TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO CIRCUNFERENCIA DESDE LA DIALÉCTICA HERRAMIENTA-OBJETO CON EL APOYO DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN ESTUDIANTES DE QUINTO DE SECUNDARIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Presentado por:

ROGER DÍAZ VILLEGAS

Asesor de tesis:

MG. ELIZABETH MILAGRO ADVÍNCULA CLEMENTE

Miembros del jurado:

DRA. JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR
MG. ESTELA VALLEJO VARGAS

Lima – Perú

2014

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Adelaida Villegas y Juan Díaz.

Mis queridos padres

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

AGRADECIMIENTOS

A mi asesora, Elizabeth Avícula Clemente, por su valioso tiempo, paciencia y sus sugerencias acertadas durante el desarrollo de este trabajo. Muchas gracias profesora, con su apoyo ha sido posible culminar este trabajo.

A la Dra. Jesús Flores Salazar, porque en el momento propicio me supo orientar para culminar el presente trabajo de investigación.

A la profesora Estela Vallejo, por sus sugerencias oportunas.

A la profesora Cecilia Gaita, por sus explicaciones pertinentes en el desarrollo de esta investigación.

A los profesores Mariano Gonzales y Miguel Gonzaga de la PUCP, por sus valiosas observaciones para la presentación rigurosa del objeto matemático de nuestro estudio.

A mis estimadas amigas y colegas: Magna Fernández C. y Candy Ordoñez M. Por sus sugerencias y apoyo incansable durante los encuentros para la ejecución de las actividades de esta investigación. Les agradezco mucho, porque sin su disponibilidad y su valioso tiempo no hubiera logrado implementar la secuencia de actividades de esta investigación. Del mismo modo, agradezco a los alumnos del colegio Telesforo Catacora que participaron en este estudio.

A mi familia, por el apoyo constante e incansable. Gracias familia, porque en los momentos difíciles supieron comprender mi ausencia y apostaron por mí para lograr lo que más me gusta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo analizar, a través de una secuencia de actividades que siguen las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediada por el software GeoGebra, la construcción del concepto de circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en alumnos de quinto de secundaria. Para este estudio, empleamos como marco teórico la teoría de la Dialéctica Herramienta-Objeto presentada por Douady, que nos propone un enfoque cognitivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje sobre la actividad matemática. El principio básico de este marco, para construir una noción matemática, consiste en hacer uso o movilizar conocimientos antiguos como herramientas para desarrollar nuevos conocimientos que se denominan objetos matemáticos, los cuales, una vez desarrollados, se utilizan como herramientas en nuevas situaciones de aprendizaje. Bajo este principio, en este estudio, conseguimos verificar que los alumnos del quinto de secundaria lograron construir el concepto de circunferencia a través de una secuencia de actividades. Este proceso de construcción del objeto circunferencia permitió a los alumnos mejorar y organizar su estructura cognitiva sobre este concepto, lo que favoreció su aprendizaje. Asimismo, el GeoGebra como instrumento mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje fue muy importante porque, usando algunas herramientas de este software, los alumnos lograron consolidar la definición de la circunferencia como lugar geométrico a través de la percepción dinámica de los infinitos puntos que constituyen una circunferencia, y de sus representaciones gráfica y algebraica. Además, permitió a los alumnos, a través de la secuencia de actividades, desarrollar autonomía para expresar y verificar sus conjeturas sobre las concepciones que tenían del objeto circunferencia.

Palabras clave: Circunferencia, Dialéctica Herramienta-Objeto, GeoGebra

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Interfaz de la ventana del GeoGebra.. 24

Figura 2. Múltiples opciones del objeto circunferencia 24

Figura 3. Representación algebraica (izquierda) y gráfica (derecha) de la circunferencia 25

Figura 4. Elementos de la circunferencia 42

Figura 5. Representación gráfica de la Circunferencia con centro sobre el eje Y......... 43

Figura 6. Representación gráfica de la circunferencia con centro sobre el eje X 44

Figura 7. Representación gráfica de la circunferencia con centro en el origen de las coordenadas 44

Figura 8. Representación gráfica de la circunferencia con centro fuera del origen 45

Figura 9. Presentación del objeto circunferencia con centro fuera del origen 54

Figura 10: Presentación del objeto circunferencia en el contexto de la geometría analítica.. 56

Figura 11. Actividades sobre el objeto circunferencia 58

Figura 12. Problemas 3 de *Problemas Modelo* 60

Figura 13. Problema 1 de la *Práctica Dirigida* 60

Figura 14. Problemas propuestos sobre el objeto circunferencia................................. 61

Figura 15. Actividades presentadas en sus diversas representaciones 62

Figura 16. Actividades de la práctica dirigida... 62

Figura 17. Ejercicio parcialmente resuelto por el autor 63

Figura 18. Representación gráfica de una circunferencia de centro (1,3) y radio 5 unidades. 64

Figura 19. Recursos TIC utilizados en el texto del MINEDU 64

Figura 20. Respuesta de la dupla D1, actividad 1 77

Figura 21. Respuestas presentada por las duplas D3 y D2 respectivamente................. 77

Figura 22. Respuesta presentada por la dupla D1 78

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Figura 23. Respuesta presentada por la dupla D2 79

Figura 24. Actividad 2, situación 1 80

Figura 25. Pregunta 1, parte a) 81

Figura 26. Posible respuesta de la pregunta 1, parte a) 82

Figura 27. Respuesta de la dupla D1 82

Figura 28. Respuesta de la dupla D3 83

Figura 29. Ítem b) de la pregunta 1 84

Figura 30. Posible repuesta del ítem b) 84

Figura 31. Posible respuesta del ítem c) 84

Figura 32. Respuesta de la dupla D1 85

Figura 33. Ítem d), pregunta 1 86

Figura 34. Respuestas de las duplas D1, D2 y D3 87

Figura 35. Momento en que un alumno explica las posibles ubicaciones de la comisaría 88

Figura 36. Respuesta de la dupla D3, ítem d) 89

Figura 37. Pregunta 2 de la actividad 1 90

Figura 38. Ítem a) de la pregunta 1 90

Figura 39. Posible respuesta del ítem a), pregunta 1 91

Figura 40. Respuesta de la dupla D1, ítem a) 92

Figura 41. Respuesta de la dupla D2, ítem a) 93

Figura 42. Respuesta de la dupla D3, ítem a) 94

Figura 43. Ítem b) de la pregunta 2 94

Figura 44. Respuesta de la dupla D1, ítem b) 95

Figura 45. Respuesta presentada por las duplas D2 y D3, ítem b) 96

Figura 46. Ítem c) de la pregunta 2 97

Figura 47. Respuesta de la dupla D3, ítem c) 99

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Figura 48. Ítem d) de la pregunta 2 99

Figura 49. Circunferencia de centro (3.5,2.5) y radio 1.58.. 99

Figura 50. Respuesta de las duplas D1 y D2, ítem d).. 100

Figura 51. Ítem e) de la pregunta 2.. 101

Figura 52. Posible respuesta del ítem e) de la pregunta 2 101

Figura 53. Respuesta de la dupla D1 al ítem e) de la pregunta 2 102

Figura 54. Respuesta de dupla D2 al ítem e)... 102

Figura 55. Actividad 3, fase de explicitación 103

Figura 56. Circunferencia de centro (-2,2) y radio 4 unidades.................................. 103

Figura 57. Respuesta de las tres duplas a la pregunta 1, actividad 3.......................... 105

Figura 58. Pregunta 2 de la actividad 2 106

Figura 59. Posible representación de la pregunta 2 107

Figura 60. Representación gráfica de una circunferencia con centro en el origen..... 107

Figura 61. Respuesta de la dupla D1 a la pregunta 2, actividad 3............................. 108

Figura 62. Actividad 4, fase de la familiarización... 110

Figura 63. Posible trazo de la pregunta 1, ítem a) 111

Figura 64. Respuesta de la dupla D2 al ítem a), pregunta 1 111

Figura 65. Respuesta de la dupla D3 al ítem b), pregunta 1...................................... 112

Figura 66. Circunferencia con centro en el origen de coordenadas 113

Figura 67. Respuestas de las duplas D1, D2 y D3 al ítem c), pregunta 1 113

Figura 68. Circunferencia con centro (5, -3) y radio 4 km 114

Figura 69. Respuesta de la dupla D2 al ítem a), pregunta 2...................................... 115

Figura 70. Circunferencia de centro (5, -3) y radio 4 km... 115

Figura 71. Respuesta de la dupla D3 al ítem b), pregunta 2...................................... 116

Figura 72. Respuesta de la dupla D2 al ítem c), pregunta 2...................................... 117

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. La circunferencia y sus representaciones 45

Tabla 2. **T**extos de Educación Básica Regular elegidos para su análisis 48

Tabla 3. Justificación de los criterios considerados para el análisis de los textos didácticos 50

Tabla 4. Distribución de las actividades del T2.. 60

Tabla 5. Notación de las duplas.. 69

Tabla 6. Distribución de las actividades según las fases de la DHO............................. 72

Tabla 7. Resultados de la actividad 1 76

Tabla 8. Posibles soluciones de los ítems b) y c) de la pregunta 1............................... 84

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

ÍNDICE

CONSIDERACIONES INICIALES **11**

CAPÍTULO 1 .... **13**

LA PROBLEMÁTICA **13**

1.1. Antecedentes de la investigación 13

1.2. Justificación de la investigación 19

1.3. El software GeoGebra 23

1.4. Pregunta y objetivos de la investigación 25

CAPÍTULO 2 .... **27**

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS **27**

2.1. Dialéctica Herramienta-Objeto 27

2.2. Aspectos metodológicos 33

2.2.1 Procedimiento de la investigación 34

CAPÍTULO 3 .... **36**

LA CIRCUNFERENCIA **36**

3.1. Aspectos históricos 37

3.2. La circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica 41

3.3. Aspectos didácticos 47

CAPÍTULO 4 .... **68**

EXPERIMENTO Y ANÁLISIS **68**

4.1 Descripción de los sujetos 68

4.2. Las actividades 70

4.2.1. Diseño y aplicación del taller de introducción al software GeoGebra 70

4.2.2. Diseño de la secuencia de actividades: actividades 1, 2, 3 y 4. 71

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

4.2.3. Resultados de la aplicación de la secuencia de actividades...................... 75

4.2.4. Conclusiones sobre los resultados del experimento 117

CONSIDERACIONES FINALES 122

CUESTIONES ABIERTAS.. 128

REFERENCIAS 129

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CONSIDERACIONES INICIALES

Esta tesis forma parte del proyecto "Procesos de Encino e Aprendizaje de Matemática en ambientes tecnológicos PEA-MAT/DIMAT", desarrollado entre la PUCP y la PUC-SP/Brasil.

Por otro lado, nuestro estudio se ha realizado en el marco de la Didáctica de la Matemática para analizar el proceso de construcción del objeto circunferencia. Es una investigación cualitativa desarrollada en el contexto de la Educación Básica Regular con la colaboración de alumnos (entre 15 y 17 años) del quinto año de secundaria. Tiene como objetivo analizar a través de una secuencia de actividades que sigue las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediadas por el software GeoGebra, la construcción del concepto de circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica. Para lograr dicho objetivo hemos considerado como marco referencial la Dialéctica Herramienta-Objeto presentado por Douady (1995), quien señala que para construir una noción matemática se deben seguir fases, así como tener en cuenta la doble función del objeto matemático. En tanto, en este trabajo con la finalidad de observar el proceso de construcción del objeto en cuestión, se han diseñado cuatro actividades. De las cuales, algunas se diseñaron para trabajar con lápiz y papel y otras con la ayuda del software GeoGebra, la que facilitó la construcción del objeto circunferencia.

Este trabajo se divide en cuatro capítulos:

En el capítulo 1, presentamos el análisis de algunas investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del objeto circunferencia en el contexto de la Educación Básica Regular. Asimismo, presentamos la justificación de nuestra investigación, así como la importancia del uso del software GeoGebra en el proceso de enseñanza, luego, describimos algunos aspectos necesarios y elementales para trabajar las actividades que requieren su uso. Finalmente, presentamos la pregunta y objetivos de nuestra investigación.

En el capítulo 2, presentamos algunos aspectos del soporte teórico de esta investigación y el procedimiento metodológico que se siguió para desarrollar este trabajo.

En el capítulo 3, estudiamos el objeto circunferencia. En primer lugar, describimos algunos aspectos referentes a la evolución histórica de nuestro objeto matemático en estudio. Luego presentamos la definición formal del concepto de circunferencia desde el

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

cuadro de la geometría analítica. Finalmente, presentamos el análisis del tratamiento de nuestro objeto en dos textos didácticos de uso frecuente en la educación secundaria de nuestro país.

En el capítulo 4, describimos a los sujetos de nuestra investigación, el diseño de los instrumentos (actividades) de este trabajo y el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de las actividades. Finalmente, presentamos las consideraciones finales de esta investigación y cuestiones abiertas para futuras investigaciones.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CAPÍTULO 1

LA PROBLEMÁTICA

En este primer capítulo, presentamos los antecedentes de nuestra investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del objeto circunferencia en la Educación Básica Regular. Asimismo, presentamos la justificación de nuestra investigación, algunos aspectos del software GeoGebra que consideramos como herramienta en la construcción de nuestro objeto de estudio, y, finalmente, la pregunta y los objetivos de investigación.

1.1. Antecedentes de la investigación

En este apartado, presentamos algunos resultados de investigaciones que muestran preocupación por nuestro objeto en estudio debido, en la mayoría de los casos, a las diversas dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de nuestro objeto. Dichas dificultades se refieren a la interpretación del objeto circunferencia, cuando esta es presentado en cualquiera de sus tres tipos de representación: desde su concepción como lugar geométrico, a través de una representación gráfica, representación algebraica, así como la relación que existe entre las tres representaciones. Asimismo, identificar dicho objeto en su representación textual (definido como un conjunto de puntos que cumple una determinada propiedad), y en su expresión algebraica, es otra dificultad que presentan los alumnos. Consideramos que esto se deba, a que los alumnos no tienen conocimiento que un mismo objeto puede ser representado en diversas representaciones.

En este sentido, Patricio (2010) señala que “los problemas geométricos planteados en la educación secundaria requieren para su solución una clara comprensión de los conceptos matemáticos involucrados” (p. 9). Ciertamente, hay muchos alumnos que al enfrentar un problema lo primero que preguntan es *¿cómo se hace?*, o esperan que solo les den una fórmula; también sucede, en muchos casos, que los alumnos esperan que el profesor resuelva el problema planteado. Esto nos hace pensar que el alumno desconoce los conocimientos o conceptos involucrados en dicho problema.

Por otro lado, Gutiérrez y Jaime (1996) señalan que la comprensión del concepto matemático es un problema muy complejo, pues depende del tipo de material usado, la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

metodología de enseñanza, la organización del conocimiento matemático y del tipo de actividades que se generan. Así también depende del rigor matemático con el que se trata el concepto matemático en juego. Sin embargo, en el Aprendizaje de la Matemática existen investigaciones que se dedican a analizar cómo es que se produce el proceso de aprendizaje de estos conceptos matemáticos. Por ello, nos interesa revisar los trabajos de Kerlegand (2008), Bedretchuk (2010) y Carmona (2011), ya que estas investigaciones convergen, en su estudio, en el objeto matemático de nuestro interés y en el uso del software (GeoGebra, CABRI y Regla y Compás) como herramienta mediadora en la construcción del objeto circunferencia. En nuestro trabajo consideramos pertinente el uso del software GeoGebra, debido a razones que explicaremos más adelante.

Kerlegand (2008) observó que en el curso de "Geometría analítica, especialmente durante el estudio de la circunferencia, los estudiantes experimentan diversos tipos de dificultades que en muchas casos les impiden alcanzar los objetivos propuestos" (p. 1). Asimismo señala que:

> El estudio de la circunferencia presenta dificultades para la mayoría de los estudiantes debido al grado de complejidad que exige el programa curricular y que no es semejante para otras curvas, como la parábola y la elipse, ya que se pide una mayor profundidad en el conocimiento de las propiedades de la circunferencia para la realización de las actividades sugeridas además de la resolución de problemas de aplicación. (p. 5).

Cabe resaltar que es importante el análisis profundo o la aprehensión del concepto de circunferencia como punto de partida para tratar los siguientes lugares geométricos: parábola, elipse e hipérbola, ya que estos temas son retomados en el nivel universitario. La idea de una curva cuyos puntos son representados por una expresión matemática (relación algebraica), se presenta como una dificultad relacionada con la noción de que una expresión o relación puede estar sujeta a ciertas condiciones.

Para el estudio de estas dificultades, el investigador deseó averiguar cuestiones referentes al nivel de razonamiento geométrico que poseen los estudiantes según el modelo de Van Hiele para desarrollar las actividades que plantea el programa de estudios para el tema de circunferencia, así como si el uso del CABRI constituye una herramienta útil para desarrollar dicho tema.

En esta investigación, el autor se apoyó de la teoría de Van Hiele. En su desarrollo, en primer lugar, realizó un diagnóstico con el fin de identificar el nivel de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele, en el que se encontraban los 41 estudiantes

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

del 5º año de bachillerato, de los cuales sólo analizó a seis alumnos. Enseguida, diseñó la actividad de aprendizaje a desarrollarse con CABRI, con el que pretendió que sus alumnos alcancen el nivel 3 de razonamiento geométrico del modelo de Van Hiele, teniendo como objeto matemático dos propiedades de la circunferencia, a saber; primera propiedad, la mediatriz de cualquier cuerda de una circunferencia pasa por el centro de la misma. Segunda propiedad, la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado desde el centro hasta el punto de tangencia. Finalmente, en el análisis de los resultados de la investigación, resaltó que a los alumnos les fue sencillo construir la primera propiedad sin confundir las características de la mediatriz, y con respecto a la segunda propiedad, solo dos alumnos lograron construir la recta tangente a una circunferencia. Esto debido a que, según el investigador, la mayor parte de las actividades diseñadas estaban dirigidas para la construcción de la primera propiedad de la circunferencia.

De acuerdo a la teoría de Van Hiele, a cada nivel de razonamiento geométrico le corresponde un lenguaje propio. En ese sentido, en la investigación que realizó Kerlegand (2008), observó que solo algunos alumnos (no señala cuántos) alcanzaron el nivel de razonamiento geométrico deseado de acuerdo a la teoría de Van Hiele. Asimismo, señala que solo dos alumnos lograron construir la segunda propiedad estudiada. Finalmente, el autor observó que los alumnos tienen habilidad para utilizar el programa CABRI en sus funciones elementales. Sin embargo, señala que en las primeras actividades que corresponden al nivel 1 algunos alumnos mostraron "cierta confusión al establecer las relaciones de dependencia entre los elementos de una construcción en CABRI, una vez aclaradas estas ya no se aprecia que ninguno de ellos tenga algún problema al establecerlas en sus construcciones posteriores" (p. 130).

Esta investigación es relevante para nuestro trabajo por las dificultades identificadas en el aprendizaje de dos propiedades de la circunferencia, como es el caso de no utilizar un lenguaje apropiado para definir o enunciar el objeto en estudio, confundir al establecer las relaciones de dependencia entre los elementos de una construcción con el software CABRI. Así mismo, la autora, si bien reconoce las bondades del ambiente de Geometría Dinámica, reconoce también que este:

> **[…]** no parece facilitar el elaborar una definición o enunciado, informal o formal, de lo que se observa, ni generar la necesidad de una demostración deductiva de las

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

> propiedades mostradas en las construcciones. En lo referente a las definiciones, es posible que se deba al uso mínimo del lenguaje que se requiere para usar el programa, por lo que se requiere una mayor interacción alumno-profesor o el diseño de actividades dirigidas específicamente para la construcción de la definición. (p. 129).

Para nuestra investigación, creemos necesario prestar atención a las dificultades que presentan los estudiantes cuando construyen nuestro objeto de estudio.

Por otro lado, en el desarrollo del pensamiento geométrico, según Carmona (2011), "toma particular importancia el estudio de la circunferencia como lugar geométrico, su representación, relaciones, propiedades y teoremas" (p. 1). De la misma manera, señala que la enseñanza de los elementos de la circunferencia en el aula presenta dificultades para su apropiación y vinculación en diferentes contextos matemáticos. Por ello, el autor sugiere la necesidad de crear estrategias en el aula para favorecer el cambio en la enseñanza tradicional a la utilización de modelos computacionales y herramientas didácticas. En su estudio, el autor se plantea como objetivo revisar conceptos, relaciones y propiedades básicas de la circunferencia, desde la geometría euclidiana, diseñando una Unidad de Aprendizaje fundamentada en el modelo de Van Hiele (su marco teórico) y el uso de geometría dinámica.

En el desarrollo de su investigación, primero aplicó una actividad exploratoria, la cual le permitió conocer los conceptos manejados y el nivel de razonamiento geométrico en la que se encontraban los alumnos (35 estudiantes de grado 9º). Enseguida, diseñó actividades que involucran el concepto de circunferencia, rectas tangentes y secantes, etc. Sobre este estudio, el autor observó que los alumnos en la actividad exploratoria muestran un nivel de visualización elevado, ya que reconocen los objetos matemáticos y los comparan. Sin embargo, observó que en el nivel de análisis según el modelo de Van Hiele, los alumnos mostraron deficiencia, pues no se establecen nociones o definiciones ni elementos empíricos; asimismo, los resultados mostraron que hay pobreza en el lenguaje matemático que utilizan para justificar sus respuestas. Finalmente, no logran evidenciar claramente haber alcanzado el nivel de deducción (según el modelo de Van Hiele), a excepción de dos alumnos que lograron sustentar en sus respuestas una definición de manera coherente matemáticamente y con lenguaje y símbolos matemáticos.

De esta investigación y para nuestro estudio, consideramos pertinente el haber identificado que existen dificultades en el aprendizaje del objeto matemático de nuestro interés. Por ejemplo, en su actividad exploratoria los estudiantes evidencian que

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

reconocen el objeto. Sin embargo, en el siguiente nivel de análisis, existen problemas para definir, clasificar y utilizar términos matemáticos adecuados para describir el objeto. A través de una secuencia de actividades y utilizando el software GeoGebra como herramienta, pretendemos que el alumno construya gradualmente el concepto de circunferencia utilizando sus conocimientos antiguos. Los problemas en el aprendizaje del objeto serán observados como dificultades que presentan los alumnos en sus acciones durante la construcción del concepto de circunferencia.

Si bien consideramos que las investigaciones de Kerlegand (2008) y Carmona (2011) nos permiten justificar nuestro tema de interés, con la disertación de Bedretchuk (2010) reforzamos las razones por las que nos interesa el estudio sobre el tema de circunferencia mediado por el software GeoGebra. En ese sentido, el autor señala: "la geometría es un conocimiento fundamental para la formación de los estudiantes, sin embargo, en el salón de clase, los mismos tienen grandes dificultades de entenderla" (p. 14). Respecto a las dificultades que enfrentan los alumnos, Almouloud y Mello (2000 citado de Bedretchuk, 2010), indican que "en la práctica, se da menos atención a la geometría y, muchas veces, se confunde su enseñanza con el de medidas" (p. 14). Además, el investigador señala que otro factor que dificulta el aprendizaje de la geometría es la forma cómo la abordan en los libros didácticos, refiriéndose al énfasis en el tratamiento algebraico, en lugar de las construcciones geométricas.

Para la construcción de los conceptos matemáticos, el autor realiza un estudio relativo al uso del software GeoGebra en el aprendizaje sobre el lugar geométrico en torno a los conceptos de mediatriz y la circunferencia en alumnos de enseñanza fundamental y enseñanza media.

Para el estudio de estos conceptos, el investigador se plantea la siguiente pregunta: "¿en qué medida una secuencia de situaciones adidácticas, estructuradas en una estrategia pedagógica mediada por un programa de geometría dinámica, puede contribuir para el aprendizaje de los temas de circunferencia y mediatriz, visto como lugares geométricos?" (p. 16).

Para su desarrollo, toma como marco referencial la Teoría de Situaciones Didácticas. El investigador emplea estrategias pedagógicas, mediadas por el software GeoGebra para el aprendizaje en geometría, en el que la secuencia didáctica propuesta en su estudio tuvo como objetivo, para los alumnos, construir los conceptos de circunferencia y mediatriz como lugar geométrico. Bedretchuk (2010) inicia con una actividad de

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

diagnóstico, con el objetivo de evaluar la comprensión de los alumnos sobre los conceptos de circunferencia y mediatriz. En la prueba diagnóstico, observó que muchos alumnos ya habían visto el tema de circunferencia y sobre la mediatriz la mayoría señalaron que era un tema nuevo para ellos, así como caso de lugar geométrico. De esta manera aplica 13 actividades pidiéndole que desarrollen con la ayuda del software GeoGebra.

En este estudio, Bedretchuk (2010) destaca la importancia de la inclusión de una estrategia pedagógica, mediada por el GeoGebra, para consolidar el aprendizaje de la circunferencia y la mediatriz como lugar geométrico. Asimismo, destaca la importancia del uso del GeoGebra, pues permitió desarrollar, en sus alumnos, "la autonomía de experimentar y validar sus conjeturas" (p. 101). Finalmente, en base a los registros obtenidos en el desarrollo de las actividades, el investigador evidenció que existen dificultades por parte de los alumnos en la interpretación de las actividades (textos) y la verbalización de sus argumentos que justificaban la resolución de sus actividades. Otro punto que observó fue que los estudiantes intentaron trazar rectas excesivamente en el diseño. Por ejemplo, en una de las actividades se le solicitaba ubicar un punto que equidistara de otros tres puntos no colineales. Al respecto, la mayoría de estudiantes respondieron que el punto debería ubicarse en el centro del triángulo, es decir, se dejaron llevar por la concepción intuitiva del diseño, mas no tuvieron en cuenta las propiedades para ubicar el punto solicitado. De la misma manera, muchas veces, los alumnos iniciaban la resolución de las actividades sin un planeamiento previo de las propiedades involucradas en el enunciado.

En las investigaciones revisadas, observamos que se abordan desde la geometría euclidiana, pero nuestra investigación se desarrolla en el cuadro de la Geometría Analítica, debido a que el objeto matemático de nuestro interés se encuentra en dicho cuadro. Para este estudio, consideramos pertinente como marco teórico los aspectos de la Dialéctica Herramienta-Objeto de Douady (1995), la cual nos permitirá, a través de sus fases, construir el concepto de nuestro objeto matemático con el apoyo del GeoGebra.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

1.2. Justificación de la investigación

Los profesores de los diferentes niveles de Educación Básica Regular (EBR) enfrentamos la tarea de buscar recursos adecuados para la enseñanza de la matemática, diseñar o adaptar actividades, con el propósito de que nuestros alumnos logren construir los conceptos matemáticos que requieren para estar preparados y desenvolverse exitosamente en su vida personal, social y académica. Es por ello que la necesidad de entender y estar preparado para usar las matemáticas en su vida cotidiana o en el trabajo es muy importante para nuestros estudiantes. Por este mismo motivo, nuestra labor como docentes debe centrarse en desarrollar las capacidades y habilidades matemáticas a través de actividades adecuadamente diseñadas para generar su desarrollo cognitivo, así como despertar el interés por el estudio de las matemáticas, ya que gran parte de los estudiantes siente cierto rechazo por ellas.

Aun cuando somos conscientes de que por más que pretendemos seguir algún paradigma, por más que seguimos las indicaciones de cualquier medio, siempre encontramos algún vacío en la enseñanza y aprendizaje de un determinado objeto matemático. Consideramos que esto se debe quizá por alguna de las razones; porque los profesores no tienen dominio sobre el tema, por la forma como se enseña, porque los alumnos no tienen los conocimientos previos suficientes como para abordar un nuevo conocimiento, o por otros factores que obstaculizan la enseñanza y el aprendizaje. Esto lo podemos evidenciar en nuestra experiencia profesional, concretamente en la geometría analítica nuestros alumnos del nivel secundario tienen dificultades para trabajar con el tema de circunferencia. Frente a estas dificultades que enfrentamos día a día en el salón de clase, con esta investigación que tiene la finalidad de construir el objeto circunferencia, procuramos mostrar una alternativa para la construcción teniendo en cuenta los siguientes elementos: tomaremos como base teórico los aspectos de la Dialéctica Herramienta-Objeto de Douady (1995), diseñaremos actividades teniendo en cuenta dicha dialéctica, y utilizaremos el software GeoGebra como herramienta mediador en la construcción del objeto. Pensamos que estas consideraciones nos ayudarán construir el nuevo concepto de circunferencia teniendo en cuenta los conocimientos antiguos de los alumnos.

En el año 2004, el Ministerio de Educación (MINEDU), realizó una Evaluación Nacional a estudiantes de colegios estatales y privados sobre competencias y desempeño en las áreas de Comunicación y de Matemática. La prueba fue aplicada a

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

tercero y quinto de secundaria y se evaluaron tres capacidades básicas: resolución de problemas, comunicación matemática y aplicaciones de algoritmos. En esta prueba se evaluó la formación matemática de los estudiantes, la cual consiste en "el dominio de habilidades y conocimientos matemáticos útiles para desempeñarse con eficacia ante situaciones problemáticas novedosas o rutinarias, cuya solución requiera la puesta en práctica de dichas habilidades y conocimientos" (MINEDU-UMC, 2004, p. 20).

De todas las conclusiones a las que llega la Evaluación Nacional, aquí consideramos solo las que guardan de alguna forma relación con nuestra investigación. Asimismo, presentamos el análisis sólo del quinto grado de secundario (14 500 estudiantes de todas las regiones del Perú), ya que nuestra investigación será realizada en dicho nivel y grado. En tal sentido, la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil (2004) reportó que los estudiantes del quinto grado del nivel secundario presentan dificultades en el manejo del álgebra y las funciones. Estas dificultades se evidencian al:

> **[…]** Resolver problemas de enunciado verbal que demandan interpretar y recodificar situaciones mediante el uso del lenguaje algebraico, es decir, en las que el estudiante debe plantear ecuaciones e inecuaciones lineales o modelar, interpretar o graficar situaciones utilizando la noción de función en sus diversas representaciones, **[…]** No graficar una función lineal o cuadrática a partir de su ecuación, aun cuando se le presenta la idea de tabular previamente algunos valores enteros del dominio. Asimismo, tiene dificultades para hallar la ecuación que corresponde a una gráfica lineal dada. (p. 186).

Estas afirmaciones ponen en evidencia que los estudiantes del quinto grado de secundaria muestran dificultades para interpretar, recodificar y graficar funciones, lo que nos permite confirmar que los estudiantes presentan dificultades para representar una función a partir de su expresión algebraica, así como para hallar la ecuación algebraica desde su representación gráfica. Por ello, en nuestro trabajo pretendemos que nuestros estudiantes interpreten, representen gráficamente ya sea desde su representación textual o algebraica, así como mostrar expresiones matemáticas a partir de su representación gráfica o textual.

De la misma manera, en los resultados obtenidos sobre el contenido algebra y funciones, la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil (2004) señala que "la mayoría de los estudiantes muestran un pensamiento algebraico básico (como la resolución algorítmica de ecuaciones) y todavía no logra el desarrollo de un pensamiento analítico que emplee el álgebra para describir situaciones, comportamientos, objetos geométricos" (p. 187).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Además, en el mismo documento, se reportó que los estudiantes del quinto grado del nivel secundaria presentan dificultades en el manejo de la noción de geometría al:

> Resolver situaciones problemáticas rutinarias de pocas etapas que involucran el uso de figuras geométricas planas elementales. **[…]** Relacionar las propiedades o atributos de una misma o de diferentes figuras, **[…]** Calcular áreas de figuras geométricas elementales en los casos en los que se requiere aplicar directamente la fórmula. (p. 198).

Estas dificultades las observamos en la geometría, incluso en los temas más elementales. Esto es debido, según la Evaluación Nacional (2004), a que se da "más importancia a lo semiótico que a lo semántico, es decir, se trabaja sobre todo terminología, notación y definiciones formales, y se deja de lado el trabajo y la manipulación de material concreto" (p. 198). Esto significa que los temas son abordados como objetos acabados; son presentados como definiciones y teoremas sin darle la oportunidad al alumno de poder construir, juzgarse, preguntarse de dónde se obtiene la fórmula o qué significa el teorema, qué relación tiene una expresión matemática con su representación gráfica, etc. Contrario a lo que se acaba de describir, nuestro trabajo estará orientado a que los estudiantes sean los protagonistas cuando construyen una nueva noción matemática.

Finalmente, la Evaluación Nacional (2004) establece que sólo el 2,9% de los estudiantes del 5° de secundaria pertenecen al nivel suficiente, nivel considerado como el esperado para todos los estudiantes del grado. Lo preocupante de esta situación es que el resto, es decir, el 97,1% muestra no haber desarrollado las capacidades matemáticas requeridas para terminar su escolaridad. Es en realidad un reto para el profesor o investigador encontrar herramientas que permitan minimizar las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de la matemática.

Por otro lado, en esta investigación, hemos considerado pertinente utilizar ambientes computacionales con el objeto de desarrollar el aprendizaje colaborativo. Al respecto, Salazar (2009) señala que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático, los ambientes computacionales ayudan en la medida en que facilitan que los alumnos trabajen de manera interactiva, visual y dinámica; al mismo tiempo les permiten probar hipótesis y construir conjeturas, así como fomentar el uso de metodologías diferentes a las tradicionales.

En ese sentido, estudios como los de Olivero y Rebutí, Laborde y Restrepo (2001 citados en Salazar, 2009) aseveran que:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

> **[…]** os ambientes da Geometria Dinâmica podem proporcionar outra perspectiva para o ensino e a aprendizagem de Geometria. Estes ambientes influenciam na elaboração e interpretação das representações de objetos planos e espaciais, porque, por meio da exploração das figuras (manipulação direta), podem minimizar as dificuldades de visualização e facilitar os tratamentos delas, visto que a manipulação direta permite ao usuário ver uma figura desde diferentes pontos de vista. (p. 20).

En este mismo contexto, Salazar (2009) observó que “Nesse ambiente de Geometria Dinâmica, as construções permitiram aos alunos “dinamizar” a figura, isto é, superar seu caráter estático, próprio do ambiente de lápis y papel” (p. 277).

Por otro lado, Gavina (2001, citado en Bedretchuk, 2010) señala que “la utilización de los ambientes de geometría dinámica, incentiva el espíritu de investigación matemática, posibilita a los alumnos obtener sus propias conjeturas de modo que se sientan motivados a demostrar y comprobar sus observaciones, cuestionando sus propias acciones” (p. 48).

Basándonos en las investigaciones revisadas y presentadas en los párrafos anteriores, hemos visto conveniente trabajar en un ambiente de geometría dinámica, específicamente, utilizando el software GeoGebra como herramienta mediadora en la construcción del concepto de circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica. Sobre este software, Dávila (2010, citado en Chumpitaz, 2013) destaca “que la importancia de usar GeoGebra en el aprendizaje del cálculo se debe a la necesidad de trabajar en distintas formas de lenguaje (en especial el gráfico) y establecer relaciones entre estas” (p. 19). Asimismo, Chupitas (2013) señala que “el uso del aspecto dinámico del GeoGebra en la secuencia de aprendizaje, en particular cuando diseñó actividades de construcción de una función por tramos de trazo continuo, permitió minimizar dificultades en identificar el dominio y realizar transformaciones” (p. 137). Del mismo modo, Bedretchuk (2010) resalta la importancia de “integrar una estrategia pedagógica mediada por el GeoGebra para la consolidación del aprendizaje sobre la circunferencia y la mediatriz como lugares geométricos” (p. 100). El mismo autor señala que el GeoGebra ayudó comprender “los conceptos de circunferencia y mediatriz como lugares geométricos, cuando fueron propuestas actividades de simulación sin uso de compás, en las cuales los grupos verificaron que los puntos, por ejemplo, se mantenían a igual distancia de un punto fijo” (p. 101).

Así, los reportes de las investigaciones revisadas nos muestran la importancia y las bondades del software GeoGebra que creemos nos permitirán, como herramienta, minimizar las dificultades cuando se construya el objeto circunferencia. La elección de

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

este software en nuestro estudio se debe a las siguientes particularidades: es un programa de uso gratuito, de libre acceso, puede ser descargado con facilidad del internet y ser instalado a un ordenador, presenta características de facilidad de uso, y muestra el objeto de estudio en diferentes representaciones a la vez (en especial en su representación gráfica y algebraica).

1.3. El software GeoGebra

El GeoGebra es un software interactivo de matemática que une dinámicamente la geometría, el álgebra y el cálculo en un único conjunto sencillo a nivel operativo como potente. Fue creado por Hohenwarteren el año 2001 con el objeto de mejorar en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En ese sentido, desde su creación, hay investigadores que prestan su atención al software GeoGebra para mejorar dicho proceso. Este es una herramienta/instrumento para desarrollar actividades matemáticas en clase; es utilizado desde las escuelas intermedias hasta el nivel superior y está disponible en sus diversas plataformas. En ese contexto, el autor del GeoGebra señala que, en la actualidad, se usa sin dificultades como software de geometría dinámica y como un sistema de álgebra computacional, en el cual sus funciones fundamentales procuran disminuir la brecha entre la geometría, el álgebra y el cálculo. La utilidad de este software se da con mayor grado en la geometría euclidiana, la geometría analítica del plano y en temas de funciones.

El software GeoGebra, ofrece múltiples representaciones del objeto matemático desde cada una de sus posibles vistas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y en hojas de cálculos, dinámicamente relacionadas que asimilan los cambios producidos en cualquiera de ellos.

Para acceder e interactuar con el software, se debe hacer doble *click* en el ícono GeoGebra, y de inmediato aparece el interfaz tal como se muestra a continuación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

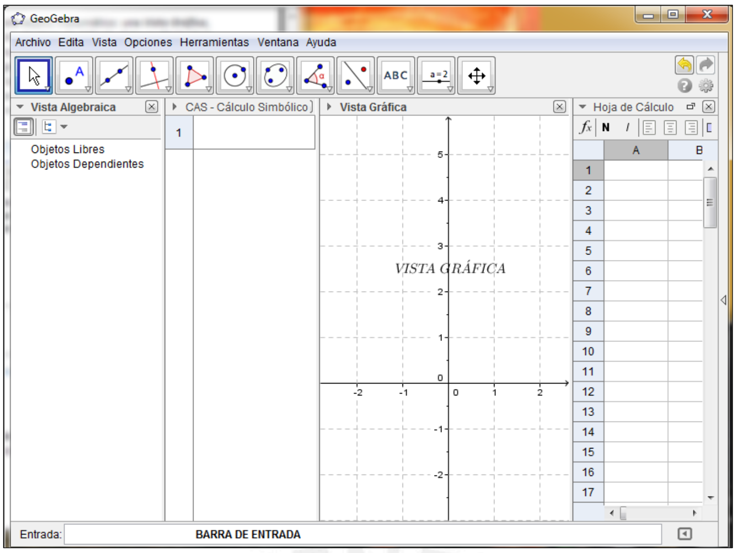


Figura 1. Interfaz de la ventana del GeoGebra

En la primera fila, está ubicada la barra de menú (Archivo, Edita, Vista, Opciones, Herramientas, Ventana y Ayuda). Esta permite al usuario, diversas posibilidades de uso. Por ejemplo, en el *Menú Archivo*, se puede encontrar las siguientes opciones: *Nueva Ventana*, que nos permite acceder a una nueva vista del GeoGebra; *Guardar*, que nos permite salvar las acciones realizadas; *Exportar* como imagen, etc. La siguiente fila, constituye la *barra de herramientas*, en la cual cada "*botón*", representa una caja de herramientas que contiene diferentes opciones u objetos geométricos predeterminados, tales como: crear *puntos*, trazar *segmentos* y *rectas*, dibujar *triángulos*, *cónicas*, medir *ángulos*, hallar *áreas*, calcular *pendientes* de rectas, etc. Por ejemplo, en la siguiente figura 2, se muestra el *botón* seis con sus múltiples opciones.

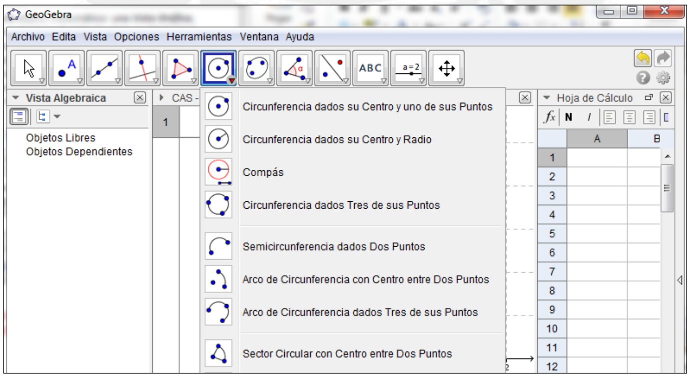


Figura 2. Múltiples opciones del objeto circunferencia

Como señalamos anteriormente, el GeoGebra, presenta un interfaz de usuario con tres ventanas principales, en las cuales un mismo objeto matemático puede ser visto paralelamente en su representación algebraica, gráfica y, a través de la ventana/barra de entrada, nos permite introducir ecuaciones, puntos como par ordenado, etc.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

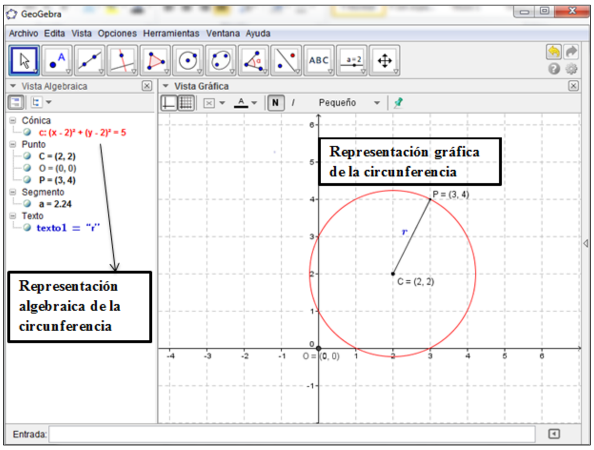


Figura 3. Representación algebraica (izquierda) y gráfica (derecha) de la circunferencia

El cambio que se puede realizar de alguna característica, ya sea en la gráfica o en la expresión matemática, automáticamente las otras representaciones también sufren los cambios. Asimismo, el GeoGebra nos permite guardar los objetos construidos con las últimas modificaciones del usuario.

Creemos necesario considerar el arrastre de las representaciones de objetos en las acciones que realizan los alumnos con el GeoGebra, ya que esta cualidad permite modificar el objeto construido en la vista gráfica, de tal manera que una figura pueda convertirse en otra. En el Apéndice, se muestran las actividades que permitieron a los alumnos interactuar y familiarizarse con algunas herramientas necesarias del software GeoGebra para abordar el estudio de nuestro objeto de estudio.

1.4. Pregunta y objetivos de la investigación

Ante las dificultades encontradas en las investigaciones revisadas sobre el objeto circunferencia, nos interesamos por investigar la construcción de este concepto que se concibe como un conjunto de puntos que cumple una determinada propiedad y sobre sus representaciones gráfica y algebraica. Para esto, consideramos pertinente los aportes de Douady, las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto, ya que nos permitirán, a través de una secuencia de actividades mediada con el software GeoGebra, proponer actividades que ayuden a los alumnos a construir el concepto de circunferencia. Por ello, en nuestro estudio, nos proponemos la siguiente pregunta de investigación:

¿Una secuencia de actividades que sigue las fases de la dialéctica herramienta-objeto y mediada por el software GeoGebra, contribuye en la construcción del concepto circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en estudiantes de quinto de secundaria?

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Objetivos de la investigación

Objetivo general

Analizar, a través de una secuencia de actividades que sigue las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediadas por el software GeoGebra, la construcción del concepto circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en estudiantes de quinto de secundaria.

Objetivos específicos

- Identificar en investigaciones precedentes, en Educación Matemática, los problemas de aprendizaje que presentan los alumnos al estudiar el concepto de circunferencia.
- Diseñar y experimentar una secuencia de actividades utilizando como fundamento los principios de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediada por el software GeoGebra con el propósito de construir el concepto de circunferencia.

En el siguiente capítulo, presentaremos algunos aspectos del marco teórico de nuestra investigación. Asimismo, los procedimientos metodológicos que seguimos en nuestro estudio.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CAPÍTULO 2

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En este capítulo, describimos el marco teórico de nuestra investigación, que incluye aspectos de la Dialéctica Herramienta-Objeto (DHO) propuesta por Douady (1995). Así mismo, presentaremos el procedimiento metodológico que se siguió para desarrollar nuestra investigación.

2.1. Dialéctica Herramienta-Objeto

Fue desarrollada por Douady (1995) en su tesis doctoral, *Jeux de Cadres et Dialectique Outil-Objet* (Juego de Cuadros y Dialéctica Herramienta-Objeto). La Dialéctica Herramienta-Objeto (DHO) es un proceso cíclico en el cual se organiza los roles respectivos del profesor/investigador y de los estudiantes, donde los objetos matemáticos juegan alternativamente el rol de herramienta para resolver un problema y de objeto matemático cuando ocupa un lugar en la construcción de un conocimiento estructurado. Es decir, la teoría de la DHO consiste en hacer uso de los conocimientos existentes (previos/antiguos) de los alumnos como herramienta en el proceso de construcción de un nuevo objeto. Este último, una vez desarrollado, es susceptible de convertirse en herramienta para un nuevo ciclo de la dialéctica en otra situación nueva. Asimismo, la DHO puede ayudarnos a organizar y estructurar en el diseño de las actividades para construir nuevos conceptos matemáticos en los estudiantes.

Para facilitar el conocimiento de los términos utilizados en la DHO, así como su funcionalidad, debemos concebir y asumir desde la perspectiva de Douady (1995). En ese sentido, la autora señala que:

> *Saber* matemáticas implica dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones. En un funcionamiento científico como éste, las nociones y teoremas matemáticos involucrados tienen un status de **herramientas**, **[…]** *Saber* matemáticas también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente. Al mismo tiempo es formular definiciones, enunciar los teoremas de ese corpus y demostrarlos. Por esto, las nociones y los teoremas matemáticos en cuestión tienen un status de **objeto**. (p. 63).

Bajo este contexto, Godino, Font, Contreras & Wilhelmi (2006) opinan que Douady atribuye a los conceptos matemáticos "un carácter no unitario e identifica en ellos dos

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

polos o dimensiones principales: el aspecto *objeto* (cultural, impersonal e intemporal), plasmado en definiciones y propiedades características, y el aspecto *instrumento*, que permite a alguien realizar una tarea en un momento dado" (p. 128).

Así, consideramos que un concepto matemático tiene el estatus de *herramienta* (instrumento), cuando nuestro interés en éste se centra en la utilidad que nos puede brindar para resolver un problema o formular un nuevo concepto. En cambio, el concepto matemático es *objeto* cuando se entiende como un ente cultural insertado en una estructura científica; es el saber erudito socialmente validado o reconocido.

Dicho de otro modo y de acuerdo Douady (1986, citada en Godino et al., 2006):

> Decimos que un concepto es instrumento cuando focalizamos nuestro interés sobre el uso que se hace de él para resolver un problema. Un mismo instrumento puede ser adaptado a varios problemas, varios instrumentos pueden ser adaptados a un mismo problema. Por objeto entendemos el objeto cultural que tiene un lugar en un edificio más amplio que es el saber sabio en un momento dado, reconocido socialmente. (p. 128).

Sobre esta afirmación, Godino et al. (2006) opinan que:

> El concepto-instrumento se pone en juego en las fases o momentos de exploración en la resolución de problemas, y está del lado del estudiante o del investigador matemático que resuelve el problema. El concepto-objeto se pone en juego en las fases de institucionalización, normalmente hechas por el profesor, pero también es resultado de los procesos de fundamentación y validación de los conocimientos entendidos como entidades culturales. (p. 128).

Hasta aquí se han definido algunos términos necesarios para comprender sobre el marco teórico de nuestra investigación.

Con el conocimiento de doble estatus del objeto matemático: herramienta/instrumento y objeto. A continuación, definimos las 6 fases de la dialéctica teniendo en cuenta el rol del concepto matemático en cada una de ellas.

FASE 1. ANTIGUA

Maranhão (2008) señala que, en esta primera fase, "o aluno moviliza conhecimentos antigos para resolver, ao menos en parte, seu problema. Os conhecimentos antigos são objetos de saber matemático, funcionando como ferramentas nessa fase" (p. 144).

En esta primera etapa, los alumnos pondrán en marcha un objeto conocido como herramienta explícita para comenzar la resolución del problema planteado o, por lo menos, avanzar una parte de dicho problema propuesto, es decir, los conocimientos que

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

posee el alumno puede ayudar a resolver parcialmente el problema. Así, en la construcción del concepto circunferencia, objeto de nuestra investigación, los alumnos movilizarán conocimientos antiguos o saberes previos como herramientas, tales como: el teorema de Pitágoras, distancia entre dos puntos, coordenadas del punto medio de un segmento, mediatriz de un segmento, ecuación de una recta dado un punto y su pendiente, ecuación de una recta dados dos puntos y la relación de las pendientes de dos rectas cuando se intersectan formando un ángulo de 90º.

FASE 2. INVESTIGACIÓN

Para esta segunda fase, Maranhão (2008) opina que:

> Os alunos encontram dificuldades para resolver completamente o problema e são conduzidos a colocar em jogo novos conhecimentos que são implícitos. O que se quer dizer com o termo conhecimentos implícitos é que o pesquisador ou o professor podem reconhecer os conhecimentos novos que os alunos estejam criando. Os alunos, por sua vez, sabem que é algo novo, mas não podem explicar completamente do que se trata. (p. 145).

En esta segunda etapa, las dificultades encontradas por los estudiantes en el proceso de desarrollo de las actividades, conducen a buscar nuevos medios o conceptos para dar solución al problema. Sin embargo, estas dificultades también pueden ser porque su estrategia sea confusa, es decir, en cantidad de operaciones, en riesgo de errores, en incertidumbre sobre el resultado o porque esta estrategia no funciona más. Frente a esta situación, se busca orientar al estudiante a través de preguntas para que busque nuevos medios mejor adaptados a su situación.

Los conocimientos por descubrir, en esta segunda fase, están referidos al objeto circunferencia desde su concepción como lugar geométrico, representación gráfica y algebraica, así como a los elementos característicos de la circunferencia (centro y radio). Sin embargo, creemos que los alumnos, en esta etapa, solo podrán reconocer algunas concepciones o elementos de dicho objeto, mas no podrán explicar completamente de qué trata.

FASE 3. EXPLICITACIÓN

Maranhão (2008) opina que en esta fase:

> Os alunos descrevem o que obtêm em seu trabalho, as dificuldades, os resultados obtidos. Isso requer do professor a abertura de debates sobre os conhecimentos antigos que estão sendo usados, e os novos, que estão sendo criados implicitamente. Os alunos formulam suas idéias e elas são validadas ou refutadas. As diversas concepções

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

> presentes revelam-se, novos conhecimentos podem entrar em conflito com antigos ou, então, podem surgir erros ou contradições. Esses debates servem para assegurar algumas interpretações necessárias, mas podem não ser suficientes para eliminar certas convicções contraditórias. (p. 145).

En esta tercera etapa, algunos elementos del concepto de circunferencia pueden ser apropiados por los estudiantes para el momento del aprendizaje, y ser empleados circunstancialmente, es decir, en esta etapa aparece el nuevo conocimiento explícito, el cual es susceptible de familiarización y reutilización.

Durante el avance de las tres primeras fases, puede suceder que algunos o todos los alumnos no avancen más en resolver el problema. Esto debido a que, para resolver el problema se requiere del nuevo objeto que se está construyendo. Por lo cual es necesaria la intervención del profesor. Al respecto, Maranhão (2008) señala que:

> No decurso dessas três primeiras fases, o professor ou o pesquisador podem se dar conta de que a situação corre o risco de bloquear-se. Mesmo que o professor não perceba isso a tempo e haja bloqueio, deve-se tomar uma decisão sobre o que fazer e, segundo a análise da situação, o professor pode explicitar algo, esclarecer certas noções aos alunos. Caso os alunos apresentem uma visão distorcida desses novos conhecimentos, pode até *introduzir alguns*. Deve-se escolher o momento e a forma de intervenção, sempre respeitando a liberdade dos alunos. (p. 146).

En este contexto, al finalizar esta fase, no todos los alumnos reaccionan de la misma manera cuando se solicite describir o definir el nuevo concepto. Al respecto, Douady (1995) afirma que:

> Después de todo el trabajo en clase sobre el problema, al profesor le toca seleccionar aquello que para los estudiantes ha tomado sentido, aquello que es matemáticamente interesante y que se puede volver a utilizar, y aquello que hace parte bien sea en forma directa de sus objetos de enseñanza, o en forma preliminar, o en forma de práctica de campo sobre los objetos del programa. Al hacer esto, el profesor organiza explícitamente el saber de la clase. Si este saber está ligado a la clase, me referiré a la institucionalización local. Si se encuentra relativamente descontextualizado y despersonalizado y como tal es susceptible de ser comunicado y comprendido en el exterior sin necesidad de conocer la historia de su producción, los conocimientos en juego tienen más bien un status de objeto y entonces me refiero a la institucionalización. Para resumir, el profesor hace un poco de la clase. (pp. 88-89).

De aquí la importancia de la siguiente fase, que permitirá homogenizar y nivelar el conocimiento como objeto.

FASE 4. INSTITUCIONALIZACIÓN

En esta fase, el profesor identifica los saberes que constituyen los nuevos conocimientos, que según Maranhão (2008), “desenvolvem-se os novos conhecimentos,

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

no grupo-classe, chegando-se à sua *institucionalização* como objetos de saber matemático, isto é, definições, enunciados de teoremas, etc. Cabe ao professor decidir o momento e o modo de passagem para essa fase" (p. 149).

La institucionalización es la fase donde el profesor debe resaltar como nuevo conocimiento para dar el estatus de objeto matemático, ya que, posteriormente, son designados para funcionar y ser utilizados como conocimientos antiguos.

En esta cuarta fase, los conocimientos que descubrirán los alumnos, conjuntamente con el profesor/investigador, están referidos al concepto de circunferencia en su estatus de objeto matemático, el cual involucra su concepción como lugar geométrico, representación gráfica y algebraica, así como los elementos característicos que lo constituyen.

FASE 5. FAMILIARIZACIÓN

En esta fase, se muestran diversos problemas con la intención de provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos del nuevo conocimiento que ha sido institucionalizado. Al respecto, Douady (1995) afirma que, "antes de poder reutilizar lo aprendido, los estudiantes necesitan familiarizarse con su nuevo conocimiento. Un medio para lograr esto es proponerles primero abordar ejemplos de problemas cercanos al que ya han estudiado" (p. 91). En este mismo contexto, de acuerdo a Douady (1992), "l'enseignant propose aux élèves divers exercices réclamant comme outil explicite ce qui a été institutionnalisé" (p. 151).

Siguiendo esta misma idea, Maranhão (2008) opina que, en esta fase, "desenvolvem-se diversos exercícios para familiarização com o que é novo, colocando-se em ralação nada além do que é conhecido. Certas situações permitem a aquisição de familiaridade desejada, para que esses conhecimentos funcionem, posteriormente, como antigos" (p. 150).

En resumen, en esta etapa, el profesor propone problemas variados que requieren para su solución de las nociones que recientemente se han institucionalizado, donde el nuevo concepto es susceptible de convertirse en un saber antiguo para otro nuevo ciclo de la dialéctica herramienta-objeto. En otras palabras, el nuevo concepto que ha sido institucionalizado anteriormente, es utilizado como herramienta para resolver una situación nueva. En este transcurso de familiarización del nuevo objeto, los alumnos

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

deberán desarrollar hábitos y habilidades para integrarlos a su esquema mental como un saber social y cultural.

FASE 6. REUTILIZACIÓN

Es la última fase, donde se reutiliza el nuevo concepto como herramienta en situaciones más complejas. Al respecto, Maranhão (2008) señala que en esta etapa "propõe-se a reutilização dos novos conhecimentos em tarefas mais complexas, envolvendo outros conceitos, propriedades e procedimentos, iniciando-se assim um novo ciclo" (p. 151).

Debemos tener en cuenta que la descripción del funcionamiento de la dialéctica herramienta-objeto no significa que cada ciclo llegue, obligatoriamente, a una extensión del saber del estudiante. En ese sentido, Douady señala que para un mismo estudiante y para un mismo objeto matemático, pueden ser necesarios varios ciclos.

Por otro lado, es pertinente aclarar que en esta investigación, solo consideramos las cinco primeras fases para la construcción del objeto circunferencia. Las razones de esta consideración está apoyada en el documento del MINEDU: los Mapas de Progreso del Aprendizaje (MP).

Según los Mapas de Progreso del Aprendizaje (2013), documento que describe el progreso de los aprendizajes que se espera que aprendan los alumnos del nivel primaria y secundaria en cada ciclo, aclara que los estándares de aprendizaje, particularmente en el Mapa de Progreso de Matemática: Geometría, "Son metas de aprendizaje claras que se espera que alcancen todos los estudiantes del país a lo largo de su escolaridad básica" (p. 6).

Para lograr las metas de aprendizaje, el Mapa de Progreso considera que se debe alcanzar los niveles de cada ciclo, los cuales:

> Indican lo que se espera que un estudiante haya aprendido al finalizar cada ciclo de la Educación Básica Regular. **[…]** Cada nivel cuenta con un conjunto de indicadores de desempeño. Estos permitirán identificar claramente si los estudiantes lograron lo que indica el nivel correspondiente. (p. 6).

En ese sentido, cuando un alumno ha alcanzado el nivel VII ciclo (5º de secundaria) del Mapa de Progreso de Geometría, es capaz de, según la descripción de este nivel, "interpretar movimientos rectos, circulares y parabólico mediante modelos algebraicos y los representa en el plano cartesiano" (p. 32).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Bajo este contexto, consideramos que si los alumnos logran resolver e interpretar el objeto circunferencia en una situación o un problema, y consiguen modelar a través de una expresión matemática o una representación gráfica en el sistema de coordenadas, entonces, diremos que los alumnos han logrado la construcción del objeto circunferencia en su esquema mental como un aprendizaje suficiente que corresponde al nivel VII (5º de secundaria). Debido a ello y debido a que la noción del objeto circunferencia bajo esta concepción, interpretar y modelar problemas a través de una ecuación algebraica y gráfica, también corresponde de acuerdo a la DHO, a la fase de familiarización. Esto debido a que en esta fase, los alumnos utilizan el objeto circunferencia como conocimiento imprescindible para resolver problemas. Asimismo, este nuevo objeto que sirve para resolver diversos problemas, es susceptible de convertirse en antiguo para una nueva etapa de la DHO en la construcción de un nuevo concepto. En ese sentido, nuestra investigación tiene el propósito de llegar hasta la penúltima fase de la dialéctica. Ya que de acuerdo al Mapa de Progreso de Geometría, habremos reunido en los alumnos las capacidades suficientes considerados en este documento. Y para lograr el proceso de construcción de nuestro objeto circunferencia, hemos diseñado una secuencia de actividades que cubre hasta la fase de familiarización.

2.2. Aspectos metodológicos

En este apartado, describiremos el procedimiento metodológico de nuestra investigación, orientándonos a la búsqueda de la respuesta a nuestra pregunta de investigación. Por la naturaleza de nuestro problema, nuestro estudio se considera como investigación cualitativa de tipo experimental, ya que nos permitirá estudiar todos los componentes de los procesos de construcción y comunicación del saber matemático. Asimismo, pretendemos conocer, a través de las observaciones, las acciones de los estudiantes cuando se enfrenten a las actividades diseñadas.

En este contexto, Hernández, Fernández y Baptista (2006) describen a la investigación cualitativa como estudios que "se conducen básicamente en ambientes naturales, donde los participantes se comportan como lo hacen en su vida cotidiana" (p. 10). En cuanto a la actividad del investigador, en la misma página, los autores comentan que "el investigador observa eventos ordinarios y actividades cotidianas tal como sucede en sus ambientes naturales, además de cualquier acontecimiento inusual".

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Sobre la recogida de los datos, Hernández et al (2006) considera que “la recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vistas de los participantes” (p. 27). En tal sentido, como investigadores cualitativos, seremos el instrumento principal para la generación y recogida de los datos, a través de observaciones sobre los alumnos, las cuales nos brindarán información en las actividades diseñadas para la construcción de nuestro objeto matemático en estudio.

2.2.1 Procedimiento de la investigación

En este apartado, detallamos nuestro procedimiento metodológico que consiste en los siguientes pasos:

1. Análisis de investigaciones, en Educación Matemática, sobre los problemas que presentan los alumnos al estudiar el concepto circunferencia. Reflexionamos sobre las conclusiones y aportes de estas investigaciones, y consideraremos en el diseño de las actividades (instrumento de nuestra investigación).
2. Análisis de los textos didácticos de uso frecuente en la Educación Básica Regular, con el objeto de analizar el tratamiento del concepto de circunferencia en la presentación o introducción, asimismo, en los ejemplos presentados y las actividades propuestas. Veremos, también, si incluyen el uso de los recursos TICs para trabajar el objeto. Los resultados obtenidos serán considerados en el diseño de las actividades.
3. Familiarización de los alumnos con el uso del software GeoGebra. Actividades diseñadas con la intención de que los estudiantes de nuestra muestra se familiaricen y reconozcan algunas herramientas necesarias que ofrece el software. Las actividades constituyen, básicamente, en reconocer la barra de herramientas, crear puntos, renombrarlos, trazar rectas y segmentos, trazar rectas perpendiculares, introducir texto, etc. Consideramos esta actividad necesaria para el reconocimiento del GeoGebra, porque es una herramienta que utilizaremos en el desarrollo de nuestras actividades. Vale decir que los alumnos participantes de este trabajo desconocían el software GeoGebra. El taller de introducción al software tuvo una duración de 45 minutos.
4. Diseño y ejecución de las actividades siguiendo las fases de la DHO con la finalidad de construir el objeto circunferencia. Para el diseño de estas actividades, también consideramos los resultados del análisis de las investigaciones anteriores y los resultados del análisis de los textos didácticos.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

5. Análisis de los resultados obtenidos en las actividades diseñadas según la DHO.

Los pasos descritos anteriormente nos ayudarán a lograr los objetivos propuestos de esta investigación. Es decir, los pasos 1 y 2 nos permitirán alcanzar nuestro primer objetivo específico: *Identificar en investigaciones precedentes, en Educación Matemática, los problemas de aprendizaje que presentan los alumnos al estudiar el concepto de circunferencia*. Los pasos 3 y 4 nos permitirán lograr nuestro segundo objetivo específico: *Diseñar una secuencia de actividades utilizando como fundamento los principios de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediadas por el software GeoGebra*. Finalmente, el paso 5 nos permitirá lograr nuestro objetivo general: *Analizar a través de una secuencia de actividades que sigue las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediadas por el software GeoGebra, la construcción del concepto circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en estudiantes de quinto de secundaria.*

En el siguiente capítulo, presentamos lo que corresponde al objeto matemático en estudio.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CAPÍTULO 3

LA CIRCUNFERENCIA

El capítulo presente hace referencia a algunos aspectos de la evolución histórica del objeto matemático en estudio desde la geometría sintética hasta la creación de la geometría analítica. Asimismo, tratamos sobre cómo se trabaja este concepto en los textos didácticos más usados en la educación secundaria de nuestro país.

Es importante resaltar la importancia sobre el desarrollo histórico del objeto matemático trabajado en el salón de clase, ya que nos permite conocer el origen y evolución de dicho objeto. Asimismo, es una herramienta clave para trabajar con alumnos que cada día presentan menos atención e interés en el aprendizaje de la matemática, debido a que este último es presentado como un conocimiento acabado (teoremas, definiciones, etc.).

En ese sentido, los matemáticos educadores Sierpinska y Lerman (citado en Carmona, 2011) aseveran que:

> Este tipo de estudios provee explicaciones detalladas de los procesos por los que se desarrolla una idea matemática, observando las condiciones de desarrollos pasados, los momentos en los que se negocian y agregan significados ampliándose campos de estudio o los puntos en la historia en los que se descartan ideas y nociones asociadas a los conceptos en cuestión. (p. 6).

Antes de mostrar los aspectos históricos de nuestro objeto en estudio. Debemos tener en cuenta que no es posible saber exactamente dónde y cuándo apareció nuestro objeto matemático, así como las otras nociones, pues los historiadores matemáticos señalan que la matemática apareció en distintos lugares del mundo. Al respecto, Dumham (1995) manifiesta que:

> De los orígenes primitivos de las matemáticas no quedan vestigios. La información sobre los mismos se ha perdido irrecuperablemente, y de la misma manera que no podemos determinar quién pronunció la primera palabra o quién entonó la primera canción, tampoco tenemos idea de quién describió las matemáticas por primera vez. (p. 257).

A partir del texto citado, podemos decir que nuestro objeto en estudio no emergió en ningún punto particular. En ese sentido, las nociones matemáticas, según Dumhan, “aparecen en los registros históricos en muchas regiones diferentes por todo el planeta” (p. 257). Por ejemplo, el teorema de Pitágoras se puede descubrir en más de un lugar.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Sin embargo, también es necesario aclarar que nuestro objeto circunferencia es inherente al círculo; es decir, hablar de la circunferencia es también hablar del círculo y viceversa, aunque sabemos que ambos términos son diferentes. Aclarado esto, en el siguiente punto utilizamos ambos términos como un todo (nuestro objeto en estudio).

3.1. Aspectos históricos

Empezaremos presentando la belleza de nuestro objeto matemático y su importancia para los otros objetos. Al respecto, el historiador Dunham (1995) señala que:

> La circunferencia, seguramente ha sido, uno de los conceptos geométricos más importantes. Las circunferencias son sencillas, elegantes y bellas, dotados de una auténtica perfección en dos dimensiones. En manos de los griegos fueron interesantes no solo en sí mismos, sino como herramientas primarias para explorar otras ideas geométricas. (p. 49).

Esta afirmación nos permite decir que el objeto circunferencia tuvo influencia en la creación de otros objetos. De la misma manera, el autor señala que fue de gran utilidad el uso de la regla y el compás para las construcciones geométricas desde dos aspectos:

> Fueron instrumentos de fácil acceso para dibujar las figuras tangibles y el segundo, en un sentido más abstracto, estas herramientas consagraron la línea recta (mediante la regla) y la circunferencia (mediante el compás) como las claves de la existencia geométrica. Con la firme precisión de la línea recta ideal y la perfecta simetría del circunferencia ideal, los griegos crearon sus figuras geométricas y, a partir de ahí, sus teoremas geométricos. (p. 120).

Es evidente, que la supremacía de la circunferencia y la recta (claves de la existencia de la geometría) era de carácter extraordinario para los matemáticos griegos, y para la construcción de otras nociones matemáticas, en especial en la geometría. He aquí su importancia para nuestro estudio. La circunferencia es un término que se ha vuelto muy usual para cualquier individuo. Su construcción es sencilla, pero al mismo tiempo necesaria en muchas construcciones geométricas. En consecuencia, podemos dar la siguiente definición: una circunferencia es una figura plana en la que todos sus puntos están a una misma distancia (radio) de un punto fijo (centro) en el mismo plano. La curva que encierra dicha figura es la circunferencia. Así, al observar un círculo podemos notar que todos son de la misma forma Al respecto, los matemáticos señalan que todos los círculos son semejantes. Como sabemos, la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro es la misma para cualquier círculo. En ese sentido, sabemos que si C es la longitud de la circunferencia y D el diámetro, los matemáticos sostienen que la razón C/D es siempre constante para cualquier círculo. Dicha constante se refiere al número

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

$\pi = 3.14159\ ...$, esto es, $\frac{C}{D} = \pi$. De aquí podemos obtener que $C = \pi D$ y como $D = 2r$, al remplazar se obtiene $C = 2\pi r$.

Nuestro objeto ha llamado la atención de muchos matemáticos famosos a lo largo de su evolución. Así, sobre la línea de tiempo de la matemática, nos situamos aproximadamente en el año 1650 a.C., cuando descubrieron, en el Antiguo Egipto, el papiro de Ahmes que contenía decenas de problemas matemáticos con sus respectivas soluciones. Por ejemplo, contiene una selección de cuestiones geométricas, y la más misteriosa de las cuales es el problema 50 que dice: “Un campo circular tiene un diámetro de 9 khets. ¿Cuál es su área?” (Dunham, 1995, p. 260). Lo que resulta interesante es que a partir de su solución se puede obtener el cálculo aproximado del valor de π (que guarda mucha relación con nuestro objeto). En los años 300 a. C., nos encontramos con Euclides, quien en su gran obra *Los Elementos*, que consta de trece tomos/volúmenes, dedica especial atención en el volumen III sobre los teoremas relativos a la circunferencia, las tangentes, las cuerdas y la medición de ángulos. El tomo III consta de once definiciones y treinta y siete proposiciones, cinco de ellas son problemas y las otras, teoremas. Uno de los postulados que considera está referido al hecho de que es posible trazar un círculo con un centro y una distancia cualesquiera. El círculo también tuvo su lugar en el interés del gran matemático Arquímedes, quien vivió en los años 287-212 a.C. Utilizó la técnica de aproximar polígonos a círculos para llegar a su cálculo significativo más exacto de π.

Otro aspecto considerado en este capítulo sobre nuestro objeto es el referido a las grandes aplicaciones y descubrimientos de gran importancia en nuestra historia, esto es, la rueda, que tiene la forma de una circunferencia y círculo. Empezaron con los rodillos y los trineos y fueron aprovechados por los sumerios (8000 a.n.e) para transportar objetos de gran tamaño y peso. En nuestros días toman un papel fundamental sobre el transporte (sistemas mecánicos) que utilizan mecanismos simétricos circulares y en otros muchos campos complejos, es decir, la circunferencia tiene diversas aplicaciones. Otra utilidad indispensable como herramienta es en las construcciones geométricas o planos en el software matemático (GeoGebra, Cabri II-III, AutoCAD, etc.).

De otro lado, es pertinente describir la evolución histórica respecto a las representaciones algebraicas y gráficas. Hablar de estos últimos, es adentrarnos a las secciones cónicas, pues es sobre estas cónicas donde está inmerso nuestro objeto

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

circunferencia visto desde el cuadro de la geometría analítica. Para ello, es importante entonces identificar qué matemáticos de la historia aportaron sobre las secciones cónicas. En ese sentido, Boyer (1968) señala que:

> […] había curvas adecuadas, que se podía obtener todas por el mismo método, a saber, cortando un cono circular recto por un plano perpendicular a un elemento o generatriz del cono; es decir, lo que se le atribuye a Menecmo es precisamente el descubrimiento de las curvas que recibieron más tarde los nombres de Circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. (p. 132).

El autor menciona que Menecmo (vivió entre los años 380 y 320 a. C) fue quien descubrió dichas curvas. Por ejemplo, señala que al cortar un cono por un plano perpendicular a su generatriz, la curva que se genera de la intersección del cono y del plano es la ecuación. Hablando en términos de la geometría analítica moderna, se puede expresar en la forma $y^2 = lx$. Sobre esta primera igualdad, no se sabe cómo lo obtuvo.Sin embargo, lo que Boyer manifiesta al respecto es que "no sabemos cómo obtuvo Menecmo esta propiedad, pero lo cierto es que depende exclusivamente de algunos teoremas de geometría elemental" (p. 132). En ese sentido, Boyer (1968) sostiene que algunos historiadores indican que "Menecmo ya conocía en cierta forma la geometría analítica" (p. 134). Sin embargo, el autor afirma que la opinión de los historiadores carece de justificaciones, pues señala que en la época de Menecmo desconocían que una ecuación arbitraria en dos indeterminadas determina una curva.

Se le atribuye también a Apolonio de Perga (262 - 190 a.C.) los aportes referentes a las *secciones cónicas*, considerado este último como una de sus grandes obras. Al respecto, el autor asevera que "las cónicas de Apolonio fueron sin duda las mejores obras en su género en la matemática antigua" (p. 194). Es un tanto difícil determinar específicamente quién fue el que estudió profundamente las secciones cónicas. Pero el historiador Boyer señala que Apolonio:

> Llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de dos hojas. De hecho, Apolonio da la misma definición de cono circular que se utiliza actualmente. (p. 195).

De la misma manera, el autor afirma que los procedimientos que utilizó Apolonio cuando trabajó las cónicas son similares en muchos aspectos "al planteamiento analítico moderno, motivo por el que su obra se ha considerado como una anticipación a la geometría analítica de Descartes en unos 1800 años" (p. 207).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

De esta manera, describimos algunos aspectos de las primeras gestaciones de la geometría analítica. Asimismo, debemos aclarar que los precedentes de la geometría analítica respecto a la época de Descartes son remotos, pues Menecmo y Apolonio ya habían tenido algunas aproximaciones. También fue estudiada por Oresmes (medio), así como por Viete (próximo) y por Fermat. Por ejemplo, Viete aplicó constantemente el álgebra a la resolución de los problemas geométricos. El auge de la geometría analítica, sin lugar a dudas, tuvo su lugar en la historia de la matemática cuando fue estudiado por René Descartes, filósofo que vivió en el siglo XVII. Pero se señala también que en Fermat, coetáneo de Descartes, en una de sus grandes obras (*Isagoge ad locos planos et solidos*) antes de la geometría de Descartes, se ha encontrado lo que se considera como la parte esencial de la geometría analítica. En su obra expone con más claridad que en la obra de Descartes. En ese sentido, Dunham (1995) señala que "los inventores de la geometría analítica fueron Pierre de Fermat y René Descartes" (p. 391). Asimismo, el autor manifiesta que la invención de la geometría analítica por parte de Fermat fue ensombrecida por sus contribuciones mejor conocidas a la teoría de números y porque no publicó a tiempo los trabajos sobre la geometría analítica. En su lugar, de acuerdo al autor, "la gloria de la geometría analítica fue a parar al que primero lo publicó, René Descartes" (p. 391). Desde entonces, se considera a Descartes como el padre de la geometría analítica, quien intentó clasificar las curvas conforme al tipo de ecuaciones que las producen. La invención de la geometría analítica así como el cálculo marcaron el comienzo de las matemáticas modernas en el siglo XVII.

Se entiende por geometría analítica la parte de las matemáticas que relaciona y fusiona la geometría sintética con el álgebra, referidas a un sistema de coordenadas. En ese sentido, consideramos que la geometría analítica estudia las figuras geométricas usando el sistema de coordenadas y resuelve los problemas geométricos con procedimientos algebraicos, mediante los cuales las coordenadas se representan por grupos numéricos y las figuras se representan por ecuaciones. Así, podemos representar un objeto matemático por una ecuación algebraica así como representar gráficamente en sistema de coordenadas.

Es notable la importancia de nuestro objeto como un concepto fundamental en el proceso de construcción de otras nociones matemáticas, el cual generó gran interés en manos de grandes matemáticos por su sencillez y perfecta simetría para generar otros conceptos y teoremas. En cuanto a sus aplicaciones, tuvo una influencia muy importante

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

en el sistema mecánico. Imaginemos que si las ruedas o llantas de los carros fueran cuadradas o triangulares, cómo sería el desplazamiento. Y en cuanto a la geometría analítica, durante mucho tiempo, las secciones cónicas no adquirieron un papel relevante en los estudios matemáticos, hasta que se reveló que el entorno que nos rodea está lleno de las secciones cónicas: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

A continuación presentamos el objeto circunferencia que forma parte del cuadro de la geometría analítica y que se genera al cortar un cono circular con un plano perpendicular al eje de dicho cono.

3.2. La circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica

En este apartado, presentamos el objeto circunferencia desde su concepción como lugar geométrico, representación gráfica y representación algebraica, es decir, desde el cuadro de la Geometría Analítica. Las actividades diseñadas para este estudio, abordarán lo que se presenta en este apartado. Solo cubriremos lo correspondiente al estudio de nuestro interés, sin perder de vista que el estudio de la circunferencia es mucho más amplio y complejo.

Para tal efecto, consideramos necesario revisar dos textos que nos permitirán establecer el concepto de la circunferencia: Lima (2004) y Lehmann (1980). Posteriormente, basándonos en el análisis de los libros citados, planteamos una manera de presentar nuestro objeto matemático, con la idea de que facilite la comprensión y desarrolle las capacidades en nuestros alumnos.

La circunferencia

Definición: La circunferencia $\mathcal{C}$ es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ que se mueven de tal manera que se conservan siempre a una distancia constante (denominado radio) $r > 0$ de un punto fijo $C(h,k)$ del mismo plano llamado centro, es decir:

$$\mathcal{C} = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(P,C) = r\}$$

La Figura 4 muestra la representación gráfica de la condición del lugar geométrico del punto $P(x,y)$ definido.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

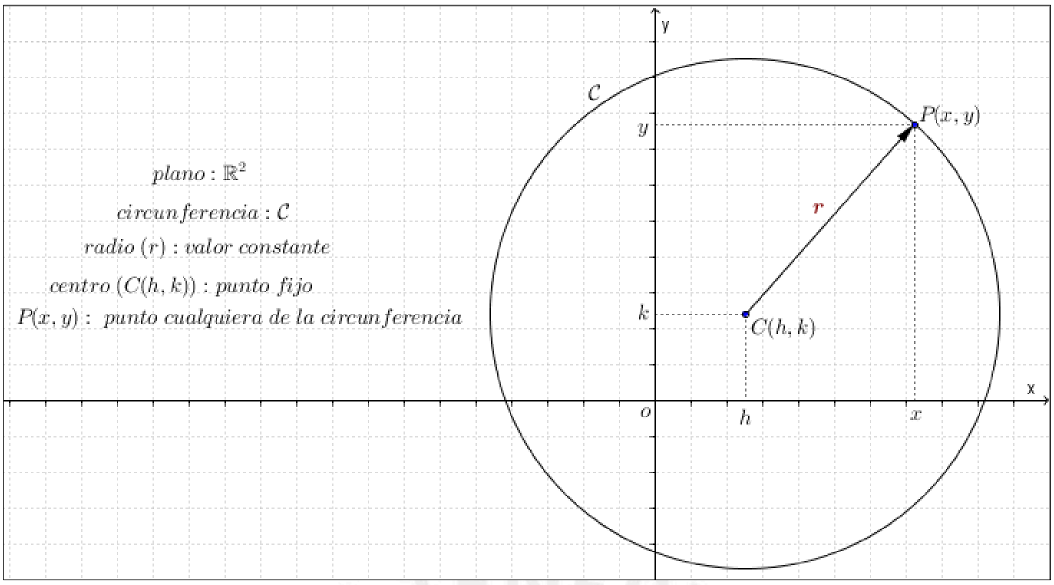


Figura 4. Elementos de la circunferencia

Teorema. La circunferencia de centro $C = (h, k)$ y radio $r > 0$ es el conjunto $\mathcal{C}$ formado por los puntos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{r}^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

La ecuación (1) recibe el nombre de *ecuación ordinaria* de la circunferencia y su representación gráfica en el plano cartesiano se observa en la Figura 4.

Demostración:

1. $(\rightarrow)$ Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C = (h, k)$ y radio r (véase la Figura 4). Entonces, por definición de la circunferencia, el punto P debe satisfacer la condición geométrica.

$$d(C, P) = |\overline{CP}| = r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$|(x, y) - (h, k)| = r$$

$$|(x - h, y - k)| = r$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros en la última expresión, se obtiene la siguiente ecuación que representa el objeto circunferencia.

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2. $(\leftarrow)$ Sea un punto $P_0(x_0, y_0)$ cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1), de tal manera que verifica la siguiente igualdad:

$$(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 = \boldsymbol{r^2}$$

Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación se tiene que:

$$\sqrt{(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2} = |r|$$

Como $r > 0$, entonces

$$\sqrt{(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2} = r$$

Luego, por la condición geométrica de (2) aplicada al punto $P_0(x_0, y_0)$ se tiene que:

$d(C, P_0) = |\overline{CP_0}| = r$ ■.

Se puede observar en la ecuación (1) que, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la *ecuación ordinaria de la circunferencia* se puede escribir inmediatamente.

A continuación presentamos los casos particulares de la *ecuación ordinaria* de la circunferencia cuando las coordenadas de su centro toman los siguientes valores:

- Si $h = 0$ y $k \neq 0$, el centro de la circunferencia se encuentra sobre el eje OY. Entonces:

La expresión algebraica que representa la circunferencia está dada por:

$$\boldsymbol{x^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

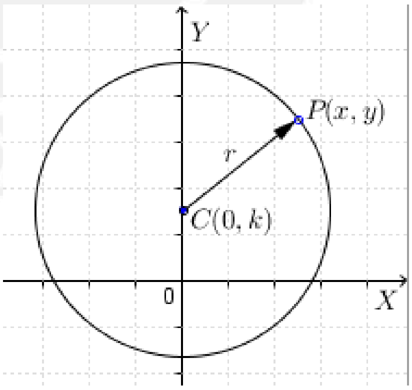


Figura 5. Representación gráfica de la Circunferencia con centro sobre el eje Y

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- Si $k = 0$ y $h \neq 0$, el centro de la circunferencia se encuentra sobre el eje OX. Entonces:

La expresión algebraica que representa la circunferencia está dada por:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{r}^2$$

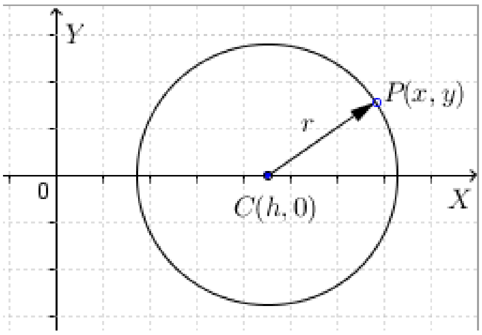


Figura 6. Representación gráfica de la Circunferencia con centro sobre el eje X

- Finalmente, si el centro de la circunferencia se ubica en el origen de coordenadas, es decir, $C = (h, k) = (0,0)$, Entonces:

La expresión algebraica que representa la circunferencia está dada por:

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{r}^2$$

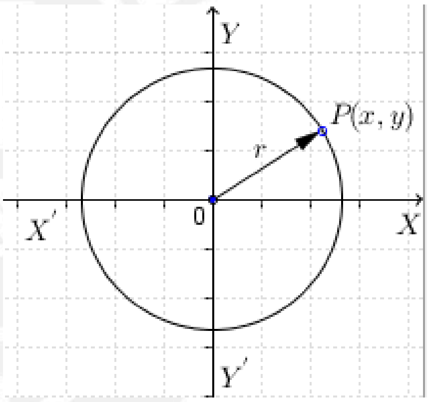


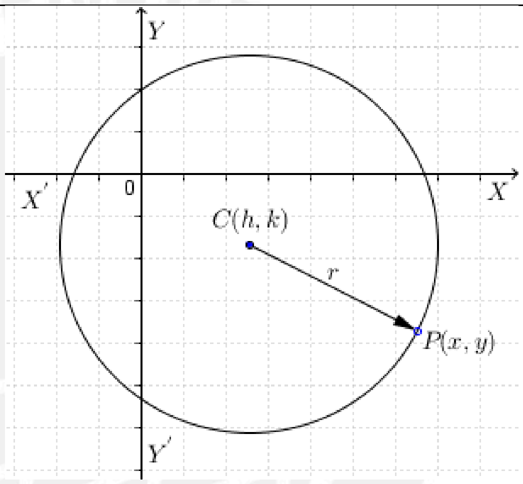
Figura 7. Representación gráfica de la circunferencia con centro en el origen de las coordenadas

La última ecuación recibe el nombre de *ecuación canónica***.**

En la siguiente Tabla 1 se muestra el objeto circunferencia en tres formas de representación: textual (en términos de lugar geométrico), gráfica y algebraica. Consideramos pertinente que los alumnos diferencien el objeto y sus representaciones con el fin de que no confundan dicho objeto con su representación y, de esta manera, se pueda favorecer en la construcción del objeto circunferencia.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Tabla 1. La circunferencia y sus representaciones

Objeto / Representación	Circunferencia
Textual	La circunferencia es el lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve en un plano π de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante r de un punto fijo $C(h, k)$ de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio.
Gráfica	 **Figura 8.** Representación gráfica de la circunferencia con centro fuera del origen
Algebraica	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ **o** $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

Si desarrollamos la ecuación ordinaria (1) de la circunferencia, esto es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Esta última expresión se puede escribir en la siguiente forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \dots \dots \dots \dots \dots (3)$$

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Donde,

$D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$ son constantes.

Por lo tanto, se ha deducido que cualquier ecuación de la circunferencia se puede escribir de la forma (3), conocida como la *forma general de la ecuación de la circunferencia*.

Recíprocamente, ¿una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ siempre describe una circunferencia? Para responder esta cuestión, pasaremos de la forma general (3) a la forma (1) recurriendo al método de completar cuadrados. Agrupando en la ecuación (3) se tiene:

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

Sumando en ambos miembros los números $\frac{D^2}{4}$ y $\frac{E^2}{4}$, se obtiene

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

luego,

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Comparando las ecuaciones de (1) y (4), observamos que depende del valor del segundo miembro de la ecuación (4). Para que la ecuación (4) represente una circunferencia o no, se debe analizar los tres casos posibles para identificar si es una circunferencia. Esto es:

- Caso 1: Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación (4) representa una circunferencia de centro el punto $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$
- Caso 2: $D^2 + E^2 - 4F = 0$, si y sólo si $x = \frac{D}{2}$ y $y = \frac{E}{2}$. Esto es, la ecuación (4) representa el punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.
- Caso 3: Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, en la Geometría Analítica, la ecuación (4) no representa un lugar geométrico.

Por tanto, del análisis anterior se obtiene el siguiente teorema:

Teorema. La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia, solamente si $B^2 + E^2 - 4F > 0$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Donde las coordenadas del centro y radio de la circunferencia son: $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$, respectivamente.

Hasta aquí hemos presentado una parte del objeto circunferencia. Su estudio es muy amplio y complicado tanto para el análisis como para el aprendizaje de los alumnos que pertenecen a la Educación Básica Regular.

Por otro lado, en el siguiente punto analizamos el tratamiento del objeto en dos textos didácticos de educación secundaria.

3.3. Aspectos didácticos

En este apartado, describiremos el papel de los textos didácticos como herramienta y/o material en el trabajo educativo, es decir, su importancia en manos de los actores (profesor y alumno) en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Seguidamente, presentamos el análisis de dos textos teniendo en cuenta cuatro criterios: el primer criterio se adaptó de Morales (2013) y los restantes son considerados por el investigador.

Tenemos conocimiento que los textos escolares son considerados como instrumento importante de trabajo para la actividad docente y para el aprendizaje del estudiante. Así, según considera Ricaldi (2011), los textos escolares “constituyen, para la mayoría de docentes, una fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores y en cierta medida los resultados de investigaciones” (p. 53).

Por otro lado, Danisova (2007, citado en Ricaldi, 2011) asevera que:

> Un libro de texto es una publicación para ayudar al profesor con un contenido metódicamente adaptado y limitado por el currículo, un recurso fundamentalmente didáctico que ayuda a desarrollar un proceso educacional y que se constituye en un instrumento que colabora para implementar el control y la evaluación del proceso de aprendizaje del alumno. (p. 53).

En ese sentido, los textos desempeñan una función central en la labor educativa, al ser un recurso que contribuye al beneficio del proceso educativo y, particularmente, constituyen un apoyo valioso para el docente en el trabajo habitual; ya sea en clase o en el diseño de sus actividades. Es decir, representan una herramienta que permite apoyar y promover aprendizajes de calidad y, en paralelo, la equidad en la distribución social de los aprendizajes, brindando a todos los alumnos las mismas oportunidades. Bajo este

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

contexto, sobre la importancia de los textos, Bravo (2007, citado en Morales, 2013) manifiesta que:

> Un objeto cultural tangible para el análisis del discurso matemático escolar lo constituye la figura del libro de texto, dado que es una guía imprescindible para la acción aprendizaje de profesores y alumnos en todo proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. (p. 64).

Por tanto, consideramos que los textos didácticos son materiales que transmiten el saber cultural entre el autor, el profesor y el alumno.

Para propósitos de nuestra investigación describimos y analizamos dos textos utilizados en la Educación Básica Regular, centrando nuestra atención en la unidad que corresponde a la Geometría Analítica, concretamente en el tema de la circunferencia. Dichos textos, con los criterios considerados para su análisis, nos permitirán tener un acercamiento en relación al tratamiento que se le da a nuestro objeto en estudio.

La siguiente Tabla 2 muestra los dos textos y las razones por los que han sido elegidos.

Tabla 2. Textos de Educación Básica Regular elegidos para su análisis

Texto	Editorial	Razón por el que se eligió
Matemática 5. Texto oficial del MINEDU-2012	Santillana	Este texto ha sido elegido por ser un texto utilizado en las escuelas estatales y es revisado y aceptado por el MINEDU para los estudiantes del 5º del nivel secundario. Finalmente, por ser el material utilizado por los alumnos que forma parte de nuestra investigación. Su análisis nos permitirá hacer una comparación paralela con el siguiente texto usado en colegios privados.
Matemátiqus 5. Autor: Máximo de la Cruz Solórzano (2013).	Bruño	Hemos considerado este texto por ser el material recomendado en colegios privados y, con el objeto de comparar este material con el texto que usan nuestros sujetos de investigación, respecto a cómo abordan nuestro objeto matemático en estudio.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Describiremos y observaremos en los libros citados en la tabla anterior de acuerdo a los criterios que hemos establecido en nuestro estudio. Así, adaptamos el criterio 1 considerado por Morales (2013) y los criterios 2, 3 y 4 establecidos por el investigador, los cuales consideramos pertinente en esta investigación, debido a razones que se explicitan más adelante. Estos criterios son:

1. La forma como el autor del texto propone o presenta la introducción de la circunferencia.
2. Los tipos de actividades que sugiere el autor para familiarizar la noción del nuevo concepto.
3. Si en el texto se usa las diferentes representaciones del objeto visto en su representación gráfica, algebraica y textual (en términos de lugar geométrico).
4. Si en los textos didácticos sugiere el uso de las TICs: páginas webs, software de Geometría Dinámica, etc.

En el análisis que desplegamos, se procurará evidenciar la manera de cómo el autor del texto direcciona los conocimientos necesarios para la construcción del concepto de circunferencia, así como la preocupación por crear situaciones que favorezcan la formación del conocimiento por parte del estudiante. En ese sentido, consideramos que la construcción de una noción matemática es posible siempre y cuando se le dé al estudiante la oportunidad de participar, procurar que tenga una interacción directa con el problema y no presentar técnicas algorítmicas inmediatas para resolver dicho problema.

En lo que sigue, describimos las razones de por qué se consideraron los criterios mencionados. Por otro lado, para evitar confusiones y simplificar los nombres, denominaremos con T1 y T2 a los textos didácticos del MINEDU y Matemátiqus, respectivamente.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

3.3.1. Justificación de los criterios considerados para el análisis de los textos didácticos T1 y T2

Tabla 3. Justificación de los criterios considerados para el análisis de los textos didácticos

Criterio	Justificación
1	La secuencia que sigue el autor, para introducir un nuevo objeto matemático, puede ayudar como también dificultar a los alumnos cuando construyen dicho objeto. En ese sentido, éste es un factor que debe considerar el profesor/investigador cuando diseña sus actividades. Este criterio tiene el objeto de analizar el perfil del texto didáctico respecto a cómo se introduce, particularmente, el concepto de circunferencia. Esto es, si presenta de manera constructiva el concepto, si establece una conexión o relación entre las tres representaciones (textual, gráfico y algebraico), si utiliza una secuencia u orden lógico, el cual puede ayudar al docente a tener el control del modo como el alumno aprende. Los conceptos como distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento, así como puntos que equidistan respecto a un punto fijo, son nociones elementales para generar el conocimiento de nuestro objeto en estudio desde el cuadro de la geometría analítica. Los mismos son necesarios para que el estudiante pueda movilizar como saberes previos (herramientas) en las actividades diseñadas. De otro lado, el profesor, al elegir un texto, debe verificar la secuencia que siguió el autor para construir el concepto, pues el texto utilizado por el grupo de estudiantes en clase sirve de referencia del contenido que se trabaja. Finalmente, el material didáctico que considera en su secuencia las capacidades y conocimientos de los estudiantes, puede ser útil para el docente para introducir el concepto que será tratado.
2	Para este segundo criterio, el objeto es analizar si presentan actividades relacionadas con hechos cotidianos del alumno, si el concepto trabajado está involucrado en dichas situaciones que se trabaja en clase. Estas consideraciones por el autor en el texto didáctico pueden ayudar o facilitar la comprensión y, al mismo tiempo, dar sentido y utilidad al objeto matemático

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

	cuando el alumno aprende; lo que sería contrario a utilizar técnicas algorítmicas que solo permiten al alumno generar cierta aversión a la matemática.
3	En nuestro estudio, para lograr la comprensión del concepto de circunferencia, el cual involucra identificar el objeto en términos de lugar geométrico, en su representación gráfica y algebraica, nos interesa identificar en los textos didácticos si utilizan dichas representaciones para ayudar en la aprehensión del objeto, pues centrar su análisis del mismo en una sola representación puede dificultar el aprendizaje del alumno, aún más, confundir el objeto matemático con su representación. Douady señala al respecto que es preferible proponer problemas de modo que a los alumnos les faciliten "atacar" al problema ayudándose en otras representaciones. El cambio a otras representaciones hace que sea más accesible al problema. Asimismo, este cambio de representación o ver desde otra perspectiva el objeto en estudio puede ayudar a los estudiantes a apropiarse del conocimiento y comprender el objeto desde otras representaciones, el cual se convierte en herramienta (conocimientos antiguos) para adquirir nuevas nociones matemáticas.
4	Este último criterio tiene como finalidad analizar si el autor del texto didáctico hace uso o recomienda algún software de geometría dinámica o utiliza páginas webs para profundizar el estudio del objeto en cuestión, si presenta problemas que involucren en sus soluciones el uso de TICs, si hay problemas que solicitan seguir una secuencia utilizando algún software, etc. Consideramos que el uso de las TICs puede ayudar a los alumnos cuando construyen una noción matemática, asimismo puede fomentar la autonomía en su aprendizaje, a diferencia de las clases tradicionales que aún persisten en diferentes ambientes de clase, donde el profesor es el encargado de "depositar" los conocimientos sin dar la oportunidad al estudiante de explorar, opinar, discutir y utilizar sus propios criterios para construir el objeto.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

3.3.2. Análisis de la estructura general de los textos didácticos T1 y T2

- **Texto didáctico 5 Matemática del MINEDU (T1)**

Este texto está dividido en ocho unidades que muestran la siguiente estructura general:

Situación inicial →

- Generación del conflicto cognitivo
- Actividades previas
- Imagen motivadora
- Aprendizajes esperados y actitudes
- Información previa
- Actividades de recuperación de saberes previos
- Información complementaria

Situación central →

- Introducción
- Texto informativo
- Recurso TIC
- Actividades propuestas
- Actividades de evaluación
- Organizador gráfico

Proyecto de aprendizaje →

Actividades que proponen investigaciones para responder a problemas de contexto local. Propuesta para la realización de actividades que facilitan la aplicación y el fortalecimiento de manera articulada, de las capacidades y actitudes trabajadas.

Evaluación y meta cognición →

- Ficha de evaluación
- Más actividades de evaluación
- Actividades meta cognitivas

Según la estructura para cada unidad que se muestra arriba, este texto muestra en general los criterios que creemos conveniente. Es decir, muestra una secuencia para cada unidad siguiendo un orden lógico. Por ejemplo, en la *sección inicial* considera actividades previas que le permiten al alumno indagar y recuperar los saberes previos del objeto, muestra información previa que consiste en la presentación de conocimientos tratados en grados anteriores, etc. En la *sección central* muestra el objetivo de la unidad y los conocimientos que se va a aprender, luego presenta el contenido del tema en

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

cuestión, organizado, con apoyo de ilustraciones, gráficas y ejemplos. En la misma sección también considera el uso de recurso TICs que promueve el uso en actividades (con preguntas orientadas a investigar, razonar, argumentar) con hojas de cálculo y páginas web sugeridas. Continúa con las actividades propuestas para ser resueltas de manera individual o grupal. Dichas actividades están clasificadas según el grado de dificultad (de menos a más). Al final de esta *Sección central*, muestra el organizador gráfico que consiste en presentar como resumen el contenido de la unidad relacionando cada área desarrollada en dicha unidad. En la parte de *Proyectos de aprendizaje* presenta actividades de investigación relacionadas con contextos locales y capacidades del área. Se parte con una situación problema y se trabaja con tiempos establecidos. Finalmente, se presenta la *Evaluación y Meta cognición* que consiste, básicamente, en actividades de la unidad según las competencias: razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas.

- **Texto didáctico Matemátiqus 5 (T2)**

Este texto está dividido por áreas: Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría y Estadística. Cada área se subdivide en unidades. Por ejemplo, el área de Geometría se subdivide en tres unidades, donde la unidad tres contiene nuestro objeto matemático en estudio.

Cada unidad tiene una información adicional relacionada con el tema que se va tratar. Sin embargo, la información que se muestra en la unidad tres que contiene nuestro objeto, no guarda, en absoluto, ninguna relación con la noción de circunferencia ni con las otras secciones cónicas. Esta información es estrictamente relacionada con la Geografía. No obstante, consideramos que la información adicional debería tener un contexto del objeto que se va tratar.

De otro lado, como en la mayoría de los casos, el texto inicia la unidad presentando la parte teórica del objeto, en seguida, muestra problemas y ejercicios intra-matemáticos, es decir, estrictamente matemáticos, así como una preferencia al trabajo algebraico. Pues, las actividades que muestra, no requiere ni solicita el uso de la representación gráfica para la solución.

Considerando los criterios anteriores ya descritos y justificadas en la Tabla 3, en lo que sigue se muestra el análisis de los textos didácticos (T1 y T2) seleccionados para

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

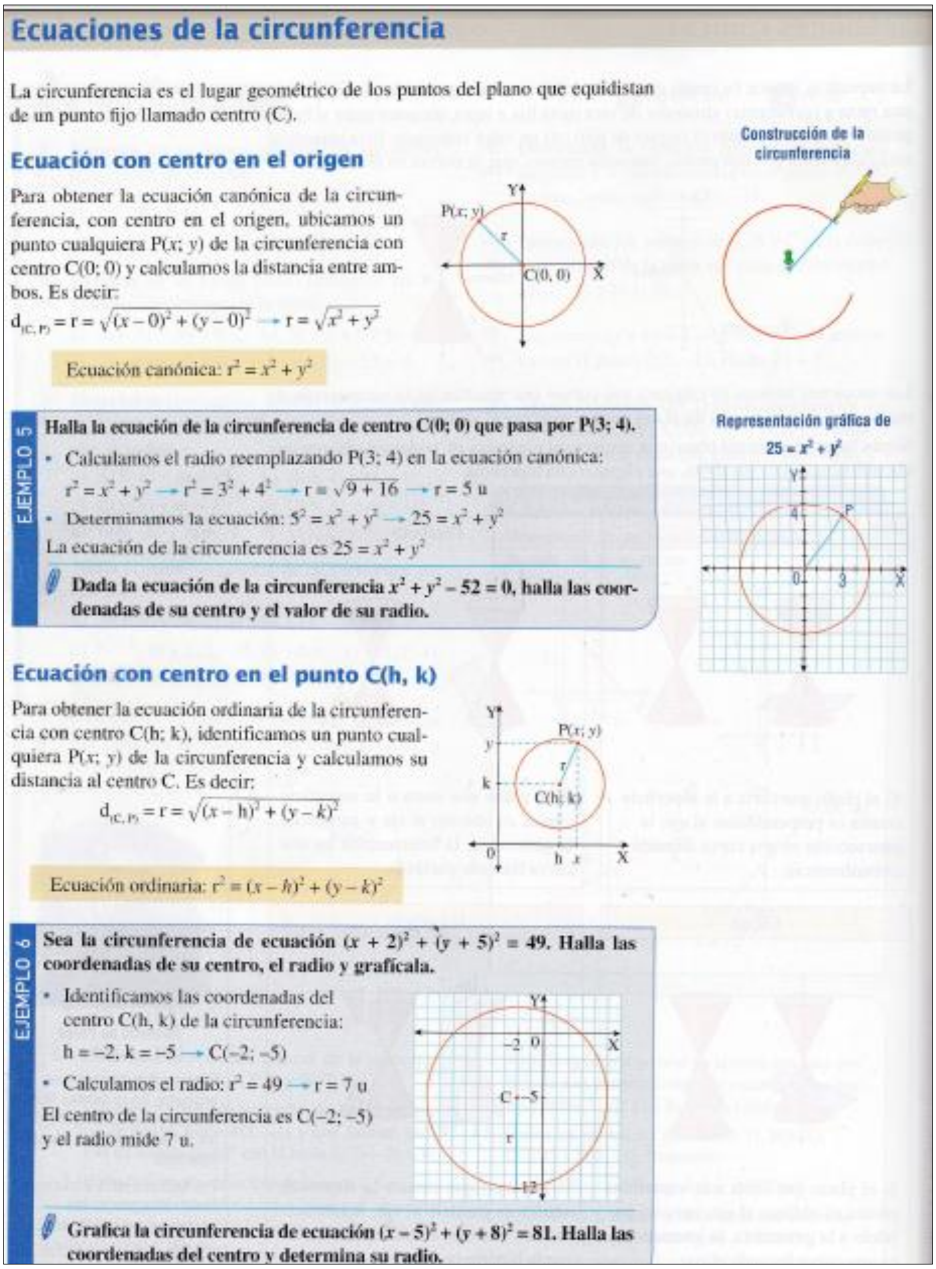
TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

nuestra investigación. El análisis corresponde a las unidades (unidad 7 en T1 y unidad 3 del área de Geometría en T2) que contiene al objeto circunferencia.

1. La forma cómo el autor del texto propone o presenta la introducción y definición de la circunferencia

Para el texto T1. En la primera página de la unidad 7, el autor define qué es y cómo se genera una sección cónica, enseguida presenta los diferentes tipos de curvas: la circunferencia, la parábola y la elipse, las que se obtienen según la inclinación del plano que se intersecta con la superficie cónica. La siguiente Figura 9 muestra la presentación del objeto circunferencia.



Ecuaciones de la circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (C).

Ecuación con centro en el origen

Para obtener la ecuación canónica de la circunferencia, con centro en el origen, ubicamos un punto cualquiera P(x; y) de la circunferencia con centro C(0; 0) y calculamos la distancia entre ambos. Es decir:

$d_{(C,P)} = r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

Ecuación canónica: $r^2 = x^2 + y^2$

EJEMPLO 5

Halla la ecuación de la circunferencia de centro C(0; 0) que pasa por P(3; 4).

- Calculamos el radio reemplazando P(3; 4) en la ecuación canónica:
  $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow r = \sqrt{9+16} \rightarrow r = 5$ u
- Determinamos la ecuación: $5^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 25 = x^2 + y^2$

La ecuación de la circunferencia es $25 = x^2 + y^2$

Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 52 = 0$, halla las coordenadas de su centro y el valor de su radio.

Ecuación con centro en el punto C(h, k)

Para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro C(h; k), identificamos un punto cualquiera P(x; y) de la circunferencia y calculamos su distancia al centro C. Es decir:

$d_{(C,P)} = r = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

Ecuación ordinaria: $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

EJEMPLO 6

Sea la circunferencia de ecuación $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 49$. Halla las coordenadas de su centro, el radio y grafícala.

- Identificamos las coordenadas del centro C(h, k) de la circunferencia:
  $h = -2,\ k = -5 \rightarrow C(-2; -5)$
- Calculamos el radio: $r^2 = 49 \rightarrow r = 7$ u

El centro de la circunferencia es C(−2; −5) y el radio mide 7 u.

Grafica la circunferencia de ecuación $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 81$. Halla las coordenadas del centro y determina su radio.

Figura 9. Presentación del objeto circunferencia con centro fuera del origen
Fuente: Matemática 5 (2012, p. 210)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En la Figura 9, observamos que el autor presenta el objeto definiendo en términos de Lugar Geométrico (LG), lo cual, creemos que es importante. Sin embargo, consideramos que definir la circunferencia desde su concepción como LG en el contexto de la geometría analítica sería lo más adecuado (véase el punto 3.2), ya que el tema se está desarrollando dentro del cuadro de la geometría analítica.

Por otro lado, observamos que para obtener la ecuación canónica que representa a la circunferencia, no utiliza la definición de LG, es decir, no establece una relación o conexión entre la ecuación y la definición. Esto ocurre también, cuando muestra la ecuación ordinaria que representa la circunferencia.

En cuanto a los ejemplos que muestra. En el ejemplo 6 solicita hallar, entre otras cosas, el radio de la circunferencia, un término que utiliza cuando en ningún momento se ha definido quién o qué relación tiene el radio con el objeto. Pensamos que la falta de información y conocimiento de términos claves de una noción matemática, simplemente a los alumnos podría confundir o no entender el enunciado de los problemas. Para evitar esto, consideramos que se debería hacer explícito los términos involucrados en el objeto que se va desarrollar.

De otro lado, notamos que para obtener las ecuaciones (canónica y ordinaria) que representan la circunferencia, el autor utiliza la propiedad de distancia entre dos puntos. Sin embargo, en los ejemplos sólo se limita a reemplazar los datos en la ecuación. Este procedimiento que se sigue, pensamos que podría aislar el objeto de otras nociones o conocimientos antiguos. Asimismo, con el intento de mostrar más sencillo y económico el proceso de resolución de los problemas, el autor puede generar conflictos cognitivos cuando se presenten problemas que requieran el conocimiento de otras nociones.

Finalmente, consideramos que la ecuación canónica de la circunferencia (con centro en el origen del sistema de coordenadas) debería presentarse después de la ecuación ordinaria (con centro fuera del origen de coordenadas), debido a que la primera es un caso particular de la ecuación ordinaria.

Para el texto T2. En este texto, a diferencia del texto T1, no muestra ni explica cómo se obtiene las secciones cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

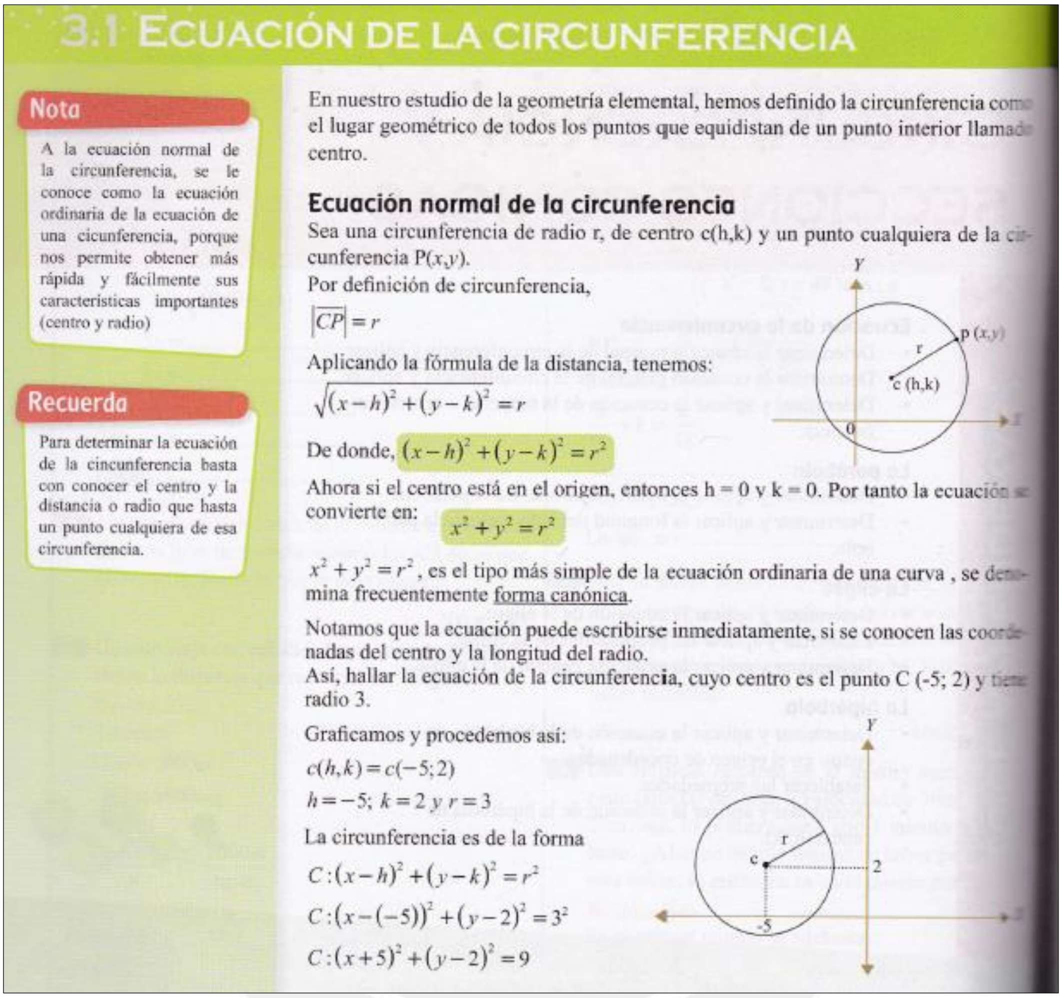
De otro lado, en la siguiente Figura 10, observamos que el autor define a grandes rasgos el objeto circunferencia en términos de LG. Decimos esto, porque no especifica si los puntos que equidistan de otro punto fijo se encuentran en el plano o en el espacio. Asimismo, al igual que en el texto T1, define el objeto como LG desde el punto de vista

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

de la geometría euclidiana. Sobre esto, como se había comentado anteriormente, pensamos que es pertinente definir desde el cuadro de la geometría analítica, esto debido a que el objeto se está desarrollando en dicho cuadro.



3.1 ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Nota

A la ecuación normal de la circunferencia, se le conoce como la ecuación ordinaria de la ecuación de una cicunferencia, porque nos permite obtener más rápida y fácilmente sus características importantes (centro y radio)

Recuerda

Para determinar la ecuación de la circunferencia basta con conocer el centro y la distancia o radio que hasta un punto cualquiera de esa circunferencia.

En nuestro estudio de la geometría elemental, hemos definido la circunferencia com el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto interior llamad centro.

Ecuación normal de la circunferencia

Sea una circunferencia de radio r, de centro c(h,k) y un punto cualquiera de la cir- cunferencia P(x,y).

Por definición de circunferencia,

$\left|\overline{CP}\right| = r$

Aplicando la fórmula de la distancia, tenemos:

$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$

De donde, $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

Ahora si el centro está en el origen, entonces h = 0 y k = 0. Por tanto la ecuación se convierte en: $x^2+y^2=r^2$

$x^2+y^2=r^2$, es el tipo más simple de la ecuación ordinaria de una curva , se deno- mina frecuentemente forma canónica.

Notamos que la ecuación puede escribirse inmediatamente, si se conocen las coord- nadas del centro y la longitud del radio.

Así, hallar la ecuación de la circunferencia, cuyo centro es el punto C (-5; 2) y tien radio 3.

Graficamos y procedemos así:

$c(h,k) = c(-5;2)$

$h=-5;\ k=2\ y\ r=3$

La circunferencia es de la forma

$C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$C:(x-(-5))^2+(y-2)^2=3^2$

$C:(x+5)^2+(y-2)^2=9$

Figura 10: Presentación del objeto circunferencia en el contexto de la geometría analítica
Fuente: Matemátiqus 5 (2012, p. 210)

Notemos que para obtener la ecuación ordinaria que representa la circunferencia, al igual que en texto T1, utiliza la propiedad de distancia. Pero, a diferencia del T1, el autor de este texto obtiene la ecuación canónica del objeto como un caso particular de la ecuación ordinaria. La cual, para esta investigación, es considerado pertinente.

En cuanto al ejemplo que plantea, observamos que la solución que procede el autor, es el mismo procedimiento que en el texto T1, es decir, al identificar los valores de h y k luego de igualar en punto $C(-5,2)$, simplemente reemplaza en la expresión algebraica. Pensamos que cuando el alumno utilice este procedimiento, es posible que pueda confundir en la operación de los signos y obtener una ecuación que no corresponde a la circunferencia de centro el punto C. Además, es un procedimiento que no permite obtener o construir la fórmula (representación algebraica) sino, solo permite utilizar

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

como una expresión acabada, así como aislar de otras nociones. De aquí proponemos el siguiente procedimiento:

- Si se tiene como dato el centro y el radio de una circunferencia, entonces, con la ayuda de un compás o de algún software es posible trazar la representación gráfica del objeto.
- Una vez representada, se puede ubicar un punto $P(x, y)$ cualquiera en la circunferencia. Luego, se puede emplear la propiedad de distancia entre dos puntos (C y P) e igualar al valor constante (radio de la circunferencia). La última igualdad que se obtiene es la expresión buscada.

Este procedimiento puede ayudar a los alumnos comprender que las fórmulas o las ecuaciones que representan al objeto se obtienen a partir de la gráfica. Asimismo, el hecho de realizar la representación gráfica y a partir de este obtener la ecuación, facilita ver el problema desde otro ángulo o perspectiva, así como identificar en la ecuación que las variables (x e y) representan las coordenadas de un punto cualquiera en la circunferencia. Del mismo modo, cuando los alumnos tratan de interactuar con diferentes representaciones del objeto, este permite diferenciar o distinguir el objeto matemático de sus diversas representaciones.

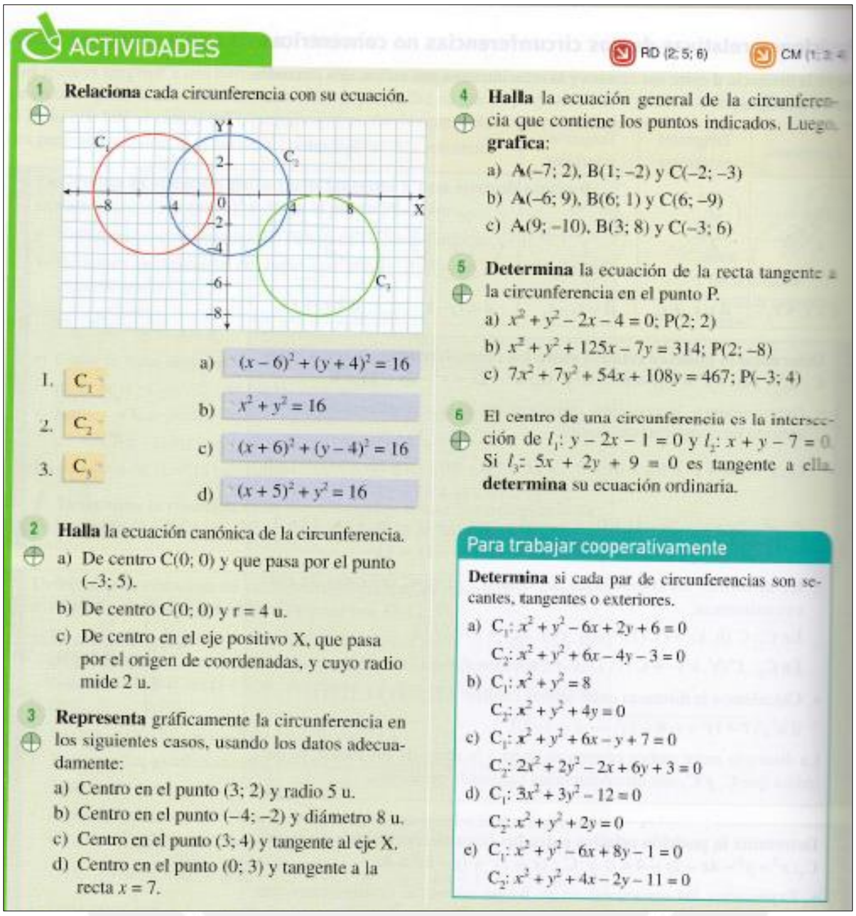
2. Los tipos de actividades que sugiere el autor para construir la noción del nuevo concepto

Para el texto T1. En este criterio analizamos las actividades que son desarrolladas en el texto por el autor para construir el objeto circunferencia, las actividades que son propuestas para el alumno y la relación que guardan dichas actividades con el quehacer cotidiano del estudiante. Al respecto, el autor durante la construcción del objeto muestra 8 ejemplos resueltos y 4 ejercicios para ser desarrollados por el alumno. De otro lado, las actividades propuestas para que trabajen los alumnos de manera individual o grupal son 7 preguntas. Luego, presenta un grupo de *actividades para seguir aprendiendo* que contienen 44 problemas sobre rectas, circunferencias, parábolas y elipses, de los cuales 14 problemas son sobre nuestro objeto. Finalmente, propone la *ficha de evaluación final* (evaluación y metacognición) que consta de actividades que permiten ayudar a comprobar el logro de los aprendizajes esperados. Dichas actividades, al igual que en las actividades anteriores, son presentadas según las capacidades y competencias del área y con grados de dificultad diferentes.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Por otro lado, observamos que existen algunos problemas que no están propuestos adecuadamente, es decir, confunden el objeto con sus representaciones al momento de plantear. Veamos en la siguiente Figura 11.


ACTIVIDADES

RD (2; 5; 6) CM (1; 2; 4)

1 **Relaciona** cada circunferencia con su ecuación.

1. C_1
2. C_2
3. C_3

a) $(x-6)^2+(y+4)^2=16$
b) $x^2+y^2=16$
c) $(x+6)^2+(y-4)^2=16$
d) $(x+5)^2+y^2=16$

2 **Halla** la ecuación canónica de la circunferencia.
a) De centro C(0; 0) y que pasa por el punto (–3; 5).
b) De centro C(0; 0) y r = 4 u.
c) De centro en el eje positivo X, que pasa por el origen de coordenadas, y cuyo radio mide 2 u.

3 **Representa** gráficamente la circunferencia en los siguientes casos, usando los datos adecuadamente:
a) Centro en el punto (3; 2) y radio 5 u.
b) Centro en el punto (–4; –2) y diámetro 8 u.
c) Centro en el punto (3; 4) y tangente al eje X.
d) Centro en el punto (0; 3) y tangente a la recta $x = 7$.

4 **Halla** la ecuación general de la circunferencia que contiene los puntos indicados. Luego, **grafica**:
a) A(–7; 2), B(1; –2) y C(–2; –3)
b) A(–6; 9), B(6; 1) y C(6; –9)
c) A(9; –10), B(3; 8) y C(–3; 6)

5 **Determina** la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P.
a) $x^2+y^2-2x-4=0$; P(2; 2)
b) $x^2+y^2+125x-7y=314$; P(2; –8)
c) $7x^2+7y^2+54x+108y=467$; P(–3; 4)

6 El centro de una circunferencia es la intersección de l_1: $y-2x-1=0$ y l_2: $x+y-7=0$. Si l_3: $5x+2y+9=0$ es tangente a ella, **determina** su ecuación ordinaria.

Para trabajar cooperativamente

Determina si cada par de circunferencias son secantes, tangentes o exteriores.
a) C_1: $x^2+y^2-6x+2y+6=0$
C_2: $x^2+y^2+6x-4y-3=0$
b) C_1: $x^2+y^2=8$
C_2: $x^2+y^2+4y=0$
c) C_1: $x^2+y^2+6x-y+7=0$
C_2: $2x^2+2y^2-2x+6y+3=0$
d) C_1: $3x^2+3y^2-12=0$
C_2: $x^2+y^2+2y=0$
e) C_1: $x^2+y^2-6x+8y-1=0$
C_2: $x^2+y^2+4x-2y-11=0$

Figura 11. Actividades sobre el objeto circunferencia
Fuente: Matemática 5 (2012, p. 214)

Observamos que en la pregunta 1, el autor hace referencia explícitamente que el objeto circunferencia son las representaciones. Lo mismo ocurre en el recuadro de la pregunta seis (para trabajar cooperativamente), pues señala que las circunferencias son las ecuaciones. Sin embargo, en la pregunta dos, por ejemplo, explícitamente solicita trazar la representación gráfica del objeto circunferencia. La cual permite distinguir el objeto matemático abstracto de su representación.

Es evidente que al momento de plantear los ejercicios, el autor no tuvo en cuenta que las ecuaciones y las gráficas son representaciones del objeto circunferencia. De aquí que proponemos el siguiente replanteamiento a los enunciados de cada problema (1 y 6):

- *problema 1*: Relaciona cada **representación gráfica** de la circunferencia con su respectiva ecuación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

- *problema 6*: Determina si cada par de **ecuaciones que representan** circunferencias son secantes, tangentes o exteriores.

Comentario con respecto al texto **T1**. El autor de Matemática 5 señala que la matemática tiene como objeto desarrollar las capacidades del alumno para lograr las competencias organizadas en:

> **Razonamiento y demostración**, para que formules e investigues conjeturas matemáticas; desarrolles argumentos y compruebes demostraciones matemáticas; y para que elijas y utilices varios tipos de razonamiento y métodos de demostración, **[…] Comunicación matemática**, para que organices y comuniques el pensamiento matemático con coherencia y claridad; para que expreses ideas matemáticas con presión; para que conozcas conexiones entre conceptos matemáticos y la realidad, y los apliques a situaciones problemáticas reales, **[…] Resolución de problemas**, para que construyas nuevos conocimientos resolviendo problemas de contextos reales o matemáticos; para que apliques y adoptes diversas estrategias en diferentes contextos, y para que al controlar el proceso de resolución, reflexiones sobre este y tus resultados. (p. 3).

Según este párrafo, el autor asegura que las actividades propuestas permitirán al alumno utilizar varios tipos de razonamiento y demostración, conectar el concepto matemático con la realidad y construir nuevos objetos resolviendo problemas de contextos reales. Sin embargo, para lograr la competencia de RD no se ve reflejada cuando presenta sus actividades resueltas, pues solo utiliza una sola técnica de resolución sin dar la oportunidad al alumno para demostrar otras formas de resolver o deducir los problemas. Asimismo, la competencia de RP no se ve reflejada en las actividades diseñadas por el autor, ya sea para construir el objeto o en las actividades propuestas para los alumnos, pues no presentan actividades en contextos reales para construir el objeto. De otro lado, debemos resaltar que muestra una organización de lo aprendido durante la unidad, es decir, muestra un resumen con el objeto de relacionar los temas trabajados en dicha unidad; asimismo, presenta situaciones que permiten a los alumnos comprobar su aprendizaje durante la unidad y proyectos de aprendizaje que les permiten investigar sobre el objeto estudiado. Sin embargo, en los proyectos de aprendizaje no está involucrado el objeto circunferencia.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Para el texto T2. Las actividades están estructuradas de la siguiente manera (véase la siguiente Tabla 4).

Tabla 4 Distribución de las actividades del T2

	Práctica dirigida	Problemas Modelo	Problemas propuestos
Ecuación normal de la circunferencia (ordinaria y canónica)	3 problemas para completar	17 problemas, de los cuales los números impares son parcialmente resueltos por el autor y los pares son propuestos para el alumno e incluye sus respuestas.	14 problemas agrupados según el nivel de dificultad; nivel 1 con 8 problemas y el nivel 2 consta de 6 problemas.
Ecuación general de la circunferencia y Ecuación de la recta tangente a una circunferencia	3 problemas para completar	16 problemas: los impares están parcialmente resueltos por el autor y los pares propuestos para el alumno e incluye las respuestas.	15 problemas agrupados según el nivel de complejidad: Los 10 primeros son del nivel 1 y los restantes, del nivel 2.

En cuanto al texto T2, también hemos notado que algunos problemas no están redactadas adecuadamente, pues al igual que en el texto T1, observamos que el autor confunde el objeto con su representación. Una muestra de ello, es el enunciado que se muestra en la Figura 13. En este enunciado, el autor confunde la ecuación con el objeto. Sin embargo, existen problemas que están formuladas correctamente (véase la Figura 12), ya que explícitamente expresa que la ecuación representa el objeto circunferencia.

3 Si la ecuación $x^2+y^2-8x+9y-74=0$ representa la ecuación de una circunferencia, hallar el centro y el radio.

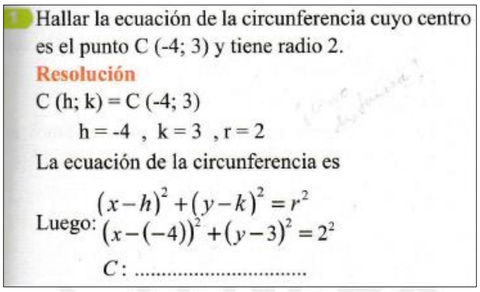
Figura 12. Problemas 3 de *Problemas Modelo*
Fuente: Matemátiqus 5 (2012, p. 185)

• El centro de la circunferencia $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ es el punto $(2;-1)$ ( )

Figura 13. Problema 1 de la *Práctica Dirigida*
Fuente: Matemátiqus 5 (2012, p. 185)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

<u>Comentario con respecto al texto **T2**</u>. El autor de este texto no incluye ningún problema que esté relacionado con el quehacer cotidiano del alumno. Las actividades están dirigidas para realizar conexión entre conceptos matemáticos más no con la realidad del alumno. De otro lado, en la resolución de los problemas, utiliza técnicas algoritmizadas, tal como se muestra en la Figura 14.



Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C (-4; 3) y tiene radio 2.

Resolución

C (h; k) = C (-4; 3)

h = -4 , k = 3 , r = 2

La ecuación de la circunferencia es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Luego: $(x-(-4))^2+(y-3)^2=2^2$

$C:$ ....

Figura 14. Problemas propuestos sobre el objeto circunferencia
Fuente. De la cruz (2013, p. 185)

En el procedimiento que sigue para resolver el problema, observamos que solo induce al alumno reemplazar los valores identificados sin opción de análisis. Esta forma de familiarizar el objeto crea dificultad en el alumno, pues no logra identificar las variables (x e y) involucradas en la representación algebraica. Por el contrario, Douady señala que los problemas planteados facilitan el aprendizaje del alumno cuando se puede interactuar el objeto en diferentes representaciones.

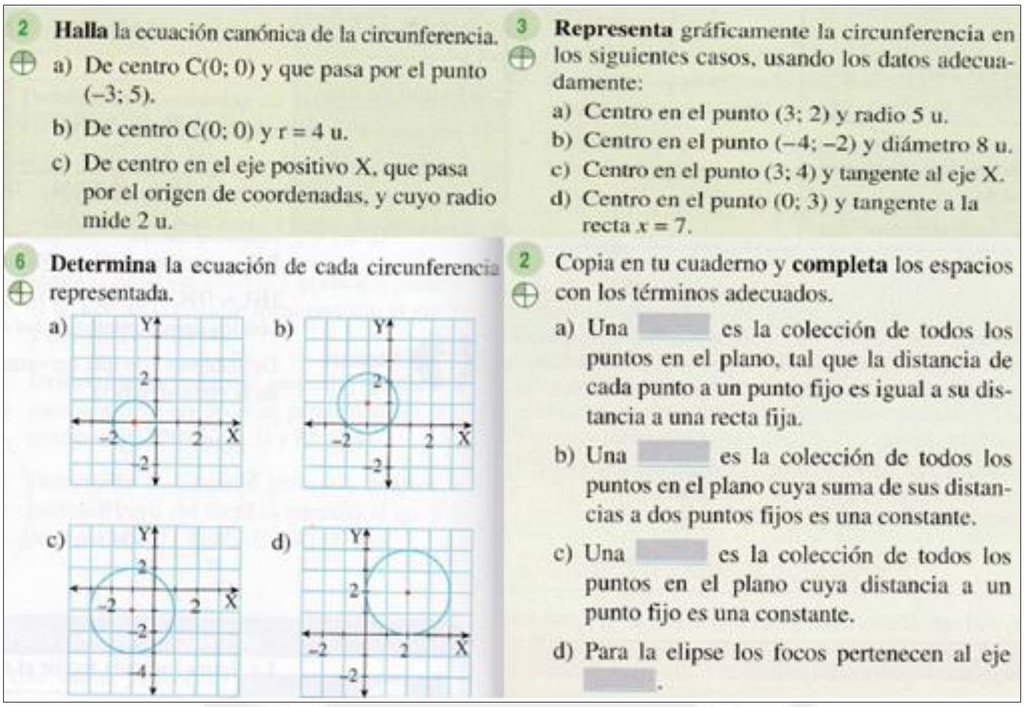
Creemos que para resolver el ejercicio, sería más conveniente apoyarse en una representación gráfica, y utilizar la propiedad de distancia entre dos puntos para que pueda favorecer y comprender la relación existente entre la representación algebraica y gráfica del objeto.

3. Si en el texto se usa diferentes representaciones del objeto visto en su representación gráfica, algebraica y textual

En este criterio revisaremos las representaciones que utilizan los autores. Nuestro fin es resaltar si el objeto matemático es presentado en diferentes representaciones.

Para el texto T1. El autor en todas las actividades que presenta utiliza diferentes representaciones, esto es, representación verbal, algebraica y gráfica. Por ejemplo, la siguiente Figura 10 muestra las diversas representaciones del objeto. Para su resolución, estas actividades requieren que el estudiante pueda utilizar representaciones distintas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis



2 **Halla** la ecuación canónica de la circunferencia.

a) De centro C(0; 0) y que pasa por el punto (–3; 5).

b) De centro C(0; 0) y r = 4 u.

c) De centro en el eje positivo X, que pasa por el origen de coordenadas, y cuyo radio mide 2 u.

3 **Representa** gráficamente la circunferencia en los siguientes casos, usando los datos adecuadamente:

a) Centro en el punto (3; 2) y radio 5 u.

b) Centro en el punto (–4; –2) y diámetro 8 u.

c) Centro en el punto (3; 4) y tangente al eje X.

d) Centro en el punto (0; 3) y tangente a la recta $x = 7$.

6 **Determina** la ecuación de cada circunferencia representada.

2 Copia en tu cuaderno y **completa** los espacios con los términos adecuados.

a) Una ______ es la colección de todos los puntos en el plano, tal que la distancia de cada punto a un punto fijo es igual a su distancia a una recta fija.

b) Una ______ es la colección de todos los puntos en el plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.

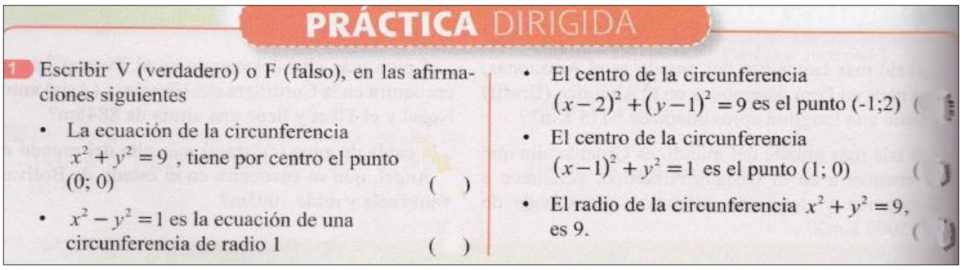
c) Una ______ es la colección de todos los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo es una constante.

d) Para la elipse los focos pertenecen al eje ______.

Figura 15. Actividades presentadas en sus diversas representaciones
Fuente: Matemática 5 (2012)

<u>Comentario con respecto al texto **T1**</u>. El autor del texto utiliza diversos registros en las actividades resueltas y propuestas. Sin embargo, no pudimos evidenciar actividades que involucren la interpretación del objeto en situaciones textuales. Esto nos hace pensar que hay mayor inclinación por el uso de la representación algebraica y gráfica.

Para el texto T2. En el análisis del T2 pudimos evidenciar solo dos representaciones gráficas del objeto: una circunferencia con centro $C(h,k)$, radio r y otro ejemplo del mismo con centro $C(-5,2)$, radio $r = 3$. En lo que sigue, las actividades que propone el autor están constituidas por representaciones simbólicas y algebraicas. Por ejemplo, la siguiente figura es parte de la práctica dirigida que consiste en reconocer por parte del alumno los elementos característicos del objeto y la ecuación canónica u ordinaria del mismo.



PRÁCTICA DIRIGIDA

1 Escribir V (verdadero) o F (falso), en las afirmaciones siguientes

- La ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, tiene por centro el punto (0; 0) ( )
- $x^2 - y^2 = 1$ es la ecuación de una circunferencia de radio 1 ( )
- El centro de la circunferencia $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ es el punto (-1;2) ( )
- El centro de la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ es el punto (1; 0) ( )
- El radio de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, es 9. ( )

Figura 16. Actividades de la práctica dirigida
Fuente. De la cruz (p. 184)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Por otro lado, en la siguiente Figura 13 se muestra un ejercicio parcialmente desarrollado del grupo de las actividades de *Problemas modelo.* En él, el autor muestra una forma algorítmica y un procedimiento que resulta complicado para el alumno.

Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$, en el punto P (-1; 6)

Resolución

Sea $y - 6 = m(x + 1)$, la familia de rectas que pasa por P (-1; 6)

$$y = mx + m + 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

a) Hallamos "m"

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Reemplazamos "y" en (1):

$$x^2 + (mx + m + 6)^2 - 2x - 6(mx + m + 6) - 3 = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 + m^2 + 36 + 2m^2x + 12mx + 6m - 2x - 6mx - 6m - 36 - 3 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2(m^2 + 3m - 1)x + (m^2 + 6m - 3) = 0$$

La condición de tangencia, es:

$$\Delta = 0 \quad , \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$[2(m^2 + 3m - 1)]^2 - 4(1 + m^2)(m^2 + 6m - 3) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$(3m - 2)^2 = 0$$

$$3m - 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En (*): $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La ecuación, es: $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Figura 17. Ejercicio parcialmente resuelto por el autor
Fuente: De la cruz (p. 193)

Las actividades presentadas por el autor, por lo general, siguen un mismo patrón, en el que se utiliza un proceso de desarrollo algebraico. No muestra ni una actividad en la que solicite la representación gráfica del objeto.

<u>Comentario con respecto al texto **T2**</u>. Las actividades parcialmente desarrolladas y las actividades propuestas permiten el aprendizaje del objeto reduciendo a operaciones algebraicas, dejando a un lado las representaciones gráficas. Este proceso de construcción del concepto de la circunferencia nos hace pensar que el autor da una exagerada importancia al trabajo algebraico. Por ejemplo, para resolver la actividad de la Figura 14, el alumno requiere un pensamiento abstracto; requiere el dominio de todas las propiedades de los conceptos involucrados. Para una presentación y análisis superficial en la construcción del concepto del objeto en estudio que presenta el autor, consideramos que es un tanto dificultoso desenvolverse sobre ese tipo de actividades. Sin embargo, creemos que otra manera de presentar el desarrollo del problema podría ser apoyado de la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

representación gráfica del objeto.

De la ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$, completando cuadrados obtenemos: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$. Representando gráficamente y ubicando el punto $P\,(-1{,}6)$ se obtiene la gráfica de la izquierda (Figura 18). Luego la pendiente del segmento $\overline{CP}$ es $m_{\overline{CP}} = -\frac{3}{2}$. Por propiedad de perpendicularidad de dos rectas, se tiene que la pendiente de la recta tangente es $\frac{2}{3}$. Por tanto, la ecuación de la recta está dada por: $y - 6 = \frac{2}{3}(x+1)$.

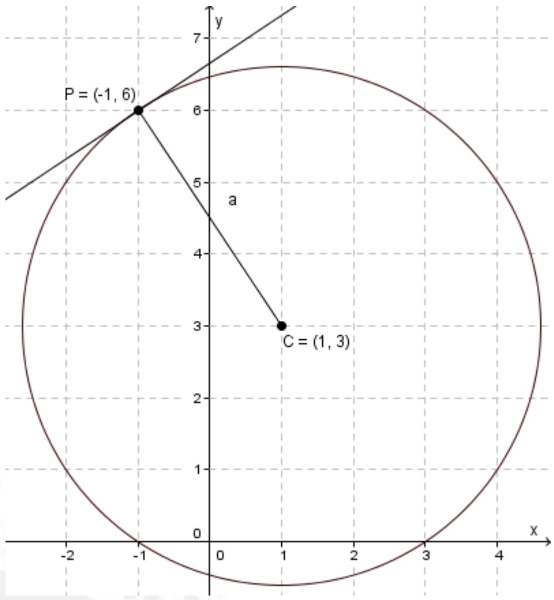
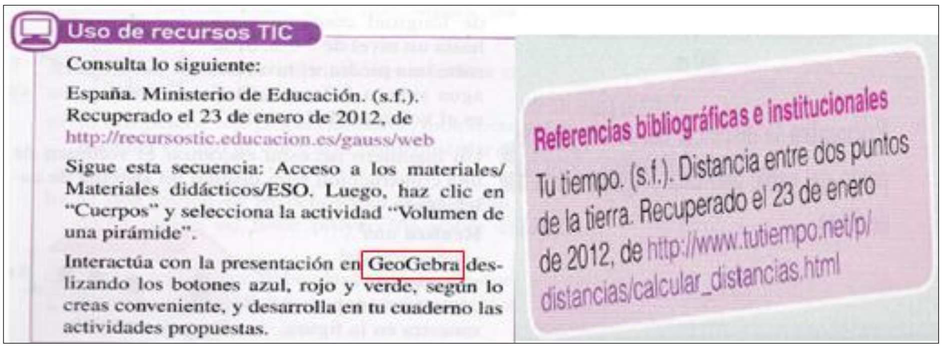


Figura 18. Representación gráfica de una circunferencia de centro (1,3) y radio 5 unidades.

Es evidente que el apoyo en la representación gráfica en un problema puede auxiliar al alumno y simplificar su resolución; asimismo, ayuda en la construcción del concepto en cuestión. Al respecto, Douady señala que apoyarse en otra presentación tiene un rol importante, ya que puede favorecer la ampliación de los conocimientos antiguos de los alumnos para construir el nuevo concepto.

4. **Si en los textos didácticos incluye el uso de las TICs: páginas webs, software de Geometría Dinámica, etc.**

Para el texto T1. De acuerdo al análisis, se pudo evidenciar que el autor incluye en el texto el uso de los recursos TIC (véase la Figura 19). Sugiere consultar páginas web y sugiere también el uso del GeoGebra. Este último se evidenció solo en la geometría del espacio.



Uso de recursos TIC

Consulta lo siguiente:

España. Ministerio de Educación. (s.f.). Recuperado el 23 de enero de 2012, de http://recursostic.educacion.es/gauss/web

Sigue esta secuencia: Acceso a los materiales/ Materiales didácticos/ESO. Luego, haz clic en "Cuerpos" y selecciona la actividad "Volumen de una pirámide".

Interactúa con la presentación en GeoGebra deslizando los botones azul, rojo y verde, según lo creas conveniente, y desarrolla en tu cuaderno las actividades propuestas.

Referencias bibliográficas e institucionales

Tu tiempo. (s.f.). Distancia entre dos puntos de la tierra. Recuperado el 23 de enero de 2012, de http://www.tutiempo.net/p/distancias/calcular_distancias.html

Figura 19. Recursos TIC utilizados en el texto del MINEDU

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Comentario con respecto al texto **T1**. El autor del texto sí incluye el uso de los recursos TIC en las actividades propuestas con el objetivo de incentivar la investigación y profundizar sobre el concepto trabajado. Sin embargo, en la unidad 7 que constituye la Geometría Analítica, el autor no utiliza el uso del software de Geometría Dinámica. Creemos que la inclusión del mismo es muy importante, porque su utilidad se da con mayor grado en la geometría euclidiana, la geometría analítica del plano y en temas de funciones. Por ejemplo, Bedretchuk (2010) destaca la importancia de la inclusión de una estrategia pedagógica mediada por el GeoGebra, para consolidar el aprendizaje de la circunferencia y la mediatriz como lugar geométrico, como también la importancia del uso del GeoGebra la que le permitió en sus alumnos desarrollar la autonomía de experimentar y validar sus conjeturas. Para esta unidad, el autor del texto sugiere páginas web a fin de profundizar el objeto estudiado a través de las actividades.

Para el texto T2. En el análisis del presente texto, el autor no pone en evidencia ni recomienda el uso de ningún recurso tecnológico. Es decir, no incluye el uso de las TICs.

Resultados sobre el análisis de los textos didácticos (T1 y T2)

Con el objetivo de analizar el tratamiento del concepto de circunferencia, hemos revisado los textos teniendo en cuenta: la introducción, los ejemplos que presentan y las actividades propuestas, las diferentes representaciones que utilizan para representar el objeto, y el uso de los recursos TIC que emplean.

Luego del análisis de los dos textos didácticos hemos llegado a las siguientes consideraciones:

- Los autores de los textos didácticos analizados presentan o introducen el concepto circunferencia, desde su concepción como lugar geométrico, su representación gráfica y su representación algebraica. Pero la concepción como lugar geométrico no la utilizan en los siguientes problemas, ya sean desarrollados o propuestos. Observamos que no establecen una relación entre las representaciones algebraicas y gráficas. Creemos que esta propiedad debe ser analizada en detalle con el propósito de encontrar la relación entre dichas representaciones. A diferencia de lo que presentan los textos, en el diseño de las actividades consideraremos la construcción

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

del concepto circunferencia tomando como punto de partida su concepción como lugar geométrico y, a partir de este, presentar las otras representaciones sin perder de vista la relación que guardan los mismos.

- Los tipos de actividades que sugieren los autores, para construir la noción del nuevo concepto, presentan problemas donde el alumno pueda construir en base a sus conocimientos previos o antiguos. Por otro lado, observamos que no establecen conexiones entre la realidad y el objeto matemático. Creemos que una manera de despertar el interés y disminuir las dificultades, cuando construyen un objeto matemático, es mostrando situaciones o problemas cotidianos y cercanos a la realidad de los alumnos. Esto con el propósito de ayudar o facilitar su construcción y, al mismo tiempo, dar sentido y utilidad al nuevo concepto que están construyendo. En ese sentido, en el diseño de nuestras actividades se tendrán en cuenta estas observaciones con el propósito de facilitar su comprensión del objeto circunferencia y, de esta manera, disminuir las dificultades de aprendizaje del mismo. Otro aspecto que se observó está relacionado con el uso directo de las fórmulas o ecuaciones para obtener la solución del problema. Por ejemplo, cuando solicitan obtener la ecuación que representa una circunferencia dado su centro y radio, lo que hacen es identificar las coordenadas del centro comparando el centro (del dato) y el centro (h, k)de la fórmula, y reemplazar en la expresión algebraica. Este procedimiento o técnica podría generar confusión a los alumnos en dos casos: entender que la ecuación es la circunferencia mas no una de sus representaciones; y confundir que el objeto solo se puede trabajar analíticamente. Este último se da con mayor énfasis en el texto didáctico T2. Ambos textos, aun con mayor incidencia en el texto didáctico T2, utilizan este método. No fomentan el uso de otros procedimientos ni métodos para resolver problemas. Creemos que una forma de superar esta problemática es, por ejemplo, apoyarse en una representación gráfica y, a partir de ella, obtener la ecuación solicitada a través de la fórmula de distancia o a través del teorema de Pitágoras.

  Por ello, es importante prestar atención a estas posibles dificultades para el diseño de las actividades, con la finalidad de que contribuya a la comprensión del concepto circunferencia.

- En cuanto a las representaciones que utilizan los textos didácticos, hemos observado que el texto didáctico T1 da mayor preferencia al uso de las representaciones gráficas

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

y algebraicas, mientras que, por su parte, el texto didáctico T2 solo utiliza dos representaciones: algebraica y simbólica.

Estas observaciones serán tomadas en cuenta en el diseño de las actividades, pues consideraremos problemas que involucren trabajar el concepto, desde su concepción como lugar geométrico, representación gráfica y algebraica, así como las relaciones de estas representaciones. En ese sentido, nuestro propósito es mostrar el conocimiento en sus diversas representaciones y que éstas, a su vez, contribuyan a la comprensión del concepto de circunferencia.

- Finalmente, hemos observado que el texto didáctico T1 recomienda, en todas las unidades en las que está dividido, el uso de los recursos TIC, tales como: sitios o páginas web para profundizar el tema tratado, el uso de calculadoras para obtener con exactitud los valores numéricos, el uso del software GeoGebra y 2-Dplotting (en Fooplot) para representar con precisión las gráficas de las ecuaciones de funciones. Sin embargo, dada la coincidencia que en el cuadro de la geometría analítica, donde nuestro trabajo aterriza, el autor no utiliza ni recomienda el uso de algún software de Geometría Dinámica. Hubiera sido interesante que el autor utilice en esta unidad, por ejemplo, el GeoGebra, pues este software ha sido creado y tiene mayor incidencia para trabajar con gran facilidad en el cuadro de la geometría analítica. Con respecto al texto didáctico T2, el autor no utiliza ni recomienda el uso de algún recurso TICs. En el diseño de nuestras actividades, creemos pertinente considerar problemas para ser trabajados con el GeoGebra, pues éste nos permite mostrar el objeto circunferencia en dos representaciones a la vez, y pensamos que este sería un punto a favor para el aprendizaje del objeto en estudio.

Luego de analizar los resultados de las investigaciones precedentes, que procuraron analizar los problemas de aprendizaje sobre nuestro objeto en estudio, y el análisis del tratamiento que se le da al concepto de circunferencia en los textos didácticos, hemos logrado reunir los recursos necesarios y pertinentes para iniciar la siguiente etapa de nuestro trabajo de investigación. Con los aportes de los dos análisis y sobre la base de los principios de la dialéctica herramienta-objeto, nuestro siguiente paso fue diseñar la secuencia de actividades para luego aplicarlas con los sujetos de esta investigación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTO Y ANÁLISIS

En este capítulo describimos a los sujetos que constituyen la muestra de esta investigación, el diseño y la aplicación de los instrumentos usados para la recolección de los datos en esta investigación, así como el análisis de los resultados obtenidos (producción de los alumnos) de la aplicación de las actividades (instrumentos de recolección de los datos).

4.1 Descripción de los sujetos

El colegio elegido para nuestro estudio fue una Institución Educativa Estatal de nuestro país. En dicha institución se destinan cinco horas pedagógicas semanales al área de matemática, siendo cada hora de 45 minutos. Asimismo, la institución cuenta con un laboratorio de cómputo con 22 computadoras operativas.

Los alumnos que formaron parte de nuestra investigación fueron seis estudiantes del quinto año de educación secundaria matriculados en el año lectivo 2013. Los alumnos considerados para el análisis fueron seleccionados de un grupo mayor, debido a que asistieron a todos los encuentros durante los cuales se realizó la experimentación de nuestras actividades.

Por otro lado, es importante resaltar el modo de trabajo que los alumnos siguieron durante la ejecución de las actividades. Fueron agrupados en duplas para favorecer momentos de interacción e intervención colaborativa entre alumno-alumno y alumno-profesor. Al respecto, Bedretchuk (2010) señala que elegir un estilo de trabajo para los alumnos es importante, pues favorece un ambiente de interacción intensiva; asimismo, señala que este estilo de trabajo se fundamenta sobre las ideas del trabajo colaborativo. Sobre este último, el autor asevera que:

> Favorece las relaciones sociales de los alumnos, para fomentar el debate entre sus compañeros, generando momentos ricos de aprendizaje donde un compañero puede incentivar a otro a exponer sus ideas, reformularlas, compartir sus conocimientos, buscando el éxito de la tarea en la cual están involucrados. (p. 51).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Por otro lado, en cuanto se refiere al rol del profesor/investigador en este tipo de trabajo, Douady (1995) manifiesta que "el papel del profesor no es ejercer la autoridad sino más bien ser un compañero científico" (p. 94).

Por ello, durante el desarrollo de las actividades, se promovió la discusión y el intercambio de conocimientos mediante el diálogo en un ambiente de trabajo colaborativo como una acción continua, donde los problemas y objetivos son compartidos durante la construcción del concepto de circunferencia.

Sin embargo, se ha solicitado a los alumnos participantes de este trabajo, que cada uno debería escribir en forma individual en sus hojas de trabajo o en la ventana del GeoGebra utilizando la herramienta *Insertar texto*. Esto se realizó con la finalidad de observar, a través de las justificaciones en sus respuestas, la evolución del proceso de construcción del concepto de circunferencia.

A fin de proteger la identidad de los alumnos, se han sustituido los nombres por notaciones. Así, la Tabla 5 muestra la notación usada para las duplas que usaremos de aquí en adelante.

Tabla 5. Notación de las duplas

Dupla	Notación
1	**D1**
2	**D2**
3	**D3**

Es pertinente aclarar que las duplas formadas fueron las mismas desde el desarrollo del taller de introducción al software GeoGebra (primer encuentro) hasta culminar la secuencia de actividades (último encuentro). Por otro lado, también debemos señalar que los alumnos de nuestra investigación aún no han desarrollado en sus clases el objeto circunferencia desde cuadro la geometría analítica. Pero sí tienen conocimientos previos sobre:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.
- Ecuaciones de la recta: punto-pendiente, ordenada en el origen y ecuación general.
- Posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Cabe señalar que estos conocimientos previos mencionados están contemplados en el DCN (2009) para ser desarrollados con estudiantes de cuarto año de educación secundaria (13-14 años), lo que indica que dichos conocimientos ya han sido trabajados. Finalmente, se pudo confirmar a través de los estudiantes y del profesor que ambos desconocían el software GeoGebra.

4.2. Las actividades

Se diseñó un taller de introducción al software GeoGebra y una secuencia de cuatro actividades con un solo propósito, construir gradualmente el concepto de circunferencia utilizando como instrumento mediador al software GeoGebra.

A continuación, presentamos el diseño e implementación del taller de introducción al software GeoGebra.

4.2.1. Diseño y aplicación del taller de introducción al software GeoGebra

Este taller se llevó acabo en un primer encuentro con los alumnos y tuvo una duración de 45 minutos. Algunas de las actividades diseñadas requerían el uso del GeoGebra, razón por la cual se ha diseñado el taller de introducción. Asimismo, porque los alumnos no tenían ningún conocimientos del mismo.

Como parte de la metodología de esta investigación, el taller se trabajó en duplas y tuvo como propósito reconocer las ventanas del GeoGebra, así como la interacción de algunas herramientas (comandos básicos) del software en construcciones elementales. Dicho de otra manera, con el taller se pretendía que los alumnos se familiaricen con el GeoGebra y puedan utilizarlos en el desarrollo de las actividades diseñadas para construir la noción de circunferencia.

El taller incluía tres preguntas. Con la primera pregunta, se pretendía que los alumnos reconocieran la vista principal del GeoGebra, así como sus diferentes ventanas de trabajo, es decir, las ventanas algebraica, gráfica y hoja de cálculo, considerando prioritarias las dos primeras ventanas. En esta pregunta, no les resultó inmediato reconocer cada una de las ventanas, pero a medida que iban explorando, lograron identificar cada una de ellas.

La segunda pregunta estuvo dirigida para reconocer cada una de las herramientas que contiene la barra de herramientas o comandos. Inmediatamente, haciendo *click* en cada opción, lograron hacer visible la caja de herramientas. De esta manera, pudieron

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

reconocer rápidamente las características que muestra el GeoGebra. Finalmente, con la tercera pregunta, se pretendía que los estudiantes puedan familiarizarse principalmente con la barra de herramientas realizando construcciones sencillas. Se evidenció que al terminar la actividad, los estudiantes lograron realizar las construcciones de los objetos solicitados antes del tiempo previsto, a excepción de una dupla que presentó dificultades para ubicar cuatro puntos en el plano que equidisten de un punto fijo.

En síntesis, se logró el objetivo para este taller: se verificó que el trabajo con el GeoGebra en clase desarrolla la autonomía e incentiva el trabajo colaborativo en los alumnos, tal cual afirma Bedretchuk (2010) sobre el apoyo del GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por otro lado, al culminar este taller con resultados positivos, consideramos que, en las siguientes actividades, los alumnos no tendrían dificultades para desarrollar las preguntas que requieren el uso del software.

Finalmente, la implementación del taller permitió a los estudiantes retomar los conocimientos previos sobre: longitud de un segmento, coordenadas del punto medio de un segmento, ecuación de una recta, etc. En ese estudio, los temas señalados han sido considerados como conocimientos necesarios para trabajar en la construcción del objeto circunferencia.

A continuación presentaremos el diseño de las actividades 1, 2, 3 y 4.

4.2.2. Diseño de la secuencia de actividades: actividades 1, 2, 3 y 4.

Las cuatro actividades, a ser trabajadas con lápiz y papel y con apoyo del software GeoGebra, han sido diseñadas siguiendo las fases presentadas en la Dialéctica Herramienta-Objeto y con el propósito de construir el concepto de circunferencia. Hemos considerado pertinente utilizar este referencial teórico, porque nos permite analizar y entender el proceso de construcción de un objeto matemático. Las fases están organizadas para construir un nuevo concepto. Dicha organización busca el aprendizaje de un objeto matemático haciendo variar los conocimientos antiguos como herramienta del objeto y, en algunos momentos, utilizar el objeto en la resolución de determinados problemas, seguido (cambiar por un “después” o “posteriormente”) de una institucionalización, luego, la familiarización con problemas diversos cuya resolución requiere al objeto recientemente institucionalizado. Este procedimiento, basado en la dialéctica, puede auxiliarnos en la construcción del nuevo conocimiento matemático

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

buscado. Específicamente nos ayudará en la construcción de la noción de la circunferencia.

En la Tabla 6, se muestra la distribución de las actividades para las cinco fases consideradas para esta investigación. La distribución se ha establecido de acuerdo a la Dialéctica Herramienta-Objeto.

Tabla 6. Distribución de las actividades según las fases de la DHO

<table>
<tr><th>Fase</th><th>Duración</th><th colspan="2">Actividad</th><th>Objetivo</th></tr>
<tr><td>Antigua</td><td rowspan="6">180 minutos</td><td>1</td><td>Preguntas:
1, 2 y 3</td><td>Reconocer los conocimientos previos (conocimientos conocidos como instrumentos explícitos).</td></tr>
<tr><td>Búsqueda</td><td>2</td><td><u>Pregunta 1</u>
(ítem a, b, c y d)
<u>Pregunta 2</u>
(ítem a y b)</td><td>Promover la búsqueda del nuevo conocimiento.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Explicitación</td><td>2</td><td><u>Pregunta 2</u>
(ítem c y d)</td><td rowspan="2">Identificar el objeto en las actividades como nuevo conocimiento explícito.</td></tr>
<tr><td>3</td><td><u>Pregunta 1</u>
<u>Pregunta 2</u></td></tr>
<tr><td>Institucionalización</td><td colspan="2">Profesor/investigador</td><td>Organizar el saber social, las prácticas y las convenciones con el saber del estudiante.
Reconocer el conocimiento en su estatus de objeto.</td></tr>
<tr><td>Familiarización</td><td>4</td><td><u>Pregunta 1</u>
(ítem a, b y c)
<u>Pregunta 2</u>
(ítem a, b y c)</td><td>Resolver problemas diversos que constituyen situaciones nuevas.</td></tr>
</table>

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Fase antigua: Actividad 1

En esta actividad, se plantearon tres preguntas para ser desarrolladas con lápiz y papel. Esta tuvo como propósito conocer los saberes previos del concepto de circunferencia, tales como distancia entre dos puntos, las coordenadas del punto medio de un segmento, puntos que equidistan de un punto fijo, propiedades de una mediatriz, ecuaciones de una recta. Estos conocimientos son necesarios para nuestro estudio por dos razones. Por un lado, son conocimientos que se trabajan antes de nuestro objeto de estudio, es decir, conocimientos antiguos que requerimos para el estudio del objeto. Por otro lado, son conocimientos que pretendemos usar como punto de partida para emerger el nuevo concepto en estudio; asimismo, son conocimientos que están inmersos o relacionados con el objeto circunferencia. Por ejemplo, si se solicita obtener la representación algebraica del objeto circunferencia, se puede utilizar la propiedad de distancia entre dos puntos, así como el teorema de Pitágoras. En la construcción del objeto circunferencia, estos conocimientos son considerados como antiguos/previos.

Esta primera actividad consta de tres preguntas, de modo que la primera tiene como propósito conocer si los estudiantes recuerdan el teorema de Pitágoras. Se realiza con el fin de asegurar su utilidad cuando se les solicite a los alumnos obtener la ecuación de la circunferencia desde su representación gráfica. La pregunta dos tiene la finalidad de verificar si los estudiantes tienen conocimiento sobre la propiedad de distancia entre dos puntos y punto medio en el plano, ya que antes de abordar el concepto de circunferencia es necesario que el estudiante tenga claro dichos conceptos. Finalmente, la pregunta tres que consta de dos ítems (*a* y *b*): el item *a* tiene como objeto mostrar si los alumnos saben construir la mediatriz de un segmento, puesto que este conocimiento es primordial por la situación con la que pretendemos generar la construcción de nuestro objeto matemático; el item *b* tiene el propósito de analizar desde la geometría analítica las propiedades de dos rectas que se cortan formando un ángulo de 90º. Son conocimientos necesarios para abordar el nuevo concepto en estudio.

Fase de búsqueda: Actividad 2

En el Tabla 6, observamos que la actividad 2 forma parte de la fase de búsqueda y explicitación. Esto se ha considerado con el propósito de no mostrar problemas complicados. Es decir, la conexión o el salto a la fase siguiente deberían presentar problemas accesibles y manejables para los alumnos; debido a que los conocimientos de los alumnos sobre el nuevo objeto que están construyendo son aún prematuros.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En ese sentido, en la actividad 2, con la pregunta 1 (ítems a, b, c y d) y con la pregunta 2 (ítems a y b), buscamos trabajar la segunda *fase de búsqueda* de la dialéctica herramienta-objeto, ya que durante la resolución de estos problemas los alumnos podrán movilizar sus conocimientos antiguos en la búsqueda de un nuevo concepto implícito (el objeto circunferencia). Buscamos que los alumnos, procurando resolver las situaciones propuestas, puedan desarrollar nuevos conocimientos que, esquemáticamente, hagan referencia al nuevo conocimiento implícito. Asimismo, esperamos evidenciar en los alumnos conflictos o repercusión entre los conocimientos antiguos y el nuevo concepto de circunferencia.

Fase de explicitación: Actividad 1 y 2

De otro lado, la actividad 2 (pregunta 2, ítems *c*, *d* y *e*) y la actividad 3 (preguntas 1 y 2) que forman parte de la *fase de explicitación*, tienen como fin homogenizar los conocimientos desarrollados en las fases anteriores. En esta etapa, los alumnos harán evidencia que el concepto de circunferencia es el conocimiento que se procura desarrollar. Asimismo, se espera que los alumnos logren construir el objeto circunferencia en términos de nuevo conocimiento explícito, susceptible de reempleo y familiarización. Sin embargo, durante el desarrollo de la fase de explicitación y la fase de búsqueda, puede ocurrir que la situación sea propensa a bloquearse, es decir, que los alumnos no puedan avanzar en el desarrollo de los problemas; esto puede suceder debido a que el problema sea muy complicado. En caso ocurra esto, con los problemas propuestos en esta actividad, nuestro papel como profesor/investigador será direccionar u orientar a los alumnos, procurando no intervenir directamente en el desarrollo de dichos problemas.

Como en la siguiente etapa se busca institucionalizar el objeto en construcción, en esta fase de explicitación procuraremos incentivar a los alumnos al debate sobre el nuevo objeto circunferencia que están tratando, incitando a aclarar o explicitar sus ideas sobre los conocimientos que han ido adquiriendo durante las fases anteriores sobre este concepto. Esta fase es importante debido a que los alumnos, conjuntamente con nuestro apoyo como profesor/investigador, podrán discernir las ideas correctas y las incorrectas sobre la concepción del concepto emergente (la circunferencia). Es decir, en esta situación de comunicación, de opinión, los conocimientos se transmiten diversamente según los propios criterios de los estudiantes, buscando así una institucionalización local. Por ejemplo, buscaremos identificar las características elementales de la

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

circunferencia, esto es, centro y radio; discutiremos si la propiedad de distancia es la única forma para obtener la ecuación que representa la circunferencia; etc.

Fase de institucionalización: Profesor/investigador

En cuanto a esta fase, estará a cargo del profesor/investigador y tiene como finalidad formalizar el concepto de circunferencia en su estatus de objeto matemático. Esta situación nos permitirá homogenizar los contenidos trabajados; asimismo, permitirá a los alumnos ordenar sus conocimientos sobre el concepto de circunferencia y, de esta manera, asegurar la evolución de su aprendizaje. En consecuencia, la institucionalización permitirá oficializar algunos conocimientos que han sido significativos para los alumnos, darles la categoría de objeto matemático e integrarlos al saber social y a la estructura cognitiva de los alumnos.

Fase de familiarización: Actividad 4

Finalmente, la actividad 4 forma parte de la fase de familiarización y ha sido considerada como la última fase de nuestro estudio. Esta fase tiene como objetivo usar lo aprendido del concepto de circunferencia que ha sido recientemente institucionalizado en la fase anterior. Para lograr dicho objetivo, en la actividad 4, los alumnos fueron puestos a prueba a través de la resolución de nuevos problemas y situaciones donde deberían usar el concepto circunferencia adquirido.

En el análisis de las actividades, se prestará especial atención a la evolución de la construcción del concepto de circunferencia considerando los conocimientos previos de los alumnos.

4.2.3. Resultados de la aplicación de la secuencia de actividades

En este apartado, mostramos la aplicación de cada una de las actividades de esta etapa de la investigación con los respectivos objetivos que pretendemos alcanzar en cada una de ellas y, a continuación, mostramos la posible solución y las posibles dificultades que podrían presentarse cuando los alumnos trabajen dicha secuencia. Finalmente, se presenta el análisis posterior en base a las respuestas o reproducciones presentadas por los alumnos en cada una de las actividades.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

<u>Actividad 1</u>: Recordando nuestros conocimientos previos

Es pertinente aclarar que para la primera actividad mostraremos un análisis general, debido a que esta actividad corresponde a la fase antigua de la dialéctica herramienta-objeto, que solo nos permitirá reconocer y verificar los conocimientos antiguos que los alumnos deben movilizar para construir el concepto de circunferencia. En ese sentido, en la Tabla 7 se presenta el resultado de la actividad 1.

Tabla 7. Resultados de la actividad 1

Preguntas propuestas	Alumnos que lograron responder	Alumnos que no lograron responder
Pregunta 1	4	2
Pregunta 2_a	6	0
Pregunta 2_b	5	1
Pregunta 3_a	5	1
Pregunta 3_b	2	4

Observamos que 4 alumnos, quienes desarrollaron la pregunta 1, tienen conocimiento sobre el teorema de Pitágoras, y dos de ellos no recuerdan dicho teorema, pues no lograron resolver el problema; la pregunta 2a fue resuelta por los 6 alumnos, lo que nos indican que sí tienen conocimiento sobre la propiedad de distancia entre dos puntos; 5 alumnos lograron resolver las preguntas 2b y 3a, esto quiere decir que tienen conocimiento para hallar las coordenadas del punto medio de un segmento (2b); asimismo, conocen el procedimiento para trazar la mediatriz de un segmento (3a); solo 2 alumnos acertaron en la respuesta de la pregunta 3b. Este resultado nos permite verificar que los alumnos tienen dificultades para determinar analíticamente la ecuación de la mediatriz de un segmento; asimismo, creemos que esta dificultad se debe a que los alumnos tienen problemas para identificar la relación de las pendientes entre dos rectas que se intersectan formando un ángulo de 90º.

Por ejemplo, en la pregunta 2, deseábamos averiguar si los alumnos tenían conocimiento sobre la propiedad de distancia entre dos puntos y determinar las

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

coordenadas del punto medio. Al respecto, las tres duplas respondieron correctamente el ítem a. Por ejemplo, la figura 20 muestra el trabajo presentado por la dupla D1.

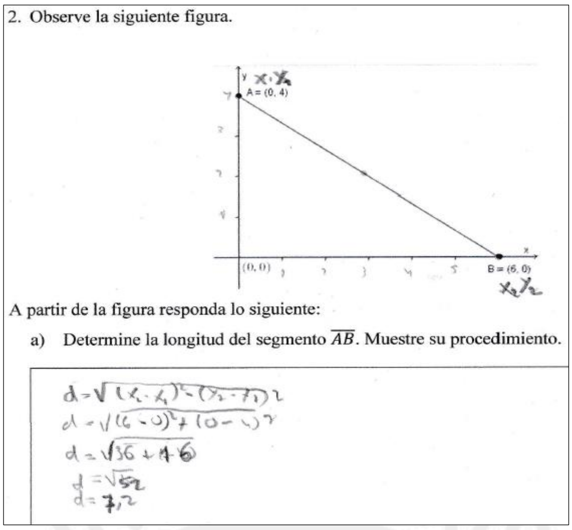


Figura 20. Respuesta de la dupla D1, actividad 1

En la Figura 20, observamos que designan las coordenadas de los puntos A y B con las variables x_1, y_1 y x_2, y_2, respectivamente para luego utilizar la propiedad de distancia. Este último no es formulado correctamente, porque utiliza el signo negativo en vez del signo positivo. Sin embargo, al reemplazar las coordenadas de los puntos A y B lo hacen correctamente. A pesar de esta confusión de signos, los alumnos participantes de nuestro estudio, si tienen noción sobre esta propiedad. En el caso del ítem b de la pregunta 2, las soluciones han sido acertadas por la dupla D2 y D3. No obstante, los alumnos mostraron deficiencia en su procedimiento y pobreza en el lenguaje matemático que utilizan. Esta deficiencia también fue observada en el estudio de Carmona (2011). Por ejemplo, la siguiente figura 21 muestra el trabajo presentado por la dupla D2 y D3 respectivamente.

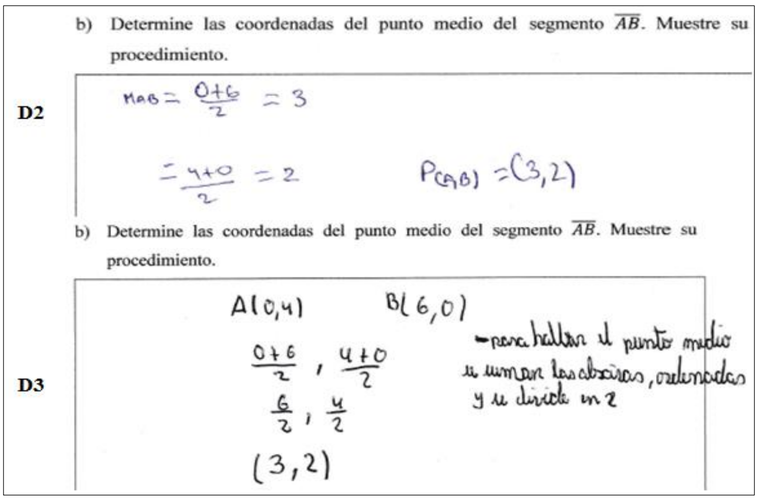


Figura 21. Respuestas presentada por las duplas D3 y D2 respectivamente

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Se observa, en la resolución presentada por la dupla D3, que los alumnos obvian los paréntesis haciendo parecer que estarían trabajando dos números separados y no un par ordenado. Del mismo modo ocurre en la respuesta de la dupla D2, lo cual evidencia la notación matemática que utilizan para justificar sus respuestas.

Por otro lado, hay alumnos que tienen conocimientos previos necesarios e intentan utilizar dichas propiedades de manera coherente matemáticamente; por lo tanto, emplean los símbolos matemáticos parcialmente adecuados. La Figura 22 es muestra de lo descrito.

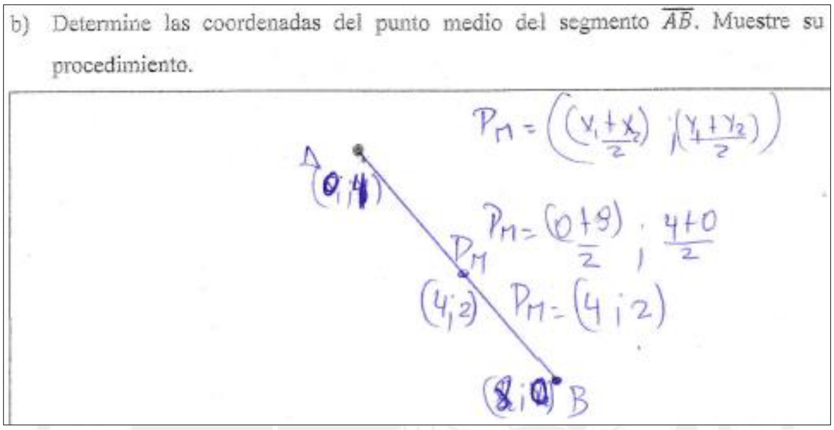


Figura 22. Respuesta presentada por la dupla D1

El conocimiento de estas propiedades (distancia entre dos puntos y las coordenadas del punto medio de un segmento) es importante para los alumnos a fin de que puedan deducir la ecuación de la circunferencia desde su representación gráfica o cuando el objeto esté inmerso en un problema que involucre el uso de estas propiedades.

En cuanto a la pregunta tres (véase la Tabla 7), que consistió en identificar la mediatriz de un segmento tanto en la geometría elemental como en la analítica, se ha observado que los alumnos mostraron dificultades al momento de su desarrollo, pues hubo preguntas como *¿profesor, qué es una mediatriz?* y *¿qué tengo que hacer?* Frente a esta circunstancia, se tuvo que intervenir con el objeto de aclarar las características de la mediatriz. Dicho esto, algunos alumnos lograron recordar y retomaron su resolución. La Figura 23 muestra el procedimiento seguido por la dupla D2 para los ítems *a* y *b*.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

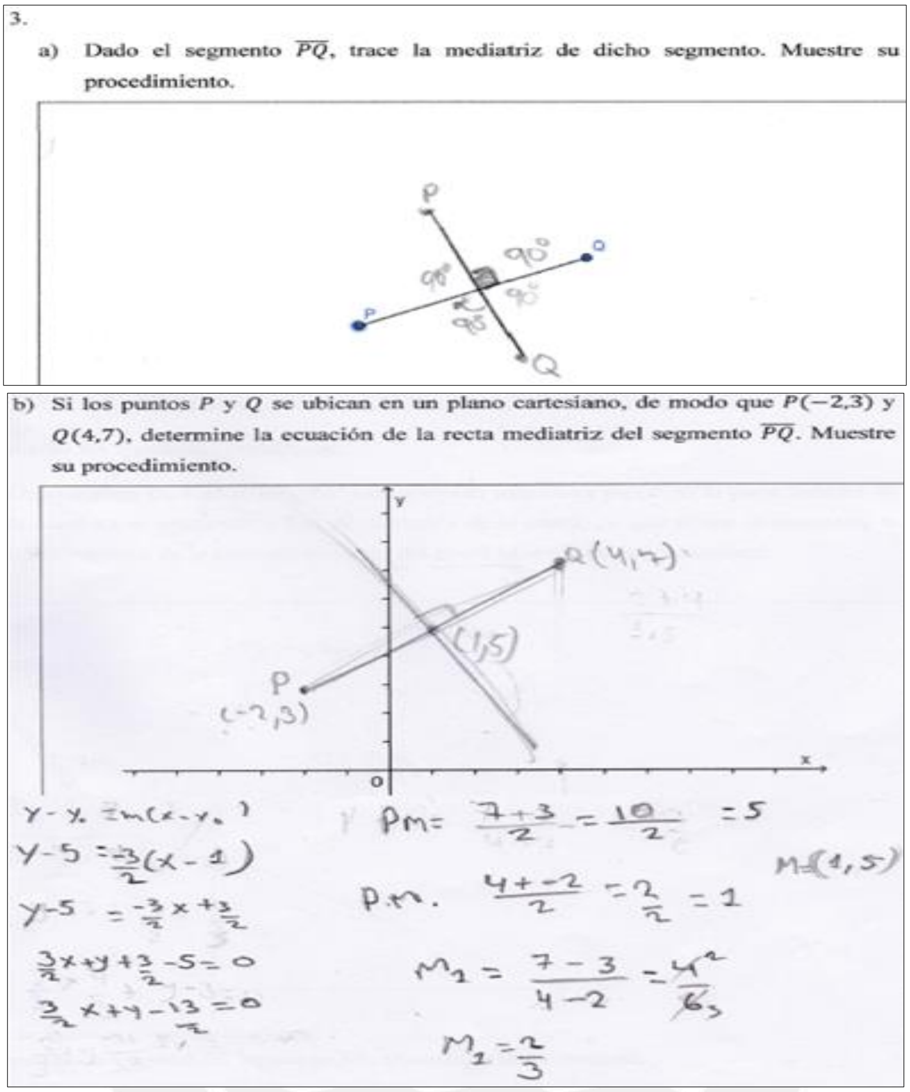


Figura 23. Respuesta presentada por la dupla D2

Es común, como en los casos anteriores, observar en los alumnos la falta de precisión en sus justificaciones y respuestas. Creemos que esto se debe, como observó Bedretchuk (2010), a que los alumnos tienen dificultad en la interpretación del problema y verbalización de los argumentos que justifican su resolución. Por ejemplo, en la respuesta de la dupla D2 (véase la Figura 23, ítem *a*), observamos que no muestran el procedimiento ni las propiedades que han utilizado para justificar la construcción de la mediatriz, aun a pesar de que la pregunta es precisa en insistir que se muestre el procedimiento. Es importante que un alumno planifique una estrategia con el fin de organizar sus ideas y conocimientos previos para desarrollar un problema. Del mismo modo, en el ítem *b*, el alumno no utiliza un lenguaje matemático adecuado ni coherente, lo cual se evidencia cuando muestra su procedimiento para obtener el punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Así mismo, la ecuación que obtienen no la asignan a la recta que corresponde, lo cual se observó en las tres duplas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Por otro lado, observamos, aún con algunas dificultades, que los alumnos logran construir la mediatriz de un segmento desde el cuadro de la geometría analítica. Sin lugar a duda, pensamos que haber trabajado primero sintéticamente para trazar la mediatriz, permitió en su esquema mental a los alumnos, organizar los conocimientos y propiedades inmersos en este procedimiento, lo cual le permitió hallar la ecuación de la recta mediatriz. Con esta misma idea, a partir de la siguiente actividad, se trabajará para construir el objeto matemático pretendido, la circunferencia.

Finalmente, es importante señalar que la fase antigua siempre estará presente en las siguientes actividades, lo que significa que la fase antigua está compuesta por conocimientos transversales que están siempre inmersos en las fases consecuentes de la dialéctica herramienta-objeto. Por ejemplo, en la fase de familiarización, cuando se solicite obtener la ecuación de la circunferencia, los alumnos acudirán a la propiedad de distancia (utilizan su conocimiento previo) para obtener dicha expresión. Aclarado esto, en adelante no tendremos lugar a confusiones.

Actividad 2: Descubriendo con GeoGebra

La actividad 2 tiene como propósito promover la búsqueda del objeto circunferencia con la mediación del software GeoGebra. La búsqueda de este objeto, inmerso en la siguiente situación (véase la Figura 24), es aún como conocimiento implícito.

Pregunta 1

Con esta situación se espera que los alumnos puedan involucrarse y movilizar sus conocimientos previos para dar solución a las siguientes preguntas que se desprenden de dicha situación.

Actividad 2. Descubriendo con el Geogebra

Indicación. Al culminar su trabajo salve sus respuestas con el nombre A2_*Apellidos*.

Resuelva las siguientes situaciones.

1. En una urbanización de Santa Clara, la municipalidad ha decidido colocar una nueva comisaría para dar mayor seguridad a tres entidades: un banco, un colegio y un supermercado. Se desea ubicar esta comisaría de modo que se encuentre a la misma distancia de las tres entidades antes mencionadas, a fin de que ante cualquier acto delictivo, los policías tengan una posibilidad de acción rápida.

A continuación, abra el archivo *gg_preg_01* en el que se muestra un esquema con la ubicación de las tres entidades mencionadas y responda las siguientes preguntas:

Figura 24. Actividad 2, situación 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Pregunta 1, ítem a):

Se espera para esta pregunta que el alumno ubique el punto que representa la comisaría, movilizando sus conocimientos antiguos y utilizando las herramientas del software GeoGebra, tales como: *mediatriz* e *intersección de dos objetos*. La Figura 25 muestra la pregunta 1, parte a).

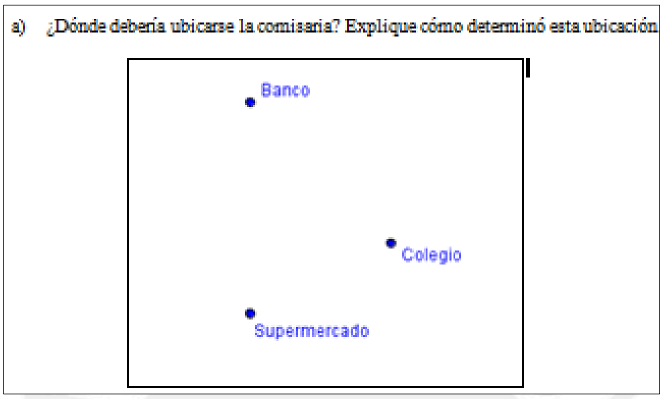


Figura 25. Pregunta 1, parte a

Una posible solución para ubicar el punto exacto de la ubicación de la comisaría consiste en usar el software GeoGebra. Para ello, una manera de ubicar dicho punto es:

- Utilizar la opción *mediatriz* en la caja de herramientas del GeoGebra y dar *click*, por ejemplo, en los puntos donde se ubican el banco y el colegio, o donde se ubican el colegio y el supermercado o donde se ubican el banco y el supermercado. Es suficiente construir dos mediatrices para ubicar el punto que representa la comisaría.

- Utilizar la opción *intersección de dos objetos* para obtener la intersección de las dos mediatrices. El nuevo punto generado, luego de la intersección de las rectas mediatrices construidas anteriormente, es el punto solicitado donde se debe ubicar la comisaría.

La Figura 26 muestra el resultado de los pasos descritos anteriormente. En la columna izquierda, se muestra la ubicación de la comisaría utilizando las mediatrices de los tres lados del triángulo, y en la columna derecha solo se utilizan dos mediatrices de los lados del triángulo. En cualquier caso, ésta es la solución que se espera que presenten.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

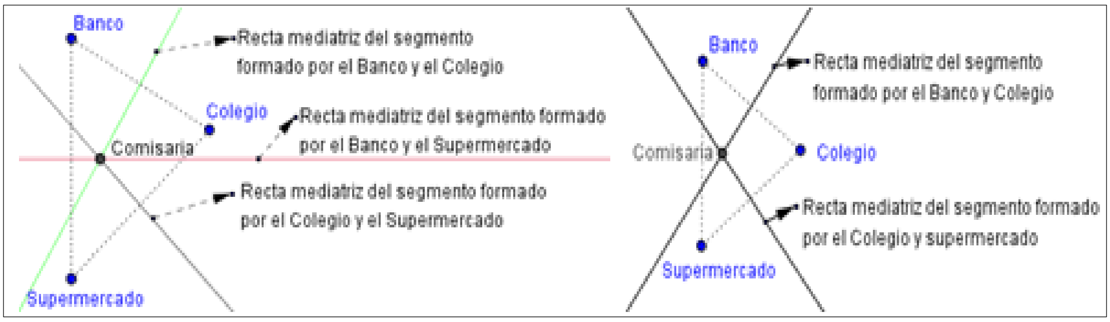


Figura 26. Posible respuesta de la pregunta 1, parte a)

Algunas dificultades que se pueden presentar:

- Que el alumno se deje llevar por su intuición visual y ubique el punto que represente la comisaría aproximadamente en alguna parte del plano.
- Que el alumno no recuerde el concepto de mediatriz de un segmento o que no realice el trazo correcto.

Respuestas de los alumnos

Para esta pregunta 1, parte a), las tres duplas D1, D2 y D3 coincidieron en describir y señalar que la comisaría debería ubicarse en el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo formado por las tres entidades. Por ejemplo, la Figura 27 muestra el trabajo presentado por la dupla D1, quienes muestran la respuesta del item a) y las construcciones realizadas en el software GeoGebra.

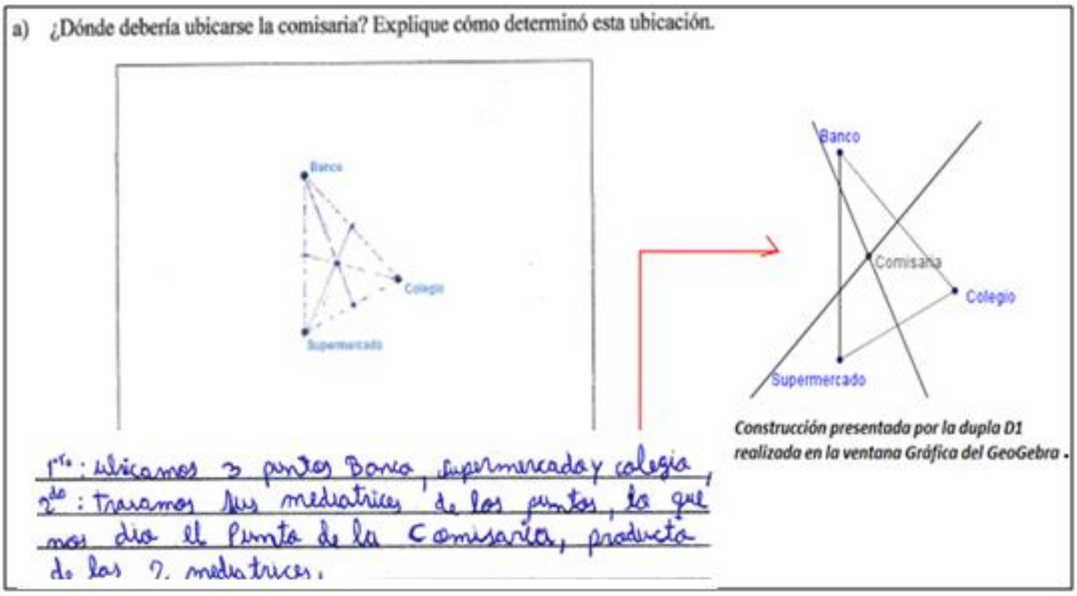


Figura 27. Respuesta de la dupla D1

En la respuesta de la dupla D1, se puede apreciar que los alumnos siguieron el procedimiento previsto para ubicar el punto que representa la comisaría. La dupla D2 presentó una respuesta similar a la dupla anterior. Sin embargo, tal como se había

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

previsto, la dupla D3 presentó dificultades para ubicar el punto que representa la comisaría; es decir, los alumnos graficaron un punto “tanteando” que se encuentra a igual distancia que los otros puntos (entidades). La Figura 28 muestra la respuesta de la dupla D3.

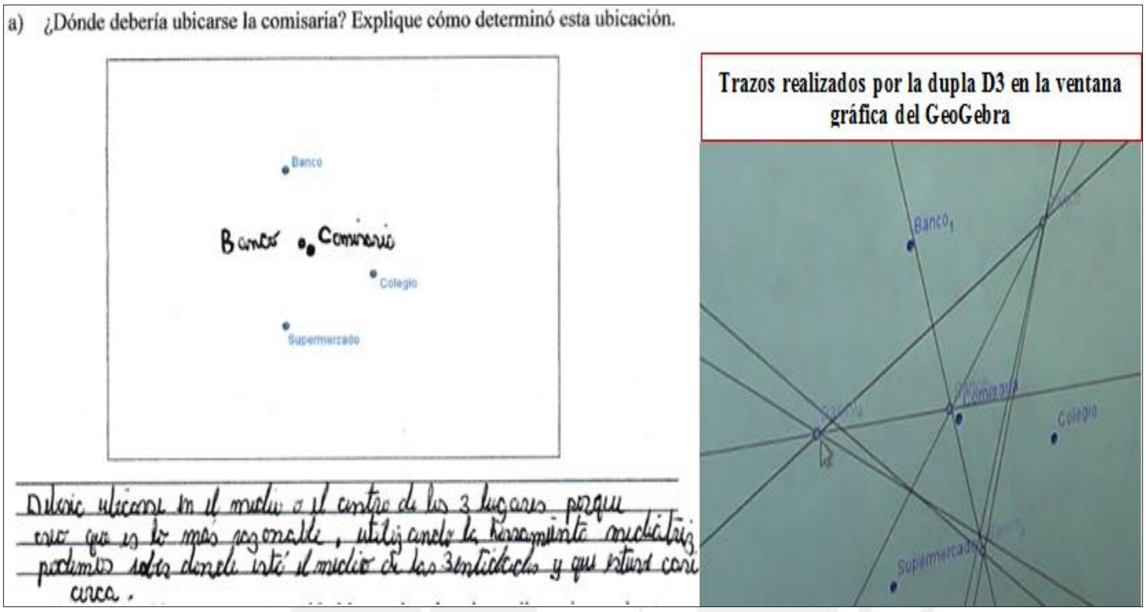


Figura 28. Respuesta de la dupla D3

En la Figura 28, se observa que para ubicar el punto que representa la comisaría la dupla D3 se dejó llevar por lo que veía y ubicó dicho punto al tanteo. Asimismo, tal como se había previsto, no utilizó adecuadamente la opción *mediatriz* del GeoGebra, tal como se observa en los trazos en la columna derecha. El siguiente diálogo se dio con los integrantes de la dupla D3.

Profesor. *¿Qué pasos siguieron para ubicar el punto?*

Yack *(dupla D3): Calculando que esté más o menos en el medio.*

Profesor*: Pero… ¿Estás seguro que ese punto está a la misma distancia que los otros puntos? En todo caso, cómo lo comprobarías.*

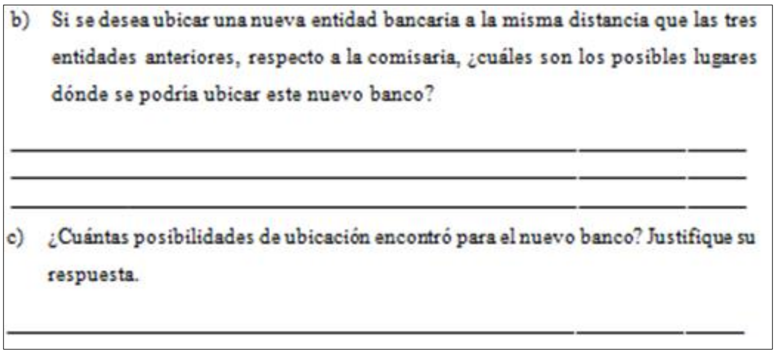
Pamela *(dupla D3): ¿Utilizando la mediatriz?*

Frente a esta situación, pudimos orientar al alumno, a través de preguntas, a buscar otros medios que le resulten efectivos. Al respecto, la dialéctica herramienta-objeto señala que en esta fase de búsqueda es posible que el alumno encuentre dificultades para resolver completamente el problema. Asimismo, bajo estas circunstancias, Douady manifiesta que “el papel del profesor no es ejercer la autoridad sino más bien ser un compañero científico” (p. 94).

TESIS PUCP
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

Pregunta 1, ítems b) y c):


b) Si se desea ubicar una nueva entidad bancaria a la misma distancia que las tres entidades anteriores, respecto a la comisaria, ¿cuáles son los posibles lugares dónde se podría ubicar este nuevo banco?

____

____

____

c) ¿Cuántas posibilidades de ubicación encontró para el nuevo banco? Justifique su respuesta.

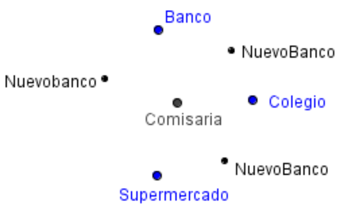
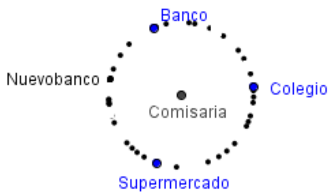
____

Figura 29. Ítem b de la pregunta 1

Con estos ítems se espera que los alumnos logren intuir el objeto circunferencia como conocimiento implícito, lo cual, según la dialéctica herramienta-objeto, corresponde a la fase de búsqueda. En esta última fase y en la antigua, se espera que los alumnos en este estudio movilicen conocimientos sobre puntos que equidistan respecto a un punto fijo (ubicación de la comisaría).

Una posible solución de los ítems b) y c), que se espera que presenten los alumnos, se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8. Posibles soluciones de los ítems b) y c) de la pregunta 1

Posible solución del ítem b) y c)	
b) Las posibles ubicaciones del nuevo banco pueden estar entre el banco y el colegio o entre el colegio y el supermercado o pueden estar entre el supermercado y el colegio. Pueden ocurrir todas estas posibilidades siempre y cuando esté a la misma distancia respecto a la comisaría. La Figura 30 ilustra lo descrito.  **Figura 30.** Posible repuesta del ítem b)	c) Existen muchas posibilidades de ubicar el nuevo banco. Si se logra identificar todas las posibilidades, estas pueden formar una circunferencia. La Figura 31 muestra lo descrito.  **Figura 31.** Posible respuesta del ítem c)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Respuestas de los alumnos

Las respuestas para este ítem b), tal como se había previsto, fueron acertadas solo por la dupla D1. Señalan que el nuevo banco se puede ubicar entre las entidades y a la misma distancia de los mismos. Para el ítem c) indican que existen muchas posibilidades. Para ubicar dichas posibilidades construyeron un segmento de extremos el punto donde se ubica la comisaria (fijo) y el punto donde se ubicaría el nuevo banco (punto movible**)** utilizando la herramienta *segmento de longitud fijo*. La longitud de este segmento es la distancia del punto donde se ubica la comisaría a cualquiera de las tres entidades (Banco, Colegio, Supermercado). El punto movible del segmento, al ser arrastrado, les permitió identificar y visualizar las diversas posibilidades.

En la Figura 32, en el trabajo presentado por la dupla D1, se muestra la respuesta al ítem b) y la construcción realizada en la ventana del GeoGebra para responder al ítem c).

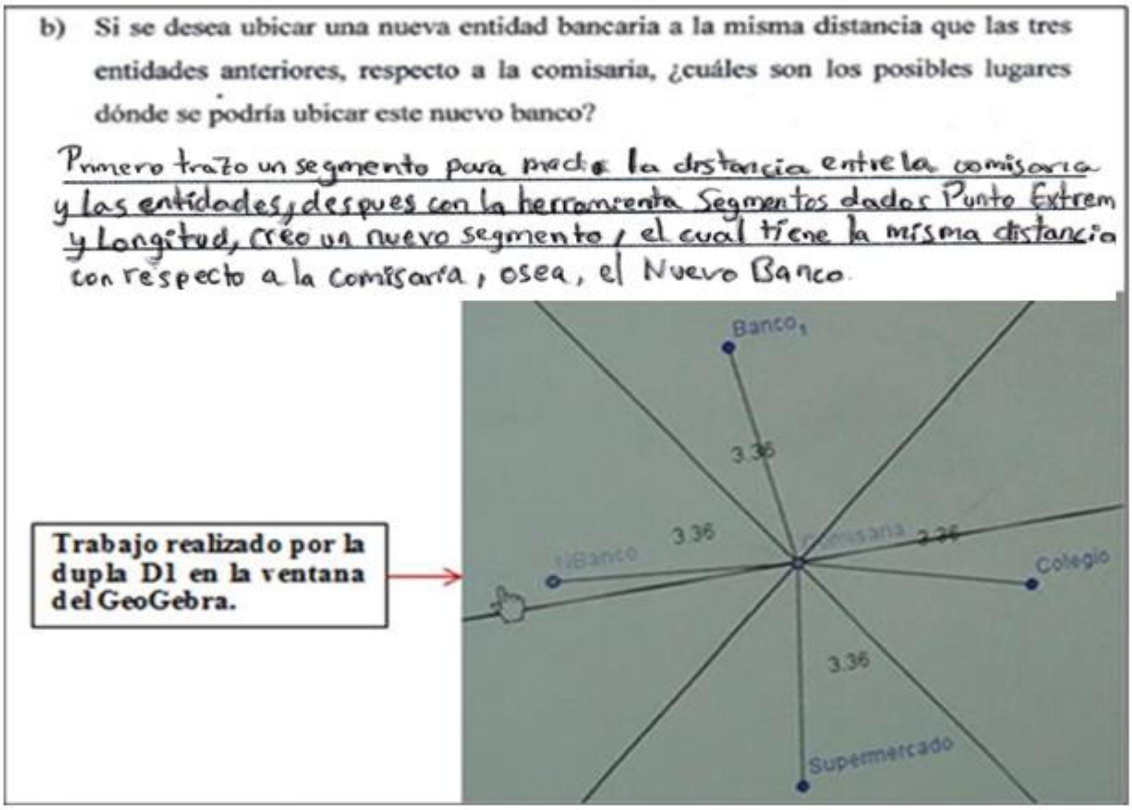


Figura 32. Respuesta de la dupla D1

La dupla D2 y D3 señalan que el nuevo banco se puede ubicar en cualquier lado pero a la misma distancia del punto de la comisaría. Sin embargo, al momento de proceder a la resolución, los alumnos mostraron dificultades para ubicar el nuevo banco. Esta situación nos permite posicionarnos en la fase antigua de la dialéctica herramienta-objeto. Debido a que los conocimientos previos de estas duplas no fueron suficientes

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

para dar respuesta a esta parte de la actividad. Frente a esta situación, nuestra intervención fue muy importante, debido a que sobre la base de preguntas se pudo orientar a las duplas a entrar en la búsqueda de otros medios mejor adaptados a la situación. Esta orientación pudo auxiliar a los alumnos y lograr una respuesta aceptable, la cual se pudo evidenciar cuando en el siguiente ítem *d*) el alumno pudo reconocer el nuevo concepto en construcción como conocimiento implícito. Lo anterior equivale a afirmar que, según la dialéctica herramienta-objeto, los conocimientos manejados con estos términos corresponden a la fase de búsqueda, en la cual los alumnos lograron mostrar que el objeto circunferencia era parte de la solución de este ítem, pero no pudieron explicar completamente de qué se trataba.

Pregunta 1, ítem d)

El propósito de este ítem, nos referimos a Figura 33, consiste en que los alumnos puedan identificar o intuir el objeto circunferencia, es decir, reconocer que las posibles ubicaciones de la comisaría genera o forma una circunferencia, pero no como objeto matemático sino como una figura.

d) ¿Qué figura se forma con las posibles ubicaciones del nuevo banco? Describe las características de esta figura.

Figura 33. Ítem d), pregunta 1

Una respuesta correcta para este ítem es, la figura que forma las diferentes ubicaciones del nuevo banco es una circunferencia. Esta figura está formada por todos los puntos en el plano que se encuentran a la misma distancia del punto fijo (comisaría) del mismo plano.

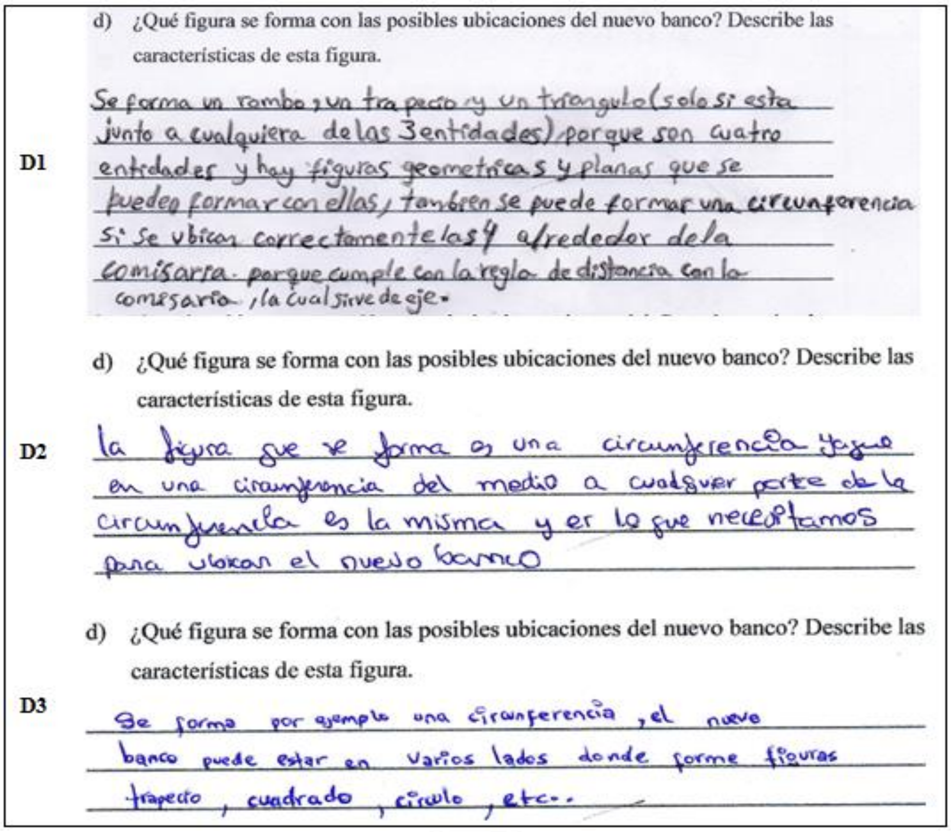
Se espera también que los alumnos puedan unir, a través de segmentos, los nuevos puntos ubicados del nuevo banco con las demás entidades y formar así un polígono (triángulo, cuadrado, pentágono, etc.). Sin embargo, la dificultad será disminuida siempre que la cantidad de puntos sea la mayor posible, ya que a más puntos ubicados con la condición dada, la figura que forma se asemejará más a una circunferencia. Creemos que la dificultad se minimizará mucho más cuando utilicemos en el GeoGebra la herramienta *activar rastro*, pues ésta hará evidente los infinitos puntos donde se puede ubicar el nuevo banco cuando éste es arrastrado.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Respuestas de los alumnos

Para este ítem d), las tres duplas señalan, entre otras figuras mencionadas, que la figura que forma las distintas posiciones tomadas por el nuevo banco es una circunferencia. Este nuevo objeto (representado a través de una figura), que reconocemos entre otras figuras que mencionan, es evidenciado como conocimiento implícito en este ítem. Al respecto, la dialéctica herramienta-objeto señala que los alumnos pueden evidenciar o descubrir el concepto como nuevo, pero que les es difícil explicitarlo completamente. La Figura 34 muestra los resultados de las tres duplas.



D1

d) ¿Qué figura se forma con las posibles ubicaciones del nuevo banco? Describe las características de esta figura.

Se forma un rombo, un trapecio y un triangulo (solo si esta junto a cualquiera de las 3 entidades) porque son cuatro entidades y hay figuras geometricas y planas que se pueden formar con ellas, tambien se puede formar una circunferencia si se ubican correctamente las 4 alrededor de la comisaria porque cumple con la regla de distancia con la comisaria, la cual sirve de eje.

D2

d) ¿Qué figura se forma con las posibles ubicaciones del nuevo banco? Describe las características de esta figura.

la figura que se forma es una circunferencia ya que en una circunferencia del medio a cualquier parte de la circunferencia es la misma y es lo que necesitamos para ubicar el nuevo banco

D3

d) ¿Qué figura se forma con las posibles ubicaciones del nuevo banco? Describe las características de esta figura.

Se forma por ejemplo una circunferencia, el nuevo banco puede estar en varios lados donde forme figuras trapecio, cuadrado, circulo, etc..

Figura 34. Respuestas de las duplas D1, D2 y D3

Por ejemplo, en la D1 y D3, tal como se ha previsto inicialmente, los alumnos mencionan que las distintas posiciones que toma el nuevo banco forman figuras como, por ejemplo, un rombo, un trapecio, un cuadrado, etc. Entre estas figuras planas que mencionan, podemos evidenciar el nombre de nuestro objeto en construcción, la circunferencia, que es mostrada, tal como se ha previsto anteriormente, como conocimiento implícito y, como profesor/investigador, hemos podido reconocer el nuevo concepto que están creando los alumnos.

El diálogo que se muestra a continuación tuvo lugar con uno de los integrantes de la dupla D1. La siguiente Figura 35, muestra el preciso instante en que el alumno intenta

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

explicar las posibles ubicaciones de la comisaria, así como las posibles figuras que estas pueden formar. Para ubicar las diversas posibilidades del nuevo banco, construyeron el nuevo segmento $\overline{NBanco\ Comisaría}$ (véase la Figura 35).

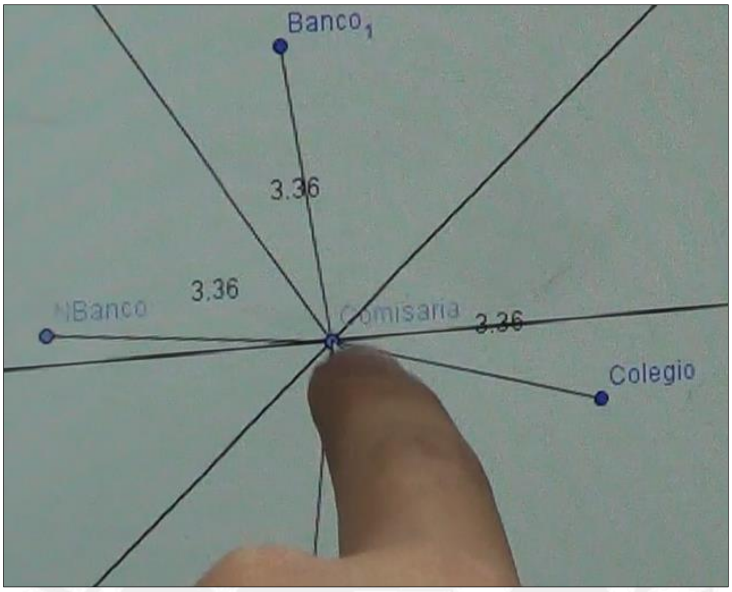


Figura 35. Momento en que un alumno explica las posibles ubicaciones de la comisaría

El punto movible (NBanco) del nuevo segmento, al ser arrastrado, le permitió percibir y visualizar las diversas posibilidades. Esta situación permitió el siguiente diálogo.

Profesor: *Cristhian, ¿cuántas posibilidades de ubicación encontró para el nuevo banco?*

Cristhian (dupla D1): *Más de una…, también puede formar, por ejemplo lo puedo poner a… casi cerca (señalando la pantalla) forma un triángulo, también lo puedo poner acá (refiriéndose al lugar entre el banco y el colegio) y forma una especie de trapecio, también acá y forma un rombo o un cuadrado; también hay una posibilidad de un círculo si es que lo ubico en varios lugares (señalando las distintas posiciones que puede tomar el nuevo banco).*

Profesor*: ¿Es una circunferencia la figura que se forma? o…*

Cristhian *(dupla D1): ¿Es una esfera?*

Profesor*: Una esfera no puede ser, porque estamos trabajando en geometría plana y no del espacio, ¿qué curva podrían formar entonces las distintas posiciones?*

Cristhian *(dupla D1): Ah…, entonces ¿es una circunferencia?*

Profesor*: Claro que sí.*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Observamos en las respuestas de *Cristhian* que no logra visualizar o percibir la figura que forma las diversas ubicaciones.

Luego de este diálogo, se les indicó a las trescduplas activar el rastro del punto movible (nuevo banco) y luego arrastrar dicho punto, el cual automáticamente mostró las infinitas posibilidades en las que se puede ubicar el nuevo banco. En esta situación pudimos comprobar las bondades del GeoGebra, que les permitió distinguir las otras posibilidades de ubicación del nuevo banco y; asimismo, pudieron reconocer el nuevo objeto de los otros que mencionaron anteriormente. Las tres duplas mostraron una solución similar a lo previsto. Por ejemplo, la Figura 36 es la respuesta de la dupla D3.

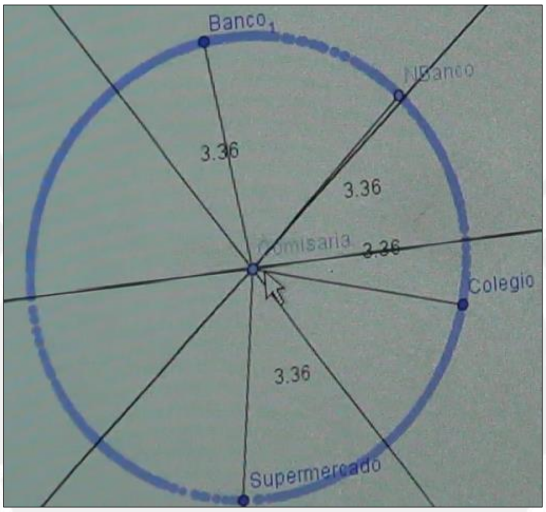


Figura 36. Respuesta de la dupla D3, ítem d)

Sin embargo, cuando se les solicitó que describieran la curva generada por las posiciones del nuevo banco, las tres duplas no respondieron como se esperaba, debido a que esta actividad 1 aún le corresponde a la fase de búsqueda en la que, según la dialéctica herramienta-objeto, los alumnos reconocen como conocimiento implícito pero no pueden explicar completamente sobre el nuevo concepto que están construyendo.

Esta situación permitió a los alumnos, descubrir que el nuevo concepto que se pretende desarrollar en clase es el objeto circunferencia.

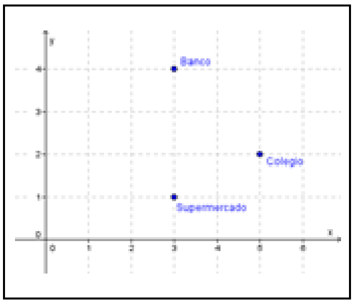
Pregunta 2

En esta pregunta que se muestra en la Figura 37, se espera que siguiendo el mismo procedimiento para ubicar el punto que representa la comisaría en la pregunta 1, el alumno resuelva analíticamente y encuentre las coordenadas del punto que representa la comisaría. Por otro lado, es pertinente aclarar que en esta pregunta 2 se ha previsto el uso de la *Apariencia Geometría Básica*, la cual consiste en mostrar la vista del

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

GeoGebra sin la ventana del álgebra, con el propósito de que el alumno no pueda reconocer de inmediato en la ventana algebraica las ecuaciones de las rectas mediatriz y las coordenadas del punto de paso de dichas rectas.

2. Abra el archivo *gg_preg_02* y usando las herramientas del Geogebra active los ejes coordenados y la cuadrícula, tal como se presenta a continuación.



A partir del plano cartesiano mostrado, responda las siguientes preguntas:

Figura 37. Pregunta 2 de la actividad 1

<u>Pregunta 2, ítem a)</u>

a) Determine las coordenadas del punto donde se encuentra la comisaría. Muestre su procedimiento.

Figura 38. Ítem a) de la pregunta 1

El objetivo de este ítem a) es hallar las coordenadas del punto (lugar de la comisaría) que equidista respecto a las tres entidades, siguiendo el mismo procedimiento de la pregunta 1. Se espera que en esta pregunta los alumnos movilicen sus conocimientos previos como punto medio de un segmento o punto equidistante, recta mediatriz de un segmento, ecuación de una recta y pendiente del mismo, así como sistema de ecuaciones con dos variables.

Una manera de resolver este ítem es con los pasos siguientes:

i. Identificar el punto medio de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CS}$ y $\overline{SB}$.
ii. Trazar la recta mediatriz de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CS}$ y $\overline{SB}$.
iii. Identificar las coordenadas del punto solicitado, el cual consiste en resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

Sean: Banco (B); Colegio (C); Supermercado (S); Nuevo Banco (NB).

i. El punto medio del segmento $\overline{BC}$ es $M_{\overline{BC}} = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (4,3)$.

El punto medio del segmento $\overline{CS}$ es $M_{\overline{CS}} = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (4,1.5)$.

El punto medio del segmento $\overline{SB}$ es $M_{\overline{SB}} = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = (3,2.5)$.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

ii. La Figura 39 muestra el trazo de la recta mediatriz de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CS}$ y $\overline{SB}$.

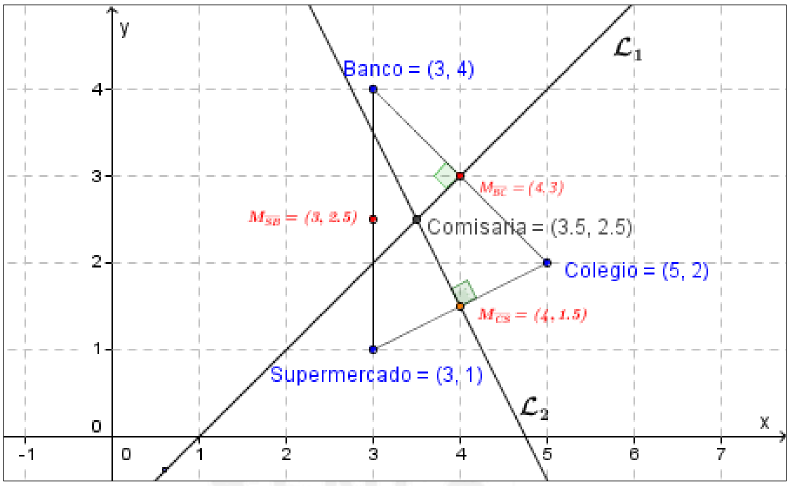


Figura 39. Posible respuesta del ítem a), pregunta 1

A partir de la gráfica, la pendiente de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CS}$ y $\overline{SB}$ es $m_{\overline{BC}} = \frac{2-4}{5-3} = -1$, $m_{\overline{CS}} = \frac{2-1}{5-3} = \frac{1}{2}$ y $m_{\overline{SB}} = No\ existe$, respectivamente. Luego, por la propiedad de perpendicularidad de dos rectas y usando la propiedad punto pendiente se tiene:

$m_{\mathcal{L}_1}.m_{\overline{BC}} = -1$ y $m_{\overline{BC}} = -1 \rightarrow m_{\mathcal{L}_1} = 1$, luego $\mathcal{L}_1: y = x - 1$ … … … (α)

$m_{\mathcal{L}_2}.m_{\overline{CS}} = -1$ y $m_{\overline{CS}} = \frac{1}{2} \rightarrow m_{\mathcal{L}_2} = -2$, luego $\mathcal{L}_2: y = -2x + 9.5$ … … … (β).

En cuanto a $m_{\overline{SB}} = \nexists$. Sin embargo, se puede hallar la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{SB}$, esto es, $\mathcal{L}_3: y = 2.5$

iii. Las coordenadas del punto solicitado se obtienen intersectando $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, es decir, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{O\}$ donde O es el punto que representa la comisaría. Luego, el sistema es $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 9.5 = 0 \end{cases}$ y, al resolver este último, se obtiene el punto $O = (3.5,2.5)$.

Algunas dificultades que pueden enfrentar los alumnos al desarrollar este ítem a) son:

- Que el alumno tenga dificultad para hallar las coordenadas del punto medio de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CS}$ y $\overline{SB}$.
- Que el alumno tenga dificultad para trazar la mediatriz de los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CS}$ y $\overline{SB}$.
- Que el alumno tenga dificultad para utilizar la relación de las pendientes de dos rectas perpendiculares.
- Que el alumno tenga dificultad para resolver el sistema $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 9.5 = 0 \end{cases}$

No obstante, creemos que las dificultades anteriores pueden minimizarse utilizando la representación gráfica en el GeoGebra, pues esta muestra los trazos precisos como se

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

presentan en la Figura 39. Por otro lado, en esta pregunta, se espera que los alumnos puedan tener dificultades en su proceso de desarrollo y que dichas dificultades conduzcan a encontrar nuevos medios para dar solución. Sin embargo, es de esperar también que abandonen su desarrollo debido a que, según la dialéctica herramienta-objeto, la estrategia sea muy prolongada o no funcione más, o por la incertidumbre sobre el resultado a falta de planeamiento previo. Frente a esta situación, como profesor/investigador, se buscará orientar a los alumnos con el propósito de direccionar sus conocimientos y evitar que abandonen su trabajo.

Respuestas de los alumnos

Los resultados que presentaron para el ítem a) fueron diversos. Es decir, la dupla D1 logró hallar las coordenadas del punto solicitado tal como se anticipó. Sin embargo, los alumnos muestran deficiencia en su procedimiento y pobreza en el lenguaje matemático que utilizan para justificar su resolución tal como observó Carmona (2011). Por ejemplo, la Figura 40 muestra la respuesta presentada por la dupla D1.

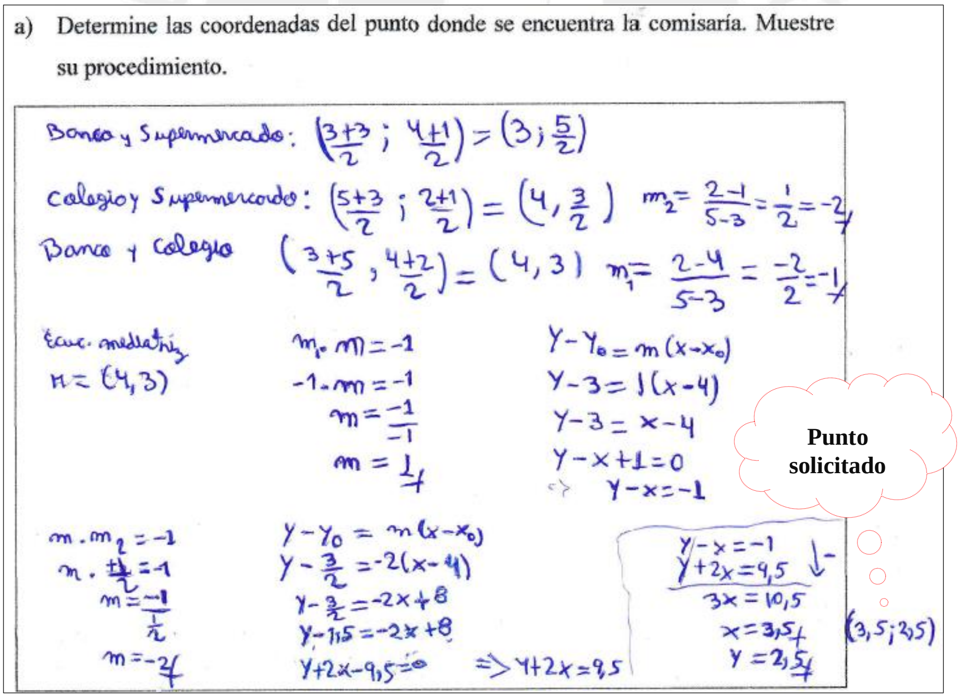


Figura 40. Respuesta de la dupla D1, ítem a)

Por otro lado, debemos resaltar que el procedimiento que siguió la dupla D1 es similar a lo que se ha previsto inicialmente, pues este es un factor importante para los alumnos, ya que les permite elaborar un plan para resolver. Asimismo, puede ayudar a disminuir las dificultades que pueden enfrentar durante el desarrollo del problema. Por otro lado, la dupla D2 no llegó a encontrar las coordenadas del punto solicitado; sólo lograron

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

obtener las ecuaciones de las rectas mediatrices de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{CS}$. La Figura 41 muestra el trabajo presentado por la dupla D2.

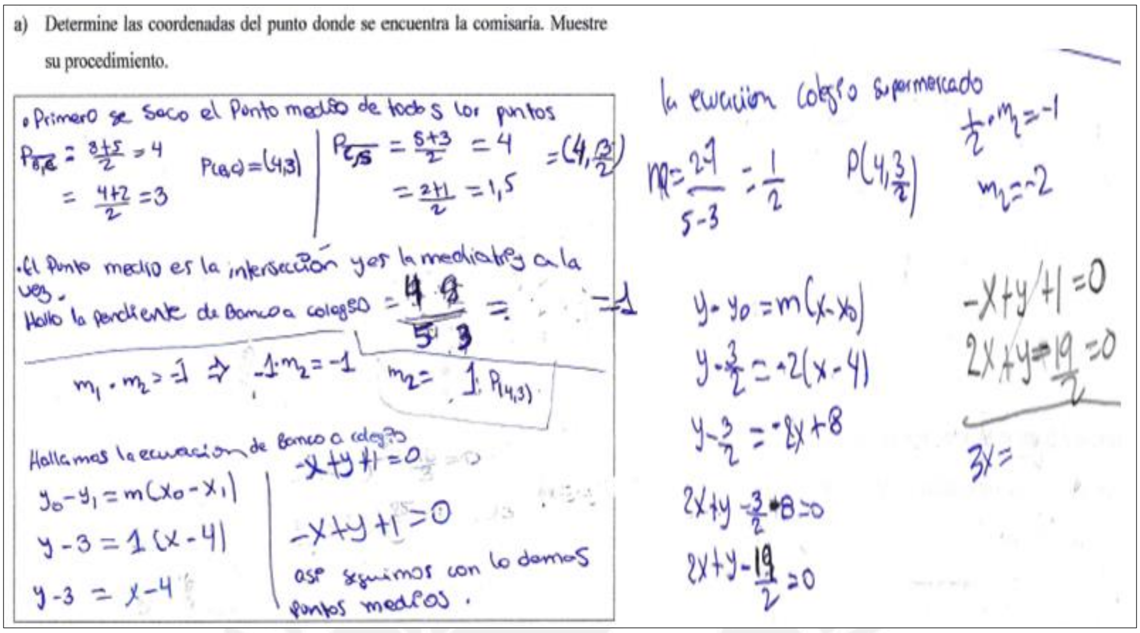
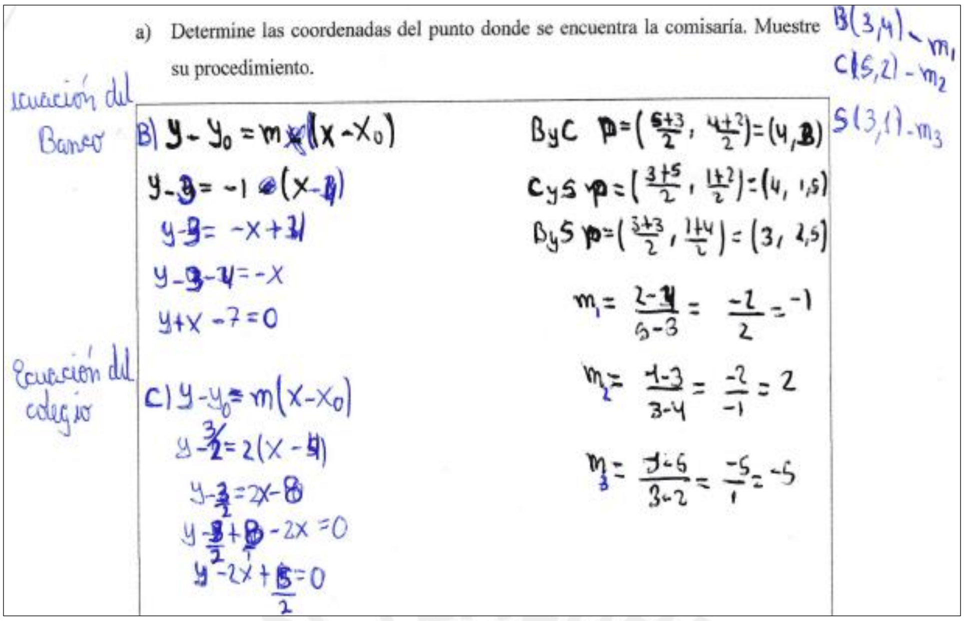

a) Determine las coordenadas del punto donde se encuentra la comisaría. Muestre su procedimiento.

Figura 41. Respuesta de la dupla D2, ítem a)

Esta dupla D2 obtiene las mediatrices de dos segmentos. Sin embargo, tal como se había previsto, los alumnos tuvieron dificultad para resolver el sistema $\begin{cases} -x + y + 1 = 0 \\ 2x + y - \frac{19}{2} = 0 \end{cases}$. En la Figura 41, margen derecho, observamos que intentan resolverlo, pero no logran hallar los valores de las variables (x e y). La dupla D1 siguió el orden similar al que se había previsto; asimismo, adoptó el procedimiento que se siguió en la pregunta 1, parte a), el cual consistió en obtener el punto que representa la ubicación de la comisaría. En cuanto a la dupla D3, tal parece que no lograron comprender el procedimiento que se siguió en la pregunta 1, pues no alcanzaron hallar las coordenadas del punto solicitado. Asimismo, esta situación ya había sido prevista. Tal como lo señaló Douady, los conocimientos antiguos (fase antigua) no son suficientes para resolver completamente el problema. En ese sentido, la dialéctica señala que en la fase de búsqueda/investigación, los alumnos enfrentarán dificultades que no les permitirán seguir. Creemos que esta dificultad, en particular para la dupla D3, consistió en que la estrategia es muy pesada en relación a la cantidad de operaciones. La Figura 42 muestra el trabajo presentado de la dupla D3.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ



a) Determine las coordenadas del punto donde se encuentra la comisaría. Muestre su procedimiento.

B(3,4) - m_1
C(5,2) - m_2
S(3,1) - m_3

Ecuación del Banco

B) $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 3 = -1(x - 4)$
$y - 3 = -x + 4$
$y - 3 - 4 = -x$
$y + x - 7 = 0$

Ecuación del colegio

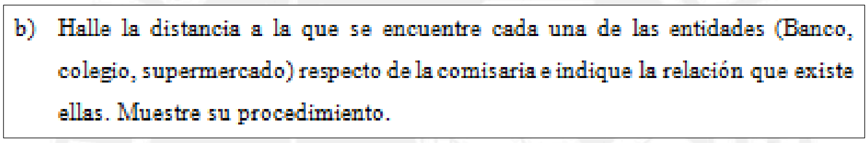
C) $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - \frac{3}{2} = 2(x - 4)$
$y - \frac{3}{2} = 2x - 8$
$y - \frac{3}{2} + 8 - 2x = 0$
$y - 2x + \frac{13}{2} = 0$

B y C $p = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (4, 3)$
C y S $p = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = (4, 1.5)$
B y S $p = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = (3, 2.5)$

$m_1 = \frac{2-4}{5-3} = \frac{-2}{2} = -1$
$m_2 = \frac{1-3}{3-4} = \frac{-2}{-1} = 2$
$m_3 = \frac{1-6}{3-2} = \frac{-5}{1} = -5$

Figura 42. Respuesta de la dupla D3, ítem a)

Pregunta 2, ítem b)



b) Halle la distancia a la que se encuentre cada una de las entidades (Banco, colegio, supermercado) respecto de la comisaria e indique la relación que existe ellas. Muestre su procedimiento.

Figura 43. Ítem b) de la pregunta 2

Con este ítem se espera que los alumnos verifiquen que las entidades equidistan del punto que representa la comisaría; asimismo, pretendemos que reconozcan los elementos característicos (centro y radio) implícitos del objeto circunferencia.

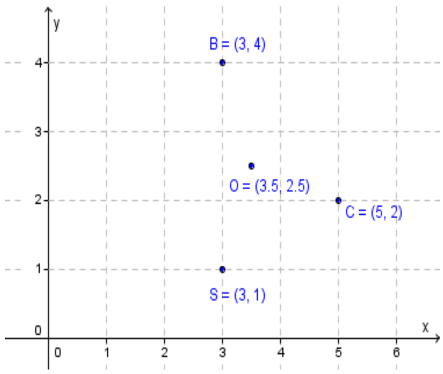
Una posible solución que esperamos que los alumnos presenten para este ítem es seguir los siguientes pasos:

Con el apoyo de una representación gráfica en la ventana del GeoGebra se tiene:

$$d_{\overline{OB}} = \sqrt{(3.5-3)^2 + (2.5-4)^2} \approx 1.58$$

$$d_{\overline{OC}} = \sqrt{(5-3.5)^2 + (2-2.5)^2} \approx 1.58$$

$$d_{\overline{OS}} = \sqrt{(3.5-3)^2 + (2.5-1)^2} \approx 1.58$$



La relación es:

$$d_{\overline{OB}} = d_{\overline{OC}} = d_{\overline{OS}} \approx 1.58$$

Por otro lado, es posible que los alumnos presenten dificultad al utilizar la propiedad de distancia entre dos puntos. Además, esta dificultad puede conducir a no encontrar una

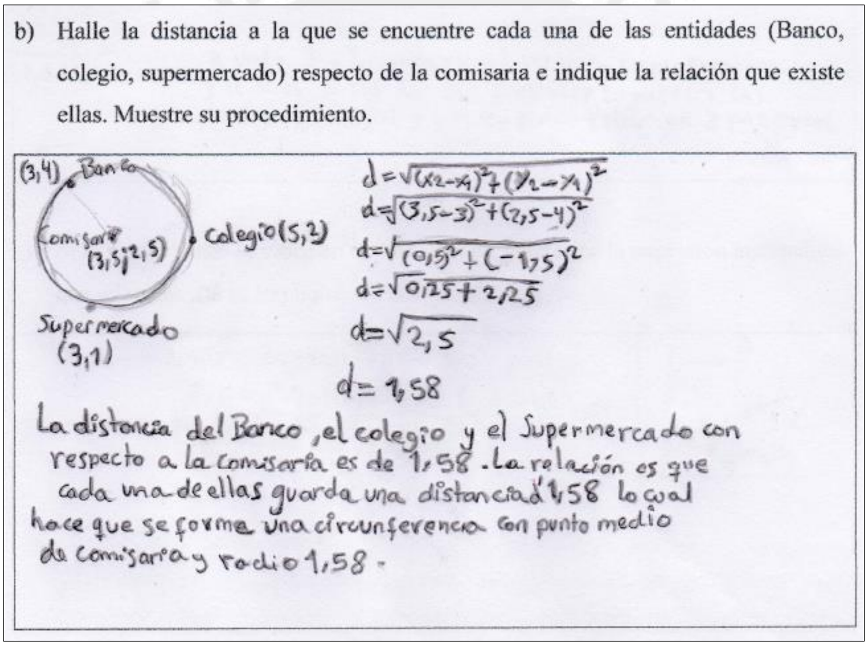
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

relación de igualdad entre las tres distancias respecto al punto que equidista entre las tres entidades.

Sin embargo, es de esperar que los alumnos se apoyen a través de una representación gráfica y muestren la circunferencia como conocimiento nuevo que se está descubriendo; esto es, según la dialéctica de la fase de investigación, en la que está involucrado implícitamente el objeto en construcción.

Respuestas de los alumnos

Para este ítem b), la dupla D1 mostró resultados tal como lo habíamos previsto; es decir, utilizaron la propiedad de distancia de dos puntos para obtener la distancia a la que se encuentran las entidades respecto al punto que representa la comisaría. La Figura 44 muestra el trabajo presentado por la dupla D1.


b) Halle la distancia a la que se encuentre cada una de las entidades (Banco, colegio, supermercado) respecto de la comisaria e indique la relación que existe ellas. Muestre su procedimiento.

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$d=\sqrt{(3,5-3)^2+(2,5-4)^2}$

$d=\sqrt{(0,5)^2+(-1,5)^2}$

$d=\sqrt{0,25+2,25}$

$d=\sqrt{2,5}$

$d=1,58$

La distancia del Banco, el colegio y el Supermercado con respecto a la comisaría es de 1,58. La relación es que cada una de ellas guarda una distancia de 1,58 lo cual hace que se forme una circunferencia con punto medio de comisaría y radio 1,58.

Figura 44. Respuesta de la dupla D1, ítem b)

Es importante resaltar que el problema planteado tiene la particularidad de inducir al alumno a utilizar una representación gráfica que le permita ver desde otro ángulo el problema planteado. En otras palabras, apoyarse en una representación diferente a la que ha sido planteado el problema es una ventaja que ayuda en el aprendizaje del objeto en estudio y le permite al alumno reforzar la idea de las formas de representarlo. Esto, a su vez, le permite diferenciar el objeto de sus representaciones. Otro aspecto que podemos resaltar en el trabajo de la dupla D1 es que señalan, tal como se había previsto, que las distancias de la comisaría a las entidades es de 1.58 unidades. Asimismo, lograron reconocer la circunferencia con sus elementos característicos (*lo cual hace que*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

se forme una circunferencia con punto medio de comisaría y radio), lo cual se refiere al centro y al radio. Es decir, las descripciones con estas características (Figura 44), según la dialéctica herramienta-objeto, le corresponden a la fase de búsqueda, en la que los alumnos todavía no lograrán describir o explicar completamente (explícitamente) el nuevo concepto que están construyendo.

En cuanto a la dupla D2, a través de la propiedad de distancia, solo mostraron la longitud del punto de la comisaría al banco. Cuando se les consultó al respecto, respondieron que todas las entidades están a una misma distancia de 1.58 unidades. La Figura 45 muestra el trabajo presentado por la dupla D2.

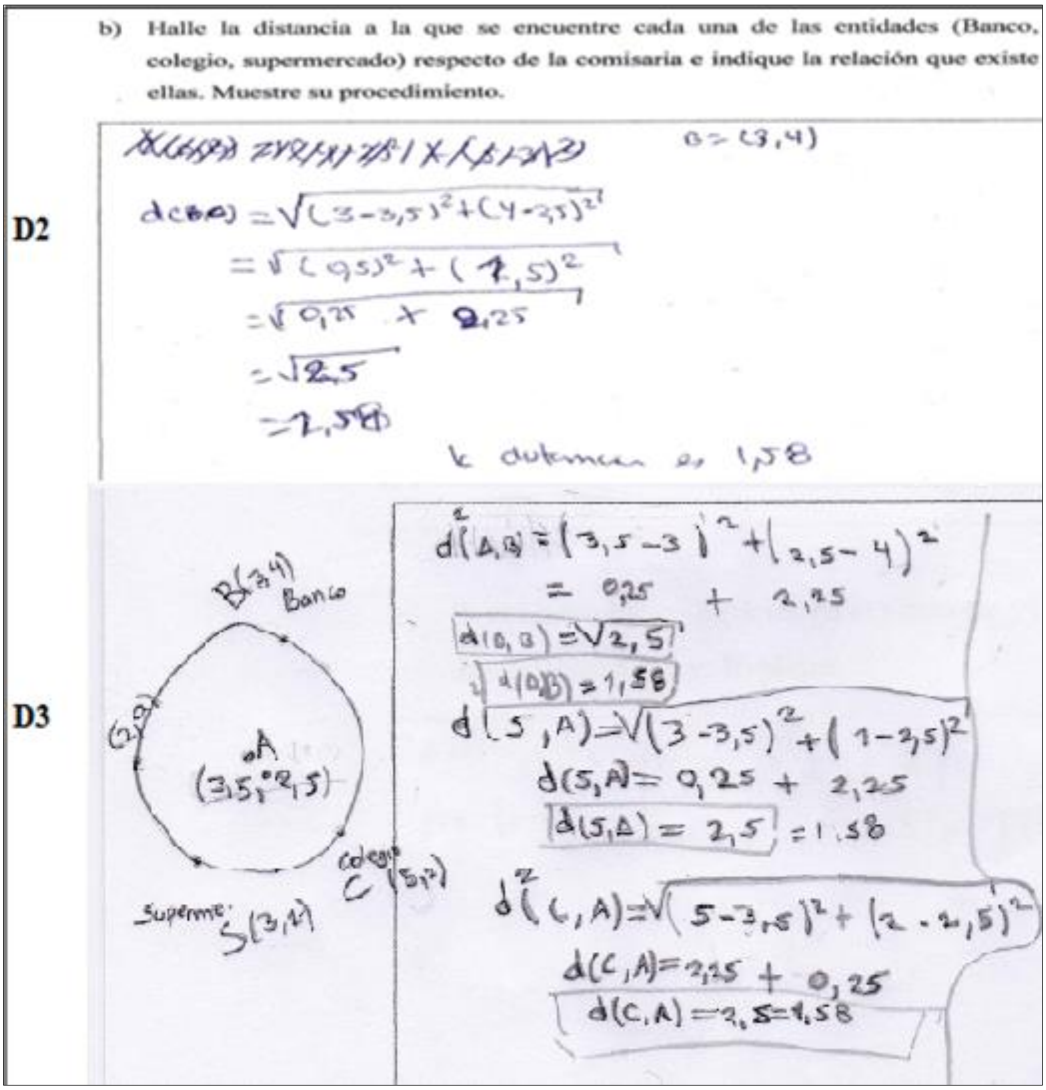


Figura 45. Respuestas presentada por las duplas D2 y D3, ítem b)

La dupla D3, tal como se había previsto, mostró imprecisiones a la hora de utilizar la propiedad de distancia (véase la Figura 45, dupla D3). Esta dupla, al igual que la dupla D1, se apoya utilizando una representación gráfica de la circunferencia.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

A partir de la siguiente pregunta, tal como se había mostrado en la Tabla 6 (Distribución de las actividades según las fases de la DHO), los alumnos estarán involucrados en la **fase de explicitación**.

<u>Pregunta 2, ítem c)</u>

> c) ¿Qué curva forma las distintas posiciones en la que se ubica el nuevo banco?______________________________
> Para la curva obtenida, ¿qué representa el punto donde se ubica la comisaria?
> ____;
> y ¿qué representa el segmento que une la comisaria con cualquiera de las entidades (banco, colegio, supermercado, nuevo banco)?
> ____

Figura 46. Ítem c) de la pregunta 2

En las preguntas anteriores se ha intentado construir el concepto de circunferencia como un conocimiento implícito. Con este ítem c) pretendemos reconocer y diferenciar la circunferencia con sus características elementales (centro y radio) como conocimientos nuevos y explícitos a través de las distintas posiciones (conjunto de puntos) que toma el nuevo banco.

Sobre la curva que forma las distintas posiciones del nuevo banco, esperamos que los alumnos respondan que se trata de una circunferencia y que el punto O (comisaría) representa el centro de dicha circunferencia. Finalmente, tendría que reconocer que la distancia del punto O a las entidades es la longitud del radio de la circunferencia. A diferencia de esto, se espera también que los alumnos no logren identificar los elementos característicos de la circunferencia o que, al igual que en la pregunta 1 parte d), señalen que la curva generada es un polígono.

<u>Respuestas de los alumnos</u>

Las respuestas para este ítem c) han sido respondidas como se había previsto en la solución posible, con la excepción de un integrante de la dupla D2, quien señaló que las distintas posiciones que toma el nuevo banco "*forma una curva circular o una circunferencia*". Notamos en esta respuesta que los alumnos muestran confusión de ambos términos. Este tipo de situaciones, propicio para intercambiar ideas, permitió el diálogo con los integrantes de las tres duplas:

***Profesor**: La pregunta es para todos: ¿cuál es la diferencia entre un círculo y una circunferencia?*

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

***Yack** (dupla D3): Son iguales, profesor. Son sinónimos.*

***Profesor**: ¿Estás seguro de lo que dices Yack? ¿Están todos de acuerdo?*

***Cristhian** (dupla D1): No, profesor. El círculo es todo y la circunferencia es su contorno, donde están las entidades.*

***Melani** (dupla D2): Lo que dice Yack no es cierto, porque una circunferencia es eso que aparece cuando dibujamos con un compás y el círculo es todo lo que cierra la curva.*

***Profesor**: Claro que sí; estuvieron muy cerca de diferenciar ambos términos. El círculo es el área que encierra la curva incluido este último, mientras que la circunferencia es solamente la curva que encierra el círculo. Ahora, dime Yack (dupla D3), ¿ambos términos son iguales?*

***Yack** (dupla D3): Pensaba que eran iguales.*

***Profesor**: No, Yack; son diferentes. Ahora en adelante debes recordar que ambos términos son diferentes.*

***Profesor**: Mélani, (dupla D2), ¿qué figura, exactamente, forman entonces las distintas posiciones que toma el nuevo banco?*

***Mélani** (dupla D2): Una circunferencia, profesor. Ahora sí me quedó claro. Es que, profesor, a veces me confundo.*

Este dialogo permitió a los alumnos apropiarse parcialmente del concepto de circunferencia como conocimiento explícito. Al respecto, Douady señala que los alumnos entran en conflicto con el nuevo conocimiento explícito que están creando. Esta situación requiere la intervención del profesor/investigador para la apertura de debates sobre los conocimientos antiguos y los nuevos que están siendo creados. En ese sentido, el diálogo anterior permitió a los alumnos distinguir la circunferencia del círculo. En esta etapa los alumnos se dieron cuenta claramente de que el nuevo concepto que se está abordando es la circunferencia.

La Figura 47 muestra el trabajo presentado por la dupla D3.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

c) ¿Qué curva forma las distintas posiciones en la que se ubica el nuevo banco? Una Circunferencia

Para la curva obtenida, ¿qué representa el punto donde se ubica la comisaria? centro de la circunferencia,

y ¿qué representa el segmento que une la comisaria con cualquiera de las entidades (banco, colegio, supermercado, nuevo banco)?

Radio

Figura 47. Respuesta de la dupla D3, ítem c)

<u>Pregunta 2, ítem d)</u>

d) Si el nuevo banco se ubica en el punto $(2, a)$, determine los valores de a e interprete que representa dichos valores. Explique su procedimiento.

Figura 48. Ítem d) de la pregunta 2

Este ítem tiene como propósito hallar las ubicaciones específicas del nuevo banco utilizando la “definición” de la circunferencia como nuevo conocimiento explícito o, en todo caso, utilizar la propiedad de distancia.

Esperamos que los alumnos en este ítem puedan resolver el problema de la siguiente manera:

Debido a que este ítem pertenece a la fase de explicitación, se espera que los alumnos utilicen la definición de la circunferencia como nuevo objeto explícito que les permita resolver el problema. Asimismo, se espera que los alumnos se apoyen en la representación gráfica para ver desde otro ángulo el problema planteado, porque así podrá evidenciar los posibles lugares para el nuevo banco (véase la Figura 49).

Como la distancia del centro $O(3.5{,}2.5)$ al punto $(2, a)$ de la circunferencia es 1.5 unidades se tiene:

$$1.58^2 = (2 - 3.5)^2 + (a - 2.5)^2$$

$$(a - 2.5)^2 = 2.4964 - 2.25 = 0.2464$$

$$a = 2.5 \pm 0.5$$

Donde $a = 3 \vee a = 2$; luego, los puntos donde se puede ubicar el nuevo banco son: $D(2{,}2)$ y $E(2{,}3)$.

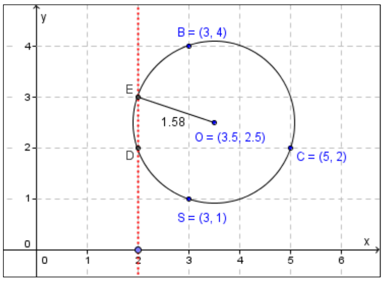


Figura 49. Circunferencia de centro $(3.5{,}2.5)$ y radio 1.58

Por otro lado, creemos que los alumnos tendrán dificultades al no utilizar adecuadamente la definición de circunferencia o la propiedad de distancia para obtener

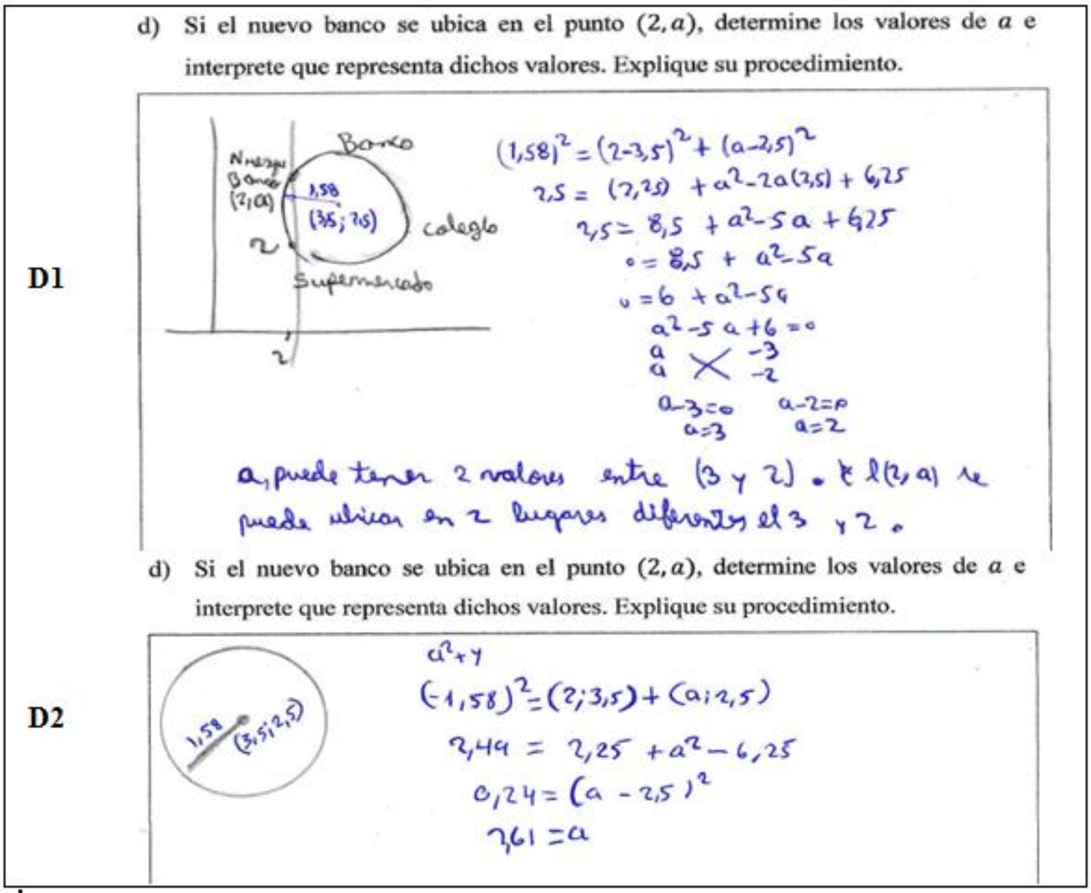
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

la ecuación que involucra la constante a; asimismo, creemos que también se pueden equivocar en las operaciones básicas, así como obtener un solo valor de la constante a, al no utilizar adecuadamente la siguiente propiedad:

$$x^2 = y \leftrightarrow |x| = \sqrt{y} \leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}.$$

Respuestas de los alumnos

Las respuestas al problema del ítem d) han sido acertadas por las dupla D1 y D3, tal como se había previsto en la solución posible. Sin embargo, la dupla D2 presentó dificultades para desarrollar una ecuación de segundo grado. Para este análisis mostramos los trabajos presentados por la dupla D1 y D2 que se muestran en la Figura 50.


D1

d) Si el nuevo banco se ubica en el punto $(2, a)$, determine los valores de a e interprete que representa dichos valores. Explique su procedimiento.

D2

d) Si el nuevo banco se ubica en el punto $(2, a)$, determine los valores de a e interprete que representa dichos valores. Explique su procedimiento.

Figura 50. Respuesta de las duplas D1 y D2, ítem d)

En la Figura 50, es evidente reconocer por qué la dupla D2 no logró hallar los dos valores de la variable a. Notamos dos razones evidentes. Primero, no utiliza una representación gráfica completa, sino que realiza una simple representación del problema planteado, la cual no les permite evidenciar los otros conceptos o conocimientos previos inmersos en el problema planteado. Una nueva y adecuada

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

representación del problema original hubiera auxiliado a la dupla D2, al igual que a la D1, para comprender la información contenida en la nueva representación. La segunda razón consiste en no reconocer que la ecuación que está trabajando es de segundo grado, lo cual implica que tiene dos raíces. Sin embargo, la dupla D1 al utilizar y apoyarse de una representación gráfica y al trazar la recta vertical $x = 2$ que corta en dos puntos a la circunferencia, se hace evidente que existen dos valores para la variable a. Sobre esto Douady señala que es importante que un problema requiera para su solución hacer una nueva representación de la representación original, de tal forma que facilite al alumno la adquisición del nuevo concepto. Finalmente, para ambas duplas, parece ser que ya el nuevo concepto que están construyendo es familiar, pues incluyen su representación gráfica como conocimiento explícito.

Pregunta 2, ítem e)

e) Si el nuevo banco se ubica en el punto (x, y), determine la expresión matemática que relaciona x e y. Explique.

Figura 51. Ítem e) de la pregunta 2

Este ítem tiene el propósito de hallar la representación algebraica de la circunferencia cuando el nuevo banco se encuentre en el punto $P(x, y)$.

Una posible solución que se espera de los alumnos para resolver el problema consiste en los pasos siguientes:

Es de esperar que los alumnos utilicen la definición de la circunferencia para obtener la expresión matemática o, en todo caso, que utilicen la propiedad de distancia entre dos puntos; se espera, igualmente, que se apoyen en una representación gráfica para expresar la relación entre las coordenadas x e y del nuevo banco. La Figura 52 muestra la posible expresión matemática que relaciona las coordenadas del punto $P(x, y)$.

$$1.58^2 = (x - 3.5)^2 + (y - 2.5)^2 \quad \longleftrightarrow$$

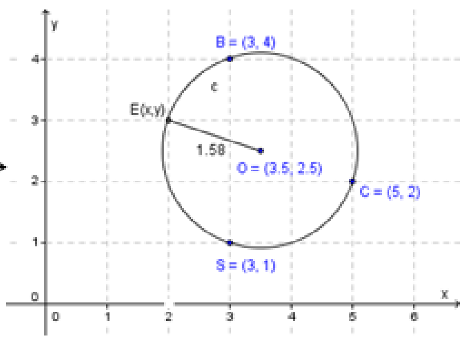


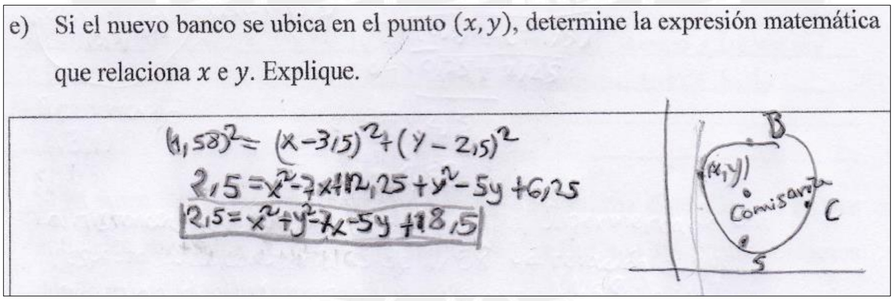
Figura 52. Posible respuesta del ítem e) de la pregunta 2

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Es pertinente aclarar que los alumnos, en este ítem que forma parte de la fase de explicitación, no puedan interpretar aún que la expresión matemática también representa la circunferencia. Por tanto, es posible que esta dificultad pueda confundir a los alumnos sobre el concepto de circunferencia que están construyendo. Este momento, según la dialéctica herramienta-objeto, corre el riesgo de bloquearse. Frente a esta situación, nuestra acción como profesor/investigador será tomar una decisión que les permita a los alumnos explicitar o esclarecer que la circunferencia se puede representar en diversas representaciones, en este caso en su representación algebraica.

<u>Respuestas de los alumnos</u>

Para este ítem e) las duplas D1 y D3 acertaron en sus respuestas no como se había esperado, pues si bien utilizan la definición de la circunferencia implícitamente para escribir la expresión matemática, no logran explicar qué representa la nueva expresión obtenida. Esto es, según la dialéctica herramienta-objeto, los alumnos no pueden explicar o describir explícitamente el nuevo concepto cuando son parte de la fase de explicitación. Ambas duplas solo acertaron una parte de lo que se esperaba; es decir, expresar la ecuación que relaciona las coordenadas del punto $P(x, y)$. Por ejemplo, la Figura 53 muestra el trabajo presentado por la dupla D1.


e) Si el nuevo banco se ubica en el punto (x, y), determine la expresión matemática que relaciona x e y. Explique.

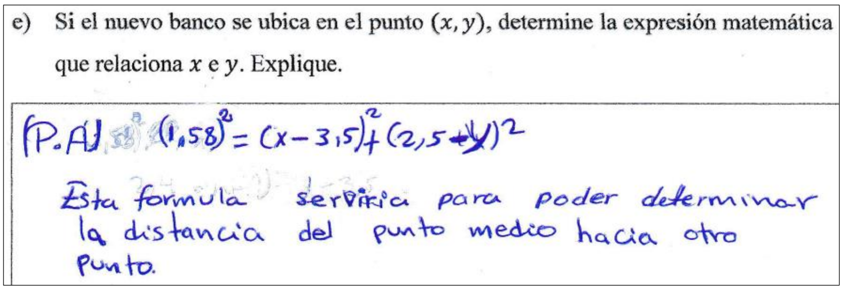
$(1,58)^2 = (x-3,5)^2 + (y-2,5)^2$

$2,5 = x^2 - 7x + 12,25 + y^2 - 5y + 6,25$

$\boxed{2,5 = x^2 + y^2 - 7x - 5y + 18,5}$

Figura 53. Respuesta de la dupla D1 al ítem e) de la pregunta 2

Sin embargo, la Figura 54 muestra el trabajo de la dupla D2 con intenciones de explicar la expresión matemática obtenida. Los alumnos logran mencionar los elementos característicos de la circunferencia.


e) Si el nuevo banco se ubica en el punto (x, y), determine la expresión matemática que relaciona x e y. Explique.

(P.A) $(1,58)^2 = (x-3,5)^2 + (2,5-y)^2$

Esta formula serviría para poder determinar la distancia del punto medio hacia otro punto.

Figura 54. Respuesta de dupla D2 al ítem e)

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En vista de que los alumnos no lograron explicar la expresión matemática obtenida en este ítem, se tomó un momento para explicar y esclarecer que la ecuación también representa una circunferencia y es una forma de representar el objeto.

<u>Actividad 3</u>. Explicitación de la circunferencia

Esta actividad 3 tiene como finalidad utilizar el concepto de circunferencia como conocimiento necesario y explícito para resolver los problemas. Se espera también que los alumnos al desarrollar esta actividad puedan empezar a familiarizarse con la circunferencia.

Actividad 3. Explicitación de la circunferencia

1. Halle el conjunto de puntos $P(x, y)$ del plano tales que sus distancias al punto $(-2,2)$ sea igual a cuatro unidades. Escriba la ecuación de la curva obtenida.

2. Halle una expresión matemática para relacionar las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-5,0)$ y $B(5,0)$ es 150. Grafique la curva que se obtiene.

Figura 55. Actividad 3, fase de explicitación

A continuación, presentamos las posibles soluciones de la actividad 3, preguntas 1 y 2.

<u>Pregunta 1</u>

Se pretende, con esta pregunta, que los alumnos utilicen como nuevo conocimiento explícito el concepto de circunferencia y reconozcan este concepto desde su concepción como lugar geométrico.

Se espera que los alumnos utilicen la representación gráfica para deducir la ecuación que representa la circunferencia a través de la fórmula de distancia entre dos puntos o que utilicen directamente la definición de una circunferencia, esto es,

$$d(C, P) = |\overline{CP}| = 4.$$

Utilizando la propiedad de distancia entre los puntos $C(-2,2)$ y $P(x, y)$ se obtiene la siguiente igualdad:

$d_{\overline{CP}} = 4 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}$. Luego

$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 4$; elevando al cuadrado en ambos miembros de la igualdad se tiene que:

$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4^2$, es la ecuación solicitada.

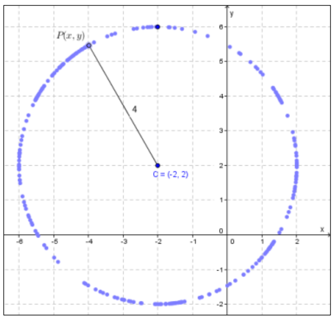


Figura 56. Circunferencia de centro $(-2,2)$ y radio 4 unidades

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

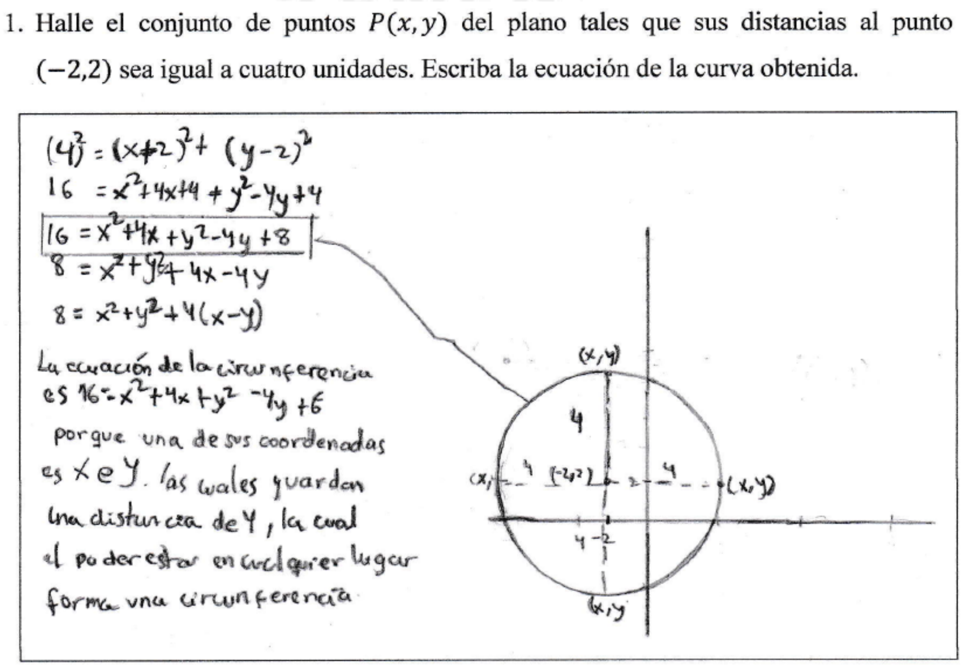
En el desarrollo de esta pregunta creemos que los alumnos podrían tener dificultades para hallar la ecuación solicitada debido a la falta de comprensión del nuevo concepto en construcción desde su concepción como lugar geométrico.

<u>Respuestas de los alumnos</u>

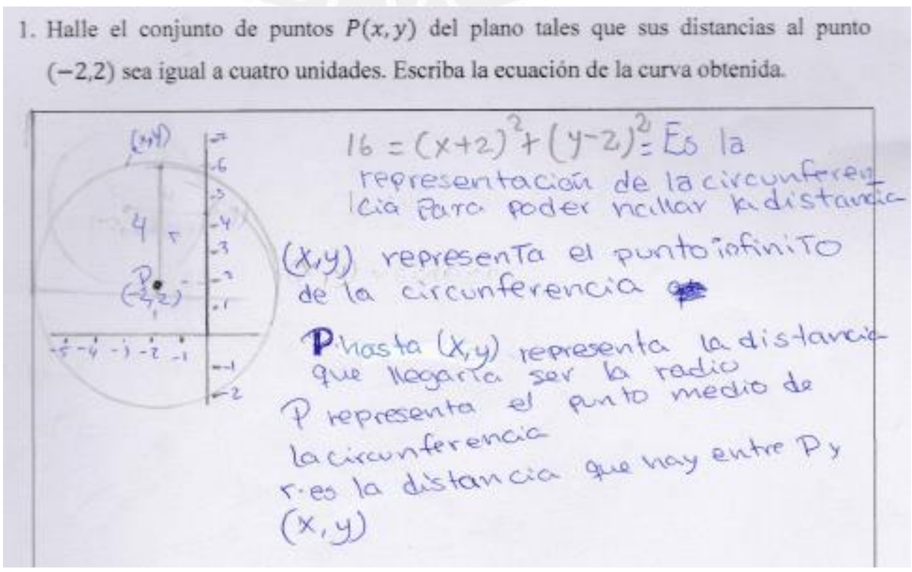
Las respuestas para esta pregunta 1 han sido acertadas por las tres duplas como se había previsto. En el trabajo de la dupla D3 solo se mostró la ecuación solicitada. Sin embargo, las duplas D1 y D2 muestran una descripción de las características de la circunferencia como un conocimiento nuevo y explícito.

En la Figura 51 mostramos los trabajos presentados por las tres duplas.

D1



D2



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

D3

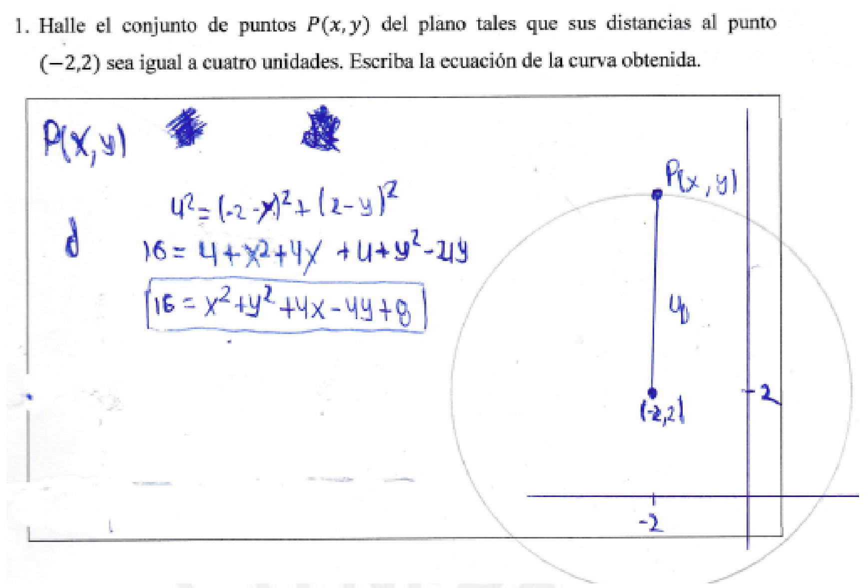


Figura 57. Respuesta de las tres duplas a la pregunta 1, actividad 3

Según señala la dialéctica herramienta-objeto, los alumnos en esta fase de explicitación mostrarán la importancia de algunas herramientas utilizadas en las actividades anteriores. En ese sentido, en un diálogo, la dupla D1 con la dupla D2 expresaban que esta pregunta (pregunta 1, actividad 3) es similar que la búsqueda de todos los posibles lugares donde se puede ubicar el nuevo banco. Uno de los integrantes de la dupla D2 dice: "*el conjunto de puntos que puede tomar el punto $P(x,y)$ es igual que el nuevo banco, que también tomaba muchos puntos, o sea un conjunto de lugares*". Al respecto, la D1 respondió: "*Así es, el punto $P(x,y)$ es el nuevo banco y el punto $(-2,2)$ es la comisaría*". Esta situación ha sido importante y, al mismo tiempo, propicia para generar la discusión sobre los elementos característicos del nuevo concepto en construcción. Enseguida se le preguntó: "*¿Qué características más resaltantes se puede notar en la gráfica de una circunferencia?*" La dupla D3 contestó: "*Su punto medio y su distancia que es su radio*". Inmediatamente, la dupla D2 dijo: "*Profesor, es el centro y su radio y el punto P*". Luego se le preguntó lo siguiente: "*¿Qué representa el punto P de coordenadas x e y?*". Al respecto la dupla D3 respondió: "*Es un punto cualquiera que puede estar en cualquier lugar pero manteniendo la misma distancia del punto* $(-2,2)$". Observamos en esta última respuesta que es similar a la definición de la circunferencia como lugar geométrico. En este diálogo pudimos evidenciar la fase de explicitación que, sobre la base de la discusión y el análisis, los alumnos pudieron construir parcialmente el concepto de la circunferencia. Notamos que los alumnos lograron la institucionalización local del objeto. Es decir que, según la dialéctica

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

herramienta-objeto, los alumnos reconocen y se apropian de algunos elementos importantes del objeto que se está construyendo. En este caso, específicamente sobre el concepto de circunferencia, los alumnos reconocieron y evidenciaron en sus respuestas los elementos característicos del objeto circunferencia como el radio, el centro y un punto P cualquiera de la circunferencia, así como intentan definir el objeto desde su concepción como lugar geométrico.

Es importante señalar que situaciones (diálogos) de este tipo han sido muy valiosas para la construcción del concepto de circunferencia, ya que esta labor nos facilitó la siguiente fase que consistió en la institucionalización del concepto de circunferencia en su estatus de objeto matemático. Hasta este momento, cada dupla con su participación logró identificar las características elementales (centro y radio) de la circunferencia. Otra respuesta que nos permitió identificar la evolución en la construcción del concepto circunferencia es la que presenta la dupla D2 (véase la Figura 57), en la que se menciona que la ecuación “*es la representación de la circunferencia*”. Esta expresión muestra que la dupla D2 intenta, de alguna manera, diferenciar el objeto de su representación.

Pregunta 2

2. Halle una expresión matemática para relacionar las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-5,0)$ y $B(5,0)$ es 150. Grafique la curva que se obtiene.

Figura 58. Pregunta 2 de la actividad 2

Esta pregunta tiene como finalidad movilizar los conocimientos explícitos de los alumnos. Es decir, pretendemos que los alumnos, a partir de una representación textual realicen una representación algebraica, y representar este último gráficamente. Asimismo, se espera que los alumnos puedan utilizar una representación gráfica para identificar la relación de distancias de los puntos A y B al punto $P(x, y)$.

Por otro lado, pensamos que los alumnos, para resolver el problema, opten como una posible solución los pasos siguientes:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Ubicamos los puntos $A(-5{,}0)$, $B(5{,}0)$ y $P(x, y)$ en el plano cartesiano (véase la Figura 59). Luego, por la condición dada, se tiene la siguiente igualdad:

$$d_{PA}^2 + d_{PB}^2 = 150$$

$$(x+5)^2 + (y-0)^2 + (x-5)^2 + (y-0)^2 = 150$$

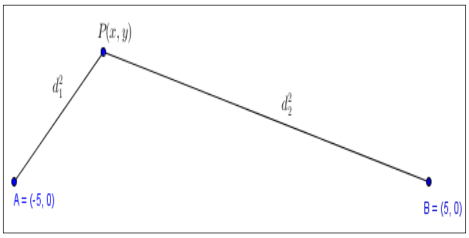


Figura 59. Posible representación de la pregunta 2

Simplificando la ecuación, se obtiene la ecuación canónica de la circunferencia con radio $\sqrt{50}$:

$$x^2 + y^2 = 50$$

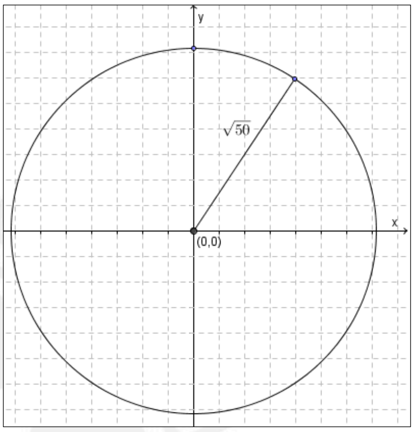


Figura 60. Representación gráfica de una circunferencia con centro en el origen

Pensamos que algunas dificultades que pueden presentar los alumnos, debido a que el problema requiere un orden para su resolución, son las siguientes:

- No puedan plantear la ecuación $d_{PA}^2 + d_{PB}^2 = 150$.
- No utilicen apropiadamente la propiedad de distancia.
- Se confundan en las operaciones y obtengan una ecuación incorrecta.

Respuestas de los alumnos

En esta pregunta, tal como habíamos considerado que habría problemas, las tres duplas presentaron dificultad para plantear matemáticamente el enunciado del problema. Creemos que esta dificultad se debe a que, tal como lo observó Bedretchuk (2010), los alumnos muestran dificultad en la comprensión de los enunciados. Sin embargo, frente a esta situación, pudimos realizar algunas indicaciones con el propósito de direccionar su proceso de resolución. Por ejemplo, la Figura 61 muestra el trabajo presentado por la dupla D1.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

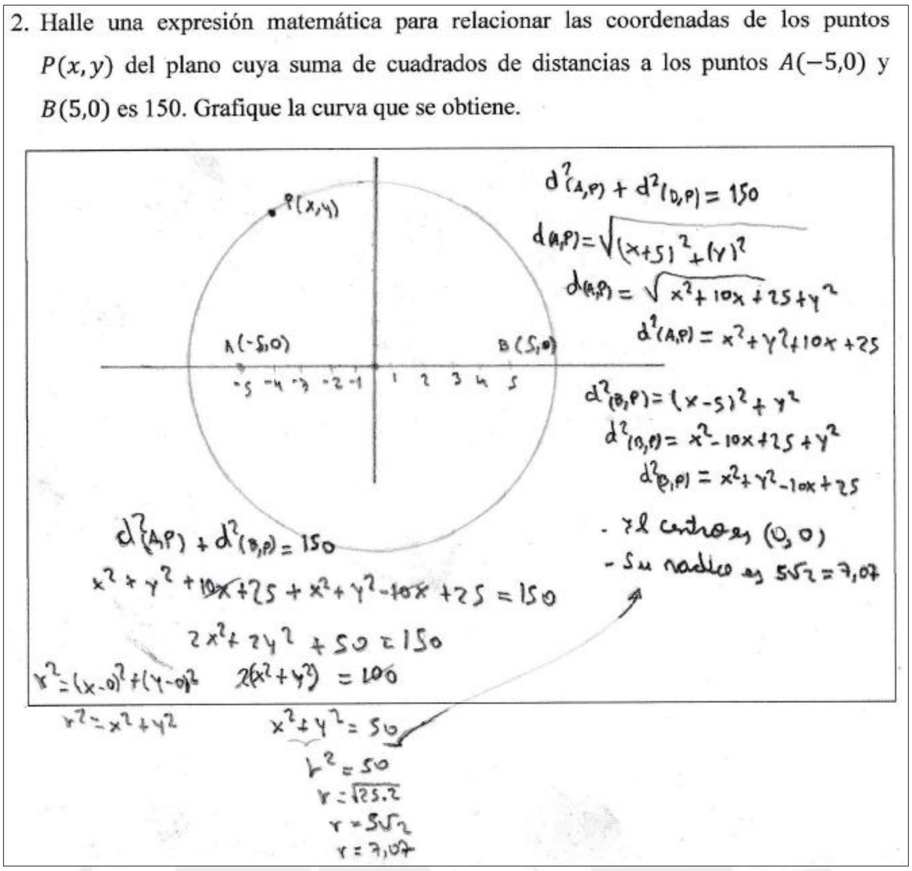


Figura 61. Respuesta de la dupla D1 a la pregunta 2, actividad 3

La Figura 61, presentada por la dupla D1, observamos que los alumnos muestran el procedimiento que se había previsto inicialmente. La movilización del nuevo concepto como conocimiento necesario para resolver el problema es utilizada como herramienta. Al respecto, la dialéctica herramienta-objeto señala que cuando utilizan el nuevo conocimiento como herramienta necesaria y circunstancial para cierto problema, los alumnos se encuentran en la fase de la explicitación.

Se observa que la dupla D1 ya moviliza conocimientos sobre nuestro objeto, pues muestra la ecuación solicitada, su representación gráfica y sus elementos característicos como el centro $(0,0)$ y el radio $(r = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07)$. Por otro lado, las duplas D2 y D3 también presentaron un trabajo similar a la dupla D1. No obstante, la dupla D2 solo señala la ecuación canónica de la circunferencia sin mostrar la representación gráfica solicitada.

Una vez terminada la pregunta 2 de la actividad 2, se consideraron algunos términos del concepto de la circunferencia que los alumnos se habían apropiado hasta este momento. Luego proseguimos a formalizar el nuevo concepto construido en su estatus de objeto matemático y como un saber social y cultural; es decir, se definió la circunferencia

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

como un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. Se realizó una representación gráfica y, a partir de esta última, se dedujo o se obtuvo la ecuación ordinaria y canónica a través de la propiedad de distancia entre dos puntos. Asimismo, procuramos mostrar que también se puede obtener la ecuación a través del teorema de Pitágoras. Finalmente, se ha precisado que objeto circunferencia es posible representar textualmente (una propiedad que cumple una determinada condición), a través de una ecuaciones algebraica, así como por una representación gráficas.

A partir de este momento, esperamos que los alumnos reorganicen sus conocimientos ampliando aquellos que ya dominan o que hayan adquirido durante el proceso, puesto que, de ahora en adelante, el nuevo concepto de circunferencia recientemente institucionalizado será susceptible a funcionar como conocimiento antiguo en situaciones nuevas.

Es pertinente aclarar que esta situación, nos referimos a la etapa de institucionalización, estuvo a cargo del profesor/investigador sin dejar de lado la participación de las tres duplas.

Finalmente, en esta etapa utilizamos materiales como presentaciones en Power Point y el software GeoGebra.

La siguiente actividad corresponde a la fase de familiarización, la cual consiste en utilizar el concepto de circunferencia en situaciones nuevas. En esta actividad se ha propuesto problemas que exijan del alumno la aplicación del nuevo concepto de circunferencia institucionalizado anteriormente. Asimismo, en esta actividad nuestro objeto será utilizado como una herramienta explícita, dándole estatus de conocimiento antiguo.

Actividad 4. Familiaricémonos con la circunferencia

El propósito de la actividad 4 es movilizar el nuevo conocimiento construido en situaciones nuevas, de modo que les permitan a los alumnos utilizar el concepto aprendido como herramienta explícita para resolver problemas.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Actividad 4. Familiaricémonos con la circunferencia

1. Abel se ha comprado un televisor pantalla plana FULL HD para situarlo en su sala, que tiene la forma de un rectángulo de 4 m de ancho y 5 m de largo. Sabiendo que Abel ha decidido ubicar el televisor a un metro del centro de su sala, responda las siguientes preguntas:
   a) Ubique los lugares donde se podría colocar el televisor. Muestre todas las posibilidades y explique cómo obtuvo dichos lugares.
   b) ¿Qué curva representa todos los lugares donde se podría ubicar el televisor? Describa la curva obtenida.
   c) Si se considera el centro de la sala como el origen de coordenadas del plano cartesiano, escriba la ecuación de la curva obtenida en la parte b).

2. El servicio sismológico nacional (Instituto Geofísico del Perú) detectó un sismo en la ciudad A. El epicentro del sismo se registró a 5 km este y 3 km sur del centro de la ciudad A, con un radio de alcance de 4 km a la redonda.

   Considerando que el centro de la ciudad A se encuentra en el origen de coordenadas del plano cartesiano, responda lo siguiente:
   a) Con la ayuda del software Geogebra represente gráficamente la región afectada por el sismo. Describa lo que observa.
   b) Determine la ecuación que corresponde a la curva que encierra la región afectada por el sismo. Muestre su procedimiento.
   c) Si la casa de Pedro se encuentra en el centro de la ciudad A, ¿el movimiento sísmico afectó la casa de Pedro? Justifique su respuesta.

Figura 62. Actividad 4, fase de la familiarización

A continuación, se presentan las posibles soluciones de las preguntas 1 y 2 de la actividad 4.

<u>Pregunta 1</u>

Tiene como propósito representar la circunferencia en la geometría elemental, describirla como lugar geométrico y luego representarla gráficamente en el plano cartesiano.

<u>Pregunta 1, ítem a)</u>

Se espera para este ítem que, con los conocimientos que ya adquirieron en las actividades anteriores, los alumnos puedan ubicar el centro y trazar la circunferencia señalando que los lugares donde puede estar ubicado el televisor son puntos que pertenecen a la circunferencia.

Pensamos que los alumnos pueden presentar una posible solución como la que presentamos a continuación.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Partiremos señalando que las posibles ubicaciones del televisor forman una circunferencia. El procedimiento es:

- Simular mediante un rectángulo la sala de Abel con sus respectivas dimensiones.
- Trazar las diagonales de la sala (rectángulo) para ubicar el centro de gravedad, esto es, el centro de la sala.
- Dibujar una circunferencia con radio 1 m y con centro que coincida en el punto de gravedad de la sala.

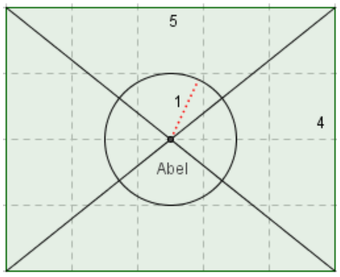
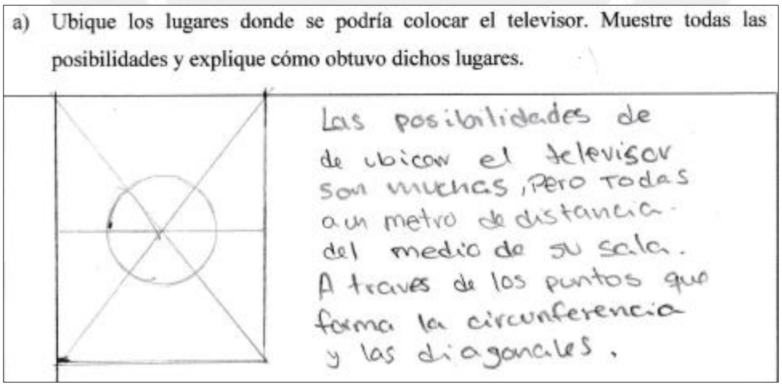


Figura 63. Posible trazo de la pregunta 1, ítem a)

Pensamos que los alumnos podrían tener dificultad para ubicar el centro de la sala, ya que para ubicar el punto exacto se requiere los trazos de las diagonales del rectángulo.

Respuestas de los alumnos

Las respuestas para la pregunta 1, parte a), han sido acertadas por las tres duplas tal como se había previsto inicialmente. Observamos, en los trabajos realizados por las tres duplas, los trazos de las diagonales para ubicar el centro de la sala. Asimismo, las tres duplas coinciden en señalar que los posibles lugares de ubicación del televisor forman una circunferencia. La Figura 64 muestra el trabajo presentado por la dupla D2.


a) Ubique los lugares donde se podría colocar el televisor. Muestre todas las posibilidades y explique cómo obtuvo dichos lugares.

Las posibilidades de de ubicar el televisor son muchas, pero todas a un metro de distancia del medio de su sala. A traves de los puntos que forma la circunferencia y las diagonales.

Figura 64. Respuesta de la dupla D2 al ítem a), pregunta 1

Notamos que la dupla D2 y las demás duplas ya no cometieron el error de decir que las distintas posiciones forman otro tipo de figura geométrica. Esta situación la hemos observado en la pregunta 1 parte d), cuando decían que formaba un rombo, un trapecio. Entonces, lo anterior demuestra que los alumnos lograron comprender que un punto que se mueve en un plano, manteniéndose a una misma distancia sobre otro punto fijo en el mismo plano, forma exactamente una circunferencia.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

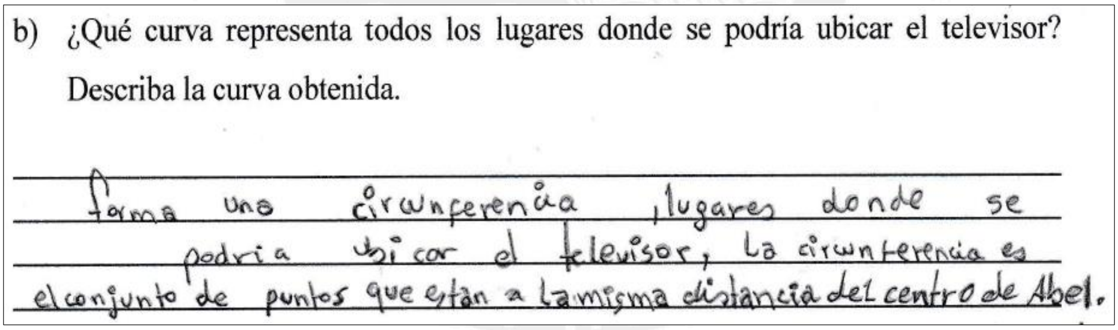
Pregunta 1, ítem b)

Se espera que los alumnos puedan describir el objeto circunferencia desde su concepción como lugar geométrico o, en todo caso, puedan reconocer y señalar algunos elementos característicos de la circunferencia. En ese sentido, esperamos que los alumnos presenten una posible solución como la que consignamos a continuación.

La curva que describe todos los lugares donde se puede ubicar el televisor es una circunferencia descrita como un conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto fijo, cuyo radio es la distancia desde el lugar en que está ubicado Abel hasta el lugar donde está ubicado el televisor, y el centro es el punto en el que se encuentra Abel.

Respuestas de los alumnos

Para esta pregunta, sólo la dupla D3 pudo describir la curva identificada tal como se había previsto, esto es, como lugar geométrico. Sin embargo, las duplas D1 y D3 no lograron describir la curva. Creemos que esto se debe a que la pregunta se ha entendido en otro sentido, pero no en definir la curva en términos de lugar geométrico. La Figura 65 muestra el trabajo de la dupla D3.



b) ¿Qué curva representa todos los lugares donde se podría ubicar el televisor? Describa la curva obtenida.

forma una circunferencia, lugares donde se podria ubicar el televisor, La circunferencia es el conjunto de puntos que estan a la misma distancia del centro de Abel.

Figura 65. Respuesta de la dupla D3 al ítem b), pregunta 1

Pregunta 1, parte c)

Para este ítem se espera que los alumnos tracen los ejes coordenadas con origen **en** el centro de gravedad de la sala y luego designen las distintas posiciones del televisor con el punto $P(x, y)$ y, de esta manera, obtener la ecuación canónica de la circunferencia utilizando la propiedad de distancia.

Para resolver este problema se espera que los alumnos presenten los siguientes pasos:

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

- Trazar el plano cartesiano con origen en el centro de la sala.
- Trazar una circunferencia con centro en la sala y radio una unidad (véase la Figura 66).
- Aplicar la propiedad de distancia para obtener la ecuación de la circunferencia.

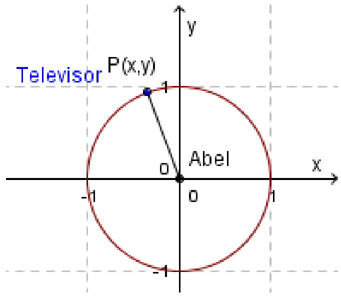


Figura 66. Circunferencia con centro en el origen de coordenadas

$x^2 + y^2 = 1^2$, ecuación solicitada.

Respuestas de los alumnos

Las respuestas para este ítem han sido acertadas por las tres duplas, en forma similar a lo que habíamos previsto. La Figura 67 muestra el trabajo de las tres duplas.

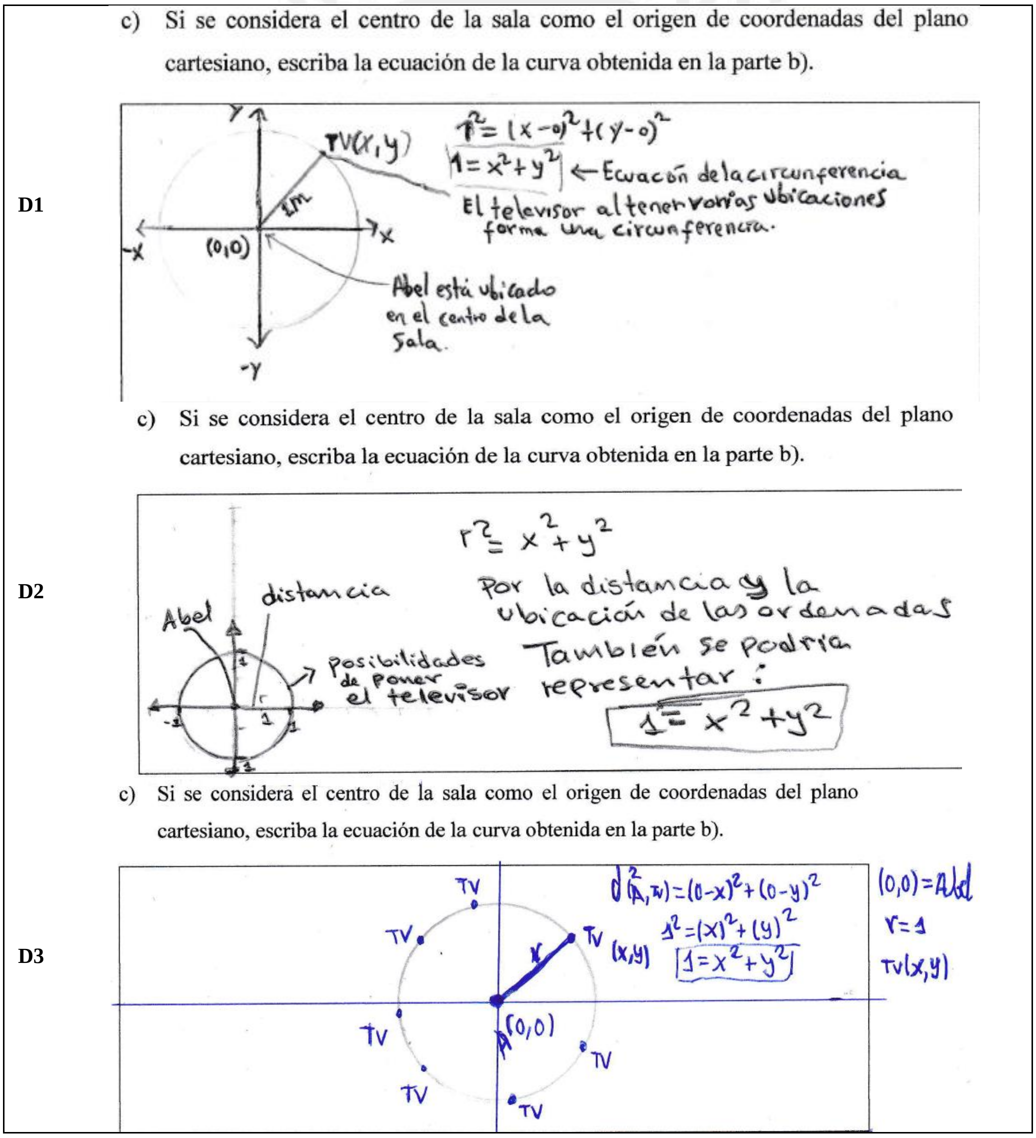


Figura 67. Respuestas de las duplas D1, D2 y D3 al ítem c), pregunta 1

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

En esta pregunta nuevamente se puede evidenciar que la dupla D2, al igual que en la actividad 2 pregunta 1, señala que a la circunferencia "*también se podría presentar* $1 = x^2 + y^2$ ". Esta frase evidencia que la dupla intenta diferenciar el objeto de su representación. Las tres duplas logran trazar los ejes coordenados con origen en el centro de la sala y luego trazan la circunferencia de radio una unidad; asimismo, señalan los elementos (radio y centro) de nuestro objeto.

<u>Pregunta 2</u>

En esta pregunta, se espera que los alumnos puedan realizar la representación gráfica con el apoyo del GeoGebra como el límite del área afectada y determinar la expresión matemática de la circunferencia que encierra el área afectada por el sismo.

<u>Pregunta 2, ítem a)</u>

El propósito de este ítem es que los alumnos, utilizando el nuevo concepto construido, inmediatamente realicen la representación de manera gráfico del área afectada con el apoyo del GeoGebra.

Se espera que los alumnos para resolver este ítem puedan seguir los pasos siguientes:

- Ubicar las coordenadas del epicentro en el plano cartesiano.
- Trazar la circunferencia utilizando la herramienta *Circunferencia dados su centro y radio*.
- Lo que se observa es que la ciudad no es afectada por el sismo.

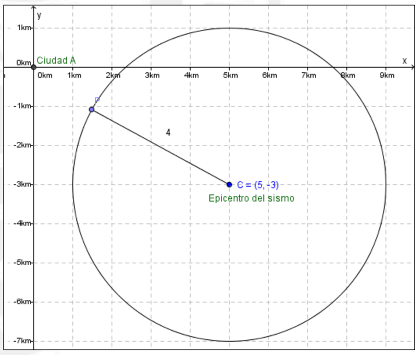


Figura 68. Circunferencia con centro $(5, -3)$ y radio 4 km

Pensamos que los alumnos podrían tener dificultad para determinar las coordenadas del centro de la circunferencia, debido probablemente a que los alumnos no logren recordar las orientaciones o podría suceder que los alumnos no logren reconocer que 3 km esté en el semieje negativo del eje de las ordenadas.

<u>Respuestas de los alumnos</u>

En este problema, la representación gráfica de la circunferencia ha sido trabajada sin ninguna dificultad; asimismo, a través del GeoGebra pudieron simular la situación descrita. Por ejemplo, la Figura 69 muestra el trabajo presentado por la dupla D2.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

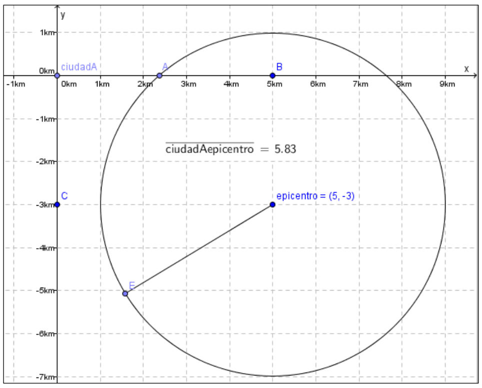


Figura 69. Respuesta de la dupla D2 al ítem a), pregunta 2

Para construir la circunferencia que encierra la región afectada por el sismo, las tres duplas utilizaron la herramienta *Circunferencia dados su Centro y Radio.* Esta acción de las tres duplas muestra evidencia de que el objeto ya pasó a ser un instrumento que le permite desarrollar nuevas situaciones, el cual, según la dialéctica herramienta-objeto, en esta fase de familiarización el nuevo objeto institucionalizado en algunos momentos puede ser utilizado como herramienta o como conocimiento antiguo en nuevas situaciones.

Pregunta 2, ítem b)

Este ítem tiene por objeto mostrar la expresión matemática de la curva que encierra la región sombreada por el sismo.

Se espera que los alumnos para resolver este ítem puedan seguir los pasos siguientes:

- Identificar un punto $P(x, y)$ cualquiera en la circunferencia.
- Utilizando la propiedad de distancia ($4km$) entre los puntos $P(x, y)$ y $C(5, -3)$, se obtiene la ecuación algebraica de la circunferencia. Esto es, $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 4^2 = 16$, la ecuación solicitada.

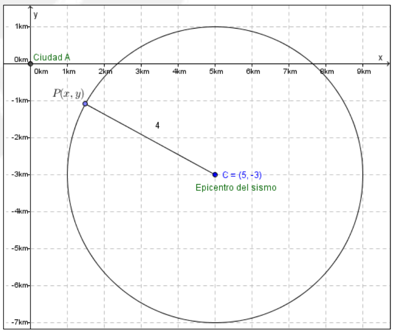


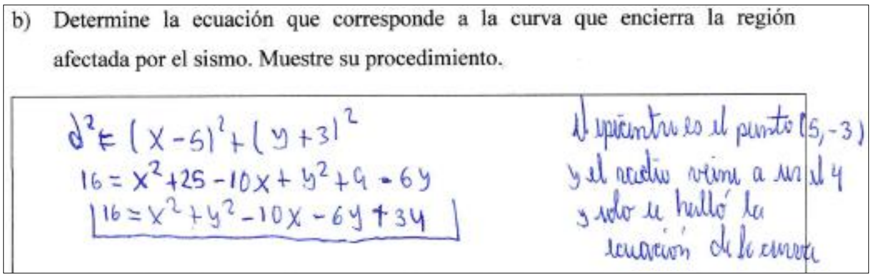
Figura 70. Circunferencia de centro $(5, -3)$ y radio 4 km

Pensamos que los alumnos pueden presentar dificultad para obtener la ecuación solicitada, debido a que no logren designar un punto $P(x, y)$ cualquiera en la circunferencia. El hecho de que no considera dicho punto en la circunferencia puede dificultar el uso de la propiedad de distancia y como consecuencia no obtener la ecuación solicitada.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Respuestas de los alumnos

Las tres duplas respondieron tal cual se había previsto. Mostraron la ecuación de la curva que encierra el área que afectó el sismo. Por ejemplo, la Figura 71 muestra el trabajo presentado por la dupla D3.


b) Determine la ecuación que corresponde a la curva que encierra la región afectada por el sismo. Muestre su procedimiento.

$d^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2$

$16 = x^2 + 25 - 10x + y^2 + 9 - 6y$

$\boxed{16 = x^2 + y^2 - 10x - 6y + 34}$

el epicentro es el punto (5,-3) y el radio viene a ser el 4 y solo se halló la ecuación de la curva

Figura 71. Respuesta de la dupla D3 al ítem b), pregunta 2

Esta dupla describe los elementos de la circunferencia, es decir, centro y radio. Asimismo, señala que se obtuvo la ecuación de la curva (circunferencia) y esto significa que la dupla ya tiene conocimiento del objeto como herramienta para dar solución al problema planteado.

Pregunta 2, ítem c)

Este ítem tiene por objeto utilizar la ecuación de la circunferencia para justificar si un punto pertenece a la circunferencia.

Se espera que los alumnos justifiquen el hecho de la siguiente manera:

La casa de Pedro, que está ubicada en la ciudad A y está en el origen de coordenadas (0,0), será afectada por el sismo si este punto verifica la ecuación algebraica de la circunferencia.

Sea la casa de Pedro el punto $A = (0,0)$ y sea la circunferencia:

$\mathcal{C}: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 4^2 = 16.$

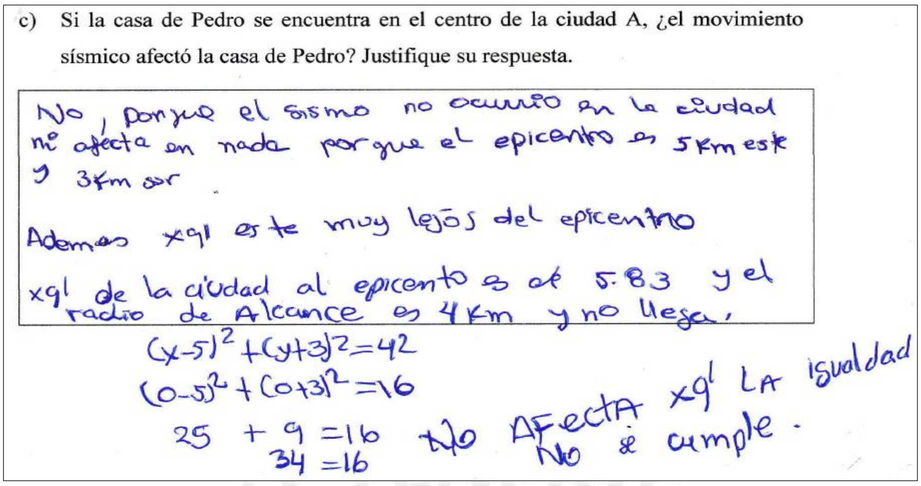
Si $A \in \mathcal{C}$, entonces debe verificar la ecuación $(0-5)^2 + (0+3)^2 = 16$. Sin embargo, al simplificar se tiene que $34 = 16$. Esta igualdad es falsa. Por tanto, la casa de Pedro no ha sido afectada por el sismo.

Respuestas de los alumnos

En un inicio, en la pregunta 2 del ítem c), las tres duplas presentaron respuestas guiadas por lo que observaban. No utilizaron la ecuación para justificar si la casa de Pedro es afectada por el sismo. Sin embargo, frente a esta situación, se les orientó para verificar

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

su razonamiento utilizando la ecuación de la circunferencia. Por ejemplo, la Figura 72 muestra el trabajo presentado por la dupla D2.


c) Si la casa de Pedro se encuentra en el centro de la ciudad A, ¿el movimiento sísmico afectó la casa de Pedro? Justifique su respuesta.

No, porque el sismo no ocurrio en la ciudad ni afecta en nada porque el epicentro es 5km este y 3km sur

Ademas xq' este muy lejos del epicentro

xq' de la ciudad al epicento es de 5.83 y el radio de Alcance es 4Km y no llega,

$(x-5)^2+(y+3)^2=4^2$

$(0-5)^2+(0+3)^2=16$

$25+9=16$

$34=16$

No Afecta xq' LA igualdad No se cumple.

Figura 72. Respuesta de la dupla D2 al ítem c), pregunta 2

4.2.4. Conclusiones sobre los resultados del experimento

En este apartado, a manera de resumen, describiremos los resultados encontrados luego de la implementación de las actividades.

En la actividad 1, que corresponde a la fase antigua, se trabajó los conocimientos previos y necesarios como distancia entre dos puntos, coordenadas del punto medio de un segmento, puntos que equidistan de un punto fijo, propiedades de una mediatriz y ecuaciones de rectas, entre las principales. En esta actividad, incluso con algunas dificultades sobre estos conocimientos, observamos que los alumnos alcanzaron el objetivo pretendido para esta primera etapa. Pensamos que revisar estos conocimientos fue importante, pues son necesarios para construir el objeto circunferencia. En ese sentido, estos conocimientos antiguos son herramientas, según la dialéctica de Douady y aplicado en este trabajo al concepto de circunferencia, facilitan la construcción de dicho concepto.

En la actividad 2, que corresponde a la fase de búsqueda/investigación, se propone un problema contextualizado. La pregunta 1 de esta actividad, en la que el concepto de circunferencia está involucrado como un conocimiento implícito, estuvo dirigida para que los alumnos, empleando el software GeoGebra, ubiquen un punto fijo en el plano (la comisaría) que equidiste de otros tres puntos (entidades), así como las distintas ubicaciones del nuevo banco. Utilizando las herramientas del GeoGebra, tales como *Mediatriz* e *Intersección de Dos Objetos*, los alumnos lograron ubicar correctamente el

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

punto solicitado para ubicar la comisaría. No obstante, la dupla D3 mostró dificultad al no utilizar correctamente la herramienta *mediatriz*. Hasta aquí respondieron el ítem a) de la pregunta 1. Los siguientes ítems b), c) y d) de la pregunta 1, que tuvieron por objetivo reconocer la curva que genera las distintas ubicaciones de un nuevo banco con las mismas condiciones dadas para las tres entidades mencionadas respecto a la comisaría, permitieron a los alumnos identificar el conocimiento implícito (objeto circunferencia) utilizando el software GeoGebra.

En el intento de identificar las posibles ubicaciones del nuevo banco, teniendo en cuenta la condición de que estuviera a la misma distancia que las otras entidades respecto al punto fijo donde se ubicaba la comisaría, los alumnos construyeron un segmento utilizando la herramienta *segmento de longitud fija* con extremo fijo en el punto de la comisaría (punto fijo) y extremo movible donde se ubicaría el nuevo banco (punto movible). Con este segmento, al arrastrar el punto movible, intentaron mostrar los posibles lugares donde podría estar ubicado el nuevo banco. Sin embargo, a pesar que el punto movible que se mantiene a una longitud constante del punto fijo y que al ser arrastrado alrededor del punto fijo forma a "simple vista" una circunferencia, las tres duplas mostraron dificultad para reconocer la figura que se obtiene con las posibles ubicaciones del nuevo banco. Creemos que este problema, que se observó con mayor dificultad en las duplas D1 y D3, se debe a que para visualizar la curva los alumnos requieren trazarlas. Asimismo, pensamos que este problema se debe a que los alumnos no reconocen que dicha figura geométrica constituye la unión de infinitos puntos que cumplen una determinada propiedad. Al no superar esta dificultad, mencionaron otras figuras geométricas como un cuadrado, trapecio, rombo, etc. Al respecto, King y Schattschneider (citado en Bredectchuk, 2010) señalan que para los alumnos es difícil comprender la idea de un punto moviéndose en una configuración, en la cual puede haber otros puntos; así como también les es difícil identificar un punto que cumple una determinada propiedad (lugar geométrico). Para superar esta dificultad, fue oportuno y adecuado utilizar la opción *activar rastro* y *animación automática*, pues permitió a los alumnos evidenciar todas las posibles ubicaciones del nuevo banco, además de causar admiración por el dinamismo. Finalmente, pudieron reconocer y trazar, sobre la base de las condiciones, el objeto circunferencia entendiendo su concepción como lugar geométrico y su representación figural. En ese sentido, el aporte del software GeoGebra, en la construcción del objeto matemático circunferencia y en las acciones realizadas por

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

los alumnos fueron fundamentales e imprescindibles. Ello se evidenció en las actividades subsiguientes. Cuando en situaciones nuevas se les preguntó sobre qué curva forma un punto que cumple una determinada propiedad, no mostraron tanta dificultad como en esta parte; es más, algunos no mostraron ninguna dificultad. En esta parte, los alumnos se dieron cuenta de que el objeto que estaban construyendo es la circunferencia. Este contexto corresponde, según la dialéctica herramienta-objeto, a la fase de búsqueda/investigación, en la cual el objeto matemático es conocimiento implícito.

Para reconocer el conocimiento implícito, los alumnos prosiguieron de la siguiente manera: en primer lugar, ubicaron un punto (comisaría) que equidiste de otros tres puntos. Para ello, fue necesario utilizar las mediatrices de los segmentos de los tres puntos (entidades), y la intersección de estas mediatrices generó el punto solicitado; y, en segundo lugar, construyeron un segmento con extremos el punto donde ubicaron la comisaría (punto fijo) y un nuevo punto para ubicar el nuevo banco (punto movible). Este segmento permitió a los alumnos visualizar que existen muchas posibilidades para ubicar el nuevo banco, y estas posibles ubicaciones generaron la representación figural de la circunferencia. Esta idea, descrita en este párrafo, fue seguida por alumnos para construir el objeto circunferencia; sin embargo, esta vez, analíticamente utilizando lápiz y papel, entrando así al cuadro de la geometría analítica, que es de nuestro interés.

Para desarrollar la pregunta 2 (actividad 2), se activó la *cuadrícula* en la *ventana gráfica* del software GeoGebra con la finalidad de proporcionar a los alumnos la representación de los puntos (entidades) en el sistema del plano cartesiano. Posteriormente, apoyados con la representación en la venta del GeoGebra, los alumnos siguieron el procedimiento trabajado en las preguntas anteriores. Los alumnos se desenvolvieron con algunas dificultades, en especial la dupla D3. Una de estas dificultades, se debió a que la resolución del problema requería un procedimiento recargado de operaciones y de varios conocimientos antiguos involucrados. No obstante, esta dificultad ya se había previsto tal como refiere Douady al describir la fase de búsqueda/investigación. Con las orientaciones pertinentes, se consiguió encaminar a los alumnos hasta encontrar una posible respuesta.

El haber desarrollado el objeto circunferencia tomando como punto de referencia su concepción como lugar geométrico en la pregunta 1 (actividad 2), fue necesario e importante; pues permitió a los alumnos en su esquema mental, elaborar un

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

procedimiento anticipado para encontrar las coordenadas del punto que equidista de las entidades. En a su vez, permitió verificar si las tres entidades equidistan de dicho punto. La finalidad del ítem c) de la pregunta 2, consistió en reconocer el objeto circunferencia cuando el nuevo banco toma distintas ubicaciones. Al respecto, los alumnos reconocieron el objeto y sus elementos característicos, a excepción de la dupla D2 que mostraba confusión entre el círculo y la circunferencia. No obstante, dicha confusión nos permitió validar o refutar la concepción del objeto que hasta ese momento estaban aprendiendo los alumnos. En ese contexto, según la dialéctica herramienta-objeto, ocurre la institucionalización local, es decir, los alumnos definen el nuevo objeto como conocimiento explícito, pero, según sus propios criterios.

En la actividad 3, que forma parte de la tercera fase de la dialéctica, tuvo como objetivo representar algebraicamente el objeto circunferencia desde su concepción como lugar geométrico, para luego representarlo gráficamente la ecuación obtenida. Hemos verificado que los alumnos ya tienen integrado en su esquema mental la concepción del objeto que aprendieron con las actividades anteriores, pues, mostraron eficiencia para resolver esta actividad utilizando el objeto circunferencia como herramienta. A esta aprehensión parcial, de acuerdo a Douady, corresponde a la fase de explicitación, donde los alumnos muestran algunas de las siguientes particularidades respecto al objeto: describen, definen, representan gráficamente, reconocen algunas características importantes, etc., de acuerdo a sus propios criterios. Estas particularidades hemos verificado en uno de los diálogos que se dio entre los alumnos de la dupla D1 y la dupla D2, donde mostraron como tema principal el objeto circunferencia.

En este diálogo, mostraron destreza para relacionar la pregunta 1 (véase en la actividad 3) con la situación que consistió en identificar la figura que genera las posibles ubicaciones del nuevo banco (véase la pregunta 1 de la actividad 2). Expresaban que los puntos de la forma $P(x, y)$ pueden tomar distintas posiciones al igual que el nuevo banco. Asimismo, señalaban que el punto $P(x, y)$ es donde se ubica el nuevo banco y el punto $(-2,2)$ es donde se encuentra la comisaría. También expresaron términos característicos del objeto circunferencia como: punto medio, centro, radio, el radio es la distancia entre un punto cualquiera de la circunferencia al punto $(-2,2)$, etc. Estos términos y expresiones que utilizan los alumnos, muestran la apropiación parcial del objeto según sus criterios. Reconocen los elementos característicos de la circunferencia.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

De esta manera, culminado la actividad 3, los alumnos lograron identificar y definir parcialmente el objeto según sus concepciones, y esto nos facilitó homogenizar el objeto como conocimiento explícito, es decir, se logró la institucionalización local que nos permitió dar el paso a la siguiente fase de institucionalización/formalización del nuevo concepto.

Nuestro objetivo para la cuarta fase, como profesor/investigador, fue presentar el nuevo concepto en su estatus de objeto matemático, integrando de esta manera como un saber social y hacer que en adelante, este nuevo conocimiento se vuelva herramienta para ser utilizado en las nuevas situaciones que corresponden a la fase de familiarización.

En la actividad 4, que forma parte de la fase de familiarización, hemos verificado que los alumnos con los conocimientos nuevos y recientemente institucionalizados e integrados en su esquema mental, pudieron resolver con algunas dificultades mínimas los problemas, es decir, verificamos que los alumnos utilizaron el objeto circunferencia como herramienta al resolver situaciones nuevas en contextos diferentes.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CONSIDERACIONES FINALES

En este apartado mostramos las conclusiones que se obtuvieron respecto a los objetivos trazados en el primer capítulo, así como las recomendaciones y cuestiones abiertas para futuras investigaciones.

En este trabajo, nuestro objetivo principal fue analizar a través de una secuencia de actividades que siguen las fases de la dialéctica herramienta-objeto y mediada por el software GeoGebra, la construcción del concepto circunferencia desde el cuadro de la geometría analítica en estudiantes de quinto de secundaria.

Para lograr nuestro objetivo principal, nos propusimos alcanzar dos objetivos específicos, que a continuación detallamos.

Respecto al primer objetivo específico: ***Identificar en investigaciones precedentes, en Educación Matemática, los problemas de aprendizaje que presentan los alumnos al estudiar el concepto de circunferencia.***

Identificar las dificultades de aprendizaje sobre el concepto de circunferencia, nos llevó a revisar investigaciones precedentes relacionadas con el problema de aprendizaje de nuestro objeto en estudio. En este estudio, logramos identificar los problemas que detallamos a continuación.

Kerlegand (2008) reportó que los alumnos no alcanzaron el dominio de un lenguaje propio que le corresponde a cada nivel de razonamiento según el modelo de Van Hiele. Asimismo, reportó que sólo dos de seis alumnos lograron construir la propiedad estudiada: Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la misma. Creemos que esta dificultad se debe, a que los alumnos muestran confusión respecto a la dependencia entre los elementos del objeto circunferencia con los conocimientos previos involucrados con este concepto.

Por otro lado, Carmona (2011) reportó que en la enseñanza de los elementos del objeto circunferencia en clase, los alumnos presentan dificultades para su apropiación y vinculación en diferentes contextos matemáticos. De la actividad exploratoria que aplicó sobre el objeto circunferencia, manifiesta que los alumnos muestran un nivel de visualización elevado (según el modelo de Van Hiele), es decir, reconocen el objeto circunferencia. Sin embargo, en el nivel de análisis (según el modelo de Van Hiele) muestran deficiencias, pues no logran establecer nociones o definiciones del objeto.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Creemos que este problema de asimilación ocurre entre el nivel de visualización y el nivel análisis; es decir, logran reconocer el objeto con facilidad en su representación gráfica o figural, pero, no logran establecer nociones o definiciones del objeto. Esto en parte porque los alumnos reconocen el objeto tal como se presenta a la percepción (tal como se ve), pero no logran visualizar o identificar que tras la curva continúa existen infinitos puntos que cumplen una determinada propiedad. Asimismo, el autor reporta en su estudio que solo 2 de los 35 alumnos alcanzaron el nivel de deducción, ya que lograron definir la circunferencia de manera coherente matemáticamente.

Finalmente, sobre el estudio de la circunferencia y mediatriz visto como lugar geométrico, Bedretchuk (2010) destaca la importancia de la inclusión de una estrategia pedagógica mediada por el GeoGebra, ya que permitió que los alumnos comprendan los conceptos de los objetos estudiados. Así, el uso del GeoGebra, permitió a los alumnos verificar que los puntos de una circunferencia están a igual distancia de otro punto fijo. No obstante, también reportó algunas dificultades referidas a: la falta de comprensión de las actividades; la falta de verbalización de los argumentos que justifican sus respuestas; el inicio de la resolución de las actividades sin un previo plan o estrategia en el uso de las propiedades que están involucrados en dichos problemas.

Por otro lado, revisamos el tratamiento que los textos didácticos hacen sobre el objeto circunferencia. Verificamos que los textos analizados, en especial el texto T2, enfatizan el tratamiento algebraico en lugar de las construcciones geométricas. Presenta el concepto como un producto final, sin la opción de encontrar el significado ni relación entre sus tres formas de representación. En seguida, muestran el estudio del concepto con casos particulares, ejemplos de aplicación inmediata y ejercicios que mecanizan el uso de estrategias y técnicas de trabajo, lo que nos da la impresión de que el concepto será aprendido cuando los alumnos logren resolver una lista de ejercicios, sin importar que el concepto puede ser más significativo cuando el alumno encuentre la relación que existe entre sus tres formas de representar el objeto. Lo que puede ayudar a diferenciar el concepto de su representación. En ese sentido, Almouloud y Mello (2000, citados en Bedretchuk, 2010) señalan que las dificultades de aprendizaje se deben a que se dan menos atención a la geometría y se confunde su enseñanza con el de medidas. Esta dificultad de aprendizaje también está ligada a la forma como se aborda el objeto circunferencia en los libros didácticos. Recordemos que los textos didácticos, tal como lo refiere Bravo (2007, citado en Morales, 2013), son guías necesarias para la acción

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

didáctica de los docentes y alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Por ello, creemos que esta forma de presentar y tratar el objeto en los textos didácticos, no favorece al aprendizaje del objeto.

En base a la dialéctica herramienta-objeto y teniendo en cuenta las conclusiones del primer objetivo, nos propusimos el siguiente objetivo específico.

<u>**Respecto al segundo objetivo específico**</u>: ***Diseñar una secuencia de actividades utilizando como fundamento los principios de la dialéctica herramienta-objeto y mediada por el software GeoGebra.***

- Consideramos que tener como marco teórico de esta investigación, algunos aspectos de la dialéctica herramienta-objeto de Douady, fue pertinente porque nos permitió: desde su enfoque cognitivo, observar y analizar en detalle cuando los alumnos se apropian del concepto circunferencia y sus formas de representar; desde su enfoque constructivista, organizar el concepto circunferencia para introducirlo gradualmente. Esto es, en primer lugar, como conocimiento implícito; en segundo lugar, como conocimiento explicito, luego, como objeto matemático. Para finalmente, convertir este concepto en herramienta o conocimiento antiguo para construir otro concepto. Para lograr este proceso complejo, fue importante diseñar actividades siguiendo los principios de la dialéctica herramienta-objeto. De esta manera, creemos que las perspectivas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas usando el marco de este trabajo son ventajosas, tanto para el alumno como para el docente.

Luego de haber alcanzado los dos objetivos específicos, consideramos que nuestro objetivo general: ***analizar a través de una secuencia de actividades que sigue las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediada por el software GeoGebra, la construcción del concepto circunferencia desde el cuadro de la Geometría Analítica en estudiantes de quinto de secundaria,*** también ha sido logrado, porque la secuencia de aprendizaje diseñada según los principios de la dialéctica; permitió que los alumnos logren construir el concepto de circunferencia. Esto se ha evidenciado en las actividades 3 y 4, pues los alumnos movilizaron el concepto como herramienta para resolver situaciones problemas que involucraban dicho objeto como conocimiento necesario. Asimismo, la mediación del software GeoGebra contribuyó en el aprendizaje del concepto circunferencia. Esto fue observado, especialmente en la actividad 2, cuando los alumnos lograron verificar que un punto que se mueve en un plano a una distancia constante de otro punto fijo del mismo plano, genera una circunferencia, y no otra figura

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

geométrica como ellos creían. Por último, uno de nuestros mayores logros fue haber contribuido a mostrar y superar algunas dificultades habituales que los alumnos presentaron al trabajar nuestro objeto circunferencia.

Luego de haber alcanzado nuestro objetivo general, consideramos que nuestra pregunta de investigación, ***¿una secuencia de actividades que sigue las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto y mediada por el software GeoGebra, contribuye a la construcción del concepto circunferencia desde el cuatro de la geometría analítica en estudiantes del quinto año de secundaria?***, también ha sido respondida. Pues logramos verificar, en el segundo objetivo específico, que la secuencia de actividades diseñadas siguiendo las fases de la dialéctica herramienta-objeto, permitió que los alumnos construyan el concepto de circunferencia desde su concepción como lugar geométrico, representación gráfica en el sistema del plano cartesiano, así como desde su representación algebraica.

De otro lado, la mediación del software GeoGebra permitió las siguientes contribuciones en la construcción del objeto circunferencia:

- Hemos observado que la falta de experiencia en los alumnos para utilizar el software GeoGebra no fue una barrera para resolver las actividades, lo que se verificó durante la implementación de las actividades que requerían su uso.
- El uso del software GeoGebra, para construir el objeto circunferencia desde su concepción como lugar geométrico, representación gráfica y algebraica, fue pertinente y propicio, pues, en particular, en la pregunta 1 de la actividad 2, hemos verificado que los alumnos fueron auxiliados cuando mostraron dificultad para reconocer la curva que genera las distintas posiciones del nuevo banco. Cuando construyeron un segmento con extremos el punto de la comisaria (fijo) y el nuevo banco (punto movible). El punto movible del segmento, al ser arrastrado le permitió percibir las diversas posibilidades. A pesar de ello, no lograron reconocer la curva, pues señalaron que las ubicaciones formaban un cuadrado, un trapecio, rombo, etc.

  Frente a esta situación, la acción de *activar rastro* y *animación automático* generó los infinitos puntos que constituyen la circunferencia, mostrando dinámicamente lo que se definió textualmente sobre la circunferencia en el capítulo 3 (sección 3.2), lo que no es tan sencillo lograr con lápiz y papel. Por otra parte, con la acción realizada, los alumnos consiguieron experimentar y discernir sus suposiciones y conjeturas sobre las diferentes figuras que mencionaron cuando el nuevo banco tomaba distintas

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

posiciones. Asimismo, utilizando la herramienta del GeoGebra *Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos,* verificaron que las ubicaciones formaban exactamente una circunferencia. Esto permitió a los alumnos integrar el objeto circunferencia en su esquema mental, aún parcial porque no pudieron describir completamente el nuevo concepto construido. Asimismo, fue importante porque en las actividades siguientes ya no mostraron dificultad para reconocer la figura o la curva que genera un punto que cumple una determinada propiedad.

- El uso del GeoGebra permitió en los alumnos desarrollar autonomía para experimentar y validar sus conjeturas, colocando de esta manera a cada alumno como el actor principal en su aprendizaje y al profesor como un compañero científico en el desarrollo del nuevo concepto. Cabe resaltar que el software por sí mismo no podría generar dicha autonomía, sino, es la secuencia de actividades diseñada bajo ciertos criterios que orienten su desarrollo. Finalmente, el GeoGebra fue muy útil en la fase de institucionalización, pues luego de construir una circunferencia pudieron utilizar el *arrastre* para variar la posición de dicha circunferencia en el plano, logrando observar el objeto circunferencia simultáneamente en dos representaciones distintas: en la ventana gráfica y en la ventana algebraica.

Por tanto, consideramos que introducir un nuevo concepto, permitiendo que los alumnos descubran o construyan gradualmente este nuevo conocimiento a través de una secuencia de actividades estructuradas y fundamentadas bajo los principios de la dialéctica herramienta-objeto, y apoyado/mediado con el software GeoGebra, puede ayudar a los alumnos construir un nuevo concepto matemático.

Algunas dificultades que persistieron durante el desarrollo de las actividades

- En la actividad 2 de la pregunta 1a), la dupla D3 utilizó en exceso los trazos con el intento de ubicar el punto (comisaria) que equidiste de las tres entidades (véase la figura 28). Sin embargo, procuramos orientar al grupo con la finalidad de que puedan utilizar correctamente la propiedad de mediatriz de un segmento para ubicar exactamente el punto solicitado.
- Por otro lado, en el desarrollo de todas las actividades, observamos que los alumnos no utilizan un lenguaje matemático adecuado ni coherente. Es más, muestran deficiencia para verbalizar los argumentos que justifican sus repuestas. Estas dificultades también fueron observadas en los estudios realizados por Carmona (2011) y Bedretchuk (2010).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Algunas recomendaciones importantes

- Asegurar que los alumnos posean los conocimientos previos o conocimientos que están involucrados en el nuevo concepto que se pretende construir. Esto es, con el propósito de lograr con éxito el aprendizaje de dicho concepto. Creemos que si los alumnos tienen dominio sobre estos conocimientos previos, las dificultades solo estarían centradas en el nuevo concepto. En esta recomendación surge una pregunta natural referente a los conocimientos antiguos, esto es; ¿cómo podríamos asegurarnos que los alumnos posean los conocimientos previos? Consideramos que una manera sería verificar a través de un examen diagnostico si tienen dicho conocimientos o, en todo caso, al igual que en esta investigación, trabajar dichos saberes antes de construir el nuevo objeto en cuestión.
- En la actividad 2 (pregunta 1d) y en la actividad 4 (pregunta 1b) observamos que dichas preguntas no fueron comprendidos por los alumnos, pues, en las respuestas que presentaron no evidenciaban la intención de responder lo que se esperaba. Creemos que este problema se debió a dos razones: 1) la intensión de la pregunta no fue entendida; 2) en un mismo ítem se presentó dos preguntas que involucraban dos cuestiones. Observamos que los alumnos no respondían la segunda pregunta prestando atención sólo a la primera pregunta. En ese sentido, creemos que se debería plantear preguntas en forma independiente con el objetivo de obtener información más precisa y evitar omisiones al responder.

Esperamos que este trabajo de investigación pueda ayudarnos a reflexionar sobre nuestra práctica docente y ayudar a los alumnos, a partir de sus conocimientos previos y con ayuda de algún software de Geometría Dinámica, construir un nuevo concepto matemático de manera progresiva. Asimismo, permitiendo que los alumnos sean los verdaderos protagonistas de su aprendizaje y puedan darle sentido a lo que aprenden, y no sean solo receptores que acepten lo que se les dice sin cuestionar nada.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

CUESTIONES ABIERTAS

- Diseñar actividades para trabajar conceptos de parábola, elipse e hipérbolas, así como para otros objetos matemáticos siguiendo las fases de la dialéctica herramienta-objeto y utilizando el software GeoGebra como herramienta mediadora; aprovechando de dicho software, su potencial gráfico y algebraico.
- Creemos que algunas preguntas de nuestra secuencia de aprendizaje pueden ser reformuladas. Además consideramos, que es factible, agregar en nuevas situaciones y problemas que puedan permitir explorar otras herramientas del software GeoGebra. Sin embargo, creemos que el GeoGebra no es la única opción sino solo una alternativa. En particular, con la finalidad de observar si los alumnos movilizan adecuadamente el nuevo concepto como herramienta, se pueden agregar más preguntas en las actividades 3 y 4.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

REFERENCIAS

Bedretchuk, P. (2010). *Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o GeoGebra*. (Tese para o grau de Mestrado profissional em ensino de matemática). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Chumpitaz, D. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Carmona, J. (2011). *La circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de Van Hiele y la Geometría Dinámica*. (Tesis para optar el grado de Magister). Universidad Nacional de Colombia.

De la Cruz, M. (2013). *Matemátiqus quinto año de secundaria*. Educación Básica Regular. Editorial: Bruño. Lima, Perú.

Dunham, W. (1995). *El universo de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 61-96). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-IREM*, *7* (6), 132-158.

Godino, J., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Relime*, *9* (1), 117-150.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). *Uso de Definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio*. Universidad de Valencia. España.

Hohenwarter, M. (2012). *GeoGebra (Versión 4.2).* Austria: Johannes Kepler University.

Recuperado de http://www.geogebra.org/cms/.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de ña investigación*. México: McGraww-Hill.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Kerlegand, C. (2008). *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la Visualización*. (Tesis para obtener el grado de maestría en ciencia con especialidad en matemática educativa).Instituto Politécnico Nacional. México.

Lima, E. (2004). *Geometría Analítica y Algebra Lineal.* Perú: IMCA.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. México: Editorial Limusa.

Morales, Z. (2013). *Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar*. (Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Maranhão, María Cristina S. de A. (2008). Dialética Ferramenta-Objeto. En S. Alcântara (Org.), *Educação matemática: uma (nova) introdução* (pp. 143-166). Sao Paulo-Brasil: EDUC-Editora da PUC-SP.

Patrício, P. (2010). *El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje de los conceptos de mediatriz y circuncentro en estudiantes de tercero de secundaria, utilizando el GeoGebra*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/.

Perú, Ministerio de Educación (2013). *Mapas de progreso del Aprendizaje: Geometría.* Lima. Recuperado de http://www.ipeba.gob.pe/estandares/Mapasprogreso_Matematica_Geometria.pdf.

Ricaldi, M. (2011). *Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización*. (Tesis para obtener el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Santillana (2012). *Matemática 5 de nivel secundaria*. Educación Básica Regular. Edición: Santillana. Lima, Perú.

Salazar, J. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tese de doutorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Unidad de Medición de la Calidad Educativa (2004). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004*. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado y Quinto grado de secundaria. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/umc/admin/images/en2004/MatematicaS3_5.pdf

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

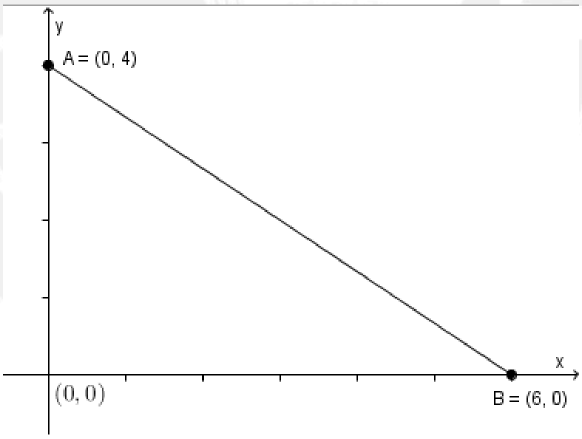
APÉNDICE

Actividad 1. Recordando nuestros conocimientos previos

Resuelve los siguientes problemas.

1. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre una pared. Si la parte inferior de la escalera se encuentra a 3 m de distancia de la pared, ¿a qué altura se encuentra la parte superior de la escalera respecto del piso? Muestre su procedimiento.

2. Observe la siguiente figura.



A partir de la figura responda lo siguiente:

a) Determine la longitud del segmento $\overline{AB}$. Muestre su procedimiento.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

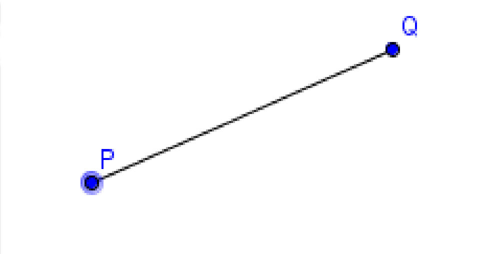
TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

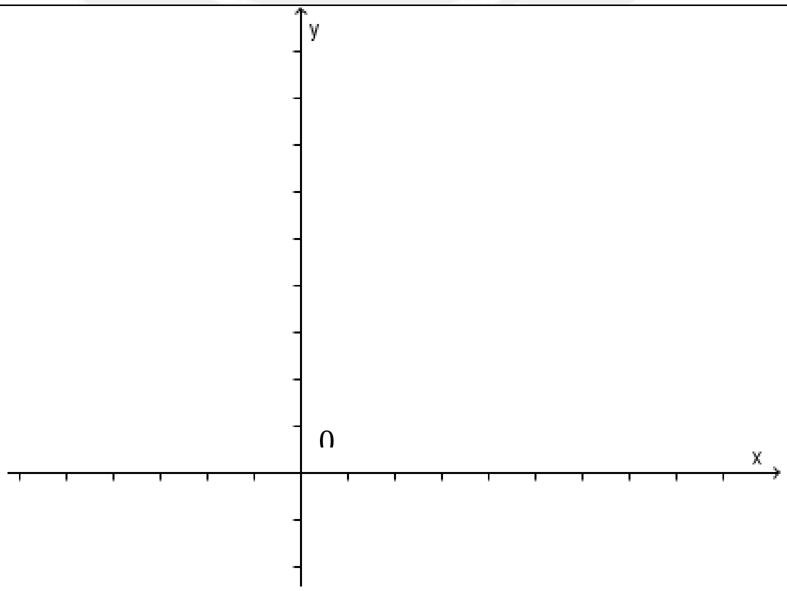
b) Determine las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$. Muestre su procedimiento.

3.

a) Dado el segmento $\overline{PQ}$, trace la mediatriz de dicho segmento. Muestre su procedimiento.



b) Si los puntos P y Q se ubican en un plano cartesiano, de modo que $P(-2,3)$ y $Q(4,7)$, determine la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{PQ}$. Muestre su procedimiento.



Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Actividad 2. Descubriendo con el GeoGebra

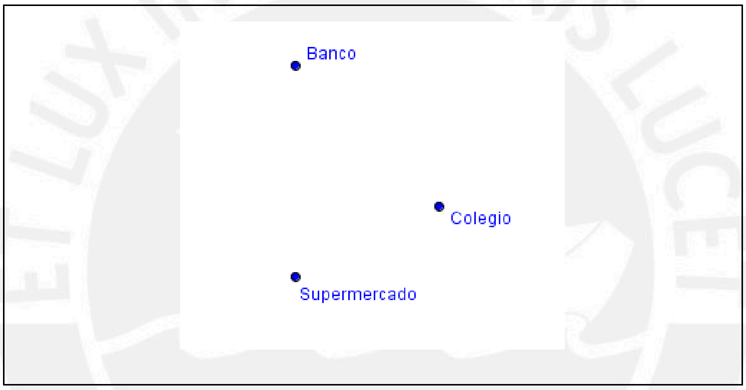
Indicación. Al culminar su trabajo salve sus respuestas con el nombre A2_*Apellidos*.

Resuelva las siguientes situaciones.

1. En una urbanización de Santa Clara, la municipalidad ha decidido colocar una nueva comisaría para dar mayor seguridad a tres entidades: un banco, un colegio y un supermercado. Se desea ubicar esta comisaría de modo que se encuentre a la misma distancia de las tres entidades antes mencionadas, a fin de que ante cualquier acto delictivo, los policías tengan una posibilidad de acción rápida.

A continuación, abra el archivo *gg_preg_01* en el que se muestra un esquema con la ubicación de las tres entidades mencionadas y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Dónde debería ubicarse la comisaria? Explique cómo determinó esta ubicación.



____

____

b) Si se desea ubicar una nueva entidad bancaria a la misma distancia que las tres entidades anteriores, respecto a la comisaria, ¿cuáles son los posibles lugares dónde se podría ubicar este nuevo banco?

____

____

c) ¿Cuántas posibilidades de ubicación encontró para el nuevo banco? Justifique su respuesta.

____

____

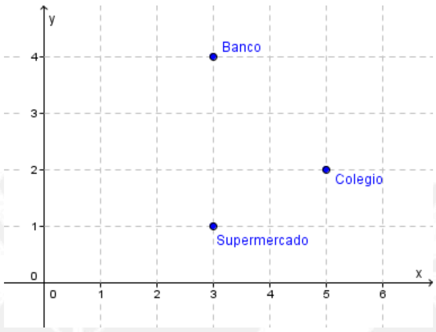
Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

d) ¿Qué figura se forma con las posibles ubicaciones del nuevo banco? Describe las características de esta figura.

____

____

2. Abra el archivo *gg_preg_02* y usando las herramientas del GeoGebra active los ejes coordenados y la cuadrícula, tal como se presenta a continuación.



A partir del plano cartesiano mostrado, responda las siguientes preguntas:

a) Determine las coordenadas del punto donde se encuentra la comisaría. Muestre su procedimiento.

b) Halle la distancia a la que se encuentre cada una de las entidades (Banco, colegio, supermercado) respecto de la comisaria e indique la relación que existe entre ellas. Muestre su procedimiento.

c) ¿Qué curva forma las distintas posiciones en la que se ubica el nuevo banco?____

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

TESIS PUCP

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Para la curva obtenida, ¿qué representa el punto donde se ubica la comisaria? ____,

y ¿qué representa el segmento que une la comisaria con cualquiera de las entidades (banco, colegio, supermercado, nuevo banco)?

____

d) Si el nuevo banco se ubica en el punto $(2, a)$, determine los valores de a e interprete que representa dichos valores. Explique su procedimiento.

e) Si el nuevo banco se ubica en el punto (x, y), determine la expresión matemática que relaciona x e y. Explique.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

Actividad 3. Explicitación de la circunferencia

1. Halle el conjunto de puntos $P(x, y)$ del plano tales que sus distancias al punto $(-2,2)$ sea igual a cuatro unidades. Escriba la ecuación de la curva obtenida.

2. Halle una expresión matemática para relacionar las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-5,0)$ y $B(5,0)$ es 150. Grafique la curva que se obtiene.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Actividad 4. Familiaricémonos con la circunferencia

1. Abel se ha comprado un televisor pantalla plana FULL HD para situarlo en su sala, que tiene la forma de un rectángulo de $4\ m$ de ancho y $5\ m$ de largo. Sabiendo que Abel ha decidido ubicar el televisor a un metro del centro de su sala, responda las siguientes preguntas:

   a) Ubique los lugares donde se podría colocar el televisor. Muestre todas las posibilidades y explique cómo obtuvo dichos lugares.

   b) ¿Qué curva representa todos los lugares donde se podría ubicar el televisor? Describa la curva obtenida.

   ____

   ____

   c) Si se considera el centro de la sala como el origen de coordenadas del plano cartesiano, escriba la ecuación de la curva obtenida en la parte b).

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis

2. El servicio sismológico nacional (Instituto Geofísico del Perú) detectó un sismo en la ciudad A. El epicentro del sismo se registró a 5 km este y 3 km sur del centro de la ciudad A, con un radio de alcance de 4 km a la redonda.

   Considerando que el centro de la ciudad A se encuentra en el origen de coordenadas del plano cartesiano, responda lo siguiente:

   a) Con la ayuda del software GeoGebra represente gráficamente la región afectada por el sismo. Describa lo que observa.

   b) Determine la ecuación que corresponde a la curva que encierra la región afectada por el sismo. Muestre su procedimiento.

   c) Si la casa de Pedro se encuentra en el centro de la ciudad A, ¿el movimiento sísmico afectó la casa de Pedro? Justifique su respuesta.

Tesis publicada con autorización del autor
No olvide citar esta tesis