PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

ERRORES EN TORNO A LA COMPRENSIÓN DE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Tesis para optar el grado académico de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas que presenta:

Cristina Sofía La Plata De la Cruz

Asesor:

Dr. Uldarico Malaspina Jurado

Miembros del Jurado:

Mg. Emilio Gonzaga Ramírez

Mg. Augusta Osorio Gonzales

Dr. Uldarico Malaspina Jurado

Julio del 2014

Agradecimientos

Al Dr. Uldarico Malaspina Jurado por las innumerables horas de trabajo y sus acertados consejos en la realización de esta investigación. Por permitirme trabajar al lado de un excelente profesional y un gran ser humano.

A la profesora del curso, por toda su disposición y tiempo para la recolección de los datos trabajados en esta investigación.

A mí querida amiga Cintya Gonzales, por todas las observaciones y críticas a esta investigación y por alentarme siempre a la culminación de la misma.

A todos los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas, que con cada curso impartido alentaron mi interés por conocer más sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Dedicatoria

A mi madre, por ser ejemplo de amor, fe y perseverancia.

A José Carlos, por acompañarme con amor y paciencia en cada reto emprendido.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se analizan los errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, mediante un estudio con alumnos de un primer curso de Cálculo pertenecientes a las especialidades de Ciencias e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Para realizar esta investigación se tomaron algunos supuestos teóricos que constituyen nuestro marco teórico. Los supuestos tomados son: comprensión desde el punto de vista de Sierpinska (1990), error desde el punto de vista de Godino Batanero y Font (2003), objetos matemáticos primarios, configuración cognitiva y configuración epistémica desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Los cuales nos brindaron las herramientas necesarias para analizar los errores encontrados al comprender el objeto matemático en estudio, definición del límite finito de una función real de variable real. Para evidenciar estos errores, se diseñó un test exploratorio con preguntas planteadas en diversos tipos de representación (algebraico, gráfico y simbólico) que se aplicó a los alumnos anteriormente mencionados y fue puesto a consideración de la profesora del curso. Para complementar la información recabada mediante el test, se realizó entrevistas a tres alumnos. Con toda esta información se hicieron configuraciones epistémicas de las soluciones de la profesora y configuraciones cognitivas de las soluciones de los alumnos entrevistados, lo cual nos permitió tener una visión más clara sobre los errores encontrados.

La metodología empleada en nuestro trabajo fue mixta, es decir, cuantitativa y cualitativa; más específicamente, del tipo explicativo secuencial.

El objetivo general de nuestro trabajo fue analizar algunos de los errores al comprender la definición de límite finito de una función real de variable real, en una muestra de alumnos de un primer curso de Cálculo.

Finalmente, basados en todo lo trabajado planteamos algunas conclusiones y recomendaciones.

Lista de figuras

Lista de tablas

Índice

Capítulo 1. Planteamiento de la investigación

1.1 Ámbito de investigación

Consideramos que el concepto de límite finito de una función real de variable real es uno de los más complejos e importantes de las Matemáticas. En su práctica docente la investigadora tuvo la oportunidad de evidenciar, gracias a su participación como asistente en un primer curso de Cálculo para alumnos de Ciencias e Ingeniería, los serios errores de los alumnos al comprender la definición de límite finito de una función real de variable real.

Además, si tomamos en cuenta que la incomprensión, en general, de este concepto origina dificultades en el entendimiento de otros contenidos matemáticos que luego se desarrollan tanto en el primer como en los posteriores cursos de Cálculo tales como continuidad, derivada, integral, sucesiones y series, por citar algunos, vemos más claramente la importancia y la necesidad de investigar este concepto y su aprendizaje, centrándonos específicamente en la definición de límite finito de una función real de variable real.

1.2 Antecedentes

Actualmente encontramos diversas investigaciones relacionadas al concepto de límite, realizadas bajo diferentes enfoques teóricos, de las cuales comentaremos las que consideramos de alguna manera se relacionan con los aspectos que abordaremos en nuestra investigación. Así tenemos que según Tall y Vinner (1981), la imagen que algunos alumnos tienen del concepto de límite es la de proceso dinámico, esto es, cuando x se aproxima hacia a provoca que $f(x)$ se aproxime al límite pero sin alcanzarlo. Encontrando que esta imagen entra en conflicto con la definición formal del límite, puesto que prevalece sobre ésta y la gran mayoría de intentos por parte de los alumnos de expresar mediante la definición formal a cierto límite, de la forma $\lim_{x \to a} f(x) = c$, son incorrectos. También tenemos a Brousseau (1983, citado por Blázquez y Oterga, 2000) quien considera que un conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo. Obstáculo que en sí es un conocimiento que funciona bien al interior de un determinado campo pero no dentro de otros, donde es falso y origina errores. Estos errores persisten, se relacionan entre sí y son difíciles de erradicar. Por ello, plantea la necesidad de promover la interacción del alumno con situaciones problemáticas que desestabilicen sus concepciones para superar el obstáculo que provoca dichos errores.

Asimismo, tenemos a Sierpinska (1987) quien considera que hay obstáculos relacionados a cuatro nociones que parecen ser la fuente principal de los obstáculos epistemológicos sobre límites:

- *Conocimiento científico*. La Matemática es un juego formal sobre símbolos. Probar teoremas es su principal objetivo.
- *Infinito*. El infinito no existe. El infinito existe sólo potencialmente.
- *Función*. La función es reducida al conjunto de sus valores. Es reducida a su expresión analítica, la cual siempre existe.
- *Número real*. Carencia de un concepto uniforme de número real.

Además de acuerdo con Rico (1992, citado en Blázquez, 2000), la reflexión actual sobre errores se centra en el papel del error como parte importante de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que, los errores son productos de concepciones inadecuadas o procedimientos incorrectos.

Por otro lado, Blázquez y Ortega (2001), refieren que el uso de varios sistemas de registros de representación favorece a una mejor comprensión, y con ello a un aprendizaje más rico, del concepto de límite de una función real. Sin embargo, advierten que los alumnos pueden presentar en primera instancia cierto rechazo por trabajar en varios registros, prefiriendo trabajar en uno sólo que comúnmente es el registro algebraico, debido quizás a un abuso del propio docente de tal registro en su enseñanza.

Otro estudio interesante es el de Fernández, J. (2010) quien considera el tema de límites como parte de una unidad didáctica, en la cual enumera once dificultades previsibles para los alumnos en la comprensión de tal concepto. En particular, en lo referente a límites, puntualiza:

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- Dificultades para reconocer los límites laterales.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

Por otra parte, Amílcar, O. (2013) propone el diseño de una secuencia didáctica acerca del límite finito de una función real en un punto, sobre la base de la igualdad de los respectivos límites laterales, sin descuidar el tratamiento aritmético-algebraico. El autor, para elaborar su secuencia didáctica, indica que es importante plantearse interrogantes sobre cada uno de los seis tipos de objetos primarios, en la perspectiva del EOS.

Otra investigación interesante es la de Molfino y Buendía (2010), que buscan explicar cómo el concepto de límite de una función real se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente. Esto las llevó a explorar acerca del desarrollo socio-histórico-cultural al interior de la comunidad matemática. Además establecen como definición formal actualmente consensuada por la comunidad matemática, la definición dada por Weierstrass expresada en términos de ε y δ. Definición que tomaremos para nuestro trabajo de investigación y explicitaremos más adelante.

1.3 Delimitación del problema

En este trabajo de investigación pretendemos analizar los errores de los alumnos en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real. Basados en este propósito nos planteamos la siguiente interrogante:

¿Cuáles son los errores relacionados con la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, de alumnos de un primer curso de Cálculo?

Para responder nuestra pregunta de investigación, planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo general:

Analizar algunos errores al comprender la definición de límite finito de una función real de variable real, en una muestra de alumnos de un primer curso de Cálculo.

Objetivos específicos:

1. Diseñar problemas cuyas soluciones permitan detectar errores en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, mediante el planteamiento de preguntas en diversos registros de representación.
2. Tipificar los errores encontrados en las respuestas dadas a los problemas diseñados.

3. Analizar mediante configuraciones epistémicas y cognitivas algunos de los tipos de errores encontrados.

Capítulo 2. Fundamentación teórica y Metodología

2.1 Aspectos teóricos

Para nuestro marco teórico haremos una revisión de tres aspectos fundamentales que abordaremos, posteriormente, a lo largo de nuestro análisis de datos y en base al cual posteriormente formularemos nuestras conclusiones. Los aspectos a los cuales nos referimos son: comprensión, error, configuración epistémica y configuración cognitiva desde la perspectiva del Enfoque Onto-Semiótico.

2.1.1 El modelo de comprensión de Sierpinska

Según Sierpinska (1990, citado por Blázquez, 2000), la comprensión es un acto que está inmerso en un proceso de interpretación y que se desarrolla en forma dinámica entre conjeturas cada vez más elaboradas. Además señala que la comprensión trae consigo un nuevo conocimiento, por ello se puede clasificar la comprensión en función del conocimiento que se produce. Así, la investigadora propone cuatro categorías de actos de comprensión de un objeto matemático:

- Identificación: Identificación de objetos que pertenecen a la denotación del (o un) concepto o identificación de un término como poseedor de un estatus científico. Este acto consiste en una percepción repentina de algo que es como la “figura” en los experimentos gestálticos[1].
- Discriminación: Diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que antes se confundían.
- Generalización: Consiste en notar que existen condiciones no esenciales o de la posibilidad de extender el alcance de algunas aplicaciones.
- Síntesis: Consiste en establecer relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente.

Finalmente Sierpinska señala que la comprensión y los obstáculos son caras de una misma moneda. Puesto que la comprensión busca nuevas formas de conocimiento y los obstáculos reflejan lo erróneo.

[1] Reconocimiento visual de figuras globales en lugar de una mera colección de elementos más simples y no relacionados.

2.1.2 Una definición para "error"

Según Godino, Batanero y Font (2003), todas las teorías sobre la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en su proceso de aprendizaje, determinar las causas de estos errores y teniendo en cuenta esta información organizar el proceso de enseñanza. Es por ello, que en la presente investigación trabajaremos con el concepto de error según Godino, Batanero y Font (2003, p. 73) quienes establecen que se habla de "error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática".

2.1.3 Aspectos del Enfoque Onto-Semiótico de la Cognición Matemática (EOS)

Según Godino y Batanero (1994, citado por Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009), el EOS centra su atención en la noción de *sistema de prácticas*, entendiéndose como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona o compartida en el seno de una institución con la finalidad de resolver problemas matemáticos, comunicarle a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas. Los supuestos tomados de esta teoría encontrados en Godino et al (2009), para nuestro trabajo de investigación son: sistema de prácticas, objetos matemáticos primarios, configuraciones epistémicas y cognitivas.

Sistema de prácticas

Los sistemas de prácticas son considerados en el EOS como una de las posibles maneras de entender "el significado del objeto matemático" y estos son siempre relativos a un contexto o marco institucional (o a una persona individual), además de encontrarse ligados a la solución de cierta clase de situaciones – problemas.

Objetos matemáticos primarios

Para analizar de forma más profunda una actividad matemática es necesario introducir una tipología de objetos matemáticos. El EOS propone las siguientes categorías o tipos de objetos matemáticos primarios, basándose en las diversas funciones desempeñadas por estos objetos en el trabajo matemático:

– *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)

– *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)

– *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)

– *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)

– *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)

– *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

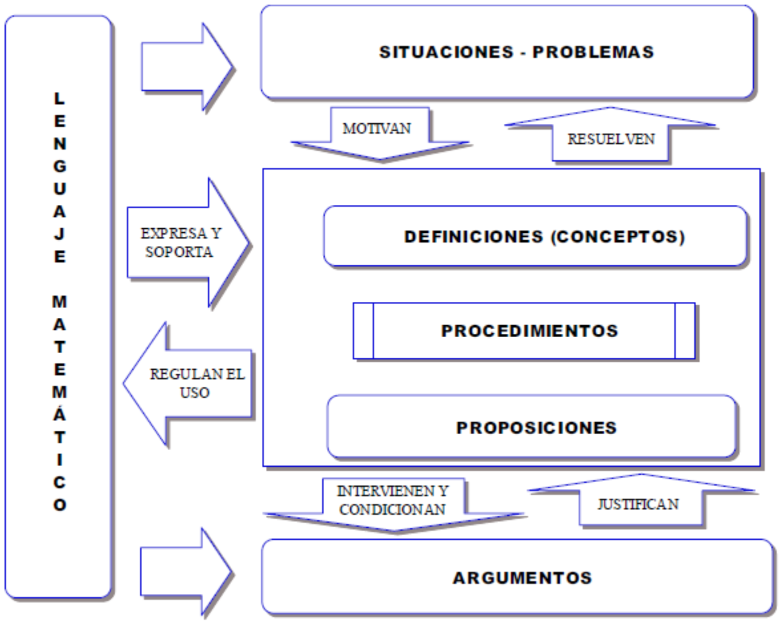


Figura 2.1 Configuración de objetos primarios.
Fuente: Godino et al (2009, p.6)

Según Malaspina (2008), las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad, el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción y con los argumentos se justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Configuraciones epistémica y cognitiva.

Los objetos primarios se encuentran relacionados entre sí formando *configuraciones*, la cuales son definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

Por otro lado, también encontramos que Rojas (2012) menciona que en la realización de toda *práctica matemática*, los sujetos emplean sus conocimientos básicos y en ella activan un conjunto de relaciones entre diferentes tipos de objetos primarios: situaciones-problema, lenguaje, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos; es decir, las prácticas matemáticas personales activan una red de objetos intervinientes y emergentes, es decir, la *configuración cognitiva* puesta en juego.

Además Malaspina (2008) refiere que las configuraciones pueden ser epistémicas, redes de objetos institucionales, o pueden ser cognitivas, redes de objetos personales. Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para poder describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. La constitución de estos objetos y relaciones, configuraciones, tanto en su faceta personal como institucional tiene lugar, mediante los procesos matemáticos, a lo largo del tiempo.

2.1.4 Definición formal de límite

Como se mencionó en los antecedentes haremos referencia al trabajo de Molfino y Buendía (2010) quienes realizan un estudio del concepto de límite a lo largo de la historia de las matemáticas. Esto con la finalidad de establecer la definición formal de límite de una función real de variable real que se tomará en este trabajo de investigación.

Molfino y Buendía (2010), refieren que el concepto de límite evolucionó a lo largo de varias etapas hasta llegar a la configuración que hoy conocemos. En una primera etapa, época griega, el interés por calcular el área del círculo y otras figuras geométricas motivaron la búsqueda de explicaciones a estos problemas que no se podían resolver con los conocimientos que se tenían hasta entonces. En una segunda etapa, siglo XVII, surgió el interés por resolver problemas relacionados a la física y la astronomía. Para ello se utilizaron métodos infinitesimales que ayudasen a calcular velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos, etc. Sin embargo, el uso de estos métodos presentaba ciertas contradicciones. En una tercera etapa, siglo XVIII, encontramos la transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal. No obstante, a pesar que se llegó a expresar la definición de límite que hoy conocemos, esta sólo se dio en lenguaje natural lo cual resto su importancia por no prestar las herramientas algebraicas suficientes para su manipulación. Finalmente, en la cuarta etapa, siglo XX, se empieza a ver al límite ya no sólo como un proceso sino como un objeto en sí mismo, además se establece la representación simbólica de este concepto que hoy conocemos. Así la definición formal, actualmente consensuada en la comunidad matemática y expresada en términos de ε y δ, se refiere a la definición dada por Weierstrass, que actualmente se formula de la siguiente manera: *Si a es un punto de acumulación del dominio de una función f, real de variable real, y b es un número real,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ si y sólo si } \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si } x \in Dom f \wedge 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - b| < \varepsilon$$

Adicionalmente a la definición formal del límite finito de una función real de variable real hemos abordado otros aspectos teóricos, implícitamente en algunas de las preguntas del test exploratorio, pero que se harán explícitas posteriormente en las argumentaciones de las configuraciones epistémicas y en algunas configuraciones cognitivas. Para ello recurriremos a uno de los textos recomendados en la bibliografía de un primer curso de Cálculo para alumnos de Ciencias e Ingeniería, *El Cálculo* de Louis Leithold (1992). En el cual se establecen, tal como sigue, las siguientes definiciones y teoremas.

> <u>Límite unilateral por la derecha</u>: Sea f una función definida en todos los números de algún intervalo abierto (a, c). Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a por la derecha es L, y se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$, independientemente de qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ (pp. 98-99).
>
> <u>Límite unilateral por la izquierda</u>: Sea f una función definida en todos los números de algún intervalo abierto (d, a). Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a por la izquierda es L, y se escribe $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$, independientemente de qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ (p. 99).
>
> <u>Teorema</u>:
> Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$ (p.100).
>
> <u>Teorema</u>:
> El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L (p. 100).

1.4 Metodología de investigación

Respecto a la metodología, nos basamos en Rojas (2012) quien afirma que la verbalización de los procesos de pensamiento y acción proporciona informaciones importantes no sólo a través de materiales escritos tales como cuestionarios o tareas, sino también a partir de procesos de interacción tales como una entrevista o trabajo de los alumnos en grupo. Nuestro trabajo no sólo se limitará a identificar los errores de los alumnos a través de sus respuestas dadas por escrito a un test exploratorio, sino que a través de configuraciones cognitivas – afianzadas por entrevistas – buscaremos más información para analizar la comprensión de los alumnos en torno a la definición de límite finito de una función real de variable real, principalmente para saber el por qué de los errores evidenciados.

En consecuencia, la metodología que seguiremos en nuestro trabajo de investigación será mixta, esto es, cuantitativa y cualitativa. Más específicamente siguiendo un diseño explicativo secuencial. Hernández, Fernández y Baptista (2010) afirman:

> El diseño se caracteriza por una primera etapa en la cual se recaban y analizan los datos cuantitativos, seguida de otra donde se recogen y evalúan datos cualitativos. La mezcla mixta ocurre cuando los resultados cuantitativos iniciales informan a la recolección de datos cualitativos. (p. 566)

Asimismo, los autores detallan un esquema para el diseño explicativo secuencial, que consiste en: recolección de datos cuantitativos, análisis cuantitativo, recolección de datos cualitativos, análisis cualitativo e interpretación del análisis completo.

Tomando en cuenta todo esto, y con el propósito de cumplir nuestros objetivos, los pasos que seguiremos en nuestra investigación son:

1. Diseño de un test exploratorio con preguntas en diversos registros de representación y que involucren algunos conocimientos previos necesarios para la comprensión de la definición de límite de una función real de variable real.
2. Aplicación del test exploratorio a un grupo de 64 alumnos de un primer curso de Cálculo, luego de haber estudiado el concepto de límite finito de una función real de variable real.
3. Revisión y análisis de las respuestas de los alumnos.
4. Tipificación de las respuestas encontradas, poniendo especial atención a los errores encontrados.
5. Triangulación con expertos en el tema, de la tipificación de las respuestas.
6. Establecimiento de la tipificación de respuestas.
7. Establecimiento de interrelaciones entre las respuestas de algunas de las preguntas (o entre algunos ítems de ellas) del test exploratorio.
8. Clasificación para cada interrelación.
9. Análisis cuantitativo de cada interrelación en base a la clasificación establecida.
10. Entrevistas a alumnos cuyas respuestas llamaron particularmente nuestra atención.

11. Análisis cualitativo, empleando configuraciones cognitivas y comparaciones con la configuración epistémica correspondiente, de los alumnos entrevistados.

Capítulo 3. Análisis de datos

A continuación iniciaremos el análisis de los datos recolectados mediante un test exploratorio (Anexo 1) aplicado en un grupo de 64 alumnos del área de ciencias e ingeniería de un primer curso de Cálculo. Es importante detallar que la aplicación del test se dio luego de que los alumnos recibieron clases sobre la definición de límite finito de una función real de variable real y se sometieron a una evaluación en el curso, que incluía este tema.

Tal como se precisó en el capítulo anterior, el análisis de los datos se dividirá en dos etapas: una primera etapa, en la que realizaremos un análisis cuantitativo y una segunda etapa, en la que realizaremos un análisis cualitativo de algunos de los datos. Esto, debido a que consideramos importante, en principio, tener conocimiento de los diversos tipos de respuestas de los alumnos y cuáles son los tipos de respuestas en los que hubo mayor incidencia, poniendo especial atención en las respuestas erradas. Para no quedarnos con un conocimiento meramente cuantitativo de las respuestas de los alumnos, realizaremos un análisis cualitativo de las respuestas erradas de tres alumnos mediante las configuraciones cognitivas de sus soluciones y contrastadas con las configuraciones epistémicas de las soluciones dadas por su profesora al test exploratorio.

3.1 Análisis cuantitativo

Para realizar el análisis cuantitativo seguiremos los siguientes pasos:

1. Tipificación de las respuestas dadas por los alumnos al test exploratorio.
2. Establecimiento de interrelaciones entre las respuestas a ciertas preguntas del test (o entre algunos ítems de ellas), ya que dichas preguntas se consideraron que estuvieran relacionadas entre sí desde que se diseñó el test exploratorio.
3. Establecimiento de una clasificación para cada interrelación en base a los tipos de respuestas encontrados en cada una de ellas.
4. Mostrar la distribución de las respuestas en cada interrelación, según la clasificación establecida, mediante un gráfico estadístico (gráfico de barras).

3.1.1 Tipificación de respuestas.

Luego de recolectar los datos mediante la aplicación del test exploratorio, examinamos las diversas respuestas dadas por los alumnos para cada pregunta del test, surgiendo la necesidad de establecer una tipificación de dichas respuestas. Para validar esta tipificación de respuestas se recurrió a la triangulación de las mismas con expertos en el tema (a modo de ejemplo mostramos la opinión de uno de los expertos, anexo 2), para aquellas preguntas del test que no eran para marcar (pregunta 5 y pregunta 6). A continuación mostramos la tipificación que se estableció luego de realizar la triangulación correspondiente.

Tipificación de las respuestas para la pregunta 1

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Respondió correctamente.	a
Error de simbología	Cuando el resultado del límite lateral izquierdo corresponde al límite lateral derecho y viceversa. Este error sólo se puede dar en los ítems I y II.	s
Error conceptual	Cuando el límite que determina no es coherente con sus respuestas a otros ítems que se encuentran relacionados con este; o no es coherente con el comportamiento de la función según el gráfico.	c
Error gráfico	Cuando la respuesta es cero al ítem 1.5, porque asumimos que predomina una mala correspondencia con la representación gráfica dada.	g
No respondió	Dejo en blanco.	b

Tipificación de las respuestas para la pregunta 2

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Respondió correctamente.	a
Respuesta correcta pero incoherente	Determinó correctamente el límite requerido pero esta respuesta no es coherente con sus respuestas (incorrectas) a otros ítems de la misma pregunta.	ci
Error gráfico	Grafica la recta correspondiente pero no excluye del gráfico el par (3;6) habiendo calculado bien el dominio.	g
Error conceptual	Cuando determinó incorrectamente el dominio de la función o	c

	determinó incorrectamente el límite requerido en base al gráfico realizado para la función o cuando realizó cualquier otro gráfico que sugiere comportamientos no afines.	
Respuesta incorrecta pero coherente.	Cuando la respuesta es incorrecta, pero es coherente con las respuestas incorrectas dadas a otros ítems de la misma pregunta.	ic
No respondió	Dejó en blanco.	b

Tipificación de las respuestas para la pregunta 3

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Calcula correctamente el límite, simplificando previamente el factor $x+1$ en la expresión dada.	a
Error de cálculo	Simplifica el factor $x+1$ en la expresión dada sin embargo, calcula mal el límite de la expresión simplificada.	k
No respondió	Dejo en blanco	b

Tipificación de las respuestas para la pregunta 4

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Grafica una función que cumple con las dos condiciones dadas.	a
Error conceptual	Grafica una función que no cumple ninguna o alguna de las dos condiciones dadas.	c
No respondió	Dejo en blanco	b

Tipificación de las respuestas para la pregunta 5

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Cuando marca que la proposición es verdadera.	a
Error conceptual	Cuando marca que la proposición es falsa.	c
No respondió	Dejo en blanco	b

Tipificación de las respuestas para la pregunta 6

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Cuando marca que la alternativa c	a
Error conceptual	Cuando marca cualquier otra alternativa que no sea la alternativa c	c
No respondió	Dejo en blanco	b

Tipificación de las respuestas para la pregunta 7

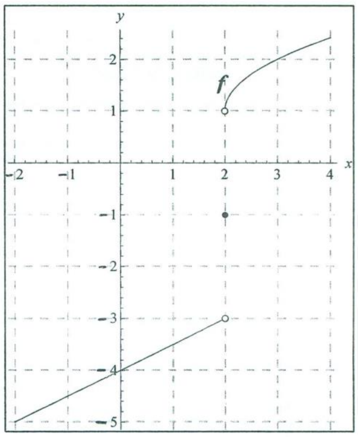
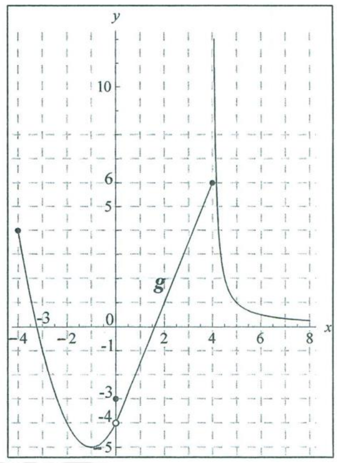
Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Plantea la definición formal de $\lim_{x\to 1} 5x-2=3$, luego establece la relación $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ e interpreta por qué esto implica que el límite dado es 3 o da un argumento válido.	a
Error conceptual	Justifica que el límite es 3 reemplazando el valor de *x* por 1 en la función dada.	c
Respuesta incompleta	Cuando establece la relación $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ pero no se percibe la interpretación de la implicación presente en la definición formal.	f

3.1.2 Interrelaciones de respuestas

Habiendo establecido la tipificación de respuestas, estableceremos lo que denominaremos interrelaciones. Una interrelación consiste en contrastar las respuestas de los alumnos en preguntas en las que se les plantea un mismo objeto matemático utilizando diferentes representaciones. En base a que existe este tipo de relación entre algunas de las preguntas del test exploratorio, se establecen cinco interrelaciones, que nos ayudarán a tener una apreciación más cercana de la comprensión de los alumnos sobre la existencia y no existencia del límite finito de una función real de variable real y sobre la definición del límite finito de una función real de variable real.

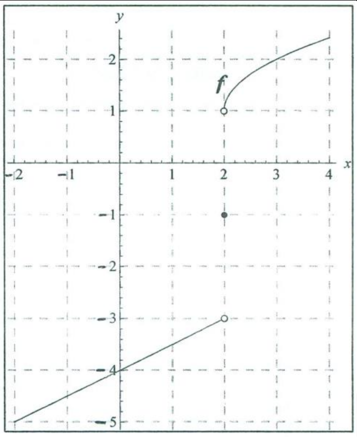
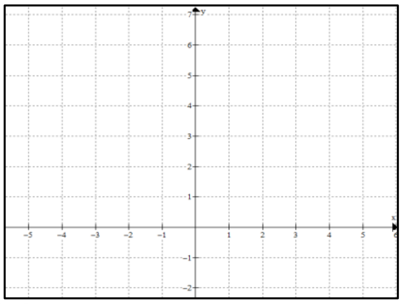
Interrelación 1: Se analizan las respuestas a los ítems 1.1, 1.2 y 1.3 (en bloque) y su relación con las respuestas al ítem 1.4, todos pertenecientes a la pregunta 1. El propósito de esta interrelación es evidenciar si las respuestas de los alumnos son coherentes, ya que en ambos casos los alumnos deben analizar el comportamiento de cierta función solo mediante su gráfico. Se espera coherencia al afirmar que el límite requerido no existe, como consecuencia del análisis de los límites laterales. (Ver tabla 3.1)

Tabla 3.1 Preguntas consideradas para la interrelación 1.

Ítems 1.1, 1.2 y 1.3			Ítem 1.4	
1.1	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$		$\lim\limits_{x\to 4} g(x)=$	
1.2	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$			
1.3	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$			

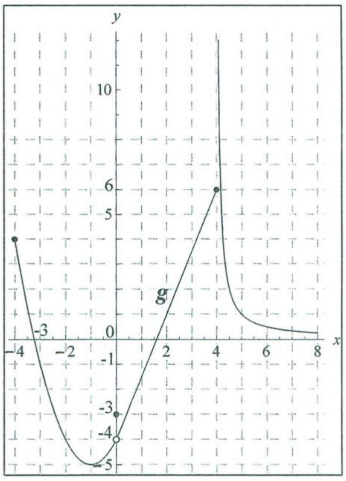
Interrelación 2: Se analizan las respuestas a los ítems 1.1, 1.2 y 1.3 (en bloque) y su relación con las respuestas a la pregunta 4. El propósito de esta interrelación es evidenciar si las respuestas de los alumnos son coherentes, dentro de una misma cuestión conceptual, al pasar de una situación dada a una situación similar creada por ellos. Se espera coherencia entre las respuestas a los ítems 1.1, 1.2 y 1.3 y la construcción de la gráfica que se les pide en la pregunta 4. Se pone énfasis en la distinción entre la existencia del límite de la función para el número al cual tiende x y la existencia del valor de la función en el número al cual tiende x. (Ver tabla 3.2)

Tabla 3.2 Preguntas consideradas para la interrelación 2.

<table>
<tr><th colspan="3">Ítems 1.1, 1.2 y 1.3</th><th>Pregunta 4</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$</td><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">Grafique una función f que cumpla:
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \quad \wedge \quad f(2) = 3$
</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$</td></tr>
</table>

Interrelación 3: Se analizan las respuestas al ítem 1.6 de la pregunta 1 y su relación con las respuestas a la pregunta 5. El propósito de esta interrelación es evidenciar si las respuestas de los alumnos son coherentes, dentro de una misma cuestión conceptual, expresada por una parte en un registro gráfico y por otra en un registro verbal-simbólico. Notar que las características de la función en la pregunta 5 son las mismas que se aprecian en el gráfico del ítem 1.6. (Ver tabla 3.3)

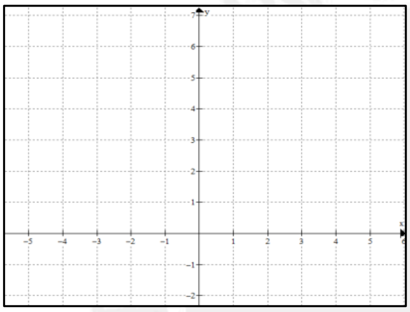
Tabla 3.3 Preguntas consideradas para la interrelación 3.

<table>
<tr><th colspan="2">Ítems 1.6</th><th>Pregunta 5</th></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to 0} g(x) =$</td><td>
</td><td>Diga si la siguiente proposición es verdadera o falsa:
Existe una función f que cumple las siguientes tres condiciones
i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es un número real
ii) $f(a)$ es un número real
iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

( ) VERDADERA ( ) FALSA</td></tr>
</table>

Interrelación 4: Se analizan las respuestas al ítem 2b y su relación con las respuestas a los ítems 2c2, 2c3 y 2c4 de la pregunta 2. El propósito de esta interrelación es evidenciar si los alumnos muestran coherencia entre el gráfico que hacen de la función f y las respuestas tanto a los límites laterales como al límite de la función cuando x tiende a 3 (ítems 2c2, 2c3 y 2c4). (Ver tabla 3.4)

Tabla 3.4 Preguntas consideradas para la interrelación 4.

Ítem 2b (*)	Ítems 2c2, 2c3 y 2c4 (**)	
Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ Grafique la función f 	2c2	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$
	2c3	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=$
	2c4	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=$

(*) Previamente a este ítem se les pidió a los alumnos que determinen el dominio de la función.

(**) Para determinar cada uno de los límites se les pedía apoyarse en el gráfico realizado en el ítem 2b.

Interrelación 5: Se analizan las respuestas a la pregunta 6 y su relación con las respuestas a la pregunta 7. El propósito de esta interrelación es evidenciar si los alumnos no sólo reconocen la definición del concepto de límite finito de una función real de variable real (pregunta 6) en un registro simbólico sino que comprenden que tal definición les permite demostrar por qué el límite finito de cierta función real de variable real es un determinado valor (pregunta 7). (Véase tabla 3.5)

Tabla 3.5 Preguntas consideradas para la interrelación 5

Pregunta 6	Pregunta 7
¿A cuál de las siguientes proposiciones es equivalente $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$? (Marque con un aspa la alternativa correcta) a) $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ tal que si $0 < \lvert x-1 \rvert < \delta$ entonces $\lvert f(x) - 3 \rvert < \varepsilon$ b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < \lvert x-3 \rvert < \delta$ entonces $\lvert f(x) - 1 \rvert < \varepsilon$ c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < \lvert x-1 \rvert < \delta$ entonces $\lvert f(x) - 3 \rvert < \varepsilon$	¿Cómo justifica que $\lim\limits_{x \to 1} (5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

3.1.3 Resultados de cada interrelación

Al analizar las respuestas de las preguntas involucradas en cada interrelación se encontró a su vez diversos tipos de interrelación. Por ello, decidimos establecer una clasificación para cada una de ellas. A modo de ejemplo, presentamos la agrupación que se hizo de las respuestas encontradas y tipificadas para los ítems 1.1, 1.2 y 1.3 con 1.4, con la finalidad de establecer una clasificación para la interrelación 1 (Ver tabla 3.6).

Tabla 3.6 Clasificación para la interrelación 1

Tipo de interrelación	1.1	1.2	1.3	1.4
Interrelación correcta	a	a	a	a
Interrelación coherente	c	c	a	a
Interrelación incoherente tipo 1	a	a	a	c
	c	c	a	c
	s	s	a	c
	c	a	a	c
Interrelación incoherente tipo 2	c	a	c	a
	c	c	c	a
Interrelación por error con énfasis conceptual	a	a	c	c
	c	c	c	c
	s	s	c	c
	a	c	c	c
Interrelación inexistente	a	c	c	b
	c	c	c	b
	b	c	b	a
	c	b	b	b
	b	b	a	c
	c	c	a	b
	b	b	b	b
	b	b	c	c
	c	b	c	c

A continuación mostramos cada clasificación mediante una tabla seguida de un gráfico estadístico para ilustrar la distribución de los tipos de interrelación encontrados para la interrelación correspondiente.

Interrelación 1: En la tabla 3.7 describimos cada tipo de interrelación encontrada en la interrelación 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3 con ítem 1.4)

Tabla 3.7 ***Descripción de la clasificación para la interrelación 1***

Tipo de interrelación	Descripción de la interrelación
Interrelación correcta	Los alumnos determinan correctamente tanto los límites laterales como los límites de la función cuando tiende *x* a 2.
Interrelación coherente	Los alumnos, a partir del análisis de los límites laterales, concluyen que el límite no existe.
Interrelación incoherente tipo 1	Existe contradicción, pues los alumnos para la primera función de la pregunta 1 determinan correctamente que el límite no existe (ítems 1.1, 1.2 y 1.3). Sin embargo, para la segunda función de la pregunta 1 determinan erróneamente que existe el límite (ítem 1.4). A pesar que para ambas funciones se cumple, según sus gráficas dadas, que el límite de la función no existe a partir del análisis de los límites laterales.
Interrelación incoherente tipo 2	Existe contradicción, pues los alumnos para la primera función de la pregunta 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3) determinan erróneamente que el límite existe; sin embargo, para la segunda función de la pregunta 1 (ítem 1.4) determinan correctamente que no existe el límite. A pesar que para ambas funciones se cumple, según sus gráficas dadas, que el límite de la función no existe a partir del análisis de los límites laterales.
Interrelación por error con énfasis conceptual	Los alumnos no relacionan la no existencia del límite, con el comportamiento de sus límites laterales. Esto los lleva a reiterar su error.
Interrelación inexistente	En este caso consideramos todas las situaciones en las que por lo menos, un ítem de los analizados no fue respondido.

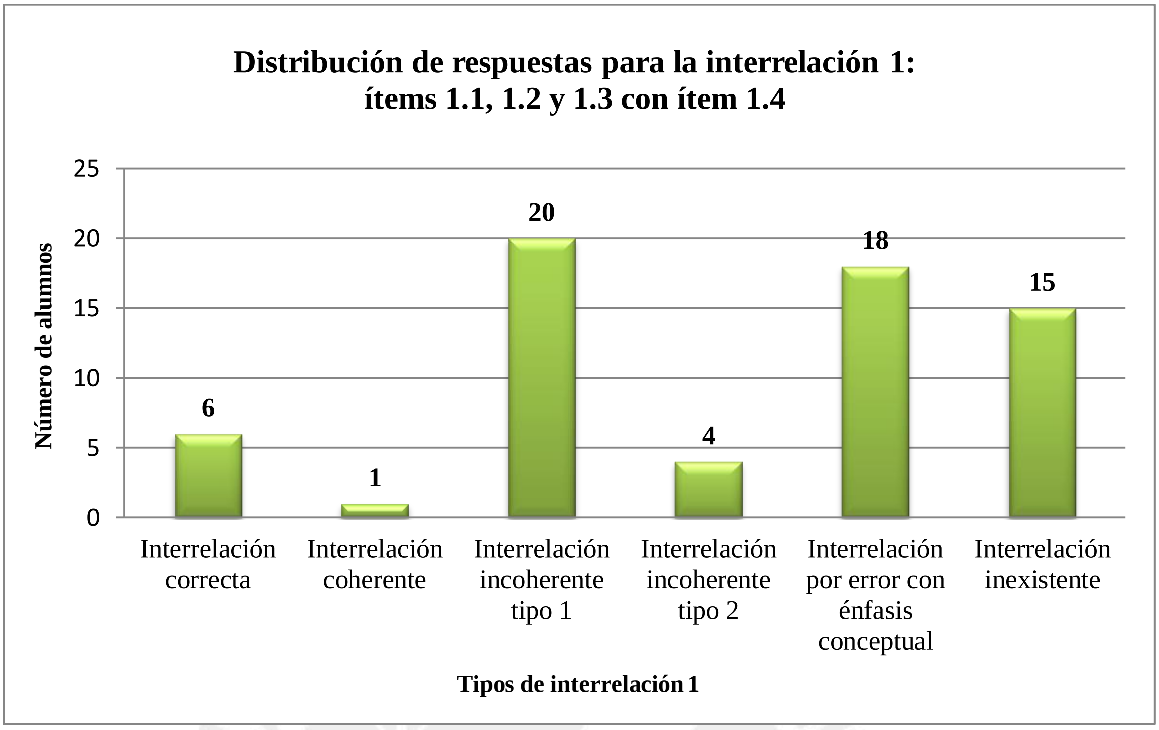


Figura 3.1 Distribución de respuestas para la interrelación 1

<u>*Comentario*</u>: Basados en nuestro resultado cuantitativo (figura 3.1), podemos concluir que un significativo porcentaje de alumnos, a pesar que en un primer momento establece la no existencia del límite finito de una función real de variable real a partir del análisis de sus límites laterales, luego cae en contradicciones cuando determina la existencia del límite finito de una función real de variable real, para la cual no existe dicho límite (31% de casos con interrelación incoherente tipo 1). Esto es, en términos de la comprensión según Sierpinska podemos afirmar que la mayoría de alumnos solo evidencian una comprensión de la no existencia del límite finito de una función real de variable real en la categoría de *identificación*. De igual manera, llama nuestra atención que existe un porcentaje considerable de alumnos (28% de casos con interrelación por error con énfasis conceptual) que evidenciaron, a partir de esta interrelación, no comprender la existencia del límite finito de una función real de variable real. Cabe destacar que sólo hay un 9% de alumnos que respondieron correctamente a los ítems considerados en esta interrelación.

Interrelación 2: En la tabla 3.8, describimos cada tipo de interrelación encontrada en la interrelación 2 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3 con pregunta 4)

Tabla 3.8 ***Descripción de la clasificación para la interrelación 2***

Tipo de interrelación	Descripción de la interrelación
Interrelación correcta	Los alumnos determinaron correctamente tanto los límites laterales como el límite de la función cuando x tiende a 2, a partir del gráfico dado para la función. Por otro lado, graficaron correctamente una función tal que el límite no existe cuando x tiende a 2 y el valor de la función en 2 si existe.
Interrelación coherente	Los alumnos determinaron en la primera parte de la pregunta 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3) a partir del gráfico dado para la función que al ser diferentes los límites laterales (aunque no sean los correctos), el límite de la función no existe. Esta comprensión se reitera cuando los alumnos grafican una función para la cual no existe el límite cuando x tiende a 2 y que $f(2)=3$.
Interrelación incoherente tipo 1	Los alumnos determinaron en la primera parte de la pregunta 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3) a partir del gráfico dado para la función que al ser diferentes los límites laterales, el límite de la función no existe. Sin embargo, esta comprensión no se reitera cuando al pedirles a los alumnos que grafiquen una función para la cual no exista el límite de la función cuando x tiende a 2 y que $f(2)=3$, graficaron una función que no cumple una o ninguna de las condiciones requeridas.
Interrelación incoherente tipo 2	Los alumnos erróneamente determinan la existencia del límite para la primera parte de la pregunta 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3) sin embargo, graficaron correctamente la función requerida en la pregunta 4.
Interrelación por error con énfasis conceptual	Los alumnos reiteraron su error, esto es, tanto en la primera parte de la pregunta 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3) al no determinar la no existencia del límite de la función, como al graficar una función que no cumple una o ninguna de las condiciones requeridas en la pregunta 4.
Interrelación inexistente	En este caso consideramos todas las situaciones en las que por lo menos, un ítem de los analizados no fue respondido.

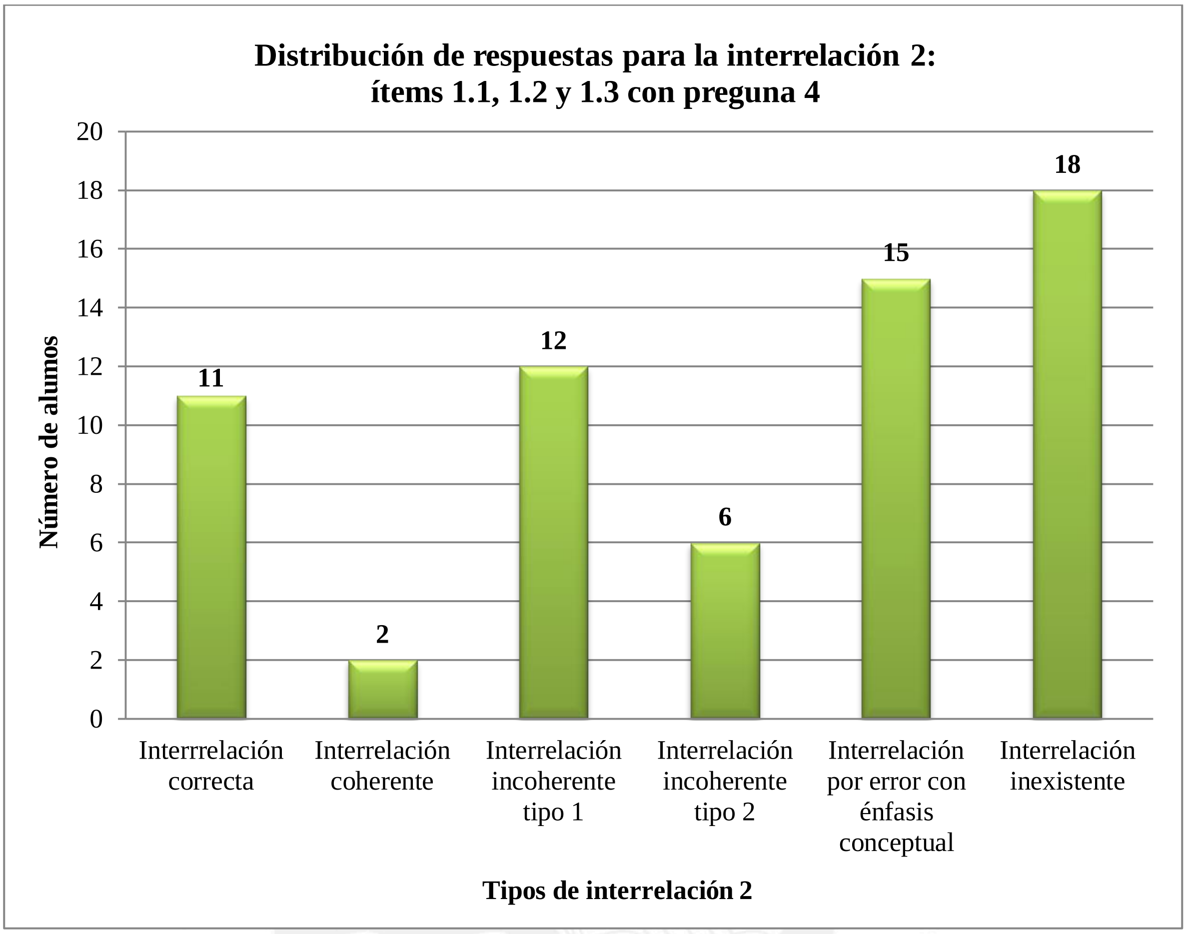


Figura 3.2 Distribución de respuestas para la interrelación 2

<u>*Comentario*</u>: Basados en nuestro resultado cuantitativo (figura 3.2), podemos concluir que un gran número de alumnos (28%) no realizó el gráfico requerido en la pregunta 4 o no determino algunos o todos los límites requeridos en la pregunta 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3), por lo cual no se pudo establecer una interrelación (interrelación inexistente). Otro resultado a destacar, es que una gran cantidad de alumnos (23,4%) evidenció no poder concluir la no existencia del límite finito de una función real de variable real tanto a partir del análisis intuitivo de los límites laterales en base al gráfico dado para la función (pregunta 1: ítems 1.1, 1.2 y 1.3) ni trazar un gráfico que cumplía con las condiciones requeridas (pregunta 4). También consideramos importante mencionar que un 19% de los alumnos determinaron la no existencia del límite (pregunta 1: ítems 1.1, 1.2 y 1.3); sin embargo, no trazaron un gráfico que cumpla con las condiciones requeridas en la pregunta 4 (a pesar que, en esencia, eran las mismas condiciones que tenía el gráfico de la función que analizaron en la pregunta 1 (ítems 1.1, 1.2 y 1.3). Esto es, en términos del enfoque sobre la comprensión que hace Sierpinska, podríamos decir que un buen número de alumnos tiene una comprensión de la no existencia del límite finito de una

función real de variable real, solo en el nivel de *identificación.* De igual manera, llama nuestra atención que sea solo el 17% de alumnos que muestran una comprensión clara de la no existencia del límite finito de una función real de variable real.

Interrelación 3: En la tabla 3.9, describimos cada tipo de interrelación encontrada en la interrelación 3 (ítem 1.6 con pregunta 5)

Tabla 3.9 ***Descripción de la clasificación para la interrelación 3***

Tipo de interrelación	Descripción de la interrelación
Interrelación correcta	Los alumnos determinaron correctamente el límite de la función cuando x tiende a 0 en base al gráfico dado para tal función en el ítem 1.6 de la pregunta 1 y determinaron correctamente que la proposición dada en la pregunta 5 es verdadera.
Interrelación incoherente tipo 1	Los alumnos determinaron correctamente el límite de la función cuando *x* tiende a 0 en base al gráfico dado para tal función en el ítem 1.6 de la pregunta 1 sin embargo, determinaron erróneamente que la proposición dada en la pregunta 5 era falsa. Esto pone en contradicción las dos respuestas dadas.
Interrelación incoherente tipo 2	Los alumnos determinaron erróneamente el límite de la función en el ítem 1.6 de la pregunta 1 y determinaron correctamente que la proposición dada en la pregunta 5 era verdadera. Esto pone en contradicción las dos respuestas dadas.
Interrelación con error por énfasis conceptual	Los alumnos reiteraron su error al determinar incorrectamente el límite de la función en el ítem 1.6 de la pregunta 1 y determinar incorrectamente que la proposición planteada en la pregunta 5 era falsa.
Interrelación inexistente	En este caso consideramos todas las situaciones en las que por lo menos, un ítem de los analizados no fue respondido.

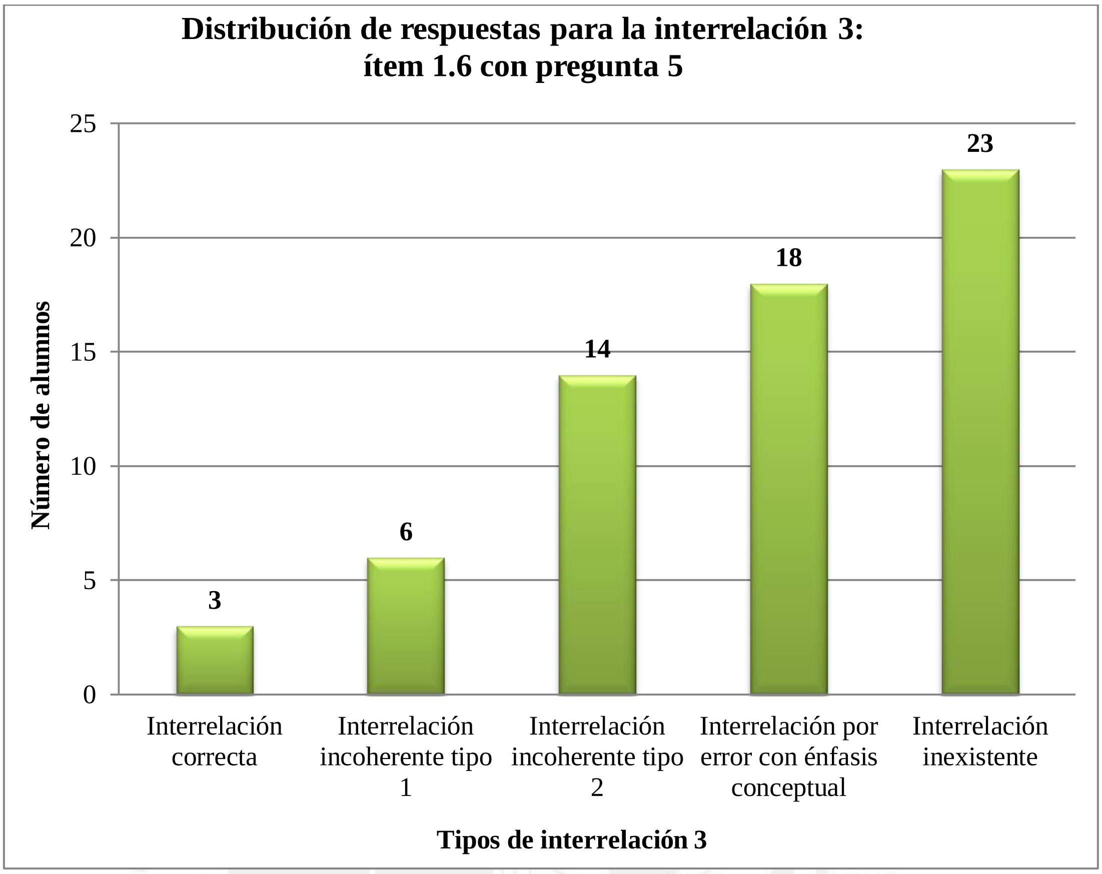


Figura 3.3 Distribución de respuestas para la interrelación 3

Comentario: Basados en nuestro resultado cuantitativo (figura 3.3), podemos concluir que un considerable número de alumnos (36%) no respondió al menos a una de las preguntas involucradas en esta interrelación (interrelación inexistente). Otro resultado que llama nuestra atención, es que el 28% de los alumnos determina incorrectamente la respuesta tanto para la pregunta 1 (ítem 1.6) como para la pregunta 5 (interrelación por error con énfasis conceptual). También debemos destacar que el 22% de los alumnos determinan erróneamente el límite requerido en el ítem 1.6 sin embargo, determinan correctamente el valor de verdad de la proposición dada en la pregunta 5 (interrelación incoherente tipo 2) mostrando con esto su falta de claridad en la comprensión de la existencia del límite finito de una función real de variable real. Es importante señalar que las tres características de la función, dadas en la proposición de la pregunta 5 en términos generales, se cumplen para la función trabajada en el ítem 1.6 según el gráfico dado. Entonces, en términos del enfoque sobre la comprensión que hace Sierpinska, podríamos decir que una buena cantidad de alumnos tiene una comprensión de la existencia del límite finito de una función real de variable real, solo en el nivel de *identificación*. Finalmente no podemos dejar de comentar que sólo el 4,7% de alumnos respondieron correctamente las dos preguntas de esta interrelación (interrelación correcta).

<u>Interrelación 4</u>: En la tabla 3.10, describimos cada tipo de interrelación encontrada en la interrelación 4 (ítem 2b con ítems 2c2, 2c3 y 2c4)

Tabla 3.10 ***Descripción de la clasificación para la interrelación 4***

Tipo de interrelación	Descripción de la interrelación
Interrelación correcta	Los alumnos graficaron correctamente la función dada y determinaron correctamente y con coherencia respecto a su gráfico, tanto los límites laterales como el límite de la función cuando *x* tiende a 6.
Interrelación coherente tipo 1	Los alumnos determinan correctamente tanto los límites laterales como el límite de la función cuando *x* tiende a 3 en base al gráfico que realizaron para la función dada (en algunos casos realizaron el gráfico correctamente y en otros casos la recta correspondiente sin la extracción del par ordenado (3;6) porque el dominio fue considerado erróneamente como todos los reales o porque olvidaron interpretar el dominio en su gráfico). Esto es, aplican correctamente la propiedad de existencia del límite.
Interrelación coherente tipo 2	Los alumnos realizaron correctamente el gráfico de la función pero determinaron uno o ambos límites laterales erróneamente. Sin embargo, en base a estos límites laterales determinan la existencia o la no existencia del límite de la función cuando *x* tiende a 3 de forma coherente. Esto es, aplican correctamente la propiedad de existencia del límite.
Interrelación incoherente	Los alumnos en base a su gráfico incorrecto (la recta correspondiente sin la extracción del par ordenado (3;6) porque el dominio fue considerado erróneamente como todos los reales o porque olvidaron interpretar el dominio en su gráfico) determinan uno o ambos límites laterales incorrectamente lo cual implicaría en algunos casos que el límite de la función cuando *x* tiende a 3 no existe o en otros casos que tal límite es un número real distinto de 6. Sin embargo, los alumnos determinan correctamente el límite de la función cuando *x* tiende a 3 cayendo en contradicción con lo establecido para sus límites laterales.
Interrelación por error con énfasis conceptual	Los alumnos determinan incorrectamente tanto los límites laterales como el límite de la función cuando *x* tiende a 3 en base al gráfico que realizaron para la función dada (en algunos casos realizaron la recta correspondiente sin la extracción del par ordenado (3;6) porque olvidaron interpretar el dominio en el gráfico en otros casos realizaron el gráfico correcto o un gráfico que sugiere un comportamiento no afín).
Interrelación inexistente	En este caso consideramos todas las situaciones en las que por lo menos, un ítem de los analizados no fue respondido.

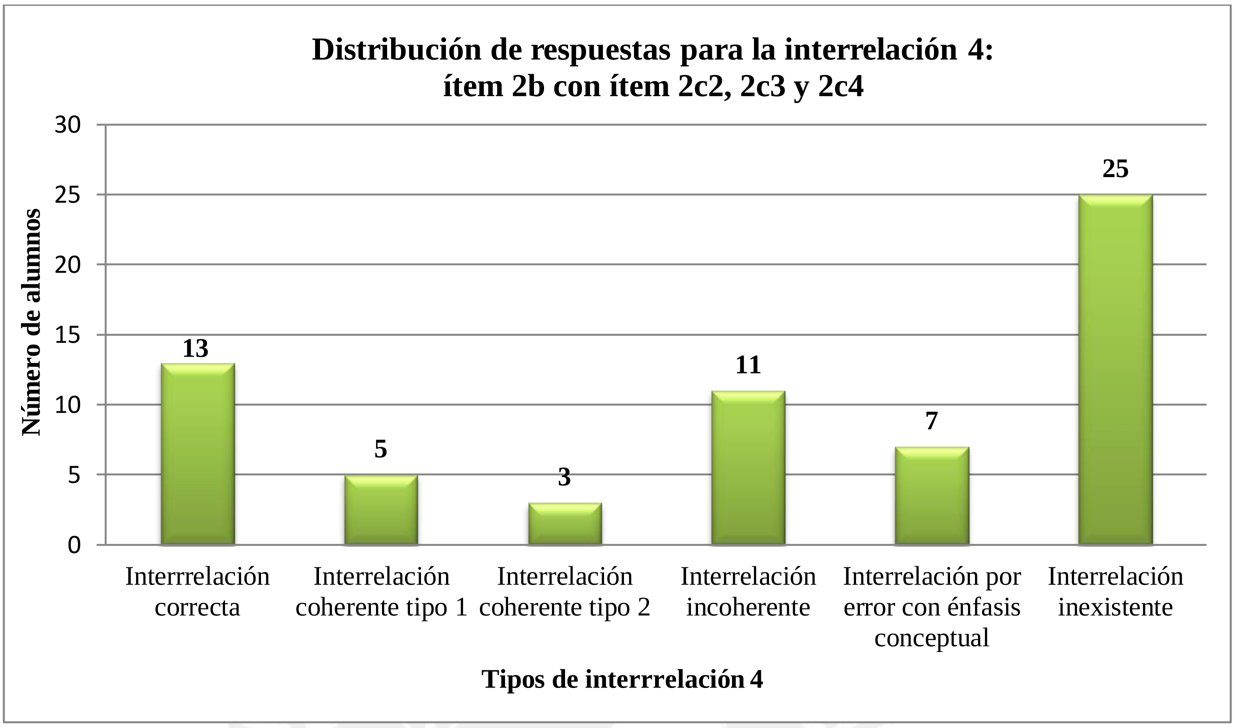


Figura 3.4 Distribución de respuestas para la interrelación 4

<u>*Comentario*</u>: Basados en nuestro resultado cuantitativo (figura 3.4), podemos concluir que un considerable número de alumnos (39%) no respondió uno más de un ítem involucrado en esta interrelación (interrelación inexistente). Otro resultado que llama nuestra atención, es que el 17% de los alumnos determinan los límites de la función requeridos (ítems 2c2, 2c3 y 2c4) pero estos no son coherentes con el comportamiento según el gráfico de la función que ellos realizaron (ítem 2b). Esto podría evidenciar, que los alumnos recurren a métodos algebraicos (dado que conocen la regla de correspondencia de la función) para determinar el límite de la función ignorando su comportamiento gráfico. También tenemos que solo el 11% de los alumnos traza un gráfico erróneo para la función dada (ítem 2b) y determina incorrectamente los límites requeridos en los ítems 2c2, 2c3 y 2c4. Por otro lado, tenemos que el 20% de los alumnos trazó correctamente el gráfico de la función dada y determino correctamente los límites requeridos en los ítems 2c2, 2c3 y 2c4 (interrelación correcta). Esto es, en términos de la comprensión según Sierpinska, podemos afirmar que, a diferencia de las otras interrelaciones, la mayoría de alumnos tiene una comprensión de la existencia del límite finito de una función real de variable real, en el nivel de *discriminación*, en el sentido de reconocer que ambos límites laterales coinciden y en consecuencia existe el límite finito de una función real de variable real.

Interrelación 5: En la tabla 3.11, describimos cada tipo de interrelación encontrada en la interrelación 5 (pregunta 6 con pregunta 7)

Tabla 3.11 ***Descripción de la clasificación para la interrelación 5***

Tipo de interrelación	Descripción de la interrelación
Interrelación coherente pero incompleta	Los alumnos reconocen la definición del límite finito de una función real de variable real y reconocen que tal definición les permite justificar lo planteado en la pregunta 7. Sin embargo, terminan su justificación cuando establecen la relación entre delta y épsilon sin justificar por qué esta relación demuestra lo requerido.
Interrelación incoherente	Los alumnos reconocen la definición del límite finito de una función real de variable real sin embargo, no reconocen que tal definición les permite justificar lo planteado en la pregunta 7. Recurriendo para justificar lo requerido, a la tabulación de la función para valores cercanos al valor al cual tiende *x* en el límite, a la gráfica de la función o a la tabulación directa de la función en el valor al cual tiende *x* en el límite.
Interrelación por error con énfasis conceptual	El alumno no reconoce la definición formal del límite finito de una función real de variable real y reitera su incomprensión de la definición al intentar justificar el límite requerido en la pregunta 7.
Interrelación inexistente	En este caso consideramos todas las situaciones en las que por lo menos, un ítem de los analizados no fue respondido.

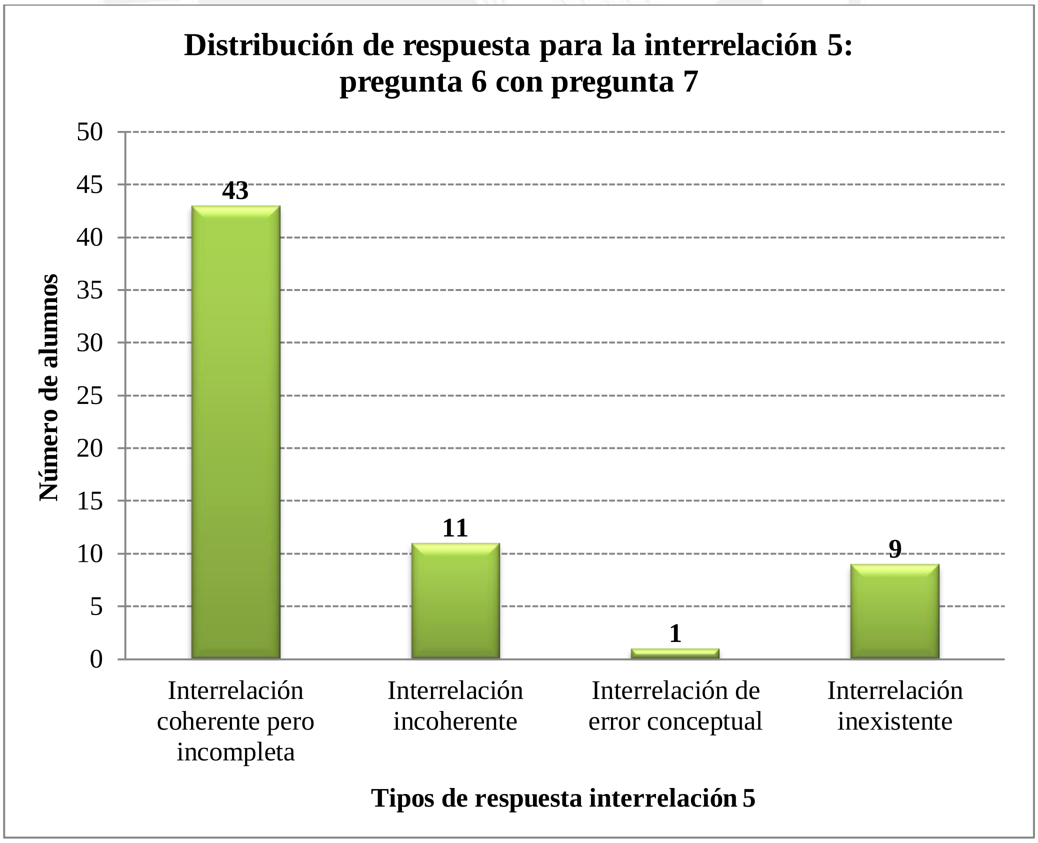


Figura 3.5 Distribución de respuestas en la interrelación 5

<u>*Comentario*</u>: Basados en nuestro resultado cuantitativo (figura 3.5), podemos concluir que un 67% de los alumnos no completo la justificación requerida en la pregunta 7, la cual realizaron mediante la definición formal del límite finito de una función real de variable real. Definición que evidencian reconocer en la pregunta 6 (interrelación coherente pero incompleta). Esto es, los alumnos termina su justificación con el establecimiento de una relación entre ε y δ, sin manifestar una interpretación sobre tal relación para la justificación de lo que se requería en la pregunta 7. Otro resultado que es importante mencionar es que el 17% de los alumnos intentan justificar lo requerido en la pregunta 7 utilizando otras formas distintas a la definición formal (tabulación de la función para valores cercanos al valor al cual tiende x en el límite, gráfica de la función o tabulación directa de la función en el valor al cual tiende x en el límite) a pesar que en la pregunta 6 evidencian "conocer" la definición formal. Entonces, en términos del enfoque sobre la comprensión que hace Sierpinska, podríamos decir que un buen número de alumnos tiene una comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, solo en el nivel de *identificación.*

3.2 Análisis cualitativo

Tal como se indicó al iniciar el análisis de nuestros datos, luego de trabajar cuantitativamente con ellos, consideramos importante realizar un análisis más profundo sobre las respuestas obtenidas en el test exploratorio. Por lo cual, estableceremos la configuración epistémica CE (respuestas al test exploratorio dadas por la profesora del curso), las configuraciones cognitivas CC de tres alumnos (tomados al azar y a los cuales entrevistamos) y finalmente contrastaremos la CE con cada CC para comprender las dificultades presentes en la comprensión del concepto del límite real de variable real.

A continuación mostramos la configuración epistémica y las configuraciones cognitivas establecidas. Al término de cada CC citamos algunos comentarios y algunas observaciones que evidencian los contrastes existentes entre estos tipos de configuraciones.

3.2.1 Configuración epistémica (CE)

Configuraciones epistémicas de las soluciones de la profesora

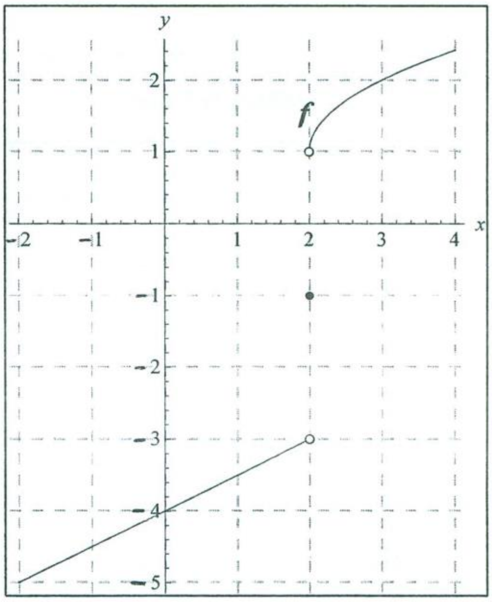
Problema (Pregunta 1: ítems 1.1, 1.2 y 1.3-Test exploratorio)

1. Dadas las gráficas de las funciones f y g, determine los límites que se indican a continuación.
(Nota: en caso sea pertinente, escriba *no existe*)

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ -3

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ 1

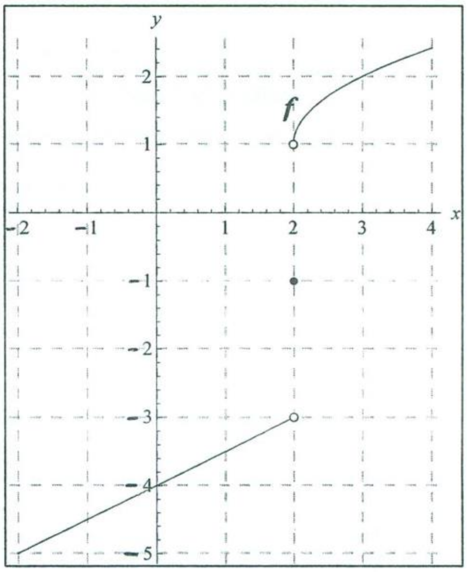
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ $\nexists$



Lenguaje

Simbólico: límites, números, cuantificador de existencia negado.

Gráfico: Gráfica de una función por tramos, discontinua en 2.



Conceptos

Límites laterales (en perspectiva intuitiva, por análisis gráfico)

Límite finito de una función real de variable real.

Proposición

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \text{ no existe}$$

Procedimiento

Observación gráfica-intuitiva del cumplimiento de la propiedad.

Argumento

Tesis: El límite de la función cuando x tiende a 2 no existe.

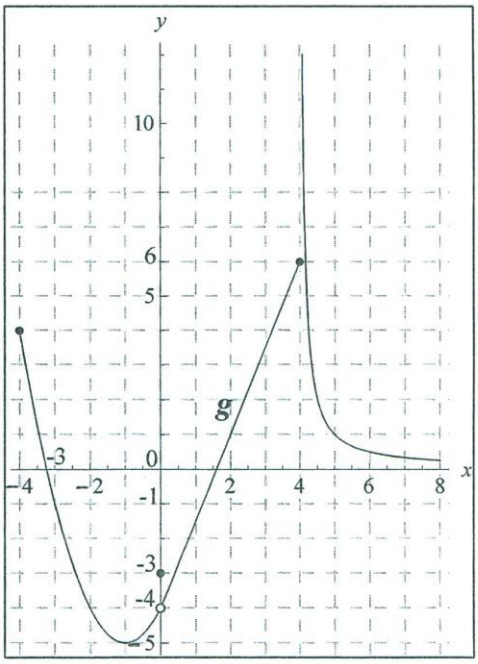
Razón: El límite lateral izquierdo cuando x tiende a 2 es -3 y el límite lateral derecho cuando x tiende a 2 es 1 (son diferentes)

***Problema* (Pregunta 1: ítems 1.4, 1.5 y 1.6 - Test exploratorio)**

$\lim_{x\to 4} g(x) =$ ∄

$\lim_{x\to -3} g(x) =$ -1

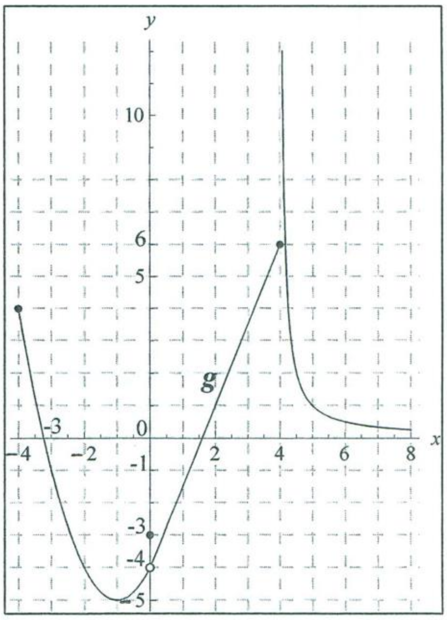
$\lim_{x\to 0} g(x) =$ -4



Lenguaje

Simbólico: límites.

Gráfico: Gráfica de una función por tramos, discontinua en 0 y 4



Conceptos

Límites laterales (en perspectiva intuitiva, por análisis gráfico)

Límite finito de una función real de variable real.

Proposiciones

1. $\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$
2. Si no existe $\lim_{x\to a^-} g(x)$ o $\lim_{x\to a^+} g(x)$, entonces no existe $\lim_{x\to a} g(x)$.

Procedimiento

Observación gráfica-intuitiva del cumplimiento de la propiedad.

Argumentos

<u>Tesis</u>:

i) El límite de la función *g* cuando *x* tiende a 4 no existe;

ii) El límite de la función *g* cuando *x* tiende a -3 es -1;

iii) El límite de la función *g* cuando *x* tiende a 0 es -4.

<u>Razones</u>: Para (i): El límite lateral derecho cuando *x* tiende a 4 no existe.

Para (ii): Los límites laterales, cuando x tiende a -3, son iguales a -1

Para (iii): Los límites laterales, cuando x tiende a 0, son iguales a -4

Problema **(Pregunta 2: ítem a - Test exploratorio)**
2. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ $=\dfrac{(x-3)(x+3)}{\cancel{x-3}}$ a) Halle el dominio de la función f $\mathbb{R}-\{3\}$

Lenguaje
Dominio, función.
Algebraico: Regla de correspondencia de una función.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

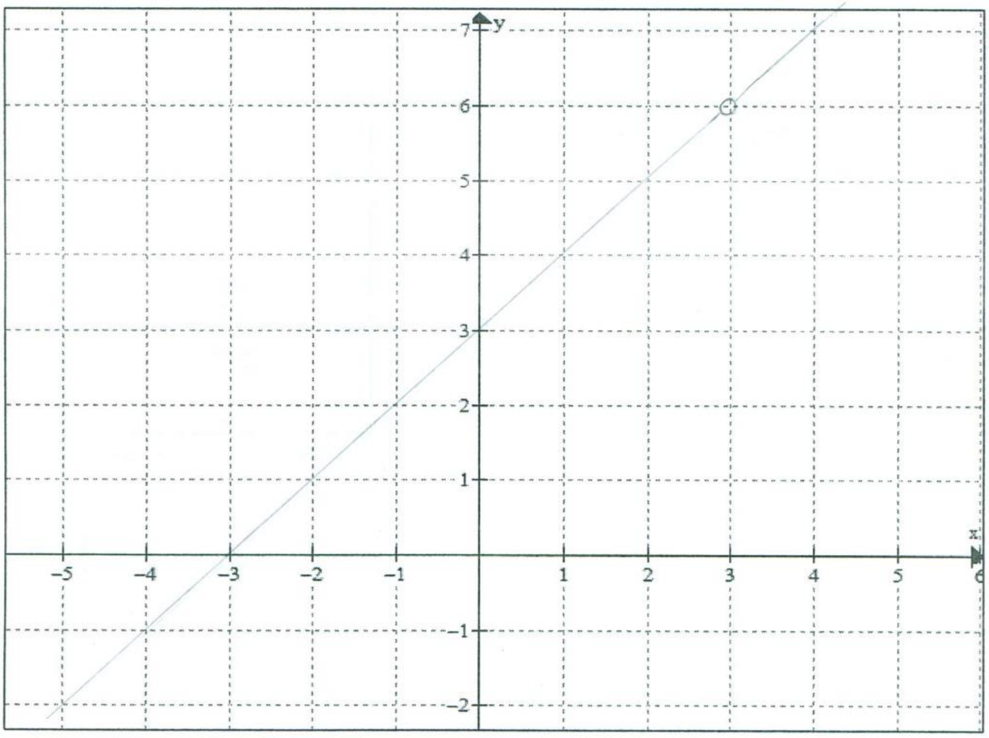
Concepto
Dominio de una función real de variable real.

Proposición
Sean p *y* q *números reales.*

El cociente $\dfrac{p}{q}$ *existe si y solo si* $q\neq 0$

Procedimiento
Análisis algebraico de la regla de correspondencia.

Argumento
Tesis: $Dom\ f=\Re-\{3\}$.
Razón: La función queda bien definida sí $x-3\neq 0$
Por la propiedad.

***Problema* (Pregunta 2:ítem b – Test exploratorio)**
b) Grafique la función f 

Lenguaje
Función, gráfica de función.

Conceptos
Dominio, regla de correspondencia y gráfica de una función real de variable real.
Proposición
Ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano.
Procedimiento
Tabulación.

Argumento
Tesis: La gráfica de la función es una recta cuya ecuación es $y = x + 3$ menos el punto (3;6).
Razón: Por la regla de correspondencia y el dominio de la función.

Problema (Pregunta 2: ítems 2c1, 2c2, 2c3 y 2c4 – Test exploratorio)

c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3) =$ la función no está definida en $x=3$	$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$ 6	$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$ 6	$\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$ 6

Lenguaje
Simbólico: límites
Gráfico: Gráfica de una función con discontinuidad evitable.

Conceptos
Dominio de una función real de variable real.
Límites laterales (en perspectiva intuitiva, por análisis gráfico)
Límite finito de una función real de variable real.

Proposición

$a \notin Dom\, f \Leftrightarrow f(a)$ *no existe*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

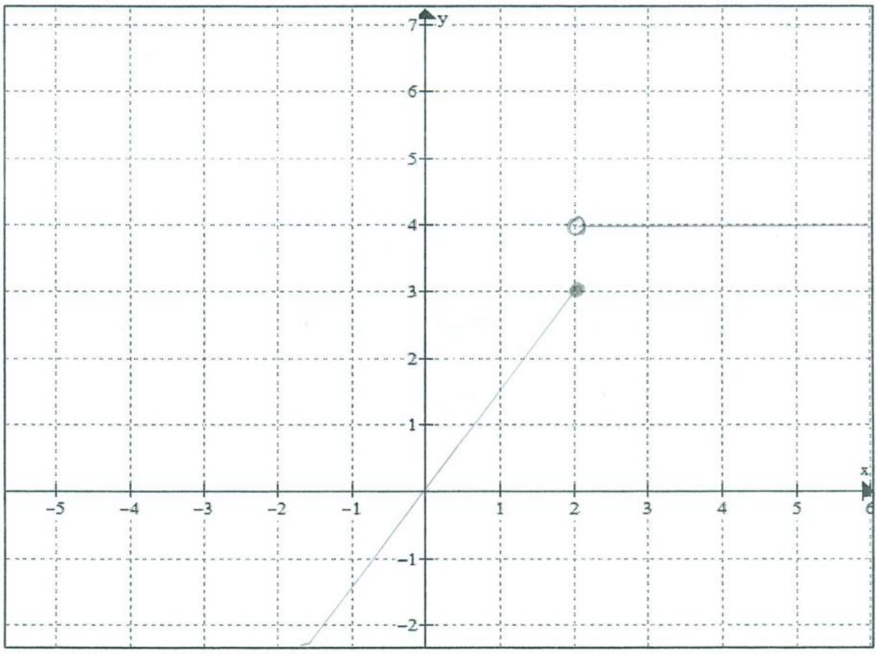
Procedimiento
Observación gráfica-intuitiva del cumplimiento de la propiedad.

Argumento
Tesis: $f(3)$ no existe, el límite de la función cuando x tiende a 3 por la izquierda es 6, el límite lateral de la función cuando x tiende a 3 por la derecha es 6 y el límite de la función cuando x tiende a 3 es 6.
Razón: Por el dominio de la función, el gráfico de la función y la propiedad.

Problema (Pregunta 4 – Test exploratorio)
4. Grafique una función f que cumpla: $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe $\wedge$ $f(2)=3$

Sea:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & x\le 2\\ 4, & x>2\end{cases}$$



Lenguaje
Algebraico: función definida por tramos
Simbólico: límite.
Gráfico: Gráfica de una función por tramos.

Conceptos
Gráfica de una función real de variable real.
Límites laterales (en perspectiva intuitiva, por análisis gráfico)
Límite finito de una función real de variable real.

Proposiciones
1) Ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano.
2) $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)$ *no existe*

Procedimiento
Construcción de la regla de correspondencia de una función por tramos, con discontinuidad inevitable para x = 2. (Una parte lineal y otra constante). Gráfica de la función construida.

Argumento
Tesis: Gráfica de una función donde el límite de la función cuando x tiende a 2 no existe y $f(2)$=3.
Razón: El límite de la función cuando x tiende a 2 por la izquierda es 3, el límite lateral de la función cuando x tiende a 2 por la derecha es 4; en consecuencia el límite de la función cuando x tiende a 2 no existe por la propiedad. Además, en el gráfico se puede observar que $f(2)$ = 3.

***Problema* (Pregunta 5 – Test exploratorio)**
5. Diga si la siguiente proposición es verdadera o falsa: Existe una función f que cumple las siguientes tres condiciones i) $\lim_{x \to a} f(x)$ es un número real ii) $f(a)$ es un número real iii) $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ (X) VERDADERA ( ) FALSA

Lenguaje
Función
Simbólico: límite
Número real

Conceptos
Tabulación de una función real de variable real.
Límite finito de una función real de variable real.

Proposición
Existen funciones tal que $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Procedimiento
Tabulación. Cumplimiento de la propiedad.

Argumento
Tesis: la proposición es verdadera.
Razón: Existen funciones para las cuales el límite de la función cuando x tiende a cierto valor a existe, el valor de la función en a también existe y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Por ejemplo, el caso de la función g de la pregunta 1 cuando $a = 0$.

Problema **(Pregunta 6 (*) – Test exploratorio)**

6. ¿A cuál de las siguientes proposiciones es equivalente $\lim_{x\to 1} f(x)=3$?

(Marque con un aspa la alternativa correcta)

a) $\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0$ tal que si $0<|x-1|<\delta$ entonces $|f(x)-3|<\varepsilon$

b) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que si $0<|x-3|<\delta$ entonces $|f(x)-1|<\varepsilon$

c) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que si $0<|x-1|<\delta$ entonces $|f(x)-3|<\varepsilon$

Lenguaje

Simbólico: límite, épsilon, delta, desigualdad, valor absoluto, cuantificadores.

Conceptos

Límite finito de una función real de variable real.

Definición métrica del límite finito de una función real de variable real.

Proposición

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta<0 \; tal \; que$$

$$si \; x\in Dom\, f \wedge 0<|x-a|<\delta \; entonces \; |f(x)-L|<\varepsilon$$

Procedimiento

Cumplimiento de la propiedad.

Argumento

Tesis: la proposición equivalente es la proposición de la alternativa c.

Razón: $\lim_{x\to 1} f(x)=3$ es equivalente por la definición formal de límite a

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta<0 \; tal \; que \; si \; x\in Dom\, f \wedge 0<|x-1|<\delta$$

$$entonces \; |f(x)-3|<\varepsilon$$

(*) Cabe aclarar que en una versión rigurosa de la equivalencia, debimos considerar que 1 es punto de acumulación del dominio de f y que x es un punto cualquiera del dominio.

***Problema* (Pregunta 7 – Test exploratorio)**

7. ¿Cómo justifica que $\lim\limits_{x\to 1}(5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

$\lim\limits_{x\to 1} (5x-2)=3 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, 0<|x-1|<\delta \wedge x\in\mathbb{R} \Rightarrow |5x-2$

$|5x-5|<\varepsilon$

$5|x-1|<\varepsilon$

observamos que

$5|x-1|<5\delta=\varepsilon$

Por lo tanto, existe $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ tal que

si $0<|x-1|<\delta \wedge x\in\mathbb{R} \Rightarrow |5x-5|<\varepsilon$

Lenguaje
Simbólico: límite.

Conceptos
Límite finito de una función real de variable real.
Definición formal del límite finito de una función real de variable real.

Proposición

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta<0\ tal\ que$$

$$si\ x\in Dom\ f \wedge 0<|x-a|<\delta\ entonces\ |f(x)-L|<\varepsilon$$

Procedimiento
Cumplimiento de la propiedad.

Argumento

<u>Tesis</u>*:* Justificamos mediante la definición formal de límite finito de una función real de variable real.

<u>Razón</u>: $\lim\limits_{x\to 1}(5x-2)=3$ es equivalente por la definición formal de límite a

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta<0\ tal\ que\ si\ 0<|x-1|<\delta\ entonces\ |(5x-2)-3|<\varepsilon$

Mediante lo cual podemos encontrar una relación entre épsilon y delta, esto es, para todo épsilon podemos garantizar la existencia de un delta ya que $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 1}(5x-2)$ no puede ser 3,00001 ni 2,99999 ya que podríamos encontrar un valor menor para épsilon (entonces para delta también) de manera que la función $(5x-2)$ toma valores más cercanos a 3 que 3,00001 y 2,99999 en la vecindad $|(5x-2)-3|<\varepsilon$ cuando x se encuentra en la vecindad $0<|x-1|<\delta$

<u>Observación</u>*:* La demostración que el límite es 3 y el teorema de la unicidad del límite, nos garantizan que el límite no puede ser otro valor.

3.2.2 Configuraciones cognitivas (CC)

Configuraciones cognitivas de las soluciones de Mónica (A_1)

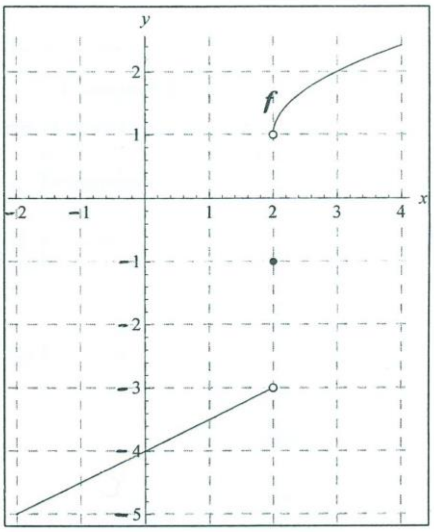
Problema **(Pregunta 1: ítems 1.1, 1.2 y 1.3 -Test exploratorio)**

1. Dadas las gráficas de las funciones f y g, determine los límites que se indican a continuación.
(Nota: en caso sea pertinente, escriba *no existe*)

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$ -5

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$ no existe.

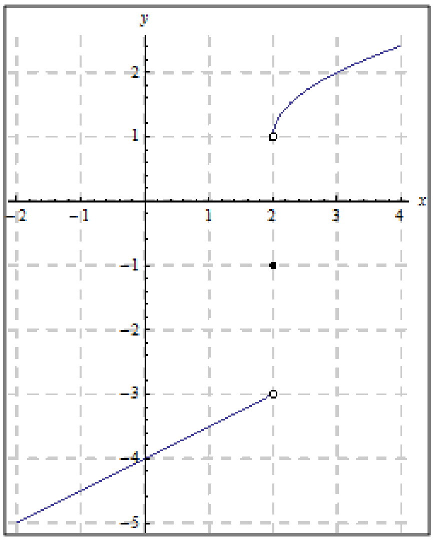
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ [-5,-3>



Lenguaje

Simbólico: límites, números, intervalos, cuantificador de existencia negado.

Gráfico: gráfica de una función



Conceptos

Límites laterales (en perspectiva intuitiva, por análisis gráfico)

Límite finito de una función real de variable real.

Proposiciones (citadas en la entrevista)

1. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(-a)$

2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Procedimiento

Observación gráfica-intuitiva del cumplimiento de las propiedades.

Argumento

Tesis: El límite lateral izquierdo cuando x tiende a 2 es -5. El límite lateral derecho cuando x tiende a 2 no existe y el límite de la función cuando x tiende a 2 es el intervalo
[-5;-3>.

Razones: (Expresadas en la entrevista) El límite cuando x tiende a 2 por la izquierda es -5, pues según el gráfico cuando x es -2 la función es -5. El límite cuando x tiende a 2 por la derecha no existe pues hay un punto abierto en x=2 en el gráfico de la función (señala el tramo del gráfico cuando x toma valores mayores que 2). Sin embargo, en la entrevista se dio cuenta que $f(2) = -1$ y por ello cambió su respuesta al ítem 1.2; así afirmo que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$.

Y el límite de la función cuando x tiende a 2 es el intervalo de [-5;-3> porque cuando x toma valores de -2 a 2, la función toma valores de -5 a -3 según el gráfico.

Observaciones:

Al comparar la CC de A1 con la CE de la pregunta 1 ítems 1.1, 1.2 y 1.3, observamos que las respuestas erradas de la alumna son coherentes con su falta de claridad de los conceptos de límites laterales y su vinculación con el límite finito de una función real de variable real. Las propiedades que usa como argumentos y que se hicieron explícitas en la entrevista, no tienen sustento y difieren completamente de las propiedades de la CE.

Comentario:

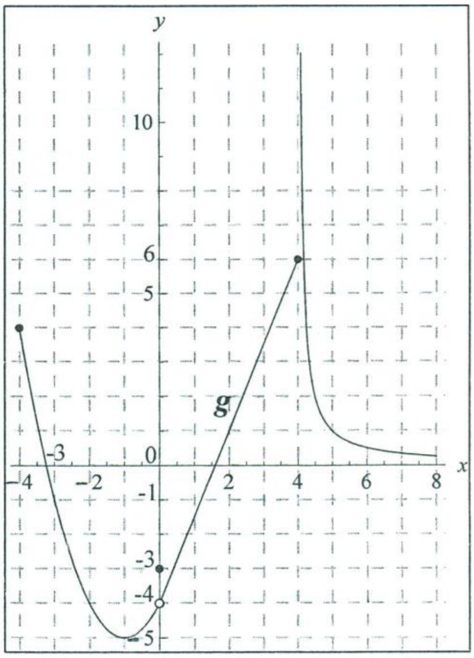
La falta de comprensión de los conceptos de límites laterales y del límite finito de una función real de variable real lleva a la alumna a "fabricar" propiedades ante el requerimiento de resolver un problema específico que involucra tales conceptos.

***Problema* (Pregunta 1: ítems 1.4, 1.5 y 1.6 - Test exploratorio)**

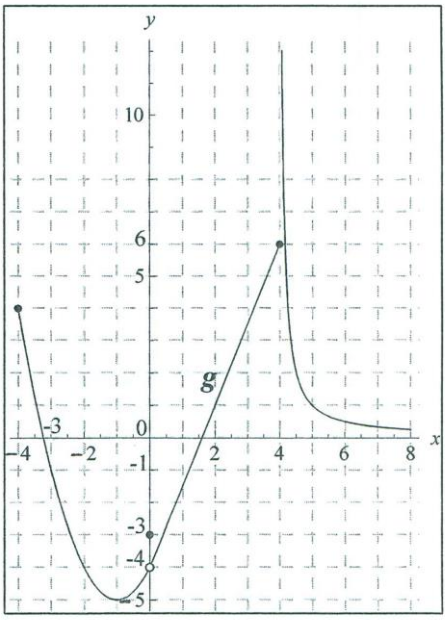
$\lim\limits_{x\to 4} g(x) =$ 6

$\lim\limits_{x\to -3} g(x) =$ 0

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) =$ no exist.



Lenguaje
Simbólico: límites, números.
Gráfico: Gráfica de la función.



Concepto
Límite finito de una función real de variable real.

Proposición (citada en la entrevista)

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Procedimiento
Observación gráfica-intuitiva del cumplimiento de la propiedad.

Argumentos

<u>*Tesis:*</u>

i) El límite de la función *g* cuando *x* tiende a 4 es 6;

ii) El límite de la función *g* cuando *x* tiende a -3 es 0;

iii) El límite de la función *g* cuando *x* tiende a 0 no existe.

<u>*Razones*</u>: (Expresadas en la entrevista)

Para (i): La función evaluada en 4 es 6 (esto de la gráfica).

Para (ii): La función evaluada en -3 es 0. Sin embargo, en la entrevista se dio cuenta de la gráfica que $g(-3) = -1$ por lo cual cambio su respuesta al ítem 1.4

Para (iii): Del gráfico la alumna indica que el punto (0;-4) está abierto y que el punto (0;-3) no se sabe si es parte de la gráfica de la función g por lo cual, el límite de la función no existe cuando *x* tiende a 0.

Observación:

Al comparar la CC de A1 con la CE de la pregunta 1 ítems 1.4, 1.5 y 1.6, observamos que las respuestas erradas de la alumna son coherentes con su falta de claridad sobre el concepto de límite finito de una función real de variable real. La propiedad que utiliza como argumento y que se hizo explícita en la entrevista, no tiene sustento y difiere totalmente de las propiedades de la CE.

Comentarios:

1. La falta de comprensión del límite finito de una función real de variable real lleva a la alumna a "fabricar" una propiedad ante el requerimiento de resolver un problema específico que involucra tal concepto.

2. Se evidencia que la alumna no comprende la relación que existe entre los límites laterales y el límite de una función cuando x tiende a cierto valor a, ya que en cierto momento de la entrevista para los ítems 1.1, 1.2 y 1.3 de la pregunta 1, la alumna reconoció la existencia de la relación entre estos conceptos; sin embargo, luego cuando trabaja los ítems 1.4, 1.5 y 1.6 de la misma pregunta no toma en cuenta tal relación.

Problema **(Pregunta 2: ítem a - Test exploratorio)**
2. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ $\qquad \dfrac{(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}}$ a) Halle el dominio de la función f $x \neq 3 \qquad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

Lenguaje
Dominio, función.
Algebraico: Regla de correspondencia de una función.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

Concepto
Dominio de una función real de variable real.
Proposición
Sean p y q números reales.

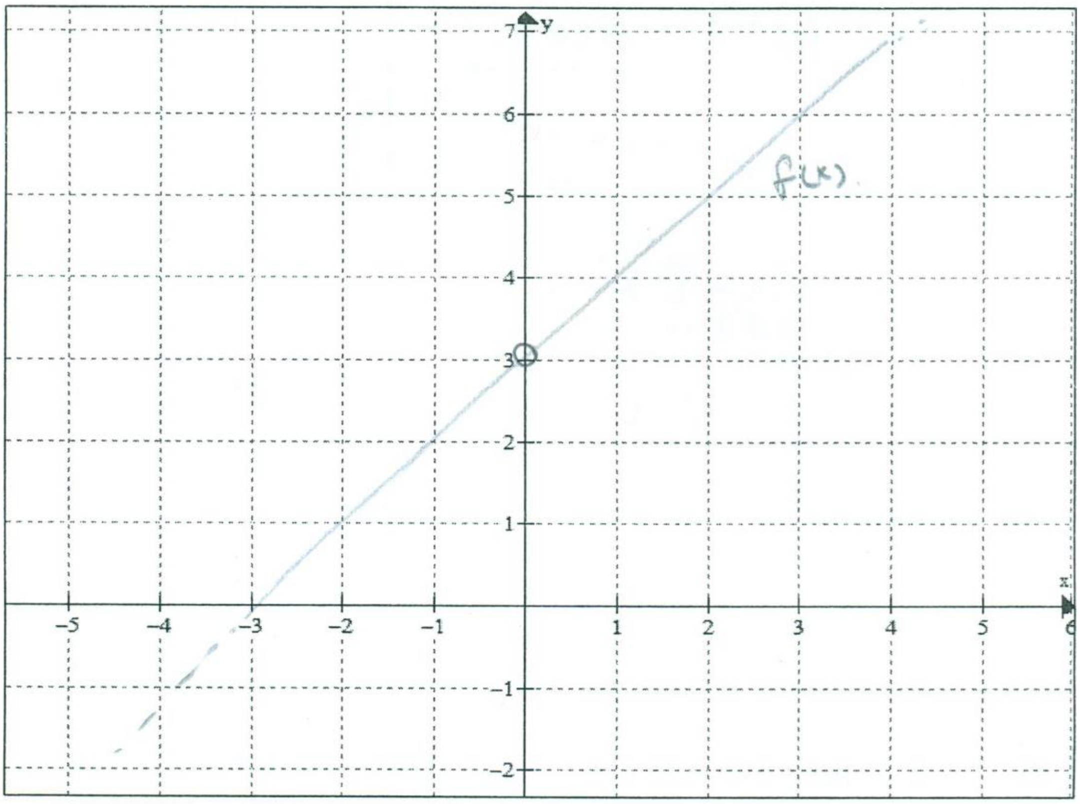
El cociente $\dfrac{p}{q}$ *existe si y solo si* $q \neq 0$

Procedimiento
Análisis algebraico de la regla de correspondencia.

Argumento
Tesis: $Dom\ f = \Re - \{3\}$.
Razón: (Expresada en la entrevista)
Porque el valor de la función en $x=3$ no existe.

***Problema* (Pregunta 2: ítem b - Test exploratorio)**

b) Grafique la función f



Lenguaje
Función, gráfica de función.

Gráfico: Plano Cartesiano, punto en el plano.

Conceptos
Dominio, regla de correspondencia y gráfica de una función real de variable real.

Proposición

Ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano.

Procedimiento
Tabulación.

Argumento
Tesis: La gráfica de la función es una recta cuya ecuación es $y = x + 3$ menos el punto (0;3).

Razón: (Expresada en la entrevista)
La función no existe en 3. Sin embargo, durante la entrevista la alumna noto que el par ordenado que se debe extraer de la recta que representa a la función es el (3;6) y no el (0;3). Por lo cual, cambio su respuesta e indico que la gráfica correcta sería la recta que se graficó sin el punto (3;6).

Problema **(Pregunta 2: ítems c1, c2, c3 y 2c4 – Test exploratorio)**

c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3) =$ ∅	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ 0	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ 6	$\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ 6

Lenguaje
Simbólico: límites, conjunto vacío.
Gráfico: Gráfica de una función.

Conceptos
Dominio de una función.
Regla de correspondencia de una función.
Límites laterales (en perspectiva intuitiva, por análisis gráfico)
Límite finito de una función real de variable real.

Proposiciones (citadas en la entrevista)

1) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(-a)$

2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

3) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ *no existe*

Procedimiento
Observación del dominio de la función.
Observación de la regla de correspondencia de la función.

Argumento

Tesis: $f(3)$ no existe, el límite de la función cuando x tiende a 3 por la izquierda es 0, el límite lateral de la función cuando x tiende a 3 por la derecha es 6 y el límite de la función cuando x tiende a 3 es 6.

Razones: (Expresadas en la entrevista)

Ítem c1: No existe el valor de la función en 3 porque si evalúo la función en 3, en la regla de correspondencia, no existiría (por lo cual, utiliza el símbolo del vacío ya que es la forma en que la alumna representa el que no existe tal valor).

Ítem c2: La función evaluada en -3 es 0. Durante la entrevista, la alumna al observar la gráfica de la función noto que se había equivocado y cambio su respuesta por no existe. Argumentando que el límite de la función cuando x tiende a 3 por la izquierda no existe pues si evaluamos la función en 3 esto no existe.

Ítem c3: La función evaluada en 3 no existe.

Ítem c4: Si los límites laterales no son iguales, entonces el límite cuando x tiende a 3 no existe.

Observación:

Al comparar la CC de A1 con la CE de la pregunta 2 ítems a, b y c, observamos que las respuestas erradas de la alumna son coherentes con su falta de claridad sobre el concepto de límite finito de una función real de variable real. Las propiedades que utiliza para argumentar sus respuestas y que se hicieron explícitas en la entrevista, no tienen sustento y difiere totalmente de las propiedades de la CE.

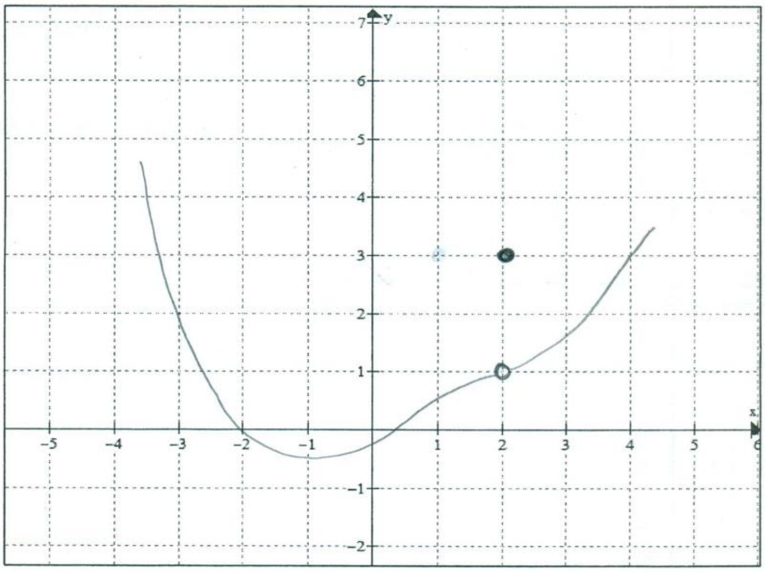
Comentarios:

1. La ubicación de un par ordenado en el Plano Cartesiano no se maneja adecuadamente. Además de la interpretación del dominio de una función en el gráfico de la misma.
2. Se evidencia que la alumna no comprende el límite lateral izquierdo de una función. Puesto que, en cierto momento de la entrevista, para el ítem c.2 de la pregunta 2 la alumna explicó que el límite de la función cuando x tiende a 3 por la izquierda es 0 debido a que según la gráfica que realizo para dicha función, el valor de esta en -3 es 0. Este mismo error en la comprensión del límite lateral izquierdo de una función lo evidencio en el ítem 1.1 de la pregunta 1.

Configuración cognitiva de las soluciones de César (A2)

Problema (Pregunta 4 – Test exploratorio)

4. Grafique una función f que cumpla: $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe $\wedge$ $f(2) = 3$



Lenguaje
Simbólico: límite.
Gráfico: Gráfica de una función, ubicación de punto en el plano cartesiano.

Conceptos
Gráfica de una función real de variable real.
Límite finito de una función real de variable real.

Proposición
Ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano.

Procedimiento
Elaboración de la gráfica de una función en el plano cartesiano, de modo que cumpla las condiciones dadas.

Argumento

Tesis: Gráfica de una función f tal que $f(2) = 3$ y cuyo límite no existe, cuando x tiende a 2.

Razón: (Expresada en la entrevista)

El alumno imagina una función definida algebraicamente en dos partes. Una de ellas determina la gráfica de las curvas y la otra el punto (2;3) ("quizás por un denominador (x-2) en la parte algebraica"). Explicó que la gráfica de la función indicaba que en la "primera función" (refiriéndose a la unión de las curvas mostradas en la gráfica) $f(2)$ no existía y por eso era abierto en el punto (2; $f(2)$) y luego para la "otra función" (refiriéndose al punto (2; $f(2)$) sí existe, por lo cual representó el punto (2;3). Sin embargo, al pedirle que explique por qué las condiciones no se cumplen para la función representada, se dio cuenta de su error afirmando que para esa función el límite si existía y era 1.

Observación:

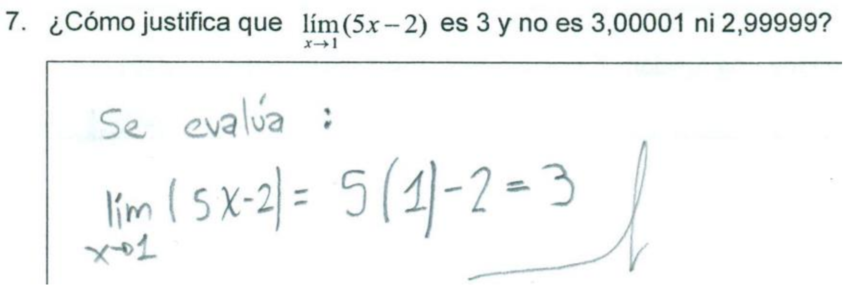
Al comparar la CC de A2 con la CE de la pregunta 4, observamos que la respuesta errada del alumno es coherente con su falta de claridad sobre la no existencia del límite finito de una función real de variable real al graficar una función cuyo límite existe, cuando su variable tiende a 2.

Comentarios:

1. Se advierte la predominancia de un pensamiento algebraico para resolver el problema pedido; sin embargo esto está presente también en la CE.
2. El alumno a pesar de notar que para la función que grafico el límite de tal función cuando x tiende a 2 existía y era 1, no supo construir una gráfica en la que se cumplan las condiciones requeridas en la pregunta. Lo cual evidencia su falta de comprensión sobre la existencia del límite finito de una función real de variable real.

Configuración cognitiva de las soluciones de Anthony (A3)

Problema (Pregunta 7 – Test exploratorio)


7. ¿Cómo justifica que $\lim\limits_{x\to 1}(5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

Se evalúa :

$\lim\limits_{x\to 1}(5x-2) = 5(1)-2 = 3$

Lenguaje
Simbólico: límite, números reales.

Conceptos
Límite finito de una función real de variable real.
Proposición
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
Procedimiento
Cumplimiento de la propiedad.

Argumento
Tesis: $\lim\limits_{x\to 1}(5x-2) = 5(1)-2$
Razón: (Expresada en la entrevista)
Se justifica que el límite de la función es 3 y no es 2.99999 o 3.00001 porque si evaluamos la función 5*x*-2 en *x*=1 esto resulta ser 3 por lo cual, el límite de dicha función cuando *x* tiende a 1 es 3.

Observación:

Al comparar la CC de A3 con la CE de la pregunta 7, observamos que la respuesta errada del alumno es coherente con su falta de claridad sobre la definición formal del límite finito de una función real de variable real. La propiedad que utiliza para argumentar su respuesta y que se hicieron explícitas en la entrevista, no tiene sustento y difiere totalmente de la propiedad dada en la CE.

Comentarios:

1. El caso nos muestra que el alumno, a pesar de reconocer correctamente la definición formal del límite finito de una función real de variable real (pregunta 6), no demuestra comprensión de tal definición. Esto se evidencia al manifestar que para encontrar el número real que es el límite de cierta función, es suficiente con evaluar la función en el valor al cual tiende la variable *x*.

2. La falta de comprensión de la definición formal del límite finito de una función real de variable real, lleva al alumno a “fabricar” una propiedad (incorrecta) ante el requerimiento de justificar el valor de un límite específico.

3.3 Comentarios finales

Como en el análisis cuantitativo hecho podemos identificar el tipo de interrelación en el que ubicamos las soluciones de cada estudiante, es posible examinar la coherencia entre esta ubicación con el análisis cualitativo, a partir de las comparaciones entre CE y CC. Así, tenemos que:

- En el caso de la alumna A1: Sus soluciones se ubican, en la interrelación 1, como interrelación denominada “interrelación por error con énfasis conceptual”, lo cual es coherente con el análisis de las CC de tales soluciones de A1, pues las proposiciones y argumentos dados difieren completamente de los establecidos en la CE correspondiente. Asimismo, las soluciones de A1 consideradas en la interrelación 4 como “interrelación incoherente” condice con el análisis de las CC de tales soluciones de A1, pues las proposiciones y argumentos dados difieren completamente de los establecidos en la CE correspondiente.

- En el caso del alumno A2: Sus soluciones se ubican, en la interrelación 2, como interrelación denominada “interrelación por error con énfasis conceptual”, lo cual es coherente con el análisis de las CC de las soluciones de A2, pues las proposiciones y argumentos dados difieren totalmente de los establecidos en la CE correspondiente.

- En el caso del alumno A3: Sus soluciones se ubican, en la interrelación 5, como interrelación denominada “interrelación incoherente”, lo cual condice con el análisis de la CC de la solución de A3 (adicionalmente, se revisó la respuesta marcada en la pregunta 6 por A3), pues las proposiciones y argumentos dados difieren completamente de los establecidos en la CE correspondiente.

Capítulo 4. Conclusiones y Recomendaciones

4.1 Conclusiones

1. Los objetivos se han cumplido, pues construimos un conjunto de problemas relacionados con el límite finito de una función real de variable real, considerando representaciones gráficas, algebraicas y simbólicas, cuyas soluciones nos permitieron identificar y tipificar errores en la comprensión de la definición de este concepto matemático. Tales errores fueron analizados empleando los criterios de comprensión dados por Sierpinska, A. (1990) en los resultados del análisis cuantitativo de los datos y teniendo en cuenta las configuraciones epistémicas y cognitivas realizadas.

   Cabe mencionar que los errores encontrados en esta investigación confirman parte de los errores previsibles enunciados por Fernández, J. (2010).
2. Respecto a nuestra pregunta de investigación, *¿cuáles son los errores relacionados con la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, de alumnos de un primer curso de Cálculo?* Podemos afirmar que *existen diversos tipos de errores (conceptuales, simbólicos y gráficos) en la comprensión de los alumnos sobre la definición del límite finito de función real de variable real.* Basados en las configuraciones epistémicas y cognitivas, y en las categorías de comprensión de Sierpinska, A. (1990).
3. Las respuestas a algunas preguntas del test exploratorio evidencian que algunos conceptos previos vinculados a la definición de límite finito de una función real de variable real, no son comprendidos en el nivel de *síntesis*, categoría de comprensión dada por Sierpinska, A. (1990) con la consiguiente deficiencia en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real. Específicamente nos referimos a los conceptos de función (dominio, regla de correspondencia y gráfico) y número real. Lo dicho está en la línea de análisis propuesto por Sierpinska, A. (1987), que considera las nociones de función y número real como fuente de obstáculos epistemológicos sobre el concepto de límite.
4. Los alumnos no vinculan claramente la existencia de un límite con la existencia e igualdad de los límites laterales. Esto se deduce de la interrelación 1, establecida en nuestro análisis cuantitativo, pues la mayoría de alumnos cae en contradicciones con sus respuestas a los ítems 1.1, 1.1 y 1.3 con su respuesta al ítem 1.4.

5. Los alumnos no tienen una comprensión clara, a nivel de generalización o síntesis, sobre el límite finito de una función real de variable real. Afirmamos esto por los resultados de la interrelación 2, que evidencia las dificultades en la construcción del gráfico de una función, a pesar de haber analizado el gráfico dado de una función que cumplía condiciones similares a las que le piden graficar.
6. Mediante el análisis cuantitativo que se hizo para las respuestas encontradas en la pregunta 3 del test exploratorio, encontramos que el 89% de alumnos determinaron con éxito el límite finito de una función real de variable real usando métodos algebraicos, lo cual hace ver lo limitado del manejo del concepto de límite, por los errores al responder otras preguntas del test exploratorio dadas en el registro gráfico o simbólico.
7. Confirmamos que el uso de configuraciones cognitivas y epistémicas nos ayudaron a develar los conceptos, las proposiciones y los argumentos que "fabrican" los alumnos ante su falta de comprensión del límite finito de una función real de variable real.
8. En cuanto a la metodología de investigación seguida en nuestro análisis de datos, fue fundamental el haber realizado un análisis cuantitativo y cualitativo, puesto que nos permitió analizar de forma más exhaustiva los errores en la comprensión de la definición del límite finito de una función real de variable real.

4.2 Recomendaciones

A continuación en base a lo concluido en esta investigación, presentamos algunas recomendaciones:

1. Sugerimos se explore con mayor detenimiento la comprensión de los conceptos previos necesarios para un adecuado aprendizaje del concepto de límite finito de una función real de variable real. En particular, los de número real y función.
2. En la enseñanza del concepto de límite, tener en cuenta los errores conceptuales y de argumentación advertidos, para que en las clases se prevean este tipo de confusiones. Así, es fundamental enfatizar en el planteamiento de preguntas mediante diversos tipos de representación algebraico, gráfico y simbólico.
3. No inducir a los alumnos a pensar que se ha comprendido el concepto de límite finito de una función real de variable real, por reconocer la definición formal dada en términos de épsilon y delta o por ser capaces de obtener límites de funciones desarrollando algoritmos o artificios algebraicos. Esto es particularmente importante en el tipo de problemas que se ponen en las evaluaciones sobre este tema, generalmente con énfasis en lo operativo.

4. Sugerimos diseñar una secuencia didáctica, para la enseñanza y aprendizaje del límite finito de una función real de variable real, teniendo en cuenta el test exploratorio y los errores encontrados en este trabajo.

Finalmente consideramos que todo lo trabajado en esta investigación puede ser punto de partida o referencia para nuevas investigaciones, que se planteen responder a las siguientes interrogantes:

¿Cuáles son los factores que más influyen para que se originen los errores encontrados en esta investigación, en la comprensión del concepto de límite finito de una función real de variable real?

¿Cuáles son los errores asociados a la comprensión de límites en el infinito o límites infinitos? ¿Existe relación entre estos errores y los errores encontrados en esta investigación?

¿Cuáles son los errores asociados a la comprensión de límite de una función de varias variables?

Referencias

Amílcar, O. (2013). El diseño de una secuencia didáctica sobre límite Un proceso de toma de decisiones. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 77-88.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. (Tesis de doctorado en Didáctica de las Ciencias -Didáctica de las Matemáticas). Universidad de Valladolid. España.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4(3), pp. 219-256.

Fernández, J. (2010). Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de funciones. Recuperado de http://www.ugr.es/~lrico/MasterSec_files/Fernandez%20Plaza%20TFM.pdf

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22(2.3), 237-284.

Godino, J (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Recuperado de http://www.matesup.utalca.cl/modelos/articulos/fundamentos.pdf

Godino, J., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sistemas%20semioticos_%2024junio2009.pdf

Hernández, R., Fernandez, C. y Baptista, M. (2010). Metodología de la investigación, México.

Leithold, L. (1992). *El Cálculo con Geometría Analítica.* México, D.F.:HARLA.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* (Tesis de doctorado en Ciencias). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima Perú.

Molfino, V., Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias.* 5(1) 27-41.

Rojas Garzón, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. (Tesis de doctorado Interinstitucional en Educación). Universidad distrital Francisco José de Caldas, Bogotá Colombia.

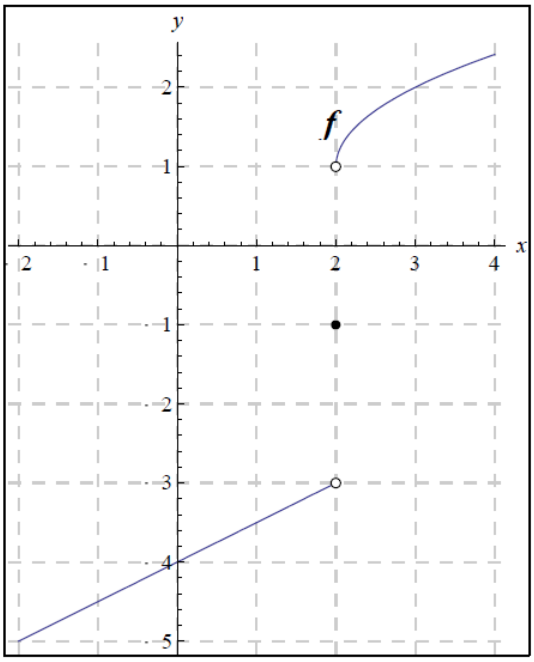
Anexos

Anexo 1: Test exploratorio

TEST EXPLORATORIO

Nombre y Apellidos: ____

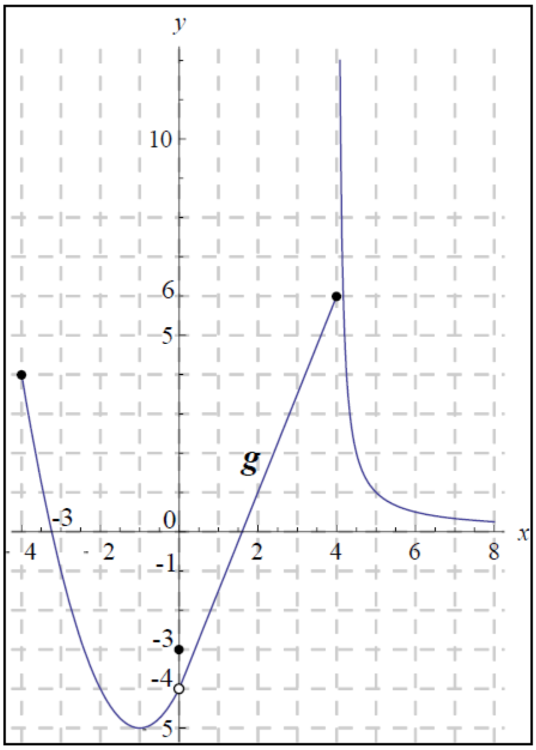
1. Dadas las gráficas de las funciones f y g, determine los límites que se indican a continuación.
(Nota: en caso sea pertinente, escriba *no existe*)



$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$



$\lim\limits_{x \to 4} g(x) =$

$\lim\limits_{x \to -3} g(x) =$

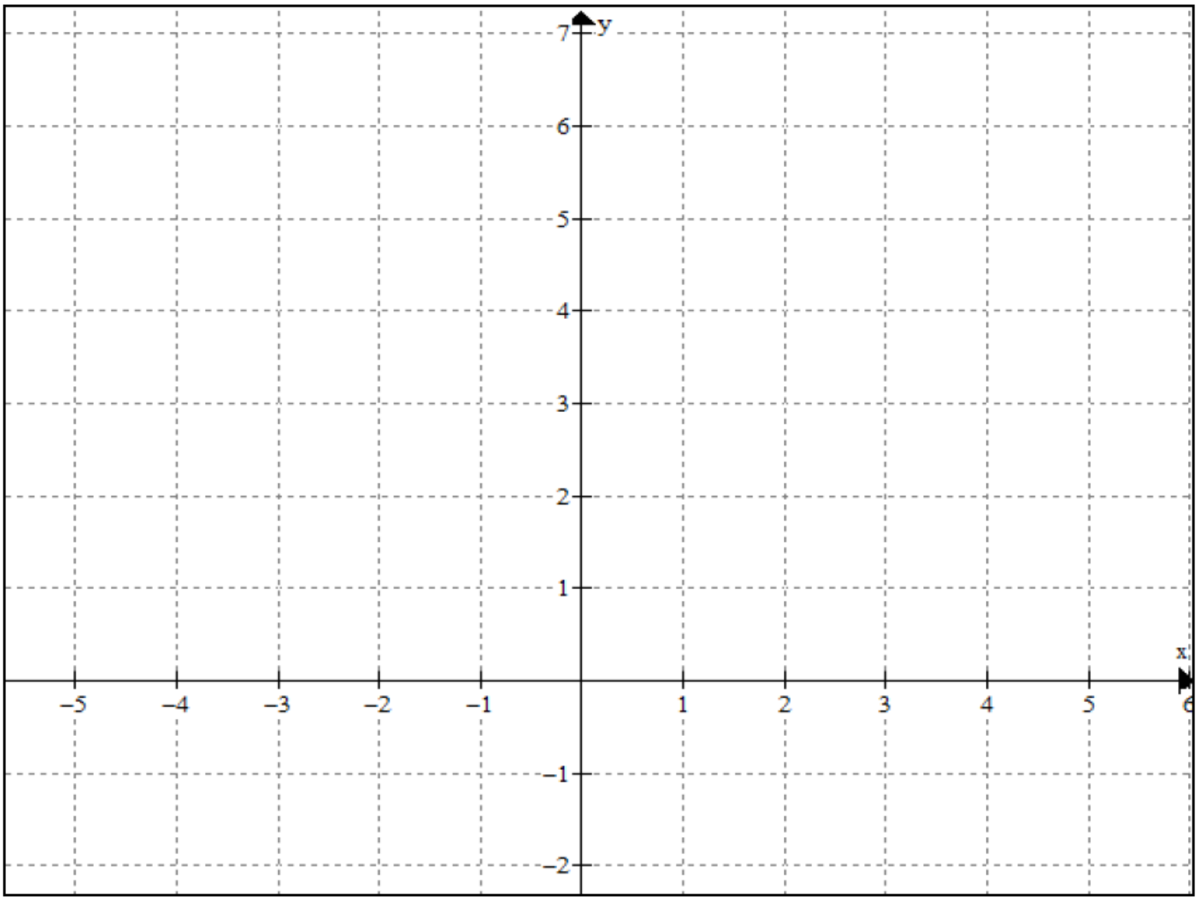
$\lim\limits_{x \to 0} g(x) =$

Continúa…..

2. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

a) Halle el dominio de la función f

b) Grafique la función f



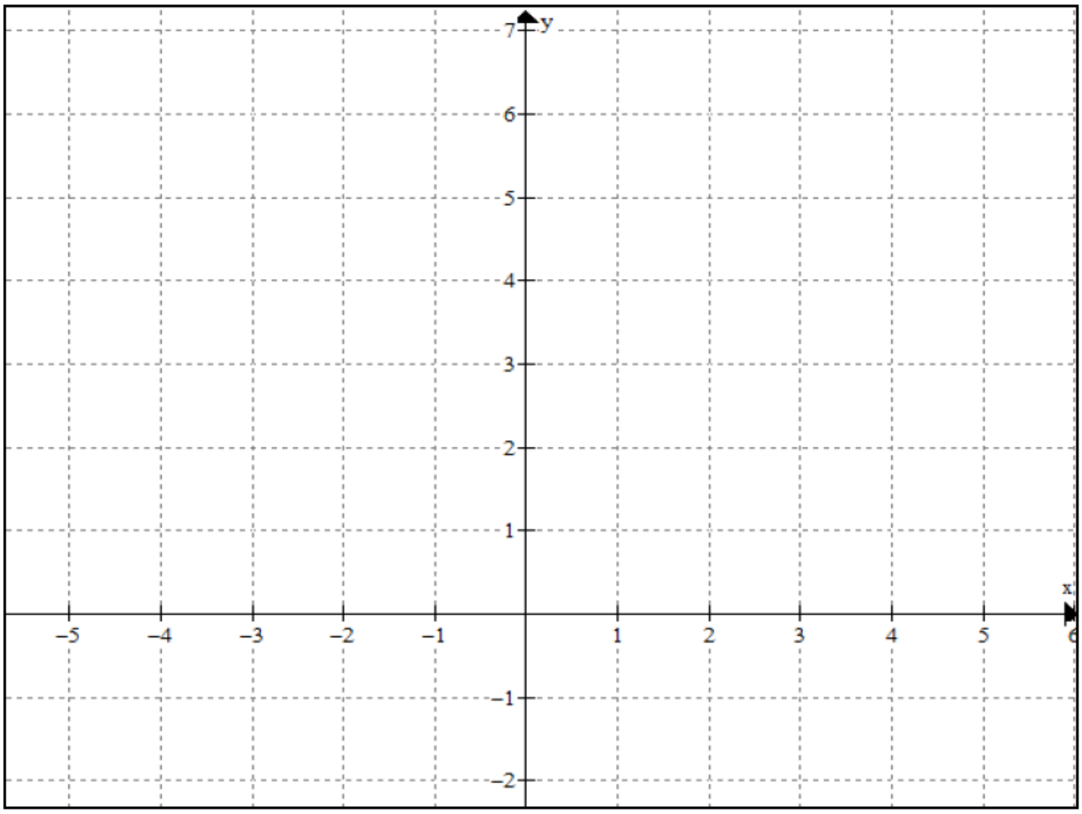
c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3)=$	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=$	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=$

Continúa…..

3. Calcule (***mostrando su procedimiento***) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x(x^2-1)}{x+1}$

4. Grafique una función f que cumpla: $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe $\wedge$ $f(2)=3$



5. Diga si la siguiente proposición es verdadera o falsa:

   Existe una función f que cumple las siguientes tres condiciones

   i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ es un número real

   ii) $f(a)$ es un número real

   iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

   ( ) VERDADERA ( ) FALSA

Continúa…..

6. ¿A cuál de las siguientes proposiciones es equivalente $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$?

   (Marque con un aspa la alternativa correcta)

   a) $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x-1| < \delta \text{ entonces } |f(x)-3| < \varepsilon$

   b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x-3| < \delta \text{ entonces } |f(x)-1| < \varepsilon$

   c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x-1| < \delta \text{ entonces } |f(x)-3| < \varepsilon$

7. ¿Cómo justifica que $\lim_{x \to 1}(5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

Muchas gracias por su participación en esta investigación.

Anexo 2: Triangulación de respuestas

Triangulación de respuestas

Para procesar los datos obtenidos luego de haber aplicado el test exploratorio a estudiantes de un primer curso de Cálculo, se consideró adecuado tipificar las respuestas para cada pregunta que conforma el test exploratorio.

En este documento sólo mostramos la tipificación de las respuestas de algunas de las preguntas del test, para las cuales consideramos pertinente tener otro punto de vista en la clasificación que se le asignaría a la respuesta dada por el alumno en base a la tipificación establecida.

A continuación, presentamos la tipificación para las respuestas de las preguntas seleccionadas del test exploratorio, luego mostramos algunas de las respuestas dadas por los alumnos a dichas preguntas, las cuales se han repetido en otros test; y finalmente, presentamos un recuadro que contiene el tipo de respuesta que considera el investigador correspondería a la respuesta dada por el alumno según la tipificación establecida para la pregunta y en el cual se le pedirá a Ud. indicar el tipo de respuesta que le asignaría según la tipificación establecida. Adicionalmente este recuadro cuenta con una columna por si desea realizar algún comentario respecto a la respuesta analizada.

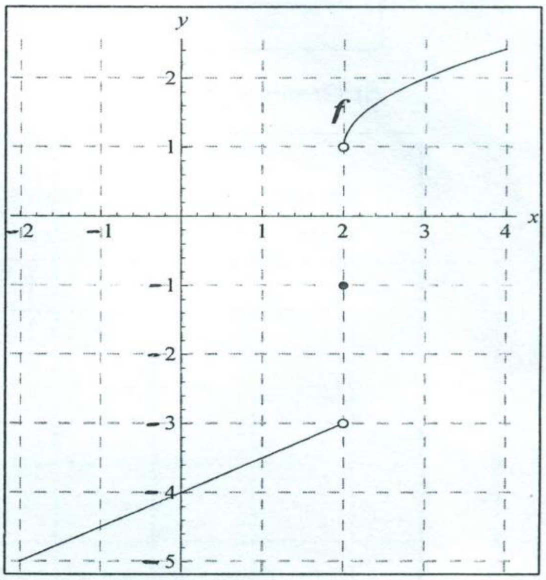
Tipificación de las respuestas para la pregunta 1

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Respondió correctamente.	a
Error de simbología	Cuando el resultado del límite lateral izquierdo corresponde al límite lateral derecho y viceversa. Este error sólo se puede dar en los ítems I y II.	s
Error conceptual	Cuando el límite que determina no es coherente con sus respuestas a otros ítems que se encuentran relacionados con este; o no es coherente con el comportamiento de la función según el gráfico.	c
Error gráfico	Cuando la respuesta es cero al ítem 1.5, porque asumimos que predomina una mala correspondencia con la representación gráfica dada.	g
No respondió	Dejo en blanco.	b

Nota: las partes de la pregunta 1 se han nominado con números romanos para diferenciarlas en el análisis de la respuesta.

Respuesta 1

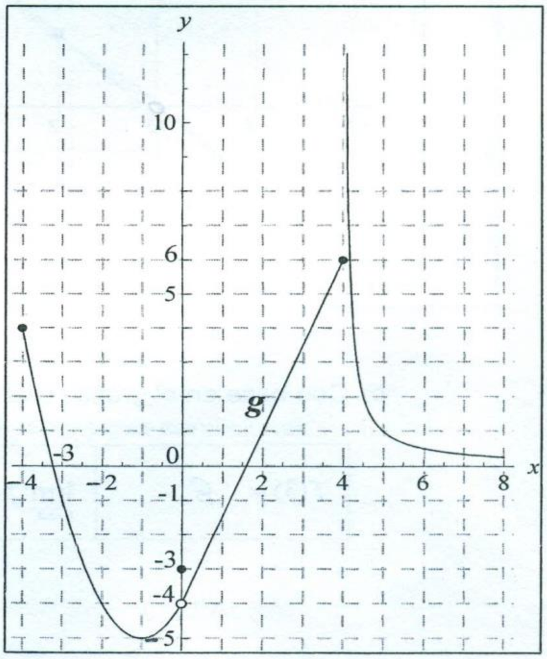
1. Dadas las gráficas de las funciones f y g, determine los límites que se indican a continuación.
(Nota: en caso sea pertinente, escriba *no existe*)



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ -3

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ 1

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ -1



$\lim\limits_{x\to 4} g(x) =$ 6

$\lim\limits_{x\to -3} g(x) =$ -1

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) =$ -4

Continúa…..

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que correspondería según considere, para cada parte de la pregunta 1, en el caso de la respuesta 1 mostrada, en base a la tipificación de respuestas establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
I	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
II	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
III	Error conceptual	Error conceptual	
IV	Error conceptual	Error conceptual	
V	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
VI	Respuesta correcta	Respuesta correcta	

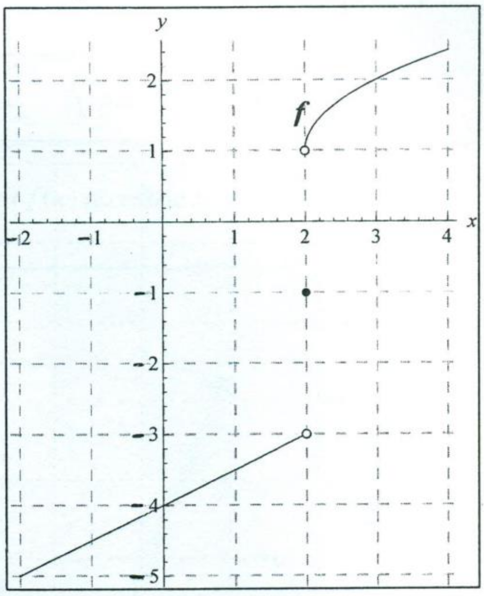
Respuesta 2

1. Dadas las gráficas de las funciones f y g, determine los límites que se indican a continuación.
(Nota: en caso sea pertinente, escriba *no existe*)

$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ No existe

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ No existe

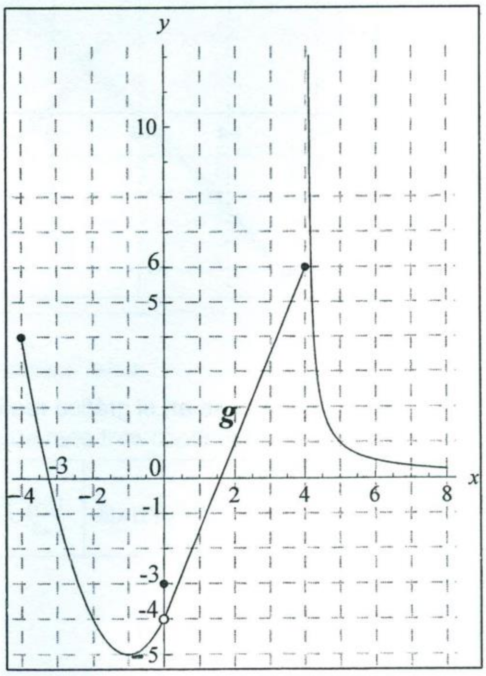
$\lim_{x\to 2} f(x) =$ -1



$\lim_{x\to 4} g(x) =$ 6

$\lim_{x\to -3} g(x) =$ 0

$\lim_{x\to 0} g(x) =$ -3



Continúa.....

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que correspondería para cada parte de la pregunta 1 según considere Ud. en el caso de la respuesta 2 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
I	Error conceptual	Error conceptual	
II	Error conceptual	Error conceptual	
III	Error conceptual	Error conceptual	
IV	Error conceptual	Error conceptual	
V	Error gráfico	Error gráfico	También puede ser un error conceptual (desconocimiento del concepto)
VI	Error conceptual	Error conceptual	

<u>Tipificación de las respuestas para la pregunta 2</u>

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Respondió correctamente	a
Respuesta correcta pero incoherente	Determinó correctamente el límite requerido pero esta respuesta no es coherente con sus respuestas (incorrectas) a otros ítems de la misma pregunta.	ci
Error gráfico	Grafica la recta correspondiente pero no excluye del gráfico el par (3;6) habiendo calculado bien el dominio.	g
Error conceptual	Cuando determinó incorrectamente el dominio de la función o determinó incorrectamente el límite requerido en base al gráfico realizado para la función o cuando realizó cualquier otro gráfico que sugiere comportamientos no afines.	c
Respuesta incorrecta pero coherente.	Cuando la respuesta es incorrecta, pero es coherente con las respuestas incorrectas dadas a otros ítems de la misma pregunta.	ic
No respondió	Dejó en blanco.	b

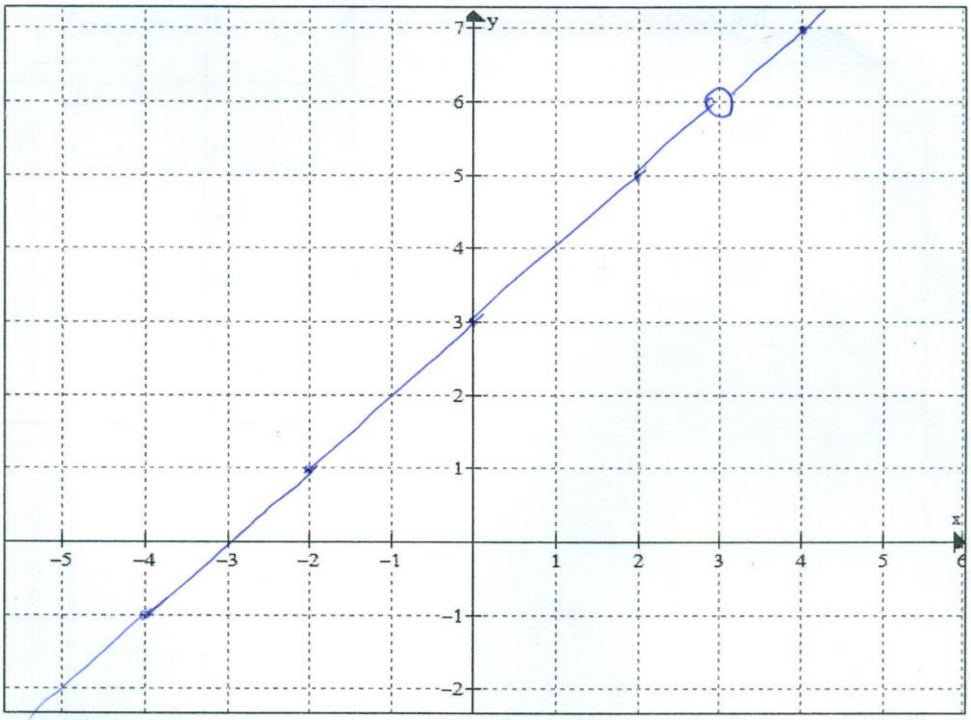
Respuesta 3

2. Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ $= \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

a) Halle el dominio de la función f

Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$

b) Grafique la función f



c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3) = \nexists$	$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 6$	$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 6$	$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \nexists$

Continúa…..

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que correspondería para cada ítem de la pregunta 2 según considere Ud. en el caso de la respuesta 3 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta (en el caso del ítem c, las partes que lo conforman, se las ha denominado con c1, c2, c3 y c4).

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
a	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
b	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
c1	Respuesta correcta	Respuesta correcta	La notación $f(3)$ es incorrecta, puesto que $f(x)$ se usa para x en el dominio de f. Es la imagen de 3 mediante la función f.
c2	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
c3	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
c4	Error conceptual	Error conceptual	

Respuesta 4

2. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

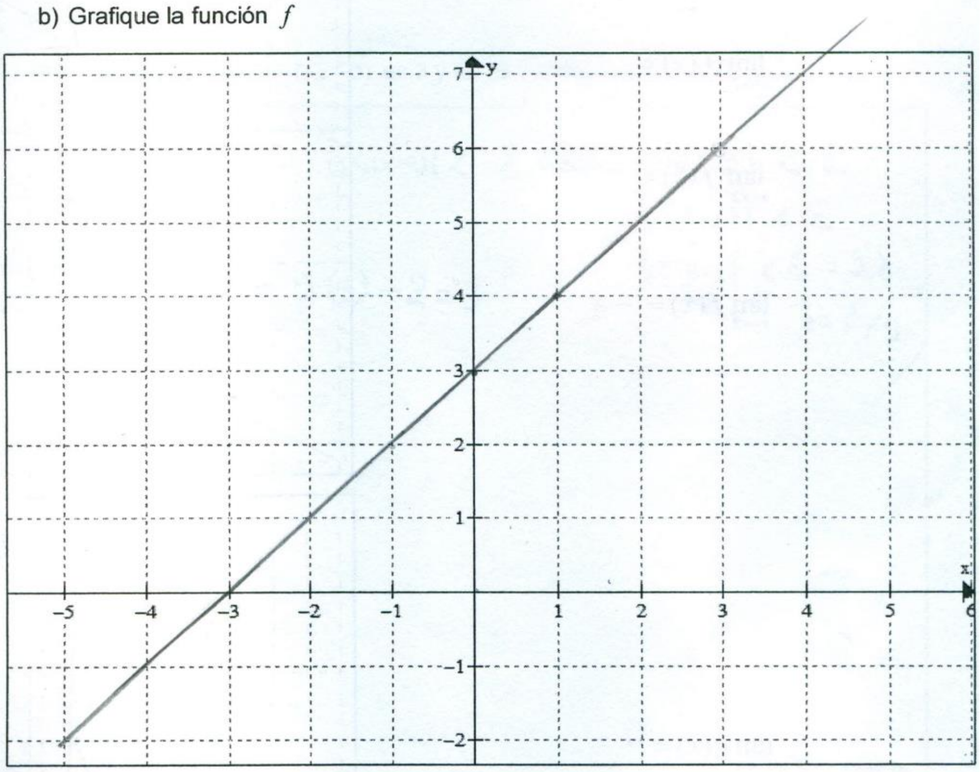
a) Halle el dominio de la función f

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$f(x)=\frac{(x-3)\,(x+3)}{(x-3)}=x+3$$

$D = x\in\mathbb{R}-\{3\}$

b) Grafique la función f



c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3)=3+3=6$	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6$	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-}(x+3)=6$

Continúa.....

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que correspondería para cada ítem de la pregunta 2 según considere Ud. en el caso de la respuesta 4 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
a	Respuesta correcta	Error conceptual	La simplificación hecha requiere que x sea diferente de 3. Por tanto, 3 no está en el dominio de la función.
b	Respuesta incorrecta pero coherente	Respuesta incorrecta pero coherente	Arrastra error
c1	Respuesta incorrecta pero coherente	Respuesta incorrecta pero coherente	
c2	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
c3	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
c4	Respuesta correcta	Respuesta correcta	

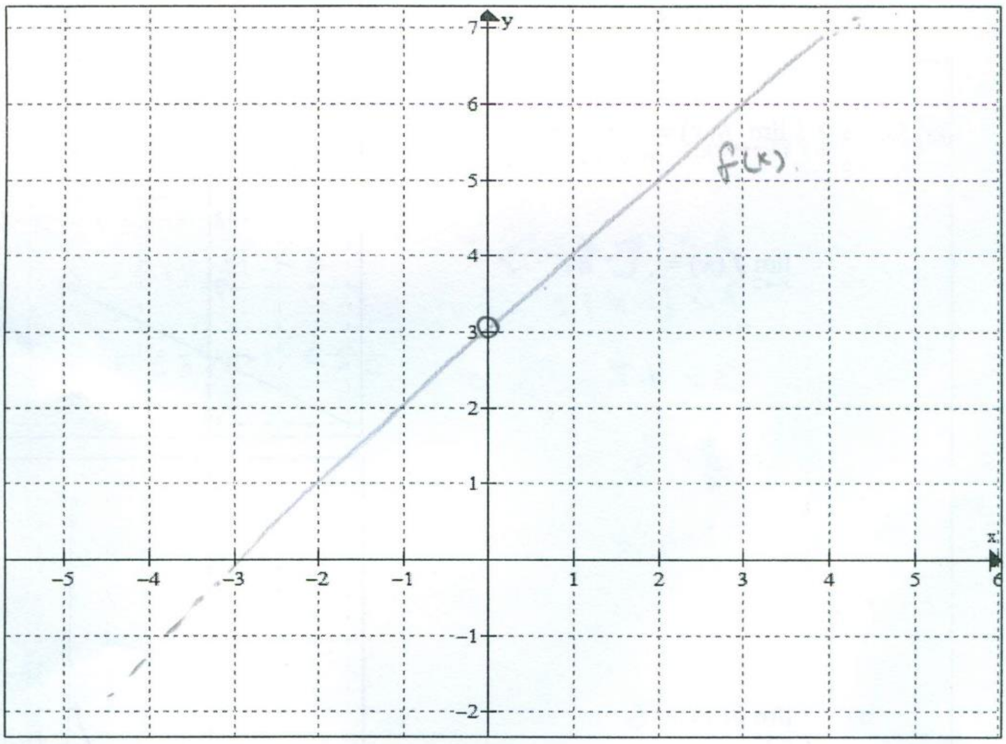
Respuesta 5

2. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ $\dfrac{(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}}$

a) Halle el dominio de la función f

$x \neq 3$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

b) Grafique la función f



c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3)=$ ∅	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$

Continúa…..

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que correspondería para cada ítem de la pregunta 2 según considere Ud. en el caso de la respuesta 5 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
a	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
b	Error gráfico	Error gráfico	
c1	Respuesta correcta pero incoherente	Error conceptual	Confunde el conjunto vacío con la negación del cuantificador existencia.
c2	Error conceptual	Error conceptual	Al parecer según el gráfico realizado por el alumno para la función, interpreta mal la simbología de los límites laterales. Por ejemplo, el $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ parece interpretarlo como $\lim_{x\to -3} f(x)$. Lo mismo sucede para el otro límite lateral
c3	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
c4	Respuesta correcta pero incoherente	Respuesta correcta	

Respuesta 6

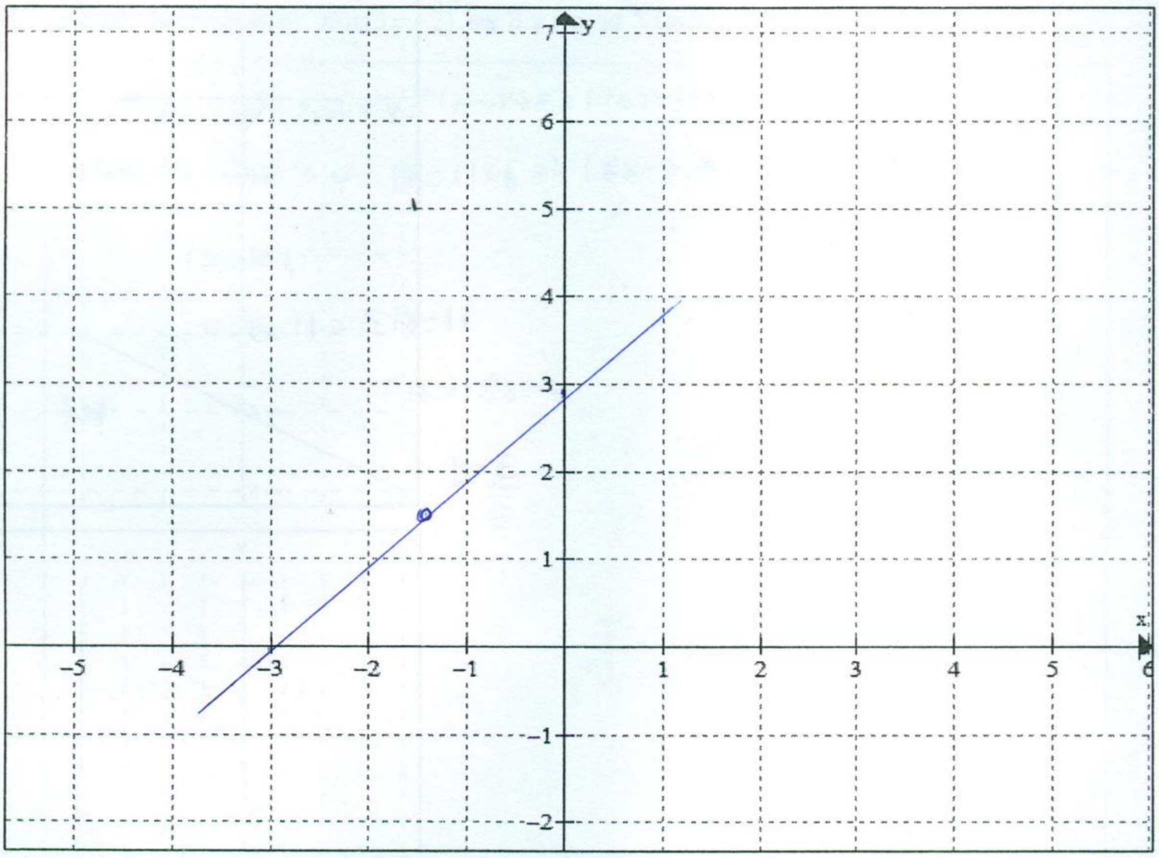
2. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

a) Halle el dominio de la función f

$\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} \geq 0$ $x-3 \neq 0$ $x \neq 3$ -3 $+3$ $\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}$

~~$x \in \mathbb{R}-\{3\}$~~

b) Grafique la función f



c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3)=$ 6	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=$	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=$

Continúa.....

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que correspondería para cada ítem de la pregunta 2 según considere Ud. en el caso de la respuesta 6 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
a	Respuesta correcta	Respuesta correcta	Se consideró respuesta correcta porque se muestra el análisis adecuado para el dominio.
b	Error gráfico	Error gráfico	
c1	Respuesta incorrecta pero coherente	Respuesta incorrecta pero coherente	
c2	No respondió	No respondió	
c3	No respondió	No respondió	
c4	No respondió	No respondió	

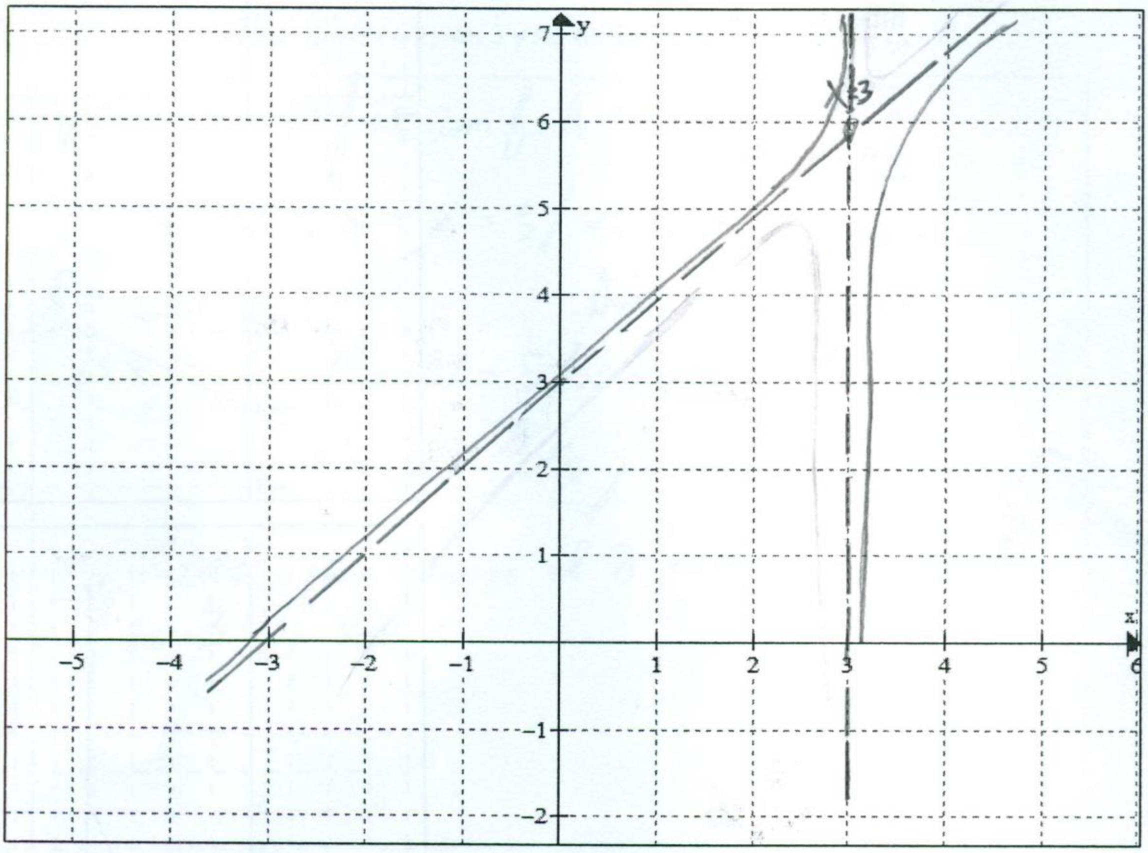
Respuesta 7

2. Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ $x + 3$

a) Halle el dominio de la función f

$x \in \mathbb{R} - \{3\}$

b) Grafique la función f



c) Con base en el gráfico realizado anteriormente, complete el siguiente cuadro:

$f(3) =$ No existe	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 6$	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 6$	$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$

Continúa.....

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que correspondería para cada ítem de la pregunta 2 según considere Ud. en el caso de la respuesta 7 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

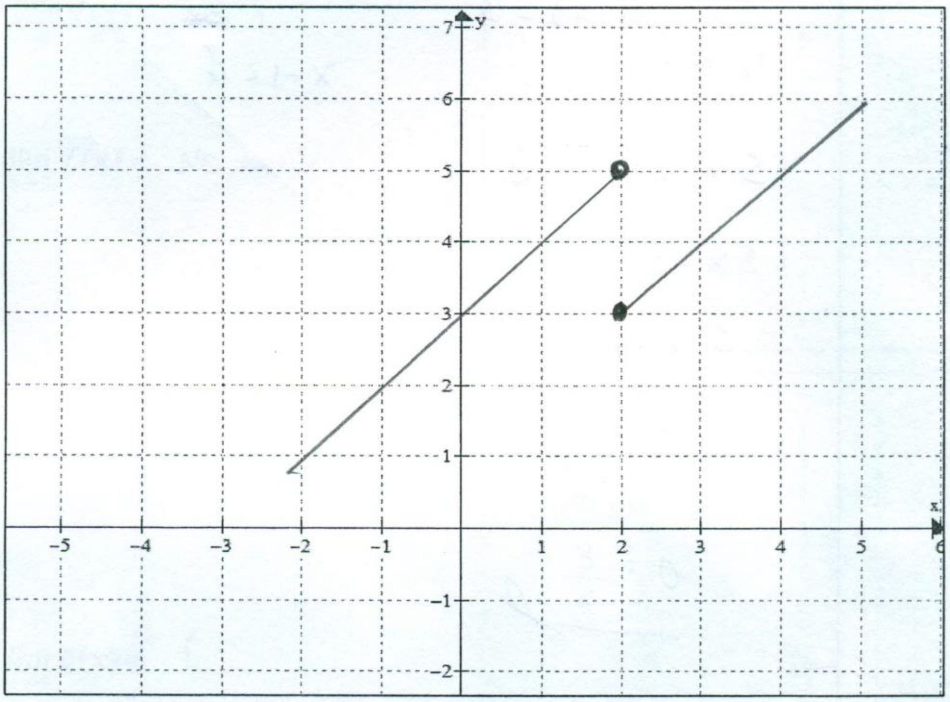
Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
a	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
b	Error gráfico	Error gráfico	
c1	Respuesta correcta	Respuesta correcta	
c2	Respuesta correcta pero incoherente	Respuesta correcta pero incoherente	
c3	Respuesta correcta pero incoherente	Respuesta correcta pero incoherente	
c4	Respuesta correcta pero incoherente	Respuesta correcta pero incoherente	

<u>Tipificación de las respuestas para la pregunta 4</u>

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Grafica una función que cumple con las dos condiciones dadas.	a
Error conceptual	Grafica una función que no cumple ninguna o alguna de las dos condiciones dadas.	c
No respondió	Dejo en blanco	b

Respuesta 8

4. Grafique una función f que cumpla: $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe $\wedge$ $f(2)=3$

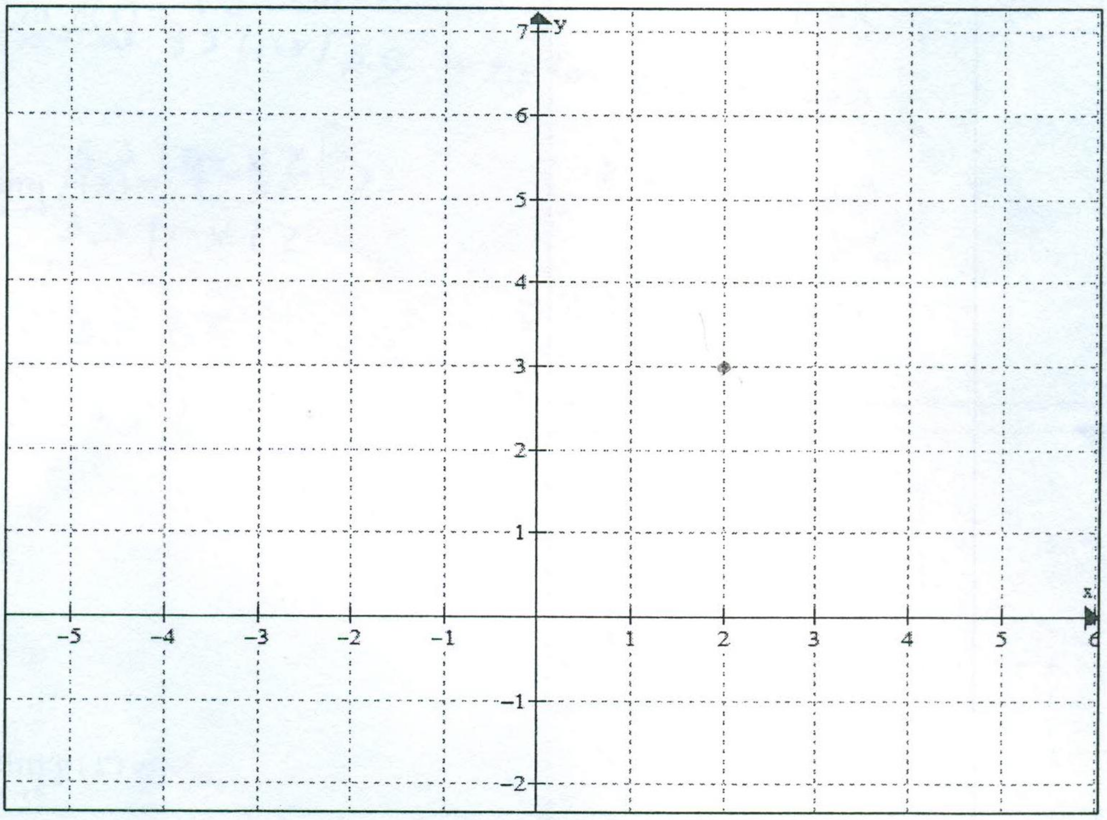


Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que considera Ud. correspondería para la respuesta 8 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
4	Respuesta correcta	Respuesta correcta	

Respuesta 9

4. Grafique una función f que cumpla: $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe $\wedge$ $f(2)=3$

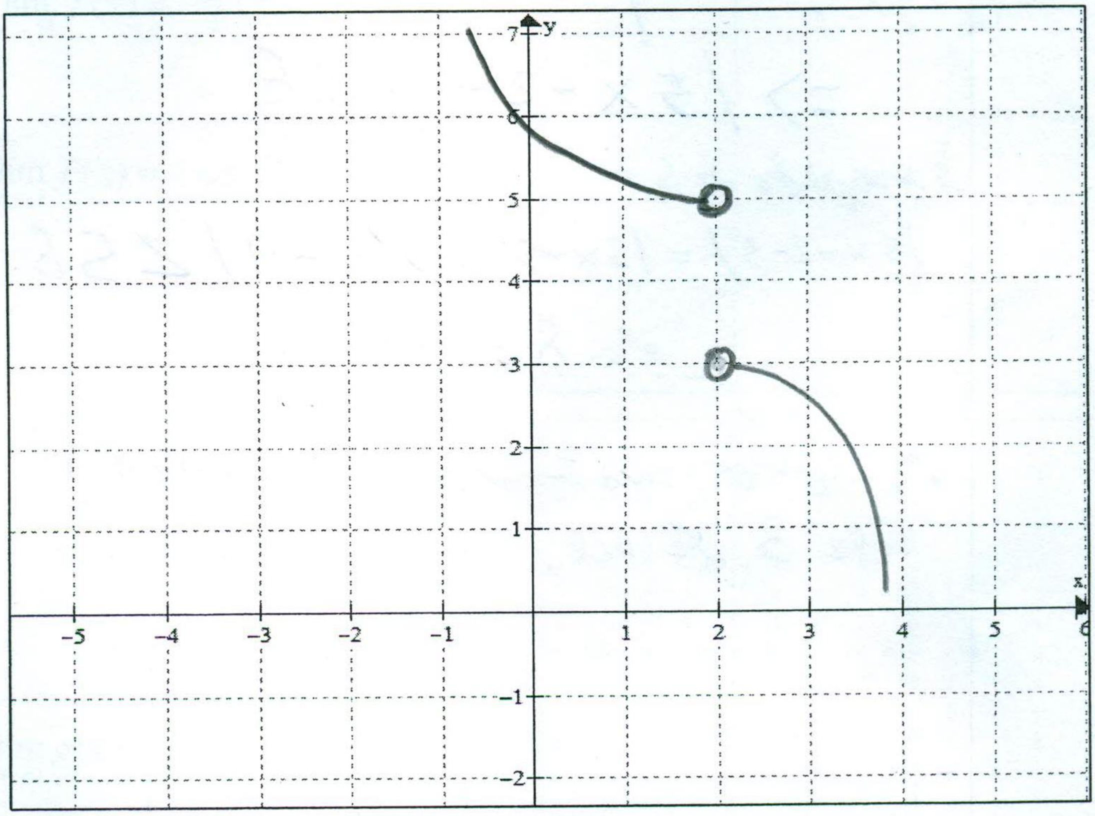


Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que considera Ud. correspondería para la respuesta 9 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
4	Respuesta correcta	Error conceptual	La primera condición requiere que en el dominio de *f* debe haber valores de *x* tan cerca como se quiera de 2; es decir, 2 debe ser punto de acumulación del dominio de *f*.

Respuesta 10

4. Grafique una función f que cumpla: $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe $\wedge$ $f(2)=3$



Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que considera Ud. correspondería para la respuesta 10, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

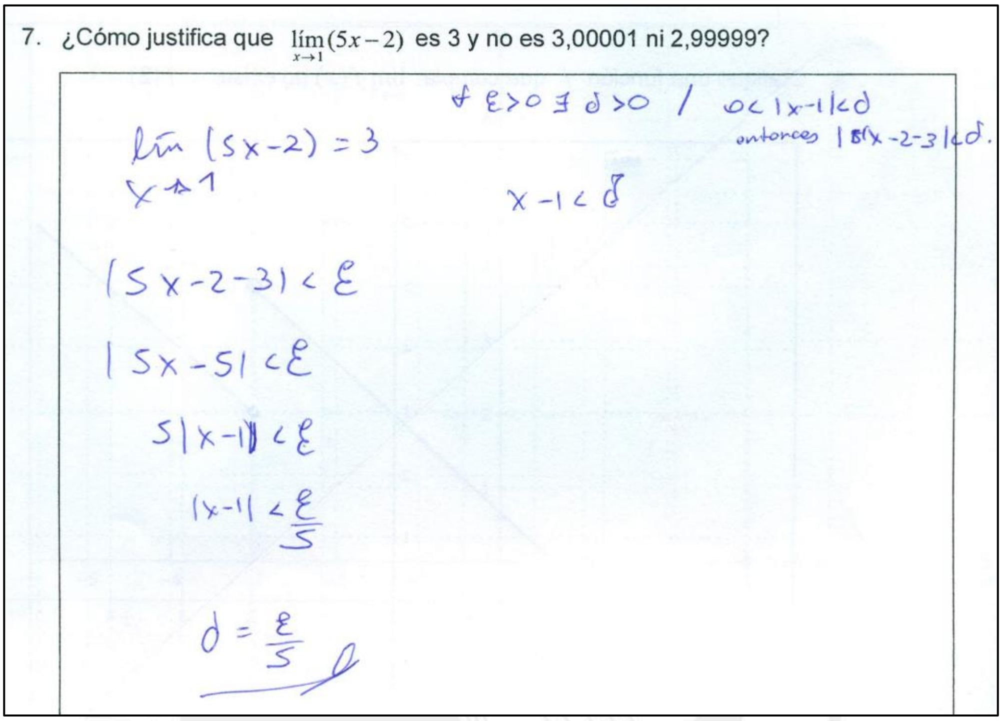
Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
4	Error conceptual	Error conceptual	

<u>Tipificación de las respuestas para la pregunta 7</u>

Tipo de respuesta	Descripción del tipo de respuesta	Notación
Respuesta correcta	Plantea la definición formal de $\lim_{x\to 1} 5x - 2 = 3$, luego establece la relación $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ e interpreta por qué esto implica que el límite dado sea 3 o da un argumento válido.	a
Error conceptual	Justifica que el límite es 3 reemplazando el valor de *x* por 1 en la función dada.	c
Respuesta incompleta	Cuando establece la relación $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ pero no se	f

	percibe la interpretación de la implicación presente en la definición formal.	

Respuesta 11



7. ¿Cómo justifica que $\lim_{x\to 1}(5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ / \ 0<|x-1|<\delta$

ontonces $|5(x-2-3|<\delta$.

$\lim_{x\to 1}(5x-2)=3$

$x-1<\delta$

$|5x-2-3|<\varepsilon$

$|5x-5|<\varepsilon$

$5|x-1|<\varepsilon$

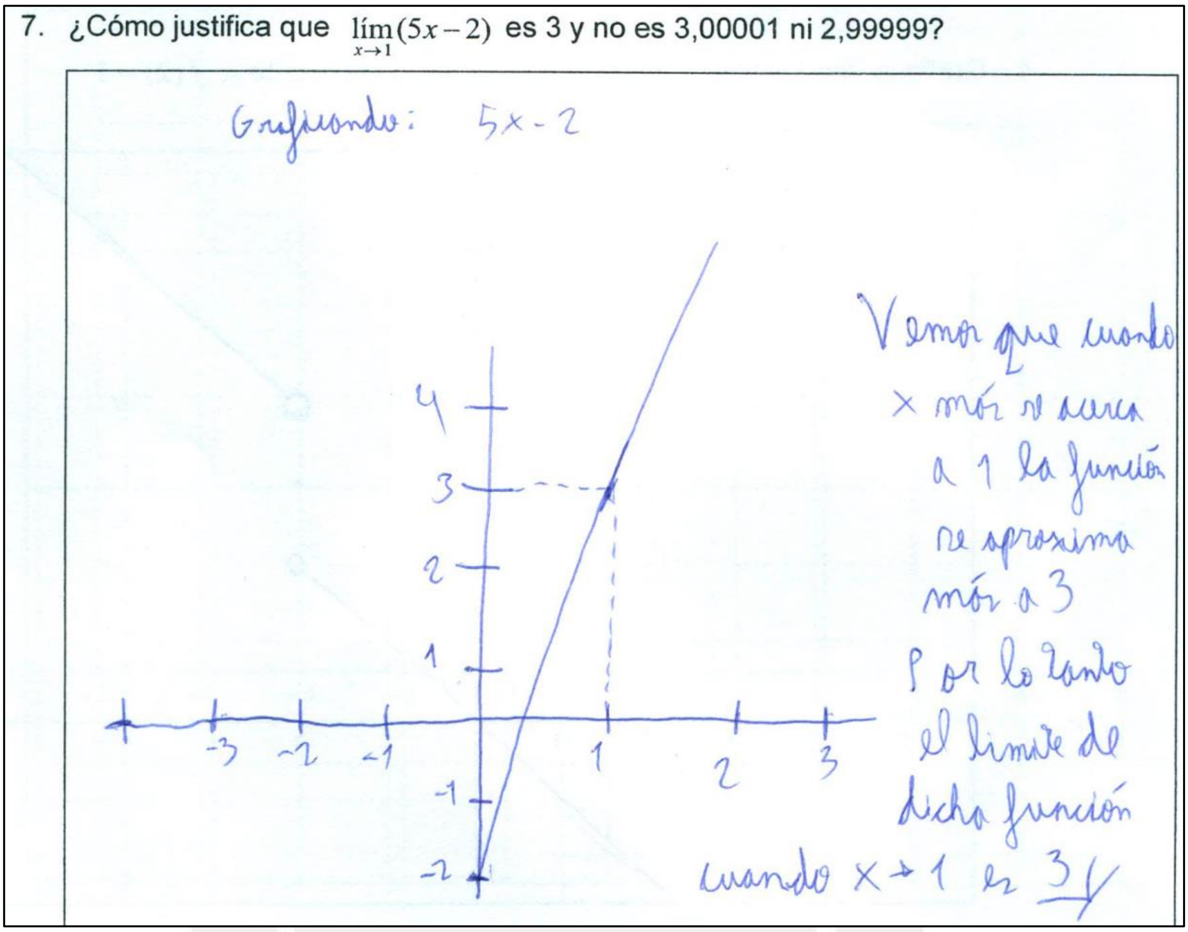
$|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$

$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que considera Ud. correspondería para la respuesta 11 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
7	Respuesta incompleta	Respuesta incompleta	

Respuesta 12



7. ¿Cómo justifica que $\lim_{x \to 1}(5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

Graficando: 5x - 2

Vemos que cuando x más se acerca a 1 la función se aproxima más a 3 Por lo tanto el límite de dicha función cuando $x \to 1$ es 3

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que considera Ud. correspondería para la respuesta 12 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	**Tipo de respuesta asignado**	**Tipo de respuesta según su consideración**	**Comentario**
7	Respuesta incompleta	Respuesta incompleta	Faltaría la tipificación: respuesta intuitiva

Respuesta 13

7. ¿Cómo justifica que $\lim_{x\to 1}(5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, x\in Dom\, f \wedge 0<|x-1|<\delta$

$\Rightarrow |5x-2-3|<\varepsilon$

Búsqueda de δ:

$|5x-2-3| = |5x-5| = 5|x-1| < 5\delta = \varepsilon$

$\therefore \delta = \varepsilon/5$

$\therefore$ Como encontramos al δ cuando el límite es 3 es real.

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que considera Ud. correspondería para la respuesta 13 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
7	Respuesta correcta	Respuesta correcta	

Respuesta 14

7. ¿Cómo justifica que $\lim_{x\to 1}(5x-2)$ es 3 y no es 3,00001 ni 2,99999?

$\lim_{x\to 1}(5x-2) = 3$

Lo reemplazo el 1 en cada x

$\lim_{x\to}(5(1)-2) = 3_{//}$

Llene el siguiente recuadro con el tipo de respuesta que considera Ud. correspondería para la respuesta 14 mostrada, en base a la tipificación establecida para esta pregunta.

Ítem	Tipo de respuesta asignado	Tipo de respuesta según su consideración	Comentario
7	Error conceptual	Error conceptual	

Muchas gracias por su colaboración.