PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Diseño de tareas que contribuyan a un aprendizaje significativo del concepto de derivada en estudiantes de Ciencias Administrativas.

Tesis para optar el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

Presentada por: Erick Jozsef Pozsgai Hernani

Asesor: Dr. Uldarico Malaspina Jurado

Jurado:

Mg. Nélida Medina García de Correa

Dra. Norma Rubio Goycochea

2014

Dedicatorias

- *A mí madre que siempre me motivó a la lectura y la redacción.*

- *A mí esposa Ofelia por todo su apoyo durante todos estos años.*

- *A mis hijos que me motivaron en la persistencia en la tarea.*

- *A mis alumnos por enseñarme cada día a redescubrir la enseñanza de las Matemáticas.*

Agradecimientos

Al Profesor Uldarico Malaspina por mostrarme el camino con creatividad y paciencia.

A mis profesores de la maestría por mostrarme el mundo de la Didáctica de la Matemática, que me era desconocido.

A la Universidad de Ciencias Aplicadas por el trato excelente que me han dado desde el principio.

RESUMEN

El presente trabajo nace de nuestra preocupación respecto al aprendizaje del concepto de derivada, y todo lo que abarca el término, en alumnos de la carrera de Ciencias Administrativas, que cursan la materia de Cálculo. Para ello hemos enfocado nuestra atención en una sección de alumnos de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, y específicamente en el curso de Lógica – Matemática del área de Ciencias, cursado por los alumnos de la carrera de Ciencias Administrativas. Teniendo como objetivo ayudar a lograr un aprendizaje significativo del concepto derivada, diseñamos una secuencia de tareas, que – a partir de conocimientos que los alumnos tienen de los conceptos previos – permita reforzar la interpretación geométrica de la derivada de una función f cuando la variable independiente toma un valor específico (digamos $x=a$), como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a;f(a))$, y así poder incorporar ese conocimiento en su estructura cognitiva. Durante la realización de la secuencia diseñada los estudiantes van construyendo gráficas de funciones de acuerdo a ciertas condiciones que les son dadas, y siguiendo un proceso inductivo van explorando y descubriendo relaciones. La demanda cognitiva de las tareas va incrementándose hasta que finalmente deben usar esos conocimientos para construir funciones con una demanda cognitiva más compleja, y terminar con un problema contextualizado del ámbito de su carrera, como una especie de cierre. Se diseñó la secuencia de tareas teniendo en cuenta algunos principios del diseño de tareas ("*task design*") y al analizar las producciones de los alumnos se hicieron evidentes algunas dificultades en sus conocimientos previos y en la comprensión del concepto de derivada. Posteriormente se formularon preguntas personalizadas a algunos de los alumnos, con el fin de aclarar sus respuestas, y así poder comprender sus concepciones. Finalmente damos algunas conclusiones, hacemos recomendaciones para posteriores investigaciones e incluimos algunas reflexiones como resultado de una mirada global al trabajo realizado. En los Anexos se incluye la secuencia de tareas, las tablas de resultados y también las preguntas aclaratorias, así como las respuestas de los alumnos a dichas preguntas.

Se concluyó que existen dificultades importantes en la evocación de los conceptos previos para ser utilizados como "*conceptos ancla*" – usando la terminología de Ausubel – sobre los cuales construir nuevos conocimientos (Ausubel, 2000). También se encontraron dificultades en el aprendizaje de la derivada, y conflictos semióticos importantes cuando los alumnos tuvieron que relacionar las diversas representaciones del concepto derivada, como la simbólica, la gráfica y la algebraica. Estas dificultades encontradas pueden influir en el hecho de que muchos alumnos solo alcanzan lo que Skemp (2006) denomina una "comprensión instrumental" del concepto de derivada y no una "comprensión relacional" de la derivada, que explicado en pocas palabras, significa, saber lo que se va a hacer y porqué se va a hacer. Alcanzar una tal comprensión del concepto de derivada es un factor importante para lograr un acercamiento adecuado hacia conceptos como elasticidad, marginalidad y optimización, que se estudian en cursos paralelos o posteriores de la carrera de Ciencias Administrativas.

INDICE

CAPITULO 3: LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

CAPITULO 4: RESULTADOS Y ANALISIS

CAPITULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

REFERENCIAS

ANEXOS

INTRODUCCION

Cuando un profesor se presenta por primera vez frente a un grupo de alumnos para iniciar la enseñanza de algún curso de Matemáticas, casi puede sentir en la atmósfera del aula las expectativas y los temores de los estudiantes. En muchos casos las expectativas son pobres. Sin embargo el profesor tiene en sus manos la posibilidad de cambiar radicalmente esas expectativas y darle un nuevo significado a las Matemáticas para aquellas personas.

Uno de los seis "principios"que según el National Council of Teachers of Mathematics de los Estados Unidos describen las características particulares de una educación matemática de calidad es el denominado "The Learning Principle" (NCTM, 2000) y en él entre otras cosas, se afirma con claridad que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión conceptual, construyendo activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y aprendizajes previos (p.20). Además afirma que los profesores deben conocer qué es lo que los estudiantes ya saben, para poder diseñar experiencias y lecciones que construyan nuevos conocimientos a partir de lo que ellos ya conocen (p.18).

Para lograr un aprendizaje conceptual se debe usar tareas matemáticas (mathematical tasks) "valiosas" o "que valgan la pena", que permitan introducir ideas matemáticas importantes y retar a los estudiantes intelectualmente.

Dado este reconocimiento a la importancia de las tareas matemáticas (*Mathematical Tasks*) que son propuestas a los estudiantes, muchos investigadores tanto en los Estados Unidos como en otras partes del mundo, trabajan sobre la idea de "diseñar" y así surge un nuevo concepto que es el de diseño de tareas (*Task Design*). Los principios del diseño de tareas varían entre los investigadores de diversos países. Muchos investigadores en educación matemática compartieron sus ideas sobre diseño de tareas en el ICMI Study 22 (2013), donde se divulgan las investigaciones más recientes sobre el tema.

En esa línea, nuestro trabajo se enfoca en diseñar, aplicar y analizar una secuencia de tareas que, partiendo de conceptos conocidos por los alumnos, como son las funciones, pueda estimular una reflexión en ellos y les permita una mejor comprensión del concepto de derivada, explorando además algunas dificultades que el alumno experimenta durante el aprendizaje de dicho concepto.

CAPITULO 1 EL PROBLEMA DE INVESTIGACION

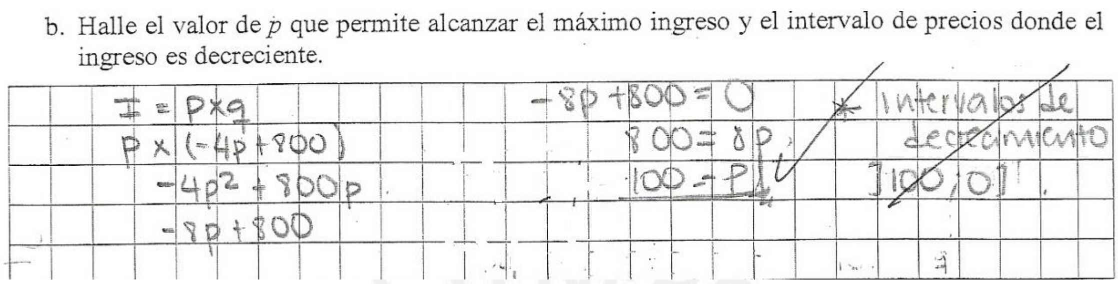
1.1 JUSTIFICACION

Hemos observado en nuestra práctica docente la dificultad que tienen algunos estudiantes del curso de Cálculo, de la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, para comprender el concepto de derivada. Aún varias semanas después de haber aprendido las definiciones y las aplicaciones, los alumnos tienen dificultades en comprender la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, que es ampliamente usada en problemas de aplicación que involucran conceptos como elasticidad y marginalidad, entre otros.

Cálculo es una materia que infunde temor a los alumnos de Ciencias Administrativas, y entre las razones que generan ese temor está la complejidad del concepto de límite, en base al que posteriormente se construye el concepto de derivada. Creemos también que los alumnos no se sienten seguros en sus conocimientos sobre funciones, y eso lo hemos observado en nuestra práctica docente cuando en el curso de Cálculo los alumnos no pueden realizar tareas elementales, como bosquejar la gráfica de una función, determinar el dominio o graficar una función creciente.

Esta realidad confiere relevancia al presente trabajo, pues es preocupante el hecho de que algunos estudiantes no estén logrando un aprendizaje significativo del concepto de derivada, que es parte importante de los conocimientos que necesitan para comprender conceptos como cambio, marginalidad, elasticidad y optimización, hablando del ámbito económico – administrativo.

Un ejemplo de la comprensión incompleta del concepto de derivada que se puede mencionar, ocurre cuando se pide a los estudiantes optimizar una función determinada, hemos observado a lo largo de los años que muchos estudiantes se limitan a hallar los puntos críticos, y no realizan un análisis de crecimiento, es decir no comprenden la necesidad de usar el criterio de la primera derivada, para determinar la naturaleza del extremo relativo, como se evidencia en la resolución que mostramos a continuación de un ejercicio de oferta y demanda, realizada por un alumno:


b. Halle el valor de p que permite alcanzar el máximo ingreso y el intervalo de precios donde el ingreso es decreciente.

$I = p \times q$
$p \times (-4p + 800)$
$-4p^2 + 800p$
$-8p + 800$

$-8p + 800 = 0$
$800 = 8p$
$100 = p$

intervalos de decrecimiento
$]100, 0[$.

Figura 1. Resolución de un alumno de 2do ciclo.

En la figura 1 podemos observar que el alumno tiene un manejo correcto de la parte operativa, pero no muestra un nivel de comprensión relacional del concepto, al no ser capaz de realizar el análisis de crecimiento. No relaciona la función a optimizar con una gráfica, cuyo comportamiento se pueda analizar usando un criterio que le permita establecer una conclusión. El estudiante ha aprendido un proceso, es decir, cuando en el problema se le pide determinar el ingreso máximo, sabe que tiene que derivar la función ingreso, igualarla a cero y resolver para hallar el o los valores críticos de *p*. Sin embargo determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, requiere una verdadera comprensión de la necesidad de determinar el tipo de extremo, lo que denominamos “comprensión relacional”, es decir saber lo que hay que hacer y el por qué (Skemp, 2005), en contraste con lo que el mismo autor denomina “comprensión instrumental”, que es el nivel de comprensión que la producción de este estudiante revela. La comprensión relacional es muy similar a la “comprensión conceptual” mencionada anteriormente (NCTM, 2000).

No podemos dejar de señalar, en este ejemplo, la confusión mostrada al tratar de determinar los intervalos de decrecimiento de la función ingreso, y el manejo deficiente de la notación de intervalos. No se observa que el estudiante relacione la función ingreso con su gráfica, perdiendo la oportunidad de visualizar lo que se está pidiendo de una manera natural y sencilla.

Este es uno de muchos ejemplos que revelan la importancia de investigar sobre formas de contribuir a un aprendizaje significativo del concepto de derivada y al mismo tiempo, explorar los conocimientos previos que los estudiantes manejan. En este trabajo hemos optado por hacerlo en el marco del diseño de tareas, enfoque que ha sido fundamentado por investigadores como Bokhove (2014), Breen y O'Shea (2010), Ron, Zaslavsky y Zodik (2013), Watson y Ohtani (2013) y Watson y Mason (2005), entre otros. Ponemos énfasis en la importancia de alcanzar una comprensión de las distintas formas en que una función puede ser creciente o decreciente, lo cual está fuertemente relacionado con el comportamiento de su función derivada. Es muy diferente que el ingreso de una empresa crezca a tasas crecientes, a que crezca a tasas decrecientes.

A partir de nuestra experiencia docente podemos afirmar también que los conceptos previos de límites y continuidad de funciones no son comprendidos de una manera cabal, limitando así las posibilidades de aprendizaje de la derivada. Esto es descrito por Tall (1990), quien señala que existen potenciales conflictos entre lo que denomina la imagen conceptual y la definición conceptual.

La imagen conceptual (*concept image*) es descrita como toda la estructura cognitiva en la mente del sujeto que está asociada al concepto y es construída a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo.

Por otro lado el mismo autor se refiere a la "definición concepto" (*concept definition*) como "la forma de palabras que se usa para especificar el concepto", es la aceptada por la comunidad matemática (Tall y Vinner, 1981).

Estas investigaciones sugieren que los estudiantes inician el estudio de la derivada sin tener claros varios de los pilares sobre los que se construirá el concepto, como son las funciones y el concepto de límite de una función.

En la enseñanza de la derivada normalmente no se concede importancia a la evolución histórica del concepto de derivada, que podría mostrar a los alumnos la relevancia de su aprendizaje, ya que el desarrollo histórico de la derivada tiene un valor didáctico significativo (Azcárate, Badillo, García y Moreno, 2010).

Otra de las observaciones que podemos mencionar sobre el aprendizaje de la derivada por los estudiantes es que en ocasiones no llegan a distinguir el número $f'(x_0)$, que es la derivada de la función *f* en un punto, de la función f', que asigna la derivada de *f* en cada punto *x* en el cual la función es derivable.

En el aprendizaje del concepto de derivada se generan algunos conflictos semióticos, por la dificultad que tienen los alumnos en el manejo del registro simbólico.

Ponemos como ejemplo el siguiente ejercicio propuesto en clase para estudiantes de Administración que están aprendiendo máximos y mínimos (Ver figura 2):

Ejemplo 5:

La figura muestra la gráfica de la derivada de una función. Indique los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los puntos en donde hay máximo y mínimo de la función.

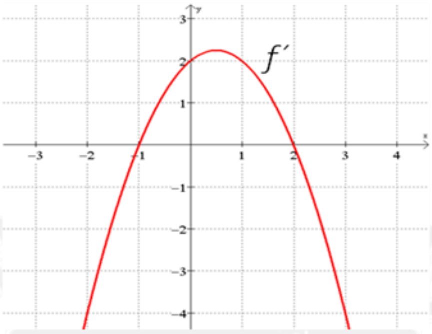


Figura 2.

A pesar de que se trata este tópico en clase, hemos observado que los alumnos fracasan cuando se les solicita algo similar en una práctica calificada, a no ser que se hubieran resuelto muchos ejercicios similares previamente.

Esto nos lleva a la conclusión de que las secuencias didácticas aplicadas permiten a los estudiantes alcanzar lo que Skemp (2005) denomina un nivel de comprensión *instrumental*, es decir que imitando el comportamiento aprendido por repetición continua, los estudiantes podrían llegar a ser capaces de aplicar una regla pero sin comprender realmente el porqué.

En este ejercicio muchos estudiantes, creen que la gráfica mostrada pertenece a la función *f*. En este caso se genera un *conflicto semiótico*, entendido como un desajuste entre el contenido atribuido a una expresión por el alumno y por la institución (Godino, 2000); que es comprensible, por nuestra experiencia docente podemos afirmar que muchos estudiantes no se percataron del superíndice en el rótulo de f'.

Finalmente mostramos un ejemplo de la definición de derivada extraída de un conocido libro de texto:

La derivada de una función *f* es la función, denotada por:

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tomado de Hauessler, Paul & Wood, (2008) p. 484.

Esta definición está dentro de un contexto en el que previamente se presentó la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función *f*, entre los puntos P y Q de la gráfica de *f*, siendo $P=(a, f(a))$ y $Q=(z, f(z))$ y luego se hace la generalización tomando como punto $P=(x, f(x))$. Sin embargo nos parece una combinación no muy favorable entre dos representaciones de un mismo proceso geométrico. Por un lado el límite de la izquierda muestra que el punto *z* se acerca indefinidamente a *x*, pero el de la derecha afirma que *h* tiende a cero. A pesar de que ambas afirmaciones son correctas, su presencia en un mismo enunciado puede generar incomprensión o confusión por parte de los estudiantes.

Aquí es oportuno citar a Font (2005) que da un ejemplo de surgimiento de conflictos semióticos: “Cuando se considera ingenuamente que es bueno introducir diferentes representaciones del mismo objeto matemático y se introducen el mayor número posible de representaciones y de traducciones entre ellas, sin tener en cuenta la complejidad semiótica asociada” (p.122).

Ante la aparición de estos conflictos, los estudiantes se apoyan más en el desarrollo algorítmico, cercano al aprendizaje procedimental del álgebra de la escuela, que les permite llegar a un resultado siguiendo un procedimiento mecánico. Cuando se ven enfrentados a situaciones en las que tienen que resolver problemas a partir de un razonamiento, no consiguen poner en práctica los conceptos, ni entender las relaciones entre la función y su derivada.

La situación tiene mucha complejidad y requiere más investigación que, desde diversas perspectivas, pueda contribuir a un cambio en la forma en que se presenta el concepto de derivada, para ayudar a la formación de un esquema mental (en el sentido piagetiano) que incluya las diversas representaciones del objeto derivada.

De este modo queremos lograr que los alumnos obtengan calificaciones aprobatorias como consecuencia de alcanzar una comprensión cabal de los conceptos y no gracias a una reproducción exacta de procedimientos y técnicas. Estamos convencidos de que la forma cómo preguntamos y proponemos las tareas influye en el tipo de aprendizaje alcanzado por los estudiantes. Este trabajo es un esfuerzo en esa dirección y durante su realización se ha generado un cambio gradual en nuestra práctica docente y en nuestras concepciones sobre cómo presentar la derivada, su interpretación geométrica y su relevancia a nuestros alumnos de Ciencias Administrativas, para que el aprendizaje de este concepto, tan importante en matemáticas y creemos, en su carrera, sea realmente significativo.

1.2 ANTECEDENTES.

Autores como Tall (1990), Cantoral (2000), Azcárate (2000) y Artigue (1995), mencionan las dificultades que tienen los alumnos de los primeros niveles universitarios para el aprendizaje del Cálculo.

Entre ellos Tall (1990), apunta refiriéndose al aprendizaje del Cálculo: "Los estudiantes aprenden a responder preguntas estándar de una forma predecible, pero si su comprensión es probada de maneras inusuales, dificultades sutiles se manifiestan" (p.49).

Azcárate (2000), propone el uso de varias representaciones diferentes de los objetos matemáticos, y menciona la gráfica, la numérica y la algebraica.

La idea de usar varias representaciones en el aprendizaje de un objeto matemático es expresada también por Gleason y Hughes (1992), que denominan a su teoría, "la regla de tres": para ellos las representaciones gráfica, numérica y analítica, deben ser enfatizadas conjuntamente, para un aprendizaje adecuado del Cálculo. Estos autores, en el ámbito de la reforma del Cálculo en los Estados Unidos, proponen que el alumno debe ser confrontado a cada paso de su aprendizaje de la derivada, con sus diferentes "significados" numérico y gráfico.

Respecto al poco éxito que se tiene en muchos casos, en lograr un aprendizaje conceptual del Cálculo, Artigue (1995), afirma que se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y resolver problemas estándar, pero que "existen grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento, que son el centro de este campo de las matemáticas" (Artigue, 1995, p.97).

Esta investigadora, expone su punto de vista respecto algunas de las dificultades en el aprendizaje del Cálculo:

- Dificultades asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo.
- Dificultades asociadas a la conceptualización y la formalización del concepto de límite.
- Dificultades asociadas a las rupturas necesarias con los modos de pensamiento algebraico y con las especificidades del trabajo técnico en el cálculo. (Artigue, 1995).

Hay otros autores que han investigado sobre estas dificultades, por ejemplo Cantoral (2000), refiriéndose a lo que denomina "dislexias escolares", señala que los alumnos aprenden a calcular derivadas, límites e integrales pero no pueden asignar un sentido más amplio a las nociones que permiten su comprensión.

En otras palabras los alumnos pueden llegar a dominar los aspectos algorítmicos de la derivación pero sin haber comprendido otras relaciones más sutiles. El mismo autor confirma lo que nosotros también hemos observado en el aula, es decir que al hallar la primera derivada de una función no son conscientes de que lo obtenido es una nueva función susceptible de derivación. Podemos conjeturar que durante la resolución del ejercicio, el alumno pierde de vista la parte conceptual y cree que lo que se desea enseñar es el proceso algebraico de derivación.

Otra dificultad que se observa es que, el hecho de presentar la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, se ve entorpecido por el conocimiento incompleto que los alumnos tienen sobre recta y pendiente de la recta, que normalmente (incluyendo el caso en estudio) han sido estudiados el semestre anterior.

Según nuestra experiencia docente, no son pocos los alumnos que aprenden a graficar rectas recién en el curso de Cálculo, hecho que se comprueba cuando se estudia el capítulo de Programación Lineal, en este mismo curso, mucho después de haber estudiado la derivada, en donde surgen dificultades debido a la poca pericia que tienen los alumnos en graficar funciones lineales y hallar los puntos de intersección de las rectas, tanto con los ejes coordenados como con otras rectas.

Selden, Selden, Hauk y Mason (1999), determinaron que estudiantes de Ingeniería que cursaban el curso de Ecuaciones Diferenciales, no usaban adecuadamente los recursos del Cálculo para resolver problemas no – rutinarios, prefiriendo métodos de solución aritméticos o algebraicos, en muchos casos manejándolos de forma inapropiada. En esta investigación los autores usan el término problema no – rutinario o simplemente “problema”, para referirse a una tarea cognitivamente no – trivial, es decir de la que el estudiante no conoce aún el método de resolución.

Los problemas rutinarios eran mayormente de cálculos algorítmicos o aplicación directa, en oposición a los no rutinarios, que incluían parámetros o requerían algún tipo de representación gráfica para alcanzar la solución (Selden et al., 1999).

Es necesario puntualizar a qué se refieren los autores cuando se habla de problemas no – rutinarios. Schoenfeld (1992), menciona que los problemas no rutinarios son problemas para los que no hay un algoritmo estándar, que permita extraer o representar la información dada, o problemas que tienen, ya sea información insuficiente o superflua.

Nuestro problema de investigación se centra en las dificultades en el aprendizaje del concepto de derivada, que han sido abundantemente descritas por los autores arriba mencionados, y que se presentan en forma cotidiana en los alumnos de nuestra institución. Dentro de las causas de la aparición de estas dificultades, aunque es la única, hemos identificado, coherente con los comentarios de algunos autores como Azcárate (2000) y Cantoral (2000), una posible debilidad de los conocimientos previos, que es necesario que los alumnos tengan para poder “anclar” los nuevos conceptos, y que éstos sean perdurables, disponibles y evocables en el tiempo (Ausubel, 2000). Por consiguiente nos proponemos diseñar una secuencia de tareas que, a partir de conocimientos previos que los alumnos tienen, ayude a reforzar la interpretación geométrica de la derivada, para que los alumnos no se queden solamente con la parte operativa del concepto y se pueda lograr un aprendizaje significativo.

1.3 PREGUNTA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

¿De qué manera el diseño de tareas, puede ayudar a un aprendizaje significativo del concepto de derivada?

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar una secuencia de tareas que ayude a una mejor comprensión del concepto de derivada por los estudiantes y permita identificar dificultades en el aprendizaje del concepto.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Diseñar una secuencia de tareas que contribuya a una mejor comprensión del concepto de derivada y de su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
2. Identificar posibles deficiencias en la comprensión de conceptos previos que son necesarios para el aprendizaje significativo del concepto de derivada.
3. Identificar algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de derivada.

CAPITULO 2: MARCO TEORICO

2.1 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Hemos incluido en el título de esta investigación el término “significativo”, porque consideramos que realmente tiene sentido usarlo. Dentro del diseño de tareas en general los investigadores están de acuerdo en que, ya sea para introducir un nuevo concepto o para reforzar un concepto ya aprendido por los alumnos, es importante que el punto de partida en general sean los conocimientos previos que ya tiene el alumno. Sobre este particular Orton (2005) señala que el aprendizaje significativo es un proceso en el cual cualquier nuevo conocimiento es incorporado al lograr conectarlo con algunos aspectos relevantes ya existentes en la estructura de conocimiento del individuo. Los nuevos conocimientos adquiridos se insertan en las estructuras existentes y pueden modificar los conocimientos anteriores o establecer nuevas relaciones entre ellos.

Ausubel (2000), indica que si el aprendizaje es significativo los conocimientos están más disponibles en la estructura cognitiva, y que se necesita que existan allí algunos conocimientos previos, denominados “ancla” para poder insertarse en las estructuras cognitivas del sujeto.

Es por ello que es importante conocer lo que los estudiantes ya saben para poder anclar los nuevos conocimientos a los ya existentes. Además es necesario, para introducir nuevos conceptos, que todos los alumnos tengan aproximadamente la misma base de conocimientos. Esto en forma práctica, se puede lograr por medio de cursos previos, como los de Nivelación de Matemáticas, que, bajo diversos nombres, son dictados por varias universidades con el fin de uniformizar los saberes previos de los estudiantes de primer ciclo.

Una de las condiciones para un aprendizaje significativo es la existencia de materiales potencialmente significativos para el aprendizaje.

Esta última condición a su vez requiere:

- Tareas de aprendizaje que sean no aleatorias, y que sean susceptibles de ser relacionadas con algún contenido relevante, de un cuerpo existente de conocimiento en algunos estudiantes.
- La presencia de un cuerpo de conocimiento en la estructura cognitiva de los estudiantes en particular. (Ausubel, 2000).

Asociado al concepto de aprendizaje significativo, está el concepto de aprendizaje por descubrimiento, frente al aprendizaje por recepción.

En el aprendizaje por recepción, los conocimientos son presentados al estudiante en su forma final en lugar de ser descubiertos. La tarea de aprendizaje en este caso no implica que el alumno tenga que descubrir nada por su parte.

Por el contrario en el aprendizaje por descubrimiento, el principal componente de lo que se quiere enseñar no es dado, sino que debe ser descubierto independientemente por el estudiante, reordenando la información dada en forma gradual e integrándola en su estructura cognitiva.

Ausubel (2000) señala que el aprendizaje por descubrimiento ofrece ventajas para el desarrollo de la habilidad de resolver problemas, sin embargo que el aprendizaje por descubrimiento no es una condición indispensable para el aprendizaje significativo y consume demasiado tiempo en las clases para ser usado con eficiencia en situaciones típicas de clase.

Particularmente para nuestro caso, podemos añadir que el aprendizaje por descubrimiento forma parte de la secuencia de tareas que hemos diseñado, porque se va guiando al alumno a través de una serie de tareas, para lograr una reflexión en torno al concepto de derivada y su relación con sus conocimientos previos, para finalmente desembocar en la resolución de un problema que requiere el uso de derivadas.

2.2 RESOLUCION DE PROBLEMAS

Para Schoenfeld (2006), casi toda acción humana está orientada hacia la realización de un objetivo y realizar los objetivos de alta prioridad puede ser caracterizado como un ‘problema’. Más específicamente un problema es una tarea que es difícil para el individuo que la está tratando de resolver. Es decir que es un concepto algo relativo, que depende del individuo. Lo que para unos es un problema, para otros es un mero ejercicio.

Para hablar de resolución de problemas nos remitimos a Polya (1957), quien habla de cuatro fases en el trabajo de resolver un problema.

1. Entender el problema.
2. Ver como las incógnitas están conectadas con los datos, para poder trazar un plan.
3. Llevar a cabo lo planeado.
4. Mirar hacia atrás cuando está completada la solución, revisarla y discutirla.

En este punto queremos señalar que el momento crítico es la fase “entendiendo el problema”, y que según nuestra experiencia docente, genera las más grandes dificultades en los alumnos de Administración que estudian Cálculo.

Es posible y bastante común que el estudiante no comprenda el problema. Es natural pensar que puede ser por múltiples razones. Descartando que sea algo que el estudiante no ha visto nunca, nos queda la opción de que el problema esté elaborado en una forma que está más allá de sus habilidades de comprensión. Es decir, el problema involucra habilidades que el alumno tiene o que son las que acaba de aprender, sin embargo ese hecho no es evidente para el estudiante después de la lectura del enunciado.

Muchos docentes mencionan a Polya cuando se enseña resolución de problemas en los cursos previos al de Cálculo, lamentablemente en ocasiones se limitan a enunciar las 4 fases propuestas por este autor para la resolución de problemas, como si tomar consciencia de eso ya fuera suficiente para que los alumnos puedan resolver problemas.

Una lectura atenta descubrirá algo que puede haber pasado desapercibido para muchos lectores de Polya: En la fase “entender el problema” Polya pone como condición para que el estudiante alcance comprensión de lo que se pregunta, que el problema sea bien escogido, no muy difícil y no muy fácil, y que sea presentado previamente en una forma natural e interesante. Es decir no solo se preocupa de cómo resolver el problema, sino de cómo se elabora (Polya, 1957).

En nuestra experiencia docente hemos observado que algunas de las dificultades de los alumnos para resolver problemas nacen de la forma inadecuada en que éstos están redactados o propuestos.

Gascón (1989), señala en su tesis doctoral la poca inclinación de muchos docentes a estimular la capacidad de los alumnos de generar estrategias de comprensión de los enunciados. Evidentemente para algunos docentes es más fácil resolver el problema y que los alumnos copien, que buscar formas creativas de lograr que comprendan el enunciado y acometan ellos mismos la resolución.

Han transcurrido muchos años desde Polya, y ya no podemos pensar en los problemas como eventos aislados. Algunos autores han rescatado el término “tareas matemáticas” en vez de usar el de problemas, como cuestiones propuestas a los alumnos que les permitan experimentar aspectos del pensamiento matemático (Breen y O’Shea, 2010).

En base a lo mencionado por los autores líneas arriba, podemos llegar a la conclusión de que sería bastante natural tratar de diseñar actividades que incluyan diferentes tareas que ayuden a completar la fase “entender el problema” de Polya. Es decir, en el diseño de nuestra actividad hemos contemplado que los alumnos vayan acometiendo tareas que les sirvan de preparación para las cosas que se les pide más adelante.

2.3 DISEÑO DE TAREAS

El marco téorico que elegimos para nuestro trabajo es el diseño de tareas (*Task Design*), algunos de cuyos principios se pueden visualizar en los siguientes trabajos de múltiples investigadores de este enfoque.

El término “tarea matemática” (*mathematical task*) suele evocar la idea de una actividad que se solicita a los alumnos, ya sea para realizar en la casa o en la clase, solos o en grupo (Breen y O’Shea, 2010).

“Tarea” es cualquier cosa que el profesor usa para demostrar matemáticas, interactuar con los estudiantes o para pedirle a los estudiantes que hagan algo (Watson y Ohtani, 2013).

Sierpinska (2004) considera que el diseño, análisis y prueba empírica de tareas matemáticas, ya sea para propósitos de investigación o enseñanza, es una de las más importantes responsabilidades de la educación matemática.

Otra definición de la misma autora, se refiere a “tareas matemáticas” como cualquier tipo de problema matemático, que tiene supuestos y preguntas claramente formuladas y que puede ser resuelta en tiempo predecible por los estudiantes (Sierpinska, 2004).

Debemos aclarar que la extensión y detalle del diseño de tareas varía enormemente entre los que trabajan en diseño de tareas (Watson y Ohtani, 2013).

Bokhove (2014), propone un modelo que se basa en algunos principios del diseño de tareas. En su modelo menciona que existen 3 etapas o componentes en una secuencia de tareas, que considera “tareas muy similares”: crisis, retroalimentación y desvanecimiento (crises, feedback and fading). Es decir que puede admitir la repetición de ejercicios como un medio para que los alumnos puedan aprender. Este mismo principio es enunciado por Watson y Mason (2005).

Mason y Johnston – Wilder (2006) hablan de “dimensiones de posible variación”, se pueden variar algunas dimensiones o aspectos del problema:

- ¿Qué aspectos de la tarea son fijos?
- ¿Qué aspectos son particulares, y pueden ser variados?

Los alumnos progresan cuando se percatan de que lo importante no son los números sino el método, y logran identificar “clases de problemas”. En nuestro trabajo usamos este concepto de variación para lograr una reflexión de los estudiantes sobre sus respuestas.

Las tareas no deben ser vistas individualmente sino dentro de un panorama mucho más amplio, una secuencia de tareas, que puede incluir ejercicios repetitivos, con pequeñas variaciones.

En ocasiones es necesario que la secuencia esté salpicada de ocasionales crisis, que necesiten de alguna retroalimentación para ser superadas. Conforme se desarrolla la secuencia de tareas, la retroalimentación va “desvaneciéndose”, con el objetivo de que el alumno no se vuelva demasiado dependiente de ellas en las evaluaciones (Bokhove, 2014).

Swan (2008), tiene un concepto más social del diseño de tareas, para él la tarea es solo una parte del diseño. Reconoce sin embargo que hay diferentes teorías que se aplican dependiendo de cuáles sean los resultados deseados.

Este autor se distancia del modelo de aprendizaje por descubrimiento y adopta una línea más confrontacional, en la que se generan “sorpresas, tensiones y conflictos cognitivos, que pueden ser resueltos mediante la reflexión y la discusión” (p.1).

Se proponen en dicho trabajo cinco tipos de tareas que estimulan los procesos inherentes al aprendizaje.

1. Clasificar objetos matemáticos.
2. Interpretar múltiples representaciones.
3. Evaluar enunciados matemáticos.
4. Creación de problemas.
5. Analizar el razonamiento y las soluciones.

Este investigador enfoca su trabajo en la utilización de múltiples representaciones. Uno de sus trabajos de investigación era la construcción de una secuencia de tareas para introducir el concepto de aumentos y disminución porcentual.

Figure 4: Verbal descriptions, decimal multipliers, fraction multipliers.

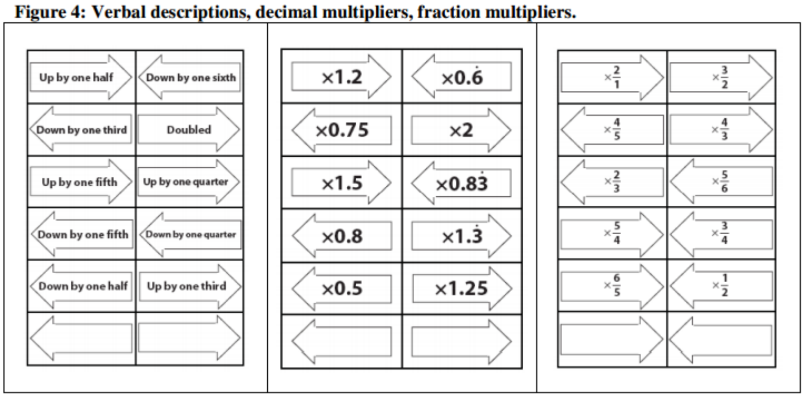


Figura 3

Si bien Swan propone un modelo de aprendizaje que denomina de "orientación colaborativa", siguiendo la influencia del constructivismo social, frente a lo que el mismo denomina "orientación de transmisión", que podemos relacionar con los métodos expositivos clásicos, el principio que enfatiza en su trabajo es el usar múltiples representaciones de un objeto matemático. Este autor propone que una de las condiciones para lograr un aprendizaje adecuado es que el profesor sea capaz de generar en el aula un clima adecuado para el aprendizaje.

Kullberg, Runesson y Mårtensson (2013), realizaron un estudio sobre cómo el diseño de tareas podía ayudar a comprender mejor el concepto de división entre números comprendidos entre 0 y 1. Fue un proceso cíclico realizado en tres sesiones. Después de cada sesión se discutían los resultados, se hacían ajustes para la siguiente tarea y la sesión la realizaba el siguiente profesor. Así hasta completar las 3 sesiones. El estudio también incluía un mapeo de cómo los alumnos resolvían cierto tipo de tareas antes y después de cada sesión.

Este caso es un ejemplo en el que los profesores, después de cada sesión, discutieron, reflexionaron sobre el proceso de enseñanza y refinaron el diseño de tareas, para direccionarlo mejor hacia lo que querían lograr y también para hacerlo más comprensible para los alumnos.

Entre las conclusiones expresadas por los autores del estudio está el hecho de que el primer profesor había tratado de que el material permitiera a los estudiantes establecer una conexión entre el cociente y el numerador, conexión que los alumnos no fueron capaces de lograr. Se hicieron algunos ajustes a la secuencia de tareas y los otros dos profesores enfocaron sus esfuerzos hacia ese tópico.

Para nuestro trabajo hemos usado este principio del diseño de tareas, es decir planteamos primero un piloto como experiencia exploratoria, y de acuerdo a los resultados hicimos algunos ajustes en el diseño de la secuencia de tareas. Los resultados obtenidos permitieron reformular la secuencia de tareas y así ir conformando una propuesta didáctica, que se puede ir modificando sucesivamente.

Ron, Zaslavsky y Zodik (2013), señalan que el proceso de diseño de tareas con frecuencia está formado por 3 etapas:

- Afirmar los objetivos y conectar la tarea con los objetivos.
- Diseñar una actividad genérica que nos dirija a dichos objetivos.
- Cuidadosamente escoger los ejemplos específicos para implementar la tarea genérica.

Su investigación estaba enfocada en preparar el terreno para presentar un concepto nuevo: el de derivada, y eligieron hacerlo creando la necesidad de contar con una herramienta y a la vez nuevo concepto, que les permita realizar el gráfico de funciones con mayor precisión.

Un concepto importante que señalan en su investigación es que construyeron el diseño de tareas basándose en los conocimientos previos que los alumnos tenían. El objetivo era mostrar algunas limitaciones en las herramientas que los estudiantes conocían para mostrar la necesidad de contar con un instrumento más poderoso. Esta forma de presentar el concepto se llama "aproximación por necesidad". En la siguiente figura mostramos la tarea diseñada.

Given the following function: $f(x)=$ ____

1. Complete the missing values in the following Table and mark the corresponding points in a Cartesian coordinate system:

x	-1	0	1
$f(x)$			

2. Do you think the given function increases in the domain $-1<x<1$?
3. Do you think the graph of the function in the domain $-1<x<1$ is a straight line?
4. Complete the values in the following Table, mark the corresponding points, and answer questions 2 & 3 for the domain $-2<x<2$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

5. Add to your Table the values $f(-1.5)$, $f(-0.5)$, $f(0.5)$, $f(1.5)$, and mark the corresponding points on the graph that you began sketching.
6. Now answer again questions 2 & 3 for the domain $-2<x<2$.
7. Can you know for sure from the values in your table where the function increases and where it decreases? Does the function have any extreme points?

Figure 1: A generic task for students aimed at evoking some limitations of a function value table

Figura 4. (Tomada de Ron et al., (2013))

La fase de escoger los ejemplos específicos es muy importante, en esta tarea, no hubiera sido muy apropiado escoger una función cuadrática, porque los alumnos podrían determinar lo pedido haciendo uso de sus conocimientos sobre función cuadrática.

En conclusión otro principio del diseño de tareas es que los ejemplos deben estar dirigidos a crear la necesidad del nuevo concepto que se quiere presentar.

Debido a este último hecho Ron et. al., (2013) concluyen que los ejemplos específicos que se escogen pueden cambiar dramáticamente la calidad de la tarea y su conexión con las metas.

Watson y Mason (2005), elaboraron una teoría que denominan "Teoría del aprendizaje a través de la ejemplificación", que consiste en solicitar a los alumnos realizar tareas de construcción de ejemplos, a partir de sus conocimientos previos.

En esta teoría, se utiliza mucho el concepto de *scaffolding*, que puede ser traducido como una construcción gradual, que a partir de objetos accesibles o familiares para el alumno, sus propiedades y asistencia apropiada, puede alcanzar a completar la tarea solo, sin que haya necesidad de reducir la complejidad cognitiva de la tarea (Stein, Grover, y Henningsen, 1995).

Damos un ejemplo de dos tareas en este enfoque:

Task 7a: How Different?

Give an example of a linear equation.
Change your example in some way to give a different straight line.
Make further *similar* alterations to get new straight lines.
Now make a different kind of change. How does the new straight line differ from those achieved so far?
What other kinds of change can be made, and what is the effect of these changes?

And this sequence may have similarities as well.

Task 7b: How Different Variation

Write down a function that is continuous except at one point.
Write down another.
Write down one that has a different kind of discontinuity at a point.
What other kinds of discontinuity can you make?

Figura 5. Tomado de Watson y Mason (2005).

Tarea 7a: ¿Qué tan diferente?

Dé un ejemplo de una ecuación lineal.

Cambie su ejemplo de alguna manera para dar una recta distinta.

Haga más alteraciones similares para lograr nuevas rectas.

Ahora haga un tipo diferente de cambio. ¿En qué difiere la nueva recta de las otras obtenidas hasta ahora?

¿Qué otros tipos de cambio se pueden hacer y cuál es el efecto de estos cambios?

Tarea 7b: Variación de la anterior.

Escriba (la regla de correspondencia de) una función que sea continua, excepto en un punto.

Escriba otra.

Escriba una, que tenga un tipo diferente de discontinuidad en un punto.

¿Qué otros tipos de discontinuidad puede Ud. hacer?

Podemos observar que cada tarea está compuesta de ejemplos, en los que el alumno debe construir objetos matemáticos. En estas dos tareas, se pueden apreciar varios principios del diseño de tareas, como empezar de conocimientos previos, avanzar gradualmente y además la posibilidad de cambiar la tarea ligeramente, para lograr que los alumnos reflexionen sobre lo que van construyendo.

La repetición "aparente" de ejemplos con pequeños cambios, según esta teoría contribuye a que el alumno comprenda un nuevo concepto a partir de la observación de una característica o un principio que se mantiene válido para una variedad de ejemplos. En ese tipo de tareas el estudiante hace lo que naturalmente hacen las personas, observar qué es igual y qué es diferente en cada caso (Watson y Mason, 2005).

Los autores mencionan la existencia de un "espacio personal de ejemplos", así como de un "espacio potencial de ejemplos", que según ellos mismos reconocen están inspirados en el concepto de "zona de desarrollo próximo" de Lev Vygotsky. Es decir que el espacio personal de ejemplos es el conjunto de ejemplos que los alumnos podrían construir solos, y el espacio potencial, es el conjunto de los ejemplos que están un poco más allá, pero para los cuales podemos usar el concepto de "*scaffolding*", logrando que el estudiante "extienda" el espacio personal de ejemplos que puede crear.

El núcleo de esta aproximación está basado en dos principios pedagógicos:

- Aprender matemáticas consiste en explorar, reacomodar, y extender los espacios de ejemplos y las relaciones dentro y entre ellos (se asume que hay varios dependiendo del conocimiento que se desea aprender).
- Experimentar ampliaciones del espacio de ejemplos (si son cuidadosamente guiadas), contribuye a la flexibilidad de pensamiento, no solo dentro del ámbito de la matemática, y potencia la adopción de nuevos conceptos.

En resumen podemos sintetizar algunos principios del marco teórico en el que nos basamos:

- Es importante que la secuencia de tareas considere los conocimientos previos de los alumnos.
- Es importante proporcionar *feedback* cuando sea necesario para superar las etapas de crisis.
- Es valioso usar diversas representaciones de los objetos matemáticos.
- Se puede pedir que los alumnos construyan ejemplos repetidos con pequeñas variaciones para lograr que comparen cada caso.

Nuestra investigación se enmarca dentro del diseño de tareas, tratando de mantener los principios básicos mencionados en las investigaciones precedentes, principalmente la teoría desarrollada por Watson y Mason (2005), que creemos incluye la mayor parte de los principios generales del diseño de tareas y está más cercana a lo que pretendemos llevar a cabo.

Además nos referimos al concepto de aprendizaje significativo de Ausubel, que sobre todo asigna la máxima importancia a lo que los alumnos saben, para construir los nuevos conocimientos, e incorporarlos en su estructura cognitiva (Ausubel, 2000). También usamos la terminología de Skemp (2006), es decir el aprendizaje relacional (esquemático) y el aprendizaje instrumental.

2.4 LA DERIVADA

2.4.1 ASPECTOS HISTORICOS

Boyer y Merzbach (2011) atribuyen a Fermat, haber encontrado alrededor de 1629, un método para encontrar los máximos y mínimos de funciones polinómicas, comparando el valor de una función en un punto x con el valor de la función en un valor $x+E$, y observó que en las proximidades del punto más alto o más bajo de la gráfica, el cambio era casi imperceptible. Mientras más pequeño era el valor de E más cercana era la diferencia a cero.

Aunque Kepler ya había observado este hecho, fue Fermat quien lo tradujo como un proceso para determinar tanto el máximo como el mínimo de una curva (Eves, 1953).

Barrow en 1670, explicó un método para obtener tangentes que usaba 2 variables (equivalentes a Δx ; Δy) en vez de una variable como Fermat. Se dice que Barrow fue el primero en darse cuenta de que la diferenciación y la integración eran operaciones inversas (Eves, 1969).

Entre todas las grandes contribuciones de Isaac Newton (1642 – 1727), quien por cierto fue discípulo de Barrow, está el método de los "fluxiones", para calcular tangentes a una curva, según el cual considera a las variables x y y, como "fluentes" y a sus respectivas razones de cambio como "fluxiones" (Boyer y Merzbach, 2011). Bajo este enfoque la abcisa y la ordenada son cantidades cambiantes en el tiempo. Así, el *momento* de un fluente es un cambio infinitamente pequeño. Si un fluente (como la ordenada del punto de la gráfica de una curva, se representa por y, entonces la fluxión de ese fluente está dada por $\dot{y}$. Su trabajo, que fue escrito en 1671, no fue publicado sino hasta 1736.

Lamentablemente los últimos años de vida de Newton se vieron oscurecidos por una controversia con Leibniz, quien había llegado a las mismas conclusiones, en cuanto a hallar tangentes. Leibniz (1646 – 1716) usó la notación diferencial dx y dy, para referirse a las pequeñas diferencias. Determinó las fórmulas para la diferenciación de un producto y un cociente, despreciando los productos de 2 diferenciales, tal como hizo Newton con sus *momentos*. La notación que usó Leibniz probó ser más conveniente que la usada por Newton, tal es así que algunas de sus representaciones se usan hasta nuestros días. Sin embargo la notación $f'(x)$ se la debemos a Lagrange (1736 – 1813) (Eves, 1969).

2.4.2 ASPECTOS FORMALES

Se dice que $a \in R$ es un *punto de acumulación* del conjunto *X*, cuando todo entorno *V* de *a* contiene algún punto de *X* diferente del propio *a*. Se representa mediante X' al conjunto de los puntos de acumulación de *X*. Si $a \in X$ no es un punto de acumulación de *X* se dice que es un punto aislado (Lima, 1997).

Consideremos la siguiente definición de derivada por el mismo autor:

Sean $f : X \to R$ y $a \in X \cap X'$. La derivada de la función *f* en el punto *a* es el límite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si este límite existe, se dice que la función *f es derivable* en el punto *a*.
Esta definición es la que se usa en nuestra institución educativa en el curso de Cálculo para estudiantes de Ciencias Administrativas, para presentar el concepto de derivada en un punto. Se presenta su interpretación geométrica, como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a; f(a))$.

Cuando existe la derivada $f'(x)$ en todos los puntos $x \in X \cap X'$, se dice que la función $f : X \to R$ es derivable en el conjunto *X*, obteniéndose una función $f' : X \cap X' \to R$, $x \to f'(x)$, llamada función derivada de *f*.

2.4.3 LA DERIVADA EN RESOLUCION DE PROBLEMAS DEL AMBITO ECONOMICO ADMINISTRATIVO

Hemos visto en la revisión histórica que una de las principales razones por las que nace el concepto de derivada fue la necesidad de encontrar solución a los problemas que involucraban máximos y mínimos, como lo establecen Boyer y Mertzbach (2011), refiriéndose a la introducción de la diferenciación por Fermat, que fue publicada póstumamente en su trabajo “Método para encontrar máximos y mínimos” de 1538.

Newton y Leibniz, no necesariamente al mismo tiempo, pero en forma independiente, dieron vida al cálculo infinitesimal. La motivación principal de la aparición del Cálculo fue dar solución a problemas que hoy son dominio de la ingeniería y la física, como son la pendiente de la recta tangente a una curva y la velocidad instantánea (Azcárate, Badillo, García y Moreno, 2011).

Ya que una de las principales aplicaciones de la derivada es determinar la razón de cambio de una variable con respecto a otra, la derivada ha extendido su campo de utilización a la economía para medir como cambian las variables económicas (costo ingreso, utilidad, producción, etc.) cuando cambia una variable de la cual dependen (unidades producidas, tiempo, precio). Podemos reseñar los aspectos más saltantes del ámbito económico en los que interviene el concepto de derivada.

Análisis marginal.

Uno de los conceptos más importantes en Economía es determinar cuánto se incrementará una variable cuando otra, de la cual depende se incrementa en una unidad. Para cada nivel de producción es importante preguntarse si la empresa debería aumentar su producción. Lo que se desea finalmente es aumentar la utilidad.

El **costo marginal** es, para un determinado nivel de producción, el aumento de los costos totales cuando la producción aumenta en una unidad. El **ingreso marginal** es, para un determinado nivel de producción, el aumento del ingreso total cuando la producción aumenta en una unidad.

La empresa decidirá aumentar su producción mientras que el ingreso marginal sea mayor que el costo marginal, dado que producir y vender una unidad adicional aumenta los beneficios (utilidad). En el caso contrario, es decir si el costo marginal supera al ingreso marginal, la empresa no debe aumentar su nivel de producción, porque cada unidad adicional producida disminuye los beneficios (Begg, Fisher y Dornbusch, 2002).

Si una empresa conoce sus curvas de costos e ingreso puede, usando el concepto de derivada, determinar su costo e ingreso marginales.

Para algún nivel de producción q se puede determinar, aproximadamente, el costo e ingreso marginal por medio de las relaciones:

$$\text{Costo Marginal } = \frac{dC}{dq} \quad ; \quad \text{Ingreso Marginal } = \frac{dI}{dq}$$

Esta aproximación es válida para valores cercanos a q, debido a que en las proximidades de q la pendiente de la recta tangente a las gráficas del costo y del ingreso es aproximadamente igual al aumento en el ingreso y el costo totales, generado por el incremento de una unidad en el nivel de producción (Azcárate et al., 2011).

Así pues las funciones costo e ingreso marginal son las razones de cambio instantáneas de las respectivas funciones de costo e ingreso, respecto al número de unidades producidas, considerando todos los otros factores constantes, es decir asumiendo que el costo e ingreso solo dependen del número de unidades producidas. (Azcárate et al., 2011).

Es importante hacer notar en esta parte que, dado que la variable independiente es el número de unidades producidas, se está trabajando con un subconjunto de los números racionales (suponiendo que las unidades puedan estar en cientos o en miles). Sin embargo se debe extender el dominio a los números reales mayores o iguales que cero, para que la función sea continua, porque de lo contrario no sería derivable.

Oferta y demanda

La demanda es una medida de la cantidad de bienes que los consumidores están dispuestos a adquirir a cada precio concebible.

La oferta es la cantidad de un bien que los productores (u ofertantes en general), están dispuestos a ofrecer a cada precio concebible. (Begg et al., 2002).

Bajo el supuesto de que todos los otros factores permanecen constantes (*Ceteris paribus*), a mayores precios aumentará la cantidad ofertada del producto, pero del mismo modo para un incremento en el precio, la cantidad demandada del producto disminuye.

Las relaciones entre el precio y las cantidades ofertada y demandada, dado el supuesto considerado en el párrafo anterior, se conocen como **función de oferta** y **función de demanda**, respectivamente.

Se debe hacer la misma aclaración que se hizo en el caso de análisis marginal, sobre el dominio de las funciones de oferta y demanda, dado que estamos hablando de unidades producidas o vendidas y de precios, que son números racionales mayores o iguales que cero, se consideran como funciones continuas en el conjunto de los números reales mayores o iguales que cero, para poder hacer uso de las herramientas de diferenciación. Si las funciones de oferta y demanda no son lineales, la derivada es una poderosa herramienta para estudiar el comportamiento de la cantidad demandada y ofertada a partir de un cambio en el precio.

La pendiente de las curvas de oferta y demanda es una medida del comportamiento de la cantidad demandada y ofertada cuando hay cambios en los precios. Así por ejemplo, si una empresa se dedica a la exportación de tomates, y el precio en el mercado aumenta, la gerencia tomará la decisión de aumentar la producción (si esto es físicamente posible). Por otro lado el consumidor final, ante un alza en los precios de tomate, puede decidir disminuir su consumo o reemplazarlo por otros productos, y así disminuye la cantidad demandada.

Observando estos cambios, se deduce que en la función de oferta la derivada de la cantidad ofertada con respecto al precio será positiva y en la función demanda la derivada de la cantidad demandada con respecto al precio será negativa. Para efectos didácticos en los cursos de Pre-Cálculo, se considera que las funciones oferta y demanda son lineales (Azcárate et al. 2011), sin embargo en los cursos de Cálculo, se pueden utilizar funciones no lineales, usando el concepto de derivada, que nos permite conocer la pendiente de la curva en cada punto, a partir de su regla de correspondencia.

CAPITULO 3: LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA

3.1 METODOLOGIA

La metodología del presente trabajo de investigación es cualitativa, exploratoria y descriptiva. Podemos mencionar 4 características de la investigación cualitativa (Creswell, 2003) que están relacionadas con nuestro trabajo:

- Usa múltiples métodos que son interactivos y humanísticos, con participación activa de los individuos investigados.
- Es emergente, más que fuertemente restringida. Las preguntas de investigación pueden cambiar y ser refinadas.
- Es fundamentalmente interpretativa. Esto significa que el investigador realiza una interpretación de los resultados.
- Posibilita que el investigador cualitativo se comprometa en roles que van desde no participante hasta completamente participante.

Por otro lado las formas en las que se recoge la información pueden ser (Creswell, 2003):

- Observaciones. El investigador toma nota de la conducta y actividades de los individuos en el lugar de investigación.
- Entrevistas. El investigador conduce entrevistas personales a los individuos participantes.
- Focus groups. En los que se pueden considerar entre 6 a 8 entrevistados por grupo, para recoger las opiniones de los participantes.
- Recolección de documentos.
- Material audio – visual.

3.2 EL ESCENARIO

Se realizó la investigación en el marco del curso de Lógica Matemática, de la carrera de Administración de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC).
El nombre del curso es Lógica Matemática, que incluye tópicos de Cálculo y de Lógica, es un curso de segundo ciclo.

3.3 LOS PARTICIPANTES

- Se escogió a 15 alumnos de una sección de 40 alumnos, de la cual el investigador era a su vez el profesor del curso.
- La elección de los participantes fue hecha entre los que mostraron disposición de participar y tenían la disponibilidad de tiempo.
- Los participantes tenían diferentes grados de conocimiento de los cursos previos, había desde muy buenos alumnos hasta regulares, considerando lo que sus notas y sus actividades en la clase reflejaban hasta ese momento.
- Las edades estaban entre 17 y 18 años. Eran 10 señoritas y 5 varones.
- Su actitud y disposición a colaborar eran óptimas.

3.4 EL CONTEXTO

- El curso previo es de aprendizaje de habilidades algebraicas, funciones básicas y propiedades de funciones, así como resolución de problemas del ámbito económico – administrativo, usando dichas habilidades.
- Todos los alumnos llevaban el curso de Lógica – Matemática por primera vez.
- Los estudiantes ya habían terminado el estudio de la derivada de funciones de una variable, dentro del curso, para cuyo estudio se asignan 12 horas en 2 semanas.
- Los alumnos ya habían tenido una evaluación del tema de derivadas.
- Como parte del curso se estudia posteriormente funciones de dos variables y derivadas parciales.

- Todos los temas del curso se direccionan hacia problemas de aplicación del ámbito de su carrera.

3.5 DISEÑO DE LA SECUENCIA DE TAREAS

El diseño de la secuencia de tareas se realizó a partir del marco teórico escogido (diseño de tareas), usando los principios expuestos por los investigadores de ese enfoque, con la idea de contribuir a un aprendizaje significativo del concepto de derivada, que, por las razones expuestas en los antecedentes, podía no haber ocurrido en muchos casos.

La secuencia es coherente con el enfoque expuesto por Watson y Mason (2005), que recogen el concepto de *scaffolding* para el diseño de tareas, las que son presentadas como "ejemplos", en los que se pide a los alumnos la construcción de objetos matemáticos, familiares para ellos, y se realizan variaciones en los ejemplos, para que los alumnos analicen los cambios y puedan ir obteniendo relaciones, entre la derivada de la función f en un punto, con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función.

Para el diseño nos basamos en algunos principios del diseño de tareas enunciados por los autores ya mencionados con anterioridad.

- La parte inicial de la secuencia explora y evoca los conocimientos previos de los participantes, adquiridos en el curso anterior.
- Las preguntas que se diseñaron solicitaban a los participantes construir ejemplos (gráficos y analíticos) de objetos matemáticos familiares para ellos, pero que tuvieran cierto comportamiento no tan familiar, con las herramientas que ellos tenían en ese momento (curso anterior y presente).
- Dentro de las preguntas se incluyó sub – preguntas, solicitando que los participantes expliquen de manera concisa el comportamiento de los objetos obtenidos, por escrito.
- Las preguntas fueron diseñadas de modo que la demanda cognitiva fuera gradualmente en aumento.
- Ante la aparición de conflictos cognitivos o semióticos insalvables se proporcionó feedback a los participantes.

- Se usaron 3 representaciones diferentes del objeto matemático derivada: gráfica, algebraica y simbólica.
- En una secuencia de 4 preguntas (preguntas 3, 4, 5 y 6) se hicieron pequeñas variaciones para producir comparación y reflexión por parte de los participantes.

3.6 PUESTA EN ESCENA

- Una semana antes de la aplicación de la secuencia didáctica diseñada, se realizó un piloto con 9 alumnos de la misma sección. **Ver Anexo 4.**
- Después de analizar los resultados se hizo algunos cambios a las tareas, por razones de complejidad semiótica y de enfoque hacia la resolución de problemas.
- La secuencia se llevó a cabo en una sola sesión de 120 minutos.
- Se entregó el material completo a los alumnos.
- El trabajo fue individual, pero no se restringió el diálogo.
- Se proporcionó feedback, cuando hubo alguna dificultad.

3.7 DESCRIPCION DE LA SECUENCIA DE TAREAS. Ver anexo 1

Partiendo de los conocimientos previos de función lineal, y pendiente, se explora el objeto matemático función lineal, desde el punto de vista del crecimiento o decrecimiento, tratando de que el alumno establezca conexiones entre la velocidad de crecimiento y la pendiente de la recta, así como con la derivada de la función, teniendo en cuenta que los alumnos ya han estudiado el concepto de derivada.

Posteriormente se trabajó con los conceptos de función creciente y decreciente, más rápidamente y más lentamente con el registro gráfico y simbólico (no algebraico). Se buscaba que los participantes relacionaran el comportamiento de la función con la pendiente de la recta tangente y con el valor de la derivada de la función en un punto, especialmente en los extremos relativos.

En ese sentido, se solicitó construir ejemplos de funciones, conocida cierta información sobre el comportamiento de la función. Se diseñó una serie de 4 preguntas (de la 3 a la 6), en las que se pedía dibujar una función, que cumplía ciertas condiciones, de crecimiento o decrecimiento y se acompañó esta pregunta que podemos llamar “principal” con 5 sub preguntas, en las que el alumno tenía que reflexionar acerca de la función que había dibujado y escribir sobre ella.

En la pregunta 7 los estudiantes tenían que construir un ejemplo gráfico de una función, conocido el comportamiento de la función derivada. En la pregunta 8, se pidió a los alumnos modificar las condiciones dadas en la pregunta anterior y construir una nueva gráfica, dejando que elija las condiciones a modificar.

Finalmente se presentó un problema contextualizado, en el que los participantes podrían transferir los conocimientos adquiridos. Además se pidió modificar las condiciones de dicho problema, para obtener un resultado diferente.

Cabe anotar que los alumnos no conocen el término **función lineal afín,** por razones de simplicidad en el curso previo, se asigna el nombre de función lineal a todas las rectas, no verticales de pendiente diferente de cero.

3.8 SECUENCIA DE TAREAS.

<u>Pregunta 1</u>.

En un mismo sistema de ejes grafique dos funciones **lineales** f y $\boldsymbol{g}$ que sean **crecientes,** pero que crezcan de manera diferente.

Objetivos de la pregunta.

- Vincular el inicio de la actividad con objetos matemáticos ya conocidos por los alumnos, buscamos conocimientos ancla, para ir acercándonos poco a poco al concepto de derivada.
- Explorar la fortaleza de los conocimientos previos de función lineal.

Sobre el dibujo realizado se pidió contestar 3 sub-preguntas:

1a. Explique cuál es la diferencia entre el crecimiento de f y g.

Objetivos de la pregunta:

- Lograr que el alumno establezca intuitivamente que una pendiente mayor corresponde a un crecimiento más rápido de la función lineal.
- Lograr que el alumno verbalice sobre su producción y confirmar los conocimientos previos.

1b. Escriba una posible regla de correspondencia para cada una de las funciones lineales que ha dibujado.

Objetivos de la pregunta:

- Involucrar otra representación de la función.
- Indagar si el estudiante puede estimar las pendientes numéricamente.
- Explorar debilidades en los conocimientos previos.

1c. Explique cómo se comporta la derivada de las funciones f y g, en cada punto.

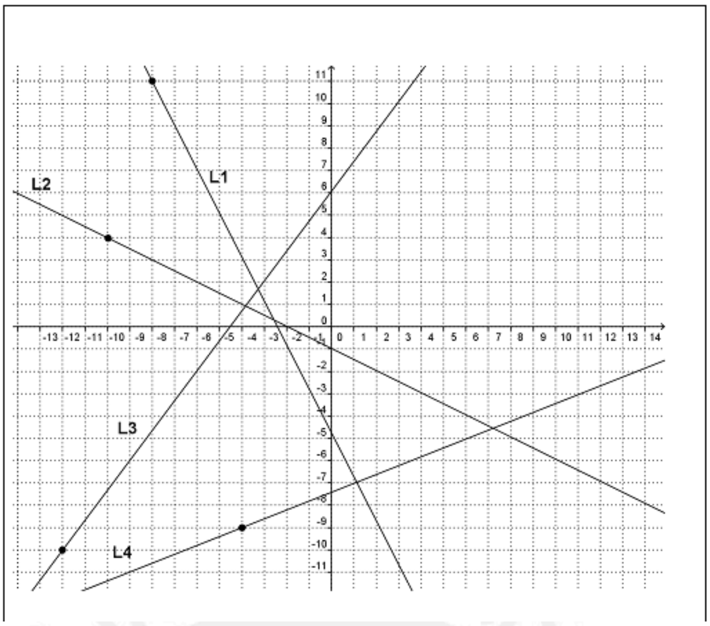
Objetivos de la pregunta:

- Indagar cuál es el nivel de identificación que tiene el alumno entre el valor de la derivada de la función lineal y la pendiente de la recta que representa dicha función lineal.
- Lograr que el alumno explique y muestre sus concepciones sobre la derivada de una función lineal, en cualquier punto.

<u>Pregunta 2.</u>

Determine la pendiente de cada una de las rectas mostradas en la gráfica.

2. Determine la pendiente de cada una de las rectas mostradas en la gráfica.



Objetivos:

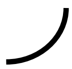
- Recuperar los conocimientos previos sobre signos de las pendientes de las rectas, para usar en las tareas posteriores.
- Investigar posibles carencias en habilidades de cursos previos que puedan influir en el aprendizaje de conceptos nuevos.

<u>Pregunta 3.</u>

Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **creciente**, pero cada vez más rápidamente.

Objetivos: La primera de una serie de 4 preguntas similares, en las que se perseguía:

- Que en base a sus conocimientos previos de funciones, los alumnos pudieran darse cuenta de que las funciones pueden crecer de distintas maneras.
- Investigar su conocimiento de funciones crecientes.

Respuesta esperada:  o una forma parecida.

Sub-preguntas:

3a. Cuando la variable *x* crece, entonces la variable *y* …………………………………   **Objetivos:**   - Relacionar una función creciente con una imagen en la mente del alumno.   - Relacionar el comportamiento de la función que han dibujado, con su derivada en cualquier punto.
3b. Cuando la variable *x* crece entonces la derivada de la función   Es positiva ( ) Es negativa ( )   **Objetivo:**   - Investigar si relaciona el crecimiento de la función con el valor de la derivada en cualquier punto.   - Obligarlo a reflexionar sobre la posibilidad de dicha relación.
3c. Complete el espacio :   Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........f'(x_2)$ **Objetivos:**   - Que el alumno establezca que la derivada es mayor conforme crecen los valores de la variable *x*, a partir de la observación de su gráfica.   - Involucrar la representación simbólica.
3d. ¿Para algún valor de la variable *x* se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?   **Objetivos:**   - Lograr que el alumno reflexione sobre el significado geométrico cuando la derivada es cero.   - Determinar si relacionan la pendiente de la recta tangente con la derivada.
3e. ¿La función podrá tener un máximo? Si ( ) No ( ) ¿Por qué?   **Objetivo:**   - Lograr que el alumno pueda contestar a partir de su gráfica y de la información dada.

Pregunta 4.

Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **creciente**, pero cada vez más lentamente.

Objetivo de la pregunta: Generar que, en base a sus conocimientos previos de funciones, y a la luz de la pregunta anterior los alumnos puedan tener una imagen mental de una función que cumpla ciertas condiciones.

Respuesta esperada:  o parecida.

Sub-preguntas:

4a. Cuando la variable *x* crece, entonces la variable y ……………………………………

Objetivo: Reforzar su concepto de función creciente y decreciente.

4b. Cuando la variable *x* crece entonces la derivada de la función

Es positiva ( ) Es negativa ( )

Objetivo: Relacionar el comportamiento de la función que han dibujado, con su derivada en cualquier punto.

4c. Complete el espacio :

Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)$........ $f'(x_2)$

Objetivo:

- Lograr que el alumno establezca que la derivada es menor conforme crecen los valores de la variable *x*, a partir de la observación de su gráfica.
- Involucrar el registro simbólico en las respuestas.

4d. ¿Para algún valor de la variable x se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?

Objetivo:

- Generar que el alumno reflexione sobre el significado geométrico cuando la derivada es cero, observando su gráfica.

4e. ¿La función podrá tener un máximo? Si ( ) No ( ) ¿Por qué?

Objetivo: Que el alumno pueda contestar a partir de su gráfica y de la información dada.

<u>Pregunta 5.</u>

Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **decreciente**, pero cada vez más rápidamente.

Objetivo de la pregunta:

- Que el alumno refuerce o corrija sus concepciones en base a los resultados alcanzados en las 2 preguntas anteriores.

Respuesta esperada:  o parecida.

Sub-preguntas:

5a. Cuando la variable x crece, entonces la variable y ....

Objetivo: Reforzar su concepto de función creciente y decreciente.

5b. Cuando la variable x crece entonces la derivada de la función

Es positiva ( ) Es negativa ( )

Objetivo: Relacionar el comportamiento de la función que han dibujado, con su derivada en cualquier punto.

5c. Complete el espacio :

Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........f'(x_2)$

Objetivo: Que el alumno establezca que la derivada es menor conforme crecen los valores de la variable *x*, a partir de la observación de su gráfica.

5d. ¿Para algún valor de la variable *x* se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?

Objetivo: Explorar si el alumno ya está relacionando la pendiente de la recta tangente con el comportamiento de su gráfica.

5e. ¿La función podrá tener un mínimo? Si ( ) No ( ) ¿Por qué?

Objetivo: Que el alumno pueda contestar a partir de su gráfica y de la información dada.

<u>Pregunta 6.</u>

Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **decreciente**, pero cada vez más lentamente.

Objetivo de la pregunta:

- Que el alumno refuerce o corrija sus concepciones en base a los resultados alcanzados en las 3 preguntas anteriores.
- Respuesta esperada:  o parecida.

Sub-preguntas:

6a. Cuando la variable *x* crece, entonces la variable *y* ………………………………….

Objetivo: Reforzar su concepto de función creciente y decreciente.

6b. Cuando la variable *x* crece entonces la derivada de la función Es positiva ( )   Es negativa ( ) **Objetivo:** Relacionar el comportamiento de la función, con su derivada.
6c. Complete el espacio : Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........f'(x_2)$ **Objetivo:** Lograr que el alumno detecte que la derivada va creciendo (es menos negativa) conforme crecen los valores de la variable *x*, a partir de su gráfica.
6d. ¿Para algún valor de la variable *x* se cumple que $f'(x)=0$? ¿Por qué? **Objetivo:** Determinar si el alumno a este nivel está comprendiendo que la derivada puede aumentar a partir de valores negativos pero no alcanzar el valor cero.
6e. ¿La función podrá tener un mínimo? Si ( ) No ( ) ¿Por qué? **Objetivo:** Lograr que el alumno exprese sus ideas por escrito en palabras, a partir de su gráfica y de la información dada.

<u>Pregunta 7:</u>

Grafique una función continua $y = f(x)$ que sea creciente cada vez más lentamente para todo $x < 2$, y que sea decreciente cada vez más rápidamente para todo $x > 2$.

Objetivo de la pregunta:

- Lograr que el alumno construya la gráfica de una función en base a la experiencia adquirida en las preguntas anteriores.

Sub-Preguntas:

7a. ¿Qué se puede decir sobre la derivada de *f* cuando $x = 2$?

Objetivo: Investigar a través de la expresión escrita el aprendizaje del alumno.

7b. ¿Qué ocurre con la función en x=2?

Objetivo: Lograr que el alumno exprese con palabras o con símbolos una conclusión emanada de su gráfica.

Pregunta 8:

Dibuje la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

a. $f'(-3) = 0$ y $f'(1) = 0$

b. $f'(x) > 0$ para $x < -3$

c. $f'(x) < 0$ para $-3 < x < 1$

d. $f'(x) > 0$ para $x > 1$

Objetivos:

- Examinar la comprensión relacional de los valores que toma la derivada de una función.
- Explorar la evolución que puede haber tenido el alumno a través de la secuencia de tareas.

Pregunta 9:

En el problema anterior mantenga la condición **a.** y modifique una o más de las condiciones **b, c, d.** Escriba las condiciones a, b, c, y d; y luego esboce un gráfico de la función que cumpla las condiciones escritas por Ud.

Objetivos:

- Examinar la comprensión relacional del estudiante con una tarea de mayor demanda cognitiva.

- Investigar si el estudiante relaciona el signo de la derivada con el comportamiento creciente o decreciente de la función.

Pregunta 10:

La función de costo total de la empresa ALFA, en términos del número de unidades q que fabrica, es $C(q) = \frac{q^2}{3} + 2q + 300$ donde C está en dólares.

a) Determine el nivel de producción q_α que minimiza el **costo promedio** por unidad.

b) La empresa BETA tiene una función de costo total similar a la de la empresa ALFA, pero el nivel de producción que minimiza el costo promedio por unidad es $q_\beta = 50$.

   i. Escriba una posible función de costo total de la empresa BETA.

   ii. Explique cómo llegó a obtener tal función de costo de la empresa BETA.

Objetivos:

- Examinar el nivel de comprensión del concepto de derivada al tener que usarlo en un problema contextualizado del campo económico administrativo.
- Examinar el manejo de recursos algebraicos ligados a la comprensión del valor de la derivada en un punto óptimo de la función.
- Recordar el concepto de costo promedio, que será usado más adelante en el curso.

CAPITULO 4: RESULTADOS Y ANALISIS

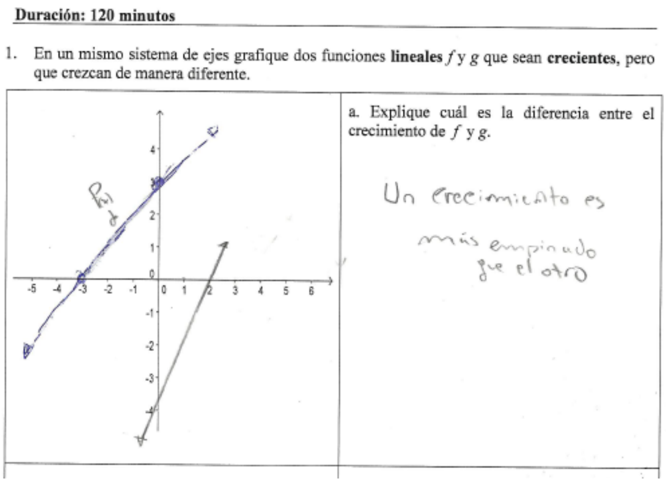
4.1 ANALISIS DE LOS RESULTADOS.

1. Se elaboró cuadros para el registro de la información, asignando a cada alumno un número del 1 al 15 (ver anexo 2).
2. Se elaboró una preguntas aclaratorias dirigidas a algunos alumnos con el objetivo de tener una idea más clara de cuáles habían sido sus ideas al contestar ciertas preguntas.

<u>**Pregunta 1. Gráfica.**</u>

Resultados y análisis.

En esta primera pregunta 11 de los 15 alumnos (73%) dibujaron 2 rectas no paralelas, 2 (13,5%) dibujaron rectas manifiestamente paralelas y los 2 restantes (13,5%) dibujaron una recta y una parábola.



- Un 55% de los alumnos (10) dibujaron rectas no paralelas, lo que revela cierta intuición en no particularizar demasiado el caso.
- Sin embargo también se puede observar una de las características que se mantienen durante toda la secuencia de tareas: Los alumnos tienen deficiente capacidad lectora. A pesar de que la frase “funciones lineales” estaba resaltada en negrita, 2 alumnos la ignoraron y dibujaron recta y parábola.

Pregunta 1a.

Resultados y Análisis:

- Un 33% de los alumnos dijeron que una de las rectas tenía mayor pendiente que la otra, y otro 33% que una recta crecía más rápido que la otra. Es decir que **solo** este último grupo de 33% relaciona la pendiente con crecimiento al comienzo de la secuencia de tareas.
- Los dos alumnos que habían dibujado recta y parábola trataron de establecer que había una diferencia en la velocidad de crecimiento, pero lo hicieron erróneamente, porque su dibujo no se lo permitía.
- Otros cinco alumnos (33%) dijeron que una pendiente era más elevada, empinada o mayor que la otra. Dos de los restantes contestaron cosas que no tenían nada que ver y el último no respondió, a pesar de que fue capaz de dibujar las rectas correctamente.
- Varios alumnos no entendieron exactamente la pregunta. Si no hubiera habido retroalimentación, pocos la hubieran contestado.
- Hay una cierta dificultad para expresar en palabras sus producciones matemáticas.

Pregunta 1b.

Resultados:

- Diez alumnos fueron capaces de hallar las reglas de correspondencia correctamente. Uno de los que hizo recta – parábola, pudo escribir correctamente las reglas de correspondencia de la recta y la parábola, el otro no contestó, aunque trató.

- Los otros tres estudiantes se equivocaron en una de las dos rectas: el signo de la pendiente no correspondía.

Análisis:

- No entendieron la pregunta, se tuvo que proporcionar feedback.
- Existen dificultades con la terminología, no entendían el término regla de correspondencia: conflicto semiótico.

Pregunta 1c.

- Cinco alumnos calcularon la derivada pero no explicaron. Sólo dos alumnos pudieron calcular bien y explicar bien, dos más, explicaron bien sin calcular, los consideramos como correctos. Los resultados en conjunto de toda la tarea se muestran en el Cuadro 1.

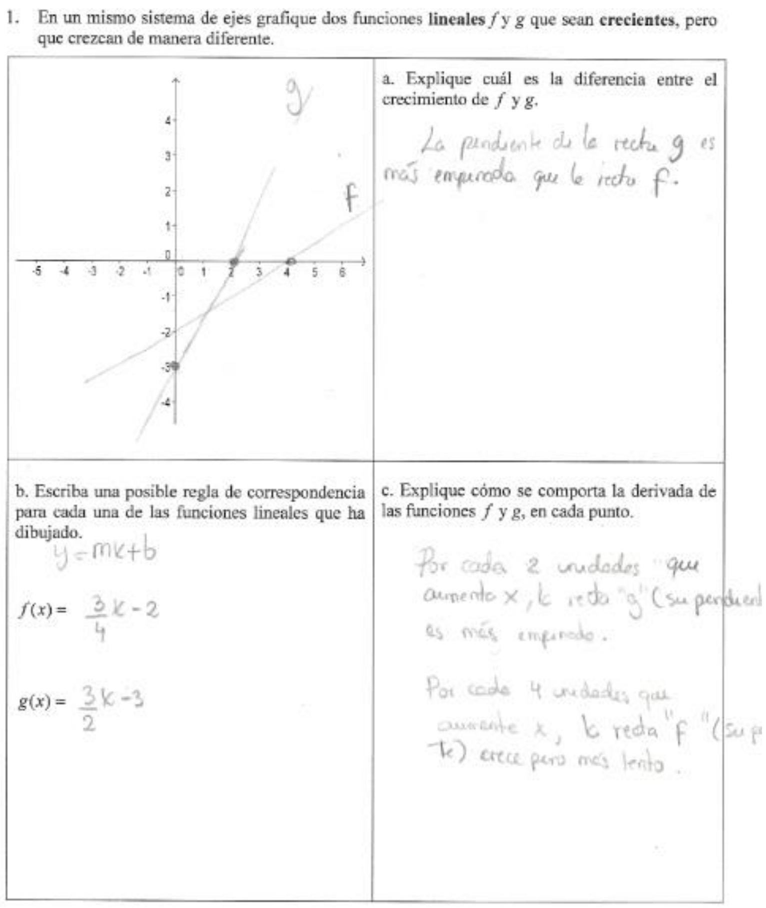
			Diferencia en crec.				Regla de corresp.			Comportamiento de derivada					
			1a				1b			1c					
		Gráfica	Crec.	Pend.	NC	NR	1 bien	Ambas bien	NR	Expl. bien	Calc. bien	Calc. bien Expl. bien	Calc. bien Expl. mal	Expl. mal	NR
1	No paralelas	1,3,4,5 6,7,8,9 12,13	1,4,5 9,12	6,7,8 11,14		3	2,12,13	1,3,4,5 6,7,8 9,10,14		1,9	3,4,5 8,14	6,7		13	12
	Paralelas	2,10			2,10								2,10		
	Recta/Paráb	11,15	11,15					11	15					15	11

Resultados

- Cinco alumnos calcularon la derivada usando las reglas de correspondencia, pero ninguno de ellos fue capaz de explicar cómo se comportaba la derivada.
- Dos alumnos explicaron, sin calcular y otros dos calcularon y explicaron (5, 7), lo que revela el manejo de por lo menos dos registros en estos 2 últimos.

Análisis:

- La gran dispersión de las respuestas en esta tarea, nos revela que la pregunta estaba más allá de la capacidad de comprensión de algunos alumnos.
- En general no relacionan la derivada de la función “lineal” con la pendiente de la recta.
- Podemos observar que en preguntas en las que se pide explicar (pregunta abierta) es un reto difícil de afrontar para nuestros estudiantes, su capacidad de expresión escrita es limitada, como lo muestra Amalia (13):


1. En un mismo sistema de ejes grafique dos funciones **lineales** f y g que sean **crecientes**, pero que crezcan de manera diferente.

a. Explique cuál es la diferencia entre el crecimiento de f y g.

La pendiente de la recta g es más empinada que la recta f.

b. Escriba una posible regla de correspondencia para cada una de las funciones lineales que ha dibujado.

y = mk+b

$f(x) = \frac{3}{4}k - 2$

$g(x) = \frac{3}{2}k - 3$

c. Explique cómo se comporta la derivada de las funciones f y g, en cada punto.

Por cada 2 unidades que aumento x, la recta "g" (su pendiente) es más empinado.

Por cada 4 unidades que aumente x, la recta "f" (su pendiente) crece pero más lento.

- En esta pregunta hubo que aclarar el significado de lo que estaba escrito, es decir que a partir de la información que tenían, determinen el comportamiento de la derivada.
- Es notable el hecho de que los alumnos que explicaron mal, no explicaron o no respondieron la pregunta, totalizaron 73% del total.

<u>Pregunta 2. Cálculo de pendientes.</u>

Resultados y Análisis.

En el Cuadro 2 podemos apreciar que los alumnos que hicieron las 4 pendientes correctamente fueron 5. Es notable que el 43% de los alumnos se equivocaran en por lo menos dos de las rectas.

		4	3	2	1	0
2	Pendientes correctas	1,5,6 10,11 12,13	2,4	14,15	3,7,8	9

Cuadro 2

- Los alumnos tienen dificultad en calcular la pendiente mediante la sola observación de la gráfica.

<u>Pregunta 3. Función creciente cada vez más rápido.</u>

Resultados de la gráfica.

Los resultados para la pregunta 3 se muestran en el cuadro 3.

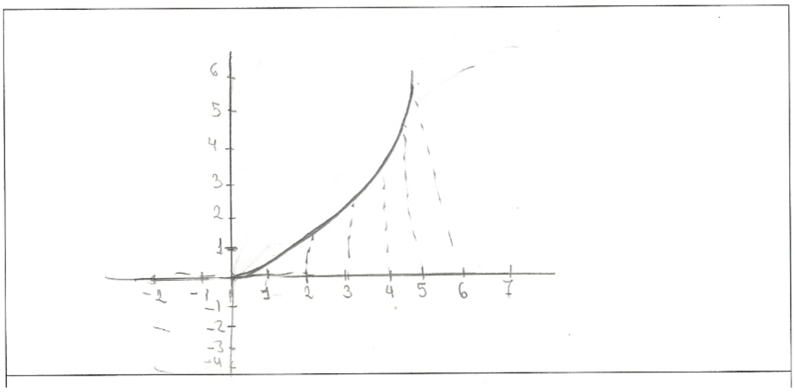
- Solo el 53% de los estudiantes pudo graficar correctamente la función, con el dominio correcto.
- Un 33%, pudo hacer la gráfica pero con el dominio incorrecto.
- El 20% dibujó funciones cuadráticas acotadas con vértice en el origen.

	Gráfica			3a		3b		3c			3d					3e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Otra	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
3		1,2,3 4,6,7 8,10	9 14 15	1,2,3,4 6,7,8,9 10,14 15		1,2,3 4,5,6 7,8,9 10,14,15		1,2,4 6,8,9 10 14,15	3,7		2,4	14 15, 9	1,3 6,8 10		7	9 14	8 15	1,2,3 4,5,6 7,10		
			5	5					5				5					5		
		12		12		12				12			12					12		
		13	11	11 13		11 13		13	11						13	11 13				

Cuadro 3.

- La producción de Nadia (15) para esta pregunta se muestra en el gráfico:

3. Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **creciente**, pero cada vez más rápidamente.



Leyenda:

Dom OK: El dominio de su gráfica correspondía con lo pedido.

Dom X: Dominio no corresponde.

Si/J: El alumno responde que sí y justifica bien (de acuerdo a su dibujo).

Si/XJ: El alumno responde que sí y justifica mal, o no justifica.

No/J: El alumno responde que no y justifica bien.

No/XJ: El alumno responde que no, pero justifica mal o no justifica.

NR: El alumno no responde.

Análisis de la gráfica de la Pregunta 3:

- En algunos casos es posible que algunos de los que hicieron bien la gráfica, no la hayan hecho en forma consciente, como revelan las respuestas posteriores.
- Algunos alumnos hacen la gráfica sin tomar en cuenta todas las condiciones que se les pide.
- Cuando se presentan varios datos al mismo tiempo el estudiante no es capaz de procesarlos todos. En varios casos ignoraron el dominio que se les daba (33%).
- El recuerdo de las gráficas de funciones cuadráticas es tan fuerte, que, en algunos casos no permite otro tipo de curva.
- En la pregunta aclaratoria la alumna Nadia (15) respondió lo siguiente sobre esta misma pregunta 3 (gráfica):

Alumno: Nadia

1.- De acuerdo al enunciado modificarías algo? Describe.

No modificaría, ya que te piden que grafiques funciones básicas tales como lineales y crecientes.

3.- De acuerdo al enunciado cuál es el dominio? ¿Modificarías la gráfica de algún modo?

El dominio es todo los $\mathbb{R}$, sí lo modificaría porque hize una gráfica que tenga algo de relación con lo que te piden (creciente, cada vez mas rápidamente) pero no exactamente

- Es decir que la alumna no se dio cuenta del dominio. Es usual entre los estudiantes considerar sus gráficas en el ámbito de los números reales no negativos.

Resultados y análisis de las subpreguntas: Ver Cuadro 3.

Pregunta 3a. Si *x* crece entonces y …….

- El 73% respondió como se esperaba: “crece”, por la familiaridad de la situación. Casi de memoria, en algunos casos sin pensar.

Pregunta 3b. Si *x* crece entonces la derivada es …….

- Acá no hubo sorpresas, el 100% respondió “positiva”, aún los 2 que habían hecho recta y una función cuadrática. Hasta ahí llega la certeza posiblemente. Los alumnos sí reconocen cuándo una recta tiene pendiente positiva. También es posible que relacionen verbalmente la palabra “crece” con positivo.

Pregunta 3c. Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........ f'(x_2)$

- El 57% respondieron “menor”. Sin embargo, teníamos la impresión de que un grupo importante de estudiantes no se había percatado de que se trataba de la derivada. En la pregunta aclaratoria les pedimos a algunos que nos expliquen su respuesta:

3c.- A partir de tu gráfica ¿qué contestarías? Puedes escribirlo en este espacio. 12

Que la $f'(x_1) < f'(x_2)$, porque es un gráfica creciente.

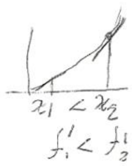
3c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta? 11

* Cologue el signo mayor por que al observar $x_1 < x_2$, pensé que era todo lo contrario, pero también observe un poco la funcion que realize.

Alumno: Alvaro 6

3c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

Guandome de la gráfica



Alumno: Ana Paula

3c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta? 8

Yo lo vi con respecto a f de acuerdo a mi gráfica debido al crecimiento de x con respecto a y.

5c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

No me di cuenta de la f'(x), lo vi con respecto al decrecimiento del. ~~al~~ gráfico.

- Podemos observar que sólo Álvaro (6) usó la pendiente de la recta tangente para poder comparar las derivadas.
- La alumna Ana Paula (8) no se dio cuenta de que se preguntaba sobre la derivada, no sólo en la 3c sino en las 3 preguntas sucesivas (4c, 5c, 6c), en las que se preguntaba lo mismo, pero de manera invertida: en todas contestó "menor".

Pregunta 3d. ¿Para algún valor de la variable x se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?

- Una vez más la dispersión en las respuestas revela que los conceptos de función creciente no los tienen muy claros, solo 40% de los alumnos contestaron que "no" y justificaron de manera apropiada.
- El 27% creen que puede haber un extremo, a pesar de la gráfica que han realizado ("posiblemente está más allá").
- Dos alumnos no contestaron.

Pregunta 3e. ¿La función podrá tener un máximo? Si ( ) No ( ) ¿Por qué?

- Cinco de los 5 alumnos que contestaron "no" en la pregunta anterior fueron consistentes y dijeron que no había máximo relativo (1, 3, 5, 6,10), se les unió el 4 (40% en total), que había dicho en la pregunta 3d. que la derivada sí podía ser cero. Pero después en la aclaratoria cambió de opinión y dijo que la derivada no podía ser cero, aunque justificó débilmente.
- Por otro lado, otro 40% de los alumnos cree que la función sí puede tener un máximo. Estos resultados muestran que respecto a los conceptos de funciones crecientes y decrecientes no ha habido un aprendizaje significativo.

<u>Pregunta 4. Función creciente cada vez más lento.</u>

Resultados: Ver Cuadro 4.

	Gráfica			4a		4b		4c			4d					4e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Dec.	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
4		1,2 4,6,7 8,12	3,9 11,13 15	1,2,3,4 6,8,9 11,13 15	7 12	1,3 6,7,8,9 11,13,15	2 4 12	4 7,8,9 12,14	1,2,3 6,11 13,15		2	12	1,3 6,15	4,9	7,8 11,13	2	4 8	1,6 12	3,7 9,13 15	11
		5 10	14	5,10,14		5,10,14		10 14	5		14		10	5			14	5 10		

Cuadro 4.

Leyenda:

Dom OK: El dominio de su gráfica correspondía con lo pedido.

Dom X: Dominio no corresponde.

Si/J: El alumno responde que sí y justifica bien (de acuerdo a su dibujo).

Si/XJ: El alumno responde que sí y justifica mal, o no justifica.

No/J: El alumno responde que no y justifica bien.

No/XJ: El alumno responde que no, pero justifica mal o no justifica.

NR: El alumno no responde.

Resultados y análisis:

- El 33% de los alumnos graficó bien en la forma pero no respetó el dominio, lo que revela (igual que en la pregunta 3) que no son capaces de manejar varios datos al mismo tiempo, priorizan una información la que creen más relevante o la que leen primero y dejan caer lo demás.

Pregunta 4a. Cuando la variable x crece entonces la variable y ……..

- Sólo 2 alumnos contestaron erróneamente que decrece, lo cual era de esperarse porque todavía estamos dentro de un ámbito rutinario para ellos. Pero también puede ser que hayan percibido que el crecimiento se hace más lento (7, 12).

Pregunta 4b. Cuando la variable x crece entonces la derivada de la función

Es positiva (   )   Es negativa (   )

- En forma similar a la pregunta 3b, todavía identifican “crece” con positiva, aunque debilitándose. Ya aparecen 3 alumnos que creen que la derivada es **negativa**. Están tratando de **predecir** la secuencia de respuestas, en vez de analizar su gráfica. **El nivel cognitivo disminuye.**

Pregunta 4c: Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........ f'(x_2)$

- El 53% de los alumnos contestan menor, y el 47% mayor, la pregunta se hace incomprensible para varios. No son capaces de dibujar las rectas tangentes y comparar las pendientes o no comprenden la notación.

- Se esperaba que el ejercicio de pendientes los hubiera preparado para esta tarea, pero la notación no la entienden, según los comentarios recogidos en las preguntas aclaratorias.

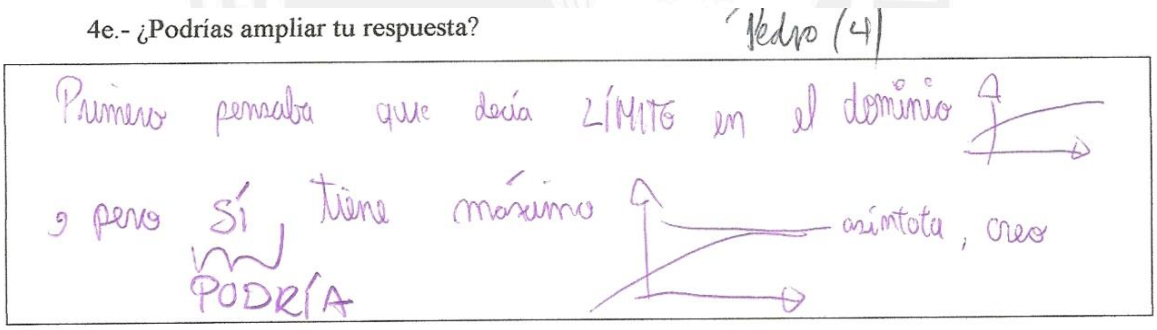
Pregunta 4d: ¿Para algún valor de la variable x se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?

- El 40% de los alumnos indica que la derivada no es cero. Pero el 33% de ese grupo no pudo justificarlo. El enunciado de la pregunta es predecible, los alumnos contestan sin saber la razón exacta.
- De ese 40%, 3 alumnos también respondieron lo mismo en la 3d (participantes 1, 3,5). La consistencia en sus respuestas revelaría un conocimiento más afianzado.

Pregunta 4e: ¿La función podrá tener un máximo? Si ( ) No ( )

- El 53% responden que no (8 alumnos), pero aumenta el número de los que no justifican (5 de los 8). Eso refleja una respuesta sin convicción (no están seguros).

  Mostramos el comentario de Pedro en la repregunta sobre la 4e.


4e.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

Pedro (4)

Primero pensaba que decía LÍMITE en el dominio, pero sí PODRÍA tiene máximo asíntota, creo

- Pedro busca entre sus conocimientos previos para darle sentido a su respuesta, y encuentra la función de aprendizaje, con su asíntota horizontal, tema que hasta el ciclo anterior se estudiaba en el curso precedente.

Pregunta 5. Función decreciente cada vez más rápido.

Resultados y análisis:

- Los alumnos 2, 7, 8 y 12 consistentemente han elaborado las gráficas de las 3 preguntas anteriores correctamente, además de esta pregunta.

- Los alumnos 3 y 13 cuyas gráficas no cumplían con el dominio pedido, en esta pregunta sí lo hacen bien. Entre todos totalizan el 40%. Eso revela una reflexión, la hipótesis del diseño de tareas sobre considerar ejercicios parecidos en la secuencia, se cumple.

- El 33% de los participantes no ha podido hacer la gráfica correctamente.

- Sin embargo otros dos que la hicieron bien en la pregunta 3, la hicieron mal ahora. Esto nos hace dudar sobre la reflexión.

- Pensamos que las respuestas de algunos alumnos están decayendo en calidad, debido al desgaste producido por la repetición aparente del mismo tipo de pregunta.

	Gráfica			5a		5b		5c			5d					5e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Dec.	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
5		2,3 7,8,12 13	1,5 6 15		casi todos		casi todos	1,3,5 8,12 13	2,6 7,15		2,4	2	1,3 6,12 15	5	7 8 13		8	1,2 5,6 10,14	3,7 12,13 15	
		4 10			4 10		4 10	4	10				10	4			4			
		14			14		14	14					14							
			9 11		9 11		9 11		9	11	9	11						11	9	

Cuadro 5.

Leyenda:

Dom OK: El dominio de su gráfica corresponde con lo pedido.

Dom X: Dominio no corresponde.

Si/J: El alumno responde que sí y justifica bien (de acuerdo a su dibujo).

Si/XJ: El alumno responde que sí y justifica mal, o no justifica.

No/J: El alumno responde que no y justifica bien.

No/XJ: El alumno responde que no, pero justifica mal o no justifica.

NR: No responde.

Pregunta 5a. Cuando la variable x crece entonces la variable y……………

- El 100% contesta que decrece, se percibe que los participantes están reflexionando en base a las preguntas anteriores, ahora sí entienden lo que se pregunta.

Pregunta 5b. Cuando la variable *x* crece entonces la derivada de la función

Es positiva (   )   Es negativa (   )

- Exactamente la misma tendencia para la derivada, 100% dicen que es negativa, estamos cosechando lo sembrado en los primeros ejercicios. Es notable que a estas alturas todos se han convencido de que la derivada es negativa para una función decreciente.

Pregunta 5c. Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........f'(x_2)$

Comentario: Esperábamos malos resultados para esta tarea, a estas alturas de la secuencia de tareas.

- Ocho alumnos (53%) responden "menor", 5 mayor, 1 no responde. Cuestionamos seriamente la utilidad de esta pregunta. Sin embargo todavía hay algunas respuestas como la siguiente que nos sorprenden agradablemente (Amalia, 13):

5c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

$f'(x_1) < f'(x_2)$ porque la pendiente va disminuyendo más rápido

Pregunta 5d. ¿Para algún valor de la variable *x* se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Porqué?

- Un 47% responden que no, incluyendo a 3 alumnos que tienen mal su gráfica (aunque decreciente). Los de siempre (1, 3, 5 y 12) más el 15. El 5 responde por intuición, no justifica.

- Dos alumnos que hicieron una parábola cóncava hacia abajo, consistentemente responden que sí, porque puede haber un máximo, según su gráfica. La definición exacta de extremo relativo en un intervalo, no la consideran.

Pregunta 5e. ¿La función podrá tener un mínimo?   Si (   )   No (   ) ¿Por qué?

- Un nutrido grupo de 11 alumnos, responde que no. Sin embargo sólo 5 justifican.
- Afirmamos que en este caso es fácil ver a partir de la gráfica, que no existe un mínimo, porque la función que dibujó la mayoría es cóncava hacia abajo.

- Aún los dos alumnos que hicieron media parábola decreciente, con vértice a la vista, se beneficiaron de esta facilidad, y respondieron que no hay mínimo.

Pregunta 6. Función decreciente cada vez más lento

	Gráfica			6a		6b		6c			6d					6e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Dec.	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
6		1,2 5,7 8,12	3,6 11,13 14		casi todos	14	casi todos	2,3,5 6,7,8 14	1,12 13	11	5	2 14	1,3 6,12		7,8 11 13		7,8 14	1,2 3,5,6 12		11,13
		4	9		4 9		4 9	4	9					4 9		9	4			
		10			10		10		10				10					10		
			15		15		15		15		15						15			

Cuadro 6.

Leyenda:

Dom OK: El dominio de su gráfica corresponde con lo pedido.

Dom X: Dominio no corresponde.

Si/J: El alumno responde que sí y justifica bien (de acuerdo a su dibujo).

Si/XJ: El alumno responde que sí y justifica mal, o no justifica.

No/J: El alumno responde que no y justifica bien.

No/XJ: El alumno responde que no, pero justifica mal o no justifica.

NR: No responde.

Resultados y análisis: Ver Cuadro 6.

- Sólo 2 alumnos que todavía no entienden la secuencia de tareas, hicieron la gráfica cóncava hacia abajo.
- Un participante que evidentemente no leyó bien el enunciado la hizo creciente.
- Todos los demás respondieron dibujando una función decreciente y cóncava hacia arriba, pero 5 de ellos no respetaron el dominio.

Pregunta 6a. Cuando la variable *x* crece entonces la variable *y* ……..

- Absolutamente todos dijeron que "decrece" (aún el que dibujó creciente).
- Están consolidando en la última pregunta de esta serie un conocimiento previo que era incierto.

Pregunta 6b. Cuando la variable *x* crece entonces la derivada de la función

Es positiva ( )   Es negativa ( )

- Todos, excepto uno, dijeron que la derivada era negativa. Esto revela ya una reafirmación del concepto de pendiente, y su identificación con la derivada de la función en cada punto, que al comienzo no estaban relacionadas o lo estaban débilmente, de acuerdo a los observado en las primeras preguntas.

Pregunta 6c. Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........ f'(x_2)$

- Un 53% apuntó que es menor, 40% que es mayor. Lo que quiere decir que varios alumnos nunca lo entendieron.
- Éste es el caso más difícil de analizar para las pendientes, porque ambas son negativas. Surge un obstáculo insalvable en la relación de orden de los números negativos, en relación al valor numérico de la pendiente.
- Los estudiantes podían haber recurrido a dibujar las rectas tangentes, pero no tienen esa habilidad.
- A pesar de que intuitivamente ya están entendiendo lo que queríamos establecer, persiste el conflicto semiótico, y terminaremos la actividad sin resolverlo.

Pregunta 6d. ¿Para algún valor de la variable x se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Por qué?

- Sólo 33% de los alumnos responde que no, y justifica. Un 13% más, sin justificar.
- Increíblemente 33% no responden.
- Este caso es difícil para ellos, de nuestra experiencia didáctica podemos afirmar que los alumnos no conciben que la función, siendo cóncava hacia arriba, no alcance un mínimo en algún momento. El concepto de función **solo** creciente y **solo** decreciente no les es familiar: falta sustento teórico. Solo lo pueden entender en el caso de funciones lineales.

Pregunta 6e. ¿La función podrá tener un mínimo? Si ( ) No ( ) ¿Por qué?

- Un 40% responde que no y justifica. Los demás que sí, excepto 2 que ya no responden.
- Es tentador pensar que hay un mínimo cuando la función decrece cada vez más lento, debido a que es cóncava hacia arriba, eso los induce a error. Esto confirma que existe el conflicto.

- Sin embargo el porcentaje de los que dijeron que sí, es similar al de la pregunta anterior, lo que significa que los estudiantes identifican el mínimo relativo con el valor de la derivada igual a cero.

Pregunta 7.

Grafique una función continua $y = f(x)$ que sea creciente cada vez más lentamente para todo $x < 2$, y que sea decreciente cada vez más rápidamente para todo $x > 2$.

Resultados y análisis:

		7a					7b						
	Formas	Es 0	Es (+)	Es (-)	m=0	NR	Máximo	Pto. de silla	P. inflexión	Otra	y=0	Emp. a dec.	NR
		1,5 6,8,9 12			13	7	1,6,8,9,12				5	13	7
		10	4					10	10	4			
7		2						2					
						11							11
						14							14
						3,15							3,15

Cuadro 7

- Un 50% de los alumnos elaboraron una parábola cóncava hacia abajo.
- Dos alumnos presentaron cúbicas de orientación opuesta. Conjeturamos que no leyeron las palabras “rápidamente” y “lentamente”.
- Un alumno hizo exactamente lo contrario de lo que se le pidió. No leyó las palabras creciente ni decreciente, solo el “más lentamente” (le da idea de decreciente) y el “más rápidamente”, (le da idea de creciente).

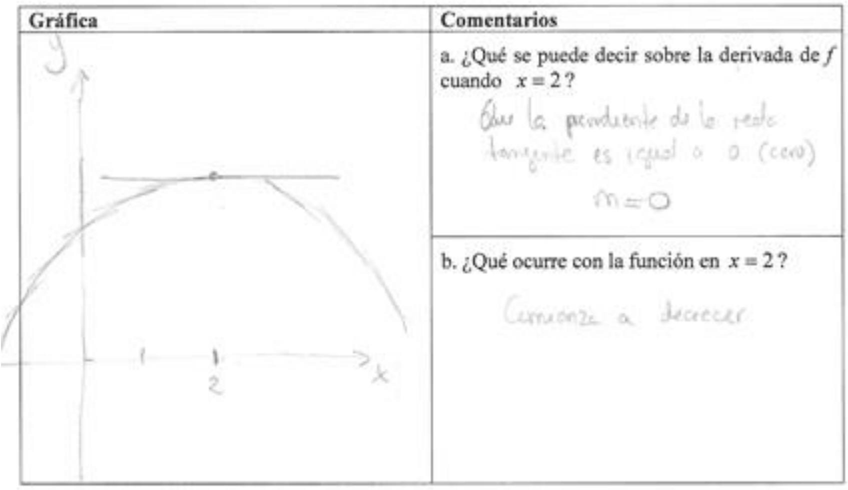
Pregunta 7a. ¿Qué se puede decir sobre la derivada de f cuando $x = 2$?

- Un participante entre los que hicieron parábola dijo que la pendiente era cero.

- Los demás alumnos entre los que hicieron parábola dijeron que la derivada era cero, incluyendo al que hizo una de las cúbicas, que se las arregló para dibujar un punto de silla (Alumno 2).

Pregunta 7b. ¿Qué ocurre con la función en $x = 2$?

- El 33% de los alumnos que hicieron parábola, dijeron que había un máximo relativo, un alumno dijo que era un punto de silla o de inflexión, 40% (5) no pudieron responder. Mostramos la producción de Amalia (13).



Gráfica	Comentarios
	a. ¿Qué se puede decir sobre la derivada de f cuando $x = 2$? Que la pendiente de la recta tangente es igual a 0 (cero) $m = 0$
	b. ¿Qué ocurre con la función en $x = 2$? Comienza a decrecer

- Es notable que haya dibujado la parábola como una sucesión de rectas tangentes cuya pendiente va disminuyendo hasta llegar a cero, nuestra alumna ha comprendido la inducción de la secuencia de tareas.

<u>Pregunta 8.</u> Dibuje la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

a. $f'(-3) = 0$ y $f'(1) = 0$

b. $f'(x) > 0$ para $x < -3$

c. $f'(x) < 0$ para $-3 < x < 1$

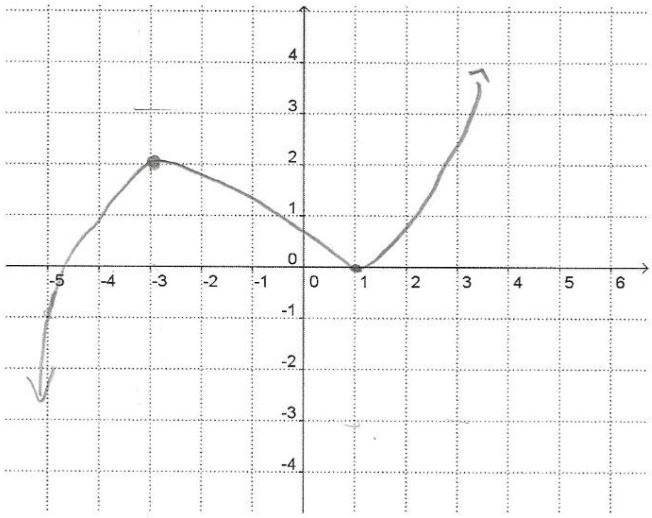
d. $f'(x) > 0$ para $x > 1$

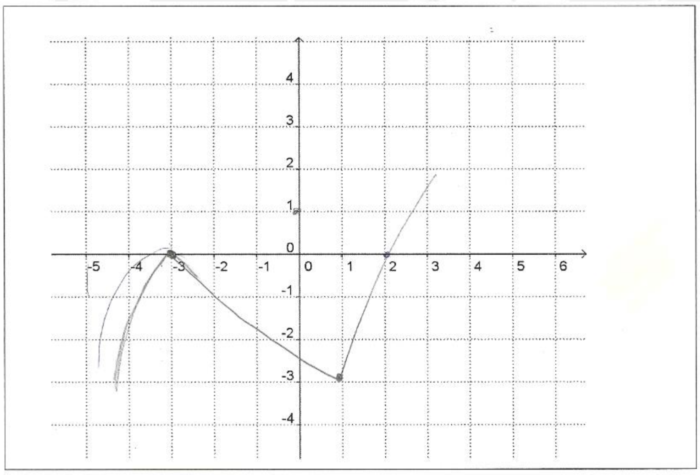
Resultados y análisis: Ver Cuadro 8.

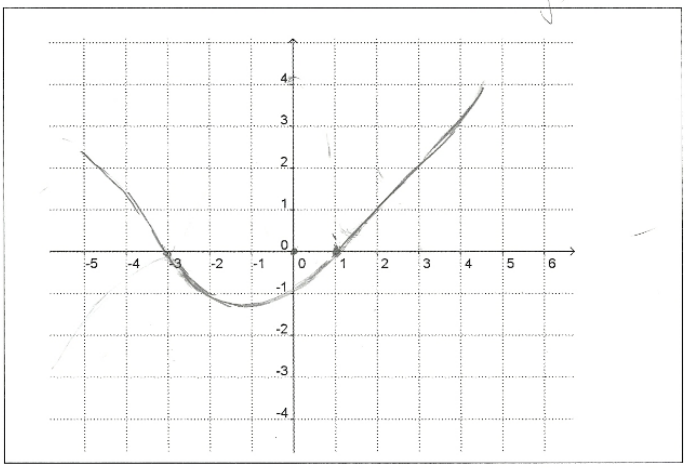
	Forma correcta	Casi correcta con falla en punto de inflexión	La derivada no existe en uno o ambos extremos relativos	La derivada existe pero no es cero en uno o ambos puntos críticos	Los puntos críticos se vuelven interceptos	NR
8	2,3,4,5,6,10,12	1,7,9	8	15	11	14

- Un 47% de los estudiantes pudieron hacer la gráfica correctamente, 20% con errores especialmente en el punto de inflexión.

Mostramos las producciones de 3 alumnos: Arturo (1), Ana Paula (8) y Jacqueline (12), respectivamente, para la pregunta 8:







- Como puede observarse algunos alumnos llegan a incorporar el conocimiento pretendido en su estructura cognitiva y otros no. Arturo lo tiene bien claro, a pesar de que no fue capaz de dibujar el punto de inflexión. Siendo rigurosos no se le dice que sea una función polinómica.
- Para Ana Paula hay un conflicto entre los interceptos y la derivada, identifica que los extremos relativos ocurren en -3 y 1 pero olvida que la derivada es cero allí.
- Por otro lado para Jacqueline, éste no fue un aprendizaje significativo, porque el conocimiento de la derivada como pendiente de la recta tangente no tuvo donde "anclarse". La información sobre las derivadas es interpretada como los interceptos de la curva con el eje X, persiste el conflicto cognitivo.

<u>Pregunta 9.</u> En el problema anterior mantenga la condición **a.** y modifique una o más de las condiciones **b, c, d.** Escriba las condiciones a, b, c, y d; y luego esboce un gráfico de la función que cumpla las condiciones escritas por Ud.

Resultados: Ver Cuadro 9

9	Cambió puntos críticos					Cambió el signo de la derivada				
	El -3	El -1	Ambos	Añadió otro	NR	Cambió b.	Cambió las 3	OK	Casi bien	Deficiente
			4,13,15	3,6,7,9	11,14	8	1,3,4,5,6 9,10,12	1,2,3,4,5 6,9,10,12	8	7,13,15

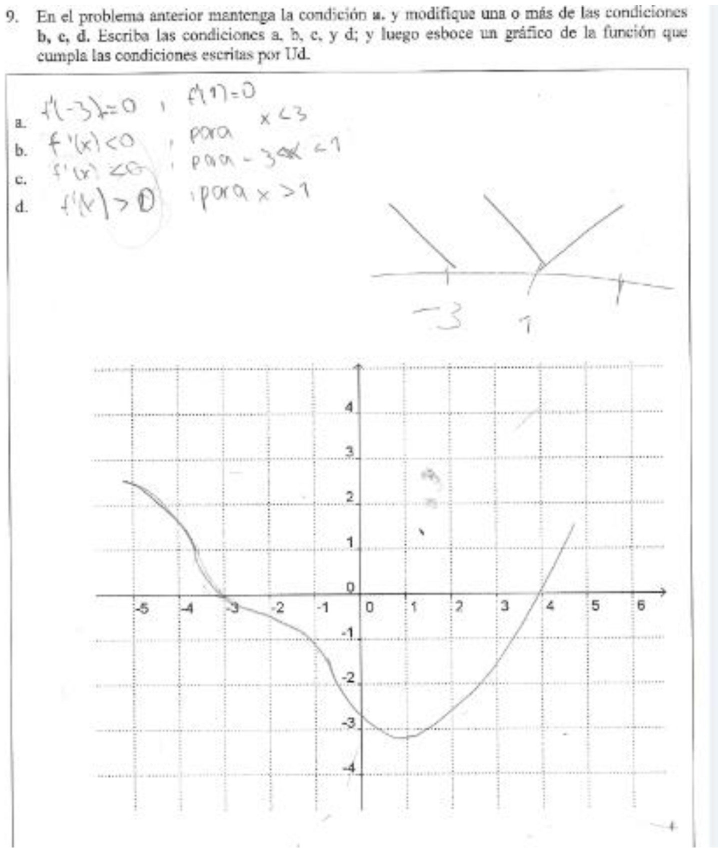
Cuadro 9

Resultados y análisis:

- Hubo 3 alumnos (20%) que cambiaron los 2 puntos críticos, 27% añadieron uno nuevo, logrando la gráfica de una función polinómica de cuarto grado, pero uno de ellos no tuvo éxito en el gráfico (7), porque no pudo mantener la condición a., y tuvo problemas con la relación de orden entre los números. Otros 2 alumnos tampoco pudieron hacer del todo bien la gráfica (7, 13).

- Un grupo de alumnos cambió el signo de las 3 derivadas, (8 alumnos), inclusive Pedro (4) cambió ambas cosas. Su gráfico lo hicieron razonablemente bien.
- Los resultados hubieran sido mejores si se hubiera dejado a libre albedrío las condiciones a cambiar, mantener la primera les causó dificultad.

Presentamos la producción de Ana Paula, para el problema 9:



- En este caso se perdió un punto crítico, creemos que la alumna quiso dibujarlo, en -3 pero le faltó precisión para graficar el punto de silla.

Pregunta 10. La función de costo total de la empresa ALFA, en términos del número de unidades q que fabrica, es $C(q)=\dfrac{q^2}{3}+2q+300$, donde C está en dólares.

10	a	Halló los puntos críticos 30 y -30	2,3,4,5,6,8,12,13
		Halló sólo el 30	1,7,9,10
		Análisis de crecimiento con valores en la derivada	2,3,12,4
		Análisis de crecimiento sólo dibujo	1,5,7,8,9,10
		No respondió la pregunta	11,14,15
	b.i	Construyó bien la función pedida	1,4,5,6,9,10,13
		Parcialmente	7,8,12
		No respondió la pregunta	3,11,14,15
	b.ii	Justificó detalladamente	10,13
		Justificó diciendo que había construído de adelante hacia atrás.	5,6,7,8,9
		No justificó	12

Cuadro 10

Pregunta 10a. Determine el nivel de producción q_α que minimiza el costo promedio por unidad.

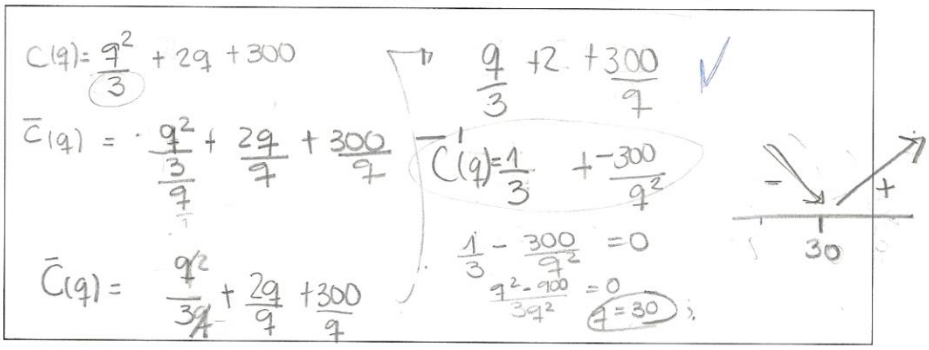
Resultados y análisis:

- Acá hubo que explicarles a la mayoría cómo se formaba el costo promedio, a pesar de que lo habían estudiado en el curso anterior.
- Tres alumnos no pudieron hacer nada, uno de ellos por falta de tiempo (15).
- El 52% (8 alumnos) determinaron los valores críticos de primer orden, 30 y -30.
- El 25% sólo consignaron el valor crítico $x=30$, ya sea por la natural tendencia que tienen los alumnos a descartar los resultados negativos, o porque hayan tenido la idea de que la variable x no puede ser negativa, es posible que alguno haya resuelto del siguiente modo: si $x^2=900 \rightarrow x=30$.
- Un 67% (10 alumnos) hizo un esquema o estructura similar a un análisis de crecimiento.
- De este grupo, en el proceso de resolución de cinco estudiantes no figuraba ningún cálculo de signos para la derivada, lo que nos inducía a pensar que hacían el dibujo de memoria, por el hecho de saber que se busca el mínimo de la función. Pensando en eso pedimos aclaración en la repregunta:

Mostramos la pregunta aclaratoria para la alumna Abril (9).

10. La función de costo total de la empresa ALFA, en términos del número de unidades q que fabrica, es $C(q) = \frac{q^2}{3} + 2q + 300$.

a) Determine el nivel de producción q_a que minimiza el **costo promedio** por unidad.



$C(q) = \frac{q^2}{3} + 2q + 300$

$\bar{C}(q) = \frac{\frac{q^2}{3}}{q} + \frac{2q}{q} + \frac{300}{q}$

$\bar{C}(q) = \frac{q^2}{3q} + \frac{2q}{q} + \frac{300}{q}$

$\frac{q}{3} + 2 + \frac{300}{q}$

$\bar{C}'(q) = \frac{1}{3} + \frac{-300}{q^2}$

$\frac{1}{3} - \frac{300}{q^2} = 0$

$\frac{q^2 - 900}{3q^2} = 0$

$q = 30$

- Sospechábamos que su gráfico lo había hecho de memoria, pero nos llevamos una sorpresa en la pregunta aclaratoria:

10.- ¿Reemplazaste algunos puntos en la derivada para dibujar el análisis de crecimiento?

Si, en 5 y 40.
Puse el CALC !

- Como parte del aprendizaje en el curso, se motiva a los alumnos a usar ayudas tecnológicas, para evaluar funciones, resolver ciertos tipos de ecuaciones y tabular. La alumna usó el comando CALC de su calculadora, que le permite ingresar la función en la calculadora y evaluarla para diversos valores de la variable independiente en corto tiempo.

- El tipo de ecuación que los alumnos tuvieron que resolver no es muy familiar para ellos, tuvimos que dar alguna retroalimentación cuando entraron en el momento de crisis (Bokhove, 2014).

- Nunca se percataron de que q=0 también era un valor crítico, porque en el curso no se trabaja con funciones cuya derivada no exista en algún punto.

Pregunta 10b. La empresa BETA tiene una función de costo total similar a la de la empresa ALFA, pero el nivel de producción que minimiza el costo promedio por unidad es $q_\beta = 50$.

i. Escriba una posible función de costo total de la empresa BETA.

- Un 47% de los alumnos entendió la tarea y pudo reconstruir la función de la empresa BETA. Un 20% lo hizo parcialmente, y 27% no pudieron hacer nada.
- Su nivel de manejo algebraico de ecuaciones racionales no es bueno, hubo que intervenir con feedback para que logren la tarea.

ii. Explique cómo llegó a obtener tal función de costo total de la empresa BETA.

- Los que lo hicieron sin necesidad de feedback, usaron el método reconstructivo algebraico de adelante hacia atrás.

CAPITULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

En relación al objetivo general

Consideraremos cumplido el objetivo general a partir del logro de los objetivos específicos.

En relación al objetivo específico 1

Diseñar una secuencia de tareas que contribuya a una mejor comprensión del concepto de derivada y de su interpretación geométrica como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

En base al análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica podemos afirmar que ayudó a mejorar la comprensión de los estudiantes del concepto derivada por varias razones:

- Al reforzar los conocimientos previos que los estudiantes debían tener cuando iniciaron el aprendizaje del concepto de derivada, y, que según los resultados de las preguntas 1 a 6, estaban por debajo de lo requerido, tanto con respecto a pendiente de una recta, funciones lineales y funciones crecientes y decrecientes.
- Se pudo observar una evolución en un grupo de estudiantes, en cuanto a la asociación de la derivada con la pendiente de la recta tangente, en un punto, que es una de las principales conexiones que queríamos que los estudiantes establezcan.

- Se logró en la mayor parte de los estudiantes una asociación entre el signo de la derivada y el comportamiento de la función.

Lo que se ha visto también favorecido fue el "espacio personal de ejemplos" (Watson y Mason, 2005) que el alumno es capaz de generar, es decir que se reforzaron los conocimientos previos, aún en los casos en que su comprensión relacional del concepto de derivada no se desarrolló completamente, sí logran en algunos casos, relacionar la derivada de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente en dicho punto que, de acuerdo con muchos investigadores, los alumnos no alcanzan a incorporar en su estructura cognitiva, aún después de llevar un curso de Cálculo (Selden et al., 1999).

Para el diseño hemos tomado en cuenta algunos principios enunciados por los investigadores que trabajan el diseño de tareas:

- Considerar sus conocimientos previos.
- Involucrar varias representaciones de los objetos matemáticos.
- Incorporar feedback.
- Trabajar en la construcción de ejemplos por parte de los estudiantes.
- Trabajar con el concepto de *scaffolding*.

También había que considerar diversos factores inherentes al curso que los alumnos estaban llevando, los cursos previos que habían llevado y al conocimiento que nuestra experiencia didáctica con este tipo de estudiante nos permitió.

En ese sentido podemos afirmar que la secuencia de tareas permitió a los alumnos reflexionar sobre sus producciones y en varios casos modificar sus concepciones sobre la derivada.

Observando la evolución de sus producciones los alumnos fueron acercándose al concepto de derivada como pendiente de la recta tangente, y fueron capaces de resolver un problema contextualizado usando derivadas. Creemos que el uso del criterio de la primera derivada para verificar el extremo en la pregunta 10, revela, en este tipo de alumno un acercamiento a una comprensión relacional sobre la derivada.

En relación al objetivo específico 2.

Las tareas exploratorias iniciales mostraron que los alumnos no recuerdan una gran parte de los conocimientos que aprendieron en el curso anterior. Según Ausubel (2000), la disponibilidad posterior de un conocimiento aprendido es función de su disponibilidad inicial. Esto quiere decir que para que pueda ser adecuadamente evocado después de transcurrido un tiempo tiene que haber un aprendizaje significativo inicial.

Hemos podido identificar algunas deficiencias en los conocimientos previos que es necesario tener para el aprendizaje de la derivada. Las detallamos a continuación:

- **Pendiente de una recta.**

Los alumnos tienen dificultades si tienen que estimar la pendiente de una recta con solo ver la inclinación. Necesitan información numérica sobre los puntos de paso, debido a que su aprendizaje del concepto en el curso anterior, se focaliza en la utilización de la fórmula de la pendiente, sin explorar suficientemente otros registros (como el gráfico).

Su comprensión del concepto de pendiente es en muchos casos solo instrumental, lo que no les permite poder visualizar la pendiente en una gráfica, ni tampoco hacer estimaciones sobre su magnitud o sobre su evolución, en curvas. Se apoyan mucho en la fórmula y no en una comprensión de la relación entre el cambio en la dirección vertical y la horizontal (comprensión instrumental).

- **Funciones crecientes y decrecientes.**

Algunos alumnos no comprenden que una función puede ser creciente o decreciente para valores de *x* en todo el conjunto de los números reales, sin que necesariamente tengan que alcanzar un extremo (preguntas 3, 4, 5, 6, la parte inicial).

Una posible explicación de esta realidad es que, durante el estudio de las funciones no se realizan suficientes actividades que permitan a los alumnos explorar a plenitud funciones con características diversas, porque principalmente se trabajan las funciones básicas, y aún de éstas se descartan las funciones que no se va a utilizar posteriormente, como las funciones racionales.

En este último caso se pierde la oportunidad de mostrar funciones que pueden ser crecientes (decrecientes) y sin embargo no tienen un valor máximo (mínimo) definido. Lo mismo se aplica para el caso de las funciones exponenciales, cuyo conocimiento podía haber sido una ayuda en la realización de la actividad.

- **Función lineal.**

Una parte de los alumnos que llegan al curso en donde se estudia el Cálculo, es capaz de hallar la ecuación de una recta. Otro grupo no lo es. En nuestra secuencia no se les proporcionaban los puntos de paso y tenían que inventarlos ellos, actividad que nunca se les ha solicitado en su curso previo. Tampoco recordaban que significa la regla de correspondencia de una función, ese término fue necesario aclararlo para todo el grupo.

Por otro lado, cuando determinaron la regla de correspondencia tuvieron dificultades para lograr que dicha regla sea congruente con el dibujo que habían realizado. Su ecuación puede no coincidir con los elementos que muestra su dibujo (interceptos, pendiente). Es decir pueden graficar una recta dada su ecuación, pero si tienen que crear una función lineal usando una gráfica, incluso si ha sido elaborada por ellos, tienen dificultades (pregunta 1b.). El tránsito entre diversas representaciones de la función lineal es difícil para los estudiantes.

En relación al objetivo específico 3.

Durante la secuencia de tareas hemos podido identificar algunas dificultades en el tránsito desde los conocimientos previos, hacia el uso de la derivada para resolver problemas.

- **Predomina un nivel de comprensión instrumental del concepto de derivada.**

Si se pide a los estudiantes que investiguen el comportamiento de la derivada, usan la acepción de derivada como operador y derivan la función. En el caso de la función lineal, esto les conduce a una función constante. Para ellos es un resultado numérico. Cuando comenzamos la secuencia de tareas tardaron tiempo en darse cuenta (para algunos fue recordar, para otros descubrir) que la derivada de la función lineal era la pendiente de su gráfica. Lamentablemente varios alumnos no lo descubrieron. La explicación está en que cuando se enseña el tema de derivada de una función no se pide hallar la derivada de funciones lineales, excepto como parte de ejercicios de cálculo de derivadas. Tampoco recordaron que la derivada de una función lineal en cualquier punto es numéricamente igual a la pendiente de su gráfica.

Si algunos alumnos conocían que la derivada en un punto era la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función, en el caso de la función lineal tenían un conflicto, porque para ellos es difícil pensar en la recta tangente a una recta.

Esto confirma la opinión de varios investigadores como Artigue (1995), Azcárate (2010) y Cantoral (2000) entre otros, que indican que los alumnos pueden aprender a derivar, sin haber comprendido realmente el concepto. Es decir alcanzan lo que se denomina una comprensión instrumental. Según Skemp (2005), eso no cuenta como aprendizaje.

No se logró en general la respuesta esperada "la derivada es constante" (pregunta 1c), porque los alumnos en ese momento todavía no relacionaban la derivada de la función lineal con la pendiente de la gráfica de la función lineal.

- **Dificultad para relacionar lo conceptual con lo simbólico, en relación a la derivada de una función.**

El uso de un lenguaje riguroso, con diferentes representaciones semióticas, puede generar conflictos en el aprendizaje de los conceptos. La notación $f'(x)$ usada en las preguntas 3c, 4c, 5c, 6c, junto con la desigualdad $x_1 < x_2$, generó un conflicto semiótico que no se pudo superar, como demuestran las respuestas a las preguntas aclaratorias.

La mayoría de los alumnos ignoró el superíndice y respondió como si éste no existiera, con poco éxito además, por las razones expuestas para el caso de funciones crecientes y decrecientes. Pensamos que reemplazar los símbolos por texto podría conducir a mejores resultados, por ejemplo si se hubiera preguntado de este modo:

3c. Complete con la palabra correcta:

Si $x_1 < x_2$ entonces la derivada en x_1 es .... que la derivada en x_2 .

(menor/igual/mayor)

- **Dificultad para relacionar lo conceptual con lo gráfico en relación a la derivada.**

En las preguntas 3, 4, 5 y 6 cuando se pidió dibujar las funciones con características cambiantes, se vio que varios alumnos no relacionaban la condición de creciente o decreciente de una función con la derivada, ni con la recta tangente. Sus producciones revelan más un manejo intuitivo (creciente es la que va para arriba y decreciente la que va para abajo), que es residual del curso precedente.

Cuando tuvieron que dibujar la función en la pregunta 8, varios estudiantes dibujaron puntos angulosos en los extremos relativos, ignorando el valor de la derivada en esos puntos, pero no es porque no supieran que la derivada es cero en los extremos relativos (en este caso particular), sino porque su representación geométrica no concordaba, es decir, les faltó pensar que la recta tangente es horizontal.

La comprensión relacional es débil, porque justamente los vínculos entre los conceptos: pendiente cero, recta horizontal, recta tangente, derivada igual a cero y extremo relativo son muy débiles aún.

En el curso de Lógica Matemática, debido al ámbito de las aplicaciones que se requiere enseñar se trata con funciones lineales, polinómicas, logarítmicas y exponenciales, es decir los estudiantes no son expuestos a ejercicios en los que la derivada no existe, y eso es algo nuevo para ellos, aunque en clase se menciona, no se trabaja con funciones cuya derivada no existe.

Sin embargo para poder realizar las gráficas o para poder decir si la derivada era mayor o menor en x_1 o en x_2 se hacía necesario que dibujen las rectas tangentes a la gráfica en dos puntos diferentes y comparen las pendientes, por estimación, cosa que pocos pudieron hacer.

5.2 RECOMENDACIONES

- Creemos que los docentes en ocasiones asumen demasiadas cosas sobre los conocimientos previos de los estudiantes sobre funciones y sobre la forma en que aprenden (o no aprenden) derivadas. Recomendamos un poco de reflexión a los docentes con respecto a los conocimientos previos de los estudiantes.
- Una recomendación que podemos hacer a los docentes es que utilicen mucho la relación entre varios registros, no nos quedemos en el registro algebraico. Estamos observando que los participantes ya habían estudiado el tema de derivadas en su curso, sin embargo muchos de ellos no eran capaces de relacionar las pendientes de las rectas tangentes con la derivada y con la forma de la función.
- Pensamos que este trabajo es un toque de alerta que nos hará reflexionar para que nos tomemos el tiempo para diseñar las tareas, tomando en cuenta todos los factores mencionados, así como el tipo de alumno, la ubicación del curso dentro de su currícula, e inclusive el grado de madurez, y de acuerdo a los resultados que obtengamos con ellas, podemos refinarlas.
- La complejidad semiótica del concepto de derivada constituye un obstáculo que hay que tomar en cuenta cuando se diseñan secuencias de tareas sobre derivadas. Reiteramos nuestra convicción que el tema de la simbología influye de manera decisiva, los alumnos de este curso, con el “background” que tienen no son capaces de aprender los conceptos y los símbolos al mismo tiempo, primero hay que trabajar los conceptos con palabras, hasta que sean familiares y luego ir gradualmente reemplazando las palabras por símbolos.
- En esa línea de investigación ya están trabajando algunos investigadores como Idris (2009), quien menciona la tercera forma de comprensión enunciada por Skemp (2005), la comprensión lógica, en la cual el estudiante es capaz de explicar y justificar sus procedimientos y razonamientos verbalmente o por escrito.

- También recomendamos una revisión de los conceptos previos como pendiente, funciones, función lineal (afín), para que los alumnos lleguen al curso de Cálculo con más base, y poder así lograr un aprendizaje significativo de los nuevos conceptos, es decir que se incorporen a su estructura cognitiva.
- Invocamos a nuestros colegas docentes para que puedan modificar y enriquecer la secuencia, y porqué no, diseñar la continuación, dado que las secuencias de tareas consideran proyectos de aprendizaje a largo plazo.
- Las tareas deben tratar de mantener la demanda cognitiva de los alumnos para evitar caer en la comprensión meramente instrumental, es decir saber hacer pero no el porqué.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/575/1/Artigueetal195.pdf

Ausubel, D. (2000). *The adquisition and retention of knowledge: A cognitive view.* New York: Springer.

Azcárate, C. (2000). El precálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis. *Las matemáticas del siglo XX, una mirada en 101 artículos.* 259 – 262.
Recuperado de:
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo52.pdf

Azcárate, C., Badillo, E., García, L. y Moreno, M. (2010). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía* 35, pp. 137 – 171.
Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/1955/195521325005.pdf

Begg, D.; Fisher; S. y Dornbusch, R. (2002). *Economía.* Madrid: Mc Graw Hill Interamericana de España.

Bokhove, C. (2014). Using crises, feedback and fading for online Task Design. *PNA*, 8(4), 127 – 138.
Recuperado de:
http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/31597/1/140505BokhoveUsing_PNA8(4).pdf

Boyer, C. y Mertzbach, U. (2011). *A History of Mathematics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Breen, S. y O'Shea, A. (2010). Mathematical Thinking and Task Design. *Irish Math. Society*. *Bulletin* 55, 39 – 49.
Recuperado de: http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull55/ME5501.pdf

Cantoral, R., y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 3, número 003, 255 – 292.
Recuperado de: http://www.clame.org.mx/relime/200002c.pdf

Creswell, J. W., (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*.
Recuperado de:
http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1334586.files/2003_Creswell_A%20Framework%20for%20Design.pdf

Eves, H. (1969). *An introduction to the History of Mathematics*. University of Maine.
Holt, Rinehart and Winston.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz; B. Gómez; & M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. (pp.111 – 128). Córdoba.
Recuperado: http://funes.uniandes.edu.co/1303/1/Font2005Una_SEIEM_111.pdf

Gascón, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona.
Recuperado de: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/Tesis-doctoral-Josep-C1-y-C21.pdf

Gleason, A. y Hughes, D. (1992). Introducing the Calculus Consortium. *Focus on Calculus*. Issue No.1. Harvard University: John Wiley & Sons.
Recuperado de: http://www.wiley.com/college/cch/Newsletters/issue1.pdf

Godino, J. (2000). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22, nº 2.3, pp. 237 – 284. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Idris, N., (2009). Enhancing students' understanding in calculus trough writing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. Volume 4, Number 1, February 2009 Recuperado de: www.iejme.com

Kullberg, A., Runesson, U., y Mårtensson, P. (2013). The same task? Different learning possibilities. Margolinas, C. (Ed.). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1). Oxford. Recuperado de: http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/83/74/88/PDF/ICMI_STudy_22_proceedings_2013-FINAL_V2.pdf

Mason, J. y Johnston – Wilder, S. (2006). *Designing and using Mathematical Tasks.* The Open University. Tarquin Publications.

Orton, A. (2005): *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practices*. New York: Continuum.

Polya, G. (1957). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Ron, G., Zaslavsky, O., y Zodik, I. (2013). Engaging teachers in the web of considerations underlying the design of tasks that foster the need for new mathematical concepts or tools: The case of Calculus. En Margolinas, C. (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1) (pp. 543 – 549) Oxford.
Recuperado de:

http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/83/74/88/PDF/ICMI_STudy_22_proceedings_2013-FINAL_V2.pdf

Selden, A., Selden, J., Hauk, S. y Mason A. (1999). Do Calculus students eventually learn to solve non-routine problems? Tennessee Technological University. Department of Mathematics.
Recuperado de: http://www.tntech.edu/files/math/reports/TR_1999_5.pdf

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334 – 370). New York: MacMillan.
Recuperado de: http://hplengr.engr.wisc.edu/Math_Schoenfeld.pdf

Schoenfeld, A. H. (2006). Problem Solving: From craddle to grave. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Volume 11, pp. 41 – 73. IREM de Strasbourg.
Recuperado de:
http://turing.scedu.umontreal.ca/annales/documents/volume%2011/Schoenfeld.pdf .

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics*, 24(2), 7 – 15.
Recuperado de: http://flm-journal.org/Sierpinska.pdf

Skemp, R. (2005). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*. Vol. 12, No. 2, pp. 88 – 95
Recuperado de:
http://www.jstor.org/discover/10.2307/41182357?uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21104050033147

Stein, M., Grover, B., y Henningsen, M. (1995). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33, 2, 455 – 488.
Recuperado de:
http://edu312spring13.pbworks.com/w/file/fetch/53175581/Stein,Grover,%20%25Henningsen.pdf

Swan, M. (2008). Design of multiple representation tasks to foster conceptual development. ICME 11. México 2008. *11th International Congress on Mathematical Education.*
Recuperado de: http://tsg.icme11.org/document/get/289

Tall, D. (1977). Cognitive conflict in the learning of mathematics. *First meeting of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics*, Utrecht, Holland.
Recuperado de: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1977a-cog-confl-pme.pdf

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–159.
Recuperado de:
http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html#1981

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus* 12, 3&4, 49 – 53.
Recuperado de:
http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1990b-inconsist-focus.pdf

Vranken, S., Engler, A., y Müller D. (2008). Una propuesta para la introducción de la derivada a partir de la variación. *Premisa*. Año 10. Número 38.
Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/revistapremisa.htm

Watson, A., y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity. Learners Generating Examples*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, New Jersey London

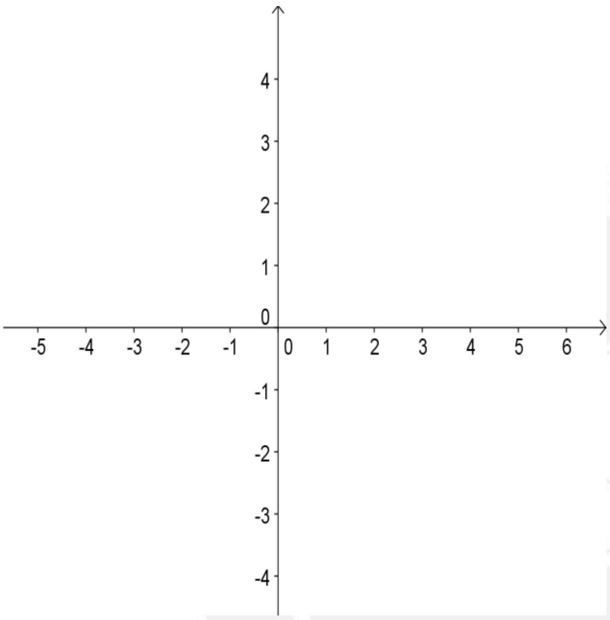
Watson, A., y Ohtani, M. (2012). Task design in mathematics education. ICMI Study 22. Announcement and call for papers.
Recuperado de: http://ncm.gu.se/media/ncm/dokument/

ANEXOS

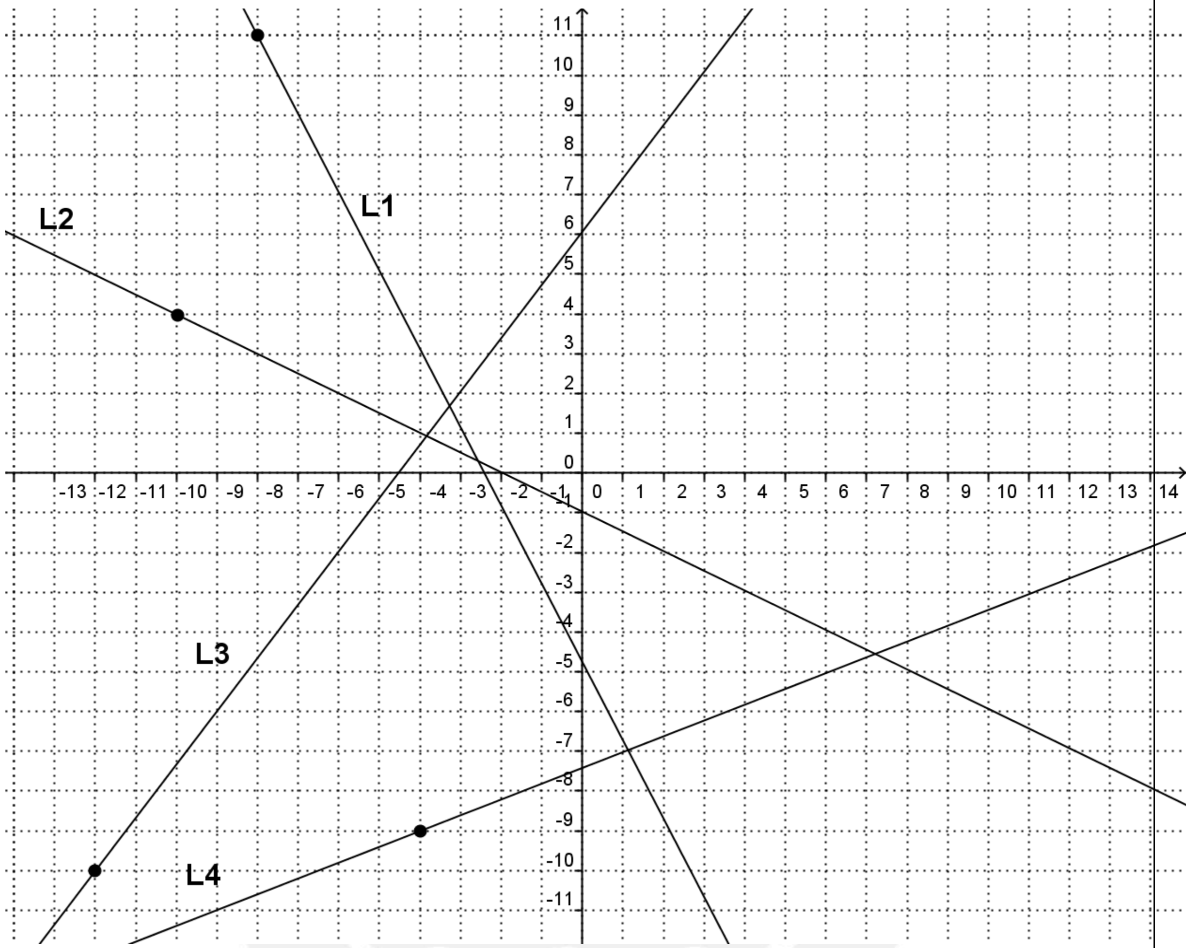
ANEXO 1

Duración: 120 minutos

1. En un mismo sistema de ejes grafique dos funciones **lineales** f y g que sean **crecientes**, pero que crezcan de manera diferente.

	a. Explique cuál es la diferencia entre el crecimiento de f y g.
b. Escriba una posible regla de correspondencia para cada una de las funciones lineales que ha dibujado. $f(x) =$ $g(x) =$	c. Explique cómo se comporta la derivada de las funciones f y g, en cada punto.

2. Determine la pendiente de cada una de las rectas mostradas en la gráfica.



m_1	
m_2	
m_3	
m_4	

3. Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **creciente**, pero cada vez más rápidamente.

a. Cuando la variable *x* crece, entonces la variable *y* …………………………………
b. Cuando la variable *x* crece entonces la derivada de la función Es positiva ( ) Es negativa ( )
c. Complete el espacio : Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)$........ $f'(x_2)$
d. ¿Para algún valor de la variable *x* se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Porqué? …………………………………………………………………………………………
e. ¿La función podrá tener un máximo? Si ( ) No ( ) ¿Porqué? ………………………..………………………………………………..

4. Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **creciente**, pero cada vez más lentamente.

a. Cuando la variable *x* crece entonces la variable y ……………………………………
b. Cuando la variable *x* crece entonces la derivada de la función Es positiva (   ) Es negativa (   )
c. Complete el espacio : Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)........ f'(x_2)$
d. ¿Para algún valor de la variable *x* se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Porqué? ……………………………………………………………………………………………
e. ¿La función podrá tener un máximo?   Si (   )   No (   ) ¿Por qué?   ………………………..…………………………………………………..

5. Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **decreciente**, pero cada vez más rápidamente.

a. Cuando la variable *x* crece, entonces la variable y ……………………………………

b. Cuando la variable *x* crece, entonces la derivada de la función

Es positiva ( )

Es negativa ( )

c. Complete el espacio :

Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)$........ $f'(x_2)$

d. ¿Para algún valor de la variable *x* se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Porqué?

…………………………………………………………………………………………………

e. ¿La función podrá tener un mínimo? Si ( ) No ( )

¿Por qué? ………………………...……………………………………………………..

6. Grafique una función continua, cuyo dominio sea R, que sea sólo **decreciente**, pero cada vez más lentamente.

a. Cuando la variable x crece entonces la variable y ……………………………………
b. Cuando la variable x crece entonces la derivada de la función Es positiva ( ) Es negativa ( )
c. Complete el espacio : Si $x_1 < x_2$ entonces $f'(x_1)$........ $f'(x_2)$
d. ¿Para algún valor de la variable x se cumple que $f'(x) = 0$? ¿Porqué? …………………………………………………………………………………………………
e. ¿La función podrá tener un mínimo? Si ( ) No ( ) ¿Por qué? ………………………..………………………………………………..

7. Grafique una función continua $y = f(x)$ que sea creciente cada vez más lentamente para todo $x < 2$, y que sea decreciente cada vez más rápidamente para todo $x > 2$.

Gráfica	**Comentarios**
	a. ¿Qué se puede decir sobre la derivada de f cuando $x = 2$?
	b. ¿Qué ocurre con la función en $x = 2$?

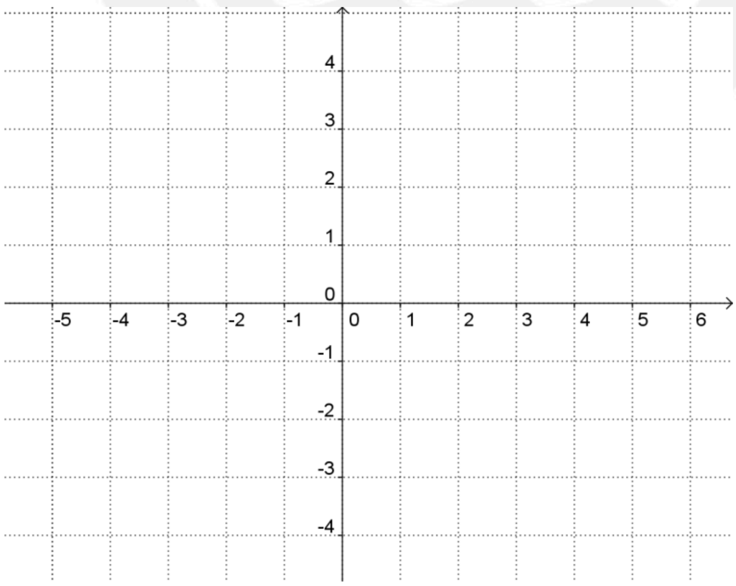
8. Dibuje la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

a. $f'(-3) = 0$ y $f'(1) = 0$

b. $f'(x) > 0$ para $x <$ -3

c. $f'(x) < 0$ para -3 $< x < 1$

d. $f'(x) > 0$ para $x > 1$



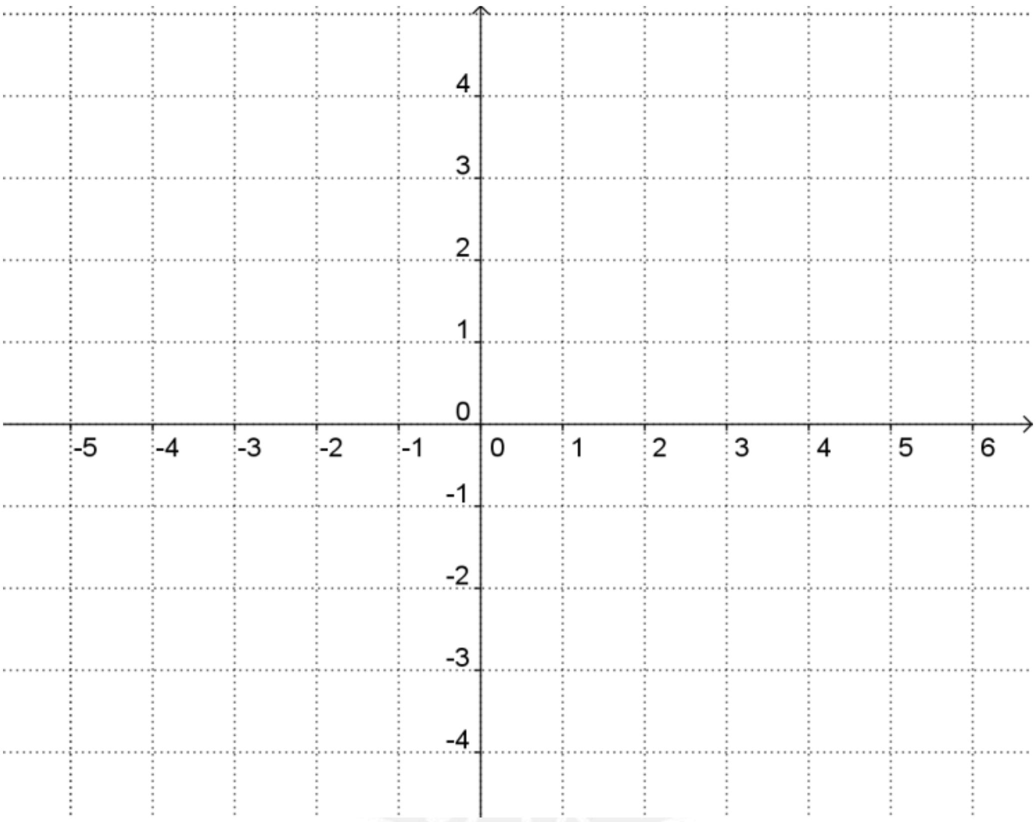
9. En el problema anterior mantenga la condición **a.** y modifique una o más de las condiciones **b, c, d.** Escriba las condiciones a, b, c, y d; y luego esboce un gráfico de la función que cumpla las condiciones escritas por Ud.

a.

b.

c.

d.



10. La función de costo total de la empresa ALFA, en términos del número de unidades q que fabrica, es $C(q)=\dfrac{q^2}{3}+2q+300$ donde C está en dólares.

   a) Determine el nivel de producción q_α que minimiza el **costo promedio** por unidad.

   b) La empresa BETA tiene una función de costo total similar a la de la empresa ALFA, pero el nivel de producción que minimiza el costo promedio por unidad es $q_\beta = 50$.

      i. Escriba una posible función de costo total de la empresa BETA.

      ii. Explique cómo llegó a obtener la función de costo total de la empresa BETA.

ANEXO 2

			Diferencia en crec.				Regla de corresp.			Comportamiento de derivada					
			1a				1b			1c					
		Gráfica	Crec.	Pend.	NC	NR	1 bien	Ambas bien	NR	Expl. bien	Calc. bien	Calc. bien Expl. bien	Calc. bien Expl. mal	Expl. mal	NR
1	No paralelas	1,3,4,5 6,7,8,9 12,13	1,4,5 9,12	6,7,8 11,14		3	2,12,13	1,3,4,5 6,7,8 9,10,14		1,9	3,4,5 8,14	6,7		13	12
	Paralelas	2,10			2,10								2,10		
	Recta/Parábola	11,15	11,15					11	15					15	11

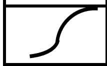
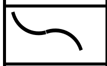
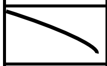
		4	3	2	1	0
2	Pendientes correctas	1,5,6,1 0	2,4	14,15	3,7,8	9

	Gráfica			3a		3b		3c			3d					3e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Otra	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
3		1,2,3 4,6,7 8,10	9, 14 15	1,2,3,4 6,7,8,9 10,14,15		1,2,3 4,5,6 7,8,9		1,2,4 6,8,9 10,14,15	3,7		2,4	14,15, 9	1,3 6,8,10		7	9,14	8,15	1,2,3 4,5,6 7,10		
			5	5					5				5					5		
		12		12		12				12			12					12		
		13	11	11,13		11,13		13	11						13	11,13				

	Gráfica			4a		4b		4c			4d					4e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Dec.	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
4		1,2,4,6,7 8,12	3,9 11,13 15	1,2,3,4 6,8,9 11,13,15	7,12	1,3 6,7,8,9 11,13,15	2,4,12	4,7,8,9 12,14	1,2,3 6,11 13,15		2	12	1,3 6,15	4,9	7,8 11,13	2	4,8	1,6 12	3,7,9,13 15	11
		5,10	14	5,10,14		5,10,14		10,14	5		14		10	5			14	5,10		

	Gráfica			5a		5b		5c			5d					5e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Dec.	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
5		2,3,7,8,12 13	1,5,6,15		casi todos		casi todos	1,3,5 8,12,13	2,6,7,15		2,4	2	1,3,6,12, 15	5	7,8,13		8	1,2,5,6 10,14	3,7,12, 13,15	
		4,10			4,10		4,10	4	10				10	4			4			
		14			14		14	14					14							
			9,11		9,11		9,11		9	11	9	11						11	9	

	Gráfica			6a		6b		6c			6d					6e				
	Formas	Dom OK	Dom X	Crece	Dec.	Posit.	Negat.	<	>	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR	Si/J	Si/XJ	No/J	No/XJ	NR
6		1,2,5,7 8,12	3,6 11,13,14		casi todos	14	casi todos	2,3,5 6,7,8,14	1,12 13	11	5	2,14	1,3 6,12		7,8,11,1 3		7,8,14	1,2,3,5,6 12		11,13
		4	9		4,9		4,9	4	9					4, 9		9	4			
		10			10		10		10				10					10		
			15		15		15		15		15						15			

		7a					7b						
	Formas	Es 0	Es (+)	Es (-)	m=0	NR	Máximo	Pto. de silla	P. inflexión	Otra	y=0	Empieza a dec.	NR
7		1,5 6,8,9			13	7	1,6,8,9,12				5	13	7
		10	4					10	10	4			
		2						2					
						11							11
						14							14
						3,15							3,15

8	Forma correcta	Casi correcta con falla	La derivada no existe en uno o	La derivada existe pero no es cero	Los puntos críticos se vuelven interceptos	NR
	2,3,4,5,6,10,12	1,7	8,13	15, 9, 11	11	14

	Cambió puntos críticos					Cambió el signo de la derivada				
9	El -3	El -1	Ambos	Añadió otro	NR	Cambió b.	Cambió las 3	OK gráfico	Casi bien	Deficiente
			4,13,15	3,6,7,9	11,14	8	1,3,4,5,6,9,10,12	1,2,3,4,5,6,9,10,12	8	7,13,15

10	a	Halló los puntos críticos 30 y -30	2,3,4,5,6,8,12,13
		Halló sólo el 30	1,7,9,10
		Análisis de crecimiento con valores en la derivada	2,3,12,4
		Análisis de crecimiento sólo dibujo	1,5,7,8,9,10
		No respondió la pregunta	11,14,15
	b.i	Construyó bien la función pedida	1,4,5,6,9,10,13
		Parcialmente	7,8,12
		No respondió la pregunta	3,11,14,15
	b.ii	Justificó detalladamente	10,13
		Justificó diciendo que había construído de adelante hacia atrás.	5,6,7,8,9
		No justificó	12

ANEXO 3 PREGUNTAS ACLARATORIAS

Alumna: Abril

5c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

- La derivada $f'(x_1)$ es mayor a $f'(x_2)$ porque al ser decreciente su pendiente, decrece conforme x va avanzando.

5e.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

No, ya que decrece indefinidamente y nunca crece. Tampoco puede tener un mínimo relativo.

10.- ¿Reemplazaste algunos puntos en la derivada para dibujar el análisis de crecimiento?

Si, en 5 y 40.
Puse el CALC!

Alumno: Alvaro

Cuestionario sobre la actividad:

Alumno: Alvaro

3c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

Guiandome de la gráfica

$x_1 < x_2$

$f'_1 < f'_2$

5.- ¿A partir de tu gráfica cuál podría ser el dominio? ¿El enunciado está de acuerdo?

ℝ, a gran escala cruza el y, y el x sigue creciendo

10.- ¿Cómo se puede comprobar que en $q = 30$ hay un mínimo?

Porque ahí la derivada es 0 y la función es cuadrática positiva, por lo tanto hay mínimo.

Alumna: Ana Paula

Alumno: Ana Paula

3c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

Yo lo vi con respecto a f, de acuerdo a mi gráfica debido al crecimiento de x con respecto a y.

5c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

No me di cuenta de la f'(x), lo vi con respecto al decrecimiento del ~~el~~ gráfico.

8.- A partir de tu gráfica ¿podrías decir que $f'(-3)$ y $f'(1)$ valen cero? Si te pidieran que la afines ¿qué harías? (sólo describe lo que harías).

Modificaría las curvas, para que dependa el crecimiento su derivada de la tangente se vuelva 0.

10.- ¿Podrías explicar el análisis de crecimiento? ¿Qué valores usaste para reemplazar en la derivada?

En el punto $x = 30$ se observa un mínimo

Alumna: Anabel

Cuestionario sobre la actividad:

Alumno: Anabel 12

1c.- ¿Puedes decir como son las derivadas de las funciones que generaste?

Las derivadas de la función f son positivas y va aumentando más rapidamente, a diferencia de la funcion g que tiene derivadas positivas pero van aumentando lentamente.

3.- A partir del enunciado ¿harías alguna modificación a la gráfica? Solo descríbela.

Sí, no dibujaría la gráfica como una función lineal, la dibujaría de forma continua pero un poco curbeada y creciente.

3c.- A partir de tu gráfica ¿qué contestarías? Puedes escribirlo en este espacio.

Que la $f'(x_1) < f'(x_2)$, porque es un gráfica creciente.

4c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

$f'(x_1) < f'(x_2)$, porque la gráfica va creaendo, aunque lentamente, siempre la derivada ira aumentando lentamente y en x_1 la derivada será menor que en x_2

10a.- ¿Reemplazaste en algunos puntos para dibujar el análisis de crecimiento? Explica cómo lo realizaste.

Sí, lo reemplaze en los valores de q que encontre al derivar la función de Costo promedio, para así determinar los máximos y minimos que existen.

Alumno: Alvaro

Cuestionario sobre la actividad:

Alumno: Alvaro

3c.- ¿Podrias ampliar tu respuesta?

Guardone de la gráfica

5.- ¿A partir de tu gráfica cuál podria ser el dominio? ¿El enunciado está de acuerdo?

$\mathbb{R}$, a gran escala cruza el y, y el x sigue creciendo

10.- ¿Cómo se puede comprobar que en $q = 30$ hay un mínimo?

Porque ahí la derivada es 0 y la función es cuadrática positiva, por lo tanto hay mínimo.

Alumna: Nadia

Cuestionario sobre la actividad:

Alumno: Nadia

1.- De acuerdo al enunciado modificarías algo? Describe.

No modificaría, ya que te piden que grafiques funciones básicas tales como lineales y crecientes.

3.- De acuerdo al enunciado cuál es el dominio? ¿Modificarías la gráfica de algún modo?

El dominio es todo los $\mathbb{R}$, sí lo modificaría porque hize una gráfica que tenga algo de relación con lo que te piden (creciente, cada vez mas rápidamente) pero no exactamente

3c.- ¿Podrías ampliar tu respuesta?

Mi respuesta fue $f'(x_1) < f'(x_2)$, ya que es el Y, y como es creciente pero cada vez más rápidamente ~~deduzco que~~ deducí que $f'(x_1)$ es menor a $f'(x_2)$

7.- ¿Cómo harías esta pregunta? Puedes usar este espacio.

No tengo la pregunta exacta debido a que no tenía un conocimiento claro sobre esta pregunta, solo deducí por ser la derivada que es igual al Y.