PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

EL MODELO VAN HIELE PARA EL APRENDIZAJE DE LOS ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO DE SECUNDARIA HACIENDO USO DEL GEOGEBRA

Presentado por: Enrique Arturo Valerio Santos Napán

Asesora de tesis: Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre

Jurado:

Mg. Elizabeth Milagro Advíncula Clemente

Mg. Estela Aurora Vallejo Vargas

LIMA – PERÚ

2014

DEDICATORIA

Al divino hacedor, por brindarme la perseverancia, la fuerza, el empeño y la salud necesaria para culminar uno de los logros más importantes de mi vida y por guiarme en el camino del bien.

A mi estimada asesora, la Mg. Cecilia Gaita, por sus aportes, tiempo, paciencia y dedicación para la realización del presente trabajo, sin los cuales este y otros proyectos no se hubieran realizado satisfactoriamente.

A la Dra. Jesús Flores por sus apreciaciones críticas hacia el presente trabajo, así como también en otros proyectos de investigación.

A mis padres Eleonor y Arturo y a mi hermano Luis que siempre están conmigo en los momentos más importantes de mi vida, brindándome sus alientos y aconsejándome en culminar este trabajo de investigación. Gracias a ellos soy lo que soy.

A mis abuelitos y familiares que estuvieron al tanto de este trabajo, brindándome sus sabios consejos. Siempre los tendré presente.

ÍNDICE

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objetivo determinar los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión de los elementos de la circunferencia que pueden alcanzar los estudiantes de segundo año de secundaria al realizar actividades que son mediadas por el Software Geogebra.

En el capítulo 1 se realiza una presentación de los aspectos generales de la investigación, tales como los antecedentes, el problema de investigación y los objetivos de la investigación.

En el capítulo 2 se presenta el modelo Van Hiele como elemento teórico considerado en el desarrollo de la presente investigación, describiendo los niveles de razonamiento. De la misma forma, se hace una descripción de algunos términos usados en nuestra investigación como la justificación, conjetura, etc. y también se hace un estudio sobre el concepto de circunferencia y las propiedades que se le atribuyen.

En el capítulo 3 se justifica la metodología a emplear en nuestro trabajo, explicando el método a seguir.

En el capítulo 4 se describe el diseño de las actividades.

En el capítulo 5 se describe la implementación de las actividades.

En el capítulo 6 se describen el análisis de los resultados y el contraste entre las respuestas esperadas con las respuestas observadas y los logros por parejas de estudiantes.

En el capítulo 7 presentamos las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos de investigación planteados en el capítulo 1, así como también se plantean algunas sugerencias para futuras investigaciones.

Cabe señalar que esta tesis forma parte del proyecto "Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em ambientes tecnológicos PEA-MAT/DIMAT", desarollado entre la PUCP y la PUC-SP/Brasil

INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos que actualmente se aprecia en la enseñanza de la geometría es que en las aulas no se profundiza mucho el fomento de las justificaciones matemáticas sobre algunas propiedades geométricas, tal es así que en el caso de los elementos de la circunferencia se presentan las propiedades sin realizar una justificación del porqué éstas son válidas. Esta actividad se ve reforzada en el tratamiento que se le brinda en los textos escolares, ya que en su mayoría presentan las representaciones del objeto geométrico circunferencia de manera estática, no permitiendo observar las propiedades que aparecen relacionadas ni tampoco verificar las justificaciones hechas para determinar la validez de la misma.

En este trabajo se propone el diseño de actividades que, mediante las justificaciones que brindan los estudiantes, permitan realizar una mejor comprensión del concepto circunferencia y su relación con los distintos elementos involucrados en ella, en un ambiente tecnológico apropiado.

Para tal efecto, se realiza un estudio de los elementos involucrados con la circunferencia, como es el caso de la cuerda y el radio de la circunferencia y a su vez determinar qué temas geométricos anteriores al de la circunferencia se presentan.

Se procede a elaborar un conjunto de criterios que deben poseer los conceptos de circunferencia de acuerdo al modelo de razonamiento de Van Hiele. Siguiendo la metodología empleada y con el uso del software Geogebra, se diseñan las actividades. Se analizan los resultados contrastando las respuestas iniciales y finales. De esta forma, se verifica si el modelo empleado permite incrementar los niveles de razonamiento iniciales.

CAPÍTULO 1

Aspectos generales

Presentamos los antecedentes de la investigación, el problema de investigación y los objetivos de la investigación.

1.1 Antecedentes

El presente trabajo de investigación surge de la preocupación por la enseñanza de la geometría, especialmente con el objeto geométrico circunferencia, ya que encontramos que los estudiantes presentan ciertas dificultades en aprender los conocimientos básicos de la geometría, por ejemplo congruencia de triángulos, semejanza de triángulos, la diferencia entre circunferencia y círculo, las líneas notables (mediatriz y bisectriz) relacionados con el triángulo. Además, se suma el hecho de que en las aulas no se fomenta mucho el pensamiento geométrico, lo cual es notable también en los libros de texto que mayormente son usados por los docentes para el diseño de sus sesiones de clase.

Por lo tanto, para nuestra investigación, es pertinente verificar cómo está organizado el objeto geométrico circunferencia en algunos libros de texto de secundaria (específicamente a los relacionados con los elementos cuerda y radio) según los siguientes aspectos: los estilos de las demostraciones, las técnicas usadas y el lenguaje empleado para el nivel correspondiente (en nuestro caso, nivel secundario). Para ello, nos basaremos en Ibañes (2001, citado en Ibañes y Ortega, 2004) que propone una metodología para estudiar el tratamiento de las justificaciones en los textos, basándose en una serie de categorías: la organización de los textos; las expresiones usadas como por ejemplo si en el texto aparecen hipótesis, tesis o conclusión; si hacen algunas consideraciones globales del proceso seguido. De la misma forma, si distinguen claramente entre un enunciado y una justificación, las orientaciones generales de las demostraciones, si existe la presencia de las justificaciones, análisis de las tareas, etc.

Las herramientas que se usaron en dicha investigación serán empleadas también en nuestro trabajo ya que permitirán determinar la organización de los textos; los elementos de la circunferencia que aparecen (representaciones diversas, definiciones, proposiciones o propiedades); si en los problemas y ejercicios planteados se reconocen los procedimientos rutinarios, y los conocimientos previos necesarios para sus soluciones. A partir de este análisis, se diseñarán las actividades que mediante las justificaciones brindadas por los estudiantes se contribuya a una mejor comprensión del concepto circunferencia.

De otro lado, la tecnología ha ido evolucionando a pasos agigantados y su aplicación tiene un efecto positivo en el ámbito educativo, tal y como consta en el documento Orientación para el Trabajo Pedagógico de Matemática (OTP, 2006), documento elaborado por el Ministerio de Educación del Perú, en donde se señala que:

> La Tecnología desempeña también un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Herramientas como un programa informático de "Geometría Dinámica", capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos dimensiones y para tener una experiencia interactiva entre ellas. (p. 30).

En tal sentido, existen trabajos de investigación a nivel de la educación secundaria concernientes al uso de dichas herramientas para la mejora del aprendizaje del estudiante. Como por ejemplo, el trabajo realizado por Carmona (2011) cuyo uso de la Geometría Dinámica y activa "se puede acercar al conocimiento geométrico de los estudiantes […] profundizando conocimientos que permitan el desarrollo de habilidades y competencias no solo argumentativas sino propositivas" (p. 49). Dicho trabajo tuvo como objeto de estudio a la circunferencia y sus propiedades usando el software de Geometría Dinámica llamado *Regla y Compás*. Esta investigación es pertinente ya que manifiesta que el uso de un software contribuye con la mejora del aprendizaje del estudiante, "generando una Transposición Didáctica entre la Geometría y la informática" (Balacheff, 1994 citado en Carmona, 2011), que en el sentido de Balacheff es denominado Transposición Informática "al trabajo sobre el conocimiento que permite una representación simbólica y la puesta en práctica de esta representación por un dispositivo informático" (Balacheff, 1994 citado en Del Castillo Escobedo y Montiel Espinoza, 2009). De acuerdo con Carmona (2011), podemos decir que usar un software de Geometría Dinámica (en nuestro caso usaremos el Geogebra), permite a los estudiantes operar de una forma más directa las relaciones (propiedades) del objeto geométrico, concretando los conceptos geométricos abstractos.

A su vez, la investigación de Carmona (2011) nos brinda insumos relacionados con las actividades propuestas durante el proceso de instrucción, las que se caracterizan porque fueron trabajadas utilizando el software de geometría dinámica *Regla y Compás*. Cabe resaltar que dichas actividades permitirán identificar el nivel de razonamiento correspondiente según el Modelo Van Hiele, de acuerdo a los criterios propios que establece esta teoría y que han sido diseñados con la finalidad de establecer una Unidad Didáctica que se fundamenta en el modelo teórico antes señalado. Dicha propuesta de actividades será adaptada para los fines de este trabajo.

De acuerdo con Acosta, Mejía y Rodríguez (2012), el trabajo experimental en geometría mediante el uso de un software (en particular, el uso del Cabri) "contribuye a desarrollar una intuición espacial necesaria para la formulación de conjeturas y su verificación" (p. 212) y a su vez, "contribuye a una mejor comprensión de la teoría geométrica, en la búsqueda de formalizar los resultados de manera intuitiva" (p. 212). Este autor propone usar el software de geometría dinámica Cabri 2D y 3D para realizar procesos de experimentación, realizando dibujos aproximados, formulando conjeturas y verificándolos para llegar a procesos de construcción exactos basados en argumentos teóricos que permitan demostrar tales resultados.

Por lo anterior, consideramos pertinente diseñar un conjunto de actividades que permitan descubrir las propiedades geométricas relacionadas con la circunferencia, verificar dichos resultados con el software y que sustenten su construcción con argumentos teóricos, favoreciendo así la comprensión del objeto geométrico circunferencia teniendo en cuenta el modelo teórico de Van Hiele en dicho diseño y en el análisis de las respuestas de los estudiantes a estas tareas. Además, con respecto al uso del software de Geometría Dinámica, lo que se busca en esta investigación es que el Geogebra sirva como mediador para que el estudiante pueda realizar las justificaciones con respecto a una actividad planteada, interactuando y manipulando un objeto geométrico en estudio (que en nuestro caso son los elementos notables de la circunferencia, como por ejemplo: el radio y la cuerda), permitiendo verificar qué propiedades permanecen invariantes.

1.2 Problema de investigación

Durante el ejercicio de la práctica docente, en particular en la enseñanza de la geometría a nivel secundaria, se espera, tal y cual establece el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica del Perú, que el estudiante "toma la iniciativa para formular preguntas, buscar conjeturas y plantear problemas" (DCN, 2009, p. 327). En tal sentido, con respecto a los elementos asociados a la circunferencia (radio y cuerda), se aprecia en las aulas que cuando los docentes realizan actividades, los estudiantes aplican de manera algorítmica las propiedades de dicho objeto geométrico, dejando de lado el análisis geométrico.

Probablemente esta forma de abordar el tema en clase tenga relación con la forma en la que los textos lo hacen pues el libro suele ser un referente fundamental en las clases de matemáticas, tal y como afirma Villella (2001, citado en Abrate, R., Delgado, G., & Pochulu, M., 2006) que sostiene que "los docentes suelen sustentar gran parte de sus prácticas en los libros escolares de Matemática que recomiendan usar a los alumnos y que, algunas veces, ellos mismos usan" (p. 2). Por lo tanto, se hace necesario realizar el estudio de algunos libros para corroborar esta afirmación basándonos en cómo son tratadas las justificaciones en los textos más usados por los docentes, ya que los libros de texto son herramientas que el profesor utiliza para diseñar su clase y que en la mayoría de los casos programa sus sesiones de clase basándose en el contenido de los libros de texto. En ese sentido, se ha analizado algunos textos de segundo grado de secundaria tales como el libro de De la Cruz Solórzano (2011) de la Editorial Bruño al que lo denominaremos "Texto 1" y el libro de Marín Córdova, Santisteban Chero, Vergaray Dulanto, Espinoza Chirinos y Onsihuay Acosta (2012) del Ministerio de

Educación del Perú para el trabajo de los colegios públicos al que lo denominaremos "Texto 2", con la finalidad de verificar cómo son tratadas las justificaciones en el caso de los elementos notables de la circunferencia. Fueron seleccionados tales libros ya que son los libros más usados por los docentes y además el colegio donde se aplicaron las actividades fue un colegio nacional, de tal forma que nos permitió ver cómo se manifiestan las justificaciones en los textos elaborados por el Ministerio de Educación de nuestro país.

Teniendo en cuenta los criterios de Ibañes y Ortega (2004) mencionados anteriormente, observamos que el "Texto 1" se encuentra dividido en cuatro áreas temáticas: aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, en las cuales en la Unidad 3 de geometría se toca el tema de circunferencia, tratando los siguientes contenidos: Circunferencia y círculo, postulados sobre ángulos en la circunferencia, postulados sobre relaciones métricas en la circunferencia y postulados sobre posiciones relativas de dos circunferencias. Además, con respecto a las propiedades usadas, encontramos que ninguna ha sido demostrada en relación a los elementos de la circunferencia, como por ejemplo, que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia (p. 298). Por otro lado, observamos que en otros temas relacionados con la circunferencia (por ejemplo, los ángulos en la circunferencia) recurren al empleo de un gráfico para su entendimiento:

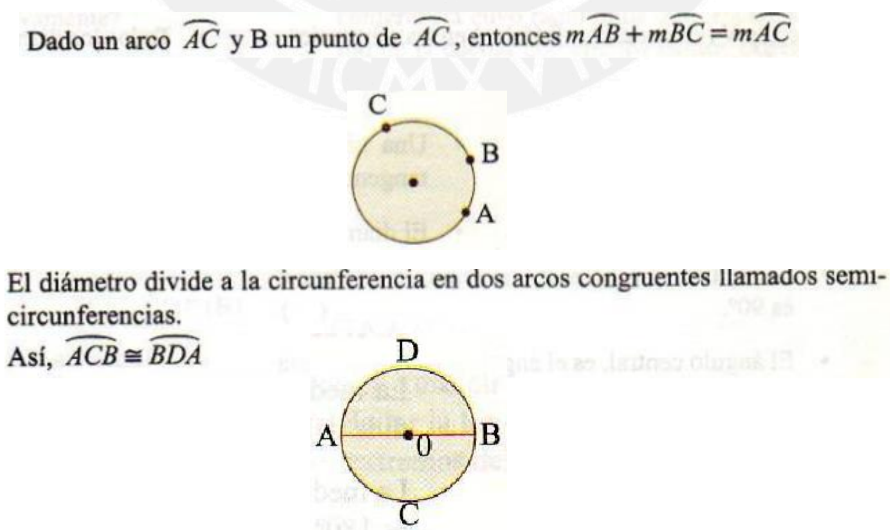
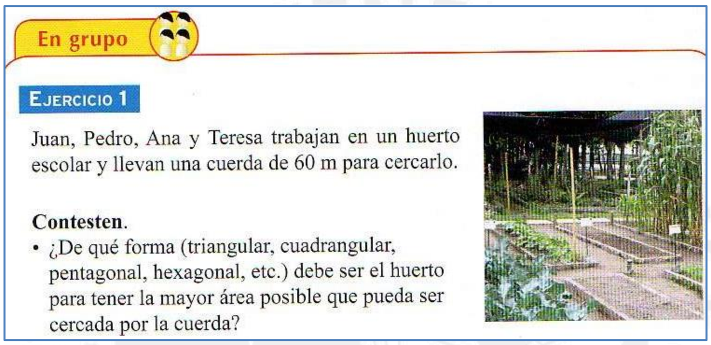


Figura 1.1 Circunferencia y círculo
Fuente: De la Cruz (2011, p. 298)

Lo que más nos llamó la atención fue la ausencia de las justificaciones para explicar una propiedad relacionada con la circunferencia, así como también la ausencia de problemas que fomenten las justificaciones de los estudiantes al plantearles una proposición, afirmación, etc. Esto conlleva pues a que no se fomente el pensamiento geométrico y que a la vez no haya una buena comprensión de la circunferencia y sus propiedades.

De la misma forma, al revisar el "Texto 2" observamos que la forma de introducir los temas los realiza mediante una situación cotidiana, como por ejemplo:


En grupo

EJERCICIO 1

Juan, Pedro, Ana y Teresa trabajan en un huerto escolar y llevan una cuerda de 60 m para cercarlo.

Contesten.

- ¿De qué forma (triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.) debe ser el huerto para tener la mayor área posible que pueda ser cercada por la cuerda?

Figura 1.2 Círculo y circunferencia
Fuente: Marín Córdova et al. (2012, p. 152)

La finalidad de esta introducción es que el estudiante observe que, a medida que aumenta el número de lados, aumenta la medida del área.

A la vez, dicho texto presenta algunas preguntas que conllevan a que el estudiante justifique su respuesta, cuyo planteamiento lo presentamos a continuación:

3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? **Justifica** tu respuesta.

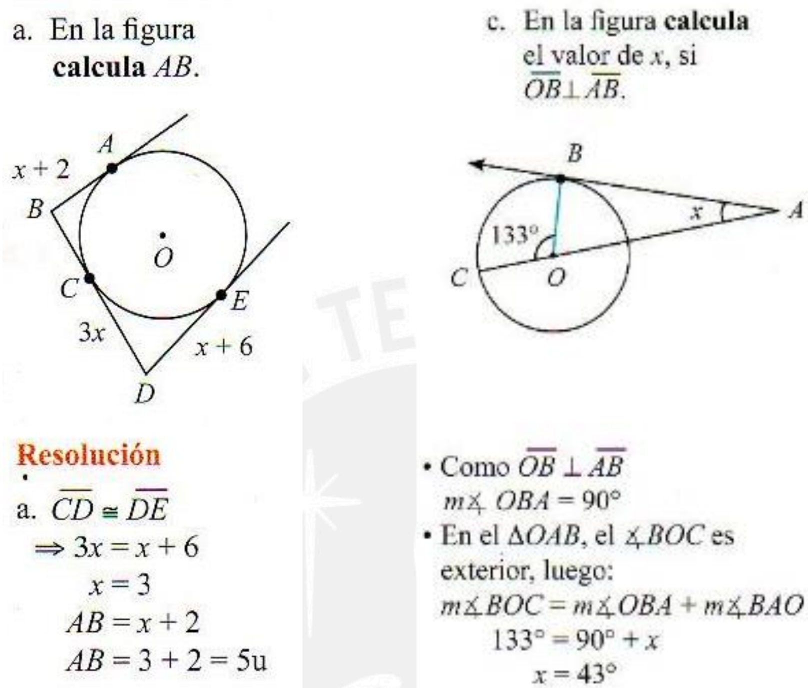
a. En una circunferencia el diámetro es la cuerda de mayor longitud.

b. Una recta tangente no puede pasar por el centro de la circunferencia.

c. El cociente de la longitud de una circunferencia entre su diámetro es aproximadamente 3 unidades.

Figura 1.3 Ejercicios propuestos
Fuente: Marín Córdova et al. (2012, p. 158)

También observamos que en el tratamiento de los problemas, existen actividades donde se profundiza la parte algorítmica, dejando de lado la parte geométrica, tal y cual presentamos a continuación:


a. En la figura **calcula** AB.

c. En la figura **calcula** el valor de x, si $\overline{OB} \perp \overline{AB}$.

Resolución

a. $\overline{CD} \cong \overline{DE}$

$\Rightarrow 3x = x + 6$

$x = 3$

$AB = x + 2$

$AB = 3 + 2 = 5\text{u}$

• Como $\overline{OB} \perp \overline{AB}$

$m\measuredangle\ OBA = 90°$

• En el ΔOAB, el $\measuredangle BOC$ es exterior, luego:

$m\measuredangle BOC = m\measuredangle OBA + m\measuredangle BAO$

$133° = 90° + x$

$x = 43°$

Figura 1.4 Ejemplos relacionados con la circunferencia
Fuente: Marín Córdova et al. (2012, p. 155)

Observamos que los ejercicios propuestos en el texto 2 recurren a la parte algorítmica de algunas propiedades, dejando de lado la interpretación geométrica de cálculos y que creemos que van dirigidos hacia un grupo de estudiantes con un nivel de razonamiento alto puesto que se hace uso de otras propiedades necesarias para el desarrollo de la tarea propuesta, cuando en realidad este proceso tiene que ser gradual y progresivo.

De ambos textos, observamos que existe una ausencia del fomento de las justificaciones matemáticas y además siendo un instrumento útil para el docente, dicha ausencia se vea reflejada en la organización de la clase, generando pues la falta de la formulación de conjeturas, argumentaciones en clase, etc. que son aspectos fundamentales de la matemática y que están contemplados en el DCN en el marco de las capacidades por área (Razonamiento y Demostración).

Suponemos que el profesor tiene que organizar su clase de acuerdo a los niveles cognitivos que posee el estudiante, planteando actividades que permitan alcanzar niveles superiores de razonamiento. Es por eso que usaremos, como elemento teórico en nuestra investigación, el modelo de Van Hiele para proponer actividades que conlleven a la comprensión de las propiedades relacionadas con los elementos de la circunferencia.

Con todo ello, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los niveles de razonamiento sobre los elementos asociados a la circunferencia que pueden alcanzar los alumnos de 2° de secundaria, al desarrollar un conjunto de actividades con apoyo del Geogebra?

1.3 Objetivos de la Investigación

1.3.1 Objetivo General

Determinar los niveles de razonamiento alcanzados por los estudiantes de 2° grado de secundaria, según el modelo de Van Hiele, cuando abordan situaciones que involucran elementos de la circunferencia, usando como mediador el software Geogebra.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar los niveles de razonamiento alcanzados por los estudiantes en relación con los elementos asociados a la circunferencia, según el modelo de Van Hiele.

- Identificar el papel del software Geogebra durante el proceso de instrucción.

- Valorar la propuesta teniendo en cuenta los indicadores del nivel de razonamiento alcanzado tomando en cuenta el modelo de Van Hiele.

1.4 Conclusiones del capítulo

A manera de cierre, diremos que existe una ausencia de las justificaciones geométricas en los dos textos anteriormente analizados y que los docentes utilizan el texto escolar como un medio para elaborar su sesión de clase; sin embargo, es pertinente establecer qué elementos teóricos usaremos para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes. Dichos elementos teóricos los estableceremos a continuación.

CAPÍTULO 2

Elementos teóricos considerados en la investigación

2.1 Definiciones relacionadas con la justificación

Es conveniente aclarar algunos términos que serán usados durante la investigación.

Coincidimos con Parra Zapata, Zapata Jaramillo, Toro Uribe y Durango Urrego (2010) cuando dicen que fomentar un contexto de justificación matemática permite propiciar "la comunicación y la comprensión de las matemáticas y de los conceptos matemáticos al interior de la clase […] recurriendo pues al empleo de la observación, verificación, la explicación, la descripción y la argumentación para sustentar las proposiciones matemáticas" (p. 6). Para los autores, una justificación hace referencia a las actividades y procesos que realiza el estudiante, empleando en sus explicaciones diversos argumentos matemáticos para validar los enunciados. Esta es la postura que nosotros adoptaremos en nuestro trabajo: justificar un enunciado matemático empleando la observación, la verificación, la explicación y los argumentos matemáticos necesarios para validar una propiedad geométrica.

Con respecto a estos argumentos matemáticos, el modelo Van Hiele establece que la justificación de una propiedad geométrica dependerá del nivel de razonamiento que adopte un estudiante, ya que una de las características de este modelo es que cada nivel de razonamiento lleva asociado un tipo de lenguaje específico. Para ello, es pertinente verificar qué acciones realiza un estudiante (esto incluye las justificaciones) para ser ubicado en un nivel respectivo. Es por esa razón que nos basaremos en el modelo Van Hiele para determinar los niveles de razonamiento alcanzados por los estudiantes, lo cual detallaremos a continuación.

2.2 Posicionamiento respecto a la justificación adoptadas en este trabajo: el modelo de Van Hiele

Algunas de las herramientas teóricas que serán útiles en el desarrollo de este trabajo se refieren a las del modelo de Van Hiele. Se ha recurrido a este modelo pues existen trabajos previos al nuestro (por ejemplo el de Carmona, 2011) relacionados con la geometría, en los que se planteaba que el razonamiento de los estudiantes se modifica gradual y progresivamente con respecto a un objeto geométrico.

Inicialmente el modelo de Van Hiele consideró solo tres niveles (los niveles 2, 3 y 4 de la clasificación actual), pero fue necesario añadir un nivel inicial que permitiera recoger información básica relacionada con la parte visual del razonamiento. Luego, Van Hiele (1986, citado en Gutierrez Rojas, 2009) establece un nivel superior al cuarto caracterizando la comprensión de los estudiantes por la rigurosidad matemática, es decir, un nivel donde se adquieren los conocimientos y habilidades propias de un matemático profesional. Actualmente se consideran cinco niveles de razonamiento, pero en este trabajo, considerando el nivel educativo con el que se realizará la experiencia solo estudiaremos hasta el nivel tres.

Seguidamente presentamos las características generales de los cinco niveles de razonamiento. Están extraídas de los trabajos de Corberán Salvador et al. (1994) y Jaime (1993), siendo estas las siguientes:

Nivel 1.- Visualización o Reconocimiento

Los estudiantes:

- Usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas para compararlas, ordenarlas, describirlas o identificarlas.

- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades. Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras, percibiéndolas en su totalidad como unidades.

- Perciben las figuras como objetos individuales, es decir, que los estudiantes no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.

- Comparan y clasifican figuras geométricas basándose en su apariencia global. Por ejemplo, suelen utilizar expresiones como *"… se parece a…"*, *"… tiene la forma de… "*, *"… es como…"*, etc.

Nivel 2.- Análisis

Los estudiantes:

- Son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden describir sus partes y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal, utilizando un vocabulario apropiado, como por ejemplo "lados opuestos", "los ángulos correspondientes son iguales", etc.

- Recitan una lista de propiedades necesarias para identificar la figura.

- Reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos. También pueden deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.

- Pueden hacer generalizaciones a la clase de figuras en cuestión luego de utilizar varias veces un tipo de ejemplos con unas figuras,.

Nivel 3.- Clasificación

Los estudiantes:

- Son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de deducir esas implicaciones. Sin embargo, no comprenden el significado de la deducción como un todo ni el papel de los axiomas.

- Comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una demostración.

- Usan razonamientos deductivos informales ante la necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad geométrica.

- Tienen cierta incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

Nivel 4.- Deducción formal

Los estudiantes:

- Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales. Las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.

- Realizan con frecuencia conjeturas e intentos de verificar las conjeturas deductivamente.

- Pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas, etc.

- Aceptan la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto y son capaces de demostrar su equivalencia.

Nivel 5.- Rigor

Los estudiantes:

- Se encuentran en el nivel máximo de rigor matemático.

- Son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática.

- Aceptan la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y puede analizarlos y compararlos.

Cabe señalar que existe una secuencialidad, continuidad y un lenguaje empleado en cada uno de los niveles. Dichas características encontradas en Corberán Salvador et al. (1994) son las siguientes:

a) *La secuencialidad de los niveles*: aquí se establece que la adquisición de un nivel mayor no supone eliminar el nivel precedente, sino que por el contrario, cada nivel se apoya del anterior: “Pensar según el segundo nivel no es posible sin la capacidad de comprensión del primero” (Corberán Salvador et al. 1994). Por lo tanto, para adquirir un nivel de pensamiento es necesario haber adquirido el nivel precedente.

b) *La continuidad*: Es decir, cuando se aprende una nueva forma de razonar, no se realiza de golpe. Esto se logra con la realización de actividades y de problemas que hacen que poco a poco se vayan adquiriendo nuevas destrezas, pudiendo ser aplicadas en situaciones más complejas.

c) *El lenguaje empleado*: que establece que las capacidades de comprensión de este modelo de Van Hiele no solo se refleja en la forma de resolver un problema, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a un determinado vocabulario, es decir que a "cada nivel de comprensión le corresponde un tipo de lenguaje específico" (Jaime, 1993).

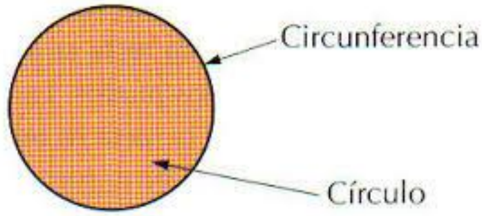
Para nuestro trabajo, proponemos una descripción de lo que un estudiante debería ser capaz de realizar (esto incluye la justificación matemática) para asignarle la adquisición de un determinado nivel de razonamiento en esta área de la geometría. Dicha descripción se ha realizado para los tres primeros niveles, de la siguiente manera:

Nivel 1.- Visualización o Reconocimiento

Los estudiantes:

- Describen de manera verbal la diferencia entre circunferencia y círculo.
- Explican los procedimientos seguidos empleando un lenguaje informal: poner, mover, etc.
- Justifican sus respuestas empleando en un ejemplo específico (observación de una figura).

Con respecto a nuestro trabajo en particular, el estudiante debe ser capaz de hacer la distinción entre lo que es una circunferencia y círculo teniendo en cuenta que circunferencia es el borde y círculo es la región interior de ésta, de tal manera que ambos términos puedan ser aclarados.



En este nivel también se ubicarían las respuestas de los estudiantes cuyas justificaciones se basan solo en observaciones. Por ejemplo, como un resultado de usar el programa de geometría dinámica, emplean términos como: “pongo el punto…”, “la recta choca con el centro de la circunferencia”.

Nivel 2.- Análisis

Los estudiantes:

- Analizan las propiedades relacionadas con los elementos de la circunferencia.
- Después de aplicar varios ejemplos, pueden hacer generalizaciones sobre las regularidades identificadas.
- Explican, con palabras, que una afirmación es cierta comprobando unos pocos casos, realizando mediciones oportunas utilizando el software como medio de comprobación (de manera experimental).

Nivel 3.- Ordenación o Clasificación

Los estudiantes:

- En su explicación, emplean resultados geométricos previos.
- Deducen algunas propiedades relativas a los elementos de la circunferencia, empleando razonamientos deductivos informales, como por ejemplo: realizando argumentos verbales, poco elaborados (con algunos defectos) y la incapacidad de usar la simbología matemática formal.
- Cuando justifican una propiedad relacionada con la circunferencia, la explican mediante palabras, recurriendo a una propiedad anterior, es decir, realizando conexiones entre propiedades que anteriormente fueron trabajadas (por ejemplo, el empleo de la propiedad de cuerdas y de la propiedad de mediatriz

para justificar que dados tres puntos no colineales existe una única circunferencia que los contengan a tales puntos).

En la parte experimental, se emplearán los elementos descritos para ubicar a los estudiantes en un nivel determinado. Con nuestra investigación se pretende implementar una serie de actividades que permitan que los estudiantes alcancen el nivel 3 de razonamiento según el Modelo de Van Hiele teniendo como mediador el software Geogebra.

Además, elaboraremos actividades concernientes al objeto geométrico circunferencia. Pero, ¿cómo serán elaborados? ¿En base a qué teoremas y/o propiedades serán diseñadas nuestras actividades? Para ello, es importante identificar los principales conceptos, teoremas, etc. para poder elaborar nuestras actividades, mostrando sus respectivas demostraciones. Veremos todo ello a continuación.

2.3 Elementos teóricos asociados a la noción de circunferencia

En esta parte desarrollaremos el tratamiento que se le dará al objeto matemático circunferencia correspondiente al nivel 3 según el Modelo de Van Hiele.

Para nuestro trabajo, hemos considerado las definiciones trabajadas en Verástegui (2003). A partir de ello, debemos indicar qué es circunferencia y cuáles son los elementos que se asocian a la circunferencia, así como qué propiedades serán tratadas en relación a dichos elementos, con la finalidad de implementar nuestras actividades posteriormente en base a la parte teórica brindada a continuación y determinar los criterios que permitirían ubicar a un estudiante en un respectivo nivel.

Previo a las definiciones de la circunferencia, debemos establecer bajo qué métrica estamos trabajando.

Axioma de la regla

Sean L una recta contenida en un plano π y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Existe una correspondencia biunívoca o función biyectiva $f : L \to \mathbb{R}$.

Definición de distancia en π

Sean $P,Q \in \pi$ con $P \neq Q$. Sea L_{PQ} la única recta que pasa por P y Q, se define *distancia de P y Q* denotado por $d(P,Q) = \left| f(Q) - f(P) \right|$.

Definición de una circunferencia

Sea un punto ***O*** ubicado del plano π y $r \geq 0 en \mathbb{R}$. El conjunto de puntos **P** del plano π cuyas distancias al punto **O** es *r* se llama ***circunferencia*** de ***centro O*** y ***radio r***, y lo denotamos por $\mathbf{C}_{(O,\, r)}$.

De manera formal, podemos decir que:

$\mathbf{C}_{(O,\, r)} = \{\mathbf{P}/\mathbf{P} \in \pi$ y $d(\mathbf{P}, \mathbf{O}) = r\} \subset \pi$.

Para puntos *P* del plano π,

$\mathbf{P} \in \mathbf{C}_{(O,\, r)} \Leftrightarrow d(P,O) = r$

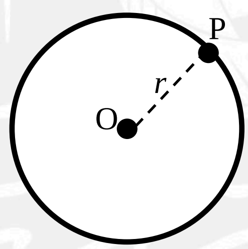


Figura 2.1 Circunferencia
Fuente: Verástegui (2003, p.133)

De esto se desprende que para definir a una circunferencia es suficiente tener el centro *O* y el radio *r*, se ubica el punto **P** en el plano π, talque d(P,O)=r; o es suficiente tener el centro *O* y un punto P por donde pasa la circunferencia $\mathbf{C}_{(O,\, r)}$, talque r=d(P,O).

Definición de líneas notables en la circunferencia

Sean M, P y Q puntos diferentes de una circunferencia $\mathbf{C}_{(O,\, r)}$; entonces definimos al ***segmento radial*** al segmento $\overline{OP}$, cuya longitud de $\overline{OP}$ *es* r, el radio de la circunferencia. Al segmento $\overline{PQ}$ se llama una **cuerda** de la circunferencia. Sea $\overline{PM}$ una cuerda de $\mathbf{C}_{(O,\, r)}$ que contiene al centro *O*, es decir $O \in \overline{PM}$; dicha cuerda recibe el nombre de ***segmento diametral*** tal que $d(P,M)=2r$ ($\overline{PM}$ es el ***diámetro*** de la circunferencia).

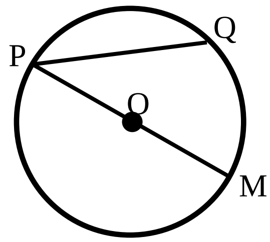


Figura 2.2 Radio ($\overline{OP}$), cuerda ($\overline{PQ}$) y diámetro ($\overline{PM}$)
Fuente: Verástegui (2003, p. 136)

Es necesario precisar que es común llamar ***radio*** a un ***segmento radial*** y llamar ***diámetro*** a un ***segmento diametral***. En adelante, usaremos estas notaciones si no hay lugar a confusiones.

En el plano π, dadas una circunferencia $\mathbf{C}_{(O,\, r)}$ y una recta ***L***, se tienen los siguientes casos:

a) Si $L \cap C_{(O,r)} = \{P, Q\}$, con $P \neq Q$, se dice que la recta ***L*** es ***secante*** con la circunferencia $\mathbf{C}_{(O,\, r)}$ en los puntos *P* y *Q*.

b) Si $L \cap C_{(O,r)} = \{P\}$, se dice que la recta ***L*** es ***tangente*** a la circunferencia $\mathbf{C}_{(O,\, r)}$ en el punto P, donde dicho punto es el ***punto de tangencia*** o de contacto entre la recta y la circunferencia.

c) Si $L \cap C_{(O,r)} = \varnothing$, se dice que la recta ***L*** es ***exterior*** a la circunferencia **C**$_{(O,\ r)}$ en las cuales la recta ***L*** y la circunferencia **C**$_{(O,\ r)}$ no tienen puntos en común (son ***disjuntos***).

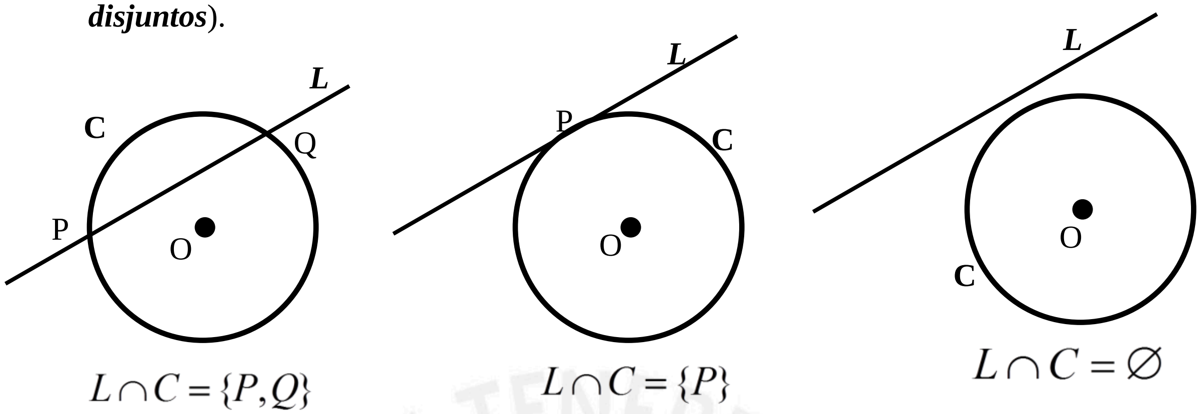


Figura 2.3 Recta secante, recta tangente y recta exterior a una circunferencia
Fuente: Verástegui (2003, p. 136)

<u>**Definición**</u>

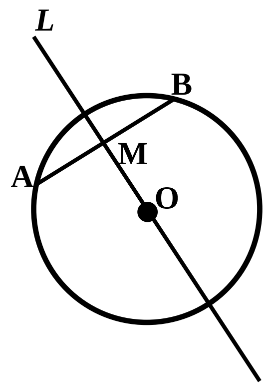
Sea la circunferencia **C**$_{(O,\ r)}$. Se define *interior de la circunferencia* (***Int*** **C**$_{(O,\ r)}$) al conjunto ***Int*** **C**$_{(O,\ r)}$ = $\{ X \in \pi \,/\, d(X,O) < r \}$. De la misma forma, se define *exterior de la circunferencia* (***Ext*** **C**$_{(O,\ r)}$) al conjunto ***Ext*** **C**$_{(O,\ r)}$ = $\{ X \in \pi \,/\, d(X,O) > r \}$.

<u>**Teoremas importantes para este trabajo**</u>

Los teoremas que serán abordados en nuestro trabajo son los relacionados con las líneas notables antes mencionadas y que algunas de ellas (teorema 1 y teorema 2) serán usadas en el diseño de las actividades brindadas a los estudiantes. Dichos teoremas son los siguientes:

Teorema 1: Si una recta *L* pasa por el centro *O* de una circunferencia de radio *r*>0 y es perpendicular a una cuerda $\overline{AB}$; entonces la recta interseca a la cuerda en su punto medio.

Demostración



En $\mathbf{C}_{(O,\ r)}$ sea $\overline{AB}$ una cuerda y sea L una recta tal que $O \in L$ y $L \perp \overline{AB}$. Sea $L \cap \overline{AB} = \{M\}$. Resulta que ΔOAB es isósceles, pues $OA=OB=r$. Además, los triángulos $\Delta AMO \cong \Delta BMO...(ALA)$, ya que $m\sphericalangle(MOA) = m\sphericalangle(MOB)\ y\ m\sphericalangle(AMO) = m\sphericalangle(OMB) = 90°$. Luego, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Por lo tanto, L interseca a la cuerda $\overline{AB}$ en su punto medio.

Teorema 2: Dada una circunferencia $\boldsymbol{C}_{(O,r)}$, y una cuerda AB, la mediatriz L de dicha cuerda pasa por el centro O de la circunferencia.

Demostración

Recordemos la definición de mediatriz y la propiedad que se cumple en toda mediatriz.

Dado un segmento $\overline{AB}$, la mediatriz de dicho segmento es la recta "*L*" perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por el punto medio "M" de $\overline{AB}$.

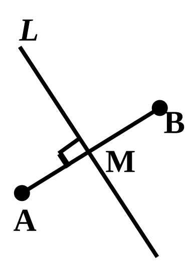
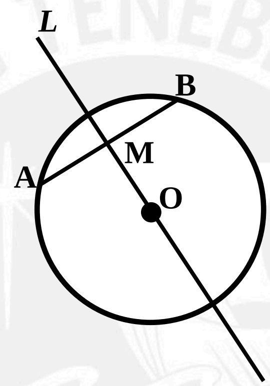


Figura 2.4 Mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Donde: $\overline{AM} = \overline{AB}\, y\, L \perp \overline{AB}$

A partir de la definición de la mediatriz, se determina un teorema: todo punto de la mediatriz de un segmento rectilíneo equidista de los extremos de este segmento. Además, podemos citar el recíproco de este: todo punto que equidiste de los extremos de un segmento rectilíneo, está en la mediatriz de dicho segmento. Ésta última parte (la forma recíproca) es la que se tomará en cuenta para la justificación del teorema 2 antes planteado.

Procederemos a la demostración del teorema 2.



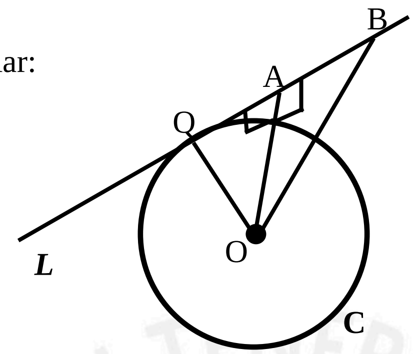
Como d(O,A)=d(O,Q)=r, se tiene que O se encuentra en la mediatriz L de $\overline{AB}$. Luego, O $\in$L y por lo tanto, la recta L pasa por el centro O de la circunferencia C(O,r).

Los teoremas anteriores nos muestran, como conceptos previos al estudio de la circunferencia, la definición de mediatriz y la congruencia de triángulos. Como veremos más adelante, estas últimas definiciones son necesarias incluirlas para el diseño nuestra actividad llamada actividad inicial los que a su vez son necesarios para el diseño de las actividades posteriores llamadas actividades centrales.

Teorema 3: L es tangente a la circunferencia $\mathbf{C}_{(O,\ r)}$ en Q sí y solo sí $L_{\overline{OQ}} \perp L$ en $Q \in \mathbf{C}_{(O,\ r)}$.

Demostración

Construcción auxiliar:



Sea L una recta tangente a $\mathbf{C}_{(O,\ r)}$ en Q. Tenemos que demostrar que $L_{\overline{OQ}} \perp L$ en $Q \in \mathbf{C}_{(O,\ r)}$. Negamos este último para demostrar por el absurdo. Supongamos L_{OQ} no es perpendicular a L en Q, sino en A.

Sea $A \in L$ tal que $L_{OA} \perp L$ en A. Sea B$\in L$ tal que: Q-A-B y $\overline{QA} \cong \overline{AB}$.

Se tiene luego que: $\Delta OAQ \cong OAB ...(LAL)$

$\Rightarrow d(O,Q) = d(O,B) = r$

$\therefore B \in C_{(O,r)}$

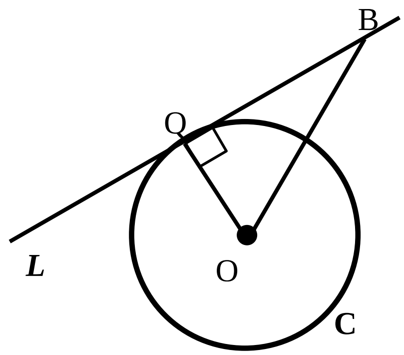
Luego, como $B \in L \wedge B \in C_{(O,r)} \Rightarrow L \cap C = \{B\}$

$\therefore L \cap C = \{Q, B\}$

L *es una recta* sec*ante*...$(\Rightarrow\Leftarrow)$ Contradicción

Luego: A=Q.

Recíproco



Sea $B \in L$ tal que $B \neq Q$, el ΔOQB es recto en Q y $m\measuredangle(OBQ) < m\measuredangle(OQB) = 90°$. Luego, $r = d(O,Q) < d(O,B)$.

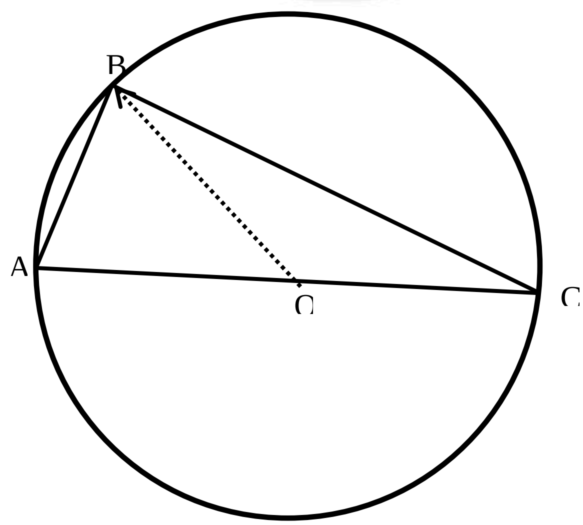
$\therefore B \notin C, L \cap C = \varnothing$

$\therefore L\ es\ \tan gente\ a\ C$

Este tipo de justificación no se fomenta en nuestro trabajo, ya que abordar dicho teorema mediante el absurdo requiere de un nivel de abstracción más avanzado que el nivel 3 de razonamiento de Van Hiele, ya que supone la idea de negar a una proposición para luego llegar a una contradicción.

Teorema 4: Todo triángulo inscrito a una semicircunferencia es un triángulo rectángulo.

Demostración



De la figura anterior, se tiene que $\Delta ABO\ y\ \Delta BOP$ son isósceles, puesto que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{OC} = r$. Luego, se tiene que $m\measuredangle(BAO) \cong m\measuredangle(ABO), m\measuredangle(OBC) \cong m\measuredangle(BCO)$. Además, en el triángulo ABC, la suma de sus ángulos interiores resulta 180°, luego tenemos:

$$m\measuredangle(BAO) + m\measuredangle(ABC) + m\measuredangle(BCO) = 180°$$
$$m\measuredangle(BAO) + m\measuredangle(ABO) + m\measuredangle(OBC) + m\measuredangle(BCO) = 180°$$
$$2m\measuredangle(ABO) + 2m\measuredangle(OBC) = 180°$$
$$\therefore\ m\measuredangle(ABO) + m\angle(OBC) = m\measuredangle(ABC) = 90°$$

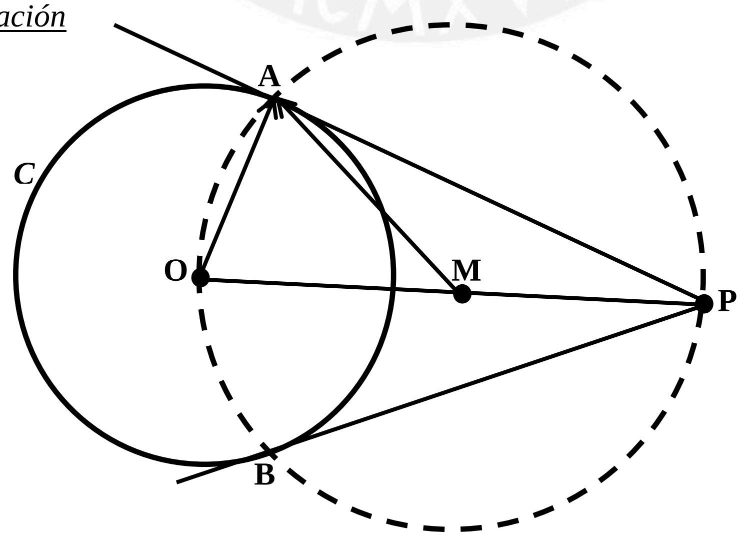
Luego, el triángulo es un triángulo rectángulo.

Cabe resaltar que el estudiante puede justificar su respuesta recurriendo a otra propiedad de la circunferencia de manera rápida, usando la definición del ángulo inscrito, que establece que la medida de todo ángulo inscrito $A\hat{B}C$ a una circunferencia es la mitad del arco de circunferencia $\widehat{AC}$ contenido en el interior de dicho ángulo. En nuestro sería así:

$$m\measuredangle(ABC) = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Teorema 5: Dado una circunferencia $\boldsymbol{C}_{(O,r)}$ y un punto P exterior a ella, existen dos rectas tangentes a la circunferencia C que pasan por P.

<u>*Demostración*</u>



Sea M el punto medio de $\overline{OP}$ y sea $\boldsymbol{C}_{(M,MO)}$, luego existen dos puntos y solo dos *A, B* tales que{A, B} = $\boldsymbol{C}_{(O,r)} \cap \boldsymbol{C}_{(M,MO)}$; además, por el teorema 4, $\sphericalangle OAP = 90°$ y por el teorema 3, $\overleftrightarrow{AP}$ es una recta tangente a la $\boldsymbol{C}_{(O,r)}$ en *A*. Similarmente, se demuestra que el $\sphericalangle OBP = 90°$ y que la recta $\overleftrightarrow{BP}$ es tangente a la $\boldsymbol{C}_{(O,r)}$ en B.

Teorema 6: De la figura adjunta, "A" y "B" son puntos de tangencia. Se cumple: $\overline{AP} = \overline{BP}$

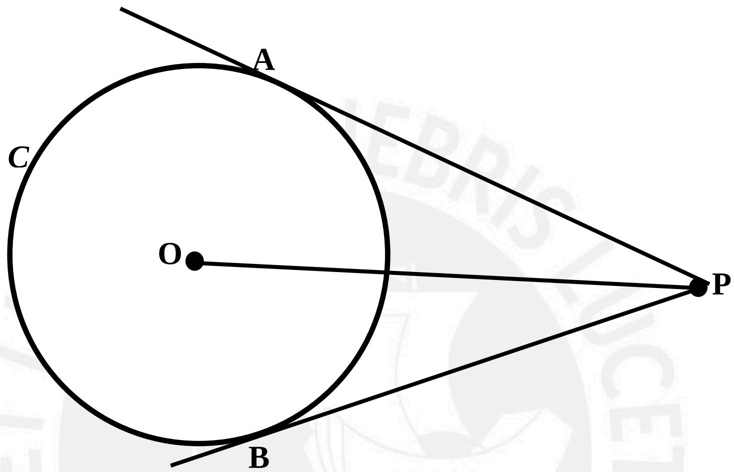
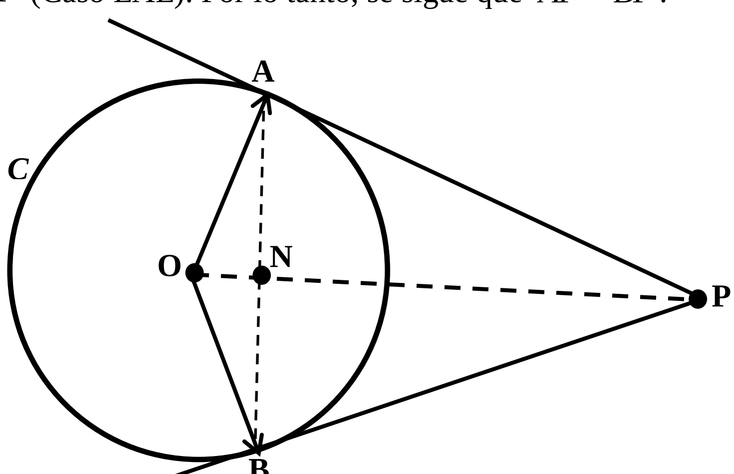


Figura 2.5 Rectas tangentes a una circunferencia
Fuente: Verástegui (2003, p. 140)

Demostración

Del teorema anterior, se demostró que los triángulos ΔOAP *y* ΔOBP son rectángulos.

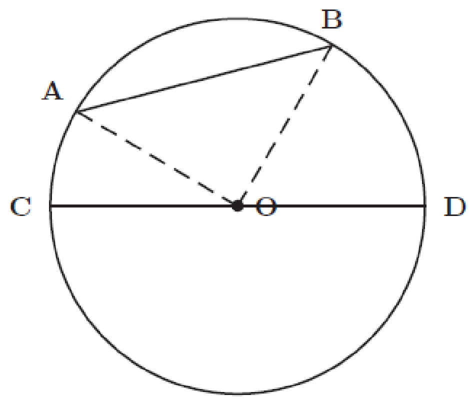
Por el teorema 2 se tiene que $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ y como $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, $\overline{NA} \cong \overline{NB}$ los triángulos ΔONA *y* ΔONB son congruentes (Caso LLL). Luego $m\sphericalangle(AON) \cong m\sphericalangle(BON)$. Luego $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (Caso LAL). Por lo tanto, se sigue que $\overline{AP} = \overline{BP}$.



Observamos que la forma de justificar esta propiedad se realiza recurriendo a teoremas geométricos tratados anteriormente (teorema 2 y casos de congruencia de triángulos) que han sido pertinentes utilizarlos para justificar este teorema.

Teorema 7 En una misma circunferencia el diámetro es la mayor de las cuerdas.

Demostración

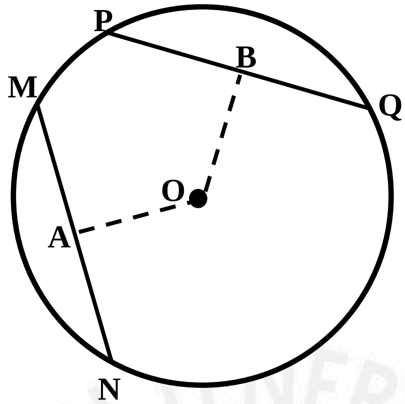


Sea $\overline{AB}$ una cuerda que no contiene al centro O y sea $\overline{CD}$ un diámetro. Por desigualdad triangular en el ΔOAB se tiene que $AB<OA+OB$, pero $OA=OB=OC=OD=r$. Luego, tenemos que: $AB<OC+OD=CD$, $AB<CD$.

Vemos que, para justificar dicho teorema, no necesariamente se utilizan teoremas que han sido tratados previamente, sino que se recurren a otros casos geométricos ya que tiene sentido utilizarlos.

Teorema 8: En una circunferencia $\boldsymbol{C}_{(O,r)}$; dos cuerdas $\overline{MN}\ y\ \overline{PQ}$ son congruentes si y solo si dichas cuerdas son equidistantes del centro *O*.

Demostración



En $\boldsymbol{C}_{(O,r)}$ sean $\overline{MN}\ y\ \overline{PQ}$ dos cuerdas, $\overline{OA}\perp\overline{MN}$ en A y $\overline{OB}\perp\overline{PQ}$ en B. Además, por el teorema 1, A y B son puntos medios de $\overline{MN}\ y\ \overline{PQ}$ respectivamente.

i. Como $\overline{MN}\cong\overline{PQ}$ y $\overline{MO}\cong\overline{ON}\cong\overline{OP}\cong\overline{OQ}\cong r$. Luego, $\Delta OMN\ y\ \Delta OPQ$ son isósceles y $\Delta OMN\cong\Delta OPQ$ (Caso LLL) y se cumple que $m\measuredangle(OMA)\cong m\measuredangle(OPB)$ y además, se tiene $\overline{MA}\cong\overline{PB}$. Los triángulos $\Delta OMA\cong\Delta OPB$ (LAL). Por lo tanto $\overline{OA}=\overline{OB}$.

ii. Recíprocamente, si $\overline{MN}\ y\ \overline{PQ}$ equidistan de *O* se tiene que $\overline{OA}=\overline{OB}$ y como *OM* = *OP*= *r* y $\Delta OAM\ y\ \Delta OBP$ son rectángulos, por el Teorema de Pitágoras se tiene que: $\overline{OA}^2+\overline{MA}^2=r^2=\overline{PB}^2+\overline{OB}^2\Rightarrow\overline{MA}=\overline{PB}$. Como *A* y *B* son puntos medios de las cuerdas *MN* y *PQ* respectivamente, resulta que *MN*=*PQ*, es decir: $\overline{MN}\cong\overline{PQ}$.

Observamos que para la justificación de este teorema se recurre a otros teoremas geométricos necesarios (congruencia de triángulos y el teorema de Pitágoras).

2.4 Conclusiones del capítulo

Se puede observar que existen teoremas que requieren de conceptos previos (como el de congruencia de triángulos, el teorema de la mediatriz y conceptos relacionados con la existencia de triángulos) para justificar una propiedad geométrica. Esta observación será tomada en cuenta para elaborar el diseño de nuestras actividades iniciales, con la finalidad de recuperar los conocimientos previos necesarios para que los estudiantes puedan justificar sus respuestas en las actividades posteriores. Es pertinente entonces, realizar una serie de actividades previas (las suficientes) que se relacionan con el tema de los elementos notables de la circunferencia.

CAPÍTULO 3

Metodología de la investigación

3.1 Justificación del método seleccionado

La metodología que emplearemos en este trabajo es la de investigación – acción, ya que permite interactuar activamente con el estudiante, así como también le sirve al docente como herramienta para su progreso profesional y como investigador. Tal como señala Tripp (2005), la investigación – acción educativa es una estrategia de desarrollo para los docentes e investigadores, de modo tal que dichas investigaciones puedan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los alumnos. En consecuencia, podemos decir que esta metodología es relevante en el ámbito de la didáctica de la matemática, ya que permite buscar no solo una formación profesional por parte del docente, sino una formación investigadora, de tal manera que reflexionen sobre su quehacer educativo.

Pero, ¿qué es la metodología investigación – acción? Para responder a esta pregunta, nos basaremos en los trabajos de la North Central Regional Educational Laboratory (2008, citado en Segal, 2009) que establece que la metodología investigación- acción es:

> La indagación o investigación en el contexto de las actividades centradas en mejorar la calidad de una organización y su desempeño. Por lo general, está diseñada y conducida por los profesionales quiénes analizan los datos para mejorar su propia práctica. La investigación-acción puede ser hecha por personas o por equipos de colaboradores. En el caso en que sea realizada por un equipo se llama investigación colaborativa. (p, 2) (Traducción nuestra).

La metodología a emplear será de tipo colaborativa ya que, como establece Franco (2005), se trata de la búsqueda de transformación cuando es solicitada por el grupo de referencia (en nuestro caso, grupo de alumnos o grupo de estudio) y el equipo de investigadores (el docente), donde el docente - investigador, junto con los alumnos desencadenan una serie de comunicaciones, tomándose en cuenta todas las contribuciones de los estudiantes.

3.2 Fases Metodológicas a implementar en la investigación

La investigación-acción contempla 4 fases o ciclos básicos que fueron trabajados por Richardson (2003) y son los siguientes:

- Diagnóstico

- Acción

- Evaluación

- Reflexión

En cuanto a los procesos metodológicos, optamos por seguir uno de los modelos diseñados por Segal (2009) que recoge la esencia de la investigación-acción y que se acopla perfectamente a las fases anteriormente descritas. Las etapas o pasos que considera en ese modelo son:

Identificar el problema: encontrar la idea general o inicial

Evaluar el problema: Observar, estudiar, investigar el problema.

Hacer una recomendación: crear un plan.

Ensayar la recomendación: tomar el primer paso de acción, probarlo.

Reflexionar sobre la práctica: evaluar la práctica recomendada o paso de acción.

Reevaluar si es necesario: modificar el plan, tomar un segundo paso de acción si se necesita, es decir otra iteración.

Luego, teniendo en cuenta estas etapas y acoplándolas a las 4 fases de la Investigación-Acción, en esta investigación se procederá como se describe a continuación.

a) Fase de diagnóstico

Acciones a realizar

- **Identificar el problema:** en esta etapa diseñaremos una actividad previa (llamada *actividad inicial*) mediada con el Geogebra, con la finalidad de que el estudiante enuncie las propiedades geométricas relacionadas con la mediatriz de un segmento dado. A su vez, se va a identificar el nivel de razonamiento geométrico que posee el estudiante, desde el primer nivel hasta el nivel dos de razonamiento de Van Hiele.

  Para la elaboración de este diseño inicial, tomaremos en cuenta los libros usados por los docentes del curso.

- **Evaluar el problema:** en esta etapa, analizaremos las respuestas de los estudiantes y, de acuerdo con el modelo Van Hiele, ubicamos cada una de estas respuestas en el nivel que le corresponda.

b) Fase de acción

Acciones a realizar

- **Hacer una recomendación:** En esta fase, diseñamos las actividades centrales cuyo foco de estudio son los elementos notables de la circunferencia, usando como mediador el Geogebra. Para ello, hacemos un estudio de las propiedades relacionadas con los elementos de la circunferencia (como por ejemplo: el radio y la cuerda) y, a partir de esto, diseñamos las actividades centrales las que deben guardar relación con la actividad vista en la fase anterior (propiedad de mediatriz). Estas actividades han sido diseñadas con el fin de que se identifique el nivel de razonamiento de la circunferencia a lo largo del proceso de instrucción desde el primer nivel de razonamiento hasta el tercero según el modelo de Van Hiele, tomando en cuenta las respuestas escritas y verbales de los estudiantes. Para cada una de estas actividades, se hace un análisis (diseño) a priori de las mismas con la finalidad de poder predecir las posibles respuestas y los posibles errores que pudieran cometer los estudiantes durante el proceso de instrucción.

Posteriormente, se implementa dichas actividades, en las cuales serán elaboradas con construcciones semi-hechas para la comprensión de las propiedades del tema en cuestión. Además, dicha fase será grabada para realizar un mejor estudio del proceso de instrucción que se llevará a cabo.

c) Fase de evaluación

Acciones a realizar

En esta fase, después de la aplicación de las actividades centrales:

- Se definen los criterios de análisis de las respuestas de los estudiantes tomando en cuenta el modelo teórico Van Hiele y a su vez se analizan dichas respuestas en contraste con el análisis a priori antes diseñado para después identificar los niveles finales de razonamiento del objeto circunferencia, permitiendo así verificar las evoluciones de dichas respuestas con respecto a las actividades elaboradas inicialmente.
- Se realiza un contraste entre los logros obtenidos en la etapa inicial y final del proceso de instrucción. Esto para verificar si hubo una progresión de los niveles de razonamiento relacionados con el objeto geométrico circunferencia.
- Se analizarán los resultados anteriores, extrayendo las conclusiones que permitan avalar el cumplimiento de los objetivos formulados al inicio de nuestro trabajo.

d) Fase de reflexión

Acciones a realizar

- **Reevaluar, si es necesario- modificar el plan:** aquí señalaremos algunas consideraciones o limitaciones que ha tenido nuestro trabajo y algunos alcances para futuras investigaciones.

3.3 Evaluación de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele

Jaime (1993) encuentra en varias investigaciones que existe una oscilación entre dos niveles consecutivos. Por ejemplo, una evolución del nivel 2 al nivel 3 supone alcanzar un criterio alto en los niveles 1 y 2 y algún criterio intermedio en el nivel 3. Determina entonces que existe un progreso continuo en la adquisición de un nivel de razonamiento. Así define el concepto de grado de adquisición de un nivel de Van Hiele.

a) Grados de adquisición

Para la evaluación de un nivel de razonamiento se considera que dicho nivel posee un grado de adquisición, el cual permite observar el dominio (ya sea alto o bajo) de un determinado nivel.

Dicha caracterización de los dominios, Jaime (1993) los agrupa de la siguiente manera:

- Adquisición Nula (AN): No se emplean las características de este nivel de razonamiento.
- Adquisición Baja (AB): Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos. Es frecuente el abandono del trabajo en este nivel para recurrir al razonamiento de nivel inferior.
- Adquisición Intermedia (AI): El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que, ante situaciones que resultan complicadas, se produce un retroceso de nivel, con un intento posterior de retorno al nivel superior. Hay, por tanto, saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento.
- Adquisición Alta (AA): El nivel habitual de trabajo es éste y se produce con muy poca frecuencia el retroceso del nivel, aunque suceda alguna vez. Así mismo, en ocasiones se hace un uso inadecuado de las herramientas propias de este nivel de razonamiento.
- Adquisición Completa (AC): Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento.

Jaime (1993) asume como límites razonables para los diferentes grados de adquisición los siguientes:

GRADOS DE ADQUISICIÓN	PORCENTAJES ASIGNADOS
Adquisición Nula	[0%-15%]
Adquisición Baja	<15%-40%>
Adquisición Intermedia	[40%-60%]
Adquisición Alta	<60%-85%>
Adquisición Completa	[85%-100%]

Los porcentajes propuestos y la cantidad de divisiones son subjetivos, pero se basan en los resultados de diversas experimentaciones realizadas por este autor en investigaciones anteriores.

b) Tipos de respuestas

Considerando que las respuestas de los estudiantes ante preguntas con respuesta libre determinan el nivel al cual pertenecen, Jaime (1993) plantea diseñar un procedimiento que permita evaluar a un estudiante y poder asignar su progreso en la adquisición de un nuevo nivel. Para ello, Jaime (1993) define unos Tipos de respuestas que están enmarcados dentro de los parámetros del nivel de razonamiento que se está analizando.

Los tipos de respuestas, según Jaime (1993), son:

- Tipo 1: Preguntas sin respuestas, con respuestas no codificables o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre su forma de utilizar los niveles de razonamiento inferiores.
- Tipo 2: respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento.
- Tipo 3: respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento.

- Tipo 4: respuestas que reflejan claramente la utilización de dos niveles de razonamiento consecutivos.
- Tipo 5: respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado.
- Tipo 6: respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento.
- Tipo 7: respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

c) Asignación de los Grados de adquisición

Jaime (1993) asigna los Grados de adquisición de los diferentes niveles de Van Hiele considerando la ponderación de cada tipo de respuesta, tal y como se muestra a continuación.

Tipo	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	20	25	50	75	80	100

Jaime (1993) considera que las respuestas de los estudiantes pueden encontrarse en más de un nivel, motivo por el cual se debe ponderar dicha respuesta en cada uno de los niveles de razonamiento que el estudiante utilizó. Además, menciona que: “si un ítem puede ser contestado en un rango de niveles N_1 a N_2 y es contestado en un nivel $N(N_1 \leq N \leq N_2)$” (p. 269), se considerará la ponderación siguiente:

- 100% en los niveles de ese rango menores a N.
- 0% en los niveles de ese rango mayores a N.
- El valor que le corresponde al tipo de respuesta de dicho nivel.

Para calcular el grado de adquisición de cada nivel se determina la media aritmética de las ponderaciones asignadas a todas las preguntas que puedan ser contestadas en ese nivel.

3.4 Conclusiones del capítulo

A manera de cierre, concluimos que la asignación de los grados de adquisición con respecto a los niveles establecidos en el capítulo 2 nos permitirá determinar los niveles de razonamiento de los estudiantes sobre la circunferencia.

En lo que sigue, junto con la metodología empleada y los elementos teóricos usados en nuestra investigación, diseñaremos las actividades que nos permitirán recoger las respuestas de los estudiantes para luego analizarlos según los criterios establecidos anteriormente.

CAPÍTULO 4

Diseño de las actividades implementadas

Ante la problemática de la ausencia de justificaciones en la enseñanza de la geometría en educación básica descritas en el capítulo 1 y basándonos en nuestro marco teórico con la descripción de algunos teoremas relacionados con el objeto geométrico circunferencia presentados en el capítulo 2, diseñamos un conjunto de actividades que permitirán que los estudiantes verifiquen algunas propiedades y que luego expliquen con argumentos teóricos el por qué cumple dicha propiedad, siendo mediados por el Geogebra.

En ese sentido, hemos diseñado 5:

- **Actividad inicial**
- **Actividades centrales:**
    - Actividad N°1
    - Actividad N°2
    - Actividad N°3
    - Actividad N°4

La descripción de estas actividades la mostramos a continuación:

4.1 Objetivos de las actividades

a) Actividad Inicial: "Recordemos: encontrando distancias iguales"

Esta actividad tiene como objetivos:

- Recordar los conocimientos previos relacionados con la propiedad de la mediatriz.
- Enunciar la propiedad de la mediatriz.

Basándonos en el análisis de textos, y en las respuestas brindadas en la actividad inicial, diseñaremos las actividades referentes al objeto geométrico circunferencia, especialmente enfocándonos en los elementos radio y cuerda.

b) Objetivos de las Actividades Centrales

b.1) La Actividad N°1: "Propiedad de cuerdas"

Esta actividad tiene como objetivos:

- Enunciar, con palabras, la propiedad: la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.
- Justificar dicha formulación con resultados ya conocidos.

b.2) La Actividad N°2: "¿Única circunferencia?"

Esta actividad tiene como objetivo:

- Que los estudiantes puedan ser capaces de usar las propiedades de cuerda estudiadas en la actividad N°1.
- Enunciar, con palabras, de que existen muchas circunferencias que pasen por dos puntos fijos.
- Justificar lo anterior con resultados ya analizados.

b.3) La Actividad N°3: "Centrándonos en el Centro"

Dicha actividad tiene como objetivo:

- Usar las propiedades de cuerdas para encontrar el centro de la circunferencia.

b.4) La Actividad N°4: "Circunferencia única 2"

Tiene como objetivos:

- Que el estudiante compruebe la afirmación planteada al inicio de esta actividad, empleando las propiedades tratadas anteriormente.
- Redefinir la anterior afirmación.

A continuación, presentamos el diseño de las actividades planteadas en nuestra investigación.

4.2 Actividades propuestas

a) Actividad Inicial

Dicha actividad está conformada por 8 ítems (ver anexo 1). Para ello, previamente construimos una macro con la finalidad de que al trazar un segmento (objeto inicial, por ejemplo $\overline{AB}$), se genere como objetos finales: la mediatriz, los ángulos de 90°, las medidas iguales ($\overline{AC} = \overline{CB}$) y un punto D perteneciente a la mediatriz, tal y cual mostramos a continuación:

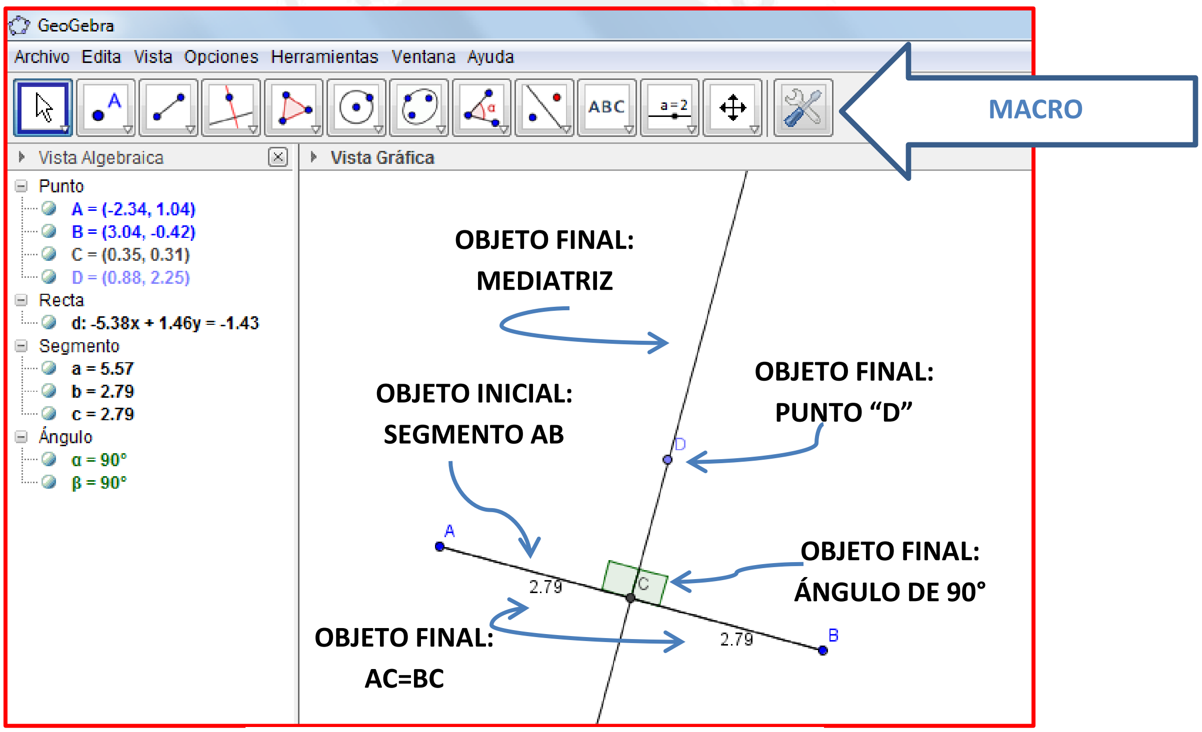


Figura 3.1 Construcción de la macro "Mediatriz"

Además, esta macro se construyó con la intención de que los estudiantes recuerden que la mediatriz es aquella recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. Es necesario precisar que el programa ofrece la herramienta mediatriz  de un segmento, pero hemos querido realizar esta macro ya que se puede observar los ángulos de 90° y las medidas iguales ($\overline{AC} = \overline{CB}$).

Las tres primeras preguntas son formuladas con la finalidad que el estudiante obtenga la mediatriz de un segmento, aplicando la macro respectiva. A partir de la pregunta 4, el estudiante debe trazar los segmentos $\overline{DA}\,y\,\overline{DB}$ y luego medir ambas distancias usando las herramientas propias del programa.

En ítem 5, el estudiante debe de ubicar otros puntos más sobre la mediatriz, repitiendo la idea básica del paso anterior y se espera que enuncie la propiedad descubierta de la siguiente manera:

"Las distancias entre un punto cualquiera de la mediatriz de un segmento con los extremos de dicho segmento son iguales".

Algunos posibles errores que pudieran realizar los estudiantes es que ubiquen un punto fuera y determinen que las distancias sean diferentes. Aquí hay que comunicar al estudiante que la ubicación de dicho punto es sobre la mediatriz y realizar los pasos anteriores.

De la misma forma, en el ítem 6 el estudiante debe ubicar puntos al exterior de la mediatriz de un segmento y determinar dónde lo reubicaría si se desea obtener distancias iguales con relación a los extremos de dicho segmento (pregunta 7). En el ítem 8, se espera que los estudiantes ubiquen dicho punto en la mediatriz, así como también enuncien la propiedad de la mediatriz como la que sigue:

"Todo punto que equidiste de los extremos de un segmento dado, está en la mediatriz de dicho segmento".

Se puede esperar que el estudiante enuncie la propiedad del ítem 8 y la presente como la planteada en el ítem 5, determinando así como un equivalente entre ambos enunciados. Es decir que al enunciar la propiedad de la pregunta 5: *"Si ubico un punto en la mediatriz, las distancias a los extremos de un segmento son iguales"*, y la propiedad de la pregunta 8: *"Para que un punto equidiste de los extremos de un segmento dado, este punto debe de pertenecer a la mediatriz"*, ambos equivalen lo mismo.

Como vemos, en la actividad llamada *Actividad inicial*, lo que se pretende es que el estudiante descubra y enuncie las propiedades geométricas relacionadas con la recta mediatriz. Sin embargo, no se les pide que justifiquen dichas propiedades, ya que creemos que con descubrir la propiedad y enunciarla es más que suficiente, tratándose también de que son estudiantes de 2° de secundaria y que anteriormente no trabajaron con este tipo de situaciones en las que se les pide que enuncien una propiedad empleando un software. Es por eso que en esta primera etapa, los ítems fueron diseñados para poder ubicar el razonamiento del estudiante hasta el nivel 2 de Van Hiele, ya que en esta parte sólo nos enfocaremos en las afirmaciones que ellos realizan al descubrir las propiedades relacionadas con los elementos de la circunferencia.

b) Actividad N°1

Esta actividad está conformada por 6 ítems (ver anexo 2), de las cuales en las tres primeras planteamos que el estudiante trace una circunferencia, una cuerda y la mediatriz de esta cuerda usando la herramienta mediatriz que proporciona el geogebra  .

Luego, en el ítem 4 (que se analizará más adelante) se espera que el estudiante concluya enunciando la propiedad descubierta como la que sigue: "Dados una circunferencia y una cuerda, la mediatriz de dicha cuerda pasa (o "siempre pasa") por el centro de la circunferencia", de tal forma que generalice su conclusión. Una vez que haya enunciado dicha propiedad, debe de verificar con dos casos particulares trazando un par de cuerdas y que confirme lo anterior (ítem 5).

En ítem 6 se analizará la justificación del por qué la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia y se espera que el estudiante justifique dicha propiedad como lo trabajado en el capítulo2 (ver teorema 2), estableciendo que "la recta mediatriz pasa por el centro de la circunferencia ya que las distancias desde cualquier punto de la mediatriz hacia los extremos del segmento (por ejemplo $\overline{AB}$) son iguales".

Un posible error podría ser que el estudiante al justificar por qué la recta mediatriz pasa por el centro de la circunferencia mencione que "a partir del centro se pueden trazar dos segmentos de igual medida hacia los puntos A y B"; es decir, el estudiante asume que el punto (en este caso, el centro de la circunferencia) se encuentra en la mediatriz. Aunque en realidad lo correcto sería que como las medidas de los segmentos $\overline{OA}\, y\, \overline{OB}$ son iguales (radios) entonces el punto de intersección (centro) debe pertenecer a la mediatriz.

Otro posible error sería que, al formar la cuerda $\overline{AB}$, ubicaran el punto (por ejemplo, el punto A) fuera de la circunferencia. En este caso debemos aclarar la definición de cuerda de una circunferencia para que no existan inconvenientes posteriores.

c) Actividad N°2

Dicha actividad está conformada por 4 ítems (ver anexo 3). Durante el desarrollo de esta actividad, con los dos primeros ítems pretendemos que los estudiantes construyan un segmento $\overline{AB}$ y una circunferencia que pase por los puntos A y B.

En la pregunta dos, se espera que el estudiante ubique el centro de la circunferencia en el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con la herramienta ***punto medio*** del Geogebra y trace la circunferencia que tiene como diámetro dicho segmento, obteniendo así una circunferencia que pase por los puntos A y B. Otra forma de abordar dicho problema es que ubiquen el punto medio con la herramienta ***mediatriz***.

En el siguiente ítem (N°3) se le pide al estudiante trazar la mediatriz del segmento antes formado y que construya todas las circunferencias que pasen por los puntos A y B. Hasta aquí, se pretende que el estudiante descubra sobre lo sucedido y enuncie su conclusión de la siguiente manera: "existen muchas circunferencias que pasen por los puntos A y B".

La pregunta 4 busca identificar la manera de justificar la afirmación que ellos mismos han planteado. Se espera que el estudiante justifique su respuesta usando la propiedad trabajada en la actividad N°1, ya que como vimos en dicha actividad, la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de una circunferencia y que además se determine que existen muchas circunferencias que pasen por los puntos A y B. Los posibles errores que se podrían presentar serían por ejemplo, que traten de ubicar en cualquier parte de la pantalla el centro de la circunferencia y que traten de que esta circunferencia pase por los puntos dados A y B.

Otra forma de obtener la circunferencia es usando la herramienta ***circunferencia que pasa por tres puntos*** que ofrece el geogebra, donde haciendo clic en los puntos A y B y otro en cualquier parte de la pantalla, van obteniendo las circunferencias pedidas. Cabe señalar que el docente debe de manifestar la forma de trabajo en esta actividad, es decir, que aborden el problema sin usar dicha herramienta.

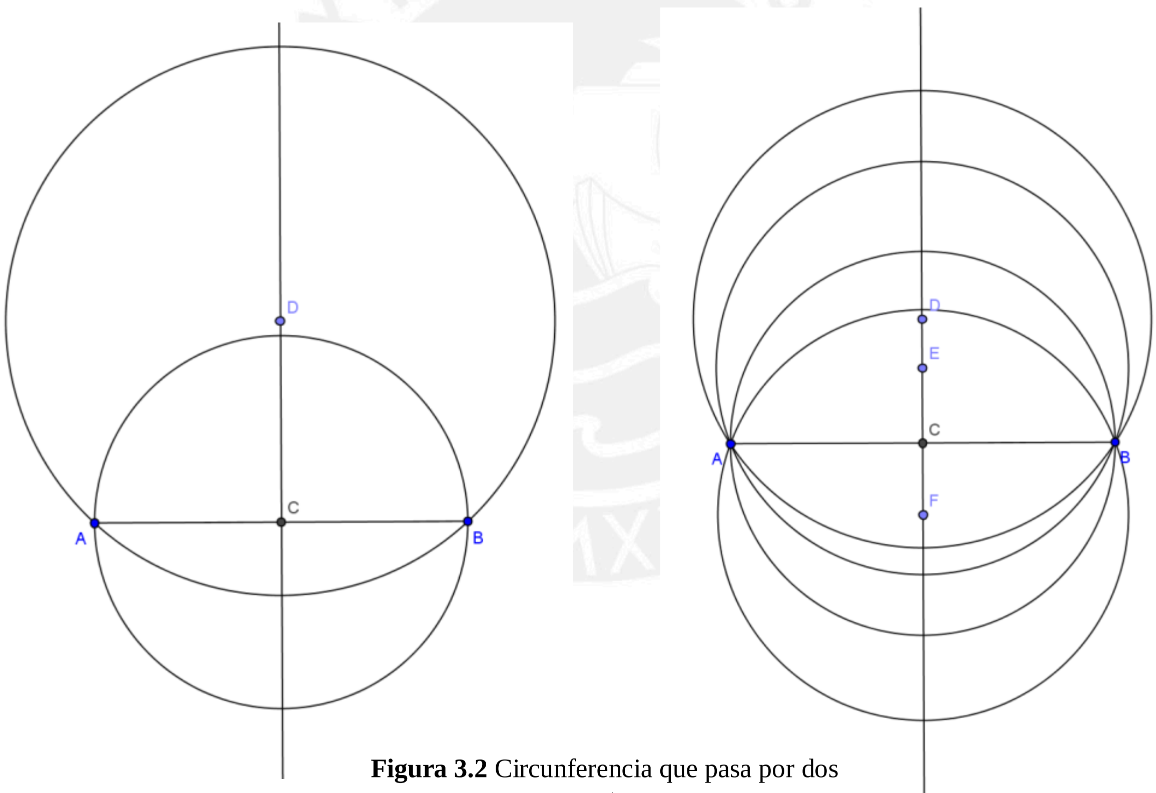


Figura 3.2 Circunferencia que pasa por dos puntos

Otra forma de construir dichas circunferencias y que es en realidad la forma que se espera que todos lleguen, es a partir de la mediatriz trazada. Se espera que los estudiantes construyan muchas circunferencias a partir del trazo de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ y que en dicha mediatriz se encuentren los "centros" de todas aquellas circunferencias que toman como puntos de paso a A y a B.

d) Actividad N°3

Dicha actividad está conformada por dos ítems (ver anexo 4) y presenta como construcción previa una circunferencia sin el centro, como mostramos a continuación:

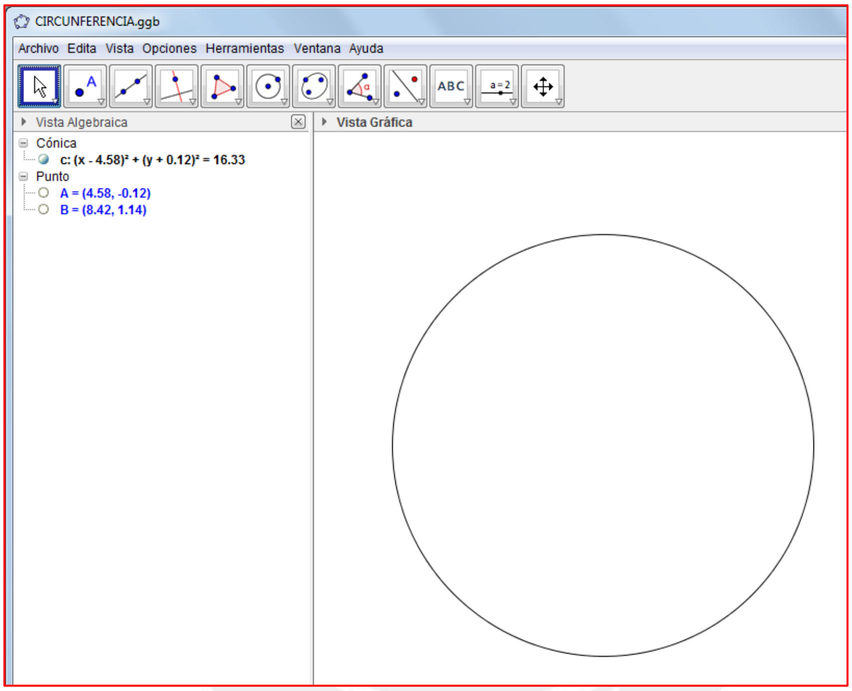


Figura 3.3 Datos iniciales de la actividad 3:
circunferencia sin el centro.

En el primer ítem, se le pide al estudiante que trace un par de cuerdas pertenecientes a la circunferencia antes mostrada.

Luego, en el segundo ítem se le formula si ¿Es posible ubicar el centro de la circunferencia? Se espera que en la justificación pedida, usen la propiedad de cuerdas vista en la actividad 1, ya que la mediatriz de toda cuerda pasa por el centro. Por lo tanto, la intersección de ambas mediatrices sería el centro de la circunferencia misma.

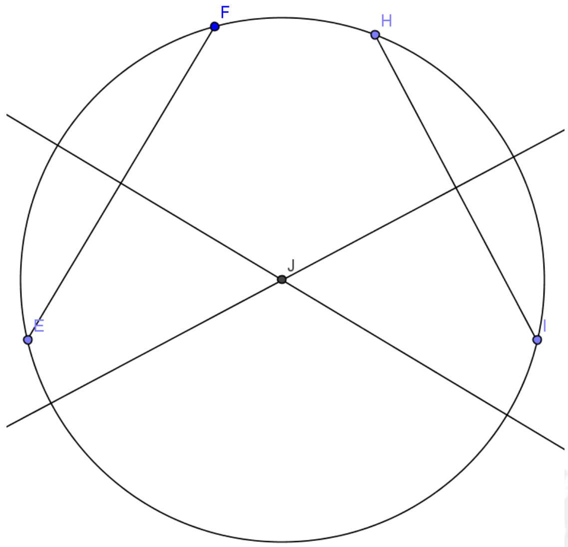


Figura 3.4 Solución esperada en relación a la actividad 3.

Un posible resultado erróneo que podría realizar el estudiante es que trace los puntos extremos de cada cuerda (segmentos $\overline{FI}$ y $\overline{HG}$), concluyendo que en la intersección de tales cuerdas se encuentra el centro de la circunferencia, tal y cual mostramos a continuación:

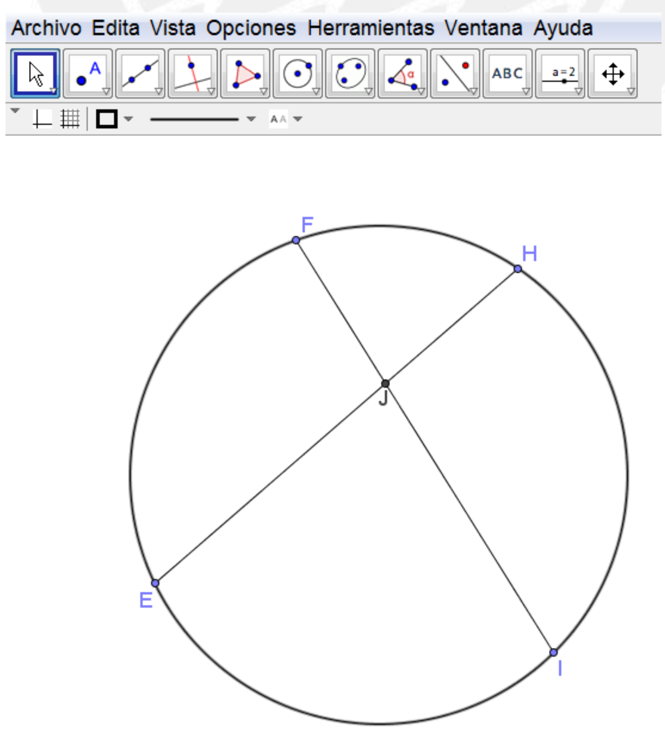


Figura 3.5 Posible respuesta en relación a la actividad 3.

e) Actividad 4

Dicha actividad está constituida por tres preguntas (ver anexo 5) y empieza con la formulación de una afirmación tal y cual presentamos a continuación:

Instrucciones

Rodrigo establece la siguiente afirmación "***Existe un única circunferencia que pasa por tres puntos***"

Haciendo uso del Geogebra, se espera que el estudiante compruebe si es verdadero o falso, que por tres puntos pasa una única circunferencia.

En un primer momento, lo que ellos harán es ubicar tres puntos no colineales y tratar de encontrar el centro de la circunferencia que pase por los tres puntos. Para ubicar el centro de dicha circunferencia, se espera que el estudiante realice el trazo de dos segmentos con sus respectivas mediatrices, encontrando que la intersección de las mismas es el centro de la circunferencia pedida ya que "la mediatriz de toda cuerda pasa por el centro de la circunferencia" (propiedad vista en la actividad 1) y constatar que existe una única circunferencia que pasa por estos tres puntos.

El estudiante puede abordar este problema empleando la herramienta ***Circunferencia dados tres de sus puntos*** que ofrece el programa, en las cuales después de haber colocado tres puntos utiliza esta herramienta para justificar que sí existe una única circunferencia. Pero el detalle es que el programa no brinda el centro de la misma.

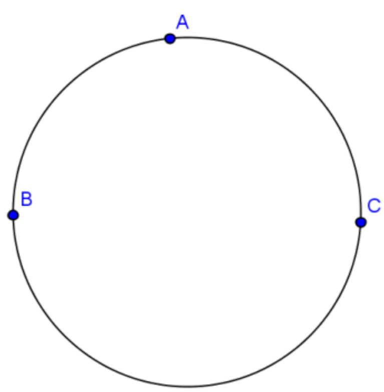


Figura 3.6 Solución presentada usando la opción "circunferencia que pasa por tres puntos".

Las dificultades que podría tener los estudiantes es con respecto a este último: el de ubicar el centro de una circunferencia que pase por los tres puntos. Ellos pueden encontrar de manera empírica el centro de la misma pero con algunas aproximaciones: colocando primero los tres puntos sobre la pantalla (A, B y C) y con la opción *"circunferencia dados su centro y uno de sus puntos"* trazar la circunferencia que pase por tales puntos y, mediante la manipulación de la misma, pueda verificar que existe dicha solución.

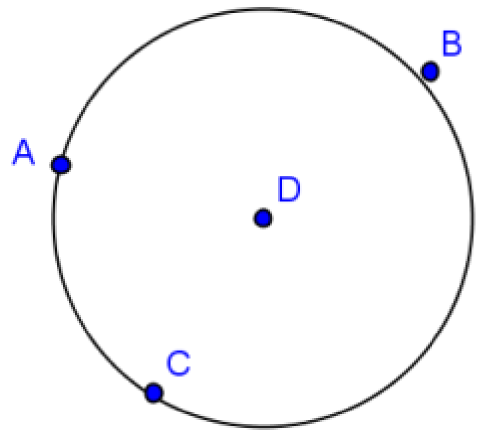


Figura 3.7 Posible respuesta de los estudiantes en la actividad 4.

Otros estudiantes pueden encontrar el centro de tal circunferencia solo moviendo los puntos antes mencionados haciendo clic sobre dichos puntos, manipulándolos y colocándolos sobre la circunferencia, sin tener la debida comprensión de que tales puntos deban de permanecer fijos.

Con respecto a la redefinición de la afirmación elaborada por "Rodrigo", se espera que los estudiantes manifiesten que tales puntos deben de ser no colineales. Para ello, los estudiantes pueden abordar lo anterior construyendo una recta que pase por dos puntos (punto A y B) y ubiquen un punto adicional sobre la recta misma (punto C), formándose así dos segmentos ($\overline{AB}\, y\, \overline{BC}$) y al trazar las mediatrices de tales segmentos, se observará que no existen intersección entre ambas rectas (rectas paralelas), por lo que no se puede ubicar el centro de tal circunferencia cuando dichos puntos son colineales. Inclusive, se puede manipular uno de ellos de tal manera que dicha mediatrices se puedan intersectar y por ende encontrar el centro de la circunferencia.

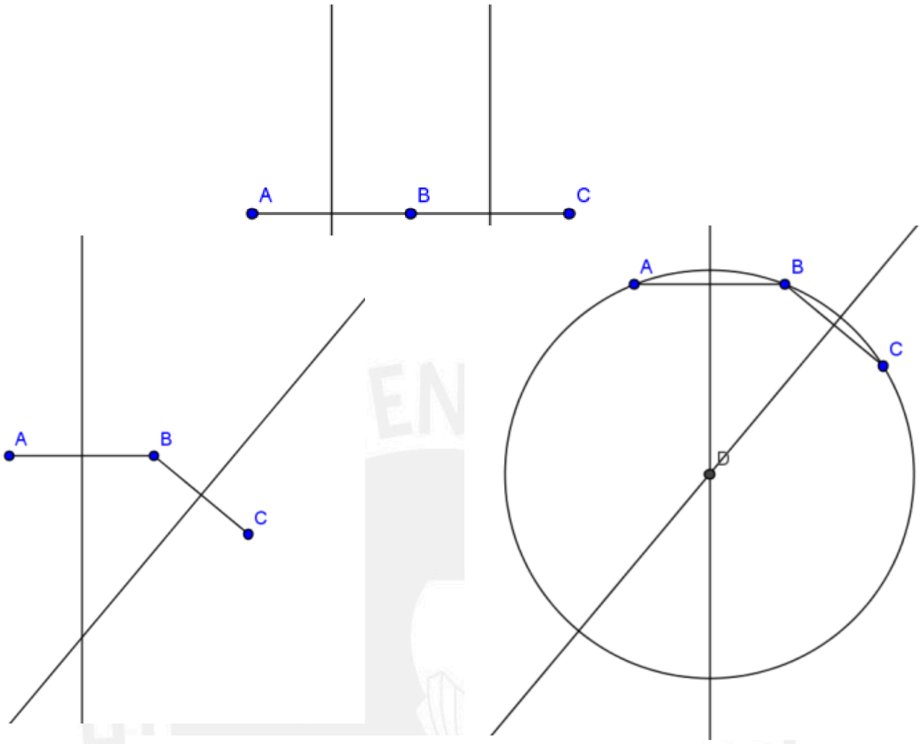


Figura 3.8 Construcciones de la circunferencia que pase por tres puntos no colineales.

Con respecto al papel que puede tomar el software, coincidimos con Gutiérrez (2007) que el uso de un software de geometría dinámica resulta útil "para representar fácilmente un problema, para observar regularidades, para añadir o quitar elementos auxiliares, para verificar conjeturas, etc." (p. 22), de tal manera que permita brindar indicios hacia la parte demostrativa. Sin embargo, la manipulación del ordenador "debe de ser paralela al uso del razonamiento formal y de la manera formal de expresar las ideas matemáticas" (p. 22) es decir, en ese momento el software pierde papel protagónico cuando los estudiantes empiezan a explicar sus observaciones o al realizar una demostración de tipo formal. Como uno de nuestro objetivos específicos es el de identificar el papel que cumple el software en el proceso de instrucción, es pertinente aclarar que en nuestras actividades se usará el Geogebra para fomentar las conclusiones de tipo geométricas realizadas por los estudiantes. A su vez, permitir que el estudiante descubra las propiedades relacionadas con la circunferencia, compruebe algunas afirmaciones como las propuestas en la actividad N°4 y en algunos casos, poder redefinir dichas afirmaciones; sin embargo, su papel pierde sentido cuando es sometido a la parte de la justificación de una propiedad geométrica.

4.3 Respuestas esperadas a las actividades

Presentamos a continuación un resumen de las respuestas esperadas por cada actividad diseñada:

ACTIVIDADES	RESPUESTAS ESPERADAS
Actividad Inicial	• En ítem 5, se espera que el estudiante enuncie la propiedad descubierta de la siguiente forma: *"Las distancias entre un punto cualquiera de la mediatriz de un segmento con los extremos de dicho segmento son iguales".* Algunos posibles errores que pudieran realizar los estudiantes es que ubiquen un punto fuera y determinen que las distancias sean diferentes. • En ítem 8, se espera que los estudiantes ubiquen dicho punto en la mediatriz, así como también enuncien la propiedad de la siguiente manera: *"Todo punto de la mediatriz de un segmento dado equidista de los extremos de este segmento".* Se puede esperar que el estudiante enuncie la propiedad del ítem 8 y la presente como la planteada en el ítem 5, determinando así como un equivalente entre ambos enunciados.
Actividad N°1	• En el ítem 4 se espera que el estudiante concluya enunciando la propiedad descubierta como la que sigue: "Dados una circunferencia y una cuerda, la mediatriz de dicha cuerda pasa (o "siempre pasa") por el centro de la circunferencia" • En el ítem 6, se espera que el estudiante justifique del siguiente modo: *"La recta mediatriz pasa por el centro ya que las distancias desde cualquier punto de la mediatriz hacia los extremos del segmento* $\overline{AB}$ *son iguales".* Un posible error es que el estudiante

	justifique de manera recíproca o que al trazar la cuerda $\overline{AB}$, ubique el punto (por ejemplo, el A) fuera de la circunferencia.
Actividad N°2	• En la pregunta dos, se espera que el estudiante ubique el centro de la circunferencia en el punto medio del segmento con la herramienta ***punto medio*** del segmento $\overline{AB}$ y trace la circunferencia que tiene como diámetro dicho segmento, obteniendo así una circunferencia que pase por los puntos A y B. Otra forma de abordar dicho problema es que ubiquen el punto medio con la herramienta ***mediatriz***. • En la pregunta 4, se espera que el estudiante justifique su respuesta usando la propiedad trabajada en la actividad N°1, ya que como vimos en dicha actividad, la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de una circunferencia y que además se determine que existen muchas circunferencias que pasen por los puntos A y B. Los posibles errores que se podrían presentar serían por ejemplo, que traten de ubicar en cualquier parte de la pantalla el centro de la circunferencia y que traten de que esta circunferencia pase por los puntos dados A y B. • Otra forma de construir dichas circunferencias y que es en realidad la forma que se espera que todos lleguen, es a partir de la mediatriz trazada. Se espera que los estudiantes construyan muchas circunferencias a partir del trazo de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ y que en dicha mediatriz se encuentren los "centros" de todas aquellas circunferencias que toman como puntos de paso a A y a B.
Actividad N°3	• En el segundo ítem, Se espera que en la justificación pedida, usen la propiedad de cuerdas vista en la actividad 1, ya que la mediatriz de toda cuerda pasa por el centro. Por lo tanto, la intersección de ambas mediatrices sería el centro de la circunferencia misma. • Un posible resultado erróneo que podría realizar el estudiante es

	que trace los puntos extremos de cada cuerda, concluyendo que en la intersección de tales cuerdas se encuentra el centro de la circunferencia.
Actividad N°4	• En el ítem 1, se espera que el estudiante ubique tres puntos no colienales sobre la pantalla que encuentren el centro de la circunferencia mediante el trazo de dos segmentos con sus respectivas mediatrices, encontrando que en la intersección de las mismas es el centro de la circunferencia y constatar que existe una única circunferencia que pasa por estos tres puntos. Se espera también que el estudiante puede abordar este problema empleando la herramienta ***Circunferencia dados tres de sus puntos*** que ofrece el programa, donde después de colocar tres puntos utilizan esta herramienta para justificar que sí existe una única circunferencia. • Se espera que los estudiantes tengan algunas dificultades al ubicar, de manera empírica, el centro de la circunferencia realizando algunas aproximaciones, es decir, que tracen una circunferencia que pase por dos puntos y manipulando la circunferencia, pase (aproximadamente) por el tercer punto. • Con respecto a la pregunta 2, los estudiantes pueden abordar la redefinición de la afirmación elaborada por Rodrigo construyendo una recta que pase por dos puntos (punto A y B) y ubiquen un punto adicional sobre la recta misma (punto C) formándose así dos segmentos ($\overline{AB}\, y\, \overline{BC}$) y al trazar las mediatrices de tales segmentos, se observará que no existen intersección entre ambas rectas (rectas paralelas), por lo que no se puede ubicar el centro de tal circunferencia cuando dichos puntos son colineales. Se espera que los estudiantes manifiesten que tales puntos deben de ser no colineales.

4.4 Conclusiones del capítulo

A manera de cierre, en el diseño de las actividades (iniciales y centrales) se toma en cuenta el uso del software y que a su vez será como mediador de las respuestas que brinden los estudiantes. Aquí se espera que sus respuestas se parezcan a las establecidas por nosotros líneas arriba. Estas serán analizadas en el siguiente capítulo donde realizaremos el contraste respectivo.

CAPÍTULO 5

Experimento y análisis

En el presente capítulo, presentamos la elección de los sujetos de la investigación y describiremos lo ocurrido durante la implementación de las actividades.

5.1 Elección de los sujetos

El colegio elegido para nuestra investigación tiene por nombre "I.E. N°2094-Inca Pachacútec". Este colegio es una institución educativa estatal ubicada en el distrito de San Martín de Porres, en el departamento de Lima, Perú. Está constituido por los niveles de Primaria (turno tarde) y Secundaria (turno mañana), con un dictado de 7 horas pedagógicas diarias (cada hora constituido de 45 minutos). Además, cuenta con dos aulas de cómputo: uno de innovación (15 laptops) y otra sala de cómputo (9 computadoras). Se eligió este último ambiente puesto que cuenta con el sistema operativo Windows, indispensable para el desarrollo de nuestras actividades.

Elegimos el segundo año A de educación secundaria, que agrupa a 8 estudiantes, los que fueron organizados en duplas de la siguiente manera:

Tabla 5.1 Apellidos de los estudiantes

Apellidos de los estudiantes	Pareja "A"	Pareja "B"	Pareja "C"	Pareja "D"
	Terrazas (A_1)	Apaza (B_1)	Llamoca (C_1)	Buendía (D_1)
	Chung (A_2)	Jaramillo (B_2)	Rodríguez (C_2)	Ambrocio (D_2)

Dichos estudiantes poseían conocimientos previos de geometría básica: segmento, punto, recta, triángulo. Estos conocimientos eran necesarios para la introducción del tema elementos de la circunferencia usando como mediador el Geogebra.

Se aplicaron 4 sesiones durante dos días consecutivos y cada sesión tenía una duración de dos horas cronológicas, teniendo el permiso para el funcionamiento de las aulas durante la tarde y solicitando las horas de clase de otros cursos para aplicación de este trabajo de investigación tal y como explicamos a continuación.

Tabla 5.2. Implementación de las actividades

DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO POR ACTIVIDAD		
LUNES (21 -10-13)	Sesión 1 (10am-12m)	Actividad inicial: ***“Recordemos: Encontrando distancias iguales”***
	Sesión 2 (2pm-4pm)	Actividad 1: ***“Propiedad de cuerdas”***
MARTES (22-10-13)	Sesión 3 (10am-12m)	Actividad 2: ***“¿Única circunferencia?*** Actividad 3: ***“Centrándonos en el centro”***
	Sesión 4 (2pm-4pm)	Actividad 4: ***“Circunferencia única 2”***

5.2 Instrumentos a emplear

Los instrumentos a emplear para el recojo de la información fueron las hojas con las respuestas escritas a las actividades, la transcripción de las entrevistas realizadas durante la sesión de clase y al finalizar la sesión, las filmaciones realizadas durante la clase, así como también las construcciones realizadas con el programa Geogebra. , ya que nos va a permitir verificar qué acciones realizaron los estudiantes durante el proceso de justificación.

Si las respuestas escritas no eran muy claras, se recurría al registro de las grabaciones hechas al dialogar con los estudiantes mientras resolvían las actividades. Dicho diálogo consistió en que nos explicaran sobre lo trabajado en clase y permitió aclarar lo escrito en su ficha de trabajo.

Tomando en cuenta los grados de adquisición definidos, procederemos a diseñar una serie de descriptores con la finalidad de poder agrupar las respuestas de los estudiantes.

5.3 Descriptores de las preguntas a partir de las respuestas a la actividad inicial

A continuación se realiza una descripción de las preguntas propuestas en la actividad inicial. Acompaña a esta descripción un cuadro en donde se presentan descriptores para cada pregunta. Estos descriptores se han definido teniendo en cuenta las respuestas dadas por los estudiantes. A partir de ello, se asigna a cada descriptor un nivel (1 o 2) y un tipo de respuesta (1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7) definidos previamente. De esta manera se podrá identificar el dominio de los niveles de razonamiento que posee cada estudiante.

ACTIVIDAD INICIAL

ÍTEM 5

DESCRIPTOR	NIVEL	TIPO	EJEMPLO
A) No construye ninguna conjetura y/o contienen respuestas no codificables.	-	1	
B) Basándose en el software, enuncian que las distancias son iguales, pero no generalizan.	1	2,3	*"Si pongo un punto sobre la mediatriz, las distancias son iguales"*.
C) Basándose en el software, enuncian que las distancias son iguales y generalizan.	2	4,5,6	*"Cada vez que ubico un punto sobre la mediatriz, las distancias hacia los extremos de un segmento dado son iguales"*

ÍTEM 8

DESCRIPTOR	NIVEL	TIPO	EJEMPLO
A) No construye ninguna conjetura y/o contienen respuestas no codificables.	-	1	

B) Basándose en el software, determinan la propiedad geométrica de la mediatriz, empleando un lenguaje informal.	1	2,3	*Que si moviéramos el punto exterior al medio de la mediatriz surgiría que los lados son iguales"*
C) Enuncian la propiedad geométrica de la mediatriz, usando un lenguaje formal.	2	4,5,6	*"El punto debe pertenecer en a la mediatriz para que las distancias midan iguales"*

5.4 Descriptores de las preguntas a partir de las respuestas a las actividades centrales

A continuación se realiza una descripción de cada actividad propuesta y se formula los descriptores correspondientes de las posibles respuestas de los estudiantes.

ACTIVIDADES CENTRALES

Actividad 1

DESCRIPTOR	NIVEL	TIPO	EJEMPLO
A) No concluyen ni enuncian nada. respuestas en blanco.	-	1	
B) Emplean otro enunciado, pero no construyen la conjetura.	1	2	*"Que la mediatriz siempre está en el centro".*
C) Reconocen una propiedad y formulan sus conclusiones, pero no generalizan.	2	2	*"Se puede afirmar que la cuerda tiene mediatriz y que choca con el centro".*

D) Reconocen una propiedad y enuncian sus conclusiones mediante una generalización.	2	3,4	*“La mediatriz de la cuerda pasa siempre por el centro de la circunferencia”.*
E) Reconocen una propiedad, enuncia sus conclusiones mediante una generalización y justifican empleando un lenguaje informal.	2	4,5	*“La mediatriz choca con el centro de la circunferencia, ya que la propiedad de mediatriz es la mitad de la cuerda”.*
F) Justifican, usando una propiedad anterior empleando un lenguaje formal.	3	3,4,5	*“La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia ya que si desde los extremos de la cuerda dada trazamos segmentos de igual medida, el punto de cruce pertenece a la mediatriz, siendo este punto el centro de la circunferencia.*

Actividad 2

DESCRIPTOR	NIVEL	TIPO	EJEMPLO
A) No realizan ninguna justificación.	-	1	
B) Emplean otros argumentos sin responder la existencia de las circunferencias.	1	2	*“A que el centro que haya en la mediatriz de una cuerda siempre volverá a su punto de inicio en A y B".*
C) Emplean otros	2	2	*“Habrá muchas circunferencias si*

argumentos respondiendo la existencia de las circunferencias.			*elegimos varios puntos de la mediatriz de una cuerda y el punto es el centro de la circunferencia".*
D) Justifican la existencia de la circunferencias con una propiedad previa y empleando un lenguaje informal.	2	3,4	*"Por la propiedad de cuerdas, la mediatriz de una cuerda es su mitad y siempre va a ser igual".*
E) Justifican la existencia de la circunferencias con una propiedad previa y empleando un lenguaje formal.	3	4,5	*"Por la propiedad de cuerdas, la mediatriz de una cuerda pasa por su mitad y ubicando puntos sobre ella, se determinan distancias iguales".*
F) Justifican la existencia de las circunferencias y la generalizan, empleando una propiedad previa y un lenguaje formal.	3	3,4,5,6	*"Si uso la propiedad de cuerdas, afirmo que la mediatriz de una cuerda pasa por su mitad y siempre pasa por el centro de una circunferencia.*

ACTIVIDAD 3

DESCRIPTOR	NIVEL	TIPO	EJEMPLO
A) No justifican (respuestas en blanco)	-	1	
B) Justifican, usando argumentos incorrectos	1	2,3	*"Podemos ver que la cuerda y los puntos si no lo ubicamos con la mediatriz no va a ser una circunferencia por la unión y por el punto".*
C) Justifican mediante una propiedad previa y empleando un lenguaje informal.	2	4,5	*"porque es una propiedad de las cuerdas y chocan por el centro de la circunferencia".*
D) Justifican mediante una propiedad previa y empleando un lenguaje formal.	3	6	*"La unión o el punto donde se cruzan las mediatrices de las cuerdas va a ser el centro de la circunferencia porque es una propiedad de la cuerda".*

ACTIVIDAD 4

DESCRIPTOR	NIVEL	TIPO	EJEMPLO
A) No justifican y no redefinen la afirmación propuesta (respuestas en blanco).	-	1	
B) Justifican la afirmación propuesta, empleando	1	2,3	*"Si porque cuando ubicamos tres puntos y lo unimos y trazamos la mediatriz para ubicar el centro y formar la circunferencia para que pase por los tres*

argumentos incorrectos y redefinen dicha afirmación.			*puntos. La afirmación de Rodrigo no es válida. Se cambiaría que los puntos no sean colineales".*
C) Justifican la afirmación propuesta mediante una propiedad previa, empleando un lenguaje informal y redefinen la afirmación.	2	3,4	*"Si, porque con los tres puntos unimos dos segmentos y utilizamos la mediatriz para que la circunferencia pase por los tres puntos. Para dar inicio a la circunferencia, los tres puntos no deben ser colineales".*
D) Justifican mediante una propiedad previa, empleando un lenguaje formal y redefinen la afirmación.	3	5,6	*"Se puede afirmar que existe una circunferencia que pase por tres puntos. Esto se puede explicar mediante la propiedad de cuerdas, ya que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia. Para tal existencia, los tres puntos deben de ser no-colienales.*

5.5 Definición de los criterios de análisis de las respuestas teniendo en cuenta los elementos teóricos considerados previamente

Para nuestra investigación, hemos considerado los siguientes criterios para analizar las respuestas brindadas por los estudiantes. Teniendo en cuenta los objetivos de investigación, se planteó analizar lo siguiente:

Criterio 1°. *La estructura del enunciado de una propiedad geométrica elaborada por el estudiante.*
- *Mediante una proposición de la forma* "Si___entonces___", *indicando una generalización.*
- *Proposiciones que indican una generalización e incluyen términos como: siempre, siempre se cumple, cada vez que.*
- *No formulan conjeturas.*

Criterio 2° El tipo de Justificación presentada:
- *Justifican usando una propiedad previa ya estudiada.*
- Se basan en un caso particular y con eso es suficiente.
- Emplean argumentos incorrectos (no tienen sentido).
- No justifican.

Criterio 3°. *El lenguaje empleado en la solución*:
- *Empleo del lenguaje informal:* "*chocan*", "*pongo*", "*muevo*".
- *Empleo del lenguaje formal:* "*pasa*", "*cruza*", "intersectan".

Hemos tomado estos criterios ya que permiten determinar si enuncian una propiedad mediante la generalización de la misma (criterio 1); si es que en su justificación, emplean los resultados de hechos geométricos ya demostrados (criterio 2); y, en términos del modelo Van Hiele, el análisis del lenguaje, ya que como establece la teoría, cada nivel de razonamiento tiene un estilo propio del manejo del lenguaje.

Con respecto **la estructura del enunciado de una propiedad geométrica**, se valoró: si el estudiante enunciaban una propiedad geométrica por medio de una proposición de la forma *"Si…entonces"* y que indiquen una generalización; si realiza una proposición que indiquen una generalización y que serán reconocidas con el uso de términos como: "*siempre sucede*", *"siempre se cumple"*, *"siempre"*, etc. o no formulan la conjetura. Dicho criterio nos permitirá ubicar en el 2° nivel del modelo de Van Hiele cuando enuncian la propiedad geométrica por medio de una generalización de la misma (mediante casos particulares).

Con respecto al **tipo de justificación presentada**, analizaremos si en su justificación el estudiante recurre a una propiedad geométrica previa ya demostrada (con resultados geométricos ya discutidos y analizados); si su justificación se basa en un caso particular (considerando que es suficiente con dicho caso concreto); si realizan argumentos incorrectos (sin sentido) o no realizan ninguna justificación. Este criterio nos va a permitir ubicar en el tercer nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele, siempre y cuando éste se base en resultados ya demostrados y analizados anteriormente.

Con respecto al **lenguaje empleado**, se analizaron aquellas expresiones donde el estudiante empleó un lenguaje informal y lo que se asoció a emplear términos como: *"chocan"*, *"pongo"*, *"muevo"*, etc., o caso contrario, hacen uso de un lenguaje formal y que serán reconocidas si emplean, por ejemplo, términos como: *"pasan", "cruzan", "intersectan"*, *"ubican".*

Se buscó información para los tres criterios, aunque no necesariamente estuvieron presentes los 3 en todas las actividades. Según la naturaleza de las tareas propuestas, presentamos la aplicación de dichos criterios por actividad planteada:

Tabla 5.3 Criterios a ser analizados en las actividades

	Criterio 1	**Criterio 2**	**Criterio 3**
Actividad inicial	**x**		**x**
Actividad 1	**x**	**x**	**x**
Actividad 2		**x**	**x**
Actividad 3		**x**	**x**
Actividad 4	**x**	**x**	**x**

A continuación, describiremos en cada actividad el ambiente vivido en clase, las reacciones de los estudiantes cuando emplearon el Geogebra, la implementación de las actividades y el análisis y los resultados de las respuestas de los estudiantes por cada actividad aplicada.

5.6 Descripción de las actividades implementadas

5.6.1 Actividad Inicial "Recordemos: Encontrando distancias iguales"

Dicha sesión fue aplicada el lunes 21 de octubre del 2013 en la mañana, teniendo un total de 13 estudiantes; tuvo una duración de dos horas cronológicas y se desarrolló en el laboratorio de cómputo. Los estudiantes fueron agrupados en duplas a lo largo de todas las sesiones. Los estudiantes por primera vez utilizaban el software Geogebra y, como se esperaba, hubo algunas dificultades sobre el reconocimiento de las herramientas del programa y su aplicación de las mismas.

En relación a la disponibilidad de los equipos, no se nos facilitó el equipo multimedia, indispensable para utilizarla en la clase, ya que de alguna u otra forma su uso contribuiría a que el estudiante resolvieran junto con el docente dicha actividad. A su vez, durante el desarrollo de la sesión, se presenció que un par de computadoras estaban inoperativas, lo que contribuyó a retomar la actividad, generando un gasto de tiempo indispensable en nuestra sesión.

Se indicó que se abordarían 8 preguntas (ver anexos) e inclusive podían resolverse con ayuda del programa Geogebra. Con respecto a la exploración del programa, se hizo una pequeña introducción del mismo para que los estudiantes pudieran familiarizarse con los comandos que se usarían a lo largo de la sesión y de las siguientes sesiones. A su vez, nos permitió verificar sobre los conocimientos básicos de geometría: mediatriz, segmento, punto, recta paralela, etc., que son importantes para el desarrollo de nuestras actividades. Además, durante esta sesión, se presenció que los estudiantes tenían dificultades en cuanto al manejo de los comandos "mediatriz de un segmento" y "Recta por dos puntos".

<u>Resultados de las respuestas de la actividad inicial "Recordemos: Encontrando distancias iguales"</u>

Teniendo en cuenta las respuestas escritas y los audios registrados, analizaremos los datos recopilados de la siguiente manera:

Análisis de las respuestas a la pregunta 5

Después de haber trabajado los ítems desde el 1 hasta el 4, en el ítem 5 se le pide al estudiante que formule sus observaciones y establezca una conclusión de lo trabajado:

5) Ubique otros puntos sobre la misma recta y realizar el paso anterior.

Socialización de ideas: ¿Qué podemos afirmar con respecto a los pasos 4 y 5? compare sus observaciones con tu compañero de carpeta.

____

____

____

Figura 5.1 Pregunta 5. "Recordemos: Encontrando distancias iguales".

En las respuestas de los estudiantes, encontramos diferentes formas de enunciar la propiedad geométrica de la mediatriz como es el caso de la pareja A y que haremos una descripción de lo grabado en clase junto con la respuesta brindada en su hoja de actividades:

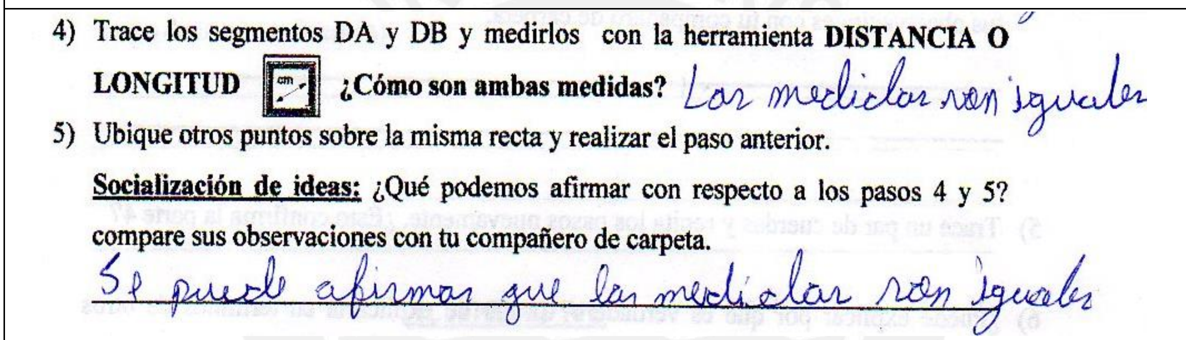
RESPUESTA DE LA ACTIVIDAD "RECORDEMOS" (PAREJA "A")
5) Ubique otros puntos sobre la misma recta y realizar el paso anterior. **Socialización de ideas:** ¿Qué podemos afirmar con respecto a los pasos 4 y 5? compare sus observaciones con tu compañero de carpeta. Que las medidas de ambos segmentos tienen el mismo resultado
TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE *Estudiante A_2:* Cada vez que ubique puntos en la mediatriz y trazamos rectas, estas miden igual. *Profesor:* Pero, ¿ustedes han trazado rectas? y ¿estos qué son? (señalando el segmento $\overline{DA}$) *Estudiante A1:* son segmentos. *Profesor:* Entonces, ¿cómo concluyen? *Estudiante A_2:* Sus medidas son iguales (señalando los segmentos anteriormente trazados). *Estudiante A1:* Cada vez que ubique puntos en la mediatriz y formamos segmentos, estos miden igual.

Figura 5.2 Respuesta de la pareja "A". Pregunta 5

Del diálogo establecido, podemos decir que la pareja “A” se ubican en un nivel 2 de razonamiento de Van Hiele ya que enuncian la propiedad respectiva como se esperaba y llegan a generalizarla, pero a partir de casos concretos (ubicar dos o tres puntos sobre la recta mediatriz y realizar las mediciones correspondientes). A su vez, mencionan “Cada vez que…” que equivale a decir “siempre que…” o “toda vez que…” lo que dota al enunciado propuesto por los estudiantes en un sentido general.

Otro tipo de respuesta fue la brindada por la pareja B en el cual describiremos un extracto de lo grabado en clase junto con la respuesta brindada en su hoja de actividades:

RESPUESTA DE LA ACTIVIDAD “RECORDEMOS” (PAREJA “B”)


4) Trace los segmentos DA y DB y medirlos con la herramienta **DISTANCIA O LONGITUD** ¿Cómo son ambas medidas? Las medidas son iguales

5) Ubique otros puntos sobre la misma recta y realizar el paso anterior.

Socialización de ideas: ¿Qué podemos afirmar con respecto a los pasos 4 y 5? compare sus observaciones con tu compañero de carpeta.

Se puede afirmar que las medidas son iguales

TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE

Profesor: (…), has trazado dos segmentos $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$ y después mediste con la herramienta distancia. ¿Cómo son esas distancias?

Alumno B_2: son iguales

Profesor: Luego, han ubicado otros puntos más

Alumno B_2: por aquí (señalando en la mediatriz) más arriba.

Profesor: ¿Cómo son dichas medidas?

Alumno B_1: el mismo resultado: son iguales

Profesor: De los pasos anteriores, ¿Qué podemos afirmar?

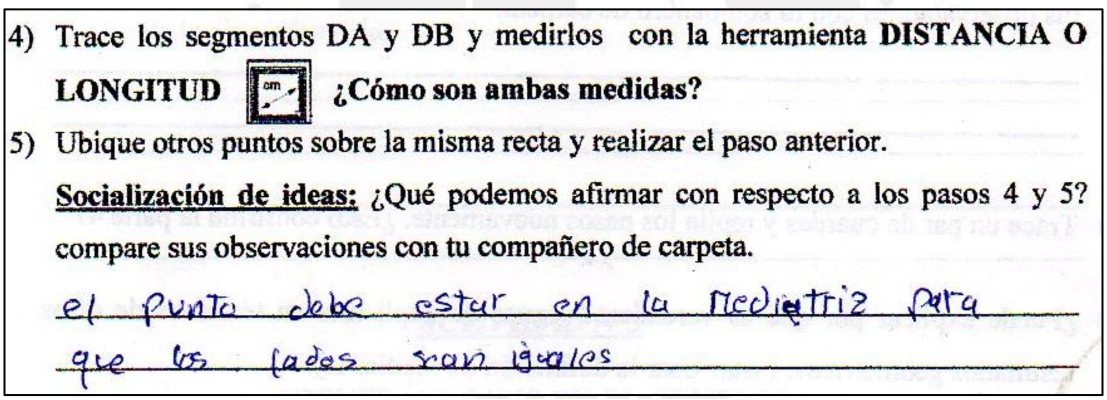
Alumno B_1: Que si un punto pongo en la mediatriz de un segmento y ese punto lo uno con los puntos (señalando los extremos del segmento $\overline{AB}$, siempre sale misma medida.

Figura 5.3 Respuesta de la pareja B. Pregunta 5

Observamos en el diálogo descrito, que la respuesta manifestada por la pareja "B" es de la forma *"Si… entonces…"* y que la propiedad enunciada es que al ubicar un punto sobre la mediatriz, las distancias hacia los extremos de un segmento "siempre mide igual", es decir, llega a la generalización mediante una proposición de tipo condicional, por lo que dicha pareja será ubicado en el nivel 2 de razonamiento de Van Hiele, ya que enunciaron la propiedad geométrica pero a partir de casos concretos.

Se esperaba que los estudiantes enunciaran la propiedad como la anterior mostrada por la pareja "B" o en su forma equivalente: "Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este segmento". Sin embargo, observamos la forma de responder con respecto a la pareja C, ya que determinaron la forma recíproca.

Mostramos a continuación el escrito por la pareja C:


4) Trace los segmentos DA y DB y medirlos con la herramienta **DISTANCIA O LONGITUD** **¿Cómo son ambas medidas?**

5) Ubique otros puntos sobre la misma recta y realizar el paso anterior.

Socialización de ideas: ¿Qué podemos afirmar con respecto a los pasos 4 y 5? compare sus observaciones con tu compañero de carpeta.

el punto debe estar en la mediatriz para que los lados son iguales

Figura 5.4 Respuesta de la pareja C. Pregunta 5

En esta respuesta la condición necesaria para que los segmentos resultantes midan iguales es que el punto esté en la mediatriz. Es decir, este enunciado tiene la forma recíproca: *"Si las distancias son iguales, el punto pertenece a la mediatriz"*. Cabe señalar que esta pregunta tuvo la intención de que el estudiante enuncie la propiedad geométrica teniendo como condición la ubicación del punto perteneciente a la mediatriz y no las medidas iguales de los segmentos. De acuerdo con nuestro criterio, ambos alumnos estarían ubicados en el nivel 1 de razonamiento de Van Hiele ya que enunciaron la propiedad pero de manera imprecisa.

Comentario

Como mencionamos, la pareja "C" realiza la construcción del enunciado pero no como se esperaba: si ubico un punto sobre la mediatriz de un segmento, las medidas de las distancias hacia los extremos de dicho segmento deben de ser iguales; sino que lo hacen en su forma recíproca (si es un punto que equidista de los extremos de un segmento, entonces dicho punto debe de pertenecer a la mediatriz), lo que podrían afirmar que piensen que siempre se da la equivalencia, lo que no ocurre en otras proposiciones.

Presentamos los resultados establecidos con respecto a la pregunta 5:

Tabla 5.4 Pregunta 5. Estructura del enunciado

<table>
<tr><td colspan="4"></td><td>PAREJA DE ESTUDIANTES</td><td>%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">ESTRUCTURA DEL ENUNCIADO</td><td colspan="3">No enuncia nada</td><td>1</td><td>25</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mediante una proposición</td><td colspan="2">Indiquen una generalización: "Cada vez que ubique puntos sobre la mediatriz, las distancias a los segmentos serán iguales".</td><td>1</td><td>25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Forma: "Sí_entonces_" (indicando una generalización)</td><td>"Si ubico un punto cualquiera en la mediatriz, entonces las distancias serán iguales"</td><td>1</td><td>25</td></tr>
<tr><td>"Si miden igual, entonces el punto debe pertenecer a la mediatriz"</td><td>1</td><td>25</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>TOTAL</td><td>4</td><td>100</td></tr>
</table>

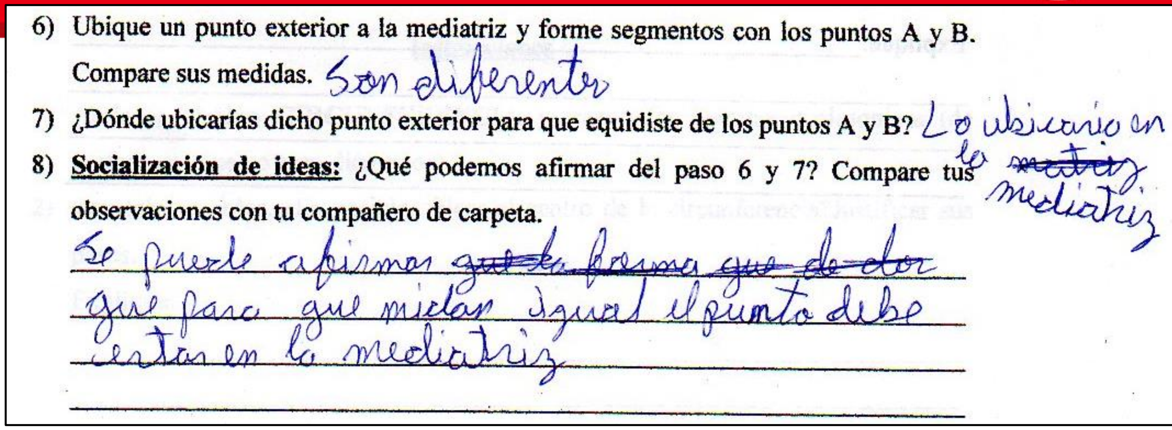
Observamos que el 25% de los alumnos no realizan ninguna conclusión sobre la actividad antes mencionada y que el 50% de los estudiantes sí realizan la conclusión como se esperaba: “Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este segmento” o sus equivalentes “siempre que…”, “cada vez que…”. Además, se observó un gran abismo entre lo que la pareja escribe y su manera de pensar, tal como se analizó con la pareja B y la pareja A con respecto a dicha pregunta, ya que como consta en su escrito, sólo realizan la conclusión y que al entrevistarlos, empiezan a enunciar la propiedad en forma general.

Análisis de las respuestas a la pregunta 8

6) Ubique un punto exterior a la mediatriz y forme segmentos con los puntos A y B. Compare sus medidas.
7) ¿Dónde ubicarías dicho punto exterior para que equidiste de los puntos A y B?
8) **Socialización de ideas:** ¿Qué podemos afirmar del paso 6 y 7? Compare tus observaciones con tu compañero de carpeta.

Figura 5.5 Pregunta 5. Actividad Inicial “Recordemos: encontremos distancias iguales”

En esta ocasión, se diseñaron dichas preguntas para que pudieran ser trabajadas el resultado recíproco, ubicando ciertos puntos fuera de la mediatriz. Se esperaba que el estudiante elaborara una conjetura como la siguiente. ***“Si las distancias son iguales, entonces el punto pertenece a la mediatriz”***. En el análisis de las respuestas de los estudiantes, encontramos que los estudiantes llegaron a construir la conjetura pero en forma equivalente, tal y cual podemos mostrar a lo escrito por la pareja B como se muestra a continuación:


6) Ubique un punto exterior a la mediatriz y forme segmentos con los puntos A y B. Compare sus medidas. Son diferentes

7) ¿Dónde ubicarías dicho punto exterior para que equidiste de los puntos A y B? Lo ubicaria en la ~~matriz~~ mediatriz

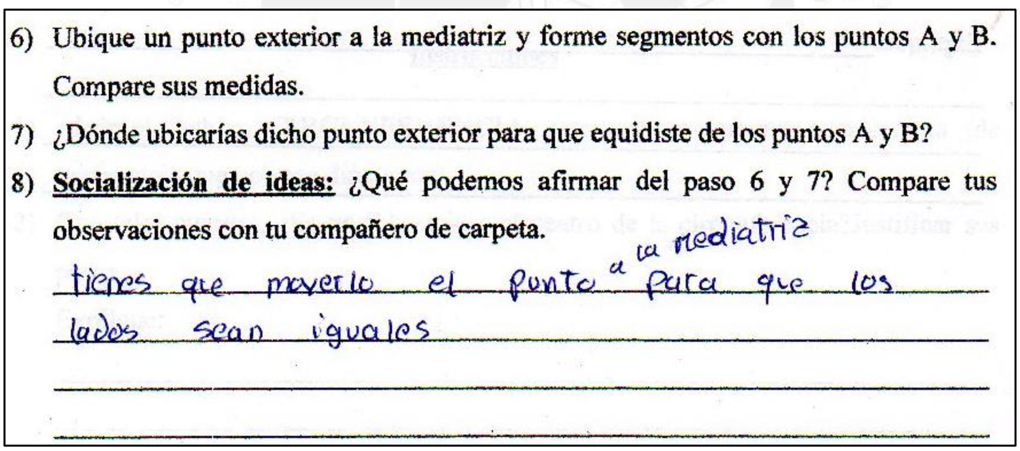
8) **Socialización de ideas:** ¿Qué podemos afirmar del paso 6 y 7? Compare tus observaciones con tu compañero de carpeta.

Se puede afirmar ~~que la forma que de dar~~ que para que midan igual el punto debe estar en la mediatriz

Figura 5.6. Respuesta de la pareja B. Pregunta 8

El enunciado escrito por esta pareja es equivalente a lo esperado, es decir que el punto exterior debe pertenecer a la mediatriz para que equidiste de los puntos A y B. Por lo tanto, el estudiante presenta indicios que permiten colocarlo en el nivel 2 de razonamiento de Van Hiele ya que enunció la propiedad de la mediatriz pero a partir de casos concretos.

A su vez, la pareja C, establecieron lo mismo:


6) Ubique un punto exterior a la mediatriz y forme segmentos con los puntos A y B. Compare sus medidas.

7) ¿Dónde ubicarías dicho punto exterior para que equidiste de los puntos A y B?

8) **Socialización de ideas:** ¿Qué podemos afirmar del paso 6 y 7? Compare tus observaciones con tu compañero de carpeta.

tienes que moverlo el punto a la mediatriz para que los lados sean iguales

Figura 5.7 Respuesta de la pareja C. Pregunta 8

Aquí lo escrito por ambos alumnos equivale a la expresión anteriormente mencionada, es decir a la condición de que para que midan iguales, el punto debe de pertenecer a la mediatriz, lo que en términos de los elementos teóricos establecidos ubicaríamos a dichos alumnos en el nivel 2 de razonamiento de Van Hiele, ya que otorga una construcción de la conjetura, pero a partir de hechos concretos.

Presentamos un extracto del diálogo establecido por la pareja "B":

RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD "RECORDEMOS"
Que si moveramos el punto exterior al medio de la mediatriz surgeria que suy lados puedan ser iguales.
TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE *Profesor:* ¿Saben lo que es equidistar? *Alumna B_2:* No. *Profesor:* Equidistar quiere decir que ambas medidas sean iguales. Entonces, ¿dónde ubicarías ese punto exterior para que las medidas sean iguales? *Alumna B_1:* En la mediatriz. *Profesor:* Entonces, ¿Qué pueden decir en conclusión? *Alumna B_2:* solamente tenía que moverlo a la mediatriz, para que sus lados puedan medir igual.

Figura 5.8 Respuesta de la pareja B. Pregunta 8

De ambos registros, apreciamos que la pareja enuncia la propiedad de la mediatriz mediante una proposición que equivale a decir *"Si los lados miden iguales, entonces el punto debe de pertenecer a la mediatriz"*, por lo que ubicaríamos a la pareja en el nivel 2 de razonamiento de Van Hiele ya que enunciaron la propiedad de la mediatriz mediante la forma recíproca solicitada, pero a partir de casos particulares.

Presentamos a continuación sobre la estructura del enunciado con respecto a la pregunta 8

Tabla 5.5 Estructura del enunciado. Pregunta 8

<table>
<tr><td colspan="4"></td><td>PAREJA DE ESTUDIANTES</td><td>%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ESTRUCTURA DEL ENUNCIADO</td><td colspan="3">No enuncian</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">MEDIANTE UNA PROPOSICIÓN</td><td rowspan="2">Forma: “Sí__entonces__”
(indicando una generalización)</td><td>“Si ubico un punto en la mediatriz, entonces las distancias serán iguales”</td><td>1</td><td>25</td></tr>
<tr><td>“Si miden igual, entonces el punto debe pertenecer a la mediatriz”</td><td>3</td><td>75</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>TOTAL</td><td>4</td><td>100</td></tr>
</table>

Como señalamos en el recuadro, que el 25% aún perciben la idea de la pregunta 5. Sin embargo, en esta pregunta se trabaja el recíproco del mismo. A su vez, encontramos que buena parte del salón (75%) maneja el recíproco, que es lo que justamente se planteó en esta pregunta.

Esto es muy importante ya que el manejo de la mediatriz en sus formas “Si miden igual, entonces el punto pertenece a la mediatriz” y “Si ubico un punto que pertenece a la mediatriz, entonces las distancia serán iguales” nos va a brindar insumos concernientes a la parte explicativa de las actividades centrales.

Análisis del lenguaje

Durante el desarrollo de la sesión, se observó el empleo de un lenguaje propio del nivel 1 de Van Hiele, ya que los términos “poner” y “mover” son producto de la manipulación del software y lo que dichos alumnos describen por la pantalla, al referirse que “dicho punto lo pongo sobre la mediatriz” o “Hay que mover el punto a la mediatriz”.

Presentaremos los términos más comunes que suelen ser usados a lo largo de nuestra sesión:

Tabla 5.6 Análisis del lenguaje. Pregunta 8

			PAREJA DE ESTUDIANTES	**%**
ANÁLISIS DEL LENGUAJE	Lenguaje informal	Expresiones: “mover” , “poner”, “juntar” y/o sus equivalentes	3	75
	Lenguaje formal	Expresiones como “Ubican”, “pertenece” y/o sus equivalentes	1	25
		TOTAL	4	100

Podemos decir que existen un 75% que pertenecen a un nivel 1 de Van Hiele, mientras que el 25% de los estudiantes pertenecen a un nivel 2 de Van Hiele ya que suelen emplear términos más técnicos; sin embargo, existen parejas (como la pareja A) que pertenecen al nivel 2 de Van Hiele pero manteniendo signos de pertenecer al nivel 1 de Van Hiele ya que en su lenguaje suele emplear la expresión “mover”. Aquí la teoría establece que un estudiante puede convivir con dos niveles (uno en jerarquía al otro) ya que el tránsito de un nivel a otro se dará de manera progresiva, gradual y continua.

5.6.2 Actividad N°1: "Propiedad de cuerdas"

Dicha actividad fue aplicada el lunes 21 de Octubre del 2013 durante la tarde (2pm-4pm). Al igual que la sesión desarrollada por la mañana, en esta sesión trabajaron la misma dupla establecida. A su vez, nos facilitaron el uso del equipo multimedia, por lo que no hubo ningún inconveniente durante el trabajo del mismo, ya que permitía obtener un mayor entendimiento sobre las acciones solicitadas en la ficha de trabajo, lo que a su vez generó una buena coordinación entre el alumno y el uso de los comandos del Geogebra; eso se debe a que el estudiante se familiarizó con los comandos trabajados durante la mañana.

La sesión se diseñó en base a lo trabajado durante la mañana. Además, durante la sesión, se observó que algunos estudiantes no tenían muy en claro los conceptos de cuerda, diámetro y radio, por lo que antes de aplicar la actividad, hicimos un repaso de dichos elementos de la circunferencia ya que son los que emplearán a lo largo de nuestras actividades. También se observó algunos errores técnicos como por ejemplo: cuando se les pedía que tracen una cuerda: ubicaban dichos puntos en la región interior de la circunferencia; cuando se les pedía que tracen la mediatriz: trazaban una recta perpendicular, etc. Así como también se presenció que algunos estudiantes realizaron correctamente las acciones de la actividad N°1, enunciaron la propiedad geométrica y justificaron por qué cumple dicha propiedad.

En esta Actividad N°1 (ver anexos), consta de 6 preguntas y que se analizó la pregunta 4 (que tiene que ver con la construcción de la conjetura) y la pregunta 6 (que tiene que ver con la justificación empleada para demostrar por qué siempre sucede tal propiedad).

<u>Resultados de la actividad N°1: “Propiedad de cuerdas”</u>

Análisis de la pregunta 4

Después de haber trabajado las preguntas 1 al 3 (Ver anexos), el estudiante tenía que enunciar la propiedad geométrica pedida en la pregunta 4 que mostramos a continuación:

4) **<u>Socialicemos nuestras ideas:</u>** ¿Qué se puede afirmar con la recta trazada? Comparte tus observaciones con tu compañero de carpeta.

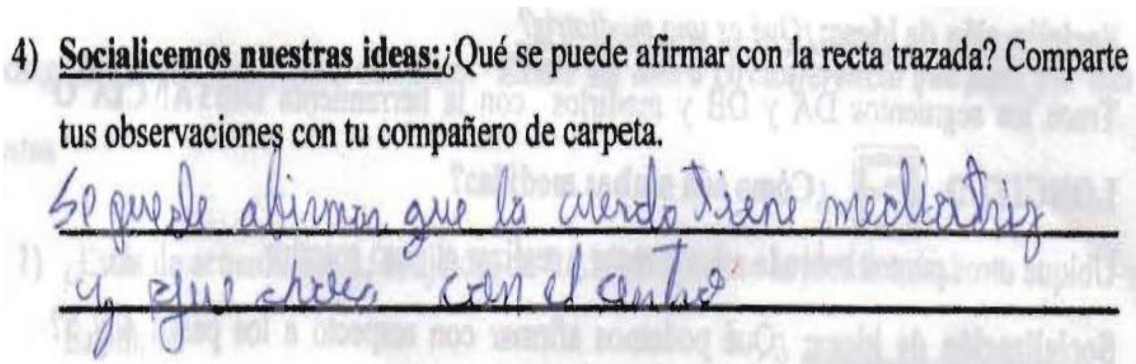
____

____

Figura 5.9 Pregunta 4. Actividad 1

Esta pregunta permitirá que el estudiante enuncie la propiedad: La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia. Presentaremos la respuesta escrita por la pareja B, así como también un extracto del diálogo establecido para que nos aclare sobre el enunciado de la propiedad:

RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD N°1 "PROPIEDAD DE CUERDAS"


4) **Socialicemos nuestras ideas:** ¿Qué se puede afirmar con la recta trazada? Comparte tus observaciones con tu compañero de carpeta.

Se puede afirmar que la cuerda tiene mediatriz y que cruza con el centro

TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE

Profesor: ¿Qué se pueden afirmar?

Alumno B_1: Que los segmentos tienen mediatriz.

Profesor: ¿Qué segmentos?

Alumno B_2: Las cuerdas. Que las cuerdas tienen mediatriz.

Profesor: ustedes has trazado tres cuerdas. Sin embargo, después que hayan trazado sus mediatrices, ¿Qué sucedió?

Alumno B_1: Que se unen. Tiene un punto de unión que es el centro.

Profesor: Por lo tanto, ¿Cómo concluyen?

Alumno B_2: Que la mediatriz de toda cuerda siempre se va a unir al centro

Figura 5.10 Respuesta de la pareja B. Pregunta 4

Observamos una clara diferencia entre lo expresado en el diálogo y lo escrito en su ficha de trabajo. De acuerdo con el diálogo mostrado líneas arriba, podemos decir que la pareja B pudo enunciar la propiedad equivalente a la establecida en nuestro análisis a priori: "La mediatriz de una cuerda dada, pasa por el centro de la circunferencia". Además, se puede apreciar que la pareja llega a generalizar la propiedad al enunciar que "siempre se va a unir con el centro de la circunferencia". Por lo tanto, podemos decir que dicha pareja se ubicaría en un nivel 2 de razonamiento de Van Hiele ya que enunciaron la propiedad geométrica producto de casos particulares (construcción de tres mediatrices).

Comentario

En la pregunta 4 se pedía que determinen la propiedad geométrica pero después que trazaran la mediatriz de una cuerda, lo cual la mayoría de los estudiantes no podía determinar la propiedad pedida. En cambio, otros estudiantes (como la pareja B) trazaron dos y tres cuerdas junto con las mediatrices de las mismas, pudiendo determinar la propiedad pedida. Esto sería una autocrítica sobre el diseño con respecto a esta actividad.

A continuación, mostramos la respuesta – en donde no se llega a generalizar como en el caso anterior – brindada por la pareja A, así como también el diálogo establecido durante la clase.

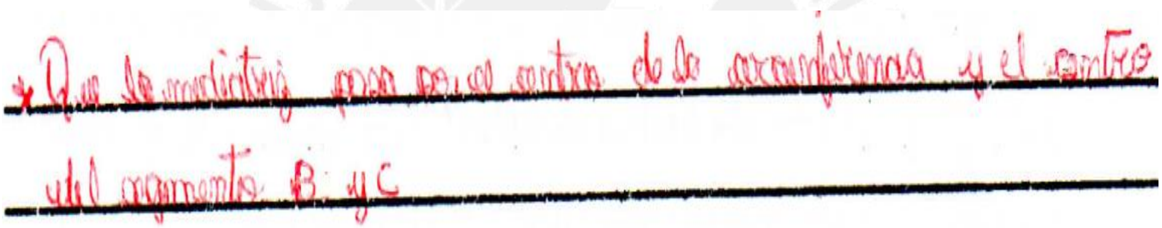
RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD N°1 "PROPIEDAD DE CUERDAS"
 * Que la mediatriz pasa por el centro de la circunferencia y el centro del segmento B y C
TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE *Profesor:* ¿Qué se puede afirmar? *Alumno A_1:* Que la mediatriz pasa por los segmentos trazados y que pasa por el centro de la circunferencia. *Profesor:* Claro, la mediatriz debe de pasar por el segmento trazado ya que es la mediatriz de ese segmento. Por lo tanto, ¿Qué concluimos? *Alumno A_2:* que pasa por el centro de la circunferencia.

Figura 5.11 Respuesta de la pareja A. Pregunta 4

A continuación, presentaremos un cuadro en las cuales el salón de clase realiza la construcción de la conjetura pedida.

Tabla 5.7 Estructura del enunciado de la propiedad. Pregunta 4

			PAREJA DE ESTUDIANTES	**(%)**
ESTRUCTURA DEL ENUNCIADO DE LA PROPIEDAD	**MEDIANTE UNA PROPOSICIÓN**	Que indique una generalización: “siempre que”, “siempre”, etc.	**1**	**25**
		Que indiquen otro tipo de proposiciones: *pasa por el centro.*	**1**	**25**
	OTRO TIPO DE ENUNCIADO	Que indiquen que la mediatriz *“pasa por el medio de un segmento, pasa por el medio, etc.”.*	**1**	**25**
		No realizan nada	**1**	**25**
		TOTAL	**4**	**100**

Observamos que solo el 25% del salón determinan enunciando la propiedad geométrica tal como se esperaba, ya sea enunciando hacia una generalización o simplemente diciendo que la recta pasa por el centro de la circunferencia; mientras que un 25% enuncian que “la recta pasa por la mitad de un segmento” cuando debería de decir que la recta pasa por el centro de la circunferencia; mientras que existe un 25% que no realizan nada. Creemos que los estudiantes no consiguieron enunciar la propiedad geométrica esperada ya que no podían concluir sus observaciones luego de trazar una mediatriz para una cuerda.

Análisis de la pregunta 6

Después de haber enunciado la propiedad geométrica (ver pregunta 4), el alumno tendrá que explicar por qué sucede tal propiedad. La pregunta 6 fue planteada de la siguiente forma:

6) ¿Puede explicar por qué es verdadero? (tratar de explicarla en términos de otros resultados geométricos. Pista: Usar la definición de mediatriz).

____

____

____

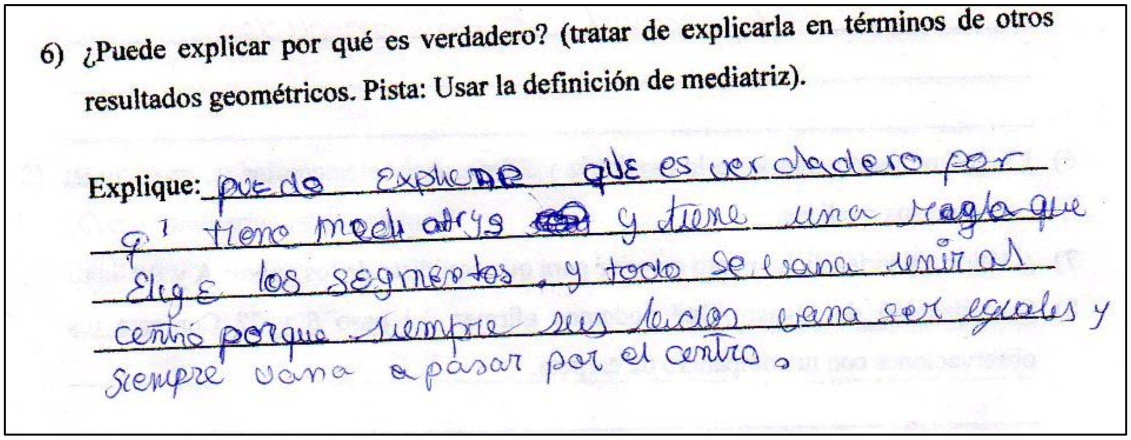
____

Figura 5.12 Pregunta 6. Actividad N°1 *"Propiedad de cuerdas"*

Aquí, hemos utilizado el criterio de justificación, que va a permitir que el estudiante pueda argumentar su respuesta utilizando la actividad discutida (propiedad de la mediatriz), es decir, se espera que el estudiante cuando justifique, argumente su respuesta utilizando la propiedad de la mediatriz antes estudiada, siendo su forma recíproca el medio de explicación.

Si bien es cierto que no se ha demostrado la propiedad trabajada en la actividad inicial, partimos del hecho mismo de que el estudiante ha determinado la propiedad geométrica y pueda utilizar dicha propiedad en la explicación de las actividades siguientes.

A continuación, presentaremos la respuesta de la pareja B donde realizan la explicación respectiva:


6) ¿Puede explicar por qué es verdadero? (tratar de explicarla en términos de otros resultados geométricos. Pista: Usar la definición de mediatriz).

Explique: puedo explicar que es verdadero por q' tiene mediatrys y tiene una regla que elige los segmentos, y todo se vana unir al centro porque siempre sus lados vana ser iguales y siempre vana a pasar por el centro.

Figura 5.13 Respuesta de la pareja B. Pregunta 6

En esta última parte, la pareja B al establecer que "sus lados van a ser iguales" se refiere a los radios de la circunferencia, cuyos extremos son en el centro de la circunferencia y un punto de la cuerda trazada. También es importante establecer que, como "lados van a hacer iguales, entonces se unen al centro", quiere decir que como los segmentos son iguales (por ser radios), entonces el centro "debe pertenecer a la mediatriz". De esta forma estaría justificando su respuesta con el paso anterior (propiedad de la mediatriz), pero con algunas imprecisiones relacionadas con el lenguaje, por lo que dicha pareja tendría indicios de pertenecer al nivel 3 de Van Hiele.

Comentario

También es importante mencionar que la pareja B determinó la propiedad geométrica ya que menciona que "la recta mediatriz de una cuerda siempre va pasar por el centro", aunque en esta parte del problema debía de explicar por qué pasa por el centro. Es importante que el estudiante enuncie la propiedad geométrica que va a utilizar para después explicar dicha afirmación. De la misma manera, tal y como afirma Gutiérrez (2007), en esta última etapa vemos que el software pierde el papel de mediador para dar paso al proceso de la explicación-justificación de la propiedad a tratar.

Presentaremos la respuesta de la pareja A para su posterior análisis:

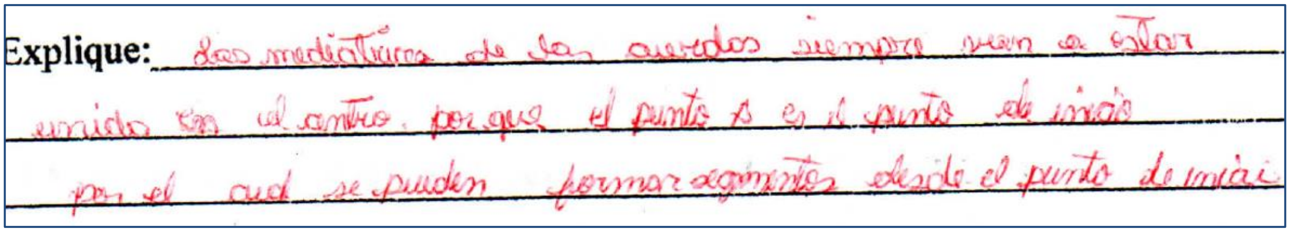

Explique: Las mediatrices de las cuerdas siempre van a estar unido en el centro. porque el punto A es el punto de inicio por el cual se pueden formar segmentos desde el punto de inicio

Figura 5.14 Respuesta de la pareja A. Pregunta 6

Podemos establecer que, para la justificación de la pareja "A", se basó en términos de otro resultado conocido: propiedad de la mediatriz, pero de la forma "Si ubico un punto en la mediatriz, entonces las distancias serán iguales". En este caso, se va a ubicar el punto A en la mediatriz y desde ese punto se traza segmentos (radio de la circunferencia) de igual medida. Es decir, la pareja "A" concibe el hecho de que por un punto de la mediatriz (centro) se forman segmentos de medidas iguales (radio).

Cabe señalar que la pareja no usó la forma recíproca para su explicación, recurriendo a la forma antes señalada de la propiedad de la mediatriz.

Aquí presentamos un recuadro donde se determina sobre la explicación que emplea la clase:

Tabla 5.8 Sobre la justificación. Pregunta 6

			PAREJA DE ESTUDIANTES	**%**
SOBRE LA JUSTIFICACIÓN	**Usando una propiedad previa**	Usan el recíproco: Si las distancias son iguales, entonces el punto pertenece a la mediatriz.	**1**	**25**
		Usan: Si un punto pertenece a la mediatriz, entonces las distancias son iguales	**1**	**25**
	Se basan en un caso particular	Hechos concretos	**0**	**0**
	Emplean argumentos incorrectos	No tienen sentido	**2**	**50**
	No justifican	Respuestas en blanco	**0**	**0**
	Total		**4**	**100**

Análisis del lenguaje

Algo que nos llamó la atención fue el término “chocar” que fue usado por la mayoría de los estudiantes, dando entender como la intersección de dos figuras geométricas. Es importante fomentar el uso de un vocabulario ya que el lenguaje, tomando como referencia a Van Hiele, nos va a permitir ubicar los niveles finales de razonamiento presentados por cada estudiante. A medida que vayamos analizando las respuestas, notaremos que poco a poco el uso de un buen vocabulario es notorio.

5.6.3 Actividad N°2 "¿Única circunferencia?"

Dicha actividad estaba constituida por 4 preguntas (ver anexos) y fue aplicada el día martes 22 de octubre del 2013, teniendo un total de 8 alumnos ubicados en parejas (los mismos que estuvieron trabajando en las anteriores sesiones). Se observó que los estudiantes ya conocían los comandos más usuales del programa: recta mediatriz, segmento, punto y circunferencia. Por lo tanto, no hubo ningún inconveniente en cuanto a la ubicación de dichos comandos.

En cuanto al uso de las computadoras, no hubo inconvenientes ya que todo estaba en perfecto estado, al igual que el equipo multimedia solicitado para un mejor entendimiento de las actividades en clase.

Con respecto a los resultados, se presenció que fueron no muy favorables ya que la misma actividad demandaba mucho tiempo para realizar lo solicitado: la existencia de muchas circunferencias.

Durante la sesión de la clase, existieron inquietudes con respecto a la pregunta número 3 (ver anexos) ya que establecían que sólo existía una única circunferencia que pase por los puntos A y B, lo que conlleva a que sean pocos los estudiantes lo que expliquen dicha existencia. Sería ideal haber presentado dicha actividad al final de la sesión o como una actividad 5, puesto que exigía una mayor atención del mismo, así como también del tiempo establecido.

Resultados de la actividad N°2 "¿Única circunferencia?"

Análisis de la pregunta 4

4) ¿Puedes explicar a qué se debe este hecho? Trata de explicar mediante resultados geométricos ya demostrados. (Pista: **Usar la propiedad de cuerdas**)

Figura 5.15 Pregunta 4. Actividad N°2: *"Circunferencia única"*

El criterio que permitió analizar fue el del tipo de justificación que realizan los alumnos, utilizando para ello la propiedad que se trabajó en la actividad N°1 ; así como también el criterio del lenguaje empleado durante el desarrollo de la sesión.

Después de haber realizado las tres primeras preguntas, en la cuarta pregunta se le pide al estudiante que explique porque existen muchas circunferencias que pasan por los puntos fijos A y B.

Presentaremos un extracto del diálogo establecido con la pareja B, así como también la respuesta escrita en la ficha de trabajo para realizar su posterior análisis.

RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD N°2 “ÚNICA CIRCUNFERENCIA”
4) ¿Puedes explicar a qué se debe este hecho? Trata de explicar mediante resultados geométricos ya demostrados. (Pista: **Usar la propiedad de cuerdas**) 3) Usando la propiedad de la cuerda afirmó que la mediatriz de una cuerda es su mitad, y esta mediatriz siempre pasa por el centro de la circunferenci
TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE *Alumno B₂:* La circunferencia (señalando la circunferencia teniendo como centro a un punto de la mediatriz) va a pasar por A y B. *Profesor:* ¿eso a qué se debe? *Alumno B2:* Propiedad de la… (No menciona nada). *Profesor:* Te vuelvo a preguntar ¿Hay una sola circunferencia? *Alumno B1:* No, ya que al trazar la circunferencia desde la mediatriz siempre va a chocar en los puntos A y B. *Profesor:* ¿Qué resultado anterior han estudiado? *Alumno B1:* La propiedad de cuerdas. *Profesor:* ¿Qué dice esa propiedad? *Alumno B1:* Que para una cuerda, la mediatriz siempre va a chocar (pasar) con la circunferencia (centro de la circunferencia). *Profesor:* Entonces, cada punto que ubiques en la mediatriz ¿Qué viene a ser? *Alumno B1:* El centro de la circunferencia.

Figura 5.16 Respuesta de la pareja B. Pregunta 4

Podemos observar que para la pareja B determina que sí existen muchas circunferencias y su justificación se basa en la propiedad de cuerdas, ya que para cada cuerda, su mediatriz va a pasar por el centro de la circunferencia. Es por eso que ubica en la mediatriz el centro de aquella circunferencia que pase por los puntos A y

B. Por lo tanto, ambos tendrían indicios de pertenecer al nivel 3 de Van Hiele, ya que explicó por intermedio de una propiedad anteriormente demostrada (propiedad de cuerdas), pero con algunas imprecisiones en cuanto al lenguaje usado.

Comentario

Es importante mencionar que la pareja B llega a generalizar la anterior propiedad, tal y cual mostramos a continuación:

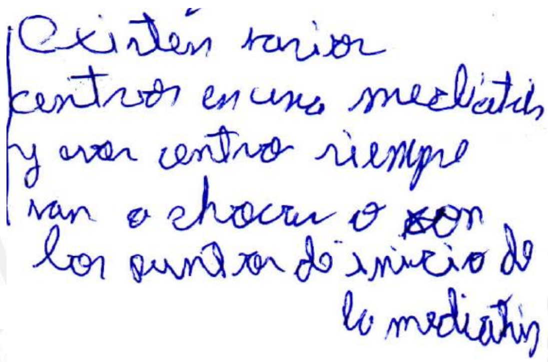
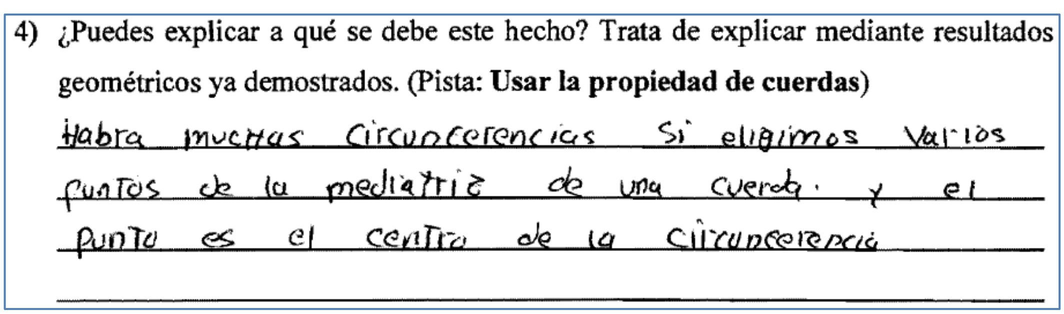

Existén varios
centros en una mediatriz
y esos centro siempre
van a chocar o ~~son~~
los puntos de inicio de
la mediatriz

Figura 5.17 Respuesta de la pareja B. Pregunta 4

De la misma forma, observamos que la pareja antes mencionada llega a generalizar la propiedad anterior, manifestando la existencia de muchos centros de la circunferencia pertenecientes a la mediatriz, justificando para ello con la propiedad de cuerdas antes señalado.

Presentamos la respuesta brindada por la pareja C, determinando una generalización de la propiedad, pero sin explicar el porqué del mismo:


4) ¿Puedes explicar a qué se debe este hecho? Trata de explicar mediante resultados geométricos ya demostrados. (Pista: **Usar la propiedad de cuerdas**)

Habra muchas circunferencias si eligimos varios puntos de la mediatriz de una cuerda. y el punto es el centro de la circunferencia

Figura 5.18 Respuesta de la pareja C. Pregunta 4

Dicha generalización se realiza mediante una proposición *"Si… entonces…"* que es un condicional, ya que "si se eligen varios puntos de la mediatriz, habrá muchas circunferencias", siendo el punto el centro de la circunferencia. De acuerdo con nuestros criterios establecidos en el referencial teórico, dicha pareja corresponde a un nivel 2 de justificación ya que generalizan la existencia de muchas circunferencias a partir de casos concretos sin presentar una justificación del mismo.

Comentario a la actividad

Es importante mencionar que, un caso particular de la circunferencia que pase por los puntos A y B es teniendo como diámetro al segmento que con extremos en ambos puntos y ubicando el centro del mismo con la herramienta mediatriz tal y cual habíamos descrito en nuestro análisis a priori.

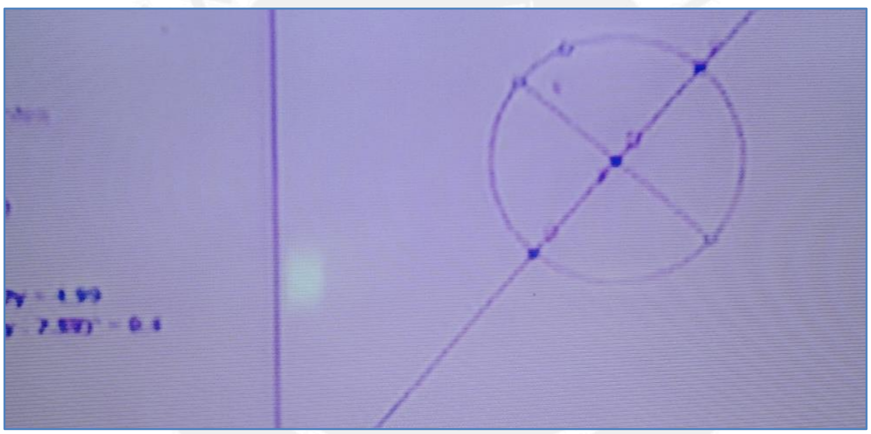


Figura 5.19. Respuesta de la pareja A. Pregunta 4

En el siguiente recuadro, agrupamos el número de estudiantes que consiguieron determinar dicha existencia y de la justificación de la misma.

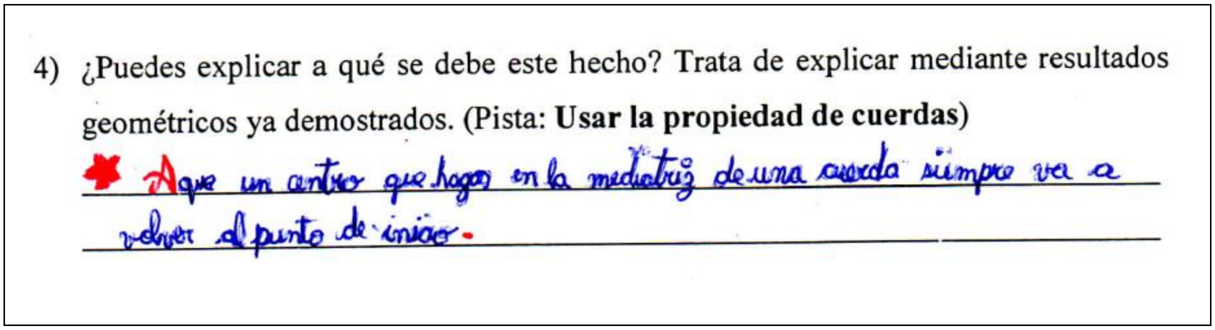
Tabla 5.9 Sobre la justificación. Pregunta 4

		JUSTIFICACIONES	PAREJA DE ESTUDIANTES	(%)
Sobre la justificación	**Existen muchas circunferencias**	Justifican usando la propiedad de cuerdas	1	25
		Realizan otros argumentos (argumentos no muy claros)	1	25
	No responden dicha existencia	Realizan otros argumentos (argumentos no muy entendibles)	1	25
		No justifican	1	25
		TOTAL	4	100

Observamos que dos parejas determinaron que existen muchas circunferencias que pasan por dos puntos dados A y B. Sin embargo, cuando se les pedía justificar por qué sucedía tal hecho geométrico, solo un par de alumnos pudieron justificar con la propiedad de cuerdas. Esto quizás se debe al grado de dificultad que la propia actividad requiere: trazo de la mediatriz y determinar que en cada punto de la mediatriz formaría un centro de una circunferencia que pase por los puntos A y B.

Análisis del lenguaje

Los términos empleados para en esta actividad son el término "choca" con el centro, en vez de decir "pasa por el centro" de la circunferencia. A su vez, los estudiantes suelen emplear el término "punto de inicio", queriéndose referir a los puntos del segmento A y B. Mostramos a continuación el uso del mismo al justificar su respuesta empleada por la pareja A.



4) ¿Puedes explicar a qué se debe este hecho? Trata de explicar mediante resultados geométricos ya demostrados. (Pista: **Usar la propiedad de cuerdas**)

* Aque un centro que hagas en la mediatriz de una cuerda siempre va a volver al punto de inicio.

Figura 5.20 Respuesta de la pareja A. Pregunta 4

Observamos que en la explicación empleada por dichas alumnas, emplean el término punto de inicio para referirse a los puntos A y B. Además, en algún momento fue empleado en la actividad 1 para referirse al centro de la circunferencia. Es importante aclarar los términos geométricos básicos como centro, segmento, mediatriz, etc. para que puedan ser utilizados de manera correcta.

A continuación, presentaremos el lenguaje empleado por los estudiantes durante esta actividad.

Tabla 5.10 Análisis del Lenguaje.

			PAREJA DE ESTUDIANTES	**%**
ANÁLISIS DEL LENGUAJE	Lenguaje informal	Expresiones: “Chocan”	1	25
		Expresiones: “mediatriz es la mitad de un segmento”, “la mediatriz pasa por el medio”.	1	25
		Expresiones: “Punto de inicio”.	1	25
	Lenguaje formal	No presentan ninguno de las expresiones mencionadas	1	25
		TOTAL	4	100

Observamos que una pareja manifiesta un lenguaje entendible. Mientras que las otras parejas manifiestan un lenguaje informal, ya que emplean expresiones como “chocar” cuando en realidad debería de decir “intersectar”, “pasar”, etc. lo que en términos del modelo Van Hiele, dichos alumnos estarían ubicados en el nivel 1 de Van Hiele.

5.6.4 Actividad N°3 “Centrándonos en el Centro”

Dicha actividad que consta de dos preguntas (ver anexos), fue implementada el mismo día (Martes, 22 de octubre del 2013) durante la tarde. Se observó que existía una muy buena aceptación por parte del alumnado en cuanto a las justificaciones empleadas, ya que fueron muy claros en usar la propiedad trabajada en la actividad N°1 como medio de justificación en sus respuestas. Además, hubo algunas inquietudes al tratar de resolver dicha actividad, como es el caso de emplear ciertas herramientas de trabajo que no habíamos contemplado durante esta sesión, como el uso de la herramienta ***Circunferencia que pase por tres puntos***.

Durante la sesión, algunos alumnos no entendieron muy bien cuando se les solicitaban que abran el archivo ***Circunferencia***, ya que, dicho archivo presentaba a una circunferencia sin el centro. Algunos de los alumnos que no podían abrir el archivo, trazaron una circunferencia pero con centro dado. Esto fue posteriormente aclarado en clase, ya que en dicha actividad solo tendrían que ubicar el centro de la circunferencia misma.

Resultados de la actividad N°3: “centrándonos en el centro”

Análisis de la pregunta 2

2) Con tales cuerdas, ¿Es posible ubicar el centro de la circunferencia? Justificar sus pasos.

Explique:

____

____

____

____

Figura 5.21 Pregunta 2. Actividad N°3: “***Centrándonos en el centro”***

Esta actividad tuvo como objetivo de que los estudiantes puedan ser capaces de usar la propiedad trabajada en la actividad N°1 para encontrar el centro de la circunferencia. Aquí el estudiante tenía que ubicar un par de cuerdas (que no sean diámetros) y que ubiquen el centro de la circunferencia. Por lo tanto, para esta actividad, se analizará el criterio de Justificación, así como también el criterio del lenguaje empleado.

Presentamos la solución establecida por la pareja B para su posterior análisis:

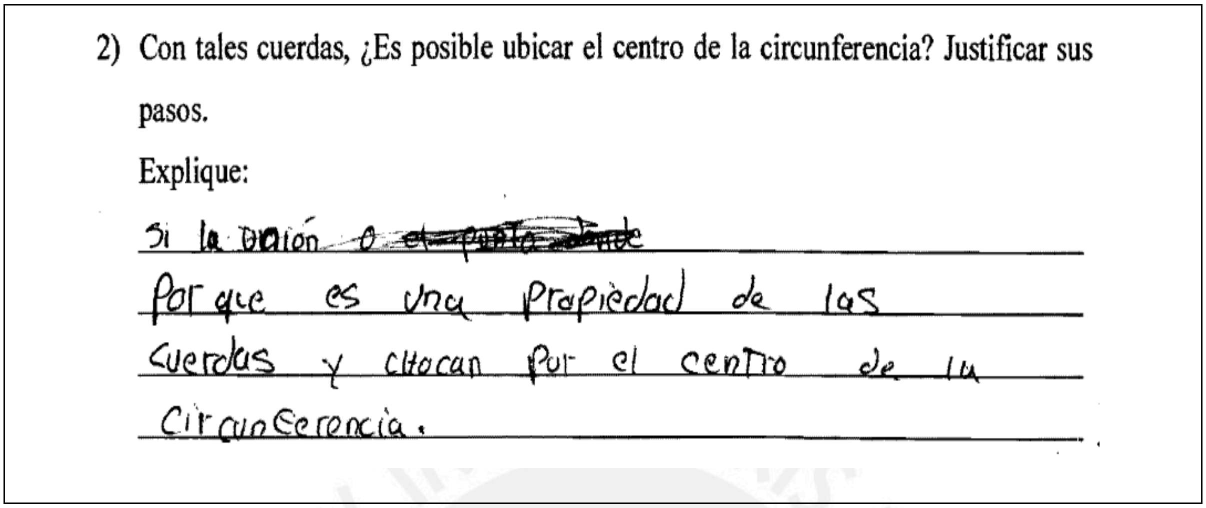
RESPUESTA DE LA ACTIVIDAD N°3 "CENTRÁNDONOS EN EL CENTRO"
3. La union o el punto donde chocan la mediatrices de los cuerdas va a ser el Centro de esa circunferencia porq' es una propiedad de la cuerda.
TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE *Alumno B_2:* Sí se pude ubicar el centro, ya que las mediatrices siempre van a tener que pasar por el centro de la circunferencia. *Profesor:* y ¿Cómo explican ese hecho de que pasan por el centro? *Alumno B_1:* La mediatriz siempre va a pasar por el centro. *Profesor:* ¿Qué resultado geométrico han utilizado? *Alumno B_1:* La propiedad de cuerdas.

Figura 5.22 Respuesta de la pareja B. Pregunta 2.

Observamos que la pareja determina que es posible encontrar el centro de una circunferencia mediante la propiedad de cuerdas (propiedad tratada en la actividad 1) trazando la mediatriz para cada una de las cuerdas y determinando que en la intersección de las mismas se encuentra el centro de la circunferencia.

Por lo tanto, la pareja B estaría ubicada en el nivel 3 de Van Hiele ya que utilizaron un hecho geométrico ya demostrado anteriormente (propiedad de cuerdas).

Presentamos a continuación la solución establecida por la pareja "C" sobre la actividad mencionada.



2) Con tales cuerdas, ¿Es posible ubicar el centro de la circunferencia? Justificar sus pasos.

Explique:

Si la unión o ~~el punto donde~~
Porque es una propiedad de las
cuerdas y chocan por el centro de la
circunferencia.

Figura 5.23 Respuesta de la pareja C. Pregunta 2.

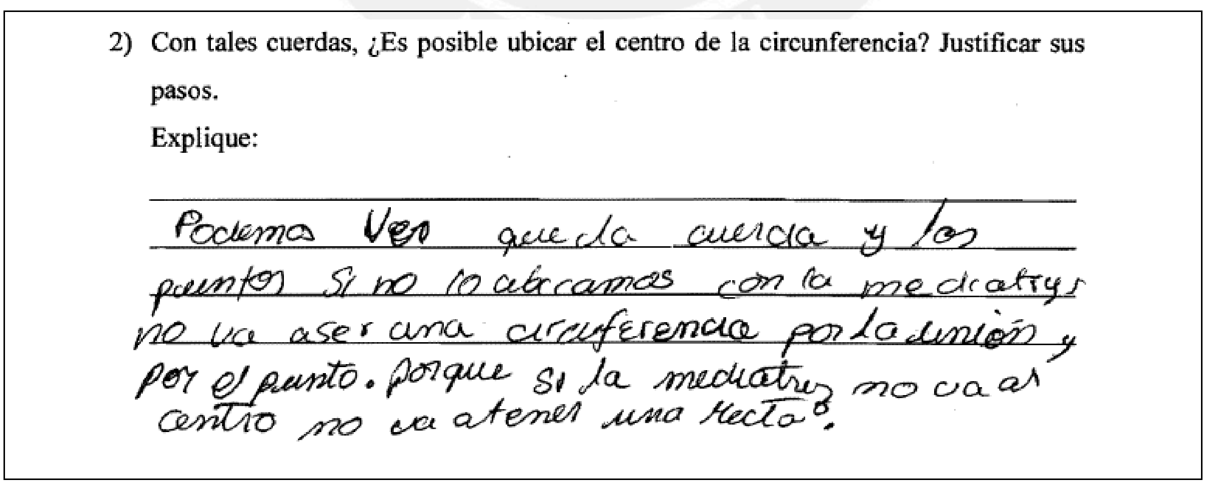
Observamos que la pareja "C" afirma que sí es posible ubicar el centro de la circunferencia, utilizando la propiedad de las cuerdas en su justificación. Además durante la entrevista, la pareja manifestó que al expresar la palabra "chocar" se referían al cruce de las mediatrices trazadas para cada cuerda. Por lo tanto, podemos establecer que, de acuerdo con nuestro referencial teórico, dicha pareja se encuentra tendría indicios de pertenecer al nivel 3 de Van Hiele ya que utiliza una propiedad anteriormente trabajada pero con algunas imprecisiones en su explicación.

Presentamos a continuación los resultados con respecto a la justificación utilizada por los estudiantes.

Tabla 5.11 Sobre la justificación

		PAREJA DE ESTUDIANTES	(%)
SOBRE LA JUSTIFICACIÓN	**Emplean propiedades previas**	3	75
	Se basan en un caso particular	0	0
	Usando otros argumentos (argumentos incorrectos)	1	25
	No justifican: (No contestan / No escriben)	0	0
	TOTAL	4	100

Observamos que tres parejas de estudiantes usaron la propiedad de cuerdas en su justificación para determinar el centro de la circunferencia misma, lo que quiere decir que los estudiantes muestran un grado de familiaridad con dicha propiedad y que a su vez, permite ser un argumento geométrico básico para justificar sus respuestas. Además, es importante hacer una mención de que cuando nos referimos a “Usando otros argumentos” nos referimos que el estudiante escribe en su ficha de trabajo la justificación pedida, pero que no se puede interpretar ya que la justificación no es muy clara, como por ejemplo la justificación brindada por la pareja “D” que presentamos a continuación:


2) Con tales cuerdas, ¿Es posible ubicar el centro de la circunferencia? Justificar sus pasos.

Explique:

Podemos Ver quela cuerda y los puntos Si no lo abrcamos con la mediatrys no va aser una circuferencia porla unión y por el punto. porque si la mediatriz no va al centro no va atener una recta.

Figura 5.24 Respuesta de la pareja D. Pregunta 2.

Observamos un argumento que no se puede interpretar ni distinguir lo que se quiere expresar, por lo que a dicha pareja sería ubicada en el nivel 1 del modelo de Van Hiele, ya que no emplea una justificación adecuada.

Análisis del lenguaje

Algo que llamó mucho la atención es sobre el lenguaje utilizado por dichos alumnos. Por ejemplo, suelen emplear la palabra “Chocar” para referirse al cruce de la mediatriz con el centro de la circunferencia.

En el siguiente cuadro, presentamos el estilo del lenguaje que usaron los estudiantes durante la actividad desarrollada en clase:

Tabla 5.12 Análisis del lenguaje

			PAREJA DE ESTUDIANTES	**%**
ANÁLISIS DEL LENGUAJE	Lenguaje informal	Expresiones: “Chocan”.	3	75
	Lenguaje formal	Presentan expresiones como: “intersectan” o “pasan”.	0	0
	No codificable	No son claras/no se entiende lo que expresan.	1	25
		TOTAL	4	100

.

Comentario

En vista de las respuestas positivas de los estudiantes al usar la propiedad de cuerdas en sus justificaciones, quizás hubiera sido conveniente presentar primero esta actividad antes de la actividad 2, ya que está muy relacionado con la propiedad de cuerdas analizada al principio. Además, la actividad 3 establece que a partir de dos cuerdas de una circunferencia, trazando mediatriz, se puede obtener el centro de la misma. Esta será una idea muy importante para el trabajo de la actividad siguiente, ya que se relaciona mucho con el hecho de que a partir de tres puntos no co-lineales existe una única circunferencia.

5.6.5 Actividad N°4: "Circunferencia única 2"

Dicha actividad consta de 4 preguntas (ver anexos) y fue aplicada el martes 22 de Octubre del 2013 durante la tarde (2 pm- 4pm). Asistieron 11 estudiantes y se mostraron muy activos con la serie de preguntas. Además, en las mismas justificaciones, manifestaron usar las propiedades que anteriormente fueron trabajadas, tal y como se deseaba. Inclusive hicieron uso de otras herramientas del que no fueron trabajadas antes, como por ejemplo para la construcción de una la circunferencia que pase por tres puntos, un estudiante abordó dicha situación utilizando la herramienta **"Circunferencia que pase por tres puntos"** tal y como se había previsto. A su vez, hubo otras construcciones propias de los estudiantes para justificar su respuesta. Es importante que el docente explique al estudiante que deben de justificar sus pasos con actividades ya estudiadas anteriormente

En cuanto al uso de las herramientas del Geogebra, hubo mayor cercanía con dicho programa, lo cual fue una muestra del buen dominio que adquirieron con respecto al programa.

Durante la sesión, hubo participaciones individuales para que explicaran las construcciones realizadas en clase, lo que conlleva a una buena disposición de los alumnos al experimentar actividades de este tipo: donde el alumno pueda argumentar, enunciar una propiedad y pueda explicar la misma recurriendo a otras propiedades ya trabajadas previamente en clase.

<u>Respuesta de la actividad N°4: "circunferencia única 2"</u>

En esta actividad se esperaba que el estudiante utilizara la propiedad de la mediatriz para justificar la existencia de una única circunferencia que pase por tres puntos. De la misma forma, se esperaba que el estudiante redefina y/o amplíe la afirmación inicial (ver anexo 5) para la existencia de la circunferencia.

Para esta actividad, utilizaremos el tipo de justificación que realizan los estudiantes para explicar una propiedad geométrica.

Análisis de las respuestas a la pregunta 1

Rodrigo establece la siguiente afirmación "***Existe un única circunferencia que pasa por tres puntos***"

1) ¿Estás de acuerdo con la afirmación propuesta por Rodrigo? ¿Cómo la justificarías? Explique:

____

____

____

Figura 5.25 Pregunta 1. Actividad N°4: *"Circunferencia única 2"*

Debemos de señalar que los estudiantes no mencionan directamente en su justificación la actividad 3, sino que realizan los pasos donde se trabajó en la actividad mencionada, es decir, indirectamente utilizan la actividad 3 para justificar la afirmación inicial. Presentaremos la respuesta de la pareja "B" y observaremos cómo utilizan (indirectamente) la actividad anterior.

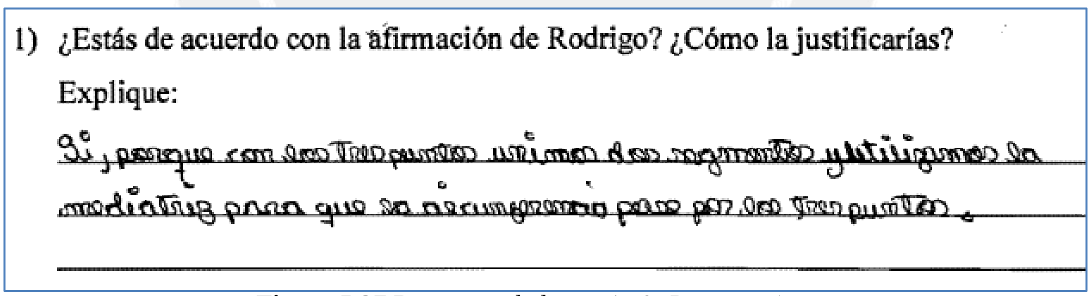
RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD N°4 "CIRCUNFERENCIA ÚNICA 2"
1) ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Rodrigo? ¿Cómo la justificarías? Explique: ~~[illegible]~~ Si, forme un angulo con los 3 punto y esos dos rayos son cuerdas y saqué su mediatriz y de ahí salio el centro de la circunferencia

TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE
Alumno B_1: Hemos unido los tres puntos y estas líneas (señalando en la pantalla) son las mediatrices, donde su cruce determina el centro de la circunferencia.
Profesor: ¿En qué se basaron para encontrar el centro de la circunferencia?
Alumno B2: por las cuerdas.
Profesor: Expliquen un poco más.
Alumno B_1: Formamos un ángulo uniendo los puntos. Trazamos dos cuerdas y en cada una de ellas trazamos la mediatriz y su cruce forma el centro de la circunferencia.

Figura 5.26 Respuesta de la pareja B. Pregunta 1

De la solución mostrada por la pareja "B", observamos que utilizan la propiedad trabajada en la actividad anterior ya que construyen un par de segmentos y utilizan las mediatrices de las mismas para su construcción. Por lo tanto, dicha pareja estarían ubicados en el nivel 3 de Van Hiele ya que en su justificación utiliza una propiedad trabajada anteriormente.

Presentaremos algunas soluciones planteadas por la pareja A al utilizar la actividad 3 para que justifiquen la existencia de la circunferencia misma.


1) ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Rodrigo? ¿Cómo la justificarías?

Explique:

Sí, porque con los tres puntos unimos dos segmentos y utilizamos la mediatriz para que la circunferencia pase por los tres puntos.

Figura 5.27 Respuesta de la pareja A. Pregunta 1

Como podemos observar, la pareja A utilizan la actividad realizada 3 de manera indirecta y justificaron la existencia de una única circunferencia a partir de la misma. Podemos decir que esta pareja se ubicaría en un nivel 3 de Van Hiele.

Presentamos en el siguiente cuadro sobre la justificación que presentaron los estudiantes para explicar esta actividad.

Tabla 5.13 Sobre la justificación empleada

		PAREJA DE ESTUDIANTES	(%)
SOBRE LA JUSTIFICACIÓN	**Emplean propiedades previas**	3	75
	Se basan en un caso particular	0	0
	Usan otros argumentos (argumentos incorrectos)	1	25
	No justifican	0	0
	TOTAL	4	100

Observamos que existen 3 parejas de estudiantes que hacen uso de una propiedad previa para justificar la pregunta 1 tal como se esperaba, mientras que una pareja de estudiantes emplean otros argumentos en su justificación.

Análisis de las respuestas sobre la pregunta 2

2) ¿La afirmación propuesta por Rodrigo es válida si los tres puntos son colineales? Si no, ¿Cómo cambiarías dicha afirmación?
Explique:
____
____

Figura 5.28 Pregunta 2. Actividad 4: “Circunferencia Única 2”

En este apartado, se esperaba que el estudiante redefiniera la afirmación inicialmente propuesta (ver pregunta 1 de la actividad N°4) utilizando las propiedades trabajadas en las actividades anteriores o aquellas que fueron discutidas en clase, redefiniéndolas de la siguiente manera: existe una circunferencia que pase por tres puntos no co-lineales.

Aquí mostramos la propuesta realizada por la pareja B.

RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD N°4 "CIRCUNFERENCIA ÚNICA 2"

2) ¿La afirmación dada por Rodrigo es válida si los tres puntos son colineales? Si no, ¿Cómo cambiarías esta conjetura?

Explique:
No, porq los puntos si se forman segmento para encontrar el centro no se va a poder porq son paralelas.
Exíste una circuferencia que pasa por 3 puntos, si lo punto no son colineales.

TRANSCRIPCIÓN DE LO GRABADO EN CLASE

Alumno B$_1$: Si pongo sus mediatrices, nunca van a cruzar porque son paralelas.

Profesor: Mueve el punto del medio ¿Qué sucede?

Alumno B$_2$: Se intersectan las mediatrices y se formaría la circunferencia.

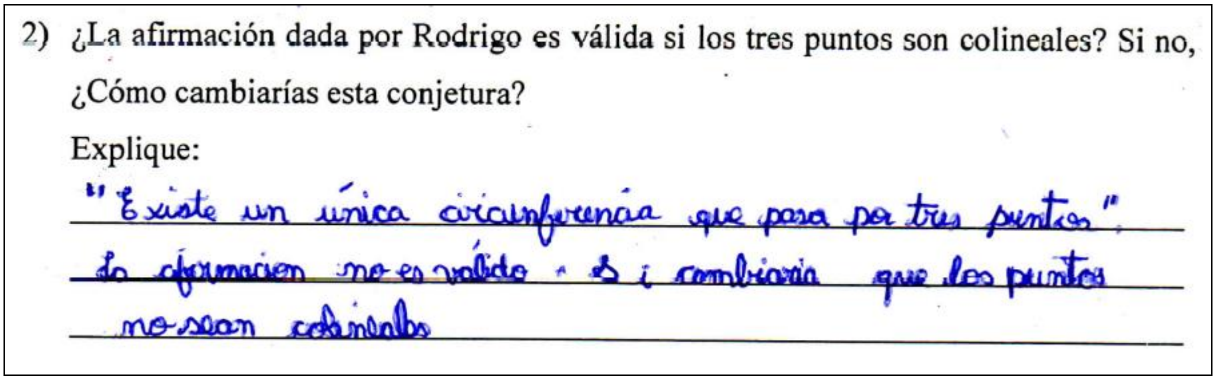
Profesor: Entonces, ¿Cómo podrían redefinir la afirmación propuesta por Rodrigo?

Alumno B$_1$: Que existe una única circunferencia que pasa por tres puntos y esos puntos no deben de ser colineales.

Figura 5.29 Respuesta de la pareja B. Pregunta 2

En sus explicaciones, la pareja "B" formaron un segmento con tales puntos (es decir, primero supone que son colineales) para luego trazar la mediatriz de ambos segmentos y al observar que las mediatrices son paralelas, no se encontrará el centro de la misma. Sin embargo, en el diálogo, observamos que la pareja consiguieron reformular la afirmación inicial, recurriendo a la propiedad de cuerdas y a la actividad 3 antes explicada. De acuerdo con nuestro referencial teórico, dicha pareja sería ubicada en el nivel 3 de Van Hiele, ya que justifican sus pasos mediante la aplicación de actividades ya trabajadas anteriormente.

Así como la pareja B, existen otras parejas que manifiestan la misma idea de reformular la afirmación a partir de una actividad ya discutida y tratada en clase.


2) ¿La afirmación dada por Rodrigo es válida si los tres puntos son colineales? Si no, ¿Cómo cambiarías esta conjetura?

Explique:

"Existe un única circunferencia que pasa por tres puntos".
la afirmacion no es valido. Si cambiaria que los puntos
no sean colineales

Figura 5.30 Respuesta de la pareja A. Pregunta 2

Presentamos a continuación, la construcción establecida por los estudiantes durante la clase

Tabla 5.14 Sobre la estructura del enunciado

		PAREJA DE ESTUDIANTES	(%)
ESTRUCTURA DEL ENUNCIADO	**Redefinen y/o amplían la afirmación** (existe una única circunferencia que pasa por tres puntos no colineales)	3	75
	No redefinen la afirmación	1	25
	TOTAL	4	100

Observamos que el 75% de los alumnos que determinaron la existencia de la circunferencia que pase por tres puntos, fueron los mismos alumnos que redefinieron y/o ampliaron la afirmación inicial. Además, se observó que el 25% de los estudiantes no llegaron a redefinirla. Esto se debe a que dichos estudiantes se encuentran todavía en un pensamiento gradual y progresivo, conforme a nuestro referencial teórico.

Análisis del lenguaje

A diferencia de las actividades anteriores, pudimos observar que los estudiantes emplearon un lenguaje verbal claro, coherente y que además su explicación se parecía a lo esperado.

En el siguiente cuadro, presentamos el estilo del lenguaje que usaron los estudiantes durante la actividad desarrollada en clase:

Tabla 5.15 Análisis del lenguaje

			PAREJA DE ESTUDIANTES	**%**
ANÁLISIS DEL LENGUAJE	Lenguaje informal	Expresiones basados en la visualización de la figura, apoyándose con el programa: "me fijo el punto medio".	1	25
	Lenguaje formal	Presentan expresiones como: "intersectan", "pasan", "trazamos".	3	75
	No codificable	No son claras/no se entiende lo que expresan o no justifican nada.	0	0
		TOTAL	4	100

Se observa que una pareja realiza una justificación apoyándose con el programa, lo cual corresponde a un nivel 1 de razonamiento de Van Hiele. Además, observamos que existen 3 parejas cuya justificación se parece a la respuesta esperada, empleando una propiedad previa (propiedad de cuerdas).

5.7 Conclusiones del capítulo

Según lo trabajado, con respecto al aspecto de:

- **La estructura del enunciado,** las actividades permitieron fomentar que los estudiantes enuncien la propiedad geométrica trabajada en cada actividad, así como también en algunos casos redefinan y/o amplíen una afirmación, ya sea empleando casos generales u otros argumentos que permitan tal redefinición.

- **El tipo de justificación usada,** las actividades permitieron fomentar las justificaciones, cuyos argumentos contenían las propiedades tratadas en un primer momento. Sobre el contenido de los argumentos, la mayoría de los estudiantes solían expresar en forma escrita lo que visualizan en la pantalla, es decir, sus justificaciones lo realizan mediante la observación de las figuras geométricas ocurridas con el software empleado.

- **El lenguaje,** los estudiantes expresan sus justificaciones empleando un lenguaje verbal con un estilo informal, es decir, empleando expresiones como “chocan”, “muevo un punto”, etc. Sin embargo, con el transcurrir de las sesiones, el estilo de lenguaje verbal empleado fue evolucionando acorde con el nivel cognitivo adquirido en ese instante, como por ejemplo “pasan”, “cruzan”, “no-colineales”.

CAPÍTULO 6

Contraste entre las respuestas esperadas con las obtenidas y los logros por pareja de estudiantes

A continuación, analizaremos los resultados tanto de la actividad inicial como de las actividades centrales, haciendo el contraste entre las mismas, y de la misma forma se muestra los logros obtenidos por alumno, basándonos en las respuestas manifestadas por los estudiantes en las hojas durante las actividades implementadas.

6.1 Contraste entre la actividad inicial y las actividades centrales

A continuación compararemos los resultados de la actividad Inicial ***"Recordemos: encontrando distancias iguales"*** con los resultados de las actividades centrales implementadas:

Predicciones	Resultados de las actividades	Explicación
<u>En relación a la actividad inicial</u> Después de construir la mediatriz y de ubicar un punto sobre ella (preguntas 3 y 4), la **pregunta 5** fue planteada de la siguiente manera: "*Ubique otros puntos sobre la misma recta y realizar el paso anterior. ¿Qué podemos afirmar con respecto a los pasos 3 y 4?"*. En dicha pregunta, se esperaba que el estudiante enuncie la propiedad descubierta de la siguiente forma: *"Las distancias entre un punto cualquiera de la mediatriz de un segmento con los extremos de dicho segmento son iguales"*, o que generalicen: "cada vez que ubique un punto sobre la mediatriz, las distancias hacia los extremos de un segmento son iguales". Con esta pregunta se pretende que el estudiante enuncie la propiedad geométrica de la mediatriz partir de lo trabajado con el software.	**<u>En relación a la actividad inicial</u>** Con respecto a la <u>pregunta 5</u>, el 75% de los estudiantes lograron construir la conjetura pedida, ya sea mediante una generalización o como una proposición, por lo que se ubicarían en el nivel 2 de Van Hiele; mientras que el 25% no consigue formular la conjetura, por lo que se ubicarían en el nivel 1 de Van Hiele.	**<u>En relación a la actividad inicial</u>** Observamos que la mayoría del salón consigue formular la conjetura solicitada o que al menos intentan construirla. Creemos que esto podría deberse al orden de los requerimientos propuestos en esta actividad.

Después de ubicar un punto fuera de la mediatriz (pregunta 6 y 7), la **pregunta 8** fue planteada de la siguiente manera: *¿Dónde ubicarías dicho punto para que equidiste de los puntos A y B? ¿Qué podemos afirmar de los pasos anteriores? S*e esperaba que los estudiantes ubiquen dicho punto en la mediatriz, así como también enuncien la propiedad como la que sigue: *"Todo punto de la mediatriz de un segmento dado equidista de los extremos de este segmento"*.	Con respecto a esta pregunta, el 75% logra enunciar la propiedad de la mediatriz mediante la forma recíproca, perteneciendo así al nivel 2 de Van Hiele, mientras que un 25% de estudiantes no logran determinar la propiedad, por lo que se ubicaría en el nivel 1 de Van Hiele.	Observamos que existe un 25% de estudiantes que emplean otros argumentos y no logran enunciar la propiedad geométrica. Esto podría deberse a que los estudiantes se enfrentan por primera vez a este tipo de actividades.

Predicciones	Resultados de las actividades	Explicación
<u>En relación a la actividad 1</u> Después de construir la circunferencia, de trazar una cuerda con su respectiva mediatriz (pregunta 1, 2 y 3), el ítem 4 fue planteada de la siguiente manera: "*¿Qué se puede afirmar con la recta trazada?*". Se esperaba que formulen la conjetura de la siguiente manera: "Dado una circunferencia y una cuerda, la mediatriz de dicha cuerda pasa por el centro de la circunferencia". Posteriormente, después de trazar un par de cuerdas (pregunta 5) se planteó una pregunta para que realizaran una justificación respectiva: "*¿Puede explicar por qué es verdadero? (tratar de explicarla en términos de otros resultados geométricos. Pista: Usar la definición de mediatriz)*". Se esperaba que en su justificación, empleen la propiedad de la mediatriz trabajada en la parte inicial en su forma recíproca.	**<u>En relación a la actividad 1</u>** Observamos que solo el 25% del salón enuncian la propiedad geométrica solicitada, encontrándose en un nivel 2 de Van Hiele; el 25% emplean otros argumentos (la recta pasa por la mitad de un segmento) teniendo indicios de pertenecer al nivel 2 de Van Hiele; a su vez, existe un 25% que no escriben dicha conjetura, lo cual no es posible asignar un nivel respectivo. En cuanto a la justificación de la misma, el 25% de los estudiantes emplean una propiedad previa encontrándose en un nivel 3 de Van Hiele, mientras que el 50% realizan argumentos incorrectos en su justificación, encontrándose en el nivel 1 de Van Hiele.	**<u>En relación a la actividad 1</u>** Observamos que existe un buen porcentaje de estudiantes que no lograron enunciar la propiedad geométrica solicitada. Esto podría deberse al diseño mismo de las actividades, ya que para poder enunciar la propiedad se debió trazar más segmentos en la circunferencia para así poder afirmar que toda mediatriz de las cuerdas trazadas pasan por el centro de la circunferencia.

Predicciones	Resultados de las actividades	Explicación
<u>En relación a la actividad 2</u> Después de trazar un segmento, su mediatriz y de construir varias circunferencias que pasen por los extremos del segmento trazado, se planteó la siguiente pregunta: *"¿Puedes explicar a qué se debe este hecho? Trata de explicar mediante resultados geométricos ya demostrados"*. Se esperaba que el estudiante justifique su respuesta usando una propiedad previa **(la propiedad de cuerdas)** ya que esta propiedad previa fue desarrollada con el fin de que el estudiante lo utilice al justificar su respuesta. Además, se esperaba que determine que existen muchas circunferencias que pasen por los puntos A y B.	**<u>En relación a la actividad 2</u>** El 25% de los estudiantes lograron justificar la existencia de la circunferencia empleando un resultado previo, lo cual se encontrarían en el nivel 3 de Van Hiele. Un 25% sólo manifiestan que existen muchas circunferencias, por lo que serían ubicados en el nivel 2 de Van Hiele, mientras que un 25% realizan argumentos no muy entendibles, por lo que se ubicarían en el nivel 1 de Van Hiele. Además, el 25% no logran justificar la conjetura solicitada (hoja en blanco), por lo que no es posible asignar un nivel.	**<u>En relación a la actividad 2</u>** Observamos que existe un buen porcentaje de estudiantes que no lograron determinar la existencia de la circunferencia ni mucho menos realizaron alguna justificación. Quizás se deba porque la actividad N°1 no fue muy bien trabajada y eso perjudicó que los estudiantes no hayan empleado esta propiedad en su justificación.

Predicciones	Resultados de las actividades	Explicación
<u>En relación a la actividad 3</u> Después de abrir el archivo "circunferencia" y que ubicar un par de cuerdas sobre ella, se planteó la siguiente pregunta: "*Con tales cuerdas, ¿Es posible ubicar el centro de la circunferencia? Justificar sus pasos"*. Se esperaba que en la justificación pedida, usen la propiedad de cuerdas y/o la propiedad de la mediatriz antes estudiada, ya que dichas propiedades fueron planteadas para que el estudiante las utilice en la justificación de esta actividad. Además, ambas propiedades toman en cuenta que la mediatriz de toda cuerda pasa por el centro de la circunferencia. Por lo tanto, la intersección de ambas mediatrices sería el centro de la circunferencia misma.	**<u>En relación a la actividad 3</u>** El 75% justifican sus respuestas empleando propiedades anteriormente trabajadas (la propiedad de cuerdas y de mediatriz) encontrándose en el nivel 3 de Van Hiele, el 25% emplean argumentos no muy claros en su justificación, por lo que se ubicarían en el nivel 1 de Van Hiele.	**<u>En relación a la actividad 3</u>** Este aumento del nivel 3 en comparación con las actividades anteriores confirma nuestra teoría: que el nivel de pensamiento es progresivo y continuo.

Predicciones	Resultados de las actividades	Explicación
<u>En relación a la actividad 4</u> Para esta actividad, se inició con una afirmación como sigue: *"Rodrigo establece la siguiente afirmación '**Existe un única circunferencia que pasa por tres puntos'*** *¿Estás de acuerdo con la afirmación de Rodrigo? ¿Cómo la justificarías? Explique".* Se esperaba que el estudiante ubique el centro de la circunferencia mediante el trazo de dos cuerdas y trazando sus mediatrices, determinar que existe una única circunferencia que pasa por estos tres puntos. Posteriormente, se planteó una pregunta para que ampliaran dicha afirmación: *"¿La afirmación dada por Rodrigo es válida si los tres puntos son colineales? Si no, ¿Cómo cambiarías esta conjetura? Explique".* Con respecto a dicha pregunta, se esperaba que los estudiantes manifiesten que tales puntos deben de ser no-colineales. Para ello, los estudiantes deben de justificar sus respuestas utilizando las actividades vistas anteriormente, ya que estas fueron diseñadas para que sirvan como medio de sustentación al justificar una nueva propiedad.	**<u>En relación a la actividad 4</u>** El 75% emplean las propiedades anteriormente trabajadas para justificar y redefinir que existen una circunferencia que pasan por tres puntos no colineales, encontrándose en un nivel 3 de Van Hiele, mientras que el 25% no logran justificar su respuesta ya que no escriben nada en su ficha de trabajo.	**<u>En relación a la actividad 4</u>** Este aumento del nivel 3 en comparación con las actividades anteriores confirma nuestra teoría: que el nivel de pensamiento es progresivo y continuo.

6.2 Reporte de logros por pareja de estudiantes

A continuación, compararemos los porcentajes obtenidos por cada alumno con respecto a la actividad inicial y central.

Tabla 6.1 Resultados inicial y final por pareja de estudiantes

Pareja de estudiantes	Resultado Inicial		Resultado final			Comentario
	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	
A	22.5 AB	0 AN	100 AC	42.5 AI	12.5 AN	Con respecto a los niveles 1 y 2, se aprecia que hubo un incremento notorio en las ponderaciones definidas, teniendo al final algunos indicios de pertenecer a nivel 3 del modelo Van Hiele.
	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	
B	62.5 AA	25 AB	100.0 AA	81.25 AA	32.5 AB	Con respecto a los niveles 1 y 2, se aprecia que hubo un incremento notorio en las ponderaciones definidas, teniendo al final algunos indicios de pertenecer a nivel 3 del modelo Van Hiele.

C	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVEL 3**	Con respecto a los nivel 2, se aprecia que hubo un incremento notorio en las ponderaciones, teniendo indicios de pertenecer al nivel 3 de Van Hiele.
	100 AC	25 AB	100 AC	68.75 AA	18.75 AB	
D	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVEL 1**	**NIVEL 2**	**NIVEL 3**	Con respecto a los niveles 1 y 2, se aprecia que hubo un incremento notorio en las ponderaciones definidas. No posee ponderación en el tercer nivel. Esto se debe al lenguaje empleado, ya que es de tipo informal.
	22.5 AB	0 AN	81.25 AA	16.25 AB	0 AN	

6.3 Conclusiones del capítulo

Hemos observado que existen estudiantes que no consiguieron enunciar las propiedades geométricas planteadas en la actividad N°1. Creemos que esto podría deberse al diseño de las actividades ya que habían preguntas que debieron estar en un orden adecuado (como por ejemplo, en la actividad N°1 se debió contemplar primero preguntas donde se trazaran 3 o 4 cuerdas para que a partir de ello, los estudiantes puedan construir una conjetura) sumándose a ello el hecho de que los estudiantes anteriormente no habían trabajado con situaciones de este tipo (justificar, argumentar sus respuestas, etc.).

Posteriormente, se observó que durante la aplicación de las actividades N°3 y N°4 los comportamientos observados coincidían con lo esperado. Creemos que esto podría deberse al diseño de las actividades mismas ya que fueron propuestas con la finalidad de que los estudiantes puedan justificar sus respuestas con actividades ya trabajadas inicialmente, además de que el estudiante ya tenía experiencia para afrontar este tipo de actividades.

Con respecto al análisis de los logros por pareja, observamos que existe un progreso de los niveles cognitivos de los estudiantes y que se pueden verificar con las ponderaciones antes definidas. A su vez, podemos constatar la validez de dichas ponderaciones, ya que como se pudo apreciar en la tabla N° 6.1, existe un aumento de las ponderaciones con respecto a los niveles 1, 2 y 3 al ser comparados tanto en los resultados iniciales como finales, y que en cada resultado se pudo apreciar el descenso de las ponderaciones, es decir $N_1>N_2>N_3$.

CAPÍTULO 7

Consideraciones finales

En este capítulo presentamos las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos planteados en el capítulo 1, además de algunos alcances y/o sugerencias para las posteriores investigaciones relacionadas con los niveles de razonamiento en el caso de la circunferencia.

7.1 Conclusiones

Con relación al objetivo general de la tesis:

"Determinar los niveles de razonamiento alcanzados por estudiantes de 2° de secundaria cuando abordan situaciones que involucran elementos de la circunferencia, usando como mediador el software Geogebra".

A partir de la metodología empleada y del diseño de las actividades, podemos afirmar que se ha cumplido este objetivo, como una consecuencia del cumplimiento de los objetivos específicos que detallaremos a continuación:

7.1.1 Con respecto al primer objetivo específico

"Identificar el nivel de razonamiento que podrían alcanzar los estudiantes en relación con los elementos asociados a la circunferencia".

Las actividades se basaron en un diseño que contempló distintas respuestas a las cuales se les asignó niveles, teniendo en cuenta la metodología empleada y los criterios anteriormente definidos. Como resultado de este estudio, llegamos a las siguientes conclusiones:

1. El desarrollo de las actividades, siguiendo el esquema propuesto, permitió fomentar la redefinición o ampliación de algunas afirmaciones formuladas en algunas actividades, las que a su vez sirvieron para enunciar las propiedades

geométricas relacionadas con la circunferencia, sirviendo como argumentos básicos para justificar sus respuestas a actividades posteriores.

2. La propuesta didáctica diseñada permitió que los estudiantes logren un grado de adquisición alto del nivel 1, un grado de adquisición intermedio del nivel 2 y se encuentren teniendo indicios de pertenecer al nivel 3 de adquisición todos respecto a la comprensión de la circunferencia. Son indicios de ello el tipo de lenguaje empleado y el tipo de justificación presentada por los estudiantes.
   a. El lenguaje verbal empleado por los estudiantes fue, en primer momento, de tipo informal, empleando estilos o expresiones que nos permitieron ubicar el nivel 1 de razonamiento de Van Hiele. Posteriormente, luego de implementar las actividades, encontramos que el estilo del lenguaje verbal empleado fue evolucionando, lo que permitió ubicar a los estudiantes en un nivel superior de razonamiento con respecto al objeto geométrico circunferencia.
   b. Las justificaciones empleadas por los estudiantes al explicar su solución fueron variadas; algunas se basaron en la visualización del objeto geométrico sobre la pantalla y otras en el empleo de una propiedad tratada previamente.

7.1.2 Con respecto al segundo objetivo específico

"Identificar el papel que tuvo el software Geogebra durante el proceso de instrucción".

La identificación de los niveles cognitivos iniciales y posteriores a las actividades presentadas permitió verificar el papel relevante que tuvo el software Geogebra en el proceso de aplicación de las propiedades. Como resultado de este estudio llegamos a las siguientes conclusiones:

3. El uso del software permitió que los estudiantes determinen y enuncien las propiedades geométricas, así como su redefinición o la ampliación de algunas afirmaciones. Cabe señalar que el software sólo permitió realizar este tipo de producciones, mas no permitió fomentar las justificaciones. Esto significa que la explicación de una propiedad o la justificación de un teorema relacionados con

los elementos de la circunferencia requería del uso de propiedades trabajadas anteriormente, relacionarlas y crear nuevas propiedades que servirían como sustento o justificación para otras actividades posteriores.

4. El uso del software Geogebra permitió facilitar la manipulación de las distintas representaciones de los elementos de la circunferencia para su posterior explicación.

   Es decir, el arrastre que posee el software permitió que los estudiantes pudieran relacionar dichas representaciones y que, a partir de ello, se puedan construir conjeturas y argumentaciones para después ser explicados y justificados por los estudiantes sobre el porqué sucedían dichas propiedades, basándose en casos previamente desarrollados.

7.1.3 Con respecto al tercer objetivo específico

"Valorar la propuesta teniendo en cuenta los indicadores del nivel de razonamiento alcanzado, tomando en cuenta el modelo Van Hiele"

Para la valoración de la propuesta, se tuvo en cuenta la validación interna de la metodología empleada. Así, se tiene que:

5. La construcción de los descriptores permitió identificar los niveles cognitivos iniciales y posteriores de los estudiantes a las actividades presentadas, en relación a enunciar propiedades y justificar sus respuestas. Estos descriptores permitieron definir criterios como el tipo de justificación usada, el lenguaje empleado y la determinación de las propiedades de la circunferencia, los que a su vez sirvieron para organizar las respuestas de los estudiantes y asignarles niveles según el modelo Van Hiele.

6. Se produjo un aumento de los grados de adquisición de comprensión de la circunferencia entre los resultados iniciales y finales de los estudiantes, es decir, se identificaron mejoras entre dichos resultados. A su vez, se observa un

descenso de las ponderaciones entre los niveles evaluados ($N_1>N_2>N_3$), lo cual valida aún más nuestro trabajo realizado.

Los resultados anteriores permiten validar la metodología empleada en el trabajo, así como los resultados obtenidos.

De todo lo anterior, teniendo como indicios favorables:

- La evolución del lenguaje verbal empleado por los estudiantes a lo largo de la implementación de las actividades.
- Que los estudiantes hayan justificado sus respuestas empleando propiedades anteriormente trabajadas.
- Que la propuesta haya sido validada internamente.

Nos permite valorar positivamente la propuesta, cumpliéndose así con nuestro objetivo general.

7.2 Sugerencias para futuros trabajos

Como bien mencionamos en un primer momento, la propuesta diseñada no contemplaba una sesión inicial que permitiera conocer los comandos que ofrece el software Geogebra. A raíz de esta experiencia, sugerimos que se diseñe una sesión inicial donde se expliquen los beneficios que tiene el programa y sobre las herramientas que posee, ya que permitirá que el estudiante que se familiarice con las funciones de las herramientas que ofrece el programa.

De la misma manera, como nuestros resultados anteriormente mostrados son favorables para nuestro objetivo, podemos considerar que las actividades propuestas nos dan pautas para fomentar las justificaciones y formulación de conjeturas, teniendo como mediador al software Geogebra. Sugerimos que estas actividades sean aplicadas a un nuevo grupo de estudiantes ya que permitirá que se fomente el desarrollo de construcciones de conjeturas y justificaciones de propiedades geométricas.

Mencionamos en un primer momento que las actividades iniciales permitían que los estudiantes desarrollen su comprensión de la circunferencia hasta el nivel 2 de Van Hiele. En tal sentido, sugerimos que se diseñen preguntas que fomenten la comprensión del objeto geométrico circunferencia hacia un nivel 3 para comparar los resultados iniciales y finales y verificar la evolución respectiva.

Esperamos que este trabajo pueda incentivar a futuras investigaciones para abordar temas relacionados con las justificaciones de las matemáticas que tengan por estudio a objetos geométricos previos al nuestro con la finalidad de que se pueda abordar otras propiedades de la circunferencia no tratadas en nuestra investigación, como por ejemplo los temas relacionados con el triángulo y la congruencia de triángulos ya que como vimos, para explicar una propiedad relacionada con la circunferencia, se requieren que se trabajen conceptos previos de congruencia de triángulos y sus aplicaciones. Sugerimos, en cuanto a las actividades relacionadas con estos últimos temas, que se diseñen preguntas y que se contemplen en tres fases, donde en la primera fase el estudiante conozca las distintas herramientas del programa y las funciones que ofrecen; en la segunda fase, se fomenten las construcciones de conjeturas relacionadas con las propiedades del objeto geométrico a tratar, con algunas preguntas donde se le solicite al estudiante que explique su respuesta sobre lo sucedido. Aquí se recomienda el uso del programa puesto que permitirá una mayor visualización de los objetos geométricos, realizando la ampliación y redefinición de conjeturas; y una tercera fase donde se diseñen preguntas que se fomenten las justificaciones de tales propiedades, recurriendo a una propiedad previa y que a su vez sirvan como argumentos para posteriores explicaciones. Cabe señalar que en esta última fase se sugiere que el uso del programa se deje de lado ya que se requiere se limita sólo a explicar sus respuestas o justificar un teorema geométrico.

Es así que nuestro trabajo pretende contribuir con el desarrollo del pensamiento geométrico a partir de actividades diseñadas en un primer momento usando el software Geogebra y que este último sirva como mediador para el fomento de conjeturas, redefinición o ampliación de las mismas y que dicha formulación genere inquietudes en el estudiante y sobre todo que explique el por qué sucede tal propiedad o teorema en cuestión. De esta manera, la parte explicativa de las propiedades sería un buen inicio para que se desarrolle el pensamiento matemático del estudiante.

REFERENCIAS

- Abrate, R., Delgado, G., & Pochulu, M. (2006). *Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática*. Recuperado de http://www.rieoei.org/index.php

- Acosta, M. E., Mejía, C. & Rodríguez, C. W. (2012). Cabri como herramienta fundamental en la solución de problemas geométricos. En Ugarte Guerra, F. y Azabache Caracciolo, H. Z. (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri*. 212-222. Lima: Hozlo.

- Carmona, J. (2011). *La Circunferencia. Una propuesta Didáctica usando Modelo Van Hiele y Geometría Dinámica.* Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/

- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J. B., Peñas, A. & Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza de secundaria basada en el modelo de razonamiento de van hiele***.** Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/

- De la Cruz Solórzano, M. (2011). *Talemtum*. Lima: Bruño.

- Del Castillo Escobedo, A. & Montiel Espinoza, G. (2009). *¿Artefacto o Instrumento? Esa es la pregunta.* Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/

- Dick, B. (2003). Como conducir e relatar a pesquisa–ação. En: *Pesquisa – ação princípios e métodos*. Roberto Jarry Richardson (org). João Pessoa: Universitária UFPB.

- Franco, M. A. S. (2005). Pedagogia da Pesquisa-Ação. Universidade Católica de Santos. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31(3). 483-502. Recuperado de http://www.scielo.br/

- Gutiérrez, A. (2007). *Geometría, demostración y ordenadores*. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/

- Gutiérrez, W. (2009). *Niveles de pensamiento alcanzados en Situaciones Didácticas Relativas al concepto de Semejanza de Triángulos haciendo uso de la Geometría Dinámica.* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

- Ibañes, M. & Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números*, (57), 19-32. Recuperado de http://www.sinewton.org/web/

- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías. La evaluación del nivel de razonamiento.* (Tesis de doctorado). Universidad de Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/

- Marín, R. D., Santisteban, J. S., Vergaray, A., Espinoza, N. Y. & Onsihuay, E. (2012). *Matemática 2*. Lima: Editorial Norma.

- Ministerio de Educación (2006). *Orientaciones para el Trabajo Pedagógico.* Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

- Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular Nacional de la educación básica.* Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

- Parra, M. M., Zapata, M. M., Toro, J. A. & Durango, J. H. (2010). Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 29, 1-16. Recuperado de http://www.redalyc.org/home.oa

- Segal,S. (2009). *Action research in Mathematics Education: a study of a master's program for teachers.* Tesis doctoral, Montana State University, Bozeman, Montana, Estados Unidos.

- Tripp, D. (2005). *Pesquisa- ação: uma introdução metodológica.* Educação e Pesquisa, São Paulo, 31, 3, 443-466.

- Verástegui, T. (2003). *Geometría Básica*. Lima: MOSHERA.

ANEXO 1

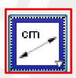
ACTIVIDAD INICIAL

RECORDEMOS: "Encontrando distancias iguales"

Instrucciones

1) Trace el segmento AB.
2) Con la herramienta **Mediatriz de un segmento**  **,** trace la mediatriz del segmento AB**.**
3) Mueve los puntos A y B sobre la pantalla ¿Qué sucede con la mediatriz?

   Socialización de ideas: *¿Qué es una mediatriz?*

4) Trace los segmentos DA y DB y medirlos con la herramienta **DISTANCIA O LONGITUD**  **¿Cómo son ambas medidas?**
5) Ubique otros puntos sobre la misma mediatriz y realizar el paso anterior.

   Socialización de ideas: ¿Qué podemos afirmar con respecto al paso 4? compare sus observaciones con tu compañero.

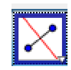
6) Ubique un punto exterior a la mediatriz y forme segmentos con los puntos A y B. Compare las medidas de estos segmentos.
7) ¿Dónde ubicarías dicho punto para que equidiste de los puntos A y B?
8) **Socialización de ideas:** ¿Qué podemos afirmar de los pasos 6 y 7? Compare sus observaciones con las de su compañero.

ANEXO 2

ACTIVIDADES PLANTEADAS EN CLASE

ACTIVIDAD N°1: "Propiedad de Cuerdas"

Instrucciones

1) Ubique el punto A sobre la pantalla y trace la circunferencia de centro A.
2) Trace la cuerda.
3) Trace la mediatriz de dicha cuerda con la herramienta **Mediatriz**  **(Ubícalo en el 4° casillero de izquierda a derecha)**.
4) **Socialicemos nuestras ideas:** ¿Qué se puede afirmar con la recta trazada? Comparte tus observaciones con tu compañero de carpeta.

5) Trace un par de cuerdas adicionales y repita los pasos nuevamente. ¿Esto confirma la parte 4?

6) ¿Puede explicar a qué se debe esto? (tratar de explicarla en términos de otros resultados geométricos).

ANEXO 3

ACTIVIDAD N°2

"¿ÚNICA CIRCUNFERENCIA?"

Instrucciones

1) Forma un segmento AB.
2) ¿Cómo construyes una circunferencia que pase por los puntos A y B?
3) Trace la mediatriz de dicho segmento y, ayudándote de la mediatriz, trace las circunferencias que pasen por los puntos A y B.
4) ¿Puedes explicar a qué se debe este hecho? Trata de explicar mediante resultados geométricos ya demostrados. (Pista: **Usar las propiedades anteriormente trabajadas**)

____

____

____

____

ANEXO 4

ACTIVIDAD N°3

“CENTRÁNDONOS EN EL CENTRO”

Instrucciones

1) Abrir el archivo **CIRCUNFERENCIA** y trazar dos cuerdas cualesquiera (de preferencia que no sean diámetros).
2) Con tales cuerdas, ¿Es posible ubicar el centro de la circunferencia? Justificar sus pasos.

   Explique:

   ____

   ____

   ____

   ____

ANEXO 5

ACTIVIDAD N°4

"CIRCUNFERENCIA ÚNICA 2"

Instrucciones

Rodrigo establece la siguiente afirmación "***Existe un única circunferencia que pasa por tres puntos"***

1) ¿Estás de acuerdo con la afirmación propuesta por Rodrigo? ¿Cómo la justificarías?
   Explique:
   ____
   ____
   ____
   ____

2) ¿La afirmación propuesta por Rodrigo es válida si los tres puntos son colineales? Si no, ¿Cómo cambiarías dicha afirmación?
   Explique:
   ____
   ____
   ____

3) ¿Podrías plantear alguna(s) otras(s) conclusiones (así como Rodrigo) a partir de lo obtenido en esta actividad? ¿Cuál(es)? y **¿Cómo la(s) justificarías?**

ANEXO 6

RESPUESTAS DE LA PAREJA DE ESTUDIANTE PARA DETERMINAR EL NIVEL DE RAZONAMIENTO CORRESPONDIENTE DESPUÉS DE LA ACTIVIDAD INICIAL.

	PAREJA DE ESTUDIANTES			
Pregunta	**A**	**B**	**C**	**D**
	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo
5	1/3	1/3	2/3	1/3
8	1/2	2/4	2/3	1/2

ANEXO 7

GRADOS DE ADQUISICIÓN DESPUÉS DE LA ACTIVIDAD INICIAL

	PAREJA DE ESTUDIANTES											
Pregunta	A			B			C			D		
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
5	25	0	-	25	0	-	100	25	-	25	0	-
8	20	0	-	100	50	-	100	25	-	20	0	-
Gr(n)	22.5 AB	0 AN	-	62.5 AA	25 AB	-	100 AC	25 AB	-	22.5 AB	0 AN	-

ANEXO 8

RESPUESTAS DE LA PAREJA DE ESTUDIANTES PARA DETERMINAR EL NIVEL DE RAZONAMIENTO QUE LES CORRESPONDE DESPUÉS DE LAS ACTIVIDADES CENTRALES

	PAREJA DE ESTUDIANTES			
Actividades	**A**	**B**	**C**	**D**
	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo	Nivel/tipo
1	2/3	3/3	2/3	2/2
2	2/2	3/3	2/4	2/2
3	2/3	2/3	3/3	1/3
4	3/4	3/6	3/4	2/3

ANEXO 9

GRADOS DE ADQUISICIÓN DESPUÉS DE LAS ACTIVIDADES CENTRALES

Actividad	A			B			C			D		
	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
1	100	25	0	100	100	25	100	25	0	100	20	0
2	100	20	0	100	100	25	100	50	0	100	20	0
3	100	25	0	100	25	0	100	100	25	25	0	0
4	100	100	50	100	100	80	100	100	50	100	25	0
Gr(n)	100 AC	42.5 AI	12.5 AN	100.0 AA	81.25 AA	32.5 AB	100 AC	68.75 AA	18.75 AB	81.25 AA	16.25 AB	0 AN