PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS Y PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL. UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAGÍSTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR:

CAROLINA RITA REAÑO PAREDES

ASESOR DE TESIS:

DR. ULDARICO MALASPINA

MIEMBROS DEL JURADO:

MAG. CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE

MAG. MARIANO GONZALEZ ULLOA

DR. ULDARICO MALASPINA JURADO

LIMA - PERÚ

2011

Dedicatoria:

A Ricardo Reaño de la Piedra y
Blanca Paredes Rondón,
mis amados padres.

A mi hijo Diego.

Agradecimientos:

Al Dr. Uldarico Malaspina, mi asesor de tesis, por su valiosa y permanente orientación, factor fundamental en la realización de esta investigación.

A la Pontificia Universidad Católica del Perú, mi alma mater, por la ayuda económica recibida a través de su Programa de Apoyo a la Investigación para Estudiantes de Posgrado (PAIP).

RESUMEN

El presente trabajo de investigación, detalla la construcción, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica que contribuye a que los alumnos usen comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal (P.L). Aunque este tema está presente en los diseños curriculares escolares y reaparece en los cursos iniciales de varias carreras universitarias, su desarrollo generalmente está basado en el manejo de algoritmos o reglas, desaprovechando oportunidades de interrelacionar lo intuitivo con lo formal y de transitar por los diversos registros de representación.

El marco teórico para el presente trabajo es fundamentalmente la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau. El proceso metodológico para concretar lo propuesto se apoya en la Ingeniería Didáctica y en el análisis de los resultados se usa también la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval.
Se aplica a los estudiantes del segundo ciclo de la carrera de Turismo Sostenible que estudian en la Universidad Antonio Ruiz de Montoya (UARM).

El objetivo general del trabajo es diseñar, elaborar, aplicar, analizar y proponer una secuencia didáctica que permita usar comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables poniendo énfasis en sus aplicaciones a problemas contextualizados de programación lineal.

Algunas de las conclusiones encontradas fueron las siguientes:

- A partir de la revisión de textos hecha como parte del análisis preliminar, en su dimensión didáctica, se puede afirmar que los libros usados en la enseñanza de la P.L.al tratar el método gráfico para la resolución de problemas de Programación Lineal con dos variables, no plantean preguntas que induzcan al alumno a interpretar qué ocurre en distintos puntos de la región factible. En general, se plantean situaciones donde se pide hallar el óptimo utilizando el método gráfico, sin hacer preguntas que favorezcan una aproximación intuitiva a la solución del problema de P.L. Adicionalmente, las preguntas planteadas inducen al alumno a resolver los problemas de P.L. usando un algoritmo de

manera mecánica, desaprovechando la oportunidad de promover el tránsito y coordinación entre el registro verbal, algebraico y gráfico.

Adicionalmente, no brindan ocasiones de ejercitar el lenguaje formal para justificar respuestas.

- Resulta un obstáculo para el proceso de enseñanza aprendizaje de los sistemas inecuaciones lineales con dos variables, el hecho que los alumnos relacionaban la resolución de un sistema de inecuaciones con el hallazgo de valores específicos como solución. Esto se debe a su experiencia previa en el contexto de la solución de sistemas de ecuaciones, dificultando el poder entender un conjunto solución como una región del plano cartesiano.

- Podemos afirmar que finalmente obtuvimos una propuesta didáctica para la enseñanza – aprendizaje de los Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal, que contribuye a que los alumnos coordinen los diferentes registros de representación – verbal, gráfico y algebraico – utilizando el método gráfico de resolución de problemas de P.L con dos variables.

  La propuesta contribuye también a que los alumnos obtengan conclusiones interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal, en el marco de la resolución de problemas contextualizados de optimización con función objetivo y restricciones lineales.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación nace por el interés de contribuir al mejoramiento de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas. Esta tarea debe realizarse a través de propuestas teóricas con instrumentación metodológica que se fundamenten en investigaciones científicas en educación matemática.

A partir de una reflexión sobre la labor docente como profesores de matemáticas en una universidad dedicada a carreras de humanidades, es importante recalcar que la participación activa del alumno en su proceso de aprendizaje y su motivación para hacerlo es indispensable para lograr no solo que lleguen a entender las matemáticas sino también, a disfrutar al hacerlo.

Resaltamos que el motivar a los estudiantes para lograr un buen aprendizaje es una de las responsabilidades del docente; no obstante, más allá de la creación de una atmósfera y un ambiente adecuado, donde se busque conectar los contenidos con los intereses de los estudiantes, la situación didáctica por sí misma debe ser capaz de lograr tal motivación.

Pretendemos, a través de este trabajo, resaltar la importancia que debe tener la dimensión didáctica en la concepción de una propuesta de enseñanza; es por ello que consideramos que la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau es el marco teórico idóneo para proponer una situación didáctica que permita, en la interacción entre el alumno, el concepto matemático y el maestro, una auténtica construcción del conocimiento matemático.

Hemos decidido estudiar los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la Programación Lineal por tres motivos:

El primero está relacionado con la importancia del tema, ya que en numerosas aplicaciones a la industria, la economía, etc., se presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar algunas funciones que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, que se denominan restricciones. De la solución de estos problemas, cuando las funciones y restricciones son lineales, se encarga la Programación Lineal. Así, la Programación Lineal abarca otros campos no solo el matemático sino entra de manera sustancial en otras disciplinas ya que se trata de una herramienta de gran ayuda que permite sacar el mayor beneficio en determinadas decisiones que se deban tomar.

El segundo, es el poco conocimiento que existe del tema no solo por parte de los estudiantes, sino también de algunos maestros que suelen abordarlo únicamente de una forma algorítmica.

El tercero, por la importancia que tiene desarrollar en los alumnos el pensamiento optimizador que se utiliza al hacer la mejor elección en diferentes situaciones de la vida cotidiana. Se debe insistir en que los estudiantes desarrollen una actitud científica conjugando la intuición, la conjetura, la formalización y el rigor ante problemas de optimización. (figura 1)

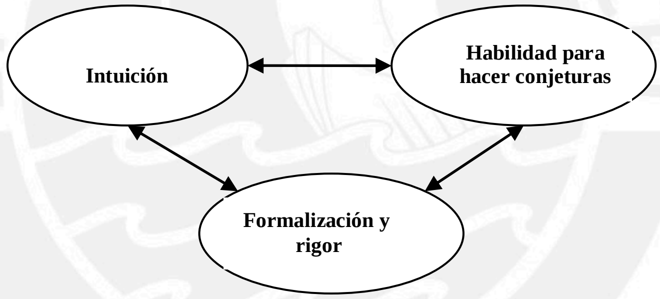


Figura 1

En la primera parte de este trabajo presentamos el problema de investigación, que incluye los antecedentes, la definición del problema y los objetivos; luego se presentan los planteamientos más relevantes de la Teoría de las Situaciones Didácticas usada como marco teórico y las ideas principales de la Ingeniería didáctica como método de investigación.

En la segunda parte detallamos el desarrollo de la Ingeniería Didáctica, que se inicia con el análisis preliminar, (revisión de textos que se usan en la enseñanza de la P.L, estudio de los sistemas de inecuaciones lineales y su aplicación a la P.L, análisis de los conocimientos previos que se requieren para el estudio de la P.L, etc.). A continuación se presenta la concepción de la situación didáctica y el análisis a priori determinando las tres variables microdidácticas que se utilizan (número de restricciones, tipo de optimización y tipo de punto en la región factible). Luego detallamos la experimentación en aula, el análisis correspondiente y la comparación entre los comportamientos esperados y los observados en la experimentación, en relación al objeto de estudio. Posteriormente presentamos la situación didáctica modificada que proponemos para el proceso de enseñanza aprendizaje de los Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y su aplicación a la P.L.

Culminamos la investigación formulando las conclusiones, las recomendaciones que tienen su fundamento en los resultados obtenidos y planteamos algunas sugerencias que consideramos pueden servir para futuras investigaciones relacionadas con temas afines al del presente estudio.

ÍNDICE

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

PRIMERA PARTE: ASPECTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema 1
1.2 Antecedentes 7
1.3 Perspectiva teórica 10
1.4 Objetivos de la investigación 11

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 La teoría de Situaciones Didácticas 12
 2.1.1 Fundamentos 12
 2.1.2 Conceptos básicos 13
 2.1.3 Tipos de interacciones con el medio 17
2.2 La ingeniería didáctica 19
 2.2.1 Funciones de la ingeniería didáctica 20
 2.2.2 Fases de la ingeniería didáctica 21

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INGENIERÍA

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS PRELIMINAR

3.1 Análisis epistemológico 25
 3.1.1 Referencia histórica 26
 3.1.2 Los sistemas de inecuaciones lineales y su aplicación a la programación lineal 27
 3.1.3 Revisión de los libros de texto 37
3.2 Análisis cognitivo 48
 3.2.1 Análisis del uso de los registros de representación 48
 3.2.2 Análisis de los conocimientos previos 50

3.3 Análisis didáctico 58
3.3.1 La enseñanza de los Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal en la UARM . 58
3.4 Análisis del campo de restricciones 62

CAPÍTULO 4: CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI
4.1 Determinación de las variables 67
4.1.1 Variables macro – didácticas 67
4.1.2 Variables micro – didácticas 68
4.2 Diseño de la secuencia didáctica 71
4.2.1 Visión general 71
4.2.2 Identificación de las variables en las Actividades de Aprendizaje.... 72
4.2.3 Tipo de interacciones con el medio y comportamientos esperados. 73
4.2.4 Material complementario 80
4.2.5 Cronograma de aplicación de las actividades 81
4.2.6 Actividades diseñadas 81

CAPÍTULO 5: FASE EXPERIMENTAL
5.1 Logros y dificultades encontrados en el desarrollo de las actividades 89

CAPÍTULO 6: ANÁLISIS A POSTERIORI
6.1 Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados en la experimentación 122
6.2 Situación didáctica reformulada 133

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

7.1 Conclusiones 142
7.2 Recomendaciones...... 147
7.3 Sugerencias para futuras investigaciones 148

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 149
ANEXOS

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los distintos aspectos relacionados con el problema de investigación que muestran el contexto en que se desarrolló el presente trabajo son:

El bajo desempeño matemático de los estudiantes peruanos en las pruebas PISA

El proyecto PISA (Programme for International Student Assesment) conducido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) evalúa los niveles de alfabetización de los estudiantes de 15 años, los cuales, en su mayoría, se encuentran en los años próximos a concluir sus estudios de educación básica. Es un esfuerzo por establecer estándares internacionales de desempeño para las dimensiones de alfabetización lectora, matemática y científica.

El Perú participó en el primer ciclo evaluativo de este proyecto (año 2003), y el Ministerio de Educación del Perú, por medio de la Unidad de Medición de la Calidad Educativa, entregó a la opinión pública un importante trabajo sobre los resultados en alfabetización matemática y científica con el fin de que sea aprovechado no solo por investigadores y especialistas en diseño de políticas educativas, sino también, y especialmente, por docentes, formadores de docentes y directores de centros educativos esperando una reflexión y análisis acerca de la pertinencia y vigencia de las prácticas pedagógicas usadas, teniendo como base los resultados de las tareas a las que se enfrentaron los alumnos y su desempeño en la evaluación PISA.

Los resultados muestran que entre todos los estudiantes de los países que participaron en el estudio PISA, los estudiantes peruanos fueron los que, en promedio, obtuvieron el menor puntaje en la escala de alfabetización matemática. Dicho resultado, es significativamente inferior al puntaje promedio obtenido por el resto de países (figura 2).

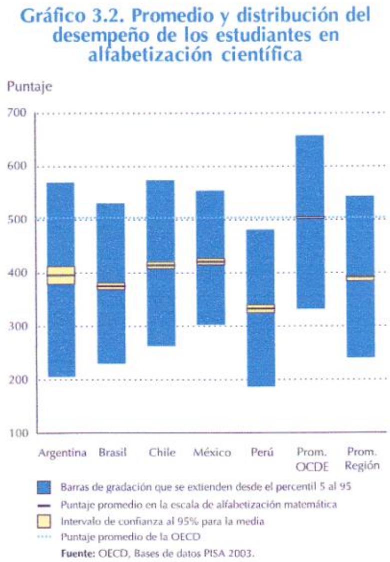


Figura 2

En el año 2009 el Perú participó nuevamente en el estudio Pisa, obteniendo 365 puntos en la escala matemática, es decir, un resultado bastante similar al obtenido en el 2003.

El mismo informe considera tres niveles de desempeño según el puntaje alcanzado.

Nivel de desempeño	Puntaje alcanzado
Alto	Alrededor de 750 puntos
Medio	Alrededor de 570 puntos
Bajo	Alrededor de 380 puntos

Los alumnos que tienen un nivel de desempeño alto:

1. Muestran intuición y comprensión en el proceso de solución de los problemas.
2. Desarrollan interpretaciones y formulaciones matemáticas a problemas puestos en un contexto realista.
3. Identifican herramientas matemáticas relevantes o métodos de solución de problemas en contextos no familiares.
4. Resuelven problemas que involucran varios pasos.
5. Reflexionan sobre sus resultados y generalizan sus hallazgos.
6. Usan razonamientos y argumentos matemáticos para explicar sus soluciones y comunicar sus resultados.

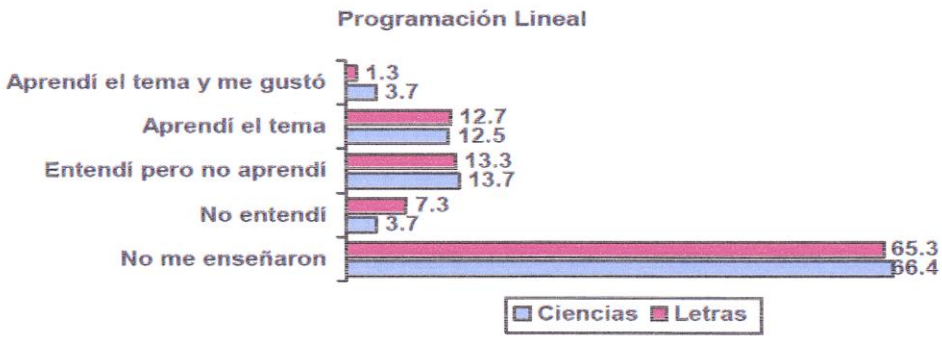
Ciertamente estas habilidades deben estimularse con la enseñanza y el aprendizaje de diversos temas de matemáticas. En ese sentido, la propuesta que hacemos para la enseñanza y aprendizaje de la Programación Lineal, contribuye a estimularlas.

A través de resolver problemas contextualizados de programación lineal por el método gráfico se enfatiza de forma natural en los puntos 2, 3 y 4. Por otro lado se convierte en un reto pensar en situaciones que induzcan al alumno a desarrollar en las habilidades descritas en los puntos 1,5 y 6 analizando la relación entre la región factible y la función objetivo determinadas en un problema de contexto real.

La poca atención brindada al tema Programación Lineal en la etapa escolar de los estudiantes peruanos

Las deficiencias mencionadas se hacen también evidentes cuando los estudiantes llevan los primeros cursos de matemática en la universidad, en donde los profesores de matemática se enfrentan al problema de tener alumnos con una formación matemática muy pobre y que en muchos casos no han visto en sus estudios escolares temas contenidos en el diseño curricular escolar.

Así, en Malaspina (2008) se muestra los resultados de una encuesta realizada a los ingresantes 2007-I de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) que culminaron sus estudios en el año 2005 ó 2006 e ingresaron a la PUCP en el 2006 o en el primer semestre 2007 y se matricularon en el semestre 2007-1. Este número asciende a 1610 estudiantes. En esta encuesta se identificó la Programación Lineal como conocimiento previo muy poco frecuente entre los ingresantes a la PUCP, con percepciones similares entre ingresantes a letras y ciencias. Destaca el resultado relacionado con la Programación lineal, pues un 66% manifiesta que no le enseñaron, lo cual revela la poca atención que se brinda en la secundaria a temas de optimización a pesar de su importancia (figura 3).



Fuente: Malaspina, 2008, p.195

Figura 3

Analizando este objeto matemático en el Diseño Curricular Nacional (DCN), se observa que en el quinto grado de secundaria las inecuaciones lineales con dos incógnitas, seguidas por la introducción a la programación lineal, aparecen como conocimientos de álgebra. En el mismo grado de estudios, estos temas se relacionan con el tema de funciones y con el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En el DCN se considera que las capacidades relacionadas con estos conocimientos son el resolver problemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas mediante métodos gráficos, el resolver problemas de programación lineal con dos variables mediante métodos gráficos y el resolver problemas de contexto real y matemático que implican la organización de datos a partir de inferencias deductivas y/o el uso de cuantificadores.

La reciente inclusión de la P.L. como parte de los puntos a evaluar en la prueba de admisión de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Una muestra de la importancia de considerar el estudio de la programación lineal en la educación básica, es su reciente inclusión como parte de los puntos a evaluar en la prueba de admisión de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Cabe mencionar que en el año 2009 se han cambiado, luego de más de 10 años, las características de dicha prueba, considerando entre otros cambios que por primera vez habrá dos versiones de la prueba, una para alumnos que postulan a carreras de Letras y otra para los alumnos que postulan a carreras de Ciencias o a Arquitectura. Existen contenidos que solo serán materia de evaluación para los alumnos de Ciencias o Arquitectura y uno de ellos son las inecuaciones lineales en una o dos variables. Se espera que el alumno pueda representar relaciones lineales entre variables, representar gráficamente la solución de un sistema de inecuaciones lineales de una o dos variables y modelar situaciones problemáticas relacionadas con maximizar o minimizar valores convenientemente.

Debido a que la incorporación mencionada es bastante reciente, las instituciones dedicadas a la preparación de los alumnos para lograr el ingreso de los alumnos a la PUCP se encuentran en plena búsqueda de propuestas didácticas para el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema mencionado.

Las dificultades al enseñar la P.L. a alumnos de humanidades, específicamente a los alumnos de la UARM

Por otro lado, existen en el Perú universidades dedicadas únicamente a impartir carreras de humanidades como la Universidad Antonio Ruíz de Montoya (UARM), que recoge el acervo institucional, tanto del instituto de humanidades Clásicas, fundado por la misma Compañía de Jesús en 1938, como de la Escuela Superior de Pedagogía, Filosofía y Letras Antonio Ruíz de Montoya que fue creada en el año 1991. La UARM ofrece a los estudiantes de la compañía de Jesús y de otras congregaciones religiosas, así como al público en general, una oferta académica, dedicada exclusivamente al área humanística, donde la gran mayoría de los alumnos tiene poca base académica en las ciencias básicas en general y en matemática en particular.

Cabe resaltar que todas las carreras, excepto la carrera de filosofía llevan matemática como curso obligatorio cumpliendo un papel formativo fundamental, considerando las exigencias y demandas de la sociedad en la que nos encontramos. Enseñar matemáticas, particularmente P.L., a estos alumnos se convierte en todo un reto, considerando que la mayoría de ellos no ha visto el tema en el colegio y dedican poco tiempo al estudio en casa. Esta afirmación se basa en los resultados de la encuesta tomada (anexo 12). Es necesario entonces recurrir a la investigación en didáctica de las matemáticas para fundamentar nuevas propuestas de interacción. Cabe resaltar que el tema *sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas y sus aplicaciones a la programación lineal*, es un tema que se dicta en dicha casa de estudios hace tres años, tiempo en el que el dictado ha sido abordado desde un enfoque tradicional (basado en la exposición y explicación de los conceptos y procedimientos por parte del docente),obteniendo logros muy limitados; los estudiantes no se involucran plenamente en el proceso de aprendizaje, no logran comprender los conceptos y procedimientos y tampoco logran autonomía en la resolución de problemas.

Se han notado, en los alumnos, serias dificultades al abordar problemas de P.L. como las siguientes:

- Muestran deficiencias operatorias tanto aritméticas como algebraicas.
- Presentan serias dificultades para generalizar o encontrar patrones.
- Tienen limitaciones para hacer uso de conceptos y propiedades al justificar o explicar sus procedimientos o respuestas.

- No manejan una adecuada graduación en los ejes del plano cartesiano, lo que les dificulta una correcta interpretación de las gráficas.
- Muestran deficiencias en definir las variables del problema dado en registro verbal y en organizar los datos.
- Los estudiantes muestran mucha dificultad para transitar y coordinar los diferentes registros de representación (verbal, algebraico y gráfico), principalmente para analizar e interpretar las gráficas.
- Sus explicaciones se ven limitadas por la falta de experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado, a pesar de que muestran capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos.

Este estudio presta especial atención a las dos últimas deficiencias.

Por todo lo anterior, surge el interés por diseñar una secuencia didáctica para que los alumnos, usen comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones a la Programación Lineal, a partir de situaciones contextualizadas cuya solución requiera de su uso.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo nos planteamos como problema, responder a las siguientes preguntas de investigación:

¿Es posible proponer una situación didáctica que induzca a los alumnos a usar comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a problemas de Programación Lineal, transitando y coordinando los diferentes registros de representación con énfasis en el registro gráfico?

¿Es posible proponer una situación didáctica que induzca a los estudiantes a obtener conclusiones, interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal en problemas de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a contextos de Programación Lineal?

1.2 ANTECEDENTES

La presente investigación enfatizará en el método gráfico para resolver problemas de P.L. teniendo en cuenta trabajos anteriores que destacan la importancia del uso del registro gráfico en temas afines a la P.L.

En el año 2004, Segura estudió los sistemas de ecuaciones lineales e identificó como problemática, las dificultades que presentan los alumnos para trabajar problemas dados en registro verbal que involucran sistemas de ecuaciones. Menciona que los alumnos no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico y que no efectúan representaciones y resoluciones gráficas de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus inframatemático a este registro de representación. Señala además que estas dificultades se vuelven a dar en el estudio de las desigualdades.

El mencionado estudio presenta como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval. Se puede apreciar cómo se puede facilitar el aprendizaje de objetos matemáticos como las ecuaciones lineales planteando al alumno actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación y que además impliquen trabajo en diferentes registros de representación y de pasaje entre ellos. Además, utiliza la Ingeniería didáctica como metodología de investigación presentando un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase. Este mismo esquema, en lo que se refiere al marco de referencia y a la metodología, se utiliza como modelo en nuestra investigación.

Barbosa (2003) trabaja el tema inecuaciones bajo la perspectiva de la teoría APOE y tiene como objetivo exponer un conjunto de construcciones mentales, a las cuales denomina esquema, que pueden desarrollar los universitarios a fin de que entiendan el concepto de inecuación. Barbosa (2008) también enfatiza en la importancia de las resoluciones gráficas y es en este sentido que afirma que es necesario proponer actividades que involucren la interpretación y las resoluciones no solo algebraicas, valorando el análisis de las implicaciones y equivalencias, sino también resoluciones gráficas que propicien el pensamiento flexible, al considerar esas visiones relacionadas.

En el año 2002, Oaxaca estudia las dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

En este trabajo se afirma que existe una separación entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico aritmético, que es necesario resolver para que los alumnos los usen sin ninguna dificultad.

Entre sus conclusiones se mencionan las siguientes:

La solución del sistema de ecuaciones se asocia con el valor de x o de y pero no se interpreta el punto que forma esta pareja.

Los profesores debemos ayudar a nuestros alumnos a desarrollar las formas de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético para que ellos puedan transitar en ambas formas.

El profesor en el aula induce a los alumnos a conocer los diferentes métodos que existen para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero se olvida de tratar sus representaciones gráficas.

Los libros de texto se inclinan por el pensamiento analítico - aritmético o únicamente dan una introducción a sus representaciones gráficas y continúan resolviendo los problemas en forma algorítmica provocando que el alumno memorice o mecanice los métodos.

Como podemos apreciar, los trabajos antes mencionados coinciden en la importancia que tiene el manejo del registro gráfico y es en ese sentido que se orienta el presente trabajo, considerando ecuaciones e inecuaciones en el marco de la solución de problemas de P.L.

González y Diez (2002) por su parte hacen un estudio sobre la adquisición del concepto de desigualdad en los tipos $x \leq k$; $k_1 < x < k_2$; $y < x + k$, y a la identificación de las zonas del plano que representan. El método de enseñanza aprendizaje que emplea, consiste en la generación de situaciones didácticas en las que el alumno se ve inmerso en momentos de acción, de comunicación y de debate que van produciendo la evolución del lenguaje del plano gráfico hacia una expresión simbólica en R^2. De este modo afirma que los alumnos llegan a entender los semiplanos en forma de expresiones simbólicas – desigualdades.

En nuestro estudio, de manera similar se generarán situaciones en las que los alumnos se vean inmersos en dichos momentos, pero no solo relacionando el registro gráfico y algebraico, sino también el verbal y orientando las actividades hacia la comprensión y solución de problemas de P.L.

Existen algunas referencias ligadas específicamente al tema de Programación Lineal, como las siguientes:

Dieudonne (citado en González y Diez, 2002) sostiene que la sustitución del lenguaje algebraico por el lenguaje geométrico casi siempre aporta considerables simplificaciones y hace aparecer propiedades insospechadas escondidas bajo una montaña de cálculos. Así los modelos de la Programación

Lineal y la optimización se comprenden y se manejan mejor cuando se interpretan en términos geométricos. Por esta razón, en el presente trabajo se enfatizará en la interpretación gráfica de situaciones ligadas a la P.L., de modo que la solución óptima se encuentre usando el registro gráfico.

En el año 2009, Moreno estudió los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal, encontrando que la etapa de acción se ve limitada por las deficiencias en la identificación de variables y la organización de los datos en los problemas de P.L.

En cuanto a la formulación, sostiene que existe dificultad para representar algebraicamente (usando desigualdades) las restricciones de problemas de P.L. En el proceso de validación afirma que se ven muchas limitaciones en el uso de los conocimientos previos en la justificación de las respuestas.

Nuestra propuesta tiene en cuenta estas limitaciones mencionadas por Moreno y plantea situaciones que faciliten la identificación de variables, la representación algebraica de restricciones y el uso de conocimientos previos para justificar sus respuestas.

Por otro lado, en el año 2008, Malaspina realizó un análisis sobre la intuición y el rigor en la resolución de problemas de optimización encontrando que se perciben deficiencias en el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos al resolver los problemas de optimización. Este autor sostiene también que existe una deficiencia específica de argumentación al resolver problemas de optimización, la cual radica en la poca presencia de justificación de que el resultado es óptimo, lo cual se vuelve más notorio cuando la variable es discreta.

Adicionalmente, en Malaspina (2008) se señala que se perciben capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos, mas no han sido fortalecidas con experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado.

Estos puntos servirán de referente en nuestro trabajo ya que se plantearán situaciones en las cuales se estimule el uso de la intuición optimizadora como una primera aproximación a la solución del problema, y se inducirá al alumno al uso del lenguaje formal al insistir en las explicaciones de las soluciones de los problemas de P.L.

1.3 PERSPECTIVA TEÓRICA

Debido a que en este trabajo de investigación la componente didáctica tiene una relevancia especial, se considera idónea como soporte teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas. En la actualidad es una teoría con una sólida fundamentación científica que permite interpretar las actitudes, procedimientos y relaciones que se llevan a cabo en una puesta en escena; esto lo hace analizando los procesos a que da lugar la comunicación del saber matemático e indagando las mejores condiciones de su realización.

Según Brousseau (1986) la didáctica estudia la comunicación de los saberes y tiende a teorizar su objeto de estudio, pero no puede responder a este desafío más que con las siguientes condiciones:

1. Poner en evidencia fenómenos específicos que parecen explicados por los conceptos originales que propone.
2. Indicar los métodos de pruebas específicas que utiliza para ello.

Estas dos condiciones son indispensables para que la didáctica de las matemáticas pueda conocer de forma científica su objeto de estudio y permitir así acciones controladas sobre la enseñanza.

Así Brousseau resalta la importancia de la investigación para el estudio del aprendizaje y sobre todo de la enseñanza.

Por otro lado, ya que por la naturaleza del tema en estudio, la necesidad de coordinación entre los registros verbal, algebraico y gráfico es notoria, consideraremos también importante analizar y poner en evidencia el rol que juegan los registros de representación en las respuestas de los estudiantes.

Así la presente investigación se encuentra también enmarcada en los aportes de R. Duval sobre los registros de representación semiótica, en la que la conversión o transformación de una representación en otra perteneciente a otro registro, juega un papel crucial. Este enfoque, basado en la noción semiótica de registro, sostiene que no es posible acceder a los objetos matemáticos, que son abstractos y por lo tanto no accesibles por la percepción ni manipulables como un objeto físico, fuera de un sistema semiótico. En este sentido considera que un problema clave en el aprendizaje de la matemática es la distinción que debe hacerse entre un objeto y su representación.

De esta forma, poniendo énfasis en las condiciones didácticas y cognitivas que una secuencia didáctica debe contener, se analizará el aprendizaje del objeto matemático en cuestión.

1.4 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo general

Diseñar, elaborar, aplicar, analizar y proponer una secuencia didáctica que permita usar comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables poniendo énfasis en sus aplicaciones a problemas contextualizados de programación lineal.

La experiencia didáctica se desarrollará con los alumnos del segundo ciclo de la carrera de Turismo Sostenible que estudian en la Universidad Antonio Ruíz de Montoya.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general pretendemos lograr los siguientes objetivos específicos:

1. Diseñar y elaborar una secuencia didáctica que contribuya a que, al usar los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables para resolver problemas contextualizados de programación lineal, los estudiantes
   a. coordinen los diferentes registros de representación (con énfasis en el gráfico)
   b. obtengan conclusiones interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal.

2. Experimentar la secuencia didáctica y analizar los resultados, comparando los comportamientos esperados y los observados, a la luz del marco teórico adoptado.

3. Rediseñar la secuencia didáctica diseñada originalmente, considerando el análisis de los resultados de su experimentación en aula y la comparación de los comportamientos esperados y los observados.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDACTICAS (TSD)

2.1.1 FUNDAMENTOS

Panizza (1995) afirma que dentro de la disciplina (la Didáctica de la Matemática de la escuela francesa), Guy Brousseau desarrolla la "Teoría de Situaciones". Sostiene que se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.

Así, la Teoría de Situaciones se basa en una concepción constructivista del aprendizaje desde un enfoque piagetiano.

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Sadovsky,2005,p.2)

Sin embargo; Brousseau consideraba que esta propuesta corría el riesgo de liberar al maestro de toda responsabilidad didáctica. Para él el maestro debe provocar estas adaptaciones seleccionando cuidadosamente los problemas y situaciones que se propongan.

Sadowsky (2005), afirma lo siguiente:

> El modelo de Guy Brousseau describe el proceso de producción de conocimientos matemáticos en una clase a partir de dos tipos de interacciones básicas:
>
> a. la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego.
>
> b. la interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con la problemática matemática.
>
> A partir de ellos postula la necesidad de un medio pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica. (p.3)

Estas interacciones básicas conforman en la Teoría de Situaciones un sistema, es decir que no pueden concebirse de manera independiente unas de las otras. Este sistema debe considerarse en la situación efectiva en la que se encuentra ubicado, pues los sujetos en interacción (maestro y alumnos) son sujetos situados en un contexto que determina expectativas, códigos y comportamientos específicos.

La Teoría de Situaciones didácticas formula que para todo conocimiento matemático siempre es posible construir "una situación fundamental", de tal forma que dicho conocimiento surja como la estrategia óptima para resolverla.

2.1.2 CONCEPTOS BÁSICOS

a. Medio

Son todos aquellos objetos que el alumno es capaz de manipular de manera ágil y segura sin cuestionar su naturaleza, así como todas las actividades de ayuda al estudio como son: los cursos de matemáticas, los libros de texto, etc.

b. Situación didáctica

Una situación didáctica es una situación construida con la intención de hacer que los alumnos adquieran un determinado saber.
Brousseau (1986), la definía de esta manera:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.
> (citado en Panizza, p.3)

c. Situación a-didáctica

Son momentos de aprendizaje en los cuales el alumno se enfrenta solo a la resolución de un problema, sin que el profesor haga intervenciones relacionadas al conocimiento que se pretende que el alumno aprenda, definida así por Brousseau (1986):

> El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en

> práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (p.12)

La intención de que el alumno aprenda no desaparece en las situaciones a-didácticas, la no intencionalidad inmersa en este concepto se refiere a que el alumno debe enfrentarse al problema haciendo uso de sus conocimientos previos, motivado por el problema mismo y no por cumplir con el maestro.

El principio de no intervención del maestro en una situación a-didáctica se debe a que es un momento de aprendizaje y no de enseñanza, así se afirma:
"Las interacciones entre el alumno y el medio se describen a partir del concepto teórico de situación a-didáctica, que modeliza una actividad de producción de conocimientos por parte del alumno, de manera independiente de la mediación del docente". (Sadovsky, 2005, p.3)

Brousseau (1986) afirma:

> El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No solo puede, sino que también debe, pues solo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. (p.14)

Las intervenciones del maestro estarán pensadas como para instalar y mantener a los alumnos en la tarea.

Las situaciones a-didácticas tienen dos condiciones esenciales:

El carácter de necesidad de los conocimientos: la situación debe ser diseñada de tal forma que el conocimiento que se quiere que el alumno adquiera sea necesario y no solo posible, para su resolución óptima.

La noción de “retroacción” o “sanción: “no es un castigo”. El sentido es que el alumno pueda juzgar por sí mismo los resultados de su acción y que pueda intentar nuevas formas de solución al interactuar con el medio que le ofrezca información sobre su producción.

d. Devolución

Es un proceso que requiere una negociación continua entre el maestro y el alumno, generalmente implícita, en la que el maestro persigue que el alumno se apropie o haga suya una situación a-didáctica, es decir le delega la exploración, la búsqueda y la necesidad de hallar respuestas y de avanzar de manera tal que esto sea aceptado quizás sin ser percibido por el mismo alumno.

Brousseau(1986) sostiene: ”La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia”. (p.5)

También afirma que “La enseñanza es la devolución al alumno de una situación a-didáctica correcta; y el aprendizaje es una adaptación a esta situación” (p.15)

Margolinas,(1993) afirma:

> (…) la devolución parece ser un proceso que se desarrolla durante toda la situación a-didáctica, y no solamente en la fase de establecimiento (…). El maestro es entonces responsable no solamente de una simple disciplina aceptable en la clase, sino menos superficialmente, del compromiso persistente del alumno en una relación a-didáctica con el problema (…) (citado en Panizza, p.7)

A través de estas definiciones vemos que la responsabilidad en el proceso de devolución es compartida entre el maestro y el alumno y no se limita solo a dar indicaciones iniciales o mantener la disciplina. El proceso de devolución es fundamental en toda situación a-didáctica ya que se debe lograr un compromiso intelectual de los alumnos con un medio resistente cuyo núcleo es un problema matemático, haciéndose cargo de él. Recordemos que Brousseau señala la necesidad de adaptarse a un medio como condición de aprendizaje.

e. Variable didáctica

Brousseau (1995), quién sostiene:

> (…) las situaciones didácticas son objetos teóricos cuya finalidad es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de estas condiciones pueden variarse a voluntad del docente, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación (…) (p.45)

El docente puede al inicio utilizar valores de la variable que permita al alumno enfrentar la situación con sus conocimientos previos y luego hacerle afrontar la construcción de un nuevo conocimiento, modificando el valor de la variable inicial adecuadamente de tal forma que se genere problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución.

Así, la manipulación de las variables resulta fundamental ya que provocan un juego entre anticipaciones y decisiones, a partir de las cuales el alumno va modificando sus esquemas y produciendo conocimientos.

f. El contrato didáctico

Es un sistema de obligaciones recíprocas establecida entre profesor y alumno. Comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del profesor en relación al saber.

Brousseau (1986) sostiene:

> En todas las situaciones didácticas se establece una relación que determina - explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente - lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de lo cual será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato (…) lo que nos interesa de este contrato es la parte específica del contenido, es decir, el contrato didáctico. (p.15)

Aquí señala el carácter parcialmente implícito del contrato didáctico y la responsabilidad compartida entre alumno y profesor.

Además se pone énfasis en que no es un contrato pedagógico general ya que depende estrechamente de los conocimientos en juego.

g. Obstáculo

Según Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997, p.239), un obstáculo es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades.

Así, un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela mediante los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlos.

2.1.3 TIPOS DE INTERACCIONES CON EL MEDIO

a. Situaciones de acción

Son aquellos momentos en los que el alumno en forma individual y haciendo uso de sus conocimientos previos, hace contacto con el problema matemático realizando intentos de familiarización con él. Utiliza acciones que implican operaciones que ya conoce y realiza de manera mecánica.

Es una forma en que el alumno interactúa con el medio didáctico para llegar a la resolución del problema y a la adquisición de conocimientos.

Esta situación debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción, ajustarla, sin la intervención del profesor, gracias a la información que recibe de la misma situación. Panizza (1995) afirma que *"en las situaciones de acción el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos"*. (p.9).

b. Situaciones de formulación

Este tipo de situaciones propicia que el alumno intercambie y comunique información verbal o escrita en lenguaje matemático. Aquí el alumno empieza a expresar sus propias ideas, pero reconoce y utiliza las nociones como instrumentos para resolver cuestiones matemáticas, pero no como objeto de estudio en ellos mismos.

Panizza (1995) sostiene:

> En las situaciones de formulación un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje. (p.9).

Aquí Panizza hace énfasis en el carácter implícito del mensaje y que para que esta formulación tenga sentido para él, tiene que poder usarla para obtener o hacer obtener a alguien un resultado.

c. Situaciones de validación

En estas situaciones el alumno debe probar la exactitud y la pertinencia de su mensaje matemático ante un interlocutor, quién puede pedir explicaciones.

El alumno en estas situaciones empieza a justificar lo que hizo, identificar sus errores y corregirlos, es el propio alumno quien valida sus conocimientos. Así las nociones matemáticas se convierten en objetos de estudio en sí mismas, así como instrumentos para estudiar otros objetos.

Panizza (1995) sostiene que "las afirmaciones propuestas por cada grupo (proponente) son sometidas a la consideración del otro grupo (oponente), que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir, aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, u oponer otras aserciones". (p.9).

Hay que tener en cuenta que el criterio por el cual se identifica una situación como de uno u otro tipo es si para resolverla el alumno requiere poner en juego acciones, formulaciones o validaciones y no de lo que realicen adicionalmente.

También es importante anotar, que no necesariamente se debe pasar primero por una situación de acción, luego de formulación y por último de validación, aunque esto pueda ser apropiado en algunos casos.

Institucionalización

La institucionalización consiste en relacionar las producciones de los alumnos y el saber cultural. No debe ser solo una presentación del saber desvinculado del trabajo anterior en el aula, sino que se debe sacar conclusiones a partir de sus produccíones, recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo trabajado en diferentes momentos, etc.

Brousseau (1986) afirma:

> La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización.
> (p.12)
>
> (…) En la devolución el maestro pone al alumno en situación a-didáctica… En la instituionalización, define las relaciones que puedan tener los comportamientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de estas actividades y les da un status. (Brousseau, 1986 citado en Panizza, p. 7)

2.2 LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La metodología de investigación que se considerará en este trabajo es la *ingeniería didáctica,* ya que permitirá analizar exhaustivamente todos los componentes de los procesos de construcción y comunicación de los saberes matemáticos en la clase.

Es necesario hacer una explicación teórica, para notar su idoneidad y entender el tipo de justificaciones que permite extraer de una experimentación.

Usaremos las ideas de Artigue(1995) y Douady (1995) para detallar de mejor manera en qué consiste y como se aplica esta metodología.

INTRODUCCIÓN

La noción de ingeniería didáctica surge a inicios de los 80 en Francia como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas. Su nombre surge al comparar el trabajo didáctico con el de un ingeniero.

Un ingeniero, según Artigue (1995, p.33):

> (…) para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la

ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.

Así, al igual que un ingeniero el profesor, concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de alumnos. Por otra parte, a medida que las pone en práctica lo planeado evoluciona de acuerdo a las interacciones que se producen en clase.

2.2.1 FUNCIONES DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

El término ingeniería didáctica se utiliza con una doble función en la didáctica de las matemáticas:

- como metodología de investigación experimental de tipo casuístico
- como método de producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje

Douady (1995) afirma:

> El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes y en función de las selecciones y decisiones del profesor. De esta forma, la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo, si se presenta el caso, a la dinámica de la clase (…) La ingeniería didáctica designa, de igual forma, una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase. (pp.61-62).

La ingeniería didáctica se basa en el registro del estudio de caso. El control de la validez es interno y se consigue por contraste entre lo que se planificó y lo que realmente sucedió en clase.

2.2.2 FASES DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Consta de cuatro fases, donde en cada una de ellas puede predominar la función investigadora o la función de enseñanza aprendizaje según las actividades realizadas por el ingeniero-profesor.

Fase	**Función predominante**
Análisis preliminar	Investigación
Concepción y Análisis a priori	Investigación/Enseñanza aprendizaje
Experimentación	Enseñanza/aprendizaje
Análisis a posteriori y evaluación	Investigación

Habiendo presentado ya las 4 fases de la ingeniería didáctica, explicaremos en qué consiste cada una de ellas.

FASE1: Análisis Preliminar

Según Artigue (1995):

> En una investigación en ingeniería didáctica, la fase de concepción se basa no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. (p.38).

Este análisis se efectúa distinguiendo tres dimensiones:

- *Epistemológica:* Aquí se analizará las características del saber en juego, una reseña histórica, los aspectos teóricos relacionados y la forma de abordarlo y sus posibles dificultades. Se analizará algunos textos que tratan sobre el objeto de estudio del presente trabajo.

- *Cognitivas:* Aquí se analiza la forma en que los estudiantes a quienes va dirigida la enseñanza, interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades teniendo en cuenta sus conocimientos acumulados anteriormente.

- Didáctica: Aquí se analiza la forma en que se desarrolla el proceso enseñanza del objeto de estudio, así como los recursos didácticos y las estrategias de dictado en experiencias previas.

Análisis del campo de las restricciones

También se realiza el análisis del campo de restricciones, describiendo el grupo de estudiantes con los que se lleva a cabo la experimentación de la situación diseñada así como los recursos de la institución a la que pertenecen.

Datos como la edad de los alumnos, conocimientos anteriores sobre el tema, tiempo que tiene disponible para estudiar…, juegan un papel importante en el diseño, sin embargo al no poder ser modificados por el maestro, no se consideran variables didácticas de la situación, pasando a formar el campo de las restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

FASE 2: La concepción y el análisis a priori

El análisis a priori se basa en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes. La validación de estas hipótesis está relacionada con la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase, entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

En esta fase el investigador decide actuar sobre determinadas variables del sistema que no están fijadas por las restricciones. A estas variables se les llama las variables de comando.

Artigue considera dos tipos de variable de comando.

Variables macro-didácticas o globales son las asociadas con la organización y gestión del medio, se dice que son concernientes a la organización global de la ingeniería.

Variables micro-didácticas o locales son las asociadas a la organización local de la ingeniería, o sea la organización de una secuencia o fase dependiente del contenido didáctico en que se enfoca la enseñanza.

Siguiendo a Artigue (1995), en esta fase se debe analizar:

- ✓ El contexto escolar involucrado.
- ✓ El objeto de estudio.

- ✓ Los aspectos teóricos, tecnológicos y/o técnicos relacionados con el objeto de estudio.
- ✓ Las características de las situaciones problemáticas seleccionadas que permitirá estudiar el objeto matemático escogido.
- ✓ Las variables del problema.
- ✓ Los resultados que se esperan de los estudiantes.

FASE 3: Experimentación

Esta fase, que es predominantemente de enseñanza y aprendizaje, se inicia con el contacto investigador/profesor/observador/ con la población de los estudiantes objeto de la investigación.

Mendiola (2005) sostiene que "desde el punto de vista de la investigación se registrarán los principales momentos de la clase (por escrito o de manera visual) para que después se pueda realizar el análisis a posteriori y la correspondiente contrastación e interpretación."(p.79).

Así la experimentación supone:

- ✓ La explicitación de las condiciones de realización de la investigación a los estudiantes seleccionados.
- ✓ El establecimiento del contrato didáctico.
- ✓ La aplicación de los instrumentos diseñados en la fase anterior.
- ✓ El registro de las observaciones realizadas durante experimentación.

Cuando la experimentación dura más de una sesión, se recomienda hacer un análisis a posteriori local, con la finalidad de hacer las correcciones necesarias de una sesión a otra.

FASE 4: Análisis a posteriori y evaluación.

Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados en la fase de experimentación así como en las producciones de los alumnos en el aula o fuera de ella. Estos datos se complementan con metodologías adicionales como cuestionarios, entrevistas, etc. aplicados en distintos momentos de la enseñanza.

Se hará una comparación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori de la situación didáctica, comparando los comportamientos esperados con lo que realmente sucedió en la clase.

Mendiola (2005) sostiene:

> Desde el punto de vista de la enseñanza se podrá comprobar qué objetivos educativos se han logrado y cuáles no, y desde el punto de vista de la investigación se podrá llegar a conclusiones generales o locales que permitan enjuiciar las virtudes y los defectos de la didáctica empleada en el estudio del objeto matemático escogido.(p.82).

Luego de la comparación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori se precisará que aspectos no logrados quedarán como cuestiones abiertas para futuras ingenierías didácticas.

El fenómeno de la reproducibilidad

Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica, es establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la misma, al repetirla en distintos escenarios.

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INGENIERÍA

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS PRELIMINAR

El análisis preliminar del presente trabajo de investigación se hará de una forma sistémica, es decir se considerará el saber matemático en juego (sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal), la situación de la enseñanza (Universidad Antonio Ruíz de Montoya), el estudiante (de la carrera de turismo) y las relaciones entre los tres elementos considerados. Este análisis se efectuará distinguiendo tres dimensiones:

- Epistemológica: Aquí se analizará las características del saber en juego, una reseña histórica, los aspectos teóricos relacionados, la forma de abordarlo y sus posibles dificultades. Se analizará algunos textos que tratan sobre el objeto de estudio del presente trabajo.

- Cognitiva: Aquí se analizará la forma en que los estudiantes de turismo de la UARM, interpretan el conocimiento matemático en cuestión y las dificultades que tienen, considerando sus conocimientos acumulados anteriormente.

- Didáctica: Aquí se analizará la forma en que se desarrolla el proceso de enseñanza del objeto de estudio en la UARM, así como los recursos didácticos y las estrategias de dictado en experiencias previas en dicho centro de estudios.

  También se realizará el análisis del campo de restricciones, describiendo el grupo de estudiantes con los que se lleva a cabo la experimentación de la situación diseñada, es decir los alumnos del segundo semestre de la carrera de Turismo Sostenible, de la UARM, que se encuentran cursando la materia Matemática Aplicada a la Economía 2.

3.1. ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO

Presentamos a continuación los aspectos teóricos relacionados con los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y la programación lineal que incluye una breve referencia histórica y un análisis de textos que abordan dicho objeto de estudio.

3.1.1 REFERENCIA HISTÓRICA

En muchos problemas prácticos se necesita maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas restricciones; por ejemplo maximizar la función ganancia de una empresa, sujeta a ciertas restricciones acerca de la cantidad de material o mano de obra disponible. Los problemas de maximización o minimización que se pueden formular en términos de una función objetivo lineal y restricciones en la forma de desigualdades lineales se llaman problemas de programación lineal.

Por lo tanto, podemos afirmar que la Programación Lineal es una técnica de Modelación Matemática diseñada para optimizar el uso de recursos limitados. Utiliza modelos lineales que representan situaciones de la realidad en que el óptimo es un mínimo o un máximo a ser alcanzado bajo ciertas condiciones existentes.

Este problema de optimizar una función lineal sujeta a restricciones lineales tiene su origen el año 1826 con los estudios de Jean –Baptiste Joseph Fourier sobre los sistemas de inecuaciones lineales. Posteriormente, en el año1939, el matemático ruso Leonid Vitalyevich Kantarovich presentó un algoritmo para la resolución de un conjunto de ejemplos ligados a la optimización de recursos para lograr la mayor producción posible.

Sin embargo; podemos afirmar que el estudio de la Programación Lineal se desarrolla a finales del siglo XX en los Estados Unidos de América, por la necesidad de resolver problemas de optimización formulados a partir de cuestiones logísticas en la Fuerza Aérea. Fue en el año 1947, que George Dantzig, como consultor matemático de la USAF (US Air Force Comptroller) del Departamneto de la Fuerza Aérea Americana, presentó una forma sistematizada de resolución de problemas de Programación Lineal, llamado el Método Simplex. Este método permitió determinar con más facilidad y rapidez la solución de un problema, principalmente si éste involucraba varias variables.

Años después, en el 1975, La Academia Sueca de Ciencias otorgó el Premio Nobel de Economía a Kantorovich y Koopmans por sus contribuciones a la Teoría de Asignación de Recursos, considerando la contribución de Dantzig en el ámbito matemático. No existiendo Premio Nobel de Matemática, nunca la Academia premió a Dantzig, sin embargo, su nombre permanecerá en la historia de la construcción de la Programación Lineal como uno de sus arquitectos fundamentales.

Sin embargo; es en los últimos años, que el desarrollo de la Economía y los avances tecnológicos e informáticos han constituido factores decisivos para la evolución acelerada de la Programación Lineal. Esto ha permitido la resolución de problemas más elaborados en distintos dominios como: planeamiento de distribución y producción, planeamiento de recursos hidroeléctricos, decisiones ligadas a políticas micro y macroeconómicas, etc.

3.1.2 LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SU APLICACIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

A continuación se presentarán los sistemas de inecuaciones lineales como un caso particular de los sistemas de inecuaciones expresados en términos de funciones reales de variables reales. Luego abordaremos el método geométrico de solución de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables acompañándolo de un ejemplo de aplicación.

Finalmente estudiaremos la aplicación de los sistemas de inecuaciones lineales al problema general de P.L. y luego abordaremos el caso particular, con dos variables, a través del método gráfico. Acompañaremos esta explicación con un problema resuelto.

A través de este análisis se puede apreciar como el método gráfico se relaciona con la concepción algebraica del objeto de estudio del presente trabajo.

Este análisis que se presenta está basado en Sydsaeter (1996, pp. 563-568).

Sistemas de inecuaciones

Una inecuación con *n* incógnitas $x_1, x_2, ... x_n$, es un enunciado abierto con tales variables, usando un signo de desigualdad[1], que puede expresarse de la forma $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$

o de la forma

$f(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$

donde f es una función real de *n* variables reales.

Un sistema de *m* ($m \geq 2$) inecuaciones con *n* incógnitas $x_1, x_2, ... x_n$ es un conjunto de *m* inecuaciones. Una forma general de representarlo es

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m \end{cases}$$

,

1 Llamaremos signo de desigualdad a cualquiera de los siguientes: < , > , $\leq$, $\geq$. Se leen “menor que”, “mayor que”, “menor o igual que” y “mayor o igual que”. Los dos primeros son signos de *desigualdad estricta*.

donde $f_1, f_2,..., f_m$ son funciones reales de variable real y b_j son constantes reales.

Ciertamente, también se puede tener sistemas donde alguna (s) desigualdad (es) sea (n) estricta (s).

Sistemas de inecuaciones lineales

Si las funciones son polinomios de grado 1, se dice que el sistema es lineal; así un sistema de ***m*** inecuaciones lineales con ***n*** incógnitas tiene la siguiente representación algebraica:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array} \qquad (*)$$

O lo que es lo mismo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_{i\,,} \qquad para\ i = 1, 2, ..., m$$

Donde los a_{ij} son coeficientes conocidos, los b_i son constantes dadas y los x_j son las incógnitas del sistema.

Resolver el sistema (*) de *m* inecuaciones consiste en hallar el conjunto S formado por todos los puntos que verifican al mismo tiempo todas las inecuaciones del sistema. Si $S_1,..., S_m$ son los respectivos conjuntos de puntos que satisfacen cada una de las inecuaciones, hallar la solución del sistema consiste en hallar la intersección $S_1 \cap ... \cap S_m = S$

Si se trabaja con *n*=2, las regiones S_1 y S_2 serán subconjuntos del plano, y en consecuencia el conjunto S ($S_1 \cap S_2$) también lo será.

Para los fines del presente trabajo nos limitaremos a la explicación del método gráfico para resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.

Método geométrico de solución de sistemas de inecuaciones lineales con dos variables

Hallar gráficamente la solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos variables es representar en un mismo sistema de ejes los puntos cuyas coordenadas verifican simultáneamente todas las inecuaciones. Para ello es conveniente representar por separado el semiplano solución de cada una de las inecuaciones y, luego, analizar si existe alguna zona que sea común a todos los semiplanos determinados. La zona común, si existe, es la solución del sistema dado. Si no existe zona común, es claro que la intersección es el conjunto vacío, en cuyo caso se dice que el sistema no tiene solución.

Cabe mencionar que el procedimiento para graficar inecuaciones lineales con dos variables de la forma $ax + by + c > 0$; se basa en el siguiente teorema:

Teorema

Sea P= (x_1, y_1) un punto de uno de los semiplanos en que la gráfica de $ax + by + c = 0$ divide al plano. Si $ax + by + c > 0$, entonces, $ax + by + c > 0$ en todos los puntos del semiplano en que se encuentra P.

Como resultado de este teorema, tenemos el siguiente procedimiento para trazar la gráfica del conjunto solución de una inecuación lineal.

- ✓ Trazar la gráfica de la recta $ax + by + c = 0$.
- ✓ Tomar un punto de uno de los semiplanos determinados por esta recta y comprobar si verifican la inecuación dada. Si el punto satisface la desigualdad, el semiplano donde se encuentra dicho punto es el conjunto solución de la inecuación; en caso contrario es el semiplano opuesto.
- ✓ Sombrear el semiplano correspondiente a los puntos que verifican la inecuación.

Ejemplo:

Resolvamos el siguiente sistema de inecuaciones:

$8x + 5y \leq 6000$

$x \geq 300$

$y \geq 400$

El conjunto solución de este sistema es:

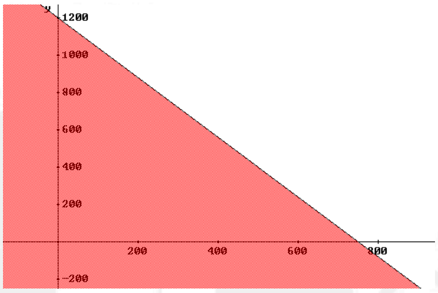
$$\{(x; y) \in \Re^2 / 8x + 5y \leq 6000 \wedge x \geq 300 \wedge y \geq 400\}$$

Ahora representaremos gráficamente en el plano cartesiano las inecuaciones dadas

I. Al graficar la inecuación 8x + 5y ≤ 6000 obtenemos :

$$\{(x;y) \in \Re^2 / 8x + 5y \leq 6000\};$$

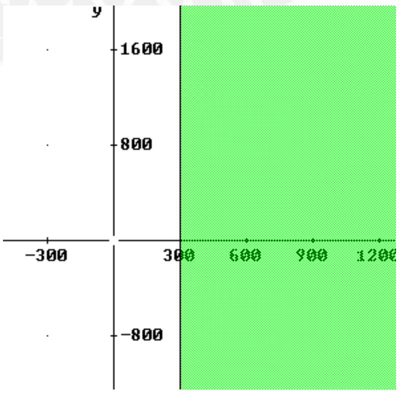
es decir, un semiplano que contiene al origen, limitado por la recta 8x+5y = 6000.



II. Con la segunda inecuación x ≥ 300 obtenemos:

$$\{(x;y) \in \Re^2 / x \geq 300\};$$

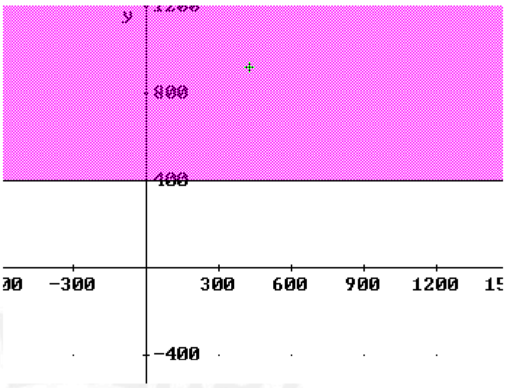
es decir, el semiplano que no contiene al origen, limitado por la recta x=300.



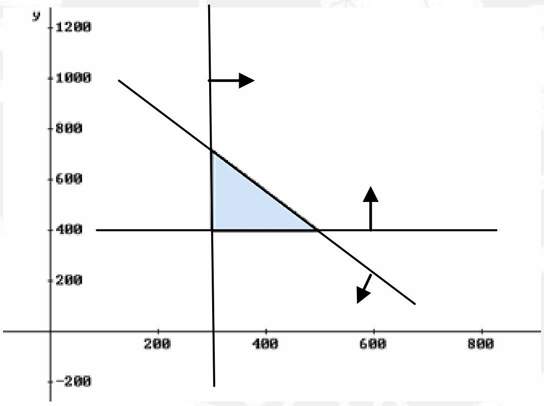
III. Similarmente al graficar la inecuación y ≥ 400 obtenemos

$$\{(x; y) \in \Re^2 \,/\, y \geq 400\};$$

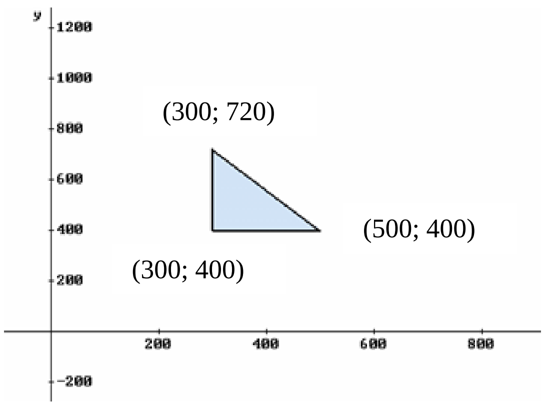
es decir, el semiplano que no contiene al origen y que está limitado por la recta y=400.



Finalmente, como se pide considerar el sistema en su conjunto, se deben intersecar las tres regiones sombreadas.

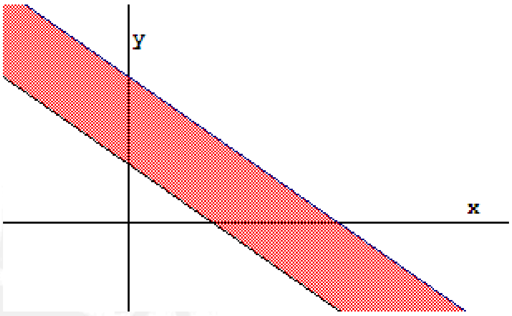
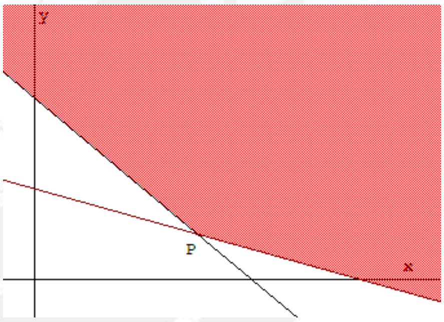
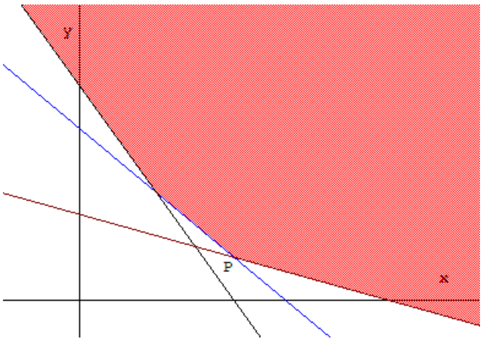


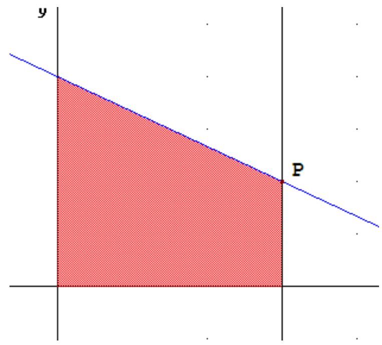
Así, el conjunto solución es el conjunto puntos de la región triangular que se muestra en la siguiente figura.



En el presente estudio consideraremos los casos en que la solución es diferente del vacío.

El contorno de la región solución puede estar formado por:

	Ejemplo
Rectas	 No existen vértices
Semirrectas y vértice	 P es un vértice
Segmentos, semirrectas y vértices	 P es uno de los vértices

Segmentos y vértices	 P es uno de los vértices

Aplicación de los sistemas de inecuaciones lineales a la programación lineal

Programación lineal (PL en siglas) es el nombre que se usa para los problemas en que el objetivo es maximizar o minimizar una función lineal sujeta a restricciones en forma de inecuaciones lineales. Es una técnica matemática de inmensa importancia práctica que desde sus orígenes en los años 40, ha producido desarrollos importantes tanto teóricos como computacionales.

El problema PL general

El problema PL general consiste en maximizar o minimizar

$$z = c_1 x_1 + \ldots c_n x_n \qquad \textbf{(función objetivo)}$$

con $c_1, \ldots, c_n$ constantes, sujeta a m restricciones

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \quad \textbf{(restricciones en forma de inecuaciones)} \\ &\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}$$

Donde los a_{ij} son coeficientes conocidos, los b_i son constantes dadas y los x_j son las incógnitas del sistema.

Normalmente suponemos explícitamente que:

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad \textbf{(restricciones de no negatividad)}$$

Un problema general de PL con dos únicas variables

Consiste en maximizar o minimizar una función lineal

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad \textbf{(función objetivo)}$$

Sujeta a m restricciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ &\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\le b_m \end{aligned} \qquad \textbf{(restricciones en forma de inecuaciones)}$$

Usualmente imponemos también restricciones explícitas de no negatividad sobre x_1 y x_2.

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \qquad \textbf{(restricciones de no negatividad)}$$

En el presente estudio nos limitaremos a trabajar problemas de PL con dos únicas variables y entre los diversos métodos de solución existentes, usaremos exclusivamente el método gráfico que explicaremos a continuación.

Solución gráfica de problemas de programación lineal.

El sistema de desigualdades que constituyen las restricciones del problema, definen una región plana S. Cada punto de S es un candidato para resolver el problema y se conoce como una solución factible. El conjunto S se conoce como región factible. El objetivo es encontrar, entre todos los puntos de S, el punto o los puntos que optimicen la función objetivo P. Tal solución factible es una solución óptima y constituye la solución del problema de programación lineal en cuestión.

El método gráfico se basa en los dos teoremas que mostraremos a continuación:

> Teorema 1
>
> Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta debe ocurrir en un vértice, o esquina, del conjunto factible S asociado al problema. Además, si la función objetivo P se optimiza en dos vértices adyacentes a S, entonces se optimiza en cada punto del segmento de recta que une estos vértices, en cuyo caso existe una infinidad de soluciones del problema.
>
> (Kemeny et al, 1968, pp.374-375)

El teorema 1 dice que la búsqueda de las soluciones a un problema de programación lineal se puede restringir al examen del conjunto de vértices del conjunto factible S relacionado con el problema. Como un conjunto factible S tiene un número finito de vértices, el teorema sugiere que la solución a un problema de programación lineal se puede hallar inspeccionando los valores de la función objetivo P en estos vértices.

El teorema no indica, sin embargo, cuando un problema de programación lineal tiene solución. El siguiente teorema establece ciertas condiciones que garantizan la existencia de la solución de un problema de programación lineal en dos variables, que caracterizan a los problemas que trabajamos en esta tesis.

> Teorema 2
>
> Existencia de una solución
>
> Dados un problema de programación lineal con un conjunto factible S y una función objetivo P=*ax*+*by*, con *a, b* $\in \Re$
>
> a. Si S es acotado, entonces P tiene un valor máximo y un mínimo en S.
>
> b. Si no es acotado (*) y tanto *a* como *b* son no negativos, entonces P tiene un valor mínimo en S siempre y cuando las restricciones que definen a s incluyan las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$.
>
> c. Si S es el conjunto vacío (**), entonces el problema de programación lineal no tiene solución; es decir, P no tiene un valor máximo ni un mínimo.

Un problema de programación lineal

Con el siguiente ejemplo mostraremos el proceso de solución descrito en las líneas anteriores.

Sábanas bordadas

Una empresa fabrica sábanas bordadas de dos tipos: económica y especial. La producción de una sábana económica requiere 2 horas de costura y 1 hora de bordado y la producción de una sábana especial requiere 3 horas de costura y 3 horas de bordado.

* Si una región factible puede estar contenida dentro de un círculo, se denomina región factible acotada. De otra manera es no acotada.

** Cuando una región factible contiene al menos un punto, se dice que es no vacía; en caso contrario es vacía.

Se dispone de 240 horas para costura y 150 horas para bordado.

Se sabe además, que el ingreso por la venta de cada sábana económica es de S/.89 y por las sábanas especiales es de S/.140.

a. Determina cuántas sábanas económicas y cuántas sábanas especiales debe producir la empresa para obtener el ingreso máximo.
b. Determina el ingreso máximo.

Solución:

Considerando: x = cantidad de sábanas económicas producidas.

y = cantidad de sábanas especiales producidas.

Las condiciones del problema quedarían expresadas por las siguientes inecuaciones:

$2x+3y \leq 240$ (Cantidad de horas disponibles para costura).

$x+3y \leq 150$ (Cantidad de horas disponibles para bordado).

$x \geq 0$, $y \geq 0$ (Condiciones de no negatividad de las variables).

Luego tenemos el propósito del problema, que consiste en determinar la cantidad de sábanas de cada tipo que se deben producir para obtener el máximo ingreso. Esto significa que se debe maximizar la función I=89x+140y bajo las condiciones dadas.

Aplicando el teorema 2, bastará evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible.

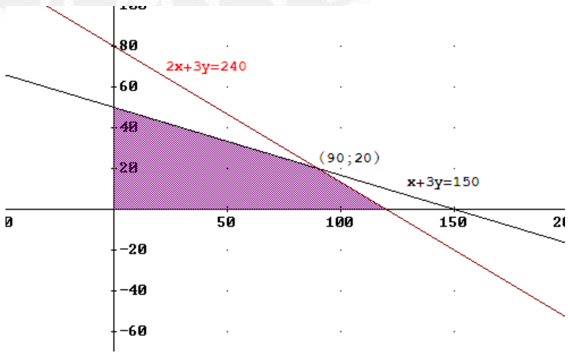


Figura 4

VÉRTICE	FUNCIÓN OBJETIVO I=89*x*+140*y*
(0; 50)	7000
(120; 0)	10680
(90; 20)	10810
(0; 0)	0

De esta manera concluimos que el punto (90;20) optimiza la función objetivo, lo que significa que produciendo 90 sábanas económicas y 20 sábanas especiales obtendrá el máximo ingreso (S/.10 810) bajo las condiciones establecidas.

3.1.3 REVISIÓN DE LOS LIBROS DE TEXTO

Siguiendo los lineamientos que da la Ingeniería Didáctica en lo referente al aspecto epistemológico de la fase preliminar, analizaremos cómo está tratada la Programación Lineal en algunos textos. Para ello, hemos seleccionado libros en los cuales la P.L. es el tema único y es tratado con profundidad (Grupo 1) y libros que son textos orientados a estudiantes de economía o administración, en los cuales la P.L. es uno de sus capítulos (Grupo 2). El propósito es tener referentes, por una parte, de enfoques en donde la preocupación fundamental no es la presentación didáctica de la P.L. sino la coherencia y rigurosidad matemática (“saber sabio”, en la terminología de Chevallard) y por otra parte de enfoques en los que están presentes intenciones de explicar los conceptos fundamentales de la P.L. de manera asequible a estudiantes universitarios y de orientarlos hacia la solución práctica de problemas.

Grupo 1

En este grupo se han considerado aquellos libros para los cuales la Programación Lineal no es solo un capítulo, sino que dedican todos sus capítulos al estudio de dicho objeto matemático

Nombre	Autor	año
Linear and Nonlinear Programming	David G. Luenberger	1984
Linear Programming Fundations and Extensions	Robert J. Vanderbei	1996

Linear Programming	George B. Dantzig Mukund N. Thapa	1997

De este grupo de libros que tratan el tema en forma similar, hemos escogido el libro Linear Programming de George B. Dantzig, considerado como el padre de la programación lineal.

Se han considerado los siguientes aspectos en el análisis del texto seleccionado:

Pre-requisitos para la P.L.	En el texto se declara que los autores asumen que el lector tiene algunos conocimientos elementales de álgebra lineal. Para quienes este conocimiento es muy básico o inexistente, se ha incluido un apéndice donde se dan los puntos del álgebra lineal que son necesarios (figura 5). A LINEAR ALGEBRA A.1 SCALARS, VECTORS, AND MATRICES . . . . A.2 ARITHMETIC OPERATIONS WITH VECTORS AND MATRICI A.3 LINEAR INDEPENDENCE . . . . A.4 ORTHOGONALITY . . . . A.5 NORMS . . . . A.6 VECTOR SPACES . . . . A.7 RANK OF A MATRIX . . . . A.8 MATRICES WITH SPECIAL STRUCTURE . . . . A.9 INVERSE OF A MATRIX . . . . A.10 INVERSES OF SPECIAL MATRICES . . . . A.11 DETERMINANTS . . . . A.12 EIGENVALUES . . . . A.13 POSITIVE-DEFINITENESS . . . . A.14 NOTES & SELECTED BIBLIOGRAPHY . . . . A.15 PROBLEMS . . . . **Figura 5** (Dantzig y Thapa, 1997, p.xii)
Introducción al tema P.L.	Se inicia el primer capítulo mostrando cuatro enunciados de problemas muy sencillos, típicos de la P.L. Consideramos un problema típico de la P.L. a aquellos que tienen un contexto real, un juego de restricciones y una función que se desea maximizar o minimizar. Luego se hace la formulación teórica de manera rigurosa como se muestra en la figura 6.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

1.2 MATHEMATICAL STATEMENT

The mathematical definition of a *linear program in* **standard form** is to find values of $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $\ldots$, $x_n \geq 0$ and min z satisfying

$$\begin{array}{ccccccccl} c_1x_1 & + & c_2x_2 & + \cdots + & c_nx_n & = & z \text{ (Min)} \\ a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \qquad (1.5)$$

In vector-matrix notation we may restate the above as

$$\begin{array}{lrl} \text{Minimize} & c^Tx = z & \\ \text{subject to} & Ax = b, & \quad A:\ m \times n, \\ & x \geq 0. & \end{array} \qquad (1.6)$$

Figura 6

(Dantzig y Thapa, 1997, p.7)

</td>
</tr>
<tr>
<td>Tratamiento del tema P.L.</td>
<td>

Todo el texto está dedicado al tratamiento de la P.L. en 9 capítulos que son:

Capítulo 1: El problema programación lineal.

Capítulo 2: Resolución de programas lineales simples.

Capítulo 3: El método Simplex.

Capítulo 4: Métodos de los Puntos Interiores.

Capítulo 5: Dualidad.

Capítulo 6: Formulaciones equivalentes.

Capítulo 7: Mecanismo de precio y análisis de sensibilidad.

Capítulo 8: Problema de traslado y asignación.

Capítulo 9: Teoría de flujo de redes.

Solo en dos páginas del segundo capítulo se hace referencia al método gráfico para resolver problemas de P.L. en dos variables describiendo el método en forma verbal y presentando un solo grafico ilustrativo (figura 7).

</td>
</tr>
</table>

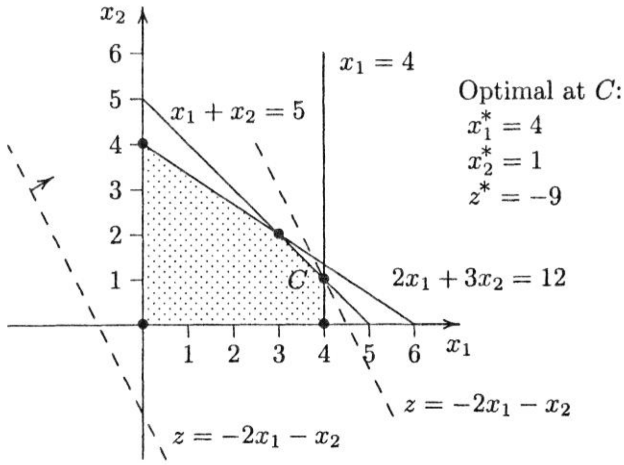
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Figure 2-1: Graphical Solution of a Two-Variable LP

Figura 7

(Dantzig y Thapa, 1997, p.36)

Las pruebas de todos los teoremas y lemas se pueden encontrar en el segundo volumen, Linear Programming 2 y al final de cada capítulo se puede encontrar una selección de referencias bibliográficas (figura 8).

1.7 NOTES & SELECTED BIBLIOGRAPHY

From the time that the Simplex Method was first proposed by George Dantzig in 1947, applications and new theories have grown at an astounding rate. They have grown so rapidly that it is not possible to treat every aspect of linear programming and extensions

Figura 8

(Dantzig y Thapa, 1997, p.23)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Tipo de problemas que predominan en P.L.</td>
<td>
En este texto predominan los problemas dados en registro algebraico. Se pide resolverlos por distintos métodos, entre ellos el método gráfico. En la figura 9 se muestra un ejemplo de lo mencionado.

Consider the following linear program:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximize} & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{subject to} & -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & -3x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \\ & & & 2x_2 & \leq & -1 \\ & & & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0. & \end{array}$$

(a) Plot it graphically and identify all the corner point solutions.
(b) Solve it graphically.
(c) Solve it with the DTZG Simplex Primal software option.
(d) Solve it by hand by the FME algorithm.
(e) Solve it by the Fourier-Motzkin Elimination software option.

Figura 9

(Dantzig y Thapa, 1997, p.55)
</td>
</tr>
</table>

Grupo 2

En los libros que pertenecen a este grupo se trata la Programación Lineal como uno, de un conjunto de capítulos que tienen como objetivo servir de base para el tratamiento de temas ligados a la economía y la administración. Están dirigidos a alumnos universitarios de pregrado, especialmente para aquellos que siguen carreras afines a las antes mencionadas.

Nombre	Autor	año
Matemáticas para administración y economía	Weber Jean E.	1980
Matemáticas para el análisis económico	Knut Sydsaeter	1996
Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía	Jagdish C. Arya Robin W. Lardner	2002
Matemáticas para administración y economía	Ernest F. Haeussler Richard S. Paul	2003
Matemáticas para administración y economía	Soo Tang Tan	2005

De este grupo de libros se escogió el libro Matemáticas para administración y economía de Ernest F. Haeussler y Richard S. Paul para hacer la descripción y análisis, ya que es uno de los de mayor difusión en nuestro medio.

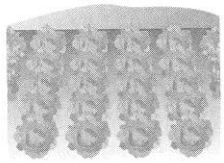
Se han considerado los siguientes aspectos en el análisis del texto seleccionado:

Capítulos previos a la presentación de la P.L.	✓ Repaso de álgebra ✓ Ecuaciones ✓ Aplicaciones de ecuaciones y desigualdades ✓ Funciones y gráficas ✓ Rectas, parábolas y sistemas de ecuaciones ✓ Funciones exponencial y logarítmica ✓ Álgebra de matrices Como podemos apreciar por la secuencia de capítulos previos, estos libros se ajustan bastante bien a los programas de matemática que llevan los alumnos de primer año en las universidades. Llegan al capítulo de P.L. después de haber

	revisado temas, que aunque son de nivel escolar, es necesario revisarlos previamente ya que la mayoría de ellos están involucrados en el objeto de estudio P.L. En estos textos se declara que su objetivo es que los estudiantes los puedan leer y que sirvan como una herramienta de enseñanza a los profesores.
Capítulos posteriores a la presentación de la P.L.	✓ Matemáticas financiera ✓ Límites y continuidad ✓ Diferenciación ✓ Integración Vemos que después del capítulo de P.L. los temas ya no están estrictamente relacionados con nuestro objeto de estudio.
Introducción al tema P.L.	Se introduce el tema con una situación no resuelta (figura 10) y luego se empieza a introducir la terminología a medida que se va resolviendo el problema por el método gráfico. Para hallar el óptimo se trabaja primero con la familia de rectas paralelas que representan la función objetivo y finalmente se enuncian las propiedades. **7.2 Programación lineal** Algunas veces se desea maximizar o minimizar una función sujeta a algunas limitaciones (o *restricciones*). Por ejemplo, un fabricante puede querer maximizar una función de utilidad sujeta a las restricciones de producción, que imponen las limitaciones sobre el uso de la maquinaria y la mano de obra. Ahora consideraremos cómo resolver tales problemas cuando la función que será maximizada o minimizada es *lineal*. Una **función lineal en x y y** tiene la forma $$Z = ax + by,$$ donde a y b son constantes. También requeriremos que las correspondientes restricciones estén representadas por un sistema de desigualdades lineales (que incluyan "≤" o "≥") o ecuaciones lineales en x y y, además de que todas las variables sean no negativas. Un problema que involucra todas estas condiciones se llama *problema de programación lineal*. **Figura 10** (Haeussler, 2003, p. 307)

Tratamiento del tema P.L.	En Haeussler, 2003, en forma similar a los libros de este grupo, se divide el capítulo Programación Lineal (capítulo 7) en 9 subunidades, declarando el objetivo de cada una de ellas de la siguiente forma: *6.1 Desigualdades lineales con dos variables* Objetivo: Representar en forma geométrica la solución de una desigualdad lineal con dos variables y ampliar esta representación a un sistema de desigualdades lineales. *6.2 Programación lineal* Objetivo: Establecer la naturaleza de un problema de P.L., introducir la terminología asociada con él y resolverlo geométricamente. *6.3 Soluciones óptimas múltiples* Considerar situaciones en las que los problemas de P.L. tienen más de una solución óptima. *6.4 Método simplex* Objetivo: Mostrar cómo se utiliza el método simplex para resolver un problema de P.L. estándar. Este método permite resolver problemas que no pueden resolverse de manera gráfica. *6.5 Degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples* Objetivo: Considerar el método simplex en relación con la degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples. *6.6 Variables artificiales* Objetivo: Trabajar con problemas de maximización que no están en la forma estándar por medio de la introducción de variables artificiales *6.7 Minimización* Objetivo: Mostrar cómo resolver un problema de minimización cambiando la función objetivo de modo que resulte en un problema de maximización. *6.8 Dual* Objetivo: Presentar de manera informal y después definir

	de manera formal el dual de un problema de P.L. 6.9 Repaso Ejercicios, problemas. Aplicación práctica: Terapias con fármacos y radiación. En general estos textos utilizan un enfoque intuitivo y se establecen los resultados de manera informal; sin embargo no descuidan el rigor matemático. Esto ocurre particularmente con el tema P.L. donde se presentan para el método gráfico las siguientes propiedades sin demostrarlas: • *Una función lineal definida sobre una región factible acotada no vacía, tiene un valor máximo (mínimo) que puede hallarse en un vértice (punto extremo, esquina).* • *Siempre que la región factible de un problema de programación lineal sea vacía, no existe solución óptima.* • *Si una región factible es no acotada, y si la función objetivo tiene un valor máximo (o mínimo), entonces el valor ocurre en un vértice.*
Tipo de problemas que predominan en P.L.	Se utilizan muchas aplicaciones interesantes y actualizadas de la P.L. en áreas como administración, economía, ciencias sociales, biología, psicología, etc.(figura 11). En estos problemas se utiliza el registro verbal para mencionar el conjunto de restricciones y la función objetivo en un contexto real.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
16. Nutrientes en fertilizantes Un agricultor comprará fertilizantes que contienen tres nutrientes: A, B y C. Los requerimientos mínimos semanales de éstos son 80 unidades de A, 120 de B y 240 de C. Existen dos mezclas de fertilizantes de gran aceptación en el mercado. La mezcla I cuesta $8 por bolsa, y contiene 2 unidades de A, 6 de B y 4 de C. La mezcla II cuesta $10 por bolsa, con 2 unidades de A, 2 de B y 12 de C. ¿Cuántas bolsas de cada mezcla debe comprar el agricultor para minimizar el costo de satisfacer sus requerimientos de nutrientes?

17. Extracción de minerales Una compañía extrae minerales de una mina. El número de libras de los minerales A y B que pueden extraerse de cada tonelada de la mina I y II se dan en la tabla siguiente, junto con los costos por tonelada de las minas:
<table>
<tr><th></th><th>Mina I</th><th>Mina II</th></tr>
<tr><td>Mineral A</td><td>100 lb</td><td>200 lb</td></tr>
<tr><td>Mineral B</td><td>200 lb</td><td>50 lb</td></tr>
<tr><td>Costo por tonelada</td><td>$50</td><td>$60</td></tr>
</table>
Si la compañía debe producir al menos 3000 lb de A y 2500 lb de B, ¿cuántas toneladas de cada mina deben procesarse con el objetivo de minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?
Figura 11
(Haeussler, 2003, p. 316)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Uso de la tecnología al tratar el tema P.L.</td>
<td>Al final del capítulo correspondiente a P.L. se presenta un grupo de ejercicios que se resuelven usando calculadoras graficadoras. A pesar que la pantalla que se presenta es la de la calculadora T1-83 (figura 12), el enfoque es suficientemente general, de modo que pueda aplicarse en otras calculadoras graficadoras.
Los ejercicios planteados corresponden al método gráfico y no son contextualizados. Se van mostrando las instrucciones y las pantallas correspondientes.</td>
</tr>
</table>

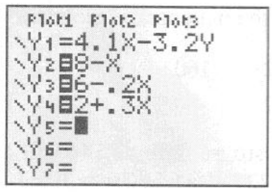


FIGURA 7.18 Ingreso de la función objetivo y las ecuaciones correspondientes a las restricciones, y "desactivación" de la función objetivo.

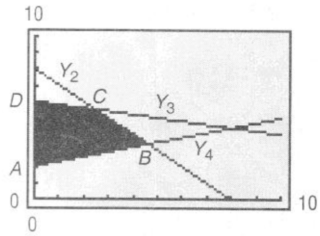


FIGURA 7.19
Determinación de la región factible y marcado de los vértices.

Figura 12

(Haeussler, 2003, p. 314)

Observaciones:

1. La revisión de los libros del grupo 1 nos permite ver la amplitud y alcances del tema P.L., su vinculación con diversos otros temas de la matemática, el tratamiento riguroso en el marco de la optimización matemática en general, su importancia como parte de la modelización matemática y sus potencialidades para aplicaciones a situaciones prácticas con muchas variables y muchas restricciones. Consideramos que esta visión es muy importante, tanto para dar marco epistemológico a esta investigación, como para ampliar la perspectiva de profesores y estudiantes que se interesen en la P.L, pero es importante recalcar que para su comprensión se necesita tener conocimientos previos especialmente de álgebra lineal.

2. En los libros del grupo 2 encontramos, en general, propuestas muy específicas para problemas de P.L. en dos o tres variables, con énfasis en métodos

gráficos, siguiendo determinadas reglas, usando el método simplex o algunos recursos computacionales. No se enfatiza en aspectos intuitivos. A continuación detallamos estas apreciaciones:

a. En estos libros no se pone énfasis en que el algoritmo gráfico que se usa es consecuencia de teoremas importantes de la PL (que sí son considerados en los libros del grupo 1). Por ejemplo, uno de estos teoremas, cuya demostración tiene sus dificultades para quienes no están familiarizados con conceptos y resultados de convexidad, algebra lineal, funciones lineales, es el siguiente:
   - Si una región factible es no acotada, y si la función objetivo tiene un valor máximo (o mínimo), entonces el valor ocurre en un vértice.

b. Al tratar el método gráfico para la resolución de problemas de programación lineal con dos variables, no se plantean preguntas que induzcan al alumno a interpretar qué ocurre en distintos puntos de la región factible.

c. El método gráfico para resolver problemas de P.L. se toca brevemente, dedicando mucha más atención al método Simplex y a programas computacionales.

d. En general se plantean situaciones donde se pide hallar el óptimo utilizando el método gráfico, sin hacer preguntas que favorezcan una aproximación intuitiva a la solución del problema de P.L. Las preguntas planteadas inducen al alumno a resolver los problemas de P.L. usando un algoritmo de manera mecánica.

e. No existen preguntas abiertas para debates, que llevan a justificar por ejemplo, por qué el punto hallado es el que da el valor óptimo de la función objetivo o si puede haber más de un punto óptimo. Así, no se brindan ocasiones de ejercitar el lenguaje formal para justificar respuestas.

f. Antes de tratar el tema P.L. se necesita que los alumnos manejen temas previos indispensables que variarán dependiendo de la profundidad con que se llegue tocar el tema. En el caso del método grafico se debe estudiar antes principalmente las desigualdades lineales con dos variables tal como se hace en el libro elegido para el análisis (grupo 2).

g. A pesar de que el método gráfico para resolver problemas de P.L. se presta para plantear situaciones que induzcan al alumno a transitar y coordinar el registro verbal, algebraico y gráfico, en la mayoría de textos se insiste en un manejo algorítmico. Esto ocurre también cuando se hace uso de la calculadora graficadora para resolver el problema.

3.2. ANÁLISIS COGNITIVO

3.2.1 ANÁLISIS DEL USO DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Empezaremos este análisis refiriéndonos a la Teoría de los Registros de Representación Semiótica y mostrando los principales planteamientos del creador de este enfoque.

> La pluralidad de los sistemas semióticos de representación permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por lo tanto sus representaciones mentales. Por ello, es esencial movilizar varios registros de representación semiótica: lengua natural o verbal, escritura simbólica, gráfico. (Duval, 1993, p.2).

Ya que en sus planteamientos menciona los registros de representación, es importante tener claro a qué se refiere con esa terminología.

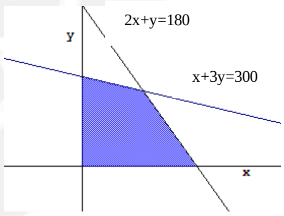
Siguiendo a Duval (1993), por registro de representación entendemos a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable; permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro. Los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: Gráfico o geométrico, numérico, analítico o algebraico, pictórico, lenguaje natural.

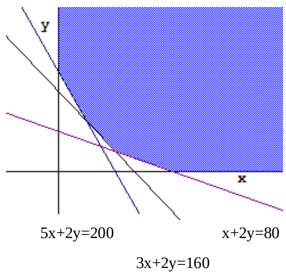
Así, para Duval (1993) “aprender matemáticas consiste en el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación”. (p.5)

Sin embargo, no se debe confundir el objeto matemático con su representación, ya que, como puntualiza Duval (1993), tal desconcierto desencadenará, a mediano o largo plazo, una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos pronto llegarán a ser inútiles fuera de su contexto de aprendizaje.

Como vemos, Duval se enfoca en el funcionamiento cognitivo del pensamiento, pero en cuanto a la didáctica afirma que, “el cambio de registro constituye una variable que se revela fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación.”(Duval, 1999, p.59).

Por ejemplo, la siguiente tabla muestra distintas representaciones del objeto matemático sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas en diferentes registros de representación semiótica. Pero, si bien es cierto la distinción de estos registros es importante, la coordinación entre ellos resulta fundamental para una asimilación conceptual del objeto en estudio.

Representación		
Registro verbal	Registro algebraico	Registro gráfico
Una compañía quiere producir dos clases de tarjetas postales; del Tipo A y del tipo B. Para fabricar una tarjeta tipo A se necesitan 2 minutos en la máquina I y 1 minuto en la máquina II. Una del tipo B requiere 1 minuto en la máquina I y 3 minutos en la máquina II. Hay tres horas disponibles en la máquina I y 5 horas disponibles de la máquina II para procesar el pedido.	*x*: nº de tarjetas tipo A y: nº de tarjetas tipo B $2x+y\leq 180$ $x+3y\leq 300$ $x\geq 0$ $y\geq 0$	

Un agricultor va a comprar fertilizante que contiene tres nutrientes: A, B y C. Los mínimos necesarios son 160 unidades de A, 200 unidades de B y 80 unidades de C. Existen dos marcas registradas en el mercado. Crece rápido que contiene 3 unidades de A, 5 unidades de B y 1 unidad de C. Crece fácil contiene 2 unidades de cada nutriente.	*x*: nº de bolas de Crece Rápido y: nº de bolsas de Crece fácil $3x+2y\geq 160$ $5x+2y\geq 200$ $x+2y\geq 80$ $x\geq 0$ $y\geq 0$	

Por otro lado Sastre(2008, p.8), señala la necesidad de reconocer que las deficiencias que presentan los alumnos al ingresar al nivel universitario para resolver problemas matemáticos e identificar conflictos, en gran parte se deben al hecho de que no logran comprender claramente los enunciados y las consignas de dichos problemas.

En cuanto a nuestro objeto de estudio, vemos que los alumnos presentan especial dificultad en traducir al lenguaje algebraico expresiones como “al menos”, “como máximo”, “no más de”, “como mínimo”, etc.

Así, nuestra investigación planteará una secuencia didáctica que induzca a los alumnos a coordinar distintos registros de representación en el marco de la P.L y pondrá en evidencia el rol que juegan estos registros en las respuestas de los estudiantes.

3.2.2 ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS

Consideramos que para desarrollar las actividades propuestas en este estudio y lograr los resultados previstos, los alumnos necesitan haber trabajado los siguientes conocimientos y habilidades previamente:

a. Ubicar puntos en el plano cartesiano.
b. Identificar líneas paralelas.

c. Expresar algebraicamente expresiones como: por lo menos, como máximo, como mínimo, no es mayor a.
d. Identificar funciones lineales con una variable.
e. Graficar ecuaciones lineales con una o dos variables.
f. Resolver sistemas de ecuaciones con dos variables.
g. Graficar inecuaciones lineales con una o dos variables.
h. Reconocer la intersección de regiones planas.

A fin de lograr mayor objetividad en el análisis respecto a los conocimientos que poseen los alumnos en relación al objeto de estudio del presente estudio, incluimos los resultados de la evaluación de los conocimientos previos que se les aplicó.

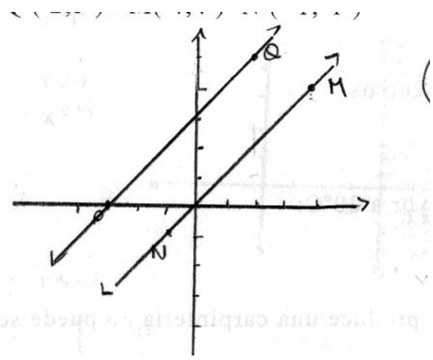
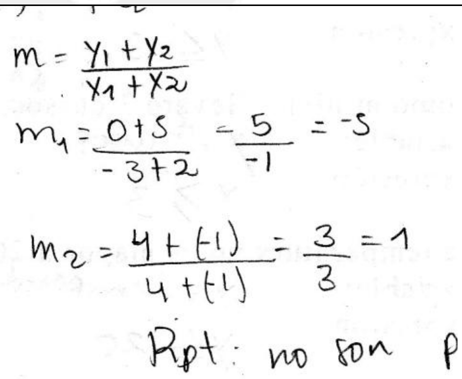
Esta prueba denominada “Conocimientos Previos” (anexo 1) se aplicó el 15 de octubre de 2010. Consta de siete (7) preguntas de tipo abiertas. La prueba duró 45 minutos. El sistema de calificación fue vigesimal.

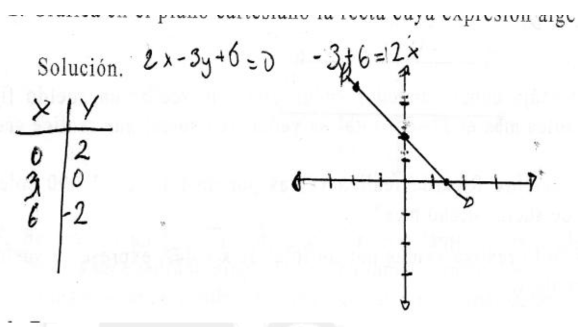
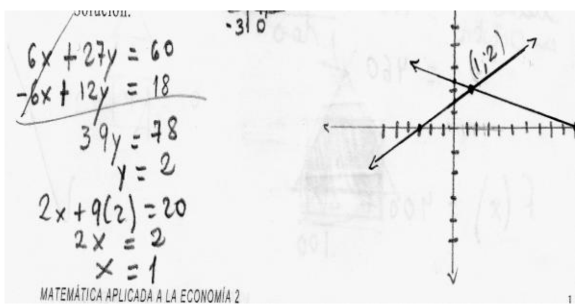
De los 21 alumnos matriculados, 17 rindieron la prueba y 2 no asistieron ese día. Considerando a los 17 alumnos que rindieron la prueba, y la nota 11 como la mínima aprobatoria, el promedio alcanzado fue de 13,59 puntos.

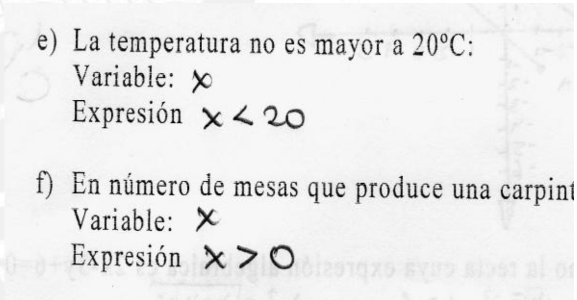
A continuación se presenta una estadística de la cantidad de alumnos que llegaron a la respuesta correcta (bien), los que no llegaron a la respuesta correcta (mal) y los que no contestaron la pregunta (blanco). Posteriormente se analizará lo observado en las respuestas de los estudiantes.

Pregunta	Bien		Mal		Blanco	
	nº	%	nº	%	nº	%
1.a	15	88	1	6	1	6
1.b	4	24	5	29	8	47
2	7	41	7	41	3	18
3	10	59	1	6	6	35
4	7	41	10	59	0	0
5	16	94	0	0	1	6
6.a	8	47	7	41	2	12
6.b	9	53	7	41	1	6
6.c	13	76	2	12	2	12
6.d	10	59	5	29	2	12
7	14	82	2	12	1	6

Tabla 1

Pregunta y Comentario	Ejemplo
1a. Ubica los puntos P, Q, M, N en el plano cartesiano siendo: P (-3;0) Q (2;5) M(4;4) N (-1;-1) y traza los segmentos PQ y MN. La mayoría de los alumnos contestó correctamente. Algunos alumnos dibujaron rectas en vez de segmentos, probablemente porque no saben la diferencia entre ambos. Algunos alumnos no colocaron los valores numéricos en los ejes como se aprecia en la figura 13. Probablemente se deba a que el profesor suele resolver de ese modo en la pizarra o a que no lo consideraron necesario o en todo caso les pareció evidente. **Concepto previo evaluado: a**	 **Figura 13**
1b. Determina si PQ y MN son segmentos paralelos. Aproximadamente la mitad de los alumnos no contestó. Algunos alumnos usaron una expresión equivocada para hallar la pendiente (figura 14), esto puede deberse a qué no han entendido realmente el concepto de pendiente como una variación, ni la relacionan con su representación gráfica, y solo la	 **Figura 14**

ven como la aplicación de una fórmula. Otros cometieron errores operativos al trabajar con valores negativos. Esto puede deberse a qué se insiste mucho más en la formación básica en el trabajo con números naturales. **Concepto previo evaluado: b**	
2. Grafica en el plano cartesiano la recta cuya expresión algebraica es 2x-3y+6=0. Cometieron muchos errores al encontrar los interceptos (figura 15). Esto puede deberse al apuro o a qué no tienen claro cómo despejar una variable en una ecuación. Algunos tabularon correctamente, pero ubicaron mal los puntos en el plano cartesiano, mostrando falta de coordinación entre el registro algebraico y el gráfico. **Concepto previo evaluado: e**	 **Figura 15**
3. Encuentra la intersección de las rectas representadas en el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x+9y=20........(1) \\ 3x-6y=-9........(2) \end{cases}$ La mayoría de los alumnos resolvió el problema usando el método de eliminación, posiblemente por la forma	 **Figura 16**

ordenada en que se presentaron las rectas o porqué es el método en que más se insiste en la formación básica. Solo un alumno usó el registro gráfico y el algebraico, esto puede deberse a que no era necesaria la representación gráfica de las rectas y a que la coordinación entre el registro algebraico y el gráfico no resulta natural. El ejercicio debió pedir la representación gráfica adicionalmente y alguna pregunta que los induzca a los estudiantes a usar este registro. (figura 16). **Concepto previo evaluado: f**	
4. Define la variable adecuada y encuentra la desigualdad que corresponde a cada uno de los siguientes enunciados: e. La temperatura no es mayor a 20ºC: f. El número de mesas que produce una carpintería no puede ser negativo: La mayoría de los errores se cometieron en las preguntas e y f. Algunos alumnos entienden que si no es mayor, luego es menor. Si no es negativo, luego es positivo , esto podría estar denotando su falta de manejo de las desigualdades y la falta de coordinación entre el registro	 e) La temperatura no es mayor a 20ºC: Variable: x Expresión $x < 20$ f) En número de mesas que produce una carpint Variable: x Expresión $x > 0$ **Figura 17**

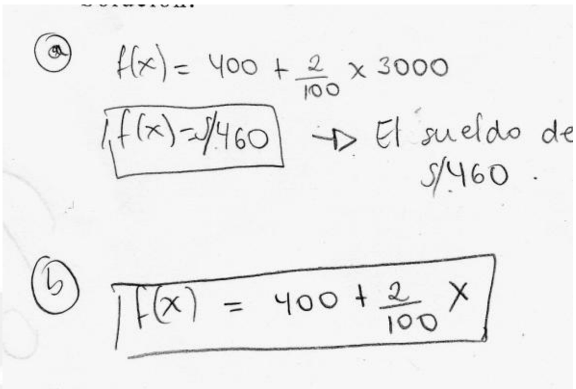
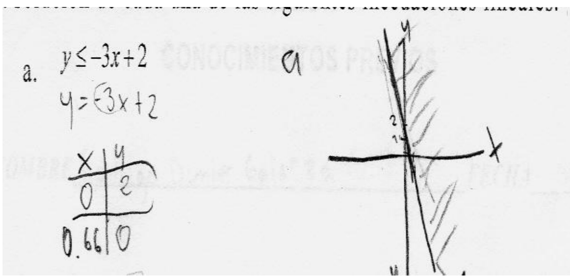
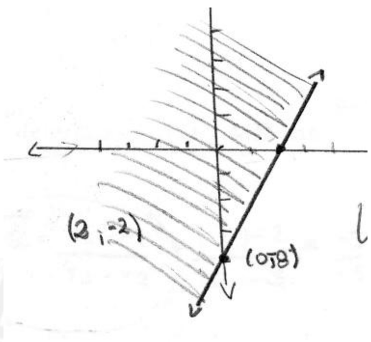
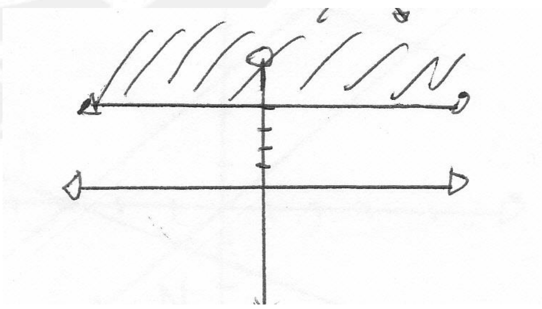
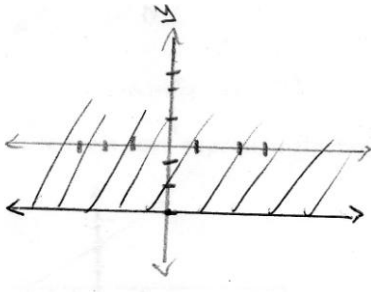
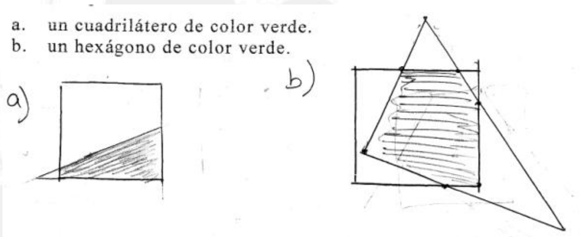
verbal y el algebraico.(figura 17). **Concepto previo evaluado: c**	
5. Ricardo, quien trabaja como vendedor en un almacén, recibe un sueldo fijo mensual de 400 soles más el 2% del total de ventas (en soles) que realice cada mes. a. Si en el mes de octubre Ricardo realiza ventas por un total de 3 000 soles, ¿cuánto recibirá de sueldo dicho mes? b. Si en un mes Ricardo realiza ventas por un total de x soles, expresa su sueldo como una función de x. Fue la pregunta mejor contestada. Algunos alumnos utilizaron la notación de función f(x) como se aprecia en la figura 18. Esto podría deberse a que el semestre anterior estuvo dedicado casi íntegramente al manejo de funciones y los alumnos se apropiaron de dicho objeto matemático. **Concepto previo evaluado: d**	 **Figura 18**
6a. $y \leq -3x + 2$ Algunos alumnos graficaron correctamente la recta, pero sombrearon el semiplano equivocado como se aprecia en la	 **Figura 19**

figura 19. Esto muestra falta de coordinación entre el registro algebraico y el gráfico. **Concepto previo evaluado: g**	
6b. $$2x - y < 8$$ La mayoría de los alumnos graficó correctamente, pero no consideró la línea entrecortada para indicar (menor) como se aprecia en la figura 20. Esto podría deberse a su poca familiaridad con el manejo gráfico de las desigualdades estrictas. No contemplan la diferencia entre las condiciones de borde. **Concepto previo evaluado: g**	 **Figura 20**
6c. $$x \geq 4$$ Algunos alumnos graficaron como si se tratase de y≥4 (figura 21). Como dice x, piensan que la recta debe ser horizontal, esto muestra falta de coordinación entre el registro algebraico y el gráfico. **Concepto previo evaluado: g**	 **Figura 21**

6d. $y \leq -3$ Algunos alumnos confundieron el menor igual con el mayor igual, como se aprecia en la figura 22. Esto nuevamente muestra falta de coordinación entre el registro gráfico y el algebraico. **Concepto previo evaluado: g**	 **Figura 22**
7. Se recorta un triángulo dibujado en una lámina traslúcida color amarillo y se recorta un cuadrado dibujado en una lámina traslúcida color azul. Ubica el triángulo sobre el cuadrado (superpuestos),de manera que se observe: a. un cuadrilátero de color verde. b. un hexágono de color verde Al no mencionar el problema la forma del triángulo, hubo bastantes respuestas diferentes (figura 23). Solo 7 alumnos entendieron solos el enunciado, al resto se le tuvo que dar alguna pista. Algunos no tenían claro que al mezclar el amarillo con el azul resulta verde. En algunos casos se tuvo que pedir cortar dos papeles con figuras diferentes y superponerlos. Aunque	 **Figura 23**

estos no eran traslúcidos, permitió que entendieran la idea. Los problemas para entender este problema podrían deberse a su falta de visión espacial y/o a su falta de coordinación entre el registro verbal y el gráfico. También se observó que la etapa de acción es importante para un acercamiento a los problemas. **Concepto previo evaluado: h**	

Observaciones

Se aprecia por el análisis anterior que los alumnos tienen dificultades en:

- ✓ Coordinar el registro algebraico y el gráfico al representar gráficamente una inecuación con una o dos variables.
- ✓ Relacionar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con su representación gráfica (punto de intersección de dos rectas).
- ✓ Reconocer la región resultante al superponer dos regiones determinadas.
- ✓ Reconocer las diferencias entre desigualdades estrictas y no estrictas en los diferentes registros de representación.
- ✓ Realizar cálculos operativos, especialmente con números negativos.
- ✓ Coordinar las distintas representaciones del concepto “pendiente de una recta”.

3.3. ANÁLISIS DIDÁCTICO

LA ENSEÑANZA DE LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES Y SUS APLICACIONES A LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA UARM.

Los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal forman parte del contenido del curso llamado Matemática Aplicada a la Economía II, dictado en la UARM exclusivamente a los alumnos de la carrera de Turismo Sostenible desde el año 2008, en que se incorpora esta carrera a las ya existentes.

Todos los alumnos de la UARM pasan los dos primeros años por el Programa de Humanidades, después de lo cual continúan sus estudios de especialidad durante tres años.

En la página Web de la UARM se aprecia que el curso Matemática Aplicada a la economía II es una asignatura que llevan exclusivamente los alumnos de Turismo Sostenible (figura 24).

Es un curso del segundo semestre académico, que cuenta con 4 horas pedagógicas (45 minutos) semanales, durante 16 semanas que dura el semestre y otorga 3 créditos a los estudiantes que lo aprueban.

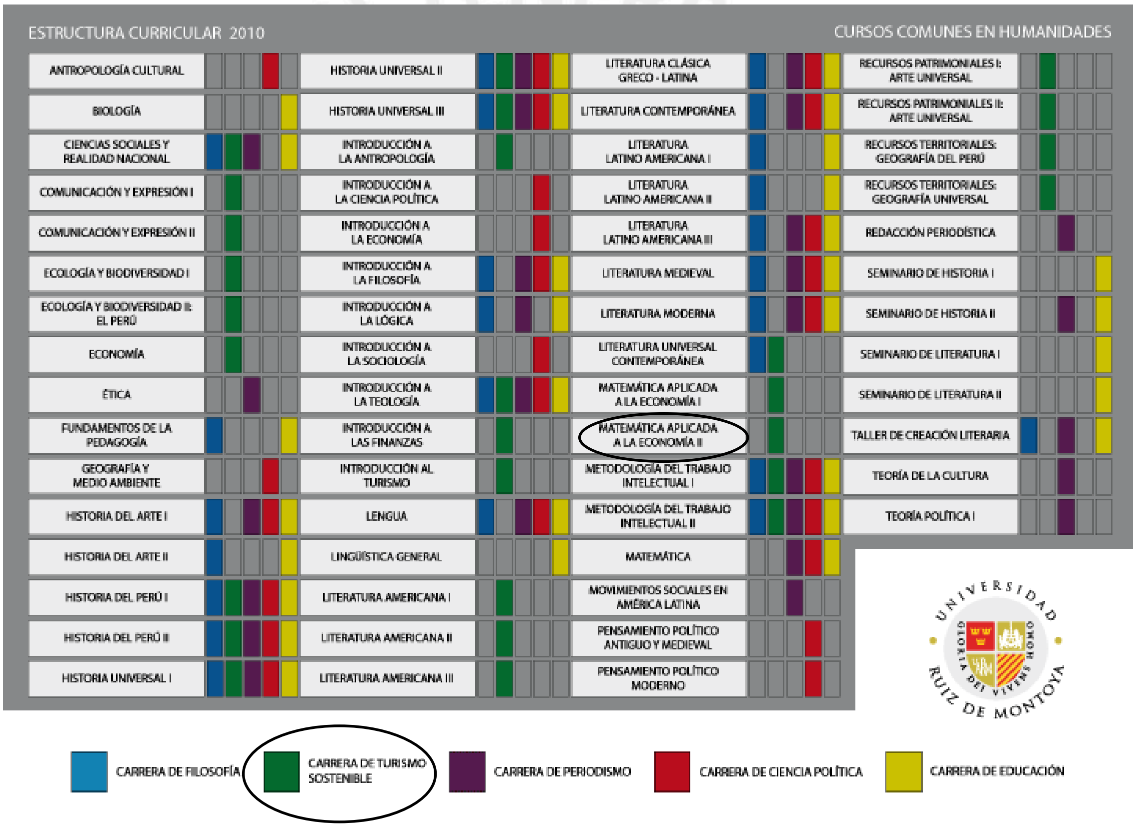


Figura 24

Para que un alumno pueda matricularse en la asignatura Matemática aplicada a la Economía II, tiene que haber aprobado previamente el curso Matemática aplicada a la economía I, curso obligatorio del primer semestre para los alumnos de Turismo Sostenible. En este curso se trabajan muchos de los temas que servirán para un adecuado manejo de los contenidos posteriores.

La carrera de Turismo Sostenible promueve la innovación turística, la formación humanista, la interculturalidad, la vocación de servicio, la gestión y empresa, el marketing entre otros.

En cuanto a la gestión y empresa se afirma:

El alumno accederá a una serie de recursos para gestionar y administrar una empresa o proyecto turístico. En este sentido se incluye cursos de contabilidad y administración, dirección de operaciones, alimentos y bebidas, economía, gestión turística, recursos humanos y técnicas culinarias.

Respondiendo a este propósito, se incluye en el currículo una línea de cursos relacionados como se aprecia en la figura 25.

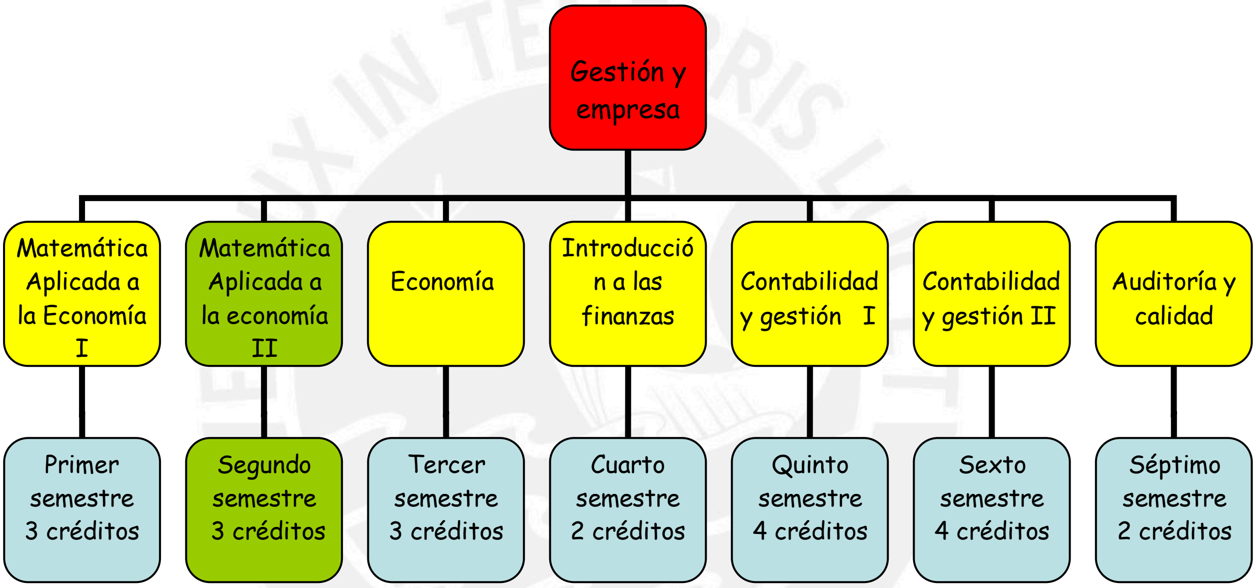


Figura 25

Empezando en el primer ciclo con Matemática aplicada a la economía I, cada curso es prerrequisito del que se dicta en el siguiente semestre. A esta estructura curricular se le llama enfoque de abajo a arriba.

Posner (2003) sostiene:

El enfoque de abajo a arriba supone que el determinante más importante del aprendizaje es la posesión de las habilidades prerrequisitos. El desarrollo curricular consiste en trabajar retrospectivamente partiendo de las habilidades intelectuales deseadas al terminar el currículo haciendo la pregunta:"¿Qué debe ser capaz de hacer el aprendiz con el fin de lograr esto?" Respuestas sucesivas a esta pregunta producen una "jerarquía de aprendizaje" que incluye todos los objetivos que todos los aprendices deben dominar en su camino para alcanzar los objetivos finales, o terminales. Luego, la enseñanza sigue a lo largo de su jerarquía de aprendizaje, a partir de los objetivos más simples hasta los más complejos. La “ruta del aprendizaje” descrita por la jerarquía de aprendizaje asegura que las “habilidades relevantes de orden más bajo son dominadas antes de iniciar el aprendizaje de las habilidades relacionadas de orden más alto” (Gagne, 1970;240).

Principales postulados del enfoque de abajo a arriba.

1. Epistemológico. Todo el conocimiento complejo o general y las habilidades pueden ser analizados en elementos más simples y específicos. Este proceso puede repetirse hasta que el analista haya identificado todos los elementos básicos del conocimiento y de las habilidades humanas.
2. Psicológico. Las personas adquieren el conocimiento y habilidades generales o complejas a partir de los elementos más simples y específicos. Un secuenciamiento apropiado de objetivos, una enseñanza de alta calidad y un tiempo suficiente, garantizan que casi todas las personas pueden aprender lo que se enseña en los colegios.
3. Propósito educativo. La educación debe centrarse en la enseñanza de habilidades intelectuales, más que en hechos, y en el uso de técnicas que permitan a todos los estudiantes aprender.
4. Currículo. Debe haber congruencia entre el currículo y las secuencias y condiciones de aprendizaje más efectivas.
5. Desarrollo curricular. Los sicólogos conductistas deben ser los actores principales en el proceso de desarrollo del currículo, ya que ellos poseen el conocimiento pertinente.

Estrategias de dictado en experiencias previas

Las experiencias en la enseñanza de los sistemas de inecuaciones lineales y programación lineal en la UARM son limitadas ya que la existencia del curso Matemática Aplicada a la Economía II viene dictándose recién desde el año 2008, año en el que se incorporó la carrera de Turismo Sostenible a la oferta académica de dicha universidad.

En el 2008 se empezó a dictar el curso de una forma expositiva, utilizando materiales preparados para cada sesión. Estos materiales contenían un resumen de la teoría y ejercicios y problemas tanto para trabajar en clase como para resolver en casa. La forma de enseñanza era totalmente expositiva. Al ser pocos alumnos (9), se podía hacer un seguimiento más cercano a las inquietudes y dudas de cada uno de ellos, reconociendo que no se incorporó, utilizando los términos de Brousseau, el proceso de “devolución” de la responsabilidad del aprendizaje a los estudiantes. No se usaron programas matemáticos de apoyo.

En el año 2009 se incorporó el uso de diapositivas que contenían las ideas principales y los enunciados de los problemas. Las soluciones se hacían en pizarra y como el número de alumnos aumentó (18), el atender las dudas de cada uno de ellos se hacía más complicado. En esta segunda oportunidad, el grupo de estudiantes fue mucho más heterogéneo en cuanto a sus habilidades matemáticas. Hubo necesidad de preparar material complementario y recurrir a trabajos de clase en grupos formados por alumnos de distintos niveles de habilidad. La experiencia fue positiva pero aún persistió el protagonismo del profesor al usar la exposición con demasiada frecuencia. A pesar de contar con el laboratorio, no hubo el tiempo suficiente para usar programas matemáticos como el Derive para complementar la enseñanza.

La enseñanza del tema, ha estado basada en el manejo de algoritmos, con poco énfasis en la coordinación de los registros de representación y una nula presencia de preguntas y actividades que induzcan a los alumnos a utilizar su pensamiento optimizador y un lenguaje formal para explicar sus respuestas.

En general, las experiencias previas en la UARM, en relación al proceso enseñanza-aprendizaje de este tema, nos muestran que los alumnos no llegan a utilizar comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a problemas contextualizados de programación lineal, llevándonos a reformular la manera de enfocar el tema, usando marcos teóricos de la didáctica de la matemática basados en investigaciones científicas que nos den sustento.

3.4 ANÁLISIS DEL CAMPO DE RESTRICCIONES

Como ya se ha mencionado, el presente estudio se lleva a cabo con alumnos del segundo semestre de la carrera de Turismo Sostenible, de la Universidad Antonio Ruíz de Montoya (UARM) que se encuentran cursando la materia Matemática Aplicada a la Economía 2.

Para el diseño de las Situaciones Didácticas se recopilaron algunos datos sobre los alumnos que participaron en la investigación, principalmente para contar con algunas características del grupo que pudieran influir en su desempeño académico.

Se contó con los resultados de una encuesta aplicada a 19 de los 21 alumnos matriculados en el curso (anexo 12).
Dichos resultados se muestran a continuación:

EDAD		
Hasta 17	11	58%
18 a 22	7	37%
23 a 27	1	5%

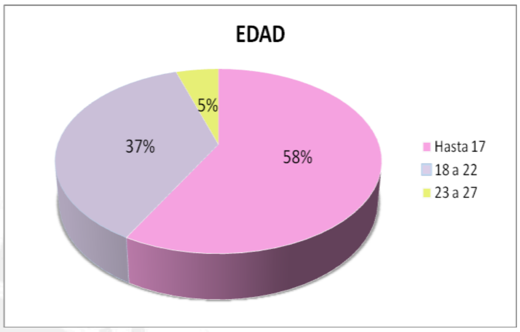


Figura 26

SEXO		
Femenino	12	63%
Masculino	7	37%

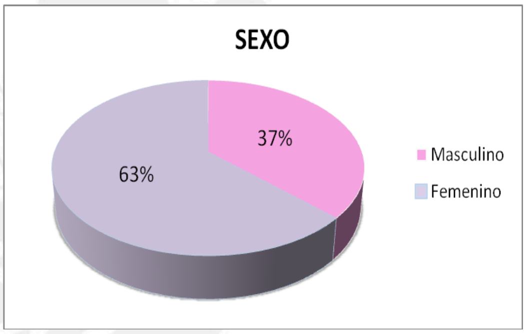


Figura 27

LUGAR DE DOMICILIO		
Pueblo Libre	2	11%
Límite con P.L.	2	11%
Conos	7	36%
Otros	8	42%

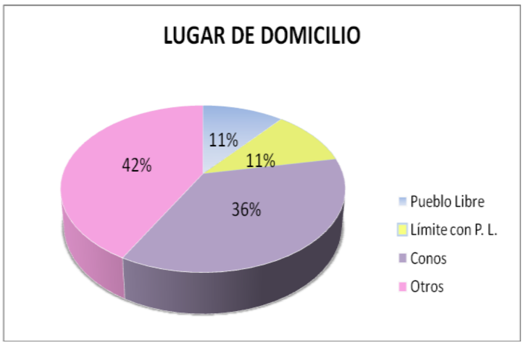


Figura 28

LUGAR DE NACIMIENTO		
Lima	16	84%
Provincia	2	11%
Otros	1	5%

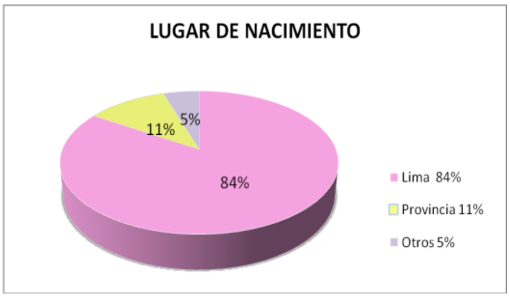


Figura 29

TIPO DE INSTITUCION EDUCATIVA DONDE TERMINO LA SECUNDARIA		
Pública	12	63%
Privada	7	37%

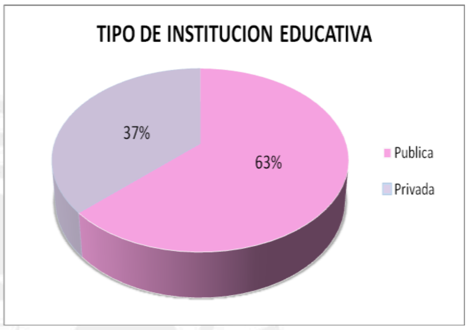


Figura 30

TIEMPO DE PREPARACION PARA INGRESAR A LA UARM		
1 a 3 meses	9	48%
1/2 año	1	5%
1 año	1	5%
No contestó	8	42%

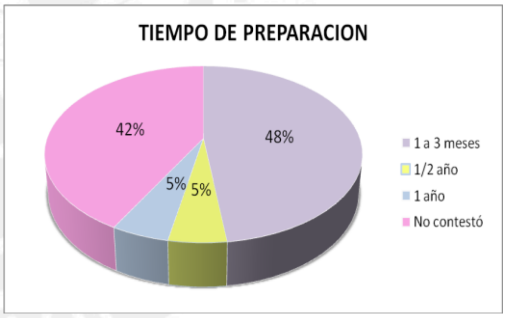


Figura 31

FORMA DE INGRESO A LA UARM		
CEPREUARM	9	48%
Examen de Admisión	1	5%
Exonerado 1º Puesto	1	5%
No contestó	8	42%

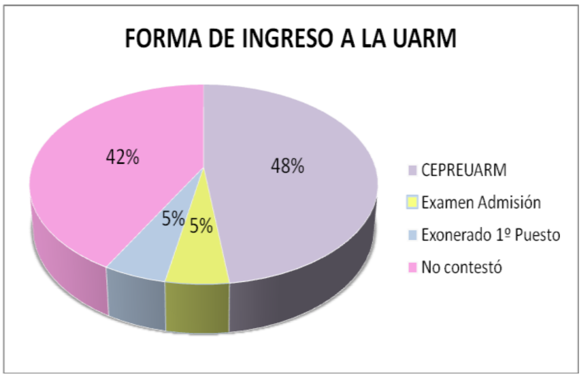


Figura 32

TIEMPO DE ESTUDIO FUERA DE CLASE		
No tengo tiempo	2	11%
Hasta 1 hora	10	52%
De 2 a 4	3	15%
De 5 a 6	2	11%
Más de 6	2	11%

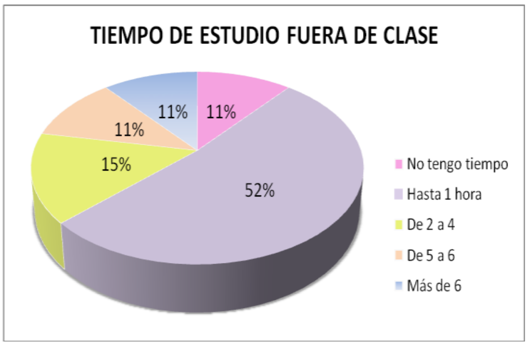


Figura 33

TE ENSEÑARON EN EL COLEGIO EL TEMA "PROGRAMACION LINEAL"		
Si	8	42%
No	11	58%

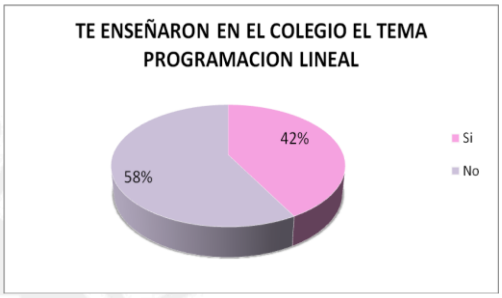


Figura 34

HABÍAS ESCUCHADO HABLAR ANTES DE "PROGRAMACION LINEAL"		
Si	11	58%
No	8	42%

Figura 35

De los resultados podemos apreciar que es un grupo de alumnos muy jóvenes, la mayoría (58%) aún no ha cumplido los 18 años y predomina la población femenina (63%). En cuanto a su lugar de procedencia se ha encontrado que el 84% son de Lima y muchos viven en distritos alejados de la UARM (78%), esto último podría ser el motivo de las continuas tardanzas que podrían afectar el desarrollo de las actividades diseñadas. Vemos que la mayor parte de los alumnos terminó la secundaria en un colegio público (63%) y solo el 5% ingresó rindiendo el examen de admisión. El 48% se preparó de uno a tres meses para ingresar a la universidad. Es notorio que es muy poco o nada el tiempo que dedican a estudiar en casa.

Por otro lado a pesar de que Programación Lineal es un curso del Diseño Curricular Nacional, solo el 42% manifestó haberlo estudiado en el colegio.

Vemos que los resultados mostrados en las figuras 29 y 35 podrían resultar irrelevantes para la investigación, por lo que no serán considerados.

Recursos con que cuenta la Universidad Antonio Ruíz de Montoya

En la universidad Antonio Ruíz de Montoya todas las aulas se encuentran equipadas con computadoras y proyectores multimedia.

Existe también una sala de cómputo de uso múltiple. El profesor debe separar a comienzo del semestre los días y horas que utilizará dicha sala. Esto podría permitir en futuras investigaciones, ilustrar la solución de un sistema de inecuaciones (región factible) haciendo uso de un programa matemático como el Derive.

Las carpetas son individuales, lo cual permitirá moverlas para los momentos de trabajo grupal incluidos en el diseño de las actividades de la presente investigación.

Existe facilidad para sacar las fotocopias y materiales necesarios para entregar a los alumnos.

La biblioteca no cuenta todavía con textos de matemática que incluyan el tema P.L. pero los alumnos pueden acceder a las bibliotecas de la Pontificia Universidad Católica de Perú, por un convenio entre ambas universidades.

Ya que dedican escaso tiempo para el estudio en casa (figura 33) y han tenido poco tiempo de preparación preuniversitaria (figura 31), diseñaremos materiales de refuerzo para casa (tareas) que serán evaluados. De igual forma, en las clases previas a las actividades planteadas, se hará una revisión de los conceptos previos en los que se han registrado deficiencias.

Debido a que el acceso a libros de texto que incluyan el tema P.L. es limitado, el diseño de las actividades no contemplarán el manejo de material que no sea el entregado en cada sesión.

CAPÍTULO 4: CONCEPCIÓN Y ANALISIS A PRIORI

4.1 DETERMINACIÓN DE VARIABLES

4.1.1 VARIABLES MACRO-DIDÁCTICAS

Al poner en escena las situaciones diseñadas en el presente estudio, estaremos en la fase de experimentación descrita en la Ingeniería Didáctica y se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- ✓ Los estudiantes formarán libremente 7 grupos de 3 ya que son 21 alumnos matriculados en el curso.

- ✓ Al inicio de cada una de las tres sesiones, cada alumno recibirá un material escrito que contenga la descripción de cada situación didáctica. Este material incluirá los enunciados y las preguntas tanto de la parte individual como grupal.

- ✓ Gran parte de los conocimientos previos requeridos, se han trabajado en un curso prerrequisito llamado Matemática Aplicada a la Economía I. Adicionalmente, se han revisado antes de iniciar la experimentación del presente estudio.

- ✓ El nivel de tratamiento del tema está acorde a las características del grupo. Recordemos que son alumnos de la carrera de turismo con marcada disposición para los cursos de letras. Se han diseñado situaciones con contexto real y cercano a sus experiencias, que se resuelven usando dos variables. De esta forma, se espera una adecuada comprensión de los conceptos y un adecuado manejo de los procedimientos.

- ✓ Para enfrentar con éxito las situaciones planteadas será necesario que los alumnos transiten y coordinen los tres tipos de registros: verbal, algebraico y geométrico.

4.1.2 VARIABLES MICRO-DIDÁCTICAS

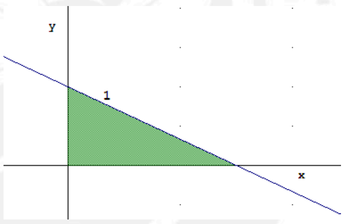
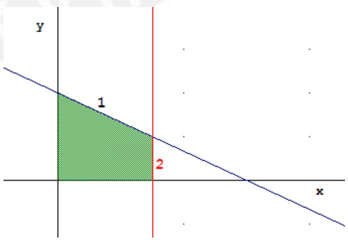
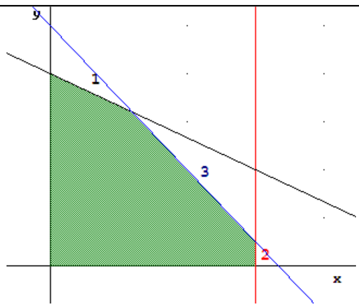
Recordemos que la finalidad de las situaciones didácticas es estudiar las condiciones y relaciones propias de un conocimiento. El docente puede variar algunas de estas condiciones de tal manera que según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y por lo tanto el conocimiento necesario para resolver la situación.

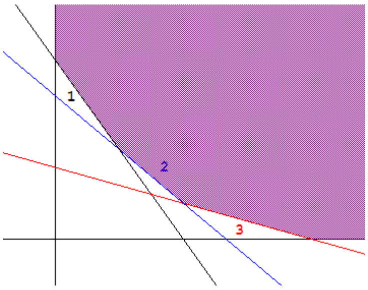
Para el presente estudio hemos escogido las tres variables que se muestran a continuación, teniendo en consideración que no son las únicas existentes.

a. NÚMERO DE RESTRICCIONES PRESENTES EN UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

(Adicionales a las restricciones de no negatividad de las variables).

Consideraremos a lo más tres restricciones y los casos que describimos a continuación.

Número de restricciones	Descripción	Gráfico	Caso
Una	1. $a_1x+b_1y \le c_1$		A
Dos	1. $a_1x+b_1y \le c_1$ 2. $x \le d$		B
	1. $a_1x+b_1y \le c_1$ 2. $x \le d$ 3. $a_2x+b_2y \le c_2$		C1

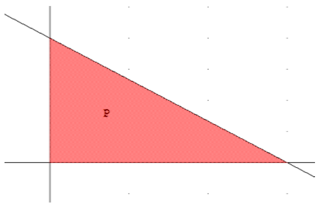
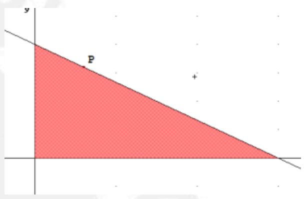
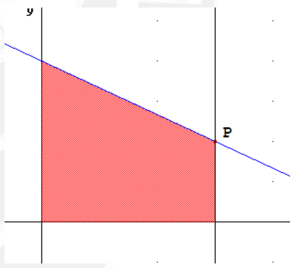
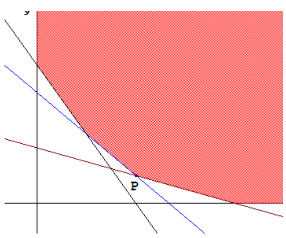
Tres	1. $p_1x+q_1y \geq r_1$ 2. $p_2x+q_2y \geq r_2$ 3. $p_3x+q_3y \geq r_3$		C2

b. TIPO DE OPTIMIZACIÓN

TIPO DE OPTIMIZACIÓN	DESCRIPCIÓN
Maximización	La función objetivo es $P = ax + by$. La región factible es $S \subset \Re^2$ Se va a **maximizar** la función objetivo P, en S.
Minimización	La función objetivo es $P = ax + by$. La región factible es $S \subset \Re^2$. Se va a **minimizar** la función objetivo P, en S.

c. TIPO DE PUNTO EN LA REGIÓN FACTIBLE

Consideraremos solo los casos que describimos a continuación:

TIPO DE PUNTO EN LA REGIÓN FACTIBLE	DESCRIPCIÓN	Grafica	Caso
Punto interior de la región factible	Se analiza un punto donde no se ha agotado la única restricción dada.		E
Punto fronterizo de la región factible	Punto en donde se cumple una restricción con la igualdad.		F1
	Punto donde se cumplen dos restricciones con la igualdad.		F2
	Punto donde se cumplen dos de las tres restricciones con la igualdad.		F3

Solo trabajaremos con restricciones formuladas usando $\geq$ o $\leq$.

4.2 DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

4.2.1 VISIÓN GENERAL

Se muestra a continuación los análisis que sirvieron para el diseño de la secuencia didáctica propuesta.

La propuesta de interacción didáctica está formada por cuatro actividades a desarrollarse en momentos de trabajo individual y en otros grupalmente. Las tres primeras son de maximización y tienen un contexto inicial común, al que se van haciendo variaciones, considerando los diversos casos descritos anteriormente al especificar las variables microdidácticas adoptadas para este estudio.

La cuarta actividad es de minimización, en un contexto diferente, considerando también desarrollos individuales y grupales y concretando casos no vistos en las actividades anteriores.

Al diseñar las actividades, se tuvo como marco didáctico orientador, las diversas fases consideradas en la TSD.

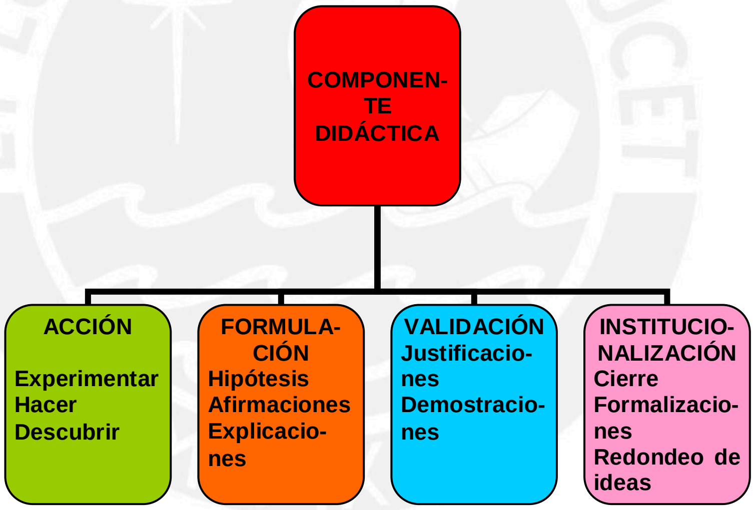


Figura 36

Cabe mencionar que el diseño mismo de las actividades es fruto de una interacción progresiva entre las fases que se propone desarrollar y las tareas matemáticas propiamente dichas, a partir de una idea base.

4.2.2. IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES EN LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Aquí se muestra cómo se van modificando las variables didácticas descritas en el ítem 4.1.2, para que el alumno se vea forzado a cambiar de estrategia para adquirir cada conocimiento nuevo.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	VARIABLES DIDÁCTICAS
Actividad 1: Determinación de restricciones y función objetivo	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso A ▪ Tipo de optimización: maximización ▪ Tipo de punto en la región factible: Casos E y F1
Actividad 2: Determinación de la región factible y sus vértices.	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso B ▪ Tipo de optimización: maximización: ▪ Tipo de punto en la región factible: Casos F1 y F2
Actividad 3: Solución de un problema de maximización, graficando la función objetivo sobre la región factible	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso C1 ▪ Tipo de optimización: maximización: ▪ Tipo de punto en la región factible: Caso F2
Actividad 4: Solución de un problema de minimización aplicando la propiedad	▪ Número de restricciones presentes en un problema de optimización: Caso C2 ▪ Tipo de optimización: minimización ▪ Tipo de punto en la región factible: Caso F3

4.2.3 TIPOS DE INTERACCIONES CON EL MEDIO Y COMPORTAMIENTOS ESPERADOS

A continuación detallaremos el tipo de interacción con el medio que se pretende fomentar con cada pregunta de las actividades propuestas, y los comportamientos que se esperan por parte de los alumnos en relación al objeto de estudio.

ACTIVIDAD 1

PARTE I TRABAJO INDIVIDUAL 

Ítem		Comportamiento esperado
a	**Acción**	▪ Se espera que luego de leer cuidadosamente el enunciado, la mayoría de los alumnos respondan correctamente, efectuando la siguiente operación: (#de Frutitríos x onzas de concentrado de naranja necesarias)+(#de Frutidúos x onzas de concentrado de naranjas necesarias); es decir 3x8+5x12=84 onzas.
b	**Formulación**	▪ Se espera que de la misma forma que trabajaron en la parte a, calculen la cantidad de concentrado de naranja necesario; es decir, 1000x8+1000x12=20000 y se den cuenta que no sobrepasa la cantidad disponible de concentrado de naranja que es 24000 onzas.
c	**Formulación**	▪ Se espera que de la misma forma que trabajaron en la parte a, calculen la cantidad de concentrado de naranja necesario; es decir, 1500x8+1000x12=24000 y se den cuenta que usarían toda la cantidad disponible de concentrado de naranja que es 24000 onzas. ▪ Es probable que algunos alumnos tengan dificultad en entender la expresión “con un máximo”.
d	**Acción**	▪ Se espera que la mayoría de los alumnos puedan plantear la expresión 8x+12y, como consecuencia del razonamiento seguido en las preguntas anteriores. ▪ Es probable que algunos alumnos tengan dificultad al pasar de datos numéricos al uso de variables.
e	**Formulación**	▪ Se espera que la mayoría de los alumnos puedan expresar la limitación de concentrado de naranja como: $8x+12y \leq 24000$,

		pasando del lenguaje verbal al lenguaje algebraico. ▪ Es probable que algunos alumnos usen el símbolo< en lugar del símbolo $\leq$.
f	**Formulación**	▪ Se espera que la mayoría de los alumnos, a partir de la pregunta d identifiquen que es imposible tener un número negativo de Frutitríos y Frutidúos y lleguen a plantear $x \geq 0$ e $y \geq 0$. ▪ Es probable que alumnos escriban x>0; y>0 en vez de $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
g	**Acción**	▪ Se espera que la mayoría de los alumnos puedan realizar cada una de las gráficas correctamente ya que es un tema ya trabajado en sesiones anteriores. ▪ Es probable que algunos alumnos tengan dificultades en representar las tres gráficas en el mismo plano cartesiano ya que las regiones se van a superponer.
h	**Acción**	▪ Se espera que algunos alumnos utilicen la expresión encontrada en e para reemplazar x=600 y encuentren que el máximo número de frutidúos (y) que se puede fabricar es 1600. ▪ Se espera que algunos alumnos calculen por diferencia $600 \times 8=4800$; 24000-4800= 19200; $19200 \div 12=1600$. ▪ Es probable que algunos alumnos reemplacen y=600 llegando a una respuesta equivocada (2100).
i	**Acción**	▪ Se espera que algunos alumnos utilicen la expresión encontrada en e para reemplazar x=3000 y encuentren que el máximo número de frutidúos (y) que se puede fabricar es 0. ▪ Se espera que algunos alumnos calculen de la siguiente manara. $3000 \times 8=24000$ y vean que se agotó el concentrado de naranja, luego y=0. ▪ Se espera que algunos alumnos utilicen la grafica encontrada en g para ver que cuando "x" es 3000, "y" vale 0.
j	**Acción**	▪ Se espera que algunos alumnos utilicen la expresión encontrada en e para reemplazar Y=2000 y encuentren que el máximo número de frutitríos (x) que se puede fabricar es 0. ▪ Se espera que algunos alumnos calculen $2000 \times 12=24000$, viendo que se agotó el concentrado de naranja, luego x=0. ▪ Se espera que algunos alumnos utilicen la grafica encontrada en g para ver que cuando "y" es 2000, "x" vale 0.

TRABAJO GRUPAL 

PARTE II

	Comportamiento esperado
. **Validación**	Se espera que las gráficas sean muy similares, pero si hay discrepancias se espera que justificando sus procedimientos lleguen a la grafica correcta.

PARTE III

Ítem		Comportamiento esperado
a	**Acción**	▪ Se espera que luego de leer cuidadosamente el enunciado los alumnos respondan efectuando la siguiente operación: (ganancia al vender un Frutitrío $\times$ #de Frutitríos)+(ganancia al vender un frutidúo $\times$ #de Frutidúos); es decir $1\times6+0{,}8\times4=\$9{,}2$.
b	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos planteen la expresión 1x+0,8y, como consecuencia del razonamiento seguido en las pregunta anterior y en la pregunta d de la parte individual.
c	**Acción**	▪ Se espera que los alumnos utilicen la expresión 1x+0,8y para hallar las ganancias en los tres casos mencionados. ▪ Es probable que algunos alumnos no sepan justificar sin existe un caso en que la ganancia sea mayor.
d	**Formulación**	▪ Es probable que los alumnos tengan dificultad para ubicar los puntos sobre la gráfica, especialmente los que se encuentran cercanos a la recta inclinada o sobre ella ya que no sabrán si poner los puntos encima, debajo o sobre esta recta.
e	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos recomienden fabricar la mayor cantidad posible de Frutitríos ya que es el producto que da mayor ganancia. ▪ Se espera que los alumnos a partir de la pregunta c recomienden fabricar 3000 frutitríos y 0 frutidúos.

ACTIVIDAD 2

TRABAJO GRUPAL 

Ítem		Comportamiento esperado
a	**Acción**	▪ Se espera que los alumnos calculen 5x8=40 onzas viendo que los frutidúos no necesitan piña.
b	**Formulación**	▪ Es probable que los alumnos tengan problemas para plantear la expresión ya que esta expresión solo dependerá de x. Los frutidúos no usan concentrado de piña. ▪ Se espera que los alumnos lleguen a la expresión 8x.
c	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos planteen $8x \leq 12000$.
d	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos planteen las cuatro restricciones que se tienen hasta el momento $8x+12y \leq 24000$, $8x \leq 12000$. $x \geq 0$ e $y \geq 0$. ▪ Es probable que algunos alumnos no consideren las siguientes restricciones: $x \geq 0$ e $y \geq 0$. ▪ Es probable que los alumnos tengan dificultades al encontrar la escala adecuada parra realizar el grafico. ▪ Es probable que los alumnos tengan alguna dificultad para entender que deben intersecar las 4 graficas y luego para visualizar esta zona.
e	**Acción**	▪ Se espera que los alumnos resuelvan el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para encontrar el vértice (1 500;1 000) ya que el resto son interceptos. ▪ Es probable que algunos alumnos presenten dificultades algebraicas para resolver el sistema planteado.
f	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos ubiquen el punto (1200;1200) correctamente, pero es probable que tengan dificultades para interpretar a partir del gráfico que en ese punto se ha agotado el concentrado de jugo de naranja disponible. ▪ Se espera que algunos alumnos realicen el cálculo numérico, verificando que se encuentran en el límite de la restricción.

g	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos ubiquen el punto (1500;1800) correctamente, pero es probable que tengan dificultades para interpretar a partir del grafico que en ese punto se ha agotado el concentrado de jugo de piña disponible ▪ Se espera que algunos alumnos realicen el cálculo numérico, verificando que se encuentran en el límite de la restricción.
h	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos encuentren que ambos concentrados se agotan en el punto (1500;800) a partir de la grafica realizada en c.
i	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos encuentren distintas ganancias probando puntos en la expresión encontrada en la parte IIIb de la actividad 1, es probable que no puedan justificar donde se da el máximo.

ACTIVIDAD 3

PARTE I TRABAJO INDIVIDUAL 

Ítem		**Comportamiento esperado**
a	**Acción**	▪ Se espera que los alumnos planteen 6x+4y<=10 000 de forma similar a lo hecho en la actividad 2.
b	**Acción**	▪ Se espera que los alumnos encuentren la región factible de forma similar a lo visto en la actividad 2. ▪ Es probable que algunos alumnos presenten problemas de cálculo para hallar el nuevo vértice (600;1600) ya que tienen que resolver dos ecuaciones con 2 incógnitas. ▪ Es probable que algunos alumnos tengan dificultad para visualizar la intersección de varios semiplanos.

PARTE II TRABAJO GRUPAL

Ítem		Comportamiento esperado
a	**Acción**	▪ Se espera que los alumnos llenen la tabla con otros valores adicionales a los ya dados. ▪ Se espera que algunos alumnos se pregunten que ocurre si x o y salen valores decimales, ya que al están definidas como cantidad de frutitríos y frutidúos solo pueden tomar valores naturales.
b	**Acción**	▪ Se espera que algunos repitan el paso a. ▪ Es probable que los alumnos tengan dificultad para notar que las rectas son paralelas.
c	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos respondan que la que se encuentra mas alejada del origen.
d	**Formulación**	▪ Se espera que algunos alumnos respondan que no ya que no toca a la región factible o que se pasa de los límites permitidos.
e	**Validación**	▪ Es probable que algunos tengan dificultad para ver si la G=1 880 es la mayor posible y tengan que probar los vértices.
f	**Validación**	▪ Se espera que los alumnos respondan 600 frutitríos y 1 600 frutidúos.

ACTIVIDAD 4

PARTE I TRABAJO INDIVIDUAL

Ítem		Comportamiento esperado
a	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos completen la lista, basándose en lo ya visto en las actividades anteriores. Por ejemplo: ✓ Definir la función objetivo. ✓ Evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices. ✓ Escoger el máximo o mínimo valor de la función objetivo, dependiendo del problema.

		▪ Es probable que algunos alumnos tengan dificultad para expresar verbalmente los pasos más importantes.
b	**Acción**	▪ Se espera que los alumnos resuelvan el problema usando la propiedad 1; es decir, evaluando la función objetivo en los vértices de la región factible. ▪ Se espera que algunos alumnos resuelvan trazando rectas paralelas que representen a la función objetivo.

PARTE II TRABAJO  GRUPAL

Ítem		**Comportamiento esperado**
a	**Validación**	▪ Es probable que los alumnos tengan algunas diferencias en sus respuestas, pero que puedan llegar todos a la solución correcta discutiendo con argumentos.
b	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos observen y expresen con sus propias palabras que la mayor diferencia es que esta región no está totalmente limitada en sus bordes.
c	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos respondan que lo que se quiere encontrar es un valor mínimo y ya no un máximo.
d	**Formulación**	▪ Se espera que los alumnos puedan llegar a determinar que Diego consumiría la mínima cantidad de zinc y vitamina B, pero más del mínimo de hierro exigido por la nutricionista. ▪ Se espera que algunos alumnos lleguen a la respuesta gráficamente, pero seguramente algunos lo harán algebraicamente.

4.2.4 MATERIAL COMPLEMENTARIO:

Se utilizó material complementario como una prueba de conocimientos previos, tareas calificadas y recapitulaciones. Este material se muestra en los anexos del presente trabajo.

INSTRUMENTO	DESCRIPCIÓN
Conocimientos previos	▪ 7 preguntas ▪ temas ya estudiados ▪ primero los alumnos lo trabajan en grupo ▪ los alumnos salen a la pizarra a resolver.
Tareas calificadas	▪ 2 tareas calificadas para que cada alumno lo resuelva en casa de una clase para la siguiente. ▪ Tarea 1: 3 enunciados para hallar región factible. ▪ Tarea 2: se usan los mismos enunciados de la tarea 1 y se agregan datos para halla valores óptimos.
Recapitulaciones	▪ Recapitulación 1: El profesor la realiza al inicio de la sesión 2, revisando lo visto en la sesión1. ▪ Recapitulación 2: El profesor la realiza al inicio de la sesión 3, revisando lo visto en la sesión 2. ▪ Recapitulación 3: El profesor la realiza al inicio de la sesión 4, revisando lo visto en la sesión 3.

4.2.5. CRONOGRAMA DE APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

El siguiente cuadro muestra la forma de trabajo (individual o grupal) y la duración de la aplicación (esperada) de los distintos instrumentos usados en las actividades diseñadas. Se muestra también el número del anexo con que ha sido incluido, cada material mencionado, al final del presente trabajo.

SESIÓN	INSTRUMENTO	FORMA DE TRABAJO	DURACIÓN	Anexo
Previa a sesión 1	**Conocimientos previos**	Individual	90 minutos	1
1	Indicaciones Actividad 1	Profesor ✓ Parte I individual	10 minutos 20 minutos	 2

		✓ Parte II grupal ✓ Parte III grupal	10 minutos 50 minutos	
2	Recapitulación 1 Actividad 2	Profesor Grupal	20 minutos 70 minutos	3 4
Final de sesión 3	**Tarea calificada 1**	Individual	Para casa	5
3	Recapitulación 2 Actividad 3	Hecha por el profesor al inicio de la sesión. ✓ Parte I individual ✓ Parte II grupal	20 minutos 30 minutos 40 minutos	6 7
4	Recapitulación 3 Actividad 4	Hecha por el profesor al inicio de la sesión. ✓ Parte I individual ✓ Parte II grupal	20 minutos 30 minutos 40 minutos	8 9
Final de sesión 4	**Tarea calificada 2**	Individual	Para casa	10
Posterior a la sesión 4	Recapitulación 4		30 minutos	11

4.2.6. ACTIVIDADES DISEÑADAS

A continuación se muestran las actividades diseñadas en base a los análisis previos.

<u>ACTIVIDAD 1</u>

NUEVOS JUGOS…

La empresa **“FRESH”** dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.

Frutitrío: piña, naranja y plátano

Frutiduo: naranja y plátano

Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.

Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.

La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.

Parte I   Trabajo INDIVIDUAL

a. ¿Cuántas onzas de concentrado de jugo de naranja se necesita para fabricar 3 Frutitríos y 5 Frutidúos?

b. ¿Es posible fabricar 1 000 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

c. ¿Es posible fabricar 1 500 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

d. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de naranja se usará al fabricar “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

e. Utilizando lo encontrado en d, ¿cómo representarías la restricción que se tiene por no ser temporada alta de la naranja?

f. ¿Podrían “x” e “y” tomar valores negativos? Escribe las desigualdades que representan estas restricciones.

g. Grafica en el mismo plano cartesiano las restricciones encontradas en las partes e y

h. Si se fabrica 600 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?

i. Si se fabrica 3 000 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?

j. Si se fabrica 2 000 Frutidúos, ¿cuántos Frutitríos como máximo se pueden fabricar?

Trabajo GRUPAL

Parte II

Los integrantes del grupo deben comparar el resultado que obtuvieron la parte g del trabajo individual, llegando a tener una única respuesta. A partir de esta respuesta se trabajará el resto de la actividad.

Parte III

Se sabe que la ganancia al vender un Frutitrío es de S/.1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de S/.0,8.

a. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender 6 Frutitríos y 4 Frutidúos?

b. ¿Cuál es la ganancia que se obtienen al vender “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

c. Encuentra la ganancia que se obtendría en cada uno de los casos propuestos en las preguntas h, i, j de la parte individual e indica en qué caso ha sido mayor. ¿Habrá algún otro caso en que la ganancia sea mayor que las encontradas? Explique.

d. ¿En cuál de los casos analizados en la parte individual, se ha agotado la cantidad de concentrado de naranja disponible? Ubica dichos puntos sobre la gráfica resultante de parte II (grupal).

e. Si no es indispensable fabricar ambos tipos de envases ¿Qué cantidad de cada producto le recomendarías al fabricante para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál sería dicha ganancia?

ACTIVIDAD 2

Trabajo GRUPAL

Si además de los datos dados en la actividad 1, se sabe que por problemas de transporte se tiene un máximo de 12 000 onzas de concentrado de piña para la fabricación de los Frutitríos y Frutidúos,

a. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al fabricar 5 Frutitríos y 6 Frutidúos?

b. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al fabricar “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

c. Utilizando lo encontrado en b, ¿cómo representarías la limitación de concentrado de piña que se tiene por problemas de transporte?

d. Escribe el conjunto de restricciones que se tienen hasta el momento. Encuentra los puntos del plano cartesiano donde se cumplen todas las condiciones simultáneamente.

e. Encuentra los vértices de la región encontrada en la parte d.

f. Ubica el punto (1 200; 1 200) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de jugo de naranja disponible? Explica.

g. Ubica el punto (1 500; 800) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de piña disponible? Explica.

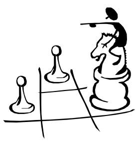
h. ¿Qué punto representa el haber agotado el concentrado de concentrado de piña y naranja disponibles?

i. Recordando que la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8; para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y Frutidúos debe comercializar la empresa?

<u>ACTIVIDAD 3</u>

Adicionalmente a los datos dados en las actividades 1 y 2, ahora se sabe que por el problema de transporte solo se puede contar con 10 000 onzas de concentrado de plátano. Para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos debe comercializar la empresa?
Recordemos que:

- la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8.
- un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
- un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.



Parte I Trabajo INDIVIDUAL

a. Completa la tabla:

	Piña	Naranja	Plátano
Frutitrío:x	8x	8x	
Frutidúo:y		12y	
	$8x \leq 12\ 000$	$8x+12y \leq 24\ 000$	

Encuentra la región factible , indicando las coordenadas de sus vértices

Parte II Trabajo GRUPAL

a. Trata de encontrar todas las soluciones posibles de producción de Frutitríos y Frutidúos, que permita tener una determinada ganancia. Por ejemplo, para una ganancia de $1 000 busca combinaciones de producción que haga que esta ganancia se consiga.

Puedes usar una tabla como esta

x	y	G=x+0,8y
0	1250	1 000
1 000	0	1 000
200		1 000

Ubica dichos puntos sobre tu región factible resultante de la parte individual y observa como están dispuestos.

Completa:

Al unir los puntos se forma____

b. Repite el paso anterior para G=1 500, G=1 880, G=2 200 y observa como son las gráficas resultantes. **Explica**.

Las gráficas resultantes son____

____

c. Cada una de las rectas graficadas en el paso anterior, representa un nivel de ganancia. Comparando dos de estas rectas paralelas, ¿cuál es la que representa una ganancia mayor?

Explica.

d. ¿Es posible ganar $2 200? **¿Por qué?**

e. ¿Cuál es la ganancia máxima que se puede obtener? **Explica**

f. ¿Cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos se debe producir para obtener la ganancia máxima posible?
Explica

ACTIVIDAD 4

NATACIÓN Y NUTRICIÓN

Diego, quien pertenece al equipo de natación de su colegio, ha acudido a la nutricionista para mejorar su alimentación y desempeño.
La nutricionista ha decidido que Diego debe usar diariamente 2 suplementos alimenticios llamados Nutrifort y Energyplus para suministrarle un mínimo de 400 mg de zinc para el crecimiento de los músculos, 10 mg de hierro para mejorar el transporte de Oxígeno y 40 mg de vitamina B para aumentar la energía.
Cada onza de Nutrifort contiene 30 mg de zinc, 1 mg de hierro y 2mg de vitamina B. Asimismo, cada onza de Energyplus contiene 25 mg de zinc, 0,5 mg de hierro y 5 mg de vitamina B.

Se sabe que los niños necesitan colesterol en su alimentación ya que tiene nutrientes importantes para el desarrollo cerebral. En el caso de Diego, sin embargo, la nutricionista decide minimizar la ingesta de colesterol debido a su sobrepeso.

Hallar cuántas onzas de cada suplemento debe usar Diego diariamente de modo que se minimice el contenido de colesterol y se cubran los requerimientos de zinc, hierro y vitamina B. Se sabe que cada onza de Nutrifort contiene 3 mg de colesterol y cada onza de Energyplus contiene 5 mg de colesterol.

Parte I Trabajo INDIVIDUAL

a. Completa la lista de pasos que seguirías para resolver el problema planteado, según lo aprendido.
   - ✓ Escribir el sistema de inecuaciones que representan las restricciones del problema. (puede ayudar el elaborar una tabla).
   - ✓ Graficar en el plano cartesiano la región factible (incluyendo los vértices).
   - ✓ …..

b. Encuentra la solución del problema según los pasos determinados en la parte a.

Parte II Trabajo GRUPAL

a. Los integrantes del grupo deben comparar sus soluciones. Si hay diferencias, discutirlas hasta llegar a un consenso.

   Solución óptima:

   Diego debe consumir diariamente _________onzas de NUTRIFORT y________onzas de ENERGYPLUS.

   El contenido mínimo de colesterol es:________mg.

b. ¿Cuál es la principal diferencia entre las regiones factibles encontradas en la actividad 3 y 4?

c. ¿Cuál es la principal diferencia en cuanto a lo que se quiere lograr de la función objetivo?

d. Para la solución encontrada:

   ¿Diego consumiría exactamente la mínima cantidad de zinc, hierro y vitamina B, indicada por la nutricionista?

CAPÍTULO 5: FASE EXPERIMENTAL

La fase experimental del presente estudio consiste en la aplicación o puesta en escena de la secuencia didáctica diseñada, y el recojo y registro de información respecto al desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades propuestas. Posteriormente se hará una comparación entre lo observado y los comportamientos esperados, lo cual corresponde a otra etapa de la ingeniería didáctica.

LOGROS Y DIFICULTADES ENCONTRADOS EN EL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Esta fase de experimentación se desarrolló en 4 sesiones de 90 minutos cada una en las fechas y horas que corresponden al horario de dictado del curso.

En cada sesión se experimentó una de las actividades diseñadas como se muestra en el siguiente cuadro:

Actividad	Fecha	Hora
1	Miércoles, 20 de octubre de 2010	11:30 a.m. – 1:00 p.m.
2	Viernes, 22 de octubre de 2010	9:45 a.m. – 11:15 a.m.
3	Miércoles, 27 de octubre de 2010	11:30 a.m. – 1:00 p.m.
4	Viernes, 29 de octubre de 2010	9:45 a.m. – 11:15 a.m.

Con el objetivo de facilitar el recojo y registro de la información relevante para la investigación, se utilizó una ficha de observación (anexo 12) para cada una de las actividades. Para este recojo y registro se contó con la valiosa colaboración del Profesor Henry Cáceres, quién labora como asesor de matemáticas en la UARM.

El hecho de que los alumnos conocieran al profesor que participó como observador permitió que se trabaje sin que los alumnos se sientan retraídos por la presencia de personas extrañas.

Como se recomienda cuando la experimentación dura más de una sesión, se realizó un análisis a posteriori local, con la finalidad de hacer las correcciones necesarias de una sesión a otra.

A continuación y en base a la información recogida, detallaremos el proceso de aplicación de la Ingeniería didáctica para cada una de las actividades.

<u>ACTIVIDAD 1</u> (Sesión 1)

Se inició la clase con 9 estudiantes a los cuales se les dio las indicaciones iniciales que consistían en la forma de trabajo (al inicio individual y luego grupal) y la explicación de que las consultas que no sean de forma, serían respondidas seguramente con otra pregunta o con alguna reflexión. Empezaron a trabajar la parte individual de esta actividad. Posteriormente fueron llegando el resto de los estudiantes, por lo que se tuvo que repetir las indicaciones. Los 21 alumnos matriculados estuvieron presentes, respondiendo positivamente al pedido de 0 ausentismo hecho especialmente en la clase anterior.

Los alumnos empezaron por leer el enunciado general:

Enunciado:

La empresa **"FRESH"** dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.

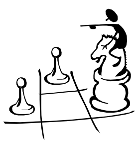
Frutitrío: piña, naranja y plátano

Frutiduo: naranja y plátano

Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.

Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.

La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.



Parte I   Trabajo INDIVIDUAL

Esta parte duró 30 minutos. Los alumnos que llegaron temprano terminaron antes, así que empezaron a leer las preguntas de la parte grupal que se encontraban en el mismo material. Se notó gran diferencia en cuanto al tiempo que les tomó comprender el texto y empezar a contestar. Unos lo hacían bastante rápido y otros demoraron mucho más. Cuando terminaron la parte individual se juntaron en grupos de 3, y presentaron respuestas grupales (7 grupos). A partir de esas siete respuestas se ha hecho el siguiente análisis.

a. ¿Cuántas onzas de concentrado de jugo de naranja se necesita para fabricar 3 Frutitríos y 5 Frutidúos?

Observaciones

2 grupos respondieron que se necesitaban $3\times 8=24$ onzas para fabricar 3 frutitríos y $5\times 12=60$ onzas de concentrado de naranja para fabricar 5 frutidúos pero no sumaron ambas cantidades.

5 grupos sumaron ambas cantidades y respondieron que se necesitaba 84 onzas.

El 100% de los grupos contestó correctamente.

Reformulación

El enunciado debe decir:

a. Cuántas onzas de concentrado de jugo de naranja, **en total**, se necesita para fabricar 3 Frutitríos y 5 Frutidúos?

b. ¿Es posible fabricar 1 000 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

Observaciones

Después de encontrar la cantidad necesaria para fabricar lo pedido, es decir $1000\times 8+1000\times 12=20000$, cinco grupos escribieron sus respuestas utilizando únicamente el registro verbal y dos acompañaron su respuesta utilizando el registro algebraico ($20\,000\leq 24\,000$).

Algunas respuestas:

- ✓ *Si, porque se dispone del suficiente concentrado de naranja.*
- ✓ *Si, porque la cantidad requerida no supera la cantidad disponible (24 000 onzas).*
- ✓ *Si es posible porque se necesita menos de la máxima cantidad de onzas de naranja que se puede utilizar*

El 100% de los alumnos contestó correctamente.

c. ¿Es posible fabricar 1 500 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

Observaciones Después de hacer el cálculo $1500\times 8+1000\times 12=24000$ respondieron: ✓ *Si, porque no supera el límite disponible (24000 onzas).* ✓ *Si, porque hay la cantidad suficiente de onzas de jugo de naranja.* ✓ *Si, porque la empresa cuenta con la cantidad de onzas necesarias.* ✓ *Solo un alumno hizo referencia a que los otros insumos estaban garantizados.* Un grupo colocó $24000\leq 24000$.

d. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de naranja se usará al fabricar "x" Frutitríos e "y" Frutidúos?

Observaciones Un grupo igualó la expresión a una letra 8x+12y=q Dos grupos no sumaron sino que respondieron por separado Frutitríos=8x Frutidúos=12y 3 grupos solo pusieron 8x+12y Un grupo utilizó notación de función f(x)=8x f(y)=12y **Devolución** Cuando un grupo preguntó si se trataba de dos funciones, se les pidió que pensaran en alguna situación donde una cantidad dependiera de otras dos cantidades variables. Uno de ellos contestó refiriéndose a la recaudación de un microbús que cobra diferente a niños y adultos. A raíz de ese ejemplo, entendieron que se trataba de una función con dos variables, que hasta el momento no se habían abordado en el curso y lo relacionaron con la situación planteada. **Reformulación** El enunciado debe decir: a. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de naranja, **en total**, se usará al fabricar "x" Frutitríos e "y" Frutidúos?

e. Utilizando lo encontrado en d, ¿cómo representarías la restricción que se tiene por no ser temporada alta de la naranja?

Observación

Todos los grupos contestaron $8x+12y \leq 24\ 000$, pasando correctamente del registro verbal al algebraico.

f. ¿Podrían "x" e "y" tomar valores negativos? Escribe las desigualdades que representan estas restricciones.

Observaciones

Ya que no se preguntaba el porqué, la mayoría contestó solo que "no" o simplemente colocaron las restricciones.

Un grupo colocó $8x \geq 0$, $12y \geq 0$

Un grupo colocó y<0, x<0

5 grupos contestaron correctamente pero solo dos explicaron el porqué diciendo:

- ✓ *NO, porque en la realidad no existen los negativos.*
- ✓ *No, pues se trata de un caso real de producción y no se puede fabricar una cantidad negativa de cajas.*

Devolución: Al grupo que contestó que no existían los negativos se les preguntó si podían existir temperaturas negativas. A lo que contestaron que sí, pero que en este caso se trataban de cantidad de cajas de jugos. Se les pidió que revisaran su respuesta luego de esa reflexión y quedó claro que la expresión "no existen los negativos" se refería a la no existencia de cantidades negativas, por tratarse de cajas de jugos. Se evidenció una dificultad para el uso adecuado del lenguaje para expresar sus apreciaciones en torno al problema.

Reformulación

El enunciado debe decir:

¿Podrían "x" e "y" tomar valores negativos? **¿Por qué?** Escribe las desigualdades que representan estas restricciones.

g. Grafica en el mismo plano cartesiano las restricciones encontradas en las partes e y f.

Observaciones

2 grupos graficaron las tres restricciones superpuestas (figura 37).

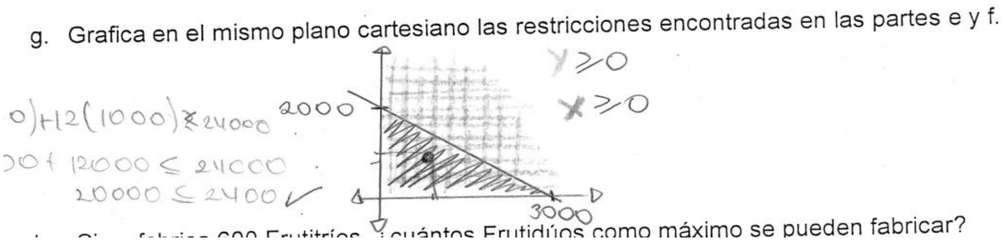


Figura 37

2 grupos presentaron solo la región resultante.

1 grupo graficó 8x+12y=84000 (error al copiar el valor 24000)

2 grupos graficaron cada una de las restricciones por separado y luego en otro plano la región resultante.

Uno de ellos planteó mal las condiciones de no negatividad, mostrando inconsistencia entre el registro verbal y el algebraico. También mostraron inconsistencia entre el registro algebraico y el grafico. (Figura 38)

A pesar de tener estas restricciones mal graficadas llegaron a la solución final correcta.

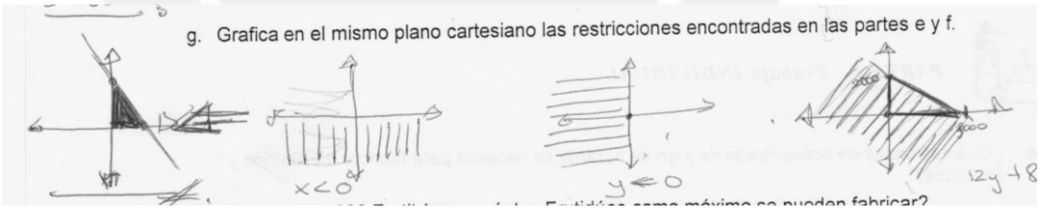


Figura 38

Devolución: cuando los alumnos del último grupo mencionado preguntaron si estaba bien lo que hacían en relación con las regiones sombreadas debajo del eje x y a la izquierda del eje y, se les pidió que digan en palabras el significado de las expresiones simbólicas x<0 e y<0. También se sugirió que en una de estas regiones sombreadas ubiquen distintos puntos colocando sus coordenadas y luego observen en qué se parecían los valores de sus respectivas abscisas u ordenadas. Se sugirió que recordaran entonces qué representaban las variables x e y. Se dieron cuenta del error, pero solo añadieron la gráfica final que estaba correcta.

Se evidenció que tenían poca claridad sobre el significado de las variables en el contexto del problema y un manejo poco reflexivo de las regiones correspondientes a desigualdades referidas a una sola de las coordenadas. Esta dificultad debería tenerse en cuenta al trabajar estos temas en los conceptos previos.

Reformulación

El enunciado debe decir:

Grafica en el mismo plano cartesiano **cada una de** las restricciones encontradas en las partes e y f. **Encuentra luego la intersección de dichas gráficas.**

h. Si se fabrica 600 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?

Observaciones

3 grupos trabajaron con desigualdades de la siguiente forma:

$8x+12y \leq 24000$

$8(600)+12y \leq 24000$

$y \leq 1600$

3 grupos trabajaron con la igualdad:

$8(600)+12y=24000$

$y=1600$

1 grupo trabajó en forma aritmética.

$600 \times 8=4800$

$24000-4800=19200$

$19200/12=1600$

El 100% de los grupos contestó correctamente y predominó el pensamiento algebraico al aritmético.

i. Si se fabrica 3 000 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?

Observaciones

Igual que en la pregunta anterior algunos grupos trabajaron con la igualdad, otros con desigualdades y uno en forma aritmética

Un grupo resolvió mal, pues luego de reemplazar x=3000, obtuvo como conclusión $y \geq 0$

$8(3000)+12y \leq 24000$

$y \geq 0$, pero verbalmente dio la respuesta correcta. “Ninguno”.

j. Si se fabrica 2 000 Frutidúos, ¿cuántos Frutitríos como máximo se pueden fabricar?

Observaciones
Todos los grupos respondieron en forma similar que en la pregunta anterior.
El mismo grupo que se equivocó en la pregunta anterior se equivocó también en esta pregunta
$8(x)+12(2000)\leq 24000$
$x\geq 0$

Trabajo GRUPAL

Los grupos ya estaban definidos desde la clase anterior así que no se perdió tiempo en su formación. Todos trabajaron activamente. La mayoría de grupos eran bastante heterogéneos académicamente. Ya que no faltó ningún alumno, los grupos estaban todos completos. Esta parte la hicieron desde un inicio en forma conjunta y duró 60 minutos.

Parte II

Los integrantes del grupo deben comparar el resultado que obtuvieron en la parte g del trabajo individual, llegando a tener una única respuesta. A partir de esta respuesta se trabajará el resto de la actividad.

Al comparar sus resultados había bastante interacción entre los integrantes de los grupos. **Devolución:** cuando en los grupos no había acuerdos, llamaban al profesor para que diga quién tenía la razón; ante esto el profesor pedía que cada uno justifique su procedimiento ante sus compañeros. El error más frecuente fue al graficar las condiciones de no negatividad. Las sugerencias planteadas en g ayudaron a lograr unanimidad en las respuestas. Se les entregó una hoja de trabajo adicional para que pasaran sus acuerdos de la parte individual y las respuestas a la parte grupal.

Parte III

Se sabe que la ganancia al vender un Frutitrío es de S/.1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de S/.0,8.

a. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender 6 Frutitríos y 4 Frutidúos?

Observaciones

Un grupo preguntó por el costo de fabricación, para poder hallar la ganancia

Devolución: se le respondió que se base en los datos dados en el problema, leyendo nuevamente qué representaba por ejemplo S/.1 en la venta de un frutitrío. Con esta sugerencia se pretendía hacer notar que tenían que trabajar con los datos dados para las ganancias, pues no se hace mención a costos. Es decir, asumir que las ganancias dadas eran ganancias netas.

Dos grupos hallaron la ganancia en cada producto, pero no totalizaron.

Cinco grupos totalizaron de la siguiente manera $6\times1+4\times0{,}8=9{,}2$ soles, dos de ellos no le pusieron unidades a su respuesta.

El 100% de los grupos contestó correctamente.

Reformulación

Se sabe que la ganancia **neta** al vender un Frutitrío es de S/.1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de S/.0,8.

Añadir la palabra **neta** cada vez que se mencione la ganancia.

¿Cuál es la ganancia **neta total** que se obtiene al vender 6 Frutitríos y 4 Frutidúos?

b. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

Observaciones

Dos grupos hallaron las ganancias por separado, pero no sumaron.

1(x), 0,8(y)

Un grupo igualó a una letra x+0,8y=g

Un grupo respondió f(g)=1x+0,8y, no se ha trabajado funciones en dos variables.

Devolución: este último grupo preguntó si estaba bien escribir f(g)=1x+0,8y, se les pidió que recuerden cómo se escribían las funciones con una variable y qué se ponía dentro del paréntesis. Un alumno planteó f(xy) y otro luego llegó a f(x;y).

Reformulación

El enunciado debe decir:

¿Cuál es la ganancia **total** que se obtiene al vender “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

c. Encuentra la ganancia que se obtendría en cada uno de los casos propuestos en las preguntas h, i, j de la parte individual e indica en qué caso ha sido mayor. ¿Habrá algún otro caso en que la ganancia sea mayor que las encontradas? Explique.

Observaciones

La parte operativa todos los grupos la realizaron correctamente.

3 grupos contestaron que no había otro caso que generara mayor ganancia, pero sin explicación, mostrando tener una intuición del óptimo.

4 grupos no contestaron si había otro caso que generara mayor ganancia

Devolución: Se les sugirió probar puntos adicionales y observar que ocurría con el valor de la ganancia. Adicionalmente, se les preguntó si los frutitríos dan más ganancia, para qué fabricaría frutidúos. Esto ayudó a entender cuál era el óptimo, sin embargo persistían las dificultades para explicarlo.

d. ¿En cuál de los casos analizados en la parte individual, se ha agotado la cantidad de concentrado de naranja disponible? Ubica dichos puntos sobre la gráfica resultante de parte II (grupal).

Observaciones

Los alumnos no entendían a qué casos se refería el enunciado.

Ante las preguntas reiteradas por parte de los alumnos, se aclaró que el enunciado debió decir los casos a, b y c. También se aclaró que se trataba de la gráfica encontrada en la parte g (individual).

Un grupo confundió las variables, tomó x e y como el número de onzas usadas en estos casos.

Devolución: a este grupo se le pidió revisar en las preguntas anteriores qué representaba x e y, notaron su error.

Solo un grupo ubicó el punto del caso c en la recta inclinada (figura 39), el resto lo colocó por debajo o por encima de la recta (figura 40).

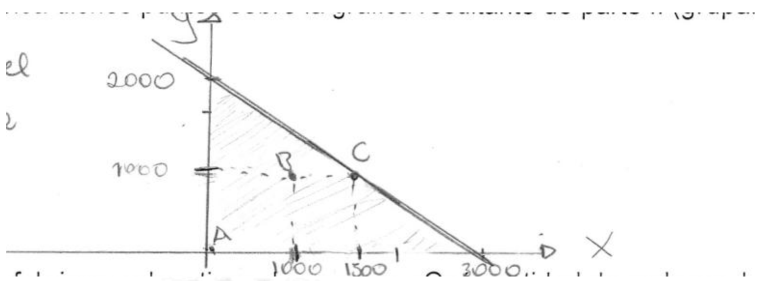


Figura 39

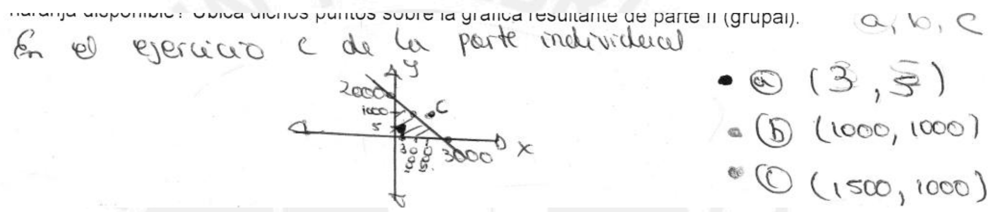


Figura 40

Los alumnos no entendían en un inicio a qué puntos se refería el ejercicio. No traducían del registro verbal y algebraico, al geométrico.

Devolución ya que la duda era generalizada se preguntó a la clase lo siguiente:

¿Cuántas coordenadas tiene un punto representado en un plano cartesiano?

¿Cómo se grafica un punto en el plano cartesiano?

¿Qué relación tienen las variables de nuestro problema con la abscisa y ordenada de un punto?

¿Cómo sabemos que un punto pertenece a una recta?

Ellos mismos fueron dando las respuestas y esto aclaró sus ideas. Luego continuaron con la solución del problema.

Reformulación

El enunciado debe decir:

> ¿En cuál de los casos **a, b y c** analizados en la parte individual, se ha agotado la cantidad de concentrado de naranja disponible? Ubica los puntos que **representan dichos casos** sobre la gráfica resultante en la parte **g (individual).**

e. Si no es indispensable fabricar ambos tipos de envases ¿Qué cantidad de cada producto le recomendarías **producir** al fabricante para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál sería dicha ganancia?

Observaciones:

El haber trabajado la parte c anteriormente ayudó a que los alumnos respondan esta parte sin mayores dificultades.

Un grupo no contestó esta pregunta por falta de tiempo.

Las otras 6 respuestas fueron:

- ✓ *Se recomendaría fabricar únicamente frutitríos ya que son más costosos y utilizan menos onzas de concentrado de jugo de naranja. La ganancia máxima sería 3000 soles. 3000(1)=S/.3000.*
- ✓ *3000 frutitríos y 0 frutidúos. 3000(1)=S/.3000.*
- ✓ *Le recomendaría que solo fabrique frititríos ya que le da más ganancia y usa menos onzas de concentrado de naranja. En tanto los frutidúos producen 0,20 menos de ganancia por unidad y emplea más concentrado de naranja.*
- ✓ *Recomendamos producir solo frutitríos, porque utiliza menos insumos y su precio es mayor. La ganancia sería 3000.*
- ✓ *Le recomendaríamos lo siguiente: G=1(3000)+0,8(0), G=S/.3000. Que solo fabrique frutitríos , ya que le dará más ganancia.*
- ✓ *24000/8=3000 unidades de frutitríos y 0 unidades de frutidúos. 3000(1)=S/.3000 de ganancia.*

Reformulación

El enunciado debe decir:

e. Si no es indispensable fabricar ambos tipos de envases ¿Qué cantidad de cada producto le recomendarías **producir** al fabricante para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál sería dicha ganancia? **Explica.**

<u>ACTIVIDAD 2</u> (Sesión 2)

Se inició la sesión repartiendo a los alumnos la actividad 1 corregida y se utilizó los 20 minutos siguientes para hacer una recapitulación de lo visto hasta el momento. Se enfatizó en los errores o deficiencias encontradas en la actividad anterior.

En los 60 minutos siguientes, los alumnos trabajaron en forma grupal, terminando a la hora programada.

Al final de la sesión se repartió la tarea 1 para que cada uno entregue su solución escrita en la siguiente clase.

Se trabajó la sesión con los 21 alumnos presentes.

La tardanza de cerca de la mitad de los alumnos perjudicó su avance ya que no escucharon la recapitulación que sirvió a los demás para aclarar sus ideas.

Trabajo GRUPAL

Si además de los datos dados en la actividad 1, se sabe que por problemas de transporte se tiene un máximo de 12 000 onzas de concentrado de piña para la fabricación de los Frutitríos y Frutidúos,

a. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al fabricar 5 Frutitríos y 6 Frutidúos?

> **Observaciones**
>
> Todos los grupos contestaron correctamente, solo dos grupos comentaron con palabras que los Frutidúos no necesitaban concentrado de piña,
>
> 2 grupos contestaron directamente 5(8)=40 onzas sin explicación alguna.
>
> 3 grupos plantearon Frutitríos 5(8)=40 onzas y Frutidúos 6(0)=0 onzas pero no totalizaron. En este caso totalizar no era tan importante ya que daba el mismo resultado.
>
> Se mostró un adecuado manejo del registro verbal.
>
> **Reformulación**
>
> El enunciado debe decir:
>
> > ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al fabricar 5 Frutitríos y 6 Frutidúos? **Explica.**

b. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al fabricar “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

> **Observaciones**
>
> 5 grupos plantearon 8(x)+0(y)=8x.
>
> 2 grupos dejaron la expresión 8(x)+0(y), pero no llegaron a indicar que el resultado era 8x.
>
> Entre los miembros del grupo discutieron si 0(y) resultaba 0, en todos los grupos había por lo menos un alumno que lo tenía claro.
>
> **Devolución:** cuando algunos alumnos preguntaron si 0(y) era 0, se les preguntó cuál era el doble de cero, el triple de cero, etc., contestando correctamente y luego

entendieron que cualquier cantidad multiplicada por cero es 0. No se esperaba que los alumnos tuviesen este tipo de dudas.
Devolución: en cuatro grupos comentaban que y era cero ya que no se necesitaba piña para hacer los Frutidúos, lo que mostraba que no tenían claro qué representaba x e y, mostrando una falta de coordinación entre el registro verbal y el algebraico.
Pensaban que ”y “ era la cantidad de onzas de piña necesarias para fabricar frutidúos.
En estos casos se les pidió nuevamente que recordaran qué representaba x e y, recurriendo a lo trabajado en la actividad 1. Al darse cuenta se les pidió que lo escriban en su material para tenerlo siempre presente.

Reformulación
El enunciado debe decir:

> ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al **fabricar un número de Frutitríos igual a “x” y un número de Frutidúos igual a “y”?**

c. Utilizando lo encontrado en b, ¿cómo representarías la limitación de concentrado de piña que se tiene por problemas de transporte?

Observaciones
Dos grupos contestaron $8x+0y \leq 12\ 000$
3 grupos llegaron a $8x \leq 12\ 000$
2 grupos despejaron x, llegando a la expresión $x \leq 1\ 500$
Ya que no se había desarrollado previamente el tema de inecuaciones con una variable, varios alumnos dudaban si el 8 podía pasar a dividir como en las ecuaciones.
Se aclaró este punto en la pizarra, pero solo algunos lo aplicaron.
Es recomendable incluir la resolución de las inecuaciones lineales como conocimiento previo en este curso o el curso prerrequisito (Matemática aplicada a la economía I) pensando en que es mejor simplificar las desigualdades para luego graficarlas.
El 100% de los grupos contestó correctamente.

d. Escribe el conjunto de restricciones que se tienen hasta el momento. Encuentra los puntos del plano cartesiano donde se cumplen todas las condiciones simultáneamente.

Observaciones

5 grupos plantearon las cuatro restricciones correctamente.

Devolución: al inicio, la mayoría intentó resolver el sistema de inecuaciones como si fuesen ecuaciones, pero se les pidió recordar que les había resultado cuando resolvían una sola inecuación lineal con dos variables. Este era un tema ya trabajado previamente. Se dieron cuenta que les saldría una región y no un punto.

Un grupo escribió $0 \geq x$, $0 \geq x$. Se recomienda usar una regla nemotécnica para evitar estos errores.

Devolución: para los grupos que no llegaron a despejar $x \leq 1\ 500$, se les complicó graficar esta restricción. Se les pidió entonces que empezaran viendo qué ocurría al trabajar con la igualdad, encontrando x=1500. La graficaron y se les sugirió probar un punto para definir cuál era la zona solución.

Un solo grupo realizó la gráfica erróneamente, considerando $x \geq 1500$, como se aprecia en la figura 41.

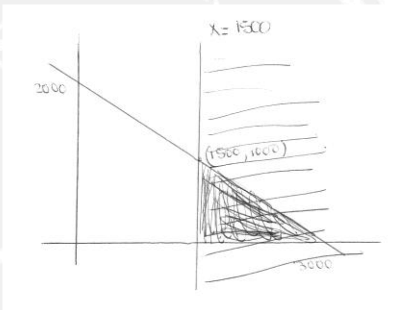


Figura 41

e. Encuentra los vértices de la región encontrada en la parte d.

Observaciones

Devolución: Al inicio no relacionaban el hallar el vértice que no se encontraba en los ejes, con el resolver un sistema. Se les preguntó si del gráfico podían determinar alguna coordenada de ese punto, dándose cuenta que su abscisa era 1500 y luego reemplazaron este valor en la ecuación de la recta inclinada.

Dos grupos encontraron el vértice (1 500; 1 000) ya que era la respuesta a la pregunta c de la parte individual en la actividad 1.

Un grupo encontró los vértices correctamente pero no explicó cómo los encontró. La pregunta no decía explica, pero durante la aplicación de la prueba se mencionó.

Dos grupos encontraron el vértice (1 500;1 000) resolviendo el sistema de dos inecuaciones como si fuesen ecuaciones identificando el vértice correctamente (figura42).

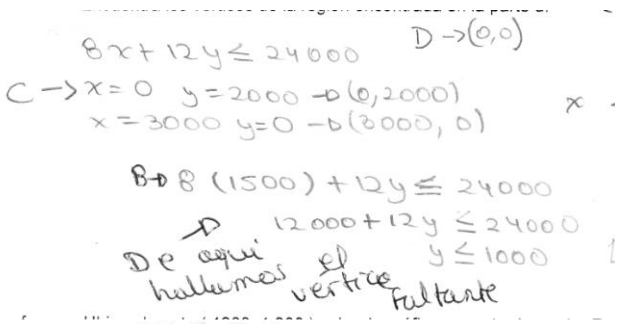


Figura 42

Un grupo no encontró el vértice (1 500;1 000).

Reformulación

El enunciado debe decir:

Encuentra los vértices de la región **graficada** en la parte d. **Explica.**

f. Ubica el punto (1 200; 1 200) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de jugo de naranja disponible? Explica.

Observaciones

Devolución: dos grupos colocaron el punto por debajo de la recta $8x+12y=24\ 000$ (figura 43). Se les preguntó: ¿por qué debajo y no sobre o encima de la recta? ¿Cómo verificar si el punto pertenece a la recta? A pesar de estas preguntas se demoraron en descubrir que el punto estaba sobre la recta.

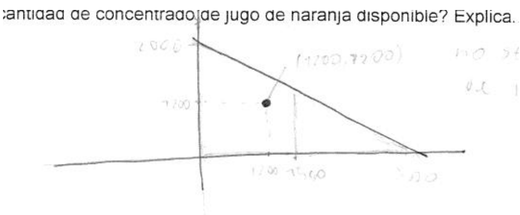


Figura 43

Dos grupos colocaron el punto sobre la recta pero no explicaron correctamente.

Tres grupos contestaron correctamente reemplazando el punto en la inecuación $8x+12y\leq 24\,000$

g. Ubica el punto (1 500; 800) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de piña disponible? Explica.

Observaciones

Dos grupos no colocaron el punto sobre la recta.

Cuatro grupos calcularon 8(1500) =12000 utilizando el registro algebraico para su explicación.

Un grupo lo explicó diciendo que estaba sobre la recta que limita el concentrado de piña, lo cual indica que tienen claro el registro gráfico.

h. ¿Qué punto representa el haber agotado el concentrado de piña y naranja disponibles?

Observaciones

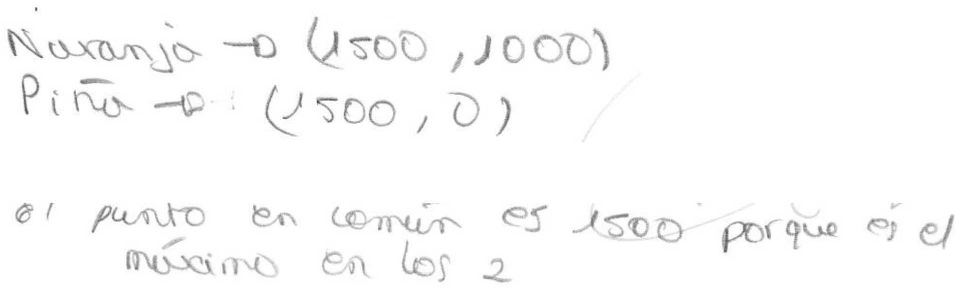
Devolución: al comienzo los alumnos estaban desconcertados, pero se les pidió que se enfocaran en las respuestas a los dos ítems anteriores. Ahora ambas situaciones deberían darse simultáneamente.

Un grupo contestó:

(1500; 1 000) pues es el punto en el que coinciden las rectas que limitan la cantidad de concentrado de naranja y piña respectivamente.

Un grupo indicó el punto pero no explicó el porqué.

Un grupo contestó que el punto era 1 500 denotando que no entienden el concepto de punto en el plano cartesiano. (Figura 44)


Naranja → (1500 ,1000)
Piña → (1500 , 0)

el punto en común es 1500 porque es el máximo en los 2

Figura 44

Con 1500 Frutitríos se agota el concentrado de piña y la mitad del concentrado de naranja y con 1000 frutidúos más se termina la naranja. Este grupo respondió con un razonamiento aritmético y utilizó el registro verbal para responder.

Reformulación

El enunciado debe decir:

¿Qué punto representa el haber agotado **ambos concentrados disponibles, el de piña y el de naranja? Explica**

i. Recordando que la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8; para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y Frutidúos debe comercializar la empresa? Explica.

Observaciones

5 grupos contestaron 1500 Frutitríos y 1000 Frutidúos ya que así usa al máximo los recursos de piña y naranja.

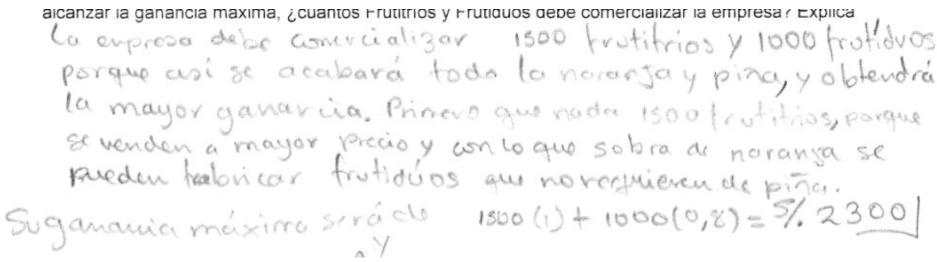
Devolución: se les comentó que según ese razonamiento no importaba la ganancia que daba cada producto. ¿qué pasaría si las ganancias fuesen S/.1 en los Frutitríos y S/.0,2 en los Frutidúos?

Un grupo contestó (1500;1000) pero no explicó el razonamiento.

Un grupo contestó que solo debería fabricar 1500 Frutitríos ya que es el producto que da mas ganancia.

Devolución Se les comentó que en esa situación sobraría naranja para fabricar frutidúos que aunque no daban la mayor ganancia, permitiría ganar más en total.

Un grupo utilizó un razonamiento aritmético para explicar su respuesta, como se muestra en la figura 45.


alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y Frutidúos debe comercializar la empresa? Explica

La empresa debe comercializar 1500 frutitrios y 1000 frutidúos porque así se acabará toda la naranja y piña, y obtendrá la mayor ganancia. Primero que nada 1500 frutitrios, porque se venden a mayor precio y con lo que sobra de naranja se pueden fabricar frutidúos que no requieren de piña.

Su ganancia máxima será de 1500 (1) + 1000(0,8) = S/. 2300

Figura 45

Los grupos mostraron respuestas intuitivas.

Sería bueno añadir otra pregunta con ganancias más diferenciadas para que noten la diferencia por ejemplo S/.1 en los Frutitríos y S/.0,2 en los Frutidúos.

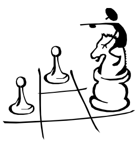
<u>ACTIVIDAD 3 (</u>Sesión 3)

Se inició la sesión repartiendo a los alumnos la actividad 2 corregida y se utilizó los 30 minutos siguientes para hacer una recapitulación de lo visto hasta el momento. Esta recapitulación se realizó con el apoyo de un material adicional (anexo 6) y se aclararon los errores o deficiencias encontradas en la actividad anterior. Se introdujo el término “Región Factible”. Ya que quedaba solo una hora de clase, lo que estaba planeado para ser primero individual y luego grupal se hizo totalmente en forma grupal. Aún así, la actividad se prolongó 30 minutos después del final de la clase. Durante la sesión se recogió la tarea 1 (solo un alumno no la entregó) y se les entregó el solucionarlo de dicha tarea. Se trabajó la sesión con los 21 alumnos presentes. La tardanza de cerca de la mitad de los alumnos perjudicó su avance, ya que no escucharon la recapitulación que sirvió a los demás para aclarar sus ideas.

Adicionalmente a los datos dados en las actividades 1 y 2, ahora se sabe que por el problema de transporte solo se puede contar con 10 000 onzas de concentrado de plátano. Para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos debe comercializar la empresa?

Recordemos que:

- la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8.
- un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
- un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.



Parte I Trabajo INDIVIDUAL

a. Completa la tabla:

	Piña	Naranja	Plátano
Frutitrío:x	8x	8x	
Frutidúo:y		12y	
	$8x \leq 12\ 000$	$8x+12y \leq 24\ 000$	

b. Encuentra la región factible , indicando las coordenadas de sus vértices

a. Todos los grupos completaron la tabla correctamente colocando:

	Piña	Naranja	Plátano
Frutitrío:x	8x	8x	**6x**
Frutidúo:y		12y	**4y**
	$8x \leq 12\ 000$	$8x+12y \leq 24\ 000$	**$6x+4y \leq 10\ 000$**

b. Todos los grupos partieron de la región factible encontrada en la actividad 2 y le añadieron la región correspondiente a la gráfica de **$6x+4y \leq 10\ 000$.**

5 grupos hallaron correctamente la región factible resultante. (Figura 46)

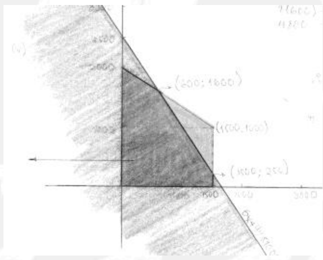


Figura 46

Dos grupos no pudieron encontrar la solución correcta ya que por un mal manejo de las escalas, la gráfica de $6x+4y=10\ 000$ no quedó ubicada en el lugar correcto. En un caso se salía de la región factible original (figura47), y en el otro pasaba por uno de sus vértices (figura48).

Devolución: Ante la dificultad mostrada por algunos grupos en cuanto al manejo adecuado de escalas, se les pidió volver a realizar la gráfica usando papel cuadriculado y manteniendo las proporciones. Esto permitió que se dieran cuenta de su error y de lo importante que resulta, en el registro gráfico, trabajar con una escala adecuada.

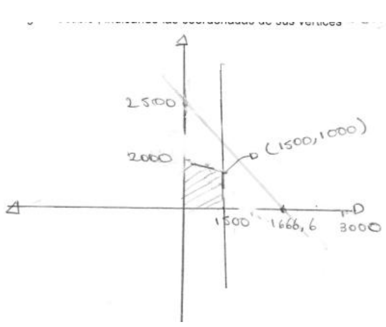


Figura 47

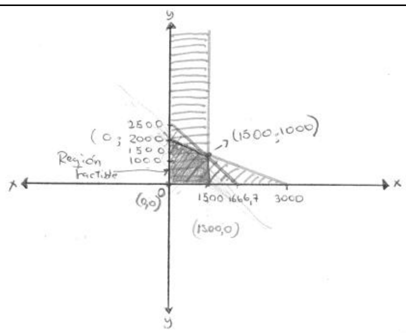


Figura 48

Un solo grupo se equivocó en hallar uno de los vértices de la región factible. Esto lo podemos interpretar como que en general se había logrado un buen manejo algebraico de los sistemas de ecuaciones.

Parte II Trabajo GRUPAL

a. Trata de encontrar todas las soluciones posibles de producción de Frutitríos y Frutidúos, que permita tener una determinada ganancia. Por ejemplo, para una ganancia de $1 000 busca combinaciones de producción que haga que esta ganancia se consiga.

Puedes usar una tabla como esta

x	y	G=x+0,8y
0	1250	1 000
1 000	0	1 000
200		1 000

Ubica dichos puntos sobre tu región factible resultante de la parte individual y observa como están dispuestos.

Completa:

Al unir los puntos se forma____

Observaciones

Todos los grupos entendieron el enunciado y llenaron la tabla correctamente. Todos utilizaron valores enteros positivos para x e y.

Un solo grupo preguntó durante la sesión si podían ser decimales.

Devolución: se tuvo que volver a insistir en recordar lo que representaban x e y.

6 de los grupos contestaron que al unir los puntos se formaba una recta y un grupo contestó que se formaba una línea.

Uno de los grupos que contestó que se formaba una recta, tenía en su grafica dibujada una curva (figura 49) lo cual denotaba que no había una coordinación entre el registro gráfico y el verbal, pero sí entre el algebraico y el verbal ya que se guiaron de la ecuación dada.

Cabe destacar el convencimiento de tener puntos de una recta, a pesar de observar en su gráfica (imperfecta) que los puntos están en una curva.

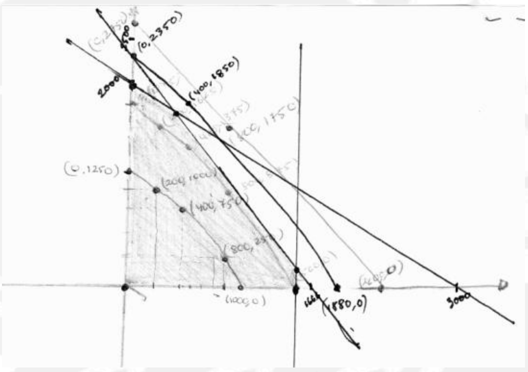


Figura 49

Los que habían hecho la gráfica muy pequeña pidieron otra hoja de trabajo para hacerla más grande y se pudieran ubicar los puntos con facilidad.

Reformulación

Para evitar que los alumnos hagan una gráfica pequeña y pierdan tiempo haciendo nuevamente la gráfica de la región factible, se debe dejar un espacio adecuado en la hoja de trabajo y pedir que los alumnos hagan una gráfica suficientemente grande.

El enunciado debe decir:

> Ubica dichos puntos sobre tu región factible resultante de la parte individual y observa cómo están dispuestos. **(La gráfica debe ser suficientemente grande.)**

b. Repite el paso anterior para G=1 500, G=1 880, G=2 200 y observa como son las gráficas resultantes. **Explica**.

Las gráficas resultantes son____

____

Observaciones

Los alumnos del grupo se dividieron el trabajo para llenar las tablas y lo hicieron correctamente.

Devolución: 2 grupos no pudieron graficar las rectas resultantes ya que no relacionaban el contenido de la tabla con puntos del plano, ante dicha dificultad se tuvo que insistir en las recomendaciones dadas en el ítem d (parte **III** – actividad 1).

Al llenar el espacio para completar todos respondieron que las rectas eran paralelas.

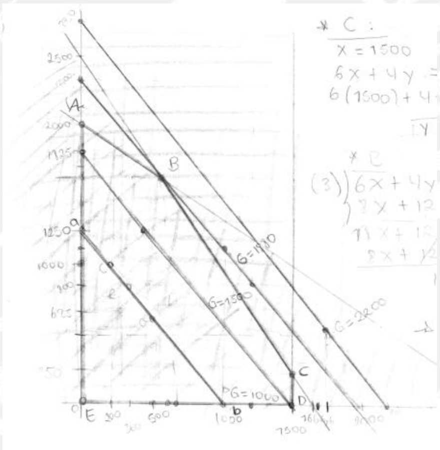


Figura 50

2 grupos solo contestaron que eran paralelas a partir de la gráfica (figura 50).

Devolución: Ante la falta de justificación en su respuesta, se les pidió que escribieran las ecuaciones de dos rectas paralelas y describieran la relación entre sus coeficientes. Sin embargo, no llegaron a dar una justificación.

Los demás grupos dieron las siguientes explicaciones:

- *Son paralelas pues tienen la misma pendiente, ya que su coeficiente es el mismo.*
- *Son rectas paralelas pero las dos primeras se encuentran dentro de la región factible.*
- *Son rectas paralelas entre sí. Son paralelas porque lo único que varía es la cantidad de frutitríos y frutidúos pero el valor de cada uno es constante y la*

ganancia varía respecto a la cantidad de cada producto y no por su valor.

- *Son rectas paralelas porque la ecuación tiene los mismos coeficientes.*
- *Son rectas paralelas que representan niveles de ganancia, x e y es la cantidad que debes fabricar de cada producto para obtener G que es lo quieres ganar.*

Reformulación

Los alumnos demoraron demasiado en esta parte y no había suficiente espacio para las otras tablas por lo que se recomienda ya no realizar el mismo procedimiento para G=1500 y poner las tablas para ser llenadas.

El enunciado debe incluir:

X	Y	1880 =x+0,8y	x	y	2200 =x+0,8y

Por lo que se nota en las respuestas, no quedó claro que es lo que tenían que explicar.

El enunciado debe decir:

Repite el paso anterior para G=1 880, G=2 200 y observa como son las gráficas resultantes. **A cada una de estas gráficas nómbralas G=1 500, G=1 880, G=2 200**

Las gráficas resultantes son_______________________ **porque**___________
____.

c. Cada una de las rectas graficadas en el paso anterior, representa un nivel de ganancia. Comparando dos de estas rectas paralelas, ¿cuál es la que representa una ganancia mayor?

Explica.

Observaciones

5 grupos contestaron que la que representa un mayor nivel de ganancia es la G=2200

2 grupos contestaron que la que representa un mayor nivel de ganancia es la G=1880 porque toca a la región factible.

El único grupo que en su explicación hizo referencia a su posición dijo:

La de 2200 porque todas las demás rectas se encuentran detrás de esta, es decir todos los valores anteriores son menores.

Reformulación

El enunciado debe decir:

c. Cada una de las rectas graficadas en el paso anterior, representa un nivel de ganancia. Comparando dos de estas rectas paralelas, ¿cuál es la que representa una ganancia mayor, **sin considerar si tal situación es posible? ¿Cuál es la que tiene un mayor valor de b (ordenada en el origen?**

d. ¿Es posible ganar $2 200? **¿Por qué?**

Observaciones

El grupo que graficó incorrectamente la G=2200 (figura 51) contestó que sí era posible, ≥denotando correspondencia entre su registro gráfico y el verbal, pero no entre el algebraico y el gráfico.

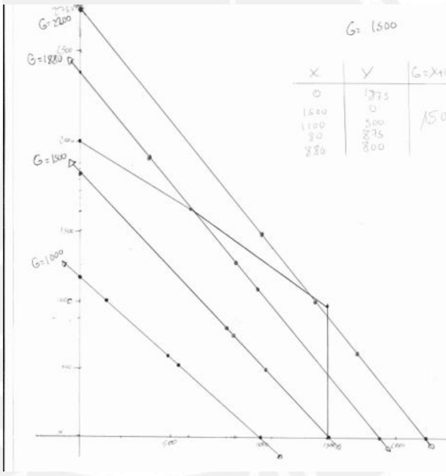


Figura 51

Los seis grupos restantes contestaron que no era posible:

Algunas respuestas fueron:

a. *No, según lo observado no es posible ganar 2200, ya que no se encuentra en la región factible, lo cual significa que excede las restricciones.*

b. *No porque rebasa todos los límites de las materias primas (no se encuentra en la región factible).*

c. *No, porque las restricciones de disponibilidad de productos para fabricar las cantidades de frutitríos y frutidúos que se requiere para ganar dicha cantidad lo impiden. Es decir, no se puede porque la recta de ganancia no se encuentra dentro de lo permitido o posible producción que está representada por la región sombreada.*

e. ¿Cuál es la ganancia máxima que se puede obtener? **Explica**

Observaciones

Un grupo no contestó la pregunta por falta de tiempo.

5 grupos llegaron a la respuesta correcta S/.1880.

Un grupo probó los vértices y respondió como se aprecia en la figura 52.

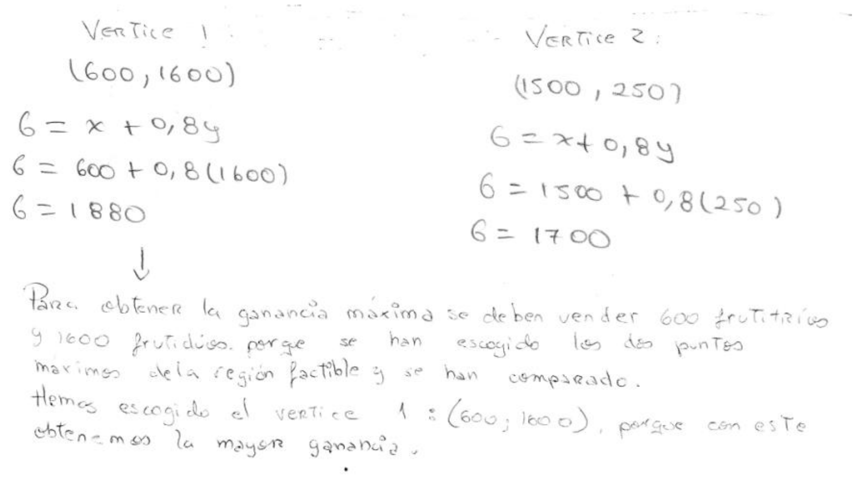


Figura 52

Esto nos podría llevar a afirmar que este grupo, por sus experiencias en las actividades 1 y 2 intuyó el algoritmo de obtener valores de la función objetivo en los vértices de la región factible y luego comparar.

Algunas respuestas:

- ✓ *Por lo visto en el gráfico, la ganancia máxima que se puede obtener es 1880 (G=1880 ya que si la recta se desplaza hacia una mayor ganancia no se encontraría en la región factible.*
- ✓ *1880 porque si se excede de esta cantidad ya no estaría incluida en la región factible.*
- ✓ *El grupo que dibujó erróneamente G=2200 dentro de la región factible, contestó que la ganancia máxima sería 2200 mostrando coherencia entre su registro grafico y verbal.*
- ✓ *Es G=1880, pues un punto de esa recta (600;1600) coincide con un vértice de la región factible.*
- ✓ *La de 1880 porque se encuentra en el límite de la posible producción de frutitríos y frutidúos. Un punto de esta recta coincide con un vértice de la región en la cual se puede dar la mayor producción de frutitríos y frutidúos. Es decir que sí se pueden fabricar la cantidad de frutitríos y frutidúos para obtener dicha ganancia teniendo en cuenta las restricciones.*

f. ¿Cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos se debe producir para obtener la ganancia máxima posible? Explica

Dos grupos no llegaron a contestar esta pregunta por falta de tiempo.
5 grupos llagaron a la respuesta correcta (600 frutitríos y 1600 frutidúos).
Devolución: un grupo presentó la gráfica que se muestra en la figura 53; sin embargo, respondió que debe producir 600 frutitríos y 1600 frutidúos. Se les preguntó porqué no el otro vértice o cualquier otro punto por donde pasa la G=1880 y comenzaron a probar puntos.

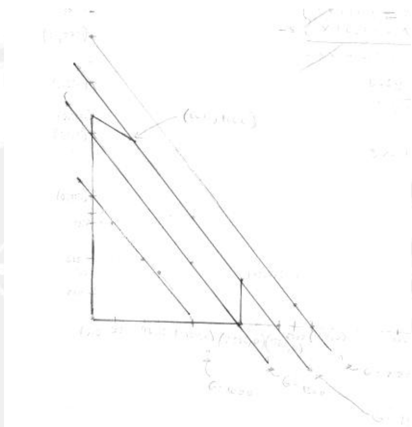


Figura 53

ACTIVIDAD 4 (Sesión 4)

Se inició la sesión repartiendo a los alumnos la actividad 3 corregida y se utilizó los 30 minutos siguientes para hacer una recapitulación de lo visto en la sesión anterior. Esta recapitulación se realizó con el apoyo de un material adicional (anexo 8) y se aclararon los errores o deficiencias encontradas en la actividad anterior quedando establecido el concepto de solución óptima, función objetivo y la propiedad siguiente:

PROPIEDAD

Si existe una única solución que maximiza o minimiza una función objetivo lineal, entonces esa solución es un vértice de la región factible.

Trabajaron primero individualmente y luego en forma grupal. Al final de la sesión se entregó a los alumnos la tarea 2 (anexo 10) para que la devuelvan desarrollada la clase siguiente Hubo 15 alumnos presentes y 6 faltos. Un alumno que estaba trabajando solo se juntó a un grupo en el que faltó uno de sus integrantes. Se trabajó con 5 grupos de tres. Los 15 alumnos presentes llegaron puntualmente escuchando la recapitulación completa.

NATACIÓN Y NUTRICIÓN

Diego, quien pertenece al equipo de natación de su colegio, ha acudido a la nutricionista para mejorar su alimentación y desempeño.
La nutricionista ha decidido que Diego debe usar diariamente 2 suplementos alimenticios llamados Nutrifort y Energyplus para suministrarle un mínimo de 400 mg de zinc para el crecimiento de los músculos, 10 mg de hierro para mejorar el transporte de Oxígeno y 40 mg de vitamina B para aumentar la energía.
Cada onza de Nutrifort contiene 30 mg de zinc, 1 mg de hierro y 2mg de vitamina B. Asimismo, cada onza de Energyplus contiene 25 mg de zinc, 0,5 mg de hierro y 5 mg de vitamina B.

Se sabe que los niños necesitan colesterol en su alimentación ya que tiene nutrientes importantes para el desarrollo cerebral. En el caso de Diego, sin embargo, la nutricionista decide minimizar la ingesta de colesterol debido a su sobrepeso.

Hallar cuántas onzas de cada suplemento debe usar Diego diariamente de modo que se minimice el contenido de colesterol y se cubran los requerimientos de zinc, hierro y vitamina B. Se sabe que cada onza de Nutrifort contiene 3 mg de colesterol y cada onza de Energyplus contiene 5 mg de colester

Parte I   Trabajo INDIVIDUAL

a. Completa la lista de pasos que seguirías para resolver el problema planteado, según lo aprendido.

- ✓ Escribir el sistema de inecuaciones que representan las restricciones del problema. (puede ayudar el elaborar una tabla).
- ✓ Graficar en el plano cartesiano la región factible (incluyendo los vértices).
- ✓ …..

Observaciones

Solo un grupo contestó en forma general utilizando el registro verbal de la siguiente manera:

3. Hallar los vértices.

4. Reemplazar en la función objetivo para hallar el óptimo.

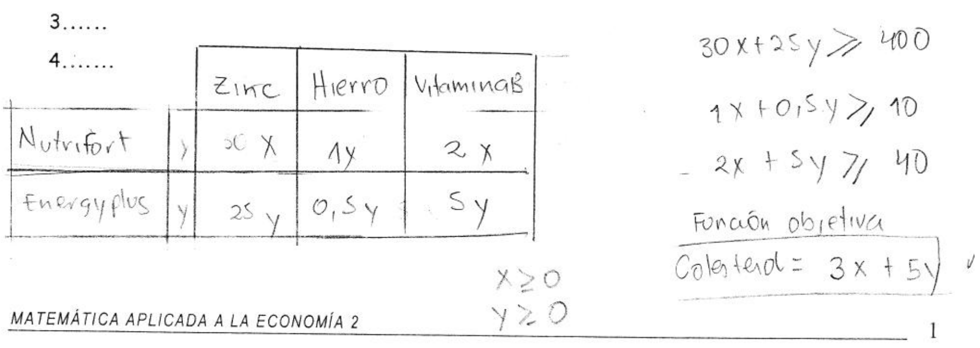
Los 4 grupos restantes empezaron a resolver el problema directamente colocando las restricciones y la función objetivo utilizando el registro algebraico.

Devolución: 3 grupos tuvieron dificultades para empezar, pues no distinguían cuál era la función objetivo en este problema. Se les sugirió que se fijen en lo que se quiere maximizar o minimizar, leyendo con cuidado el texto.

Tres de los 5 grupos empezaron definiendo las variables, los otros grupos plantearon directamente las restricciones y la función objetivo.

Todos los grupos plantearon bien las restricciones y la función objetivo.

Los 5 grupos consideraron las condiciones de no negatividad pasando correctamente del registro verbal al algebraico. (Figura 54).



3……

4…….

		Zinc	Hierro	VitaminaB
Nutrifort	x	30 x	1x	2 x
Energyplus	y	25 y	0,5 y	5 y

$30x+25y \geq 400$

$1x+0,5y \geq 10$

$2x+5y \geq 40$

Función objetiva

Colesterol = $3x+5y$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA 2   1

Figura 54

Reformulación
Eliminar esta parte y pedir a los alumnos que resuelvan directamente sin tener que hacer una lista de pasos.

b. Encuentra la solución del problema según los pasos determinados en la parte a.

Observaciones

4 de los 5 grupos hallaron correctamente la región factible mostrando un buen paso del registro algebraico al gráfico, como se aprecia en la figura 55.

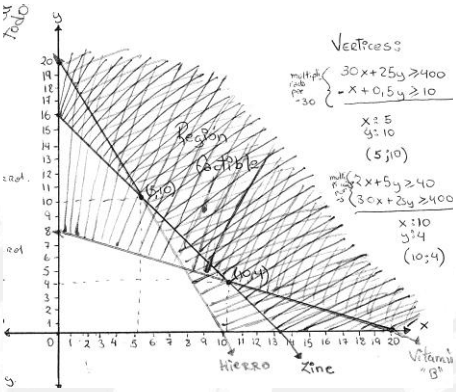


Figura 55

Un solo grupo se equivocó graficando la región factible, como se aprecia en la figura 56.

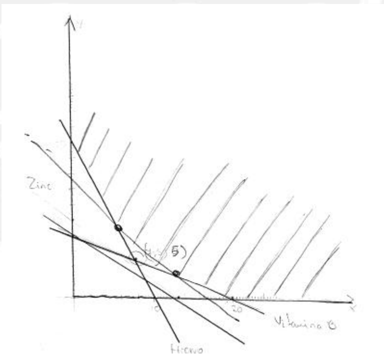


Figura 56

4 de los grupos reemplazaron los cuatro vértices en la función objetivo y encontraron el menor valor. Un grupo solo reemplazó los vértices que no estaban en los ejes coordenados.

Parte II Trabajo GRUPAL

a. Los integrantes del grupo deben comparar sus soluciones. Si hay diferencias, discutirlas hasta llegar a un consenso.

Solución óptima:

Diego debe consumir diariamente _________onzas de NUTRIFORT y________ onzas de ENERGYPLUS.

El contenido mínimo de colesterol es: ________ mg.

> **Observación**
>
> Cuatro de los cinco grupos llegaron a la respuesta correcta:
>
> Diego debe consumir diariamente _____**10**____ onzas de NUTRIFORT y____**4**____onzas de ENERGYPLUS.
>
> El contenido mínimo de colesterol es: ____**50**____mg.

b. ¿Cuál es la principal diferencia entre las regiones factibles encontradas en la actividad 3 y 4?

> **Observaciones**
>
> Todos los grupos notaron la diferencia describiéndola así:
>
> *a. La principal diferencia es que la región factible de la actividad 3 se encuentra claramente delimitada por las restricciones y está encerrada. En cambio en la actividad 4 el área posible de la región restringida no se encuentra delimitada en cierta parte.*
>
> *b. La principal diferencia entre las regiones factibles de la actividad 3 y 4 es que esta es una región no acotada, es decir no posee un límite máximo.*
>
> *c. La diferencia es que la región factible de la actividad 3 es limitada, mientras que la de la actividad 4 es, por así decirlo, infinita, no tiene límite.*
>
> *d. La principal diferencia es que en la tercera actividad la región factible tiene límites en cambio en la cuarta actividad la región factible es abierta, no está determinada en todos sus lados (figura 57).*
>
> *e. La región factible de la actividad 3 es finita, mientras que la de la actividad 4 es infinita.*

Es interesante notar que los estudiantes usan de modo intuitivo conceptos como finito/infinito, acotado, no acotado, abierto/ no abierto.

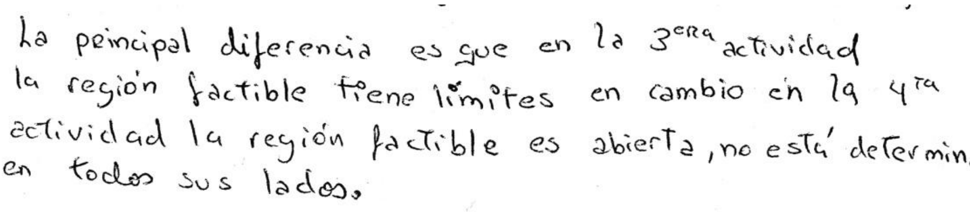

La principal diferencia es que en la 3era actividad la región factible tiene limites en cambio en la 4ta actividad la región factible es abierta, no está determin en todos sus lados.

Figura 57

c. ¿Cuál es la principal diferencia en cuanto a lo que se quiere lograr de la función objetivo?

Observaciones

Las respuestas fueron:

- ✓ *En la actividad 3 la función objetivo buscaba la ganancia máxima, en cambio en la actividad 4 lo que se busca es la cantidad mínima de colesterol. Por tanto en la 3 se busca el punto máximo posible y en la segunda el punto mínimo posible, ambos teniendo en cuenta las restricciones*.
- ✓ *La principal diferencia es que lo que se quiere lograr en esta actividad con la función objetivo es minimizar una cantidad (colesterol), mientras que en la anterior buscábamos maximización.*
- ✓ *En la actividad 3 se buscaba hallar la función objetivo en función de la ganancia y esa es una solución óptima máxima. En tanto que en la actividad 4 se busca hallar la función objetivo en función del colesterol que es una solución óptima mínima.*
- ✓ *En la actividad 3 por ser limitada se puede hallar su mínimo como **su** máximo valor, en cambio, en la cuarta actividad al ser ilimitado por un lado tan solo se puede hallar su mínimo valor siendo el máximo no determinado (figura 58).*
- ✓ *En la región factible de la actividad 3 se quiere lograr el máximo (ganancia), en cambio en la actividad 4 se quiere lograr el mínimo (colesterol).*

Es interesante notar la coordinación entre el registro grafico y el verbal que en este caso los está llevando a conclusiones intuitivas que son matemáticamente correctas y que van más allá de lo que se planeó como objetivo de aprendizaje.

En la actividad 3°, como al ser limitada se puede hallar su mínimo como máximo valor, en cambio, en la 4°. al ser ilimitado por un lado tan solo se puede hallar su mínimo valor siendo el máximo no determinado.

Figura 58

d. Para la solución encontrada:

¿Diego consumiría exactamente la mínima cantidad de zinc, hierro y vitamina B indicada por la nutricionista?

Observaciones

El grupo que graficó erróneamente contestó:

No consumirá la cantidad mínima de zinc que le indicó la nutricionista, esto se debe a que el punto en el que se consumiría el mínimo de colesterol no interseca la recta del zinc, solo las rectas de vitamina B y la de hierro.

Devolución: Tres grupos solo se refirieron a que cumplían con el mínimo de zinc y vitamina B porque el punto pertenecía a estos bordes. Se les sugirió calcular la cantidad de hierro consumida para la solución encontrada y ver si cumple exactamente con el mínimo. Ver luego que relación tiene esta situación con la ubicación del punto en la región factible.

Un solo grupo se refirió correctamente a las tres sustancias (figura 59).

Sí, pues como se aprecia en el gráfico estamos en el borde del consumo mínimo de zin y de Vitamina B. Sin embargo, se cumple más del mínimo del Hierro. Como consecuencia se cumple la cantidad mínima de colesterol (50 mg).

MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA 2 3

Figura 59

CAPÍTULO 6: ANÁLISIS A POSTERIORI

Esta fase se basa en los comportamientos esperados, el conjunto de datos recolectados en la fase de experimentación, así como en las producciones de los alumnos.

Se hará una comparación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori de la situación didáctica, comparando los comportamientos esperados con lo que realmente sucedió en la clase.

Finalmente se presentará la situación didáctica reformulada en base a lo encontrado en los análisis realizados.

6.1 COMPARACIÓN ENTRE LOS COMPORTAMIENTOS ESPERADOS, Y LOS ENCONTRADOS EN LA EXPERIMENTACIÓN.

El siguiente cuadro muestra, para cada pregunta de las actividades, la comparación entre los comportamientos esperados y los observados en la experimentación. Se incluye el análisis de las congruencias o discrepancias encontradas.

ACTIVIDAD 1

PARTE I TRABAJO INDIVIDUAL

Ítem	Comentario
a	▪ Se esperaba que los alumnos no demoraran en entender lo que se les pedía y realizaran la siguiente operación: 3x8+5x12=84 onzas, pero demoraron en entender el enunciado y al hacer el cálculo dos de los siete grupos no totalizaron. Merece especial atención la dificultad en entender lo que se les pide. Debe tenerse muy en cuenta esta deficiencia en el área verbal para lograr un equilibrio adecuado entre la parte interpretativa y operativa al proponer problemas.
b	▪ Tal como se esperaba, después de responder a la parte a, hicieron rápidamente el cálculo 1000x8+1000x12=20000 y se dieron cuenta que no sobrepasaba la cantidad disponible de concentrado de naranja que era 24000 onzas. Por primera vez tenían que justificar su respuesta y usaron expresiones como suficiente, no supera, menos de la máxima.

	Predominó el registro verbal y solo dos grupos acompañaron su explicación con el registro algebraico $20\ 000 \leq 24\ 000$, esto podría deberse a la poca práctica en utilizar el registro algebraico para expresar una justificación.
c	▪ Tal como se esperaba realizaron el siguiente cálculo 1500x8+1000x12=24000 y se dieron cuenta que usarían toda la cantidad disponible de concentrado de naranja que es 24000 onzas. ▪ A diferencia de lo que se consideró probable, no tuvieron dificultad en entender la expresión “con un máximo”. Podría deberse a que en la clase anterior se revisaron estas expresiones como parte de los conceptos previos.
d	▪ A diferencia de lo que se consideró probable, los alumnos no tuvieron dificultad para expresar el total de concentrado de naranja usando variables, cuando en lugar de información numérica sobre frutidúos y frutitríos a fabricar, se pidió determinar el total de concentrado de naranja para x frutidúos e y frutitríos. El hecho que algunos grupos usaran una variable adicional para igualarla a 8x + 12y nos hace pensar en el manejo intuitivo del concepto de función con dos variables. Cabe mencionar que entre los temas previos se había trabajado funciones con solo una variable.
e	▪ Tal como se esperaba, los alumnos expresaron la limitación de concentrado de naranja como: $8x+12y \leq 24000$, pasando correctamente del lenguaje verbal al lenguaje algebraico. ▪ Se pensó que era probable que algunos alumnos usen el símbolo < en lugar del símbolo $\leq$, pero esto no ocurrió. Consideramos que fue de gran ayuda el haber trabajado previamente la solución de una inecuación con dos variables, ligado a contextos reales. Esto confirma la importancia de estudiar los conceptos previos más relacionados con la P.L. en marcos contextualizados.
f	▪ Tal como se esperaba, la mayoría contestó $x \geq 0$ e $y \geq 0$, pero al no pedir una explicación solo dos grupos incluyeron justificación. ▪ Habíamos considerado que era probable que algunos alumnos escriban x>0 e y>0, pero esto no ocurrió, lo cual consideramos que revela una buena relación entre el registro verbal y el algebraico en el manejo de desigualdades estrictas y no estrictas. Posiblemente, esto sea consecuencia de haber prestado especial atención a este punto al examinar los errores en que habían incurrido en la prueba de conocimientos previos. ▪ Ocurrió también que un grupo escribió x<0 e y<0. Esto revela que, aunque

	minoritariamente, subsistían las dificultades de coordinación entre registros verbales y algebraicos en el manejo de desigualdades.
g	▪ Tal como se esperaba, la mayoría de los alumnos pudo realizar cada una de las gráficas correctamente, pero mostraron un desconcierto inicial al tener que representar las tres gráficas en un mismo plano cartesiano. Consideramos que este desconcierto es propio de situaciones en las que se ha hecho una modificación en la variable didáctica. Esto nos lleva a pensar que sería preferible que al considerar la variable microdidáctica “número de restricciones”, se incluyan dos casos más, estando entre los primeros las restricciones de no negatividad. El grupo en el cual subsistían las dificultades de coordinación entre el registro verbal y algebraico, mostró también sus dificultades para la coordinación con el registro gráfico, pues no hubo consistencia entre ningún par de registros explicitados por el grupo. ▪ En algún caso, a pesar de no tener cada gráfica correcta, llegaron a la gráfica resultante correctamente, pudiendo denotar una intuición de que la gráfica debería estar en el primer cuadrante.
h	▪ Lo realizado por los alumnos correspondió a lo que se esperaba que hagan. Se esperaba que algunos alumnos utilicen la expresión encontrada en e para reemplazar x=600 y encuentren que el máximo número de frutidúos (y) que se puede fabricar es 1600. Tres grupos trabajaron de esta forma. ▪ Se esperaba que algunos alumnos calculen por diferencia $600\times 8=4800$; 24000-4800= 19200; $19200\div 12=1600$. Un grupo trabajó de esta forma, mostrando que predominaba en ellos el pensamiento algebraico sobre el aritmético. ▪ Se consideró probable que algunos alumnos reemplacen y=600 y lleguen así a una respuesta equivocada (2100). Esto no ocurrió, lo que muestra que en este momento tenían claro qué significaba cada una de las variables.
i	▪ Al igual que en el ítem anterior, la mayoría trabajó algebraicamente. ▪ Aunque se esperaba que algunos alumnos utilizaran la grafica encontrada en g para ver que cuando “x” es 3000, “y” vale 0, ningún grupo lo hizo. Esto podemos interpretarlo como una confirmación de la dificultad para manejar espontáneamente la coordinación entre registros. En este caso no se les pidió explícitamente que usaran el registro gráfico para ilustrar su respuesta y no hubo grupo alguno que utilizara la región ya graficada.

j	▪ Las dificultades observadas y los comentarios correspondientes son similares a los hechos en el ítem i.

TRABAJO GRUPAL 

PARTE II

Comentario

Tal como se esperaba, las gráficas eran muy similares, pero cuando había discrepancias los alumnos llamaban al profesor para que les diga cuál era lo correcto. Se les guiaba con repreguntas y finalmente llegaron a entregar todos los grupos respuestas correctas. En esta etapa la validación estuvo presente, al tener que justificar sus procedimientos para convencer a sus compañeros.

PARTE III

Ítem	**Comentario**
a	▪ Se esperaba que luego de leer cuidadosamente el enunciado los alumnos respondan haciendo la siguiente operación $1\times 6+0{,}8\times 4=\$9{,}2$. Sin embargo se demoraron en entender este nuevo dato y algunos no sumaron ambas cantidades. ▪ Nuevamente se notó que sufren una momentánea desorientación ante información nueva, más aún si está dada en forma verbal.
b	▪ Se esperaba que los alumnos plantearan la expresión $1x+0{,}8y$, pero en forma similar a lo que ocurrió en la parte d del trabajo individual, algunos alumnos igualaron la expresión a una letra.
c	▪ En general los alumnos no utilizaron la expresión $1x+0{,}8y$ para hallar las ganancias, sino que hacían el cálculo para cada caso. ▪ Se consideró probable que algunos alumnos no supieran justificar si existe un caso en que la ganancia sea mayor, pero ocurrió que muy pocos dijeron que no, pero sin justificación alguna. Esto puede denotar que tenían una intuición del óptimo pero que existen deficiencias al obtener conclusiones interrelacionándola con el lenguaje

	formal.
d	▪ Tal como se consideró probable, los alumnos tuvieron dificultad para ubicar los puntos sobre la gráfica, especialmente los que se encontraban cercanos a la recta inclinada o sobre ella ya que no sabían si poner los puntos encima, debajo o sobre esta recta. Mas aún, no entendían en un comienzo, que tenía que ver x e y con puntos de la gráfica y menos que había una relación entre su ubicación en la gráfica con el haberse agotado un insumo. Se encontraron nuevamente ante una situación a-didáctica al empezar a manejar la tercera variable didáctica (casos E y F1)
e	▪ Como se esperaba 6 de los 7 grupos recomendaron fabricar 3000 frutitríos y 0 frutidúos. ▪ No utilizaron el registro grafico.

ACTIVIDAD 2

TRABAJO GRUPAL 

Ítem	**Comentario**
a	▪ Tal como se esperaba, los alumnos calcularon 5x8=40 onzas, pero solo dos grupos comentaron con palabras que los frutidúos no necesitaban piña. Esta parte la hicieron bastante rápido, ya que era un procedimiento similar al utilizado en la actividad 1. Persiste el poco uso del lenguaje para justificar sus respuestas.
b	▪ Tal como se consideró probable, algunos alumnos se sorprendieron al obtener una expresión sin la variable y. ▪ Algunos grupos decían que y valía 0, ya que los Frutidúos no necesitaban piña. No tenían claro que representaba y. Podría incluirse una pregunta inicial en la segunda actividad para enfatizar en el significado de cada variable. ▪ En la programación lineal es muy importante entender que significa cada variable, especialmente para interpretar adecuadamente la región factible.
c	▪ La mayoría de los alumnos plantearon $8x \leq 12000$, como se esperaba. Solo dos grupos despejaron x, lo cual no les permitía ver en el plano cartesiano los puntos que pertenecían a su conjunto solución. Esto podría deberse a

	que no tenían claro que el valor 8 podía pasar a dividir o a que no le veían la utilidad en ese momento.
d	▪ Se esperaba que los alumnos planteen las cuatro restricciones que se tienen hasta el momento $8x+12y\leq 24000$, $8x\leq 12000$. $x\geq 0$ e $y\geq 0$, pero algunos grupos confundieron los la orientación de las desigualdades, llegando a graficas erradas. ▪ Al tener que graficar todas las restricciones simultáneamente se enfrentaron a una variación de la variable didáctica (caso B), pero después de algunos intentos lo hicieron correctamente. ▪ La mayoría de alumnos tuvieron dificultades al encontrar la escala adecuada parra visualizar la zona solución.
e	▪ Se esperaba que los alumnos resuelvan el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para encontrar el vértice (1 500;1 000), pero la mayoría a pesar de que sabía resolver el sistema, no lo relacionaba con el punto buscado en la gráfica. Esto podría ser una muestra de su falta de coordinación entre el registro algebraico y el gráfico.
f	▪ Solo dos grupos ubicaron el punto (1200;1200) correctamente, pero seguían teniendo dificultades para interpretar a partir del gráfico que en ese punto se había agotado el concentrado de jugo de naranja disponible. ▪ La mayoría realizó el cálculo numérico, verificando que se encontraba en el límite de la restricción. ▪ Podría haber sido mejor que marquen en la gráfica un punto donde se agote el concentrado de naranja ya que la pregunta no favorecía una interpretación gráfica.
g	▪ Tal como se esperaba, los alumnos ubicaron el punto (1500;1800) correctamente, pero solo un grupo utilizó una interpretación grafica para justificar su respuesta. ▪ Podría haber sido mejor que marquen en la gráfica un punto donde se agote el concentrado de piña ya que la pregunta no favorecía una interpretación gráfica.
h	▪ Tal como se esperaba, los alumnos encontraron que ambos concentrados se agotaban en el punto (1500;1000) a partir de la grafica realizada en c. Este tipo de preguntas sí favorece una interpretación gráfica y habría que

	enfatizar en ellas. Se enfrentaron ante el caso F2 de la variable didáctica teniendo que modificar sus procedimientos. ▪ Tuvieron dificultades para justificar su respuesta en el registro verbal.
i	▪ Se esperaba que los alumnos encuentren distintas ganancias probando puntos en la expresión encontrada en la actividad 1, pero ningún grupo trabajó de esta manara, quizás porque el probar puntos no lo consideraban un método matemático. ▪ Intuitivamente contestaron que se trataba del punto (1500, 1000) a partir de la respuesta dada en el ítem anterior y sin considerar los datos de la ganancia. No es fácil para ellos relacionar las ganancias con la cantidad de insumo utilizado. En general en la P.L. no es muy natural relacionar la función objetivo con la región factible. Sería bueno incluir una pregunta donde las ganancia máxima no se de en ese punto para mostrarles que no solo depende de que se agoten los dos insumos simultáneamente.

ACTIVIDAD 3

PARTE I TRABAJO INDIVIDUAL 

Ítem	**Comentario**
a	▪ Tal como se esperaba, los alumnos plantearon $6x+4y \leq 10\,000$ de forma similar a lo hecho en la actividad 2. Debido a la falta de tiempo, lo que estaba planeado para que sea primero individual y luego grupal, se hizo directamente en forma grupal. ▪ En esta etapa ya no confundían tanto las variables y eran pocas las oportunidades que pedían ayuda al profesor.
b	▪ Al hacer una nueva modificación a la variable didáctica (caso C1) los alumnos mostraron un desconcierto inicial, especialmente porque tenían que tener cuidado con la escala utilizada. Luego de algunos intentos y discusiones entre ellos, la mayoría llegó a la gráfica correcta. Cada vez se veía una mejor coordinación entre el registro algebraico y el gráfico. ▪ Se consideró probable que algunos alumnos presenten problemas de cálculo para hallar el nuevo vértice (600;1600), pero solo un grupo tuvo

	dificultades en hacerlo. Esto mostraba que ya relacionaban correctamente la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables, con su interpretación gráfica (intersección de rectas).

PARTE II TRABAJO GRUPAL

Ítem	**Comentario**
a	▪ Tal como se esperaba, los alumnos llenaron la tabla con otros valores enteros. Solo un grupo preguntó si podía usar valores decimales para x o y, lo que mostraba que no tenía claro aún el significado de cada variable. ▪ Vemos nuevamente que en los problemas de P.L. es indispensable tener claro la definición de las variables.
b	▪ Como se esperaba, llenaron la tabla en forma similar a lo que hicieron en la parte a. Tuvieron dificultades para notar y especialmente para explicar que las rectas eran paralelas. ▪ La mayoría de alumnos no relacionaba los coeficientes de las ecuaciones o su pendiente, con las rectas que resultaban aparentemente paralelas en su dibujo. ▪ Al tener que justificar su respuesta, se notó la existencia de una intuición pero también la falta de un lenguaje formal y rigor para explicar sus resultados. ▪ Aquí se notó la falta de coordinación entre el registro verbal, algebraico y el gráfico. ▪ En la resolución de problemas de P.L. por el método gráfico es fundamental que el alumno tenga claro que representan estas líneas paralelas. Vemos que sería necesario que los alumnos expliquen con palabras qué significado tiene cada una de estas rectas para que no se vuelva algo totalmente mecánico.
c	▪ A diferencia de lo que se esperaba, los alumnos no respondieron que era la que se encontraba más alejada del origen, sino solo la G=2200. No utilizaron el registro gráfico para dar una respuesta a pesar que toda esta

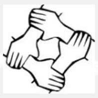
	etapa del método estaba en ese registro. ▪ Esto podría ser una nueva muestra de que el registro gráfico es el menos manejado por los alumnos, o que la pregunta no estaba claramente formulada.
d	▪ Se esperaba que algunos alumnos respondan que no, ya que no toca a la región factible o que se pasa de los límites permitidos. La mayoría de los alumnos formularon respuestas bastante bien elaboradas, mostrando una mejora en el uso del lenguaje formal para explicar sus conclusiones. ▪ Vemos que el plantear problemas de P.L. a los alumnos e insistir en sus explicaciones en momentos adecuados como este, puede contribuir a que mejoren en interrelacionar su intuición optimizadora con el lenguaje formal al elaborar respuestas.
e	▪ A diferencia de lo que se consideró probable, solo un grupo tuvo dificultad para ver que G=1 880 era la mayor posible y probó los vértices. Las justificaciones dadas, al igual que en el ítem anterior estuvieron bastante bien formuladas.
f	▪ Tal como se esperaba los alumnos que respondieron correctamente al ítem anterior no tuvieron dificultad para responder: 600 frutitríos y 1 600 frutidúos. ▪ Los que no tuvieron un buen manejo de las escalas, obtuvieron gráficas que no les permitieron visualizar la respuesta correcta. Nuevamente vemos que en la resolución de problemas en P.L. por el método gráfico, el buen manejo de las escalas es fundamental.

ACTIVIDAD 4

PARTE I TRABAJO INDIVIDUAL 

Ítem	**Comentario**
a	▪ Se esperaba que los alumnos completaran la lista, añadiendo pasos como los siguientes: ✓ Definir la función objetivo. ✓ Evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices. ✓ Escoger el máximo o mínimo valor de la función objetivo, dependiendo del problema.

	Sin embargo, la mayoría de los alumnos empezó la resolución sin determinar los pasos. ▪ Es probable que la pregunta no estuviese muy clara o que los alumnos tuviesen dificultades para expresar en forma verbal el procedimiento utilizado al resolver un problema de P.L. ▪ Aunque ya era la cuarta actividad, algunos grupos seguían teniendo dificultades para determinar las variables y para entender cuál era la función objetivo en el problema. Se esperaba a que estas alturas de la secuencia didáctica, las dificultades en ese sentido fueran menores.
b	▪ Se esperaba que solo algunos alumnos resolvieran trazando rectas paralelas que representaran a la función objetivo, sin embargo todos los grupos evaluaron la función objetivo en los vértices. ▪ A este nivel se hace difícil la demostración del porqué el óptimo, si existe, se encuentra en un vértice de la región factible, ya que requiere conceptos de álgebra lineal que los alumnos no manejan.

PARTE II TRABAJO  GRUPAL

Ítem	**Comentario**
a	▪ Se esperaba que todos los grupos pudieran llegar a la solución correcta discutiendo con argumentos, pero un grupo no pudo terminar por falta de tiempo.
b	▪ Se esperaba que los alumnos observen y expresen con sus propias palabras que la mayor diferencia es que esta región no está totalmente limitada en sus bordes, sin embargo sorprendió el hecho de que usaran de forma intuitiva conceptos como finito/infinito, acotado, no acotado, abierto/ no abierto. En este punto faltó hacer unas entrevistas individuales para indagar en qué sentido usaron estos términos.
c	▪ Se esperaba que los alumnos respondieran que lo que se quería encontrar era un valor mínimo y ya no un máximo, sin embargo las respuestas sorprendieron al llegar a conclusiones intuitivas que eran matemáticamente correctas como se muestra en la figura 58.

d	▪ Se esperaba que los alumnos pudieran llegar a determinar que Diego consumiría la mínima cantidad de zinc y vitamina B, pero más del mínimo de hierro exigido por la nutricionista, pero solo un grupo llegó a la respuesta correcta. ▪ Se esperaba que algunos alumnos llegaran a la respuesta gráficamente, y otros algebraicamente, pero todos utilizaron el registro gráfico, mostrando que este tipo de preguntas en P.L. induce a los alumnos a utilizar el registro gráfico. Se debería incluir preguntas de este tipo al trabajar el tema P.L. por el método gráfico si se quiere que los alumnos no solo resuelvan mecánicamente los problemas, sino que interpreten las gráficas encontradas.

Observaciones:

Congruencias entre lo esperado y lo observado:

- ✓ Dificultad en la coordinación entre los registros verbal y algebraico al diferenciar desigualdades estrictas y no estrictas.
- ✓ Dificultad para relacionar los valores de las variables x, y con un punto específico del plano cartesiano, siendo evidente la falta de experiencias previas en el manejo del registro gráfico y en la coordinación de éste con el algebraico, lo cual es coherente con el poco énfasis que se le pone en la educación básica al registro gráfico.
- ✓ Dificultad para obtener conclusiones, interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal. Muestra de lo mencionado se tiene al observar las deficiencias para justificar principalmente en qué punto se encuentra el óptimo en un problema de P.L.
- ✓ Dificultad para ubicar un punto sobre la gráfica, al mencionar las condiciones que cumple dentro del contexto real del problema.
- ✓ Dificultad para interpretar el significado de un punto ya determinado de la gráfica, dentro del contexto real del problema.

Tal como se esperaba, las dificultades mencionadas fueron disminuyendo a medida que avanzaban las actividades.

Incongruencias entre lo esperado y lo observado:

- ✓ Poca claridad sobre el significado de las variables en el contexto del problema incluso en las actividades finales. Podría ser conveniente incluir preguntas que induzcan al alumno a entender y verbalizar este significado.
- ✓ Demora, más allá de la esperada, en entender los enunciados contextualizados, lo que nos hace pensar que hay que insistir mucho más en proponer a los alumnos problemas con esta característica y considerar este factor en el diseño de las actividades.
- ✓ Habían preguntas que se esperaba que se resuelvan usando el registro gráfico, pero los alumnos las resolvieron algebraicamente en forma correcta, lo cual nos hace pensar que no eran las preguntas idóneas para inducir al alumno a usar dicho registro.
- ✓ Poco manejo de escalas adecuadas al realizar un gráfico en el plano cartesiano. Podría ser conveniente incluir este tema como un concepto previo al estudio de la P.L.
- ✓ Poca claridad del significado del concepto “pendiente de una recta”, y sus Particularidades cuando se habla de rectas paralelas.

No hubo suficiente tiempo para aplicar entrevistas que hubiesen permitido indagar un poco más en relación a sus respuestas.

Estos aspectos mencionados, deberían tenerse en cuenta en futuras investigaciones relacionadas con temas afines a la P.L.

6.2 SITUACIÓN DIDÁCTICA REFORMULADA

Teniendo en cuenta el análisis a priori, los comportamientos observados durante la experimentación y la comparación entre ambos, realizamos algunos cambios a la situación diseñada originalmente, cambios cuya justificación se explicó en los análisis mencionados.

<u>ACTIVIDAD 1</u>

NUEVOS JUGOS…

La empresa **“FRESH”** dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.

Frutitrío: piña, naranja y plátano

Frutiduo: naranja y plátano

Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.

Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.

La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.

Parte I Trabajo INDIVIDUAL

a. ¿Cuántas onzas de concentrado de jugo de naranja, **en total**, se necesita para fabricar 3 Frutitríos y 5 Frutidúos?

b. ¿Es posible fabricar 1 000 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

c. ¿Es posible fabricar 1 500 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

d. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de naranja, **en total**, se usará al fabricar “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

e. Utilizando lo encontrado en d, ¿cómo representarías la restricción que se tiene por no ser temporada alta de la naranja?

f. ¿Podrían “x” e “y” tomar valores negativos? **¿Por qué?** Escribe las desigualdades que representan estas restricciones.

g. Grafica en el mismo plano cartesiano **cada una de** las restricciones encontradas en las partes e y f. **Encuentra luego la intersección de dichas gráficas.**

h. Si se fabrica 600 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar? **Explica.**

i. Si se fabrica 3 000 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar? **Explica.**

j. Si se fabrica 2 000 Frutidúos, ¿cuántos Frutitríos como máximo se pueden fabricar? **Explica.**

Trabajo GRUPAL

Parte II

Los integrantes del grupo deben comparar el resultado que obtuvieron la parte g del trabajo individual, llegando a tener una única respuesta. A partir de esta respuesta se trabajará el resto de la actividad.

Parte III

Se sabe que la ganancia **neta** al vender un Frutitrío es de S/.1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de S/.0,8.

a. ¿Cuál es la ganancia **total** que se obtiene al vender 6 Frutitríos y 4 Frutidúos?

b. ¿Cuál es la ganancia **total** que se obtienen al vender “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

c. Encuentra la ganancia que se obtendría en cada uno de los casos propuestos en las preguntas h, i, j de la parte individual e indica en qué caso ha sido mayor. ¿Habrá algún otro caso en que la ganancia sea mayor que las encontradas? **Explica.**

d. ¿En cuál de los casos **a, b y c** analizados en la parte individual, se ha agotado la cantidad de concentrado de naranja disponible? **Explica**. Ubica dichos puntos que **representan dichos casos** sobre la gráfica resultante de parte **g (individual).**

e. Si no es indispensable fabricar ambos tipos de envases ¿Qué cantidad de cada producto le recomendarías al fabricante para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál sería dicha ganancia? **Explica.**

<u>ACTIVIDAD 2</u>

Trabajo GRUPAL

Si además de los datos dados en la actividad 1, se sabe que por problemas de transporte se tiene un máximo de 12 000 onzas de concentrado de piña para la fabricación de los Frutitríos y Frutidúos,

a. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará, **en total**, al fabricar 5 Frutitríos y 6 Frutidúos? **Explica.**

b. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará, **en total**, al fabricar “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

c. Utilizando lo encontrado en b, ¿cómo representarías la limitación de concentrado de piña que se tiene por problemas de transporte?

d. Escribe el conjunto de restricciones que se tienen hasta el momento. Encuentra **la región** del plano cartesiano donde se cumplen todas las condiciones simultáneamente.

e. Encuentra los vértices de la región **graficada** en la parte d. **Explica.**

f. Ubica el punto (1 200; 1 200) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de jugo de naranja disponible? Explica.

g. Ubica el punto (1 500; 800) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de piña disponible? Explica.

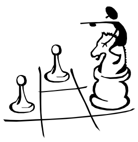
h. ¿Qué punto representa el haber agotado **ambos concentrados disponibles, el de piña y el de naranja? Explica.**

i. Recordando que la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8; para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y Frutidúos debe comercializar la empresa? Explica.

ACTIVIDAD 3

Adicionalmente a los datos dados en las actividades 1 y 2, ahora se sabe que por el problema de transporte solo se puede contar con 10 000 onzas de concentrado de plátano. Para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos debe comercializar la empresa?
Recordemos que:

- la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8.
- un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
- un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.



Parte I   Trabajo INDIVIDUAL

a. Completa la tabla:

	Piña	Naranja	Plátano
Frutitrío:x	8x	8x	
Frutidúo:y		12y	
	8x<=12 000	8x+12y<=24 000	

b. Encuentra la región factible , indicando las coordenadas de sus vértices

PARTE II   Trabajo GRUPAL

a. Trata de encontrar todas las soluciones posibles de producción de Frutitríos y Frutidúos, que permita tener una determinada ganancia. Por ejemplo, para una ganancia de $1 000 busca combinaciones de producción que haga que esta ganancia se consiga.

Puedes usar una tabla como esta

x	y	G=x+0,8y
0	1250	1 000
1 000	0	1 000
200		1 000

Ubica dichos puntos sobre tu región factible resultante de la parte individual y observa como están dispuestos. **(La gráfica debe ser suficientemente grande.)**

Completa:

Al unir los puntos se forma____

b. Repite el paso anterior para G=1 880, G=2 200 y observa como son las gráficas resultantes. **A cada una de estas gráficas nómbralas G=1 500, G=1 880, G=2 200**

x	y	1880 =x+0,8y	x	y	2200 =x+0,8y

Las gráficas resultantes son___________________________ **porque**_____________

____.

c. Cada una de las rectas graficadas en el paso anterior, representa un nivel de ganancia. Comparando dos de estas rectas paralelas, ¿cuál es la que representa una ganancia mayor, **sin considerar si tal situación es posible**? Explica.

d. ¿Es posible ganar $2 200? ¿Por qué?

e. ¿Cuál es la ganancia máxima que se puede obtener? Explica.

f. ¿Cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos se debe producir para obtener la ganancia máxima posible? Explica

ACTIVIDAD 4

NATACIÓN Y NUTRICIÓN

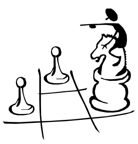
Diego, quien pertenece al equipo de natación de su colegio, ha acudido a la nutricionista para mejorar su alimentación y desempeño.

La nutricionista ha decidido que Diego debe usar diariamente 2 suplementos alimenticios llamados Nutrifort y Energyplus para suministrarle un mínimo de 400 mg de zinc para el crecimiento de los músculos, 10 mg de hierro para mejorar el transporte de Oxígeno y 40 mg de vitamina B para aumentar la energía.

Cada onza de Nutrifort contiene 30 mg de zinc, 1 mg de hierro y 2mg de vitamina B. Asimismo, cada onza de Energyplus contiene 25 mg de zinc, 0,5 mg de hierro y 5 mg de vitamina B.

Se sabe que los niños necesitan colesterol en su alimentación ya que tiene nutrientes importantes para el desarrollo cerebral. En el caso de Diego, sin embargo, la nutricionista decide minimizar la ingesta de colesterol debido a su sobrepeso.

Hallar cuántas onzas de cada suplemento debe usar Diego diariamente de modo que se minimice el contenido de colesterol y se cubran los requerimientos de zinc, hierro y vitamina B. Se sabe que cada onza de Nutrifort contiene 3 mg de colesterol y cada onza de Energyplus contiene 5 mg de colesterol.



Trabajo INDIVIDUAL

PARTE I

Encuentra la solución del problema según los pasos **determinados en las sesiones anteriores**.

Trabajo GRUPAL

PARTE II

a. Los integrantes del grupo deben comparar sus soluciones. Si hay diferencias, discutirlas hasta llegar a un consenso.
   Solución óptima:
   Diego debe consumir diariamente _________onzas de NUTRIFORT y________ onzas de ENERGYPLUS.
   El contenido mínimo de colesterol es:________ mg.

b. ¿Cuál es la principal diferencia entre las regiones factibles encontradas en la actividad 3 y 4?

c. ¿Cuál es la principal diferencia en cuanto a lo que se quiere lograr de la función objetivo?

d. Para la solución encontrada:
   ¿Diego consumiría exactamente la mínima cantidad de zinc, hierro y vitamina B indicada por la nutricionista? Explica

Tiempos utilizados en la aplicación de la secuencia didáctica.

SESIÓN	**INSTRUMENTO**	**FORMA DE TRABAJO**	**DURACIÓN**	**Anexo**
Previa a sesión 1	**Conocimientos previos**	Individual	90 minutos	1
1	Indicaciones Actividad 1	Profesor ✓ Parte I individual ✓ Parte II grupal ✓ Parte III grupal	10 minutos 30 minutos 15 minutos 35 minutos	2
2	Recapitulación 1 Actividad 2	Profesor Grupal	30 minutos 60 minutos	3 4

Final de sesión 3	**Tarea calificada 1**	Individual	Para casa	5
3	Recapitulación 2 Actividad 3	Hecha por el profesor al inicio de la sesión. ✓ Parte I individual ✓ Parte II grupal	30 minutos 0 minutos 60 minutos	6 7
4	Recapitulación 3 Actividad 4	Hecha por el profesor al inicio de la sesión. ✓ Parte I individual ✓ Parte II grupal	20 minutos 30 minutos 40 minutos	8 9
Final de sesión 4	**Tarea calificada 2**	Individual	Para casa	10
Posterior a la sesión 4	Recapitulación 4		40 minutos	11

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES y SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

7.1 CONCLUSIONES

Es importante resaltar antes de explicar las conclusiones específicas, que existen distancias entre un modelo teórico y la compleja realidad en las aulas. Es necesario; sin embargo, que un profesor reflexione su práctica, y que más allá de sus creencias, sensaciones, costumbres, encuentre cómo fundamentar sus decisiones para lograr la construcción de saberes matemáticos basándose en marcos teóricos que le den sustento.

Así, en este trabajo de investigación hemos comprobado en la práctica cómo funcionan las diversas interacciones entre el alumno, el profesor y el medio, descritas en la Teoría de Situaciones Didácticas, entendiéndolas como un todo que nos habla del proceso de producción en clase como una trama compleja que no se puede limitar a ninguna de sus partes.

Hemos visto que es posible concebir una situación fundamental que utilizando los conceptos de situación a-didáctica, devolución, contrato didáctico y los distintos tipos de interacciones con el medio, entre otros, logre que los alumnos puedan construir el concepto de Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a problemas de Programación Lineal, transitando y coordinando los diferentes registros de representación, con énfasis en el registro gráfico, y que induzca a los estudiantes a obtener conclusiones, interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal.

Hemos podido apreciar cómo los alumnos pueden mejorar en el ejercicio de coordinar los distintos registros de representación, conforme fueron enfrentando situaciones diversas que los inducían a este proceso.

Por otro lado, en las respuestas de los estudiantes a las actividades propuestas, se ha encontrado expresiones que revelan su intuición optimizadora y que hacen pensar que ésta podría haberse potenciado más, si hubiera sido estimulada desde la educación básica.

Es responsabilidad de la escuela lograr que los alumnos se formen con autonomía intelectual, con capacidad crítica y que sean productores de su conocimiento.

A continuación presentamos conclusiones y aportes más específicos de este trabajo de investigación, en relación explícita con los objetivos específicos propuestos.

En relación al primer objetivo específico de este trabajo de investigación:

"*Diseñar y elaborar una secuencia didáctica que contribuya a que, al usar los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables para resolver problemas contextualizados de programación lineal, los estudiantes*

a. coordinen los diferentes registros de representación (con énfasis en el gráfico)

b. obtengan conclusiones interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal."**,**

concluimos que:

La ingeniería didáctica, fundamentalmente en el análisis preliminar, en sus dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva contribuye al diseño y elaboración de una secuencia didáctica de acuerdo al primer objetivo específico propuesto ; en particular a prever las dificultades que podrían presentar los alumnos en el proceso de enseñanza aprendizaje del tema en estudio y permite tener mayor claridad teórica para el uso del método gráfico como estrategia de solución de problemas de programación lineal de dos variables. Este enfoque facilita la propuesta de situaciones problemáticas que para resolverlas se requiere coordinar los diferentes registros de representación, poniendo énfasis en el registro gráfico.

Por otra parte, el tránsito entre el registro gráfico y los registros algebraico y verbal favorecen el uso de la intuición optimizadora y su interacción con el lenguaje formal para la obtención de conclusiones.

Comentaremos ahora algunas conclusiones específicas a nuestro objeto de estudio, que ilustran lo mencionado anteriormente:

1. A partir de la revisión de textos hecha como parte del análisis preliminar, en su dimensión didáctica, se notó lo siguiente en los libros usados en la enseñanza de la P.L.:
    a. Al tratar el método gráfico para la resolución de problemas de programación lineal con dos variables, no se plantean preguntas que induzcan al alumno a interpretar qué ocurre en distintos puntos de la región factible. En general se plantean situaciones donde se pide hallar el óptimo utilizando el método gráfico, sin hacer preguntas que favorezcan una aproximación intuitiva a la solución del problema de P.L. Adicionalmente, las preguntas planteadas inducen al alumno a resolver los problemas de P.L. usando un algoritmo de manera mecánica desaprovechando la oportunidad de promover el tránsito y coordinación entre el registro verbal, algebraico y gráfico.

    b. No existen preguntas abiertas para debates, que lleven a justificar por ejemplo, por qué el punto hallado es el que da el valor óptimo de la función objetivo o si puede haber más de un punto óptimo. Así, no se brindan ocasiones de ejercitar el lenguaje formal para justificar respuestas.

2. Antes de tratar el tema P.L. se necesita que los alumnos manejen temas previos indispensables que variarán dependiendo de la profundidad con que se llegue tocar el tema. En el caso del método gráfico, se debe estudiar antes principalmente las desigualdades lineales con dos variables tal como se mostró en el análisis de textos (ítem 3.1.3).

A partir del análisis de la prueba de conocimientos previos (ítem 3.2.2) se encontró que los alumnos tienen dificultades en:

- ✓ Coordinar el registro algebraico y el gráfico al representar gráficamente una inecuación con una o dos variables.
- ✓ Relacionar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con su representación gráfica (punto de intersección de dos rectas).
- ✓ Reconocer la región resultante al superponer dos regiones planas determinadas.
- ✓ Reconocer las diferencias entre desigualdades estrictas y no estrictas principalmente al coordinar sus representaciones en el registro verbal y el gráfico.
- ✓ Realizar cálculos operativos, especialmente con números negativos.
- ✓ Coordinar las distintas representaciones del concepto “pendiente de una recta”.

3. El análisis de restricciones considerado en la ingeniería didáctica permitió detectar particularidades del grupo de estudiantes con el que se experimentaría la secuencia didáctica; estas particularidades se tomaron en cuenta al elaborar el diseño de la secuencia didáctica propuesta para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la P.L.

   Nuestro estudio de restricciones (ítem 3.4) mostró, entre otras cosas, que los alumnos en su mayoría no habían estudiado el tema P.L. en su etapa escolar. Esto nos llevó a diseñar un material con problemas complementarios (anexos 5 y 10) para ser desarrollado individualmente en casa y entregado la clase siguiente para su calificación, resultando de mucha utilidad para reforzar lo trabajado en clase.

En relación al segundo objetivo específico de este trabajo de investigación:

“Experimentar la secuencia didáctica y analizar los resultados, comparando los comportamientos esperados y los observados, a la luz del marco teórico adoptado.”,

concluimos que:

4. En cuanto a las dificultades observadas al enfrentar los alumnos situaciones ligadas a la P.L., mencionamos las siguientes:

i. Poca claridad sobre el significado de las variables en el contexto del problema, (ejemplo: actividad 1, parte III, d).

ii. Falta de coordinación entre los registros verbal y algebraico al diferenciar desigualdades estrictas y no estrictas, (ejemplo: actividad 1, parte I, f y g).

iii. Dificultad para relacionar los valores de las variables x, y con un punto específico del plano cartesiano, siendo evidente la falta de experiencias previas en el manejo del registro gráfico y en la coordinación de éste con el algebraico, lo cual es coherente con el poco énfasis que se le pone en la educación básica al registro gráfico, (ejemplo: actividad 1, parte III, d).

iv. Poco manejo de escalas adecuadas al realizar un gráfico en el plano cartesiano. (ejemplo: actividad 3, parte I, b).

v. Dificultad para obtener conclusiones, interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal. Muestra de lo mencionado se tiene en las dificultades para justificar principalmente en qué punto se encuentra el óptimo en un problema de P.L.

vi. Dificultad para ubicar un punto sobre la gráfica, al mencionar las condiciones que cumple dentro del contexto real del problema. (ejemplo: actividad 2, h).

vii. Dificultad para interpretar el significado de un punto ya determinado de la gráfica, dentro del contexto real del problema.(ejemplo: actividad 4, parte II, d)

Estas dificultades fueron disminuyendo conforme avanzaban las actividades. En el caso (iv) esta mejora se puede apreciar por ejemplo comparando las gráficas obtenidas en la primera y la cuarta actividad (figuras 48 y 55 respectivamente).

En el caso (v) esta mejora se puede apreciar por ejemplo comparando las respuestas dadas en la actividad II (figura 44), con la actividad III, parte IIe.

5. Las preguntas de los alumnos durante la actividad se dieron principalmente cuando había que interpretar el significado de un punto de la gráfica, dentro, fuera, en los bordes o en posiciones particulares de la región factible. El profesor generó devoluciones al responder con sugerencias o repreguntas como se mostró en el ítem 5.1.

6. El pasar de un trabajo individual a compartir sus resultados grupalmente y tener que dar una única respuesta, generó que en muchos alumnos se diera la fase de validación. Esto ocurrió principalmente cuando tenían que comparar las regiones factibles encontradas por cada alumno en la etapa individual. Generalmente, la gráfica de la mayoría de alumnos coincidía y explicaban su procedimiento al que la tenía distinta. En muchos casos llegaban a descubrir la falla en el procedimiento del compañero, esta falla solía ser por un mal manejo de escalas o por fallas en la tabulación de puntos.

7. La fase de institucionalización se vio favorecida al realizar recapitulaciones el inicio de cada sesión, incluyendo los resultados obtenidos individual o grupalmente por los alumnos.
   En la experiencia didáctica desarrollada, se aclararon dudas y se formalizó la teoría con la participación de los estudiantes al empezar cada sesión, permitiendo que los alumnos que no lograron lo que se pretendía la sesión anterior, pudieran continuar con las siguientes actividades.
   Ver recapitulaciones realizadas (anexos 3, 6, 8 y 11).

8. Resultó un obstáculo para el proceso de enseñanza aprendizaje de los sistemas inecuaciones lineales con dos variables, el hecho de que los alumnos relacionaban la resolución de un sistema de inecuaciones con el hallazgo de valores específicos como solución. Esto se debe a su experiencia previa en el contexto de la solución de sistemas de ecuaciones, dificultando el poder entender un conjunto solución como una región del plano cartesiano. (ejemplo: actividad 2,d)

En relación al tercer objetivo específico de este trabajo de investigación:
“Rediseñar la secuencia didáctica diseñada originalmente, considerando el análisis de los resultados de su experimentación en aula y la comparación de los comportamientos esperados y los observados”,
concluimos que:

9. Las observaciones registradas durante la experimentación en aula, sobre las reacciones de los estudiantes frente a cada una de las actividades propuestas, permitieron rediseñar la situación original, proponiendo una secuencia didáctica que facilite la construcción del objeto de estudio.

En el presente trabajo de investigación, este rediseño incluyó mejoras en los enunciados a fin de hacerlos más claros, eliminando así ambigüedades detectadas. Se eliminó preguntas que resultaron redundantes en tabulaciones mecánicas para encontrar puntos de rectas paralelas (actividad 3, parte II, b) y se planteó una mejor distribución de los tiempos destinados para las recapitulaciones, trabajo individual, trabajo grupal y evaluaciones (apartado 5.4).

7.2 RECOMENDACIONES

Las conclusiones a las que hemos llegado nos permiten formular las siguientes recomendaciones:

1. Incluir desde el curso previo actividades que permitan el tránsito y la coordinación de los registros verbal, algebraico y gráfico, poniendo énfasis en el gráfico, ya que es en este registro que presentan mayores dificultades. De esta forma se contribuiría a que los alumnos comprendan mejor los objetos matemáticos y las matemáticas en general.

2. Insistir en plantear situaciones expresadas en forma verbal, que permitan a los estudiantes entender la importancia de identificar las variables y a la vez organizar y sistematizar adecuadamente la información dada.

3. Impulsar mediante situaciones a-didácticas relacionadas con problemas de programación lineal, a que los alumnos usen su intuición optimizadora e insistir en la explicación de observaciones y conclusiones usando un lenguaje formal, prestando atención al hecho de educar en la formalización y el rigor (adecuado a su nivel), como una actitud científica que complementa la intuición.

4. Incluir situaciones que induzcan al alumno a pasar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización, al diseñar secuencias didácticas orientadas a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y la programación lineal en particular.

5. Cambiar nuestros hábitos de enseñanza, de manera que en lugar de una didáctica basada en la transmisión, memorización y repetición de los conocimientos, incorporemos una didáctica basada en la construcción y apropiación de los conocimientos por parte de los estudiantes.

6. En relación al objeto de estudio Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la P.L., y en base a las incongruencias encontradas entre los comportamientos esperados y los observados en la experimentación recomendamos lo siguiente:

- Insistir en preguntas que fomenten el reconocer y definir las variables en un problema de P.L.
- Insistir mucho más en proponer a los alumnos problemas contextualizados de P.L. para fomentar el entender enunciados dados en el registro verbal.
- Proponer preguntas de P.L. donde sea indispensable usar el registro gráfico, y no sea solo una alternativa de solución. Esto debido a que sabemos que es el registro en que se insiste menos en la etapa escolar.
- Incluir el tema de “escalas” como un concepto previo al estudio de la P.L.
- Trabajar en la enseñanza – aprendizaje del concepto “pendiente de una recta”, y sus particularidades cuando se habla de rectas paralelas antes de tratar el tema P.L.

7.3 SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Consideramos que el presente trabajo se complementará y enriquecerá con otros trabajos de investigación. A continuación sugerimos algunas ideas:

1. Continuar la presente investigación considerando la posibilidad de emplear otros casos de las variables didácticas consideradas y nuevas variables didácticas como la inclinación de la recta que representa la función objetivo.

2. Realizar la experimentación en aula de la situación didáctica modificada, con otros grupos de estudiantes de carreras de humanidades, para observar si los comportamientos y dificultades registrados en el presente trabajo se reproducen.

3. Experimentar la situación didáctica modificada, con estudiantes de otras carreras, incluso con alumnos de carreras de ciencias, para verificar si facilitan el uso comprensivo de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal.

RERFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. y otros. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue,M.,Douady,R.,Moreno,L.,Gómez, P. (Ed). (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática*. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los andes.

Arya, J. y Lardner, R. (2002). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.*Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Relime*, 6, 199-219.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros.

Brousseau, G. (1994): Los diferentes roles del maestro. En *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones,* C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona, España: ICE- Hursori.

Dantzig, G. y Thapa, M. (1914). *Linear programming.* New York, USA: Springer - Verlag.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática educativa II, Université Luis Pasteur de Strasboug.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Bogotá, Colombia: Universidad del Valle.

González, F. y Diez, M. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. Revista Complutense de Educación, 13, 281-302.

Haeussler, E. y Paul, R. (2003). *Matemáticas para administración y economía.* Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.

Kemeny, J. y Schleifer, A. (1968). *Finite Mathematics: with business applications.*New Delhi, India: Prentice–Hall of India private limited.

Lezama, F. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias, en la especialidad de Matemática Educativa. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Lipschutz, S. (1966). *Finite Mathematics: theory and problems.* New York, USA: MacGraw-Hill.

Luenberger, D. (2003). *Linear and nonlinear programming.* Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Moreno, O. (2010). *Un estudio didáctico de los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la programación lineal*. Manuscrito no publicado, Escuela de posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Oaxaca, J. (2009). *Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.* Trabajo presentado en el Primer Congreso internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Cuautitlán Izcali, México.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima.

Posner, G. (2003). *Analysing the curriculum. (*Trad.G.Arango).Bogotá, Colombia: McGraw-Hill. (Original en inglés, 2001).

Sastre, P., Boubée, C., Delorenzi, O. y Rey, G. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. Universidad Nacional Centro, Buenos Aires, Argentina. Revista Iberoamericana de Educación. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).

Sydsaeter, K. y Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el análisis económico.* Madrid, España: Prentice Hall.

Tan, S. (2005). *Matemáticas para administración y economía.* Itztapalapa, México: International Thompson Editores.

Vanderbei, R. (2001). *Linear programming: foundations and extensions.* Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers.

Yang, X. (2008). *Introduction to Mathematical Optimization: from linear programming to metaheuristics*. United Kingdom: Cambridge International Science Publishing.

Documentos electrónicos

Panizza,M. (s.f.) Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas. http://crecerysonreir.org/docs/Matemáticas_teorico.pdf

Perú, Ministerio de Educación (2004). *Una aproximación a la alfabetización matemática y científica de los estudiantes peruanos de 15 años. Resultados del Perú en la evaluación internacional PISA.* Recuperado el 2 de setiembre de 2010, de http://www.oei.es/quipu/peru/matematica_pisa.pdf

Programación lineal. (s.f.). Extraído el 16 de setiembre de 1010, de http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/vitae/textos/04_ProgLinear_JPinto.pdf

Programación lineal. (s.f.). Extraído el 16 de setiembre de 1010, de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Dantzig_George.html

Programación lineal. (s.f.). Extraído el 16 de setiembre de 1010, de http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1975/kantorovichautobio.html

Sadowsky, P. (2005). La teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. Buenos Aires. http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/teoria_situaciones.pdf

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7, 49-78. http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095347

ANEXOS

ANEXO 1

CONOCIMIENTOS PREVIOS

***NOMBRE*____*FECHA*_________**

1. a. Ubica los puntos P, Q, M, N en el plano cartesiano siendo:
   P (-3;0) Q (2;5) M(4;4) N (-1;-1)
   b. determina si PQ y MN son segmentos paralelos

   Solución.

2. Grafica en el plano cartesiano la recta cuya expresión algebraica es 2x-3y+6=0.

   Solución.

3. Encuentra la intersección de las rectas representadas en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+9y=20\ldots\ldots\ldots(1) \\ 3x-6y=-9\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Solución.

4. Define la variable adecuada y encuentra la desigualdad que corresponde a cada uno de los siguientes enunciados:

a) Laura tiene por lo menos 20 años.
Variable:
Expresión:

b) Juan me prestará al menos 5 soles.
Variable:
Expresión:

c) Como máximo, esperaré 15 días.
Variable:
Expresión:

d) Como mínimo, llevaré 3 cursos.
Variable:
Expresión:

e) La temperatura no es mayor a 20ºC:
Variable:
Expresión

f) En número de mesas que produce una carpintería no puede ser negativo:
Variable:
Expresión

5. Ricardo, quien trabaja como vendedor en un almacén, recibe un sueldo fijo mensual de 400 soles más el 2% del total de ventas (en soles) que realice cada mes.

a. Si en el mes de octubre Ricardo realiza ventas por un total de 3 000 soles, ¿cuánto recibirá de sueldo dicho mes?

b. Si en un mes Ricardo realiza ventas por un total de x soles, expresa su sueldo como una función de x.

Solución.

6. Grafica la solución de cada una de las siguientes inecuaciones lineales.

   a. $y \leq -3x + 2$

   b. $2x - y < 8$

   c. $x \geq 4$

   d. $y \leq -3$

7. Se recorta un triángulo dibujado en una lámina traslúcida color amarillo y se recorta un cuadrado dibujado en una lámina traslúcida color azul.
   Ubica el triángulo sobre el cuadrado (superpuestos), de manera que se observe:

a. un cuadrilátero de color verde.
b. un hexágono de color verde.

ANEXO 2
ACTIVIDAD 1

NUEVOS JUGOS…

La empresa **"FRESH"** dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.
Frutitrío: piña, naranja y plátano
Frutiduo: naranja y plátano
Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.
La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.

PARTE I Trabajo INDIVIDUAL

a. ¿Cuántas onzas de concentrado de jugo de naranja se necesita para fabricar 3 Frutitríos y 5 Frutidúos?

b. ¿Es posible fabricar 1 000 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

c. ¿Es posible fabricar 1 500 Frutitríos y 1 000 Frutidúos? ¿Por qué?

d. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de naranja se usará al fabricar "x" Frutitríos e "y" Frutidúos?

e. Utilizando lo encontrado en d, ¿cómo representarías la restricción que se tiene por no ser temporada alta de la naranja?

f. ¿Podrían "x" e "y" tomar valores negativos? Escribe las desigualdades que representan estas restricciones.

g. Grafica en el mismo plano cartesiano las restricciones encontradas en las partes e y f.

h. Si se fabrica 600 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?

i. Si se fabrica 3 000 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?

j. Si se fabrica 2 000 Frutidúos, ¿cuántos Frutitríos como máximo se pueden fabricar?

Trabajo GRUPAL

PARTE II

Los integrantes del grupo deben comparar los resultados que obtuvieron del trabajo individual, llegando a tener una única respuesta para cada pregunta. A partir de esta respuesta se trabajará el resto de la actividad.

PARTE III

Se sabe que la ganancia al vender un Frutitrío es de S/.1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de S/.0,8.

a. ¿Cuál es la ganancia que se obtiene al vender 6 Frutitríos y 4 Frutidúos?

b. ¿Cuál es la ganancia que se obtienen al vender “x” Frutitríos e “y” Frutidúos?

c. Encuentra la ganancia que se obtendría en cada uno de los casos propuestos en las preguntas h, i, j de la parte individual e indica en qué caso la ganancia ha sido mayor. ¿Habrá algún otro caso en que la ganancia sea mayor que las encontradas? Explique.

d. ¿En cuál de los casos analizados en la parte individual, se ha agotado la cantidad de concentrado de naranja disponible? Ubica dichos puntos sobre la gráfica resultante de parte II (grupal).

e. Si no es indispensable fabricar ambos tipos de envases ¿Qué cantidad de cada producto le recomendarías al fabricante para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál sería dicha ganancia?

ANEXO 3
RECAPITULACIÓN 1

RECAPITULANDO LO VISTO EN LA SESIÓN 1…

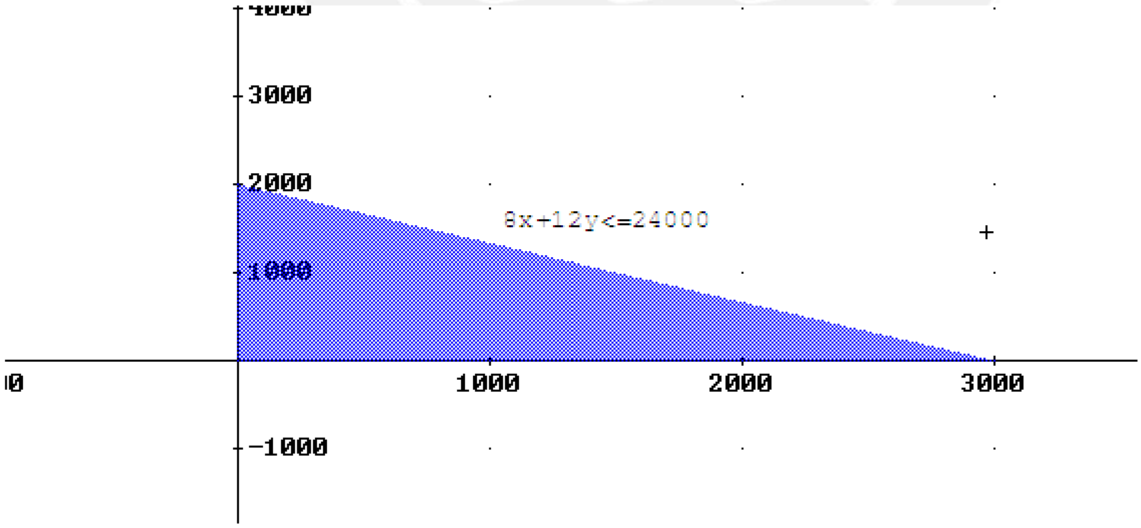
La empresa **"FRESH"** dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.
Frutitrío: piña, naranja y plátano
Frutiduo: naranja y plátano
Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.
La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.
Se sabe que la ganancia al vender un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de $0,8.

Solución

x: número de Frutitríos
y: número de Frutidúos

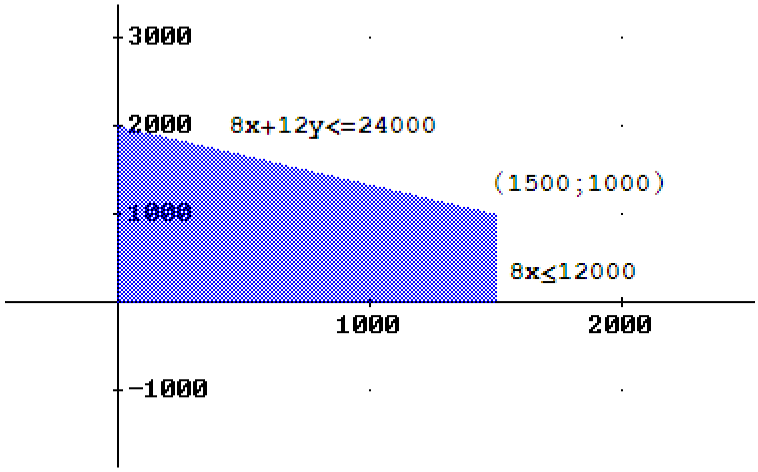
	Naranja
Frutitrío :x	8x
Frutidúo :y	12y
	8x+12y<=24 000

La ganancia está dada por la siguiente expresión: G(x,y)=x+0,8y



Se sabe que se tiene un máximo de 12 000 onzas de concentrado de piña para la fabricación de los Frutitríos y Frutidúos:

	Piña	Naranja
Frutitríos :x	8x	8x
Frutidúos :y		12y
	8x<=12 000	8x+12y<=24 000



En el punto (1 200; 1 200) se agota el concentrado de naranja.
En el punto (1 500; 800) se agota el concentrado de piña.
En el punto (1 500 ; 1 000) se agota el concentrado de naranja y el concentrado de piña.

REGIÓN FACTIBLE

La región del plano determinada al representar gráficamente las restricciones de un problema de programación lineal se denomina la región de soluciones factibles o, simplemente la **región factible**

ANEXO 4

ACTIVIDAD 2

NUEVOS JUGOS…

La empresa **"FRESH"** dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.
Frutitrío: piña, naranja y plátano
Frutiduo: naranja y plátano
Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.
La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.

Trabajo GRUPAL

Si además de los datos dados en la actividad 1, se sabe que por problemas de transporte se tiene un máximo de 12 000 onzas de concentrado de piña para la fabricación de los Frutitríos y Frutidúos,

a. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al fabricar 5 Frutitríos y 6 Frutidúos?

b. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de piña se usará al fabricar "x" Frutitríos e "y" Frutidúos?

c. Utilizando lo encontrado en b, ¿cómo representarías la limitación de concentrado de piña que se tiene por problemas de transporte?

d. Escribe el conjunto de restricciones que se tienen hasta el momento. Encuentra la región del plano cartesiano donde se cumplen todas las condiciones simultáneamente.

e. Encuentra los vértices de la región encontrada en la parte d.

f. Ubica el punto (1200; 1 200) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de jugo de naranja disponible? Explica.

g. Ubica el punto (1 500; 800) sobre la gráfica encontrada en d. ¿Este punto representa el haber agotado la cantidad de concentrado de piña disponible? Explica.

h. ¿Qué punto representa el haber agotado el concentrado de concentrado de piña y naranja disponibles? Explica

i. Recordando que la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8; para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y Frutidúos debe comercializar la empresa? Explica

ANEXO 5

TAREA CALIFICADA 1

NOMBRE Y APELLIDO

1. FABRICANDO SILLAS…

Una pequeña empresa produce dos tipos de sillas, estándares y especiales. Cada silla necesita pasar por dos etapas: fabricación y tapizado. La fabricación de cada silla estándar toma 2 horas, mientras que la fabricación de cada silla especial requiere de 3 horas de labor. El tapizado de una silla estándar requiere de una hora de trabajo, mientras que las sillas especiales necesitan 3 horas. En la empresa se cuentan con 240 horas por día disponibles para la fabricación y 150 horas por día disponibles para el tapizado.

a. Plantea el sistema de desigualdades que restringen las posibilidades de producción de dicha empresa.

b. Grafica la solución del sistema planteado en la parte a

Sugerencias…

Trabaja con las siguientes variables:

x : Cantidad de sillas estándar producidas diariamente

y : Cantidad de sillas especiales producidas diariamente

Representa los datos en una tabla para poder relacionarlos mejor:

Equipos	**Cantidad**	**Horas de fabricación**	**Horas de tapizado**
Sillas estándar	x		
Sillas especiales	y		
Total			

2. TURRONES DE EXPORTACIÓN…

Una compañía dedicada a la fabricación de dulces de exportación, ha decidido sacar al mercado dos tipos de turrones para el próximo mes de Octubre. El “Tradicional “y el “New”.
El turrón “New”, entre otros cambios, reemplaza el azúcar con sustancias naturales.
Cada kilogramo de mezcla para el turrón “Tradicional” utiliza 0,4 kg de harina, 0,1 kg de mantequilla y 0,4 kg de azúcar. Cada kg del turrón New utiliza 0,6 kg de harina y 0,1 kg de mantequilla.
Los proveedores pueden surtir como máximo 6 000 kg de harina y 1 200 kg de azúcar. El proveedor de mantequilla despacha como mínimo 500 kg de mantequilla.

a. Plantea el sistema de desigualdades que restringen las posibilidades de producción de dicha empresa.

c. Grafica la solución del sistema planteado en la parte a.

Sugerencias…

Trabaja con las siguientes variables:

x: Cantidad de kg de turrón Tradicional producidos

y: Cantidad de kg de turrón New producidos

Representa los datos en una tabla para poder relacionarlos mejor:

Turrón	Cantidad	Horas de fabricación	Horas de tapizado
Tradicional	x		
New	y		
Total			

3. **BELLEZA PARA TODOS…**

El centro de estética Marisol ha decidido colocar publicidad en las ediciones dominicales de los dos periódicos más conocidos de la ciudad. Estos anuncios están dirigidos a tres grupos de potenciales clientes.
Cada anuncio en el periódico I es visto por 70 000 clientes del grupo A, 40 000 clientes del grupo B y 20 000 clientes del grupo C.
Cada anuncio en el periódico II es visto por 10 000 clientes del grupo A, 20 000 clientes del grupo B y 40 000 clientes del grupo C.
El centro de estética desea que sus anuncios sean vistos por al menos 2 millones de personas del grupo A, 1,4 millones de personas del grupo B y un millón de personas del grupo C.

a. Plantear el sistema de desigualdades que corresponde a la situación planteada.
b. Graficar la solución del sistema planteado en la parte a.

Sugerencias…

Trabaja con las siguientes variables:

x: Cantidad de anuncios en el periódico I

y: Cantidad de anuncios en el periódico II

Representa los datos en una tabla para poder relacionarlos mejor:

Periódico	Cantidad	Grupo A	Grupo B	Grupo C
I	x			
II	y			
Total				

ANEXO 6
RECAPITULACIÓN 2

RECAPITULANDO LO VISTO EN LA SESIÓN ANTERIOR…

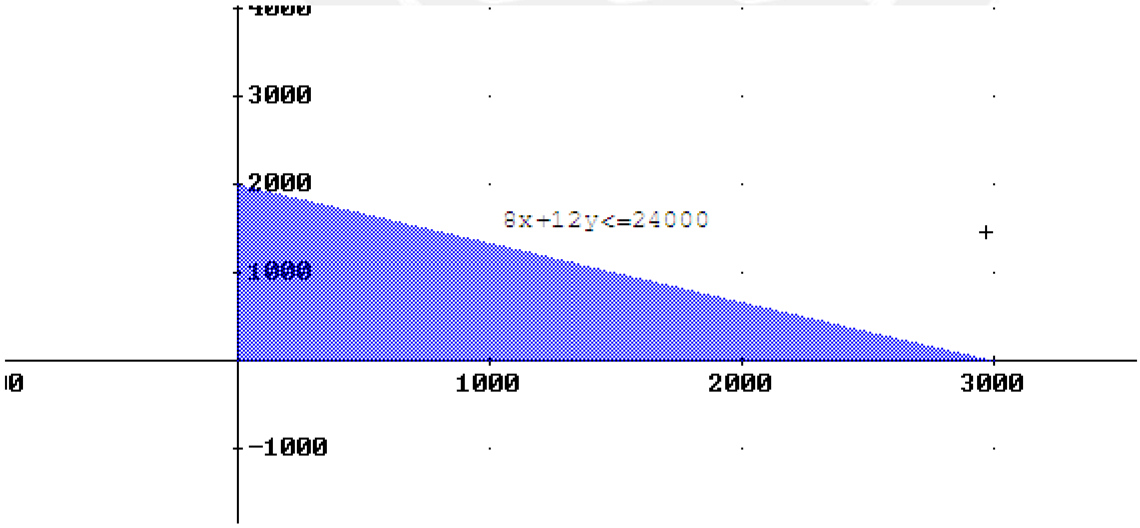
La empresa **"FRESH"** dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.
Frutitrío: piña, naranja y plátano
Frutiduo: naranja y plátano
Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.
La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.
Se sabe que la ganancia al vender un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia al vender un Frutidúo es de $0,8.

Solución

x: número de Frutitríos
y: número de Frutidúos

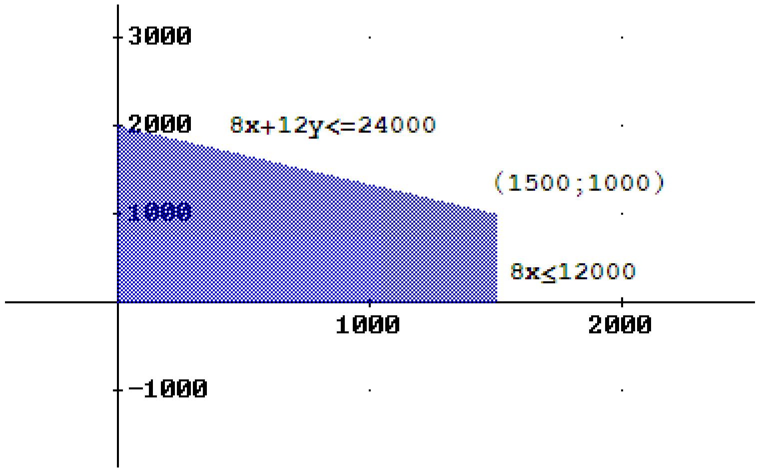
	Naranja
Frutitrío :x	8x
Frutidúo :y	12y
	8x+12y<=24 000

La ganancia está dada por la siguiente expresión: G(x,y)=x+0,8y



Se sabe que se tiene un máximo de 12 000 onzas de concentrado de piña para la fabricación de los Frutitríos y Frutidúos:

	Piña	Naranja
Frutitríos :x	8x	8x
Frutidúos :y		12y
	8x<=12 000	8x+12y<=24 000



En el punto (1 200; 1 200) se agota el concentrado de naranja.
En el punto (1 500; 800) se agota el concentrado de piña.
En el punto (1 500 ; 1 000) se agota el concentrado de naranja y el concentrado de piña.

REGIÓN FACTIBLE

La región del plano determinada al representar gráficamente las restricciones de un problema de programación lineal se denomina la región de soluciones factibles o, simplemente la **región factible**

ANEXO 7

ACTIVIDAD 3

CONTINUEMOS…

Adicionalmente a los datos dados en las actividades 1 y 2, ahora se sabe que por el problema de transporte solo se puede contar con 10 000 onzas de concentrado de plátano. Para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos debe comercializar la empresa?

Recordemos que:

- la ganancia en un Frutitrío es de $1,00 y la ganancia en un Frutidúo es de $0,8.
- un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.
- un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.

Parte I   Trabajo INDIVIDUAL

a. Completa la tabla:

	Piña	Naranja	Plátano
Frutitrío:x	8x	8x	
Frutidúo:y		12y	
	8x<=12 000	8x+12y<=24 000	

b. Encuentra la región factible , indicando las coordenadas de sus vértices

PARTE II   Trabajo GRUPAL

a. Trata de encontrar todas las soluciones posibles de producción de Frutitríos y Frutidúos, que permita tener una determinada ganancia. Por ejemplo, para una ganancia de $1 000 busca combinaciones de producción que haga que esta ganancia se consiga.
Puedes usar una tabla como esta

x	y	G=x+0,8y
0	1250	1 000
1 000	0	1 000
200		1 000

Ubica dichos puntos sobre tu región factible resultante de la parte individual y observa como están dispuestos.

Completa:

Al unir los puntos se forma____

b. Repite el paso anterior para G=1 500, G=1 880, G=2 200 y observa como son las gráficas resultantes. **Explica**.

Las gráficas resultantes son____

____

____

c. Cada una de las rectas graficadas en el paso anterior, representa un nivel de ganancia. Comparando dos de estas rectas paralelas, ¿cuál es la que representa una ganancia mayor? **Explica.**

d. ¿Es posible ganar $2 200? **¿Por qué?**

e. ¿Cuál es la ganancia máxima que se puede obtener? **Explica.**

f. ¿Cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos se debe producir para obtener la ganancia máxima posible? Explica

ANEXO 8
RECAPITULACIÓN 3

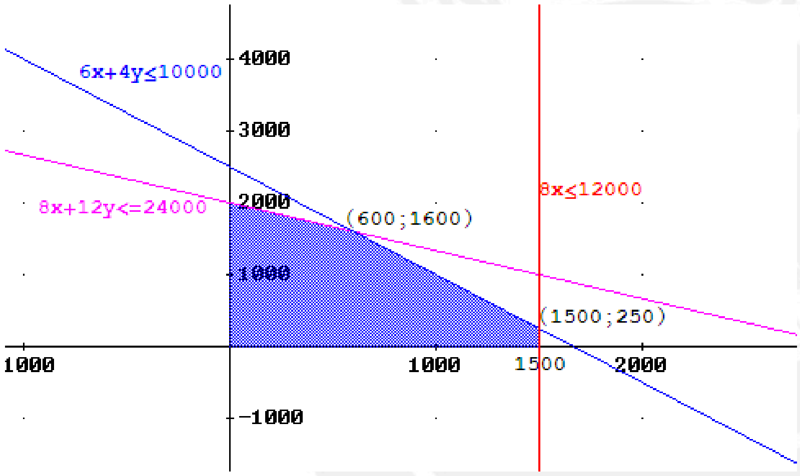
RECAPITULANDO LO VISTO EN LA SESIÓN 3…

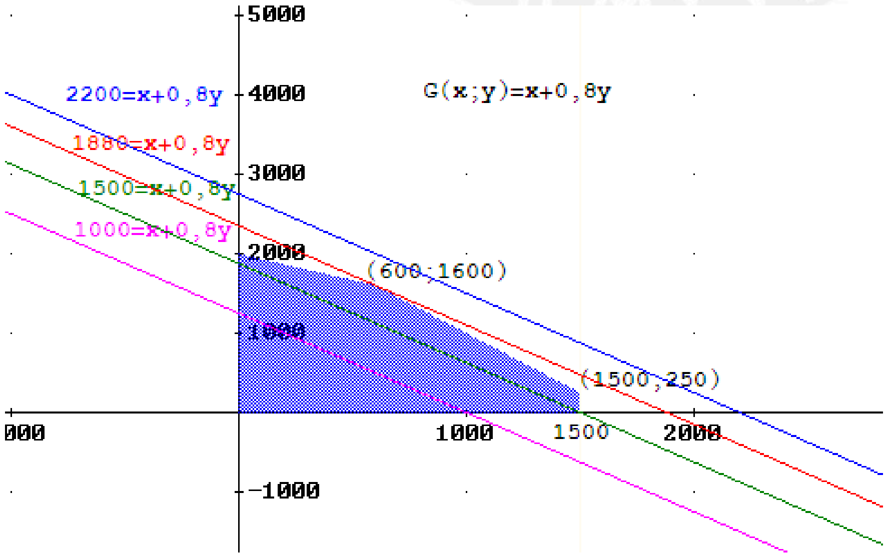
Ahora se sabe que por el problema de transporte solo se puede contar con 10 000 onzas de concentrado de plátano. Para alcanzar la ganancia máxima, ¿cuántos Frutitríos y cuántos Frutidúos debe comercializar la empresa?

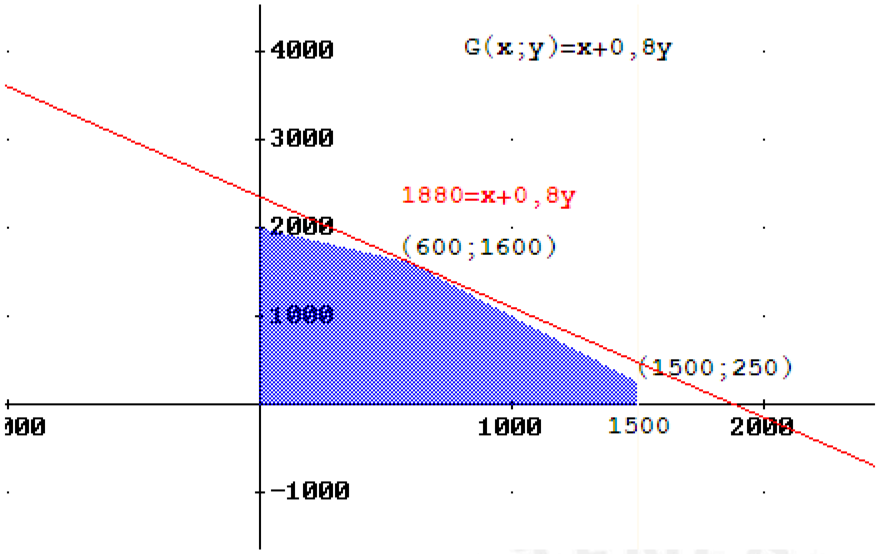
SOLUCIÓN

	Piña	Naranja	Plátano
Frutitríos :x	8x	8x	6x
Frutidúos :y		12y	4y
	8x<=12 000	8x+12y<=24 000	6x+4y<=10 000

REGIÓN FACTIBLE







CONCLUSIÓN:
Hay que producir 600 Frutitríos y 1 600 Frutidúos para alcanzar una ganancia máxima posible de$1 880.

SOLUCIÓN ÓPTIMA

El par ordenado (600;1 600) que representa el número de Frutitríos y Frutidúos que se deben producir y vender para obtener la máxima ganancia posible se denomina **solución óptima** del problema.

PROPIEDAD

Si existe una única solución que maximiza o minimiza una función objetivo lineal, entonces esa solución es un vértice de la región factible.

ANEXO 9

ACTIVIDAD 4

NATACIÓN Y NUTRICIÓN

Diego, quien pertenece al equipo de natación de su colegio, ha acudido a la nutricionista para mejorar su alimentación y desempeño.
La nutricionista ha decidido que Diego debe usar diariamente 2 suplementos alimenticios llamados Nutrifort y Energyplus para suministrarle un mínimo de 400 mg de zinc para el crecimiento de los músculos, 10 mg de hierro para mejorar el transporte de Oxígeno y 40 mg de vitamina B para aumentar la energía.
Cada onza de Nutrifort contiene 30 mg de zinc, 1 mg de hierro y 2mg de vitamina B. Asimismo, cada onza de Energyplus contiene 25 mg de zinc, 0,5 mg de hierro y 5 mg de vitamina B.

Se sabe que los niños necesitan colesterol en su alimentación ya que tiene nutrientes importantes para el desarrollo cerebral. En el caso de Diego, sin embargo, la nutricionista decide minimizar la ingesta de colesterol debido a su sobrepeso.

Hallar cuántas onzas de cada suplemento debe usar Diego diariamente de modo que se minimice el contenido de colesterol y se cubran los requerimientos de zinc, hierro y vitamina B. Se sabe que cada onza de Nutrifort contiene 3 mg de colesterol y cada onza de Energyplus contiene 5 mg de colesterol.

Trabajo INDIVIDUAL

PARTE I

a. Completa la lista de pasos a seguir para resolver el problema planteado, según lo aprendido.

1. Escribir el sistema de inecuaciones que representan las restricciones del problema. (puede ayudar el elaborar una tabla).
2. Graficar en el plano cartesiano la región factible (incluyendo los vértices).
3. ......
4. ....

b. Encuentra la solución del problema según los pasos determinados en la parte a.

Trabajo GRUPAL

PARTE II

a. Los integrantes del grupo deben comparar sus soluciones. Si hay diferencias, discutirlas hasta llegar a un consenso.
   Solución óptima:
   Diego debe consumir diariamente _________onzas de NUTRIFORT y________onzas de ENERGYPLUS.
   El contenido mínimo de colesterol es:________mg.

b. ¿Cuál es la principal diferencia entre las regiones factibles encontradas en la actividad 3 y 4?

c. ¿Cuál es la principal diferencia en cuanto a lo que se quiere lograr de la función objetivo?

d. Para la solución encontrada:

   ¿Diego consumiría exactamente la mínima cantidad de zinc, hierro y vitamina B indicada por la nutricionista? **Explica**

ANEXO 10

TAREA CALIFICADA 2

NOMBRE Y APELLIDO

1. **FABRICANDO SILLAS…**

Una pequeña empresa produce dos tipos de sillas, estándares y especiales. Cada silla necesita pasar por dos etapas: fabricación y tapizado. La fabricación de cada silla estándar toma 2 horas, mientras que la fabricación de cada silla especial requiere de 3 horas de labor. El tapizado de una silla estándar requiere de una hora de trabajo, mientras que las sillas especiales necesitan 3 horas. En la empresa se cuentan con 240 horas por día disponibles para la fabricación y 150 horas por día disponibles para el tapizado.

Cada silla estándar se vende en S/.50, mientras que cada silla especial se vende en S/.100.

Determina la cantidad de sillas de cada tipo que se deben producir y vender para generar el mayor ingreso posible.

¿Cuál será el mayor ingreso posible?

2. TURRONES DE EXPORTACIÓN…

Una compañía dedicada a la fabricación de dulces de exportación, ha decidido sacar al mercado dos tipos de turrones para el próximo mes de Octubre. El "Tradicional "y el "New".
El turrón "New", entre otros cambios, reemplaza el azúcar con sustancias naturales.
Cada kilogramo de mezcla para el turrón "Tradicional" utiliza 0,4 kg de harina, 0,1 kg de mantequilla y 0,4 kg de azúcar. Cada kg del turrón New utiliza 0,6 kg de harina y 0,1 kg de mantequilla.
Los proveedores pueden surtir como máximo 6 000 kg de harina y 1 200 kg de azúcar. El proveedor de mantequilla despacha como mínimo 500 kg de mantequilla.

Si las ganancias por kg son de $2,5 para el turrón "Tradicional" y $1,5 para el turrón "New",
¿cuántos kg de cada turrón se deberían comercializar para obtener la ganancia máxima?
¿Cuál es la ganancia máxima?

3. BELLEZA PARA TODOS…

El centro de estética Marisol ha decidido colocar publicidad en las ediciones dominicales de los dos periódicos más conocidos de la ciudad.
Estos anuncios están dirigidos a tres grupos de potenciales clientes.
Cada anuncio en el periódico I es visto por 70 000 clientes del grupo A, 40 000 clientes del grupo B y 20 000 clientes del grupo C.
Cada anuncio en el periódico II es visto por 10 000 clientes del grupo A, 20 000 clientes del grupo B y 40 000 clientes del grupo C.
El centro de estética desea que sus anuncios sean vistos por al menos 2 millones de personas del grupo A, 1,4 millones de personas del grupo B y un millón de personas del grupo C.

Cada anuncio en el periódico I cuesta $1000 y cada anuncio en el periódico II cuesta $800.
¿Cuántos anuncios debe colocar el centro de estética Marisol en los periódicos I y II a fin de alcanzar sus metas de publicidad a un costo mínimo?
¿Cuál es el costo mínimo?

ANEXO 11

RECAPITULACIÓN 4

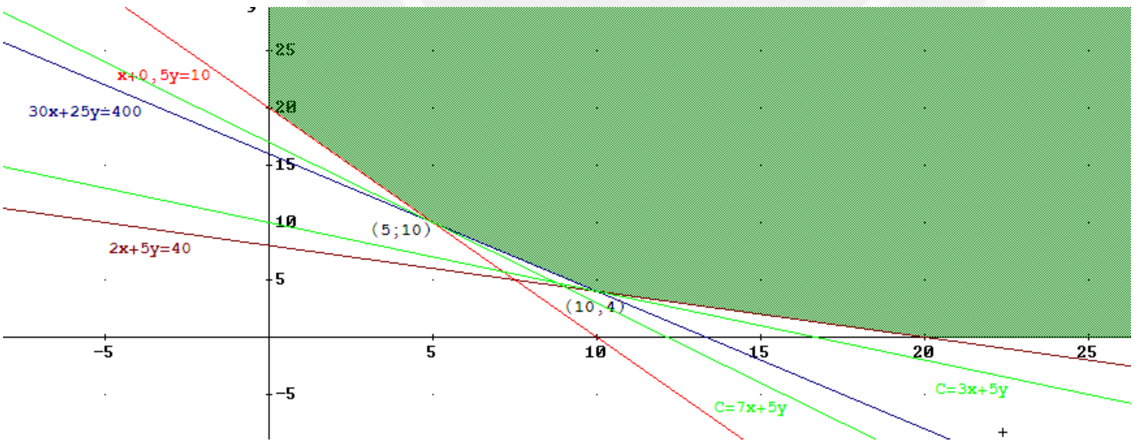
NATACIÓN Y NUTRICIÓN

Solución:

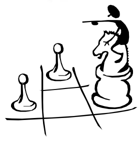
x: número de onzas del alimento M (x>=0)
y: número de onzas del alimento N (y>=0)

	Zinc	Hierro	Vitamina B
Alimento M :x	30x	1x	2x
Alimento N :y	25y	0,5y	5y
	30x+25y>=400	x+0,5y>=10	2x+5y>=40

C(x,y)=3x+5y El mínimo se da en el vértice (10;4). Mínimo 50 mg de colesterol.



ANEXO 12



INFORMACIÓN PERSONAL

Escriba una (x) para indicar su situación:

1. Sexo:

a) Masculino b) Femenino

2. Edad:

a) Hasta 17 años ( )
b) De 18 a 22 años ( )
c) De 23 a 27 ( )
d) De 28 a 32 ( )
e) De 33 a más ( )

3. Lugar de domicilio:

a) Pueblo Libre ( )
b) Distrito limítrofe con Pueblo Libre ( )
c) Conos de la ciudad ( )
d) Otro:__________________

4. Lugar de nacimiento:

a) Lima ( )
b) Provincia ( )
c) Otro_______________________

5. Tipo de Institución educativa donde terminó la secundaria:

a) Colegio público ( )
b) Colegio Privado ( )

a))

6. Si se preparó en alguna Institución, ¿cuánto tiempo duró su preparación?
a) De 1 a tres meses ( )
b) Medio año ( )
c) Un año ( )
d) Más de un año ( )

7. Forma de Ingreso a la UARM

a) CEPREUARM ( )
b) Examen de admisión ( )
c) Exonerado por primeros puestos ( )
d) Convenio ( )
e) Otra_______________________

8. Tiempo dedicado al estudio del curso fuera de clase (por semana).

a) No dispongo de tiempo ( )
b) Hasta 1 hora ( )
c) De 2 a 4 ( )
d) De 5 a 6 ( )
e) Más de 6 ( )

9. ¿Te enseñaron en el colegio el tema "Programación lineal"? Si ( ) No ( )

10. ¿Habías escuchado hablar anteriormente de la "Programación lineal"? Si ( ) No ( )

¿Dónde?__________________________

ANEXO 13 FICHA DE OBSERVACIÓN

ACTIVIDAD ____ SESIÓN _____ FECHA_______________ HORA________________

PARTE	¿QUÉ HACEN PARA LLEGAR A LA RESPUESTA?	DIFICULTADES INTERVENCIONES	OBSERVACIONES CLIMA, INTERÉS, DISPOSICIÓN, OTROS.
a			
b			
c			

d			
e			
f			
g			

h			
i			
j			