alpha'_t} \cdot (z_1 + z_2) \cdot \cos \alpha_t \quad (1.16)$$

- Diámetro del círculo de rodadura durante la operación

$$d'_1 = d_1 \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} = \frac{2 \cdot a'}{u + 1} \quad (1.17)$$

$$d'_2 = d_2 \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha'_t} = 2 \cdot a' - d'_1 \quad (1.18)$$

- Diámetro del círculo exterior

$$d_{a1} = 2 \cdot a' - d_{f2} - 2 \cdot c_f \cdot m_n \quad (1.19)$$

$$d_{a2} = 2 \cdot a' - d_{f1} - 2 \cdot c_f \cdot m_n \quad (1.20)$$

- Paso circular transversal

$$p_t = \pi \cdot m_t \quad (1.21)$$

- Paso transversal en el círculo base

$$p_{et} = p_t \cdot \cos \alpha_t \quad (1.22)$$

- Segmento de engrane

$$g_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a' \cdot \sin \alpha'_t \quad (1.23)$$

- Coeficiente o factor de engrane

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}}{p_{et}} \quad (1.24)$$

- Coeficiente de recubrimiento axial

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi} \quad (1.25)$$

1.5. Metodología de cálculo según normas técnicas especializadas e internacionales.

Las normas especializadas en el tema de engranajes tales como DIN 3990, ISO 6336 y ANSI/AGMA 2101 - C95 plantean una metodología de cálculo en el diseño de engranajes cilíndricos de dientes rectos y helicoidales, entre las comprobaciones más relevantes se encuentra el cálculo de la durabilidad superficial (*pitting*) vinculada al esfuerzo de contacto así como el cálculo de la resistencia en el pie del diente relacionado con el esfuerzo de flexión, los cuales son tratados a continuación:

1.5.1. Esfuerzo de Contacto.

La comprobación de la resistencia a los esfuerzos de contacto toma como punto de partida el modelo formado por dos cilindros en contacto, bajo la influencia de una fuerza. El modelo mencionado ha permitido desarrollar las ecuaciones de Hertz para evaluar la durabilidad superficial de engranajes cilíndricos, teniendo en cuenta que “los cilindros tienen un radio igual al de los flancos de los dientes cuando realizan contacto” (González 2001: 28).

Aunque el esfuerzo de contacto durante el proceso de engrane no es el esfuerzo calculado por la teoría de Hertz, pues al haber un deslizamiento relativo entre las superficies en cuestión se produce una fuerza de fricción no contemplada por el modelo, resulta una forma de calcular el esfuerzo de contacto actuante en los flancos de los dientes.

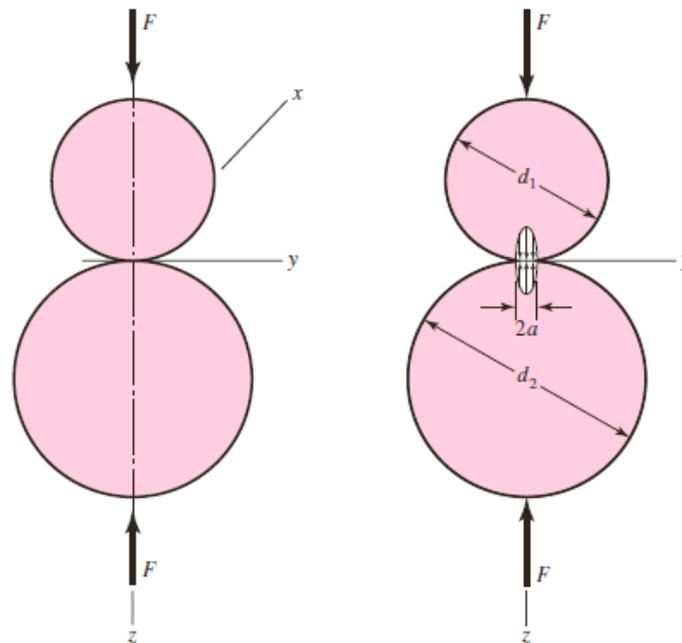


Figura 1-11: Modelo teórico para el cálculo del esfuerzo de contacto (Budynas 2011: 123)

La fórmula presentada a continuación es la ecuación de Hertz para determinar el esfuerzo de contacto máximo, en dos cilindros de radios ρ_1 y ρ_2 y de longitudes l_c , “empleada como ecuación básica para el cálculo de los esfuerzos de contacto en un engranaje cilíndrico con dientes de perfil de evolvente y contacto exterior” (González 2001: 29).

$$\sigma_{H \max} = \sqrt{\frac{E_1 \cdot E_2}{\pi \cdot [E_1 \cdot (1 - \nu_2^2) + E_2 \cdot (1 - \nu_1^2)]} \cdot \frac{2 \cdot F_n}{l_c \cdot \rho_{red}}} \quad (1.26)$$

$$\rho_{red} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (1.27)$$

E_1 y E_2 : Módulo de elasticidad del material de los dientes del piñón y de la rueda.

ν_1 y ν_2 : Coeficiente de Poisson del material de los dientes del piñón y de la rueda.

l_c : Longitud de contacto.

F_n : Fuerza normal en el flanco de los dientes.

ρ_{red} : Radio de curvatura reducido.

1.5.1.1. Expresiones de cálculo según DIN 3990 e ISO 6336.

Para calcular el esfuerzo de contacto según lo recomendado por la norma DIN 3990 e ISO 6336 se hacen uso de las mismas expresiones de cálculo, pues en ambas normas la metodología de cálculo es similar. En la norma, en un primer plano se plasma al esfuerzo de contacto actuante, para luego definir al esfuerzo de contacto permisible, y de esta manera contrastar ambas expresiones y verificar el diseño del juego de engrane. Las siguientes expresiones de cálculo son las utilizadas en la metodología planteada por la norma DIN 3990 e ISO 6336.

1.5.1.1.1. Cálculo del esfuerzo de contacto actuante para el piñón

$$\sigma_{H1} = Z_B \cdot \sigma_{H0} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \leq \sigma_{HP} \quad (1.28)$$

- σ_{H1} Esfuerzo de contacto actuante para el piñón.
- σ_{H0} Esfuerzo de contacto nominal en el punto de paso.
- σ_{HP} Esfuerzo de contacto permisible.
- Z_B Factor de contacto del piñón.
- K_A Factor de servicio por aplicación de carga.
- K_V Factor dinámico.
- $K_{H\beta}$ Factor de carga longitudinal para esfuerzo de contacto.
- $K_{H\alpha}$ Factor de carga transversal para esfuerzo de contacto.

$$\sigma_{H0} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (1.29)$$

- Z_H Factor de zona.
- Z_E Factor de elasticidad
- Z_ε Factor de relación de contacto.
- Z_β Factor de ángulo de hélice.
- F_t Fuerza tangencial nominal.
- b Ancho entre caras del engranaje (sentido axial).
- d_1 Diámetro primitivo del piñón (en engranajes corregidos, diámetro de operación).
- u Relación de transmisión.

$$F_t = \frac{2 \cdot M_t}{d_1} \quad (1.30)$$

M_t Momento torsor en el piñón.

1.5.1.1.2. Cálculo del esfuerzo de contacto actuante para la rueda

$$\sigma_{H2} = Z_D \cdot \sigma_{H0} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \leq \sigma_{HP} \quad (1.31)$$

σ_{H2} Esfuerzo de contacto actuante para la rueda.

Z_D Factor de contacto de la rueda.

1.5.1.1.3. Cálculo del esfuerzo de contacto permisible

$$\sigma_{HP\ 1,2} = \frac{\sigma_{H\ lim\ 1,2} \cdot Z_{NT}}{S_{H\ min}} \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (1.32)$$

$\sigma_{HP\ 1,2}$ Esfuerzo de contacto permisible.

$\sigma_{H\ lim\ 1,2}$ Esfuerzo de contacto límite.

Z_{NT} Factor de vida para esfuerzo de contacto.

$S_{H\ min}$ Factor de seguridad mínimo para durabilidad de la superficie.

Z_L Factor de lubricante.

Z_V Factor de velocidad.

Z_R Factor de rugosidad.

Z_W Factor de endurecimiento por deformación.

Z_X Factor de tamaño para esfuerzo de contacto.

1.5.1.2. Expresiones de cálculo según ANSI/AGMA 2101-C95.

Para calcular el esfuerzo de contacto según lo recomendado por la norma técnica ANSI/AGMA 2101 - C95, al igual que en las normas descritas anteriormente, primero se calcula el esfuerzo de contacto actuante, para luego determinar el esfuerzo de contacto permisible, y de esta manera contrastar ambos resultados y verificar si el diseño del juego de engrane cumple con los requerimientos de carga. Las siguientes expresiones de cálculo son las utilizadas en la metodología planteada por la norma ANSI/AGMA 2101 - C95.

1.5.1.2.1. Cálculo del esfuerzo de contacto actuante

$$\sigma_H = Z_E \cdot \sqrt{F_t \cdot K_o \cdot K_v \cdot K_s \cdot \frac{K_H}{d_{w1} \cdot b} \cdot \frac{Z_R}{Z_I}} \quad (1.33)$$

σ_H	Esfuerzo de contacto actuante.
Z_E	Coeficiente de elasticidad.
K_o	Factor de sobrecarga.
K_v	Factor dinámico.
K_s	Factor de tamaño.
K_H	Factor de distribución de carga.
Z_R	Factor de condición superficial para la resistencia a la picadura (pitting).
b	Ancho entre caras del miembro más estrecho (sentido axial).
Z_I	Factor de geométrico para la resistencia a la picadura (pitting).
d_{w1}	Diámetro de paso de operación del piñón.

$$d_{w1} = \frac{2 \cdot a}{u + 1} \quad (1.34)$$

b	Distancia entre centros de operación.
u	Relación de transmisión.

$$F_t = \frac{2 \cdot M_t}{d_{w1}} \quad (1.35)$$

M_t Momento torsor en el piñón.

1.5.1.2.2. Cálculo del esfuerzo de contacto permisible

$$\sigma_H \leq \frac{\sigma_{HP}}{S_H} \cdot \frac{Z_N}{Y_\theta} \cdot \frac{Z_W}{Y_Z} \quad (1.36)$$

σ_{HP} Esfuerzo de contacto admisible nominal.

Z_N Factor esfuerzo cíclico para la resistencia a la picadura.

Z_W Factor de relación de durezas para la resistencia a la picadura.

S_H Factor de seguridad para la resistencia a la picadura.

Y_θ Factor de temperatura.

Y_Z Factor de confiabilidad.

1.5.2. Esfuerzo de Flexión.

La comprobación de la resistencia a los esfuerzos de flexión tiene como punto de partida la fórmula desarrollada por Wilfred Lewis, la cual consiste en “la semejanza existente entre una barra prismática con carga en voladiza y el diente de un engranaje con carga aplicada en el extremo exterior” (Cotaquispe 2004: 18). El modelo mencionado ha permitido desarrollar las ecuaciones necesarias para evaluar “los esfuerzos que surgen en la raíz del diente y están asociados con la fractura [...] en la base del diente” (González 2001: 44).

Si bien el esfuerzo de flexión real no es el esfuerzo planteado por Lewis, pues en el análisis no se considera la geometría real del diente y la carga es aplicada en el extremo exterior, resulta una manera de calcular el esfuerzo de flexión actuante. La fórmula presentada a continuación es la ecuación básica para determinar el esfuerzo de flexión en la base del diente.

$$\sigma_F = 6 \cdot \left[\frac{F_n}{b} \right] \cdot \left[\frac{\cos \alpha_{Fan} \cdot h_{Fa}}{S_{Fn}^2} \right] \quad (1.37)$$

F_n : Fuerza normal en el flanco de los dientes.

α_{Fan} : Ángulo de incidencia de la fuerza normal.

- h_{Fa} : Altura desde la zona analizada de la curva trocoidal hasta el punto de intersección de la línea de acción y el eje de simetría del diente.
- s_{Fn} : Espesor del diente en la zona analizada.
- b : Ancho del diente.

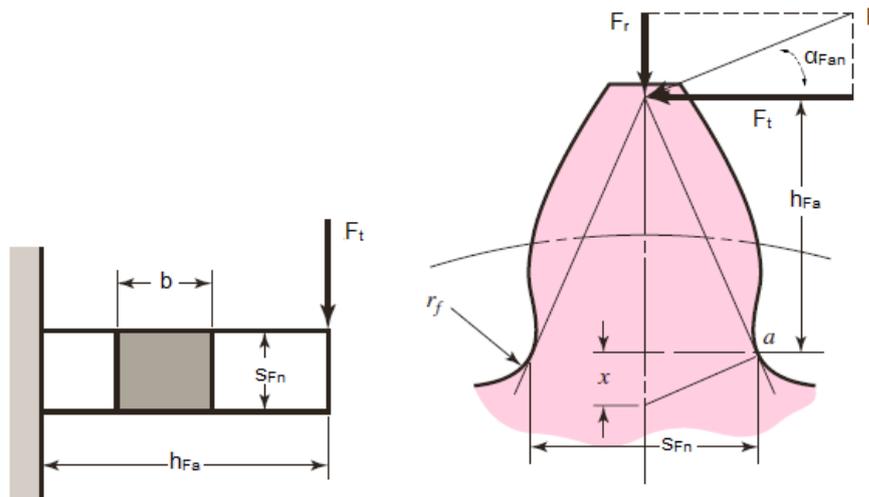


Figura 1-12: Modelo teórico para el cálculo del esfuerzo de flexión (Budynas 2011: 737)

1.5.2.1. Expresiones de cálculo según DIN 3990 e ISO 6336.

Para calcular el esfuerzo de flexión según lo recomendado por la norma DIN 3990 e ISO 6336 se hacen uso de las mismas expresiones de cálculo, pues en ambas normas la metodología de cálculo es muy parecida. En la norma, en un primer plano se plasma al esfuerzo de flexión actuante, para luego definir al esfuerzo de flexión permisible, y de esta manera comparar ambos resultados y verificar el diseño del juego de engrane. Las siguientes expresiones de cálculo son las utilizadas en la metodología planteada por la norma DIN 3990 e ISO 6336.

1.5.2.1.1. Cálculo del esfuerzo de flexión actuante

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \leq \sigma_{FP} \quad (1.38)$$

- σ_F Esfuerzo de flexión actuante.
- σ_{FP} Esfuerzo de flexión permisible.
- F_t Fuerza tangencial nominal.

Y_{Fa}	Factor de forma.
Y_{Sa}	Factor de concentración de tensión.
Y_{ϵ}	Factor de relación de contacto.
Y_{β}	Factor de ángulo de hélice.
K_A	Factor de servicio por aplicación de carga.
K_V	Factor dinámico.
$K_{F\beta}$	Factor de carga a lo ancho para el esfuerzo en el fondo del diente.
$K_{F\alpha}$	Factor de carga transversal para el esfuerzo en el fondo del diente.
b	Ancho entre caras del engranaje (sentido axial).
m_n	Módulo normal.

1.5.2.1.2. Cálculo del esfuerzo de flexión permisible

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F \text{ lim}}}{S_{F \text{ min}}} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{\delta \text{ rel.T}} \cdot Y_{R \text{ rel.T}} \cdot Y_X \cdot Y_{NT} \quad (1.39)$$

σ_{FP}	Esfuerzo de flexión permisible.
$\sigma_{F \text{ lim}}$	Esfuerzo límite pulsante de flexión en el pie del diente.
$S_{F \text{ min}}$	Factor de seguridad mínimo.
Y_{ST}	Factor de corrección para dimensiones de ruedas probadas.
$Y_{\delta \text{ rel.T}}$	Factor que considera la sensibilidad a la entalla del material.
$Y_{R \text{ rel.T}}$	Factor de acabado superficial en el redondeo de la raíz.
Y_X	Factor de tamaño.
Y_{NT}	Factor de vida.

1.5.2.2. Expresiones de cálculo según ANSI/AGMA 2101-C95.

Para calcular el esfuerzo de flexión según lo recomendado por la norma técnica ANSI/AGMA 2101-C95, al igual que en las normas descritas anteriormente, primero se calcula el esfuerzo de flexión actuante, para luego determinar el esfuerzo de flexión permisible, y de esta manera comparar ambos resultados y verificar si el diseño del juego de engrane cumple con los requerimientos de carga. Las siguientes expresiones de cálculo son las utilizadas en la metodología planteada por la norma ANSI/AGMA 2101 - C95.

1.5.2.2.1. Cálculo del esfuerzo de flexión actuante

$$\sigma_F = F_t \cdot K_o \cdot K_v \cdot K_s \cdot \frac{1}{b \cdot m_t} \cdot \frac{K_H \cdot K_B}{Y_J} \quad (1.40)$$

- σ_F Esfuerzo de flexión actuante.
 F_t Fuerza tangencial nominal.
 K_o Factor de sobrecarga.
 K_v Factor dinámico.
 K_s Factor de tamaño.
 K_H Factor de distribución de carga.
 K_B Factor de margen del espesor.
 Y_J Factor geométrico para la resistencia a la flexión.
 b Ancho entre caras del miembro más estrecho (sentido axial).
 m_t Módulo transversal.

1.5.2.2.2. Cálculo del esfuerzo de flexión permisible

$$\sigma_F \leq \frac{\sigma_{FP} \cdot Y_N}{S_F \cdot Y_\theta \cdot Y_Z} \quad (1.41)$$

- σ_{FP} Esfuerzo de flexión permisible.
 Y_N Factor esfuerzo cíclico para la resistencia a la flexión.
 S_F Factor de seguridad para la resistencia a la flexión.
 Y_θ Factor de temperatura.
 Y_Z Factor de confiabilidad.

1.6. Determinación de los factores relacionados a la geometría en el esfuerzo actuante según las normas técnicas especializadas e internacionales.

Las expresiones de cálculo empleadas por las normas técnicas mostradas en la sección anterior cuentan con una serie de factores que dependen de las propiedades elásticas del material de los dientes, de las características geométricas del perfil del diente, de los incrementos de carga debido a fuerzas externas, de la distribución no uniforme de la carga, del número de dientes en contacto durante la transmisión, de la lubricación, de la rugosidad superficial, etc. De toda esta gama de factores, hay un

grupo, en el esfuerzo actuante, que está vinculado con la geometría del perfil del diente, a los cuales denominamos en adelante factores geométricos.

1.6.1. Factores geométricos en el esfuerzo de contacto actuante.

La determinación de los factores geométricos en el esfuerzo de contacto actuante parte del análisis de la definición de cada factor, para así identificar qué factores están relacionados con la geometría del diente, además es importante mencionar que los factores geométricos varían en función de la norma empleada.

1.6.1.1. Factores geométricos según DIN 3990 e ISO 6336.

- Factor de zona (Z_H).

“El factor de zona tiene en cuenta la influencia en el esfuerzo de contacto de la curvatura del flanco del diente en el punto de paso y permite considerar el efecto de la fuerza tangencial en el cilindro de referencia a partir de la fuerza normal en el cilindro primitivo” (González 2001: 31). Este factor se determina a partir de gráficos o mediante el uso de la siguiente fórmula.

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \beta_b \cdot \cos \alpha'_t}{\cos \alpha_t^2 \cdot \sin \alpha'_t}} \quad (1.42)$$

- Factor de contacto del piñón (Z_B).

El factor de contacto del piñón transforma “el esfuerzo de contacto en el punto de paso al esfuerzo de contacto en el punto más interno de un solo par de dientes en contacto en el piñón” (ISO 6336-2 1996: 3), en otras palabras en el punto de inicio de contacto.

- Factor de contacto de la rueda (Z_D).

El factor de contacto de la rueda transforma “el esfuerzo de contacto en el punto de paso al esfuerzo de contacto en el punto más interno de un solo par

de dientes en contacto de la rueda” (ISO 6336-2 1996: 4), en otras palabras en el punto de fin de contacto.

- Factor de relación de contacto (Z_ε).

El factor de relación de contacto considera la influencia de la longitud efectiva de las líneas de contacto, es decir, como afecta la distribución transversal de la carga entre varios pares de dientes en contacto (ISO 6336-2 1996: 4; González 2001: 32). Este factor puede ser calculado a partir de gráficos o mediante el uso de las siguientes expresiones analíticas.

Engranajes de dientes rectos

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}} \quad (1.43)$$

Engranajes de dientes helicoidales

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3} \cdot (1 - \varepsilon_\beta) + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha}} \quad \text{para } \varepsilon_\beta < 1 \quad (1.44)$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad \text{para } \varepsilon_\beta \geq 1 \quad (1.45)$$

- Factor de ángulo de hélice (Z_β).

El factor de ángulo de hélice “considera la influencia que ejerce el ángulo de hélice en la inclinación de la línea de rotura y en la resistencia a la picadura, aparte del efecto que produce en la capacidad de carga del engranaje desde el punto de vista geométrico” (González 2001: 32). Este factor se obtiene a partir de gráficos o haciendo uso de la siguiente fórmula.

$$Z_{\beta} = \sqrt{\cos \beta} \quad (1.46)$$

1.6.1.2. Factores geométricos según ANSI/AGMA 2101-C95.

- Factor geométrico para la resistencia a la picadura (Z_I).

El factor geométrico para la resistencia a la picadura evalúa el radio de curvatura del perfil del diente para determinar el esfuerzo de contacto de Hertz en el flanco del diente (ANSI/AGMA 2101-C95 1996: 11). Este factor se obtiene haciendo uso de la siguiente ecuación.

$$Z_I = \frac{\cos \phi_t \cdot \sin \phi_t}{2 \cdot m_N} \cdot \frac{m_G}{m_G + 1} \quad (1.47)$$

Engranajes de dientes rectos

$$m_N = 1 \quad (1.48)$$

Engranajes de dientes helicoidales

$$m_N = \frac{p_N}{0.95 \cdot Z} \quad (1.49)$$

1.6.2. Factores geométricos en el esfuerzo de flexión actuante.

La determinación de los factores geométricos en el esfuerzo de flexión actuante se basa en un análisis similar al realizado sobre el esfuerzo de contacto actuante.

1.6.2.1. Factores geométricos según DIN 3990 e ISO 6336.

- Factor de forma (Y_{Fa}).

El factor de forma “toma en cuenta la influencia del esfuerzo nominal en el fondo del diente, por la forma del mismo, con la aplicación de la carga en la punta del diente” (ISO 6336-3 1996: 4). Este factor puede ser calculado a partir de gráficos o mediante el uso de la siguiente expresión analítica.

$$Y_{Fa} = \frac{6 \cdot \frac{h_{Fa}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fan}}{\left(\frac{S_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos \alpha_n} \quad (1.50)$$

- Factor de concentración de tensión (Y_{Sa}).

El factor de concentración de tensión es “la razón entre el esfuerzo máximo provocado por los concentradores de tensión y el esfuerzo de flexión básico definido de forma geométrica” (González 2001: 48). Este factor se obtiene a partir de gráficos o haciendo uso de la siguiente fórmula.

$$Y_{Sa} = (1.2 + 0.13 \cdot L_a) \cdot q_s \left[\frac{1.21 + \frac{2.3}{L_a}}{L_a} \right]^{-1}; \text{ donde } L_a = \frac{S_{Fn}}{h_{Fa}} \quad (1.51)$$

- Factor de relación de contacto (Y_ε).

El factor de relación de contacto es utilizado para modificar la influencia de Y_{Fa} , es decir, no considerar la aplicación de toda la carga en la punta del diente (González 2001: 52). Este factor se calcula mediante gráficas o empleando la siguiente ecuación.

$$Y_\varepsilon = 0.25 + \frac{0.75}{\varepsilon_{\alpha n}} \quad (1.52)$$

$$\varepsilon_{\alpha n} = \frac{\varepsilon_\alpha}{\cos \beta_b^2} \quad (1.53)$$

- Factor de ángulo de hélice (Y_β).

El factor de ángulo de hélice “compensa que la intensidad del momento flector en el fondo del diente de engranajes helicoidales sea, como consecuencia de las líneas oblicuas de contacto, menor que los valores correspondientes para el engranaje recto virtual usado como base para el cálculo” (ISO 6336-3 1996: 4). Este factor se halla haciendo uso de las gráficas o de la siguiente fórmula.

$$Y_{\beta} = 1 - \varepsilon_{\beta} \cdot \frac{\beta}{120^{\circ}} \quad (1.54)$$

1.6.2.2. Factores geométricos según ANSI/AGMA 2101-C95.

- Factor geométrico para la resistencia a la flexión (Y_f).

El factor geométrico para la resistencia a la flexión “evalúa la forma de los dientes, la posición en la que se aplica la carga más perjudicial, y el reparto de la carga entre las líneas oblicuas de contacto en los engranajes helicoidales” (ANSI/AGMA 2101-C95 1996: 11). Este factor se calcula haciendo uso de la siguiente ecuación.

$$Y_f = \frac{Y}{K_f \cdot m_N} \quad (1.55)$$

1.7. Antecedentes en el cálculo de engranajes mediante simulación.

La presente tesis utiliza como punto de referencia investigaciones desarrollados en la PUCP, donde se ha realizado la simulación mediante el método de elementos finitos de engranajes cilíndricos, de diente recto y helicoidal, teniendo en cuenta la geometría real del diente. Todo ello con el fin de contrastar resultados obtenidos por simulación numérica con resultados analíticos planteados por las normas mencionadas en líneas anteriores.

Por un lado, se cuenta con la tesis de grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas del profesor Luis Orlando Cotaquispe Zevallos, la misma que presenta como tema el “Perfeccionamiento del diseño de los engranajes de dientes rectos exteriores mediante el método de los elementos finitos”, enfocada principalmente en el análisis del esfuerzo de flexión. En sus conclusiones finales señala: “Sobre la base de los resultados alcanzados puede afirmarse que al aplicar el procedimiento propuesto en el diseño de los engranajes, pueden obtenerse soluciones más económicas por concepto de ahorro de material, pues los diseños por las normas actuales presentan más de un 30% de sobredimensionamiento, tomando como referencia los valores de esfuerzo por flexión en el pie del diente” (Cotaquispe 2004: 106).

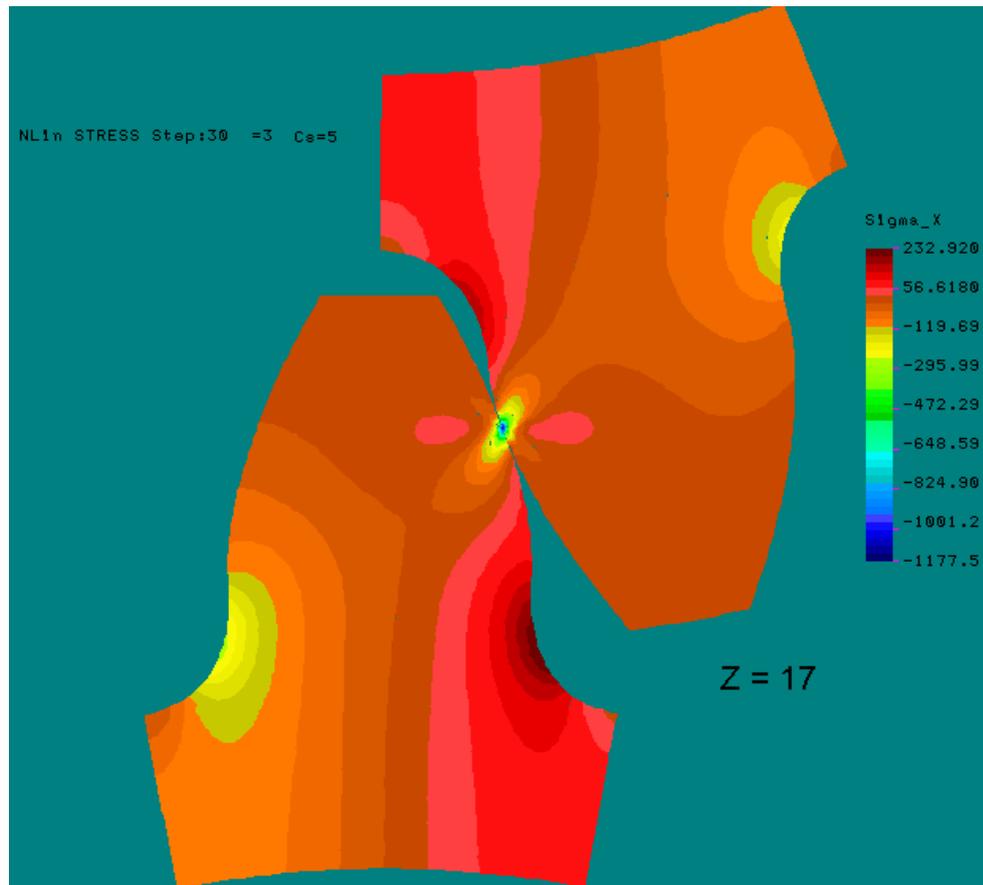


Figura 1-13: Esfuerzo de flexión en el pie del diente (Cotaquispe 2004: 83)

Por otro lado, se cuenta con la tesis para optar el título de Ingeniero Mecánico de Hernán Luis Infanzón García, que presenta como tema el “Análisis del esfuerzo de contacto en engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente mediante el método de los elementos finitos”, enfocada principalmente en el análisis del esfuerzo de contacto. En sus conclusiones finales menciona: “Los valores del esfuerzo de contacto obtenidos de manera analítica según las normas técnicas son de 2 a 5 veces mayores que los esfuerzos de contacto obtenidos por el método de los elementos finitos. Estos resultados conservadores conllevan a un sobredimensionamiento contra la picadura o “pitting” de los flancos de los dientes de los engranajes, sobre todo en los engranajes cilíndricos de dientes rectos” (Infanzón 2010: 82).

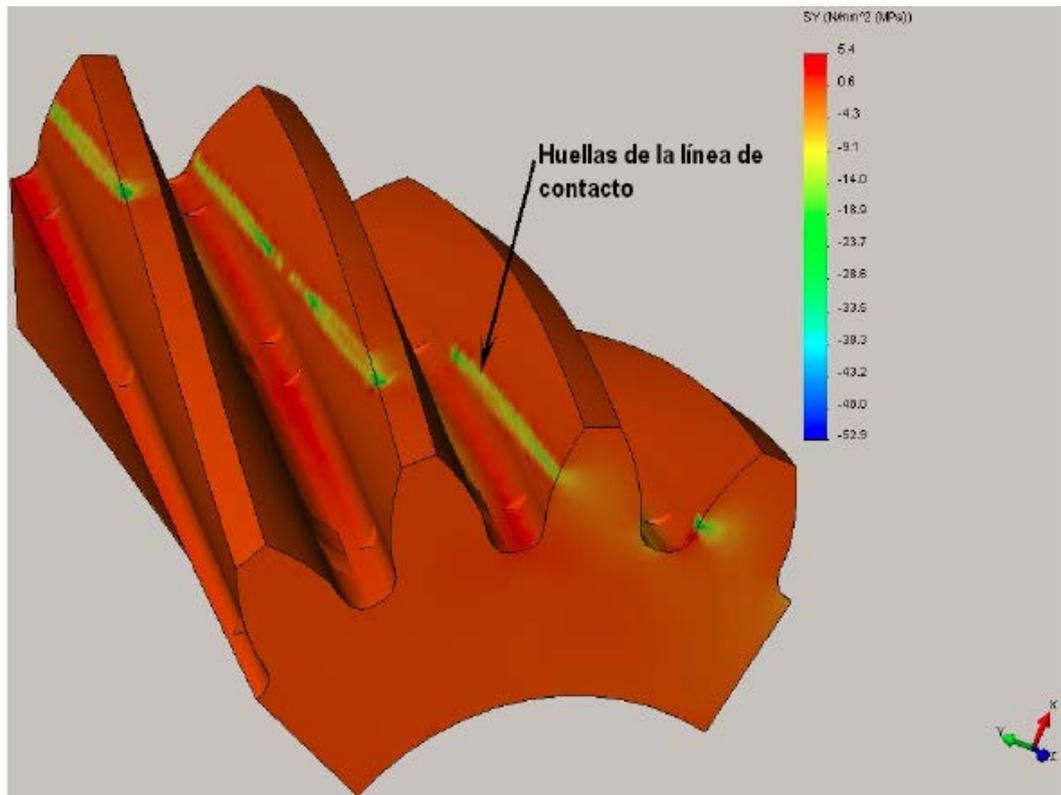


Figura 1-14: Esfuerzo de contacto (Infanzón 2010: 73)

Además, de las investigaciones realizadas dentro de la universidad se revisó bibliografía especializada en el tema de engranajes y se encontró la tesis doctoral de Miryam B. Sánchez Sánchez, la misma que presenta como tema el “Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento”, enfocada principalmente en engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2. Los resultados de su análisis en elementos finitos presenta la siguiente tendencia de esfuerzos en la zona de contacto.

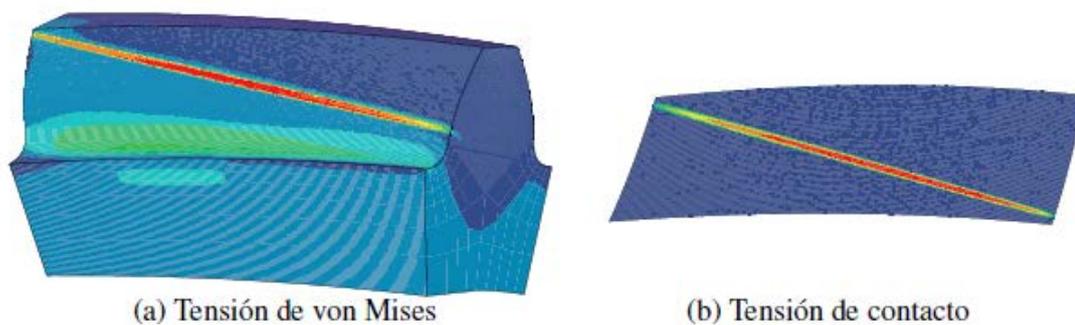


Figura 1-15: Resultados de la simulación de un engranaje helicoidal (Sánchez 2013: 138)

CAPÍTULO 2

2. MODELO GEOMÉTRICO DEL ENGRANAJE CILÍNDRICO A PARTIR DE UN ALGORITMO AUTOMATIZADO.

2.1. Ecuaciones paramétricas para modelar la geometría de los engranajes cilíndricos.

Las ecuaciones que gobiernan la geometría del perfil del diente de un engranaje cilíndrico que ha sido fabricado mediante los métodos de generación de cuchilla-cremallera o de fresa madre son descritas en las siguientes líneas, para ello ha sido de vital importancia revisar las ecuaciones paramétricas elaboradas en trabajos de investigación anteriores a la presente tesis, donde se define la geometría real de engranajes cilíndricos.

2.1.1. Ecuación de la Evolvente.

El perfil evolvente, mencionado en el capítulo anterior, es la curva descrita por el punto extremo de una cuerda que está siendo desenrollada de una circunferencia denominada circunferencia base, además al permanecer la cuerda tensa en todo momento siempre se mantiene tangente al círculo base (Zabalza 2010: 38).

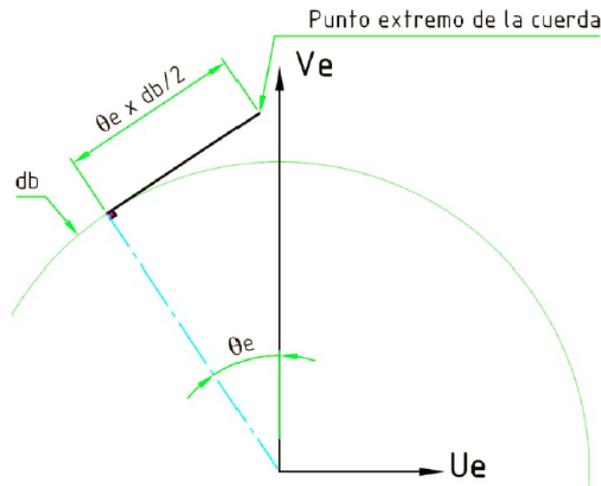


Figura 2-1: Cuerda desenrollada sobre el círculo base (Infanzón 2010: 36)

En la Figura 2-1, el extremo de la cuerda se encuentra en la intersección del círculo base con el eje de coordenada V_e momentos previos al inicio del fenómeno. Posteriormente, se desenrolla la cuerda y su punto de tangencia con el círculo base se ubica a un ángulo θ_e del eje de coordenada V_e (Infanzón 2010: 37). Las siguientes ecuaciones paramétricas describen el punto extremo de la cuerda a lo largo de este proceso.

$$U_{e(\theta_e)} = \frac{1}{2} \cdot (-d_b \cdot \sin \theta_e + d_b \cdot \theta_e \cdot \cos \theta_e) \quad (2.1)$$

$$V_{e(\theta_e)} = \frac{1}{2} \cdot (d_b \cdot \cos \theta_e + d_b \cdot \theta_e \cdot \sin \theta_e) \quad (2.2)$$

Como se muestra en la Figura 2-2 para hacer coincidir el eje de simetría del diente con el eje vertical y , el sistema de coordenadas U_e y V_e debe girar un ángulo γ_e en sentido horario con respecto al sistema de coordenadas x e y (Infanzón 2010: 37). De esta manera, las ecuaciones paramétricas (2.3) y (2.4) describen la curva evolvente en el sistema de coordenadas x e y .

$$x_{e(\theta_e)} = U_e \cdot \cos \gamma_e + V_e \cdot \sin \gamma_e \quad (2.3)$$

$$y_{e(\theta_e)} = V_e \cdot \cos \gamma_e - U_e \cdot \sin \gamma_e \quad (2.4)$$

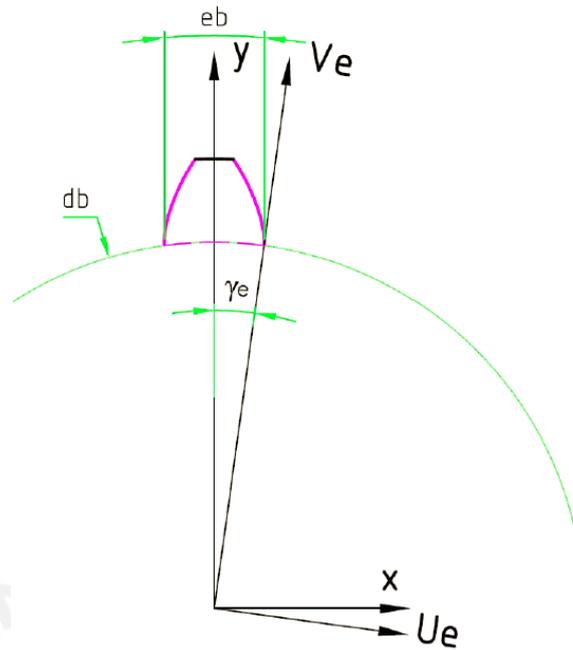


Figura 2-2: Relación entre ejes de coordenadas (Infanzón 2010: 38)

La ecuación (2.5) define el ángulo comprendido entre los sistemas de coordenadas antes descritos.

$$\gamma_e = \frac{e_b}{d_b} \quad (2.5)$$

La expresión matemática (2.6) representa el espesor del diente en el círculo base (e_b).

$$e_b = d_b \cdot \left[\frac{e}{d} + \text{inv}(\alpha_t) \right] \quad (2.6)$$

La ecuación (2.7) determina el espesor del diente en el círculo primitivo (e).

$$e = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha \right) \quad (2.7)$$

2.1.2. Ecuación de la Evolvente Alargada.

La evolvente alargada es una curva que permite describir a la curva trocoidal, para poder encontrarla se parte del esquema mostrado en la Figura 2-3, donde se presenta el modelo de engrane de una cremallera con un engranaje, el cual consta de un plano (vista en la Figura 2-3 como línea de paso) que se mueve en trayectoria rectilínea de tal manera que ocasiona el giro del cilindro sin deslizamiento (Infanzón 2010: 39).

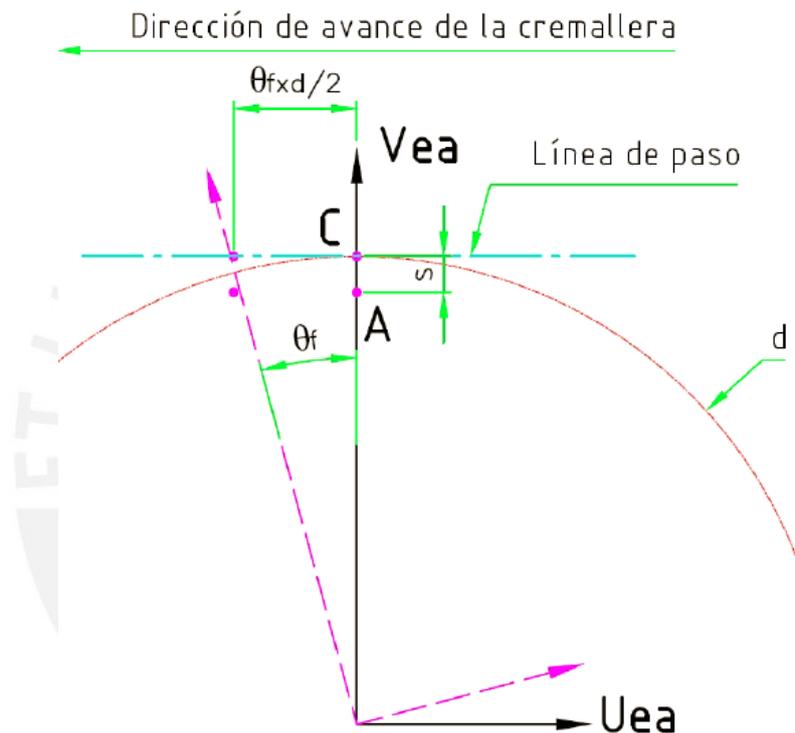


Figura 2-3: Modelo de engrane cremallera-engranaje (Infanzón 2010: 39)

Además, si en el modelo se toma un punto “A” a una distancia “s” por debajo del punto “C” y se desplaza la cremallera una longitud $\theta_f \cdot d/2$ haciendo girar el cilindro un ángulo θ_f , y adicionalmente se retorna el modelo a su posición original al girar el conjunto cremallera y engranaje el mismo ángulo pero en sentido contrario, como se muestra en la Figura 2-4, la curva descrita por el punto “A” para cualquier parámetro θ_f se denomina evolvente alargada (Infanzón 2010: 40-41). De este modo, las ecuaciones paramétricas (2.8) y (2.9) representan la evolvente alargada.

$$U_{ea}(\theta_f) = \left(\frac{d}{2} - s\right) \cdot \sin \theta_f - \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \cos \theta_f \tag{2.8}$$

$$V_{ea(\theta_f)} = \left(\frac{d}{2} - s\right) \cdot \cos \theta_f + \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \sin \theta_f \quad (2.9)$$

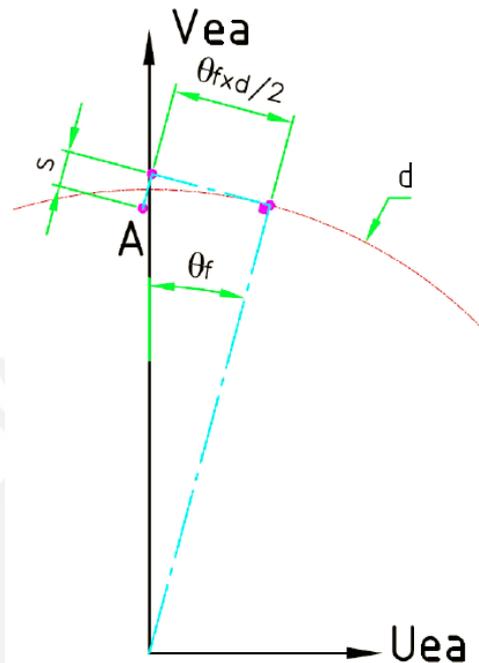


Figura 2-4: Retorno a la posición original (Infanzón 2010: 40)

2.1.3. Ecuación de la Trocoide.

La curva trocoide es la curva generada por el redondeo de la punta de la herramienta de corte, para poder encontrar la expresión matemática que la describe primero se analiza el redondeo de la punta de la herramienta y luego el lugar geométrico de todos los puntos descritos por la misma durante el proceso de fabricación.

En la Figura 2-5, la vista A-A muestra el perfil de la herramienta de corte en verdadera magnitud mientras que la vista B-B es una proyección de la cremallera sobre el plano transversal del engranaje. A partir de esta última vista se entiende que el perfil generado en el engranaje es consecuencia de la interacción con el perfil de la cremallera en el plano transversal. Por ello, se analiza el redondeo de la punta de la herramienta de corte sobre dicho plano y se obtiene una elipse de semiejes a_ρ y b_ρ (Infanzón 2010: 42-43).

$$a_\rho = \frac{m_n \cdot \rho_f}{\cos \beta} \quad (2.10)$$

$$b_{\rho} = m_n \cdot \rho_f \tag{2.11}$$

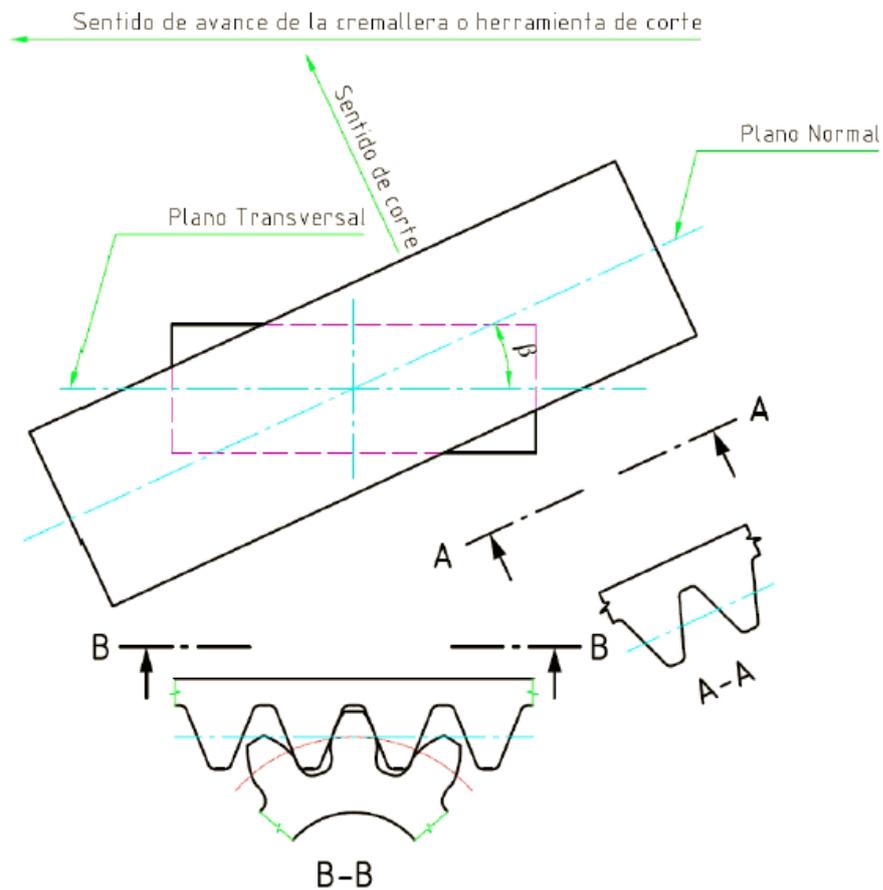


Figura 2-5: Esquema de la generación de un engranaje helicoidal (Infanzón 2010: 42)

La ecuación (2.12) representa el lugar geométrico de todos los puntos comprendidos en la elipse mostrada en la Figura 2-6.

$$\left(\frac{v_{el}}{b_{\rho}}\right)^2 + \left(\frac{u_{el}}{a_{\rho}}\right)^2 = 1 \tag{2.12}$$

La expresión matemática (2.13) se obtiene luego de despejar v_{el} en la ecuación (2.12).

$$v_{el} = \cos \beta \cdot \sqrt{\left(\frac{m_n \cdot \rho_f}{\cos \beta}\right)^2 - u_{el}^2} \tag{2.13}$$

La expresión (2.14) define los límites físicos para el ángulo ψ_{el} .

$$\tan^{-1}(\tan \alpha_n \cdot \cos \beta) \leq \psi_{el} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.14)$$

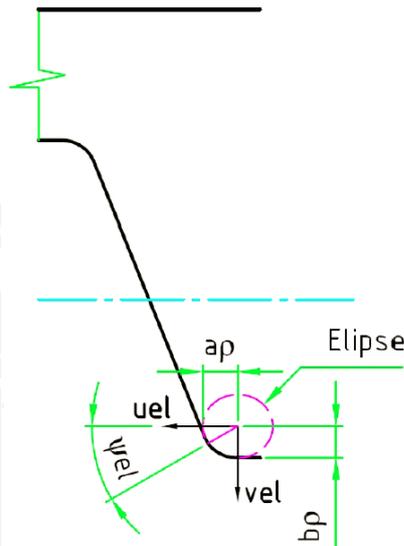


Figura 2-6: Arco de elipse de la punta de la cremallera sobre el plano transversal (Infanzón 2010: 44)

El centro del arco de elipse tiene como lugar geométrico una evolvente alargada, donde la ecuación (2.15) determina el valor de “s” a partir del esquema de la Figura 2-7.

$$s = m_n \cdot (h_a + c_f - \rho_f - x) \quad (2.15)$$

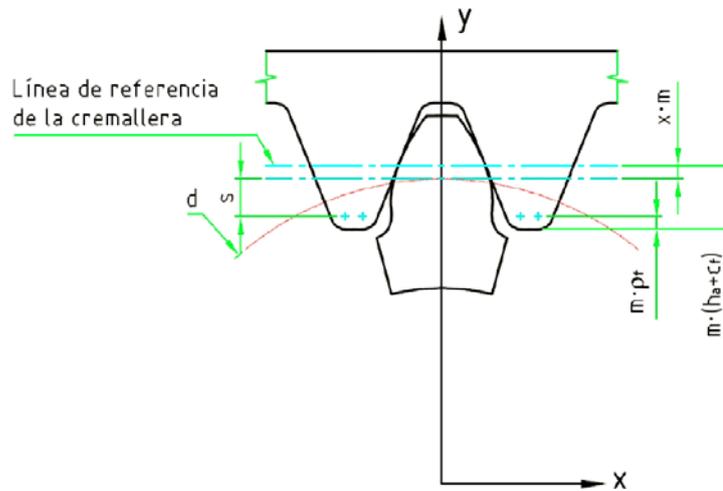


Figura 2-7: Posición de la cremallera respecto al diente (Infanzón 2010: 45)

“La curva generada por el arco de elipse de la herramienta de corte en el plano transversal se obtiene al encontrar en cada instante el punto de la elipse donde la tangente a esta es paralela a la tangente de la evolvente alargada descrita por el centro de la elipse” (Infanzón 2010: 45). En las siguientes líneas se muestran las ecuaciones empleadas para determinar el lugar geométrico de la trocoide.

La ecuación (2.16) representa la pendiente de la recta tangente a la curva generada por el centro del arco de elipse.

$$\tan \phi = \frac{dV_f}{dU_f} = \frac{\frac{dV_f}{d\theta_f}}{\frac{dU_f}{d\theta_f}} = \frac{s \cdot \sin \theta_f + \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \cos \theta_f}{-s \cdot \cos \theta_f + \frac{d}{2} \cdot \theta_f \cdot \sin \theta_f} \quad (2.16)$$

La expresión (2.17) determina la pendiente de la recta tangente al arco de elipse con respecto al sistema de coordenadas u_{el} y v_{el} de la Figura 2-8.

$$\tan \lambda = \frac{dv_{el}}{du_{el}} = - \frac{u_{el} \cdot \cos \beta}{\sqrt{\left(\frac{m_n \cdot \rho_f}{\cos \beta}\right)^2 - u_{el}^2}} \quad (2.17)$$

La fórmula (2.18) se obtiene luego de despejar u_{el} en la ecuación (2.17).

$$u_{el} = \frac{\tan \lambda \cdot \frac{m_n \cdot \rho_f}{\cos \beta}}{\sqrt{\cos^2 \beta + \tan^2 \lambda}} \quad (2.18)$$

La relación entre los ángulos presentes en la Figura 2-8 se muestra en la ecuación (2.19).

$$\lambda = \phi + \theta_f \quad (2.19)$$

El ángulo ϕ al ser una función de θ_f se reemplaza en la ecuación (2.19) y se obtiene al ángulo λ en función de θ_f , para luego sustituirlo en la expresión (2.18) y conseguir que el valor de u_{el} solo dependa del parámetro θ_f . De esta manera, con ayuda de la ecuación (2.13) hallar v_{el} como una función de θ_f y determinar la distancia del punto buscado de la elipse al centro de la misma haciendo uso de la fórmula (2.20).

$$R_{el} = \sqrt{u_{el}^2 + v_{el}^2} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.21) representa al ángulo del punto buscado, ψ_{el}

$$\psi_{el} = \left| \tan^{-1} \left(\frac{v_{el}}{u_{el}} \right) \right| \quad (2.21)$$

Las expresiones (2.22) y (2.23) definen la posición relativa del punto buscado de la elipse respecto a su centro.

$$U_{rel} = R_{el} \cdot \cos(\pi + \psi_{el} - \theta_f) \quad (2.22)$$

$$V_{rel} = R_{el} \cdot \sin(\pi + \psi_{el} - \theta_f) \quad (2.23)$$

Las ecuaciones (2.24) y (2.25) determinan el lugar geométrico de la zona trocoidal.

$$U_f(\theta_f) = U_{ea}(\theta_f) + U_{rel}(\theta_f) \quad (2.24)$$

$$V_f(\theta_f) = V_{ea}(\theta_f) + V_{rel}(\theta_f) \quad (2.25)$$

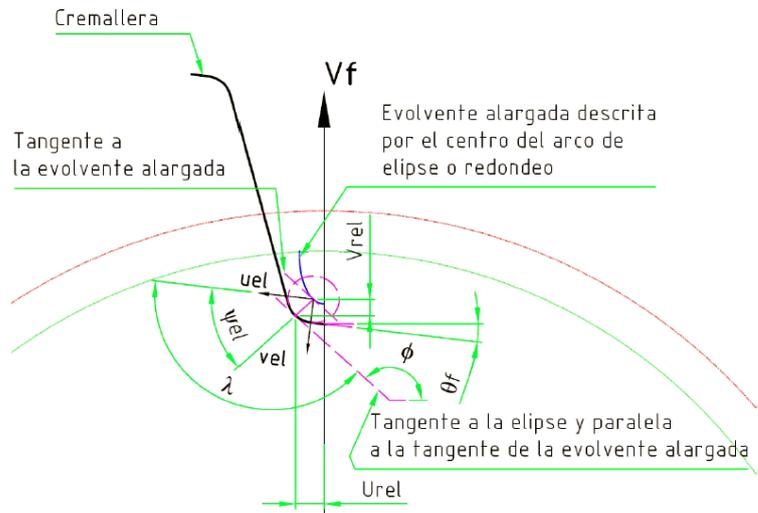


Figura 2-8: Curva de la zona trocoidal (Infanzón 2010: 47)

Como se aprecia en la Figura 2-9 para hacer coincidir el eje de simetría del diente con el eje vertical y , el sistema de coordenadas U_f y V_f debe girar un ángulo γ_f en sentido horario con respecto al sistema de coordenadas x e y (Infanzón 2010: 47). De esta manera, las ecuaciones paramétricas (2.26) y (2.27) describen la curva trocoidal en el sistema de coordenadas x e y .

$$x_{f(\theta_f)} = U_{f(\theta_f)} \cdot \cos \gamma_f + V_{f(\theta_f)} \cdot \sin \gamma_f \tag{2.26}$$

$$y_{f(\theta_f)} = V_{f(\theta_f)} \cdot \cos \gamma_f - U_{f(\theta_f)} \cdot \sin \gamma_f \tag{2.27}$$

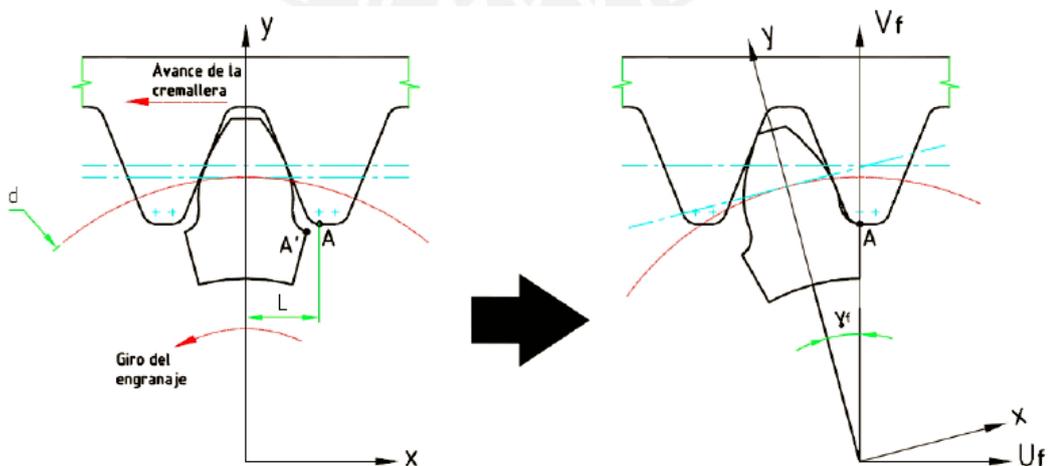


Figura 2-9: Relación entre sistemas de coordenadas (Infanzón 2010: 48)

La ecuación (2.28) define el ángulo comprendido entre los sistemas de coordenadas antes mencionados.

$$\gamma_f = \frac{L}{d/2} = \frac{\frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + (h_a + c_f - \rho_f) \cdot \tan \alpha_n + \frac{\rho_f}{\cos \alpha_n} \right]}{\frac{d}{2}} \quad (2.28)$$

2.2. Determinación de la posición crítica para esfuerzo de contacto y para esfuerzo de flexión.

La simulación de elementos finitos del juego de engrane se realiza en su posición más crítica, es decir, el instante donde los esfuerzos se tornan lo máximo posible de todo el proceso de engrane. Para poder determinar dicho instante, se analizan las expresiones de cálculo de los modelos empleados por la norma, para representar tanto al esfuerzo de contacto como al esfuerzo de flexión, con el fin de maximizarlas y obtener la ubicación crítica a simular, es importante tener en cuenta la posibilidad de una ubicación crítica para esfuerzos de contacto y otra para esfuerzos de flexión, es decir, que no coincidan los instantes críticos, pues ambos esfuerzos se deben al análisis de fenómenos diferentes. En las siguientes líneas, se plasman las expresiones matemáticas de los modelos utilizados por la norma, para su posterior análisis y así poder determinar el instante crítico a simular.

2.2.1. Ubicación crítica para esfuerzo de contacto.

La determinación analítica del instante crítico para el esfuerzo de contacto es un tanto complicado de evaluar, pues va a depender de la porción de la carga que actúa sobre cada diente, y si esta carga actuante, en cada uno de los dientes, no presenta un valor constante a lo largo del engrane (Infanzón 2010: 58). Además, de la geometría del diente en la zona de contacto, es decir, del perfil del flanco del diente. Todo ello, permite poder entender que la ubicación crítica debe ser hallada a partir del modelo utilizado por la norma, pero realizando el análisis durante el proceso de engrane, es decir, en cada punto de contacto, con el fin de encontrar el instante donde se maximice al esfuerzo máximo de contacto descrito mediante la expresión (1.26). En dicha ecuación se percibe que los únicos parámetros que se ven afectados por la posición de engrane son el radio reducido (ρ_{red}) y la longitud de contacto (l_c), por consiguiente, en las siguientes líneas se analizan las variables mencionadas desde el inicio de contacto hasta el fin de contacto, para luego agrupar, en un solo gráfico, la

influencia de ambas variables y determinar el instante crítico. Es importante resaltar que el radio reducido, en la expresión (1.26), representa la influencia de una pareja de dientes del juego de engrane, durante el proceso de engrane, en cambio, la longitud de contacto representa la influencia de varios dientes en contacto, importante de tener en cuenta en engranajes de diente helicoidal, es decir, se va a considerar, en vez de una longitud de contacto (l_c), una longitud de contacto sumaria (l_Σ). Dicho esto se obtiene la expresión (2.29).

$$\sigma_{H \max} = \sqrt{\frac{E_1 \cdot E_2}{\pi \cdot [E_1 \cdot (1 - \nu_2^2) + E_2 \cdot (1 - \nu_1^2)]} \cdot \frac{2 \cdot F_n}{l_\Sigma \cdot \rho_{red}}} \quad (2.29)$$

Además, la expresión (2.29) alcanza su mayor valor, para un torque constante, con los mínimos valores de los parámetros ρ_{red} y l_Σ (Infanzón 2010: 59).

2.2.1.1. El cambio del radio reducido durante el engrane.

El radio reducido presenta una variación a lo largo del proceso de engrane, para poder determinar los parámetros de la ecuación (1.27) se parte del esquema planteado en la Figura 2-10, en donde se toma un punto de contacto cualquiera, denominado Q, sobre la línea de engrane, y además “se muestran a los radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 de los perfiles de evolvente de ambos engranajes en dicho punto de contacto” (Infanzón 2010: 59). De la figura, se observa que la suma de los radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 , equivalente a la distancia comprendida entre los puntos T_1 y T_2 , siempre se mantiene constante muy al margen de tener valores de radios de curvatura cambiantes durante el engrane. La expresión analítica (2.30) determina la suma de los radios de curvatura ρ_1 y ρ_2 .

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{d_1 \cdot \tan \alpha'_t \cdot \cos \alpha_t \cdot (u + 1)}{2} \quad (2.30)$$

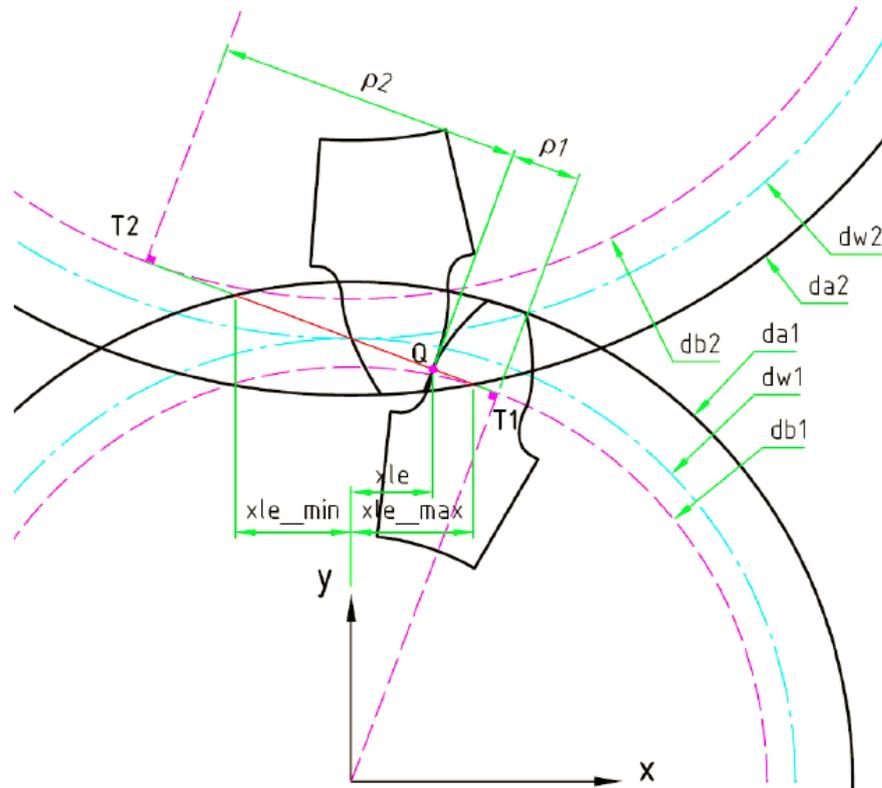


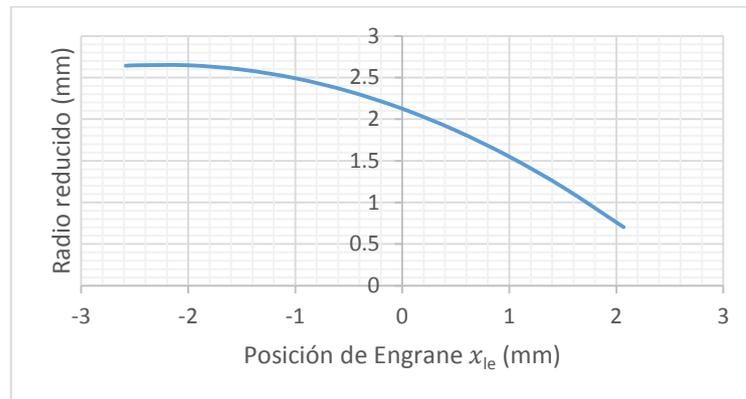
Figura 2-10: Esquema de radios de curvatura (Infanzón 2010: 60)

Una vez obtenida la suma de los radios de curvatura se proceda a calcular, de forma individual, a cada radio de curvatura en base al esquema mostrado en la Figura 2-10. Las ecuaciones (2.31) y (2.32) representan los radios mencionados para cualquier punto sobre la línea de engrane en función de la variable x_{le} .

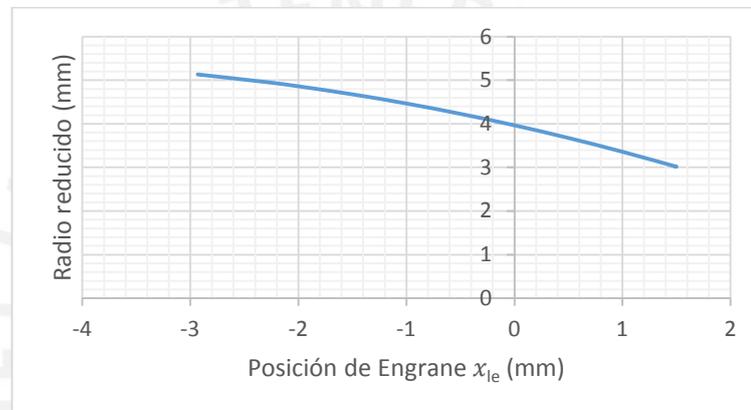
$$\rho_1(x_{le}) = \frac{d_1 \cdot \tan \alpha'_t \cdot \cos \alpha_t}{2} \mp \frac{x_{le}}{\cos \alpha'_t} \quad (2.31)$$

$$\rho_2(x_{le}) = \frac{d_2 \cdot \tan \alpha'_t \cdot \cos \alpha_t}{2} \pm \frac{x_{le}}{\cos \alpha'_t} \quad (2.32)$$

Finalmente, se procede a graficar al radio reducido en función de la posición de contacto x_{le} , desde el inicio hasta el fin de contacto de una pareja de dientes, considerando un sentido de giro anti horario en el piñón. De la Figura 2-11, se concluye que el mínimo valor del radio reducido se presenta al inicio de contacto de un par de dientes.



a. ($m=1\text{mm}$, $z_1=18$, $z_2=47$, $x_1=0.1$, $x_2=-0.5$, $\beta=15^\circ$)



b. ($m=1\text{mm}$, $z_1=29$, $z_2=91$, $x_1=0.5$, $x_2=-0.1$, $\beta=0^\circ$)

Figura 2-11: Radio reducido en función de la variable x_{1e}

2.2.1.2. El cambio de la longitud de contacto sumaria durante el engrane.

La longitud de contacto sumaria varía a lo largo del proceso de engrane, tanto en engranajes de diente recto como de diente helicoidal. Para poder determinar la ecuación que engloba este parámetro se parte del esquema mostrado en la Figura 2-12, donde se visualiza al plano de engrane en verdadera magnitud así como a su intersección con el diente de un engranaje, lo cual se muestra en la figura como una línea recta; línea que representa al lugar geométrico de todos los puntos en contacto con el otro diente. Además, la inclinación de dicha recta respecto al eje del engranaje viene a ser el ángulo de la hélice en el diámetro básico (Infanzón 2010: 62).

Las ecuaciones (2.33), (2.34) y (2.35) se obtienen luego de analizar, en la Figura 2-12, las diversas posibilidades para determinar la línea de contacto durante el proceso de engrane, y se establecen 3 formas de cálculo en función de la posición de engrane. Para el primer caso, se tiene en cuenta que al inicio del contacto, entre dos dientes,

solo una parte de los mismos entran en contacto. Para el segundo caso, se considera que los dientes se encuentran completamente en contacto. Finalmente, para el último caso, se tiene en cuenta que al término del contacto, solo una parte de los mismos termina de estar en contacto. La longitud de contacto de un diente para una determinada posición de engrane se determina con la ayuda de las siguientes expresiones.

- Si $0 \leq p_{eng} \leq b \cdot \tan \beta_b \wedge p_{eng} \leq L_{eng}$:

$$l_c = \frac{p_{eng}}{\sin \beta_b} \tag{2.33}$$

- Si $b \cdot \tan \beta_b \leq p_{eng} \leq L_{eng}$:

$$l_c = \frac{b}{\cos \beta_b} \tag{2.34}$$

- Si $L_{eng} \leq p_{eng} \leq L_{eng} + b \cdot \tan \beta_b$:

$$l_c = \frac{L_{eng} - (p_{eng} - b \cdot \tan \beta_b)}{\sin \beta_b} \tag{2.35}$$

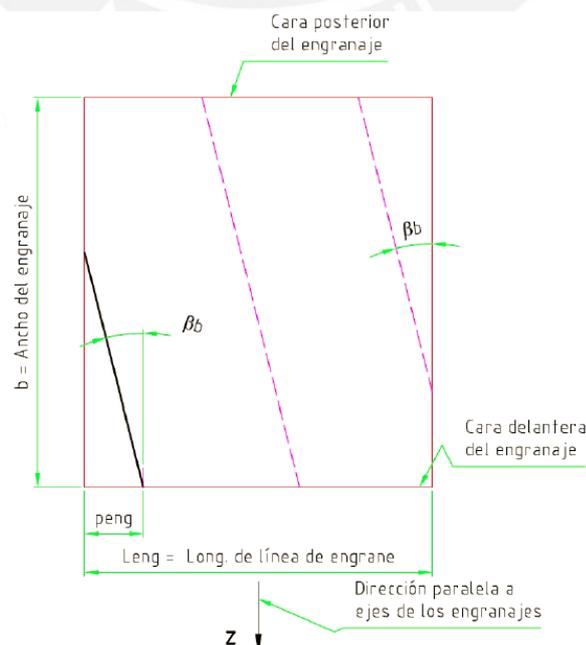


Figura 2-12: Plano de engrane en verdadera magnitud (Infanzón 2010: 62)

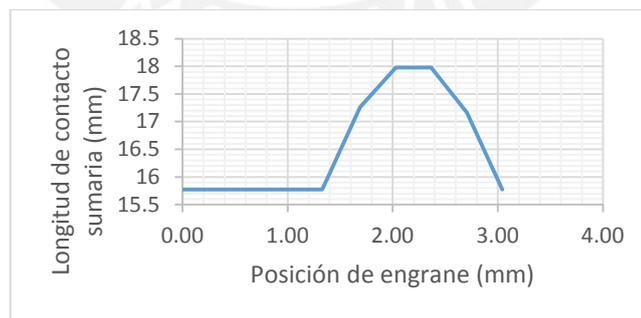
Al tener varios dientes en contacto, la longitud de contacto sumaria se obtiene al sumar las longitudes de contacto de cada uno de los dientes que se encuentran engranando.

$$l_{\Sigma} = l_{c1} + l_{c2} + l_{c3} + \dots \quad (2.36)$$

Finalmente, se procede a graficar la longitud de contacto sumaria en función de la posición de engrane (p_{eng}), desde el inicio de contacto hasta que se recorra un paso básico circunferencial o paso de engrane (p_{bt}), pues el comportamiento de l_{Σ} es el mismo en cada paso.

$$p_{bt} = m \cdot \pi \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \beta} \quad (2.37)$$

En general, de la Figura 2-13, se observa que para un engranaje helicoidal la longitud de contacto sumaria presenta su mínimo valor al inicio del contacto de un par de dientes y cuando un nuevo par empieza a engranar (Infanzón 2010: 65). En cambio, para un engranaje de diente recto la longitud de contacto sumaria presenta su mínimo valor luego de que un par de dientes termine de engranar.



a. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=18$, $z_2=47$, $x_1=0.1$, $x_2=-0.5$, $\beta=15^\circ$)



b. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=29$, $z_2=91$, $x_1=0.5$, $x_2=-0.1$, $\beta=0^\circ$)

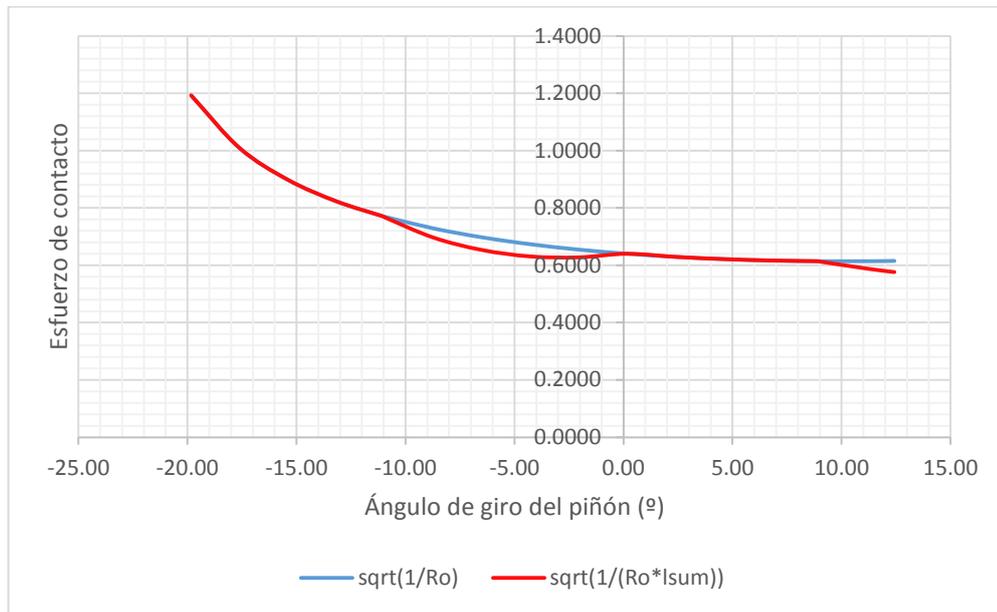
Figura 2-13: Longitud de contacto sumaria en función de la posición de engrane (p_{eng})

2.2.1.3. Agrupación de parámetros para determinar el instante crítico de contacto.

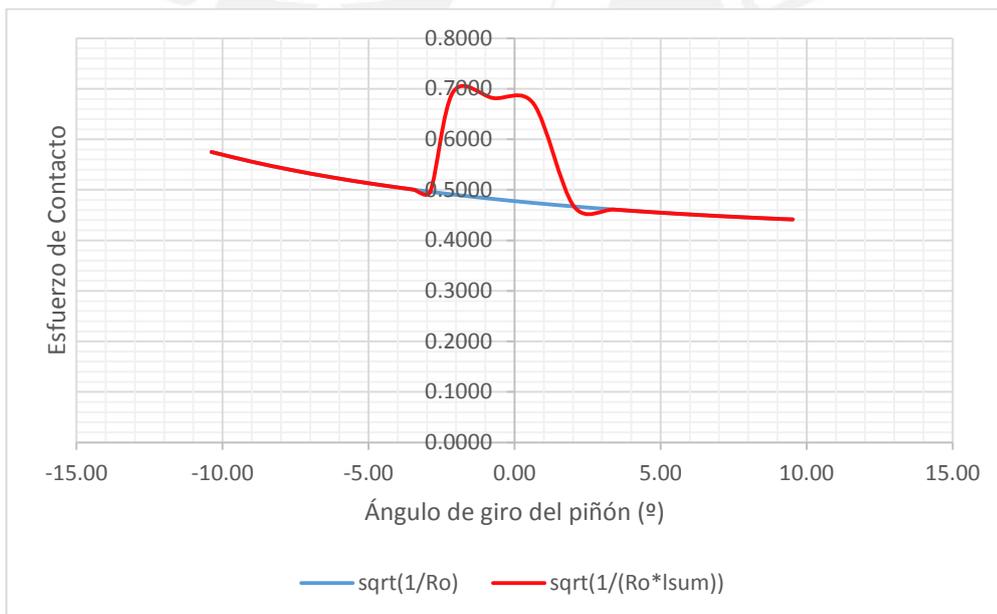
La agrupación de los parámetros que varían durante el proceso de engrane es necesario para determinar la posición crítica del esfuerzo de contacto. Al ser el radio reducido y la longitud de contacto sumaria los únicos parámetros que se ven afectados, mientras que el resto se mantiene constante, la ecuación del esfuerzo de contacto máximo (2.29) se reduce a la expresión analítica (2.38), donde la constante “k” representa a todas las variables independientes del proceso de engrane. Además, la constante “k” al no interferir en la determinación del instante crítico, para efectos del cálculo, se considera igual a la unidad.

$$\sigma_{H \max} = k \sqrt{\frac{1}{l_{\Sigma} \cdot \rho_{red}}} \quad (2.38)$$

En la figura 2-14, se muestra la variación del esfuerzo de contacto, hallado mediante la ecuación (2.38), en función del ángulo de giro del piñón desde el inicio hasta el fin de contacto, donde la curva azul solo considera la influencia del radio reducido, es decir, asume una l_{Σ} constante, lo cual realmente no ocurre, y la curva roja toma en cuenta la influencia de ambos parámetros. Además, es importante mencionar que esta última se multiplicó por un factor de escala con el fin de que ambas curvas se traslapen y así poder visualizar de qué manera influye l_{Σ} en el esfuerzo de contacto. Finalmente, a partir de las gráficas, se concluye que para engranajes de diente helicoidal el esfuerzo de contacto crítico se da al inicio de contacto de un par de dientes, en cambio, para engranajes de diente recto se da luego de que un par de dientes termine de engranar.



a. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=18$, $z_2=47$, $x_1=0.1$, $x_2=-0.5$, $\beta=15^\circ$)



b. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=29$, $z_2=91$, $x_1=0.5$, $x_2=-0.1$, $\beta=0^\circ$)

Figura 2-14: Esfuerzo de contacto en función del ángulo de giro del piñón

2.2.2. Ubicación crítica para esfuerzo de flexión.

La determinación del instante crítico para el esfuerzo de flexión es un tanto difícil de evaluar, pues va a depender de la posición del punto de contacto sobre la línea de engrane, la geometría del flanco del diente, la cantidad de dientes en contacto y la porción de carga que incide sobre cada uno de los mismos. Todo ello permite entender que una manera viable de hallar la ubicación crítica es a partir del modelo empleado por la norma, pero realizando el análisis durante el proceso de engrane, es decir, en

cada punto de contacto, con el fin de encontrar el instante donde se maximice el esfuerzo de flexión descrito mediante la expresión (1.37).

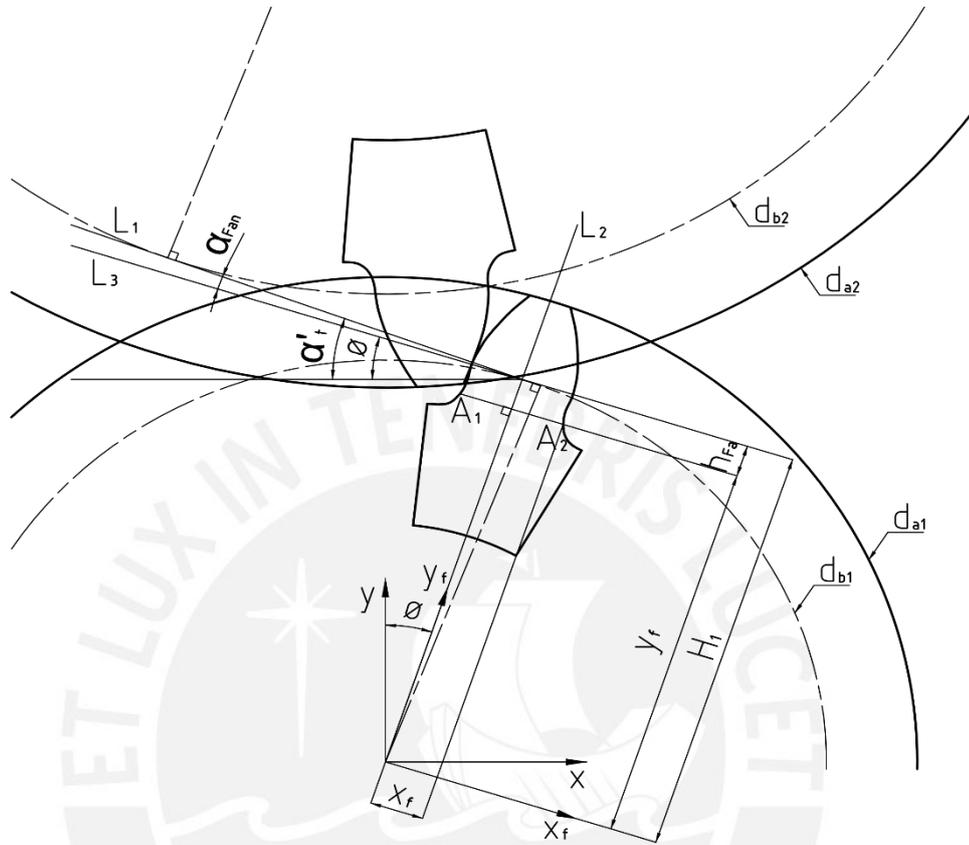
En dicha ecuación se observa que los parámetros que se ven afectados por la posición de engrane son el ángulo de incidencia de la fuerza normal (α_{Fan}), la altura desde la zona analizada de la curva trocoidal hasta el punto de intersección de la línea de acción y el eje de simetría del diente (h_{Fa}) y el espesor del diente en la zona analizada (s_{Fn}), por consiguiente, en las siguientes líneas se analizan las variables mencionadas desde el inicio de contacto hasta el fin de contacto, para luego agrupar, en un solo gráfico, la influencia de las mismas y determinar el instante crítico. Es importante mencionar que el primer término en corchetes, de la ecuación (1.37), representa la carga distribuida a lo largo del diente analizado, ello debido a que el modelo planteado por Wilfred Lewis considera “la semejanza existente entre una barra prismática con carga en voladiza y el diente de un engranaje con carga aplicada en el extremo exterior” (Cotaquispe 2004: 18), sin embargo, si se quiere realizar el análisis de dientes helicoidales conviene generalizarla y replantearla, en la ecuación (1.37), como una carga distribuida a lo largo de la línea de contacto sumaria (F_n/l_Σ), donde l_Σ simboliza la influencia de varios dientes en contacto en el esfuerzo de flexión. El segundo término en corchetes, al cual llamaremos en adelante relación altura-espesor (r_{hs}), representa la influencia, en el esfuerzo de flexión, de una pareja de dientes del juego de engrane a lo largo del contacto. Dicho esto, se obtiene la ecuación (2.39).

$$\sigma_F = 6 \cdot \left(\frac{F_n}{l_\Sigma} \right) \cdot r_{hs} \quad (2.39)$$

2.2.2.1. El cambio de la relación altura-espesor durante el engrane.

La relación altura-espesor cambia a lo largo del proceso de engrane, para poder determinar los parámetros de la expresión analítica que la define, es decir, de la ecuación (2.40), se parte del esquema planteado en la Figura 2-15.

$$r_{hs} = \frac{\cos \alpha_{Fan} \cdot h_{Fa}}{s_{Fn}^2} \quad (2.40)$$



Tramo A1A2: Sección analizada de la Trocoide

Figura 2-15: Esquema de la relación de altura-espesor

Para ello, primero se determina la altura desde la zona analizada de la curva trocoidal hasta el punto de intersección de la línea de acción y el eje de simetría del diente (h_{Fa}), como resultado de la diferencia de las variables H_1 e y_f , para luego definir el espesor de la sección a analizar (s_{Fn}), a partir de la variable x_f . Finalmente, calcular el ángulo de incidencia de la fuerza normal (α_{Fan}), comprendido entre las líneas L_1 y L_3 , como la diferencia de α'_t y ϕ . De esta manera, la ecuación (2.45) representa la relación altura-espesor, para diferentes puntos de contacto, en función de las variables mencionadas.

$$H_1 = \frac{d'_1 \cdot \sqrt{1 + \tan^2(90 - \phi)}}{2 \cdot (\tan \alpha'_t + \tan(90 - \phi))} \quad (2.41)$$

$$h_{Fa} = H_1 - y_f \quad (2.42)$$

$$s_{Fn} = 2 \cdot x_f \quad (2.43)$$

$$\alpha_{Fan} = \alpha'_t - \phi \quad (2.44)$$

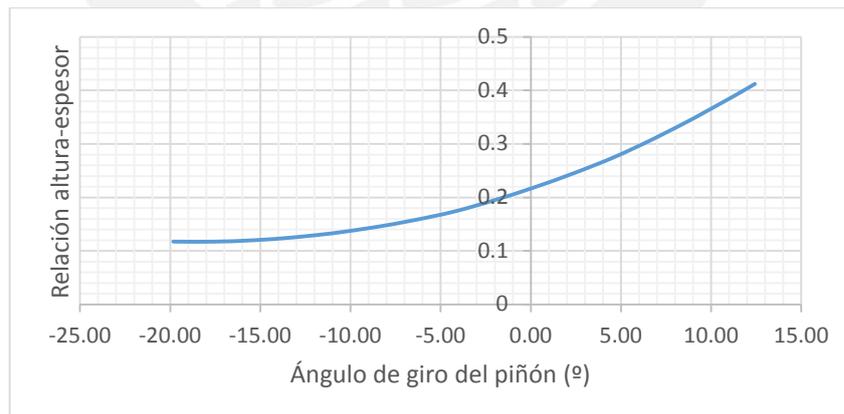
$$r_{hs} = \frac{(H_1 - y_f) \cdot \cos(\alpha'_t - \phi)}{(2 \cdot x_f)^2} \quad (2.45)$$

H_1 : Distancia entre el punto "1" y el origen de coordenadas.

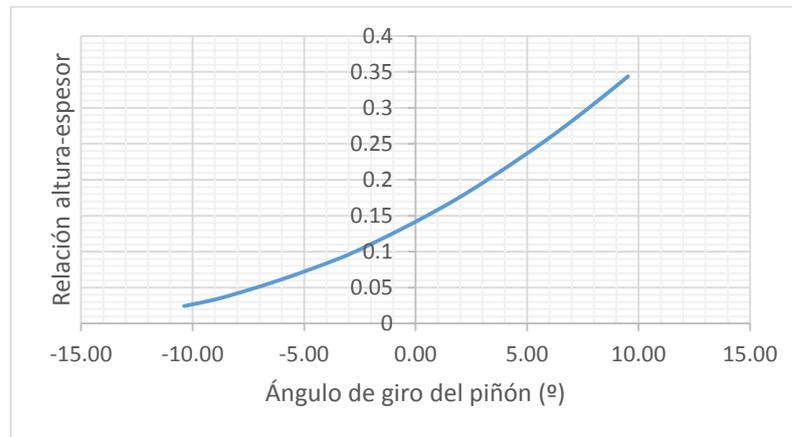
ϕ : Ángulo de giro del eje de simetría del diente del piñón en la posición de contacto.

x_f, y_f : Posición del punto analizado de la curva trocoidal respecto al sistema x_f e y_f .

Además, es importante mencionar que para cada posición de contacto se debe analizar las diferentes secciones de la curva trocoidal, pues no siempre el caso más desfavorable se presenta en el fondo del diente. Finalmente, se procede a graficar la relación altura-espesor en función del ángulo de giro del piñón, desde el inicio hasta el fin de contacto de una pareja de dientes, teniendo en cuenta un sentido de giro anti horario para el mismo. De la Figura 2-16, se deduce que el máximo valor de r_{hs} se presenta al fin de contacto de un par de dientes.



a. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=18$, $z_2=47$, $x_1=0.1$, $x_2=-0.5$, $\beta=15^\circ$)



b. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=29$, $z_2=91$, $x_1=0.5$, $x_2=-0.1$, $\beta=0^\circ$)

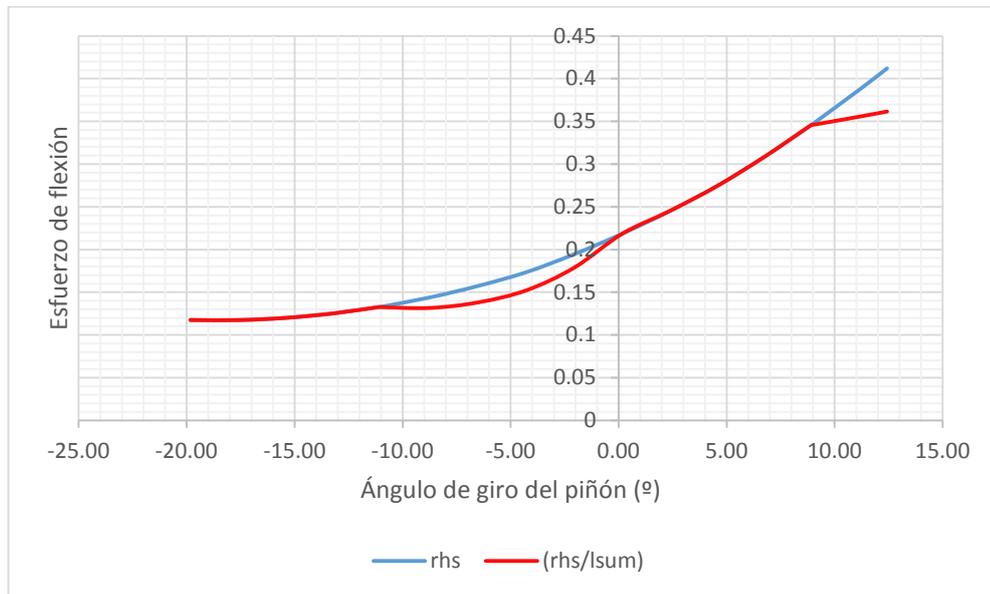
Figura 2-16: Relación altura-espesor en función del ángulo de giro del piñón (ϕ)

2.2.2.2. Agrupación de parámetros para determinar el instante crítico de flexión.

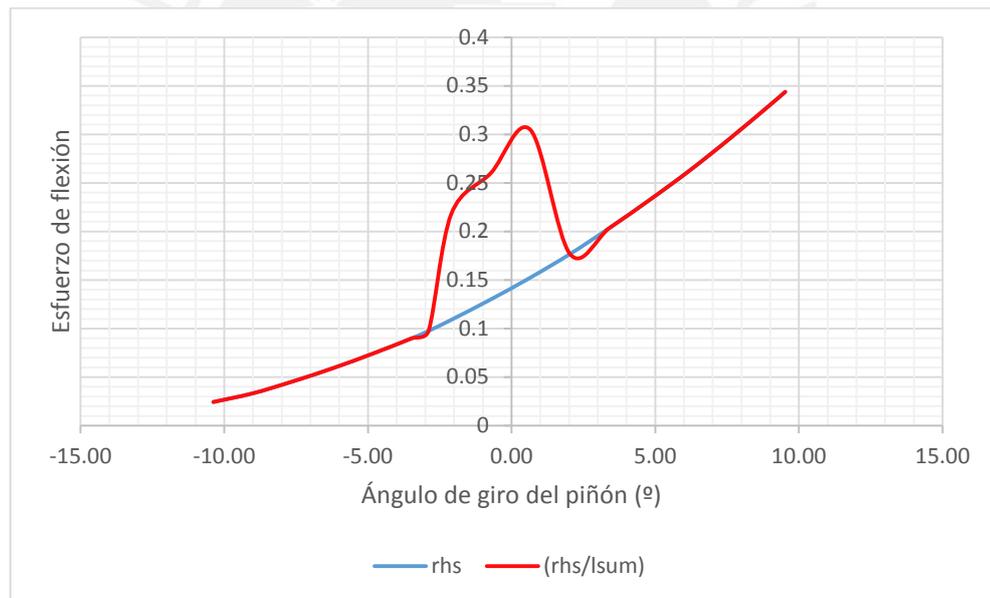
La agrupación de los parámetros que varían durante el proceso de engrane es necesario para poder encontrar la posición crítica del esfuerzo de flexión. Al ser la relación altura-espesor y la longitud de contacto sumaria los únicos parámetros que se ven afectados, mientras que el resto se mantiene constante, la ecuación del esfuerzo de flexión (2.39) se reduce a la expresión analítica (2.46), donde la constante “m” representa a todas las variables independientes del proceso de engrane. Además, la constante “m” al no interferir en la determinación del instante crítico, para efectos del cálculo, se considera igual a la unidad.

$$\sigma_F = m \cdot \frac{r_{hs}}{l_\Sigma} \quad (2.46)$$

En la figura 2-17, se visualiza la variación del esfuerzo de flexión, calculado a partir de la ecuación (2.46), en función del ángulo de giro del piñón desde el inicio hasta el fin de contacto, donde la curva azul solo considera la influencia de la relación altura-espesor, es decir, asume una l_Σ constante, lo cual realmente no ocurre, en cambio, la curva roja toma en cuenta la influencia de ambos parámetros. Además, es importante comentar que esta última se multiplicó por un factor de escala, con el fin de que ambas curvas se traslapen y así poder visualizar la influencia de l_Σ en el esfuerzo de flexión. Finalmente, a partir de las gráficas, se concluye que el esfuerzo de flexión crítico se da al fin de contacto de un par de dientes.



a. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=18$, $z_2=47$, $x_1=0.1$, $x_2=-0.5$, $\beta=15^\circ$)



b. ($m=1\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $z_1=29$, $z_2=91$, $x_1=0.5$, $x_2=-0.1$, $\beta=0^\circ$)

Figura 2-17: Esfuerzo de flexión en función del ángulo de giro del piñón

2.3. Macro para la generación del modelo geométrico.

Para la simulación de un juego de engrane se requiere un modelo geométrico obtenido a partir de las ecuaciones paramétricas, del perfil evolvente y de la curva trocoidal, halladas en investigaciones anteriores a la presente tesis, lo cual es de suma importancia pues si se desea hallar un factor geométrico unificado a partir de los resultados obtenidos en la simulación, es relevante que dicho modelo considere la geometría real del diente. Además, por la gran cantidad de juegos a simular era

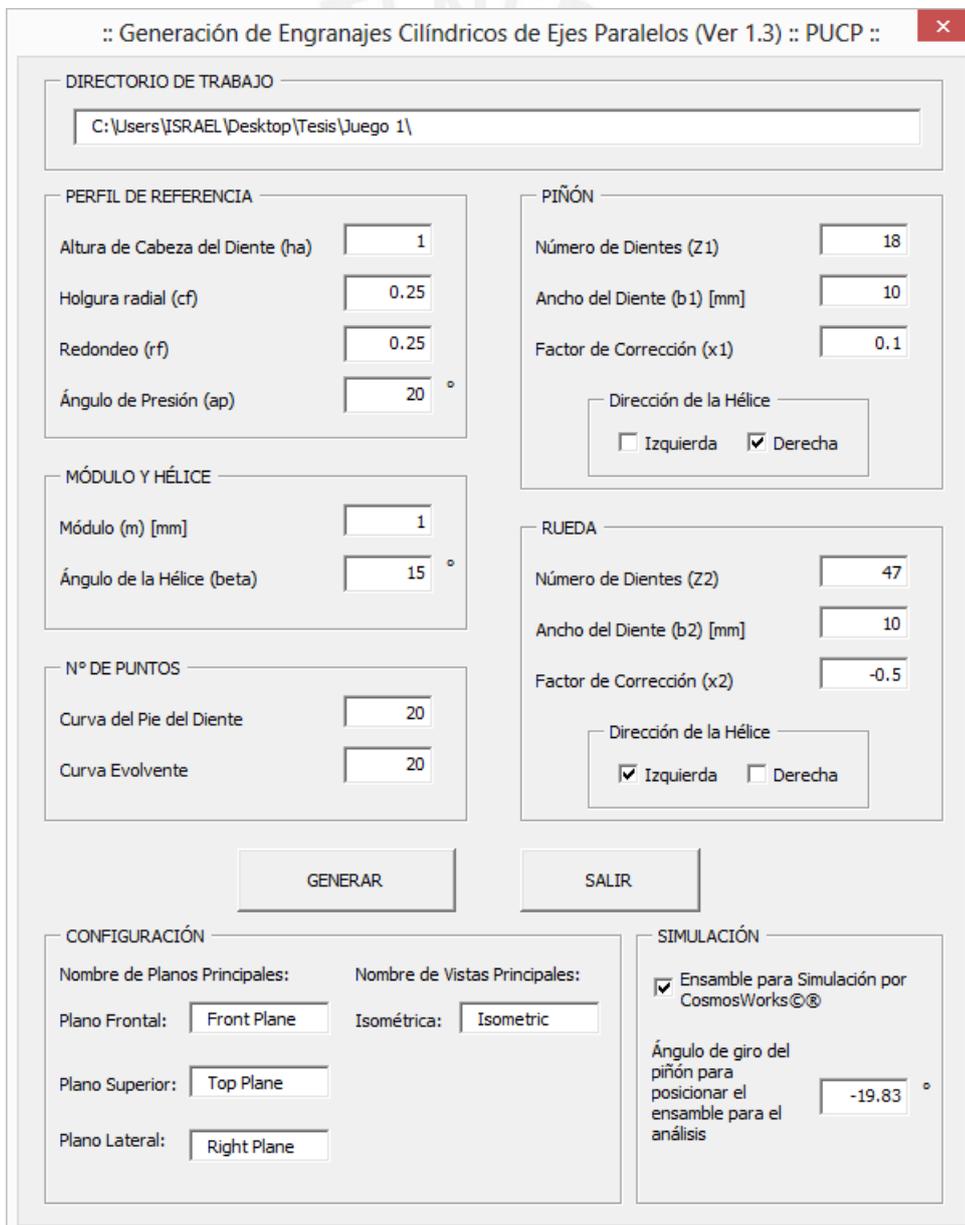
conveniente contar con una macro capaz de generar de forma automática las parejas de engrane y a su vez consideré la geometría real del diente. Dicho esto, en la investigación realizada por el Ing. Luis Hernán Infanzón para optar el grado de Ingeniero Mecánico, se obtuvo como entregable de la tesis un algoritmo automatizado que permite “generar un par cualquiera de engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente” (Infanzón 2010: 55) en la versión 2009 del software SolidWorks. La macro al ser realizada en una versión antigua del software se creyó en un inicio que iba a presentar ciertos inconvenientes al momento de generar la geometría, por ello, se planteó como un objetivo específico, el revisar y poner a punto la macro desarrollada para la obtención de los modelos geométricos a simular, sin embargo, solo se realizaron correcciones a nivel de funciones de forma, desactivando enganches; a la fecha sigue funcionando correctamente en la obtención de las parejas de engrane a simular.

Importante señalar el ingreso de un grupo de parámetros necesarios para la obtención del modelo geométrico como son los parámetros del perfil de referencia, el número de dientes, el factor de corrección, el ancho del diente, el ángulo de la hélice, así como la dirección del mismo (izquierda o derecha). El fijar los parámetros del perfil de referencia permite obtener un factor geométrico unificado para las condiciones establecidas, es absurdo, simular distintos tipos de perfil y a partir de los resultados pretender hallar un solo factor unificado, pues el comportamiento del factor va a depender del perfil con el cual es generado el engranaje, por ello, se establecen los siguientes parámetros en los modelos geométricos generados mediante la macro.

Tabla 2-1: Parámetros de los modelos geométricos

Parámetro	Magnitud
Módulo (mm)	1
Ángulo de perfil ($^{\circ}$)	20
Altura de la cabeza del diente (h_a)	1
Holgura radial (c_f)	0.25
Redondeo del pie del diente (ρ_f)	0.25
Ancho del diente (mm)	10
Dirección de la hélice del piñón	Derecha
Dirección de la hélice del engranaje	Izquierda

Además de lo ya comentado, la macro tiene la posibilidad de entregar un ensamble de los dientes que se encuentran en contacto, lo cual es muy conveniente para la simulación, pues simular la geometría completa de ambos engranajes requiere una gran cantidad de elementos finitos, y siendo mi zona de interés solo la de los dientes en contacto, resulta una excelente alternativa para simular, pues reduce considerablemente el tiempo computacional, lo cual permite tener una mayor densidad de malla en mi zona de interés y así obtener resultados más precisos, sin tener simulaciones de largo aliento por la gran cantidad de elementos.



:: Generación de Engranajes Cilíndricos de Ejes Paralelos (Ver 1.3) :: PUCP ::

DIRECTORIO DE TRABAJO
C:\Users\ISRAEL\Desktop\Tesis\Juego 1\

PERFIL DE REFERENCIA

Altura de Cabeza del Diente (ha)

Holgura radial (cf)

Redondeo (rf)

Ángulo de Presión (ap) °

MÓDULO Y HÉLICE

Módulo (m) [mm]

Ángulo de la Hélice (beta) °

N° DE PUNTOS

Curva del Pie del Diente

Curva Evolvente

PIÑÓN

Número de Dientes (Z1)

Ancho del Diente (b1) [mm]

Factor de Corrección (x1)

Dirección de la Hélice
 Izquierda Derecha

RUEDA

Número de Dientes (Z2)

Ancho del Diente (b2) [mm]

Factor de Corrección (x2)

Dirección de la Hélice
 Izquierda Derecha

CONFIGURACIÓN

Nombre de Planos Principales: Nombre de Vistas Principales:

Plano Frontal: Isométrica:

Plano Superior:

Plano Lateral:

SIMULACIÓN

Ensamble para Simulación por CosmosWorks®

Ángulo de giro del piñón para posicionar el ensamble para el análisis °

GENERAR **SALIR**

Figura 2-18: Interfaz de usuario de la macro de SolidWorks

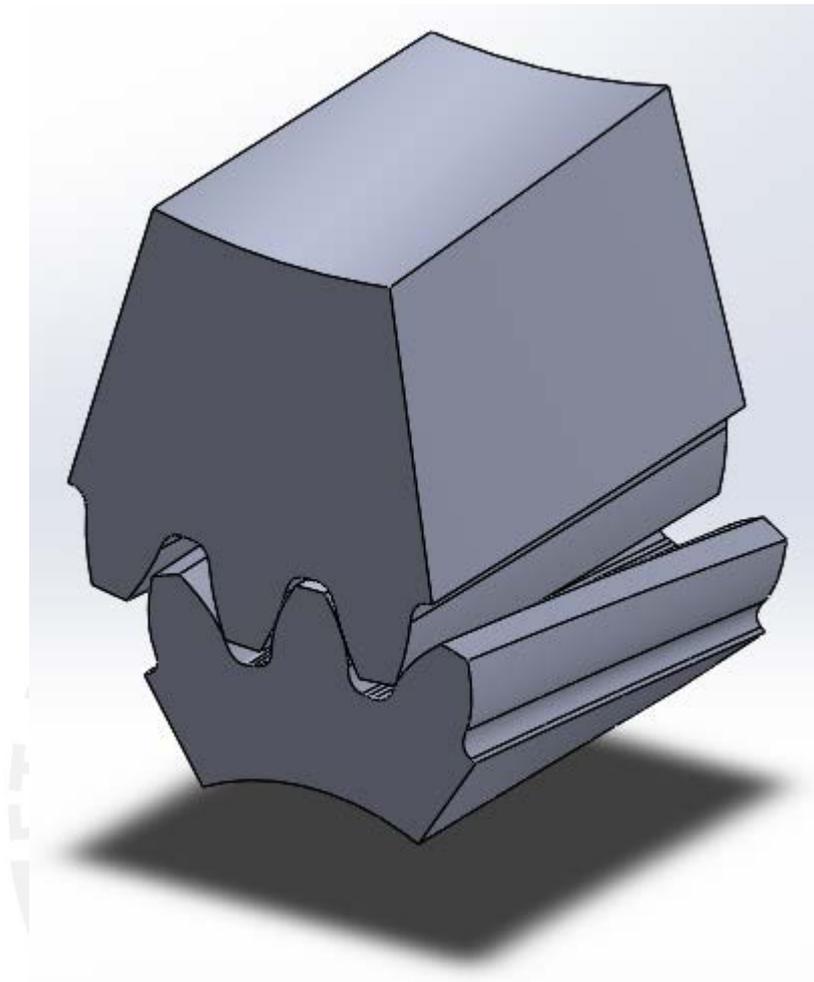


Figura 2-19: Modelo geométrico de la pareja de engrane a simular

CAPÍTULO 3

3. ANÁLISIS DE ESFUERZOS DE CONTACTO Y DE FLEXIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA.

3.1. Modelo de elementos finitos.

El siguiente paso, luego de obtener el modelo geométrico de la pareja de engrane generada por la macro, es la determinación del modelo de elementos finitos, donde es de suma importancia representar el fenómeno que acontece durante la interacción de varios dientes del juego de engrane. Al ser el contacto entre superficies una de las consideraciones principales en la simulación de engranajes, pues define la precisión de los resultados obtenidos en la simulación, debe ser estudiado y profundizado para lograr obtener resultados coherentes con el comportamiento real de lo que se busca plasmar en el software.

Para ello, en el laboratorio INACOM, se cuenta con el software de simulación numérica ANSYS, el cual consta de una serie de módulos relacionados con el tipo de análisis a realizar, es decir, con el tipo de fenómeno que se busca representar. Dentro de los mismos, se tiene el análisis estático estructural, *Static Structural*, el cual “determina los desplazamientos, esfuerzos, deformaciones y fuerzas en estructuras o componentes provocadas por cargas que no inducen inercia significativa y efectos de amortiguación” (Ansys 2013a: 203). A partir de ello, en vista que la tesis solo aborda simulaciones estáticas, instante crítico del esfuerzo de contacto y del esfuerzo de flexión, y en líneas generales cuerpos sólidos que interactúan bajo la influencia de determinadas cargas, se vio conveniente utilizar un análisis estático estructural.

Una vez definido el tipo de análisis a realizar se pasa a definir las propiedades mecánicas del material de la pareja de engrane, el mallado de elementos finitos, las condiciones de contactos presentes en el fenómeno a simular, las restricciones de los nodos de los elementos finitos generados, la aplicación de las cargas teniendo en cuenta el equilibrio del sistema, así como ciertos ajustes realizados al procedimiento de cálculo de la simulación con el fin de reducir el tiempo computacional, para luego ya en el post-proceso, investigar en el software la forma de plotear los resultados que permitan visualizar el fenómeno de flexión y de contacto en engranajes cilíndricos.

3.1.1. Propiedades mecánicas del material.

El punto de partida de toda simulación mediante el MEF viene a ser la definición del material del modelo geométrico que se busca simular, con el fin de introducir en el análisis las propiedades mecánicas que gobiernan el comportamiento del cuerpo, ya que, estas influyen en los resultados obtenidos. Al realizar, en la simulación, un análisis estático a nivel de esfuerzos solo es necesario el ingreso del Coeficiente de Poisson y del Módulo de Elasticidad del material de los engranajes analizados, material que para nuestro caso es acero, cuyos valores son mostradas en la Tabla 3-1.

Tabla 3-1: Propiedades mecánicas del material

	Unidad	Piñón	Engranaje
Coeficiente de Poisson (ν)	-	0.30	0.30
Módulo de Elasticidad (E)	MPa	2×10^5	2×10^5

3.1.2. Definición del mallado de elementos finitos.

La discretización del modelo geométrico juega un papel importante en la simulación, en general, el software ofrece, para un enfoque de mallado en 3 dimensiones, 4 tipos de elementos (tetraedro, pirámide, prisma, hexaedro) como se muestra en la Figura 3-1. A partir de ello, se ve conveniente utilizar el elemento tetraedro, pues permite representar las zonas del flanco del diente de una mejor manera que el resto de elementos, lo cual es de suma importancia al momento de discretizar el sólido, pues si no se llega a representar de una forma adecuada a la geometría del perfil, con el elemento utilizado, genera errores importantes en la detección de contacto en ambos dientes.

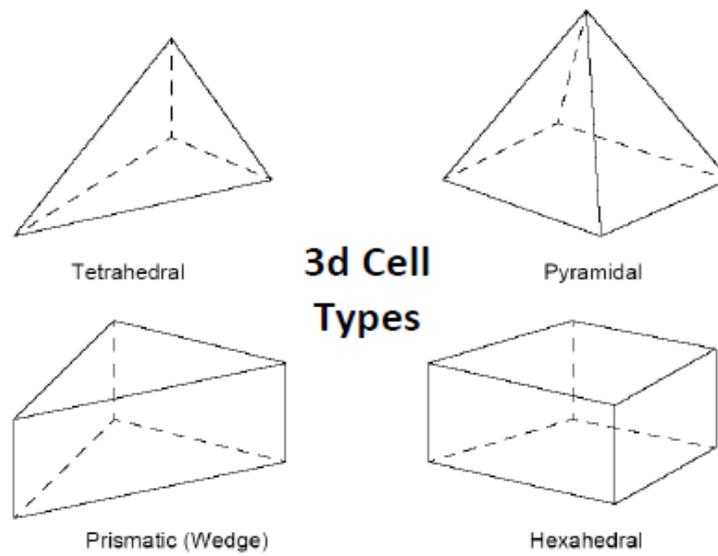


Figura 3-1: Tipos de elementos tridimensionales (Ansys 2013b:15)

Además, se tuvo que tratar la geometría entregada por la macro, imprimiendo el plano de engrane sobre los flancos del perfil evolvente de la zona en contacto, para luego con la ayuda de un control de malla local poder controlar la densidad de malla sobre la línea de contacto.

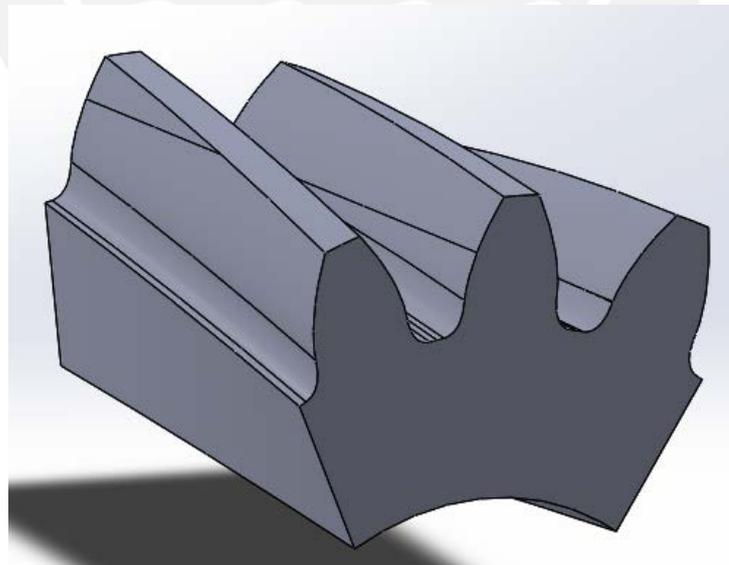


Figura 3-2: Proyección del plano de engrane sobre los flancos de los dientes

Luego de haber tratado la geometría, para tener un mejor control de malla local, el siguiente paso es el estudio de los diversos métodos de mallado ofrecidos por el software, y así tener un mejor panorama de los elementos y algoritmos utilizados en cada método. Dentro de los mismos, se cuenta con el procedimiento *Tetrahedrons Method Patch Conforming*, donde “el proceso de mallado empieza en los bordes, las caras y finalmente el volumen, en ese sentido todas las caras y sus límites son respetadas y malladas” (Ansys 2013c: 8), lo cual resulta ser una excelente alternativa al momento de mallar engranajes, pues la discretización del sólido debe garantizar no generar problemas en las superficies en contacto, todo ello se logra con un proceso de mallado que parte de las caras del sólido al volumen del mismo, y no del volumen a las caras, *Tetrahedrons Method Patch Independent*.

Tabla 3-2: Controles de malla global para el modelo

<u>Defaults:</u>	
Physics Preference	Mechanical
Relevance	100
<u>Sizing:</u>	
Use Advanced Size Function	ON:Curvatura
Relevance Center	Fine
Smoothing	High
Transition	Slow
Span Angle Center	Fine
Curvature Normal Angle	30°
Growth Rate	1.15
<u>Advanced:</u>	
Shape Cheking	Standar Mechanical
Element Midside Nodes	Kept

Adicionalmente, el software ofrece controles de malla global y local, donde el primero define, de forma general, la malla de todos los cuerpos comprendidos en la simulación, mientras que el segundo delimita la malla en zonas específicas. Para el primer caso, los controles de malla globales utilizados en el modelo son los mostrados en la Tabla 3-2, a continuación se explican físicamente que representan cada uno de los mismo, así como la razón de los valores escogidos.

- Relevance: “Es el más básico control de tamaño global y se encuentra entre - 100 (coarse) y 100 (fine)” (Ansys 2013f: 5). Para el modelo, luego de realizar varias mallas manteniendo constante el resto de parámetros y solo variando este, se percibe que la malla tiene un mejor comportamiento con *Relevance* 100.
- Use Advanced Size Function: “Controla el crecimiento y la distribución de la malla en regiones importantes de alta curvatura o de estrecha proximidad de superficies” (Ansys 2013d: 10). La función de tamaño avanzada permite el uso de 5 opciones (*Off, Curvatura, Proximity, Proximity and Curvature, Fixed*), de las cuales se prefiere trabajar con *Curvature* pues frente a la presencia de las curvas en el perfil del diente “determina los tamaños de los bordes y las caras basado en el ángulo normal de curvatura, *Curvature Normal Angle*, donde un ángulo más fino crea mallas superficiales más finas” (Ansys 2013d: 11) y de esta manera lograr en la zona de los flancos una discretización que tenga en cuenta la forma de las mismas.
- Relevance Center: “Establece el punto medio del control global *Relevance*” (Ansys 2013f: 6), el cual presenta 3 alternativas (*Coarse, Medium, Fine*). En nuestro caso se decide utilizar *Fine*, pues genera en el sólido una malla de tamaño más homogéneo.
- Smoothing: “Mejora la calidad por ubicaciones móviles de los nodos con respecto a nodos circundantes” (Ansys 2013d: 17) y ofrece 3 niveles de control (*High, Medium, Low*). En vista que el mallado de la geometría debe presentar una buena calidad se elige el nivel de control *High*.
- Transition: “Controla la velocidad a la que crecen los elementos, además plantea dos niveles de control *Slow* y *High*” (Ansys 2013d: 16). A partir de ello, se decide utilizar *Slow* pues produce una transición suave en la malla.
- Span Angle Center: “Controla la curvatura en base al refinamiento para bordes” (Ansys 2013d: 18) y para ello presenta 3 opciones (*Coarse, Medium, Fine*). De

las alternativas mencionadas, se escoge *Fine* pues asegura un adecuado comportamiento de la malla en la zona evolvente y trocoidal del diente.

- Growth Rate: “Define la relación entre los tamaños de los elementos adyacentes, en superficies y dentro de volúmenes” (Ansys 2013d: 15). En general, una baja tasa de crecimiento produce un incremento paulatino de la malla, lo cual genera una mayor cantidad de elementos que se traduce, a la hora de resolver, en una mayor inversión de tiempo computacional. Por ello, para el caso en cuestión se opta, luego de realizar varias simulaciones, por una tasa de 1.15, ya que el análisis es resuelto en un tiempo computacional adecuado (15 minutos).
- Element Midside Nodes: “Permite controlar si la malla está siendo creada con elementos cuadráticos (*Kept*) o elementos lineales (*Dropped*)” (Ansys 2013g: 103). En general, en la teoría de elementos finitos, se indica que un elemento lineal, cuadrático, cúbico, etc, presenta funciones de forma de grado 1, 2, 3, respectivamente, las cuales son utilizadas para interpolar el campo de los desplazamientos (Alencastre 2013: 50-55), es decir, juegan un papel importante en la convergencia de resultados, pues resulta mejor interpolar los desplazamientos a partir de funciones de forma de grado 2 que de grado 1, por ello, para el modelo se escoge una malla con elementos cuadráticos (*Kept*).

Para el segundo caso, el uso de los controles de malla locales se dio a partir de ciertos inconvenientes que surgieron en el mallado. En las caras inferiores y laterales que se encuentran a lo largo del engranaje se generaba una malla bastante desordenada, por ello, se utilizó el control local *Mapped Face Meshing*, para lograr una distribución uniforme en dichas zonas como se muestra en la Figura 3-3.

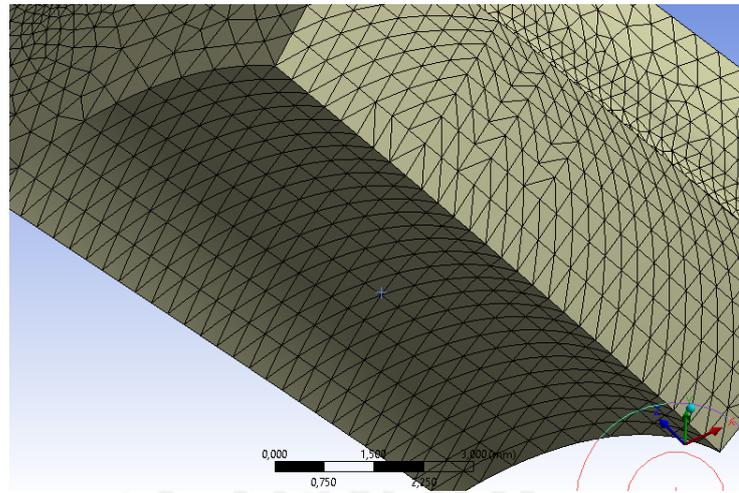


Figura 3-3: Distribución uniforme de la malla en la cara inferior y lateral del engranaje. Además, en la línea de contacto de ambos engranajes era necesario definir localmente el tamaño de la malla. Para ello, se utilizó el control de malla local *Edge Sizing*, el cual permite definir la longitud del elemento a lo largo de la misma y así controlar la densidad de la malla sobre la línea de contacto como se visualiza en la Figura 3-4.

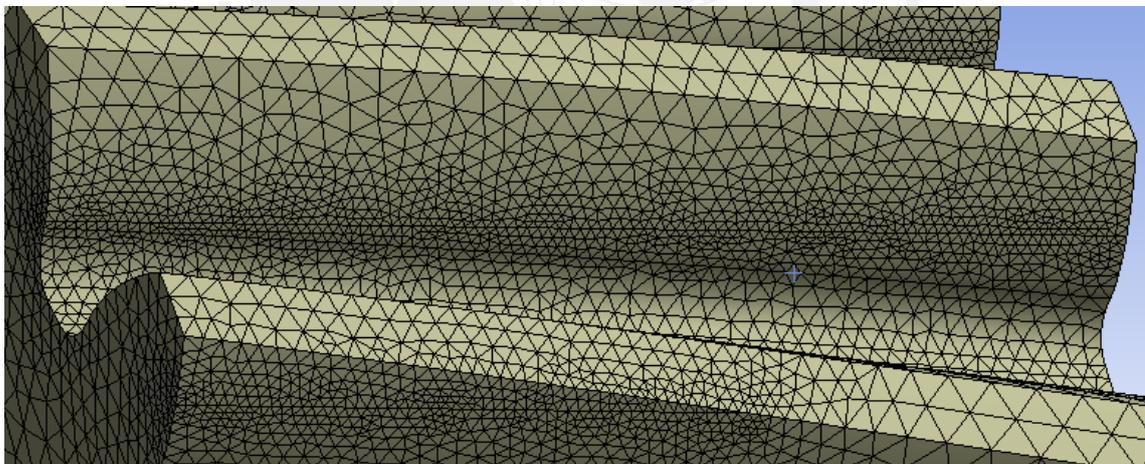


Figura 3-4: Malla a lo largo de la línea de contacto

Es importante mencionar que el comportamiento de la malla en cada sección del engranaje tiene la misma tendencia que en la cara delantera, mostrada en la Figura 3-5, es decir, la forma de crecimiento de la malla, como esta se va abriendo desde la línea de contacto hasta las caras inferiores y laterales del engranaje es la misma.

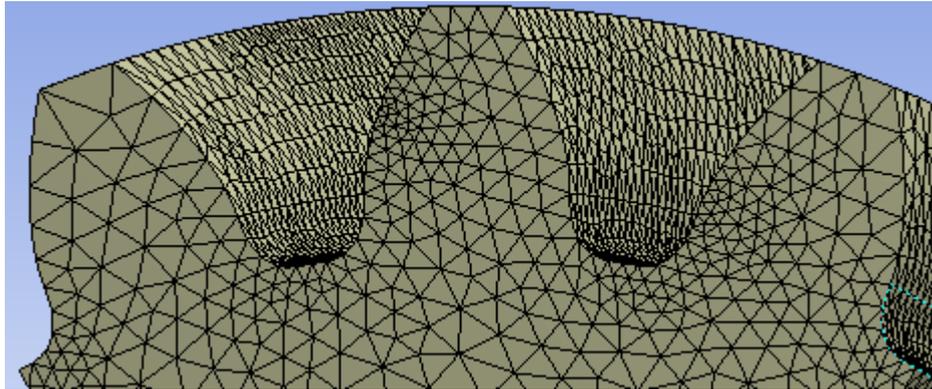


Figura 3-5: Malla en la cara delante del engranaje

Para poder hallar la convergencia de resultados se realizó una disminución progresiva del tamaño del elemento en la línea de contacto. Primero, se desarrolló el estudio de la convergencia a nivel de los esfuerzos de contacto, como se observa en la Tabla 3-3a, considerando un juego de las características mostradas en la Tabla 3-4, se concluye que para un tamaño de 0.10 mm se tiene una desviación de 2.7% respecto al ideal. A partir de ello, se realizó el estudio de la convergencia a nivel de los esfuerzos de flexión, como se visualiza en la Tabla 3-3b, del cual se deduce que para el mismo tamaño de elemento se tiene una desviación de 1.6% respecto al ideal. Es importante mencionar que la convergencia de los resultados se realizó luego de haber logrado definir correctamente el contacto y haber delimitado el resto de parámetros a tocar en las siguientes secciones.

Tabla 3-3: Estudio de la convergencia de resultados

Tamaño de EF en la línea de contacto (mm)	Esfuerzo contacto-Piñón (MPa)	Esfuerzo contacto-Engranaje (MPa)
0.15	20.67	20.66
0.13	21.89	21.88
0.10	22.70	22.67
0.08	23.30	23.30

a. Convergencia a nivel de los esfuerzos de contacto

Tamaño de EF en la línea de contacto (mm)	Esfuerzo flexión-Piñón (MPa)	Esfuerzo flexión-Engranaje (MPa)
0.15	6.79	7.19
0.13	6.87	7.16
0.10	6.83	6.94
0.08	6.85	7.05

b. Convergencia a nivel de los esfuerzos de flexión

Tabla 3-4: Características geométricas del juego de engrane

Parámetro	Magnitud	Parámetro	Magnitud
z_1	18	z_2	47
x_1	0.1	x_2	-0.5
b (mm)	10	β (°)	15

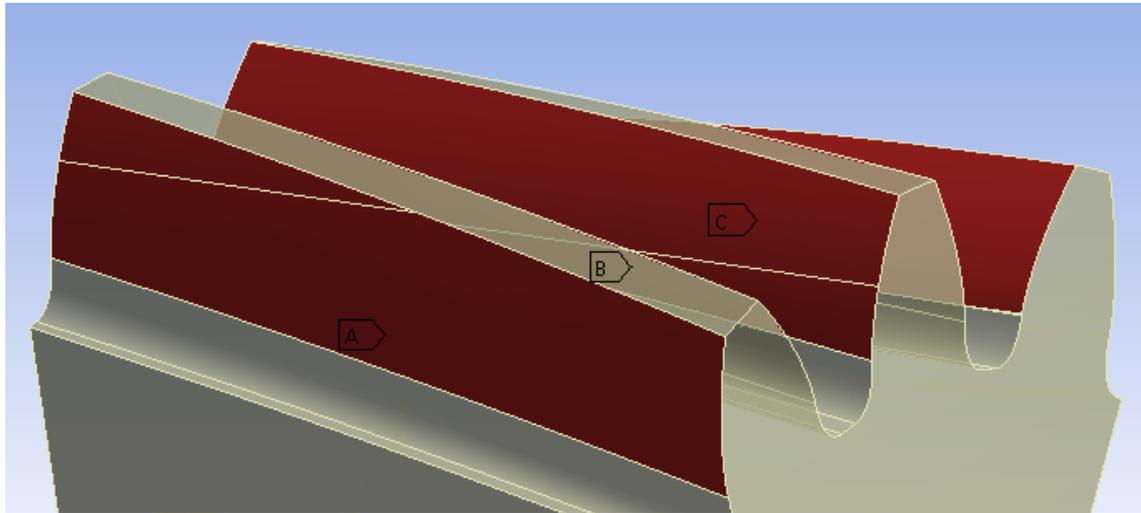
Finalmente, comentar que en los dos primeros casos el comportamiento extraño en los esfuerzos de flexión se debe a una menor cantidad de elementos de contacto, producto del tamaño mayor del elemento en la línea, lo cual genera una distribución de esfuerzos no muy homogénea.

3.1.3. Condiciones de contacto.

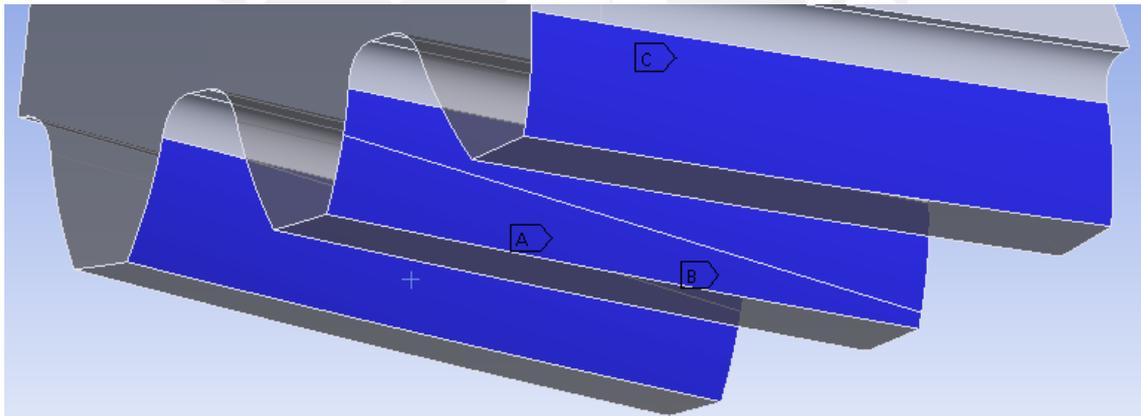
Como bien se comentó al inicio del capítulo, las condiciones de contacto son el punto de quiebre en la simulación de engranajes, pues va a depender de ello la convergencia y la precisión de los resultados. En general, “cuando dos superficies separadas se tocan entre sí, de tal manera, que llegan a ser tangentes mutuamente, se dice que están en contacto. En el sentido físico común, las superficies que están en contacto no se interpenetran, pueden transmitir fuerzas normales de compresión y fuerzas de fricción tangencial y a menudo no transmiten fuerzas normales de tracción” (Ansys 2013k: 3). En ese sentido, el contacto es “un cambio de estado no lineal, donde un cambio abrupto en la rigidez puede ocurrir cuando los cuerpos entran en y fuera de contacto uno con el otro”. (Ansys 2013i: 6).

Dicho esto, en el software, es importante definir para cada región de contacto una superficie de contacto denominada *contact* y una superficie de destino denominada *target*. En nuestro caso, los flancos de los dientes pertenecientes al piñón son

definidos como superficies de contacto y los flancos de los dientes pertenecientes al engranaje como superficies de destino, considerando un giro anti horario del piñón.



a. Superficies de contacto - Piñón



b. Superficies de destino - Engranaje

Figura 3-6: Definición de la región de contacto

Una vez delimitadas las regiones de contacto se pasa a establecer las condiciones en la interacción de superficies como son el tipo de comportamiento de las mismas, la formulación utilizada para resolver el fenómeno, así como el método de detección, para luego realizar un adecuado tratamiento de interfaz, y finalmente introducir el valor del factor de rigidez normal.

Tabla 3-5: Condiciones de contacto para el modelo

<u>Definition:</u>	
Type	Frictionless

Behavior	Symmetric
<u>Advanced:</u>	
Formulation	Augmented Lagrange
Detection Method	On Gaus Point
Interface Treatment	Adjust to touch
Normal Stiffness	Manual
Normal Stiffness Factor	0.01
Update Stiffness	Each Iteration

Todas las consideraciones empleadas en la definición de las condiciones de contacto se muestran en la Tabla 3-5, a continuación se explica el concepto de cada una de las mismas, así como la razón de los valores seleccionados.

- Type: El software ofrece 5 tipos de contacto (*Bonded, No Separation, Frictionless, Rough, Frictional*). Debido a que la norma no considera la fuerza de fricción en los modelos en los cuales se basa, para el cálculo del esfuerzo actuante de contacto y de flexión, se decide trabajar con un contacto sin fricción, *Frictionless*, donde “no hay penetración permitida pero las superficies están libres de deslizarse y separarse sin resistencia”. (Ansys 2013k: 4). Además, el uso de este tipo de contacto genera un ahorro de tiempo computacional frente a un contacto con fricción, *Frictional*, pues en esta última se presenta una ecuación adicional en la dirección tangencial a las superficies en contacto, generando simulaciones de un mayor gasto computacional.
- Behavior: El programa presenta 3 opciones de comportamiento en la zona de contacto (*Asymmetric, Symmetric, Auto-Asymmetric*). En un comportamiento simétrico, *Symmetric*, “las superficies de contacto son restringidas de la penetración de la superficies de destino y las superficies de destino son restringidas de la penetración de las superficies de contacto” (Ansys 2013k: 30), en otras palabras, los resultados se presentan en ambos conjuntos de superficies. Por ello, se decide trabajar con el mismo, pues se busca tener los esfuerzos de contacto en ambos sólidos, con el único objetivo que a medida que se va variando cierto grupo de parámetros, el esfuerzo de contacto

máximo del piñón y del engranaje empiecen a tener valores similares hasta que la diferencia de los mismos sea despreciable.

- Formulation: “La opción de formulación permite especificar que algoritmo el software utiliza para un cálculo de par de contacto particular” (Ansys 2013a: 458). El programa ofrece 4 tipos de formulaciones (*Pure Penalty*, *Augmented Lagrange*, *MPC*, *Normal Lagrange*). Debido a que se desea un comportamiento simétrico en las superficies de contacto y de destino, las únicas formulaciones que lo ofrecen son *Pure Penalty* y *Augmented Lagrange*. A partir de ello, se decide utilizar la formulación *Augmented Lagrange*, pues “en comparación con la formulación *Pure Penalty*, este método por lo general conduce a un mejor acondicionamiento y es menos sensible a la magnitud del coeficiente de la rigidez de contacto. Sin embargo, en algunos análisis, puede requerir iteraciones adicionales, especialmente si la malla deformada se vuelve demasiado distorsionada” (Ansys 2013a: 458), que en nuestro caso, al tener deformaciones en el rango elástico, no sucede y se logra un bajo número de iteraciones. Las ecuaciones (3.1) y (3.2) representan a las formulaciones *Pure Penalty* y *Augmented Lagrange*, respectivamente.

$$F_{normal} = k_{normal} \cdot x_{penetration} \quad (3.1)$$

$$F_{normal} = k_{normal} \cdot x_{penetration} + \lambda \quad (3.2)$$

De las ecuaciones, se observa, en líneas generales, que a mayor rigidez de contacto, menor será la penetración. Para el caso de la formulación *Augmented Lagrange*, “debido al término adicional λ el método es menos sensible a la magnitud de la rigidez de contacto k_{normal} ” (Ansys 2013k: 7) como se mencionó en líneas anteriores. Finalmente, comentar que para una rigidez de contacto infinita se puede conseguir una penetración de cero. Sin embargo, esto no es numéricamente posible con los métodos mencionados, pero siempre y cuando $x_{penetration}$ sea pequeño o insignificante, los resultados de la solución serán exactos (Ansys 2013k: 6).

- Detection Method: “Permite escoger la localización de detección de contacto usado en el análisis con el fin de obtener una buena convergencia” (Ansys 2013a: 459), para ello, se cuenta con 4 alternativas (*On Gauss Point*, *Nodal-Normal From Contact*, *Nodal-Normal To Target*, *Nodal-Projected Normal From Contact*). Si bien se tienen diversos métodos de detección, al ser la formulación de tipo Augmented Lagrange se debe utilizar una detección de Puntos de Gauss, *On Gauss Point*, pues este último es considerado más preciso que una detección nodal.
- Interface Treatment: Antes de pasar a definir el tratamiento de interfaz que se realizó sobre la zona de contacto, es importante mencionar que una condición de contacto inicial no bien establecida, aparición de brechas en la interfaz, puede generar el movimiento del cuerpo en el inicio del análisis, lo cual no puede suceder en un análisis estático estructural, es decir, “si una brecha inicial está presente y una fuerza es aplicada, el contacto inicial no podrá ser establecido, y un cuerpo queda volando respecto al otro” (Ansys 2013o: 3). Para situaciones de contacto lineal, un comando *Pinball Radius* suficientemente grande permite que cualquier brecha entre la superficie de contacto y de destino sea ignorada, en cambio, para nuestro caso al tener un comportamiento no lineal, *Frictionless*, una brecha inicial no es automáticamente ignorada (Ansys 2013o: 4). Frente a este panorama, para situaciones no lineales en las que existe una brecha insignificante entre las superficies de contacto y de destino se utiliza el tratamiento de interfaz, *Interface Treatment*, que busca internamente compensar la superficie de contacto mediante una cantidad específica, permitiendo que el contacto inicial sea establecido (Ansys 2013o: 5), realizando así solo un ajuste matemático, a nivel de nodos y elementos no se altera nada, es decir, la ubicación de la superficie de contacto es interpretada, al momento del análisis, como si estuviera siendo compensada por un cantidad específica (Ansys 2013o: 6). De esta manera, se tiene para el tratamiento de interfaz los controles: *Adjust to Touch*, *Add Offset Ramped Effects*, *Add Offset No Ramping*, donde el primero, frente a cualquier brecha inicial la cierra y frente a cualquier penetración inicial la ignora permitiendo así a los pares de contacto estar justo al toque, *just touching*, (Ansys 2013a: 463) como se visualiza en la Figura 3-7, mientras, que

para los dos últimos casos, el usuario debe especificar una distancia positiva o negativa, *offset*, a compensar en la superficie de contacto, donde un valor positivo tenderá a cerrar la brecha y un valor negativo a abrirla, siendo su principal diferencia la forma en la que se aplica esta interferencia, en la segunda, en varios pasos secundarios de un paso de carga y , en la tercera, en un solo paso de carga (Ansys 2013o: 7-8).

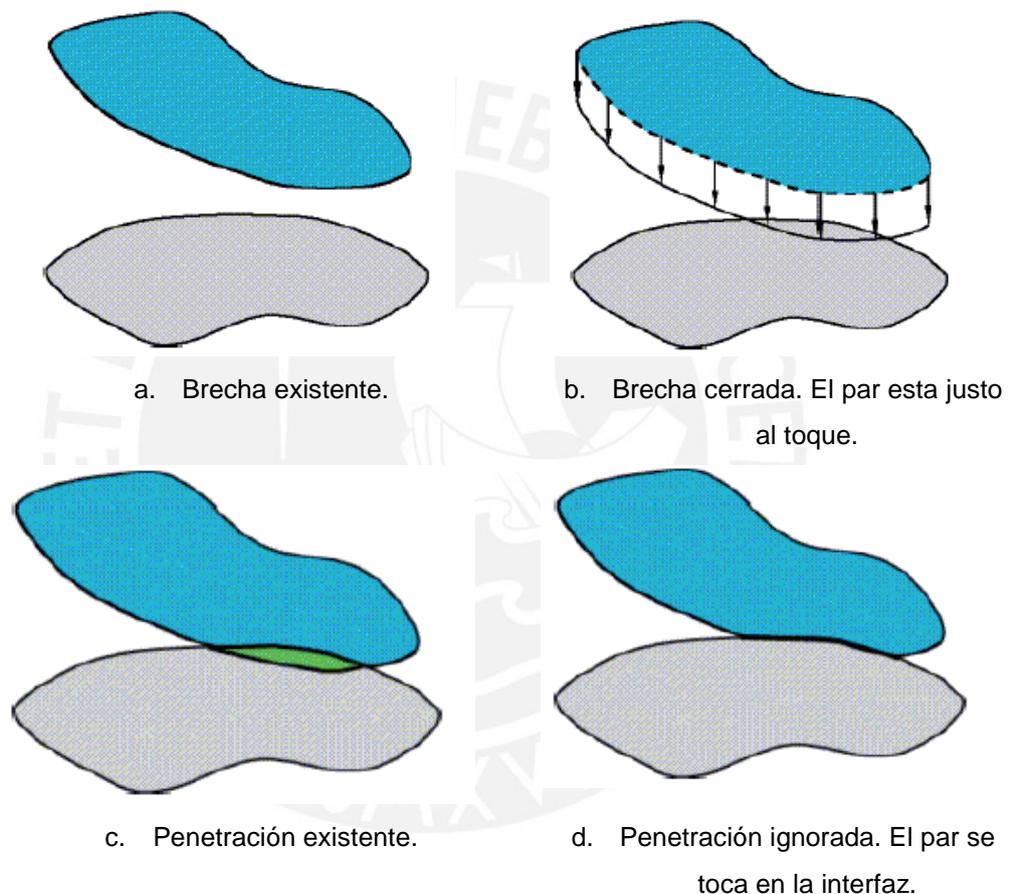
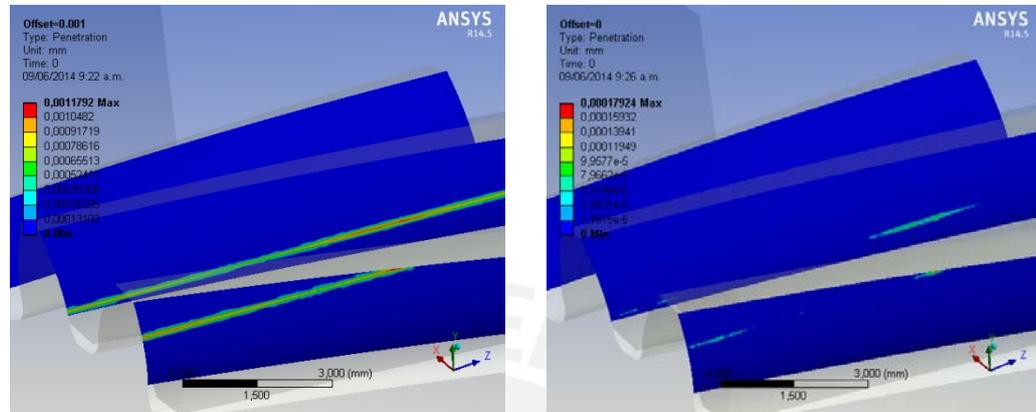


Figura 3-7: Tratamiento de interfaz "Adjust to Touch" (Ansys 2013a: 463)

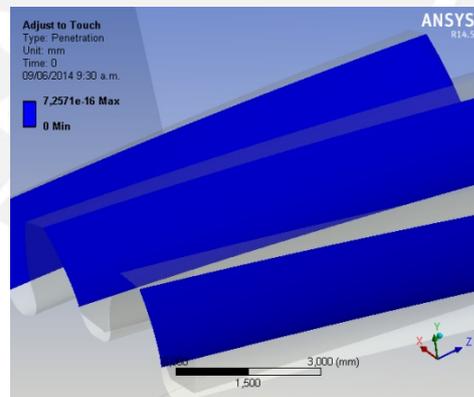
A continuación, se muestra en la Figura 3-8 el contacto inicial, de los flancos de los dientes que interactúan entre sí para un instante de engrane, luego de haber realizado el tratamiento de interfaz respectivo, para ello, se tuvo que utilizar la herramienta de contacto, *Contact Tool*, la cual permite verificar la información inicial (estado, brecha, penetración, etc.), importante de revisar antes de realizar el análisis estático estructural (Ansys 2013n: 20). Debido a que la simulación no presentó problemas de convergencia, se utilizó un solo

paso de carga. Por ello, los tratamientos de interfaz analizados fueron *Adjust to Touch* y *Add Offset No Ramping*.



a. *Add Offset No Ramping*,
offset=0.001

b. *Add Offset No Ramping*, *offset=0*



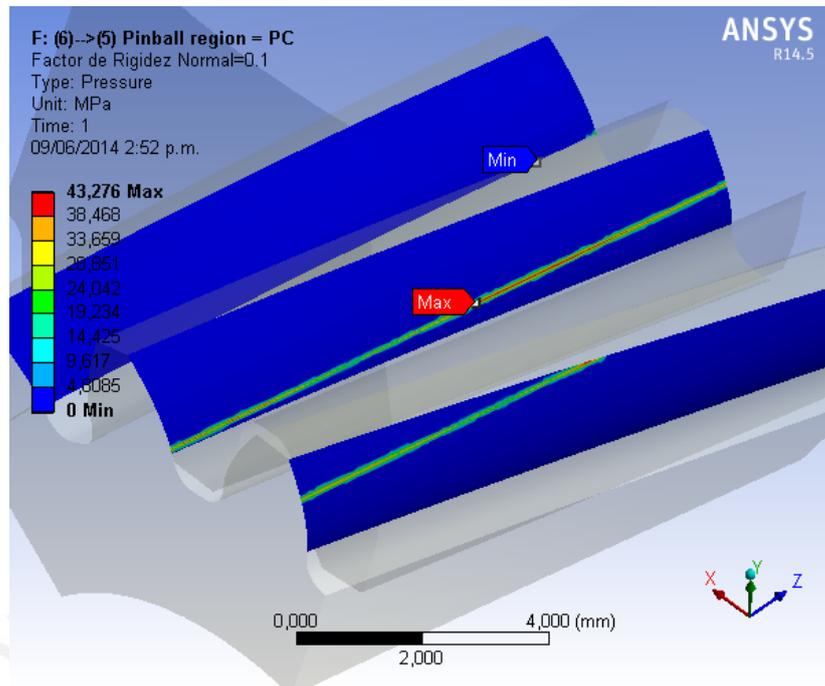
c. *Adjust to Touch*

Figura 3-8: Estado de contacto inicial en los flancos de los dientes-Penetración

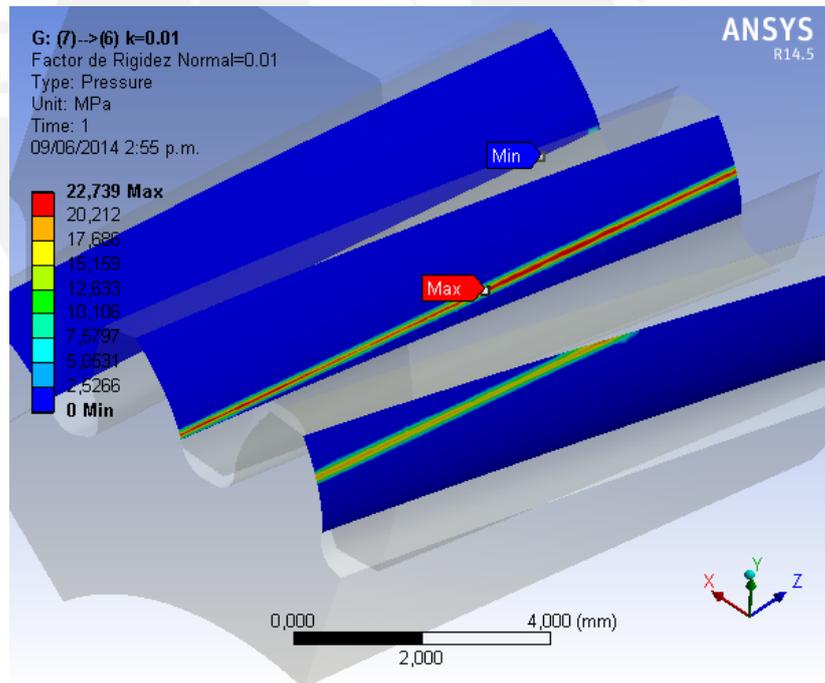
Es importante señalar, que para los 3 casos de la Figura 3-8, en el estado inicial, no se presentaban brechas en los flancos, por ello, se decide visualizar el comportamiento de la penetración y a partir de ello se observa que para el caso del tratamiento de interfaz *Adjust to Touch* la penetración es casi imperceptible, lo cual, genera en los resultados finales un comportamiento

adecuado a lo largo de la línea de contacto. Por lo tanto, se decide trabajar con el mismo para el resto de simulaciones.

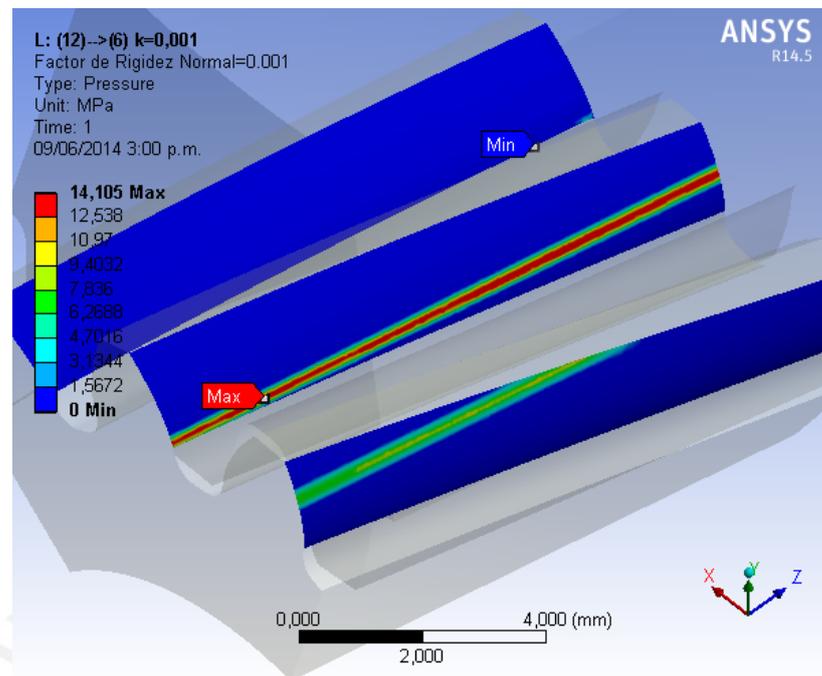
- Normal Stiffness Factor: El factor de rigidez normal es un multiplicador en la formulación empleada para resolver el fenómeno de contacto. En general, la rigidez de contacto normal es el parámetro más importante que afecta tanto a la precisión como al comportamiento de la convergencia, un gran valor de rigidez da una mayor precisión, pero el problema puede ser más difícil de converger, sin embargo, si la rigidez es demasiado grande, el modelo puede oscilar, teniendo superficies de contacto rebotando el uno con el otro (Ansys 2013k: 20-22). Al tener el factor un comportamiento tan variable e impredecible, se decide plantear varios modelos con diferentes valores de rigidez, con el único fin de hallar la simulación que represente mejor el fenómeno que sucede durante la interacción de los flancos de los dientes de los engranajes cilíndricos, pues luego de haber definido las propiedades mecánicas del material, la discretización en el mallado de elementos finitos, el tipo de comportamiento en la zona de contacto, la formulación utilizada en el análisis del mismo, el método de detección y un estado de contacto inicial favorable; el siguiente peldaño es definir el factor de rigidez que represente el fenómeno de contacto en engranajes cilíndricos. Con ese objetivo en mente, se plantean los casos mostrados en la Figura 3-9.



a. Caso 1: Factor de rigidez normal 0.1



b. Caso 2: Factor de rigidez normal 0.01



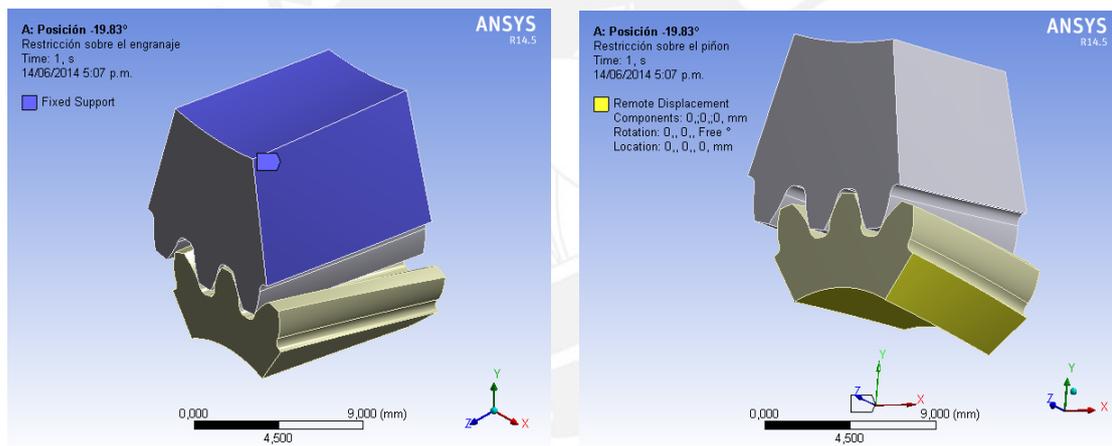
c. Caso 3: Factor de rigidez normal 0.001

Figura 3-9: Presión para diferentes factores de rigidez

En la Figura 3-9, se muestran los resultados obtenidos, luego de simular el juego de la Tabla 3-4, para diferentes factores de rigidez de contacto; es importante señalar que para efectos de la tesis solo se muestran los resultados más relevantes. Para un primer caso, se observa una línea de contacto continua en cada uno de los dientes, pero sin una distribución uniforme de la carga a lo largo de la misma, pues se tienen zonas de la línea mucho más cargadas que otras, lo cual genera esfuerzos más altos en la zona de contacto. En un segundo caso, se percibe una línea de contacto ininterrumpida con una distribución uniforme de la carga a lo largo del flanco del diente, adicionalmente, la carga no se concentra en un diente sino que es repartida sobre cada uno. Finalmente, en un último caso, se muestra una línea de contacto constante, donde la carga se distribuye a lo largo de la misma, pero concentrándose en el diente del medio, es decir, la carga no es repartida de la misma manera sobre cada diente. Por lo tanto, se decide trabajar para el resto de simulaciones con el factor de rigidez de contacto del segundo caso, el cual genera una distribución adecuada de la carga sobre la línea de contacto en cada diente, en otras palabras, se define el factor de rigidez que representa el fenómeno de contacto en engranajes cilíndricos.

3.1.4. Restricciones.

Para poder representar el fenómeno que acontece durante la interacción de los flancos de los dientes de los engranajes cilíndricos es necesario establecer un estado de equilibrio entre los cuerpos antes de pasar a resolver el modelo. Para ello, se restringe todos los grados de libertad del engranaje (conducido) aplicando una restricción tipo fija sobre la cara inferior y las caras laterales, como se muestra en la Figura 3-10a. Luego, se pasa a restringir 5 grados de libertad del piñón (motriz) solo permitiéndole el giro sobre su propio eje, aplicando la condición de borde sobre la cara inferior y las caras laterales, como se visualiza en la Figura 3-10b. De esta manera, se logra un estado de equilibrio adecuado luego de aplicar el torque sobre el piñón.



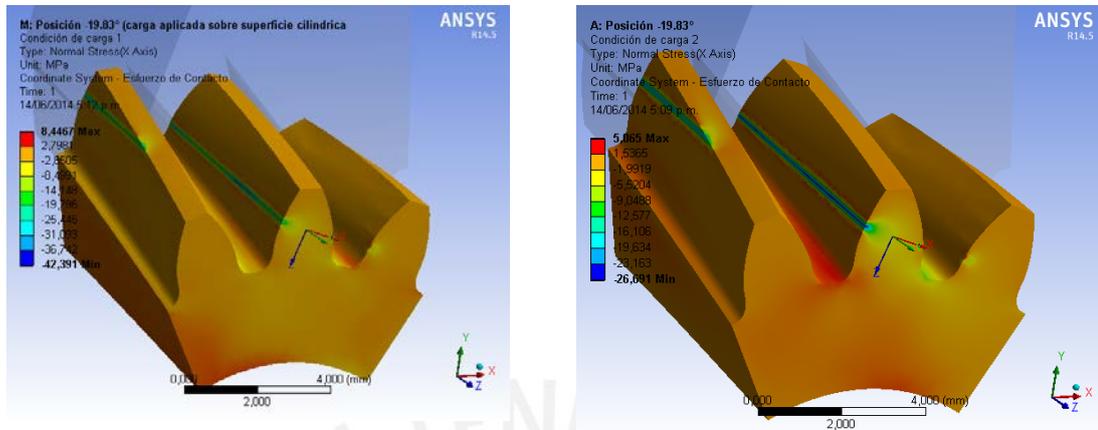
a. Restricción sobre el engranaje.

b. Restricción sobre el piñón.

Figura 3-10: Condiciones de borde del juego de engrane

3.1.5. Condiciones de carga.

Para la simulación de una pareja de engrane, el único requerimiento de carga es la de un torque aplicado sobre el piñón. Si bien la mayoría de autores especializados, aplican la condición de carga sobre el cubo del piñón, en la presente tesis, luego de comparar dicha forma de suministrar la carga con la aplicación de la misma sobre la cara inferior y las caras laterales se decide por esta ultima, pues el comportamiento de los esfuerzos de contacto es mucho más uniforme a lo largo del flanco del diente en comparación con la primera, donde se concentra el esfuerzo en determinadas zonas. La comparación de los resultados a nivel de esfuerzo de contacto de ambas situaciones de carga se muestra en la Figura 3-11.



- a. Aplicación de carga sobre el cubo del piñón.
- b. Aplicación de carga sobre la cara inferior y laterales del piñón.

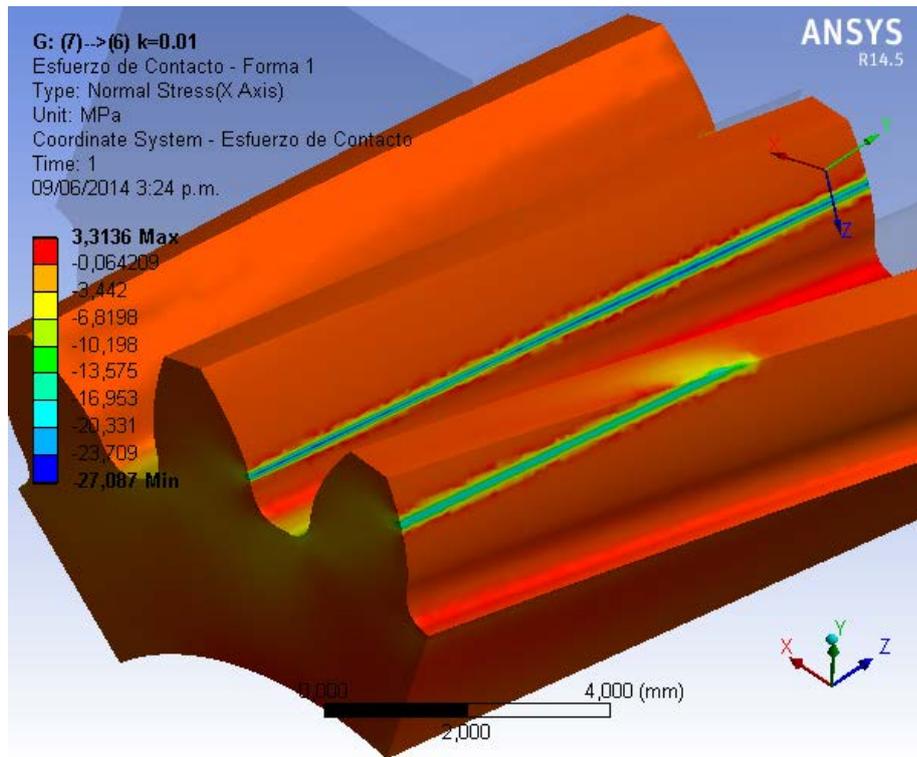
Figura 3-11: Resultados a nivel de esfuerzos de contacto

3.1.6. Visualización de resultados.

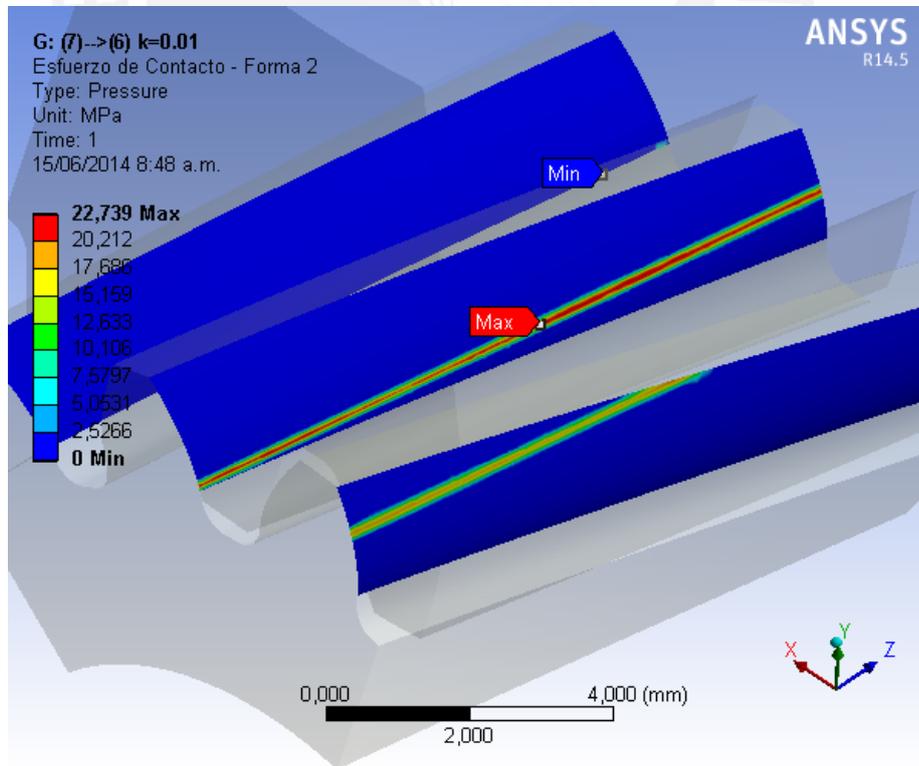
Una vez resuelto el modelo de elementos finitos se pasa a configurar los resultados para poder visualizar al esfuerzo de contacto en la zona evolvente y al esfuerzo de flexión en la zona trocoidal.

3.1.6.1. Visualización del esfuerzo de contacto.

La visualización del esfuerzo de contacto puede darse de dos formas. La primera es a partir del esfuerzo tipo normal en la dirección de la línea de engrane, Figura 3-12a, mientras que la segunda es a partir de la presión en cada una de las superficies en contacto, Figura 3-12b. La norma, en el modelo utilizado para representar al esfuerzo de contacto actuante, se basa en la presión existente entre los flancos de dos cilindros, por tanto, se decide utilizar en adelante para la determinación del esfuerzo de contacto la segunda forma, siendo la primera una interesante alternativa para divisar la línea de contacto.



a. Esfuerzo tipo normal en la dirección de la línea de engrane

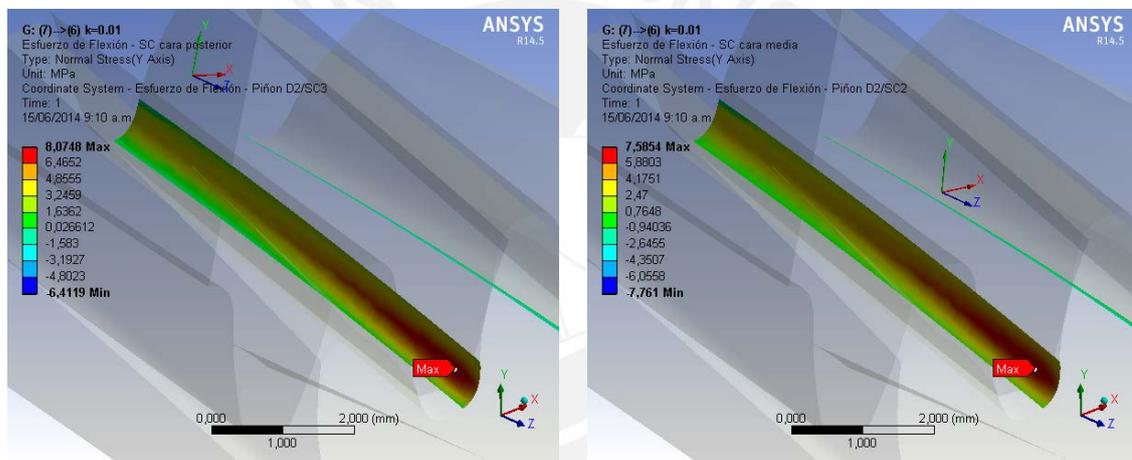


b. Presión en la superficie de contacto

Figura 3-12: Análisis del esfuerzo de contacto en los flancos del diente

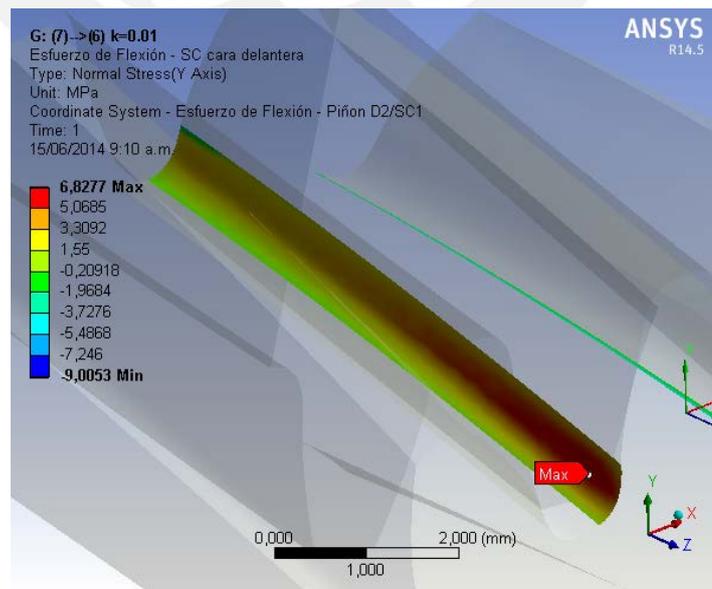
3.1.6.2. Visualización del esfuerzo de flexión.

La visualización del esfuerzo de flexión se basa en el esfuerzo tipo normal en la dirección del eje de simetría del diente, sin embargo, en engranajes de diente helicoidal la orientación del eje de simetría va cambiando a lo largo del ancho del engranaje, por ello, se decide establecer tres sistemas de coordenadas, uno en la cara delantera del diente en la dirección de su eje de simetría, otro en la cara posterior del diente analizado y finalmente un sistema en la parte media del ancho del engranaje. De esta manera, el sistema de coordenada que se encuentra más próximo al esfuerzo de flexión máximo del diente es el encargado de representarlo, como se muestra en la Figura 3-13, que para este caso es el sistema de coordenada de la cara delantera.



a. SC – cara posterior

b. SC – cara media



c. SC – cara delantera

Figura 3-13: Análisis del esfuerzo de flexión en el pie del diente

3.2. Simulación de los esfuerzos de contacto en engranajes cilíndricos.

El modelo de elementos finitos obtenido en la sección anterior es utilizado para realizar el análisis del esfuerzo de contacto, para ello, primero es importante realizar el cálculo analítico, según norma, de la pareja de engrane a simular. Además, efectuar la simulación en la posición hallada en la sección 2.2.1.3. para luego proceder a comparar ambos resultados. Asimismo, pasar a la determinación de la posición crítica realizando la simulación de la pareja de engrane en varios instantes de contacto con el único objetivo de comprobar si efectivamente el instante crítico hallado de forma analítica es el mismo que con la ayuda del software de simulación.

3.2.1. Cálculo analítico de 3 variantes.

El cálculo analítico se realiza teniendo en cuenta solo la influencia de los factores geométricos en el esfuerzo de contacto actuante, ecuación (1.28) y (1.31), donde el resto de factores se igualan a la unidad. De esta manera, la expresión matemática utilizada en el cálculo se reduce a las ecuaciones (3.3) y (3.4).

$$\sigma_{H1} = Z_B \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d'_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{H2} = Z_D \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d'_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (3.4)$$

El cálculo del esfuerzo de contacto actuante se realiza en 3 parejas de engrane, cuyas características geométricas son mostradas en la Tabla 3-6 y los resultados en la Tabla 3-7.

Tabla 3-6: Características geométricas de las 3 parejas de engrane

Parámetro	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
z_1	18	29	29
x_1	0.1	0.5	0
z_2	47	91	96
x_2	-0.5	-0.1	0
$\beta(^{\circ})$	15	0	10

Tabla 3-7: Resultados del cálculo del esfuerzo de contacto actuante

Parámetro	Unidad	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
M_{t1}	Nmm	400	800	800
Z_H	-	2.56	2.42	2.46
Z_E	$\sqrt{N/mm^2}$	187.03	187.03	187.03
Z_ε	-	0.81	0.89	0.82
Z_β	-	0.98	1	0.99
Z_B	-	1.01	1	1.02
Z_D	-	1	1	1
d'_1	mm	18.40	29.19	29.45
u	-	2.61	3.14	3.31
σ_{H1}	MPa	218.71	202.10	186.41
σ_{H2}	MPa	217.27	202.10	182.79

3.2.2. Simulación numérica de 3 variantes.

Una vez obtenido el esfuerzo de contacto actuante de forma analítica de las 3 parejas de engrane se pasa a simular el instante crítico hallado en la sección 2.2.1.3. en el software ANSYS. Es importante mencionar que dicho instante para engranajes de diente helicoidal se encuentra en el inicio de contacto y para engranajes de diente recto, luego de que un par de dientes termine de engranar. Los resultados de los esfuerzos de contacto conseguidos mediante simulación numérica son mostrados en la Tabla 3-8.

Tabla 3-8: Resultados del esfuerzo de contacto mediante simulación numérica

Parámetro	Unidad	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
σ_{MEF-C}	MPa	22.70	28.29	20.85

3.2.3. Comparación de los resultados obtenidos por simulación con los resultados analíticos.

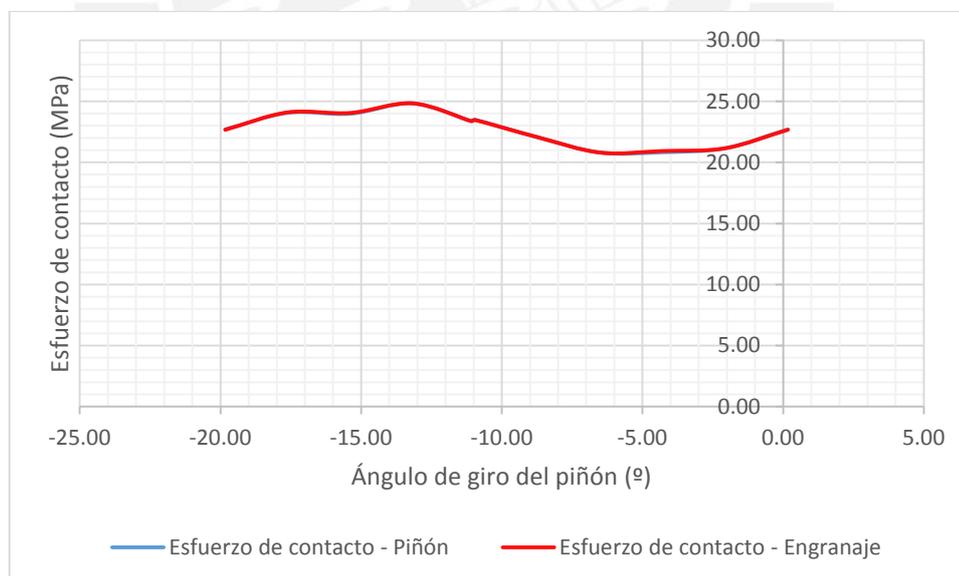
La comparación de los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos con los conseguidos analíticamente, según la norma ISO-6336-2, se plasma en la Tabla 3-9.

Tabla 3-9: Comparación de resultados – Esfuerzo de contacto

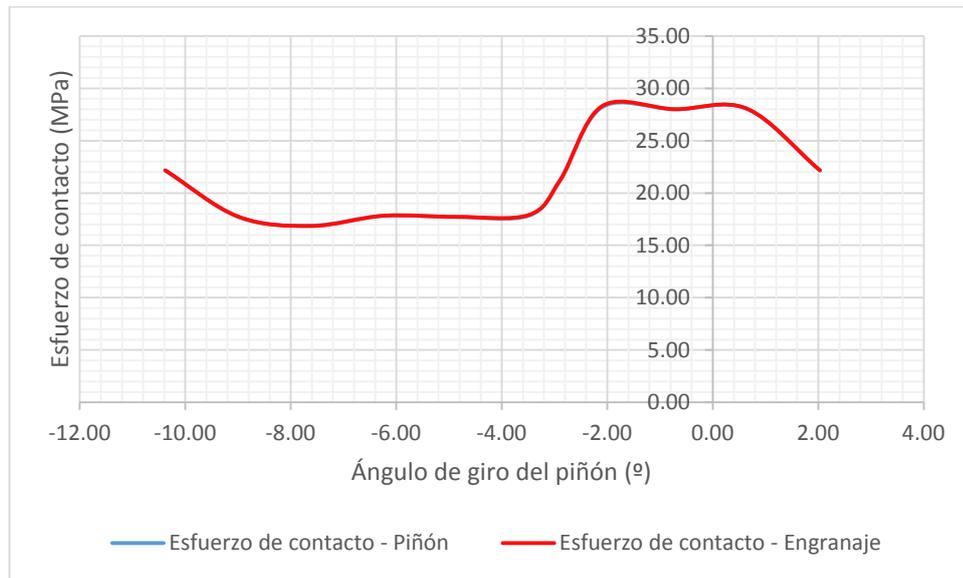
Pareja	σ_H (MPa)	σ_{MEF-C} (MPa)	% de variación
1	218.71	22.70	89.62
2	202.10	28.29	86.00
3	186.41	20.85	88.81

3.2.4. Determinación de la posición crítica del esfuerzo de contacto con la ayuda de software de simulación.

La posición crítica fue determinada a partir del modelo de Hertz, empleado por la norma para el cálculo del esfuerzo de contacto actuante, sin embargo, es necesario simular el juego en varias posiciones de engrane con el fin de contrastar ambos instantes críticos, el hallado a partir del modelo y el determinado con ayuda del software de simulación. La simulación fue efectuada desde el inicio de contacto hasta recorrer un paso básico circunferencial, pues el comportamiento del esfuerzo en cada paso es el mismo.



a. ($m=1\text{mm}$, $z_1=18$, $z_2=47$, $x_1=0.1$, $x_2=-0.5$, $\beta=15^\circ$)



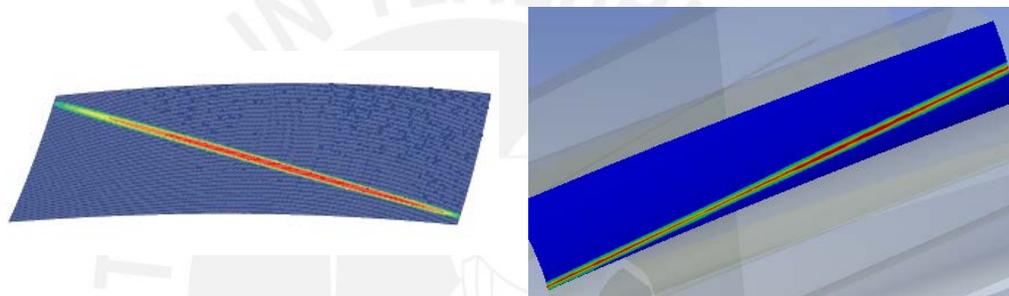
b. ($m=1\text{mm}$, $z_1=29$, $z_2=91$, $x_1=0.5$, $x_2=-0.1$, $\beta=0^\circ$)

Figura 3-14: Resultados de la simulación en varias posiciones - Esfuerzo de contacto

De la Figura 3-14, se observa que para el caso del engranaje de diente recto el instante crítico efectivamente se produce luego de que un par de dientes termine de engranar. En cambio, para el engranaje de diente helicoidal el comportamiento es diferente, el instante crítico no se produce al inicio del contacto. Por ello, se plantean dos caminos a seguir: El primero, considerar que el modelo MEF no es el adecuado, lo cual no parecía coherente, pero tenía que ser asumido o en todo caso tratar de fundamentar que el modelo es correcto; y el segundo, si en caso el modelo es el adecuado encontrar la manera de argumentar porque el instante crítico, para engranaje de diente helicoidal, no está acorde con lo simulado en varias posiciones.

Para el primer caso, el principal objetivo es encontrar una simulación en engranaje de diente helicoidal donde se pueda visualizar la tendencia de los esfuerzo en la zona de contacto para luego contrastarlo con el modelo MEF alcanzado en la tesis. En la Figura 3-15a, se muestra el esfuerzo de contacto obtenido en una tesis de doctorado de España, modelo que se utiliza para validar un “modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento, entendiendo como tales los engranajes con grado de recubrimiento transversal mayor que 2” (Sánchez 2013: XXIX). En sus conclusiones de análisis de tensión señala: El efecto borde, fenómeno que se genera cuando el contacto deja de producirse entre dos superficies, origina “una desviación de los resultados en los extremos de la línea de contacto que hace

que la tensión tienda a cero en las zonas cercanas a la cara anterior y posterior del diente” (Sánchez 2013: 182). De esta manera, se percibe como el esfuerzo se concentra en la mitad de la línea de contacto y como a medida que se acerca a la cara delantera y posterior se va atenuando hasta dejar de ser percibido. En cambio, en la Figura 3-15b, al haber tratado la geometría dibujando la línea de contacto en cada diente para lograr tener un mejor control de la densidad de la malla en la zona de interés y haber tratado la zona de contacto antes de la simulación; el efecto borde no se presenta y por tanto se tiene un mejor modelo, donde la tendencia de los esfuerzos en la zona de contacto esta mejor distribuido a lo largo de la línea de contacto.



a. Esfuerzo de contacto – Tesis de Doctorado (Sánchez 2013: 138) b. Esfuerzo de contacto alcanzado en la tesis

Figura 3-15: Comparación de modelos de elementos finitos

En vista que el modelo de elementos finitos es apropiado se pasa a encontrar la manera de argumentar porque el instante crítico hallado a partir del modelo Hertz, para engranaje de diente helicoidal, difiere con el de las simulaciones en varias posiciones. El modelo de Hertz se basa en un engranaje de diente recto, entonces tratar de representar un caso más general como es un engranaje de diente helicoidal a partir de un caso particular es absurdo, va a conducir a errores, es decir, el modelo de dos cilindros no es suficiente para representar el engrane de dientes helicoidales. Por ello, cuando se minimiza al radio reducido y a la longitud sumaria, en la ecuación (2.29), se halla la posición crítica del MODELO DE HERTZ mas no del engranaje, pues el modelo empleado por la norma es una aproximación que resulta interesante para el cálculo del instante crítico de un engranaje de diente recto mas no de un engranaje de diente helicoidal.

3.3. Simulación de los esfuerzos de flexión en engranajes cilíndricos.

El modelo de elementos finitos obtenido en la sección 3.1 es utilizado para realizar el análisis del esfuerzo de flexión, para ello, primero es importante realizar el cálculo analítico del esfuerzo de flexión actuante de la pareja de engrane a simular. Además, efectuar la simulación en la posición hallada en la sección 2.2.2.2. para luego proceder a comparar ambos resultados. Asimismo, pasar a la determinación de la posición crítica realizando la simulación de la pareja de engrane en varias instantes de contacto con el único de objetivo de comprobar si efectivamente el instante crítico hallado de forma analítica es el mismo que con la ayuda del software de simulación.

3.3.1. Cálculo analítico de 3 variantes.

El cálculo analítico se realiza teniendo en cuenta solo la influencia de los factores geométricos en el esfuerzo de flexión actuante, ecuación (1.38), donde el resto de factores se igualan a la unidad. De esta manera, la expresión matemática utilizada en el cálculo se reduce a la ecuación (3.5).

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \quad (3.5)$$

El cálculo del esfuerzo de flexión actuante se realiza en 3 parejas de engrane, cuyas características geométricas son mostradas en la Tabla 3-6 y los resultados en la Tabla 3-10.

Tabla 3-10: Resultados del cálculo del esfuerzo de flexión actuante

Parámetro	Unidad	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
M_{t1}	Nmm	400	800	800
Y_{Fa1}	-	2.74	2.17	2.59
Y_{Fa2}	-	2.77	2.20	2.23
Y_{Sa1}	-	1.67	2.00	1.70
Y_{Sa2}	-	1.58	1.91	1.96
Y_ε	-	0.69	0.72	0.68
Y_β	-	0.90	1	0.95
σ_{F1}	MPa	12.27	17.08	15.46
σ_{F2}	MPa	11.73	16.53	15.35

3.3.2. Simulación numérica de 3 variantes.

Una vez obtenido el esfuerzo de flexión actuante de forma analítica de las 3 parejas de engrane se pasa a simular el instante crítico hallado en la sección 2.2.2.2. en el software ANSYS. Es importante señalar que dicho instante, tanto para engranajes de diente helicoidal como de diente recto, se encuentra en el fin de contacto. Los resultados de los esfuerzos de flexión conseguidos mediante simulación numérica son mostrados en la Tabla 3-11.

Tabla 3-11: Resultados del esfuerzo de flexión mediante simulación numérica

Parámetro	Unidad	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
σ_{MEF-F}	MPa	9.05	8.82	7.53

3.3.3. Comparación de los resultados obtenidos por simulación con los resultados analíticos.

La comparación de los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos con los conseguidos analíticamente, según la norma ISO-6336-1, se plasma en la Tabla 3-12.

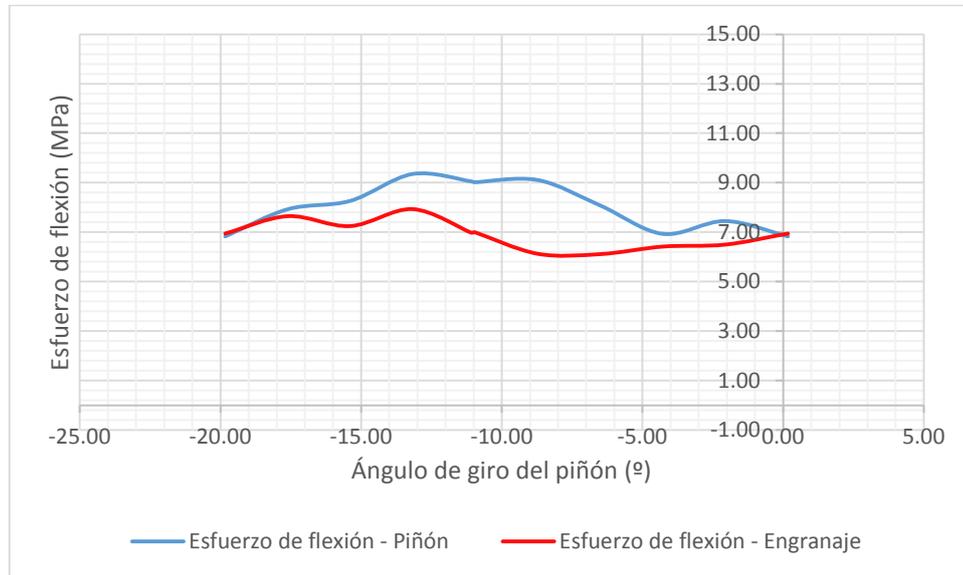
Tabla 3-12: Comparación de resultados – Esfuerzo de flexión

Pareja	σ_F (MPa)	σ_{MEF-F} (MPa)	% de variación
1	12.27	9.05	26.24
2	17.08	8.82	48.36
3	15.46	7.53	51.29

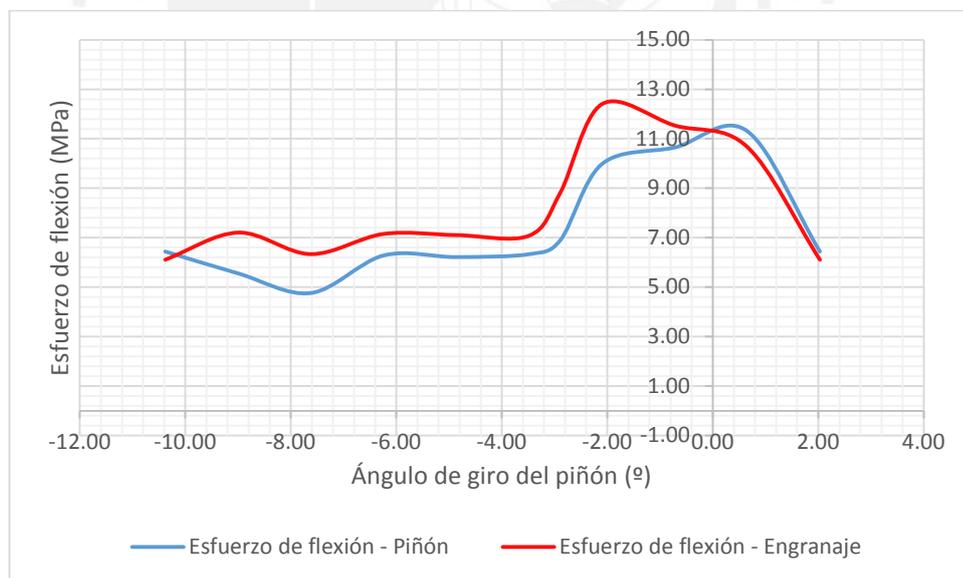
3.3.4. Determinación de la posición crítica del esfuerzo de flexión con la ayuda de software de simulación.

La posición crítica fue determinada a partir del modelo de Lewis, empleado por la norma para el cálculo del esfuerzo de flexión actuante, sin embargo, es necesario simular el juego en varias posiciones de engrane con el fin de contrastar ambos instantes críticos, el hallado a partir del modelo y el determinado con ayuda del software de simulación. La simulación fue efectuada desde el inicio de contacto hasta recorrer un paso básico circunferencial, pues el comportamiento del esfuerzo en cada paso es el mismo. Además, es importante mencionar que dentro del paso básico circunferencial existe una posición de engrane que representa el fin de contacto, cuyo

ángulo de giro es -11.10° para el juego de la Figura 3-16a y -2.89° para el juego de la Figura 3-16b.



a. ($m=1\text{mm}$, $z_1=18$, $z_2=47$, $x_1=0.1$, $x_2=-0.5$, $\beta=15^\circ$)



b. ($m=1\text{mm}$, $z_1=29$, $z_2=91$, $x_1=0.5$, $x_2=-0.1$, $\beta=0^\circ$)

Figura 3-16: Resultados de la simulación en varias posiciones - Esfuerzo de flexión

De la Figura 3-16, se observa que para engranajes de diente helicoidal y de diente recto el instante crítico no se produce en el fin de contacto. En vista que el modelo de elementos finitos es apropiado se pasa a encontrar la manera de argumentar porque el instante crítico hallado a partir del modelo de Lewis difiere con el de las simulaciones

en varias posiciones. Para engranajes de diente recto, en la Figura 2-17b, se observa que el esfuerzo de flexión actuante en el piñón presenta un máximo antes de que un par de dientes empiece a engranar con un ángulo de giro de 0.65° , el cual resulta ser la posición de engrane donde se produce el esfuerzo de flexión máximo del piñón en las simulaciones de varias posiciones. En cambio, para engranajes de diente helicoidal, al justificarse el modelo de Lewis en un engranaje de diente recto, tratar de representar un caso más general como es un engranaje de diente helicoidal a partir de un caso particular conduce a errores, es decir, el modelo de una barra prismática en voladiza no es suficiente para representar la flexión en dientes helicoidales. Por ello, en la sección 2.2.2.2. se halla la posición crítica del MODELO DE LEWIS mas no del engranaje, pues el modelo empleado por la norma es una aproximación que resulta interesante para el cálculo del instante crítico de un engranaje de diente recto mas no de un engranaje de diente helicoidal.



CAPÍTULO 4

4. OBTENCIÓN DEL FACTOR GEOMÉTRICO UNIFICADO

4.1. Factor geométrico unificado para esfuerzos de contacto.

El factor geométrico unificado para esfuerzos de contacto se halla igualando el esfuerzo que represente al valor entregado por la simulación, el cual debe incluir solo a los factores que intenten compensar la geometría y el material así como cualquier característica geométrica del juego, con el máximo esfuerzo de contacto dentro del paso básico circunferencial, como se muestra en la expresión (4.1). De esta manera, se logra obtener el factor mediante la ecuación (4.2). La Tabla 4-1 muestra el factor geométrico unificado para esfuerzo de contacto de las 3 parejas de engrane.

$$\sigma_{H1,H2} = Z_{B,D} \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{d'_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}} = \sigma_{MEF-C} \quad (4.1)$$

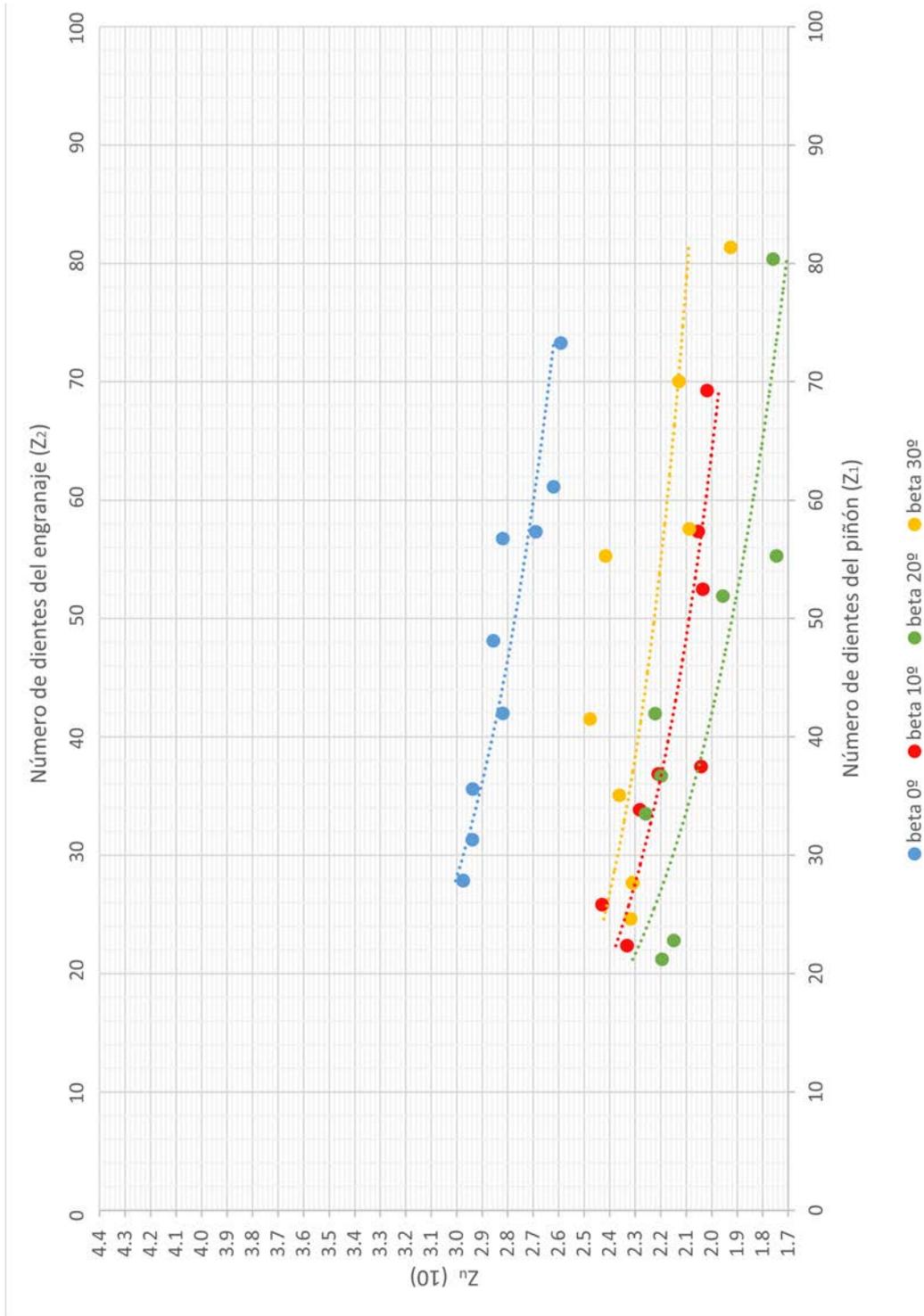
$$Z_U = Z_{B,D} \cdot Z_H \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{MEF-C}}{Z_E}\right)^2 \cdot \left(\frac{(d'_1)^2 \cdot b}{2 \cdot M_{t1}}\right) \cdot \left(\frac{u}{u+1}\right)} \quad (4.2)$$

Tabla 4-1: Factor geométrico unificado para esfuerzo de contacto

Parámetro	Unidad	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
σ_{MEF-C}	MPa	24.83	28.29	22.28
Z_U	-	0.232	0.304	0.243

4.1.1. Simulación de múltiples variantes para obtención de curvas.

La simulación de varias variantes se realizó para los factores de corrección de 0, 0.25 y 0.50, por disponibilidad de espacio solo los resultados para un factor de corrección de 0 son mostrados en la Figura 4-1. La información restante se encuentra en el



Anexo C.1.

Figura 4-1: Factor geométrico unificado para esfuerzo de contacto ($x_1=0.0$, $x_2=0.0$)

4.2. Factor geométrico unificado para esfuerzos de flexión.

El factor geométrico unificado para esfuerzos de flexión se halla igualando el esfuerzo que represente al valor entregado por la simulación, el cual debe incluir solo a los factores que intenten compensar la geometría y cualquier característica geométrica del juego, con el máximo esfuerzo de flexión dentro del paso básico circunferencial, como se muestra en la expresión (4.3). De esta manera, se logra obtener el factor mediante la ecuación (4.4). La Tabla 4-2 muestra el factor geométrico unificado para esfuerzo de flexión de las 3 parejas de engrane.

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta = \sigma_{MEF-F} \quad (4.3)$$

$$Y_U = Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta = \sigma_{MEF-F} \cdot \left(\frac{d'_1 \cdot b \cdot m_n}{2 \cdot M_{t1}} \right) \quad (4.4)$$

Tabla 4-2: Factor geométrico unificado para esfuerzo de flexión

Parámetro	Unidad	Pareja 1	Pareja 2	Pareja 3
σ_{MEF-F}	MPa	9.35	12.40	8.58
Y_U	-	2.15	2.26	1.58

4.2.1. Simulación de múltiples variantes para obtención de curvas.

La simulación de varias variantes se realizó para los factores de corrección de 0, 0.25 y 0.50, por disponibilidad de espacio solo los resultados para un factor de corrección de 0 son mostrados en la Figura 4-2. La información restante se encuentra en el Anexo C.2.

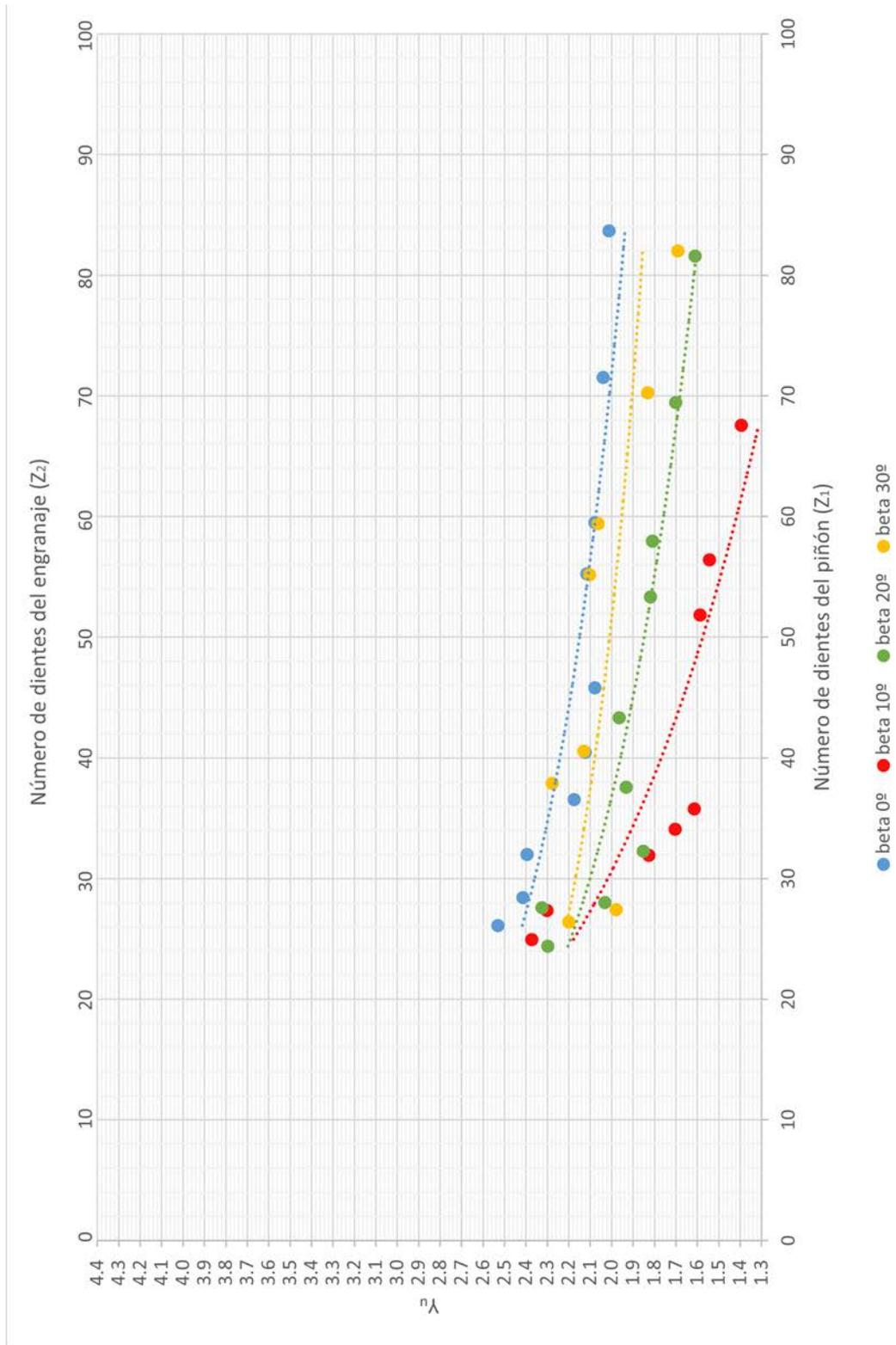


Figura 4-2: Factor geométrico unificado para esfuerzo de flexión ($x_1=0.0$, $x_2=0.0$)

CONCLUSIONES

1. Se logró obtener un factor geométrico unificado para los esfuerzos de flexión y otro para los esfuerzos de contacto de engranajes cilíndricos, mediante la aplicación de software de simulación numérica. Con el uso de estos factores unificados se pueden lograr diseños de engranajes más económicos, más precisos y que responde mejor a las necesidades reales. El esfuerzo de contacto y de flexión actuante, calculados según la norma ISO 6336, presenta más de un 80% y más de un 25% de sobredimensionamiento respectivamente, en base de los resultados alcanzados.
2. Se ha podido apreciar que en las normas técnicas se utilizan algunos factores para compensar aspectos geométricos no contemplados en sus expresiones de cálculo básicas. De esta manera se introduce en el cálculo la influencia del ángulo de hélice, del factor de recubrimiento, del espesor del diente, del punto de aplicación de la carga. Por un lado, en el esfuerzo de contacto actuante, se tiene los factores $Z_{B,D}$, Z_H , Z_ε , Z_β ; mientras que, en el esfuerzo de flexión actuante, los factores son Y_{Fa} , Y_{Sa} , Y_ε , Y_β . Un ejemplo claro es que el efecto del ángulo de hélice genera que las superficies en contacto sean conos truncados y no cilindros como plantea la norma, es por ello que luego se tiene que realizar una compensación mediante el factor de ángulo de hélice.

3. La revisión de las ecuaciones paramétricas halladas en investigaciones anteriores, que definen la geometría real de los engranajes cilíndricos, fue de suma importancia para constatar que todas las expresiones utilizadas, en el algoritmo automatizado (macro), eran adecuadas. Además, se comprobó que efectivamente dependen de los parámetros de la herramienta de fabricación, es decir, del ángulo del perfil (α), del factor de altura de la cabeza del diente (h_a), del factor de altura del pie del diente (h_f), del factor de holgura radial (c_f) y del factor de redondeo del pie del diente (ρ_f).
4. La revisión y puesta en marcha de la macro desarrollada en trabajos anteriores para la obtención de los modelos geométricos, permitió corroborar la funcionalidad del algoritmo automatizado, pues al ser realizada en una versión antigua del software se creyó, en un inicio, que iba a presentar ciertos inconvenientes al momento de generar la geometría. Sin embargo, solo se realizaron correcciones menores, tales como desactivar los enganches automáticos para la generación de pares de engrane de alto número de dientes.
5. En la simulación de las parejas de engrane con ayuda del software ANSYS MECHANICAL, el modelo de elementos finitos obtenido permite representar el fenómeno que acontece durante la interacción de los dientes en contacto. Pues, el modelo toma en cuenta la geometría real del diente y las condiciones necesarias para representar el fenómeno de contacto y de esta manera alcanzar resultados coherentes con el comportamiento real de los engranajes. Todo ello, de suma importancia para determinar los esfuerzos de contacto en la zona evolvente y los esfuerzos de flexión en la zona trocoidal.
6. La obtención de curvas a partir de la simulación de múltiples variantes para poder determinar un único factor geométrico para esfuerzos de contacto y otro para esfuerzos de flexión establecen un contenido de alto valor práctico, pues a cualquier persona ajena a la metodología de elementos finitos le permite evaluar el estado de esfuerzos con una mayor precisión, haciendo uso de un solo factor en lugar de los cuatro factores geométricos que se utilizan en las normas internacionales.

7. Un indicador importante al momento de encontrar el instante crítico de los esfuerzos actuantes de flexión y de contacto viene a ser la longitud de contacto sumaria (l_{Σ}), pues mientras sea lo menor posible, en el paso básico circunferencial, indica que la carga se distribuye de una forma más perjudicial. Por tanto, al representar dicho parámetro la longitud sobre la cual se distribuye la carga, resultaría interesante introducirlo de forma directa en el diseño de engranajes.



RECOMENDACIONES

1. Efectuar la validación experimental del modelo de elementos finitos alcanzado en la tesis, pues es evidente que ninguna norma técnica aceptará la propuesta si antes no ha sido validada experimentalmente.
2. Realizar un estudio similar al mostrado en la tesis para el análisis de esfuerzos en engranajes cónicos de dentado helicoidal y en engranajes que no presenten un perfil evolvente, teniendo en cuenta las consideraciones asumidas a nivel de discretización, condiciones de contacto, restricciones y condiciones de carga en la elaboración del modelo de elementos finitos.
3. Elaborar una investigación considerando algunos aspectos no cubiertos en el modelo ya desarrollado, como es la simulación de la fricción entre los flancos de los dientes, con el fin de examinar de qué manera afecta esta en los resultados. Comprobando así si la fricción puede ser despreciable en el modelo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alencastre, Jorge (2013). *Introducción al Método de los Elementos Finitos. Métodos Energéticos*. Lima, Perú: PUCP.
2. Álvarez, Miguel (2012). *Nomenclatura y fórmulas para engranajes*. Material de Clase: Elementos de Máquina II, Facultad de Ciencias e Ingeniería. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.
3. ANSI/AGMA. (1999). *ANSI/AGMA 2101-C95: Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. Virginia, USA: AGMA.
4. ANSYS (2013a). *ANSYS Mechanical User Guide*. Pensilvania, USA: ANSYS.
5. ANSYS (2013b). *Introduction to ANSYS Meshing. Lecture 3: Introduction to ANSYS Meshing*. Pensilvania, USA: ANSYS.
6. ANSYS (2013c). *Introduction to ANSYS Meshing. Lecture 4: Meshing Methods*. Pensilvania, USA: ANSYS.
7. ANSYS (2013d). *Introduction to ANSYS Meshing. Lecture 5: Global Mesh Controls*. Pensilvania, USA: ANSYS.
8. ANSYS (2013e). *Introduction to ANSYS Meshing. Lecture 6: Local Mesh Controls*. Pensilvania, USA: ANSYS.
9. ANSYS (2013f). *Introduction to ANSYS Mechanical. Lecture 4: Meshing Techniques*. Pensilvania, USA: ANSYS.
10. ANSYS (2013g). *ANSYS Meshing User's Guide*. Pensilvania, USA: ANSYS.
11. ANSYS (2013h). *Introduction to ANSYS Mechanical. Lecture 6: Modeling Connections*. Pensilvania, USA: ANSYS.

12. ANSYS (2013i). ANSYS Mechanical Introduction to Structural Nonlinearities. Lecture 1: Overwiev. Pensilvania, USA: ANSYS.
13. ANSYS (2013j). ANSYS Mechanical Introduction to Structural Nonlinearities. Lecture 2: General Procedures. Pensilvania, USA: ANSYS.
14. ANSYS (2013k). ANSYS Mechanical Introduction to Structural Nonlinearities. Lecture 3: Introduction to Contact. Pensilvania, USA: ANSYS.
15. ANSYS (2013m). ANSYS Mechanical Introduction to Structural Nonlinearities. Lecture 6: Nonlinear Diagnostics. Pensilvania, USA: ANSYS.
16. ANSYS (2013n). ANSYS Mechanical Advanced Connections. Lecture 1: Overwiev. Pensilvania, USA: ANSYS.
17. ANSYS (2013n). ANSYS Mechanical Advanced Connections. Lecture 2: Interface Treatments. Pensilvania, USA: ANSYS.
18. Budynas, Richard G. & Keith Nisbett, J. (2011). *Shigley's Mechanical Engineering Design (Ninth Edition)*. New York: Mc Graw Hill.
19. Cotaquispe Zevallos, L. O. (2004). *Perfeccionamiento del diseño de los engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores mediante el método de los elementos finitos*. Tesis presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas, Departamento de mecánica aplicada y dibujo. Santa Clara, Cuba: Universidad Central "Martha Abreu" de las Villas.
20. DIN. (1987). *DIN 3990 Part 1: Calculation of load capacity of cylindrical gears; introduction and general influence factors*. Berlín, Alemania: Beuth Verlag.
21. DIN. (1987). *DIN 3990 Part 2: Calculation of load capacity of cylindrical gears; calculation of pitting resistance*. Berlín, Alemania: Beuth Verlag.
22. Gonzáles Rey, Gonzalo (2001) *Cálculo de Engranajes Cilíndricos*. Facultad de Ingeniería Mecánica. Ciudad de la Habana, Cuba: CUJAE.

23. Infanzón García, H. L. (2010). *Análisis del esfuerzo de contacto en engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente mediante el método de los elementos finitos*. Tesis para optar el título de Ingeniero Mecánico, Facultad de Ciencias e Ingeniería. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.
24. ISO. (1996). *ISO 6336-1: Calculation of load capacity of spur and helical gears; Basic principles, introduction and general influence factors*. Ginebra, Suiza.
25. ISO. (1996). *ISO 6336-2: Calculation of load capacity of spur and helical gears; Calculation of surface durability (pitting)*. Ginebra, Suiza.
26. ISO. (1996). *ISO 6336-3: Calculation of load capacity of spur and helical gears; Calculation of tooth bending strength*. Ginebra, Suiza.
27. Litvin, F., & Fuentes, A. (2004). *Gear Geometry and Applied Theory (Second Edition)*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
28. Nkarthik Bommisetty, V. S. (2012). *Finite Element Analysis of Spur Gear Set*. Thesis for the Degree of Master of Science in Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering. Cleveland, USA: Cleveland State University.
29. Pintor Borobia, J. M. *Mecanismos de Contacto Directo: Engranajes. Apuntes de la Asignatura: Teoría de Máquinas, Departamento de Ingeniería Mecánica, Energética y de Materiales*. Navarra, España: Universidad Pública de Navarra.
30. Sánchez Sánchez, Miryam B. (2013). *Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento*. Tesis Doctoral, Departamento de Mecánica. Madrid, España: Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.
31. Sandoval Pineda, J. M. (2004). *Análisis de esfuerzos en un diente de engrane recto para bomba hidráulica aplicando el método fotoelástico y el método de elemento finito*. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias con

especialidad en Ingeniería Mecánica, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. México D. F., México: Instituto Politécnico Nacional.

32. Vanegas Useche, L. V. (2010). *Transmisiones por ruedas dentadas: Métodos de tallado y acabado, fallas y lubricación*. Facultad de Ingeniería Mecánica. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira
33. Wei, Zeping (2004). *Stresses and Deformations in involute spur gears by finite element method*. Thesis for the Degree of Master of Science, Department of Mechanical Engineering. Saskatoon, Canadá: University of Saskatchewan.
34. Zabalza Villava, I. (2010). *Síntesis de mecanismos y máquinas*. Navarra, España: Universidad Pública de Navarra.
35. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000a). *The Finite Element Method Volume 1: The Basics*. Oxford, England: Butterworth-Heinemann.
36. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000b). *The Finite Element Method Volume 2: Solid Mechanics*. Oxford, England: Butterworth-Heinemann.