PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

INNOVACIÓN MATEMÁTICA EN EL ESTUDIO DE MATRICES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR PERUANA APLICANDO CRITERIOS DE IDONEIDAD

TESIS

PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTADO POR:

ALEX LENIN VÁSQUEZ TORRES

ASESORA

DRA. NORMA VIOLETA RUBIO GOYCOCHEA

JURADO

DR. FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA

MG. MARIANO ADAN GONZALES ULLOA

LIMA – PERÚ

2014

Dedicatoria

A mis padres Febe y Antonio,

y a mis sobrinas

Dana, Carla y

Marita.

A todos los docentes de la Educación

Básica Regular que día a día se esfuerzan

en la formación de los niños

y adolescentes de nuestro

país.

Agradecimiento

A mi asesora la

Dra. Norma Rubio

por su acertado asesoramiento.

A mi hermana Febe
Ruth por su valioso
apoyo.

Resumen

La presente tesis muestra una propuesta sobre el estudio de matrices de orden $m \times n$, sus operaciones, determinantes y la matriz inversa de matrices cuadradas de orden 2, diseñada aplicando los criterios de la Teoría de la Idoneidad Didáctica en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), a ser incluida en el sétimo ciclo de la Educación Básica Regular (EBR) del Perú.

La pertinencia de este trabajo de investigación radica en las características del currículo: abierto, flexible, integrador y diversificado (ley general de educación–28044, artículo 33º). Estas características permiten, a los docentes, trabajar temas que no se consideran en forma específica en el currículo. Además, creemos que los conocimientos previos que se requieren, para que emerja el objeto matemático matriz, están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.

Esta propuesta se presenta a través de cinco tareas. En estas tareas los modelos mediadores entre lo concreto (problemas contextualizados) y lo abstracto (objeto matemático matriz) son grafos dirigidos y tablas (datos numéricos ordenados en forma tabular). El docente a través de los diversos ítemes de las tareas dará la oportunidad guiada a los estudiantes de “construir” el objeto matemático matriz y sus operaciones. Una vez que los estudiantes se encuentren familiarizados con las matrices y sus operaciones, usaremos algunos problemas de codificación y de decodificación de mensajes de textos para hacer emerger el determinante de una matriz cuadrada y la inversa de una matriz cuadrada de orden 2 (si existiese).

Las tareas han sido diseñadas (planificadas) de tal manera que, sean cercanas al estudiante; es decir, puedan imaginarlas, conteniendo un lenguaje adecuado y una dificultad manejable (respetando sus conocimientos previos). Estas tareas permitirán problematizar al estudiante –que el desarrollo no sea siempre rutinario o algorítmico–, manejar diferentes modos de expresión matemática como verbal, gráfica y simbólica pudiendo transitar de un modo de expresión a otro para poder interpretar, generalizar y justificar sus soluciones. También las tareas se presentan secuencialmente, de modo tal que, los estudiantes vayan acoplando y enlazando los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos logrando así que los estudiantes valoren el conocimiento matemático y puedan aplicarlos en la vida cotidiana.

De esta manera pretendemos impulsar algunos de los principios de la educación peruana, como la equidad, la inclusión, la calidad, la creatividad y la innovación para favorecer a la EBR.

Otro aspecto importante de esta tesis es dejar en evidencia la brecha que existe entre la educación secundaria y la educación superior. Esto se percibe al tomar el objeto matemático matriz, que solo se estudia en la educación superior, de manera que pueda ser estudiado en el sétimo ciclo de la EBR desde un punto de vista innovador (cambiando su configuración epistémica en diversos contextos). A la vez mostramos que al planificar unas "buenas matemáticas" contribuimos a articular de manera coherente la educación secundaria y la educación superior logrando disminuir la brecha existente entre ellas.

Índice

Consideraciones Iniciales

Al hablar de innovación matemática, no solo, nos referimos a estudiar “nuevos” objetos matemáticos, sino también el estudiar los mismos objetos matemáticos desde otros puntos de vista, es decir, estudiarlos bajo otras representaciones (gráfica, tabular, algebraica, etc.) en problemas contextualizados. En términos del EOS, innovación matemática es el cambio de configuración epistémica de un objeto matemático (Rubio, 2012, p. 344).

En el presente trabajo tomamos el objeto matemático matriz, que se estudia en el nivel superior, con la intención de estudiarlo en el nivel secundario de la EBR bajo un enfoque diferente. Creemos que al hacer esto, mostramos la brecha existente entre el nivel secundario de la EBR y el nivel superior. Así mismo, mostramos una manera de como disminuir dicha brecha.

La Educación Básica Regular (EBR) es una de las modalidades donde participan la mayoría de estudiantes que conforman la educación básica del sistema educativo peruano. La razón de ser del sistema educativo es que los estudiantes aprendan a comprender y actuar en el mundo. En ese sentido el presente trabajo pretende aportar, con un estudio de las matrices, el cual va dirigido a los alumnos que forman parte del sétimo ciclo de la EBR, pues ellos están a portas de ingresar a la siguiente etapa del sistema educativo, ofreciéndoles conocimientos que le servirán en la educación superior.

Para lograr todo esto, elaboramos este trabajo de investigación que consta de 5 capítulos que a continuación describimos.

En el capítulo 1 presentaremos la problemática que subyace al presente trabajo de investigación, damos su justificación y planteamos el problema, luego mostramos los antecedentes y fijamos los objetivos de investigación, finalmente definimos la metodología que permitirá el desarrollo de la investigación.

En el capítulo 2 estableceremos aspectos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), de la Educación Matemática Realista (EMR), y los principios psicopedagógicos de la EBR, los cuales permitirán el desarrollo del presente trabajo de investigación. Al inicio de este capítulo hacemos una breve descripción del sistema educativo peruano y definimos nuestro estudiante hipotético.

Para presentar las nociones teóricas que constituyen el EOS tomaremos como referencia el artículo publicado por Batanero, Font & Godino (2008). Luego nos centraremos en la Teoría de la Idoneidad Didáctica y su sistema de indicadores empíricos tomando como referencia el artículo publicado por Godino (2011). Finalmente, analizaremos las coincidencias entre la EMR, el EOS y los principios psicopedagógicos de la EBR, determinando compatibilidad entre ellos.

En el capítulo 3 se establecerá el significado institucional de referencia para el objeto matemático matriz, lo que requiere realizar un estudio histórico, epistemológico y didáctico de las matrices. Es decir, realizaremos una aproximación histórica y un desarrollo teórico del objeto matemático matriz y grafo.

En el capítulo 4 se analizarán los problemas, ejemplos, ejercicios y aplicaciones relacionados con el estudio de matrices en diferentes textos, con el objeto de poder identificar el significado institucional pretendido que reflejarán las tareas a elaborar en el capítulo 5. Veremos qué modelo mediador (ver sección 2.2.1) será el que permita "construir" mejor, a un estudiante del sétimo ciclo de la EBR, el objeto matemático matriz. También, este modelo, debe permitir que emerja de forma intuitiva la mayor cantidad de procedimientos, definiciones, y operaciones asociados al objeto matemático matriz.

En el capítulo 5 se proponen cinco tareas que permitirán el estudio de las matrices en el sétimo ciclo de la EBR. Estas tareas se diseñaran aplicando los criterios de la idoneidad didáctica. La primera tarea será la más importante o fundamental, pues será la que permita al estudiante "construir" el objeto matemático matriz y así apropiarse de él. Una vez que las matrices formen parte de los conocimientos previos del estudiante será más sencillo adaptar y diseñar las cuatro tareas restantes que van a permitir al estudiante "construir" las definiciones que involucran operaciones entre matrices, el determinante y la inversa (si existiese) de matrices cuadradas de orden dos.

Finalmente, se presentan las conclusiones y cuestiones abiertas, donde se resalta la implementación de esta propuesta; es decir, aplicar esta propuesta al sétimo ciclo de la EBR.

Capítulo 1

La Problemática

Resumen

En este capítulo presentaremos la problemática que subyace al presente trabajo de investigación: Justificamos por qué estudiar matrices en el sétimo ciclo de la EBR y planteamos el problema ¿Cómo estudiar las matrices en el sétimo ciclo de la EBR?, dejando notar su viabilidad. Luego, mostramos los antecedentes y fijamos los objetivos de investigación. Finalmente, definimos la metodología que tendrá como eje principal a la Teoría de la Idoneidad Didáctica y que permitirá el desarrollo de la investigación.

1.1. Justificación

Las matrices han sido utilizadas en diversas áreas del conocimiento humano y han demostrado su utilidad en los diversos campos aplicados, y no es exagerado afirmar, como concluye Luzardo y Peña (2006, p.167) en su trabajo histórico del Álgebra Lineal que las ideas y resultados relacionados con las matrices aparecerán en casi todo el desarrollo de la humanidad. Asimismo, en la educación superior resulta ser un contenido obligatorio pues las matrices tienen múltiples aplicaciones en diversos contextos de la actividad humana. Por lo tanto, consideramos necesario que el estudiante de la EBR tenga saberes previos relacionados con el tema de matrices y así disminuir el impacto de la transición de la EBR a la educación superior.

También, las instituciones educativas privadas más prestigiosas del Perú preparan a sus alumnos para la inserción universitaria, específicamente las que forman parte del Bachillerato Internacional (IB) cuyo programa de estudio (IB, 2013), a partir del 2012, ha creado un nuevo curso denominado Ampliación de Matemáticas Nivel Superior (NS), donde la unidad Álgebra Lineal es una de las componentes del programa de estudio. Esta unidad incluye una introducción a las matrices y trata el tema de espacios vectoriales y las aplicaciones a la geometría –transformaciones geométricas en el plano–.

Por otro lado, no se hace ningún tipo de estudio de estos temas en la Educación Básica Regular (EBR) peruana. Esto se hace visible al revisar tanto el Diseño Curricular Nacional (DCN) (Minedu, 2009) como los libros de matemática de quinto de secundaria de Doroteo y Gálvez (2005), Gálvez (2008), que fueron proporcionados por el estado a todos los alumnos que pertenecen a la EBR. El primero en el gobierno de los años 2001-2006 y el segundo en el gobierno de los años 2006-2011.

En cambio, en otros libros de matemática de secundaria que son utilizados en la educación privada, como por ejemplo, Veiga et al (2000, pp. 138-141) y (2010, pp. 90-93), se estudia la regla de Cramer y el método de Gauss como formas alternativas de resolver sistemas de ecuaciones de dos y tres incógnitas. Sin embargo, no se estudia las matrices en forma específica. También, en el libro 5^to pre de Chumpitaz et al (2004, pp. 341-368) se hace un estudio de matrices y determinantes, pero no, la inversa de una matriz.

Notamos, y como ya lo afirmaba Ansión (2011, p. 62), que existen graves brechas educativas entre la educación pública y la educación privada. Estas profundas brechas se superponen a otra igualmente profunda entre la educación urbana y la educación rural de nuestro país.

Creemos necesario que los alumnos de la EBR, que llegan a la educación superior y se enfrenten a los temas de matrices o Álgebra Lineal, tengan conocimientos previos sobre estos temas, estén familiarizados con problemas contextualizados y modelos que permitan comprender las definiciones y propiedades de las matrices y a la vez apreciar la gran importancia de estos temas en la sociedad, pues se utilizan en diversos campos de la ciencia; ya sea en el campo económico, por ejemplo, matriz de tecnología; en el campo científico, por ejemplo, matriz de adyacencia de grafos y digrafos; en el campo social, por ejemplo, matriz de adyacencia de una gráfica de dominancia, etc. Estos ejemplos son estudiados en libros, como el de Álgebra Lineal y Aplicaciones de Nakos & Joyner (1999), Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales de Harshbarger & Reynolds (2005), Introducción al Álgebra Lineal de Quiroga (2005), entre otros. Ahí podemos encontrar diversas aplicaciones que pueden permitir introducir el tema de matrices y su inversa.

Con respecto al uso de problemas contextualizados y modelos para promover el avance de los estudiantes en la comprensión de las matemáticas Heuvel-Panhuizen (2009, p.

41), afirma, en torno a la Matemática Realista (EMR), que los modelos deben percibirse como representaciones de problemas contextualizados, que reflejan aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas importantes para el problema contextualizado, pero que pueden tener diversas manifestaciones. Además, deben estar arraigados en contextos en que el estudiante los pueda imaginar, también deben de ser lo suficientemente flexibles para aplicarlos en un nivel más general o avanzado y finalmente que los estudiantes puedan reinventarlos por si solos. Para que se cumpla todo esto los modelos deben "comportarse" de forma natural, evidentes por sí mismo, ajustándose a las estrategias informales de los estudiantes como si hubiesen sido inventados por ellos.

Esto está incluido en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), donde se atribuye un rol principal a las situaciones problemas, de tal manera que cuando el estudiante se enfrente a estas tareas problemáticas emerjan los objetos matemáticos. Específicamente el EOS dispone de la idoneidad didáctica como una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica que se orienta a una intervención efectiva en el aula para promover su mejora. Godino (2011, p. 5)

Es así que Batanero, Godino & Font (2008), refiriéndose a la Idoneidad didáctica, afirman:

> Las herramientas descritas se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o a un nivel más global, como puede ser el desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También pueden ser útiles para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos puntuales". (p. 16)

Por otro lado, creemos que es viable incluir el estudio de matrices en la EBR pues el currículo es abierto, flexible, integrador y diversificado (ley general de educación– 28044, artículo 33º). Estas características permiten a las instituciones educativas desarrollar temas útiles que no se especifican en el DCN y que estén al alcance de los estudiantes. En ese sentido, creemos que los conocimientos previos necesarios para estudiar las matrices están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.

De todo lo anterior, creemos que es pertinente preguntarnos ¿Cómo incluir el estudio de matrices en el sétimo ciclo de la EBR del Perú?

Para dar respuesta a esta pregunta pretendemos elaborar una propuesta de instrucción conformada por cinco tareas. Estas tareas serán elaboradas aplicando los criterios de idoneidad propuestos por el EOS, y estará dirigida a alumnos del sétimo ciclo de la EBR del Perú. Las tareas estarán basadas en grafos, matrices de adyacencia de grafos dirigidos, tablas y, la codificación y decodificación de mensajes de textos. Estas tareas permitirán guiar al alumno de modo que “construya” los objetos matemáticos matriz, sus operaciones, determinante e inversa de una matriz cuadrada de orden dos. Esta propuesta instruccional será planteada considerando las seis facetas de la idoneidad didáctica: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

De esta manera pretendemos planificar unas buenas matemáticas (idóneas) y así impulsar algunos de los principios de la educación peruana, como la equidad, la inclusión, la calidad, la creatividad y la innovación para favorecer a la EBR en la que participan la mayoría de estudiantes que conforman la educación básica del sistema educativo peruano. Así mismo, al estudiar en el nivel secundario de la EBR –de una forma innovadora– un objeto matemático que solo se estudia en el nivel superior, ponemos en evidencia la brecha existente entre la educación secundaria y el nivel superior. A la vez mostramos como este trabajo de investigación aporta en beneficio de la disminución de dicha brecha.

1.2. Antecedentes

Es necesario precisar que no hemos encontrado investigaciones relacionadas al estudio específico de matrices en la EBR del Perú. Sin embargo, sabiendo que las matrices están relacionadas con sistemas de ecuaciones, matriz inversa, transformaciones lineales y determinantes, que son temas tratados en cursos de álgebra lineal, hemos revisado investigaciones, enmarcados en teorías cognitivas, que se ocupan en determinar los problemas en el aprendizaje de diversos temas tratados en un primer curso de álgebra lineal.

Así tenemos que, Wawro (2011) hace un análisis individual y colectivo de la génesis del razonamiento de estudiantes de nivel superior sobre el Teorema de la Matriz Inversa (TMI) en un primer curso de álgebra lineal. El TMI vincula conceptos de operaciones matriciales, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, propiedades de $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial, propiedades de las transformaciones lineales inyectivas y sobreyectivas. En esta investigación Wawro coordinó herramientas de análisis de matrices de adyacencia de gráficas y diagráficas en el contexto de redes y una herramienta analítica para evaluar los argumentos que usan los estudiantes: el Modelo de la Argumentación de Toulmin. Se concluye en este estudio que la comparación cruzada de los resultados de las dos herramientas, proporciona una rica forma de investigar el contenido y la estructura de los argumentos ofrecidos por los estudiantes en forma individual y colectiva.

Sierpinska (2000) hace un estudio sobre algunos aspectos del pensamiento de estudiantes relacionados con algunos conceptos tratados en álgebra lineal, como la matriz asociada a una transformación lineal en determinada base. Sierpinska afirma que la mayoría de estudiantes tienden a pensar más en la práctica que en la teoría lo cual afecta adversamente su razonamiento en álgebra lineal. En un plano más específico, Sierpinska distingue tres modos de pensar que corresponden a tres tipos de lenguajes interactivos: lenguaje visual geométrico, lenguaje aritmético de vectores y matrices como listas y tablas de números, y un lenguaje estructural de espacios vectoriales y transformaciones lineales; ilustrando con ejemplos que los estudiantes son reacios a ingresar al modo de pensamiento estructural y principalmente muestra su inhabilidad para moverse flexiblemente entre los tres modos de pensamiento.

Miranda (2002) se propone generar modelos de enseñanza – aprendizaje de conceptos del álgebra lineal a partir de la implementación de prácticas pedagógicas que logren articular los lenguajes y modos de pensar, introducidos por Sierpinska, de manera dialéctica.

Existen aplicaciones de las matrices enmarcadas en la teoría de grafos, específicamente en grafos y matrices de adyacencia de grafos de dominancia; también, aplicaciones de la matriz inversa orientadas a la codificación, por ejemplo, el trabajo presentado por Calvo y Cortés (2003) donde se muestra la importancia de la matriz inversa para codificar y decodificar mensajes de textos. Estos tipos de aplicaciones, coincidentemente aparecen en el libro de Álgebra Lineal y Aplicaciones de Nakos y

Joyner (1999), Aplicaciones de Álgebra Lineal de Grossman (1988), y en el texto de Harshbarger &Reynolds (2005).

Las aplicaciones de Cortes, Nakos y Grossman sobre codificación y decodificación de textos no tienen ningún enfoque basado en alguna teoría educativa; es decir, son solo aplicaciones que permiten motivar y hacer notar al lector la importancia y la sencillez de aplicar el uso de las matrices y sus inversas.

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Elaborar una propuesta de instrucción, conformada por cinco tareas, aplicando los criterios de idoneidad en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de matrices en el sétimo ciclo de la EBR del Perú.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar una revisión bibliográfica de investigaciones y libros de matemática de educación secundaria y de nivel superior que presenten un estudio de matrices y de sus aplicaciones con el objeto de plantear la situación problemática y buscar información para elaborar el significado institucional de referencia del objeto matemático matriz.
- Delimitar el marco teórico que permitirá elaborar las herramientas que harán posible diseñar (planificar) la propuesta de instrucción del objeto matemático matriz.
- Establecer y elaborar un significado institucional de referencia del objeto matemático matriz, lo cual permitirá realizar las configuraciones epistémicas de las tareas que se consideraran en los diversos textos a analizar.
- Realizar el análisis de textos para identificar y definir el significado institucional pretendido que será la base para las tareas a diseñar.
- Elaborar un conjunto de tareas que permitan el estudio del objeto matemático matriz en el sétimo ciclo de la EBR.

1.4. Metodología

Definimos nuestra metodología como un diseño abierto y flexible, cuyo desarrollo se adaptará a las circunstancias propias que propone la Teoría de la Idoneidad Didáctica y su sistema de indicadores empíricos en el diseño de un proceso de estudio.

Con respecto a las circunstancias propias que propone la Teoría de la Idoneidad Didáctica, tenemos:

La Teoría de la Idoneidad Didáctica es una herramienta del EOS que orienta de manera fundamentada la acción efectiva sobre la planificación, implementación y valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos, y a la vez promueve su mejora.

Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2007) la definen como la relación coherente y sistémica de seis componentes o idoneidades: idoneidad epistémica, se refiere a que las matemáticas que se planifiquen o implementen sean de calidad. Idoneidad cognitiva, es decir que los conocimientos pretendidos estén en la zona de desarrollo próximo del estudiante. Idoneidad interaccional, se refiere a prevenir y aclarar todo tipo de duda potencial en un estudiante que puede surgir en un proceso de estudio planificado, o que se origina en pleno proceso de instrucción. Idoneidad mediacional, se refiere a optimizar los recursos materiales y temporales en la planificación e implementación de un proceso de estudio. Idoneidad afectiva, se refiere al interés y motivación del estudiante en un proceso de estudio. Idoneidad ecológica, hace referencia a la adecuación del proceso de estudio al currículo y a la formación socio-profesional del estudiante.

La Idoneidad Didáctica se puede aplicar en dos momentos de un proceso de estudio (Rubio, 2012, p. 343) A priori, en donde diseñamos (planificamos) el proceso de estudio a implementar para un estudiante hipotético. A posteriori, en donde se valora el proceso de estudio implementado para un estudiante específico (real).

Para no perder de vista el objetivo general de nuestra investigación, especificamos que la metodología se centrará en el diseño (planificación) de un conjunto de tareas que guiará el proceso de estudio del objeto matemático matriz. Para esta etapa de diseño consideramos a la idoneidad epistémica, cognitiva y ecológica, pues las tareas a diseñar giran en torno a unos conocimientos específicos del objeto matemático matriz y debemos adecuarlos, de tal manera que se encuentren en la zona de desarrollo próximo de nuestro estudiante hipotético, y a la vez le sean de utilidad. Cuando sea posible tendremos en cuenta las otras tres idoneidades restantes (interaccional, mediacional y afectiva).

También, aplicar la Teoría de la Idoneidad Didáctica exige a nuestra metodología realizar la reconstrucción de un significado institucional de referencia, es decir realizar un estudio histórico, epistemológico y didáctico del objeto matemático matriz. El significado institucional de referencia permitirá, mediante un proceso inductivo, realizar el análisis didáctico de los textos que contengan ejemplos, problemas y ejercicios relacionados con el objeto matemático matriz.

Los textos seleccionados para el análisis didáctico, corresponden a textos que contienen diversas aplicaciones del objeto matemático matriz y son los siguientes:

– Álgebra lineal con aplicaciones. (1999)
– Introducción al álgebra lineal. (2005)
– Matemáticas aplicadas a la administración, economía y ciencias sociales. (2005)

Para este análisis didáctico desarrollaremos y analizaremos las configuraciones epistémicas de diversos ejemplos, ejercicios y aplicaciones relacionados con el objeto matemático matriz. Este proceso inductivo lo realizaremos hasta cuando ya no encontremos información novedosa.

El análisis de las configuraciones epistémicas será de utilidad para identificar los modelos mediadores entre lo concreto (problemas contextualizados planteados en las tareas) y lo abstracto (el objeto matemático matriz), además será útil para identificar y definir el significado institucional pretendido que será la base para las tareas a diseñar.

Una vez establecido el significado institucional pretendido, utilizaremos la Idoneidad Didáctica y su sistema de indicadores empíricos para diseñar las tareas que permitan el estudio del objeto matemático matriz en el sétimo ciclo de la EBR.

Teniendo en cuenta el desarrollo metodológico descrito en los párrafos anteriores, planteamos el proceso cualitativo de nuestra investigación en seis fases, donde la revisión de la literatura se ha dado en todo momento del trabajo de investigación y ha sido el nexo entre las distintas fases, dejando notar que se ha tenido que regresar de fases posteriores a fases anteriores. Esto se aprecia en la figura 1.1.

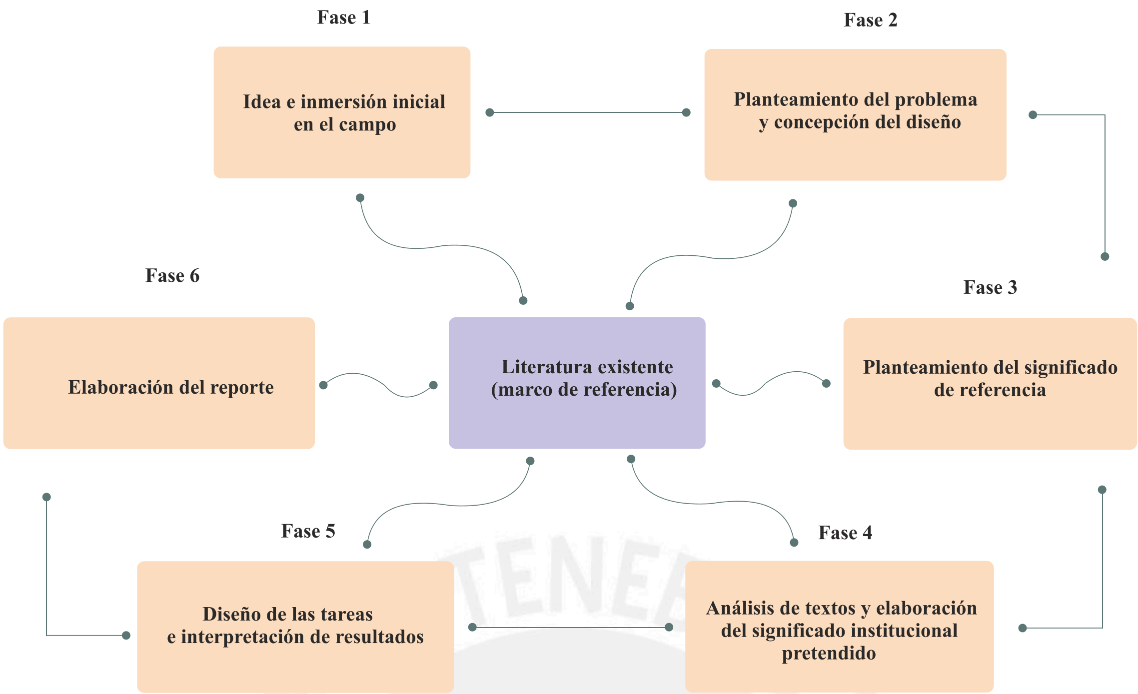


Figura 1.1. Proceso cualitativo de la investigación

A continuación describimos las fases:

Fase 1.

Idea e inmersión inicial en el campo.

Primero, realizaremos una revisión bibliográfica de la literatura existente, con la finalidad de encontrar trabajos de investigación, libros de matemática de educación secundaria y superior relacionados con el estudio de matrices y sus aplicaciones, los cuales formarán parte de nuestro objeto de estudio y de donde surgirá el significado institucional de referencia. En la literatura existente, también consideramos el DCN, la Ley General de Educación, las Rutas de Aprendizaje y artículos relacionados con la Teoría de la Idoneidad Didáctica, la Matemática Realista y matrices con sus aplicaciones.

Fase 2.

Planteamiento del problema y concepción del diseño.

En esta fase presentamos la problemática que subyace al presente trabajo de investigación, mostramos su justificación y viabilidad para luego plantear el problema.

También fijamos los objetivos de investigación y definimos la metodología que guiará el desarrollo de nuestro trabajo de investigación.

Fase 3.

Planteamiento del significado institucional de referencia.

En esta fase realizamos un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y la "evolución" de las matrices y los grafos, lo que permitirá realizar las configuraciones epistémicas.

Fase 4.

Análisis de textos y elaboración del significado institucional pretendido.

En esta fase realizamos las configuraciones epistémicas de ejemplos, ejercicios y aplicaciones referentes a matrices en algunos libros de textos de matemáticas de nivel superior para establecer el significado institucional pretendido y elegir los modelos mediadores. En esta fase se aprecia la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego las matrices y los grafos.

Fase 5.

Diseño de las tareas e interpretación de resultados.

En esta fase diseñamos un conjunto de tareas aplicando la idoneidad didáctica, estas tareas permitirán el estudio del objeto matemático matriz a los alumnos del sétimo ciclo de la EBR.

En esta fase, la herramienta a usar será el sistema de indicadores empíricos de la idoneidad didáctica.

Fase 6.

Elaboración del reporte.

En esta fase se sintetiza el trabajo realizado mostrando el logro del objetivo principal, se elabora el reporte y el material adicional (Apéndices). Se muestran las conclusiones, así como algunas cuestiones abiertas y se dan algunas recomendaciones.

Capítulo 2

Marco Teórico

Resumen

Iniciamos este capítulo describiendo el sistema educativo peruano, definiendo nuestro estudiante hipotético y dando los principios psicopedagógicos dela EBR, pues es el contexto donde se desarrolla la investigación. También definimos los aspectos teóricos de la EMR y de la Teoría de la Idoneidad Didáctica los cuales permitirán el desarrollo del presente trabajo de investigación. La EMR nos permite entender, elegir y explicar cómo los modelos mediadores hacen posible el tránsito, al estudiante, del mundo real al mundo matemático, lo cual consideramos importante en el diseño (planificación) de las tareas. Así mismo la Teoría de la Idoneidad Didáctica proporciona un sistema de indicadores, que no solo permite valorar un proceso de estudio, sino también permite diseñarlo, el cual es el objetivo de nuestra investigación. Finalmente, analizaremos las coincidencias entre la EMR, la Teoría de la Idoneidad Didáctica y los principios psicopedagógicos de la EBR, determinando compatibilidad entre ellos.

2.1. Principios psicopedagógicos de la EBR

Antes de presentar los principios psicopedagógicos de la EBR haremos una breve descripción del sistema educativo peruano, tomando como referencia la Ley General de Educación 28044.

El sistema educativo se divide en periodos progresivos llamados etapas. La primera etapa es la Educación Básica, seguida de la Educación Superior.

La etapa de educación básica comprende tres niveles:

– Nivel de educación inicial.
– Nivel de educación primaria.
– Nivel de educación secundaria.

Existen tres modalidades de atención educativa que se organizan en función de las características específicas de las personas a quienes se destina el servicio de educación básica; estas modalidades son:

– Educación Básica Regular (EBR)
– Educación Básica Especial (EBE)
– Educación Básica Alternativa (EBA)

La EBR está constituida por procesos educativos que se desarrollan en función de logros de aprendizaje llamados ciclos. Cada ciclo comprende una organización por años cronológicos y grados de estudio, como se muestra en la siguiente figura.

EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

NIVELES	Inicial		Primaria						Secundaria				
CICLOS	I	II	III		IV		V		VI		VII		
GRADOS	años 0 - 2	años 3 - 5	1°	2°	3°	4°	5°	6°	1°	2°	3°	4°	5°

Figura 2.1. Niveles, ciclos y grados de la EBR

Fuente: DCN (2009, p. 11)

El documento que norma y orienta la educación en todo el país es el DCN. El DCN está organizado en áreas que se complementan para garantizar el aprendizaje integral de los estudiantes. Una de estas áreas es la de Matemática, y está presente en los tres niveles.

En este trabajo de investigación nos ocuparemos de la etapa que corresponde a la Educación Básica, en la modalidad de EBR, centrándonos en el nivel de educación secundaria, específicamente en el área de matemática del sétimo ciclo que comprende los grados de 3º, 4º y 5º.

Los cuatro dominios del área de matemática son: números y operaciones, cambio y relaciones, geometría, y estadística y probabilidad.

En el sétimo ciclo los estudiantes, tienen como conocimientos previos, en los dominios de números y operaciones y cambio y relaciones: operaciones con los números racionales; radicación exacta; variable y simbolización de enunciados verbales mediante el lenguaje algebraico; teoría básica de exponentes; operaciones con polinomios; factorización de expresiones algebraicas por el factor común; función lineal afín;

modelos lineales; representación verbal, tabular y gráfica de funciones lineales, y proporcionalidad directa e inversa.

Además, en el sétimo ciclo, una de las características del pensamiento del estudiante es de ser más abstracto que el del ciclo anterior, lo que significa que está en condiciones de desarrollar aprendizajes más complejos (DCN, 2009, p. 15).

Los párrafos anteriores permiten definir a nuestro estudiante hipotético.

El estudiante hipotético

- Es un estudiante para quien se diseña el proceso de estudio.
- Pertenece al sétimo ciclo de la EBR. Al inicio de este ciclo su edad oscila entre 14 a 15 años y al finalizar este ciclo su edad oscila entre 16 y 17 años.
- Está en condiciones de lograr aprendizajes más complejos que un estudiante de los ciclos anteriores.
- Tiene los siguientes conocimientos previos

Dominios

Números y operaciones	**Cambio y relaciones**
– Operaciones con los números racionales. – Radicación exacta. – Variable y simbolización de enunciados verbales mediante el lenguaje algebraico. – Operaciones con polinomios. – factorización de expresiones algebraicas por el factor común.	– Función lineal afín. – Modelos lineales. – Representación verbal, tabular y gráfica de funciones lineales. – Proporcionalidad directa e inversa.

Principios Psicopedagógicos

En la EBR, las decisiones sobre el currículo se han tomado sobre la base de los aportes cognitivos y sociales del aprendizaje; las cuales sustentan el enfoque pedagógico, que se resumen en los siguientes principios (DCN, 2009, p. 18-19):

- Principio de Construcción de los Propios Aprendizajes.

  El aprendizaje es un proceso de construcción: interno, activo, individual interactivo con el medio social y natural. Los estudiantes para aprender usan como base sus conocimientos previos y sus experiencias.

- Principio de Necesidad del Desarrollo de la Comunicación y el Acompañamiento en los Aprendizajes.

  El uso del lenguaje permite interactuar al estudiante con sus pares, con el docente y el entorno; recogiendo los saberes de los demás y aportando ideas y conocimientos propios que le permiten ser consciente de qué y cómo está aprendiendo. Es por eso que en el aula se debe propiciar situaciones reales, pertinentes y graduadas que promuevan la reflexión y autonomía en sus conclusiones, de modo que aprendan a aprender.

- Principio de Significatividad de los Aprendizajes.

  Los aprendizajes deben estar interconectados con la vida real y las prácticas sociales de cada cultura, lográndose así la motivación del alumno. Despertando la capacidad de crear nuevos aprendizajes teniendo como base sus conocimientos previos.

- Principio de Organización de los Aprendizajes.

  La relación, en el tiempo, entre los diferentes conocimientos, permite que estos se amplíen y que se puedan aplicar en la vida.

- Principio de Integralidad de los Aprendizajes.

  Los aprendizajes deben abarcar el desarrollo integral de los estudiantes, de acuerdo con las características individuales de cada persona para consolidar las capacidades adquiridas por los estudiantes en su vida cotidiana y el desarrollo de nuevas capacidades a través de todas las áreas del currículo.

- Principio de Evaluación de los Aprendizajes.

  Los estudiantes requieren actividades pedagógicas que les permitan reconocer sus avances y dificultades; acercarse al conocimiento de sí mismos, aceptarse y superarse permanentemente. Es por eso que la evaluación y metacognición son necesarias en sus diferentes formas, estas pueden ser aplicadas por los estudiantes, los docentes o algún agente externo.

Los seis principios anteriores se aplican a los procesos de estudio que se dan en el desarrollo de todas las áreas de la EBR. Pero específicamente para el área de Matemática se asume el enfoque centrado en la Resolución de Problemas (Minedu, Rutas del Aprendizaje, pp. 10-11), que surge como alternativa para pasar de un aprendizaje memorístico de conocimientos matemáticos, a un aprendizaje enfocado en la construcción de conocimientos matemáticos a partir de la resolución de situaciones problemáticas. Este enfoque es asumido por dos razones:

- La resolución de situaciones problemáticas es la actividad central de la matemática.
- Es el medio principal para establecer relaciones de funcionalidad matemática con la realidad cotidiana.

2.1.1. Características del Enfoque Centrado en la Resolución de Problemas

Los rasgos más importantes de este enfoque son los siguientes:

- <u>La resolución de problemas debe impregnar íntegramente el currículo de matemática.</u>

  La resolución de problemas es el eje vertebrador alrededor del cual se organiza la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática.
- <u>La matemática se enseña y se aprende resolviendo problemas.</u>

  La resolución de problemas sirve de contexto para que los estudiantes construyan nuevos conceptos matemáticos, descubran relaciones entre entidades matemáticas y elaboren procedimientos matemáticos.
- <u>Las situaciones problemáticas deben plantearse en contextos de la vida real o contextos científicos.</u>

  Los estudiantes se interesan en el conocimiento matemático, le encuentran significado, lo valoran más y mejor, cuando pueden establecer relaciones de funcionalidad matemática con situaciones de la vida real o de un contexto científico. En el futuro ellos necesitarán aplicar cada vez más matemática durante el transcurso de su vida.
- <u>Los problemas deben responder a los intereses y necesidades de los estudiantes.</u>

  Los problemas deben ser interesantes para los estudiantes, planteándoles desafíos que impliquen el desarrollo de las capacidades y que los involucren realmente en la búsqueda de soluciones.

– La resolución de problemas sirve de contexto para desarrollar capacidades matemáticas.

  Es a través de la resolución de problemas que los estudiantes desarrollan sus capacidades matemáticas tales como: la matematización, representación, comunicación, utilización de expresiones simbólicas, la argumentación.

Estas seis capacidades sustentan la competencia matemática de resolución de problemas y deben abordarse en todos los niveles y modalidades de la EBR.

A continuación presentamos una breve descripción de la EMR, pues en este trabajo la EMR permitirá describir y definir "la dinámica" que presentarán las tareas a elaborar, es decir, como el estudiante transitará de lo "concreto" a lo "abstracto".

2.2. La Educación Matemática Realista (EMR)

La EMR es un enfoque en el cual se utilizan situaciones cotidianas o problemas contextuales como un punto inicial para aprender matemática. Estas situaciones cotidianas son matematizadas pasando de un lenguaje coloquial a un lenguaje formal (matemático). Al tratar de dar solución a un problema contextualizado, el alumno trata de identificar aspectos matemáticos, descubriendo ciertas regularidades que relaciona con sus conocimientos previos, los alumnos hacen uso de lo que Treffers (1987 citado en Heuvel-Panhuizen, 2009) denomina "matematización horizontal", y ésta permite dar solución al problema y así transitar del mundo concreto al mundo abstracto de las matemáticas. Ya en el mundo abstracto de las matemáticas se utiliza la "matematización vertical" para desarrollar y profundizar conceptos matemáticos.

2.2.1. Modelos

Dentro de la EMR, los modelos son vistos como representaciones de situaciones problemáticas que necesariamente reflejan aspectos esenciales de conceptos y estructuras matemáticas que son relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diferentes manifestaciones. Pueden servir como modelos los materiales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas, símbolos, etc. (Heuvel-Panhuizen, 2009).En el presente trabajo los llamaremos modelos mediadores.

La EMR se apoya en dos pilares fundamentales: el uso de modelos, mediadores entre lo concreto y abstracto, y la interacción en el aula entre los alumnos y entre el docente con los alumnos. Esta interacción, que debe ser intensa, permitirá a los docentes construir sus clases teniendo en cuenta las producciones de los alumnos (Fauzan, Plomp y Slettenhaar; 2002, citados en Alsina, 2009).

Otro aspecto importante de la EMR es la posibilidad que se le da al alumno de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto en lugar de intentar trasmitirles una matemática pre-construida. En otras palabras, se trata de crear oportunidades para que los alumnos puedan simular actividades similares a la de los matemáticos; a estructurar contextos que inviten a ser organizados por medio de herramientas matemáticas. (Struik, 1987; De Corte, Greer Y Verschaffel, 1996, citados en Alsina, 2009).

Freudenthal reconoció que la humanidad había desarrollado a la matemática para resolver todo tipo de problemas prácticos. Así mismo sostenía que los alumnos deberían ser guiados para poder recorrer un proceso similar al que conduciría a la matemática formal que hoy conocemos –proceso muy largo en el tiempo que se reduciría a algunos años en la escuela–, donde en algunos casos perdieron muchas de las relaciones obvias con la vida cotidiana (Struik, 1987; De Corte, Greer Y Verschaffel, 1996, citados en Alsina, 2009).

2.2.2. Matematización Horizontal

Dentro del proceso de matematización horizontal, los alumnos generalizan herramientas matemáticas, las cuales los ayudan a organizar y a solucionar de manera informal una situación problemática presentada dentro de un contexto de la vida real. Identificar o describir la matemática específica que es relevante dentro de un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras, descubrir relaciones y regularidades en diversos problemas son ejemplos de actividades de matematización horizontal. Para Treffers (1987 citado en Alsina, 2009) lo anterior implica convertir un problema contextual en un problema matemático.

2.2.3 Matematización Vertical

La matematización vertical es el proceso de reorganización dentro del mismo sistema matemático. Representar una relación como fórmula, probar regularidades, mejorar, ajustar, combinar e integrar modelos, formular un modelo matemático y generalizar son ejemplos de las actividades de matematización vertical. Por esta razón se dice que la matemática vertical es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción. Al proponer en la clase problemas que admitan soluciones en diferentes niveles matemáticos, se puede inducir a los alumnos a realizar este tipo de matematización vertical (Freudenthal ,1991 citado en Alsina, 2009).

Freudenthal (1991 citado en Alsina, 2009) explica que la matematización horizontal implica ir del mundo de la vida cotidiana al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos matemáticos. Él agrega a su vez que la diferencia entre estos dos “mundos” no es siempre clara, sus fronteras están vagamente marcadas. Lo cual provoca una dificultad debido a que no es fácil determinar lo que uno comprende por realidad.

2.2.4. Principios de la EMR

En su etapa inicial la EMR, según de Lange (1996 citado en Alsina, 2009), se sustentó en las siguientes características:

- El uso de contextos como vehículos para el acercamiento entre lo concreto y lo abstracto.
- El uso de modelos como columna vertebral para el avance de los estudiantes en la comprensión de las matemáticas.
- El uso de las construcciones y producciones libres de los alumnos en los procesos de enseñanza/aprendizaje.
- El entrelazado de los diversos ejes en el currículum de matemáticas.

Actualmente, la EMR se fundamenta en seis principios fundamentales, que se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 2.1. Principios de la EMR

<table>
<tr><th>Principio</th><th>¿Qué?</th><th>¿Cómo?</th></tr>
<tr><td>De actividad</td><td>Las matemáticas se consideran una actividad humana.

La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática.

La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema.</td><td>Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar.

Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.</td></tr>
<tr><td>De realidad</td><td>Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales.

Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.</td><td>El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.</td></tr>
<tr><td>De niveles</td><td>Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión:

– Situacional: en el contexto de la situación.
– Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc.
– General: exploración,</td><td>Esquematización progresiva (profesor) y reinvención guiada (aprendiz): las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (definiciones, teoremas, propiedades, etc).</td></tr>
</table>

Principio	¿Qué?	¿Cómo?
	reflexión y generalización. – Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.	
De reinvención guiada	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas
De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.
De interconexión	Los bloques de contenido matemático (numeración y	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos

Principio	¿Qué?	¿Cómo?
	cálculo, álgebra, geometría, etc.) no pueden ser tratados como entidades separadas.	matemáticos interrelacionados.

Fuente: (Alsina, 2009, p. 121)

Ahora nos centraremos en la Teoría de la Idoneidad y estableceremos algunos aspectos teóricos del EOS, pues en este marco surge la idoneidad didáctica, la cual nos permitirá diseñar (planificar) las tareas.

2.3.Teoría de la Idoneidad Didáctica.

En esta sección resaltamos el enfoque que se le da a la Didáctica de las Matemáticas como "ciencia de diseño", es decir, considerar a la Educación Matemática como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Tomamos al EOS, en particular la noción de Idoneidad Didáctica, como una teoría de diseño instruccional, apropiado para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y otras áreas curriculares. No se pretende dar recetas de actuación para ciertas circunstancias, pero si criterios generales para los cuales existe consenso en la comunidad científica. (Godino, 2011, p. 3).

Antes de tratar la noción de Idoneidad Didáctica, describiremos algunas herramientas del EOS que permitirán el desarrollo de nuestra investigación.

Algunas herramientas teóricas que componen el enfoque ontosemiótico

El EOS es una teoría educativa de la Didáctica de la Matemática que tiene por objetivo vincular diferentes teorías educativas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. El EOS considera a la matemática como una actividad humana que permite resolver problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado.

Tomando como punto de partida a la situación-problema, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado. A continuación presentamos en forma breve algunas de las herramientas teóricas que componen el EOS.

2.3.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para dar solución a problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Las prácticas pueden ser propias de una persona o compartidas en el interior de una institución. Una institución está constituida por las personas relacionadas con una misma clase de situaciones problemáticas.

En el estudio de las matemáticas interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que realizan las personas ante tipos de situaciones problemáticas.

Respecto a los significados institucionales y personales se debe tener en cuenta los siguientes tipos:

Tabla 2.2. Resumen de la tipología básica de significados personales e institucionales.

Significados Institucionales	**Significados Personales**
– Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente. – Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes. – Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio. – Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.	– Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático. – Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional. – Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida
Observación En una institución de enseñanza concreta el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global	**Observación** En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los

Significados Institucionales	Significados Personales
requiere realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.	estudiantes y los que finalmente alcancen.

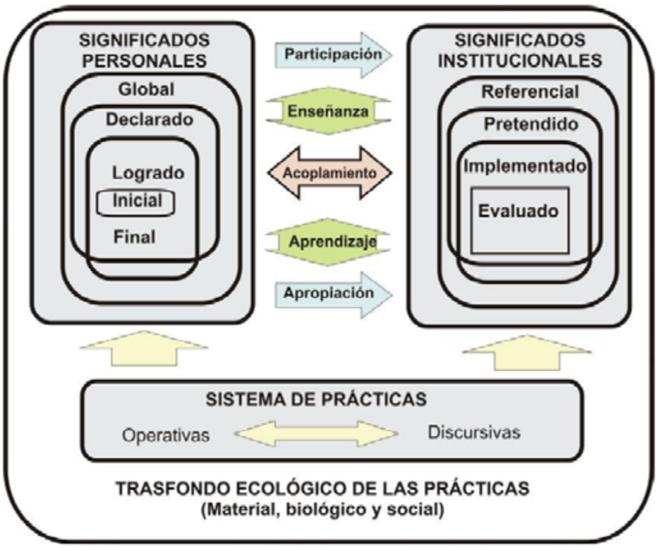


Figura 2.2: Tipos de significados institucionales y personales

Fuente: Batanero, Font & Godino (2008, p.6)

En el centro de la figura 2.2 se observa las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. También, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

2.3.2. Emergencia de los objetos matemáticos

En el EOS se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación exige considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que surgen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que surge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc., lo que se conoce como las facetas duales.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de Prácticas

En este nivel tenemos: las situaciones problemas (tareas), los procedimientos necesarios para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentos, que en su conjunto se denomina configuración epistémica. Estos objetos primarios se encuentran articulados como se muestra en la figura 2.3.

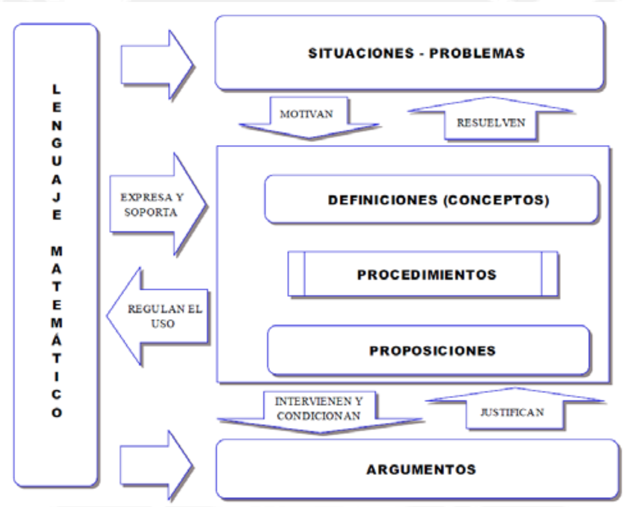


Figura 2.3. Configuración de objetos primarios

Fuente: Batanero, Font & Godino (2008, p.7)

Segundo nivel: Atributos contextuales

Las nociones de juego del lenguaje e institución son los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002, citado en Batanero et al, 2008):

- Personal – institucional.
- Ostensivo – no ostensivo.
- Expresión – contenido: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.
- Extensivo – intensivo (ejemplar – tipo).
- Unitario – sistémico.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica.

2.3.3. Procesos

Las dualidades como la configuración de objetos primarios se pueden analizar desde un enfoque proceso-producto. La emergencia de los objetos primarios se da mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.) y argumentación.

2.3.4. La Noción de Idoneidad Didáctica

Dentro de las labores de un docente destacan el diseño (planificación), implementación y valoración de un proceso de estudio. Los criterios de idoneidad proporcionan un conjunto de directrices claras y explicitas para guiar esta labor docente permitiendo la mejora progresiva de la enseñanza, como se aprecia en la figura 2.4.

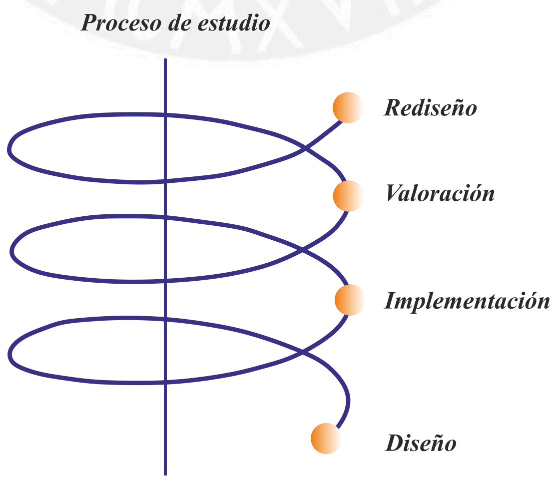


Figura 2.4. Mejora progresiva de la enseñanza usando Idoneidad Didáctica

Los criterios de idoneidad son aplicables en dos momentos. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo deben hacer las cosas", es decir sirve de pauta para planificar un proceso de estudio. A posteriori, los criterios de idoneidad sirven también para valorar un proceso de estudio, es decir, valorar que tan idónea fue su implementación. (Rubio, 2012, p. 343)

La noción de idoneidad didáctica ha sido introducida en el EOS como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, es decir, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero & Font, 2007):

– ***Idoneidad epistémica***, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

– ***Idoneidad cognitiva***, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

– ***Idoneidad interaccional***. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

– ***Idoneidad mediacional***, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje.

– ***Idoneidad afectiva***, grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

– ***Idoneidad ecológica***, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

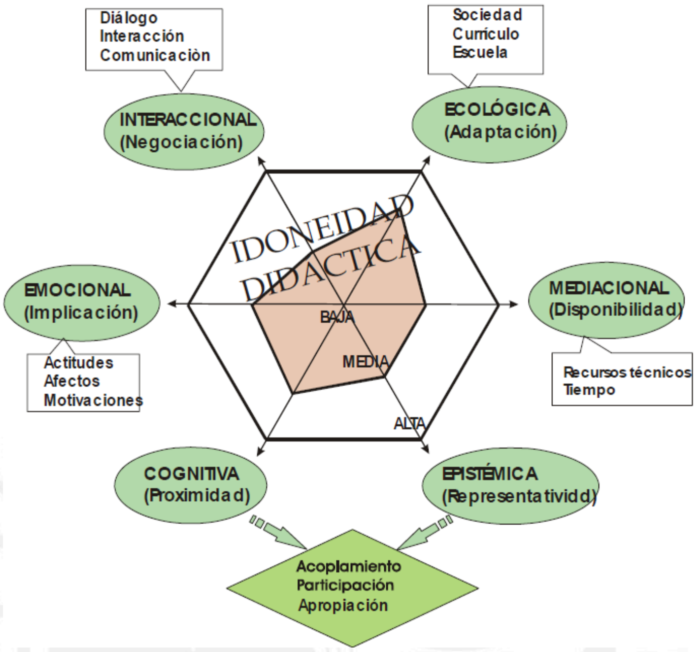


Figura 2.5. Idoneidad Didáctica.

Fuente: (Godino, 2011, p. 6)

La figura 2.5 resume las principales características de dicha noción. Se representa mediante el hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o planificado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización del proceso de estudio implementado. Se sitúan en la base las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos.

El primer paso para poder confeccionar un programa de estudio es determinar qué es idóneo desde los puntos de vista epistémico y cognitivo. La ontología (junto con las facetas duales) propuesta por el EOS permite describir las idoneidades epistémica y cognitiva en términos de configuraciones epistémicas y cognitivas. El centro de dichas configuraciones son las situaciones-problemas seleccionadas para contextualizar y personalizar los significados, aunque ello no signifique dejar de reconocer un papel importante al empleo de tareas rutinarias, necesarias para el desarrollo de competencias procedimentales y algorítmicas.

En las definiciones de las idoneidades epistémica, cognitiva e interaccional juega un papel central la noción de significado. De aquí se deriva que la idoneidad didáctica es relativa a las circunstancias locales en que tiene lugar el proceso de estudio.

El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo, la epistémica, puede requerir unas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Se debe lograr un equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva. También es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos y se creen las condiciones para el desarrollo de competencias comunicativas. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc.

2.4. Indicadores de Idoneidad Didáctica

Para realizar una acción educativa idónea se requiere disponer de directrices claras y explícitas sobre los fines y líneas generales de actuación. La investigación educativa proporciona los sistemas de referencia, las metas a lograr y los medios, pero las decisiones locales están bajo la responsabilidad del docente. La acción instruccional está sujeta a variaciones locales, frecuentemente caóticas.

El logro de una alta idoneidad didáctica de un proceso de estudio, como también su valoración, es un proceso sumamente complejo puesto que, como hemos visto, involucra diversas dimensiones, que a su vez están estructuradas en distintas componentes. Además, tanto las dimensiones como los componentes no son observables directamente y, por lo tanto, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos. En las secciones 2.4.1 a 2.4.8 se presentan algunos indicadores de las distintas idoneidades parciales y de las interacciones entre las mismas, los cuales nos servirán de guía para el diseño de las tareas.

2.4.1. Idoneidad Epistémica

Como se ha indicado, se entiende que un proceso de estudio matemático, tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia. Dicho significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio y deberá ser elaborado teniendo en cuenta los diversos tipos de problemas y contextos de uso del contenido objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas.

En la tabla 2.3 se incluye los componentes y algunos indicadores relevantes que permiten hacer operativa la noción de idoneidad epistémica (o matemática).

Tabla 2.3. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica.

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-Problema	– Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. – Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	– Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre las mismas. – Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. – Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	– Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. – Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. – Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	– Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. – Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.

COMPONENTES	INDICADORES
Relaciones	– Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí

Fuente: Godino (2011, p.8)

En el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central, ya que se asume una concepción antropológica de la matemática, de modo que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinadas “tareas problemáticas”.

2.4.2. Idoneidad Cognitiva

Se define la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. La tabla 2.4 incluye los componentes e indicadores para esta idoneidad.

Tabla 2.4. Componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva.

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	– Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). – Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	– Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. – Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje: (Se tienen en cuenta los mismos elementos que	– Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia). – Comprensión conceptual y proposicional; competencia

COMPONENTES	INDICADORES
para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. – La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. – Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Fuente: Godino (2011, p.10) Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados.

2.4.3. Idoneidad afectiva

La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. La tabla 2.5 incluye los componentes e indicadores para esta idoneidad.

Tabla 2.5. Componentes e indicadores de la idoneidad afectiva.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	– Las tareas tienen interés para los alumnos. – Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	– Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.

	– Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	– Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. – Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Fuente*:* Godino (2011, p.11)

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida.

Los objetos y procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que refieren a estados o rasgos mentales más o menos estables, o a disposiciones para la acción de los sujetos individuales. Pero desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor.

2.4.4. Idoneidad Interaccional

Es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas. En la tabla 2.6 se incluye algunos indicadores de idoneidad referidos a las interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes. Teniendo en cuenta principios de aprendizaje socio-constructivista ampliamente asumidos se valora positivamente la presencia de momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje.

Tabla 2.6. Componentes e indicadores de la idoneidad interaccional.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	– El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) – Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) – Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento – Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. – Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnos	– Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes – Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos – Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	– Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	– Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Fuente: Godino (2011, p.12)

La toma de decisiones sobre la progresión del estudio, tanto por parte del docente como de los estudiantes, requiere la puesta en práctica de procedimientos de observación y encuesta para una evaluación formativa de los aprendizajes.

La importancia del discurso, el diálogo, la conversación en la clase es resaltada por diversos autores como Frankle, Kazemi & Battey (2007 citados en Godino, 2011) que afirman:

> La naturaleza del discurso matemático es una característica central de la práctica de la clase. Si aceptamos seriamente que los profesores necesitan oportunidades para aprender a partir de su práctica, el desarrollo de conversaciones matemáticas permite a los profesores aprender continuamente de sus estudiantes. Las conversaciones matemáticas que se centran sobre las ideas de los estudiantes pueden proporcionar a los profesores una ventana sobre el pensamiento de los estudiantes de manera que el trabajo individual de los estudiantes no lo permite.

2.4.5. Idoneidad Mediacional

Se entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Godino (2011) afirma:

> El uso apropiado de la tecnología es uno de los principios formulados por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000, p.24), indicándose, "La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes". Esta organización profesional sostiene que la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje matemático en el siglo 21, y todas las escuelas deben asegurar que todos sus estudiantes tengan acceso a la tecnología. Los profesores efectivos maximizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, e incrementar su proficiencia en matemáticas. Cuando la tecnología se usa estratégicamente, puede proporcionar acceso a las matemáticas para todos los estudiantes. Se considera, así mismo, que las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad.

En la tabla 2.7 se incluye algunos componentes e indicadores de idoneidad en el uso de recursos tecnológicos, incluyendo artefactos manipulativos. También se debe considerar como factor determinante de la idoneidad mediacional las condiciones ambientales de la clase y el tiempo asignado a la enseñanza y el aprendizaje.

Tabla 2.7. Componentes e indicadores de la idoneidad mediacional.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	– Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. – Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	– El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. – El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) – El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	– El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. – Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. – Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Fuente: Godino (2011, p. 14)

2.4.6. Idoneidad Ecológica

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un proceso de estudio para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno se entiende todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. El proceso de estudio tiene lugar en un contexto educativo que fija unos fines y valores para la educación de los ciudadanos y profesionales que se deben respetar. Dichos fines y valores son interpretados y especificados dentro del proyecto educativo del centro o departamento que coordina la acción de los distintos profesores implicados. El docente forma parte de una comunidad de estudio e indagación que aporta conocimientos útiles sobre prácticas matemáticas y didácticas idóneas que se deberán conocer y aplicar.

Tabla 2.8. Componentes e indicadores de la idoneidad ecológica.

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	– Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	– Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. – Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	– Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	– Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	– Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Fuente: Godino (2011, p. 15)

Las matemáticas se deben enseñar de manera que sean útiles para el ciudadano y los profesionales, no como un sistema cerrado ajeno a las aplicaciones que constituyen su origen y razón de ser.

2.4.7. Interacciones Entre Facetas

Los indicadores de las de las seis facetas, anteriormente mencionadas, no deben considerarse como factores independientes, pues se producen interacciones entre las mismas. En la tabla 2.9 incluimos algunos indicadores de idoneidad relativos a interacciones entre facetas.

Tabla 2.9. Componentes e indicadores relativos a las interacciones entre facetas.

COMPONENTES	INDICADORES
Epistémica-ecológica	– El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	– El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. – Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. – Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos. – Las tareas que los profesores seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.
Epistémica-cognitiva mediacional	– El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva-interaccional	– Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. – Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones

COMPONENTES	INDICADORES
	razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	– El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes. – El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. – El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico – matemáticos.

Fuente: Godino (2011, p. 16)

2.4.8. Idoneidad Temporal y su Relación con las Restantes Facetas

El tiempo dedicado a la enseñanza y el aprendizaje, y su gestión por parte del profesor y de los estudiantes, es un componente determinante de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio. Este factor se incluye como un recurso más en la faceta mediacional, junto con los recursos tecnológicos. Sin embargo, el tiempo interacciona también con las diversas facetas. En la tabla 2.10 se incluye algunos indicadores de idoneidad temporal en relación a las facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica.

Tabla 2.10. Componentes e indicadores de la idoneidad temporal y su relación con las demás facetas.

COMPONENTES	INDICADORES
Temporal-epistémico	– El contenido y sus diversos significados se distribuyen de manera racional a lo largo del tiempo asignado al estudio.
Temporal-cognitivo	– Los objetivos de aprendizaje tienen en cuenta las etapas de desarrollo evolutivo de los estudiantes.
Temporal-instruccional	– La gestión del tiempo instruccional tiene en cuenta los

COMPONENTES	INDICADORES
	diversos momentos requeridos para el desarrollo de los distintos tipos de aprendizajes (exploración, formulación, comunicación, validación, institucionalización, ejercitación, evaluación).
Temporal – ecológico	– El tiempo asignado al proceso de estudio en el diseño curricular es adecuado para lograr el aprendizaje del contenido programado.

Fuente: Godino (2011, p.17)

2.5. Compatibilidad entre los principios psicopedagógicos de la EBR, los principios de la EMR y la teoría de idoneidad didáctica.

A continuación mostraremos la compatibilidad entre los principios psicopedagógicos de la EBR –que incluye a la Resolución de Problemas como marco pedagógico en el área de matemática– con la idoneidad didáctica y los principios de la Matemática Realista. Esta compatibilidad permite poder aplicar la Teoría de Idoneidad Didáctica y la EMR en el contexto de la EBR para poder diseñar, valorar y rediseñar procesos de instrucción sin crear conflictos o contradicciones con los principios psicopedagógicos de la EBR y la Resolución de Problemas. A la vez establecemos algunos requerimientos que deben cumplir las tareas a diseñar, y que también se puedan considerar en una futura implementación o en un futuro rediseño.

Idoneidad epistémica

Como se afirmó en la sección 2.3 en el marco del EOS se atribuye a las situaciones problemas un papel central lo cual coincide con lo visto en la sección 2.1.1, es decir esta posición es coincidente con el primero de los rasgos principales del enfoque centrado en la resolución de problemas: donde se destaca que la resolución de problemas debe impregnar íntegramente el currículo de matemática de la EBR, es decir, la resolución de problemas es el eje vertebrador alrededor del cual se organiza la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática. Lo anterior también coincide con la EMR.

En esta teoría se propone el uso de situaciones-problemas como medio para contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones.

Los principios de actividad y de realidad de la EMR apoyan la consideración de los indicadores recogidos en la Tabla (2.3) como indicadores de idoneidad epistémica. Para Freudenthal (1991 citado en Godino, 2011) las matemáticas son una actividad humana. "No hay matemáticas sin matematización", actividad que puede ser de aplicación a resolver problemas del entorno, o problemas de reorganización del propio conocimiento matemático.

Lo importante para el logro de una alta idoneidad epistémica será la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas "ricas". Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención a las diversas representaciones o medios de expresión (cambio de configuración epistémica), las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Entonces, las tareas a elaborar deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones.

También se debe prestar atención a las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático, y la articulación de los diversos significados parciales de los objetos en estudio. Las matemáticas son un campo de estudio integrado. Esta posición concuerda con el "Principio de interconexión" de la EMR. Los contenidos matemáticos (numeración y cálculo, álgebra, geometría, etc.) no pueden ser tratados como entidades separadas. La resolución de problemas de contexto "ricos" con frecuencia significa que se tiene que aplicar un amplio rango de herramientas y comprensiones matemáticas. Entonces las situaciones problemáticas a elaborar deberán incluir contenidos matemáticos interrelacionados.

Idoneidad cognitiva

Como se afirmó en la sección 2.4.2 el aprendizaje supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales (saberes previos) de los estudiantes y los significados institucionales planificados (nuevo conocimiento). Esto coincide con el principio de significatividad de los aprendizajes y el principio de construcción de los propios aprendizajes de la EBR: el aprendizaje significativo es posible si se relacionan los nuevos conocimientos con los que ya se poseen, lográndose así la motivación del estudiante.

La idoneidad cognitiva comprende también el principio de evaluación de los aprendizajes de la EBR, donde la metacognición y la evaluación, en sus diferentes formas, son necesarias para promover la reflexión sobre los propios procesos de enseñanza y aprendizaje.

Idoneidad afectiva

Como se afirmó en la sección 2.4.3. el dominio afectivo conlleva una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor.

Esto coincide con una de las características del enfoque centrado en la resolución de problemas de la EBR, que afirma que los problemas deben responder a los intereses y necesidades de los estudiantes. También coincide con el principio de realidad de la EMR, en donde se afirma que los estudiantes deben ser capaces de poder imaginarse el problema a desarrollar como un primer paso en su solución.

Idoneidad interaccional

La idoneidad interaccional coincide con el principio de necesidad del desarrollo de la comunicación y el acompañamiento en los aprendizajes de la EBR, también con el principio de interacción de la EMR. La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los métodos formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.

Uno de los principios principales de la EMR para la educación matemática es que se debe dar a los estudiantes una "oportunidad guiada" de "reinventar" las matemáticas. Esto implica que, en la EMR, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en cómo los estudiantes aprenden los conocimientos.

Lo anterior se corrobora con las sugerencias dadas para mejorar la práctica pedagógica en la EBR (Rutas del aprendizaje, p. 4)

> Por lo tanto, los docentes debemos convencernos de que todos los niños sin excepción tienen capacidades de aprender. Esta certeza es el punto de partida de nuestro trabajo pedagógico y un requisito indispensable para el éxito de nuestros esfuerzos.

Idoneidad mediacional

Esta idoneidad va acorde con uno de los propósitos de la EBR, que es el dominio de las tecnologías de la información y comunicación (TIC).

Adicionalmente, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa "MAXIMA" pues cumple los requisitos mencionados anteriormente.

Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla la posibilidad de usar las horas de libre disponibilidad. Se puede tomar las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática. (DCN, 2009, p.50)

Idoneidad ecológica

Esta idoneidad es compatible con algunas características del currículo de la EBR:

Abierto

Está concebido para la incorporación de competencias: capacidades, conocimientos y actitudes que lo hagan pertinente a la realidad, respetando la diversidad. Se construye con la comunidad educativa y otros actores de la sociedad de modo participativo.

Flexible

Permite modificaciones en función de la diversidad humana y social, de las particularidades, necesidades e intereses de los grupos poblacionales y etarios a quienes se dirige y de los cambios que la sociedad plantea.

Integrador

Los contenidos de las diferentes áreas se relacionan entre sí. Se contemplan temas transversales que responden a problemas nacionales y de alcance mundial.

Adicionalmente, para que un currículo cumpla bien su función, debe tener las siguientes características: (rutas del aprendizaje, p. 3)

Adecuada gradualidad

Cada competencia debe desarrollarse de manera continua y progresiva a lo largo de los ciclos y niveles.

Baja densidad

La cantidad de contenidos debe ser proporcional al tiempo disponible durante el periodo de enseñanza.

Pertinente

Las competencias y capacidades deben aplicarse para resolver problemas cotidianos en contextos y escenarios reales.

De esta manera evidenciamos las coincidencias entre los principios psicopedagógicos de la EBR con los principios de la EMR y la Teoría de la Idoneidad Didáctica determinando compatibilidad entre ellos. Además, creemos que es pertinente aplicar la Teoría de Idoneidad Didáctica en el diseño (planificación) de tareas que permitan el estudio del objeto matemático matriz en el sétimo ciclo de la EBR.

Es importante volver a aclarar que para el presente trabajo de diseño (planificación) de tareas, que guiarán el proceso de estudio del objeto matemático matriz, consideraremos como base a la idoneidad epistémica, cognitiva y ecológica, pues las tareas a diseñar giran en torno a unos conocimientos específicos del objeto matemático matriz y debemos adecuarlos, de tal manera que se encuentren en la zona de desarrollo próximo de nuestro estudiante hipotético, y a la vez perciban la utilidad de estos conocimientos. Cuando sea posible tendremos en cuenta las otras tres idoneidades restantes (interaccional, mediacional y afectiva).

Capítulo 3

Significado Institucional de Referencia

Resumen

En este capítulo caracterizamos un significado institucional de referencia para los objetos matemáticos matriz y grafo. Esto implica realizar un estudio histórico, epistemológico y didáctico de dichos objetos matemáticos. Este significado institucional de referencia nos permitirá realizar las configuraciones epistémicas de los diversos ejemplos y ejercicios referentes a aplicaciones de matrices de los textos seleccionados.

3.1. Matrices y determinantes de matrices.

Iniciamos esta sección realizando una aproximación al desarrollo histórico del álgebra de matrices. Se tratan los inicios de los conceptos de matriz y determinante, tomando como referencia el trabajo histórico realizado por Luzardo y Peña (2006).

Historia de las matrices y Determinantes

Los matemáticos ingleses James Joseph Sylvester (1814-1897) y Arthur Cayley (1821-1895) son considerados entre los mejores matemáticos de sus tiempos. Ambos ejercieron la abogacía y compartieron, a parte de una gran amistad, un gran interés por la matemática.

Sylvester, en 1850, fue quien acuño la palabra matriz y la definió como un "arreglo cuadrilongo de términos". Su intención fue que su significado fuera "madre de los determinantes" (Grossman, 2008, p. 203).

Cayley, en 1853, publica una nota en donde aparece por primera vez la inversa de una matriz. Años más tarde, Cayley publica su *Memoir on the theory of matrices*, la cual contiene la primera definición abstracta de matriz y el desarrollo del algebra matricial. Define las operaciones básicas de suma, multiplicación y multiplicación por escalares, así como la inversa de una matriz invertible.

Es por eso que Arthur Cayley es considerado como el fundador de la teoría de matrices.

Es necesario mencionar que históricamente fueron los matemáticos chinos los pioneros en esta materia. Así mismo, indicios de las operaciones básicas de suma y multiplicación de matrices aparecen en trabajos anteriores de Euler, Lagrange y Gauss.

Por otro lado, los inicios de la teoría de los determinantes de matrices se remontan hasta el siglo II a. C. con los matemáticos chinos. La idea de determinante surge en Japón y Europa casi al mismo tiempo.

En Japón fue Takakasu Seki Kawa (1642-1708) el primero en publicar un trabajo sobre determinantes. En 1683 Seki escribió un manuscrito titulado *Método de resolver los problemas disimulados*. En este manuscrito Seki es capaz de calcular el determinante de matrices cuadradas de hasta orden cinco pero no cuenta con un término que corresponda a la idea de determinante.

La aparición de la noción de determinante en Europa fue en 1693, en una carta de Leibniz a Guillaume de l´Hôpital (1661-1704). Leibniz usó el término "resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante.

En 1730, Colin Maclaurin (1698-1746) escribió su *Tratado de álgebra*, y fue publicado en 1748, dos años después de su muerte. En este trabajo aparecen los primeros resultados de determinantes, se prueba la regla de Cramer para sistemas pequeños de 2×2 y 3×3.

Gabriel Cramer (1704-1752) anunció la regla general para sistemas $n \times n$; sin embargo, ésta solo aparece enunciada y sin ofrecer prueba alguna de este hecho.

Más adelante, en 1764, Etienne Bézout (1730-1783) muestra métodos novedosos para calcular determinantes, lo mismo hace Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–796) en 1771. Estos métodos novedosos son criticados por Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) señalándolos de imprácticos. Laplace usa el término "resultante" para señalar lo que se conoce hoy como determinante, coincidiendo con el término usado por Leibniz.

Por su parte, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), en un artículo publicado en 1773 presenta por primera vez la interpretación del determinante como un volumen.

El término "determinante" fue usado por primera vez por Gauss en sus *Disquisitiones arithmeticae* publicadas en 1801 en donde estudia las formas cuadráticas. Gauss usó este término pues éste “determina” completamente las propiedades de la forma cuadrática. Pero este concepto no es el mismo que hoy se conoce.

En 1812, Cauchy introduce el término “determinante” en el sentido moderno y prueba que $det\ (A\ B) = det\ (A)\ det\ (B)$. En 1841, Jacobi publica tres tratados sobre determinantes, en ellos aparecen por primera vez una definición algorítmica del determinante y con la novedad que las entradas en el determinante pueden ser números o funciones. En ese mismo año Cayley, publicó la primera contribución en inglés de la teoría de determinantes. En esta publicación se usan dos líneas verticales sobre ambos lados del arreglo de los coeficientes de la matriz para denotar el determinante. La definición axiomática del determinante que hoy se conoce se debe a Kronecker y Weierstrass. Las conferencias de Weierstrass fueron publicadas en 1903 después de su muerte.

De esta breve aproximación histórica observamos que los determinantes de matrices aparecieron en los textos matemáticos mucho antes que las matrices. Hecho que es contradictorio con la secuencia en que se enseñan estos objetos matemáticos en la actualidad.

3.1.1. Objeto matemático matriz.

El propósito de esta sección es catalogar brevemente, sin pruebas o demostraciones, un número de conceptos y hechos útiles, que formarán parte del significado institucional de referencia del objeto matemático matriz de nuestra investigación, específicamente la parte epistémica del objeto matemático. También incluimos un número de conceptos útiles que no son encontrados comúnmente en otra bibliografía; para este propósito elegimos el capítulo 0 del libro de Horn y Jhonson (1985) que ofrece un contenido “robusto” sobre análisis matricial. Para especificar algunos resultados usaremos también a Quiroga (2005) y a Joyner & Nakos (1999). Todo este desarrollo nos permitirá realizar las configuraciones epistémicas que mostramos en el capítulo 4.

3.1.1.1.Espacio Vectorial.

El concepto de espacio vectorial es el marco fundamental para el desarrollo de la teoría de matrices. Así mismo, lo que subyace a un espacio vectorial es el campo o cuerpo de escalares, donde ocurre la multiplicación. Para nuestro propósito, el cuerpo subyacente será casi siempre los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$ bajo la adición y multiplicación usual, pero puede ser los números racionales o algún otro. Cuando el cuerpo no se especifica usamos el símbolo $\mathbb{F}$.

3.1.1.2.Cuerpo de Escalares – Definición.

Un conjunto de escalares $\mathbb{F}$ dotado de dos operaciones binarias es un cuerpo si es cerrado bajo las dos operaciones binarias, la adición y multiplicación, ambas operaciones son asociativas y conmutativas y tienen un elemento identidad en el conjunto; todo elemento del conjunto tiene inverso aditivo e inverso multiplicativo, excepto la identidad aditiva 0; la operación de multiplicación siempre es distributiva sobre la operación de la adición.

3.1.1.3.Espacio Vectorial – Definición.

Un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un conjunto V de objetos (llamados vectores) que es cerrado bajo la operación binaria de la adición, asociativo, conmutativo, tiene elemento identidad 0 e inverso aditivo en el conjunto.

Además el conjunto V es cerrado bajo la operación de multiplicación por un escalar, con las siguientes propiedades,

Para todo $a, b \in \mathbb{F}$ y $x, y \in V$ se cumple:

- $a(x+y) = ax+by$
- $(a+b)x = ax+bx$
- $a(bx) = (ab)x$
- $ex = x$, $e \in \mathbb{F}$ (identidad multiplicativa)

3.1.1.4.Subespacios y Generadores.

Un subespacio U de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un subconjunto de V que es, por sí mismo, un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$.

Si $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ es un subconjunto de un espacio vectorial, el generado por S es el conjunto que se denota y define como

$$\text{Gen}(S) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_kv_k : a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{F}, v_1, \cdots v_k \in S\};$$

nótese que Gen(S) es siempre un subespacio vectorial aún si S no lo es.

El conjunto S se dice que genera el espacio vectorial V si Gen(S) = V.

3.1.1.5.Dependencia e independencia lineal.

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ que pertenecen a un espacio vectorial se dicen que son linealmente dependientes si existen coeficientes $a_1, \cdots, a_k$ no todos nulos, en el cuerpo $\mathbb{F}$ tal que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_kv_k = 0$.

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ que pertenecen a un espacio vectorial que no es linealmente dependiente se dice linealmente independiente, esto significa que si $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_kv_k = 0$, entonces $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

3.1.1.6.Bases.

Un subconjunto *S* de un espacio vectorial *V* se dice que genera *V* si cada elemento de *V* puede ser representado por una combinación lineal de los elementos de *S*.

Un conjunto linealmente independiente que genera un espacio vectorial *V* se llama una base para *V*.

3.1.1.7.Extensión a una base.

Cualquier conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial *V* de dimensión finita puede ser extendido a una base de *V*; es decir, dado un conjunto linealmente independiente $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ en *V*, existen $v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_n \in V$ tal que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de *V*.

3.1.1.8.Dimensión.

Si alguna base del espacio vectorial *V* consiste en un número finito de elementos, entonces todas las bases tienen el mismo número de elementos; este número es llamado la dimensión del espacio vectorial *V* y es denotado por *dim V*.

3.1.1.9.Isomorfismos.

Si *U* y *V* son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{F}$, y si $f: U \to V$ es una función invertible tal que $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$ para todo $x, y \in U$ y $a, b \in \mathbb{F}$, entonces *f* es un isomorfismo y se dice que *U* y *V* son isomorfos.

Los espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión, así, un espacio vectorial $n-$ dimensional sobre el campo $\mathbb{F}$ es, por lo tanto, isomorfo a $\mathbb{F}^n$. Cualquier espacio real n – dimensional es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Específicamente, si V es un espacio vectorial n – dimensional sobre el campo $\mathbb{F}$ con base específica $\mathfrak{B}=\{v_1,v_2,\cdots v_n\}$, entonces, cada elemento $v\in V$ puede ser escrito únicamente como $v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots a_nv_n, a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{F}$, podemos asociar x con un n – vector $[x]_{\mathfrak{B}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ relativa a la base. El mapeo $x\rightarrow[x]_{\mathfrak{B}}$ es un isomorfismo entre V y $\mathbb{F}^n$ para cualquier base $\mathfrak{B}$.

3.1.2. Matrices.

El objeto fundamental de estudio aquí puede considerarse de dos maneras importantes: como un arreglo rectangular de escalares o como una transformación lineal entre dos espacios vectoriales, teniendo en cuenta las bases específicas para cada espacio vectorial.

3.1.2.1. Arreglos Rectangulares.

Una matriz es un arreglo de m filas por n columnas de escalares de un cuerpo $\mathbb{F}$. Si m = n, la matriz se dice cuadrada. El conjunto de todas las matrices m por n sobre $\mathbb{F}$ es denotado por $M_{m,n}(\mathbb{F})$; y $M_{n,n}(\mathbb{F})$ es abreviado por $M_n(\mathbb{F})$. En el caso más común en que $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, los números complejos, $M_n(\mathbb{C})$ es abreviado por M_n y $M_{m,n}(\mathbb{C})$ por $M_{m,n}$
.

El conjunto de todas las matrices m por n sobre $\mathbb{F}, M_{m,n}(\mathbb{F})$, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$.

Las matrices son usualmente denotadas por letras mayúsculas, por ejemplo si

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & \pi & 4 \end{bmatrix}$$

entonces, $A\in M_{2,3}(\mathbb{R})$. Una submatriz de una matriz dada, es un arreglo rectangular formado por subconjuntos específicos de filas y columnas de la matriz dada, por ejemplo $\begin{bmatrix}\pi & 4\end{bmatrix}$ es una submatriz de la matriz *A*.

Una matriz puede considerarse como un arreglo rectangular que permite almacenar información de manera ordenada (Quiroga, 2005, p. 2), específicamente una matriz *A* de orden $m \times n$ (m, n son números enteros mayores o iguales que uno) es un conjunto de $m \times n$ elementos a_{ij} perfectamente ordenado en m filas y n columnas

$$A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El elemento a_{ij} se llama elemento genérico (entrada) de la matriz A; está situado en la fila i y en la columna j de dicha matriz. El primer subíndice i nos indica la fila a la que pertenece el elemento; y el segundo subíndice j nos señala la columna en la que está situado.

Se conoce con el nombre de diagonal principal de una matriz cuadrada $A_{n\times n}$ al conjunto de elementos a_{ij} tales que $i = j$, esto es

$$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}\}$$

La diagonal secundaria de una matriz cuadrada $A_{n\times n}$ es el conjunto de elementos a_{ij} tales que $i + j = n+1$. (Quiroga, 2005, p.7)

Se llama traza de una matriz cuadrada $A_n(\mathbb{R})$ a la suma de los n elementos de la diagonal principal

$$tr.A = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots a_{nn}.$$

3.1.2.2.Transformaciones Lineales.

Una transformación lineal es una función $T : U \to V$ tal que $T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$ para escalares arbitrarios a_1, a_2 y vectores v_1, v_2.

Sea U un espacio vectorial n – dimensional y V un espacio vectorial m – dimensional sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$; sea $\mathfrak{B}_U$ una base de U y $\mathfrak{B}_V$ una de base de V. Podemos usar el isomorfismo $x \to [x]_{\mathfrak{B}U}$ y $y \to [y]_{\mathfrak{B}V}$ para representar vectores en U y V como un n – vector y un m – vector sobre $\mathbb{F}$, respectivamente.

Una matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ corresponde a una transformación lineal $T : U \to V$ en la forma siguiente:

El vector $y = T(x)$ si y solo sí $[y]_{\mathfrak{B}U} = A[x]_{\mathfrak{B}V}$.

Se dice que la matriz A representa a la transformación lineal T con respecto a las bases $\mathfrak{B}_U$ y $\mathfrak{B}_V$.

La representación de la matriz A depende de las bases elegidas; cuando estudiamos la matriz A, estudiamos la transformación lineal relativa a las bases particulares elegidas, pero mencionar a las bases generalmente no es necesario, debido a que se asume que se ha elegido una base estándar.

3.1.2.3. Espacios Vectoriales Asociados con una Matriz o una Transformación Lineal.

No hay perdida de generalidad en la asociación de un espacio vectorial n – dimensional sobre $\mathbb{F}$ con $\mathbb{F}^n$, y que se piense en $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ como una transformación lineal de $\mathbb{F}^n$ a $\mathbb{F}^m$ (y también como un arreglo). El dominio de tal transformación lineal es $\mathbb{F}^n$, su rango es el conjunto $\left\{ y \in \mathbb{F}^m : y = Ax, x \in \mathbb{F}^n \right\}$, el espacio nulo o núcleo de A es $\left\{ x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0 \right\}$. El rango de A es un sub espacio de $\mathbb{F}^m$, y el espacio nulo de A es un subespacio de $\mathbb{F}^n$.

Tenemos la relación

$$n = \text{dimensión del espacio nulo de } A + \text{dimensión del rango de } A$$

3.1.3. Operaciones con Matrices

La adición de matrices está definida para arreglos de la misma dimensión y es denotada por $A+B$; esto corresponde a la adición de transformaciones lineales (relativas a las misma base), y hereda la conmutatividad y asociatividad del cuerpo de escalares.

Específicamente, sean las matrices $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, la suma (diferencia) de A y B es otra matriz $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $(D \in M_{m,n}(\mathbb{R}))$ cuyo elemento genérico c_{ij} (d_{ij}) se obtiene como resultado de sumar (restar) los elementos a_{ij} y b_{ij}

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n} = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$
$$A_{m\times n} - B_{m\times n} = D_{m\times n} = [c_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

La matriz cero (todas sus entradas son cero) es la identidad de la adición, y $M_{m,n}(\mathbb{F})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

La multiplicación de matrices está definida de la manera usual, es denotada por la yuxtaposición, AB y corresponde a la composición de transformaciones lineales.

La multiplicación de matrices está definida solo cuando $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{F})$ y $p = n$;

el producto $A.B$ es

$$A_{m\times n} \,.\, B_{n\times q} = \mathrm{C}_{m\times q} = [c_{i\,j}]$$

donde el elemento genérico, $c_{i\,j}$, de la matriz producto C se obtiene mediante la fórmula de Binet-Cauchy

$$c_{ij} = \sum_{k=1,2,\cdots,n} a_{ik}b_{kj}$$

La multiplicación de matrices es asociativa.

En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa; por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pero esta, puede ser conmutativa cuando restringimos a ciertos subconjuntos de $M_{m,n}(\mathbb{F})$, como vemos a continuación.

La matriz identidad bajo la multiplicación de matrices, se denota por $I = M_n(\mathbb{F})$ y es de la forma:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz y todos sus múltiplos escalares de esta (llamadas matrices escalares) conmutan bajo la multiplicación con todas las matrices en $M_{m,n}(\mathbb{F})$ y son las únicas matrices que lo hacen. La multiplicación de matrices es distributiva respecto a la adición de matrices.

Notemos que el símbolo 0 es usado para denotar: al cero escalar, al vector cero (todas sus componentes iguales a cero), y la matriz nula (todas las entradas iguales al cero escalar).

Generalmente, el contexto dejará claro lo que representa o habrá confusión. También usamos el símbolo I para denotar la matriz identidad de cualquier tamaño; si existe la posibilidad de confusión, se indicará la dimensión.

Gracias a la multiplicación matricial, es posible definir la potencia de matrices solo para matrices cuadradas. Sea $A_n(\mathbb{F}), \mathbb{F}=\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ una matriz cuadrada se define (Quiroga, 2005, pp. 16 – 17)

$$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^2 = A.A,\ A^n = A.A.A...A,\ A^n.A^m = A^{m+n}$$

Si $A_n^2 = A_n$, la matriz A se llama idempotente.

Si $A_n^2 = I_n$, la matriz A se llama involutiva.

Si $A_n^2 = 0_n$, la matriz A se llama nilpotente de índice 2.

Si $A_n^2 \neq 0_n, A_n^3 = 0_n$, la matriz A se llama nilpotente de índice 3.

Si $A_n^2 \neq 0_n, A_n^3 \neq 0_n, \cdots, A_n^{n-1} \neq 0_n, A_n^n = 0$, la matriz A se llama nilpotente de índice n.

3.1.4. Matriz Traspuesta.

Si $A=\left[a_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, la traspuesta de A, denotada por A^T, es la matriz en $M_{n,m}(\mathbb{F})$ cuyas entradas son a_{ji}; es decir las filas son intercambiadas por las columnas y viceversa. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Es claro que $\left(A^T\right)^T = A$.

La traspuesta obedece a la ley del orden contrario, es decir, $\left[AB\right]^T = B^T A^T$, asumiendo definido el producto.

3.1.5. Una Clasificación de Matrices

Sea $M_{m,n}(\mathbb{F})$ el espacio vectorial de matrices de orden m por n sobre el cuerpo $\mathbb{F}$.

- Matriz fila o vector fila

  Es aquella matriz rectangular que tiene una sola fila y se denota por $A_{1,n}$, $A_{1,n} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

- Matriz columna o vector columna

  Es aquella matriz rectangular que tiene una sola columna y se denota por $A_{m,1}$, $A_{m,1} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$.

- Matriz triangular

  Es aquella matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F}) = \left[a_{ij}\right]$, tal que $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$ o para todo $i < j$.

- Matriz simétrica

  Es toda matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F}) = \left[a_{ij}\right]$, tal que $a_{ij} = a_{ji}$, o $\left(A_n = A_n^T\right)$.

- Matriz antisimétrica o hemisimétrica

  Es toda matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{F}) = \left[a_{ij}\right]$, tal que $a_{ij} = -a_{ji}$, o $\left(A_n = -A_n^T\right)$.

  Se destacan las siguientes propiedades: Toda matriz cuadrada sumada con su traspuesta genera una matriz simétrica. La diferencia de toda matriz cuadrada con su traspuesta genera una matriz antisimétrica. Toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica. El producto de toda matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.

- Matriz estocástica

  Una matriz estocástica es una matriz cuadrada con elementos reales no negativos, en la cual la suma de los elementos de cada columna es uno. Y se dice que es doblemente estocástica cuando también cada una de sus filas suma uno.

  Tiene aplicaciones en procesos de Markov, donde recibe el nombre de matriz de transición o matriz de Markov (Quiroga, 2005, p.211).

3.1.6. Determinantes

A menudo en matemáticas es útil resumir un fenómeno multivariable con un simple número, y el determinante es un ejemplo de esto. El determinante es definido sólo para matrices cuadradas $A \in M_n(\mathbb{F})$ y puede ser presentado de dos formas: mediante la expansión de Laplace y por permutaciones (sumas alternadas), aparentemente diferentes, pero que realmente son equivalentes.

Denotamos el determinante de $A \in M_n(\mathbb{F})$ por *det* (*A*) o |*A*|.

3.1.6.1.Expansión de Laplace

El determinante puede ser definido inductivamente para $A=\left[a_{i\,j}\right]\in M_n(\mathbb{F})$ de la siguiente manera.

Asumamos que el determinante es definido sobre $M_{n-1}(\mathbb{F})$ y $A_{i\,j}\in M_{n-1}(\mathbb{F}), n>1$ denota las submatrices de $A\in M_n(\mathbb{F})$ que resultan de la eliminación de la fila *i* y columna *j*, entonces

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i\,j}\det A_{i\,j}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i\,j}\det A_{i\,j}$$

Para toda $i\leq n; j\leq n$, y este valor común es el det *A*. La expresión del lado izquierdo es la expansión de Laplace por menores a lo largo de la fila *i*, y la expresión del lado derecho es la expansión de Laplace por menores a lo largo de la columna *j*. Para alguna elección de fila o columna, cualquiera de las dos expansiones produce el determinante. Esta presentación inductiva comienza por definir el determinante de una matriz 1 por 1, que es el valor de la única entrada, por lo tanto,

$$\det\left[a_{11}\right]=a_{11}$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}.a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

y así sucesivamente.

Si $A\in M_n(\mathbb{F})$, se cumple que $\det A^T=\det A$

3.1.6.2.Sumas Alternadas

Antes de dar esta definición veremos que es una permutación, una sucesión, una inversión y la clase de una permutación (Quiroga, 2005, pp. 37 – 45), pues en términos de ellas definiremos el determinante como una suma alternada.

Se llama permutación principal a la que sigue el mismo orden de los números naturales (1, 2, 3, …, *n*).

Dos elementos forman sucesión cuando, prescindiendo de los demás, están colocados en el mismo orden que la permutación principal. Por ejemplo en 1 2 3 4 forman sucesión: el 1 con el 2, el 1con el 3 y el 1 con el 4; el 2con el 3 y el 2 con el 4; el 3 con el 4.

Dos elementos forman inversión cuando, prescindiendo de los demás, están colocados en orden distinto al de los números naturales.

Para hallar el número de inversiones de una permutación, basta comparar cada elemento con todos los que le siguen. Por ejemplo en 1 4 3 2 las inversiones son: el 4 con el 3 y el 4 con el 2; el 3 con el 2. Hay por tanto tres inversiones.

Una permutación es de clase par si el número de sus inversiones es par.

Una permutación es de clase impar si el número de sus inversiones es impar.

Si el número de inversiones es *i*, el signo de la permutación será: $(-1)^i$. De esta expresión se desprende que las permutaciones de clase par son positivas y las de clase impar son negativas.

Si en una permutación se cambian dos elementos entre sí, la permutación cambia de clase.

Entre las $n!$ permutaciones de n elementos hay $\frac{n!}{2}$ pares, y $\frac{n!}{2}$ impares.

Determinante (sumas alternadas)

A toda matriz cuadrada de A orden n le corresponde un polinomio llamado Determinante de A, y denotado por det (A), o $|A|$, cuyos términos están formados por los productos posibles (permutaciones de n elementos, $n!$) de n elementos de A, tomados de tal manera que no haya en ningún producto (permutación) nada más que un elemento (factor del producto) de cada fila y de cada columna. Todo producto va precedido del signo más o menos según que las permutaciones de los subíndices de los elementos de A sean de clase par o impar, respectivamente.

Teniendo esto en cuenta tendremos la regla de Sarrus, que solo es válido para matrices cuadradas de orden tres.

Regla de Sarrus

Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se agregan las dos primeras columnas a la derecha de A

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Se forman los productos de los elementos que atraviesan las flechas. A los productos que van de la izquierda superior a la derecha inferior se les asigna el signo más pues corresponde a permutaciones de clase par. A los otros se les asigna el signo menos pues corresponden a permutaciones de clase impar.

Obteniéndose:

$$\det A = a_{11}.a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Al aplicar la definición a matrices cuadradas de orden uno, dos, tres, etc. tenemos los mismos resultados obtenidos con la expansión de Laplace:

$$\det\left[a_{11}\right] = a_{11}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}.a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Esto hace evidente porque la regla de Sarrus no se puede aplicar a matrices cuadradas cuyo orden es diferente a tres.

En el caso de un determinante de orden 4, es muy complicado aplicar la definición de sumas alternadas, pues la obtención de los 4! = 24 términos del desarrollo es muy penosa (Rojo, 1995).

Propiedades de los determinantes

- Si los elementos de una fila o columna son todos nulos, el determinante es cero.
- Si se multiplica por un número *h* a cada uno de los elementos de una fila o columna, el determinante queda multiplicado por ese número *h*.

- Si se cambian entre sí dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo pero conserva su valor absoluto.
- Si dos filas o columnas son iguales, o proporcionales, el determinante es nulo.
- Un determinante no varía si se intercambia la *i*–ésima fila con la *i*–ésima columna.
- Un determinante se puede descomponer en suma de otros determinantes del mismo orden.
- Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las demás filas o columnas respectivamente, el determinante no varía.
- Si una fila (o columna) es combinación lineal de las demás filas (o columnas) el determinante es nulo.

3.1.7. Matriz Inversa (Definición)

Se dice que la matriz $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n(\mathbb{R})$ es invertible, si existe una matriz $B\in M_n(\mathbb{R})$, llamada la inversa de A tal que

$$AB = BA = I$$

Si $A=\left[a_{ij}\right]\in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz cuadrada de orden n, se conoce como menor complementario del elemento a_{ij} al determinante que resulta de suprimir la fila i y la columna j de la matriz a la que pertenece. Lo designamos por M_{ij}.

A cada menor complementario M_{ij} le corresponde un adjunto (o cofactor de a_{ij}), A_{ij}, tal que:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

La matriz adjunta de la matriz A es la matriz cuadrada, de orden n, $Adj(A)=\left[A_{ji}\right]\in M_n(\mathbb{R})$ siendo el elemento genérico A_{ji} el adjunto o cofactor del elemento a_{ji} de A.
Es decir, la matriz adjunta de una matriz cuadrada es la traspuesta de la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor.

3.1.7.1.Teorema

Una matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)$$

A las matrices invertibles se les conoce como regulares o no singulares.

3.1.7.2.Teorema (Joyner & Nakos, 1999, p. 185)

Sea $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ matrices cuadradas, $b \in \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *A* es invertible.
2. $A \sim I_n$. (*A* es equivalente con la matriz identidad)
3. *A* es producto de matrices elementales.
4. Hay una matriz *B*, tal que $AB = I_n$.
5. Hay una matriz *C*, tal que $CA = I_n$.
6. Cada columna de *A* es columna pivote.
7. Cada fila de *A* tiene un pivote.
8. Las columnas de *A* son linealmente independientes.
9. Las filas de *A* son linealmente independientes.
10. Las columnas de *A* generan a $\mathbb{R}^n$.
11. Las filas de *A* generan a $\mathbb{R}^n$.
12. El sistema $A\,X = b$ tiene al menos una solución para todo vector *nb*.
13. El sistema $A\,X = b$ tiene solamente una solución para todo vector *nb*.
14. El sistema homogéneo $AX = 0$ sólo tiene la solución trivial.

En la siguiente sección estudiaremos el objeto matemático grafo tomando como referencia a Joyner & Nakos (1999, pp. 197 – 204). Este estudio nos permitirá realizar las configuraciones epistémicas que realizaremos en el capítulo 4.

3.2. TEORÍA DE GRAFOS

El álgebra de matrices tiene una estrecha relación con la teoría de grafos. Estas representaciones, que serán definidas en la sección (3.6.1), sirven para estudiar las interrelaciones entre los componentes de redes de actividades que se presentan en el comercio, en las ciencias sociales, en la medicina y en muchas otras áreas. Por ejemplo, los grafos son útiles para estudiar las relaciones familiares en una sociedad tribal, la difusión de una enfermedad contagiosa o, una red de vuelos que conectan un número dado de ciudades.

A continuación presentamos una breve historia del inicio de la teoría de grafos. Para este propósito tomamos como referencia a Menéndez (1998).

Breve historia de los grafos

El primer artículo conocido sobre la teoría de grafos fue escrito por Euler y publicado en 1736 para dar solución al célebre problema de “Los puentes de Königsberg”. El problema se resume en la pregunta siguiente ¿Es posible encontrar una ruta en la ciudad de Königsberg que recorra los siete puentes, cruzando cada uno de ellos una sola vez y regresando al punto de partida? Euler solucionó el problema, afirmando que no era posible. Así surgió el concepto de grafo euleriano que, en un lenguaje coloquial, es “aquel grafo que puede ser dibujado sin levantar el lápiz del papel, sin pasar dos veces por la misma línea y acabando en el punto de partida”.

Desde ese momento muchos matemáticos importantes han realizado contribuciones. En los siglos XVIII y XIX se puede citar a Vandermonde, Cauchy, Cayley, Hamilton, Kempe, Tait, Heawood, Kirchoff y Petersen, entre otros. En 1936 aparece el primer texto sobre este tópico escrito por D. König. Desde sus orígenes la teoría de grafos se usó para la resolución de juegos matemáticos, para el estudio de circuitos eléctricos y en diversas aplicaciones en una multitud de campos diferentes. La teoría de grafos está estrechamente ligada a otros campos de las matemáticas como la topología (topología monodimensional), la teoría de grupos, la teoría de matrices, la teoría de conjuntos y la combinatoria.

Los grafos pueden ser representados mediante matrices. La matriz asociada a un grafo se le llama matriz topológica o matriz de adyacencia de los vértices. La ventaja de la representación matricial es que las matrices poseen una estructura algebraica de espacio vectorial, permitiéndose la manipulación de las matrices para extraer cierta información característica del grafo.

3.2.1. Definición (Grafo)

Una grafo G es un conjunto de n puntos llamados vértices o nodos denotados por V_1, V_2, …, V_n; junto con un conjunto finito de "líneas" llamadas aristas que unen pares de nodos.

Dos nodos P y Q conectados por una arista e se llaman adyacentes o vecinos, y se dice que P y Q son incidentes a e.

Una arista e que parte de un nodo y regresa a este mismo se llama lazo o bucle.

Los nodos pueden estar conectados con más de una arista, en cuyo caso se dice que tienen arista múltiple.

Ejemplo 3.1

Observamos los grafos G_1, G_2, y G_3 con sus respectivos nodos y aristas.

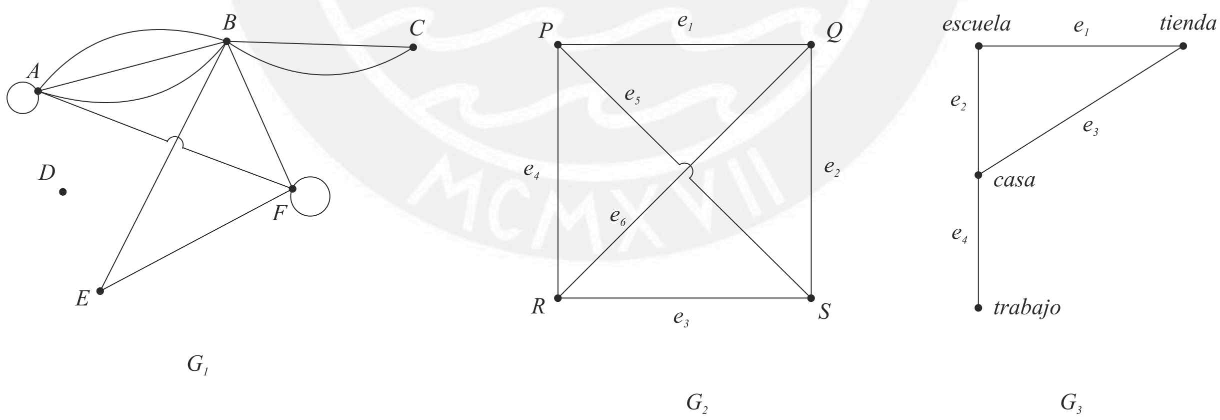


Figura 3.1 Grafos

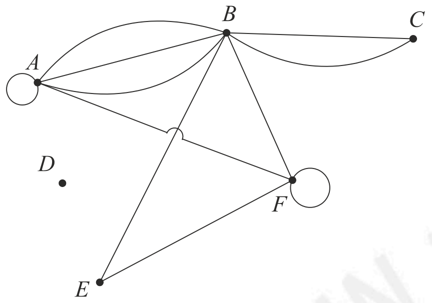
Fuente: Joyner & Nakos (1999, p.197)

3.2.2. Definición (Matriz de un grafo)

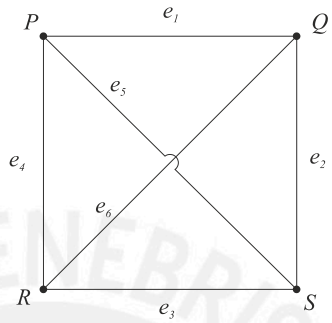
La matriz de un grafo G de n nodos o vértices es de orden $n{\times}n$, cuyo $(i\ ,\ j)$–ésimo elemento es la cantidad de aristas que unen el V_i – ésimo con el V_j – ésimo nodo.

Ejemplo 3.2

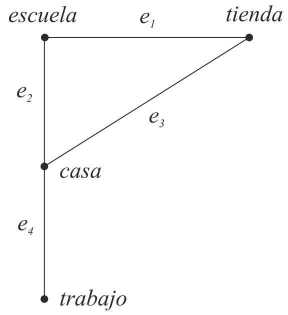
Para obtener las matrices de los grafos del ejemplo 3.1, primero ordenamos (de forma arbitraria) los nodos de G_1, G_2 y G_3 de la figura 3.1 como *A, B, C, D, E, F, P, Q, R, S y escuela, tienda, casa y trabajo*, respectivamente. Entonces, las matrices correspondientes son



G_1



G_2



G_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

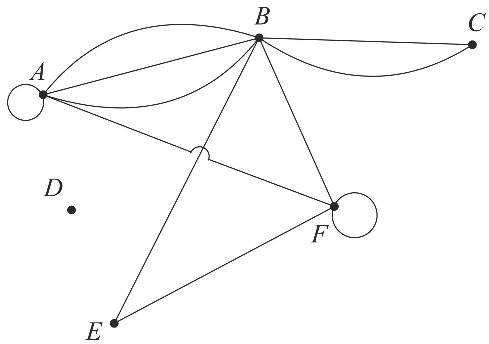
3.2.3. Definición (Matriz de adyacencia)

La matriz de adyacencia $A(G)$, de un grafo G es aquella cuyo (i, j) – ésimo elemento es 1 si los nodos V_i – ésimo con el V_j – ésimo nodo son adyacentes, y 0 si no lo son.

Ejemplo 3.3

Para construir la matriz de adyacencia de la gráfica G_1, primero hay que ordenar los nodos (en forma arbitraria). En este caso elegimos el orden *A, B, C, D, E* y F. Luego los ubicamos en una tabla. Si los nodos son adyacentes, colocamos 1 en la intersección de la fila y columna donde se encuentren dichos nodos, caso contrario colocamos cero. Finalmente, suprimimos los encabezados y obtenemos la matriz de adyacencia.

Es adyacente	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	1	1	0	0	0	1
B	1	0	1	0	1	1
C	0	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0
E	0	1	0	0	0	1
F	1	1	0	0	1	1



G_1

$$A(G_1)=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Observación 3.1

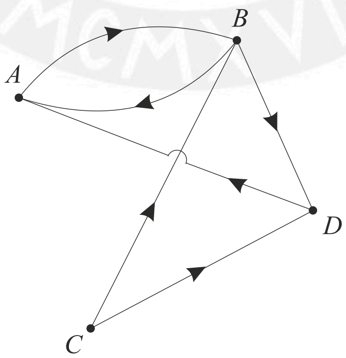
La matriz de adyacencia de un grafo es simétrica.

3.2.4. Definición (digrafo)

Un digrafo o grafo dirigido es un grafo cuyas aristas son líneas dirigidas.

Ejemplo 3.4

La figura 3.2 muestra un digrafo.



D_1

Figura 3.2 Digrafo D_1

Fuente: Joyner &Nakos (1999, p. 200)

3.2.5. Definición (cadena de longitud *m*)

Fijemos dos vértices P y Q, una cadena de longitud m de P a Q es una sucesión de vértices o nodos

$$P = V_1, V_2, ..., V_m, V_{m+1} = Q$$

De manera que V_i , V_{i+1} son adyacentes para toda i entre 1 y m.

Teorema 3.1

La cantidad de cadenas de longitud m del nodo V_i al nodo V_j en un grafo G es igual al (i, j) – ésimo elemento de $A(G)^m$.

Otro resultado, relacionado con cadenas de longitud m, es el siguiente:

La cantidad de cadenas de longitud 1, ó 2, ó 3, …, ó m de P a Q es igual al (i, j) – ésimo elemento de la matriz $A(G) + A(G)^2 + A(G)^3 + \ldots + A(G)^m$. Esto también se interpreta como como la cantidad de accesos del j – ésimo nodo desde el i – ésimo nodo en 1, ó 2,…, ó m etapas.

3.2.6. Definición (Matriz de adyacencia de un digrafo)

La matriz de adyacencia $A(D)$, de un digrafo D es aquella cuyo (i, j) – ésimo elemento es 1 si hay cuando menos una arista dirigida que conecte al V_i – ésimo con el V_j – ésimo vértice son adyacentes, y será 0 si no están conectados.

Ejemplo 3.5

El proceso para construir la matriz de adyacencia de un digrafo es el mismo que el explicado en el ejemplo 3.3. Ordenamos los vértices del dígrafo D_1 (en forma arbitraria), en este caso como A, B, C y D. Entonces la matriz de adyacencia del digrafo D_1 es

$$A(D_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.2

La cantidad de cadenas de longitud m del nodo V_i al nodo V_j en un digrafo D es igual al (i, j) – ésimo elemento de $A(D)^m$.

Ejemplo 3.6

Verifique que las cadenas de longitud 4 desde cualquier nodo de D_2 para regresar al mismo es 1.

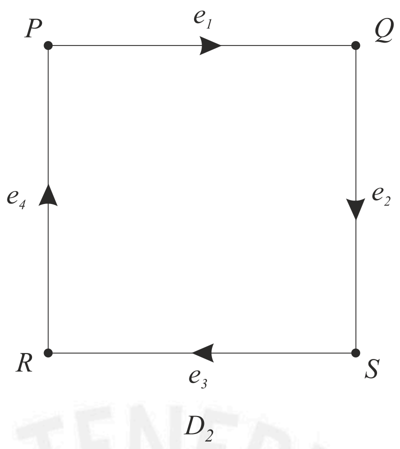


Figura 3.3 Digrafo D_2

Fuente: Joyner &Nakos (1999, p. 200)

Solución

Primero obtenemos $A(D_2)$

$$A(D_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos la potencia 4 de la matriz cuadrada $A(D_2)$

$$A(D_2)^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz identidad de orden 4.

Lo anterior se puede explicar de la siguiente manera: debido a la dirección de las aristas, se necesita recorrer las cuatro aristas para rodear una vez y regresar al mismo vértice.

3.2.7. Grafos de dominancia

Los sociólogos y sicólogos emplean grafos para determinar la comunicación en grupos, los diversos tipos de relaciones, como la influencia, la dominancia entre individuos; este dominio o influencia puede ser físico, intelectual o emocional.

3.7.1. Definición (Grafo de dominancia)

Supongamos que en un grupo de individuos, para cada par de miembros V_i, V_j, V_i influye en (o domina a) V_j, o V_j influye en V_i, o bien no hay influencia directa entre V_i y V_j.

Un grafo de dominancia es un digrafo D que tiene cuando mucho una rama dirigida que une a dos nodos cualesquiera.

Ejemplo 3.7

La figura 3.4 muestra las relaciones de dominancia entre 7 individuos, V_1, V_2, …, V_7.

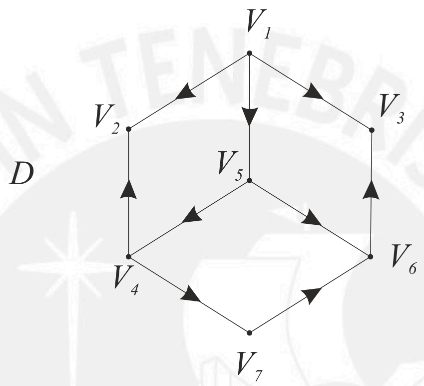


Figura 3.4 Un grafo de dominancia D

Fuente: Joyner & Nakos (1999, p. 204)

3.7.2. Definición (Matriz de adyacencia de un grafo de dominancia)

Es la matriz de adyacencia $A(D)$ del digrafo D.

Ejemplo 3.8

La matriz de adyacencia del digrafo D es

$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de adyacencia, en este caso, muestra la información acerca de las relaciones de influencia en un grupo de individuos.

Las filas con más unos representan a los miembros del grupo con mayor influencia.

Las columnas con más unos representan a los miembros del grupo con menor influencia.

Las cadenas de longitud 1 (en este caso, la dominancia está representada con una arista dirigida que va del nodo V_i al nodo V_j) simbolizan una influencia directa, mientras que las de longitud mayor que 1 representan una influencia indirecta. Entonces, la n – ésima potencia de la matriz de adyacencia de un dígrafo de dominancia expresa la influencia indirecta de un miembro sobre otro en n etapas (es decir, usando n aristas). Por ejemplo, V_5 influye en V_2, V_3 y V_7 en dos etapas (usando dos aristas dirigidas); mientras que V_1 influye en dos etapas en V_4 y V_6 ; V_4 influye en dos etapas en V_6; y V_7 influye en dos etapas en V_3. Esto se aprecia en $A^2(D)$.

$$A^2(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación 3.2

La matriz de adyacencia de un digrafo de dominancia no siempre es simétrica.

Capítulo 4

Significado Institucional Pretendido

Resumen

En este capítulo se analizarán los problemas, ejemplos, ejercicios y aplicaciones relacionados con el estudio de matrices en los textos fijados en la metodología (ver p.10), con el objeto de poder identificar el significado institucional pretendido que reflejarán las tareas a elaborar en el capítulo cinco. También, veremos qué modelo mediador será el que mejor permita "construir", a un estudiante del sétimo ciclo de la EBR, el objeto matemático matriz. Además, este modelo mediador, debe permitir que emerja de forma intuitiva la mayor cantidad de procedimientos, definiciones, y operaciones asociados al objeto matemático matriz.

4.1.Análisis de textos

Para elaborar el significado pretendido para el objeto matemático matrices consideraremos tres textos de nivel superior (Joyner, 1999, pp. 153 – 224); (Quiroga, 2005); C: (Harshbarger 2005, pp. 197 – 269). El análisis de textos será un proceso inductivo basado en las configuraciones epistémicas y su respectivo análisis. Este proceso inductivo se detendrá cuando ya no haya información novedosa (para evitar saturación de información).

Es necesario precisar que los diversos problemas mostrados son ejemplos que se han transcrito tal cual aparecen en los textos. Cuando no ocurra esto lo dejaremos indicado.

<u>Análisis Primer Texto (Joyner & Nakos, 1999, pp. 153 – 224)</u>

Descripción general

El libro titulado Álgebra Lineal con Aplicaciones es un texto de nivel superior y está dividido en ocho capítulos. El estudio de matrices se proporciona en el capítulo tres titulado matrices, y está dividido en ocho secciones que son: introducción, operaciones matriciales, matriz inversa, matrices elementales e invertibles, factorización LU, aplicaciones, miniproyectos y ejercicios de computadora. El tema matrices se introduce con un tema histórico sobre los fundadores de la teoría de matrices.

En este texto encontramos un estudio de la teoría de grafos (p. 197), matrices estocásticas y doblemente estocásticas, procesos de Markov (p. 204), aplicaciones a la economía: modelos de entrada y salida de Leontief (p. 208), formas de codificar usando matrices (p. 211), y los números de Fibonacci (p. 213).

De todas estas aplicaciones, y en una primera impresión, consideramos a la teoría de grafos y códigos como aplicaciones que pueden ser adaptadas en tareas que permitan realizar el estudio de matrices en el sétimo ciclo de la EBR.

Primero desarrollaremos algunos ítemes del problema titulado caminatas en diagráficas, y luego haremos la configuración epistémica del problema. En este texto se le llama gráfica a un grafo, diagráfica a un digrafo y caminata a una cadena. Debemos indicar que el problema propuesto lo hemos transcrito tal cual, pero hemos omitido tres ítemes. La solución mostrada es propuesta por el investigador.

Problema: Caminatas en digrafos (Joyner, 1999, p. 214)

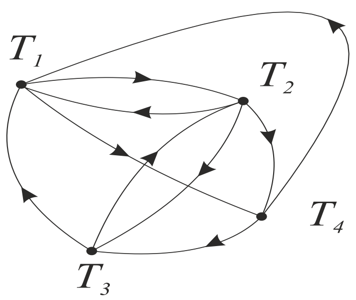
La empresa Helados Regios hace entregas a cuatro tiendas. Las tiendas y las rutas de entrega (algunas de un solo sentido) forman una diagráfica cuya matriz de adyacencia es

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

a. Trace la diagráfica *D*.
b. Determine las matrices que representan la cantidad de rutas que pueden ser recorridas de una a otra tienda, de modo que un camión de entrega pase
   (i) Sólo por una tienda.
   (ii) Sólo por dos tiendas.
c. ¿Puede ser *A* la matriz de adyacencia de un digrafo (a diferencia de un grafo)?

Solución

a. Digrafo *D*



b. (i). Aplicando el teorema 3.1 (Ver p. 67).

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii). Aplicando el teorema 3.1 (Ver p. 67), debemos hallar

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c. *A* no puede ser una matriz de adyacencia de un grafo pues no es simétrica.

4.2.Configuración Epistémica1

(Caminatas en digrafos)

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado donde se presenta una matriz de adyacencia que representa un grafo formado por 4 tiendas y las rutas de entrega (algunas de un solo sentido) de camiones repartidores de helados.

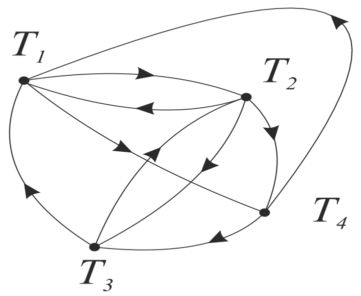
Lenguaje

Lenguaje verbal

Digrafo, matriz de adyacencia

Lenguaje gráfico

Digrafo *D*



Lenguaje simbólico

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix},\quad A^1=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}2&0&2&1\\2&2&1&1\\1&1&1&2\\1&2&0&1\end{bmatrix}$$

Conceptos

Conceptos previos

Matriz de adyacencia, grafo, digrafo, nodos, aristas, línea dirigida.

Conceptos emergentes

Cadena de longitud 1, cadena de longitud 2, matriz simétrica.

Procedimientos

Para que emerja el objeto matemático digrafo

Previos

Etiquetar

- Ordenar los nodos como T_1, T_2, T_3 y T_4.

Enlazar

- Unir dos nodos con una flecha dirigida si su correspondiente entrada es uno, por ejemplo la entrada a_{11} igual a cero significa que no debe salir ninguna línea dirigida de T_1 a T_1, también la entrada a_{43} igual a uno significa que debe salir una línea dirigida del nodo T_4 al nodo T_3.

Emergente

Digrafo D

Proposiciones

Tesis

A no es una matriz de adyacencia de un grafo

Argumento

Porque A no es simétrica.

Teorema

La cantidad de cadenas de longitud m del nodo V_i al nodo V_j en una digrafo D es igual al (i , j) – ésimo elemento de $A(D)^m$.

4.3.Análisis de la configuración epistémica 1

Contrastando el significado de referencia (definición 3.2.6) y la configuración epistémica 1 observamos que para cada digrafo existe una matriz llamada matriz de adyacencia y viceversa, y que se comportan como modelos matemáticos que representan una situación concreta. Problemas con digrafos pueden ser adaptados en problemas contextualizados que permita problematizar al estudiante del sétimo ciclo de la EBR –que el desarrollo no sea siempre rutinario o algorítmico–.

Entonces si se pretende hacer emerger el objeto matemático matriz, es suficiente con dar un problema contextualizado que pueda ser modelado por una digrafo y automáticamente emergería una matriz.

Notemos que la matriz de adyacencia de una digrafo no siempre es simétrica, a diferencia de la matriz de adyacencia de un grafo que si lo es (observación 3.1). Este hecho es importante porque al intercambiar el sentido de las flechas estaría emergiendo la matriz transpuesta, lo que nos induce a hacer variantes al problema y darle una interpretación donde emerja la matriz transpuesta.

Nos preguntamos: ¿es pertinente una situación contextualizada que involucre digrafos para alumnos del sétimo ciclo de la EBR para introducir el objeto matemático matrices?

Aún dejamos sin responder la pregunta mientras buscamos otras aplicaciones.

Continuando con el análisis del libro, encontramos el miniproyecto "códigos" que a continuación presentamos y analizamos.

1 ■ Códigos (Joyner, 1999, p. 211)

Con frecuencia los gobiernos, las agencias nacionales de seguridad y las empresas se interesan en la transmisión de mensajes codificados que sean difíciles de descifrar por otros, en caso de ser interceptados, pero que se *decodifiquen* con facilidad por quienes lo reciben. Hay muchas formas interesantes de cifrar o *codificar* un mensaje, y en su mayor parte usan la teoría de los números o el álgebra lineal. Describiremos uno que es eficaz, en especial cuando se usa una matriz invertible de gran tamaño.

Comenzaremos con una matriz M invertible, que sólo la conocen quienes transmiten y quienes la reciben. Por ejemplo,

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se desea codificar el mensaje

A T T A C K N O W

Reemplazamos cada letra con el número que le corresponde a su posición en el alfabeto. Un espacio se representa por 0.

$$\begin{array}{cccccccccc} A & T & T & A & C & K & & N & O & W \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 20 & 20 & 1 & 3 & 11 & 0 & 14 & 15 & 23 \end{array}$$

El mensaje se ha convertido en la sucesión de números 1, 20, 20, 1, 3, 11, 0, 14, 15, 23, que agrupamos como una sucesión de vectores columna,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Y multiplicamos por la izquierda a M:

$$M\begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 39 \end{bmatrix},\ M\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56 \\ -18 \end{bmatrix},\ M\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 19 \end{bmatrix},\ M\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 28 \end{bmatrix}, M\begin{bmatrix} 15 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Con lo que se obtiene la sucesión de números 77, 39, – 56, –18, 35, 19, 56, 28, 47, 31. Éste es el mensaje cifrado. Para decodificarlo, quien lo recibe necesita calcular M^{-1}

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Y multiplicamos por los vectores $\begin{bmatrix}77\\39\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-56\\-18\end{bmatrix},\begin{bmatrix}35\\19\end{bmatrix},\begin{bmatrix}56\\28\end{bmatrix},\begin{bmatrix}47\\31\end{bmatrix}$ para obtener los números originales.

$$M^{-1}\begin{bmatrix}77\\39\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\20\end{bmatrix},\ M^{-1}\begin{bmatrix}-56\\-18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\1\end{bmatrix},\cdots,etc.$$

4.4.Configuración epistémica 2

(Del miniproyecto códigos)

Situación

Se describe una manera de codificar mensajes de texto usando matrices invertibles cuadradas de orden 2.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Matriz *M* invertible, sucesión de números, sucesión de vectores columna.

Lenguaje simbólico

$$M=\begin{bmatrix}-3 & 4\\-1 & 2\end{bmatrix},1,\ 20,\ 20,\ 1,\ 3,\ 11,\ 0,\ 14,\ 15,\ 23,\begin{bmatrix}1\\20\end{bmatrix},\begin{bmatrix}20\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\11\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\14\end{bmatrix},\begin{bmatrix}15\\23\end{bmatrix}$$

Conceptos

Conceptos previos

Relación, matriz *M* invertible, matriz columna, producto de la matriz *M* por las matrices columna

Conceptos emergentes

La inversa de la matriz *M*, producto de la matriz M^{-1} por las matrices columna.

Procedimientos

Para codificar

- Mensaje de texto a codificar: ATTACK NOW

- Reemplazar cada letra con el número que le corresponde a su posición en el alfabeto. Un espacio en blanco se representa por cero.
- El mensaje se ha convertido en una sucesión de números 1, 20, 20, 1, 3, 11, 0, 14, 15, 23.
- Se forma matrices columna con dichos números $\begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \end{bmatrix}$
- Se multiplica $M\begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, M\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}, M\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}, M\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}, M\begin{bmatrix} 15 \\ 23 \end{bmatrix}$
- Se obtiene el mensaje codificado como una sucesión de números 77, 39, - 56, -18, 35, 19, 56, 28, 47, 31.

Para decodificar

- Hallar M^{-1}
- Se multiplica $M^{-1}\begin{bmatrix} 77 \\ 39 \end{bmatrix}, M^{-1}\begin{bmatrix} -56 \\ -18 \end{bmatrix}, M^{-1}\begin{bmatrix} 35 \\ 19 \end{bmatrix}, M^{-1}\begin{bmatrix} 56 \\ 28 \end{bmatrix}, M^{-1}\begin{bmatrix} 47 \\ 31 \end{bmatrix}$
- Se obtiene $\begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 23 \end{bmatrix}$
- El mensaje decodificado se ha convertido en una sucesión de números 1, 20, 20, 1, 3, 11, 0, 14, 15, 23.
- Reemplazar cada número con la letra que le corresponde según la posición en el alfabeto. Un espacio se representa por cero.
- Mensaje de texto original ATTACK NOW.

Proposiciones

Tesis

La matriz M es invertible

Argumento

Pues su determinante es diferente de cero

Tesis

M es la matriz inversa de M^{-1} y M^{-1} es la matriz inversa de M.

Argumento

Pues $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$

4.5.Análisis de la configuración epistémica 2

Contrastando el significado de referencia y la configuración epistémica 2 observamos que podemos adaptar esta situación a una tarea, donde los conocimientos previos sean las matrices, producto de matrices, y sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones y dos incógnitas, matriz identidad, igualdad de matrices y hacer emerger el determinante y la matriz inversa para matrices cuadradas de orden 2. Aquí las matrices cuadradas de orden dos que son invertibles se convierten en un modelo mediador que permite codificar y decodificar mensajes, esta situación es muy cercana al estudiante de quinto de secundaria pero los conceptos previos son distantes a sus conocimientos, por eso es conveniente indagar sobre otras aplicaciones que permitan introducir las matrices de forma natural para que los estudiantes no la rechacen.

De lo anterior, notamos que es fundamental en este trabajo de investigación, que la primera tarea diseñada debe hacer emerger todos los conocimientos previos que se han mencionado en el análisis de la configuración epistémica 2.

Mostramos otra aplicación de matrices que consiste en un ejemplo sobre actualización de existencias.

Actualización de existencias (Joyner & Nakos, 1999, p. 163)

Una empresa tiene tres librerías, y cada una de ellas tiene libros de ficción, de viajes y de deportes. Las cantidades de libros se tabulan como sigue en la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} \textit{Libreria} & \begin{array}{ccc} \textit{Ficción} & \textit{Viajes} & \textit{Deportes} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 300 & 300 & 100 \\ 300 & 100 & 240 \\ 50 & 150 & 200 \end{bmatrix} \end{array}$$

Suponga que todas las entregas están representadas por *D*. Calcule las existencias actualizadas

$$D=\begin{bmatrix}60 & 40 & 20\\ 60 & 40 & 30\\ 60 & 40 & 30\end{bmatrix}$$

Solución

Basta con sumar las dos matrices

$$\begin{bmatrix}360 & 340 & 120\\ 360 & 1400 & 270\\ 110 & 190 & 230\end{bmatrix}$$

4.6.Configuración epistémica 3

(Actualización de existencias)

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado donde se actualiza una matriz de existencia.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Matriz

Lenguaje simbólico

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} Libreria \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Ficción & Viajes & Deportes \end{array} \\ \begin{bmatrix}300 & 300 & 100\\ 300 & 100 & 240\\ 50 & 150 & 200\end{bmatrix} \end{array} \end{array} ,\ D=\begin{bmatrix}60 & 40 & 20\\ 60 & 40 & 30\\ 60 & 40 & 30\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}360 & 340 & 120\\ 360 & 1400 & 270\\ 110 & 190 & 230\end{bmatrix}$$

Conceptos

Conceptos previos

Matriz.

Conceptos emergentes

Suma de matrices

Procedimientos

Sumar las respectivas entradas

4.7.Análisis de la configuración epistémica 3

Contrastando el significado de referencia (capítulo 3) y la configuración epistémica 3 observamos que este problema de existencia se puede adecuar en una tarea donde emerja la suma y resta de matrices, de tal manera que el estudiante pueda imaginar la situación y que al interactuar el estudiante con la tarea, pase de lo concreto hacía lo abstracto es decir hacer una matematización horizontal y una vez dentro del mundo matemático profundizar los conocimientos sobre suma y resta de matrices en un proceso de matematización vertical.

También podemos observar en este problema a una matriz como un medio que permite el almacenamiento de datos numéricos en forma tabular y ordenada tal como lo habíamos afirmado en la sección (3.1.2.1) del significado de referencia.

Mostramos otra aplicación de matrices que consiste en un ejemplo sobre escalamientos.

Escalamientos (Joyner&Nakos, 1999, p. 163)

Suponga que las distancias, en millas, entre Annapolis, Baltimore y Washington, D. C., se expresan como sigue:

$$\begin{array}{ll} \textit{Ciudad} & \begin{array}{ccc} \textit{Annapolis} & \textit{Baltimore} & \textit{Washington} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Annapolis} \\ \textit{Baltimore} \\ \textit{Washington} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 30 & 25 \\ 30 & 0 & 18 \\ 25 & 18 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si deseamos trazar un mapa cuya escala sea tal que 1 pulgada en el papel corresponda a 5 millas de distancia real, ¿Cuál es la matriz de las distancias del mapa?

SOLUCIÓN Por ejemplo, una distancia de 30 millas se representa con $30\,\text{mi}.\frac{1}{5}\frac{\text{in}}{\text{mi}} = 6\text{pul}.$ De modo, que necesitamos multiplicar todos los elementos de la matriz por $\frac{1}{5} = 0.2$. Éste es el producto de la matriz por el escalar 0.2.

$$0.2\begin{bmatrix} 0 & 30 & 25 \\ 30 & 0 & 18 \\ 25 & 18 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 3.6 \\ 5 & 3.6 & 0 \end{bmatrix}$$

4.8.Configuración epistémica 4

(Escalamiento)

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado donde se dan las distancias en millas de tres ciudades, y se desea trazar un mapa teniendo en cuenta cierta escala y se pide hallar la matriz de las distancias del mapa.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Escala, matriz, distancia real, distancia en el mapa, pulgadas, millas.

Lenguaje simbólico

$$1/5;\ 0.2;\ \begin{bmatrix} 0 & 30 & 25 \\ 30 & 0 & 18 \\ 25 & 18 & 0 \end{bmatrix};\ 0.2\begin{bmatrix} 0 & 30 & 25 \\ 30 & 0 & 18 \\ 25 & 18 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 3.6 \\ 5 & 3.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Conceptos

Conceptos previos

Matriz, escala

Conceptos emergentes

Producto de una matriz por un escalar

Suma de matrices

Procedimientos

Multiplicar cada entrada de la matriz por el escalar 0.2

4.9. Análisis de la configuración epistémica 4

Observamos que este problema de escalamiento se puede adecuar en una tarea donde emerja la operación producto de un escalar por una matriz de tal manera que el estudiante pueda imaginar la situación y que al interactuar el estudiante con la tarea, pase de lo concreto hacía lo abstracto es decir hacer una matematización horizontal y una vez dentro del mundo matemático profundizar los conocimientos sobre producto de un escalar por una matriz en un proceso de matematización vertical.

Nuevamente, podemos observar en este problema a una matriz como un medio que permite el almacenamiento de datos numéricos en forma tabular y ordenada tal como lo habíamos afirmado en la sección (3.1.2.1)

Mostramos otra aplicación de matrices que consiste en un ejemplo sobre ingresos procedentes de diversas fuentes.

Ingresos procedentes de diversas fuentes (Joyner & Nakos, 1999, p. 164)

Cada una de las tiendas, o_1 y o_2, reciben diariamente televisores (t) y videocaseteras (v) de dos fabricantes, f_1 y f_2. Las recepciones o ventas se representan como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} t & v \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 40 & 50 \\ 70 & 80 \end{bmatrix} \end{array}$$

El precio en dólares, por aparato en cada tienda, es como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} o_1 & o_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ v \end{array} & \begin{bmatrix} 200 & 250 \\ 300 & 280 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si las matrices A y B son las matrices asociadas a las tablas anteriores calcule e interprete el producto AB.

SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} 40 & 50 \\ 70 & 80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 & 250 \\ 300 & 280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,00 & 24,000 \\ 38,000 & 39,900 \end{bmatrix}$$

El elemento (1,1) es 40.200 + 50.300 = 23 000, y representa los ingresos de la primera tienda por vender todos los electrodomésticos que provienen de la primera fábrica. De igual forma,

$$AB = \begin{bmatrix} \$ \text{ en } o_1 \text{ de } f_1 & \$ \text{ en } o_2 \text{ de } f_1 \\ \$ \text{ en } o1 \text{ de } f_2 & \$ \text{ en } o_2 \text{ de } f_2 \end{bmatrix}$$

4.10. Configuración epistémica 5

(Ingresos precedentes de diversas fuentes)

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado donde las tiendas o_1 y o_2 reciben diariamente televisores (t) y videocaseteras (v) de los fabricantes f_1 y f_2, se presenta una matriz de ventas y otra matriz donde se visualiza el precio en dólares por aparato en cada tienda.

Lenguaje

Lenguaje verbal

A y *B* matrices.

Lenguaje simbólico

$$\begin{bmatrix} 40 & 50 \\ 70 & 80 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 200 & 250 \\ 300 & 280 \end{bmatrix}$$

Conceptos

Conceptos previos

Matriz

Conceptos emergentes

Producto de matrices

Suma de matrices

Procedimientos

Multiplicación de fila por columna

El elemento (1,1) es (40)(20) + (50) (300) = 23 000

El elemento (1,2) es (40)(250) + (50) (280) = 24 000

El elemento (2,1) es (70)(20) + (80) (300) = 38 000

El elemento (2,2) es (70)(250) + (80) (280) = 39 000

4.11. Análisis de la configuración epistémica 5

Observamos que este problema de Ingresos procedentes de diversas fuentes se puede adecuar en una tarea donde emerja la operación producto de matrices, de tal manera que el estudiante pueda imaginar la situación y que al interactuar el estudiante con la tarea, pase de lo concreto hacía lo abstracto es decir hacer una matematización horizontal y una vez dentro del mundo matemático profundizar los conocimientos sobre producto de matrices en un proceso de matematización vertical.

En este ejemplo se reitera a una matriz como un medio que permite el almacenamiento de datos numéricos en forma tabular y ordenada tal como lo habíamos afirmado en la sección (3.1.2.1)

De todo lo anterior, podemos concluir lo siguiente: Es fundamental, en este trabajo de investigación, que la primera tarea que se diseñe permita que emerjan los conceptos de: matriz, matriz fila, matriz columna, igualdad de matrices, matriz traspuesta. Además, se debe tener en cuenta a una matriz como un “objeto” que permite almacenar información de datos numéricos en forma tabular y ordenada.

<u>**Análisis del Segundo Texto (Quiroga, 2005)**</u>

Descripción general

El texto se titula Introducción al Álgebra Lineal. Está organizado en seis capítulos: matrices, determinantes, matriz inversa y matriz ortogonal, sistema de ecuaciones lineales, diagonalización de matrices cuadradas, formas cuadráticas. En la parte final se proporciona muchos ejemplos de aplicación donde se usan las operaciones con matrices, la diagonalización de matrices y la potencia de matrices diagonalizables con la intención de motivar al lector. En la exposición de los temas se usa la intuición y rigor, evitando demostraciones que pudieran ser muy complicadas. Previamente antes de cada capítulo se hace una introducción mostrando al lector un panorama sobre las aplicaciones en diversos campos científicos del tema a desarrollar. Uno de los objetivos principales del texto es ahondar en el concepto de matriz como almacén de información ordenada en forma tabular y como operador.

A continuación analizamos un par de ejemplos.

Ejemplo 1 (Quiroga, 2005, pp. 2 – 3)

Una fábrica de pantalones y camisas dispone de tres establecimientos A, B y C de ventas en una ciudad. En la tienda A se vendieron, en el mes de enero, 20 pantalones y 50 camisas. Las ventas de la tienda B fueron, en el mismo mes, de 25 pantalones y 40 camisas. En C se vendieron 40 pantalones y 60 camisas. Esta información se puede expresar en la siguiente tabla:

	A	B	C	Total	Total artículos
Pantalones	20	25	40	20 +25 + 40	85 pantalones
Camisas	50	40	60	50 + 40 + 60	150 camisas

Podemos elaborar la matriz de ventas en el mes de enero $V=\begin{bmatrix} 20 & 25 & 40 \\ 50 & 40 & 60 \end{bmatrix}$

El precio de los pantalones es de 60 euros/unidad y el de las camisas de 50 euros/unidad. Tendremos un vector de precios $P=\begin{bmatrix} 60 & 50 \end{bmatrix}$ que, multiplicado por la matriz de ventas *V*, nos dará los ingresos en euros de las mercancías vendidas en cada una de las tiendas:

$$P.V=\begin{bmatrix} 60 & 50 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 20 & 25 & 40 \\ 50 & 40 & 60 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3700 & 3500 & 5400 \end{bmatrix}$$

Un estudio de mercado refleja que el establecimiento A conserva, de año en año, el 80% de sus clientes, y pierde el resto repartido a partes iguales entre B y C. La tienda B mantiene el 70%, yéndose el 10% a A y el resto a C. Por último, C cede el 10% a A y el 20% a B. Esta información se puede expresar de la siguiente forma:

	A	B	C
A	0.8	0.1	0.1
B	0.1	0.7	0.2
C	0.1	0.2	0.7

Escribamos la matriz de transición T que describe estos datos

$$T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

En el año t los clientes de A, B y C fueron, respectivamente, 60, 50 y 50. Podemos calcular el número de clientes de cada una de las tiendas en el año $t + 1$, suponiendo que el total de clientes es el mismo del año t.

$$T.P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 51 \\ 51 \end{bmatrix}$$

4.12. Configuración epistémica 6

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado referente a las ventas en un mismo mes de pantalones y camisas en tres tiendas A, B y C. Se elabora la matriz de ventas de ese mes. Luego, se halla la matriz de ingresos de las tres tiendas, sabiendo el vector de precios de los pantalones y camisas. En este problema también se determina la cantidad de clientes que tendrá las tiendas A, B y C en el año $t + 1$, sabiendo de antemano las tendencias de permanencia de los clientes en cada tienda descritos en una matriz de transición.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Matriz de ventas, vector de precios, multiplicación de matrices, matriz de transición, porcentajes.

Lenguaje simbólico

	A	B	C	Total	Total artículos
Pantalones	20	25	40	20 +25 + 40	85 pantalones
Camisas	50	40	60	50 + 40 + 60	150 camisas

$$V = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 40 \\ 50 & 40 & 60 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 60 & 50 \end{bmatrix};$$

$$P.V = \begin{bmatrix} 60 & 50 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 20 & 25 & 40 \\ 50 & 40 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3700 & 3500 & 5400 \end{bmatrix} 80\%;\ 70\%;\ 10\%,\ 20\%;$$

	A	B	C
A	0.8	0.1	0.1
B	0.1	0.7	0.2
C	0.1	0.2	0.7

$$T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}; T.P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 51 \\ 51 \end{bmatrix}.$$

Conceptos

Conceptos previos

Matriz, porcentaje, vector, multiplicación de matrices

Conceptos emergentes

Matriz doblemente estocástica, matriz de clientes de las tiendas A, B y C para el año t+1.

Procedimientos

Multiplicación matricial

$$P.V = \begin{bmatrix} 60 & 50 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 & 25 & 40 \\ 50 & 40 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3700 & 3500 & 5400 \end{bmatrix}$$

$$T.P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 51 \\ 51 \end{bmatrix}$$

Proposiciones

Tesis

La matriz T de transición es una matriz doblemente estocástica.

Argumentos

Pues la suma de los elementos de cada columna y cada fila suman uno.

4.13. Análisis de la configuración epistémica 6

En este problema observamos que los conocimientos previos son matrices, vector, multiplicación de matrices y porcentajes. Se trata a las matrices como un medio para almacenar las cantidades de ventas, precios y porcentajes (matriz de transición *T*) de las cuales emerge el concepto de matriz estocástica, específicamente matriz doblemente estocástica. Lo rescatable de esta descripción, es el tratamiento que se le da a las matrices. Podemos adaptar problemas de tal manera que los estudiantes relacionen una tabla, formada por datos numéricos, con una matriz.

Problema de aplicación 1 (Quiroga, 2005, pp. 205 – 207)

A una persona le pagan 10 euros por hora trabajando en una empresa arreglando ordenadores, 8 euros por hora escribiendo cartas en un ordenador, 5 euros por hora repartiendo cartas y 6 euros por hora cuidando niños. El número de horas que ha trabajado en el año 2003 en cada ocupación está reflejado en la tabla siguiente

Meses	Horas en la empresa	Horas escribiendo cartas	Horas repartiendo cartas	Horas cuidando niños
Enero	30	10	20	12
Febrero	20	30	20	10
Marzo	17	12	40	20
Abril	40	10	20	11
Mayo	20	30	22	12
Junio	22	12	29	11
Julio	38	10	20	30
Agosto	19	29	20	20
Setiembre	30	23	25	13
Octubre	32	12	32	14
Noviembre	15	32	24	10
Diciembre	12	13	24	30

Calcúlese:

a) El número de horas trabajadas cada mes en el año 2003.

b) El número total de horas trabajadas en cada una de las actividades.

c) La matriz de ingresos totales por meses.

Solución

La matriz o vector de precios por hora es $P = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

La matriz de horas trabajadas corresponde a la tabla anterior que la llamaremos *H*

a) Las horas trabajadas cada mes se obtiene al sumar las filas de la matriz *H*

   72 horas en enero

   80 horas en febrero

   89 horas en marzo

   81 horas en abril

   84 horas en mayo

   74 horas en junio

   98 horas en julio

   88 horas en agosto

   91 horas en setiembre

   90 horas en octubre

   81 horas en noviembre

   79 horas en diciembre. Lo que da un total de 1007 horas en el año 2003

b) El número total de horas trabajadas en cada una de las actividades se obtiene sumando las columnas de la matriz *H*. Así, las horas trabajadas en la empresa son 295, escribiendo cartas fueron 223, las horas dedicadas a repartir cartas son 296, y en cuidar niños empleó 193 horas.

c) Los ingresos serán iguales al producto de la matriz *H* por *P*, que vendría a ser una matriz columna de orden doce por uno. Pues *H* tiene 12 filas y *P* una columna.

   552 euros en enero

   600 euros en febrero

   586 euros en marzo

   646 euros en abril

   622 euros en mayo

   527 euros en junio

   740 euros en julio

   642 euros en agosto

   687 euros en setiembre

   660 euros en octubre

   586 euros en noviembre

   524 euros en diciembre

4.14. Configuración epistémica 7

Situación

Se trata de un problema contextualizado, donde se presenta una tabla de horas trabajadas en un año por actividad y los precios que se pagan por hora y por actividad. Se pide calcular el número de horas trabajadas cada mes en al año 2003, el número total de horas trabajadas por actividad y la matriz de ingresos totales por mes.

Lenguaje

Verbal

Tabla, matriz de ingresos, matriz o vector de los precios, matriz de horas, matriz *H*, producto de la matriz *H* por *P*.

Simbólico

Meses	Horas en la empresa	Horas escribiendo cartas	Horas repartiendo cartas	Horas cuidando niños
Enero	30	10	20	12
Febrero	20	30	20	10
Marzo	17	12	40	20
Abril	40	10	20	11
Mayo	20	30	22	12
Junio	22	12	29	11
Julio	38	10	20	30
Agosto	19	29	20	20
Setiembre	30	23	25	13
Octubre	32	12	32	14
Noviembre	15	32	24	10
Diciembre	12	13	24	30

$$P = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Conceptos previos

Suma de números reales, producto de números reales, tabla.

Conceptos emergentes

Matriz, fila, matriz columna (vector), producto de la matriz *H* por *P*.

Procedimiento

Producto matricial $H\ P = I$

Proposición

Tesis

La matriz ingresos totales es una matriz columna

Argumentos

Pues el orden de *H* es 12×4 y el orden de *P* es 4×1

4.15. Análisis de la configuración epistémica 7

Observamos que toda información de datos numéricos ordenados de forma tabular (tabla) corresponde a una matriz.

Es posible hacer emerger el objeto matemático matriz al inducir al estudiante, vía un problema contextualizado, a ordenar datos numéricos en forma de tabla. Luego el docente al institucionalizar el objeto matemático matriz comunicará al estudiante que dicha tabla es una matriz.

Un inconveniente sería que el estudiante considerará que la matriz asociada a dicha tabla es igual a su traspuesta, pues sería la misma tabla representando la misma información.

Consideraremos a una tabla, formada por datos numéricos, como un modelo, que permite almacenar información numérica en forma tabular y que está asociada a una matriz.

Análisis Tercer Texto (Harshbarger & Reynolds, 2005, p. 197 – 269)

Descripción general

El texto se titula "Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales". Está organizado en catorce capítulos y un capítulo cero. El texto va dirigido a estudiantes de nivel superior. Los temas se exponen de forma intuitiva con muchos problemas contextualizados aplicados a distintas disciplinas científicas. Antes de cada capítulo se indican los conocimientos previos necesarios para el desarrollo del capítulo. Las matrices se estudian en el capítulo 3 y los conocimientos previos que se exigen son operaciones combinadas de números reales y sistema de ecuaciones. En este texto se da importancia a la tecnología (software matemático) para dar solución a ciertos problemas con la intención de complementar y ampliar la teoría.

Vista preliminar de la aplicación (Harshbarger & Reynolds, 2005, p. 197)

Suponga que los precios de compra y cargos de entrega (en dólares por unidad) para madera, tablas de forro y techado usados en la construcción se dan en la tabla *. Si el proveedor decide aumentar los precios de compra en $ 0.60 por unidad y los cargos de entrega en $ 0.05 por unidad, la matriz que describe los nuevos cargos por unidad será la matriz de la suma de los cargos, formada a partir de la tabla *, y la matriz que representa los aumentos.

Tabla *

	Madera	Tablas de forro	Techado
Compra	6	4	2
Entrega	1	4	0.5

Como comentamos en la introducción de este capítulo podemos utilizar las matrices para almacenar datos y realizar operaciones con los datos. La matriz

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Representa los cargos unitarios originales; contiene el núcleo de la información a partir de la tabla * , sin los encabezados. La matriz que representa los aumentos se determina por medio de

$$H = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

4.16. Configuración epistémica 8

Situación

Se trata de una introducción al tema matrices donde se resalta su formato organizacional, y su utilidad para resolver diversos tipos de problemas como el que se ha descrito.

Lenguaje

Verbal

Tabla, Matriz *C*, Matriz *H*

Simbólico

	Madera	Tablas de forro	Techado
Compra	6	4	2
Entrega	1	4	0.5

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix};\ H = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

Conceptos

Previos

Tabla

Emergente

Matriz

Procedimiento

Para asociar una tabla de datos numéricos a una matriz hay que suprimir los encabezados.

Proposición

Tesis

Toda tabla que contiene datos numéricos puede asociarse a una matriz.

Argumento

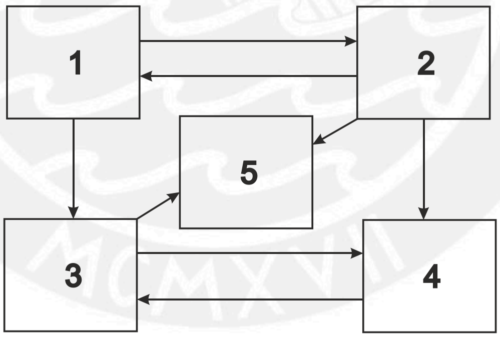
Basta con suprimir los encabezados.

4.17. Análisis de la configuración epistémica 8

Como ya hemos visto en configuraciones epistémicas anteriores toda tabla constituida por números reales puede ser asociada a una matriz. Sería una forma intuitiva de presentar matrices a los estudiantes, pues solo hay que suprimir los encabezados para obtener una matriz.

Ejemplo 8 Poder de influencia (Harshbarger & Reynolds, 2005, p. 203)

Suponga que un organismo de gobierno, el papeleo fluye constantemente entre oficinas de acuerdo con el diagrama.



a) Construya la matriz A con los elementos

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ el \ \ papeleo \ \ \ fluye \ directamente \ de \ i \ a \ j \\ 0 \ \ si \ \ el \ \ papeleo \ no \ fluye \ directamente \ de \ i \ a \ j \end{cases}$$

b) Construya la matriz B con los elementos

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \ \ si \ el \ papeleo \ puede \ fluir \ de \ i \ a \ j \ a \ través \\ \ \ \ de \ no \ más \ de \ un \ intermediario, \ con \ i \neq j \\ 0 \ \ en \ caso \ contario \end{cases}$$

c) La persona en la oficina i tiene mayor poder de influencia si la suma de sus elementos de la fila i en la matriz $A + B$ es la mayor ¿Cuál es el número de oficina de esta persona?

Solución

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Puesto que la suma de los elementos en la fila dos es la mayor (7), la persona en la oficina dos tiene mayor poder de influir en otras personas. Ya que la fila cinco tiene la menor suma (0), la persona en la oficina cinco tiene el menor poder.

4.18. Configuración epistémica 9

Situación

Problema contextualizado que trata sobre el poder de influencia en un organismo gubernamental.

Lenguaje

Verbal

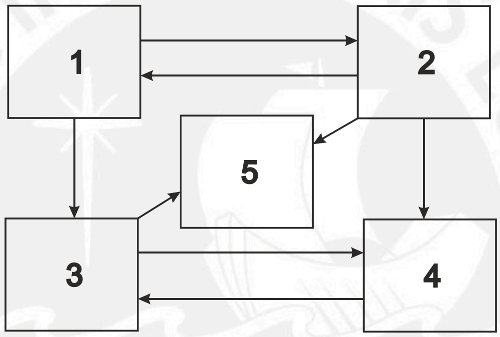
Diagrama, matriz A, Matriz B, Matriz $A + B$, a_{ij}, b_{ij}, 1, 0, ≠,=.

Simbólico

$A,\ B,\ A+B,\ a_{ij},\ b_{ij},\ 1,\ 0,\ \neq, =, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gráfico



Conceptos

Previos

Matriz, matriz implícita, suma de matrices, digrafo, caminata de longitud dos, nodos vértices

Emergente

Matriz de adyacencia de un digrafo.

Procedimientos

Si el nodo *i* se relaciona con el nodo j entonces $a_{ij} = 1$, caso contrario $a_{ij} = 0$

Proposición

La persona en la oficina *i* tiene mayor poder de influencia si la suma de sus elementos de la fila *i* en la matriz $A + B$ es la mayor

4.19. Análisis de la configuración epistémica 9

Este problema se puede modificar de tal manera que sea más evidente la obtención de las matrices *A* y *B*. Para esto es conveniente, construir previamente una tabla de doble entrada etiquetando las columnas y filas con los números que corresponde a cada nodo (dependiendo del problema contextualizado) luego dar una relación en forma literal para completar la tabla,

Luego podemos alterar el sentido de las flechas, lo cual generaría la matriz transpuesta, y esto puede ser interpretado por un estudiante, dándole significado a la matriz traspuesta.

Entonces las tablas serán un nexo entre los digrafos y las matrices. Esto formaría parte de una adaptación de estos tipos de problemas para estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.

Debemos dejar indicado que no continuamos con el análisis de este texto debido a que ya no encontramos información novedosa. Observamos, en el texto, tipos de problemas que ya hemos analizado y consideramos que debemos detener nuestro proceso inductivo de análisis para no saturar la información.

4.20. Recapitulación del análisis de las configuraciones epistémicas

- Creemos que una tabla constituida por datos numéricos –números reales– ordenados en forma tabular que representa, de manera simplificada, una situación problemática es un modelo. Tal como se indica en la sección 2.2.1 del capítulo 2.
- De igual manera digrafo (grafo dirigido) es un modelo que representa situaciones problemáticas relacionadas con dominancia, poder de influencia, etc.
- Ambos modelos están relacionados con las matrices. Para nuestro trabajo de investigación, las tablas y digrafos, serán los modelos mediadores entre lo concreto (problema contextualizado) y lo abstracto (objeto matemático matriz).
- Hemos visto problemas de codificación; de ingresos diversos; de escalas; de actualización de existencias. Todos estos problemas pueden ser adaptados, a estudiantes del sétimo ciclo de la EBR, en situaciones problemáticas donde emerja el determinante y matriz inversa de una matriz cuadrada de orden dos, la

multiplicación matricial, el producto de un escalar por una matriz, y la suma y resta de matrices.

Pero todas estas situaciones problemáticas necesitan como conocimiento previo a las matrices, las cuales todavía no forman parte de los saberes previos de un estudiante del sétimo ciclo de la EBR.

– Es fundamental adaptar una tarea inicial que permita al estudiante “construir” el objeto matemático matriz y así apropiarse de él.

  Esta tarea inicial debe ser una situación problemática real (que lo pueda imaginar), generar variantes de la situación problemática que puedan ser interpretadas. Además, esta situación problemática pueda expresarse en forma verbal, gráfica y simbólica, pudiéndose regresar de lo simbólico a lo gráfico, y de lo gráfico a lo verbal con su respectiva interpretación. Esta situación problemática debe requerir de conocimientos previos que el estudiante posea y de una dificultad manejable por el estudiante del sétimo ciclo de la EBR.

– Creemos que esta tarea inicial debe ser una situación problemática que involucre un digrafo, pues es cercana al estudiante. En esta tarea el docente debe guiar (usando diversos ítemes) al estudiante, de tal manera que este construya un digrafo, luego construya una tabla y finalmente asociarla a una matriz (matriz de adyacencia del digrafo). Esta tarea debe considerar los conocimientos previos del estudiante y tener un grado de dificultad manejable. Cada ítem de esta tarea hará que el alumno problematice e intérprete sus respuestas –que el desarrollo no sea siempre rutinario o algorítmico–.

  Luego se hará una variante al digrafo, transponiendo el sentido de las flechas (aristas dirigidas del digrafo) y así emergerá la matriz traspuesta, la cual puede ser interpretada por el estudiante.

– Así esta tarea permitirá al estudiante transitar del problema contextualizado a lo abstracto, en este caso al objeto matemático matriz y viceversa. Una vez dentro de lo abstracto, el profesor deberá institucionalizar los conceptos de matrices para profundizar en el tema. Finalmente el docente evaluará al estudiante.

– Con respecto al significado institucional pretendido, esta tarea inicial permitirá al docente abarcar los siguientes temas:

  – Matriz

  – Orden de una matriz

- Matriz fila, columna y rectangular
- Matriz Cuadrada
- Igualdad de matrices
- Traspuesta de una matriz

Luego en la institucionalización se puede considerar los temas

- Matriz implícita.
- Matriz nula
- Matriz simétrica
- Matriz antisimétrica.

- Una vez que las matrices forman parte de los saberes previos del estudiante, el profesor puede adaptar tareas para poder hacer emerger las operaciones con matrices, el determinante y la inversa de una matriz cuadrada de orden dos (si existiese).
- En la etapa de institucionalización, el profesor debe insistir en que los alumnos entiendan que una matriz es una herramienta útil para almacenar información numérica en forma tabular y ordenada. Dicha información se puede manipular para poder tomar decisiones de acuerdo al problema contextualizado al que se asocie la matriz. Esto se debe de tomar en cuenta en una futura implementación de este trabajo de investigación.

Capítulo 5

Diseño de las tareas

Resumen

En este capítulo se diseñarán cinco tareas que permitirán el estudio de las matrices en el sétimo ciclo de la EBR. Estas tareas se diseñarán aplicando los criterios de la idoneidad didáctica del EOS. La primera tarea será la más importante o fundamental, pues será la que permita al estudiante hipotético "construir" el objeto matemático matriz y así apropiarse de él. Una vez que las matrices formen parte de los conocimientos previos del estudiante hipotético será más sencillo adaptar y diseñar las cuatro tareas restantes que van a permitir al estudiante hipotético "construir" las definiciones que involucran operaciones entre matrices, el determinante y la inversa de matrices cuadradas de orden dos (si existiese).

5.1. Diseño de las tareas

Entre las principales tareas del profesor se encuentra la planificación e implementación de procesos de estudio y la valoración de la propia práctica docente con la intención de favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

La planificación de un proceso de instrucción, que es el objetivo de este trabajo, implica caracterizar un significado de referencia para el objeto matemático matriz, lo que requiere realizar un estudio histórico, epistemológico y didáctico de las matrices. Específicamente, la idoneidad didáctica requiere la reconstrucción de un significado de referencia,(Ver capítulo 3) para los objetos matemáticos y didácticos pretendidos como los realizados en los capítulos 3 y 4 respectivamente.

En el proceso implementado (que no es considerado en este trabajo) los elementos de referencia, para valorar la idoneidad epistémica, corresponden al significado institucional pretendido por el docente, En cambio para la idoneidad epistémica del proceso de planificación (que es considerado en este trabajo) habrá que indagar los elementos del significado del análisis elemental de datos en textos e investigaciones publicadas que corresponde al estudio histórico, epistemológico de las matrices y gráficas, (Ver capítulo 3).

Como establecimos en la última sección del capítulo 4 usaremos como modelos mediadores, para hacer emerger al objeto matemático matriz, a los digrafos y a las tablas.

Para elaborar la tarea nº 1 se ha considerado a los digrafos o grafos dirigidos, que permiten, al alumno, transitar de lo concreto (problema contextualizado asociado a un digrafo) a lo abstracto (objeto matemático matriz), permitiendo que el estudiante reconstruya el objeto matemático matriz.

Como ya lo anticipamos esta tarea es fundamental, es la base para las tareas restantes.

Como lo hemos anticipado al final del capítulo 4, el significado institucional pretendido de esta tarea es:

- Matriz
- Orden de una matriz
- Matriz fila, columna y rectangular
- Matriz Cuadrada
- Igualdad de matrices
- Traspuesta de una matriz

Luego en la institucionalización se puede considerar los temas

- Matriz implícita
- Matriz nula
- Matriz simétrica
- Matriz antisimétrica

Para elaborar la tarea nº 2 se utilizan matrices de existencia e inventario, que permitan al alumno reconstruir las operaciones matriciales de suma y diferencia de matrices del mismo orden.

El significado institucional pretendido de esta tarea es:

- Suma de matrices.
- Diferencia de matrices.

Luego en la institucionalización se puede considerar los temas

- Propiedades de la adición de matrices.

Para elaborar la tarea nº 3 aplicamos el objeto matemático escala a un problema contextualizado donde damos una matriz formada por distancias entre tres ciudades, permitiendo así al estudiante entender el producto de un escalar por una matriz.

El significado institucional pretendido de esta tarea es:

– Producto de un escalar por una matriz.

Luego en la institucionalización se puede considerar los temas

– Propiedades del producto de un escalar por una matriz.
– Resolver sistemas matriciales de la forma

$$\begin{cases} \alpha X + \beta Y = A \\ \delta X + \lambda Y = B \end{cases},\ \alpha, \beta, \delta, \lambda \text{ son escalares y } X, Y \text{ matrices del mismo orden.}$$

Para elaborar la tarea nº 4 utilizamos un problema contextualizado sobre producción de muebles induciendo al alumno a que multiplique matrices.

El significado institucional pretendido de esta tarea es:

– Multiplicación de matrices.

Luego en la institucionalización se puede considerar los temas

– Matriz identidad.
– Propiedades del producto matricial
– Desarrollar sistemas de ecuaciones compatibles de dos incógnitas

Para elaborar la tarea nº 5 consideramos un problema de codificación y decodificación de textos, donde se induce al estudiante a seguir las operaciones planteadas haciendo emerger el determinante de una matriz cuadrada de orden dos y su matriz inversa.

El significado institucional pretendido de esta tarea es:

– Inversa de una matriz cuadrada de orden dos.
– Determinante de una matriz cuadrada de orden dos.

Luego en la institucionalización se puede considerar los temas

– Definir el determinante de una matriz cuadrada de orden dos.
– Propiedad básica del determinante det (AB) = det A det B.
– Definir la inversa de una matriz cuadrada de orden dos.
– Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada de orden dos cuando su determinante es diferente de cero.

En todas las tareas se induce al estudiante a transitar de lo concreto a lo abstracto, permitiendo que el estudiante reconstruya el objeto matemático matriz, sus operaciones, determinante e inversa de las matrices cuadradas de orden 2 y sus propiedades básicas.

Una vez dentro del mundo matemático el profesor institucionaliza y profundiza el estudio del objeto matemático matriz; y finalmente se evalúa al alumno con la intención de verificar si él se apropió del objeto matemático matriz.

5.2.Características de las tareas de acuerdo a la Teoría de la Idoneidad Didáctica

Considerando que el objetivo general del presente trabajo de investigación es la planificación y diseño de tareas que permitan estudiar al objeto matemático matriz aplicando los criterios de idoneidad, consideramos que es fundamental describir las características que deben cumplir las tareas a planificar y diseñar. Teniendo en cuenta que no es parte de los objetivos de este estudio implementar las tareas diseñadas, en consecuencia se aplicará parcialmente los indicadores descritos en las tablas (2.3). a (2.10) en la planificación de las tareas, excepto para la idoneidad epistémica.

Entonces en esta etapa de diseño de tareas situaremos como base a las idoneidades epistémicas y cognitivas, pues el proceso de estudio de las matrices gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos del objeto matemático matriz los cuales deben ser adaptados respetando los conocimientos previos de nuestro estudiante hipotético logrando un equilibrio entre lo epistémico y cognitivo. Además, nuestro estudiante hipotético debe percibir la utilidad de estos conocimientos específicos en situaciones cotidianas.

- Para lograr la idoneidad epistémica, elegiremos y adaptaremos tareas que sean ricas, es decir que permitan la matematización (horizontal y vertical), estas tareas deben proporcionar al alumno diversas formas de afrontarlas, transitar por diversas representaciones, requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones; también dichas tareas deben relacionarse con otros objetos matemáticos diferentes al de matriz.
- Para lograr la idoneidad cognitiva se debe tener en cuenta, que para desarrollar las tareas, los estudiantes deben poder entenderlas, imaginarlas, partir de sus conocimientos previos y experiencias, y así construir el nuevo conocimiento. En el proceso de instrucción la evaluación debe comprender distintos niveles de

comprensión y competencia y se deben incluir diversas actividades de reforzamiento y ampliación.

- Para lograr la idoneidad afectiva, se requiere que las tareas interesen al alumno, que mediante ellas aprecien y valoren la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana.
- Para lograr la idoneidad interaccional, se debe tener en cuenta que la tarea permita al alumno una oportunidad guiada de reinventar el objeto matemático matriz y las operaciones matriciales. También debe favorecer el dialogo y comunicación entre los estudiantes, que ellos mismos desarrollen herramientas y comprensiones, y compartan sus experiencias, donde sus métodos informales son usados como la base para alcanzar métodos formales.
- Para lograr la idoneidad mediacional, las tareas deben comportarse como modelos concretos por ejemplo diagráficas, tablas y deben poder desarrollarse en un tiempo suficiente ya sea por el estudiante, el profesor o por ambos.

  Si se pretende usar en el diseño de tareas material informático, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa “MAXIMA” pues cumple los requisitos mencionados anteriormente.

  Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla usar horas adicionales, tomando las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática.
- Para lograr la idoneidad ecológica, las tareas deben contribuir a la formación profesional y social de los estudiantes, también deben contemplar la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico. Las tareas también deben relacionarse con contenidos de otras disciplinas. Las tareas deben ser pertinentes, deben tener adecuada gradualidad y baja densidad de contenidos.
- Finalmente, y en términos de la EMR, para lograr relacionar aspectos mediacionales, epistémicos, cognitivos e instruccionales, las tareas deben generar modelos que sirvan como nexo entre las “matemáticas informales”, por ejemplo tablas, relacionadas con el contexto y “las matemáticas más formales”, por ejemplo el objeto matemático matriz.

Esto debido a que en primer lugar, los estudiantes desarrollan estrategias estrechamente relacionada con el contexto. Más tarde, algunos aspectos de la situación de contexto se pueden generalizar, lo que significa que el contexto más o menos, adquiere el carácter de un modelo y como tal puede dar apoyo a la solución de otros problemas relacionados entre sí. Finalmente, los modelos permitirán el tránsito de los estudiantes al conocimiento "matemático más formal". A fin de cumplir la función de puente entre los niveles formales e informales, los modelos han de pasar de un "modelo de" una situación particular, a un "modelo para" todos los tipos de situaciones equivalentes. Por ejemplo, como hemos visto en el capítulo 4, un problema contextualizado asociado a un digrafo, genera siempre una matriz (matriz de adyacencia del digrafo).

A continuación presentamos las tablas A1 y A2 que muestran las componentes e indicadores de idoneidad epistémica y cognitiva que cumplirán las tareas a desarrollar.

Tabla A1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica para el diseño de las tareas

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones – Problemas	- Presenta un problema contextualizado que permite problematizar al estudiante. Se generan variantes del problema contextualizado y se interpreta estas variantes.
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión de una matriz, como verbal, gráfico y simbólico, pudiéndose realizar traducciones y conversiones entre los mismos. - Nivel del lenguaje adecuado para estudiantes del sétimo ciclo de la EBR. - En los diferentes ítemes, se proponen situaciones de expresión matemática y se las interpreta.
Reglas (Definiciones, propiedades, procedimientos y ejemplos)	- Las propiedades del objeto matemático matriz, procedimientos que se exigen en el desarrollo de cada ítem son claros y correctos, y están adaptados para estudiantes del sétimo ciclo de la EBR. - Se presentan los enunciados, procedimientos, operaciones

COMPONENTES	INDICADORES
	básicas y ejemplos del objeto matemático matriz para estudiantes del sétimo ciclo de la EBR. - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	- Las explicaciones y comprobaciones que exige cada ítem son adecuadas para estudiantes del sétimo ciclo de la EBR. - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	- El problema contextualizado tiene relación con el objeto matemático matriz y otros objetos matemáticos. - Los ítemes se relacionan entre sí.

Tabla A2. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva para el diseño de las tareas

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de la tarea. - El desarrollo de la tarea tiene una dificultad manejable.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen ítemes de ampliación y de refuerzo. - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje	- Los diversos ítemes logran que los alumnos manipulen matrices. - Los diversos ítemes permiten al alumno comunicar, realizar procedimientos, argumentar en torno al objeto matemático matriz. - Los diversos ítemes tiene en cuenta distintos niveles

COMPONENTES	INDICADORES
	de comprensión y competencia en torno al objeto matemático matriz. - Los estudiantes construyen el objeto matriz, sus operaciones y conceptos relacionados con el objeto matemático matriz.

Como ya lo anticipamos, en esta etapa de diseño de tareas situaremos como base a las idoneidades epistémicas y cognitivas, pues el proceso de estudio de las matrices gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos del objeto matemático matriz que serán introducidas mediante tareas. Previamente se debe lograr un equilibrio entre la idoneidad epistémica y cognitiva. A la vez los conocimientos específicos sobre matrices deben ser útiles, para el estudiante, en el desarrollo de problemas relacionados con situaciones cotidianas.

5.3. Descripción de la práctica matemática asociada a la tarea nº1

La sesión de clase se inicia por el docente entregando hojas impresas con la tarea nº1 a cada alumno del aula (ver p. 112). El profesor indica a los alumnos que traten de dar solución a la tarea individualmente en un tiempo de 20 minutos aproximadamente. En esta etapa los alumnos no deben consultar a sus compañeros ni al profesor. (La intención es que los estudiantes lean y traten de entender la tarea).

Terminada esta etapa, el docente forma grupos de manera arbitraria y reparte nuevamente la misma tarea e indica que deben desarrollarla grupalmente en un tiempo de 15 minutos.

El profesor en todo momento hace sentir a alumno que no está siendo evaluado, pero induce al alumno a que trabaje con responsabilidad.

En esta etapa grupal el profesor resolverá las diversas interpretaciones (conflictos semióticos, como por ejemplo, fila columna que usualmente se confunden) que los grupos dan a los ítemes de la tarea nº1, la etapa grupal culmina con la entrega, al profesor, de la tarea parcialmente desarrollada o desarrollada en su totalidad ya sea en forma correcta o incorrecta.

Luego de la etapa grupal el profesor resuelve la tarea nº1 o propone al grupo que la resolvió correctamente, la comunique a sus compañeros. Indicándose que la situación problema de la tarea nº1 es un caso particular de la teoría de grafos, específicamente es un gráfico de dominancia. No detalla que es un grafo pues se pretende institucionalizar el objeto matemático matriz (más no la de grafo). El profesor deja abierta la posibilidad de que el alumno interactúe con él y también con la tarea.

Indica que toda gráfica o grafo puede ser representado por una tabla de doble entrada, previamente ordenada la información, y esta tabla de doble entrada es un objeto matemático llamada matriz y en particular es una matriz de adyacencia.

Continua desarrollando la tarea nº1 hablando en forma general de submatrices de una matriz como la matriz fila, matriz columna, el orden de una matriz.

Al desarrollar el ítem h de la tarea nº1 menciona las características que deben tener dos matrices iguales. Al desarrollar los ítemes i, j, k, el profesor hace hincapié en la palabra transponer y le da un significado de acuerdo al contexto de la situación problema de la tarea nº 1, haciendo notar, como surge la matriz transpuesta al intercambiar el sentido de las flechas y la interpreta. Esta parte concluye cuando el profesor comunica a los alumnos que en esta unidad se estudiará matrices.

En la etapa de institucionalización (Ver Apéndice A1), el profesor define el objeto matemático matriz, su notación y proporciona algunos ejemplos para aclarar la definición. Hace notar que los elementos de la matriz pueden ser cualquier número real o complejo, explica quiénes son las filas y las columnas de una matriz y luego define el orden de una matriz.

El profesor debe insistir en que los alumnos entiendan que una matriz es una herramienta útil para almacenar información numérica en forma tabular y ordenada. Dicha información se puede manipular para poder tomar decisiones de acuerdo al problema contextualizado al que se asocie la matriz.

Luego, el profesor proporciona algunas observaciones sobre la notación de matrices cuando la cantidad de filas es diferente o igual a la cantidad de columnas. En estas observaciones explica la forma general de una matriz, como es un elemento genérico a_{ij}

y como definir matrices implícitas a partir de su elemento genérico, ejemplifica cada una de las observaciones.

Después de esto, el profesor clasifica algunos tipos de matrices, definiendo matriz fila, columna, nula, cuadrada, rectangular y la igualdad de matrices, dando sus respectivos ejemplos para aclarar las definiciones.

A continuación define la transpuesta de una matriz y vía un ejemplo se induce al alumno a intuir que la transpuesta de la transpuesta de una matriz A es la matriz A, luego se enuncia esta propiedad. Luego, el profesor proporciona un ejemplo donde el alumno aplica la propiedad anterior.

A continuación, el profesor aprovecha la propiedad anterior en un ejemplo donde proporciona al alumno una matriz de tal manera que al transponerla siga siendo la matriz original con el objetivo de que emerja el concepto de matriz simétrica. El profesor concluye la parte de institucionalización definiendo matriz simétrica, antisimétrica, y dando su respectivo ejemplo.

El profesor proporciona a los alumnos una lista de ejercicios (Ver Apéndice A2) para que apliquen las definiciones, observaciones y propiedades estudiadas. Si se dispone de recursos informáticos el profesor puede desarrollar algunos de los ejercicios usando el programa MAXIMA (Ver Apéndice F). Finalmente, el profesor evalúa a los alumnos. La evaluación consiste en un examen escrito que consta de dos preguntas, la primera pregunta trata de una gráfica de dominancia, esperando que el alumno encuentre su matriz de adyacencia, la interprete; luego que halle la transpuesta y la interprete.

La pregunta dos pretende que el alumno encuentre la matriz explicita, dada su definición implícita de un elemento genérico, la transponga y que identifique algunas de sus entradas para luego sumarlas (Ver Apéndice A4).

5.3.1. Propuesta de la tarea nº 1

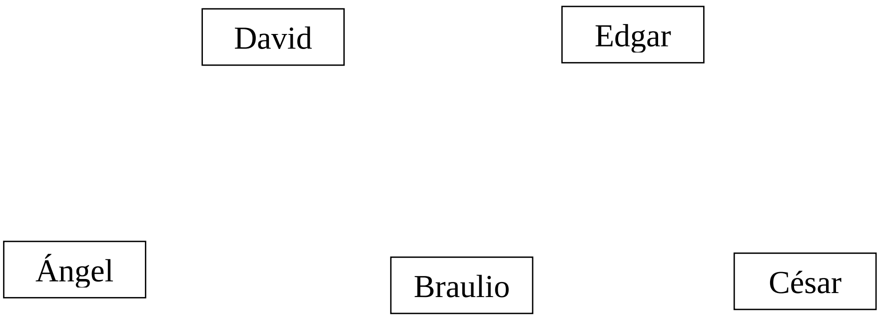
TAREA Nº 1

En muchas situaciones de la vida diaria, ciertas personas dominan, influyen o se comunican con otras. Estas relaciones pueden ser físicas, intelectuales o emocionales, y pueden ser determinadas por pruebas sicológicas, por medio de cuestionarios o, por simple observación.

El sicólogo de una institución educativa estudia “quien ayuda a quien” en un trabajo grupal. Este trabajo se lleva a cabo en el aula y por alumnos de quinto de secundaria conformado por cinco alumnos: Ángel, Braulio, Cesar, David y Edgar, y ha observado que:

- ✓ Ángel ayuda a César.
- ✓ Ángel es ayudado por David.
- ✓ Braulio ayuda a David.
- ✓ Edgar es ayudado por Braulio.
- ✓ César es ayudado por Edgar.

a) Complete la gráfica con flechas que expresen la relación “quien ayuda a quien”, considerando que si una persona ayuda a otra se representará por una flecha que “sale” del que ayuda y llega al ayudado.



b) Complete la tabla de doble entrada, considerando que si una persona ayuda a otra se indica con 1 y si no con 0.

Ayuda	Ángel	Braulio	César	David	Edgar
Ángel					
Braulio					
César					
David					
Edgar					

c) Escriba la columna con más unos completando en los espacios punteados.

$\begin{bmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$, ¿A quién le corresponde?…………………………………………………..

¿Qué indica esta columna con relación al enunciado?

……………………………………………………………..…………………………

………………………………………………………………………………………….

d) Escribe la fila con más unos completando en los espacios punteados.

[… … … … …], ¿A quién le corresponde? …………………………………...

¿Qué indica esta fila con relación al enunciado?

…………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………..

e) Escriba el número que está en la intersección de la fila cuatro y la columna cinco ¿qué indica este número con relación al enunciado?

El número es ………………… e indica ……………………………………………

………………………………………………………………………………………….

f) Escriba el número que está en la intersección de la fila dos y la columna ¿qué indica este número con relación al enunciado?

El número es ………………… e indica ……………………………………………

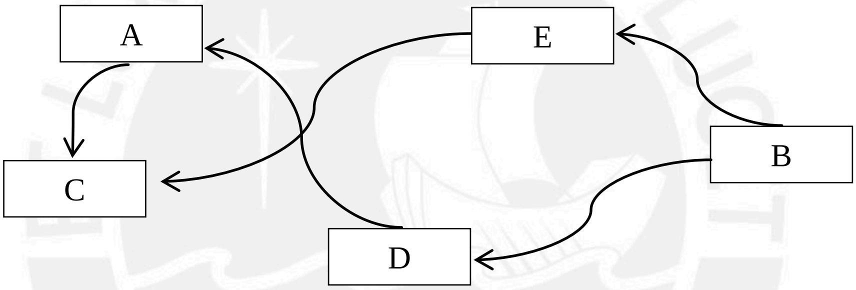
…………………………………………………………………………………….

g) Responda, ¿Cuántas filas y columnas tiene la tabla llenada en la parte b? y ¿Cuántos elementos tiene?

……………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………….

h) Observe la siguiente gráfica



A continuación complete la tabla que corresponde a la gráfica (como en el ítem b)

	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

Compare el contenido de esta tabla con el contenido de la tabla obtenida en el ítem (b) ¿Son iguales las tablas? Justifica tu respuesta.

…………………………………………………………………………………......

…………………………………………………………………………………...

i) Vuelva a hacer la gráfica del ítem (a) después de transponer (cambiar) el sentido de las flechas. Luego teniendo en cuenta los cambios, reescriba el problema inicial y explique qué ha cambiado.

j) Elabore la tabla que represente la gráfica anterior.

	Ángel	Braulio	Cesar	David	Edgar
Ángel					
Braulio					
Cesar					
David					
Edgar					

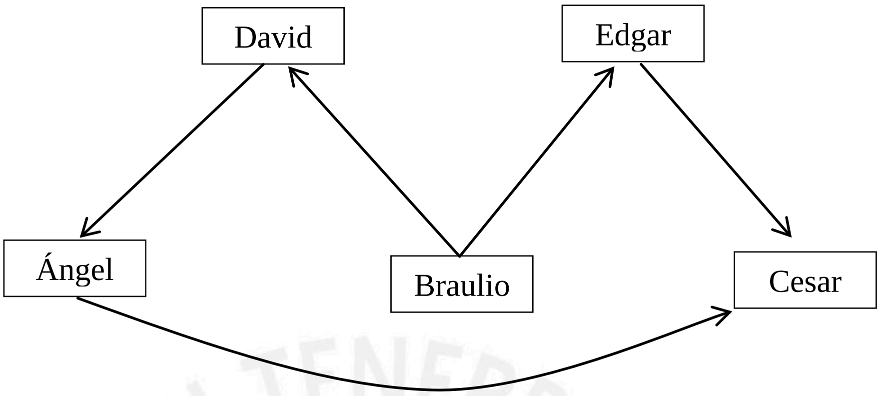
k) Luego de comparar las columnas de la tabla obtenida en el ítem (b) con las filas de la matriz obtenida en el ítem (j) ¿Qué puede afirmar?

……………………………………………………………………………………………....

………………………………………………………………………………………………

5.3.2. Solución de la Tarea nº 1

a) Luego de comprender el texto



b) Después de comprender lo que se pide, tenemos:

	Ángel	Braulio	Cesar	David	Edgar
Ángel	0	0	1	0	0
Braulio	0	0	0	1	1
Cesar	0	0	0	0	0
David	1	0	0	0	0
Edgar	0	0	1	0	0

c) La columna que tiene más unos es:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, le corresponde a Cesar y representa al que es más ayudado.

d) Las filas que tienen más unos son:

[0 0 0 1 1], corresponde a Braulio

y

[1 0 1 0 0], Corresponde a David.

Son las personas que más ayudan en el grupo.

e) El número es 0 e indica que David no ayuda a Edgar.

f) El número es 1 e indica que Braulio ayuda a David.

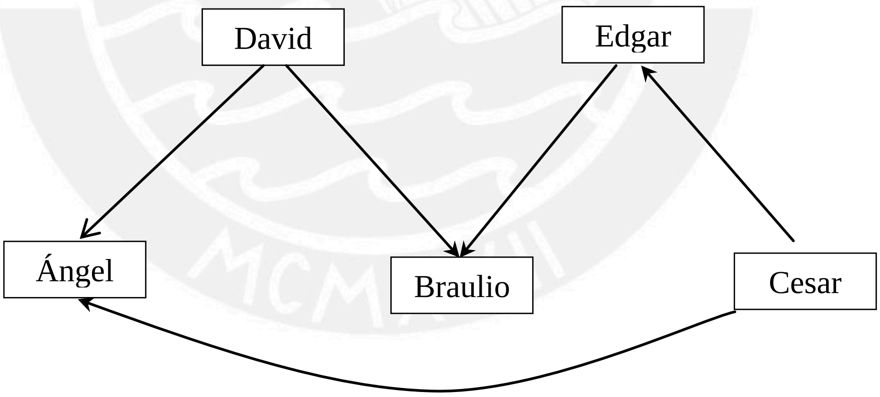
g) Tiene 5 columnas e igual número de filas, indica que la tabla tiene 25 elementos.

h) Después de haber comprendido lo que se pide, tenemos

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	0	0
B	0	0	0	1	1
C	0	0	0	0	0
D	1	0	1	0	0
E	0	0	1	0	0

Después de compararlas se diría que son iguales.

i) Después, tenemos:



j)

	Ángel	Braulio	Cesar	David	Edgar
Ángel	0	0	0	1	0
Braulio	0	0	0	0	0
Cesar	1	0	0	1	1
David	0	1	0	0	0
Edgar	0	1	0	0	0

k) Las columnas de la tabla obtenida en el ítem b) son iguales a las filas de la tabla obtenida en i).

5.3.3. Configuración Epistémica de la Tarea 1

Situación

La tarea 1 consiste en un problema contextualizado con la que se pretende que surjan los objetos matemáticos, matriz, matriz fila, matriz columna, matriz cuadrada, matriz rectangular, orden de una matriz, igualdad de matrices y la transpuesta de una matriz.

El contexto de la tarea 1, está enmarcado en gráficos de dominancia y matrices de adyacencia de una diagráfica y es muy cercano a los conocimientos previos del estudiante.

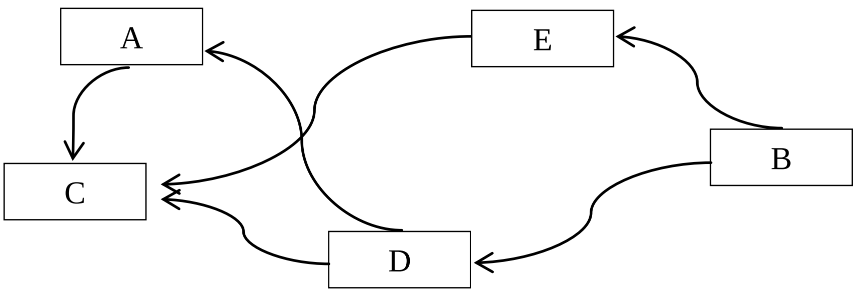
Lenguaje

Lenguaje verbal

Relaciones, matriz, columna, fila, intersección, orden de la matriz M, matrices, transponer.

Lenguaje gráfico

Digrafo o grafo de dominancia de la relación “quien ayuda a quien”



Lenguaje simbólico

$$M,\ m,\ n,\ m \times n,\ 5 \times 5,\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1,\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0,\ \begin{matrix}1\\0\\0\\1\\1\end{matrix}$$

	Ángel	Braulio	Cesar	David	Edgar
Ángel	0	0	1	0	0
Braulio	0	0	0	1	1
Cesar	0	0	0	0	0
David	1	0	1	0	0
Edgar	0	0	1	0	0

Conceptos

Conceptos previos

Relaciones, contar números enteros, suma de números reales, intersección, multiplicación de números reales, flecha (línea dirigida).

Conceptos emergentes

Matriz, matriz fila, matriz columna, matriz cuadrada, matriz rectangular, orden de una matriz, igualdad de matrices traspuesta de una matriz.

Procedimientos

Para que emerja el objeto matemático matriz

Previos

- Complete la gráfica con flechas que expresen la relación "quien ayuda a quien", considerando que si una persona ayuda a otra esto se representará por una flecha que "sale" del que ayuda y llega al ayudado.
- Complete la tabla de doble entrada (matriz), considerando que si una persona ayuda a otra se indica con 1 y si no con 0.

Emergente

Matriz cuadrada de orden cinco (Matriz de adyacencia del digrafo)

Para que emerja el objeto matemático matriz traspuesta

Previo

Elabore la matriz que represente la gráfica del ítem a) después de trasponer (cambiar) el sentido de las flechas.

Emergente

Matriz traspuesta

Proposiciones

Para el orden de una matriz

Si M es una matriz de "m" filas y "n" columnas, entonces el orden de la matriz M es $m \times n$.

Para la igualdad de matrices

Sean dos matrices A y B, se dicen que son iguales si cumplen las siguientes condiciones:

a) Son del mismo orden,

b) Sus correspondientes elementos son iguales; y se denota como $A = B$

5.3.4. Grado de idoneidad de la tarea 1.

Para la elaboración de la tarea nº1 nos centramos en el cumplimiento de todas las componentes e indicadores de la idoneidad epistémica y cognitiva de la tabla A1 y A2 respectivamente.

Veremos a continuación que la tarea nº 1 cumple con la idoneidad epistémica y cognitiva que se dan en las tablas A1 y A2 y lo hacen en un alto grado.

Idoneidad epistémica

Situaciones – Problema

– La tarea 1 es una situación problema donde un grupo de cinco estudiantes se relacionan entre si ayudándose a realizar un trabajo grupal.

- Esta tarea presenta once ítemes y en cada una se generan problemas al estudiante que debe resolver. Todos estos problemas tienen que ver con la manipulación de las entradas de una matriz, sus filas y columnas, comparar y trasponer sus filas y columnas interpretando estos procedimientos.
- En el ítem (i) se modifica el problema inicial, al inducir al alumno a trasponer el sentido de las flechas del digrafo, emergiendo así la matriz traspuesta. Notemos que esta trasposición puede ser interpretado afirmando que los alumnos que ayudan ahora pasaron a ser ayudados. Notemos que este ítem permite, al alumno, generar un procedimiento para hallar la traspuesta de una matriz. También en el ítem (a), el estudiante, sin conocer que es una matriz, construye una matriz siguiendo las indicaciones de este ítem.

Es evidente que la tarea nº 1 cumple con todos los indicadores de la componente Situación-Problema dada en la tabla A1 (Ver p. 107).

Lenguajes

- En el primer ítem (a), el estudiante construye una gráfica (digrafo) siguiendo las indicaciones que se dan. Luego en el segundo ítem (b) construye una tabla que representa a la gráfica anterior. En los siguientes ítemes el alumno, resolviendo cada ítem, manipula los elementos de la tabla sin saber que está manipulando una matriz cuadrada de orden cinco. En el ítem (i) el estudiante altera la dirección de las flechas y construye otra gráfica, y pasa de la gráfica a un problema contextualizado. En el ítem (j) el estudiante pasa de la gráfica a la tabla (matriz traspuesta) interpretando estos resultados. Se evidencia así que el estudiante usa diferentes modos de expresión matemática haciendo traducciones y conversiones entre las mismas.
- En todos los ítemes el nivel del lenguaje es adecuado para los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR. Caso contrario el profesor solucionara cualquier conflicto semiótico presente.

Así se verifica el cumplimiento total de los indicadores de la componente lenguaje dada en la tabla A1.

Reglas

- El estudiante al resolver la tarea construye un digrafo, una matriz, además manipula los elementos de una matriz, trabaja con matrices fila y columna, decide si dos matrices son iguales (tablas) y finalmente traspone una matriz. Notamos también que todos los procedimientos anteriores son interpretado por el estudiante de acuerdo al contexto inicial de la tarea y son adecuados para su nivel.

Verificamos, así, el cumplimiento total de los indicadores de la componente reglas dadas en la tabla A1.

<u>Argumentos</u>

- Los argumentos que se necesitan para dar solución a cada ítem, están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.
- Desde el ítem (c) el alumno tiene que argumentar y justificar sus conclusiones.

Observamos que se cumplen todos los indicadores, de la componente argumento, dados en la tabla A1.

<u>Relaciones</u>

Observamos en el desarrollo de toda la tarea que el objeto matemático matriz se relaciona con el objeto matemático digrafo. Además todos los ítemes se relacionan para poder hacer emerger el objeto matemático matriz, matriz fila y columna, matriz traspuesta.

Es así que corroboramos que la tarea 1 tiene una alta idoneidad epistémica.

Idoneidad cognitiva

<u>Conocimientos Previos</u>

- La tarea l requiere de conocimientos previos básicos, como podemos verificar al observar la solución y configuración epistémica de la tarea 1.

  Los conocimientos previos son:

  Relaciones

  Contar números enteros

  Suma de números reales, multiplicación de números reales

  Intersección, flecha (línea dirigida).

  Además las argumentaciones, interpretaciones y justificaciones que exige cada ítem al estudiante hipotético están a su alcance. Esto lo corroboramos en la sección 2.1 del capítulo 2 donde definimos nuestro estudiante hipotético: “En el sétimo ciclo, una de las características del pensamiento del estudiante es de ser más abstracto que el del ciclo anterior, lo que significa que está en condiciones de desarrollar aprendizajes más complejos".

De esta manera los contenidos pretendidos se pueden alcanzar pues tienen una dificultad manejable.

Cumpliéndose así con los indicadores de la componente conocimientos previos de la idoneidad cognitiva de la tabla A2.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

- Se incluyen ítemes de ampliación y de refuerzo, esto se evidencia en los ítemes (c) y (d) donde el estudiante tiene que extraer una columna de la tabla obtenida en el ítem (b) e interpretar lo que indica. Lo mismo se amplía y refuerza en los ítemes (e) y (f), con la diferencia que se extrae una fila de la tabla obtenida en (b). Esto se puede observar en la solución de la tarea 1. De esta manera se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes a desarrollar la tarea logrando así que el estudiante construya el objeto matemático matriz.

Cumpliéndose así todos los indicadores de la componente adaptaciones curriculares a las diferencias individuales que compone la idoneidad cognitiva de la tabla A2.

Aprendizajes

- En el primer ítem (a), el estudiante construye un digrafo siguiendo las indicaciones que se dan. Luego en el segundo ítem (b) construye una tabla que representa a la gráfica anterior. En los siguientes ítemes el alumno, resolviendo cada ítem, manipula los elementos de la tabla sin saber que está manipulando una matriz cuadrada de orden cinco. En el ítem (i) el estudiante altera la dirección de las flechas y construye otra gráfica, y pasa de la gráfica a un problema contextualizado, en el ítem (j) el estudiante pasa de la gráfica a la tabla (matriz traspuesta) interpretando estos resultados. Se evidencia así que el estudiante usa diferentes modos de expresión matemática haciendo traducciones y conversiones entre las mismas.

- Además manipula los elementos de una matriz, trabaja con matrices fila y columna, decide si dos matrices son iguales (tablas) y finalmente traspone una matriz. Notamos también que todos los procedimientos anteriores son interpretados por el estudiante de acuerdo al contexto inicial de la tarea.
- El segundo ítem permite al alumno construir la matriz asociada a la gráfica obtenida en el primer ítem.
- Los ítemes tienen diferentes niveles de comprensión y competencia, por ejemplo los dos primeros están diseñados para guiar al alumno, el sólo debe seguir instrucciones, pero en los restantes debe analizar, justificar e interpretar sus procedimientos.

Cumpliéndose la idoneidad cognitiva especificada en la tabla A2 en un alto grado (Ver pp. 108-109).

Con respecto al resto de idoneidades consideraremos las que se han elegido en la sección 5.2 de este capítulo.

- La idoneidad afectiva se logra cuando el estudiante, al final del proceso de estudio de la tarea 1, observa que una tarea relacionada con la vida cotidiana puede involucrar diagráficas y matrices que son objetos matemáticos útiles para solucionar estos tipos de problemas que están relacionados con profesiones que aparentemente no aplican la matemática, como la de un sicólogo o sociólogo.
- La idoneidad interaccional, se logra, pues la tarea ha permitido al alumno una oportunidad guiada de reinventar el objeto matemático matriz y las operaciones matriciales. Se espera, además (Ver sección 5.3) que se favorezca el dialogo y comunicación entre los estudiantes, compartiendo lo hecho en forma individual, donde sus métodos informales son usados como la base para construir el objeto matemático matriz.
- La idoneidad mediacional, se cumple pues la tarea se comportó como tres modelos concretos por ejemplo digrafo, tablas y matrices. Se espera que deben poder desarrollarse en un tiempo suficiente ya sea por el estudiante, el profesor o por ambos.

  Si se pretende usar en el diseño de tareas material informático, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa "MAXIMA" pues cumple los requisitos mencionados anteriormente. (Ver Apéndice F).

Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla usar horas adicionales, tomando las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática.

a) La idoneidad ecológica de la tarea 1 se logra, pues contribuye a la formación profesional y social de los estudiantes, también contempla la formación en valores al relacionarse la tarea con la ayuda entre compañeros y fomenta el pensamiento crítico en cada ítem. La tarea se relaciona una disciplina "ajena" a las matemáticas. En resumen la tarea ha sido pertinente, adecuada, gradual. Si bien es cierto que la densidad de contenidos ha sido alta, estos han surgido de manera espontánea al desarrollarse cada ítem.

De todo lo anterior podemos afirmar que el diseño de esta tarea cumple con los criterios de la idoneidad didáctica y permiten "introducir" a un estudiante de la EBR en el estudio de las matrices.

5.4.Descripción de la práctica matemática asociada a la tarea nº 2

La sesión de clase es iniciada por el docente entregando hojas impresas con la tarea nº 2 a cada alumno del aula (Ver p.127). El profesor indica a los alumnos que realicen la tarea individualmente en un tiempo de 20 minutos aproximadamente, en esta etapa los alumnos no deben consultar a sus compañeros ni al profesor.

El profesor en todo momento hace sentir a alumno que no está siendo evaluado, pero induce al alumno a que trabaje con responsabilidad, les comenta que la idea es que ellos descubran ciertas regularidades al desarrollar la tarea y traten de construir nuevos conceptos matemáticos y ver la manera de definir operaciones con ellos.

Terminada la etapa individual, el docente forma grupos de manera arbitraria y reparte nuevamente la misma tarea, e indica que deben desarrollarla grupalmente en un tiempo de 15 minutos.

En esta etapa grupal el profesor resolverá las diversas interpretaciones (conflictos semióticos) que los grupos pueden dar a los ítemes de la tarea nº2, la etapa grupal culmina con la entrega, al profesor, de la tarea parcialmente desarrollada o desarrollada en su totalidad ya sea en forma correcta o incorrecta.

Luego de la etapa grupal el profesor resuelve la tarea nº 2 o propone al grupo que la resolvió correctamente, la comunique a sus compañeros. Indicándose que dicha tarea es un caso particular de suma y resta de matrices. También, se indica en forma general las condiciones que deben tener dos matrices para poder sumarlas y restarlas, y como realizar estas operaciones. En esta etapa queda abierta la posibilidad que el alumno, el profesor y la tarea 2 interactúen.

En la etapa de institucionalización (Ver Apéndice B) el profesor define la suma de matrices (Definición 2.1), da una primera observación (Observación 2.1) donde afirma que dos matrices se pueden sumar si son del mismo orden.

Luego, el profesor da el ejemplo 2.1 donde el alumno observa que la suma de matrices es conmutativa y luego la da como observación. (Observación 2.2), el profesor da otro ejemplo (Ejemplo 2.2.) donde se suman tres matrices y se verifica la propiedad asociativa y luego la da como la observación 2.3, también da dos ejemplos consecutivos (Ejemplos 2.3 y 2.4) donde se aprecia la existencia del elemento neutro e inverso aditivo para luego darla como la observación 2.4.

Continuando con la institucionalización, el profesor define la diferencia de matrices (definición 2.2), luego muestra un ejemplo donde se verifica que $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$ para luego darla como la propiedad 2.1, resume las observaciones 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 en una sola propiedad, la propiedad 2.2 (propiedades de la adición de matrices).

El profesor concluye la parte de institucionalización dando dos ejemplos donde se aprecia una forma práctica de construir matrices simétricas y antisimétricas y las institucionaliza en las propiedades 2.3 y 2.4 en donde se afirma que dada una matriz cuadrada de orden n, entonces la suma de A y A^T es una matriz simétrica y la diferencia entre A y A^T es una matriz antisimétrica.

5.4.1. Propuesta de la tarea 2

TAREA Nº 2

Edinson es un comerciante de revistas, su negocio está conformado por tres librarías; en cada librería vende revistas de deportes, moda y actualidad.

Las cantidades de revistas que existen en sus tres librerías las ha organizado en una tabla, llamada tabla de existencia

Tabla 5.1 Tabla de existencia.

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	50	30	31
Librería 2	80	40	20
Librería 3	25	33	15

Parte 1

Responda:

a) ¿Cuántas revistas de actualidad existen en la librería 3?
b) ¿Cuántas revistas de moda quedan en la librería 2?
c) ¿Cuántas revistas de cada tipo existen en la librería 1?

Edinson, después de una buena semana de ventas, observa que necesita hacer un pedido urgente a su proveedor y elabora la tabla de pedido

Tabla 5.2 Tabla de pedido.

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	100	100	100
Librería 2	150	130	100
Librería 3	200	200	150

Una vez que el proveedor entrega al pedido a Edinson, él las distribuye a cada una de sus librerías.

Parte 2

Elabore o responda, según sea el caso:

a) La nueva tabla de existencia.
b) ¿Cuántas revistas de moda hay en cada librería?
c) La tabla 5.1 (tabla de existencia) y tabla 5.2 (tabla de pedido) ¿se relacionan con matrices?
d) Si la respuesta de la pregunta en el ítem (c) es afirmativa, elabore dichas matrices y llámelas E y P respectivamente.
e) Para hallar la nueva tabla de existencia del ítem (a) ¿Qué operación, considera, que se ha originado entre las matrices E y P?
f) Describa una regla que permita realizar dicha operación entre dos matrices.

Edinson, observa la tabla de ventas que tiene registradas las ventas hasta la mitad de semana

Tabla 5.3 Tabla de ventas.

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	30	10	18
Librería 2	10	17	14
Librería 3	15	22	13

Parte 3

Elabore o responda, según sea el caso:

a) La nueva tabla de existencia.
b) Para hallar la nueva tabla de existencia en el ítem anterior ¿Qué operación, considera, se ha originado entre matrices?

c) Describa una regla que permita realizar la operación, que cree Ud. se ha originado.

Edinson, observa las tablas de ventas por semana del mes de junio.

Tabla 5.4 Tabla de ventas semana 1.

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	50	40	48
Librería 2	60	37	64
Librería 3	55	37	60

Tabla 5.5 Tabla de ventas semana 2

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	40	39	54
Librería 2	41	34	60
Librería 3	80	66	57

Tabla 5.6 Tabla de ventas semana 3

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	33	54	47
Librería 2	41	63	85
Librería 3	87	31	53

Tabla 5.7 Tabla de ventas semana 4

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	52	50	60
Librería 2	65	32	40
Librería 3	33	40	50

Parte 4

Resuma en una sola tabla las ventas realizadas, y responda.

a) ¿En qué librería se ha vendido más revistas de deportes?

b) ¿En qué librería se ha vendido menos revistas de moda?

c) En la librería 1, 2 y 3 ¿qué tipo de revistas son las más vendidas?

d) Para resumir en una sola tabla las ventas realizadas ¿Qué operación entre matrices se ha originado?

e) Describa una regla que permita realizar la operación que se ha originado en el ítem (d) entre de dos matrices.

5.4.2. Solución de la tarea 2

Parte 1

a) Existen 15 revistas de actualidad

b) Quedan 40 revistas de moda

c) 50 de deportes, 30 de moda 31 de actualidad

Parte 2

a) La nueva tabla de existencias

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	150	130	131
Librería 2	230	170	120
Librería 3	225	233	165

b) Hay 130 revistas en la librería 1, 170 en la librería 2 y 233 en la librería 3.

c) Sí.

d)

$$E = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 31 \\ 80 & 40 & 20 \\ 25 & 33 & 15 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 150 & 130 & 100 \\ 200 & 200 & 150 \end{bmatrix}$$

e) Se han sumado las matrices E y P.

f) $$E+P=\begin{bmatrix} 50+100 & 30+100 & 31+100 \\ 80+150 & 40+130 & 20+100 \\ 25+200 & 33+200 & 15+150 \end{bmatrix}$$

Parte 3

a) La nueva tabla de existencia

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	120	12	113
Librería 2	220	153	106
Librería 3	255	211	152

b) Diferencia de matrices

c)

$$\begin{bmatrix} 150-30 & 130-10 & 131-18 \\ 230-10 & 170-17 & 120-14 \\ 225-15 & 233-22 & 165-13 \end{bmatrix}$$

Parte 4

Tabla de ventas totales

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	175	183	209
Librería 2	207	166	249
Librería 3	210	174	220

a) En la librería 3 se han vendido más revistas: 210.

b) En la librería 2 se han vendido menos revistas de moda: 166

c) En la librería 1 la revista más vendida es de actualidad con 209 unidades, en la librería 2 la más vendida es la revista de actualidad con 249 unidades, y en la librería 3 la revista más vendida es también la de actualidad con 220 unidades.

d) Se ha originado una suma de matrices asociadas a las tablas 5.4 a 5.7
e) Se debe sumar sus correspondientes entradas de las matrices asociadas a las tablas.

5.4.3. Configuración epistémica de la tarea 2

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado donde se actualiza una tabla o matriz de existencia de revistas, luego de que se hace un pedido de revistas y luego que se realizan ventas. También se obtiene una tabla de las ventas totales.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Tabla, matriz

Lenguaje simbólico

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	50	30	31
Librería 2	80	40	20
Librería 3	25	33	15

Tabla 5.1 Tabla de existencia.

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	100	100	100
Librería 2	150	130	100
Librería 3	200	200	150

Tabla 5.2 Tabla de pedido.

	Deportes	Moda	Actualidad
Librería 1	30	10	18

Librería 2	10	17	14
Librería 3	15	22	13

Tabla 5.3 Tabla de ventas.

Conceptos

Conceptos previos

Tabla, matriz, elemento o entrada de una matriz, suma de números reales, resta de números reales.

Conceptos emergentes

Suma de matrices, Diferencia de matrices.

Procedimientos

Para la suma de matrices

Sumar las respectivas entradas

Para la diferencia de matrices

Restar las respectivas entradas

Proposiciones

Si dos matrices tienen el mismo orden, entonces se puede realizar entre ellas una suma resta de matrices.

5.4.4. Grado de idoneidad de la tarea 2.

Idoneidad epistémica

Situaciones – Problema

- El problema consiste en un problema contextualizado donde se actualiza una tabla o matriz de existencia de revistas, luego de realizar un pedido de revistas y luego que se realizan ventas. También se obtiene una tabla de las ventas totales.
- Esta tarea presenta cuatro partes, en la primera parte se insiste en manipular las entradas de una matriz interpretándolas de acuerdo al contexto de la situación problema. En la segunda parte se induce al alumno a sumar dos matrices, la matriz de existencia con la matriz de pedidos. Y nuevamente se interpreta algunas de sus entradas.

- En la parte tres se induce al alumno a restar dos matrices. Finalmente en la parte cuatro se induce a sumar más de dos matrices
- Observamos que la tabla de existencia se modifica debido a la actualización de existencias tanto al sumar la tabla de pedidos, como al restar la tabla de ventas.

Lenguajes

- En este caso las expresiones matemáticas usadas en la solución de la tarea solo son dos, la tabla y su respectiva matriz. Ya sea de existencia, de pedido o de ventas.
- El profesor debe aclarar que es una tabla de existencia, pues consideramos que es un conflicto semiótico potencial en esta tarea. De esta manera el lenguaje será adecuado para los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.
- Como hemos visto, se induce al alumno a sumar y restar matrices, además se insiste en la manipulación de entradas de las matrices, pidiendo al estudiante que interprete el significado de las entradas de la matriz de existencia de acuerdo al contexto inicial de la tarea.

Reglas

- Se induce al alumno a aplicar reglas o procedimiento a la suma y resta de matrices.
- Se incluyen ítemes (a), (c), (d), (e) y (f) de la parte dos donde el estudiante tiene que definir con sus propios recursos la suma de matrices. Lo mismo se realiza en los ítemes (a), (b) y (c) de la parte tres. Donde el estudiante, usando sus propios recursos, debe definir la resta de dos matrices.
- También estos procedimientos están al alcance de estudiantes del sétimo ciclo de la EBR, pues solo tiene que sumar restar y organizar datos numéricos.

Argumentos

- Como ya hemos visto, los argumentos que se necesitan para dar solución a cada ítem, están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.
- En las cuatro partes de la tarea 2 el estudiante tiene que interpretar los resultados obtenidos. En el ítem (c) de la parte 2 el estudiante tiene que argumentar porque las tablas de pedidos y existencias representan matrices.

Relaciones

Observamos en el desarrollo de toda la tarea que el objeto matemático matriz se relaciona con el modelo tabla. Además todos los ítemes se relacionan para poder hacer emerger el procedimiento que permite sumar y restar matrices.

Es así que corroboramos que la tarea 2 satisface la idoneidad epistémica en un alto grado.

Idoneidad cognitiva

Conocimientos Previos

- La tarea 2 requiere de conocimientos previos que el estudiante ya posee, como podemos verificar al observar la configuración epistémica de la tarea 2.

  Los conocimientos previos son:

  Matrices.

  Sumar números reales.

  Restar números reales.

  Además las argumentaciones, interpretaciones y justificaciones que exige cada ítem al estudiante están al alcance de los estudiantes.

  De esta manera los contenidos pretendidos se pueden alcanzar pues tienen una dificultad manejable.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

- Se incluyen ítemes de ampliación y de refuerzo, esto se evidencia en los ítemes (a), (c), (d), (e) y (f) de la parte dos. Donde el estudiante tiene que definir con sus propios recursos la suma de matrices. Lo mismo se amplia y refuerza en los ítemes (a), (b) y (c) de la parte tres. Donde el estudiante, usando sus propios recursos, debe definir la resta de dos matrices. De esta manera se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes a desarrollar la tarea logrando así que el estudiante construya, entienda y aplique la suma y resta de matrices.

Aprendizajes

- Los diversos ítemes en la parte dos tres y cuatro garantizan que el estudiante aprenda a sumar y restar matrices sin conocer dichas operaciones.
- También los diferentes ítemes inducen al estudiante a interpretar las entradas de las matrices que han resultado de la suma y resta de matrices.
- Los ítemes tienen diferentes niveles de comprensión y competencia, por ejemplo los que corresponden a la parte uno son básicos pues se limitan a interpretar las entradas de las tablas. En cambio en la parte tres y cuatro el estudiante tiene que "construir" las operaciones matriciales correspondientes.

Cumpliéndose así la idoneidad cognitiva especificada en la tabla A2 en un alto grado (Ver pp. 108-109).

Con respecto al resto de idoneidades consideraremos las que se han elegido en la sección 5.2 de este capítulo.

– La idoneidad afectiva se logra cuando el estudiante, al final del proceso de estudio de la tarea nº 2, observa que una tarea relacionada con la vida cotidiana puede resolverse usando tablas o matrices y que éstas, si son del mismo orden, se pueden sumar o restar.
– La idoneidad interaccional se logra, pues la tarea ha permitido al alumno una oportunidad guiada de reinventar las operaciones matriciales de suma y resta. Se espera, además (Ver sección 5.4) que se favorezca el dialogo y comunicación entre los estudiantes, compartiendo lo hecho en forma individual, donde sus métodos informales son usados como la base para construir la suma y resta de matrices.
– La idoneidad mediacional, se cumple pues la tarea se comporta como dos modelos concretos por ejemplo tablas de existencia (pedidos) y matrices. Se espera que deben poder desarrollarse en un tiempo suficiente ya sea por el estudiante, el profesor o por ambos.

  Si se pretende usar en la planificación y diseño de tareas material informático, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa “MAXIMA” pues cumple los requisitos mencionados anteriormente. (Ver Apéndice F).

  Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla usar horas adicionales, tomando las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática.

f) La idoneidad ecológica, en la tarea nº 2 se logra pues contribuye a la formación profesional y social de los estudiantes, y fomenta el pensamiento crítico en cada ítem. La tarea se relaciona con tablas y éstas, en el futuro, serán relacionados con matrices por los estudiantes. En resumen la tarea ha sido pertinente, adecuada, gradual y una baja densidad de contenidos.

De todo lo anterior podemos afirmar que el diseño de esta tarea cumple con los criterios de la idoneidad didáctica y permiten “introducir” a un estudiante de la EBR en el estudio de suma y resta de matrices.

5.5. Descripción de la práctica matemática asociada a la tarea nº 3

La sesión de clase es iniciada por el docente entregando hojas impresas con la tarea nº 3 a cada alumno del aula (Ver p. 139). El profesor indica a los alumnos que realicen la tarea individualmente en un tiempo de 20 minutos aproximadamente, en esta etapa los alumnos no deben consultar a sus compañeros ni al profesor.

El profesor en todo momento hace sentir a alumno que no está siendo evaluado, pero induce al alumno a que trabaje con responsabilidad, les comenta que la idea es que ellos descubran ciertas regularidades al desarrollar la tarea y traten de construir nuevos conceptos matemáticos, y ver la manera de definir operaciones con estos nuevos conceptos.

Terminada la etapa individual, el profesor forma grupos de manera arbitraria y reparte nuevamente la misma tarea, e indica que deben desarrollarla grupalmente en un tiempo de 15 minutos.

En esta etapa grupal el profesor resolverá las diversas interpretaciones (conflictos semióticos) que los grupos pueden dar a los ítemes de la tarea nº3, la etapa grupal culmina con la entrega, al profesor, de la tarea parcialmente desarrollada o desarrollada en su totalidad ya sea en forma correcta o incorrecta.

Luego de la etapa grupal el profesor resuelve la tarea nº 3 indicando que dicha tarea es un caso particular del producto de un escalar por una matriz, explicando que un escalar es cualquier número real, y que al multiplicarlo por una matriz o viceversa, este escalar ingresa a multiplicar a cada entrada de la matriz. . En esta etapa queda abierta la opción que el alumno, el profesor y la tarea interactúen.

La institucionalización (Ver Apéndice C) empieza cuando el profesor define el producto de un escalar por una matriz (definición 3.1) y aclara vía el ejemplo 3.1 que el producto de un escalar por una matriz es el mismo si se da por derecha o por izquierda, es decir $c\,A = A\,c$, acá también el profesor hace notar que el inverso aditivo de cualquier matriz A puede considerarse como el producto de la matriz A por el escalar -1.

A continuación el profesor proporciona el ejemplo 3.2 donde el alumno visualiza que el producto de un escalar por una matriz es una operación distributiva respecto a la suma de matrices para luego darlo como una observación (observación 3.2). Luego, el profesor formaliza la observación 3.2 y el ejemplo 3.3 en la propiedad 3.1 donde se afirma que el producto por un escalar es distributivo con respecto a la suma de matrices, también que el producto del escalar uno por cualquier matriz es la misma matriz, y que el producto del escalar cero por cualquier matriz es la matriz nula.

Continuando con la institucionalización, el profesor hace notar, vía el ejemplo 3.4 y 3.5 que las propiedades 2.2 y 3.1 permiten dar solución a ecuaciones matriciales de la forma:

$\alpha X = A$, donde α es un escalar y X, A son matrices del mismo orden.

Y que también, las propiedades 2.2 y 3.1 permiten dar solución a sistemas de ecuaciones matriciales de la forma:

$$\begin{cases} \alpha X + \beta Y = A \\ \delta X + \lambda Y = B \end{cases}, \ \alpha, \beta, \delta, \lambda \text{ son escalares y } X, Y \text{ matrices del mismo orden.}$$

Esto es ilustrado por el profesor en el ejemplo 3.6 finalizando así la fase de institucionalización.

5.5.1. Propuesta de la tarea 3

Tarea Nº 3

Wilson es un aficionado a la elaboración de mapas. Sabe que las distancias reales, en kilómetros, entre tres ciudades A, B y C, se expresan como sigue:

Tabla 5.8 Tabla de distancias en kilómetros entre las ciudades A, B y C

distancia	A	B	C
A	0	30	25
B	30	0	18
C	25	18	0

Wilson desea trazar un mapa cuya escala sea tal que 1 cm en el papel corresponda a 5 km de distancia real.

a) ¿Cuál es la distancia real entre la ciudad C y la ciudad A?
b) ¿Cuál es la distancia real entre la ciudad B y la ciudad C?
c) ¿Cuál es la distancia en el mapa entre la ciudad A y la ciudad C? Dar la respuesta en centímetros
d) Elabore la matriz de las distancias en el mapa correspondientes a las ciudades A, B y C. Dar las distancias en centímetros.
e) Describe como ha obtenido cada entrada de la matriz obtenida en el ítem (d). ¿por quién se ha multiplicado cada entrada de dicha matriz?
f) ¿Cómo definiría la regla que permite la operación que surge en el ítem (e)? ¿Qué nombre le daría?

5.5.2. Solución de la tarea 3

a) La distancia real entre la ciudad C y A es 25 km.
b) La distancia real entre la ciudad B y C es 18 km.
c) $E = \dfrac{long.mapa}{long.real} \Rightarrow \dfrac{1cm.}{5\cancel{km}} = \dfrac{long.mapa}{R\cancel{km}} \Rightarrow long.mapa = \dfrac{R}{5}cm$, donde R es el número que corresponde a la longitud real (sin unidades)

   Entonces la longitud en el mapa entre A y C es (25/5) cm. = 5cm.
d) la distancia en el mapa entre las ciudades A, B y C, en cm.

Tabla 5.9 Tabla de distancias en centímetros entre las ciudades A, B y C

distancia →	A	B	C
A	0	6 cm.	5cm.
B	6 cm.	0	18/5 cm.
C	5 cm.	18/5 cm.	0

e) Cada entrada se ha obtenido multiplicando por 1/5 cm.

f) Producto de la matriz por un escalar.

5.5.3. Configuración epistémica de la tarea 3

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado donde se dan las distancias reales en kilómetros de tres ciudades, y se desea determinar las distancias en un mapa teniendo en cuenta cierta escala. Se pide hallar la matriz de las distancias del mapa en centímetros.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Escala, matriz, distancia real, distancia en el mapa, centímetros, kilómetros.

Lenguaje simbólico

distancia →	A	B	C
A	0	30	25
B	30	0	18
C	25	18	0

distancia	A	B	C
A	0	6 cm.	5cm.
B	6 cm.	0	18/5 cm.
C	5 cm.	18/5 cm.	0

$$E=\frac{long.mapa}{long.real}\Rightarrow\frac{1cm.}{5\cancel{km}}=\frac{long.mapa}{R\cancel{km}}\Rightarrow long.mapa=\frac{R}{5}cm=0.2Rcm.$$

Conceptos

Conceptos previos

Escala, matriz, distancia real, distancia en el mapa, fracciones, razón, proporción, igualdad, centímetros, kilómetros.

Conceptos emergentes

Producto de una matriz por un escalar

Procedimientos

Multiplicar cada entrada de la matriz por el escalar 0.2

5.5.4. Grado de idoneidad de la tarea 3

Idoneidad epistémica

Situaciones – Problema

- El problema consiste en un problema contextualizado donde se dan las distancias reales en kilómetros de tres ciudades y se desea determinar las distancias en un mapa teniendo en cuenta cierta escala. Se pide hallar la matriz de las distancias del mapa en centímetros.
- Esta tarea presenta seis ítemes, en el primer y segundo ítem se interpretan las entradas de la tabla de distancias reales en km. En el tercer ítem el estudiante debe aplicar el objeto matemático escala para poder hallar la longitud en el mapa de la correspondiente distancia real.

- En el resto de ítemes permite problematizar al estudiante –que el desarrollo no sea siempre rutinario o algorítmico–, pues tiene que aplicar la escala a cada entrada de la tabla de distancias reales en km.
- Observamos que la tabla de distancias reales se modifica debido a la escala empleada y esta puede ser interpretada por el estudiante.

Lenguajes

- En este caso las expresiones matemáticas usadas en la solución de la tarea son tres, la tabla, su respectiva matriz y la escala.
- El profesor, si fuese necesario, debe aclarar qué es una escala y cómo se aplica, pues consideramos que es un conflicto semiótico potencial en esta tarea. De esta manera el lenguaje será adecuado para los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.
- Como hemos visto, se induce al alumno a multiplicar cada entrada de la matriz por el escalar 0.2, además se insiste en la manipulación de entradas de las matrices, pidiendo al estudiante que interprete el significado de las entradas de la matriz de acuerdo al contexto inicial de la tarea.

Reglas

- Se induce al alumno a aplicar reglas o procedimiento que corresponden al producto de una matriz por un escalar.
- En el ítem (e) se pide describir el producto de un escalar por una matriz.
- En el ítem (f) el estudiante tiene que definir con sus propios recursos el producto de un escalar por una matriz y se le pide que nombre esta operación.
- También estos procedimientos están al alcance de estudiantes del sétimo ciclo de la EBR, pues solo tiene que multiplicar y organizar datos numéricos.

Argumentos

- Como ya hemos visto, los procedimientos que se necesitan para dar solución a cada ítem, están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.
- En todos los ítemes el estudiante puede interpretar los resultados obtenidos pero en el último debe argumentar dando la definición, en sus propios términos, del producto de un escalar por una matriz.

Relaciones

Observamos en el desarrollo de toda la tarea que el objeto matemático matriz se relaciona con el modelo tabla y el objeto matemático escala. Además estos se relacionan para poder hacer emerger el procedimiento que permite multiplicar una matriz por un escalar.

Es así que corroboramos que la tarea 3 satisface la idoneidad epistémica en un alto grado.

Idoneidad cognitiva

Conocimientos Previos

- La tarea 3 requiere de conocimientos previos que el estudiante ya posee.
  Los conocimientos previos son:
  Escala, matriz, distancia real, distancia en el mapa, fracciones, razón, proporción, igualdad, centímetros, kilómetros.
- Además las argumentaciones, interpretaciones y justificaciones que exige cada ítem al estudiante están al alcance de los estudiantes.
  De esta manera los contenidos pretendidos se pueden alcanzar pues tienen una dificultad manejable.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

- Se incluyen ítemes de ampliación y de refuerzo, esto se precia en los ítemes (c), (d), (e) y (f). Para ello el estudiante tiene que definir en sus propios términos el producto de una matriz por un escalar. De esta manera se promueve que de todos los estudiantes desarrollen la tarea, logrando así que ellos construyan, entiendan y apliquen la operación producto de una matriz por un escalar en un problema real.

Aprendizajes

- Los ítemes (c), (d), (e) y (f) garantizan que el estudiante aprenda a multiplicar una matriz por un escalar.
- Los ítemes tienen diferentes niveles de comprensión y competencia, por ejemplo los dos primeros son básicos pues se limitan a interpretar las entradas de la tabla que contiene las distancias reales entre las tres ciudades. En cambio en los ítemes restantes el estudiante tiene que realizar, describir, definir el procedimiento que le

ha permitido encontrar la matriz de distancias en el mapa. La cual corresponde al producto de una matriz por un escalar.

Cumpliéndose así la idoneidad cognitiva especificada en la tabla A2 en un alto grado (Ver pp. 108-109).

Con respecto al resto de idoneidades consideraremos las que se han elegido en la sección 5.2 de este capítulo.

- La idoneidad afectiva se logra cuando el estudiante, al final del proceso de estudio de la tarea 3, observa que una tarea relacionada con la vida cotidiana puede resolverse usando matrices, apoyándose de otro objeto matemático, en este caso la escala.
- La idoneidad interaccional, se logra, pues la tarea ha permitido al alumno una oportunidad guiada de reinventar el producto de un escalar por una matriz. Se espera, además (Ver sección 5.5) que se favorezca el dialogo y comunicación entre los estudiantes, compartiendo lo hecho en forma individual, donde sus métodos informales son usados como la base para construir el procedimiento que permita hallar el producto de una matriz por un escalar. Si los alumnos tienen dificultades al aplicar la escala el profesor debe explicar cómo se aplica, pues caso contrario la tarea no tendría razón de ser.
- La idoneidad mediacional, se cumple pues las matrices se comportan como modelos concretos al representarse en una tabla de distancias tanto reales como en el mapa gracias al uso del objeto matemático escala. Se espera que las tareas puedan desarrollarse en un tiempo suficiente ya sea por el estudiante, el profesor o por ambos.

  Si se pretende usar en el diseño de tareas material informático, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa “MAXIMA” pues cumple los requisitos mencionados anteriormente. (Ver Apéndice F).

Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla usar horas adicionales, tomando las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática.

g) La idoneidad ecológica, en la tarea nº 3 se logra, pues contribuye a la formación profesional y social de los estudiantes, y fomenta el pensamiento crítico en cada ítem. La tarea se relaciona con tablas y éstas, en el futuro, serán relacionados con matrices por los estudiantes. En resumen la tarea ha sido pertinente, adecuada, gradual y presenta una baja densidad de contenidos.

De todo lo anterior podemos afirmar que el diseño de esta tarea cumple con los criterios de la idoneidad didáctica y permiten “introducir” a un estudiante de la EBR en el estudio del producto de un escalar por una matriz.

5.6. Descripción de la práctica matemática asociada a la tarea nº 4

La sesión de clase es iniciada por el docente entregando hojas impresas con la tarea nº 4 a cada alumno del aula (Ver p. 147). El profesor indica a los alumnos que desarrollen la tarea individualmente en un tiempo de 20 minutos aproximadamente, en esta etapa los alumnos no deben consultar a sus compañeros ni al profesor. La idea es que se concentren para que se puedan imaginar el problema.

El profesor en todo momento hace sentir al alumno que no está siendo evaluado, pero induce al alumno a que trabaje con responsabilidad, les comenta que la idea es que ellos descubran ciertas regularidades al desarrollar la tarea y traten de construir nuevos conceptos matemáticos, y ver la manera de definir operaciones con estos nuevos conceptos.

Terminada la etapa individual, el profesor forma grupos de manera arbitraria y reparte nuevamente la misma tarea, e indica que deben desarrollarla grupalmente en un tiempo de 15 minutos.

En esta etapa grupal el profesor resolverá las diversas interpretaciones (conflictos semióticos) que los grupos pueden dar a los ítemes de la tarea nº4, la etapa grupal culmina con la entrega, al profesor, de la tarea parcialmente desarrollada o desarrollada en su totalidad ya sea en forma correcta o incorrecta.

Luego de la etapa grupal el profesor resuelve la tarea nº 4 indicando que dicha tarea es un caso particular del producto de matrices, hace notar a grandes rasgos, que la ubicación de las matrices es importante al multiplicarlas ($AB \neq BA$).

El profesor afirma que para multiplicar matrices se debe tener en cuenta el orden de las matrices de tal manera que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. Caso contrario no existiría el producto matricial.

Luego, detalla el producto de las matrices A y B de la tarea 4. En esta etapa queda abierta la posibilidad que el alumno, el profesor y la tarea interactúen.

En la etapa de institucionalización (ver Apéndice D), el profesor define el producto matricial (definición 4.1) e inmediatamente se hace la observación 4.1 donde se afirma que para que se defina el producto matricial AB, el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de columnas de B, además el orden de $C = AB$ está dado por el número de filas de A y el número de columnas de B. El profesor ilustra la explicación anterior con el siguiente esquema.

$$A_{m \times p}\; B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

$$=$$

Para reforzar la explicación anterior, el profesor muestra el ejemplo 4.1.

A continuación el profesor proporciona el ejemplo 4.2 para que el alumno verifique que el producto matricial no es conmutativo, a pesar que el ítem (a), (b), (e) y (f) son particularmente conmutativos por tratarse de una matriz cuadrada y la matriz identidad de orden dos.

Luego, el profesor define la matriz identidad (definición 4.2) y en seguida muestra la propiedad 4.1 que afirma que toda matriz multiplicada por la matriz identidad resulta la misma matriz.

En el ejemplo 4.3 y 4.4 el profesor hace notar al estudiante las propiedades de la multiplicación matricial para luego institucionalizarlo en la propiedad 4.2 que presenta la propiedad asociativa, distributiva derecha e izquierda y la identidad multiplicativa.

Como los estudiantes ya están familiarizados con la matriz transpuesta y el producto matricial, el profesor utiliza el ejemplo 4.5 para verificar que la transpuesta del producto matricial AB es igual al producto de la transpuesta de B por la transpuesta de A y luego el profesor lo institucionaliza en la propiedad 4.3

El profesor muestra al alumno en el ejemplo 4.6 que el producto matricial y la igualdad de matrices puede generar un sistema de ecuaciones. También el profesor en el siguiente ejemplo (ejemplo 4.7) desarrolla una ecuación matricial utilizando el producto de matrices que le va a ser de utilidad en la tarea siguiente.

Finalmente, el docente termina la etapa de institucionalización definiendo la potencia de matrices (definición 4.3) y aclara la definición desarrollando el ejemplo 4.7.

5.6.1. Propuesta de la tarea 4

TAREA Nº 4

Roberto es un fabricante de muebles, produce tres modelos de escritorios, los tres modelos llevan chapas y manijas de metal. La cantidad de chapas y manijas de metal por modelo se especifican en la siguiente tabla:

Tabla 5.10 Tabla de partes por modelo.

Modelo / partes	A	B	C
Cantidad de chapas	3	2	1
Cantidad de manijas de metal	7	5	2

***Responda*:**

a) ¿Cuántas manijas de metal y chapas requiere el modelo B?
b) Si Roberto fábrica cinco escritorios del modelo A ¿Cuántas manijas de metal y chapas necesita?
c) Si Roberto fabrica tres escritorios del modelo B ¿Cuántas chapas y manijas de metal necesita?

Roberto tiene pedidos para los meses de marzo y abril como se indica a continuación:

Para el mes de marzo

i) 7 escritorios del modelo A.
ii) 18 escritorios del modelo B.
iii) 10 escritorios del modelo C.

Para el mes de abril

i) 10 del modelo A.

ii) 22 del modelo B.

iii) 31 del modelo C.

Con la información anterior, elabore o responda, según corresponda:

d) Una tabla cuyas filas sean la cantidad de modelos de escritorio y cuyas columnas sean los meses en los cuales tiene pedidos. (De un nombre a esa tabla).

e) ¿Con cuántas chapas debe abastecerse Roberto en el mes de marzo para poder cumplir con el pedido?

f) ¿Con cuántas chapas debe abastecerse Roberto en el mes de abril para poder cumplir con el pedido?

g) ¿Con cuántas manijas de metal debe abastecerse Roberto en el mes de marzo para poder cumplir con el pedido?

h) ¿Con cuántas manijas de metal debe abastecerse Roberto en el mes de abril para poder cumplir con el pedido?

i) Resuma lo obtenido en el ítem (e), (f), (g) y (h) en una tabla donde se muestre la cantidad de chapas y manijas de metal que se necesitan para el mes de marzo y abril.

j) Escriba la matriz asociada a la tabla 5.10 y llámela *A*. ¿De qué orden es?

k) Escriba la matriz asociada a la tabla encontrada en el ítem (d) y llámela *B*. ¿De qué orden es?

l) Escriba la matriz asociada a la tabla encontrada en el ítem (i) y llámela *C*. ¿De qué orden es?

m) Si las matrices *A* y *B* han originado la matriz *C* ¿Qué operación matricial cree Ud. que ha originado la matriz *C*?

n) Describa una regla que permita realizar la operación matricial entre las matrices *A* y *B* para originar *C*. Sugerencia: tome en cuenta los ítemes (e), (f), (g) y (h).

5.6.2. Solución de la tarea 4

a) El modelo B requiere 2 chapas y 5 manijas.

b) Para producir cinco escritorios del modelo A se requiere 15 chapas y 35 manijas.

c) Para producir tres escritorios del modelo C se requiere 6 chapas y 15 manijas.

d) Tabla de pedidos.

	Marzo	Abril
A	7	10
B	18	22
C	10	31

e) En marzo debe abastecerse con $3\times7 + 2\times18 + 1\times10 = 67$ chapas

f) En abril debe abastecerse con $3\times10 + 2\times22 + 1\times31 = 105$ chapas

g) En marzo debe abastecerse con $7\times7 + 5\times18 + 2\times10 = 159$ manijas de metal

h) En abril debe abastecerse con $7\times10 + 5\times22 + 2\times31 = 242$ manijas de metal

i)

	Marzo	Abril
Chapas	67	105
Manijas de metal	159	242

j)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

k)

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 18 & 22 \\ 10 & 31 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

l)

$$C = \begin{bmatrix} 67 & 105 \\ 159 & 242 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

m) La operación es un producto de matrices $AB=C$

n) Cada entrada de C se obtiene multiplicando una fila de A por una columna de C

$c_{11}=a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}$

$c_{12}=a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32}$

$c_{21}=a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{31}$

$c_{22}=a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32}$

5.6.3. Configuración epistémica de la tarea 4

Situación

El problema consiste en un problema contextualizado relacionado a la fabricación de tres modelos de muebles, cada modelo requiere de partes constituidas por chapas y manijas de metal. Se presenta una tabla donde se visualiza la cantidad de partes por modelo y otra tabla que contiene la cantidad de pedidos por modelo y mes. Se desea saber con cuántas chapas y manijas de metal se debe abastecer el fabricante para cumplir con los pedidos.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Matriz, Tabla de partes por modelo, filas, columnas, orden de una matriz.

Lenguaje simbólico

Modelo / partes	A	B	C
Cantidad de chapas	3	2	1
Cantidad de manijas de metal	7	5	2

	Marzo	Abril
A	7	10
B	18	22
C	10	31

3×7 + 2×18 + 1×10 = 67

3×10 + 2×22 + 1×31 = 105

7×7 + 5×18 + 2×10 = 159

7×10 + 5×22 + 2×31 = 242

	Marzo	Abril
Chapas	67	105
Manijas de metal	159	242

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 7 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times 3},\quad B=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 18 & 22\\ 10 & 31\end{bmatrix}_{3\times 2},\quad C=\begin{bmatrix}67 & 105\\ 159 & 242\end{bmatrix}_{2\times 2},\quad AB=C$$

$c_{11}=a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}$

$c_{12}=a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32}$

$c_{21}=a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{31}$

$c_{22}=a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32}$

Conceptos

Conceptos previos

Tabla, matriz, filas, columnas, orden de una matriz, suma y producto de números reales.

Conceptos emergentes

Producto de matrices

Procedimientos

Cada entrada de la matriz C se obtiene calculando

$$c_{11}=a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31}$$

$$c_{12}=a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32}$$

$$c_{21}=a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{31}$$

$$c_{22}=a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32}$$

Proposición

Tesis

El producto *AB* existe.

Argumento

Pues el número de filas de la matriz *A* es igual al número de columnas de la matriz *B*.

5.6.4. Grado de idoneidad de la tarea 4

Idoneidad epistémica

Situaciones – Problema

- El problema consiste en un problema contextualizado relacionado a la fabricación de tres modelos de muebles, cada modelo requiere de partes constituidas por chapas y manijas de metal. Se presenta una tabla donde se visualiza la cantidad de partes por modelo y otra tabla que contiene la cantidad de pedidos por modelo y mes. Se desea saber con cuántas chapas y manijas de metal se debe abastecer el fabricante para cumplir con los pedidos.
- Esta tarea presenta veinte ítemes, cada uno de ellos permite problematizar al estudiante al determinar la cantidad de partes para producir cierta cantidad de un determinado modelo de escritorio.
- Las tablas y matrices obtenidas en los ítemes (d), (j) y (l) pueden ser interpretadas por el estudiante en relación a lo que se pregunta en su respectivo ítem, por ejemplo la tabla encontrada en el ítem (l) representa la cantidad de chapas y manijas de metal con las que el fabricante debe abastecerse para poder cumplir con los pedidos del mes de marzo y abril.

Lenguajes

- En este caso las expresiones matemáticas usadas son sólo dos: tabla y matriz.
- Como hemos visto en la solución, en el ítem (a) se pide interpretar algunas entradas de la tabla de partes por modelo, en los ítemes (b) y (c) se induce al alumno a multiplicar algunas columna de la tabla 5.10 por el número de modelos de mueve a fabricar. En el ítem (d) se pide elaborar una tabla indicándose quien debe ser las filas y quien las columnas. En el resto de ítemes se induce al alumno a encontrar el

producto matricial de las matrices *A* y *B*. En toda la tarea el lenguaje empleado es adecuado para los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR y propone en forma clara expresiones matemáticas.

Reglas

- Se induce al alumno a aplicar reglas o procedimientos que corresponden al producto de matrices, como se muestra en los ítemes (d) a (n).
- En el ítem (m) se pregunta al estudiante ¿intuya qué operación matricial se ha realizado en los ítemes (d) a (i)?
- En el ítem (n) se pide describir una regla que permita realizar el producto matricial entre las matrices *A* y *B*.
- También estos procedimientos están al alcance de estudiantes del sétimo ciclo de la EBR, pues solo tiene que multiplicar y organizar datos numéricos.

Argumentos

- Como ya hemos visto, los procedimientos que se necesitan para dar solución a cada ítem, están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.
- En todos los ítemes el estudiante puede interpretar los resultados obtenidos pero en el último debe argumentar dando la regla, en sus propios términos, del producto de las matrices *A* y *B*.

Relaciones

Observamos en el desarrollo de toda la tarea que el objeto matemático matriz se relaciona con el modelo tabla y vía los ítemes (d) a (i) se obtiene el producto matricial de *A* y *B*.

Es así que corroboramos que la tarea 4 satisface la idoneidad epistémica en un alto grado.

Idoneidad cognitiva

Conocimientos Previos

- La tarea 3 requiere de conocimientos previos que el estudiante ya posee.

  Los conocimientos previos son:

  Tabla, matriz, filas, columnas, orden de una matriz, suma y producto de números reales.

- Como hemos visto, los procedimientos que exige cada ítem al estudiante están a su alcance. De esta manera los contenidos pretendidos se pueden alcanzar pues tienen una dificultad manejable.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

- Se incluyen ítemes de ampliación y de refuerzo, esto se precia en los ítemes (d) a (i). En donde el estudiante obtiene sin darse cuenta el producto de las matrices A y B. Esto se refuerza en los ítemes (k) a (n) donde el estudiante tiene que describir una regla, en sus propios términos, para el producto de las matrices A y B. De esta manera se promueve que los estudiantes a desarrollen la tarea logrando así que cada estudiante construya, entienda y aplique la multiplicación de matrices en un problema real.

Aprendizajes

- Toda la tarea en si garantiza que el estudiante intuya y aprenda cuando multiplicar matrices.
- Los ítemes tienen diferentes niveles de comprensión y competencia, por ejemplo los dos primeros son básicos pues se limitan a interpretar las entradas de la tabla partes por modelo. En cambio en los ítemes (d) a (n) el estudiante tiene que realizar, intuir y describir, el procedimiento que le ha permitido encontrar la matriz C construyendo así la operación matricial de producto de dos matrices en un caso particular.

Cumpliéndose así la idoneidad cognitiva especificada en la tabla A2 en un alto grado.

Con respecto al resto de idoneidades consideraremos las que se han elegido en la sección 5.2 de este capítulo.

- La idoneidad afectiva se logra cuando el estudiante, al final del proceso de estudio de la tarea 4, observa que una tarea relaciona con la vida cotidiana puede resolverse usando el producto de matrices.
- La idoneidad interaccional se logra, pues la tarea ha permitido al alumno una oportunidad guiada de reinventar el producto matricial. Se espera, además (ver sección 5.6) que se favorezca el dialogo y comunicación entre los estudiantes, compartiendo lo hecho en forma individual, donde sus métodos informales son usados como la base para construir la el procedimiento que permita el producto matricial.

– La idoneidad mediacional se cumple pues, las matrices se comportan como modelos concretos al representarse en tabla de modelos por partes y en otra tabla de pedidos, y además el producto de matrices se aprecia en la tabla C. Se espera que deben poder desarrollarse en un tiempo suficiente ya sea por el estudiante, el profesor o por ambos.

Si se pretende usar en el diseño de tareas material informático, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa “MAXIMA” pues cumple los requisitos mencionados anteriormente. (Ver Apéndice F).

Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla usar horas adicionales, tomando las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática.

h) La idoneidad ecológica, en la tarea 4 se logra, pues contribuye a la formación profesional y social de los estudiantes, y fomenta el pensamiento crítico en cada ítem. La tarea se relaciona con tablas y estas, en el futuro, serán relacionados con matrices por los estudiantes las cuales, el alumno, sabrá cuando multiplicar matrices para dar solución a un problema contextualizado o a en una simple multiplicación matricial. En resumen la tarea ha sido pertinente, adecuada, gradual y presenta una baja densidad de contenidos.

De todo lo anterior podemos afirmar que el diseño de esta tarea cumple con los criterios de la idoneidad didáctica y permiten “introducir” a un estudiante de la EBR en el estudio del producto de matrices.

5.7. Descripción de la práctica matemática asociada a la tarea nº 5

La sesión de clase es iniciada por el docente entregando hojas impresas con la tarea nº 5 (ver p. 157) a cada alumno del aula. Una vez entregado el material el profesor explica a todos los alumnos que la tarea 5 consta de 3 partes. En la parte 1 y 2 los alumnos solo deben seguir las instrucciones, y trabajarán de manera individual. La parte 3 será desarrollada en forma grupal.

El profesor indica a los alumnos que empiecen con la parte individual, y que tienen 10 minutos aproximadamente para esta etapa, en esta etapa los alumnos pueden realizar consultas desde sus asientos, y en voz alta al profesor, mas no a sus compañeros, el profesor aclarará la duda del alumno dirigiéndose a toda el aula. La idea es resolver los conflictos semióticos que presenten los alumnos y mantener el orden en el aula.

El profesor en todo momento hace sentir al alumno que no está siendo evaluado, pero induce al alumno a que trabaje con responsabilidad, les comenta que la idea es que ellos descubran ciertas regularidades al desarrollar la tarea y traten de construir nuevos conceptos matemáticos.

Terminada la etapa individual, el profesor forma grupos de manera arbitraria e indica que empiecen a desarrollar la parte 3 de análisis de la tarea 5.

En esta etapa grupal el profesor seguirá resolviendo las dudas y las diversas interpretaciones (conflictos semióticos) que los grupos pueden dar a los ítemes de esta tercera parte, la etapa grupal culmina con la entrega, al profesor, de la tarea parcialmente desarrollada o desarrollada en su totalidad ya sea en forma correcta o incorrecta.

Luego de la etapa grupal el profesor resuelve la tarea nº 5 indicando que el concepto matemático que está detrás de la codificación y decodificación de matrices es la matriz inversa de una matriz cuadrada de orden dos.

El profesor desarrolla detalladamente el ítem 6 y el ítem 7 de la tarea 5 haciendo recordar el ejemplo 4.7 de la clase anterior, en este desarrollo es indispensable la interacción entre el docente y el alumno.

Luego el docente empieza con la institucionalización (Ver Apéndice E). Empieza definiendo el determinante de una matriz cuadrada de orden dos (definición 5.1) y explica sus diversas notaciones, hace hincapié que el determinante es un número real asociado a una matriz cuadrada.

El profesor invita al alumno a desarrollar el ejemplo 5.1, donde se destaca la importante propiedad de los determinantes: $\det(AB) = \det A \det B$, para luego generalizarlo en la propiedad (5.1). A continuación el profesor presenta la definición de la inversa de una matriz cuadrada de orden dos, indica al alumno que aplique la definición en el ejemplo 5.3 para verificar la definición anterior.

El profesor, continua la institucionalización y muestra la propiedad 5.3, indicando a los alumnos que prácticamente es la conclusión del desarrollo de los ítemes 6 y 7 de la tarea 5, en esta propiedad muestra una manera práctica de obtener la matriz inversa de una matriz cuadrada y la condición que debe cumplir una matriz para que sea invertible.

Esta condición la generaliza en la propiedad 5.4 en donde se afirma que una matriz cuadrada de orden dos es invertible si y sólo sí su determinante es diferente de cero. Hace notar al alumno que la matriz inversa también es útil para desarrollar ecuaciones como las del ejemplo 5.5.

El profesor finaliza la institucionalización con el ejemplo 5.6 donde los alumnos aplican lo aprendido.

5.7.1. Propuesta de la tarea 5

TAREA Nº 5

En la década de los años ochenta se establece formalmente el uso de claves o códigos para enviar mensajes. Este uso de códigos estaba restringido al campo militar, ellos se interesaban en la transmisión de mensajes codificados que sean difíciles de descifrar por otros, en caso de ser interceptados.

Supongamos que se tiene que enviar codificado el mensaje

ATAQUEN

El emisor codificaba el texto y enviaba la siguiente secuencia de números:

22, 21, 19, 18, 47, 26, 28, 14

El receptor, recibía la secuencia de números y realizaba el proceso de decodificación y obtenía otra secuencia de números:

1, 2, 1, 17, 21, 5, 14, 0

Estos números los relacionaba con las letras del abecedario que ocupan la posición indicada por cada número.

Así culminaba su decodificación obteniendo el mensaje original

“ATAQUEN”

Ahora descubriremos y reconstruiremos los objetos matemáticos que están detrás de este proceso de codificación y decodificación.

Inicio

Codifiquemos el mensaje de texto

ATAQUEN

Sean las matrices cuadradas de orden 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Fase de codificación – Primera parte</u>

Paso 1 (primera codificación)

a) Asigne a cada letra del mensaje de texto el número que le corresponde según la tabla 5.11. Considere iguales las letras mayúsculas y minúsculas, y al número cero para el espacio en blanco.

Tabla 5.11

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0

Tabla 5.12

A	T	A	Q	U	E	N

b) Forme matrices columna de orden 2×1 con los números obtenidos en la tabla 5.12, y llámelas C_1, C_2, C_3 y C_4. Si queda alguna entrada libre en las matrices columna llénela con cero pues significa un espacio en blanco.

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Paso 2 (segunda codificación)

c) Calcule AC_1, AC_2, AC_3 y AC_4

$$AC_1 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, AC_2 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, AC_3 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, AC_4 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

d) El mensaje de texto codificado se obtiene al extraer los números de las matrices columna en forma ordenada, considerando primero a AC_1, AC_2, AC_3 y AC_4

……. , …… , …… , ……. , …… , ……. , …….. , ……..

<u>Fase de decodificación – Parte dos</u>

El receptor recibe el mensaje codificado como una secuencia de números

22, 21, 19, 18, 47, 26, 28, 14

a) Forme matrices columna de orden 2×1 con la secuencia de números, y llámelas D_1, D_2, D_3 y D_4

$$D_1 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, D_4 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Paso 1 (primera decodificación)

b) Calcule BD_1, BD_2, BD_3 y BD_4

$$BD_1 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, BD_2 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, BD_3 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}, BD_4 = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

c) La primera decodificación se obtiene al extraer los números de las matrices columna en forma ordenada, considerando primero a BD_1, BD_2, BD_3 y BD_4

……. , …… , …… , ……. , …… , ……. , …….. , ……..

Paso 2 (segunda decodificación)

d) Asigne a cada número obtenido en el ítem anterior (c) la letra del alfabeto que le corresponde según la tabla 5.11. El número cero indica espacio en blanco

Tabla 5.13

1	20	1	17	21	5	14

e) Finalmente el mensaje decodificado se obtiene al extraer las letras de la tabla 5.3

Del proceso anterior – Parte tres

1. Calcule $A.B$ y responda ¿Quién es la matriz producto?
2. Describa las características que cumplen A y B para que permitan codificar y decodificar mensajes de textos.

3. Si la matriz *A* permite codificar el mensaje de texto y la matriz *B* decodifica el mensaje, o sea hace el proceso inverso de *A* ¿Qué nombre le darías a la matriz *B*?
4. Si $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, también permite codificar mensajes de texto y la matriz $D_{2\times 2}$, permite decodificar mensajes de texto ¿Puede saber de antemano a qué es igual el producto CD?
5. Si $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, permite codificar mensajes de texto y la matriz *D*, permite decodificar mensajes de texto ¿Puede calcular la matriz $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?
6. Para toda matriz $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ¿siempre existirá una matriz *X* cuadrada de orden 2 tal que al multiplicarlas se obtenga la matriz identidad? ¿Cuándo no existiría?
7. En el ítem anterior ¿qué fue lo que determinó la existencia de la matriz *X*?

5.7.2. Solución de la tarea 5

Codifiquemos el mensaje de texto

ATAQUEN

Sean las matrices cuadradas de orden 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Fase de codificación

Paso 1 (primera codificación)

e) Asigne a cada letra del mensaje de texto el número que le corresponde según la tabla 5.1. Considere iguales las letras mayúsculas y minúsculas, y al número cero para el espacio en blanco.

f)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0

Tabla 5.11

A	T	A	Q	U	E	N
1	20	1	17	21	5	14

Tabla 5.12

g) Forme matrices columna de orden 2×1 con los números obtenidos en la tabla 5.2, y llámelas C_1, C_2, C_3 y C_4. Si queda alguna entrada libre en las matrices columna llénela con cero pues significa un espacio en blanco.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ 5 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 2 (segunda codificación)

h) Calcule AC_1, AC_2, AC_3 y AC_4

$$AC_1 = \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \end{bmatrix}, AC_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 18/ \end{bmatrix}, AC_3 = \begin{bmatrix} 47 \\ 26 \end{bmatrix}, AC_4 = \begin{bmatrix} 28 \\ 14 \end{bmatrix}$$

i) El mensaje de texto codificado se obtiene al extraer los números de las matrices columna en forma ordenada, considerando primero a AC_1, AC_2, AC_3 y AC_4

22 , 21 , 19 , 18 , 47 , 26 , 28 , 14

Fase de decodificación

El receptor recibe el mensaje codificado como una secuencia de números

22, 21, 19, 18, 47, 26, 28, 14

f) Forme matrices columna de orden 2×1 con la secuencia de números, y llámelas D_1, D_2, D_3 y D_4

$$D_1 = \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 18 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 47 \\ 26 \end{bmatrix}, D_4 = \begin{bmatrix} 28 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Paso 1 (primera decodificación)

g) Calcule BD_1, BD_2, BD_3 y BD_4

$$BD_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, BD_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, BD_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ 5 \end{bmatrix}, BD_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

h) La primera decodificación se obtiene al extraer los números de las matrices columna en forma ordenada, considerando primero a BD_1, BD_2, BD_3 y BD_4

1 , 20 , 1 , 17 , 21 , 5 , 14 , 0

Paso 2 (segunda decodificación)

i) Asigne a cada número obtenido en el ítem anterior (c) la letra del alfabeto que le corresponde según la tabla 5.11. El número cero indica espacio en blanco

1	20	1	17	21	5	14
A	T	A	Q	U	E	N

Tabla 5.13

j) Finalmente el mensaje decodificado se obtiene al extraer las letras de la tabla 5.13

Del proceso anterior

1. Calcule *A.B*, *B.A* y responda ¿Quién es la matriz producto?

A.B=*B.A*=*I*, la matriz producto es la matriz identidad de orden dos.

2. Describa las características que cumplen *A* y *B* para que permitan codificar y decodificar mensajes de textos.

   Para que permitan codificar y decodificar mensajes de textos su producto debe ser la identidad.

3. Si la matriz *A* permite codificar el mensaje de texto y la matriz *B* decodifica el mensaje, o sea hace el proceso inverso de *A* ¿Qué nombre le darías a la matriz *B*?

   B sería la matriz inversa de *A*.

4. Si $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, también permite codificar mensajes de texto y la matriz $D_{2\times 2}$, permite decodificar mensajes de texto ¿Puede saber de antemano a qué es igual el producto CD y DC?

   Si, el producto debe ser la identidad de orden dos.

5. Si $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, permite codificar mensajes de texto y la matriz *D*, permite decodificar mensajes de texto ¿Puede calcular la matriz $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c=1 & (-3) \\ 5a+3c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b+d=0 & (-3) \\ 5b+3d=1 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} -6a-\cancel{3c}=-3 \\ \underline{\ \ 5a+\cancel{3c}=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} -6b-\cancel{3d}=0 \\ \underline{\ \ 5b+\cancel{3d}=1} \end{cases}$$

$$-a=-3 \qquad\qquad -b=1$$

$$\boxed{a=3} \qquad\qquad \boxed{b=-1}$$

reemplazando en sus respetivos sistemas obtenemos

$\boxed{c=-5}$

$\boxed{d=2}$

Entonces $D=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

6. ¿Siempre existirá una matriz $P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,? Para toda matriz X cuadrada de orden 2 tal que al multiplicarlas se obtenga la matriz identidad? ¿Cuándo no existiría?

Sea la matriz $X=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$, se debe cumplir que $X\,P = I$

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r\,a + s\,c = 1,\ t\,a + u\,c = 0,\ r\,b + s\,d = 0,\ t\,b + u\,d = 1$$

de dónde

$$a=\frac{u}{ur-st}, b=\frac{-s}{ur-st}, c=\frac{-t}{ur-st}, d=\frac{r}{ur-st}$$

$$P=\begin{bmatrix} \dfrac{u}{ur-st} & \dfrac{-s}{ur-st} \\ \dfrac{-t}{ur-st} & \dfrac{r}{ur-st} \end{bmatrix}=\frac{1}{ur-st}\begin{bmatrix} u & -s \\ -t & r \end{bmatrix}$$

Luego, no siempre existirá la matriz P.

No existirá cuando $ur - st = 0$.

7. En el ítem anterior ¿qué fue lo que determinó la existencia de la matriz P?

   La expresión $ur - st = 0$ determina la existencia de P.

5.7.3. Configuración epistémica de la tarea 5

Situación

Se describe una manera de codificar y decodificar mensajes de texto usando matrices.

Lenguaje

Lenguaje verbal

Secuencia de números, matrices cuadradas de orden dos, matrices columna de orden dos por uno, entrada, números, matriz producto, matriz identidad.

Lenguaje simbólico

22, 21, 19, 18, 47, 26, 28, 14; 1, 2, 1, 17, 21, 5, 14, 0; $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0

A	T	A	Q	U	E	N
1	20	1	17	21	5	14

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ 5 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$AC_1 = \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \end{bmatrix}, AC_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 18/ \end{bmatrix}, AC_3 = \begin{bmatrix} 47 \\ 26 \end{bmatrix}, AC_4 = \begin{bmatrix} 28 \\ 14 \end{bmatrix};$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 18 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 47 \\ 26 \end{bmatrix}, D_4 = \begin{bmatrix} 28 \\ 14 \end{bmatrix};$$

$$BD_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}, BD_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, BD_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ 5 \end{bmatrix}, BD_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix};$$

1	20	1	17	21	5	14
A	T	A	Q	U	E	N

A.B, B.A ; A.B=B.A=I; A.B=B.A=I ;CD ;DC ; A.B=B.A=I;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 & (-3) \\ 5a + 3c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b + d = 0 & (-3) \\ 5b + 3d = 1 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} -6a - \cancel{3c} = -3 \\ \underline{\ \ 5a + \cancel{3c} = 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} -6b - \cancel{3d} = 0 \\ \underline{\ \ 5b + \cancel{3d} = 1} \end{cases}$$

$$-a = -3 \qquad -b = 1 \quad ; D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$

$$\boxed{a = 3} \qquad \boxed{b = -1}$$

reemplazando en sus respetivos sistemas obtenemos

$$\boxed{c = -5}$$

$$\boxed{d = 2}$$

$$X = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; r\,a + s\,c = 1,\ t\,a + u\,c = 0,\ r\,b + s\,d = 0,\ t\,b + u\,d = 1;$$

$$a = \frac{u}{ur-st}, b = \frac{-s}{ur-st}, c = \frac{-t}{ur-st}, d = \frac{r}{ur-st};$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{u}{ur-st} & \frac{-s}{ur-st} \\ \frac{-t}{ur-st} & \frac{r}{ur-st} \end{bmatrix} = \frac{1}{ur-st}\begin{bmatrix} u & -s \\ -t & r \end{bmatrix}; ur - st = 0$$

Conceptos

Conceptos previos

Relación, matrices, matriz columna, producto matrices, sistema de ecuaciones de dos variables

Conceptos emergentes

La inversa de la una matriz cuadrada, determinante de una matriz cuadrada de orden dos.

Procedimientos

Para codificar

- Mensaje de texto a codificar: ataquen
- Reemplazar cada letra con el número que le corresponde a su posición en el alfabeto. Un espacio se representa por cero.
- El mensaje se ha convertido en una sucesión de números 1, 20, 1, 17, 21, 5, 14
- Se forman matrices columna con dichos números

$$C_1=\begin{bmatrix}1\\20\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}, C_3=\begin{bmatrix}21\\5\end{bmatrix}, C_4=\begin{bmatrix}14\\0\end{bmatrix}$$

- Se multiplica $AC_1=\begin{bmatrix}22\\21\end{bmatrix}, AC_2=\begin{bmatrix}19\\18/\end{bmatrix}, AC_3=\begin{bmatrix}47\\26\end{bmatrix}, AC_4=\begin{bmatrix}28\\14\end{bmatrix}$

  Donde $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

- Se obtiene el mensaje codificado como una sucesión de números 22, 21, 19, 18, 47, 26, 28, 14

Para decodificar

- Se toma $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$.
- Se forman matrices columna de orden 2×1 con la secuencia de números, D_1, D_2, D_3 y D_4

$$D_1=\begin{bmatrix}22\\21\end{bmatrix}, D_2=\begin{bmatrix}19\\18\end{bmatrix}, D_3=\begin{bmatrix}47\\26\end{bmatrix}, D_4=\begin{bmatrix}28\\14\end{bmatrix}$$

- Se multiplica $BD_1=\begin{bmatrix}1\\20\end{bmatrix}, BD_2=\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}, BD_3=\begin{bmatrix}21\\5\end{bmatrix}, BD_4=\begin{bmatrix}14\\0\end{bmatrix}$
- Asigne a cada número obtenido en el ítem anterior (c) la letra del alfabeto que le corresponde según la tabla 5.11. El número cero indica espacio en blanco

1	20	1	17	21	5	14
A	T	A	Q	U	E	N

Tabla 5.13

- Finalmente el mensaje decodificado se obtiene al extraer las letras de la tabla 5.13

Proposiciones

Tesis

La matriz C es invertible.

Argumento

Pues su determinante es diferente de cero.

Tesis

M es la matriz inversa de M^{-1} y M^{-1} es la matriz inversa de M.

Argumento

Pues $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$

Tesis

La matriz inversa de C es D y viceversa.

Argumento

Pues $CD = DC = I$

5.7.4. Características de la tarea 5 con relación a los criterios de idoneidad.

Idoneidad epistémica

Situaciones – Problema

– Se describe una manera de codificar y decodificar mensajes de texto aplicando matrices.

– La tarea está formada por tres partes, en las dos primeras partes el estudiante solo debe seguir instrucciones, llenar los espacios en blanco aplicando el producto matricial entre la matriz A y las matrices columna formadas con el texto codificado. Lo mismo se hace en la segunda parte de decodificación, pero acá se usa la matriz B.

– La tercera parte permite problematizar al estudiante, se induce al estudiante a analizar y descubrir porque las matrices A y B permiten codificar y decodificar mensajes de textos.

Lenguajes

- En este caso las expresiones matemáticas usadas son sólo, matriz y relación en forma de tabla (tabla 5.11).
- La parte uno y dos involucra expresiones matemáticas de producto matricial cuya interpretación es la codificación y decodificación de mensajes de textos. La justificación de este proceso se da dentro de la misma matemática. Esta debe descubrirse en la parte tres. En toda la tarea el lenguaje empleado es un lenguaje matricial, pero el alumno tiene una idea clara de que es lo que ha hecho hasta la parte dos (ha codificado y decodificado un mensaje de texto). Consideramos que el lenguaje es adecuado para los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR, pues ya conoce el lenguaje matricial aprendido hasta el momento y solo está operando matrices cuadradas de orden dos y matrices columna de orden dos por uno.

Reglas

- En la parte tres se induce al alumno en encontrar una regla que garantice cuando dos matrices cuadradas de orden dos pueden codificar y decodificar textos.
- En el ítem dos de la parte tres se induce al estudiante a deducir que dos matrices pueden codificar y decodificar matrices solo cuando su producto matricial es la matriz identidad.
- En el ítem 3 de la parte tres se refuerza la idea anterior.
- En el ítem 4 se induce al alumno que la matriz B sería la inversa de A.
- En el ítem 5 se induce al alumno a encontrar un procedimiento para poder encontrar matrices cuadradas de orden dos que permitan codificar y decodificar textos.
- Una vez que ha encontrado un procedimiento para obtener matrices cuadradas de orden dos para codificar y decodificar textos, se le hace ver en el ítem 6 y 7 que no siempre será posible. El estudiante sin darse cuenta ha obtenido la matriz inversa de C en el ítem 5 y en ítem 6 y 7 el determinante de una matriz cuadrada de orden dos.
- Estos procedimientos están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR, pues ellos ya conocen todas las operaciones matriciales, aparte saben desarrollar

sistema de ecuaciones con dos incógnitas pues se ha visto en el ejemplo 4.7 (ver Apéndice D).

Argumentos

- Como ya hemos visto, los procedimientos que se necesitan para dar solución a cada ítem, están al alcance de los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR.
- Toda la tarea es interpretada como una forma de codificar y decodificar mensajes de textos. Y como hemos visto en la componente anterior (Reglas) el estudiante puede dar los argumentos necesarios que explican el proceso de decodificación y decodificación sin saber que es una matriz inversa y conocer el determinante de una matriz cuadrada de orden dos.

Relaciones

Observamos en el desarrollo de toda la tarea que el objeto matemático matriz se relaciona con el objeto matemático relación (tabla 5.11) para poder codificar y decodificar mensajes de textos.

Es así que corroboramos que la tarea 5 satisface la idoneidad epistémica en un alto grado.

Idoneidad cognitiva

Conocimientos Previos

- La tarea 3 requiere de conocimientos previos que el estudiante ya posee.
  Los conocimientos previos son:

  Relación, matrices, matriz columna, producto matrices, sistema de ecuaciones de dos variables.

- Como hemos visto, los procedimientos que exige cada ítem al estudiante están a su alcance. De esta manera los contenidos pretendidos se pueden alcanzar pues tienen una dificultad manejable.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

- Se incluyen ítemes de ampliación y de refuerzo, esto se aprecia en la parte tres. En donde él encuentra los argumentos que explican cuando dos matrices pueden codificar y decodificar mensajes de textos. De esta manera se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes a desarrollar la tarea logrando así que el estudiante construya, entienda y aplique la multiplicación de matrices y las relaciones para construir el objeto matemático determinante y la matriz inversa de una matriz cuadrada de orden dos. Luego poder aplicarlos en un problema real.

Aprendizajes

- Toda la tarea en si garantiza que el estudiante intuya y aprenda que las matrices invertibles permiten codificar y decodificar mensajes de texto.
- Los ítemes tienen diferentes niveles de comprensión y competencia, por ejemplo los dos primeras partes son básicas pues el estudiante solo sigue instrucciones. En cambio en los ítemes de la parte tres el estudiante tiene que analizar, intuir y demostrar, el procedimiento que le ha permitido encontrar la matriz X y argumentar cuando está existe, construyendo así el objeto matemático determinante y a su vez la obtención de una regla para encontrar la matriz inversa de una matriz cuadrada de orden dos.

Cumpliéndose así la idoneidad cognitiva especificada en la tabla A2 en un alto grado (Ver pp. 108-109).

Con respecto al resto de idoneidades consideraremos las que se han elegido en la sección 5.2 de este capítulo.

- La idoneidad afectiva se logra cuando el estudiante, al final del proceso de estudio de la tarea, observa que puede codificar y decodificar cualquier mensaje de texto pues ya sabe encontrar matrices inversas de orden dos.
- La idoneidad interaccional se logra, pues la tarea ha permitido al alumno una oportunidad guiada de reinventar el objeto matemático determinante y matriz inversa de una matriz cuadrada de orden dos. Se espera, además (ver sección 5.7) que se favorezca el dialogo y comunicación entre los estudiantes, compartiendo lo hecho en forma individual, donde sus métodos informales son usados como la base para construir el procedimiento que permita obtener el determinante y la matriz inversa de orden dos.
- La idoneidad mediacional se cumple pues, las matrices y la relación (tabla 5.11) se comportan como modelos concretos que permiten codificar y decodificar mensajes de texto. Se espera que deben poder desarrollarse en un tiempo suficiente ya sea por el estudiante, el profesor o por ambos.

Si se pretende usar en el diseño de tareas material informático, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa “MAXIMA” pues cumple los requisitos mencionados anteriormente. (Ver Apéndice F).

Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla usar horas adicionales, tomando las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática.

i) La idoneidad ecológica, en la tarea 5 se logra, pues contribuye a la formación profesional y social de los estudiantes, y fomenta el pensamiento crítico del estudiante en cada ítem. La tarea se relaciona con matrices, determinantes y relaciones que se pueden aplicar en situaciones concretas. En resumen la tarea ha sido pertinente, adecuada, gradual y presenta una baja densidad de contenidos.

De todo lo anterior podemos afirmar que el diseño de esta tarea cumple con los criterios de la idoneidad didáctica y permiten “introducir” a un estudiante de la EBR en el estudio de determinantes y matrices inversas de matrices cuadradas de orden dos.

Conclusiones

- Para lograr el objetivo general de este trabajo ha sido fundamental adaptar una tarea inicial que permita al estudiante "construir" el objeto matemático matriz y así apropiarse de él. Esta tarea inicial, que es la tarea nº 1, está asociada a una situación problemática real (susceptible a la imaginación del estudiante) recomendado por el EOS, la EMR, y las características del enfoque centrado en la resolución de problemas de la EBR. En esta tarea inicial se usan diferentes modos de expresiones matemáticas como digrafos, tablas y matrices. Los digrafos y tablas se han comportado como modelos mediadores entre lo concreto (problema contextualizado) y lo abstracto (objeto matemático matriz). Además, la situación problemática que comprende la tarea nº 1, puede expresarse en forma verbal, gráfica y simbólica, pudiéndose regresar de lo simbólico a lo gráfico, y de lo gráfico a lo verbal, es decir se puede hacer traducciones y conversiones entre los mismos. La tarea nº1 requiere de conocimientos previos que el estudiante posee y tiene una dificultad manejable por el estudiante del sétimo ciclo de la EBR.
- En esta tarea el docente guía (usando diversos ítemes) al estudiante, de tal manera que este construya un digrafo, luego construya una tabla y finalmente asociarla a una matriz (matriz de adyacencia del digrafo). Cada ítem de esta tarea induce a que el alumno problematice –que el desarrollo no sea siempre rutinario o algorítmico– e intérprete sus respuestas.

  Luego se hace una variante al grafo de dominancia, transponiendo el sentido de las flechas (aristas dirigidas del digrafo) y así emerge la matriz traspuesta, la cual puede ser interpretada por el estudiante de acuerdo al problema contextualizado.
- Así esta tarea permitirá al estudiante transitar del problema contextualizado al objeto matemático matriz y viceversa. Una vez dentro de lo abstracto, el profesor deberá institucionalizar los conceptos de matrices para profundizar en el tema y evaluar al estudiante.
- Con respecto al significado institucional pretendido, esta tarea inicial permite al docente abarcar los siguientes temas:
  - Matriz.
  - Orden de una matriz.

- Matriz fila, columna y rectangular.
- Matriz cuadrada.
- Igualdad de matrices.
- Traspuesta de una matriz.

Luego en la institucionalización se puede considerar los temas

- Matriz implícita.
- Matriz nula.
- Matriz simétrica.
- Matriz antisimétrica.

- Una vez que las matrices forman parte de los saberes previos del estudiante, se ha adaptado cuatro tareas más para poder hacer emerger las operaciones con matrices, el determinante y la matriz inversa de una matriz cuadrada de orden dos (si existiese).
- En la etapa de institucionalización, el profesor debe insistir en que los alumnos entiendan que una matriz es una herramienta útil para almacenar información numérica en forma tabular y ordenada. Dicha información se puede manipular para poder tomar decisiones de acuerdo al problema contextualizado al que se asocie la matriz.
- Creemos que una tabla constituida por datos numéricos –números reales– ordenados en forma tabular que representa, de manera simplificada, una situación problemática es un modelo mediador.
- De igual manera un digrafo (grafo dirigido) es un modelo mediador que representa situaciones problemáticas relacionadas con dominancia, poder de influencia, etc.
- Ambos modelos mediadores están relacionados con las matrices. Para nuestro trabajo de investigación, las tablas y digrafos, son el “puente” que permitió el tránsito entre las tareas y el objeto matemático matriz.
- Una vez que las matrices ya forman parte de los conocimientos previos del estudiante se ha estudiado problemas de codificación, de escalas, de actualización de existencias. Todos estos problemas fueron adaptados, para los estudiantes del sétimo ciclo de la EBR, en situaciones problemáticas donde emerge el determinante y matriz inversa de una matriz cuadrada de orden dos, la multiplicación matricial, el producto de un escalar por una matriz, y la suma y resta de matrices.

- Como se ha indicado en las secciones (5.3.4), (5.4.4), (5.5.4), (5.6.4) y (5.7.4) del capítulo 5, todas las tareas cumplen, en un alto grado, la idoneidad epistémica y cognitiva establecidos en la sección 5.2 y las tablas A1 y A2.
- Para lograr la idoneidad epistémica, se han diseñado tareas que permitan la matematización, estas tareas proporcionan al alumno diversas formas de afrontarlas, induciendo a que los estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones, también dichas tareas se han relacionado con otros objetos matemáticos diferentes al de matriz, como digrafos, tablas, escalas, relaciones.
- Para lograr la idoneidad cognitiva se ha tenido en cuenta, que para desarrollar las tareas, los estudiantes deben poder entenderlas, imaginarlas, partir de sus conocimientos previos y experiencias, y así construir el nuevo conocimiento. Esto se evidencia al resolver una a una las cinco tareas propuestas (Ver secciones (5.3.2), (5.4.2), (5.5.2), (5.6.2) y (5.7.2)).
- Para lograr la idoneidad afectiva, se ha procurado que las tareas interesen al alumno, que mediante ellas aprecien y valoren la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana. Todas las tareas cumplen ese requisito, pues todas son cercanas al estudiante de tal manera que ellos puedan imaginarlas.
- Para lograr la idoneidad interaccional, se ha tenido en cuenta que cada tarea permita al alumno una oportunidad guiada de reinventar el objeto matemático matriz y las operaciones matriciales. Esto se comprueba al observar y desarrollar cada una de las tareas propuestas a lo largo del capítulo 5. En una futura implementación de este trabajo el docente debe favorecer el dialogo y comunicación entre los estudiantes, que ellos mismos desarrollen herramientas y comprensiones, y compartan sus experiencias, donde sus métodos informales son usados como la base para alcanzar métodos formales.
- Para lograr la idoneidad mediacional, las tareas han sido elaboras de tal manera que contengan modelos mediadores concretos por ejemplo digrafos, tablas, relaciones. En una futura implementación se deben desarrollar en un tiempo suficiente ya sea por el estudiante, el profesor o por ambos.

  Si se pretende usar en el diseño de tareas material informático, creemos necesario adicionar los siguientes requisitos a los materiales informáticos a usar: el material informático debe ser potente para el álgebra computacional, debe poder aplicarse en todos los niveles educativos y debe tener licencia pública general (GNU), es decir usar software libre pues garantizaría a docentes y estudiantes de la EBR la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. Para el manejo de matrices sugerimos el uso del programa “MAXIMA” pues cumple los requisitos mencionados anteriormente. (Ver Apéndice F).

Con respecto al tiempo, en la EBR se contempla usar horas adicionales, tomando las seis horas de libre disponibilidad para el área de matemática.

- Para lograr la idoneidad ecológica, las tareas han sido diseñadas de tal manera que contribuyan a la formación profesional y social de los estudiantes, también fomentan el pensamiento crítico. Las tareas se relacionan con contenidos de otras disciplinas como por ejemplo lenguaje y comunicación (codificación y decodificación). En una futura implementación, las tareas deben ser pertinentes, deben tener adecuada gradualidad y baja densidad de contenidos.
- Es necesario mencionar la importancia que tiene el significado institucional de referencia del objeto matemático matriz para nuestra investigación, pues nos ha permitido apreciar la estrecha relación de las matrices con las diferentes ramas de la matemática, como la topología (matriz topológica), la matemática discreta (matriz de adyacencia de un grafo), la estadística (matriz estocástica), el álgebra lineal (matriz asociada a una transformación con sus respectivas bases) y en estas ramas de la matemática indagar qué modelos matemáticos se pueden adaptar en aplicaciones sencillas y en situaciones concretas para estudiantes del sétimo ciclo de la EBR. Es así que logramos identificar el objeto matemático grafo, y su estrecha relación con su correspondiente matriz de adyacencia, en los diferentes textos analizados.
- El análisis realizado a los textos seleccionados ha permitido seleccionar aplicaciones, ejemplos o problemas relacionados con el objeto matemático matriz y mediante su respectiva configuración epistémica elegir el modelo mediador digrafo o grafo dirigido pues es un modelo flexible que se comporta de manera natural facilitando la matematización. También las tablas han jugado un papel muy importante en el diseño de las tareas.
- De la teoría de grafos, los grafos de dominancia constituyen una buena manera para crear situaciones problemáticas relacionados con el objeto matemático matriz, permiten interactuar al estudiante, el docente y la tarea, y en esta interacción emerge el objeto matemático matriz. También estas tareas proporcionan al alumno diversas formas de afrontarlas, implicar diversas representaciones, requerir que los

estudiantes conjeturen, interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones, también dichas tareas se relacionan con otros objetos matemáticos y modelos diferentes al de matriz, como por ejemplo, la escala y las tablas conformada por números reales.

- Ha sido muy ventajoso para nuestra investigación considerar a la Educación Matemática como una ciencia de diseño, específicamente, la Teoría de la Idoneidad Didáctica nos ha dado las directrices claras y un sistema de indicadores para lograr diseñar las tareas en nuestra investigación. También, la EMR nos ha permitido describir y definir "la dinámica" que presentan las tareas, es decir, como el estudiante transita de las tareas al objeto matemático matriz mediante los modelos mediadores.
- La limitación que ha restringido nuestra investigación ha sido el factor tiempo, pues fue lo que influyo en no poder implementar las tareas diseñadas. Creemos que esta implementación debe hacerse en un segundo estudio.
- Finalmente, el cumplimiento del objetivo general del trabajo, pone en evidencia que existe una brecha entre la Educación Secundaria y la Educación Superior. Esto se percibe al tomar el objeto matemático matriz, que solo se estudia en la educación superior, y se propone estudiarlo en el sétimo ciclo de la EBR desde un punto de vista innovador (cambiando su configuración epistémica en diversos contextos). A la vez, mostramos que al diseñar unas "buenas matemáticas" contribuimos a articular de manera coherente la educación secundaria y la educación superior logrando disminuir la brecha existente entre ellas.

Cuestiones abiertas

- Queda como una cuestión abierta implementar y valorar el proceso de estudio de matrices en el sétimo ciclo de la EBR, considerando que la tarea nº 1 se puede aplicar a estudiantes del tercer año de secundaria, la tarea nº 2 y nº 3 a estudiantes de cuarto año de secundaria y la tarea nº 4 y nº 5 a estudiantes del quinto año de secundaria. Planteamos esto para no ir en contra de la gradualidad de los contenidos, y de la baja densidad de los contenidos.

  Una vez valorado el proceso de estudio, y si hay la necesidad de hacer reajustes, es pertinente hacer un rediseño usando, nuevamente, la Idoneidad Didáctica.

- Queda como otra cuestión abierta el poder estudiar en forma exclusiva al objeto matemático grafo, tratar de incluirlo en la educación básica regular, pues posee múltiples aplicaciones, y aprovechar su estrecha relación con las matrices.
- La última conclusión permite afirmar que es pertinente elaborar programas educativos (por ejemplo Bachillerato) para “reforzar”, “nivelar” o “preparar” a los estudiantes que egresan de la educación secundaria y pretenden ingresar al nivel superior de estudios y así disminuir o superar la brecha mencionada. Además, esto es respaldado por la Ley General de Educación en su artículo 22. Todo esto permitirá disminuir el impacto de la transición de la EBR a la educación superior.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.

Ansión, J. (2011). Volver a Pensar la Educación Pública. *Revista Peruana de Investigación Educativa*, 3 , 52-73.

Batanero, C., Font, V. y Godino, J. (2008). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Recuperado de http://www.ugr.es

Calbo, G. y Cortés, J (2003). Aplicación de las Matrices Invertibles en Criptografía. Ensayos: *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 17, 279-284.

España, Bachillerato Internacional (2013). *Programa del Diploma Matemáticas del Nivel Superior Sinopsis de la Asignatura*. España. Recuperado de http://ibo.org/es

Godino, J. (2011). Indicadores de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*. 1-20.

Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2007). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.

Godino, J., Font, V. y Wilhelmi, M. (2007). Análisis Didáctico Procesos de Estudio Matemático. Recuperado, de http://www.ugr.es

Grossman, S. (2008). *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

Grossman, S. (1992). *Aplicaciones de Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill.

Harshbarger, R. y Reynolds, J. (2005). *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Heuvel – Panhuizen, M. (2009). El Uso Didáctico de Modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una Trayectoria Longitudinal Sobre Porcentaje. *Correo del Maestro*, 160, 36-44.

Horn, R., Jhonson, Ch.(1990). *Matrix Analysis*. USA: Cambridge University Press.

Joyner, D. y Nakos, G. (1999). *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. México: Thomson.

Luzardo Deivi y Peña A. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matematicas*, 14(2), 153-170.

Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. *Suma*, 28, 11-26.

Miranda, E. (2002). Generación de Modelos de Enseñanza -Aprendizaje en el Álgebra Lineal Primera Fase: Transformaciones Lineales. Recuperado de http://www.iberomat.uji.es/carpeta/com.htm

Perú, Ministerio de Educación. (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú*. 2da Edición. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/

Perú, Ministerio de Educación. (2011). *Ley General de Educación*. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/

Perú, Ministerio de Educación. (2013). *Rutas del Aprendizaje*. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/

Quiroga, A.(2005). *Introducción al Álgebra Lineal*. España: Delta publicaciones.

Rojo, A. (1995). *Álgebra II*. Argentina: El Ateneo.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.

Sierpinska, A. (2002). On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra. *Mathematics Education Library*, 23, 209-246.

Wawro, M. (2011). Individual and Collective Analysis of the Genesis of Student Reasoning Regarding the Invertible Matrix Theorem in Linear Algebra. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/

APÉNDICE A1

Institucionalización - Matrices

Definición 1.1 (Matriz)

Una matriz es un arreglo rectangular de números complejos, estos números están ordenados en filas (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales) y encerrados entre corchetes o paréntesis y para nombrarlas se utilizan letras mayúsculas *A*, *B*, …, Z.

Ejemplo 1.1

La tabla de doble entrada obtenida en el ítem (b) de la tarea nº1 es un ejemplo de matriz y la podemos llamar *A*, y observamos que tiene 5 filas y 5 columnas y está formada por ceros y unos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación 1.1

Esta matriz recibe el nombre particular de matriz de dominancia pues está asociada a una gráfica de dominancia.

Ejemplo 1.2

Según la definición, los elementos o entradas de una matriz pueden ser cualquier número y el número de filas puede ser diferente que el número de columnas, en este caso la matriz *B* tiene 4 filas y 3 columnas.

$$B = \begin{bmatrix} -\pi & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 100 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 1.2 (Orden de un matriz)

Sea A una matriz conformada por m filas y n columnas, el orden de una matriz A es la representación: $m \times n$.

Observaciones 1.2

- Para denotar a una matriz se debe especificar el orden de una matriz de la siguiente manera: $B_{4\times 3}$; Notándose que la matriz B está formada por 4 filas y 3 columnas (como la del ejemplo 1.2).
- Para denotar a una matriz A cuyo número de filas n es igual al número de columnas n, se abrevia A_n. En el caso de la matriz del ejemplo 1.1 su notación abreviada es A_5.
- Es conveniente dar una forma general de una matriz de cualquier orden, por ejemplo, sea una matriz $A_{m\times n}$ (de m filas por n columnas), entonces la forma general en forma explícita es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

- Observemos que el elemento genérico o entrada genérica de la matriz Aes $a_{i\,j}$, que se ubica en la intersección (cruce) de la fila i y la columna j.
- El elemento genérico o entrada genérica $a_{i\,j}$ permite definir una matriz en forma implícita

  $A = \left[a_{i\,j}\right]_{m\times n}$, donde i varía desde 1 hasta m y j varía desde 1 hasta n.

Ejemplo 1.3

Dada la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 300 & 300 & 100 \\ 300 & 100 & 240 \\ 50 & 150 & 200 \end{bmatrix}$$

Calcule:

$$p_{32}\left(p_{11}.p_{23} - p_{21}.p_{13}\right)$$

Solución

$$150(300\times240 - 300\times100) = 6\ 300\ 000$$

Ejemplo 1.4

Dada la matriz X de forma implícita o definida por comprensión:

$$X = \left[x_{ij}\right]_{2\times3} \quad \text{tal que} \quad x_{ij} = 3i - j$$

Encuentre X en forma explícita (determínela por extensión).

Solución

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$$

Luego

$x_{11} = 3(1) - 1 = 2$; $x_{12} = 3(1) - 2 = 1$; $x_{13} = 3(1) - 3 = 0$

$x_{21} = 3(2) - 1 = 5$; $x_{22} = 3(2) - 2 = 4$; $x_{23} = 3(2) - 3 = 3$

finalmente, obtenemos X en forma explicita

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Algunos Tipos de Matrices

Definición 1.3 (Matriz Columna)

Es aquella matriz conformada por una columna y dos o más filas.

Se denota por $A_{m\times1}$, $m \geq 2$

Ejemplo1.5

Matriz columna de orden 4×1.

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \pi + 3 \\ \dfrac{1}{8} \\ 100 \end{bmatrix}$$

Definición 1.4 (Matriz Fila)

Es aquella matriz conformada por una fila y dos o más columnas.

Se denota por $A_{1\times n}$, $n \geq 2$.

Ejemplo1.5

Matriz fila de orden 1×7

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 & 1350 & 3.14 & 2.7182 & 1\frac{5}{7} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 1.5 (Matriz Cuadrada)

Es aquella matriz cuyo número de filas es igual al número de columnas.

Se denota por A_n, $n \geq 1$, n es el número de filas o de columnas.

Ejemplo 1.6

Matriz cuadrada de orden 2.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación 1.3

En una matriz cuadrada de orden n, la diagonal principal está conformada por los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, a_{nn}.

Ejemplo 1.7

Halle la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

Según la observación (1.3) los elementos de la diagonal principal son: 1, 2, 3, 4, entonces su suma es: 1 + 2 + 3 + 4 = 10

Observación 1.4

La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A de orden n se llama traza de la matriz A.

Ejemplo 1.8

La traza de la matriz T del ejemplo 1.7 es 10

Definición 1.6 (Matriz Rectangular)

Es aquella matriz cuyo número de filas es diferente al número de columnas.

Se denota por $A_{m\times n}, m \neq n$.

Ejemplo 1.9

Matriz rectangular de orden 4×3.

$$B = \begin{bmatrix} -\pi & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 100 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 1.7 (Matriz Nula o Matriz Cero)

Es aquella matriz de cualquier orden donde todos sus elementos son iguales a cero.

Ejemplo 1.10

Matriz nula de orden 3×2.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.8 (Igualdad de Matrices)

Sean dos matrices A y B, se dicen que son iguales si cumplen las siguientes condiciones:

a) Son del mismo orden,

b) Sus correspondientes elementos son iguales; y se denota como $A = B$.

Ejemplo 1.11

Sean

$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, las matrices M y N son diferentes. A pesar de que sus correspondientes elementos son iguales, no cumplen la condición de tener el mismo orden; y se denota $M \neq N$.

Definición 1.9 (Transpuesta de una matriz)

La transpuesta de una matriz A de orden $m \times n$, es la matriz denotada por A^T de orden $n \times m$, que resulta de intercambiar las filas por las columnas de A.

La definición anterior se representa como

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n} \Rightarrow A^T = \left[a_{ji}\right]_{n \times m}$$

Ejemplo 1.12

Sea $B = \begin{bmatrix} -\pi & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 100 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $B^T = \begin{bmatrix} -\pi & 3 & \frac{1}{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 100 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Observe que la primera fila de B constituye la primera columna de B^T, la segunda fila de B constituye la segunda columna de B^T, y así se continúa hasta que la cuarta fila de B constituye la cuarta columna de B^T.

Ejemplo 1.13

Halle la transpuesta de la matriz B^T del ejemplo 1.10

Solución

Debemos hallar $\left(B^T\right)^T$.

$$\left(B^T\right)^T = \begin{bmatrix} -\pi & \sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 100 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B$$

El ejemplo anterior permite observar y generalizar el siguiente resultado.

Propiedad 1.1

Sea A una matriz de orden $m \times n$, la transpuesta de la transpuesta de la matriz A es nuevamente la matriz A.

Simbólicamente

$$\left(A^T\right)^T = A$$

Ejemplo 1.14

Sea $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & \frac{3}{4} \\ 0 & 2 & 1 & \pi \\ 6 & 1 & 3 & -5 \\ \frac{3}{4} & \pi & 5 & 4 \end{bmatrix}$, halle su transpuesta

Solución

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & \frac{3}{4} \\ 0 & 2 & 1 & \pi \\ 6 & 1 & 3 & -5 \\ \frac{3}{4} & \pi & 5 & 4 \end{bmatrix} = S$$

Definición 1.10 (Matriz simétrica)

Sea una matriz cuadrada A de orden n, se dice que A es una matriz simétrica si A es igual a su transpuesta.

$$A \text{ es simétrica } \Leftrightarrow A = A^T$$

Ejemplo 1.15

Si $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 6 & z \\ y & 4 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica. Calcule $x^{y} - z$.

Definición 1.11 (Matriz antisimétrica)

Sea una matriz cuadrada *B* de orden *n*, se dice que *B* es una matriz antisimétrica si se cumple

$$\left[b_{ij}\right]_{n\times n} = \left[-b_{ji}\right]_{n\times n}$$

Ejemplo 1.16

Si $L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ tenemos que $L^{T} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y comparando las respectivas entradas, se verifica $\left[l_{ij}\right]_{n\times n} = \left[-l_{ji}\right]_{n\times n}$ como lo podemos observar

$$a_{11} = 0 = -a_{11}$$

$$a_{21} = -2 = -a_{12}$$

$$a_{31} = 3 = -a_{13}$$

$$a_{22} = 0 = -a_{22}$$

$$a_{23} = -1 = -a_{32}$$

$$a_{33} = 0 = -a_{33}$$

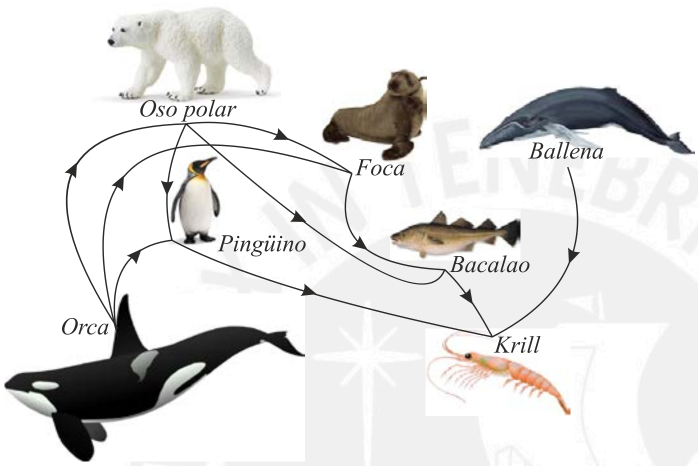
Observación 1.5

Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son ceros.

APÉNDICE A2

Ejercicios

1. Una diagráfica o gráfica dirigida es un conjunto finito de nodos (o vértices) unidos con flechas dirigidas llamadas aristas dirigidas (o ramas dirigidas).
   Considere la siguiente diagráfica de un ecosistema.



Una flecha dirigida que sale de un nodo V_1 y llega a otro nodo V_2 indica que la especie del nodo V_1 se alimenta directamente de la especie del nodo V_2.

a) Ordene los nodos como bacalao, ballena, foca, krill, pingüino, orca, oso polar, y elabore la matriz A de adyacencia de la diagráfica.

b) ¿Qué tipo de matriz es?

c) ¿Qué indica la entrada o elemento a_{24} ?

d) ¿Qué índica la fila con más unos?

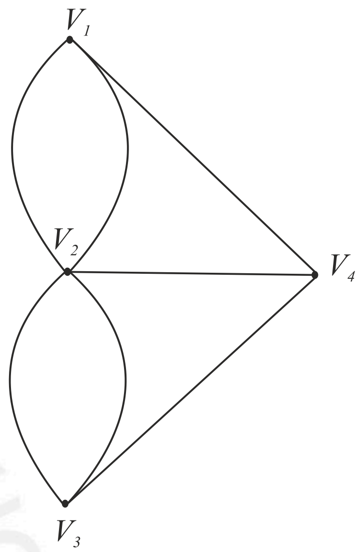
e) ¿Qué indica la columna con más unos?

f) Estudios realizados indican que la contaminación de las aguas están acabando rápidamente con el Krill.
   ¿Cuáles son las especies afectadas directamente?

g) ¿Cómo quedaría la matriz de adyacencia a largo plazo si se mantiene la contaminación de las aguas? ¿Qué puede afirmar si se extingue el Krill de este ecosistema?

2. Una gráfica o grafo es un conjunto finito de nodos unidos con líneas llamadas aristas (o ramas), si dos nodos están unidos por una arista se llaman adyacentes.

Considere el siguiente grafo donde las aristas representan puentes sobre el rio Pregel (actualmente llamado Pregolya) que unen diferentes puntos (nodos) de la ciudad de Könisberg (actualmente ciudad de Kaliningrado en Lituana).



La matriz de adyacencia A de un grafo se define como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ V_i \ y \ V_j \ \text{son adyacentes} \\ 0 & , \ \text{en cuelquier otro caso} \end{cases}$$

a) Ordene los nodos como V_1, V_2, V_3, V_4, y elabore la matriz A de adyacencia de la gráfica.

b) ¿Qué tipo de matriz es?

c) ¿Qué indica la entrada o elemento a_{13} ?

d) ¿Qué índica la fila con más unos?

e) ¿Qué indica la columna con más unos?

f) ¿Por qué el ítem (d) y (e) tienen la misma interpretación?

3. Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Identifique el orden de A y B.

b) Calcule $a_{11}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$

c) Calcule $b_{23} \cdot b_{21} + b_{13}$

4. Dada la matriz Y de forma implícita

$$Y = \left[y_{ij} \right]_{5\times 5} \quad \text{tal que} \quad y_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & \neq j \end{cases}$$

Exprese Y de forma explicita

5. Dada la matriz R de forma implícita:

$$R = \left[r_{ij} \right]_{4\times 4} \quad \text{tal que} \quad r_{ij} = 2j - i$$

Calcule: $r_{11} (r_{22} \,.\, r_{33} - r_{32} \,.\, r_{23})$

6. Escriba explícitamente

a) $A = \left[a_{ij} \right]_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = 2i - j$

b) $B = \left[b_{ij} \right]_{3\times 3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 0 & , \ si \quad i > j \\ i + j & , \ si \quad i \leq j \end{cases}$

c) $C = \left[c_{ij} \right]_{3\times 3}$ tal que $c_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j & , \ si \quad i \leq j \\ 0 & , \ si \quad i > j \end{cases}$

d) $D = \left[d_{ij} \right]_{4\times 4}$ tal que $d_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j & , \ si \quad i = j \\ 0 & , \ si \quad i \neq j \end{cases}$

e) $E = \left[e_{ij} \right]_{6\times 6}$ tal que $e_{ij} = \begin{cases} 6 \ , & si \quad i = j \\ 0 \ , & si \quad i \neq j \end{cases}$

7. Determine los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de tal manera que las matrices sean iguales.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ x + y & 2 & x + z \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z & 0 & 1 \\ -y & 2 & -z \end{bmatrix}$

8. Justifique las siguientes desigualdades $x, y, z \in \mathbb{R}$

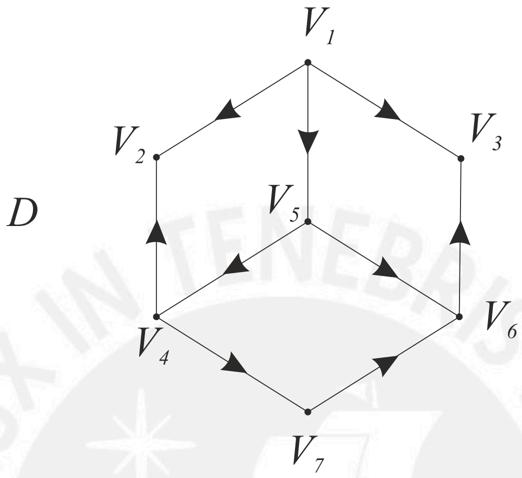
a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x & y - 2 \\ x - y & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x + y & x + y \\ -y + z & x + z \end{bmatrix}$

APÉNDICE A3

Evaluación

1. La figura muestra las relaciones de dominancia entre 7 personas, V_1, V_2, …, V_7.



a) Halle la matriz de dominancia.

b) Interprete la matriz de dominancia diciendo quien es el dominante y el más dominado del grupo.

c) Halle la transpuesta de la matriz hallada en (a) y explique qué significado le puede dar.

2. Dada la matriz A en forma implícita

$$A = \left[a_{ij}\right]_{4\times 1} \quad \text{tal que} \quad a_{ij} = j^2 - i$$

a) Halle la matriz A en forma explícita.

b) Halle $B = A^T$.

c) Calcule $7b_{12} + 3b_{14}$

APÉNDICE B

Institucionalización - suma de matrices

Definición 2.1 (Suma de matrices)

Dadas dos matrices $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ y $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, se llama suma de A y B a otra matriz $C=\left[C_{ij}\right]_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ ,\forall i\in\{1,2,3,\cdots,n\},\forall j\in\{1,2,3,\cdots,m\}$$

Observación 2.1

Para que dos o más matrices se puedan sumar, deben ser del mismo orden.

Ejemplo 2.1

Sean $A=\begin{bmatrix}50 & 30 & 31\\ 80 & 40 & 20\\ 25 & 33 & 15\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}100 & 100 & 100\\ 150 & 130 & 100\\ 100 & 200 & 150\end{bmatrix}$.

Calcule

a) $C=A+B$

b) $D=B+A$

c) ¿Cómo son las matrices C y D?

Solución

a) $C=\begin{bmatrix}50 & 30 & 31\\ 80 & 40 & 20\\ 25 & 33 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}100 & 100 & 100\\ 150 & 130 & 100\\ 100 & 200 & 150\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150 & 130 & 131\\ 230 & 170 & 120\\ 125 & 233 & 165\end{bmatrix}$

b) $D=\begin{bmatrix}100 & 100 & 100\\ 150 & 130 & 100\\ 100 & 200 & 150\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}50 & 30 & 31\\ 80 & 40 & 20\\ 25 & 33 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150 & 130 & 131\\ 230 & 170 & 120\\ 125 & 233 & 165\end{bmatrix}$

c) Las matrices C y D son iguales.

Observación 2.2

La suma de matrices es una operación conmutativa.

Ejemplo 2.2

Dadas las matrices $P=\begin{bmatrix}50 & 40 & 48\\ 60 & 37 & 64\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}52 & 50 & 60\\ 65 & 32 & 40\end{bmatrix}$ y $R=\begin{bmatrix}87 & 43 & 60\\ 66 & 53 & 41\end{bmatrix}$.

Calcule

a) $X = (P + Q) + R$

b) $Y = P + (Q + R)$

c) ¿Cuál es la relación entre las matrices X e Y?

Solución

a) $$X=\left(\begin{bmatrix}50 & 40 & 48\\ 60 & 37 & 64\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}52 & 50 & 60\\ 65 & 32 & 40\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}87 & 43 & 60\\ 66 & 53 & 41\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}102 & 90 & 108\\ 125 & 69 & 104\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}87 & 43 & 60\\ 66 & 53 & 41\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}189 & 133 & 168\\ 191 & 122 & 145\end{bmatrix}$$

b) $$Y=\begin{bmatrix}50 & 40 & 48\\ 60 & 37 & 64\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}52 & 50 & 60\\ 65 & 32 & 40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}87 & 43 & 60\\ 66 & 53 & 41\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}50 & 40 & 48\\ 60 & 37 & 64\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}139 & 93 & 120\\ 131 & 85 & 81\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}189 & 133 & 168\\ 191 & 122 & 145\end{bmatrix}$$

c) Las matrices X e Y son iguales.

Observación 2.3

La suma de matrices es una operación asociativa.

Ejemplo 2.3

Sean las matrices $H=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ y $Q_{2\times 3}$

Encuentre la matriz $Q_{2\times 3}$ tal que $H + Q_{2\times 3} = H$

Solución

Sea $Q_{2\times 3}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$

$$H+Q_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow Q_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0_{2\times 3}$$

$Q_{2\times 3}$ es la matriz nula de orden 2×3.

Observación 2.4

Para toda matriz A de orden m×n existe la matriz nula $0_{m\times n}$ del mismo orden tal que si las sumamos se obtiene la misma matriz A.

Ejemplo 2.4

Sean las matrices $J=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 9 & 1 \\ 8 & 8 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ y $K_{3\times 4}$

Encuentre la matriz $K_{3\times 4}$ tal que $J+K_{3\times 4}=0_{3\times 4}$

Solución

Sea $K=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$

$$J+K_{3\times 4}=\begin{bmatrix} 9 & 7 & 9 & 1 \\ 8 & 8 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow K_{3\times 4}=\begin{bmatrix} -9 & -7 & -9 & -1 \\ -8 & -8 & -3 & -3 \\ -8 & -2 & -1 & -6 \end{bmatrix}=-J$$

Observación 2.5

Para toda matriz A de orden m×n existe su opuesto o inverso aditivo del mismo orden tal que si las sumamos se obtiene la misma matriz nula $0_{m\times n}$.

Definición 2.2 (Diferencia de matrices)

Dadas dos matrices $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ y $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, se llama diferencia de A y B a otra matriz $C=\left[C_{ij}\right]_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\ ,\forall i\in\{1,2,3,\cdots,n\},\forall j\in\{1,2,3,\cdots,m\}$$

Ejemplo 2.5

Sean $S=\begin{bmatrix} 14 & -36 & 5 & 9 \\ -4 & 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$ y $T=\begin{bmatrix} 52 & 60 & 10 & 57 \\ 12 & 3 & 14 & 80 \end{bmatrix}$.

Calcule

$U = T - S$

Solución

$$T - S = \begin{bmatrix} 52 & 60 & 10 & 57 \\ 12 & 3 & 14 & 80 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & -36 & 5 & 9 \\ -4 & 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 60 & 10 & 57 \\ 12 & 3 & 14 & 80 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & 36 & -5 & -9 \\ 4 & -3 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$T - S = \begin{bmatrix} 38 & 96 & 5 & 48 \\ 16 & 0 & 21 & 72 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.6

Sean $X = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 15 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Calcule

a) $Z = X^T + Y^T$

b) $W = (X + Y)^T$

c) $U = (X - Y)^T$

d) $V = X^T - Y^T$

e) ¿Qué puede observar en las operaciones anteriores?

Solución

a) $Z = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 8 & 7 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 14 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 21 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$

b) $W = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 18 \\ 13 & 10 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 21 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$

c) $U = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 12 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -7 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

d) $V = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 8 & 7 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 14 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -7 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

e) ¿Qué puede observar en las operaciones anteriores?

Se observa que

$$(A+B)^T = A^T + B^T \text{ y } (A-B)^T = A^T - B^T$$

Propiedad 2.1

La transpuesta de la suma o diferencia de dos matrices *A* y *B* es igual a la suma o diferencia de la transpuesta de *A* y la transpuesta de *B*.

Simbólicamente.

Sean $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ dos matrices del mismo orden, entonces se cumple que

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

Las observaciones (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5), son propiedades de la suma de matrices

Propiedad 2.2 (Propiedades de la adición de matrices)

Sean $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ y $C_{m\times n}$ entonces se cumplen las siguientes propiedades

i) Propiedad de cerradura o clausura

La suma de dos matrices del mismo orden es otra matriz del mismo orden

ii) Propiedad conmutativa

$A + B = B + A$

iii) Propiedad asociativa

$A + (B + C) = (A + B) + C$

iv) Propiedad del elemento neutro aditivo

Para toda matriz *A* de orden $m\times n$ existe la matriz nula $0_{m\times n}$ del mismo orden tal que si las sumamos se obtiene la misma matriz *A*.

Simbólicamente

$$\forall A_{m\times n}, \exists\, 0_{m\times n} : A + 0 = 0 + A = A$$

v) Propiedad del elemento inverso aditivo

Para toda matriz *A* de orden $m\times n$ existe su opuesto aditivo del mismo orden tal que si las sumamos se obtiene la misma matriz nula $0_{m\times n}$.

Simbólicamente

$$\forall A_{m\times n}, \exists -A_{m\times n} : A + (-A) = (-A) + A = 0$$

A continuación veremos una forma práctica de construir matrices simétricas y antisimétricas, conociendo una matriz cuadrada.

Ejemplo 2.7

Sea $X = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Calcule

a) X^T

b) $Y = X + X^T$

c) ¿Qué tipo de matriz es Y?

Solución

a) $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 9 & 9 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

b) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 9 & 9 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 & 8 & 11 \\ 13 & 18 & 9 & 9 \\ 8 & 9 & 0 & 9 \\ 11 & 9 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

c) ¿Qué tipo de matriz es Y? Observamos que Y es una matriz simétrica.

Propiedad 2.3

Si X es una matriz cuadrada de orden n, la matriz $X + X^T$ es simétrica

Ejemplo 2.8

Sea $Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Calcule

a) Z^T

b) $W = Z - Z^T$

c) ¿Qué tipo de matriz es W?

Solución

$$a)\quad Z^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)}\quad W = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & 7 \\ 4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

c) ¿Qué tipo de matriz es W? W, es una matriz antisimétrica

Propiedad 2.4

Si X es una matriz cuadrada de orden n, la matriz $X - X^T$ es antisimétrica.

APÉNDICE C

Institucionalización – Producto de un escalar por una matriz

Definición 3.1 (Producto de un escalar por una matriz)

Sean A cualquier matriz de orden $m \times n$ y c un número real, llamado escalar, el producto de c por A se define por

$$cA = Ac = c\left[a_{ij}\right] = \left[c\,a_{ij}\right], \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

Observamos que cada entrada de A se multiplica por el escalar c.

Ejemplo 3.1

Si $c = -1$ y $A = \begin{bmatrix} 13 & 92 \\ 68 & 1 \end{bmatrix}$

Calcule *c A* y *A c*

Solución

$$cA = Ac = (-1)\begin{bmatrix} 13 & 92 \\ 68 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -92 \\ -68 & -1 \end{bmatrix} = -A$$

Observación 3.1

Si $c = -1$ y A cualquier matriz entonces $c\,A = -1\,A = -A$, el opuesto o inverso aditivo de A.

Ejemplo 3.2

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Calcule

a) $X = 2\,A + 2\,B$

b) $Y = 2\,(\,A + B\,)$

c) ¿Cómo son las matrices X e Y ?

Solución

a) $X = 2\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -2 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) $Y = 2\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) La matriz X es igual a la matriz Y.

Observación 3.2

El producto de una matriz por un escalar es distributiva con respecto a la suma.

Ejemplo 3.3

Sean los escalares $k = 1$, $c = 0$ y $D = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 & -1 \\ 12 & 5 & -6 & 9 \\ -1 & 14 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Calcule

a) $X = k\,D$
b) $Y = c\,D$

Solución

a) $X = kD = 1D = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 & -1 \\ 12 & 5 & -6 & 9 \\ -1 & 14 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = D$

b) $Y = 0D = 0D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{4\times 4}$

A continuación formalizamos la observación 3.1 y el ejemplo 3.3 en una propiedad.

Propiedad 3.1

Sean A y B matrices de orden $m\times n$ y c un escalar *i)* Propiedad distributiva

La multiplicación de una matriz A por un escalar c es distributiva con respecto a la suma.

Simbólicamente

$$c\,(A + B) = c\,A + c\,B$$

ii) (1) $A = A$

iii) (0) $A = 0_{m \times n}$

Las propiedades (2.2) y (3.1) permiten dar solución a ecuaciones matriciales simples de la forma $\alpha X = A$, donde α es un escalar y X, A son matrices del mismo orden.

Ejemplo 3.4

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Determine la matriz X tal que

$$2\,X - 4\,B = 3\,A$$

Solución

$2\,X - 4\,B + 4\,B = 3\,A + 4\,B$ (sumamos 4 B a ambos miembros de la ecuación)

$2\,X + 0 = 3\,A + 4\,B$ (propiedad 2.2 (*v*) elemento inverso aditivo)

$2\,X = 3\,A + 4\,B$ (propiedad 2.2 (*iv*) elemento neutro aditivo)

$\frac{1}{2}\,(2\,X) = \frac{1}{2}\,(3\,A + 4\,B)$ (multiplicamos por $\frac{1}{2}$ a ambos miembros)

$$X = \frac{1}{2}\,(3\,A + 4\,B)$$

Finalmente reemplazamos datos y calculamos

$$X = \frac{1}{2}(3A + 4B) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 10 & 12 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 5 & 6 \\ 2 & 0 & \frac{-7}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.5

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

Determine la matriz X tal que

$$0\,C + \frac{1}{2}\,X = 2\,A - 4\,B$$

Solución

$0\,C + \frac{1}{2}\,X = 2\,A - 4\,B$

$0 + \frac{1}{2}\,X = 2\,A - 4\,B$ (propiedad 3.1 (*iii*) elemento neutro aditivo)

$\frac{1}{2}\,X = 2\,A - 4\,B$ (propiedad 2.2 (*iv*) elemento neutro aditivo)

$2(\frac{1}{2}\,X) = 2\,(2\,A - 4\,B)$ (multiplicamos por dos a ambos miembros)

$X = 4\,A - 8\,B$

Finalmente reemplazamos y obtenemos X

$$X = 4A - 8B = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 20 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -16 \\ 8 & 24 \end{bmatrix}$$

Las propiedades (2.2) y (3.1) también permiten dar solución a sistemas de ecuaciones matriciales simples de la forma

$$\begin{cases} \alpha\, X + \beta\, Y = A \\ \delta\, X + \lambda\, Y = B \end{cases},\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \lambda \text{ son escalares y } X,\ Y \text{ matrices del mismo orden.}$$

Ejemplo 3.6

Si $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 16 & -6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 16 & -40 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$

Resuelva

$$\begin{cases} 2\,X + 3\,Y = A \\ 5\,X - 2\,Y = B \end{cases}$$

Solución

Cancelamos la matriz X

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A & (\times 5) \\ 5X - 2Y = B & (\times -2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{10X} + 15Y = 5A \\ \cancel{-10X} + 4Y = -2B \end{cases}$$

$$19Y = 5A - 2B$$

Obtenemos la matriz Y

$$Y = \frac{1}{19}(5A - 2B) = \frac{1}{19}\left(\begin{bmatrix} -25 & 15 \\ 80 & -30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 32 & -80 \\ 42 & 46 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} -57 & 95 \\ 38 & -76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A & (\times 2) \\ 5X - 2Y = B & (\times 3) \end{cases}$$

Cancelamos la matriz Y

$$\begin{cases} 4X + \cancel{6Y} = 2A \\ 15X - \cancel{6Y} = 3B \end{cases}$$

$$19X = 2A + 3B$$

Obtenemos la matriz X

$$X = \frac{1}{19}(2A + 3B) = \frac{1}{19}\left(\begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 32 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 48 & -120 \\ 63 & 69 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 38 & -114 \\ 95 & 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

APÉNDICE D

Institucionalización - Producto matricial

Definición 4.1 (Producto de matrices)

Si $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ y $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$, el producto *AB*, en este orden, es la matriz $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

En términos sencillos, la definición anterior afirma que el elemento c_{ij} es el resultado de la suma de los productos cada elemento de la *i* – ésima fila de A por los elementos correspondientes de la *j* – ésima columna de *B*.

Observación 4.1

Sean las matrices $A_{m\times p}$ y $B_{p\times n}$, entonces el producto *AB* está definido si el número de columnas de *A* y el número de filas de *B* son iguales, y se dice que *A* y *B* son conformables para la multiplicación, caso contrario no existe el producto de matrices. Además el orden de *AB* es $m \times n$

Gráficamente

$$A_{m\times p}\, B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

$$=$$

Ejemplo 4.1.

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Determine y responda

a) Si *C* = *AB* ¿existirá *C*?, si existe *C* ¿De qué orden es C?
b) Si *D* = *BA* ¿existirá *D*?, si existe *D* ¿De qué orden es?
c) Halle el producto de matrices donde esté definido.

Solución

a. Como el número de columnas de *A* es igual al número de filas de *B*, entonces existe *C*=*AB*, y el orden de la matriz producto *C* es 2×3.

b. Como el número de columnas de B es 3 y el número de filas de *A* es 2, son diferentes, entonces no existe la matriz *D*.

c.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1+3\times4 & 2\times-2+3\times1 & 2\times3+3\times2 \\ 1\times1+2\times4 & 1\times-2+2\times1 & 1\times3+2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.2

Sean $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Calcule

a) AI

b) IA

c) AC

d) CA

e) CI

f) IC

g) ¿Se puede afirmar que el producto de matrices es conmutativo?

Solución

a) $A\,I = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

b) $IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

c) $AC = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 34 \\ 11 & 15 \end{bmatrix}$

d) $CA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 1 \\ 22 & -1 \end{bmatrix}$

e) $CI = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

f) $IC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

g) Como AC es diferente a CA, se concluye que el producto de matrices no es conmutativo.

Observación 4.2

El producto de matrices no es conmutativo.

Definición 4.2 (Matriz identidad)

Es aquella matriz cuadrada de orden n, donde todos elementos de la diagonal corresponden al número uno y los demás son cero.

Se denota por I_n y se define implícitamente como

$$I_n = [\delta i\, j]_n \,, \delta i\, j = \begin{cases} 1 \,, & i = j \\ 0 \,, & i \neq j \end{cases}$$

Propiedad 4.1

Si A_n es cualquier matriz cuadrada, I la matriz identidad de orden n, se cumple que

$$AI = IA = A$$

Ejemplo 4.3

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $\alpha = 3$

Calcule

a) $A(BC)$
b) $(AB)C$
c) $A(B+C)$
d) $AB+AC$
e) $(B+C)A$
f) $BA+CA$
g) $\alpha(BC)$
h) $(\alpha B)C$
i) $B(\alpha C)$

Solución

a) $A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 20 \\ -18 & 14 \end{bmatrix}$

b) $(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 20 \\ -18 & 14 \end{bmatrix}$

c) $A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 23 \\ -8 & 15 \end{bmatrix}$

d) $AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 16 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 23 \\ -8 & 15 \end{bmatrix}$

e) $(B+C)A = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

f) $BA + CA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

g) $\alpha(BC) = 3\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -33 & 24 \end{bmatrix}$

h) $(\alpha B)C = \left(3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -33 & 24 \end{bmatrix}$

i) $B(\alpha C) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\left(3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -33 & 24 \end{bmatrix}$

Ejemplo 4.4

Con respecto al ejemplo anterior, relacione convenientemente.

i) $A(BC) = (AB)C$ (a) Identidad multiplicativa.

ii) $A(B+C) = AB + AC$ (b) Propiedad distributiva derecha.

iii) $(B+C)A = BA + CA$ (c) Propiedad asociativa.

iv) $I_m A = A I_n = A$ (e) Elemento neutro aditivo.

(d) Propiedad distributiva izquierda.

Propiedad 4.2 (Propiedades de la multiplicación matricial)

Si A es una matriz de orden $m\times n$, B y C tienen tamaños tales que las operaciones siguientes están definidas, y si α es cualquier escalar, entonces

i) $A(BC) = (AB)C$ — Propiedad asociativa

ii) $A(B+C) = AB + AC$ — Propiedad distributiva izquierda

iii) $(B+C)A = BA + CA$ — Propiedad distributiva derecha

iv) $\alpha(BC) = (\alpha B)C = B(\alpha C)$

v) $I_m A = A I_n = A$ — Identidad multiplicativa

Ejemplo 4.5

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Calcule

a) AB.

b) $X = (AB)^T$

c) $Y = B^T A^T$

d) ¿Cómo son las matrices X e Y ?**Solución**

a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

b) $X = (AB)^T = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 0 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$

c) $Y = B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 0 & 7 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$

d) Observamos que las matrices X e Y son iguales.

Propiedad 4.5

Si A y B son conformables (Ver Observación 4.1) para la multiplicación, se cumple

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Ejemplo 4.5

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Calcule la tercera columna del producto *AB*.

Solución

Basta con calcular

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4+0\times 5+1\times(-2) \\ 2\times 4+1\times 5+2\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.6

Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *x*, *y* son números reales, y $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$

a) Calcule *B C*, ¿De qué orden es *BC*?

b) Halle los valores de *x*, *y* si *BC* = *D*.

Solución

a) $BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ 2x+8y \end{bmatrix}$

b) Si *BC* = *D*, entonces

$$\begin{bmatrix} x+3y \\ 2x+8y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

por igualdad de matrices

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+8y=12 \end{cases}$$

multiplicando por -2 *la primera ecuación del sistema*

$$\begin{aligned} -\cancel{2x} - 6y &= -10 \\ \cancel{2x} + 8y &= \ \ 12 \\ \hline 2y &= 2 \\ \boxed{y = 1} \end{aligned}$$

luego reemplazando " y *" en cualquiera de las ecuaciones obtenemos*

$$\boxed{x = 2}$$

Ejemplo 4.7

Sea I la matriz identidad de orden 2, $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y X una matriz cuadrada de orden 2.

Encuentre X si se cumple que $A\,X = I$.

Solución

Sea $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Luego, como $A\,X = I$

tenemos

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 5z = 1 & (3) \\ 3x + 4z = 0 & (-4) \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y + 5w = 0 & (3) \\ 3y + 4w = 1 & (-4) \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} \cancel{12x} + 15z = 3 \\ -\cancel{12x} - 16z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{12y} + 15w = \ \ 0 \\ -\cancel{12y} - 16w = -4 \end{cases}$$

$$-z = 3 \qquad\qquad -w = -4$$

$$\boxed{z = -3} \qquad\qquad \boxed{w = 4}$$

reemplazando en sus respetivos sistemas obtenemos

$$\boxed{x = 4}$$

$$\boxed{y = -5}$$

Finalmente,

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definición 4.3

Sea A una matriz cuadrada de cualquier orden se define la potencia de una matriz cuadrada

$$A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n-\,factores}, \ n \text{ un entero positivo}$$

Además, se define

$$A^1 = A$$

$$A^0 = 1$$

Ejemplo 4.7

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Halle, A^0, A^1, A^2, A^3

Solución

Por definición $A^0 = 1$, $A^1 = A$.

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -15 \\ -30 & 41 \end{bmatrix}$$

APÉNDICE E

Institucionalización – determinante y matriz inversa

Definición (5.1) (Determinante de una matriz cuadrada de orden 2)

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2

El determinante de A es un número real definido y denotado por

$$\det(A) = ad - bc$$

El determinante de A, también se denota por $|A|$

Ejemplo 5.1

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

Calcule

a) det ($A\,B$)

b) det (A) det (B)

c) ¿Qué observa en los resultados anteriores?

Solución

a) $\det(AB) = |AB| = \begin{vmatrix} 40+63 & 25+42 \\ 32+54 & 20+36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 103 & 67 \\ 86 & 56 \end{vmatrix} = 103.56 - 86.67 = 5768 - 5766 = 6$

b) $\det(A)\det(B) = |A||B| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = (30-28)(48-45) = 6$

Propiedad (5.1)

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 2, entonces

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Ejemplo 5.2

De dos matrices A y B, diferentes a las del ejemplo 5.1, cuadradas de orden 2 verifique si se cumple que

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Definición (5.2) (Inversa de una matriz cuadrada de orden 2)

Se dice que la matriz A cuadrada de orden 2 es invertible o tiene inversa, si existe una matriz B del mismo orden de A tal que

$$AB = BA = I$$

Ejemplo 5.3

Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución

Aplicando la definición tenemos que verificar que

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veamos

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De lo anterior verificamos que $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

También podemos afirmar lo contrario, es decir $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Propiedad 5.3 (Cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada de orden 2)

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2, cuyo determinante es diferente de cero.

Si A es invertible, la matriz inversa de A es una matriz cuadrada del mismo orden de A definida y denotada por

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.4

Si $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Halle F^{-1}

Solución:

Primero calculamos el determinante de $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$,

(2)(8) – (4)(3) = 16 – 12 = 4

Como es diferente de cero, se puede encontrar su inversa,

Luego aplicamos la propiedad 5.3 y obtenemos

$$F^{-1} = \frac{1}{|F|}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{4}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.5

Sea la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

b) Usando la inversa hallada en el ítem (a) ¿Cómo podría dar solución a la ecuación matricial?

Solución

a) Primero calculamos el determinante

–3 + 4 = 1, por ser diferente de cero existe su matriz inversa

La matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ es

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ multiplicamos (por la izquierda a ambos miembros de la ecuación matricial) por la inversa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\times 2 + 4\times 1 \\ -1\times 2 + 1\times 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Propiedad 5.4

Una matriz cuadrada de orden 2 es invertible si y sólo sí su determinante es diferente de cero.

Ejemplo 5.6

Dadas las matrices

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

En caso de ser posible calcule la matriz inversa de las matrices dadas.

Solución

Para $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ primero calculamos su determinante: 9 –10 = –1, entonces tiene inversa.

Su inversa es: $-1\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

Para $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ primero calculamos su determinante: –4 +4 = 0, entonces no tiene inversa.

Para $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ primero calculamos su determinante: 8 – 8 = 0, entonces no tiene inversa.

Para $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ primero calculamos su determinante: $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$, entonces tiene inversa

Su inversa es: $3\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

APÉNDICE F

En este apéndice vamos a desarrollar algunos ejercicios de las tareas usando el programa MAXIMA. La intención es que el estudiante utilice este programa para verificar los resultados que obtenga. También el empleo de este programa permite al estudiante afianzar y ampliar sus conocimientos relacionados con el objeto matemático matriz. El docente puede planificar tareas para poder explicar, afianzar y ampliar las propiedades de las matrices, sus operaciones, de determinante y la inversa de una matriz.

Es necesario recalcar que este programa es "muy potente" para el álgebra computacional y se puede aplicar en todos los niveles educativos. Fue el que inspiró otros programas conocidos como Maple, y Mathematica. La gran ventaja es ser software libre (licencia GNU) pudiéndose descargar y difundir. Las versiones y su manual, tanto para Windows o Linux, están en español y se pueden descargar en http://maxima.sourceforge.net/es/

Algunos comandos básicos para manipular matrices

Toda línea de comando se ejecuta al presionar simultáneamente las teclas shift + enter.

";"

Es el operador de fin de línea de comando y que al ejecutarse con shift + enter permite mostrar el resultado. Si no se quiere mostrar el resultado se debe usar "$".

" : "

Los dos puntos es el operador de asignación.

Por ejemplo, A : 8; asigna a la variable A el valor de 8.

" := "

Es el operador de definición de funciones. Usaremos este operador para definir las entradas de una matriz en forma implícita.

Por ejemplo. a[i,j]:= 3*i – 2*j;

Para las operaciones aritméticas son

+ para la suma de números.

– para resta de números.

* para el producto de números.

^ para la potenciación de números.

Para las operaciones matriciales son

+ para la suma de matrices.

– para la resta de matrices.

. para el producto de matrices. (note la diferencia con *)

^^ para la potenciación de matrices.

Operador condicional “if”

if condición1 then expresión1 else expresión0.

En pseudocódigo

Si se cumple la condición 1 entonces hacer expresión 1 sino hacer la expresión 2.

Este operador va a permitir controlar las condiciones para generar matrices implícitas.

Función “lambda”

Es una función anónima que va a permitir no asignar valores a las variables y así poder generar las matrices implícitas.

“genmatrix”

Esta función permite generar matrices.

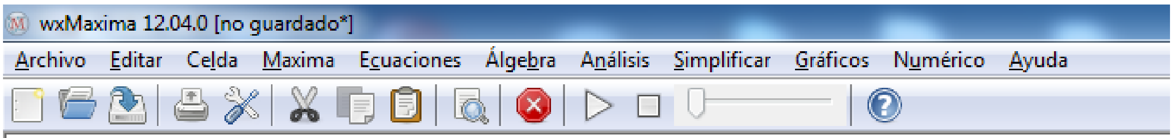
“matrix”

Permite definir matrices.

Con estos operadores y funciones desarrollaremos algunos ejemplos de las tareas.

Notemos que no estamos dando la sintaxis de estas funciones, pues el lector puede consultar el manual del programa MAXIMA que viene incluido en el programa. Este manual puede encontrarlo en el menú ayuda.

Ejercicio 4 del Apéndice A2




```
(%i1) Y:genmatrix(lambda([i,j],if i=j then 1 else 0),5,5);
```

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i1) hace referencia que se ha ingresado la primera línea de comando. (input)

(%o1) indica que se ha obtenido la primera salida asociada a la primera línea de comando. (output)

Ejercicio 5 del Apéndice A2

```
(%i2) r[i,j]:=2*j-i$
(%i4) R:genmatrix(r,4,4);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) r[1,1]*(r[2,2]*r[3,3]-r[3,2]*r[2,3]);
(%o5) 2
```

Ejercicio 6 c) del Apéndice A2

```
(%i7) C:genmatrix(lambda([i,j],if i<=j then 2*i-3*j else 0),3,3);
```

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

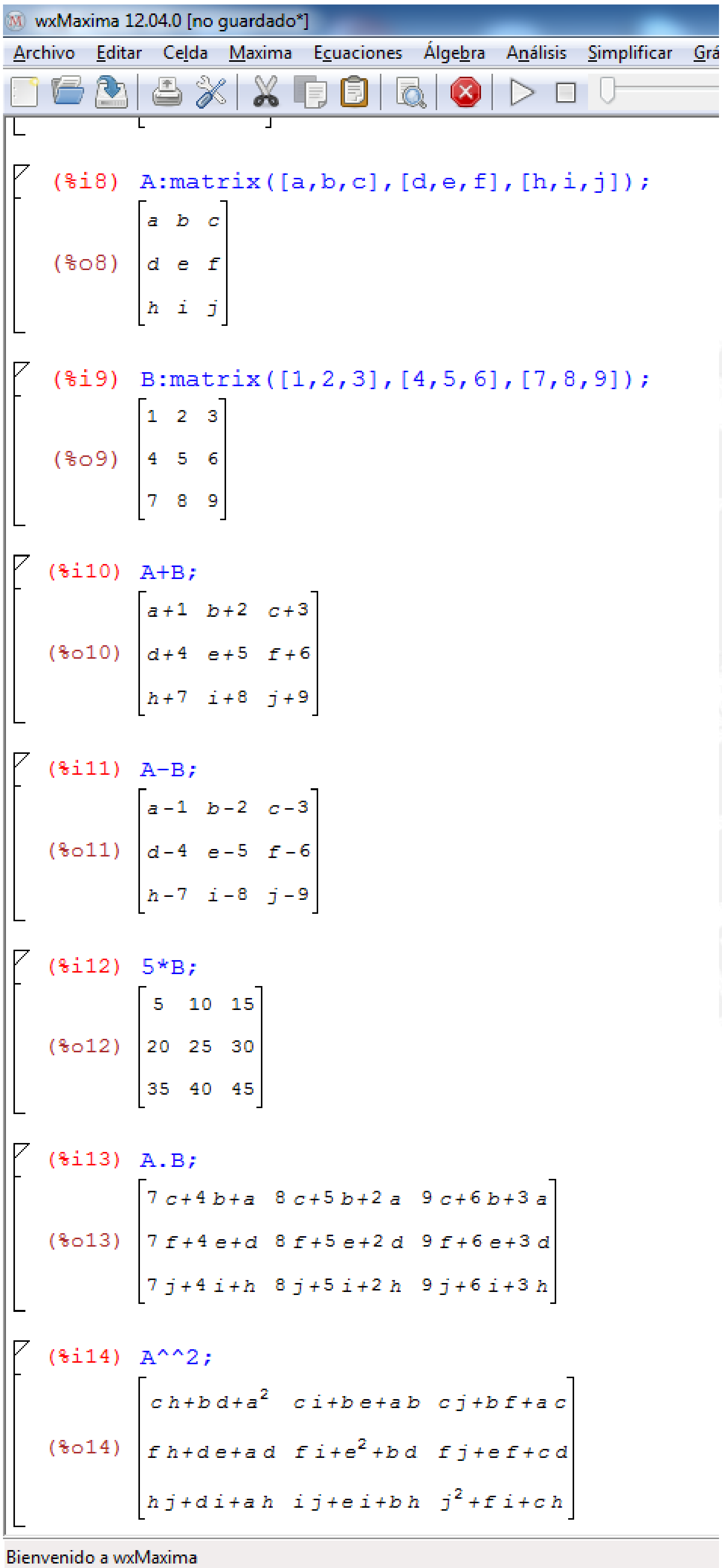
Mostraremos otros ejemplos donde se ingresen matrices, se sumen, resten, se multipliquen por un escalar, se multipliquen matrices.

Haremos la diferencia entre el operador “ * ” y “.” Para evitar cálculos incorrectos.

El operador * se usa solo para el producto de números y para el producto de un número con una matriz (producto por un escalar).

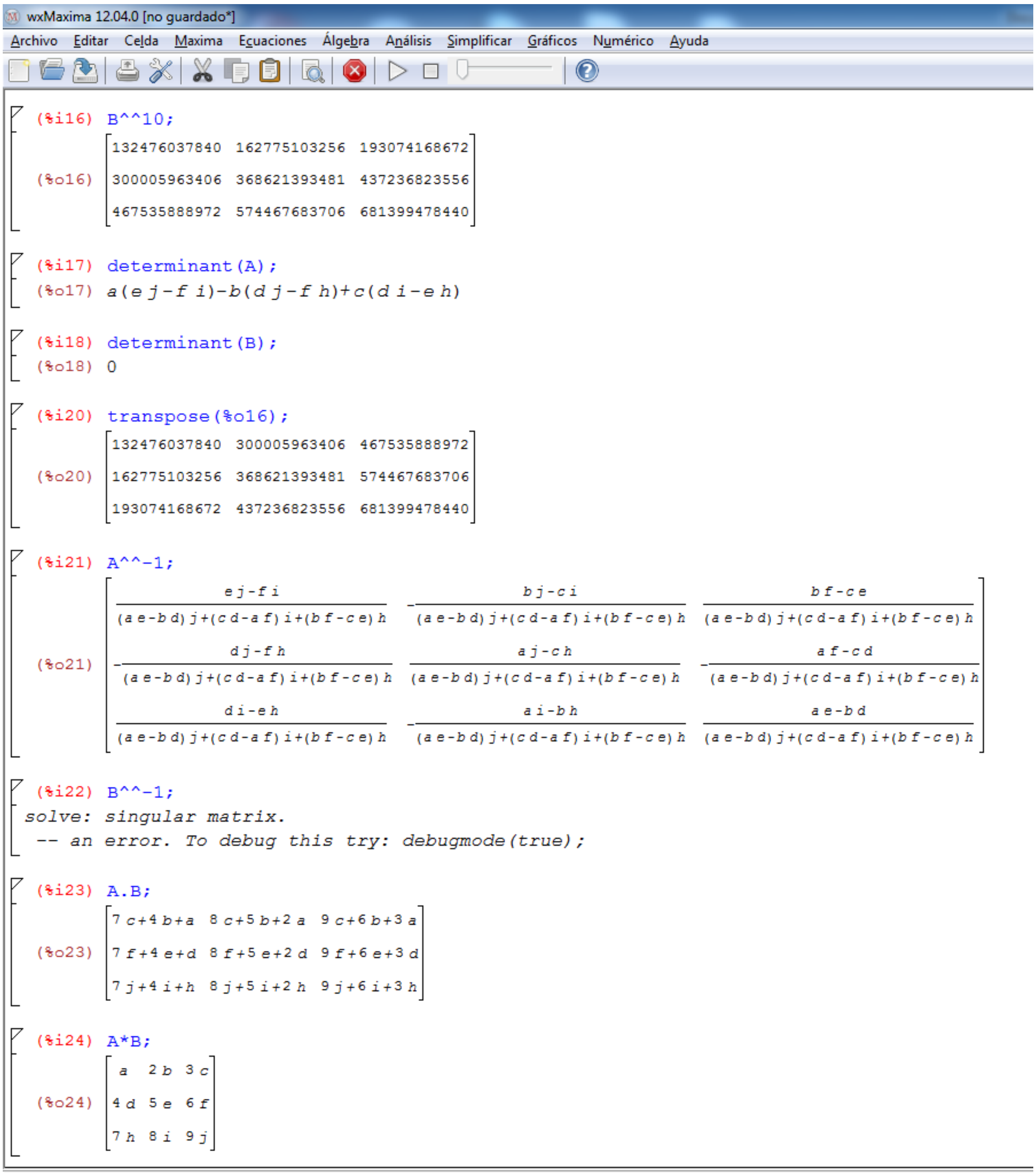
El operador "." Se usa solo para la multiplicación matricial.

También calcularemos potencias de matrices, determinantes de matrices cuadradas, y la inversa de una matriz cuadrada si existiese. No importando si se ingresan símbolos en una matriz.



Observemos en la salida (%o12) como se ha usado el operador "*" para realizar el producto del escalar 5 por la matriz *B*.

En la salida (%o14) se ha calculado la potencia de grado dos de *A*.



En la salida (%o17) se ha calculado el determinante de *B*, siendo su valor cero esto indica que no tiene inversa.

En la entrada (%i22) se ha pretendido calcular la matriz inversa, cuya salida indica que es un error calcularla pues es una matriz singular y no existe su inversa.

En la salida (%o21) se ha calculado la inversa de la matriz *A*.

En la salida (%o20) se halla la traspuesta de la matriz obtenida en (%o16).

Finalmente se observa que el operador “*” no debe usarse para el producto matricial pues no cumple con la definición. En cambio el operador “.” Es el que permite el producto matricial.