PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA COMO GUÍA PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL VALOR ABSOLUTO EN EL PRIMER CICLO DEL NIVEL UNIVERSITARIO

Tesis para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTADO POR:

CARLOS ALBERTO GARCÍA PALACIOS

ASESORA

DRA. NORMA RUBIO GOYCOCHEA

Miembros del jurado

Dr. Uldarico Malaspina Jurado

Mg. Cecilia Gaita Iparraguirre

LIMA - PERÚ

2014

A mis padres José Melendez Gariza y mi difunta madre María de Jesús Palacios Beltrán, porque siempre me brindaron su amor y su apoyo incondicional.

A mis queridos hijos: Carlos Gael Aresky, Katherine Pamela y Lissethe Stephanny.

Agradezco de manera infinita a todos los profesores que me han formado durante estos largos años de estudios y en forma muy especial a la doctora Norma Rubio, por su paciencia, aportes y tiempo, dedicados a la asesoría de esta investigación y a los profesores: Uldarico Malaspina, Cecilia Gaita, Jesús Flores, Teódulo Verástegui y al profesor Vicenç Font, por sus enseñanzas y por haber hecho que concluya uno de mis más grandes sueños.

RESUMEN

El valor absoluto es un tema muy importante dentro del contexto matemático, ya que es utilizado en el cálculo diferencial e integral (límites, continuidad, derivadas e integrales) y en la Estadística (prueba de los rangos de signos de Wilcoxon) y cuya comprensión es difícil no solo para los alumnos, sino también para los mismos profesores.

En este trabajo intentamos tipificar los errores, dificultades y obstáculos cuando se presenta a un grupo de alumnos tareas en las cuales deben usar el concepto del valor absoluto. Así también, reconocer que las dificultades presentadas por dichos alumnos, se deben en parte, al desconocimiento de los mismos profesores sobre los diferentes usos del valor absoluto.

Por ello, vemos necesario hacer una propuesta de una secuencia de tareas usando criterios de idoneidad que nos guíen en la elaboración de la misma y que sirvan a los profesores como instrumento en su labor docente. Creemos que será un aporte útil y práctico.

El marco teórico fundamental con que trabajamos es el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), propuesto por Godino y colaboradores. Específicamente hacemos uso de los criterios de idoneidad didáctica que nos guían en la elaboración de esta propuesta, teniendo en cuenta los indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas (epistémica, cognitiva, interaccional, ecológica y mediacional) para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje del valor absoluto.

La presente investigación tiene las siguientes características:

a) Es experimental: porque se trabaja con una prueba diagnóstica, cuestionarios y se diseña una clase (secuencia de tareas) basada en los criterios de idoneidad.

b) Es mixta: ya que obedece a un diseño descriptivo y explicativo. Descriptivo porque se observará la clase del profesor, se manejarán variables de tipo cualitativa (para ver los tipos de errores) y cuantitativa (para ver los resultados). Será explicativa porque se hará el análisis de una clase, con la finalidad de valorarla y observar si los conocimientos del alumno y del profesor acerca de la del valor absoluto son los apropiados.

c) Contempla el diseño de tareas didácticas: Se realizará una secuencia de tareas con la finalidad de tratar de superar los errores, las dificultades y los obstáculos que se presentan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del valor absoluto. Se diseñarán sesiones de clase con representatividad (holo-significado) y propiciando una buena interacción.

d) Utiliza la idoneidad didáctica y su sistema de indicadores empíricos ya que es una herramienta del enfoque ontosemiótico que orienta de manera fundamentada la acción efectiva sobre la instrucción o enseñanza y promueve su mejora progresiva (Godino, 2011).

En la búsqueda del mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje del concepto y los usos del valor absoluto, se diseña una secuencia de actividades didácticas (diseño de tareas) que tengan en cuenta las dimensiones: epistémica, cognitiva e instruccional y que contribuyan a lograr una eficacia cognitiva en los estudiantes del nivel superior. Por cuestiones de tiempo, no se llegó a implementar esta secuencia de actividades.

LISTA DE FIGURAS

1. Figura 1. Tipos de significados y personales.
2. Figura 2. Configuración de objetos primarios.
3. Figura 3. Configuración de objetos y procesos.
4. Figura 4. Interacciones didácticas.
5. Figura 5. Dimensión normativa. Tipos de normas.
6. Figura 6. Componentes de la idoneidad didáctica.
7. Figura 7. Estructuras del conocimiento.
8. Figura 8. Estructuración de los modelos y significados asociados al valor absoluto.
9. Figura 9. Representación del holo-significado del concepto de valor absoluto

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Acciones y pasos para lograr el objetivo general 1

Tabla 2. Acciones y pasos para lograr el objetivo general 2

Tabla 3. Cuadro de resultados pregunta 2 de la prueba diagnóstica.

Tabla 4. Cuadro de resultados pregunta 3 de la prueba diagnóstica.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, RELEVANCIA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Planteamiento del problema de investigación. 1

1.2 Relevancia del problema de investigación. 2

1.3 Preguntas de investigación. 2

1.4 Delimitación del problema de investigación. 3

1.5 Objetivos generales y objetivos específicos. 3

1.6 Justificación del problema de investigación. 5

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

2.1 El enfoque ontosemiótico (EOS). 6

2.1.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas. 7

2.1.2. Emergencia de los objetos matemáticos. 8

2.1.3. Comprensión y conocimiento en el EOS. 12

2.1.4. Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos. 13

2.1.5. Dimensión normativa. 14

2.2 Análisis didáctico desde el punto de vista del EOS. 16

2.3 Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción. 18

2.4 Errores, dificultades y obstáculos. 22

2.4.1 Error y Dificultad. 22

2.4.2 Obstáculos. 24

2.5 Metodología de la investigación. 26

2.5.1 Contexto y sujetos de estudio. 26

2.5.2 Fases de la investigación. 27

2.6 El objeto matemático: valor absoluto. 33

2.6.1 Revisión Histórica- Epistemológica del Valor Absoluto. 33

2.6.2 Complejidad ontosemiótica del valor absoluto. 36

2.6.3 Holo-significado del concepto del valor absoluto. 38

2.7 Significados de referencia. 39

2.8 Significados pretendidos. 48

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE OBJETOS MATEMÁTICOS

3.1 Configuración epistémica emergente de los textos de matemática del nivel superior, donde aparece la noción del valor absoluto. 54

3.1.1 Configuración epistémica emergente del concepto del valor absoluto "Algoritmización". 54

3.1.2 Configuración epistémica emergente del concepto del valor absoluto "Algorítmica y Distancia". 57

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE LOS ERRORES, DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS DEL CONCEPTO DEL VALOR ABSOLUTO

4.1 Instrumentos. 61

4.2 Errores, dificultades y obstáculos del valor absoluto en la experiencia realizada. 62

4.2.1 El error en el aprendizaje del concepto del valor absoluto. 62

4.2.2 Dificultades en el aprendizaje del concepto del valor absoluto en la experiencia realizada y en otras investigaciones. 64

4.2.3 Obstáculos en el aprendizaje del concepto del valor absoluto en la experiencia realizada y en otras investigaciones. 66

4.3 Resultados y análisis de la prueba diagnóstica y cuestionarios. 67

4.3.1 La prueba diagnóstica. 67

4.3.2 Cuestionarios. 71

4.4 Descripción de la sesión de clase del profesor y su valoración mediante los criterios de idoneidad. 75

4.4.1 La noción de idoneidad epistémica. 75

4.4.2 Idoneidad cognitiva. 79

4.4.3 Idoneidad mediacional. 81

4.4.4 Idoneidad afectiva. 83

4.4.5 Idoneidad interaccional 84

4.4.6 Idoneidad ecológica. 85

4.5 Configuración epistémica idónea emergente del objeto valor absoluto. 86

CAPÍTULO 5: PROPUESTA DE TAREAS. DISEÑO DE SESIONES Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

5.1 Descripción del diseño de las tareas didácticas. 91

5.2 Secuencia de sesiones didácticas. 92

5.2.1 Sesión 1: Diversos usos o significados del valor absoluto. 97

5.2.2 Sesión 2: El valor absoluto de un número real visto dentro del contexto topológico-métrico. 101

5.2.3 Sesión 3: El valor absoluto y la reflexión de la función lineal 105 y de la función afín sobre el eje de las abscisas.

5.2.4 Sesión 4: El valor absoluto visto dentro del contexto analítico. 110

5.2.5 Sesión 5: Problemas contextualizados. 115

5.2.6 Sesión 6: La función valor absoluto y el uso de la tecnología. 116

5.2.7 Sesión 7: La función valor absoluto y su gráfica. 124

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones. 127

Recomendaciones 133

PREGUNTAS ABIERTAS 133

REFERENCIAS 134

APÉNDICES

Apéndice 1: Guía para el análisis de clases, con criterios de idoneidad. 138

Apéndice 2: Prueba diagnóstica. 147

Apéndice 3: Cuestionario 1 (alumnos). 149

Apéndice 4: Cuestionario 2 (profesores). 150

Apéndice 5: Transcripción de la clase del profesor. 155

Apéndice 6: Matriz de consistencia. 173

Apéndice 7: Algunas soluciones de las tareas didácticas. 177

ANEXOS

Cuestionario 2 desarrollado por los profesores 232

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, RELEVANCIA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Resumen

En la sección 1.1 se presenta el planteamiento del problema de investigación, en el que se indica que hay poco énfasis en diseñar situaciones didácticas para que los alumnos comprendan el concepto del valor absoluto y que tampoco se transita por sus diferentes usos; en la sección 1.2 de este capítulo se presenta la relevancia del problema de investigación, también se detallan algunas investigaciones realizadas a lo largo de la historia acerca del concepto del valor absoluto; en la sección 1.3 se plantean dos preguntas de investigación las que enlazadas con dos objetivos generales y cinco objetivos específicos de la investigación propuestas se pretende dar solución al problema de investigación; en la sección 1.4 se explica la delimitación del problema de investigación, en la que se considera necesario buscar modelos adecuados para abordar los estados del concepto del valor absoluto con la finalidad de obtener una eficacia cognitiva; en la sección 1.5 se presenta la justificación del problema de investigación.

1.1 Planteamiento del problema de investigación

El valor absoluto es un tema muy importante dentro del contexto matemático, ya que es utilizado en el cálculo diferencial e integral (límites, continuidad, derivadas e integrales) y en la Estadística (prueba de los rangos de signos de Wilcoxon). Diversos investigadores como Cerizola (2005) y Wilhelmi (2007) señalan que la comprensión del concepto del valor absoluto (VA) es difícil para los alumnos. Se puede constatar que en la enseñanza del concepto del VA, en los primeros años del nivel superior, *no se pone suficiente énfasis en diseñar situaciones didácticas para que los alumnos comprendan el concepto del VA y no se transita tampoco por sus diferentes usos.* Solo son enumeradas sus propiedades y sus aplicaciones, como resolución de igualdades y desigualdades con valor absoluto, tratándose muy superficialmente.

1.2 Relevancia del problema de investigación

Se considera que la presente investigación es relevante y pertinente. Relevante porque en el Perú, no existen investigaciones en Didáctica de la Matemática acerca del concepto del VA y también, porque en nuestra experiencia como docente en la Educación Básica Regular (EBR) y en el nivel universitario, observamos que los alumnos del primer ciclo del nivel universitario, muestran de manera significativa algunas barreras para un aprendizaje posterior sobre este tema. Y pertinente, porque permite una interpretación consistente del concepto del VA.

Muchos investigadores manifiestan que el concepto del valor absoluto presenta dificultades en su aprendizaje, así tenemos los estudios realizados por: Arcidiacono (1983) con el análisis gráfico del VA; Chiarugi, Fracassina y Furinghetti (1990) mediante el estudio de la dimensión cognitiva del VA; Gagatsis y Thomaidis (1994) mediante el proceso evolutivo del VA; Horak (1994) que investiga sobre el uso de calculadoras gráficas en el concepto del VA; Perrin-Glorian (1995) con la institucionalización del saber del VA (citados en Wilhelmi, 2007); Cerizola (2005) y Contreras (2006) el concepto del VA como una noción básica de la Matemática, entre otros.

Se cree conveniente en este estudio considerar no solo las dificultades sino también identificar y clasificar los errores, las dificultades y obstáculos que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del valor absoluto, tomando en cuenta las definiciones que propone el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS).

1.3 Preguntas de investigación

De acuerdo con lo expuesto, planteamos las siguientes preguntas de investigación:

1.4.1 ¿Qué errores, dificultades y obstáculos didácticos se presentan en la enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto?

1.4.2 ¿Cómo utilizar los criterios de idoneidad para guiar el diseño de tareas sobre el valor absoluto que permitan superar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos identificados?

1.4 Delimitación del problema de investigación

Se considera necesario buscar modelos adecuados (esquemas y procesos) para abordar los estados de nuestro objeto matemático (VA), influenciados en "el pensamiento matemático flexible; tránsito rutinario entre diferentes modelos asociados a un modelo matemático y el holo-significado; que resulta de la coordinación del significado atribuido a dichos modelos y a las tensiones, filiaciones, y contradicciones que entre ellos se establecen" (Wilhelmi, 2007, p.18).

En esta investigación, con la finalidad de que un sujeto comprenda el concepto del VA, es decir sea competente en las prácticas matemáticas que realice con este objeto matemático, se pretende enfocar dicho concepto, en primer lugar, identificando y clasificando los errores, dificultades y obstáculos didácticos desde cierto enfoque (EOS). Para ello, mediante la observación de la clase del profesor y de la prueba diagnóstica sobre el concepto del valor absoluto que tienen los alumnos, tomando en cuenta los criterios de idoneidad didáctica. En segundo lugar, se busca diseñar una secuencia de actividades didácticas que tenga en cuenta las dimensiones epistémica (campo de aplicabilidad de las técnicas y objetos involucrados), cognitiva (conocimientos previos de los individuos) y mediacional (cantidad de recursos materiales y de tiempo necesarios para su enseñanza) con el propósito de lograr una "eficacia didáctica" en los alumnos del primer ciclo del nivel universitario.

1.5 Objetivos generales y objetivos específicos

Los objetivos generales y los específicos tratan de responder a las preguntas de investigación, tomando como contexto de estudio, el primer ciclo 2012 de la escuela de Ingeniería de Sistemas en la Universidad Privada Telesup.

Objetivo general 1

1.5.1 Identificar y analizar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto.

Objetivos específicos

1.5.1.1 Revisar la literatura para indagar sobre los diferentes usos o significados del concepto del valor absoluto y su evolución a través de la historia.

1.5.1.2 Identificar y clasificar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos de los estudiantes a través de una prueba diagnóstica sobre la noción del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica.

1.5.1.3 Explicar la aparición de los errores, las dificultades y los obstáculos de los estudiantes en el aprendizaje del concepto del VA en función del análisis de la clase, tomando en cuenta la observación de la clase del profesor y los resultados de la prueba diagnóstica.

Objetivo general 2

1.5.2 Tratar de superar los errores, las dificultades y los obstáculos en los diferentes usos del concepto del valor absoluto de los profesores del nivel superior, a través del diseño de una secuencia de tareas didácticas en las que se traten los diversos significados o usos del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

Objetivos específicos

1.5.2.1 Determinar los significados de referencia y pretendido (elaboración de configuraciones epistémicas) del objeto valor absoluto, encontrados en algunos de los textos más usados de matemática básica del nivel superior, para identificar los diferentes tratamientos y/o usos del concepto del valor absoluto que son aplicados por profesores del nivel superior.

1.5.2.2 Organizar una secuencia de tareas (con los diferentes usos del concepto del VA) tomando en cuenta algunos de los criterios de idoneidad didácticos: epistémico, cognitivo y mediacional del EOS, para ayudar a superar los errores, las dificultades y los obstáculos en los diferentes usos del concepto del valor absoluto en los profesores del nivel superior.

El presente trabajo de investigación fue realizado bajo la perspectiva del enfoque ontosemiótico de instrucción y cognición matemática (EOS), porque dicho enfoque permite describir, explicar y analizar lo que ocurre en una clase de matemática y en particular, cuando en ella se estudia el valor absoluto. En un primer momento se trató de identificar y clasificar los obstáculos didácticos (ontológicos, epistemológicos o instruccionales) sobre la noción de valor absoluto en los alumnos del primer ciclo del nivel universitario, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica. Luego de analizar la clase del profesor mediante los criterios de idoneidad del EOS (capítulo 4) se observó que el profesor es el que no maneja los diferentes usos del valor absoluto (sistemas de prácticas). En ese momento, la investigación dio un giro, ya no se continuó estudiando a los alumnos sino a los profesores y la noción que éstos últimos tenían acerca de los usos del valor absoluto.

La metodología empleada es cualitativa, se trata de un estudio de casos. Los sujetos de estudio fueron tres profesores licenciados en matemáticas, de la universidad Privada Telesup y un profesor licenciado en matemáticas del Instituto Superior Tecnológico Público Chancay. Haciendo uso de las herramientas del EOS se analizan algunos aspectos de la idoneidad didáctica; como la idoneidad epistémica (relacionado con el contenido matemático), la idoneidad cognitiva (para valorar antes de iniciar el proceso de instrucción), la idoneidad mediacional (para valorar la adecuación de los recursos materiales) y la idoneidad interaccional (para ver el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje).

1.6 Justificación del problema de investigación

Las investigaciones que estudian el concepto del VA (Arcidiacono, 1983; Chiarugi, Fracassina y Furinghetti 1990; Gagatasis y Thomaidis, 1994; Horak, 1994; Perrin-Glorian, 1995; Contreras, 2006; Wilhelmi, 2007) las realizan de manera parcial, trabajando solamente uno o dos contextos en los cuales se usa dicho objeto matemático. En esta investigación, después de analizar los diferentes contextos en los cuales se usa el concepto del VA y las dificultades presentadas en su aprendizaje, tipificamos los errores, dificultades y obstáculos, según el EOS y proponemos una secuencia de tareas que ayude a superarlos.

Esta propuesta de tareas, guiadas por criterios de idoneidad, puede servir al profesorado en los diferentes niveles de educación para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del VA.

Esta investigación fue posible gracias a que la institución dio las facilidades para la realización de este estudio y a los aportes de los sujetos de estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Resumen

Este capítulo en la sección 2.1 presenta el enfoque ontosemiótico desarrollado, entre otros, por Godino, Batanero y Font a inicios de los años 90. El EOS (enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática) es un conjunto de nociones teóricas que se clasifican en cinco grupos: la noción de sistemas de prácticas, la noción de configuración de objetos y procesos matemáticos, la noción de configuraciones y trayectorias didácticas, la noción de dimensión normativa y por último la noción de idoneidad didáctica, en nuestra investigación se pondrá énfasis en ésta quinta noción teórica porque nos servirá como guía para analizar la clase de un profesor ; en la sección 2.2 se explica el análisis didáctico desde el punto de vista del EOS; se han propuesto y desarrollado cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio: análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas, elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, identificación del sistema de normas y metanormas (dimensión normativa) y la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio; en la sección 2.3 se presenta los criterios de idoneidad de un proceso de instrucción: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad emocional e idoneidad ecológica; en la sección 2.4 se explica los conceptos de errores, dificultades y obstáculos; en la sección 2.5 se presenta la metodología de la investigación la cual contiene 6 fases: planteamiento del problema, marco teórico, formulación de objetivos y diseño metodológico, aportes teóricos, diseño e implementación de los experimentos de enseñanza y finalmente las conclusiones; en la sección 2.6 se presenta el objeto matemático: valor absoluto, la revisión histórica-epistemológica del valor absoluto, con la finalidad de identificar el proceso evolutivo del concepto del valor absoluto según la función que desempeña dentro de la práctica matemática; finalmente se presentan los significados de referencia y pretendidos en las secciones 2.7 y 2.8 respectivamente.

2.1 El Enfoque Ontosemiótico

El marco teórico para el presente trabajo es fundamentalmente el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) que ha sido desarrollado, entre otros, por Godino, Batanero y Font (2009).

2.1.1 Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

Godino y Batanero (1994) consideran práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.

Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

Según Faerna (1996), con esta formulación del significado el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista: "las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción" (p. 14).

La relatividad socio-epistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la figura 1 (Godino, 2009).

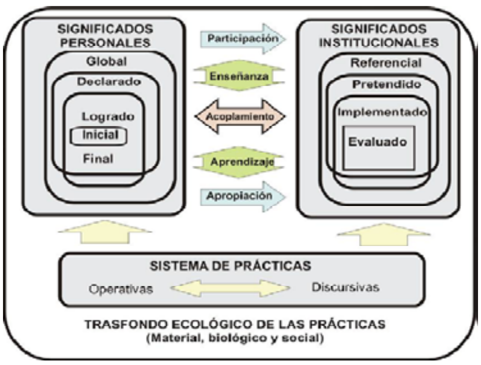


Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales

2.1.2 Emergencia de los objetos matemáticos

En el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas, es decir, se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel están aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel se encuentra una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. Sobre los objetos del nivel anterior; se refieren a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc. (Godino, 2009, p.6).

2.1.2.1 Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Godino (2009) plantea que para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la Figura 2.

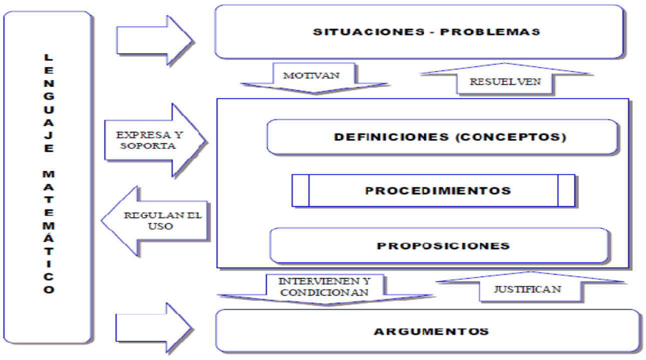


Figura 2. Configuración de objetos primarios (Font , 2006, p. 69)

Font y Godino (2006) proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...).

- Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)

- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)

- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)

- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)

- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, ...

2.1.2.2 Segundo nivel: Atributos contextuales

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002).

En Godino (2009), se encontró lo siguiente:

Personal – institucional. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338).

La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

Ostensivo – no ostensivo. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva(no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …).

De la misma manera Godino (2009), acerca de los atributos contextuales señala:

Expresión – contenido: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.

La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo). Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica (Otte, 2003, p. 187).

Unitario – sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

Según Godino (2009), en el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales, lo cual nos lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: personal-institucional, unitario-sistémico, intenso-extensivo, expresión-contenido y ostensivo-no ostensivo (pp.8-9).

2.1.2.3 Procesos

Las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos indicados en la figura 3. La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación.

Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización–personalización; generalización – particularización; análisis/ descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

Font y Contreras (2008), consideran que las facetas duales; extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico, permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del “objeto matemático” usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

Para Godino (2009), en el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio, procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor "tiempo" y, en menor medida, el de "secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente". Por tanto, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los incluidos en la figura 3), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc. (pp. 9-10). La configuración de objetos y procesos se muestran en la figura 3.

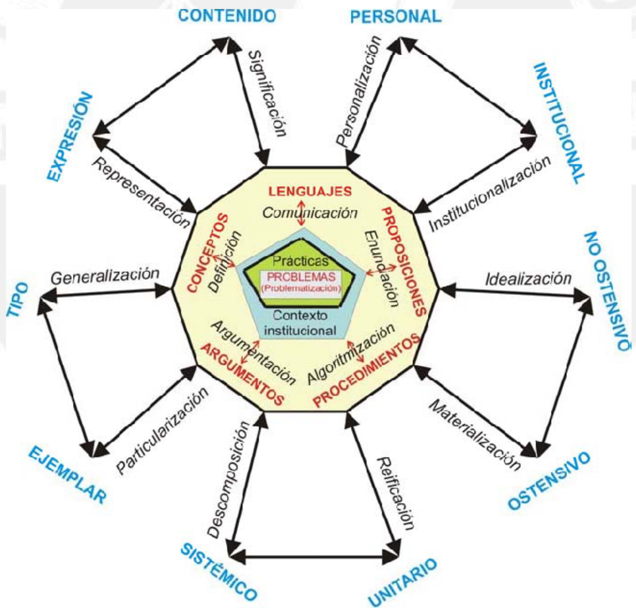


Figura 3. Configuración de objetos y procesos (Godino, 2009, p. 6)

2.1.3 Comprensión y conocimiento en el EOS

En Godino (2009) se considera básicamente que hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia. Estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas).

El autor menciona que, “hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo” (pp.10-11).

2.1.4 Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos

Para Godino (2009), el modelo teórico sobre la cognición puede ser aplicado de manera más general a otros campos del saber, en particular a los saberes didácticos. En este caso los problemas tendrán una naturaleza distinta:

- ¿Qué contenido enseñar en cada contexto y circunstancia?

- ¿Cómo distribuir en el tiempo los distintos componentes y facetas del contenido a enseñar?

- ¿Qué modelo de proceso de estudio implementar en cada circunstancia?

- ¿Cómo planificar, controlar y evaluar el proceso de estudio y aprendizaje?

- ¿Qué factores condicionan el estudio y el aprendizaje?, etc.

En este caso, las acciones (prácticas didácticas) que se pongan en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

Godino, Contreras y Font (2006), en la Teoría de las Configuraciones Didácticas, consideran que se modelizan la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas (Figura 4).

Una configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, esto es, una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una configuración instruccional constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada.

La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las *configuraciones cognitivas*, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.(pp.12-13). La figura 4 muestra las interacciones didácticas.

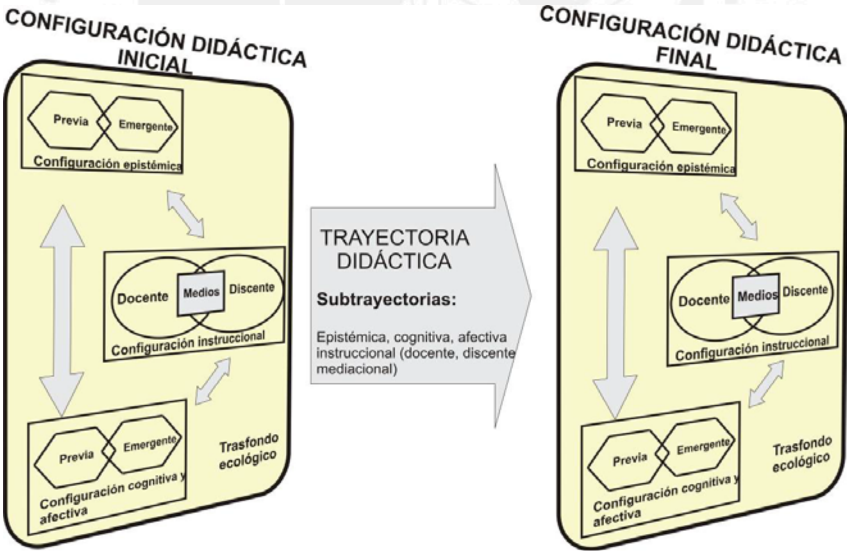


Figura 4: Interacciones didácticas (Godino, 2009, p. 13)

2.1.5 Dimensión normativa

Godino (2009), señala que el tema de las normas ha sido objeto de investigación en Didáctica de las Matemáticas, principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969), introduciendo nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas. La noción de contrato didáctico ha sido desarrollada por Brousseau (1998) en diversos trabajos constituyendo una pieza clave en la Teoría de Situaciones Didácticas. En ambos casos, se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como "microsociedad", que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. El foco de atención, en estas aproximaciones, ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos. En el caso del valor absoluto cuando se analizan las siguientes expresiones: $|x| = x$ ó $|x| = -x$, para los estudiantes, x, es un número positivo siempre, porque como norma matemática se les ha enseñado que los números negativos llevan un signo "–" delante de éste y al no tenerlo, piensan que x es positivo, sin darse cuenta que x es una variable que toma como valores también los números negativos.

Menciona el autor que tanto el "contrato interaccionista", como el "brouseauniano", constituyen visiones parciales del complejo sistema de normas sobre las cuales se apoyan - y al mismo tiempo restringen - la educación en general y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular.

Según Godino (2009), la identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas, y su tipología, que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.

- Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos (pp.13-14). La figura 5 muestra los tipos de normas según el EOS.

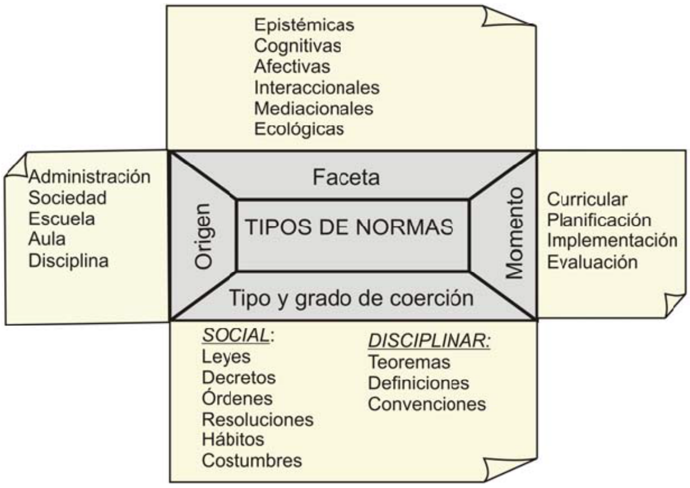


Figura 5: Dimensión normativa. Tipos de normas (Godino, 2009, p. 14)

2.2 Análisis didáctico desde el punto de vista del EOS.

Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático

Godino (2009), acerca de los niveles de análisis didáctico, señala que en diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico (D'Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Font y Godino, 2006; Font, Godino y Contreras, 2008; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhemi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009; Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009) se han propuesto y desarrollado cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos);

2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;

3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;

4) Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El nivel 4 se propone para integrar (Font y Planas, 2008) aspectos de análisis de normas sociomatemáticas desarrollados por enfoques socioculturales en educación matemática (Civil y Planas, 2004; Cobb y McClain, 2006; Stephan, Cobb y Gravemeijer, 2003; Yackel y Cobb, 1996).

El primer nivel de análisis, según Godino (2009), se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas; su finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

Para Godino (2009), dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis didáctico debiera progresar desde la situación – problema y de las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (análisis 1) a las configuraciones de objetos (epistémicas / cognitivas) y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (análisis 2) hacia el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, lo cual constituye un tercer nivel o tipo de análisis didáctico orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas).

Las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas están condicionadas y soportadas por una compleja trama de normas y metanormas, (D’Amore, Font y Godino, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (niveles 1 y 2 de análisis), sino que también regulan otras dimensiones de los procesos de estudio (cognitiva, afectiva, etc.).

El cuarto nivel de análisis considerado en el EOS pretende estudiar esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio. Este nivel es el resultado de tener en cuenta los fenómenos de índole social que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Godino (2009), considera que los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva – explicativa, es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo aquí y por qué? Sin embargo, la Didáctica de la Matemática no debería limitarse a la mera descripción que lo deja todo como estaba, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Por tanto, son necesarios criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora. Se trata de realizar una acción o meta-acción para ser más precisos (la valoración) que recae sobre otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción).

Para ello, ha de considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.

En consecuencia, se considera necesario aplicar un quinto nivel de análisis a los procesos de estudio matemático centrado en la valoración de su idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Dicho análisis se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

En el presente trabajo de investigación utilizaremos los siguientes niveles:

Nivel 1: Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos) para elaborar nuestra propuesta de diseño de tareas.

Nivel 2: Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos para elaborar las configuraciones epistémicas de los textos del nivel superior.

Nivel 5: Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Para analizar la clase del profesor.

2.3 Criterios de Idoneidad de un proceso de instrucción.

En Godino (2009), se encuentra que las nociones teóricas precedentes se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

-Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad).

-Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados. Un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva sería, en el estudio las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor realizara una evaluación inicial para saber si la mayoría de los alumnos dominan los números de uno y dos cifras y, en caso de no ser así, comenzara el proceso de instrucción trabajando dichos números.

-Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo con una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1998) tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes.

-Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor y los alumnos tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Geogebra, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.

-Idoneidad emocional, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Por ejemplo, tendrán idoneidad emocional alta los procesos basados en el uso de situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.

- Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Los autores mencionan que se puede deducir de los ejemplos propuestos y que la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005). Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

Godino (2009), señala que el logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo, la epistémica, puede requerir unas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc. La figura 6 muestra los componentes de la idoneidad didáctica.

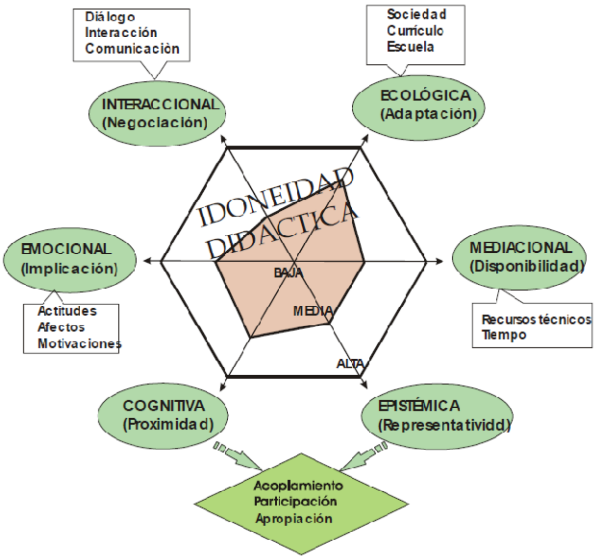


Figura 6: Componentes de la idoneidad didáctica (Godino, 2009, p. 16)

En el presente trabajo de investigación, se abordan tres aspectos de la Idoneidad Didáctica la dimensión epistémica (representatividad), la dimensión cognitiva (proximidad) y la dimensión mediacional (disponibilidad, recursos técnicos y tiempo).

La Idoneidad Epistémica: Para ver si las matemáticas que se enseñan son las adecuadas (buenas matemáticas). La enseñanza del concepto de valor absoluto en la educación universitaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad) o una secuencia de actividades didácticas teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica sobre la noción de valor absoluto, con la finalidad de poder superar los obstáculos didácticos encontrados (alta idoneidad).

La Idoneidad Cognitiva: para valorar antes de iniciar el proceso de instrucción y observar cuan cercano está el estudiante de la zona del desarrollo próximo. Realizar una evaluación inicial para saber si la mayoría de los alumnos dominan la noción de valor absoluto y en caso de no ser así, comenzar el proceso de instrucción trabajando con los diferentes modelos (distancia, reflexión y gráfica, función a trozos, contextualización) referidos a la noción de valor absoluto, lo cual sería en el proceso de enseñanza aprendizaje, un alto grado de Idoneidad Cognitiva.

La Idoneidad Mediacional: para valorar la adecuación de recursos materiales. El uso de medios y materiales informáticos pertinentes para el estudio del concepto de valor absoluto, como (Geogebra, Winplot, Matlab, etc.) de tal manera que se tendría potencialmente mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo una clase magistral, donde se reproduzca de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado del concepto de valor absoluto proporcionaría potencialmente mayor idoneidad mediacional.

2.4 Errores, Dificultades y Obstáculos

2.4.1 Error y Dificultad

De acuerdo a Font (2013), se considera *error* cuando el alumno realiza una práctica matemática que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. De la misma manera, señala que una dificultad, indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado, se dice que la dificultad es alta; mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

Además señala que todas las teorías sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar sus orígenes y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información.

En Font (2013), se hace la siguiente clasificación de las causas que producen las dificultades relacionadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

1) Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos.

El elevado grado de abstracción y generalización es una de las características específicas de los contenidos matemáticos y una de las posibles causas de las dificultades que presenta su aprendizaje. Este tipo de dificultades son inherentes a las matemáticas (complejidad semiótica).

Un estudio epistemológico del contenido que se quiere enseñar, así como un estudio histórico de cómo la sociedad ha construido este conocimiento pueden dar una idea del grado de dificultad potencial de aquello que se quiere enseñar.

2) Dificultades causadas por secuencias de actividades que no son potencialmente significativas.

Se puede dar el caso de que la propuesta de actividades que presenta el profesor a los alumnos no sea potencialmente significativa, por diferentes causas:

a) cuando el profesorado no tiene los contenidos que quiere enseñar bien estructurados,

b) cuando los materiales que se han escogido, como por ejemplo los libros de texto, no son claros -ejercicios y problemas confusos, mal graduados, rutinarios y repetitivos, errores de edición, etc.-,

c) cuando la presentación del tema que hace el profesorado no es clara ni está bien organizada -no se le entiende cuando habla, habla demasiado rápido, la utilización de la pizarra es caótica, no pone suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.-.

Este tipo de dificultades son inherentes al profesorado. La posible solución de estas dificultades está relacionada con la formación inicial y permanente.

3) Dificultades que se originan en la organización del centro.

Muchas veces el horario del curso es muy inapropiado, el número de alumnos es demasiado grande, no se puede utilizar el aula de informática, etc.

Este tipo de dificultades están relacionadas con la organización del centro. La solución a este tipo de dificultad pasa por una reorganización del centro, ratio del número de alumnos, organización del área, organización del aula, etc.

4) Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado.

Puede pasar que las actividades propuestas por el profesorado a los alumnos sean potencialmente significativas y que la metodología sea la adecuada, pero que el alumnado no esté en condiciones de hacerlas suyas porque no está motivado.

Este tipo de dificultad está relacionada con la autoestima y la historia escolar del alumnado.

5) Dificultades relacionadas con las discapacidades o bajo nivel de desarrollo psicológico de los alumnos.

En el caso de que se consiga poner al alumno en situación de desequilibrio a causa de un conflicto cognitivo, puede pasar que no esté en condiciones de volver a la situación de equilibrio porque su nivel de desarrollo psicológico o bien algún tipo de discapacidad impide el aprendizaje del contenido.

Este tipo de dificultad se ha de resolver con una adaptación de los contenidos y de la metodología a la situación de cada alumno.

6) Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores.

Puede pasar que el alumno, a pesar de tener un nivel evolutivo adecuado, no tenga los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido, y, por tanto, la distancia entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno no es la adecuada. La evaluación inicial puede detectar los contenidos previos que hay que adquirir para conseguir el aprendizaje del contenido previsto.

7) Dificultades relacionadas con los significados personales de los alumnos.

Puede pasar que los significados personales desarrollados por los alumnos posibiliten prácticas que sean consideradas un obstáculo por la institución escolar, las cuales no permitan volver a la situación de equilibrio.

Esta dificultad se puede resolver utilizando una evaluación formadora, que permita superar estos obstáculos haciendo las situaciones suficientemente complejas para que el alumno sea consciente de que determinadas prácticas sólo son válidas en determinados contextos.

Según Font (2013), estos siete grupos de dificultades están conectados entre sí y se refuerzan mutuamente.

En nuestro trabajo de investigación los conceptos de error, dificultad y obstáculo se utilizarán para clasificar las preguntas de los cuestionarios.

2.4.2 Obstáculos

De acuerdo a Font (2013), el concepto de obstáculo fue introducido por Bachelard (1972) y fue trasladado al campo de la didáctica de las matemáticas por Brousseau (1983), que le dio un sentido muy determinado. Para poder hablar de obstáculo, según Brousseau, se deben de cumplir las siguientes condiciones:

1) Un obstáculo es un conocimiento. Por tanto, no es una falta de conocimiento.

2) El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas correctas en determinadas situaciones que halla con cierta frecuencia.

3) Cuando se utiliza este conocimiento en otro contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.

4) El alumno se resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al cambio del conocimiento antiguo por uno nuevo.

5) A pesar de que el alumno es consciente de las limitaciones del conocimiento-obstáculo, lo continúa manifestando esporádicamente.

Brousseau (1983) considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser:

1) De origen ontogénico o psicogenético, causados por el desarrollo del alumnado.

2) De origen didáctico, provocados por las elecciones didácticas que se han hecho para diseñar la situación didáctica.

3) De origen epistemológico, intrínsecamente relacionados con el contenido matemático. Se pueden hallar en la historia de los contenidos, aunque no es necesario reproducir en el aula las condiciones históricas que permitieron superarlos.

La noción de obstáculo, y muy especialmente la noción de obstáculo epistemológico, no es muy clara y ha generado controversia (Artigue, 1990).

Font (2013) opina que es más útil situar al obstáculo, la dificultad y el error claramente en el campo de las prácticas. Por lo tanto, *un error es una práctica personal no válida desde el punto de vista de la institución.* Desde esta perspectiva no se puede hablar de la superación de un obstáculo, en el sentido de eliminar prácticas que en determinados contextos son válidas. Por superación de un obstáculo hemos de entender: conseguir un significado personal del alumno suficientemente rico, de manera que la práctica adecuada a un determinado contexto no se manifieste en otro contexto en el que no es válida.

2.5 Metodología de la Investigación

El propósito fundamental de esta investigación es identificar y analizar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos que aparecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del VA. Además, se pretende superar estos errores, dificultades y obstáculos que presentan los profesores del nivel superior de la institución en estudio, a través del diseño de una secuencia de tareas didácticas en las que se traten los diversos significados o usos del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

La presente investigación obedece a un estudio de caso, que, según Hernández, Fernández y Baptista (2010) "son estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta, analizan profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar alguna teoría" (p. 163). Esta investigación se enmarca como una de tipo cualitativa en la que se describirán y explicarán los errores, las dificultades y los obstáculos en la enseñanza y el aprendizaje del concepto del valor absoluto de los sujetos de estudio.

La muestra de los sujetos de estudio es intencional en esta investigación.

2.5.1 Contexto y sujetos de estudio

Contexto

La institución donde se realizó esta investigación es una universidad privada de Lima que tiene aproximadamente 10 años de fundada. Las clases que se imparten en los cursos de matemáticas de la Escuela de Ingeniería de Sistemas, donde se tomaron tanto las muestras de alumnos como de profesores, en la mayoría de los casos son clases expositivas. Los profesores desarrollan las sumillas que propone la escuela con relación a los cursos de matemáticas. Esta institución queda localizada en el centro de la ciudad de Lima.

Los sujetos de estudio considerados en esta investigación fueron alumnos y profesores del primer ciclo 2012 de la Escuela de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Privada Telesup. A continuación los describimos:

Alumnos

Los participantes fueron 37 estudiantes que cursaban su primer semestre académico en la escuela de Ingeniería de Sistemas, del curso de Matemática Básica. Las edades de los estudiantes oscilaban entre los 17 y 32 años, los cuales provenían de los sectores C y D, cono Norte y Cono Este, en su mayoría muy pocos del Cono Sur de Lima. La gran mayoría provenía de Instituciones Educativas Públicas. Dos de ellos ya habían estudiado en otras universidades privadas.

Profesores

De los cinco profesores que enseñaban el curso en la Universidad Privada Telesup, del primer ciclo 2012, solo fueron sujetos de estudio tres. Todos los profesores sujetos de estudio son licenciados en matemáticas, dos de ellos con más de 5 años de experiencia y el tercero con 3 años de experiencia, enseñaban el curso de matemáticas en la universidad. Además, un profesor de un Instituto público, que es licenciado en matemática y computación, con más de 10 años de experiencia, también fue entrevistado. Todos los profesores tenían más de 40 años de edad y habían estudiado todos ellos en universidades públicas del Perú.

2.5.2 Fases de la investigación

En esta tesis se consideran seis fases de investigación: Planteamiento del problema de investigación, relevancia y objetivos de la investigación; presentación del marco teórico y metodológico; análisis de los objetos matemáticos; análisis de los errores, dificultades y obstáculos acerca del concepto del valor absoluto; diseño de sesiones de clases y las conclusiones. Cada una de las cuales permitió atender al problema y a los objetivos planteados.

Fase 1. Planteamiento del problema de investigación, relevancia y objetivos de la investigación

En el capítulo 1 se presenta la justificación y la relevancia del problema de investigación, se detallan algunas investigaciones realizadas a lo largo de la historia acerca del concepto del valor absoluto, se explica la delimitación del problema de investigación, se presenta el problema de investigación, se plantean las preguntas de investigación con las que se pretende dar solución al problema de investigación.

Fase 2. Presentación del marco teórico y metodológico

En el capítulo 2 se presenta el enfoque ontosemiótico y sus nociones teóricas, se explica el análisis didáctico desde el punto de vista del EOS, se presenta los criterios de idoneidad de un proceso de instrucción, se plantea la revisión histórica-epistemológica del valor absoluto, se explica los conceptos de errores, dificultades y obstáculos, luego se finaliza ésta fase con el objeto matemático de nuestra investigación: el valor absoluto.

Para lograr los objetivos planteados en este trabajo de investigación, se presentan los objetivos específicos con las acciones realizadas y los pasos por cada acción. A continuación se presenta la tabla 1, que describe las acciones tomadas en cuenta para cada objetivo general.

Objetivo general 1

1.5.1 Identificar y analizar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos que aparecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ACCIONES POR OBJETIVO	PASOS POR CADA ACCIÓN
1.5.1.1Revisar la literatura para indagar sobre los diferentes usos o significados del concepto del valor absoluto y su evolución a través de la historia.	a) Análisis de los textos de matemáticas de nivel superior. b) Análisis de los artículos referidos al concepto del valor absoluto.	-Primero se buscaron y seleccionaron los textos de Matemática Básica del nivel superior. - Se hizo una búsqueda virtual en las distintas bases de datos bibliográficos y en actas de congresos de Educación Matemática sobre el tema de valor absoluto.
1.5.1.2 Identificar y clasificar los errores, las dificultades y	a) Elaboración de la prueba diagnóstica para los alumnos del nivel superior	- En base a los artículos y textos analizados sobre investigaciones del valor absoluto y la noción del valor absoluto, respectivamente, se propusieron las preguntas para la

los obstáculos didácticos de los estudiantes a través de una prueba diagnóstica sobre la noción del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica.	b) Aplicación de la prueba diagnóstica.	prueba diagnóstica. - Se solicitó autorización al rector de la Universidad para la aplicación de la prueba y filmación de la clase impartida por el profesor del curso de Matemática Básica sobre el tema del valor absoluto.
1.5.1.3 Explicar la aparición de los errores, las dificultades y los obstáculos en función del análisis de la clase, tomando en cuenta la observación de la clase del profesor y los resultados de la prueba diagnóstica.	a) Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica. b) Observación y filmación de la clase impartida por el profesor. c) Aplicación del cuestionario para profesores	Para el análisis de los resultados de la prueba: - Se compararon las respuestas de los alumnos con el protocolo de respuesta elaborado por el investigador. -Se identificaron los errores cometidos por los alumnos. -Se determinaron las preguntas con mayor incidencia de errores (dificultades) -Se trataron de explicar el porqué de estos errores y dificultades. - Se aplicaron los indicadores de los criterios de Idoneidad del EOS. Para esta aplicación: -Se reformuló la prueba diagnóstica tomada a los alumnos de manera que

		no fuesen respuestas de opción múltiple sino preguntas abiertas de desarrollo.
	d) Análisis de la respuesta de los profesores al cuestionario.	- Se compararon las respuestas de los profesores con el protocolo de respuesta elaborado por el investigador.

Tabla 1. Acciones y pasos para lograr el objetivo general 1

Objetivo general 2

1.5.2 Tratar de superar los errores, las dificultades y los obstáculos del concepto del valor absoluto de los profesores del nivel superior, a través del diseño de una secuencia de tareas didácticas en las que se traten los diversos significados o usos del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ACCIONES POR OBJETIVO	PASOS POR CADA ACCIÓN
1.5.2.1 Determinar los significados de referencia y pretendido	a) Elaboración de las configuraciones epistémicas del objeto matemático valor absoluto.	- En base a la revisión de los textos y la identificación de los diversos usos del valor absoluto en los mismos, se elaboraron las configuraciones epistémicas.
1.5.2.2 Organizar una secuencia de tareas (con los diferentes usos de la NVA) tomando en cuenta algunos de los criterios de idoneidad	a) Identificación de los diferentes usos del objeto matemático Valor Absoluto b) Determinación del orden de cada sesión según la complejidad del objeto matemático Valor absoluto y conocimientos previos necesarios. c) elaboración de la	- Se tomó en cuenta el artículo de investigación de los contextos en el que se trabaja el valor absoluto. - Se tomaron en cuenta las configuraciones epistémicas del objeto matemático Valor Absoluto. - Se aplicó los indicadores de los

didácticos: epistémico	propuesta de tareas.	criterios de idoneidad del EOS.

Tabla 2. Acciones y pasos para lograr el objetivo general 2

Fase 3*. *Análisis de los objetos matemáticos

En el capítulo 3, el propósito de esta fase fue fijar el significado institucional pretendido. Se analiza la teoría trabajada sobre el concepto de valor absoluto en los textos universitarios, para luego presentar las configuraciones epistémicas emergentes de los textos de matemática del nivel superior, basadas en la "Algoritmización" y "La Distancia" donde aparece la noción del valor absoluto.

Con la finalidad de describir el significado de pretendido en nuestra investigación y considerando que los libros de texto son los más cercanos a los profesores de la institución en estudio, desarrollamos lo siguiente:

1. Consideramos algunos resultados de las investigaciones desarrolladas por Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) acerca del concepto del valor absoluto (significado de referencia).
2. Se seleccionaron los libros de texto extranjeros y nacionales para ser analizados. La elección de estos libros de texto se justifica en el capítulo 3.

3. Selección de aquellos capítulos donde se aborda el estudio del valor absoluto. Descripción de los elementos de significado encontrados en los textos (configuración epistémica: campo de problemas, lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos).
4. Se analizaron los contenidos respecto al concepto de valor absoluto en los libros de texto mencionados. Para su análisis, se consideró la estructura de los modelos (vectorial, métrica, aritmética, a trozos, máximo y composición) asociados a la noción del valor absoluto y los contextos (geométrico, topológico, aritmético y analítico) asociados a dichos modelos.
5. Se filmó al profesor (ver apéndice 5, de la transcripción de la clase del profesor) con el objetivo de conocer las creencias y concepciones de los profesores del curso respecto del valor absoluto.
6. Se entrevistó al profesor con el objetivo de conocer las creencias y concepciones de los profesores del curso respecto del valor absoluto.

Fase 4. Análisis de los errores, dificultades y obstáculos acerca del concepto del valor absoluto

En el capítulo 4, para el logro del objetivo 1.5.1 Identificar y analizar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos que aparecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto, nos basamos en la literatura revisada sobre los errores cometidos por los alumnos en el aprendizaje del concepto del valor absoluto para elaborar una prueba diagnóstica. Dicha prueba fue aplicada a 37 alumnos, el 2 de octubre del 2012 y tuvo una duración de 50 minutos.

El 11 de octubre del 2012 se observó la clase de un profesor durante dos horas (de igual manera con la finalidad de lograr el objetivo 1.5.1 antes mencionado) teniendo como guía de observación de clase, la tabla de criterios de idoneidad del EOS (ver apéndice 1); aplicada para el valor absoluto, para la valoración de la misma. Luego, se construyó un cuestionario que se aplicó el día 16 de octubre para corroborar el conocimiento de los alumnos sobre los diversos significados de referencia del valor absoluto.

Análisis de significados personales declarados: el análisis de las respuestas al cuestionario permitió caracterizar los elementos de significado puestos en juego por los alumnos. Dicha caracterización sirvió para describir el significado personal logrado y evaluar su comprensión sobre el objeto valor absoluto.

A continuación, se trianguló la información con una entrevista a los profesores. Finalmente se clasificaron los errores, dificultades y obstáculos presentados en los alumnos.

La técnica que se usó para este fin es la "Observación participante", y toda la información se recogió en las tablas (ver apéndices: 1, 2,3 y 4) diseñadas para tal fin.

Fase 5. Propuesta de tareas. Diseño de sesiones de clases

En el capítulo 5, Para el logro del objetivo 1.5.2 Diseñar una secuencia de tareas didácticas para los profesores del primer ciclo del nivel universitario, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS: epistémico, cognitivo y mediacional. En la que se traten los diversos significados o usos del valor absoluto, que podrían ayudar a superar dichos obstáculos.

Primero revisamos el significado de referencia (elaboración de configuraciones epistémicas) del objeto valor absoluto, encontrados en algunos de los textos más usados de matemática básica del nivel superior.

A continuación elaboramos las tareas tomando en cuenta los criterios de idoneidad didácticos: epistémico, cognitivo y mediacional del EOS para finalmente organizar las sesiones de clase.

Fase 6. Conclusiones

Se sintetiza el trabajo realizado retomando las preguntas y objetivos de esta investigación.

Con respecto a la implementación de la propuesta (diseño de tareas). Por cuestiones de tiempo esta propuesta no ha sido implementada, pero si ha sido elaborada siguiendo los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

2.6 El objeto matemático: valor absoluto

2.6.1 Revisión Histórica- Epistemológica del Valor Absoluto

Con la finalidad de conocer la evolución, usos y /o tratamientos del concepto del valor absoluto a través de la historia, se muestran diversas investigaciones que reflejan la importancia para el ámbito científico del concepto del valor absoluto como una noción básica de la matemática. Además, le servirá al profesor como referencia histórica en la sesión 1 de la propuesta del diseño de tareas (capítulo 5).

Wilhelmi (2007), hace un recorrido acerca del concepto del valor absoluto a lo largo de la historia y manifiesta que la enseñanza y el aprendizaje del concepto del valor absoluto son problemáticos . Es por eso que existen, según el autor, (…) diversas investigaciones que se han desarrollado, como las de (Gagatsis y Thomaidis,1994) la cual muestran una sucinta antropología del saber “valor absoluto” distinguiendo cuatro fases en el proceso evolutivo del concepto según la función que desempeña dentro de la práctica matemática:

1) Como instrumento para la resolución de problemas aritmético-algebraicos (Neper, Descartes, Newton, Euler); 2) como objeto justificativo-explicativo de la teoría algebraica y de la teoría de números (Lagrange, Gauss); 3) como instrumento formalizado para el ánalisis del álgebra de inecuaciones y del discurso analítico “$\varepsilon - \delta$” (Argand,Cauchy); y, por último, 4) como instrumento de desarrollo del análisis complejo (Weierstrass). Asimismo, determinan los procesos adaptativos del saber en la institución escolar griega e interpretan los errores de los estudiantes en términos de obstáculos epistemológicos (ligados al estudio histórico) y didácticos (relacionados con los procesos de transposición).

Desde una perspectiva profesional, Arcidiacono (1983) (citado en Wilhelmi, 2007) justifica una instrucción del concepto del VA basado en el análisis gráfico en el plano cartesiano de funciones lineales a trozos y Horak (1994) establece que las calculadoras gráficas representan un instrumento más eficaz que el lápiz y papel para llevar a cabo esta enseñanza. Estos argumentos nos han llevado a pensar que en la actualidad posiblemente en los textos y algunos docentes han dejado de lado el registro gráfico; es decir, no se recurre a la definición del valor absoluto como función, motivo por el cual, pondremos énfasis en éste aspecto basándonos en las ideas que proporciona la idoneidad mediacional del EOS, puntualmente en el uso de medios informáticos pertinentes (Geogebra,Cabri, Winplot, Matlab, etc).

Por otro lado, Chiarugi, Fracassina y Furinghetti (1990) (citado en Wilhelmi, 2007) realizan un estudio de la dimensión cognitiva de diferentes grupos de estudiantes enfrentados a la resolución de problemas que involucran al concepto de valor absoluto en diferentes contextos matemáticos (teoría de funciones, geometría), con ostensivos de distinta naturaleza (números concretos, parámetros) y con niveles de abstracción diferentes (manipulaciones concretas o simbólico literales). El estudio determina la necesidad de investigaciones que permitan superar los errores y falsas concepciones (misconceptions). Estas razones nos motivan a proponer en nuestras actividades (taller-módulo) acerca del valor absoluto, problemas al alcance de los estudiantes que no sean tan fáciles (donde el alumno no aprende nada) ni tan difíciles (que el alumno no pueda resolverlos y pierda el interés por el problema), para este estudio nos apoyaremos en la dimensión cognitiva de la idoneidad didáctica del EOS.

Por su parte, Perrin-Glorian (1995) (citado en Wilhelmi, 2007) establece ciertas directrices para la institucionalización (por parte del profesor) del saber del concepto del valor absoluto en los contextos aritmético y algebraico; así argumenta la función central de las decisiones didácticas del profesor en la construcción del VA, que deben tener en cuenta las restricciones cognitivas de los estudiantes y deben resaltar el papel instrumental del VA (en la formulación de funciones algebraicas, en la resolución de ecuaciones e inecuaciones, en la formalización del concepto de límite, etc.). Todas estas investigaciones consideran implícitamente que la naturaleza del VA es transparente (en el sentido de que no se desarrollan con cierta profundidad) representa entonces un objeto paradidáctico (Chevallard, 1985). Desde una perspectiva Ontológico y Semiótica de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, en prensa) es necesario teorizar la noción de significado en didáctica. Esta teorización se realiza mediante la noción de función semiótica y una ontología matemática asociada. El punto de partida es tratar de caracterizar la naturaleza y el significado de las nociones matemáticas; se parte de los elementos del discurso tecnológico (nociones, proposiciones, argumentos, etc.) y se concluye que su naturaleza es inescindible de los sistemas de prácticas y contextos de uso correspondientes.

Godino y Batanero (1998), definen la noción de “sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al campo de problemas en el que se pone en juego la noción” como el objeto primario de descripción del significado institucional y personal de las nociones matemáticas. Godino (2002), identifica el “sistema de prácticas” con el contenido que una institución asigna a un objeto matemático, estableciendo, por lo tanto, una correspondencia entre el sistema de prácticas (significado sistémico) y la expresión del objeto matemático. La descripción del significado de referencia de un objeto se presenta como un listado de objetos clasificados en seis categorías: problemas, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentos.

Wilhelmi, Lacasta y Godino (2004) señalan en qué forma estas descripciones del sistema de prácticas son insuficientes para la descripción de los significados institucionales de referencia y, para salvar esas deficiencias, introducen las nociones teóricas de modelo y de holo-significado de una noción matemática. Estas nociones nos permitirán estructurar en un complejo coherente las distintas definiciones del VA emergentes de diferentes subsistemas de prácticas en contextos de uso determinados y la descripción del significado del VA como "totalidad", extrayendo algunas conclusiones de orden macro y micro didáctico Wilhelmi (2007).

Basándonos en la dimensión epistémica de la idoneidad didáctica del EOS, en nuestra secuencia de tareas mencionaremos los diferentes modelos (vectorial, métrica, aritmética, a trozos, máximo, y composición) referidos a la noción de valor absoluto, con el objetivo de mostrar las diversas representaciones al estudiante y observar la naturaleza del concepto de valor absoluto.

2.6.2 Complejidad onto-semiótica del valor absoluto.

Wilhelmi (2004), sostiene que el matemático profesional identifica una misma estructura formal en la variedad de objetos y prácticas (operativas y discursivas); estructura que considera como el objeto matemático. Esta estructura formal representa la referencia implícita en la resolución de tipos de problemas asociados a la variedad de sistemas de prácticas y objetos emergentes en los distintos contextos de uso. La figura 8 de Wilhelmi (2007) muestra esquemáticamente la diversidad de objetos asociados al concepto del VA. Cada definición representa un objeto emergente de un sistema de prácticas en un determinado contexto de uso.

Ninguna definición puede ser privilegiada a priori. Cada binomio "objeto emergente-sistemas de prácticas" determinan un modelo del concepto del valor absoluto. El modelo es, según los autores, una forma coherente de estructurar los diferentes contextos de uso, las prácticas matemáticas relativas a los mismos y los objetos emergentes de tales prácticas, constituyendo una red o configuración epistémica local; asociada a un contexto de uso específico, (p.245).

La explicación del uso de los diferentes modelos asociados a la noción del valor absoluto de la figura 8 (red de significados) se desarrollarán en el capítulo 5.

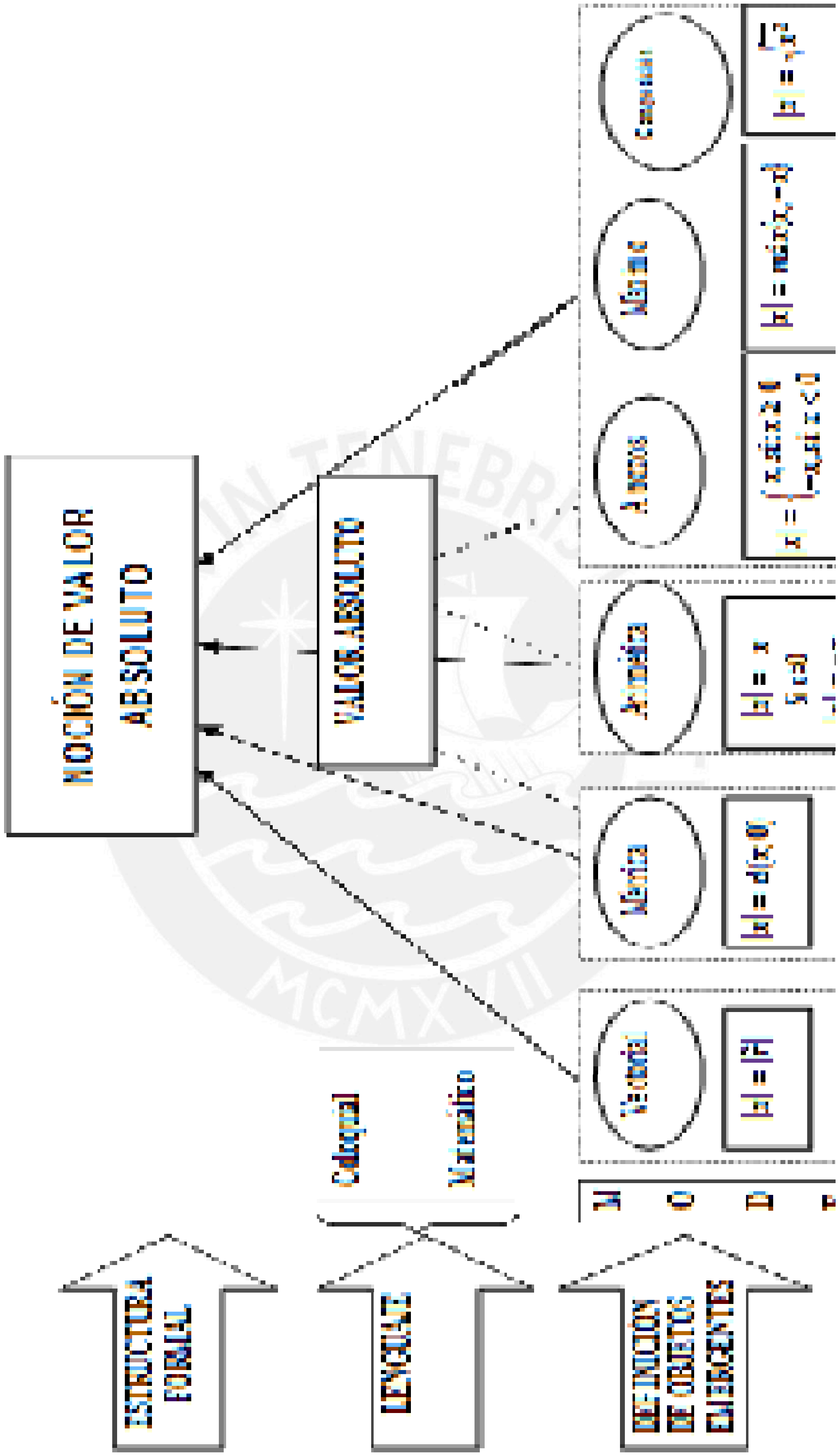


Figura 8. Adaptación de la estructuración de los modelos y significados asociados al valor absoluto de Wilhelmi (2007)

2.6.3 Holo-significado del concepto de valor absoluto

Wilhelmi (2007), sostiene que la definición de un objeto matemático constituye su significado. La descripción del sistema de modelos y significados asociados a una noción se obtiene por el enunciado y demostración de un teorema de caracterización: privilegio de una definición y justificación de la equivalencia (matemática) del resto de definiciones.

Los datos empíricos aportados por Leikin & Winicki – Landman (2000) (citado en Wilhelmi, 2007) permiten afirmar que la equivalencia de definiciones matemáticas no puede valorarse únicamente desde el punto de vista epistemológico, es necesario tener en cuenta las dimensiones *cognitiva* (¿Qué estrategias de acción genera cada una de las definiciones?), *instruccional* (¿Qué definición es más adecuada dentro de un proyecto determinado de enseñanza?) y *didáctica* (¿Qué relación se establece entre los significados personal aprendido e institucional pretendido?). “El *holo-significado* resulta de la coordinación del significado atribuido a los modelos asociados a la noción de igualdad y a las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen” (Wilhelmi et al., 2007, p. 246).

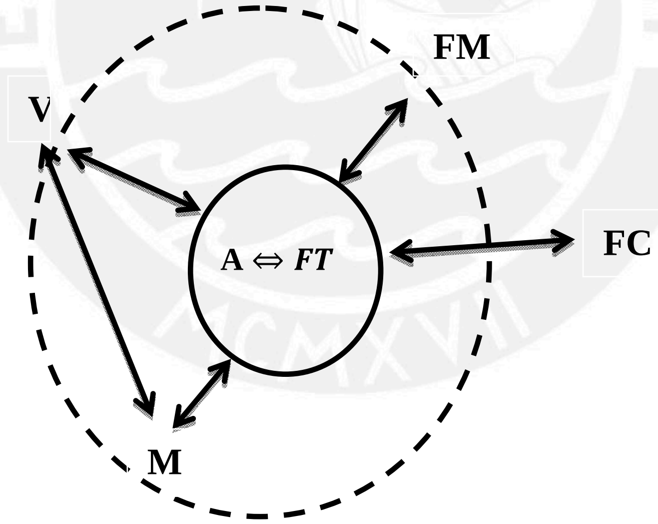


Figura 9. Representación del holo-significado del concepto de valor absoluto

A	Modelo aritmético
M	Modelo geométrico “métrico”
V	Modelo geométrico “vectorial”
FT	Modelo analítico “función a trozos”
FM	Modelo analítico “función máximo”

FC	Modelo analítico “función compuesta”

Las flechas en la figura 9, representan relaciones entre los diferentes modelos y la distancia obedece a la interacción entre los mismos. Por ejemplo, la relación que se establece entre los modelos analíticos “función a trozos” y “función máximo” puede ser comprendida como las acciones para la obtención de la gráfica valor absoluto, los vínculos con otros problemas “afines”, etc.; la distancia entre la “función a trozos” y “función compuesta ( )" representa la dificultad del reconocimiento del concepto valor absoluto dada por la función compuesta f y por la ausencia de una transposición didáctica que permita gestionar la equivalencia de ambas definiciones.(p. 246).

La relación que se establece entre el modelo analítico “función a trozos” y el modelo geométrico “métrico” puede ser entendida como las acciones para la obtención de la función valor absoluto a partir del valor absoluto de un número.

2.7 Significados de referencia

En Godino et al. (2009) encontramos que los significados de referencia son el sistema de prácticas que se usa para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

A continuación presentamos los artículos de Wilhelmi (2007) y textos de Lages (1997), Leithold (1998), Haaser (1973) y Taylor (1967) representan los significados de referencia, los cuales nos sirvieron de base para la elaboración de la prueba diagnóstica, cuestionarios y la secuencia de tareas de nuestro trabajo de investigación.

2.7.1 Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007), hacen un estudio de la eficacia didáctica de definiciones equivalentes de una noción matemática, en particular para el caso del valor absoluto. Las cuales citamos textualmente:

Definiciones del concepto de valor absoluto

En el contexto aritmético, el VA representa una regla que "deja los números positivos invariantes y pasa los números negativos a positivos".

"El valor absoluto de x, denotado por | *x* |, se define como sigue:

$|x| = x \quad si: x > 0$

$|x| = -x \quad si: x < 0$

$|0| = 0$

Así, el valor absoluto de un número positivo o cero es igual al mismo número. Para Leithold, (1968), "el valor absoluto de un número negativo es el número positivo correspondiente, puesto que el opuesto de un número negativo es positivo [...] Vemos de la definición que el valor absoluto de un número es un número positivo o cero, es decir, es no negativo" (p.10). En ocasiones, el valor absoluto como una regla de asignación de valores positivos a cualquier número real se sintetiza en dos subreglas (se asimila el valor 0 a los valores positivos, a los negativos o a ambos.

"Definición. Nosotros definimos $|a| = a \;\; si \;\; a \geq 0$ *y* $|a| = -a \;\; si \;\; a \leq 0$

$|a|$ se llama el valor absoluto de *a*.

Ross (1980), señala que el valor absoluto de *a* representa la distancia entre 0 y *a*, pero en realidad vamos a definir la idea de "distancia" en términos del "valor absoluto", que a su vez se define en términos de orden, p.16).

De esta forma, el valor absoluto dota al conjunto de los números reales de una métrica; la distancia de un número real *x* al origen *0* queda definida por la relación: $d(x; 0) = |x|$. Sin embargo, en muchos textos, la visión intuitiva de valor absoluto como distancia es aceptada como definición: $|x| := d(x; 0)$.

Para Courant y Robbins (1996), "la distancia de un punto *A*, desde el origen, considerado como positivo, se llama el valor absoluto de *A* y se indica mediante el símbolo | *A* | Es decir, si $A \geq 0$, se tiene $| A | = A$, *si* $A \leq 0$, tenemos que $| A | = -A$" (p.57).

El considerar la distancia como "positiva" supone, implícitamente la aceptación de que ésta puede ser considerada como "negativa" o, mejor, distinguir entre "magnitud" y "sentido" de esta magnitud.

"Las definiciones anteriores (distancia, regla que asocia a todo número real uno positivo, función a trozos, función máximo, etc.) son matemáticamente equivalentes, pero su uso condiciona la actividad matemática" (Wilhelmi et al., 2007, p.11).

2.7.2 Según la estructura de los modelos asociados a la noción del valor absoluto (ver figura 8), Lages (1997) utilizan en el libro "Análisis Real" Volumen 1, los modelos máximo y composición, aritmético, y métrica asociados a los contextos analítico, aritmético-topológico y topológico-geométrico respectivamente. En el capítulo 2, sobre los números reales, el autor en las páginas 18 y 19 presenta una definición sobre el valor absoluto, la cual citamos textualmente:

La relación de orden de $I\!R$ nos permite definir el valor absoluto (o módulo) de un número real $x \in I\!R$ como sigue: $|x| = x$ *si* $x > 0$, $|0| = 0$ *y* $|x| = -x$ *si* $x < 0$. Con otras palabras, $|x| = máx\ \{x, -x\}$ es el mayor de los números reales x y $-x$.

Se tiene $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in I\!R$. En efecto, la desigualdad $x \leq |x|$ es obvia, mientras que $-|x| \leq x$ resulta al multiplicar por -1 ambos miembros de la desigualdad $-x \leq |x|$. Así podemos caracterizar $|x|$ como el único número ≥ 0 cuyo cuadrado es x^2.

Teorema 1. Si $x, y \in I\!R$ entonces $|x+y| \leq |x|+|y|$ *y* $|x{\cdot}y| = |x|{\cdot}|y|$.

Demostración:
Sumando miembro a miembro las desigualdades $|x| \geq x$ *e* $|y| \geq y$ se tiene $|x| + |y| \geq x + y$. Análogamente, *de* $|x| \geq -x$ *y* $|y| \geq -y$ resulta $|x|+|y| \geq -(x+y)$. Luego $|x|+|y| \geq |x+y| = máx\ \{x + y , -(x + y)\}$. Para probar $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ es suficiente demostrar que estos dos números tienen el mismo cuadrado, pues ambos son ≥ 0. Ahora bien, el cuadrado de $|x{\cdot}y|$ *es* $(x{\cdot}y)^2 = x^2 . y^2$, mientras que $(|x| \cdot |y|)^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = x^2 \cdot y^2$.

Teorema 2. Sean $a, x, \delta \in R$. Se tiene $|x - a| < \delta$ si, y sólo si, $a - \delta < x < a + \delta$.

Demostración:

Como $|x-a|$ es el mayor de los dos números $x-a$ y $-(x-a)$, afirmar que $|x-a| < \delta$ es equivalente a decir que se tiene $x-a < \delta$ y $-(x-a) < \delta$, o sea, $x-a < \delta$ y $x-a > -\delta$. Al sumar a se concluye: $|x-a| < \delta \Leftrightarrow x < a+\delta$ y $x > a-\delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$.

De modo análogo se puede ver que $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow a - \delta \leq x \leq a + \delta$.

Usaremos la siguiente notación para representar tipos especiales de conjuntos de números reales, llamados intervalos:

$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$	$(-\infty, b] = \{x \in I\!R: x \leq b\}$
$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$	$(-\infty, b) = \{x \in I\!R: x < b\}$
$[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$	$[a,\infty) = \{x \in I\!R: a \leq x\}$
$(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$	$(a,+\infty) = \{x \in I\!R: a < x\}$
	$(-\infty,+\infty) = I\!R$

Los cuatro intervalos de la izquierda están acotados, sus extremos son a, b; $[a, b]$ es un intervalo cerrado, (a, b) es abierto, $[a, b)$ es cerrado por la izquierda y $(a, b]$ cerrado por la derecha. Los cinco intervalos a la derecha son no acotados: $(-\infty, b]$ es la semirrecta cerrada a la derecha con origen en b. Los demás tienen denominaciones análogas. Cuando $a = b$, el intervalo $[a, b]$ se reduce a un único elemento y se llama intervalo degenerado.

En términos de intervalos, el Teorema 2 afirma que $|x - a| < \delta$ si, y sólo si, x pertenece al intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$. Análogamente, $|x - a| \leq \delta \Leftrightarrow x \in [a - \delta, a + \delta]$.

Es muy útil imaginar el conjunto $I\!R$ como una recta (la “recta real”) y los números reales como sus puntos. Entonces la relación $x < y$ significa que el punto x está a la izquierda de y (e y a la derecha de x), algunos intervalos son segmentos de la recta y $|x-y|$ es la distancia del punto x al punto y. Así, el significado del Teorema 2 es que el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ está formado por los puntos que distan menos que δ del punto a. Tales interpretaciones geométricas constituyen un valioso auxilio para comprender los conceptos y teoremas del Análisis Matemático.

2.7.3 Según la estructura de los modelos asociados a la noción del valor absoluto (ver figura 8), Leithold (1998), utiliza en su libro "El Cálculo", los modelos a trozos y métrica asociados a los contextos analítico y topológico-geométrico respectivamente. En el Apéndice A1, sobre números reales y desigualdades, en la página 1145, presenta la siguiente definición sobre el valor absoluto, la cual citamos textualmente:

Definición del valor absoluto:

Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, es a si a es no negativo, y es $-a$ si a es negativo. Con símbolos se escribe:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo ilustrativo 5: Si en la definición anterior se toma a como 6, 0 y -6, se tiene, respectivamente, $|6| = 6$ $\quad |0| = 0$ $\qquad |-6| = -(-6) = 6$

El valor absoluto de un número puede considerarse como su distancia (sin tener en cuenta el sentido, a la derecha o a la izquierda) desde el origen. En particular, los puntos 6 y -6 están cada uno a seis unidades del origen.

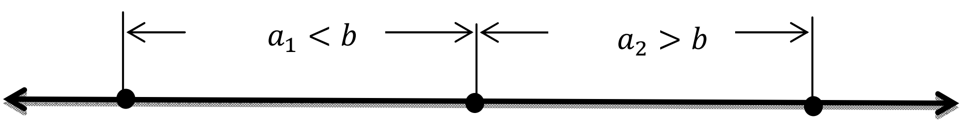
De la definición de valor absoluto, se tiene:

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & si\ a - b \geq 0 \\ -(a - b) & si\ a - b < 0 \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & si\ a \geq b \\ b - a & si\ a < b \end{cases}$$

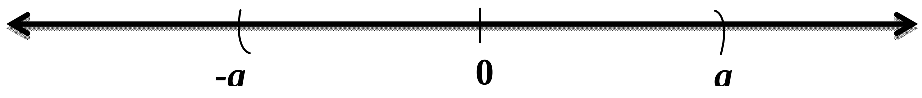
En la recta numérica real, $|a - b|$ unidades puede interpretarse como la distancia entre a y b sin tener en cuenta el sentido. Ver la figura siguiente:



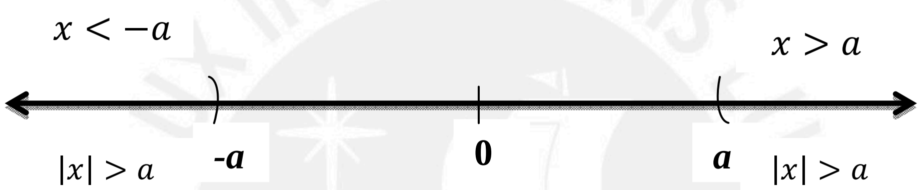
Ahora se trabajará con desigualdades que contienen valores absolutos.

La desigualdad $|x| < a$, donde $a > 0$, establece que en la recta numérica real la distancia del origen al punto x es menor que a unidades: esto es $-a < x < a$. Como se aprecia en la figura:

$$-a < x < a$$



La desigualdad $|x| > a$, donde a > 0, indica que en la recta real la distancia del origen al punto x es mayor que a unidades; esto es, $x > a$ o $x < -a$. Tal como se muestra en la figura siguiente:



A continuación se establecen estos dos resultados formalmente. La flecha doble ↔ se utiliza para indicar que la proposición anterior al símbolo y la proposición posterior son equivalentes. Así,

$$|x| < a \leftrightarrow -a < x < a \qquad donde\ a > 0$$

$$|x| > a \leftrightarrow x > a\ o\ x < -a \quad donde\ a > 0$$

$\sqrt{a}$ no está definida si $a < 0$. De la definición de $\sqrt{a}$ se deduce que: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Las propiedades del valor absoluto dadas en el teorema siguiente son útiles en el cálculo.

A.1.5 Teorema:

Sean $a, b \in R$, entonces:

$|ab| = |a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

A.1.6 Teorema: La desigualdad del triángulo

$Dados\ a, b \in R, entonces: |a + b| \leq |a| + |b|$

A.1.7 Teorema: $Sean\ a, b \in R, entonces:$

$|a - b| \leq |a| + |b|$

$|a| - |b| \leq |a - b|$

El autor desarrolla el valor absoluto desde la página 1145 al 1148.

2.7.4 Según la estructura de los modelos asociados a la noción del valor absoluto (ver figura 8), Haaser, La Salle y Sullivan (1973), utilizan en el libro "Análisis Matemático 1", los modelos a trozos y métrica asociados a los contextos analítico y topológico-geométrico respectivamente. En el capítulo 1, sobre los números reales, los autores en la página 40 presentan una definición sobre el valor absoluto, la cual citamos textualmente:

Valor Absoluto

Si *a* es un número real distinto de cero, entonces o *a* o *–a* es positivo. Aquel de los dos que es positivo es llamado valor absoluto de *a*.

Definición. El valor absoluto de un número real *a*, denotado por $|a|$, se define por la regla:

$$|a| = a \quad si\ a \geq 0$$

$$|a| = -a \quad si\ a < 0$$

Por ejemplo:

$|2| = 2, \quad |-2| = -(-2)$=2, $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \quad |0| = 0$

Nótese que esta regla define el valor absoluto de un número a distinto de cero como aquél de los dos números *a* y *–a* que es positivo. El valor absoluto de 0 es 0. Geométricamente, el valor absoluto de *a* es la distancia del origen al punto *a*.

Es fácil ver que *a* tiene las siguientes propiedades:

$|a| = |-a|$ y

$a \leq |a|$ y $-a \leq |a|$

Estas propiedades se siguen inmediatamente de la definición. Las tres propiedades fundamentales de los números reales son:

$$|a| \geq 0, y\ |a| = 0\ \ si\ y\ sólo\ si\ a = 0$$

$$|ab| = |a|\ |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Establecemos estas propiedades en los siguientes tres teoremas.

Teorema.

Para cualquier número real a, $|a| \geq 0$. Además $|a| = 0\ \ implica\ que\ a = 0$

Teorema.

Para dos números reales cualesquiera a y b, $|a|\ |b| = |ab|$

Teorema.

(La desigualdad del triángulo). Para cualesquiera dos números reales a y b,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Corolario: Para cualesquiera dos números reales a y b,

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$$

Resultados básicos utilizados en la solución de ecuaciones y desigualdades en que aparezcan implicados valores absolutos.

$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ y \\ -a = b\ \ o\ \ a = b \end{cases}$$

$$|a| < b \Leftrightarrow -a < b\ \ y\ a < b$$

$$\Leftrightarrow a > -b\ y\ a < b$$

$$\Leftrightarrow -b < a < b$$

Si b>0, entonces $|a| < b \quad \Leftrightarrow a \in (-b, b)$

$$\Leftrightarrow a(-b \;\; o \;\; a > b)$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty, -b) \; \cup (b, \infty)$$

Los autores desarrollaron el tema del Valor Absoluto desde la página 40 a la página 45.

2.7.5 Según la estructura de los modelos asociados a la noción del valor absoluto (figura 8), Taylor y Wade (1967), en el libro “Cálculo diferencial e integral” utiliza los modelos a trozos y vectorial asociados a los contextos analítico y geométrico respectivamente. En el capítulo 1, sobre relaciones y funciones, en la página 49, nos dicen acerca del valor absoluto, la cual citamos textualmente:

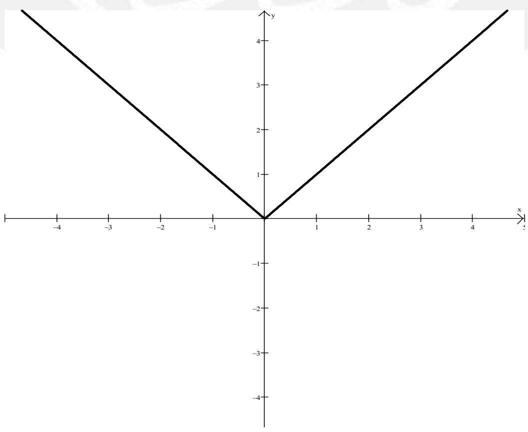
Recuérdese que $|a|$ se lee el “valor absoluto de *a*” y que está definido de la manera siguiente:

$|a| = a$, si $a \geq 0$;

$|a| = -a$, si a < 0

La función *F* expresada por: $F(x) = |x|$, es la función valor absoluto.

Los elementos de *F*, son pares ordenados de la forma (x, $|x|$). La gráfica de *F* está dada por:



Puesto que $F(x) \geq 0$, para $x \in R$.

El dominio de $F = (-\infty; +\infty)$

El rango de $F = [0; +\infty)$

Teorema: Para todo número real a

$|a| \geq 0$ ($el\ valor\ absoluto\ de\ a\ nunca\ es\ negativo$);

$|a| = 0 \quad \leftrightarrow a = 0$;

$|a|^2 = a^2$;

$\sqrt{a^2} = |a|$;

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

Teorema: Para cualesquiera números reales a, x y b, siendo $b \geq 0$;

$|x| \leq b \leftrightarrow\ -b \leq x \leq b$;

$|x - a| \leq b \leftrightarrow\ -b \leq x - a \leq b$;

$|x - a| \leq b \leftrightarrow\ a - b \leq x \leq a + b$;

$|x| \geq b \leftrightarrow x \leq -b$ ó $x \geq b$

Teorema: El valor absoluto de la suma de 2 números reales, a y b, es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Teorema: El valor absoluto del producto de dos números reales a y b es igual al producto de sus valores absolutos.

$$|ab| = |a|.|b|$$

Los autores desarrollaron el tema del Valor Absoluto desde la página 49 a la página 72.

Los significados de referencia antes mencionados nos servirán para realizar las configuraciones epistémicas (algorítmicas y algorítmica-distancia), además los utilizaremos como teoría en la propuesta de tareas.

2.8 Significados pretendidos

Sobre los significados pretendidos los autores plantean que es el “sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio” (Godino et al. 2009, p.4).

En el presente trabajo, se pretende mostrar cómo el concepto del valor absoluto se propone ser trabajado en las aulas (significados pretendidos), mediante el análisis de los textos universitarios utilizados por los profesores, sujetos de estudio de esta investigación. Básicamente se muestran definiciones, conceptos, propiedades y/o teoremas que utilizan los diferentes autores de los textos universitarios a los cuales tienen acceso los profesores y alumnos del nivel superior, además porque son los libros que aparecen como referencias bibliográficas en el sílabo y se encuentran en la biblioteca de la Universidad Privada Telesup.

Textos Extranjeros: Matemáticas para administración y economía (10^{a}ed.). México. Stewart J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas (4^{a}ed.). Colombia. Tang S. (2005).

Texto Nacional: Figueroa R. (2004). *Matemática Básica 1* ($8^{a}ed.$). Perú.
Análisis de los textos:

1) Según la estructura de los modelos asociados a la noción del valor absoluto (ver figura 8), Figueroa (2004), utiliza en su libro “Matemática Básica”, los modelos a trozos y métrica asociados a los contextos analítico y topológico-geométrico respectivamente. En el capítulo 4 sobre los números reales, en la sección 4.15, página 276, presenta la siguiente definición sobre el valor absoluto, la cual citamos textualmente:

Definición: El valor absoluto de un número real a, denotado por $|a|$ se define por la regla:

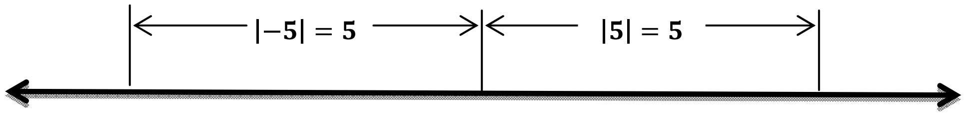
$$|a| = \begin{cases} a, & si\ a \geq 0 \\ -a, & si\ a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, si a=3 $\rightarrow |a| = 3$

$a = 0 \ \rightarrow |0| = 0$

$a = \ -5 \ \ \rightarrow |-5| = -(-5) = 5$

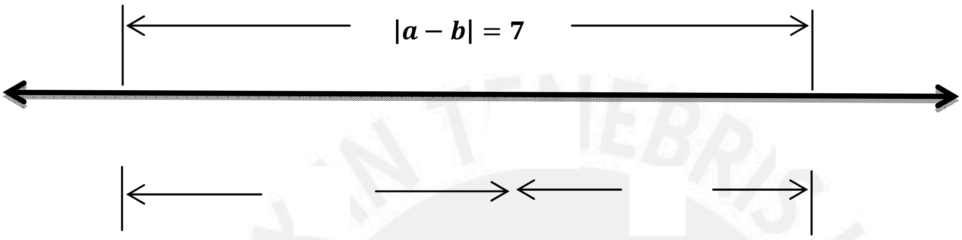
Se observa que el valor absoluto de un número positivo o cero es igual al mismo número, mientras que el valor absoluto de un número negativo es el número positivo correspondiente. Esto significa que para cada número real a, hay un número *–a*, cuyo valor absoluto representa su distancia al origen, el positivo a la derecha y el negativo a la izquierda. Geométricamente se representa como:



Para dos números a y b, $|a-b| = |b-a|$, representa la distancia entre estos puntos, sin importar la dirección; así, la distancia entre $a = -4$ y $b = 3$ es:

$|a-b| = |-4-3| = |-7| = 7 \quad |b-a| = |3-(-4)| = |7| = 7$

Geométricamente se representa:



Las ecuaciones e inecuaciones que involucran valores absolutos, éstas se resuelven basándose en los teoremas siguientes.

Teorema 41. $\forall a \in R$: i) $|a| \geq 0$

ii) $|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$

Teorema 42. $\forall a \in R$: $|a|^2 = a^2$

Teorema 43. $\forall a \in R$: $|a| = \sqrt{a^2}$

Teorema 44. $\forall a \in R$: $|a| = |-a|$

Teorema 45. $\forall a, b \in R$: $|ab| = |a||b|$

Teorema 46. $\forall a, b \in R: b \neq 0$, Entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Teorema 47. $\forall a, b \in R$: $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)

Teorema 48. $\forall a, b \in R$: $i)$ $|a-b| \leq |a| + |b|$ $\quad ii)$ $|a| - |b| \leq |a-b|$

Teorema 49. $|a| = b \leftrightarrow$ (b $\geq$ 0) $\wedge$ $(a = b \ \vee a = -b)$

Teorema 50. $|a| = |b| \leftrightarrow a = b \ \vee a = -b$

Teorema 51. Si b $\geq$ 0 y $|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$

Teorema 52. Si $|a| \geq b \leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

Teorema 53. $\forall a, b \in R$: $|a| \leq |b| \leftrightarrow a^2 \leq b^2$

El autor desarrolla el tema del Valor Absoluto desde la página 276 a la página 299

2) Según la estructura de los modelos asociados a la noción del valor absoluto (ver figura 8), Tang (2005), utiliza en su libro "Matemáticas para la Administración y Economía", los modelos a trozos y métrica asociados a los contextos analítico y topológico-geométrico respectivamente. En el capítulo 1, sección 1.9 sobre las desigualdades y el valor absoluto, en la página 63, presenta la siguiente definición sobre el valor absoluto, la cual citamos textualmente:

El valor absoluto de un número a se denota $|a|$ y se define como

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Como $-a$ es un número positivo cuando a es negativo, esto significa que el valor absoluto de un número es siempre no negativo.

Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = -(-5) = 5$. Geométricamente, $|a|$ es la distancia entre el origen y el punto de la recta numérica que representa al número a. Tal como se muestra en las figuras a y b

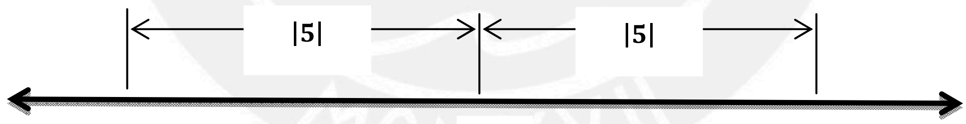


Figura. a

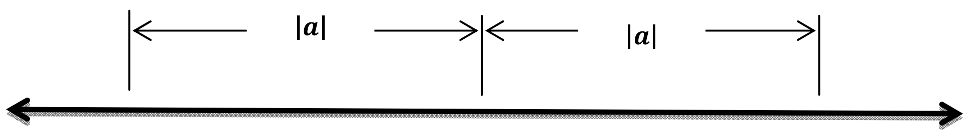


Figura. b

La tabla muestra las propiedades del valor absoluto. La propiedad 4 se llama desigualdad del triángulo.

Propiedad	Ilustración
Si a y b son números reales, entonces $\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert$	$\lvert -3 \rvert$ = -(-3) =3 = $\lvert 3 \rvert$
$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert (2)(-3) \rvert = \lvert -6 \rvert$=6 = $\lvert 2 \rvert \lvert -3 \rvert$
$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \frac{(-3)}{(-4)} \right\rvert = \frac{\lvert 3 \rvert}{\lvert 4 \rvert} = \frac{3}{4} = \frac{\lvert 3 \rvert}{\lvert 4 \rvert}$
4. $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	$\lvert 8 + (-5) \rvert = \lvert 3 \rvert = 3 \leq \lvert 8 \rvert + \lvert -5 \rvert = 13$

El autor desarrolla el tema del Valor Absoluto desde la página 63 a la página 65. Y estas propiedades lo consideramos relevantes porque se utilizarán en la solución de problemas posteriores y en la elaboración de las tareas didácticas.

3) Según la estructura de los modelos asociados a la noción del valor absoluto (ver figura 8), Stewart (2001), utiliza en su libro "Cálculo de una variable", los modelos a trozos y métrica asociados a los contextos analítico y topológico-geométrico respectivamente. En el apéndice A sobre intervalos, desigualdades y valores absolutos, página A6, presenta la siguiente definición sobre el valor absoluto, la cual citamos textualmente:

El valor absoluto de un número a, denotado por $\lvert a \rvert$, es la distancia de a a 0 en el eje de los números reales. Las distancias son siempre positivas ó 0, por lo que tenemos $\lvert a \rvert \geq 0$ para todo número a.

Por ejemplo:

$\lvert 3 \rvert = 3$; $\lvert -3 \rvert = 3$; $\lvert 0 \rvert = 0$; $\lvert \sqrt{2} - 1 \rvert = \sqrt{2} - 1$; $\lvert \pi - 3 \rvert = 3 - \pi$

En general tenemos

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lvert a \rvert = a & si\ a \geq 0 \\ \lvert a \rvert = -a & si\ a < 0 \end{array}} \quad \text{........ (3)}$$

Recuerde que el símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la raíz cuadrada positiva de". Entonces $\sqrt{r} = s$, significa $s^2 = r$ y $s \geq 0$. Por lo tanto, la ecuación $\sqrt{a^2} = a$, no es siempre cierta.

Es cierta sólo cuando $a \geq 0$. Si a < 0, entonces –a > 0, por lo que tenemos $\sqrt{a^2} = -a$. En vista de (3), tenemos la ecuación:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|} \qquad \text{........(4)}$$

(5) Propiedades de los valores absolutos: Suponga que *a* y *b* son números reales cualesquiera y que *n* es un entero. Entonces,

$|ab| = |a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (b$\neq$ 0)

$|a^n| = |a|^n$

(6) Para resolver ecuaciones o desigualdades que contienen valor absoluto, es muy útil usar los siguientes los siguientes enunciados.

Suponga que *a* > 0. Entonces,

$$|x| = a \quad si\ y\ sólo\ si\ \ x = \pm\, a$$

$$|x| < a \quad si\ y\ sólo\ si\ \ -a < x < a$$

$$|x| > a \quad si\ y\ sólo\ si\ \ \ x > a \ \ o\ \ x < -a$$

(7) Desigualdad del triángulo: Si *a* y *b* son cualesquiera números reales, entonces

$|a + b| \leq |a| + |b|$

El autor desarrolla el tema del Valor Absoluto en el apéndice A: desde la página A6 a la página A10.

Los contenidos (sobre el valor absoluto) de los siete textos analizados anteriormente, los consideramos relevantes porque a pesar de que sólo utilizan dos contextos (analítico y topológico) nos permitieron ilustrarnos en la solución de los problemas planteados en el diseño de tareas y además para realizar la configuración emergente del concepto del valor absoluto.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE OBJETOS MATEMÁTICOS

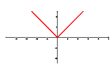
Resumen

En la sección 3.1 se presenta la configuración epistémica emergente de los textos de matemática del nivel superior, basados en la "Algoritmización" y luego la configuración epistémica emergente de los textos de matemática del nivel superior, "Algorítmica y Distancia" donde aparece la noción del valor absoluto, siendo la distancia, la diferencia entre las dos configuraciones.

3.1 Configuración epistémica emergente de los textos de matemática del nivel superior, donde aparece la noción del valor absoluto (NVA)

Luego de analizar los textos matemáticos antes mencionados (ver capítulo 2), se presentan a continuación sólo dos configuraciones epistémicas: "Algoritmización" y "Algorítmica y Distancia" que resultan de haber analizado los textos matemáticos del nivel superior y la investigación realizada por Wilhelmi et. al (2007), en dichos trabajos se observa además que no están presentes los diferentes usos o significados del valor absoluto, sólo se encuentran la noción algorítmica y la noción de distancia. Para los cuales se elabora las siguientes configuraciones epistémicas:

3.1.1 Configuración epistémica emergente del concepto del valor absoluto "Algoritmización"

<table>
<tr><td colspan="2">LENGUAJE</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) VERBAL: Valor Absoluto de un número, ecuaciones, inecuaciones, igualdad, desigualdad, intervalos, conjuntos, si y sólo si, unión, intersección, mayor, menor, mayor o igual, menor o igual, función por partes.
2) GRÁFICO:
Figura geométrica de la función Valor Absoluto.

3) SIMBÓLICO: $|x|, \wedge, \vee, \cup, \cap, \in, \leftrightarrow, \emptyset, \{\}, -\infty, +\infty, a=b, a=-b,$ $a>b, a<b, a\geq b, a\leq b, <a;b>, [a;b], <a;b], [a;b>, +, -, \frac{a}{b}$</td></tr>
<tr><td>SITUACIONES</td><td>CONCEPTOS</td></tr>
<tr><td>Problemas descontextualizados sobre la noción del valor absoluto, donde se</td><td>PREVIOS:
Conjunto: Es una colección bien definida de</td></tr>
</table>

resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.	objetos. A cada uno de estos objetos se les denomina elementos del conjunto. **Intervalos:** Dado un conjunto ordenado, diremos que una parte M de dicho conjunto constituye un intervalo, si para cada par (y, z) de elementos de M tal que $y < z$, todo elemento x del conjunto inicial que satisface la relación $y<x<z$, pertenece a M. **Función:** una función *f*, es una regla que asigna a cada elemento *x* del conjunto A, exactamente un elemento *y* del conjunto B. El elemento *y* se denomina imagen de *x* mediante *f*, y se indica como *f(x)*. El conjunto A, se denomina **dominio** de *f*, El conjunto B, se denomina **codominio** de *f*. **Ecuación:** Es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamados sus lados o miembros y están separados por el signo de igualdad "=". **Inecuación:** Es una desigualdad entre expresiones que contienen variables y que solamente se cumple para determinados valores o en un determinado intervalo. **Intersección de conjuntos:** La intersección de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que se forma con los elementos que son comunes a ambos conjuntos, es decir : $A \cap B = \{x/\ x\ \in A\ \wedge x \in B\}$ **Unión de conjuntos:** La unión de los conjuntos A y B, denotada por $A\ \cup B$, es el

<table>
<tr><td></td><td>conjunto cuyos elementos pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos, es decir :
$A \cup B = \{x/\ x \in A \vee x \epsilon B\}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>EMERGENTES</td></tr>
<tr><td></td><td>-La noción del valor absoluto de un número real: El valor absoluto de un número positivo o cero es igual al mismo número, mientras que el valor absoluto de un número negativo es su opuesto.</td></tr>
<tr><td>PROCEDIMIENTOS</td><td>PROPOSICIONES (Emergentes)</td></tr>
<tr><td>Resolver ecuaciones Lineales con valor absoluto.</td><td>$|a| = b \leftrightarrow a = b \ \vee \ a = -b \ , para\ b \geq 0$</td></tr>
<tr><td>Resolver inecuaciones con valor absoluto.</td><td><table>
<tr><td>Teorema 1</td><td>$|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$</td></tr>
<tr><td>Corolario 1</td><td>$|a| < b \leftrightarrow -b < a < b$</td></tr>
<tr><td>Teorema 2</td><td>$|a| \geq b \leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$</td></tr>
<tr><td>Corolario 2</td><td>$|a| > b \leftrightarrow a < -b \vee a > b$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2">ARGUMENTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tesis: El valor absoluto de un número real siempre es mayor o igual que cero.
Argumento:
Caso 1: Si el número real a es positivo, $|a| = a > 0$
Caso 2: Si el número real a es negativo, $|a| = -a > 0$
Caso 3: Si el número real a es cero, $|a| = 0$</td></tr>
</table>

3.1.2 Configuración epistémica emergente del concepto del valor absoluto “Algorítmica y Distancia”

LENGUAJE

1) **VERBAL:** Valor Absoluto de un número, distancia entre dos puntos, ecuaciones, inecuaciones, igualdad, desigualdad, intervalos, conjuntos, si y sólo si, unión, intersección, mayor, menor, mayor o igual, menor o igual, función por partes.

2) **GRÁFICO:**
Figura: distancia entre dos puntos

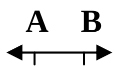
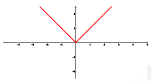


Figura geométrica de la función Valor Absoluto.



3) **SIMBÓLICO:** $|x|, \wedge, \vee, \cup, \cap, \in, \leftrightarrow, \emptyset, \{\}, -\infty, +\infty, a=b, a=-b, a>b, a<b, a\geq b, a\leq b, <a;b>, [a;b], <a;b], [a;b>, +, -, \frac{a}{b}$, d(X,0), d(A,O)

SITUACIONES	CONCEPTOS
Problemas descontextualizados sobre la noción del valor absoluto, donde se resuelven ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.	**PREVIOS:** **Distancia euclidiana entre dos puntos en el plano cartesiano:** Longitud del segmento recto que los une. Está dada por la medida del segmento que los une. **Distancia:** Es la menor medida posible entre dos puntos X e Y cuyas coordenadas son x, y respectivamente que cumple las siguientes condiciones: a) d(X, Y)=0, si y sólo si $x=y$ b) d(X, Y)=d(Y, X) c) d(X, Z) $\leq$ d(X, Y)+d(Y, Z) **Conjunto:** Es una colección bien definida de objetos. A cada uno de estos objetos se les denomina elementos del conjunto. **Intervalos:** Dado un conjunto ordenado,

	diremos que una parte M de dicho conjunto constituye un intervalo, si para cada par (y, z) de elementos de M tal que $y < z$, todo elemento x del conjunto inicial que satisface la relación $y < x < z$ pertenece a M. **Función:** una función *f*, es una regla que asigna a cada elemento x del conjunto A, exactamente un elemento y del conjunto B. El elemento y se denomina imagen de x mediante *f*, y se indica como *f(x)*. El conjunto A, se denomina **dominio** de *f*, El conjunto B, se denomina **codominio** de *f*. **Ecuación:** Es un enunciado numérico abierto, relacionado con el signo igual(=); es decir, es una igualdad condicional de dos expresiones algebraicas que queda satisfecha sólo para algunos valores asignados a sus letras. Al buscar tales valores estas letras reciben el nombre de incógnitas y a esta búsqueda se le llama Resolución de una ecuación. **Inecuación:** Es una desigualdad entre expresiones que contienen variables y que solamente se cumple para determinados valores o en un determinado intervalo. **Intersección de conjuntos:** La intersección de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que se forma con los elementos que son comunes a ambos conjuntos, es decir : $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \epsilon B\}$ **Unión de conjuntos:** La unión de los

<table>
<tr><td></td><td>conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto cuyos elementos pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos, es decir :
$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \epsilon B\}$</td></tr>
<tr><td></td><td>EMERGENTES</td></tr>
<tr><td></td><td>1-La noción del valor absoluto de un número real visto como distancia.
2-La noción del valor absoluto de un número real: El valor absoluto de un número positivo o cero es igual al mismo número, mientras que el valor absoluto de un número negativo es el número positivo correspondiente.</td></tr>
<tr><td>PROCEDIMIENTOS</td><td>PROPOSICIONES (Emergentes)</td></tr>
<tr><td>Hallar el valor absoluto de un número real, visto como distancia.</td><td>Distancia entre los puntos A y B de coordenadas a y b, respectivamente.
$d(A, O) = a = |a - 0| = |a|$
$d(B, O) = b = |b - 0| = |b|$</td></tr>
<tr><td>Resolver Ecuaciones Lineales con valor absoluto.</td><td>$|a| = b \leftrightarrow a = b \ \vee \ a = -b \, , para \ b \geq 0$</td></tr>
<tr><td>Resolver Inecuaciones Lineales con valor absoluto.</td><td><table>
<tr><td>Teorema 1</td><td>$|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$</td></tr>
<tr><td>Corolario 1</td><td>$|a| < b \leftrightarrow -b < a < b$</td></tr>
<tr><td>Teorema 2</td><td>$|a| \geq b \leftrightarrow a \leq -b \vee a \geq b$</td></tr>
<tr><td>Corolario 2</td><td>$|a| > b \leftrightarrow a < -b \vee a > b$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2">ARGUMENTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tesis: El valor absoluto de un número real expresado como distancia siempre es mayor o igual que cero.
Argumento:
Caso 1: Si A es un punto con coordenada $a \in R^{+}$, entonces $d(A, O) = |a - 0| = |a| = a$.
Caso 2: Si A es un punto con coordenada $a \in R^{-}$, entonces: $d(A, O) = |-a - 0| = |-a| = |a| = a$.</td></tr>
</table>

Caso 3: Si el punto O es el origen de coordenadas a = 0, entonces: $\lvert a \rvert = 0$
Tesis: El valor absoluto de un número real siempre es mayor o igual que cero.
Argumento:
Caso 1: Si el número real a es positivo, $\lvert a \rvert = a > 0$
Caso 2: Si el número real a es negativo, $\lvert a \rvert = -a > 0$
Caso 3: Si el número real a es cero, $\lvert a \rvert = 0$

En los textos universitarios sobre el valor absoluto estudiados líneas arriba encontramos que:

-Los autores presentan la definición del valor absoluto mediante el contexto analítico asociado al modelo función a trozos. Algunos autores presentan la definición del valor absoluto mediante el modelo métrico (distancia) asociado al contexto topológico.

-Muy pocos autores presentan el valor absoluto en el contexto geométrico (gráfico de la función valor absoluto). En los textos no se resuelven ecuaciones utilizando el contexto geométrico. Lo cual consideramos inapropiado, porque limita el conocimiento del valor absoluto sólo a la noción algorítmica y no permite conocer los diferentes usos del valor absoluto.

-En los textos no se desarrollan problemas contextualizados, no se trabajan reflexiones para el concepto del VA utilizando el contexto geométrico, no utilizan softwares matemáticos para la resolución de problemas.

Del estudio realizado en los textos universitarios (significados pretendidos), observamos que hay una carencia de contenidos ya que no se abarcan los diferentes usos del concepto del valor absoluto entonces existe la necesidad de presentar una nueva propuesta (la cual la llamaremos secuencia de tareas) que será desarrollada con mayor detalle en el capítulo 5. Reconocemos la importancia de las prácticas realizadas por el profesor sobre los objetos matemáticos, en particular en el caso del valor absoluto para poder enseñar a sus alumnos y ser capaces de diseñar tareas o una secuencia de tareas. Para nosotros el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática y muy específicamente los criterios de idoneidad fueron fundamentales en esta labor.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS ERRORES, DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS ACERCA DEL CONCEPTO DEL VALOR ABSOLUTO

Resumen

Este capítulo responde al objetivo 1.5.1 Identificar y analizar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos que aparecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto. Para ello en la sección 4.1 presentamos los instrumentos utilizados en nuestra investigación, donde primero elaboramos una prueba diagnóstica basándonos en la literatura revisada sobre los errores cometidos por los alumnos en el aprendizaje del concepto del valor absoluto. Dicha prueba se aplica a un grupo de alumnos (sujeto de estudio). Luego en la sección 4.2 presentamos los errores, dificultades y obstáculos del valor absoluto en la experiencia realizada. A continuación en la sección 4.3 se presentan los resultados de la prueba diagnóstica y de los cuestionarios. En la sección 4.4 explicamos los criterios de idoneidad para valorar la clase del profesor. Finalmente presentamos en la sección 4.5 la configuración epistémica idónea del objeto valor absoluto.

4.1 Instrumentos

Se considera pertinente realizar en nuestro trabajo de investigación; una prueba diagnóstica y un análisis de la clase del profesor, sobre el valor absoluto.

Prueba Diagnóstica (ver apéndice 2) que sería contestado por los estudiantes (sujetos de estudio) del primer ciclo del nivel universitario de una Universidad Privada del Perú, para obtener información general de ellos sobre sus conocimientos acerca del concepto del valor absoluto. Dicha prueba fue aplicada a 37 estudiantes de la escuela de ingeniería de sistemas, provenientes en su gran mayoría de instituciones educativas públicas, y tiene por objetivo identificar, los errores, dificultades y obstáculos acerca del concepto del valor absoluto.

En primer lugar se solicitó permiso al Rector de la universidad en la cual laboro desde hace 6 años, para realizar mi experimento con la finalidad de que autoricen y me brinden las facilidades del caso, al cual accedieron de buena manera y me apoyaron moralmente. A las 10:50 a.m. del día 2 de octubre del 2012, a los estudiantes se les invitó a participar por inducción, se les dijo que iban a ser parte de un proyecto organizado por la universidad y por un grupo de profesores en el cual estaba incluido su profesor (licenciado en matemáticas), que en ese momento iba a dictar la clase de matemáticas (tema intervalos), además ellos iban a contribuir con su participación y su honestidad al responder el cuestionario (para nosotros prueba diagnóstica) con información importante para implementar una nueva propuesta en la currícula de la universidad. La prueba terminó a las 11:30 a.m.

La prueba diagnóstica consta de 4 preguntas:

La pregunta 1, es para saber si el alumno conoce o no acerca del concepto del VA.

La pregunta 2, contiene 12 sub-preguntas en las cuales se muestran interrogantes sobre: los errores, dificultades y los obstáculos en el aprendizaje del VA. Las preguntas son contestadas con "V" si es verdadera o "F" si es falsa.

La pregunta 3, se trabaja con preguntas en base a la definición del valor absoluto por partes, considerando que a la mayoría de los alumnos le resulta difícil su interpretación y por consiguiente su aplicación.

La pregunta 4, está relacionada con el registro gráfico, en la cual se presenta una función con valor absoluto y se les pide identificar la gráfica correcta de tres alternativas dadas.

Luego de haberse tomado la prueba diagnóstica, se procedió a realizar el análisis y la clasificación de los errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje del concepto del valor absoluto, que detallamos a continuación.

4.2 Errores, dificultades y obstáculos del valor absoluto encontrados en la prueba diagnóstica.

4.2.1 El error en el aprendizaje del concepto del valor absoluto

En el EOS, se considera al error como una práctica matemática no válida por parte de los alumnos. En particular para el caso del valor absoluto, la solución fragmentada, en la solución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, lo consideramos como error porque impide que el estudiante pueda encontrar la solución correcta. Es decir plantean sólo la parte referida a $a = b$ y no utilizan la otra parte $a = -b$ (determinación del origen).

Por ejemplo, al pedir a los alumnos que resuelvan: $|2x - 4| = 6$

Los estudiantes sólo desarrollan:

$a = b$

$2x - 4 = 6$

$2x = 10$

$x = 5$

Como se dijo anteriormente esto es un error, porque sólo toma en cuenta una parte de la definición del valor absoluto; lo que en el EOS, se considera como una práctica matemática no válida.

$$Teorema: si\ b \geq 0\ \ entonces, |a| = b\ \leftrightarrow a = b\ \vee a =\ -b$$

$$\begin{array}{lccc} b \geq 0 & 2x - 4 = 6 & \text{v} & 2x - 4 = -6 \\ 6 \geq 0 & 2x = 10 & \text{v} & 2x = -2 \\ & x = 5 & \text{v} & x = -1 \end{array}$$

C.S={ – 1 ; 5 }

Otras formas de resolver la ecuación antes mencionada sería, utilizando distancias, reflexiones, geometría o los softwares Geogebra, Winplot, etc. (organización de la enseñanza mediante una secuencia de tareas didácticas), que ayudarían a superar este error.

Otros errores que encontramos en la prueba diagnóstica fueron:

Considerar que el valor absoluto de un número puede ser negativo.

Ejemplo: $|-5| = -5$

Lo cual es falso, porque por definición, el valor absoluto de todo número real es siempre mayor o igual a cero.

Asumir que el valor absoluto y la función valor absoluto, significan lo mismo

$|x| = \begin{cases} x; & si\ x \geq 0 \\ -x; & si\ x\ < 0 \end{cases}$; $|f(x)| = \begin{cases} f(x); & si\ x \geq 0 \\ -f(x); & si\ x\ < 0 \end{cases}$

Es falso, porque el primero se refiere a un número y el segundo se refiere a una función. Además el valor absoluto de un número real tiene una representación en la recta real y el segundo se representa en el plano cartesiano.

-No reconocen que: la expresión $|x - a|$ es la distancia entre *x* y a.

-Desconocen que: $\sqrt{x^2} = |x|$

-No identifican que: $|x|$ = máx $\{x; -x\}$

-Al resolver problemas como $|x + 1| = 3$, lo resuelven de ésta manera:

$$-(x + 1) = -3 \ \vee \ \ x + 1 = 3$$

Obteniendo al resolver las dos ecuaciones, x=2. Lo cual es erróneo, porque las soluciones deben ser 2 y –4.

4.2.2 Dificultades en el aprendizaje del concepto del valor absoluto encontrados en la experiencia realizada y en otras investigaciones

Para el EOS, *una dificultad* indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante un tema o tarea (Font, 2013). Concepto que puede aplicarse a cualquier objeto matemático.

En particular para el caso del valor absoluto, la definición:

$$|x| = \begin{cases} x; & si\ x \geq 0 \\ -x; & si\ x\ < 0 \end{cases}$$

“Acarrea dificultades a la hora de su comprensión, a la mayoría de los alumnos les resulta difícil su interpretación y por consiguiente su aplicación” Cerizola (2005, p. 4).

Dificultades asociadas al valor absoluto

a) Es una dificultad asociada a los contenidos matemáticos: elevado grado de abstracción y generalización, básicamente porque la notación es compleja, además la expresión contiene también inecuaciones, signos positivos y negativos, las barras y el paréntesis que generan incomprensión en los estudiantes.

b) Es una dificultad relacionada con el alumno (dificultad de tipo cognitiva):

-Relacionada con la falta de dominio de los contenidos sobre el valor absoluto; porque el estudiante no comprende que se trata de una definición de una función por partes.

-Asociada también con los significados de referencia de los alumnos acerca del concepto del valor absoluto (representaciones del valor absoluto en contextos diferentes). Es decir, el valor absoluto visto desde los diferentes contextos: analítico, topológico, aritmético y geométrico.

-Relacionada a la falta de motivación del alumno, es decir su "autoestima".

-Asociada también con las discapacidades o bajo nivel de desarrollo psicológico por parte de los alumnos.

c) Es una dificultad asociada al profesorado

-Asociada al profesor, porque en muchos casos el profesor sólo maneja la definición de la función por partes del valor absoluto, desconociendo los otros significados de referencia del concepto del valor absoluto (distancia, reflexiones, geométrica, uso de softwares y problemas contextualizados).

-También porque el profesor en algunos casos no organiza eficientemente una secuencia de tareas potencialmente significativas, que permitan superar los errores, las dificultades y los obstáculos del concepto del valor absoluto.

d) Asociada a la organización del centro, porque en algunas instituciones (universidades) el tema del valor absoluto, no se enseña (el tema no se considera dentro del sílabo); sin embargo, en los ciclos superiores llevan cálculo. También porque cuando el tema se considera dentro del sílabo sólo se enseña la parte algebraica (en la mayoría de los casos sólo utilizan las propiedades de las ecuaciones e inecuaciones), desconociendo el registro gráfico y las otras definiciones equivalentes que ayudarían a superar los errores, las dificultades y los obstáculos del concepto del valor absoluto.

4.2.3 Obstáculos en el aprendizaje del concepto del valor absoluto encontrados en la experiencia realizada y en otras investigaciones

Para Brousseau un obstáculo es un conocimiento, en el que si se utiliza este conocimiento en otro contexto, genera respuestas incorrectas.

En el caso del valor absoluto (Cerizola, 2005) considera que:

a) La notación algebraica se constituye en un factor de incomprensión de la definición del valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x; & si\ x \geq 0 \\ -x; & si\ x < 0 \end{cases}$$

Especialmente en la expresión $-x\ ; Si\ x < 0$. El signo menos delante de la x induce a asumir que se trata de un número negativo, produciendo interpretaciones erróneas al utilizar la condición $x < 0$ como consecuencia, resulta difícil aceptar que el valor absoluto de un número real es siempre mayor o igual a cero. Para superar éste obstáculo consideramos necesario que el profesor presente una secuencia de tareas que vayan de los casos particulares a los casos generales con la finalidad de generar una abstracción del concepto y su posterior generalización.

b) "La incomprensión de la definición se manifiesta en situaciones más complejas" (valor absoluto de funciones) (p. 4).

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x); & si\ x \geq 0 \\ -f(x); & si\ x < 0 \end{cases}$$

En la prueba diagnóstica al resolver la función: $f(x) = |2x - 4|$, en forma errónea responden:

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4\ ; Si\ x \geq 0 \\ \\ -(2x - 4)\ \ ; Si\ x < 0 \end{cases}$$

La cual debería de ser :

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4\ ; Si\ x \geq 2 \\ \\ -(2x - 4)\ \ ; Si\ x < 2 \end{cases}$$

Para superar este obstáculo, debemos incidir en que la expresión es una función y que las restricciones ahora dependen de la función, específicamente de la parte interna (limitada por las barras) la cual debe ser mayor o igual que cero.

Los incisos a y b, para el valor absoluto los consideramos obstáculos.

En nuestro grupo de investigación se volvieron a presentar en la prueba diagnóstica y en el cuestionario 1.

4.3 Resultados y análisis de la prueba diagnóstica y cuestionarios

4.3.1 La prueba diagnóstica: Esta prueba (ver apéndice 2) sirvió para conseguir información acerca de los diferentes significados del valor absoluto en cada uno de los estudiantes, así como de sus conocimientos previos.

En la pregunta1: ¿Has escuchado hablar sobre el término valor absoluto?

De los treinta y siete alumnos encuestados treinta y cinco respondieron que sí y dos estudiantes respondieron que no conocen sobre el valor absoluto.

Con relación a la pregunta 2: Coloca "V' si la afirmación es verdadera o "F" si es falsa. Las respuestas y porcentajes de aciertos y equivocaciones se muestran en la siguiente tabla.

	Pregunta 2	Aciertos %		Equivocaciones %	
a	Para todo número real $x, \quad -x < 0.$	8	21.6	29	78.4
b	El valor absoluto de un número puede ser negativo.	19	51.4	18	48.6
c	El valor absoluto y la función valor absoluto significan lo mismo.	27	73.0	10	27.0
d	$\lvert -7 \rvert = \lvert 7 \rvert$	26	70.3	11	29.7
e	$\lvert 3,5 \rvert = 3$	25	67.6	12	32.4
f	El valor absoluto de un número es siempre mayor o igual a cero.	28	75.7	9	33.3

g	Geométricamente, la expresión $\lvert x-a\rvert$ es la distancia entre x y a.	14	37.8	23	62.2
h	$\lvert x\rvert$ = máx $\{ x ,-x \}$	18	48.6	19	51.4
i	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$	25	67.6	12	32.4
j	$-\lvert 3\rvert \leq 3 \leq \lvert 3\rvert$	18	48.6	19	51.4
k	$\lvert f(x)\rvert = \begin{cases} f(x)\,; Si\ x \geq 0 \\ -f(x)\ ; Si\ x < 0 \end{cases}$	11	29.7	26	70.3
l	El conjunto solución de la ecuación $\lvert x-4\rvert = -3$ es el conjunto vacío.	14	37.8	23	62.2

Tabla 3: cuadro de resultados pregunta 2 de la prueba diagnóstica.

2a) Para todo número real $x,\ -x < 0$; en ésta pregunta, 29 de los 37 alumnos, se equivocaron y respondieron que era verdadera, siendo la respuesta falsa. Las respuestas incorrectas alcanzan un 78.4 %, lo cual es una gran dificultad en la comprensión del concepto del VA. En nuestra opinión una posible explicación es que para los estudiantes, *x*, es un número positivo siempre, porque como norma matemática se les ha enseñado que los números negativos llevan un signo "–" delante de éste y al no tenerlo *x*, piensan que es positivo, sin distinguir que en este caso *x* es una variable que toma como valores también los números negativos. Por ello, consideramos esta dificultad como un "**Obstáculo**".

2b) El valor absoluto de un número puede ser negativo; en ésta interrogante 19 de los 37 alumnos respondieron en forma errónea, que representan el 51.4% respondieron que era verdadera, siendo la respuesta falsa. Los alumnos no tienen clara la idea de que el valor absoluto no puede ser negativa. Esta acción la consideramos como **"Error"** de concepto.

2c) El valor absoluto y la función valor absoluto significan lo mismo. El 73% de los alumnos acertadamente respondieron que no eran iguales, es decir 27 alumnos consideraron la respuesta falsa. Esta acción la consideramos como **"Error"**, puesto que el valor absoluto se trabaja en una dimensión (campo de los números reales) y la función valor absoluto en dos dimensiones (plano cartesiano).

2d) $|-7| = |7|$. En ésta pregunta, 26 alumnos respondieron correctamente, lo cual significa que el 70.3% respondieron como verdadero.

2e) $|3,5| = 3$. Sólo 12 alumnos respondieron en forma errónea, lo cual significa que el 67.6% respondieron en forma acertada que la respuesta era falsa.

2f) El valor absoluto de un número es siempre mayor o igual a cero. En ésta pregunta 28 alumnos respondieron correctamente, que es el 75,7% de los alumnos encuestados, los cuales marcaron como verdadera la respuesta.

2g) Geométricamente, la expresión $|x-a|$ es la distancia entre x y a. En ésta interrogante 23 alumnos que representan el 62,2% no respondieron acertadamente. Consideramos que ha sido por que los alumnos desconocen que el valor absoluto también se puede expresar como distancia. Esta acción la consideramos como un **"Error"** de concepto y esto porque al parecer no es común el utilizar esta interpretación del valor absoluto en su proceso de enseñanza-aprendizaje previo como distancia.

2h) $|x| = \text{máx}\ \{x, -x\}$. Los alumnos en ésta pregunta en un 51.4% respondieron en forma incorrecta, 19 de los 37 alumnos consideramos que desconocen de que el valor absoluto se puede expresar en términos de la función máximo. Esta acción la consideramos como **"Error"**.

2i) $\sqrt{x^2} = |x|$. Los alumnos en ésta pregunta en un 51.4% respondieron en forma incorrecta, 19 de los 37 alumnos consideramos que desconocen de que el valor absoluto se puede expresar como una composición de funciones. Esta acción la consideramos como **"Error"**.

2j) $-|3| \leq 3 \leq |3|$. En ésta pregunta 19 de los 37 alumnos responden de manera incorrecta, asumieron la expresión como falsa, siendo la proposición verdadera. Es decir el 51,4% no tiene claro las desigualdades con valor absoluto. Esta acción la consideramos como **"Error"**.

2k) $|2x-5| = \begin{cases} 2x-5\,; \text{Si } x \geq 0 \\ -(2x-5)\ ; \text{Si } x < 0 \end{cases}$. En ésta pregunta 26 de los 37 alumnos respondieron que la expresión era verdadera. Los alumnos no analizaron la restricción en forma adecuada, asumen que $x \geq 0$. Esto es erróneo puesto que se debe de tomar que $2x-5 \geq 0$, luego despejar x, obteniendo como restricción final $x \geq \frac{5}{2}$. Las respuestas incorrectas alcanzan un 70.3 %, lo cual es una gran dificultad en la comprensión del concepto del valor absoluto, a la que llamaremos "**Obstáculo**". Esto debido a que una posible explicación es que, en el proceso de enseñanza al definir el valor absoluto de un número solo se considera un valor constante o se representa por una constante y no hay términos algebraicos, como en este caso un binomio lineal, lo que genera un conflicto semiótico de tipo epistémico.

2l) El conjunto solución de la ecuación $|x-4| = -3$ es el conjunto vacío. Los alumnos en un número de 23 desconocen que el valor absoluto no puede ser negativo. Esta acción la consideramos como **"Error"**, aún no tienen claro el concepto del valor absoluto de un número.

En la pregunta 3: Coloca " V'' si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa.

	ACIERTOS	%	EQUIVOCACIONES	%
a	14	37.8	23	62.2
b	19	51.4	18	48.6
c	23	62.2	14	37.8
d	18	48.6	19	51.4
e	10	27.0	27	73.0

Tabla 4: cuadro de resultados pregunta 3 de la prueba diagnóstica.

3a) Si $x < 0$, entonces: $|x| = -x$. Los alumnos en un número de 23, que representan al 62.2% de los alumnos encuestados respondieron que la respuesta era falsa, siendo ésta incorrecta, lo cual demuestra que siguen teniendo grandes dificultades al trabajar el valor absoluto con números negativos. En nuestra opinión una posible explicación es que para los estudiantes, $-x$, es un número negativo siempre, porque como norma matemática se les ha enseñado que los números negativos llevan un signo “ – ” delante de éste y al tenerlo, piensan que es negativo, sin darse cuenta que x es una variable que toma como valores también los números positivos y en este caso se está hablando del opuesto de x. Por ello, consideramos esta dificultad como un “**Obstáculo**”.

3b) Si $x < 0$, entonces: $|x| = -(-x)$. En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 18, que es el 48,6% de los alumnos encuestados. Siguen teniendo grandes dificultades al trabajar el valor absoluto con números negativos.

3c) Si $x > 0$, entonces: $|x| = -(-x)$. En ésta pregunta 23 de los 37 alumnos respondieron acertadamente, ellos en su gran mayoría no tienen problemas para trabajar con números positivos.

3d) Si $x > 0$, entonces: $|x| = -x$. Los alumnos en un 51,4 % no tienen claro todavía de que el valor absoluto de número no puede ser negativo, es por eso que 19 de los 37 alumnos respondieron de forma incorrecta.

3e) Si $x < 0$, entonces: $|x| = x$. En ésta pregunta, 27 alumnos que son el 73% del total de estudiantes, respondieron de manera incorrecta. Lo cual pone en evidencia una vez más que la proposición: Si $x < 0$, entonces: $|x| = x$, es una gran dificultad en la comprensión de la NVA, la consideramos como un **“Obstáculo”**, porque consideran a x un número y no una variable que toma valores numéricos positivos, negativos y el cero, considerándolo un conflicto epistémico.

En la pregunta 4: La gráfica de la función f, definida por $f(x) = -|x + 2| + 3$, es: En su gran mayoría, 27 de los 37 alumnos encuestados, que representan el 67,57% Los estudiantes no representan el valor absoluto en su forma gráfica y otros realizan gráficos que pertenecen a otra expresión. Generalmente porque no se les ha enseñado en la etapa escolar o en la etapa pre universitaria.

4.3.2 Cuestionarios

4.3.2.1 Cuestionario 1: para los Alumnos

Se elaboró el cuestionario 1 (ver apéndice 3) que sirvió para conseguir información acerca de los diferentes significados del valor absoluto en cada uno de los 37 estudiantes, después de que el profesor dictó la clase sobre el valor absoluto. Fue aplicada el día 16 de octubre del 2012.

En la pregunta1: Coloca "V'' si la afirmación es verdadera o "F" si es falsa.

a) Si $x < 0$, entonces: $|-x| = -x$. En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 20, que es el 54% de los alumnos encuestados. El resultado nos indica que el grado de éxito de los alumnos ante esta pregunta es menor. Por lo tanto la tipificamos como **"Dificultad"**.
b) Si $x \geq 0$, entonces: $|-x| = x$. En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 18, que es el 48,6% de los alumnos encuestados. El resultado nos indica que el grado de éxito de los alumnos ante esta pregunta es menor. Por lo tanto la tipificamos como **"Dificultad"**.
c) Si $x < 0$, entonces: $|-x| = x$. En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 21, que es el 58,3% de los alumnos encuestados. Siguen teniendo grandes **"Dificultades"** al trabajar el valor absoluto con números negativos.

En la pregunta 2: Para todo número real x, ¿$-x<0$? Justifica tu respuesta.

En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 28, que es el 76% de los alumnos encuestados. Lo cual es una gran dificultad en la comprensión del concepto del valor absoluto. En nuestra opinión una posible explicación es que para los estudiantes, *x*, es un número positivo siempre, porque como norma matemática se les ha enseñado que los números negativos llevan un signo "–" delante de éste y al no tenerlo *x*, piensan que es positivo, sin distinguir que en este caso *x* es una variable que toma como valores también los números negativos. Por ello, consideramos esta dificultad como un "**Obstáculo**".

En la pregunta 3: Defina el valor absoluto de un número real a.

En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 18, que es el 48,6% de los alumnos encuestados. Esta acción la consideramos como **"Error"**, porque aún no tienen claro el concepto del valor absoluto de un número.

En la pregunta 4: Defina la función f(x), en términos de valor absoluto, siendo $f(x)=|2x-7|$ y señalando los valores correspondientes de x.

En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 32, que es el 86,5% de los alumnos encuestados. La gran mayoría señaló equivocadamente los valores de x. Esto es erróneo puesto que se debe de tomar que $2x - 7 \geq 0$, luego despejar x, obteniendo como restricción final $x \geq \frac{7}{2}$, lo cual es una gran dificultad en la comprensión del concepto del valor absoluto, a la que llamaremos "**Obstáculo**". Esto debido a que una posible explicación es que, en el proceso de enseñanza al definir el valor absoluto de un número solo se considera un valor constante o se representa por una constante y no hay términos algebraicos, como en este caso un binomio lineal, lo que genera un conflicto semiótico de tipo epistémico.

En la pregunta 5: Resuelve la siguiente ecuación: |2x-7|=-x+2

En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 26, que es el 70,3% de los alumnos encuestados. Generalmente porque no se les ha enseñado en la etapa escolar o en la etapa pre universitaria, además el profesor al resolver un problema similar, se confundió. Por lo tanto la tipificamos como **"Dificultad"**.

En la pregunta 6: Grafique la función f, definida por f(x) = |x + 2| - 7, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.

En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 33, que es el 89% de los alumnos encuestados. Los estudiantes no representan el valor absoluto en su forma gráfica y otros realizan gráficos que pertenecen a otra expresión. Generalmente porque no se les ha enseñado en la etapa escolar, en la etapa pre universitaria y en este caso hasta en la misma universidad, porque el profesor no resolvió problemas de este tipo. Por lo tanto la tipificamos como **"Dificultad"**.

En la pregunta 7: De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio p de las acciones de la compañía GAEL S.A.C. NO cambiarán de su precio actual de \$22 por más de \$ 5.

En ésta pregunta los alumnos respondieron de manera incorrecta en un número de 35, que es el 94,6% de los alumnos encuestados. Generalmente porque no se les ha enseñado

enseñado en la etapa escolar, en la etapa pre universitaria y en este caso hasta en la misma universidad, porque el profesor no resolvió problemas de este tipo. Por lo tanto la tipificamos como **"Dificultad"**.

4.3.2.2 Análisis del cuestionario 2: para los Profesores

Se elaboró el cuestionario 2 (ver apéndice 4) que se tomó para corroborar los conocimientos de los profesores sobre los diversos significados de referencia del valor absoluto. Fue aplicada el día 4 de Abril del 2013.

En la pregunta1: Coloca "V'' si la afirmación es verdadera o "F" si es falsa.

a) Si x < 0, entonces: |-x| = - x. En ésta pregunta 3 de los 4 profesores contestaron de manera incorrecta. Presentan dificultades al trabajar el valor absoluto con números negativos. Por lo tanto la tipificamos como **"Dificultad"**.
b) Si x ≥ 0, entonces: |-x| = x. En ésta pregunta 1 de los 4 profesores contestaron de manera incorrecta.
c) Si x < 0, entonces: |-x| = x. En ésta pregunta 2 de los 4 profesores contestaron de manera incorrecta. Presentan dificultades al trabajar el valor absoluto con números negativos. Por lo tanto la tipificamos como **"Dificultad"**.

En la pregunta 2: Para todo número real x, ¿- x<0? Justifica tu respuesta.

En ésta pregunta, 2 de los 4 profesores contestaron de manera incorrecta. Los profesores presentan dificultades al trabajar el valor absoluto con números negativos.

En la pregunta 3: Define el valor absoluto de un número real a.

En ésta pregunta, los 4 profesores contestaron de manera correcta.

En la pregunta 4: Define la función $f(x)$, cuya regla de correspondencia es $f(x) = |2x - 7|$, descomponiéndola por tramos.

En ésta pregunta, 3 de los 4 profesores contestaron de manera correcta.

En la pregunta 5. Resuelve la siguiente ecuación: $|2x-7|=-x+2$ de dos maneras distintas, de ser posible.

En ésta pregunta, 3 de los 4 profesores contestaron de manera incompleta. Los profesores resolvieron de una sola manera, utilizaron el teorema del valor absoluto para resolver ecuaciones. Por lo tanto la tipificamos como **“Dificultad”**.

En la pregunta 6. Grafica la función *f(x)*, definida por $f(x)=|x+2|-7$, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.

En ésta pregunta, 2 de los 4 profesores respondieron de manera incorrecta. Los profesores resolvieron el problema utilizando tabulaciones. Por lo tanto la tipificamos como **“Dificultad”**.

En la pregunta 7. Acciones en la bolsa de valores: De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio $\boldsymbol{p}$ de las acciones de la compañía GAEL S.A.C. **NO** cambiarán su precio actual que es de $22 por más de $ 5, durante el mes de diciembre. (Tener en cuenta que los precios de estas acciones, pueden subir y bajar).

En ésta pregunta, los 4 profesores respondieron de manera incompleta. No plantearon adecuadamente la solución de los problemas. Por lo tanto la tipificamos como **“Dificultad”**.

4.4 Descripción de la sesión de clase del profesor y su valoración mediante los criterios de idoneidad.

4.4.1 La noción de idoneidad epistémica (o matemática).

Un programa formativo, o un proceso de estudio matemático, tienen mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia. Dicho significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio y deberá ser elaborado teniendo en cuenta los diversos tipos de problemas y contextos de uso del contenido objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas. A continuación contrastamos el significado de referencia (mediante la guía de criterios de idoneidad) con el significado implementado (clase del profesor).

4.4.1.1 Situaciones-Problemas.

¿Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación del concepto del valor absoluto?

-El profesor no presenta problemas contextualizados, inició su clase con la definición de la función a trozos del valor absoluto. Los ejemplos de motivación y las aplicaciones para que resuelva el alumno estaban ausentes. Sólo presenta al inicio de la clase para ser desarrollado después:

$$|5x-2|=3$$

$$|7x-4|+2=0$$

$$|6-3x|=|2x+1|$$

¿Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) relacionados con la noción del valor absoluto?.

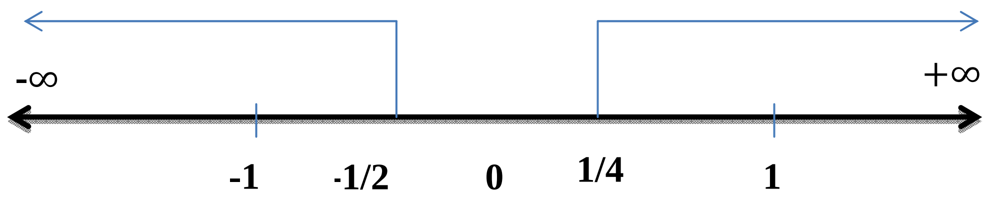
-El Profesor no infiere en la utilización del concepto del valor absoluto en temas relacionados al cálculo, la estadística, etc.

4.4.1.2 Lenguajes

¿Usa diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), sobre el valor absoluto?

-Gráfica:

El Profesor no usa la gráfica del valor absoluto, sólo grafica la recta de los números reales para trabajar intervalos tal como se muestra en la gráfica siguiente:



-Simboliza: el profesor presenta la siguiente simbología para las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto: $|x|, \wedge, \vee, \cup, \cap, \in, \leftrightarrow, \emptyset, \{\}, -\infty, +\infty, a = b, a = -b, a > b, a < b, a \geq b, \ a \leq b, < a; b >, [a; b], < a; b], [a; b, +, -, \frac{a}{b}$

-Expresión verbal: Número real, negativo, relación menor, conjunto solución, intervalo cerrado, números enteros, relación mayor, intervalos abiertos, relación mayor o igual, unión, intervalos semi-abiertos, etc.

¿El Nivel del lenguaje es el adecuado?

El Profesor no usa términos sencillos. Ejemplo: pero por otro lado también decimos que el valor absoluto de x es igual a menos x, si y sólo si x es menor que cero.

¿Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación acerca de la noción del valor absoluto?.

El profesor no analiza la definición. Plantea la definición de la función del valor absoluto y no la discute con los alumnos, no explica que es una función por partes. No interpreta la definición.

4.4.1.3 Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)

¿Las definiciones y procedimientos sobre el valor absoluto son claros y correctos, y están adaptados al nivel de educación superior?

No, las definiciones y procedimientos que utilizó el profesor no son claros, porque la notación que utilizó para presentar la definición de la función a trozos es confusa (utilizó el conectivo bicondicional), además el profesor sólo utilizó los teoremas y corolarios (no los explicó), durante la resolución de problemas presentó equivocaciones (con los signos) y no están totalmente adaptados al nivel superior porque faltó entre otros, separatas o diapositivas sobre el valor absoluto, los problemas no fueron bien estructurados respecto al grado de dificultad, no utilizó recursos informáticos, no presentó referencias bibliográficas, ni glosario de términos y no hubo demostraciones de algún teorema.

¿Presenta los diferentes usos del valor absoluto? No utiliza otras definiciones, sólo la de función a trozos. Menciona el término distancia y no desarrolla problemas utilizando distancia, reflexión, geometría, ni problemas contextualizados.

¿Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del concepto del valor absoluto para el nivel de educación superior?

El Profesor usa las propiedades del valor absoluto. Al resolver los problemas, utiliza los teoremas del valor absoluto, para el caso de las inecuaciones con valor absoluto el profesor a los teoremas, los llama caso y desarrollo que a continuación se muestra.

CASO	DESARROLLO
$\boldsymbol{|a| < b}$	$-b < a < b$
$\boldsymbol{|a| \leq b}$	$-b \leq a \leq b$
$\boldsymbol{|a| > b}$	$a < -b \vee a > b$
$\boldsymbol{|a| \geq b}$	$a \leq -b \vee a \geq b$

¿Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos sobre el valor absoluto?

No, los alumnos no generaron o negociar definiciones porque la clase fue eminentemente magistral. El profesor enuncia proposiciones sobre el concepto del valor absoluto. El profesor no presenta diferentes procedimientos en la resolución del problema. Sólo desarrolla las ecuaciones con valor absoluto, utilizando la definición: $|a|=b \leftrightarrow a=b \ \text{v} \ a=-b$, para $b \geq 0$. Para las inecuaciones con valor absoluto, utiliza caso y desarrollo mostrados anteriormente. No utiliza otros registros al desarrollar los problemas, que demuestren que existen definiciones equivalentes del valor absoluto.

4.4.1.4 Argumentos

¿Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones sobre el valor absoluto, son adecuadas para el nivel de educación superior?

Las explicaciones y comprobaciones, no son las adecuadas porque el profesor resuelve los problemas y se limita a encontrar las soluciones y no comprueba los resultados.

Las demostraciones de los teoremas son propias del nivel superior, sin embargo, el profesor no demuestra los teoremas sobre del concepto del valor absoluto (desigualdad triangular, producto, etc.), sólo las aplica.

¿Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar sobre el valor absoluto? No, durante la sesión de clases no se proponen situaciones que conlleven a la discusión y/o argumentación de problemas, en la que los alumnos puedan sustentar el planteamiento, desarrollo o la resolución de problemas.

4.4.1.5 Relaciones

¿Los objetos matemáticos alrededor del concepto del valor absoluto (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí? El profesor no menciona que la definición del valor absoluto (función a trozos) se utilizan y conectan temas como las funciones, las ecuaciones, igualdad, etc. El profesor utiliza la fórmula y los teoremas sin hacer mención de que éstas se conectan con las igualdades, funciones, ecuaciones, inecuaciones

4.4.2 Idoneidad cognitiva

El grado en el que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

4.4.2.1 Conocimientos previos.

¿Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del valor absoluto? Los estudiantes tienen poca noción de funciones, gráficas de funciones, igualdad, ecuaciones, inecuaciones, noción de distancia e intervalos. La evidencia considerada para hacer ésta aseveración corresponde a los resultados de la prueba diagnóstica, donde los alumnos muestran poco conocimiento sobre los temas antes mencionados.

En los resultados de la prueba diagnóstica, los alumnos muestran poco conocimiento sobre los temas antes mencionados.

¿Los contenidos pretendidos sobre el valor absoluto se pueden alcanzar? De manera muy limitada, porque los estudiantes desconocen los diferentes usos del valor absoluto y porque la clase fue magistral. Los resultados obtenidos en el cuestionario 1 evidencian esta información.

¿Los estudiantes comprenden el concepto del valor absoluto? No la comprenden porque al inicio de la clase el profesor presentó la siguiente definición:

$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & si\ x < 0 \end{cases}$ y luego usó la siguiente notación:

|w|=a ↔ w = a v w = -a . Confundiendo a los alumnos. Algunos estudiantes no comprenden las propiedades del concepto del valor absoluto.

4.4.2.2 Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

¿Se incluyen actividades de ampliación y refuerzo? ¿El profesor deja tareas?. El profesor dejó una serie de problemas todos muy parecidos y para ser desarrollados algebraicamente. No pide que grafiquen. El profesor proporcionó solo una hoja con 10 problemas. No indica libros de consulta. No proporciona una dirección electrónica o página web a los estudiantes.

Los problemas que se parecen sí, pero aquellos que son distintos no tienen idea como iniciar.

¿Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes? En su gran mayoría los estudiantes desarrollan incorrectamente los ejercicios, aplican las definiciones y propiedades del valor absoluto, pero no comprueban, ni argumentan.

4.4.2.3 Aprendizaje

¿Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación del concepto del valor absoluto (comprensión y competencia)?.

-Los estudiantes resuelven problemas en la pizarra.

-No, porque la clase fue magistral.

-Los estudiantes son evaluados en forma oral. El profesor preguntaba en algunas oportunidades, sobre la definición del valor absoluto.

-Los estudiantes son evaluados en forma escrita. En la siguiente sesión fueron evaluados con el cuestionario 1

-Comprensión conceptual y proposicional: competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; competencia meta cognitiva.

El profesor hace preguntas sobre el concepto del valor absoluto. Las hace siempre en relación a la función a trozos, las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. El alumno no argumenta sus procedimientos y respuestas. Sólo llega a los resultados y no verifica o analiza las soluciones. Plantean en forma errónea. Tienen dificultades al resolver las ecuaciones con valor absoluto: $|a|=b$, sólo toman la parte positiva de $a=b$ y no la parte negativa($a=-b$)

¿La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y de competencia del concepto del valor absoluto?. No, sin embargo debería evaluar teniendo los siguientes criterios:

-El alumno plantea el problema.

-El alumno resuelve pero se equivoca en el procedimiento.

-El alumno resuelve el problema, pero no comprueba sus resultados.

-El alumno resuelve el problema correctamente y comprueba sus resultados.

¿Los resultados de las evaluaciones sobre el valor absoluto se difunden y usan para tomar decisiones? Los alumnos comparan los resultados de sus evaluaciones. Los alumnos en su gran mayoría, sí comparan sus resultados con las respuestas dadas por el profesor.

4.4.3 Idoneidad mediacional

Es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y a su vez incrementar el aprendizaje de los estudiantes". Las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales en una educación matemática de alta calidad.

Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores).

¿Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido? El profesor utiliza sólo la pizarra. El profesor no utiliza diapositivas ni software.

¿Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones? El profesor no propone problemas motivadores, sólo utiliza la algoritmización. No propone problemas contextualizados

Número de alumnos, horario y condiciones de aula. El número y las distribuciones de los alumnos permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida. La clase fue superpoblada hubieron 37 alumnos en un espacio reducido. Los alumnos en su gran mayoría se ubican en las últimas carpetas.

El horario del curso es apropiado. El curso se dictó en las primeras horas(8-10 a.m./ 18:00- 20:00) El curso se dictó en la cuarta hora, de 10:50-12:30, algunos alumnos llegaron tarde después del intermedio.

El curso se dictó en el penúltimo día de la semana. Se desarrolló un jueves.

¿El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido? La iluminación no es la adecuada en el aula para la instrucción, la pizarra brilla demasiado. El aula contiene proyectores para el proceso de instrucción, pero el profesor no la utilizó.

¿Usan los alumnos computadoras/laptop? No, sólo lapicero, papel o cuaderno

Tiempo (De enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje).

¿El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida?.

El tema se desarrolla durante 2 sesiones de 2 horas (total 4 horas), un jueves la teoría y la evaluación el martes, lo cual para un tema tan importante, consideramos que deben ser necesarios por lo menos 6 horas de clase. El tema no se desarrolló de manera virtual, lo cual hubiese contribuido a complementar y afianzar aún más el tema del valor absoluto.

¿Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema? El profesor utiliza más tiempo en el aspecto práctico, muy poco en el aspecto teórico. El profesor debería utilizar proporcionalmente los tiempos tanto en el aspecto teórico como el práctico.

¿Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión? No porque según la programación curricular el tema del valor absoluto debe desarrollarse sólo en una semana. El profesor asesora a los alumnos fuera del horario de clase en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión. Algunos alumnos no entendieron y el profesor, los citó para trabajar una tarde.

¿El profesor prepara material extra para que los alumnos investiguen o complementen sus conocimientos? No proporcionó separatas, sólo proporcionó una hoja de problemas que les dio a sus alumnos con 10 problemas propuestos, todos para ser desarrollados de manera algebraica.

4.4.4 Idoneidad afectiva

La mayor o menor idoneidad afectiva, se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.

Intereses y necesidades: ¿Las tareas sobre el valor absoluto, tienen interés para los estudiantes? No se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad del valor absoluto en la vida cotidiana y profesional. No hubo una motivación previa, por lo tanto no hubo un compromiso por parte de los alumnos en la clase.

Actitudes

¿Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc? El profesor no invita a la participación de los alumnos a la pizarra, porque es una clase eminentemente magistral y algorítmica. No se favorece a la argumentación. Cuando los alumnos responden a las esporádicas preguntas del profesor, él no las califica, ni las registra en el portafolio del docente. Los alumnos responden y el profesor las escucha y resuelve el problema.

Emociones.

Se promueve la autoestima en forma mínima, no o evita el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. No se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

4.4.5 Idoneidad interaccional

Se valora positivamente la presencia de momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje. Los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos.

-Interacción docente-discente. El profesor no hace una presentación adecuada del concepto del valor absoluto, debería presentar primero el valor absoluto de un número mediante la definición de distancia, luego la reflexión, geometría, función a trozos y luego problemas contextualizados, finalizando con el uso del software para el valor absoluto. (no hay una presentación clara y bien organizada, no enfatiza los conceptos clave). El profesor tiene dificultades de notación, de conceptos y de usos del valor absoluto.

Interacción entre alumnos.

No reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen pocas preguntas y respuestas adecuadas). No hay debate entre los alumnos, así como entre el profesor y el alumno, por lo tanto no pueden argumentar, porque el profesor no generó un conflicto cognitivo. No trabajaron en grupo, porque fue una clase magistral. Muy poca comunicación entre los estudiantes. Pocos tratan de resolver los problemas, no hubo motivación.

Autonomía

No se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio, (no plantean cuestiones; escaza exploración de ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; poca variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos), porque es una clase magistral.

Evaluación formativa. Sólo se evaluó una vez. No hubo observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

4.4.6 Idoneidad ecológica

Se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno (la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas) en que se utiliza. Las matemáticas pueden desarrollar en los estudiantes un pensamiento crítico y alternativo.

Adaptaciones al currículo.

¿Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares? El valor absoluto se contempla dentro del sílabo de Matemática Básica del primer ciclo del nivel superior, específicamente dentro de la unidad de aprendizaje de los números reales.

Apertura hacia la innovación didáctica

Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TICS, etc) en el proyecto educativo. Muy poca apertura por parte de la administración, no entienden que en la actualidad las matemáticas podrían ser más significativas, si se usaran ordenadores (uso de laboratorio de cómputo) para comparar los resultados, para graficar y dar soluciones en particular en el caso del valor absoluto. Existen notebooks y proyectores, pero el profesor no los usa.

Adaptación socio-profesional y cultural: El valor absoluto y sus aplicaciones contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.

Educación en valores .

Se contempla la formación en valores democráticos y poco pensamiento crítico, por ser la clase eminentemente magistral.

Conexiones intra e interdisciplinares.

Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares. El valor absoluto es un tema fundamental y se relaciona con otros contenidos matemáticos: en el cálculo (limites, derivadas) y en estadística (prueba de los rangos de signos de wilcoxon), etc.

4.5 Configuración epistémica idónea del objeto valor absoluto

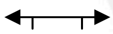
A continuación se presenta la configuración epistémica del concepto valor absoluto en sus diversos contextos, que ha sido elaborada teniendo en cuenta las sesiones de clases, que ayudarían a superar los errores, dificultades y obstáculos que se presentan en el aprendizaje del VA.

Configuración epistémica idónea emergente del concepto del valor absoluto

LENGUAJE

1) **VERBAL:** Valor Absoluto de un número, distancia entre dos puntos, ecuaciones, inecuaciones, igualdad, desigualdad, intervalos, conjuntos, ejemplos, si y sólo si, unión, intersección, mayor, menor, mayor o igual, menor o igual, margen de error, precio promedio, precio más alto, precio más bajo, función por partes, máximo, composición, métrica, vectorial, aritmética, coordenadas, cuantificador universal, gráfica de la función valor absoluto.

2) **GRÁFICO:**
Figura: distancia entre dos puntos



A B

Figura geométrica de la función Valor Absoluto.

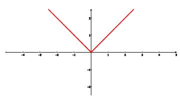
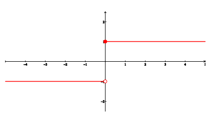


Figura de una función a trozos



3) **SIMBÓLICO:** $|x|, \wedge, \vee, \cup, \cap, \in, \leftrightarrow, \emptyset, \{\}, -\infty, +\infty, a=b, a=-b, a>b, a<b, a\geq b, a\leq b, <a;b>, [a;b], <a;b], [a;b>, +, -, \frac{a}{b}$, máx$\{x,-x\}$, $\sqrt{x^2}$, d(x,0), d(A,O)

SITUACIONES	CONCEPTOS
1-Presentación de los diversos usos o significados del valor absoluto.	**PREVIOS:** **Función a Trozos**: Las funciones del tipo

2-Problemas sobre ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto vistos dentro del contexto topológico. 3-Problemas sobre el valor absoluto visto como reflexión. 4-Problemas sobre el valor absoluto visto como función. 5-Problemas sobre ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto desarrollados en forma algebraica. 6-Problemas contextualizados sobre la noción del valor absoluto, donde se resuelven problemas sobre adelanto y tolerancia, mínimo y máximo, margen de error, variación del precio (precio más alto y más bajo). 7-La función valor absoluto y el uso de la tecnología. 6-La función valor absoluto y su gráfica.	f(x)=y, donde una misma fórmula nos describe el comportamiento de la función en todo su dominio. Sin embargo podemos tener funciones seccionadas que tienen distinto comportamiento, los cuales dependen de los valores del dominio. **Composición:** Si f y g son funciones, la composición de f con g, es la función fog, definida por (fog)(x) =f(g(x)), donde el dominio de fog es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que g(x) está en el dominio de f. **Métrico:** Es todo aquello relativo o referido al metro o a la medida. **Distancia en el plano:** Es la menor medida posible entre dos puntos x e y que debe cumplir con las siguientes condiciones: a) d(X,Y)=0, si y sólo si X=Y b) d(X,Y)=d(Y,X) c) d(X,Z) ≤ d(X,Y)+d(Y,Z) **Aritmética:** Llamada también la ciencia de los números. Es la parte de la matemática que se ocupa de estudiar al número desde el punto de vista de las operaciones que se pueden realizar con ellos y las relaciones y propiedades que presentan. **Ecuación:** Es un enunciado numérico abierto, relacionado con el signo igual(=); es decir, es una igualdad condicional de dos expresiones algebraicas que queda satisfecha sólo para algunos valores

	asignados a sus letras. Al buscar tales valores estas letras reciben el nombre de incógnitas y a esta búsqueda se le llama Resolución de una ecuación. **Inecuación:** Es una desigualdad entre expresiones que contienen variables y que solamente se cumple para determinados valores o en un determinado intervalo. **Gráfica:** Es la representación de datos numéricos mediante el empleo de figuras o signos.
	EMERGENTES
	1-La noción del valor absoluto de un número real visto como distancia en *IR*. 2-Gráfica de la función valor absoluto obtenida mediante transformaciones como la reflexión de parte de una función lineal afín. 3-La función valor absoluto, como función por partes. 4-Problemas contextualizados utilizando la noción del valor absoluto. 5- La gráfica de la función valor absoluto mediante el uso de softwares. 6-La gráfica de la función valor absoluto.
PROCEDIMIENTOS	**PROPOSICIONES (Emergentes)**
Hallar el valor absoluto de un número real, visto como distancia.	Distancia entre dos puntos: $d(A,O) = a = \|a-0\| = \|a\|$ $d(B,O) = b = \|b-0\| = \|b\|$
Reconocer la función valor absoluto, como reflexión.	Reflexión con respecto del eje X, de la parte negativa de la gráfica: y=x
-Reconocer la función valor absoluto, como	Función por partes:

<table>
<tr><td>función por partes.</td><td>$$|x| = \begin{cases} x\ ;\ x \geq 0 \\ -x\ ;\ x < 0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>-Resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.</td><td>$|a| = b \leftrightarrow a = b \ \vee \ a = -b \ , para\ b \geq 0$
<table>
<tr><td>Teorema 1</td><td>$|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$</td></tr>
<tr><td>Corolario 1</td><td>$|a| < b \leftrightarrow -b < a < b$</td></tr>
<tr><td>Teorema 2</td><td>$|a| \geq b \leftrightarrow$
$a \leq -b \vee a \geq b$</td></tr>
<tr><td>Corolario 2</td><td>$|a| > b \leftrightarrow$
$a < -b \vee a > b$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>- Resolver problemas contextualizados.</td><td>Precio o costo promedio.</td></tr>
<tr><td>-Graficar la función valor absoluto utilizando el comando “abs” en el Software Libre Geogebra.</td><td>Abs(x); abs(x+2); abs(x+2)+7, …..</td></tr>
<tr><td>-Ubicar la gráfica de la función valor absoluto, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.</td><td>-Punto de intersección de la gráfica con el eje X
-Punto de intersección de la gráfica con el eje Y</td></tr>
<tr><td colspan="2">ARGUMENTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tesis: Algunos problemas contextualizados se podrán resolver usando el valor absoluto.
Caso 1: En el horario de ingreso del trabajador, hallamos el intervalo de adelanto y tolerancia en la que podrá marcar el trabajador su ingreso.
Caso 2: En el peso promedio de una bolsa de arroz encontramos el peso mínimo y máximo que podría tener una bolsa de arroz
Caso 3: En el promedio de ingresos mensuales con un margen de error ubicamos entre que valores estarán los ingresos mensuales.
Caso 4: En el precio promedio de una casa con una cierta variación debido a la oferta y la demanda encontramos el precio más alto y el más bajo de una casa.
Tesis: El valor absoluto de un número real expresado como distancia siempre es mayor o igual que cero.
Argumento:
Caso 1: Si el número real a con coordenada A, es positivo. Entonces: $d(A, O) = |a - 0| = |a| = a$
Caso 2: Si el número real a con coordenada A es negativo. Entonces: $d(A, O) = |-a - 0| =$</td></tr>
</table>

$|-a| = |a| = a$

Caso 3: Si el número real a con coordenada O, es cero. Entonces: $|a| = 0$

Tesis: Sea $f(x)$ una función con valor absoluto, su gráfica es de la forma "V"

$\forall x \in R$, $\forall a, b \in R$, entonces:

Casos	Vértices	Punto de intersección con el	
		Eje X	Eje Y
$si\ f(x) = \lvert x\rvert$	(0,0)	-	-
$si\ f(x) = \lvert x + a\rvert$	$(-a, 0)$	$(-a, 0)$	$(0, \lvert a\rvert)$
$si\ f(x) = \lvert x - a\rvert$	$(a, 0)$	$(a, 0)$	$(0, \lvert a\rvert)$

Luego de analizar la clase del profesor mediante los criterios de idoneidad del EOS, se puede observar que el profesor es el que no maneja todos los usos del valor absoluto. La sospecha nuestra ahora estaba en comprobar que los profesores tienen problemas con el concepto del valor absoluto, por lo tanto ya no nos dedicaremos a estudiar a los alumnos sino a los profesores y la noción que tengan los profesores acerca de los usos del valor absoluto. Se tomó el cuestionario 2 a tres profesores de la Universidad y un profesor de un Instituto Público, luego se les realizó una entrevista (donde se observó que desconocían los usos del valor absoluto: como el de distancia, reflexión, geometría, contextualización, uso de software para graficar la función valor absoluto) obteniendo como resultado, que los profesores sólo conocen la función a trozos y que existen en ellos errores, dificultades y obstáculos. Para tratar de superar éstos errores, dificultades y obstáculos es que ahora nuestra investigación se direcciona en realizar una secuencia de tareas didácticas (propuesta de tareas), con la finalidad de enseñar todos los usos o aplicaciones que tiene el valor absoluto.

CAPÍTULO 5

PROPUESTA DE TAREAS. DISEÑO DE SESIONES Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

Resumen

Este capítulo responde al objetivo 1.5.2 *Diseñar una secuencia de tareas didácticas para los profesores del primer ciclo del nivel universitario, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS: epistémico, cognitivo y mediacional*, en la *que se traten los diversos significados o usos del valor absoluto, que podrían ayudar a superar los errores, las dificultades y los obstáculos descritos en el capítulo 2 Para el logro del objetivo hemos tomado en cuenta tanto los significados de referencia como los significados pretendidos del objeto valor absoluto analizados en el capítulo 3, y de los criterios de idoneidad didácticos: epistémico, cognitivo y mediacional del EOS para la elaboración y la organización de las sesiones de clases.*

5.1 Descripción general del diseño de las tareas didácticas

Para el diseño, el eje central se centra en la idoneidad didáctica, mencionada en la metodología de este trabajo de investigación (capítulo 2).

Para el diseño de tareas didácticas se realizará una secuencia de tareas con la finalidad de tratar de superar los errores, las dificultades y los obstáculos acerca del concepto del valor absoluto detectados en el capítulo 4 de este trabajo. Se realizarán una secuencia de sesiones de clases con representatividad (holo-significado) y donde se propicie una buena interacción.

Como mencionamos, vistas las dificultades que presentaban los profesores, sujetos de estudio, al tratar de usar el valor absoluto para dar respuestas a las preguntas del cuestionario 2 (ver apéndice 4), decidimos replantear uno de los objetivos de nuestra investigación y preparar la secuencia de tareas dirigidas inicialmente a los alumnos de la Universidad Privada Telesup, ahora, dirigidas a los profesores que enseñan en el primer ciclo del nivel universitario y de manera de ayudarlos en su formación permanente. Los profesores mediante entrevistas y cuestionarios manifiestan que desconocen los diferentes significados o usos del valor absoluto.

Se presenta un cuestionario con la finalidad de medir el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) “Sesiones Didácticas” son adecuados para los alumnos, es decir verificar si están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

Se elabora una secuencia de tareas, estructuradas por sesiones, cuyo objetivo es tratar de superar los obstáculos didácticos encontrados en la enseñanza y aprendizaje del valor absoluto.

5.2 Secuencia de sesiones didácticas

En primer lugar se presenta una actividad a la que denominamos “Evaluación de Entrada” que será de carácter exploratorio, consistente en resolver en forma individual y/o grupal, utilizando lápiz y papel un conjunto de preguntas sobre los diferentes contextos del valor absoluto.

Objetivo: Obtener un panorama del nivel cognitivo de los alumnos respecto a la noción del valor absoluto.

Esta sesión pretende brindar una propuesta con mayor ***idoneidad cognitiva*** en el uso del concepto del valor absoluto.

Luego, describimos la propuesta de las siete sesiones didácticas dirigidas a los profesores que enseñan a los alumnos del primer ciclo del nivel universitario de la Universidad Privada Telesup. En cada una de estas sesiones, cuya duración es de una hora pedagógica (aproximadamente 50 minutos) y que de acuerdo a la comprensión del alumno y el buen manejo del concepto por parte de los profesores en la clase, se verá incrementado o disminuido. Se establece primero el objetivo y luego presentaremos en qué consisten cada una de las sesiones, para finalmente dar las soluciones a cada tarea propuesta de dichas sesiones (ver apéndice 7).

Sesión 1: Diversos usos o significados del valor absoluto.

Objetivo: Describir los diversos usos o significados del valor absoluto.

Duración: 50 minutos aproximadamente.

Siendo el desconocimiento de los diversos usos o significados del valor absoluto, por parte de los profesores en ejercicio, sujetos de este estudio, uno de los aspectos álgidos por la poca preparación académica en este tema, creemos conveniente hacer una presentación global de dichos usos.

Esta sesión pretende brindar una propuesta con mayor ***idoneidad epistémica*** en el uso del concepto del valor absoluto.

Para ello, se presenta un gráfico con los diversos usos o significados del valor absoluto, el cual está dividido en cuatro contextos, que se detallan a continuación.

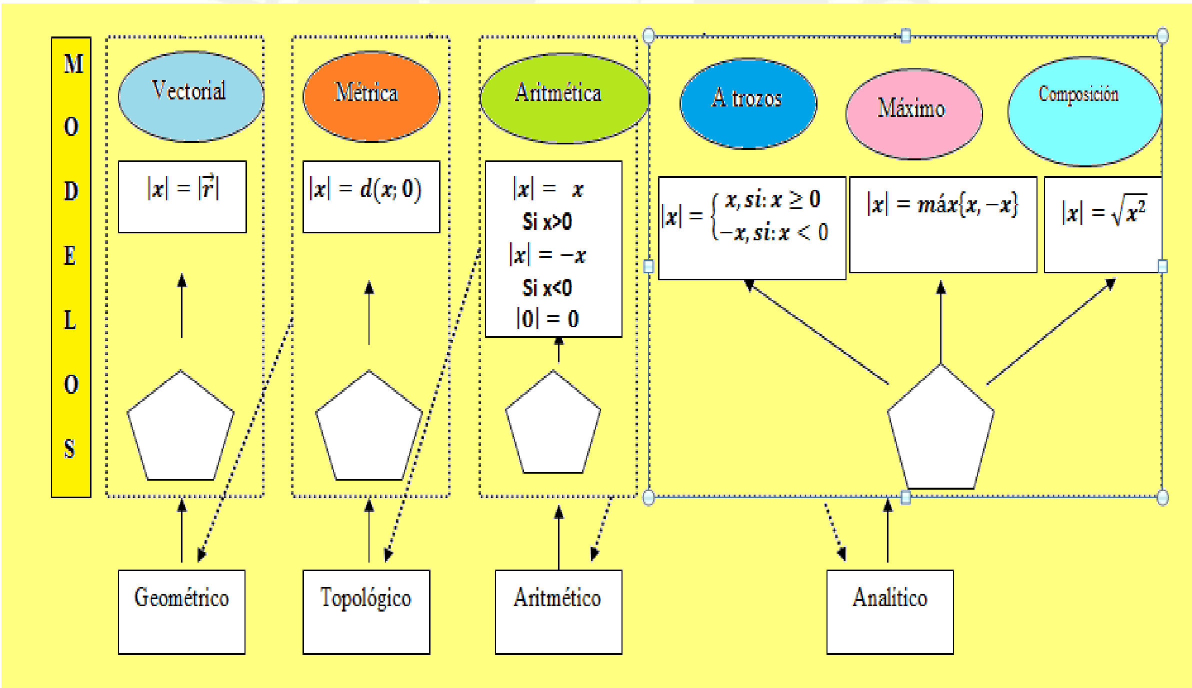
1. Contexto analítico: función a trozos, máximo, composición.

2. Contexto topológico: métrica (distancia).

3. Contexto geométrico: vectorial.

4. Contexto aritmético: aritmética.

El gráfico siguiente resume los diversos significados asociados al valor absoluto.



Adaptación: Estructuración de los modelos y significados asociados al valor absoluto de Wilhelmi (2007)

Cada definición representa un objeto emergente de un sistema de prácticas en un determinado contexto de uso.

Cada binomio "objeto emergente-sistemas de prácticas" determinan un modelo del concepto del VA. El modelo es pues una forma coherente de estructurar los diferentes contextos de uso, las prácticas matemáticas relativas a los mismos y los objetos emergentes de tales prácticas; constituyendo una red o configuración epistémica local (asociada a un contexto de uso específico).

Luego, se presenta el concepto y un ejemplo para cada modelo (función a trozos, máximo, composición, métrica, vectorial, aritmética) del valor absoluto. Finalmente, se muestra las soluciones de los modelos del valor absoluto.

Sesión 2: El valor absoluto de un número real, visto dentro del contexto topológico– métrico "como Distancia".

Duración: 50 minutos aproximadamente

Objetivo: Definir el concepto del valor absoluto en términos de distancia.

Hemos tomado en cuenta para la elaboración de esta sesión, la revisión de los textos y artículos sobre el valor absoluto visto como distancia, y observamos que existe muy poca información en cuanto a la parte teórica y con respecto a la resolución de problemas que involucran a las ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, bajo este modelo (valor absoluto visto como distancia) es escaza. Esta sesión pretende brindar una propuesta con mayor ***idoneidad epistémica*** en el uso del concepto del valor absoluto.

Para ello, primero hacemos una distinción entre puntos y coordenadas mediante un gráfico, luego presentamos la definición del valor absoluto en términos de distancia. Seguidamente desarrollamos tareas sobre ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, utilizando el contexto topológico.

Sesión 3: El valor absoluto y la reflexión de la función lineal y de la función afín sobre el eje de las abscisas.

Duración: 50 minutos aproximadamente

Objetivo: Graficar la función valor absoluto usando algunas transformaciones como la reflexión de una parte de una recta.

Se pretende mostrar la gráfica de la función valor absoluto (distinta representación, lenguaje gráfico); un uso diferente a la expresión matemática simbólica. Esta sesión pretende brindar una propuesta con mayor ***idoneidad epistémica*** en el uso del concepto del valor absoluto y responde a la necesidad de tratar de superar los errores, las dificultades y los obstáculos del concepto del valor absoluto, así como también para presentar otra forma de graficarla mediante el uso o tratamiento de las reflexiones que en las literaturas y textos antes mencionados no han sido desarrollados.

Se da inicio a esta sesión con la definición de reflexión sobre un eje, mencionamos sus características, luego presentamos nuestra primera tarea en la cual se pide graficar la función valor absoluto, aplicando la reflexión (puede utilizar el software Geogebra para realizar las gráficas). Se presentan ejemplos donde aparecen las transformaciones para la función valor absoluto, aplicando reflexiones. Finalmente, se desarrollan ecuaciones e inecuaciones de primer grado con valor absoluto, utilizando reflexiones.

El profesor explica a sus alumnos que la gráfica del valor absoluto, puede ser trasladada horizontal y/o verticalmente. En este caso el vértice no será el origen de coordenadas sino un punto del plano tal como (h, k).

Sesión 4: El valor absoluto visto dentro del contexto analítico "como Función".

Duración: 50 minutos aproximadamente.

Objetivo: Aplicar el concepto del valor absoluto visto como función.

Esta sesión intenta presentar una propuesta con mayor ***idoneidad epistémica*** en el uso del concepto del valor absoluto y responde a la necesidad de tratar de superar los errores que comúnmente cometen los alumnos al no considerar la función valor absoluto como una función por partes, lo cual impide que haya un adecuado análisis en cuanto a las interrogantes que se puedan generar alrededor de la definición de la función valor absoluto, es decir que el estudiante pueda representar gráficamente, expresar en forma literal y viceversa las funciones y en forma particular, la del valor absoluto.

Presentamos la idea de una función por partes, luego mostramos algunas tareas relacionadas al tema (en forma gráfica), posteriormente desarrollamos tareas de análisis, se dio solución a cada una de las tareas partiendo de casos particulares a casos generales, en el anexo o apéndice correspondiente al final de las sesiones.

Sesión 5: Problemas contextualizados con el valor absoluto.

Duración: 50 minutos aproximadamente.

Objetivo: Aplicar el concepto del valor absoluto en situaciones reales.

Esta sesión responde a tratar de presentar una propuesta con mayor ***idoneidad epistémica*** mediante la presentación de situaciones de contextualización y aplicación (situaciones problemas) del concepto del valor absoluto.

Se inicia la sesión con el concepto de problema contextualizado, luego un tema motivador y luego se introducen problemas donde aparece la idea de adelantos y atrasos, máximos y mínimos y margen de error. Para luego presentar el problema con valor absoluto sobre el mercado de viviendas.

Sesión 6: La función valor absoluto y el uso de la tecnología (software Geogebra).

Duración: 50 minutos aproximadamente

Objetivo: Utilizar la tecnología (software) para graficar la función valor absoluto.

Esta sesión responde a tratar de presentar una propuesta con mayor ***idoneidad mediacional*** mediante el uso de materiales manipulativos e informáticos que permitan introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos y argumentaciones del concepto valor absoluto.

Se da a conocer el software libre Geogebra y los pasos que este programa necesita para su aplicación. Luego, se trabajan las gráficas de las funciones con valor absoluto, utilizando el software Geogebra. Trabajar con este software resulta beneficioso en primer lugar porque es de dominio público y en segundo lugar porque su uso permite formular conjeturas, verificando gráficamente dichas conjeturas.

Sesión 7: La función valor absoluto y su gráfica.

Duración: 50 minutos aproximadamente.

Objetivo: Aplicar y construir la gráfica de la función valor absoluto.

Esta sesión tratar de superar los errores, las dificultades y obstáculos que los estudiantes tienen cuando grafican la función valor absoluto, y se pretende además mostrar a la función valor absoluto mediante su expresión gráfica (distinto lenguaje); un uso diferente a la expresión matemática simbólica. Esta sesión pretende brindar una propuesta con mayor ***idoneidad epistémica*** en el uso del concepto del valor absoluto.

Primero se presentan lo pasos para hallar la gráfica de la función valor absoluto de la forma: $f(x) = |x \ \pm h|$ y luego se describen los pasos para representar gráficamente la función de la forma $f(x) = |x \pm h| \pm k$. Posteriormente se muestran tareas con diversos casos, con la finalidad de utilizar los pasos (criterios) para graficar funciones con valor absoluto.

5.2.1 SESIÓN 1: DIVERSOS USOS O SIGNIFICADOS DEL VALOR ABSOLUTO.

El profesor inicia la sesión comentando el proceso evolutivo del concepto del valor absoluto (desarrollado en el capítulo 2). Luego el profesor hablará sobre Cauchy y mencionará que en su obra "Curso de Análisis" en la parte de preliminares aparece ya el germen del concepto de valor absoluto. (Cerizola, 2005, p.3).

A continuación el docente hace un recorrido por los diferentes modelos del concepto del valor absoluto (significados del valor absoluto) indicando sus respectivos contextos.

Así, los modelos función a trozos, máximo y composición son trabajados en el contexto analítico; el modelo vectorial es estudiado en el contexto geométrico; el modelo métrico es trabajado tanto en el contexto geométrico como topológico; el modelo aritmético es usado tanto en el contexto topológico como en el aritmético.

Finalmente mostramos ejemplos de los usos de los diversos modelos: función a trozos, máximo, composición, aritmético y métrico, en alguno de los contextos mencionados:

Contexto Analítico

1) **Función a Trozos**

Concepto	Ejemplo
$|x| = \begin{cases} x; Si\ x \geq 0 \\ -x, Si\ x < 0 \end{cases}$	Halle |3| Como 3>0, entonces de la definición, $|3| = 3$ Halle |– 3 | Como – 3 <0, entonces de la definición |– 3 |= – (– 3)=3 Si: $x = 3 \vee x = -3$, el valor absoluto de

	dichos números siempre es 3, lo cual se denota por: $$\lvert x\rvert = 3$$

2) Máximo

Concepto	Ejemplo
$\lvert x\rvert = máx\ \{x\ ,-x\}$	¿Cuál es el máximo de 3 y -3? $máx\ \{3\ ,-3\}$ = 3 $por\ ser\ 3\ el\ mayor\ valor$ $entre\ 3\ \ y-3$, lo cual denotamos por: $$\lvert x\rvert = 3$$

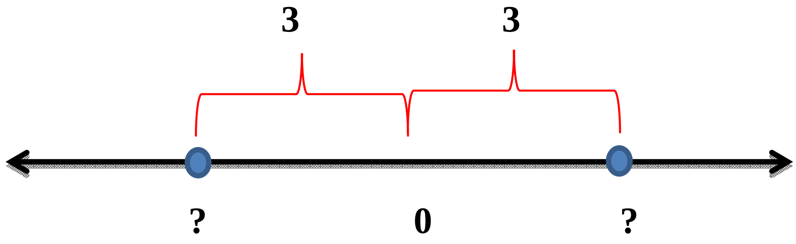
3) Composición

Concepto	Ejemplo
$\lvert x\rvert = \sqrt{x^2}$	Si $\sqrt{x^2}$ =3, halle el valor o los valores de x. Los valores posibles son: $$x = 3\ \vee x = -3$$ lo cual se denota por: $$\lvert x\rvert = 3$$

Contexto Topológico

1) Métrica

Concepto	Ejemplo
En $\boldsymbol{R}$: $\lvert x\rvert = d(x;0)$	¿Cuáles son las coordenadas del punto P cuya distancia al punto de coordenada 0 es tres unidades?

	 $\rightarrow\ d(3{,}0) = \lvert 3 \rvert$, Porque hay 3 unidades de distancia con respecto al origen (0). De la gráfica se observa que los valores (coordenadas) que cumplen la condición son : $x = 3\ \vee x = -3$ lo cual se denota por: $\lvert x \rvert = 3$

Contexto Aritmético

1) Aritmética

Concepto	Ejemplo
$\lvert x \rvert = x\,; Si\ x > 0$ $\lvert x \rvert = -x\,; Si\ x < 0$ $\lvert 0 \rvert = 0$	Halle el valor o los valores de x, si $\lvert x \rvert = 3\,;$ $Si\ \ x > 0$, entonces: x =3 Si x < 0, entonces: $x = -3$ Es decir: Si $x = 3\ \vee x = -3$, entonces $\lvert x \rvert = 3$

CINCO MODELOS UNA MISMA ECUACIÓN CON VALOR ABSOLUTO

TAREA: Resuelve la ecuación $\lvert x - 3 \rvert = 1$

La resolución de la ecuación $\lvert x - 3 \rvert = 1$ se puede realizar de diversas formas (modelos):

1. **Modelo aritmético**, dada la ecuación $\lvert x - 3 \rvert = 1$ seguiremos el siguiente razonamiento:

   1° Si el valor absoluto de un número es 1, entonces éste número es 1 ó – 1;

2°¿Qué número, al restarle 3, da 1 como respuesta? ………………..

¿Qué número, al restarle 3, da -1 como respuesta?………………

Los números 4 y 2 serán las respuestas esperadas.

La formalización de este método puede hacerse de la siguiente forma:

$$|x-3| = 1$$

Equivale a decir: x - 3 = 1 ó x – 3 = -1

De donde, x = 4 ó x = 2

2. **Modelo a Trozos**, según la definición función a trozos

$$|x| = \begin{cases} x, si \ \ x \geq 0 \\ -x, \ \ si \ \ x < 0 \end{cases}$$

Luego,

$$|(x-3\,)| = \begin{cases} (\,x-3), & si \ \ x \geq 3 \\ -(x-3\,), & si \ \ x < 3 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$|x-3| = 1$$

Equivale a decir:

$$Si \quad x \geq 3, \quad x-3 = 1 \qquad \vee \qquad Si \ \ x < 3, \quad -(\,x-3\,) = 1$$

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = 2$$

3. **Modelo Composición**, según la definición funcional compuesta

$$|x-3| = 1$$

Lo que equivale a: $\sqrt{(x-3)^2} = 1$

Elevando al cuadrado: $(x-3)^2 = 1$

Desarrollando el binomio: $x^2 - 6x + 9 = 1$

Simplificando: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Factorizando: $(x-4)(x-2) = 0$

Luego: $x = 4$ ó $x = 2$

4. **Modelo Máximo**, según la definición función máximo

Puesto que $|x-3| = máx\,\{\,x-3;\ -(x-3)\,\}$, la demostración se reduce al proceso realizado según la definición función a trozos.

$$|x-3| = máx\,\{\,x-3;\ -(x-3)\,\}$$

$$|(x-3)| = \begin{cases} máx\,\{\,x-3;\ -(x-3)\,\} = (\,x-3), & si\ \ x \geq 3 \\ máx\,\{\,x-3;\ -(x-3)\,\} = -(x-3\,), & si\ \ x < 3 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$|x-3| = 1$$

Equivale a decir:

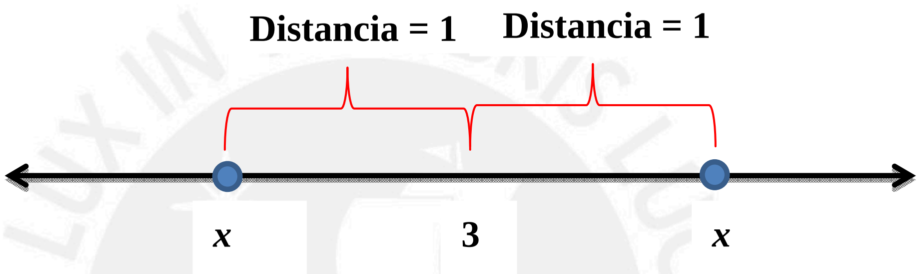
$$Si \quad x \geq 3, \quad x-3=1 \qquad \vee \qquad Si\ \ x<3, \quad -(\,x-3\,)=1$$

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = 2$$

5. **Modelo Métrico**, según la definición métrica

Puesto que $|x-3| = d(x;3)$, se tiene que x es un punto de la recta real tal que la distancia al entero 3 es 1.

Gráficamente:

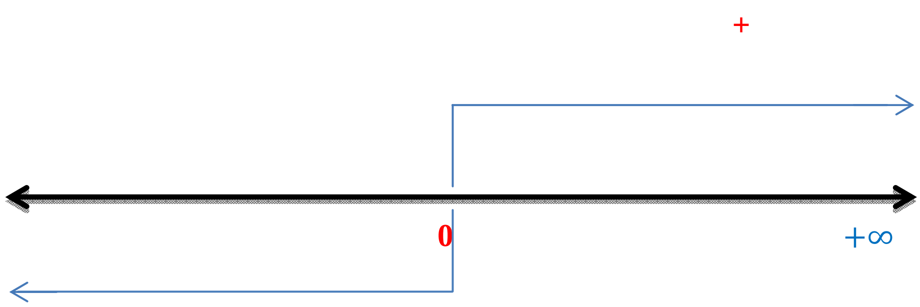


De esta manera, $x = 3 \pm 1$; esto es $x = 2$ ó $x = 4$.

5.2.2 SESIÓN 2: EL VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL VISTO DENTRO DEL CONTEXTO TOPOLÓGICO-MÉTRICO "COMO DISTANCIA"

La recta numérica:

Es la representación geométrica de los números reales.

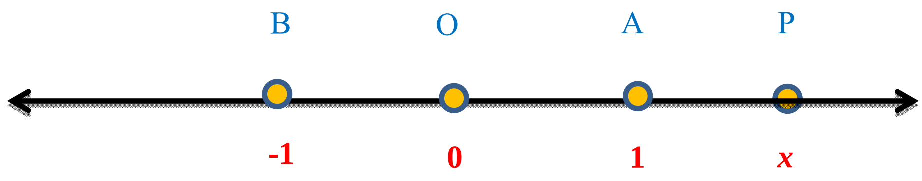


Números negativos (-)

Sistema coordenado lineal:

A la correspondencia que existe entre puntos de una recta y los números reales se denomina sistema coordenado lineal.

Por ejemplo, considere la siguiente figura:



De la figura podemos observar que los puntos B, O, A, P tienen por coordenada unidimensional a los números -1, 0, 1 y "x" respectivamente.

TAREA 1.

Considere los puntos A, O y Q, cuyas coordenadas son – 8, 0 y 5, respectivamente. Calcule

a) La distancia del punto A al punto O, d (A, O) = ……….
b) La distancia del punto O al punto O, d (O, O) = ……….
c) La distancia del punto Q al punto O, d (Q, O) = ……….

TAREA 2.

Halle las coordenadas de un punto P, cuya distancia del punto de coordenada cero es:

a) dos unidades
b) cero unidades
c) 3,5 unidades
d) $\sqrt{5}$ unidades

TAREA 3.

Halle las coordenadas de un punto Q, cuya distancia del punto de coordenada cero es:

a) Menos de dos unidades
b) Menos de cinco unidades
c) Más de 3,5 unidades

d) Más de 8 unidades

Distancia

Sea A un punto en la recta real con coordenada a y el origen O de coordenada 0. La distancia del punto A al punto O de coordenada, que se denota por $d(A, O)$ se define como:

$$d(A, O) = a, si\ a > 0$$

$$d(A, O) = -a, si\ a < 0$$

Definición del valor absoluto de un número

Se define el valor absoluto de un número real a como la distancia del punto de coordenada a al origen de coordenadas y se denota por $|a|$.

Caso1. Si $a \geq 0$, $|a| = d(A, O) = |a - 0| = a$
Caso 2. Si $a < 0$, $|a| = d(A, O) = |-a - 0| = a$
Lo que simplificamos:

$$|a| = \begin{cases} a, Si\ a \geq 0 \\ -a, Si\ a < 0 \end{cases}$$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

TAREA 4.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan del origen en 7 unidades?
b) Represente $|x| = 7$ utilizando el modelo de distancia.
c) Represente gráficamente la ecuación $|x| = 7$.
d) Halle el conjunto solución de $|x| = 7$.
e) Exprese el significado de $|x| = 7$ en forma literal.

TAREA 5.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan de la coordenada lineal 2, en 7 unidades?
b) Represente $|x - 2| = 7$ utilizando el modelo de distancia.
c) Represente gráficamente la ecuación $|x - 2| = 7$.

d) Halle el conjunto solución de $|x - 2| = 7$.

e) Exprese el significado de $|x - 2| = 7$ en forma literal.

TAREA 6.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan de la coordenada lineal -2, en 7 unidades?
b) Represente $|x + 2| = 7$ utilizando el modelo de distancia.
c) Represente gráficamente la ecuación $|x + 2| = 7$.
d) Halle el conjunto solución de $|x + 2| = 7$.
e) Exprese el significado de $|x + 2| = 7$ en forma literal.

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

TAREA 7.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan del origen en menos de 7 unidades?
b) Represente $|x| < 7$ utilizando el modelo de distancia.
c) Represente gráficamente la ecuación $|x| < 7$.
d) Exprese el significado de $|x| < 7$ en forma literal.
e) Halle el conjunto solución de $|x| < 7$.

TAREA 8.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan del origen en más de 7 unidades?
b) Represente $|x| > 7$ utilizando el modelo de distancia.
c) Represente gráficamente la ecuación $|x| > 7$.
d) Exprese el significado de $|x| > 7$ en forma literal.
e) Halle el conjunto solución de $|x| > 7$.

TAREA 9.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan de la coordenada lineal 2, en menos de 7 unidades?
b) Represente $|x - 2| < 7$ utilizando el modelo de distancia.
c) Represente gráficamente la ecuación $|x - 2| < 7$.

d) Halle el conjunto solución de $|x-2|<7$.

e) Exprese el significado de $|x-2|<7$ en forma literal.

TAREA 10.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan de la coordenada lineal 2, en 7 unidades o más?

b) Represente $|x-2| \geq 7$ utilizando el modelo de distancia.

c) Represente gráficamente la ecuación $|x-2| \geq 7$.

d) Exprese el significado de $|x-2| \geq 7$ en forma literal.

e) Halle el conjunto solución de $|x-2| \geq 7$.

TAREA 11.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos que distan de la coordenada lineal -2, en 7 unidades o más?

b) Represente $|x+2| \geq 7$ utilizando el modelo de distancia.

c) Represente gráficamente la ecuación $|x+2| \geq 7$.

d) Exprese el significado de $|x+2| \geq 7$ en forma literal.

e) Halle el conjunto solución de $|x+2| \geq 7$.

5.2.3 SESIÓN 3: EL VALOR ABSOLUTO Y LA REFLEXIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL Y DE LA FUNCIÓN AFÍN SOBRE EL EJE DE LAS ABSCISAS.

Traslaciones

Sea $y = f(x)$ una función de variable real.

$y = f(x) + 2$	Gráficamente, representa la traslación vertical (transformación) de la gráfica de f, 2 unidades hacia arriba
$y = f(x+2)$	Gráficamente, representa la traslación horizontal (transformación) de la gráfica de f, 2 unidades a la izquierda
$y = -f(x)$	Gráficamente representa la reflexión (transformación) de la gráfica de f respecto al eje X

$y = -f(x+3)+1$ Traslación de 3 unidades a la izquierda, reflexión respecto al eje X y traslación de 1 unidad hacia arriba.

Reflexión de un punto alrededor de una recta $\mathcal{L}$.

Dada una recta $\mathcal{L}$, la reflexión del punto P que tiene coordenadas (a, b) con respecto de esta recta, es otro punto Q, cuyas coordenadas son (c, d) tal que al trazar el segmento $\overline{PQ}$, la recta $\mathcal{L}$ es mediatriz del segmento $\overline{PQ}$.

Una reflexión es una transformación geométrica rígida (no varía la ubicación de los puntos).

Tipos de reflexiones:

Sea $y = f(x)$ la gráfica original.

$y = -f(x)$ es la reflexión respecto al eje X de la gráfica original.

$y = f(-x)$ es la reflexión respecto al eje Y de la gráfica original.

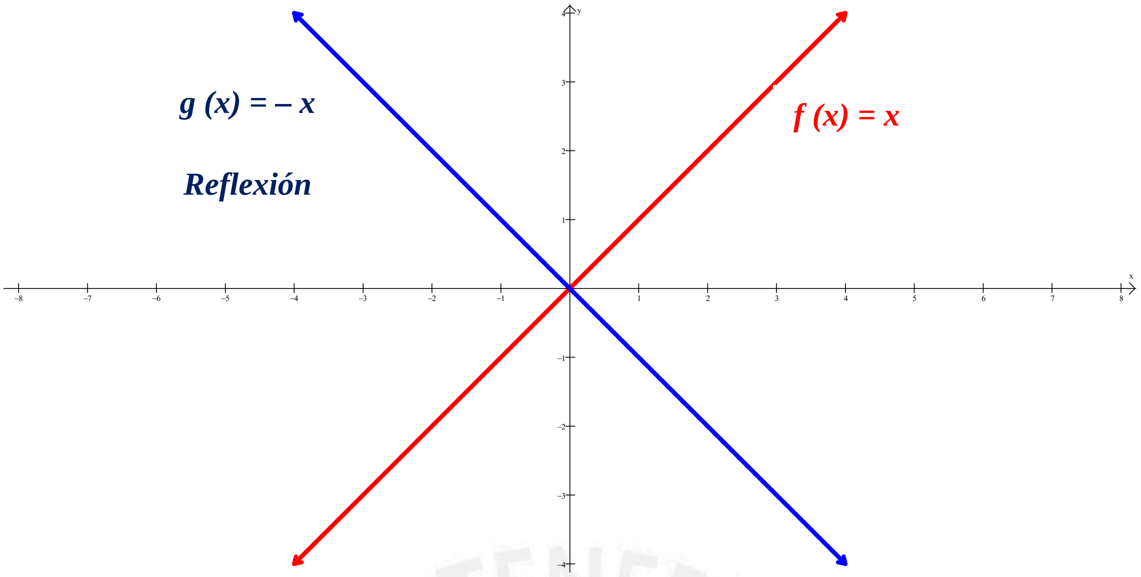
$y = -f(-x)$ es la reflexión respecto al origen de la gráfica original.

Características de las reflexiones

- Un objeto y su reflexión son simétricos sobre la recta de reflexión.
- Un objeto y su reflexión son congruentes.
- Un objeto y su reflexión son similares.
- Si un objeto reflejado es otra vez reflejado, el objeto resultante es coincidente con el objeto original.

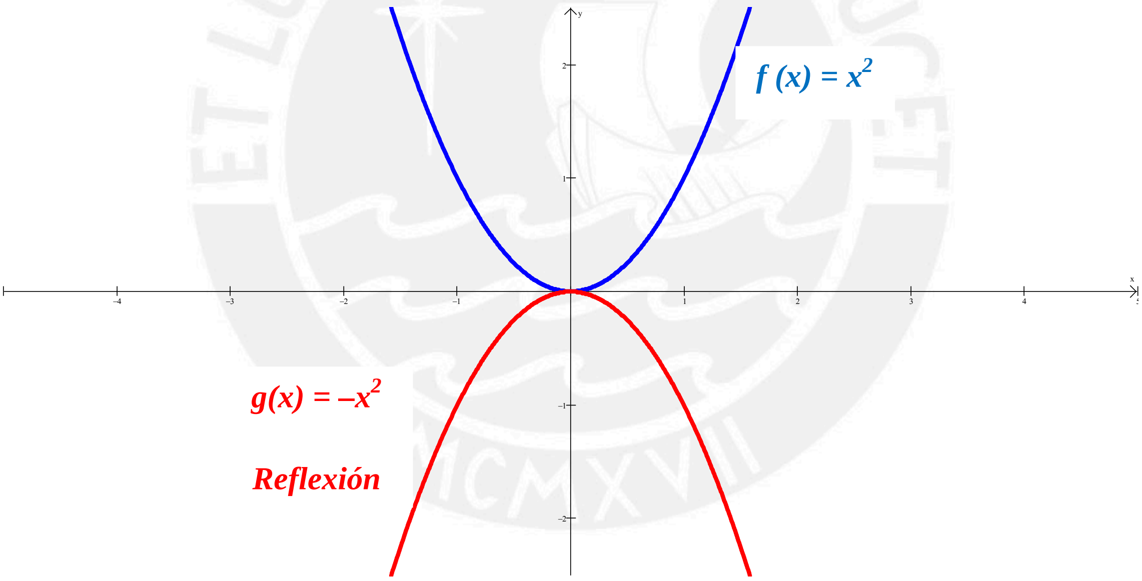
Ejemplo 1: Sea $f(x) = x$ (función identidad)

La gráfica $g(x) = -f(x) = -x$ es la reflexión de la gráfica de $y = f(x) = x$ sobre el eje X.



Ejemplo 2: Sea $f(x) = x^2$

La gráfica $g(x) = -f(x) = -x^2$ es la reflexión de la gráfica de $y = f(x) = x^2$ sobre el eje x.



TAREA 1. Grafique la función la función f definida por $f(x) = |x|$. Para ello, siga el procedimiento siguiente (se sugiere trabajar con lápiz):

1. Grafique la función g definida por $g(x) = x$.
2. Restrinja el dominio de la función g, considerando solo los valores no negativos de x y grafique esta nueva función g_1.
3. Identifique los valores negativos de $g(x)$ en la gráfica obtenida en el paso 1, lo que llamaremos la parte negativa de la gráfica de g.

4. Refleje con respecto al eje *X* la parte negativa de la gráfica de g identificada en el paso 3, y llámelo g_2.
5. Presente en un plano coordenado cartesiano, la unión de la gráfica g_1 obtenida en el paso 2 y la gráfica reflejada g_2 en el paso 4.

Responda a las siguientes preguntas

a) ¿Qué valores toma *g* (*x*) cuando *x* ≥0?

b) ¿Qué valores toma *g* (*x*) cuando *x* <0?

c) ¿Cuál sería la definición de *f*, tomando en cuenta la definición de *g*?

d) ¿Qué función representa la gráfica obtenida en el paso 5?

TAREA 2. Grafique $y = |x - 2|$ siguiendo los pasos que se muestran a continuación.

Para ello, siga el procedimiento siguiente (se le sugiere trabajar con lápiz):

1. Grafique la función *g* definida por $g(x) = x - 2$.
2. Restrinja el dominio de la función *g*, considerando solo los valores no negativos de *x-2* y grafique esta nueva función g_1.
3. Identifique los valores negativos de *g*(*x*) en la gráfica obtenida en el paso 1, lo que llamaremos la parte negativa de la gráfica de *g*.
4. Refleje con respecto del eje *X* la parte negativa de la gráfica de g identificada en el paso 3, y llámelo g_2.
5. Presente en un plano coordenado cartesiano, la unión de la gráfica g_1 obtenida en el paso 2 y la gráfica reflejada g_2 en el paso 4.

Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué valores toma *g* (*x*) cuando *x* ≥0?

b) ¿Qué valores toma *g*(*x*) cuando *x* <0?

c) ¿Cuál sería la definición de *f*, tomando en cuenta la definición de *g*?

d) ¿Qué función representa la gráfica obtenida en el paso 5?

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO USANDO GRÁFICAS

Una vez institucionalizada la gráfica del valor absoluto, procedemos a resolver ecuaciones con valor absoluto.

TAREA 3. Resuelve $|x-2|=2$, realizando los siguientes pasos:

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x)=|x-2|$ y $g(x)=2$
2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de f y g del paso 1.
3) Las soluciones de la ecuación $|x-2|=2$, son las abscisas de los puntos de intersección hallados en el paso 2.

TAREA 4. Resuelve $|x-2|=x$, realizando los siguientes pasos:

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x)=|x-2|$ y $g(x)=x$
2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de f y g del paso 1.
3) Las soluciones de la ecuación $|x-2|=x$, son las abscisas de los puntos de intersección hallados en el paso 2.

TAREA 5. Resuelve $|x-2|=-2$, realizando los siguientes pasos:

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x)=|x-2|$ y $g(x)=-2$
2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de f y g del paso 1.
3) Las soluciones de la ecuación $|x-2|=-2$, son las abscisas de los puntos de intersección hallados en el paso 2.

TAREA 6. Resuelve $|x+2|=3x+4$, realizando los siguientes pasos:

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x)=|x+2|$ y $g(x)=3x+4$
2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de f y g del paso 1.
3) Las soluciones de la ecuación $|x+2|=3x+4$, son las abscisas de los puntos de intersección hallados en el paso 2.

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO USANDO GRÁFICAS

TAREA 7. Resuelve $|x-2|<2$, realizando los siguientes pasos:

Para ello,

1) Grafique en un mismo plano coordenado: $f(x) = |x - 2|$ y $g(x) = 2$
2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de las funciones f y g del paso 1
3) Observe las gráficas del paso 1 y los puntos de intersección hallados en el paso 2 y a continuación determine todos los puntos para los cuales valores de $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $f(x) < g(x)$. Las abscisas de dichos puntos, son los elementos del conjunto solución de la inecuación $|x - 2| < 2$.

TAREA 8. Resuelve $|x + 2| < 3x + 4$**,** realizando los siguientes pasos:

Para ello,

1) Grafique en un mismo plano coordenado: $f(x) = |x + 2|$ y $g(x) = 3x + 4$
2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de las funciones f y g del paso 1.
3) Observe las gráficas del paso 1 y los puntos de intersección hallados en el paso 2 y a continuación determine todos los puntos para los cuales valores de $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $f(x) < g(x)$. Las abscisas de dichos puntos, son los elementos del conjunto solución de la inecuación $|x + 2| < 3x + 4$.

5.2.4 SESIÓN 4: EL VALOR ABSOLUTO VISTO DENTRO DEL CONTEXTO ANALÍTICO: COMO FUNCIÓN

Dominio y recorrido o rango de una función: El dominio de una función puede describirse de manera explícita, o bien de manera implícita mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función.

Por ejemplo: la función dada por

$|x| = x; x \geq 0$

Tiene un dominio definido de manera explícita dado por $\{x: x \geq 0\}$.

Por otra parte la función dada por

$|x| = x$

Tiene un dominio implícito: es el conjunto $\{x: x \geq 0\}$.

Función por partes o secciones: es aquella función que, para distintas partes del dominio, tiene diferentes reglas de correspondencia.

Por ejemplo:

$$si\ x \geq 0, \text{ entonces } |x| = x$$

$$si\ x < 0, \text{ entonces } |x| = -x$$

Valor absoluto de un número (una dimensión "la recta de los números reales")

Si x es un número real, entonces el valor absoluto de x, denotado por $|x|$, se define por

$$|x| = \begin{cases} +x\ ;\ si\ x \geq 0 \\ -x\ ;\ si\ x < 0 \end{cases}$$

Teorema: El valor absoluto del producto de dos números reales a y b es igual al producto de sus valores absolutos.

$$|ab| = |a|.|b|$$

Teorema: El valor absoluto del cociente de dos números reales a y b ($b \neq 0$) es igual al cociente de sus valores absolutos.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Teorema: El valor absoluto de la suma de 2 números reales, a y b, es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Valor absoluto visto como función (dos dimensiones-"plano cartesiano")

Si f es una función real de variable real, entonces el valor absoluto de $f(x)$, denotado por $|f(x)|$, se define por

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x)\ ;\ si\ f(x) \geq 0 \\ -f(x); si\ f(x) < 0 \end{cases}$$

TAREA 1: Sea la función $f(x) = |2x + 4|$

a) Indique la regla de correspondencia en cada caso:

- Cuando $x \geq -2$
- Cuando $x < -2$

b) Organice los dominios explícitos de la parte a) de esta tarea, con sus respectivas reglas de correspondencias en una sola función (función por partes)

c) Complete el sentido de las siguientes proposiciones:

- Si igualamos la función $f(x) = 2|x+2|$ a cero entonces encontramos que el valor de $x = -2$, representa al: ……….…………………………………………
- Con respecto a la función, cuya regla de correspondencia es $f(x) = 2|x+2|$, el número 4 representa:

  ……………………………………………………………………………………

d) Halle el punto simétrico de (0,4) con respecto a la recta $x = -2$.

e) Con los pasos del ítem e) construya la gráfica de $f(x) = 2|x+2|$

TAREA 2. Realice los pasos: a,b,c,d,e y f de la tarea 1 para la siguiente función.
$f(x) = |2x - 7|$

TAREA 3. Realice los pasos: a,b,c,d y e de la tarea 1 para la siguiente función.

$f(x) = |4 - 2x|$

TAREA 4. Realice los pasos: a,b,c,d,e y f de la tarea 1 para la siguiente función.
$f(x) = |2x - 7| + 5$

TAREA 5. Grafique la función f e identifique su dominio y rango en cada tramo, si su regla de correspondencia está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ ; \ si\ x \geq 0 \\ 1 \ ; si\ x < 0 \end{cases}$$

TAREA 6. Responda los siguientes enunciados, colocando "V" si la proposición es verdadera o "F" si es falsa.

Si $x < 0$, entonces $|x| = x$ ( )

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ ( )

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ ( )

Si $x > 0$, entonces: $|x| = -x$ ( )

Para todo número real x ¿$-x < 0$? ( )

TAREA 7. Halle una regla equivalente y el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |2x + 4|$
b) $f(x) = |2x - 7|$
c) $f(x) = |4 - 2x|$
d) $|2x - 7| + 5$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

A continuación formalizamos algunas propiedades del valor absoluto.

TEOREMA PARA LA ECUACIÓN CON VALOR ABSOLUTO

1. $|a| = b \leftrightarrow a = b \vee a = -b \,;\, b \geq 0$

TEOREMA PARA LAS INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1. $|a| \leq b \leftrightarrow b \geq 0 \quad \wedge -b \leq a \leq b \;;\, (-b \leq a \;\wedge\; a \leq b)$

2. $|a| < b \leftrightarrow b > 0 \quad \wedge -b < a < b \;;\, (-b < a \;\wedge\; a < b)$

3. $|a| \geq b \leftrightarrow a \geq b \;\vee\; a \leq -b$

4. $|a| > b \leftrightarrow a > b \;\vee\; a < -b$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VALOR ABSOLUTO USANDO TEOREMAS

TAREA 8. Resuelva: $|x| = 1$, para ello realice los siguientes pasos:

a) Describa el teorema a utilizar.
b) Halle el conjunto solución.
c) Verifique los resultados del conjunto solución.

TAREA 9. Resuelva: $|x| = -1$, para ello realice los siguientes pasos:

a) Describa el teorema a utilizar.

b) Halle el conjunto solución.

TAREA 10. Resuelva: $|x+3| = 1$, para ello realice los siguientes pasos:

a) Describa el teorema a utilizar.

b) Halle el conjunto solución.

c) Verifique los resultados del conjunto solución.

TAREA 11. Resuelva: $|2x-7| = x+2$, para ello realice los siguientes pasos:

a) Describa el teorema a utilizar.

b) Halle la restricción.

c) Halle el conjunto solución.

d) Verifique los resultados del conjunto solución.

TAREA 12. Resuelva: $|x+3| = 1+x$, para ello realice los siguientes pasos:

a) Describa el teorema a utilizar.

b) Halle la restricción.

c) Halle el conjunto solución.

d) Verifique los resultados del conjunto solución.

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VALOR ABSOLUTO USANDO TEOREMAS

TAREA 13. Resuelva: $|2x+1| > 2$, para ello realice los siguientes pasos:

a) Describa el teorema a utilizar.

b) Aplicando el teorema adecuado, halle las inecuaciones resultantes.

c) Grafique los intervalos del inciso b, en la recta numérica.

d) Halle el conjunto solución.

TAREA 14. Resuelva: $|x+6| < 3-2x$, para ello realice los siguientes pasos:

a) Describa el teorema a utilizar.

b) Halle la restricción de la inecuación.

c) Aplique el teorema adecuado, halle las inecuaciones resultantes.

d) Grafique los intervalos del inciso b, en la recta numérica.

e) Halle el conjunto solución.

5.2.5 SESIÓN 5: PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

Concepto.- Las Cuestiones Prácticas (o problemas contextualizados) se suelen proponer en relación a un conocimiento matemático concreto con la finalidad de fijar dicho conocimiento. Mantienen cierta conexión con la vida real o, de alguna manera, resultan ser una aplicación de la matemática en situaciones reales o a otras ciencias. Sus enunciados son verbales, también contienen indicios de los procedimientos que se espera sean utilizados normalmente relacionados con el contexto del enunciado (Contreras, 2009).

TAREA 1: La hora de ingreso de un trabajador a una empresa es a las 7h30'. Para marcar su ingreso lo hace en un sensor digital, y mediante este sistema puede hacerlo sólo con un adelanto y una tolerancia de 15 minutos (± 15 minutos) .

a) Indique esta situación en términos de valor absoluto.

b) ¿Entre qué horas podrá marcar el trabajador su ingreso?

TAREA 2: El peso promedio de una bolsa de arroz es de 1kg (1000 gramos). Si la información estadística en el área de control de calidad revela que los pesos promedios de las bolsas se arroz tienen un margen de error de ± 5 gramos.

a) Indique esta situación en términos de valor absoluto.

b) Indique el peso mínimo y el peso máximo que podría tener una bolsa de arroz.

TAREA 3: Una muestra de 100 hogares de una ciudad, revela que el promedio de los ingresos mensuales es de \$ 600, con un margen de error de $\pm$ \$ 50.

a) Indique esta situación en términos de valor absoluto.

b) Indique el ingreso máximo y el ingreso mínimo mensual de un hogar.

TAREA 4: Suponga que el precio promedio P (en dólares) de un departamento en Miraflores es de \$250 000 pudiendo variar su precio en $\pm$ \$ 30 000.

a) Indique esta situación en términos de valor absoluto.

b) Indique el precio mínimo y el precio máximo de un departamento en Miraflores.

TAREA 5: La temperatura promedio en Lima según Senamhi durante el verano del 2013 fue de 29.3°. Además considerando que la temperatura puede variar en $\pm 4°$, indique:

a) Esta situación en términos de valor absoluto.

b) La temperatura máxima durante el verano del 2013 en la ciudad de Lima.

c) La temperatura mínima durante el verano del 2013 en la ciudad de Lima.

5.2.6 SESIÓN 6: LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO Y EL USO DE LA TECNOLOGÍA

A continuación presentamos una secuencia de tareas en donde se graficará la función valor absoluto, mediante el uso de un software de geometría. Podemos utilizar diversos softwares, como por ejemplo: Geogebra, Winplot, Matlab 2013, etc. En nuestro trabajo de investigación utilizaremos el software libre "Geogebra".

Para el caso del valor absoluto, utilizamos el comando: abs(x), que significa el valor absoluto de x. Comando que es utilizado en la mayoría de los softwares matemáticos.

Presentamos algunos ejemplos:

Notación matemática	Comando a usar
$\|x\|$	abs(x)
$\|x+5\|$	abs(x+5)
$\|2x-5\|$	abs(2x-5)
$7\|2x+5\|-\|7x\|$	7(abs(2x+5)) - abs(7x)
$-\left\|\frac{2x+1}{5}\right\|$	-abs($(2x+1)/5$)
$\|x+5\|\ +7$	abs(x+5) + 7

SOFTWARE: GEOGEBRA

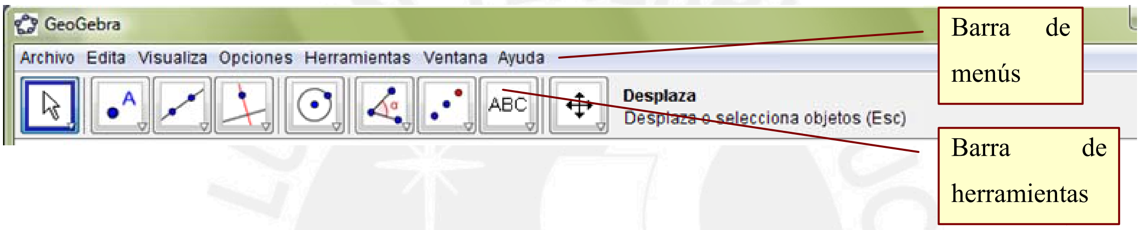
Para trabajar en geometría es importante ver las figuras objeto de nuestro estudio y manipularlas. Antes de la invención del papel, los antiguos geómetras dibujaban sobre la arena u otros materiales. Hasta hoy y durante siglos la Geometría se ha servido del papel, el lápiz y otros instrumentos de dibujo. Desde hace unos años es posible sustituir el cuaderno por la pantalla del ordenador y los lápices, reglas, compás, etc. por el ratón y el teclado. ***GeoGebra*** es uno de los programas diseñados con ese fin.

Puesta en marcha del programa

Para arrancar el programa, haz doble clic sobre el icono que está en el *Escritorio*. (Si no encuentras el icono en el *Escritorio*, acceder desde *Inicio/Todos los programas/GeoGebra/GeoGebra*)

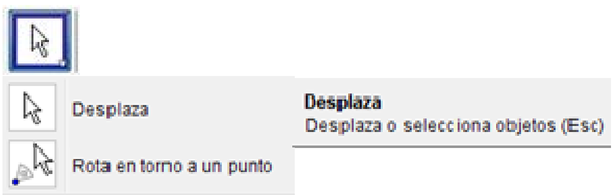
INICIACIÓN. Elementos básicos y nociones previas

1) Barras de la ventana principal.

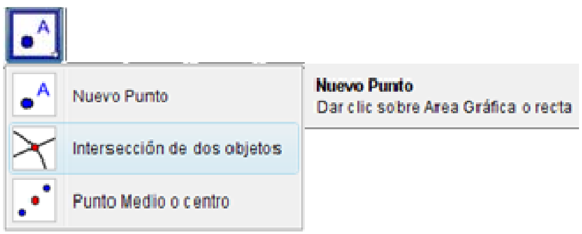


2) Opciones de la barra de herramientas.

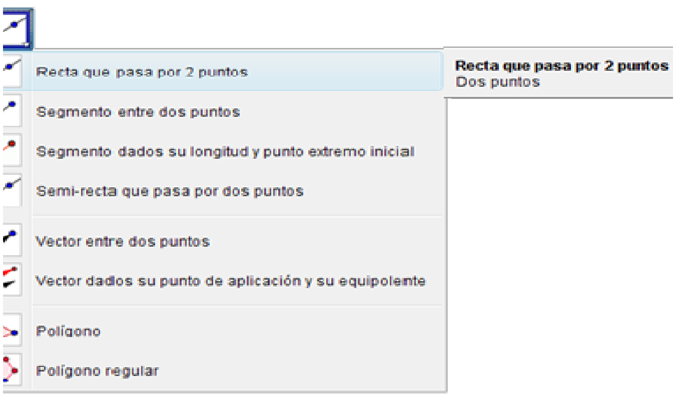
a) Selección de objetos y desplazamientos



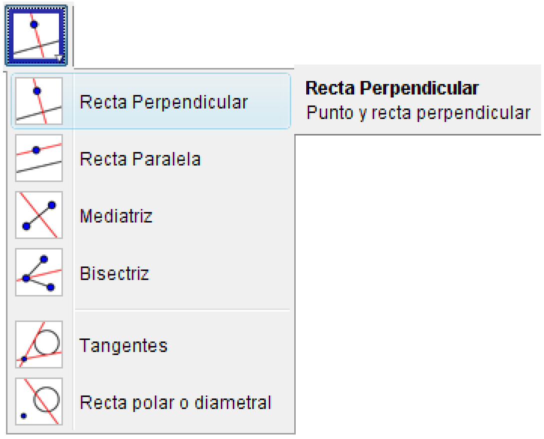
b)



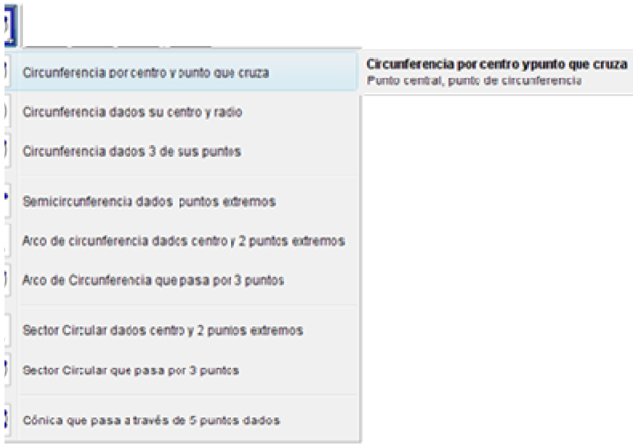
c) Trazado de distintos tipos de rectas y polígonos.



d) Lugares geométricos.

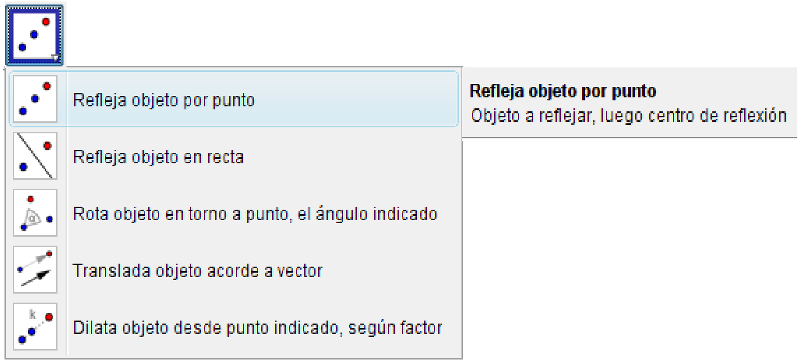


e) Circunferencias, arcos y sectores circulares.

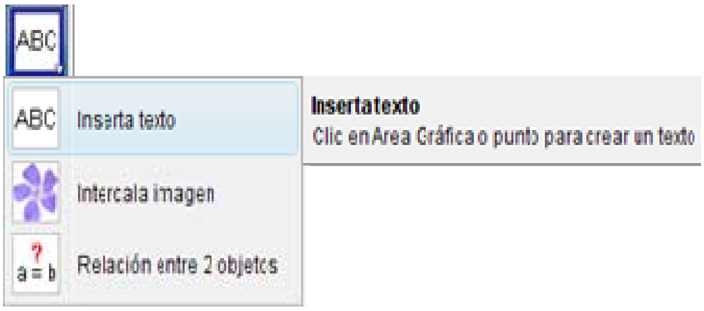


f) Ángulos. Distancias, áreas y elementos de programación de movimientos.

g) Simetrías, traslaciones y rotaciones.



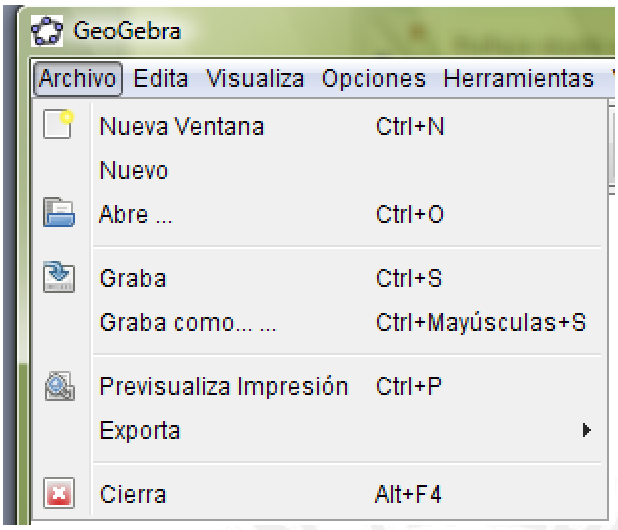
h) Comparaciones, texto e imágenes.



i) Desplazamientos de pantalla, zoom, copiar estilo y borrado.

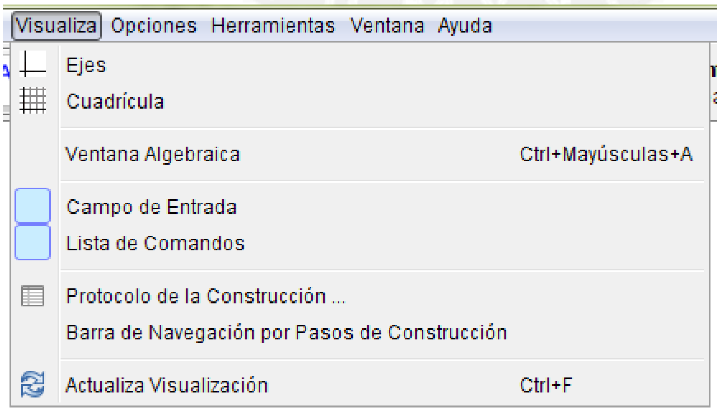
3) Opciones de la barra de menús (menús desplegables)

a) Opciones de inicio y cierre.

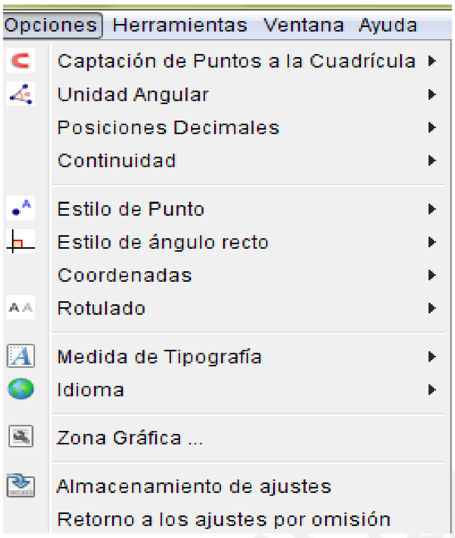


b) Opciones de edición.

c) Configuración del área de trabajo opciones de configuración Web.

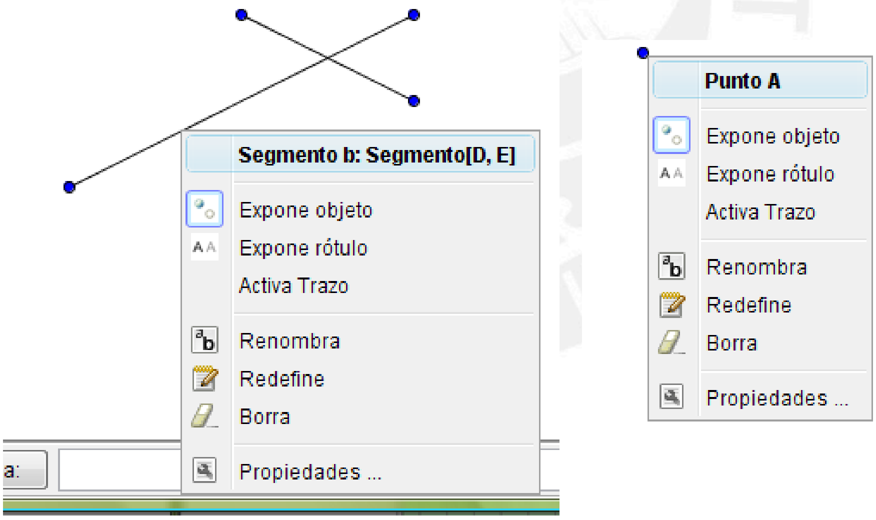


d) Ajustes gráficos y numéricos.

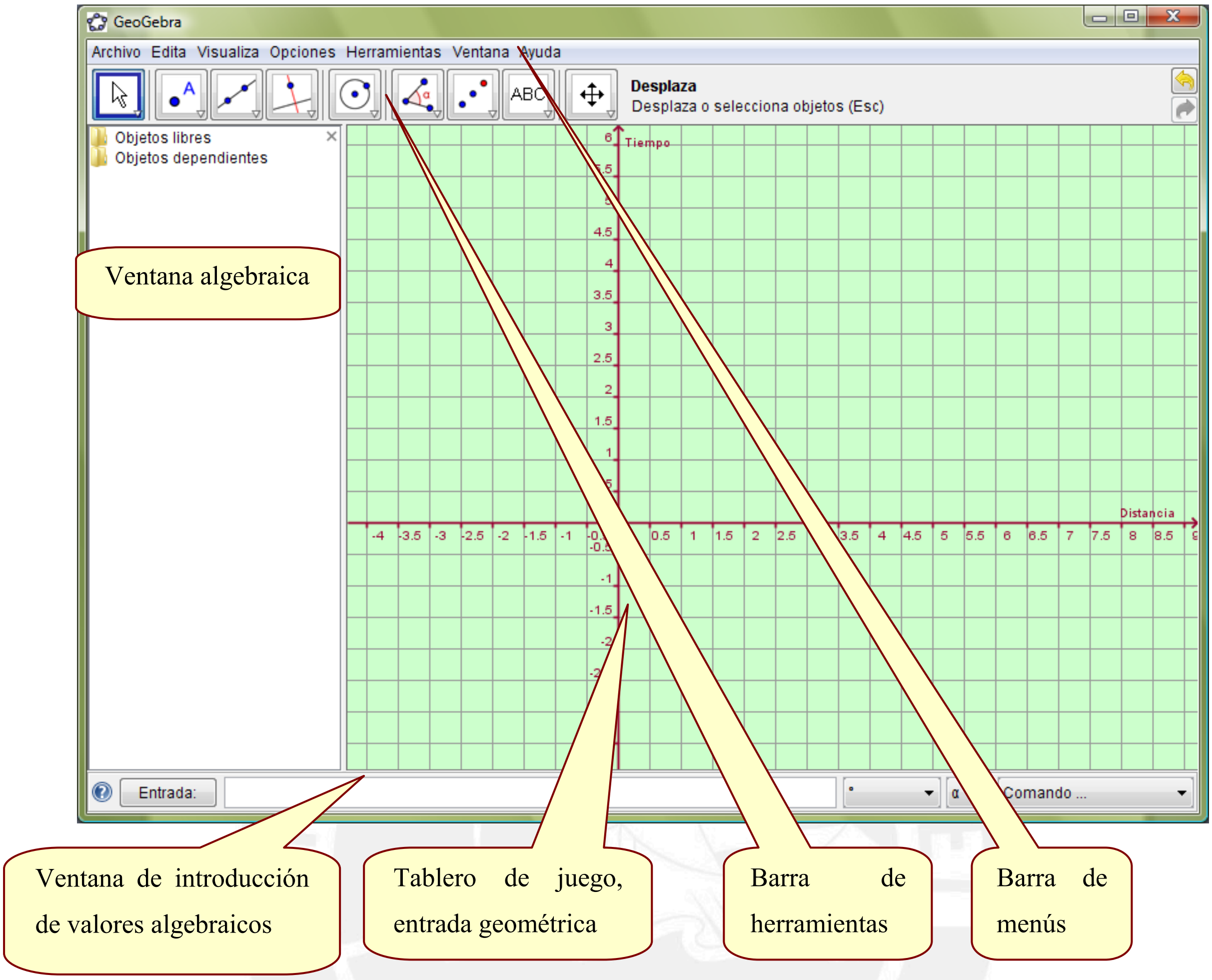


4) Menús contextuales

a) Cada elemento del tablero de trabajo y de la ventana algebraica tiene asociado un menú contextual que se activa con el botón derecho del ratón.



5) Imagen de la pantalla completa personalizada.



TAREA 1.

a) Grafique $f(x) = |x|$, utilizando el software Geogebra.

b) Dada la gráfica $f(x) = |x|$, responda las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica?

¿Cuál es el dominio de f?

¿Cuál es el rango de f?

TAREA 2.

a) Grafique $\mathrm{g}(x) = |x + 5|$, utilizando el software Geogebra.

b) Dada la gráfica $\mathrm{g}(x) = |x + 5|$, responda las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica?

¿Cuál es el dominio de *g*?

¿Cuál es el rango de *g*?

¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función *g* con respecto a la función *f,* de la tarea 1?

TAREA 3.

a) Grafique $g(x) = |x+5| + 3$, utilizando el software Geogebra.

b) Dada la gráfica $\mathrm{g}(x) = |x+5| + 3$, responda las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica?

¿Cuál es el dominio de *g*?

¿Cuál es el rango de *g*?

¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función *g* con respecto a la función *f,* de la tarea 1?

TAREA 4.

a) Grafique $g(x) = -|x+5| + 3$, utilizando el software Geogebra.

b) Dada la gráfica $\mathrm{g}(x) = -|x+5| + 3$, responda las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica?

¿Cuál es el dominio de *g*?

¿Cuál es el rango de g?

¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función *g* con respecto a la función *f,* de la tarea 1?

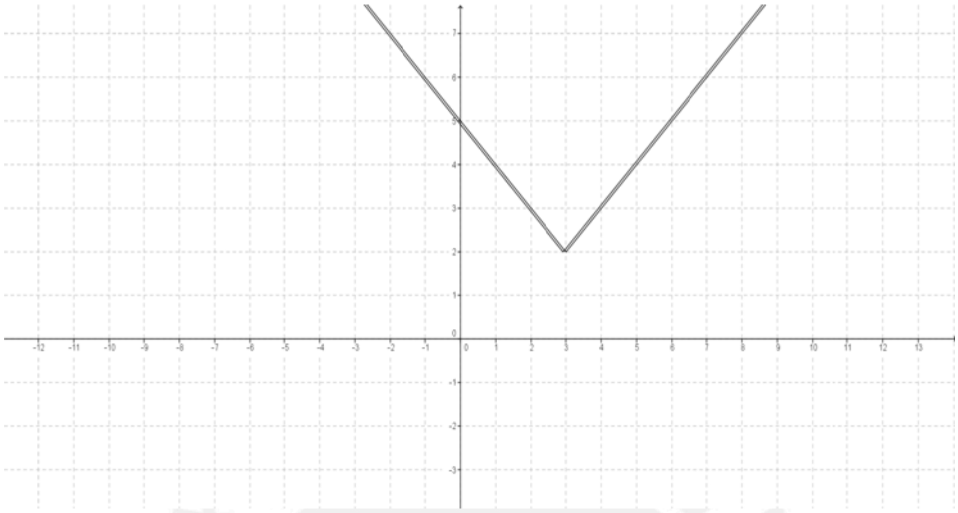
TAREA 5. Grafique la función $f(x) = |x|$, utilizando el software Geogebra.

a) Grafique la función que resulta de trasladar *f*, dos unidades verticalmente hacia abajo y cuatro unidades horizontalmente a la izquierda.

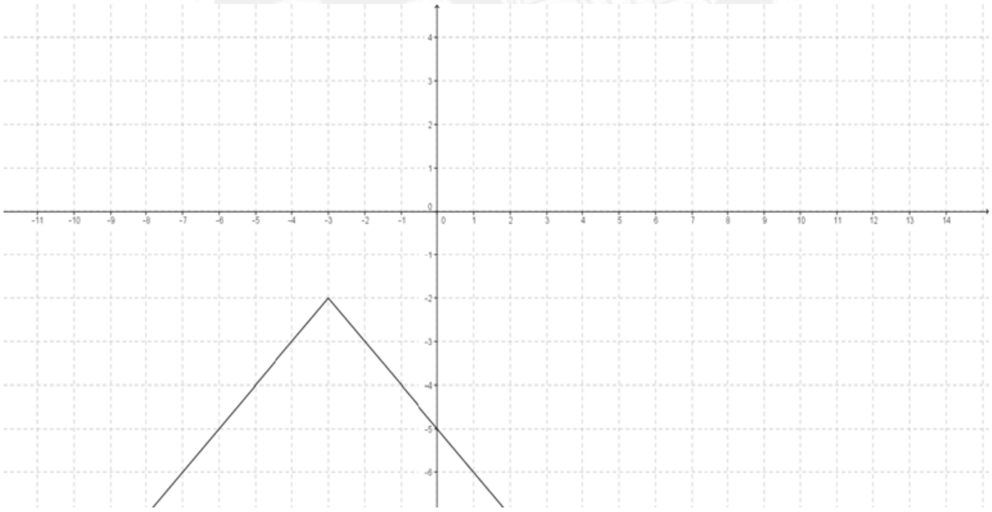
b) Grafique la función que resulta de trasladar *f*, tres unidades horizontalmente hacia la derecha y dos unidades verticalmente hacia arriba.

TAREA 6.

a) Indique la función con su respectiva regla de correspondencia, para la siguiente gráfica.



b) Indique la función con su respectiva regla de correspondencia, para la siguiente gráfica.



5.2.7 SESIÓN 7: LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO Y SU GRÁFICA

A continuación, presentamos un procedimiento para representar las funciones que contienen el valor absoluto, después de haber trabajado con el software libre Geogebra.

Gráfica del valor absoluto con transformaciones

Criterio 1: para hallar la gráfica de la función valor absoluto de la forma:

$f(x) = |x - h|$; Donde x y h son números reales, se realizan los siguientes pasos:

a) Ubicación del vértice. Para ello hacemos la función $f(x) = 0$

$0 = |x - h|$

$0 = x - h$

$x = h$ Entonces el vértice es: $(h; 0)$

b) Ubicación del intercepto: Se hace x=0, en $y = f(x)$

$y = |x - h|$

$y = |0 - h|$

$y = |h|$ Entonces el intercepto es: $(0, |h|)$

c) Finalmente se traza la gráfica (que tiene la forma de "V").

TAREA 1. Grafique la función g, definida por $g(x) = |x + 5|$.

a) Halle el vértice de la función.
b) Halle el intercepto de la función.
c) Indique las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.
d) Trace la gráfica de la función.
e) ¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función g con respecto a la función $f(x)$ (siendo $f(x)=|x|$)?

CRITERIO 2:

Para graficar la función de la forma $g(x) = |x - h| + k$; donde h y k son números reales, se debe de realizar un proceso de reconstrucción de la función $g(x)$**,** desarrollando los siguientes pasos:

2.1 Grafique $g_1(x) = |x - h|$ utilizando los pasos del criterio 1.

Si h es un número positivo, la gráfica de f, $f(x)=|x|$ se traslada horizontalmente h unidades a la derecha.

Si h es un número negativo, la gráfica de f, $f(x)=|x|$ se traslada horizontalmente h unidades a la izquierda.

2.2 En $g(x) = |x - h| + k$, se debe de considerar lo siguiente:

Si k es un número positivo, la gráfica de g_1, $g_1(x) = |x - h|$ se traslada verticalmente k unidades hacia arriba.

Si k es un número negativo, la gráfica de g_1, $g_1(x) = |x - h|$ se traslada verticalmente k unidades hacia abajo.

2.3 Finalmente se traza la gráfica, utilizando los resultados de los pasos 2.1 y 2.2

TAREA 2. Grafique $g(x) = |x + 5| + 3$, desarrollando los siguientes pasos:

a) Grafique $g_1(x) = |x + 5|$, utilizando los pasos del criterio 1.

b) En $g(x) = |x + 5| + 3$, utilizar el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

c) Trace la gráfica, utilizando los resultados de los pasos a y b.

TAREA 3. Grafique $g(x) = |x - 5| - 3$, desarrollando los siguientes pasos:

a) Grafique $g_1(x) = |x - 5|$, utilizando los pasos del criterio 1.

b) En $g(x) = |x - 5| - 3$, utilizar el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

c) Trace la gráfica, utilizando los resultados de los pasos a y b.

TAREA 4. Grafique $g(x) = |x - 5| + 3$, desarrollando los siguientes pasos:

a) Grafique $g_1(x) = |x - 5|$, utilizando los pasos del criterio 1.

b) En $g(x) = |x - 5| + 3$, utiliza el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

c) Trace la gráfica, utilizando los resultados de los pasos a y b.

TAREA 5. Grafique $g(x) = -|x + 5| + 3$, desarrollando los siguientes pasos:

a) Grafique $g_1(x) = |x - 5|$, utilizando los pasos del criterio 1.

b) Grafique el simétrico de $g_1(x) = |x - 5|$

c) En $g(x) = -|x - 5| + 3$, utilizar el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

d) Trace la gráfica, utilizando los resultados de los pasos a y b.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

Con relación a las preguntas de investigación:

1. Hemos logrado determinar, en el grupo de alumnos y profesores, sujetos de estudio de esta investigación, algunos de los errores, dificultades y obstáculos didácticos comunes, que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto.
2. Creemos muy útiles los criterios de idoneidad tanto para la guía de observación de clase, como para el diseño de una secuencia de tareas. Porque la guía de observación de clase (aplicada en el caso del objeto matemático valor absoluto); basada en los criterios de idoneidad del EOS (epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva e interaccional). Permitieron analizar y poder emitir un juicio valorativo sobre la clase del profesor. Y también porque posibilitaron reflexionar acerca de los diferentes usos del valor absoluto, diseñando luego, una secuencia de tareas que trate de superar los errores, dificultades y obstáculos que viven alrededor del concepto del valor absoluto. Queda pendiente para un estudio posterior la implementación de esta secuencia de clases en el aula de manera que se verifique o no si es posible superar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos identificados.
3. Reconocemos la importancia de la teoría (del conocimiento) que debe tener un profesor sobre los objetos matemáticos, en este caso el valor absoluto para poder enseñar a sus alumnos y ser capaces de diseñar tareas o una secuencia de tareas. Para nosotros los criterios de idoneidad fueron fundamentales en esta labor.

Con relación a los objetivos de esta investigación, llegamos a las siguientes conclusiones:

Para el primer objetivo que es el 1.5.1 *Identificar y analizar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos que aparecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto.*

De la literatura revisada sobre el valor absoluto, de las entrevistas realizadas a los profesores y de los diferentes textos de matemática del nivel superior, se corrobora que los errores, dificultades y obstáculos, más frecuentes son:

a) Cuando se les pregunta a los alumnos y a los profesores, en este estudio, analizar la verdad de las proposiciones 1) $\forall\, x, -x < 0$ ó 2) Si $x < 0$, entonces: $|x| = -x$, encontramos que dichas proposiciones son una gran dificultad en la comprensión de del concepto del VA. En nuestra opinión una posible explicación es que para los estudiantes x, es un número positivo siempre, porque como norma matemática se les ha enseñado que los números negativos llevan un signo "–" delante de éste y al no tenerlo x, piensan que es positivo, sin darse cuenta que x es una variable que toma como valores también los números negativos. Por ello, consideramos esta dificultad como un **"Obstáculo".**

b) Al trabajar con el valor absoluto de funciones lineales afín, los alumnos de manera significativa consideran a la proposición $|ax + b| = \begin{cases} ax + b\,; \text{Si } x \geq 0 \\ -(ax + b)\ ; \text{Si } x < 0 \end{cases}$ como verdadera. Lo cual nosotros lo consideramos como **"Obstáculo"**. Esto debido a que una posible explicación es que, en el proceso de enseñanza al definir el valor absoluto de un número solo se considera un valor constante o se representa por una constante y no hay términos algebraicos, como en este caso una expresión lineal, lo que genera un conflicto semiótico de tipo epistémico. Los estudiantes consideran que la restricción siempre debe ser mayor o igual a cero o menor que cero ($x \geq 0$ ó $x < 0$).
Y no consideran que la expresión que está dentro del valor absoluto (binomio lineal) es la que debe de ser mayor o igual a cero; es decir ($ax + b \geq 0$) o menor que cero ($ax + b < 0$).

c) Cuando se les pregunta a los alumnos analizar la verdad de la siguiente proposición: Si $x < 0$, entonces: $|x| = x$, los alumnos consideran en su gran mayoría a dicha proposición como verdadera. Es una gran dificultad en la comprensión de la NVA, la consideramos como un **"Obstáculo",** porque consideran a x un número y no una variable que toma valores numéricos positivos, negativos y el cero, considerándolo un conflicto epistémico.

d) Al resolver las ecuaciones o inecuaciones lo hacen en forma fragmentada y luego no retoman el problema general sin poder llegar a la solución correcta. Esta acción la consideramos como **“Error”**, en la comprensión del concepto del valor absoluto, por ser una práctica matemática no válida por parte de los alumnos.

e) La incomprensión y por consiguiente aplicación de la definición formal del valor absoluto. Esta acción la consideramos como **“Dificultad”**, debido a que el estudiante y algunos profesores no comprenden que se trata de una definición funcional por partes.

Para el segundo objetivo 1.5.2 Ayudar a superar los errores, las dificultades y los obstáculos del concepto del valor absoluto de los profesores del nivel superior, a través del diseño de una secuencia de tareas didácticas en las que se traten los diversos significados o usos del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS.

Una vez que se vio que las dificultades la presentaba el profesor, decidimos replantear nuestra investigación y dado el desconocimiento que manifestaban los profesores sobre los diversos usos o significados del valor absoluto se decidió preparar la secuencia de tareas dirigidos a los profesores que enseñan en el primer ciclo del nivel universitario y ya no a los alumnos como un modo de ayudarlos en su formación permanente. Los profesores mediante entrevistas y cuestionarios manifiestan que desconocen los diferentes usos y/o conceptos del valor absoluto.

Se diseñó una secuencia de tareas didácticas, que surge como resultado de reflexionar sobre la prueba diagnóstica y el cuestionario 1 (para alumnos) y su posterior restructuración y valoración mediante el cuestionario 2 (para profesores).

Se elaboró una secuencia de tareas, estructuradas por sesiones, cuyo objetivo es tratar de superar los obstáculos didácticos encontrados en la enseñanza y aprendizaje del valor absoluto.

Con respecto a esta propuesta, tratamos de validarla realizando una entrevista con 4 profesores que enseñan el curso de Matemática Básica, a los cuales les pareció interesante este diseño de tareas.

La elaboración de configuraciones epistémicas; algorítmica y algorítmica-distancia, (provenientes de los textos de matemática superior) y la configuración epistémica idónea (que proviene de la secuencia de tareas didácticas) del objeto valor absoluto, significó poder encontrar equivalencias didácticas y clasificar los diferentes usos que tiene la noción del valor absoluto.

Se diseñó una secuencia de tareas teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS: epistémico, cognitivo, interaccional y mediacional, sobre la noción del valor absoluto, con la finalidad de tratar de superar los obstáculos didácticos encontrados.

Para el diseño de tareas, el eje central se centró en la idoneidad didáctica, En la que se trataron los diversos significados o usos del valor absoluto. Este diseño de tareas consta de ocho sesiones:

Sesión 1: Diversos usos o significados del valor absoluto. Cuyo objetivo es describir los diversos usos o significados del valor absoluto situados en contextos, como son:

-Contexto analítico: función a trozos, máximo, composición.

-Contexto topológico: métrica (distancia).

-Contexto geométrico: vectorial.

-Contexto aritmético: aritmética.

Sesión 2: El valor absoluto de un número real, visto dentro del contexto topológico–métrico "Como Distancia". Que tiene como objetivo el de definir el concepto del valor absoluto en términos de distancia.

Sesión 3: El valor absoluto y la reflexión. Cuyo objetivo es explicar el concepto del valor absoluto utilizando reflexiones.

Sesión 4: El valor absoluto visto dentro del contexto analítico "Como Función". Con el objetivo de aplicar el concepto del valor absoluto visto como función.

Sesión 5: Problemas contextualizados con el valor absoluto. Cuyo objetivo es el de aplicar el concepto del valor absoluto en situaciones reales.

Sesión 6: La función valor absoluto y el uso de la tecnología (software). Tiene por objetivo utilizar las tecnologías (softwares, ordenadores, etc) para graficar la función valor absoluto.

Sesión 7: La función valor absoluto y su gráfica. Tiene por objetivo el de aplicar y construir la gráfica de la función valor absoluto.

Estas sesiones las consideramos importantes ya que podrían ayudar; a los alumnos y profesores del nivel superior, a superar los errores, dificultades y obstáculos que presenta la noción del valor absoluto.

Con respecto a la implementación de la propuesta (diseño de tareas). Por cuestiones de tiempo esta propuesta no ha sido implementada, pero si ha sido elaborada siguiendo los criterios de idoneidad didáctica del EOS. Además fue validada:

- Por un profesor de un instituto de educación superior tecnológico público, con el cual se hizo una triangulación (asesora, tesista y profesor) de preguntas y opiniones acerca de nuestra propuesta, ante el cual el profesor manifestó que le parecía interesante y novedoso el diseño de tareas.

- Por los tres profesores de la universidad que formaron parte de ésta investigación, los cuales vieron en el diseño de tareas una propuesta diferente para enseñar el tema del valor absoluto en la universidad, por su gran utilidad en asignaturas posteriores como Análisis Matemático I y Análisis matemático II.

En los textos universitarios sobre el valor absoluto estudiados líneas arriba encontramos que:

-Los autores presentan la definición del valor absoluto mediante el contexto analítico asociado al modelo función a trozos.

-Las notaciones de los intervalos son distintas utilizando para los intervalos paréntesis, corchetes o símbolos como > o <. Inclusive en un mismo intervalo combinaciones de estos símbolos.

-Algunos autores presentan la definición del valor absoluto mediante el modelo métrico (distancia) asociado al contexto topológico.

-Muy pocos autores presentan el contexto geométrico (gráfico de la función valor absoluto).

-En los textos no se desarrollan problemas contextualizados.

-En los textos no se resuelven ecuaciones utilizando el contexto geométrico.

-En los textos no se trabajan reflexiones para el concepto del VA utilizando el contexto geométrico.

-Los autores no utilizan softwares matemáticos para las gráficas de funciones con valores absolutos.

Del estudio realizado en los textos universitarios (significados pretendidos), observamos que hay una carencia de contenidos ya que no se abarcan los diferentes usos de la noción del valor absoluto, entonces hubo la necesidad de presentar una nueva propuesta (secuencia de tareas) que trate de alguna manera de superar los errores, dificultades y obstáculos del concepto del valor absoluto.

Recomendaciones

1. Que en la educación básica regular (EBR) y en la educación superior, se consideren y desarrollen los diferentes usos del concepto del valor absoluto dentro de las programaciones curriculares y/o sílabos.
2. Que el objeto matemático "Valor Absoluto" sea desarrollado con mayor profundidad en los grados 3°, 4° y 5° de secundaria, puesto que en la actualidad sólo se considera en el 3° de secundaria, dentro del capítulo de las funciones. Y además porque en el nivel superior no se tratan los diferentes usos del concepto del valor absoluto, generalmente sólo se considera el valor absoluto dentro del contexto analítico (como función).

3. Que en la educación básica regular (EBR) y en la educación superior se implemente además de las facetas epistémica, cognitiva y mediacional presentadas en este trabajo de investigación, las facetas ecológica, cognitiva e interaccional.

PREGUNTAS ABIERTAS

1. ¿Los profesores podrán transponer los diversos usos o significados del valor absoluto, a partir de esta secuencia de tareas?
2. Creemos conveniente seguir investigando al respecto, para ver ¿Cómo cambia el concepto en los profesores acerca de los diferentes usos del concepto del valor absoluto?
3. ¿Será posible implementar en el sílabo de matemática básica el concepto del valor absoluto con una duración de 6 horas? Cuando actualmente es en promedio de 2 horas.
4. ¿De qué forma se implementaría los diferentes usos del valor absoluto, en la educación básica regular?, especialmente en el nivel secundario.
5. ¿Cómo se trabajarían las reflexiones en funciones de segundo grado con valor absoluto?
6. ¿De qué manera una secuencia de tareas de enseñanza y aprendizaje diseñado y guiado por los criterios de idoneidad didáctica permiten superar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos en la construcción del concepto del valor absoluto?

REFERENCIAS

1. Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2,3), 241-286.
2. Blumer, H. (1969). El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982.
3. Bachelard, Gastón (1972). *La Formación del Espíritu Científico.* Siglo XXI. Buenos Aires.
4. Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2(3), 303-346.
5. Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
6. Cerizola, N., Pérez, N. & Martínez, R. (2005). Una Noción matemática básica y aparentemente simple: el Valor absoluto de un Número real. Recuperado en mayo de 2012, de http://www.uccor.edu.ar/paginas/REDUC/cerizola.pdf.
7. Cerizola, N.; Pérez, N. & Martínez, R. (2005, 3 de agosto). *Una noción matemática básica y aparentemente simple: el Valor absoluto de un Número real.* Disponible en Internet (www.uccor.edu.ar/textos).
8. Civil, M. & Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: Does every student have a voice? For the Learning of Mathematics, 24(1), 7-12.
9. Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room *cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
10. Cobb, P. & McClain, K. (2006). The collective mediation of a high stakes accountability program: Communities and networks of practice. *Mind, Culture, and Activity,* 13, 80-100.
11. Contreras, A., Font, V., Luque, L. & Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.
12. Chevallard, Y. (1985), La transposition didactique. Grenoble: la Pensée Sauvage, 1991.
13. D'Amore, B., Font, V. & Godino, J. D. (2007).La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigm*a, Vol. XXVIII, Nº 2, 49-77.

14. Faerna, A. (1996). Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento. Madrid: Siglo XXI.
15. Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. Educational Studies in Mathematics 69, 33-52.
16. Font, V. (2013). Errores, dificultades y obstáculos. Ponencia del 18 al 22 de febrero de 2013 en la PUCP.
17. Font, V. & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.
18. Font, V. & Planas, N. (2008). Mathematical practices, semiotic conflicts, and socio-mathematical norms. En O.Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of the Joint Conference PME32-PMENA XXX (*Vol 3, pp. 17-23). CINVESTAV: México.
19. Gagatsis, A. & Thomaidis, I. (1994). Un étude multidimensionelle du concept de valeur absolue. En M. Artigue; R. Gras; C. Laborde y P. Tavignot. *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France.* (pp. 343-348). La Pensee Sauvage.
20. Godino, J., Batanero, C. & Roa R. (en prensa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. Educational Studies in Mathematics.
21. Godino, J., & Batanero, C. (1994), "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3):325-355.
22. Godino, J., & Batanero, C. (1998). Clarifyng the meaning of mathematical objects as a priority área of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (eds.), Mathematics education as a research domain: A search for identity (pp. 177-195). Dordrecht, Kluwer.
23. Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en* Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284
24. Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado en mayo de 2012, de http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
25. Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221–252.

26. Godino, J. D., Wilhelmi, M. R.and Bencomo, D. (2005). Suitabilitycriteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. Mediterranean journal for research in Mathematics Education 4.2, 1,26.
27. Godino, J., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
28. Otte, M. (2003). Does mathematics have objects? In what sense? *Synthese*, 134, 181-216.
29. Hernandez, R., Fernandez, C., & Baptista, P.(2010). Metodología de la investigación (5ª ed.). México: Mc Graw Hill.
30. Stephan, M., Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2003). Coordinating social and psychological analyses: learning as participation in mathematical practices. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 12*(67-102). Reston, VA: NCTM.
31. Vygotski, L. (1934). *Pensamiento y lenguaje.* Buenos Aires: Paidós, 1995
32. Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
33. Wilhelmi, M., Lacasta, E. & Godino, J. (2004). Configuraciones asociadas a la noción de igualdad de números reales. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada. Recuperado en 2013. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf
34. Wilhelmi, M., Godino, J. & Lacasta, E. (2007). Eficacia didáctica de definiciones equivalentes de una noción matemática. El caso del Valor Absoluto. Recuperado en 2008, http://www.iejme.com/ , 239-254.

Textos Matemáticos

35. Figueroa R. (2004). *Matemática Básica 1* ($8^{a}ed.$). Perú. América.
36. Haaser, N., LaSalle, J. & Sullivan, J. (1973). *Análisis Matemático 1. Curso de introducción*. México. Trillas.
37. Leithold L. (1998). *El Cálculo* ($7^{a}ed.$). México. Oxford.
38. Lima, Elon Lages (1997). Análisis Real, Volumen 1. Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, UNI. 240 pp. Colección Textos del IMCA.
39. Stewart J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas ($4^{a}ed.$). Colombia. Thomson.

40. Tang S. (2005). Matemáticas para administración y economía ($3^{a} ed.$). México. Thomson.

41. Taylor, H., & Wade, T., (1967). Cálculo diferencial e integral. México. Limusa - Willey.

APÉNDICES

APÉNDICE 1: GUÍA PARA EL ANÁLISIS DE CLASES, CON CRITERIOS DE IDONEIDAD.

1. **La noción de idoneidad epistémica (o matemática).**

Un programa formativo, o un proceso de estudio matemático, tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia. Dicho significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio y deberá ser elaborado teniendo en cuenta los diversos tipos de problemas y contextos de uso del contenido objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas.

COMPONENTES	**INDICADORES**	**TABLA DE VERIFICACIÓN**			
			SI	**NO**	**OBSERVACIONES**
1.1 Situaciones-Problemas	-Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación de la noción del valor absoluto.	El Profesor presenta: -Problemas contextualizados.			
		-Ejemplos de motivación.			
		-Aplicaciones para que resuelva el alumno.			
	-Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) relacionados con la noción del valor absoluto.	El Profesor infiere la utilización de la NVA en temas relacionados al cálculo, la estadística, etc :			
1.2 Lenguajes	-Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), sobre el valor absoluto.	El Profesor usa: -Graficas			
		-Simboliza			
		-Expresión verbal			
	-Nivel del lenguaje adecuado.	El Profesor usa: -Términos			

		sencillos.			
	-Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación acerca del concepto del valor absoluto.	El profesor: -Analiza la definición			
		-Interpreta la definición.			
		-Presenta definiciones equivalentes			
1.3 Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos sobre el valor absoluto son claros y correctos, y están adaptados al nivel de educación superior.	El Profesor usa: -La definición del valor absoluto (función a trozos)			
		-Otras definiciones			
	- Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del concepto del valor absoluto para el nivel de educación superior.	El Profesor usa: -Las propiedades del valor absoluto			
	- Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos sobre el valor absoluto.	El profesor enuncia: -Proposiciones sobre la NVA.			
		El profesor presenta diferentes procedimientos en la resolución del problema.			
1.4 Argumentos	-Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones sobre el valor absoluto, son adecuadas para el nivel de educación superior.	Demuestra teoremas sobre la NVA. Como la desigualdad triangular, producto, etc.			
	-Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar sobre el valor absoluto.	Propone problemas donde el alumno aplica propiedades o las definiciones equivalentes de la NVA.			
1.5 Relaciones	- Los objetos matemáticos	El profesor menciona que en			

	alrededor del concepto del valor absoluto (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.	la definición del valor absoluto(función a trozos) se utilizan y conectan temas como las funciones, las ecuaciones, igualdad, etc.			

2. Idoneidad cognitiva: El grado en el que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

		TABLA DE VERIFICACIÓN			
COMPONENTES	**INDICADORES**		**SI**	**NO**	**OBSERVACIONES**
2.1Conocimientos previos.	-Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del valor absoluto.	-Los estudiantes tienen la noción de funciones, gráficas de funciones, igualdad, ecuaciones, inecuaciones, noción de distancia, intervalos.			
	-Los contenidos pretendidos sobre el valor absoluto se pueden alcanzar.	- Los estudiantes comprenden la definición de la NVA.			
		- Los estudiantes comprenden las propiedades de la NVA.			
2.2 Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	-Se incluyen actividades de ampliación y refuerzo	- El profesor deja tareas.			
		- El estudiante Utiliza materiales(separatas)			
		- El profesor indica libros de consulta.			
		- El profesor proporciona una dirección electrónica o página web a los estudiantes.			
	-Se promueve el acceso y el logro de todos los	- Los estudiantes desarrollan correctamente los			

	estudiantes.	ejercicios aplicando las definiciones y propiedades del valor absoluto.			
2.3 Aprendizaje	-Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación del concepto del valor absoluto (comprensión y competencia).	- Los estudiantes resuelven problemas en la pizarra.			
		- Los estudiantes son evaluados en forma oral.			
		-Los estudiantes son evaluados en forma escrita.			
	-Comprensión conceptual y proposicional: competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; competencia metacognitiva.	- El profesor hace preguntas de concepto sobre la NVA.			
		- El alumno argumenta sus procedimientos y respuestas.			
		- El alumno capta las definiciones y procedimientos efectuados por el profesor.			
	-la evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y de competencia del concepto del valor absoluto.	El alumno plantea el problema.			
		El alumno resuelve pero se equivoca en el procedimiento.			
		El alumno resuelve el problema, pero no comprueba sus resultados.			
		El alumno resuelve el problema correctamente y comprueba sus resultados.			
	-Los resultados de las evaluaciones sobre el valor absoluto se difunden y usan para tomar decisiones.	Los alumnos comparan los resultados de sus evaluaciones.			
		Los alumnos comparan sus resultados con la respuestas dadas por el profesor.			

3. Idoneidad Mediacional:

Es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

“La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y a su vez incrementar el aprendizaje de los estudiantes”. Las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad.

		TABLA DE VERIFICACIÓN			
COMPONENTES	INDICADORES		SI	NO	OBSERVACIONES
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.	El profesor utiliza sólo la pizarra			
		El profesor utiliza pizarra y diapositivas			
		El profesor utiliza pizarra, diapositivas y software. Otros…………			
	- Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.	El profesor propone problemas motivadores.			
		El profesor propone problemas contextualizados			
Número de alumnos, horario y condiciones de aula	- El número y la distribuciones de los alumnos	La clase fue superpoblada			
		Los alumnos en su gran mayoría se ubican en las			

	permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.	últimas carpetas.			
	- El horario del curso es apropiado.	El curso se dictó en las primeras horas(8-10 a.m/ 18:00- 20:00)			
		El curso se dictó los primeros días de la semana(L-M-K)			
		Los alumnos llegan tarde a clases			
	-El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.	La iluminación es la adecuada en el aula para la instrucción.			
		El aula contiene proyectores para el proceso de instrucción.			
		-Usan los alumnos computadoras/laptop			
Tiempo(De enseñanza colectiva/tutorización ; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.	El tema se desarrolla durante 1 sesión de 2 horas.			
		El tema se desarrolla durante 2 sesiones de 2 horas.			
		El tema se desarrolla de manera virtual.			
	- Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.	El profesor utiliza más tiempo en el aspecto teórico.			
		El profesor utiliza más tiempo en el aspecto práctico			
		El profesor utiliza proporcionalmente los tiempos tanto en el aspecto teórico como el práctico.			
	- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.	- El profesor asesora a los alumnos fuera del horario de clase en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.			
		El profesor prepara material extra para			

		que los alumnos investiguen o complementen sus conocimientos.			

4. Idoneidad afectiva: La mayor o menor idoneidad afectiva, se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes.

COMPONENTES	INDICADORES	SI	NO	OBSERVACIONES
Intereses y necesidades	- Las tareas sobre el valor absoluto, tienen interés para los estudiantes.			
	- Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad del valor absoluto en la vida cotidiana y profesional.			
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.			
	- Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad, el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.			
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.			
	- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.			

5. Idoneidad interaccional:

Se valora positivamente la presencia de momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje. Los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos.

COMPONENTES	INDICADORES	SI	NO	OBSERVACIONES
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del concepto del valor absoluto (presentación			

	clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave). - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas). - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de clase.			
Interacción entre alumnos	- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. - Tratan de convencerse así mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas apoyándose en argumentos matemáticos. - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.			
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio,(plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para			

	investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).			
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.			

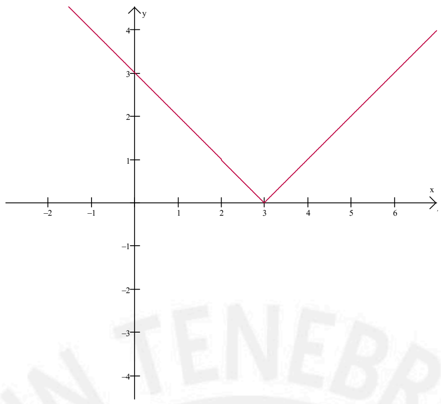
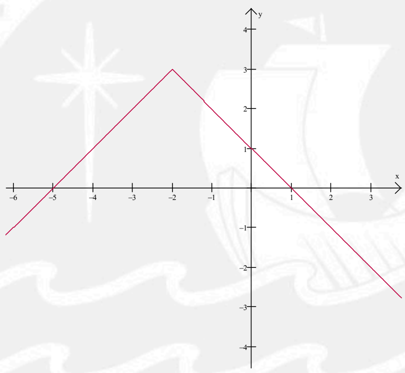
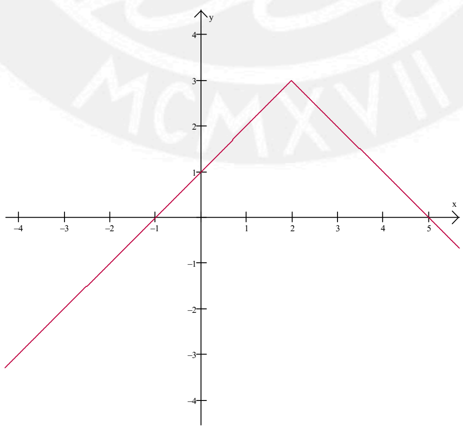
6. Idoneidad ecológica:

Se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno(la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas) en que se utiliza. Las matemáticas pueden desarrollar en los estudiantes un pensamiento crítico y alternativo.

COMPONENTES	INDICADORES	SI	NO	OBSERVACIONES
Adaptaciones al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares			
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva			
	- Integración de nuevas tecnologías(calculadoras, ordenadores, TICS, etc) en el proyecto educativo.			
Adaptación socio-profesional y cultural.	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.			
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.			
Conexiones intra e interdisciplinares.	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.			

APÉNDICE 2: PRUEBA DIAGNÓSTICA

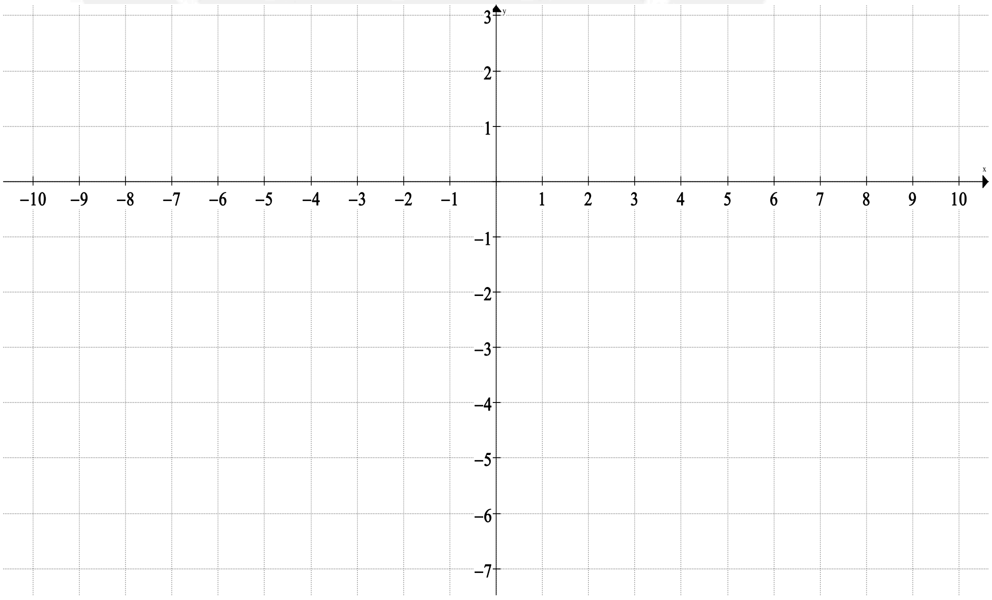
CON HONESTIDAD, responde las siguientes preguntas:			
1.	¿Has escuchado hablar sobre el término *valor absoluto* ?, marca con una " X " tu respuesta:		
	a)	Si	( )
	b)	No	( )
2.	Coloca " V" si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa.		
	a)	Para todo número real x, $-x < 0$.	( )
	b)	El valor absoluto de un número puede ser negativo.	( )
	c)	El *valor absoluto* y la función *valor absoluto significan lo mismo*.	( )
	d)	$\lvert -7\rvert = \lvert 7\rvert$	( )
	e)	$\lvert 3{,}5\rvert = 3$	( )
	f)	El *valor absoluto* de un número es siempre mayor o igual a cero.	( )
	g)	Geométricamente, la expresión $\lvert x-a\rvert$ es la distancia entre x y a.	( )
	h)	$\lvert x\rvert = \text{máx}\ \{ x, -x \}$	( )
	i)	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$	( )
	J)	$-\lvert 3\rvert \le 3 \le \lvert 3\rvert$	( )
	k)	$\lvert 2x-5\rvert = \begin{cases} 2x-5\ ; \text{Si } x \ge 0 \\ -(2x-5)\ ; \text{Si } x < 0 \end{cases}$	( )
	l)	El conjunto solución de la ecuación $\lvert x-4\rvert = -3$ es el conjunto vacío.	( )
3.	Coloca " V" si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa.		
	a)	Si $x < 0$, entonces: $\lvert x\rvert = -x$	( )
	b)	Si $x < 0$, entonces: $\lvert x\rvert = -(-x)$	( )
	c)	Si $x > 0$, entonces: $\lvert x\rvert = -(-x)$	( )
	d)	Si $x > 0$, entonces: $\lvert x\rvert = -x$	( )

	(e)	Si $x < 0$, entonces: $\lvert x \rvert = x$	( )
Marca con una " X " tu respuesta o respuestas:			
4.	La gráfica de la función f, definida por $f(x) = -\lvert x + 2\rvert + 3$, es:		
	a) 		( )
	b) 		( )
	c) 		( )

APÉNDICE 3: CUESTIONARIO 1 (ALUMNOS)

1.	Coloca " V'' si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa. a) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = -x$ ( ) b) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ ( ) c) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ ( ) d) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ ( )
2.	Para todo número real x, ¿$-x < 0$?. Justifica tu respuesta.
3.	Defina el valor absoluto de un número real a.
4.	Defina la función f(x), en términos de valor absoluto, siendo $f(x) = \lvert 2x - 7 \rvert$ y señalando los valores correspondientes de x
5.	Resuelve la siguiente ecuación : $\lvert 2x - 7 \rvert = -x + 2$
6.	Grafique la función f, definida por $f(x) = \lvert x + 2 \rvert - 7$, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.
7.	(Acciones) De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio $\boldsymbol{p}$ de las acciones de la compañía GAEL S.A.C. **NO** cambiarán de su precio actual de \$22 por más de \$ 5 . a) Utiliza la notación del valor absoluto para expresar ésta predicción como una desigualdad.
	b) Representa gráficamente la inecuación con valor absoluto de la pregunta a.
	c) Indica el valor máximo y el valor mínimo de una acción de la compañía GAEL S.A.C
	d) Representa gráficamente la solución de la pregunta c.

APÉNDICE 4: CUESTIONARIO N ° 2 (PROFESORES)

1.	Responde las siguientes preguntas: Coloca “ V’’ si la afirmación es verdadera o “ F ” si es falsa. a) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = -x$ ( ) b) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ ( ) c) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ ( ) d) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ ( )
2.	Para todo número real x, ¿ $-x < 0$? Justifica tu respuesta.
3.	Define el valor absoluto de un número real a.
4.	Define la función f, cuya regla de correspondencia es $f(x) = \lvert 2x - 7 \rvert$, descomponiéndola por tramos.
5.	Resuelve la siguiente ecuación: $\lvert 2x - 7 \rvert = -x + 2$ de dos maneras distintas, de ser posible.
6.	Grafica la función f, definida por $f(x) = \lvert x + 2 \rvert - 7$, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y. 

7.	Acciones en la bolsa de valores De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio ***p*** de las acciones de la compañía GAEL S.A.C. **NO** cambiarán su precio actual que es de \$22 por más de \$ 5, durante el mes de diciembre. (tener en cuenta que los precios de estas acciones, pueden subir y bajar) a) Utiliza la notación del valor absoluto para expresar ésta predicción como una desigualdad.
	b) Representa gráficamente la inecuación con valor absoluto de la pregunta a.
	c) Indica el valor máximo y el valor mínimo de una acción de la compañía GAEL S.A.C
	d) Representa gráficamente la solución de la pregunta c.

II. El valor absoluto y la reflexión

1°. Grafica $f(x) = x$

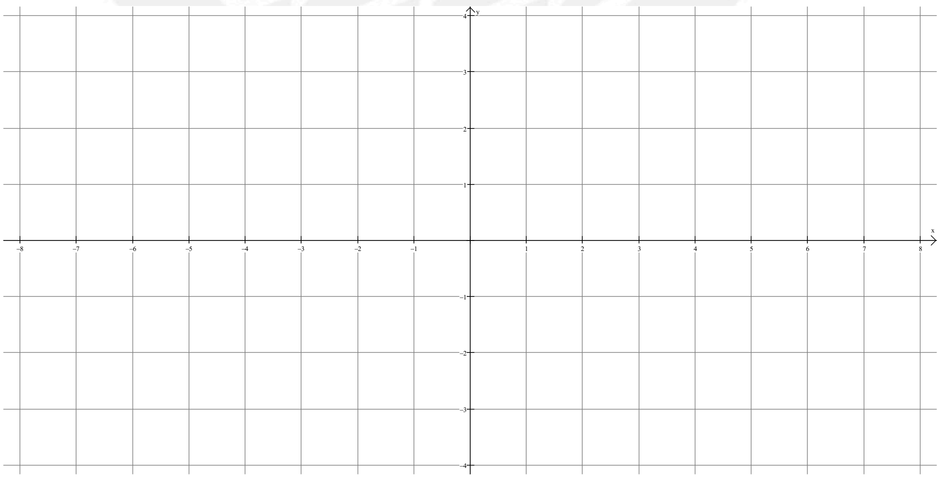


Figura 1

2°. En la gráfica de y=x, identifica la parte negativa; es decir, cuando x<0, y haz un trazo punteado para estos puntos.

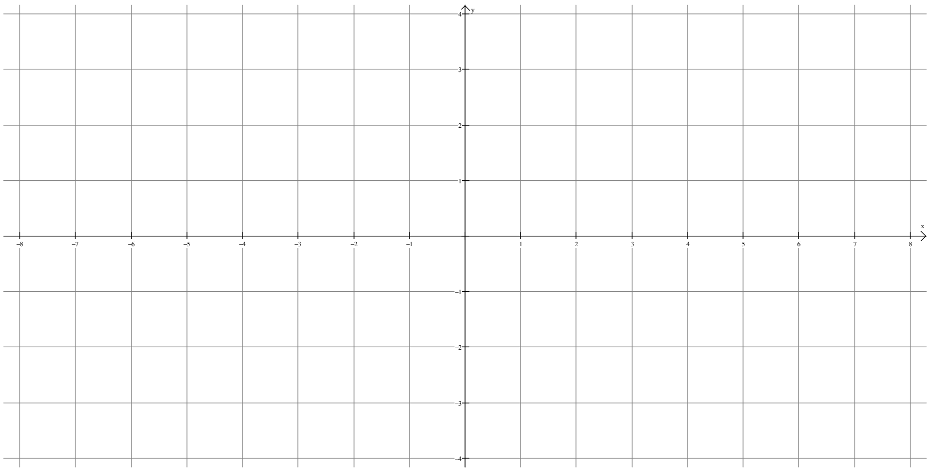


Figura 2

3°. Gráfica y=x, para x>0, y refleja respecto del eje X la parte negativa de la gráfica obtenida en la pregunta 2.

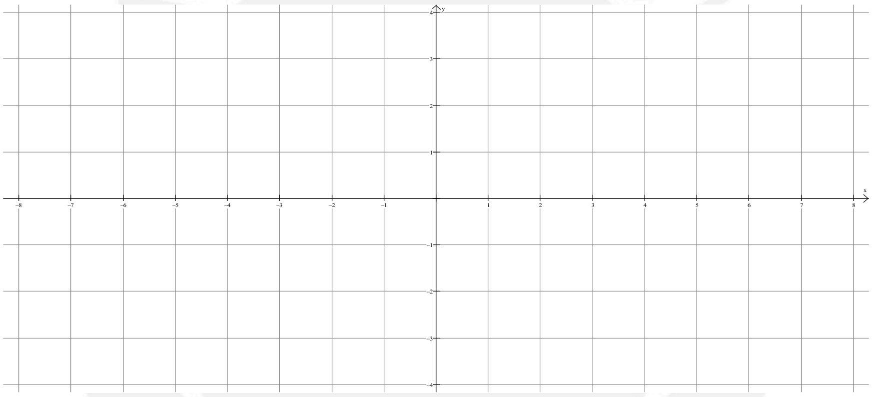


Figura 3

4°Grafica el Valor Absoluto de y=f(x)=$|x|$

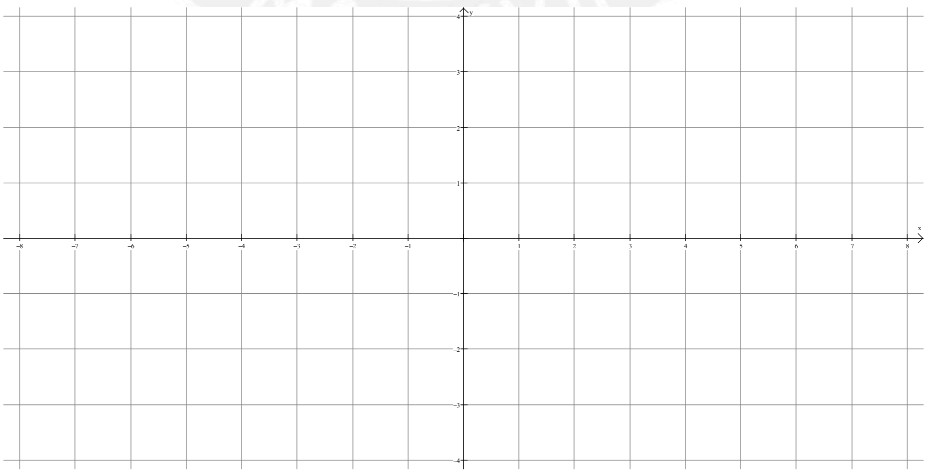


Figura 4

5° Compara las gráficas obtenidas en las preguntas 3 y 4 y qué puede concluir.

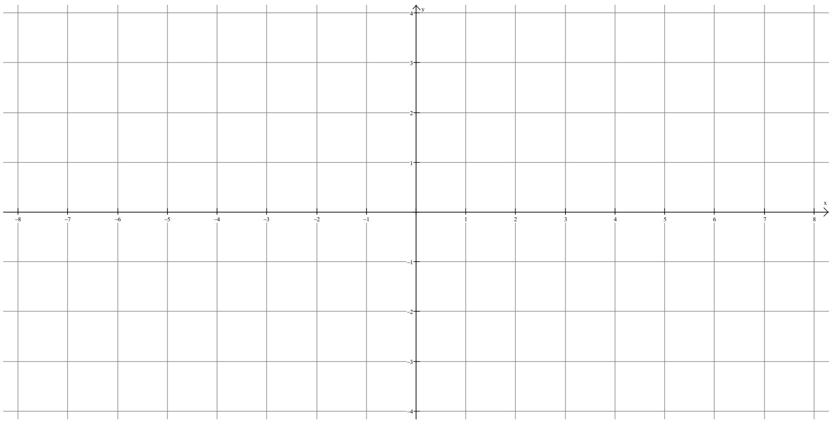
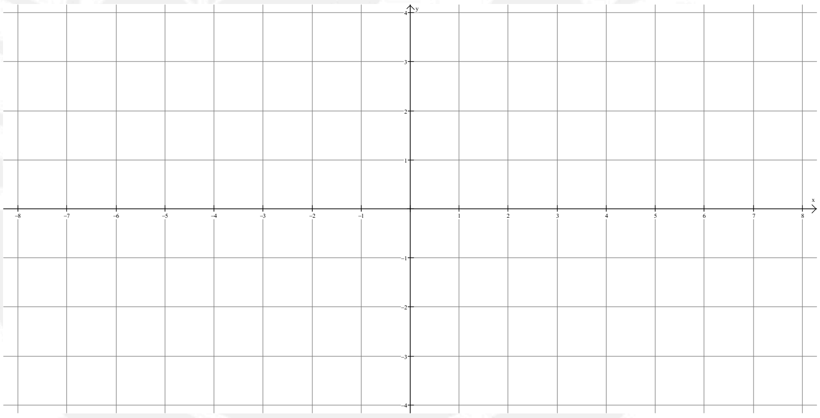


Figura 5

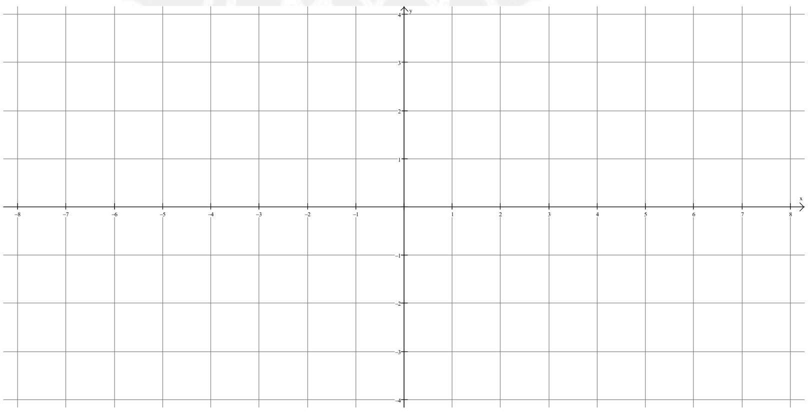
1. Cómo graficaría $y = |x - 2|$, aplicando el método de reflexión, mostrado anteriormente. Muestre paso a paso.

Solución

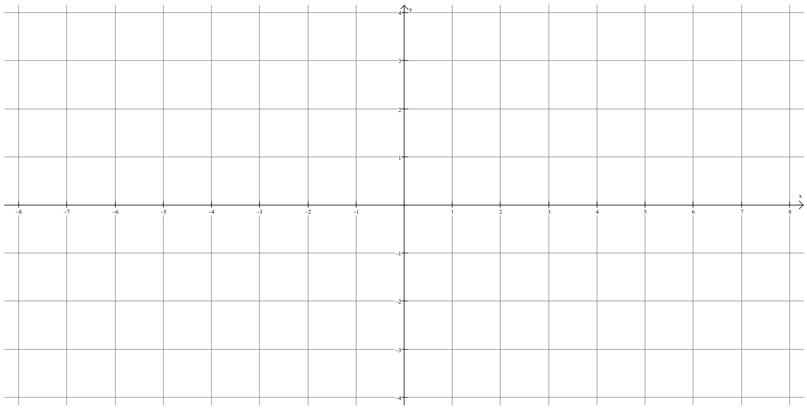
1°. ____



2°. ____



3°.____



2. Encuentra las coordenadas de los puntos cuya distancia a –5 sea:

a) Mayor a 4 unidades
b) Menor o igual a 18 unidades
c) Mayor o igual 3 unidades

APENDICE 5: TRANSCRIPCION DE LA CLASE DEL PROFESOR

Tiempo (En minutos)	**Profesor(P) Alumnos en grupo(AG)**	**Transcripción**	**Observación**
0-10 Segundos	P	Buenos días alumnos, lo que nos tiene preocupado en este momento y que vamos a comenzar a desarrollar es lo que corresponde al valor absoluto	Introducción
10 s- 1min15s	P	El valor absoluto de una cantidad que se define como: $\|x\|$ valor absoluto de x , dos barras a los costados, podemos decir que es la parte positiva de dicha cantidad, correcto, de tal manera que también algunos lo definen como la distancia que hay entre dos números, por otro lado, en forma matemática podemos decir lo siguiente, el valor absoluto de x decimos que es igual a x cuando o si y sólo si x es mayor o igual a cero, pero por otro lado también decimos que el valor absoluto de x es igual a menos x, si y sólo si x es menor que cero. Esas condiciones nos aseguran de que en todo momento el resultado de esa cantidad va a ser positiva. $$\|x\| = \begin{cases} x \leftrightarrow x \geq 0 \\ -x \leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$	El profesor presenta la definición de valor absoluto $$\|x\| = \begin{cases} x \leftrightarrow x \geq 0 \\ -x \leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$
1m 15s	P	Tenemos algunos ejemplos, haber para poder captar a cabalidad este asunto del valor absoluto, veamos habíamos mencionado que el valor absoluto de la cantidad menos 5,	El profesor escribe en la

		valor absoluto de menos 5, tenemos otro ejemplo el valor absoluto de 3, otro ejemplo podemos decir el valor absoluto, de una cantidad un poco más compleja, $\lvert\lvert -3\rvert - \lvert -2\rvert\rvert$ entonces de estos 3 ejemplos vamos a ir desarrollando uno por uno aplicando el objetivo valor absoluto, entonces como habíamos manifestado, valor absoluto de -5	pizarra: Ejemplos: $a)\ \lvert -5\rvert =$ b) $\lvert 3\rvert =$ c) $\lvert\lvert -3\rvert - \lvert -2\rvert\rvert$
2m 12	AG	5	
2m14	P	Ustedes dicen que es -5, correcto porque el valor absoluto, sabemos que es la parte positiva, igual en este caso $\lvert 3\rvert$	
2m22s	AG	igual a 3	
2m24s	P	$va\ a\ ser\ la\ cantidad\ de\ 3.$	
2m26s	P	En este caso, claro, primero tenemos que desarrollar los valores absolutos internos, ya vamos a ver , en el caso interno, tenemos el valor absoluto de menos 3 me da	
2m35	AG	3	

2m42-2m-45	P	menos el valor absoluto de -2	
2m42	AG	2	
2m43	P	Ahora resolvemos el valor absoluto total, valor absoluto de 3 – 2 , uno y me da y la respuesta es igual a 1, en realidad, valor absoluto de una cantidad no va a revestir para ustedes mayor problema, el problema seguramente puede intervenir es cuando ustedes desarrollen el valor absoluto de una igualdad o de una desigualdad, por ejemplo en el caso de igualdad es decir en el caso de ecuaciones, no, podemos decir, lo siguiente , si tenemos, vamos a poner ahora, entonces ecuaciones con valor absoluto, entonces para eso podemos poner los siguientes ejemplos, podemos decir	El profesor escribe en la pizarra
3m45s	A1	Le dice que estaba mal allí (mal escrito)	El profesor se equivoca al escribir la palabra ecuación
3m50s	P	Vamos a corregir, ya está, muy bien entonces, podemos decir en estos momentos entonces, el valor absoluto de una igualdad a que será igual, pero para ello tenemos que ver algunas propiedades del valor absoluto, en cuanto a la igualdad por ejemplo: si yo digo valor absoluto de una cantidad cualquiera “a”, entonces vamos a ponerle, o le cambiamos de letra para que sea más vistoso, podemos decir valor absoluto de w es igual a “a”. Por ejemplo allí	Escribe en la pizarra $\lvert w \rvert = a$

		tenemos una igualdad, no , para poder desarrollar esa igualdad, vamos a apelar a una propiedad dentro del valor absoluto, entonces decimos que el valor absoluto de esa igualdad va ser igual a “w= -a” o si no “w = a”, correcto , de tal manera que, si nosotros aplicamos esta propiedad en la situaciones que tengamos definitivamente va a resultar de una solución sumamente positiva, vamos a ver algunos ejemplos aplicando esa propiedad, vamos a ver algunos ejemplos, vamos a decir por ejemplo, si yo tengo, yo tengo por ejemplo el valor absoluto de 5x-2 , igual a 3 , entonces para esos ejemplos yo digo, bueno en realidad esta es una igualdad y voy a aplicar la respectiva propiedad, correcto, entonces yo digo en este caso 5x-2 seria w y a sería igual a 3, entonces yo digo para solucionar esta igualdad, para solucionar esta igualdad yo digo que w es igual a “-a” pero w es 5x-2 o sea 5x-2 igual a -3 o sino que 5x-2 es igual a 3, correcto, muy bien, se están usando las respectivas igualdades obtenidas, paso para el otro lado y me va a quedar - 3 +2 me da -1, y x va salir igual -1/5 , correcto resulta entonces -3 + 2 sería -1 y 5x igual a -1 o sino tendría el otro desarrollo sería 5x =3+2 es igual a 5 entonces x sería igual a	w=a v w=-a Ejemplo: $\vert 5x-2\vert = 3$ 5x-2=-3 v 5x-2=3 5x=-1 v 5x= 5 x=-1/5 x = 1 S={-1/5 ; 1}
7m25s	AG	1	
7m27s	P	1, correcto muy bien entonces la solución sería, la solución de esta igualdad estaría dentro de los puntos -1/5 y 1, haber, por si acaso para los que ya están avanzados esto no es un intervalo simplemente son puntos es un conjunto, correcto.	

8m10s	P	muy bien otro ejemplo, podríamos poner por este lado, en el caso de, en el caso siguiente, por ejemplo si yo tengo digo 7x-4 +2 igual a cero , que opinan ustedes de esta igualdad, entonces usted dice, a ya fácil profesor me dice no, correcto, entonces yo digo bueno si usted pasa 7x-4 al segundo miembro dice que el módulo o valor absoluto de 7x-4 igual a -2, que más podríamos hacer , bueno en ese sentido tenemos que recordar la definición del valor absoluto , el valor absoluto siempre tiene que ser positivo, pero en este caso, en este caso este valor absoluto es negativo, quiere decir que el conjunto solución en este caso que sería,… vacío, así, correcto, muy bien recuerde y esté atento con este ejemplo porque nos pueden sorprender de alguna manera esto nos lleva ya a un análisis,	Ejemplo2: $\lvert 7x-4\rvert+2=0$ $\lvert 7x-4\rvert=-2$ Solución = { }
9m38s	P	muy bien otro ejemplo que siempre tenemos con nuestros alumnos es el siguiente ya por ejemplo dice, otro ejemplo 6- 3x , valor absoluto de 6-3x es igual al valor absoluto de 2x+1 , muy bien en este caso que podemos hacer, bueno aquí vamos a utilizar otra pequeña propiedad, pero primeramente vamos a poner, vamos a poner vamos acomodar ésta expresión, de tal manera que sea de una manera más fácil para desarrollar para nosotros, podemos dividir por ejemplo, podemos dividir ambos miembros por entre el valor absoluto de 2x+1 , de acuerdo puedo poner por ejemplo 6-3x lo puedo dividir entre 2x+1 valor absoluto y también el valor absoluto de 2x+1 lo puedo dividir entre el valor absoluto de 2x+1 , para que se mantenga la igualdad , no es cierto, entonces sabemos que toda cantidad entre sí misma es la unidad, y nos quedaría que el valor absoluto de 6-3x sobre valor absoluto de 2x+1 es igual a 1, correcto entonces a donde nos lleva esta expresión , mire	Ejemplo 3: $\lvert 6-3x\rvert=\lvert 2x+1\rvert$ $\frac{\lvert 6-3x\rvert}{\lvert 2x+1\rvert}=\frac{\lvert 2x+1\rvert}{\lvert 2x+1\rvert}$ $\frac{\lvert 6-3x\rvert}{\lvert 2x+1\rvert}=1$ $\frac{\lvert \boldsymbol{a}\rvert}{\lvert \boldsymbol{b}\rvert}=\left\lvert\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right\rvert$

		usted no puede saltarse los pasos tiene que seguir apoyándose en las circunstancias teóricas que tenemos que afrontar, por ejemplo un pequeño asterisco ,mire, cuando usted tenga valor absoluto de a dividido entre el valor absoluto de b esto es una propiedad también del valor absoluto podríamos decir que esto es igual al valor absoluto de a sobre b, correcto esta propiedad es la que vamos a aplicar aquí, también, de tal manera que yo digo valor absoluto de 6-3x , vamos a poner la llave hasta el asterisco nomas , digo ahora este valor absoluto total pero de 6-3x dividido entre 2x+1 es igual a 1 ,	$\left\|\frac{6-3x}{2x+1}\right\| = 1$ $\frac{6-3x}{2x+1} = 1$ $\vee \quad \frac{6-3x}{2x+1} = -1$ 6-3x = 2x+1 $\vee$ 6-3x = -(2x+1) -3x – 2x = 1 – 6 $\vee$ 6 - 3x = -2x - 1 -5x = -5 x = 1 $\vee$ -3x + 2x = -1 - 6

			V $-x=-7$ $x=7$
12m43s	P	bueno a partir de allí se acuerdan que por aquí teníamos la definición de cómo resolver un valor absoluto para una igualdad, valor absoluto de w era igual a , entonces aquí podríamos aplicar esto, valor absoluto, esto sería ahora w igual a 1, ta bien es igual a 1 o también igual a -1, entonces podemos continuar diciendo que 6-3x sobre 2x+1 es igual a 1	
13m35s	AG	1	
13m37s	P	como está aquí o sino es igual a -1 o sino 6-3x sobre 2x+1 es igual a -1, correcto, entonces mire ah como es ido llevando la expresión del ejemplo a una propiedad matemática que nosotros ya teníamos conocimiento , entonces lo que podemos hacer a partir de éste momento, simplemente es ya comenzar a operar, correcto vamos a ver, aquí digo que el 6-3x es igual a 2x+1 está bien, entonces yo puedo decir que 5x o para que usted no se moleste -3x-2x es igual a 1-6 y es igual	
14m32s	P	Sería -5x ,	

14m36	AG	profe -6 , profe -6 sería profe , al otro lado, al otro lado, abajo, al otro lado, al lado derecho .	Equivocación al copiar los datos
14m40s	P	-3x-2x	
14m44s	AG	al otro lado, al otro lado, al lado derecho	
14m48s	P	ya correcto gracias, por la , ya , sería entonces 1-6 , de adonde salió el 5, ya, 1-5, sería -5 entonces aquí tendríamos que x es igual	
15m03	AG	a 1	
15m06	P	menos entre menos nos da más ,y nos queda que x=1, o sino 6-3x en este caso es igual a -1 , sería 6-3x igual a	
15m20s	A3	-2x-1	
15m22s	P	pero 2x+1, muy bien , allí tenemos entonces que 6-3x es igual a -2x-1 y por último tendríamos que -3x +2x es igual a	

15m46s	A3	-x	
15m54s	P	-1-6 es igual a -7 , -1-6 sería -7, entonces aquí nos quedaría que –x es igual a -7,	
16m7s	P	entonces x=7	
16m 14s	P	entonces x sería igual a 7, a ver vamos a borrar la parte de allá, aquí haciendo un pequeño recuadro, nuestro conjunto solución estaría formado por los elementos 1 coma	
16m34s	AG-P	7	
16m38s	P	7, muy bien podemos borrar esta parte , y seguir viendo otros ejemplos adicionales, vamos a ver por ejemplo, que continuamente se presenta y que tenemos que desarrollar , dice el siguiente ejemplo, ya podemos tener por ejemplo, que para poder desarrollar estas ecuaciones con valor absoluto, tenemos ya, la parte de, igualación de valores absolutos, ya la acabamos de ver, luego ¿qué otra posibilidad tenemos para seguir desarrollando? básicamente las igualdades con valor absoluto se pueden remitir al desarrollo de los ejemplos que hemos visto.	

<table>
<tr>
<td>17m50s</td>
<td>P</td>
<td>Más que nada nos está preocupando, también en estos momentos el poder desarrollar las desigualdades con valor absoluto, correcto, por eso vamos a desarrollar las desigualdades con valor absoluto, que es lo que más nos está preocupando, desigualdades con valor absoluto, muy bien en este caso vamos a obtener algunas posibilidades, ya está, podemos tener para hacer el desarrollo de una manera más concisa y más ordenada, podemos hacer un pequeño cuadrito, de los casos que se nos presenten ya, vamos a ver, podemos escribir casos, casos que se nos pueden presentar y podemos hacer un pequeño cuadro teórico de las posibilidades, a ver vamos a ver las posibilidades,</td>
<td>
<table>
<tr><td>CASO</td><td>DESARROLLO</td></tr>
<tr><td>$|\boldsymbol{a}| < b$</td><td>$-b < a < b$</td></tr>
<tr><td>$|\boldsymbol{a}| \leq \boldsymbol{b}$</td><td>$-b \leq a \leq b$</td></tr>
<tr><td>$|\boldsymbol{a}| > b$</td><td>$a < -b \vee a > b$</td></tr>
<tr><td>$|\boldsymbol{a}| \geq \boldsymbol{b}$</td><td>$a \leq -b \vee a \geq b$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>19m10s</td>
<td>P</td>
<td>El primer caso podemos decir, cuando el Valor absoluto de a sea menor que una cantidad

También que, en el segundo caso podemos decir, que el Valor absoluto de una cantidad sea menor o igual que otra cantidad

Como tercer caso podemos decir, que el Valor absoluto de una cantidad sea mayor que una cantidad

Por último para abarcar todos los casos posibles, podemos decir que el Valor absoluto de una cantidad podría sea mayor o igual a otra cantidad.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

20m7s	P	Pero como vamos a desarrollar los casos que tenemos allí En el primer caso también podemos apelar en cierta manera a la definición del valor absoluto, cuando se me presente una desigualdad del caso 1, puedo decir que esto va a ser igual , la cantidad “a” va a ser mayor que –b , pero menor que b, de tal manera que ya sabemos que cuando tenemos una desigualdad de ésta forma yo lo voy a desarrollar así. El objetivo es que desarrollemos este valor absoluto, correcto, de igual manera en éste caso si yo tengo que el valor absoluto de a es menor o igual a b, va a ser mayor o igual que –b pero menor o igual que b, correcto,	
21m7s	P	en este caso el valor absoluto de a es que mayor que b ,a ya, en este caso hay una pequeña , hay una pequeña observación entonces yo digo en este caso , a es menor que menos b o si no a es mayor que b, muy bien, entonces tenemos estas posibilidades, y vamos a ver la última en la que dice que el valor absoluto de una cantidad es mayor o igual que otra cantidad,	
21m53s	P	suena el celular	

21m58s	AG	se ríen los alumnos	
22m02s	P	entonces yo digo que de ésta manera, de esta manera, acá voy a tener	
22m10s	P	entonces para desarrollar eso	
22m12s	A2	suena el celular, apágalo	
22m14s	P	yo digo que a va a ser menor o igual que b o sino que a es mayor o igual que b, correcto, muy bien ya tenemos el cuadrito de posibilidades y ahora apliquemos a las respectivas alternativas, no por ejemplo decimos , en el primer ejemplo, se trata del valor absoluto de una cantidad menor a otra cantidad, vamos a ver,	
23m5s	P	vamos a poner valor absoluto de 3x-2 que sea menor , menor que 5 , correcto, entonces ustedes dicen, de acuerdo a la definición profesor, 3x-2 debe ser mayor que menos 5 pero menor que 5. Entonces decimos 3x-2 que sería **a** es mayor que -5 pero a su vez es menor que, que 5 correcto, muy bien, entonces vamos a desarrollar entre que valores se encuentra la variable x, decimos entonces -5, vamos a sumarle 2 , para que se me elimine acá este 2, correcto, -5 + 2 es menor que 3x , menos 2 solo para que usted visualice , porque ya se dio	Ejemplo $\|3x-2\| < 5$ $-5 < 3x-2 < 5$ $-5 + 2 < 3x < 5 + 2$

		cuenta ,menor que, 5+2 , correcto muy bien , entonces aquí digo que -3 es menor que 3x y menor que 7 , y que podría hacer ahora, divido todo entre 3, no es cierto, allí tendría al dividir todo entre 3 , solamente para que usted se dé cuenta de lo que se ha hecho, sería 3x/3 y menor que 7/3, entonces tendríamos -1, x y 7/3 , entonces ya tendríamos nuestra variable x , limitada por esos dos números, entonces la solución que nosotros tendríamos sería que x va a pertenecer al intervalo abierto -1 coma 7/3 abierto, de acuerdo, entonces, de esta manera hemos atacado el primer desarrollo correcto, veamos otro ejemplo para atacar el segundo desarrollo, decimos que	-3 < 3x < 7 $\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$ $-1 < x < \frac{7}{3}$ $x \in < -1; \frac{7}{3} >$
25m52s	P	valor absoluto de x-10 sobre 7 es menor o igual que 5, muy bien, nuevamente dice usted, ya profesor nos encontramos ante la segunda posibilidad, y la segunda posibilidad nos lleva a este desarrollo, correcto, entonces yo digo vamos a ver aquí tenemos que valor absoluto de x-10 sobre 7 , va a ser menor o igual a 5 pero mayor o igual que -5, correcto estamos desarrollando de acuerdo a lo que tenemos en el segundo caso, porque, porque este es el segundo caso, correcto, muy bien a partir de este momento ya sé que usted se dio cuenta, pero vamos a multiplicar, ya, -5 voy a multiplicar por 7 menor o igual que x-10 sobre 7 por 7 menor o igual que 5 por 7, listo entonces aquí me da igual a -35 menor o igual que x-10 menor o igual que 35, correcto, estamos , muy bien, entonces quiero eliminar el 10 ahora que voy a hacer, entonces le sumo 10 a todo aquí tendríamos -35 o vamos a poner de forma completa para que usted vaya a captar también y no se incomode sería -35 +10 menor o	Ejemplo: $\left\vert\frac{x-10}{7}\right\vert \leq 5$ $-5 \leq \frac{x-10}{7} \leq 5$ $-5 * 7 \leq \frac{x-10}{7} * 7 \leq 5 * 7$ -35 +10 $\leq x - 10 + 10 \leq 35 + 10$

		igual que x-10+10 menor o igual que 35+10, entonces tendríamos acá -35+10 nos da -25 menor o igual que x menor o igual que 45 , entonces como ya tengo que mi variable está limitada entre estos dos extremos , entonces yo digo que, puedo dar la solución que x va a pertenecer a que intervalo: abierto , cerrado	$-25 \leq x \leq 45$ $x \in [-25; 45]$
29m	AG	cerrado	
29m2s	P	cerrado en -25,	
29m7s	A	hasta 45 cerrado	
29m10s	P	45 cerrado hasta 45 cerrado	
29m12s	P	correcto, entonces hemos visto el desarrollo de la segunda posibilidad en cuanto a las desigualdades con valor absoluto, pero Aquí todavía existen 2 posibilidades adicionales, por ejemplo en el caso del valor absoluto de una cantidad mayor o igual que otra cantidad, podemos decir lo siguiente,	
29m40s	P	Valor absoluto de 8x+1 mayor que 3 , correcto, Valor absoluto de 8x+1 mayor que 3,	Ejemplo:

		entonces tengo que decir que **a** es menor que la segunda cantidad con signo negativo o sino entonces que puedo decir , puedo decir que 8x+1 menor que -3 o sino que 8x+1 sea mayor que 3, correcto a partir de este instante entonces la solución ya se hace más sencilla, entonces decimos en este caso, que 8x va a ser menor que -4 , -3-1 entonces x va a ser menor que -4/8 que es lo mismo a - ½ o sino que 8x va a ser mayor que 3-1=2	$\lvert 8x+1\rvert > 3$ Solución $8x+1<-3 \lor 8x+1>3$ $8x < -4 \lor 8x + 1 > 3$ $X < -1/2 \lor 8x > 2$ $X > 1/4$ $x \in \left[\begin{array}{l} < -\infty; -\frac{1}{2} > \\ \cup < \frac{1}{4}; +\infty > \end{array}\right]$
31m40s	A2	¼	
31m42s	P	X va a ser mayor que cosa que 2/8 , que es lo mismo que	
31m43s	P	¼	
31m50s	P	2/8 que es lo mismo, que 2/8 que es lo mismo que ¼ , mayor que ¼, correcto , como usted tiene su conector lógico “o”, entonces que decimos, si lo graficamos con una flecha numérica , vemos que -1 esta acá -1/2 estará mas o menos por este lado, aquí está el menos infinito, luego ¼	
32m48s	A2	luego ¼, Positivo positivo	

33m		¼ estará por este lado, entonces yo digo que allí está, como está el conector lógico o que es similar a la unión , yo digo que entonces, que la variable x entre que valores está , está entre el menos infinito y -1/2 abierto	
34m10s	A3	-1/4	
34m12s	P	en ambos lados unidos con abierto en ¼ positivo hasta infinito abierto, correcto, tenemos que , ya está, que la variable estaría desarrollándose entre éstos 2 extremos,	
35m5s	P	como cuarto y último caso, que es la variable “a” que es mayor o igual a una cierta cantidad, vamos a poner por este espacio, allí está, entonces ya está entonces tenemos , vamos a ver otro ejemplo, en este caso que tiene que ver con el último caso, aquí dice en este ejercicio valor absoluto de x+6 mayor o igual a 1, ya en realidad son ejemplos sencillos simplemente para poder tener una idea de cómo voy a aplicar como voy a aplicar el desarrollo de los valores absolutos, porque cuando se me presente un ejercicio que tenga la combinación de varios valores absolutos entonces yo siempre voy a tener en cuenta lo que esta acá, correcto, en este caso digo lo siguiente,	Ejemplo $\|x+6\| \geq 1$ $x+6 \leq -1 \ \vee \ x+6 \geq 1$ $x \leq -7 \ \vee \ x \geq -5$ $x \in [< -\infty; -7 > \cup < -5; +\infty >]$
38m	P	como ustedes ven que el valor absoluto es mayor o igual a b que es algo similar al ejercicio	

		que tenemos, decimos entonces para este caso que x+6 es menor o igual a	COLOCO MAL EL DATO
38m12s	A2	que 1	
38m20s	P	x+6 es menor o igual a –b o sino que a osea x+6 es mayor o igual a b	
39m	A3	-1, sería -1	
40m	P	perdón, correcto, correcto, ya estamos …..sorditos	
40m10s	P	-1 que es b, en este caso el uno viene a representar a lo que tenemos aquí como b, entonces x es menor o igual que -7 o sino que x es mayor o igual que	
41m	A3	-5,	
41m5s	P	1-6 sería iguala a -5, correcto, entonces, vamos a ver	
42m34s	P	Si nosotros graficamos la recta numérica, aquí tenemos nuestro cero, entonces -7 sería más o menos por acá , -5 sería más o menos por acá , entonces digo que el valor de nuestra	

		variable será desde	
43m	P-AG	Entre el infinito hasta el -7 cerrado	
44m12s	P	unido con el cerrado en -5, y abierto en el infinito Muy bien entonces vamos a ver que hemos estado repasando 4 casos , 4 posibilidades, los cuales hay que tener muy en cuenta por que en base a esas posibilidades la combinación de esas 4 posibilidades nos lleva a desarrollar otras interrogantes.	
50m-60m	P	Presenta 10 problemas, para que los alumnos desarrollen, en una hora (60 minutos)	

APÉNDICE 6: MATRIZ DE CONSISTENCIA

TITULO	PROBLEMA	PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Criterios de Idoneidad Didáctica como Guía para la Enseñanza y el Aprendizaje del Valor Absoluto en el Primer Ciclo del Nivel Universitario.	En la enseñanza del concepto del VA, en los primeros años del nivel superior, no se pone suficiente énfasis en diseñar situaciones didácticas para que los alumnos comprendan el concepto del VA y no se transita tampoco por sus diferentes usos.	1. ¿Qué errores, dificultades y obstáculos didácticos se presentan en la enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto?	**Objetivo general 1** Identificar y analizar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto del valor absoluto.	1. Revisar la literatura para indagar sobre los diferentes usos o significados del concepto del valor absoluto y su evolución a través de la historia. 2. Identificar y clasificar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos de los estudiantes a través de una prueba diagnóstica sobre la noción del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de

				idoneidad didáctica. 3. Explicar la aparición de los errores, las dificultades y los obstáculos de los estudiantes en el aprendizaje del concepto del VA en función del análisis de la clase, tomando en cuenta la observación de la clase del profesor y los resultados de la prueba diagnóstica.

		2 ¿Cómo utilizar los criterios de idoneidad para guiar el diseño de tareas sobre el valor absoluto que permitan superar los errores, las dificultades y los obstáculos didácticos identificados?	**Objetivo general 2** Tratar de superar los errores, las dificultades y los obstáculos en los diferentes usos del concepto del valor absoluto de los profesores del nivel superior, a través del diseño de una secuencia de tareas didácticas en las que se traten los diversos significados o usos del valor absoluto, teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica del EOS.	1. Determinar los significados de referencia y pretendido (elaboración de configuraciones epistémicas) del objeto valor absoluto, encontrados en algunos de los textos más usados de matemática básica del nivel superior, para identificar los diferentes tratamientos y/o usos del concepto del valor absoluto que son aplicados por profesores del nivel superior.

				2. Organizar una secuencia de tareas (con los diferentes usos del concepto del VA) tomando en cuenta algunos de los criterios de idoneidad didácticos: epistémico, cognitivo y mediacional del EOS, para ayudar a superar los errores, las dificultades y los obstáculos en los diferentes usos del concepto del valor absoluto en los profesores del nivel superior.

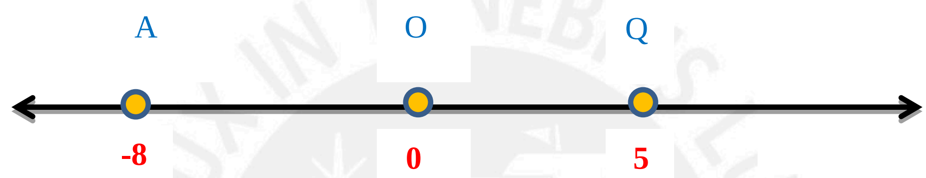
APÉNDICE 7

ALGUNAS SOLUCIONES DE LAS TAREAS DIDÁCTICAS

SESIÓN 2: EL VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL VISTO DENTRO DEL CONTEXTO TOPOLÓGICO

TAREA 1.

Considere los puntos *A*, *O* y *Q*, cuyas coordenadas son – 8, 0 y 5, respectivamente. Calcule



a) La distancia del punto *A* al punto O, *d*(*A*, O)

$$d\ \ A,O\ \ =\ \ -8-0\ \ = 8$$

b) La distancia del punto *O* al punto O, *d* (*O*, O)

$$d\ \ O,O\ \ =\ \ 0-0\ \ = 0$$

c) La distancia del punto *Q* al punto O, *d* (*Q*, O)

$$d\ \ A,O\ \ =\ \ 5-0\ \ = 5$$

TAREA 2.

Halle las coordenadas de un punto *P*, cuya distancia del punto de coordenada cero es:

a) dos unidades

$$d\ \ P,O\ \ =\ \ p-0\ \ = 2$$

$$p-0\ \ = 2$$

$$p\ \ = 2$$

$$p = 2$$

$p = -2$

b) cero unidades

$$d\ P,O\ \ =\ p-0\ \ =0$$

$$p-0\ \ =0$$

$$p\ \ =0$$

$$p=0$$

c) 3,5 unidades

$$d\ P,O\ \ =\ p-0\ \ =3{,}5$$

$$p-0\ \ =3{,}5$$

$$p\ \ =3{,}5$$

$$p=3{,}5$$

$$p=-3{,}5$$

d) $\overline{5}$ unidades

$$d\ P,O\ \ =\ p-0\ =\ \ \overline{5}$$

$$p-0\ =\ \ \overline{5}$$

$$p\ =\ \ \overline{5}$$

$$p=\ \ \overline{5}$$

$$p=-\ \overline{5}$$

TAREA 3.

Halle las coordenadas de un punto Q, cuya distancia del punto de coordenada cero es:

a) Menos de dos unidades

$$d\ \ Q,O\ \ =\ \ q-0\ \ <2$$

$$q-0\ \ <2$$

$$q\ \ <2$$

$$-2<q<2$$

b) Menos de cinco unidades

$$d\ \ Q,O\ \ =\ \ q-0\ \ <5$$

$$q-0\ \ <5$$

$$q\ \ <5$$

$$-5<q<5$$

c) Más de 3,5 unidades

$$d\ \ Q,O\ \ =\ \ q-0\ \ >3{,}5$$

$$q-0\ \ >3{,}5$$

$$q\ \ >3{,}5$$

$$q>3{,}5\ \text{ ó }\ q<-3{,}5$$

d) Más de 8 unidades

$$d\ \ Q,O\ \ =\ \ q-0\ \ >8$$

$$q-0\ \ >8$$

$$q\ \ >8$$

$$q > 8 \ \text{ ó } \ q < -8$$

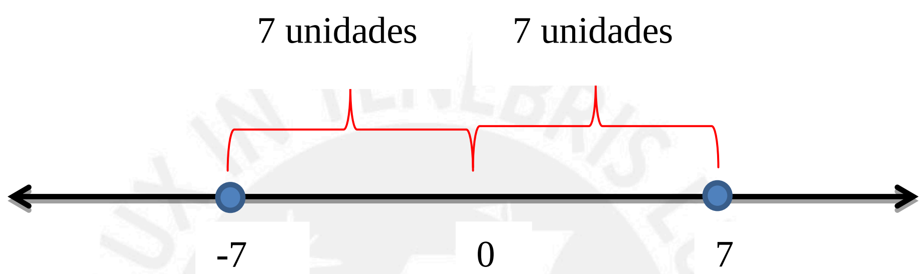
ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

TAREA 4.

a) Las coordenadas son: $x = 7$; $x = -7$

b) Se representa: $x - 0 \ = 7$

c) Representación gráfica de $x \ = 7$



d) C.S = {-7 ; 7}

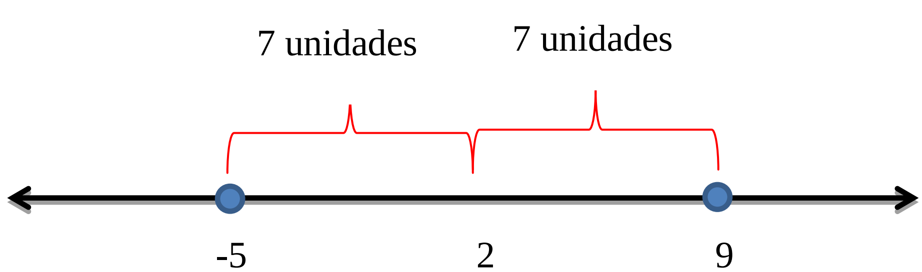
e) Significado en forma literal: “El punto, cuya coordenada es x, está a una distancia de 7 unidades del punto de coordenada cero”

TAREA 5.

a) Las coordenadas son: $x = 9$; $x = -5$

b) Se representa: $x - 2 \ = 7$

c) Representación gráfica de $x - 2 \ = 7$



d) C.S = { -5 ; 9 }

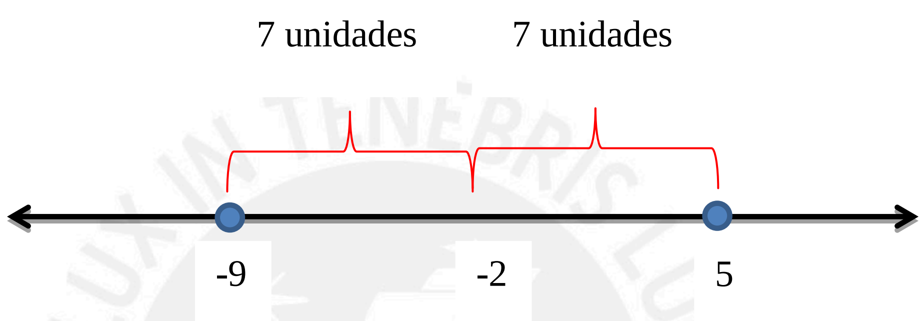
e) Significado en forma literal: “El punto cuya coordenada es x, está a una distancia de 7 unidades del punto de coordenada 2”.

TAREA 6.

a) Las coordenadas son: $x = -9$; $x = 5$

b) Se representa $x - (-2) \; = 7$

c) Representación gráfica de $x - (-2) \; = 7$



d) C.S = { -9 ; 5 }

e) Significado en forma literal: “El punto, cuya coordenada es x, está a una distancia de 7 unidades del punto cuya coordenada es - 2”

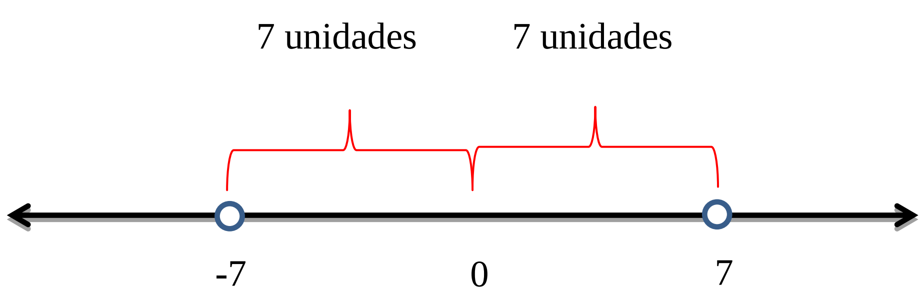
INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

TAREA 7.

a) Las coordenadas son: $-7 < \; x < 7$

b) Se representa $x - 0 \; < 7$

c) Representación gráfica de $x \; < 7$



d) Es decir: $-7 < x < 7$ .S= < -7; 7 >

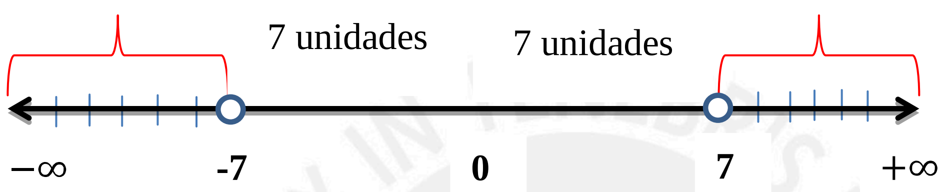
e) Significado en forma literal “la distancia entre los puntos P y el origen, cuyas coordenadas son x y 0, respectivamente, es menor que 7 unidades”.

TAREA 8.

a) Las coordenadas son: $x > 7 \lor x < -7$

b) Se representa $x - 0 > 7$

c) Representación gráfica de $x > 7$



d) Significado en forma literal “la distancia entre los puntos P y el origen, cuyas coordenadas son x y 0, respectivamente, es mayor que 7 unidades”.

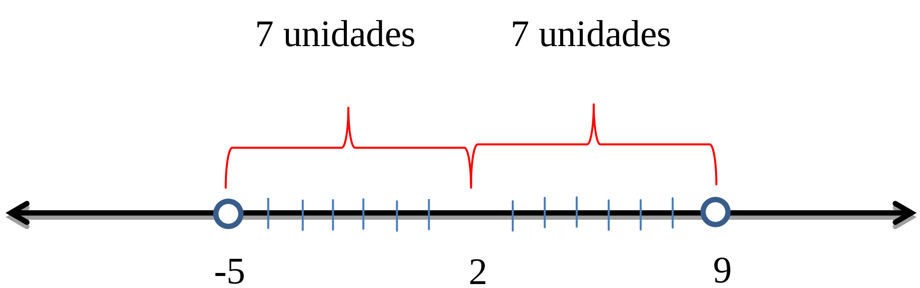
e) C.S = $< -\infty; -7 > \cup < 7; +\infty >$

TAREA 9.

Las coordenadas son: $-5 < x < 9$

a) Se representa $x - 2 < 7$

b) Representación gráfica de $x - 2 < 7$



c) C.S = $< -5;9 >$

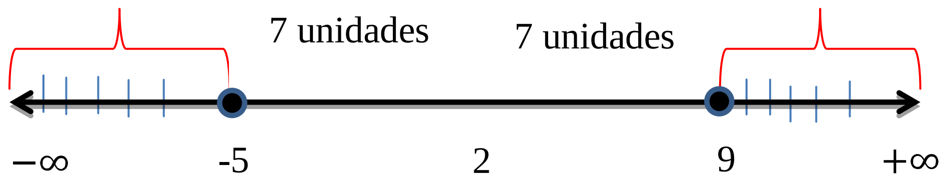
d) Significado en forma literal “La distancia de los puntos con coordenadas x y 2 es menor que 7 unidades”.

TAREA 10.

a) Las coordenadas son: $x \geq 9 \vee x \leq -5$

b) Se representa $x - 2 \geq 7$

c) Representación gráfica de $x - 2 \geq 7$



d) C.S = $< -\infty; -5] \cup [9; +\infty >$

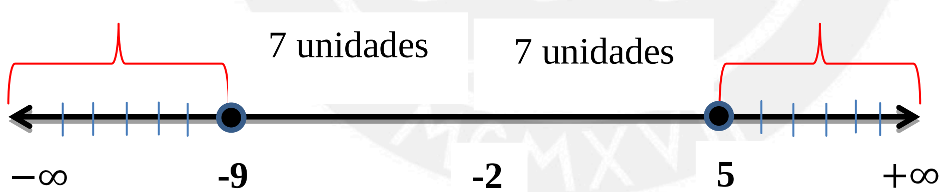
e) Significado en forma literal "La distancia de los puntos con coordenadas x y 2 es mayor que 7 unidades".

TAREA 11.

a) Las coordenadas son: $x \geq 5 \vee x \leq -9$

b) Se representa $x - (-2) \geq 7$

c) Representación gráfica de $x + 2 \geq 7$



d) C.S = $< -\infty; -9] \cup [5; +\infty >$

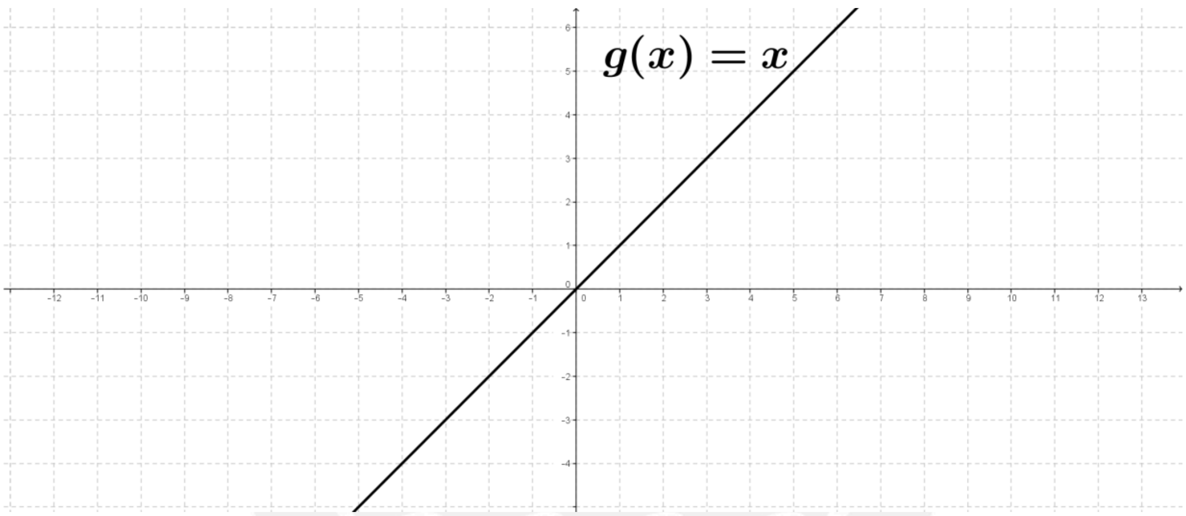
e) Significado en forma literal "La distancia de los puntos con coordenadas x y – 2 es mayor que 7 unidades".

SESIÓN 3: EL VALOR ABSOLUTO Y LA REFLEXIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL Y DE LA FUNCIÓN AFÍN SOBRE EL EJE DE LAS ABSCISAS.

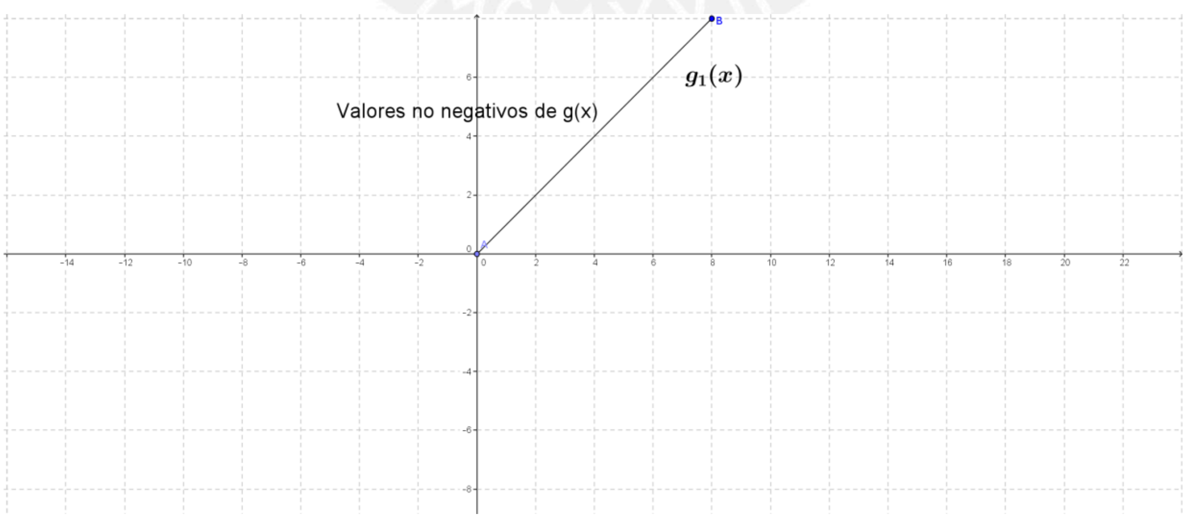
TAREA 1. Grafique la función la función f definida por $f(x) = |x|$. Para ello, siga el procedimiento siguiente (se le sugiere trabajar con lápiz):

Solución

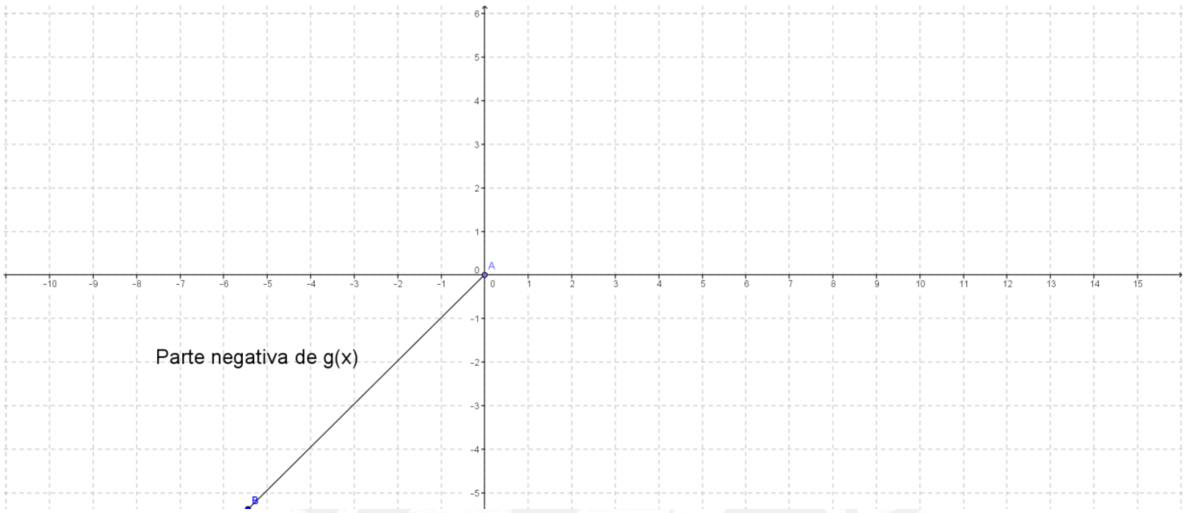
1. Grafique la función g definida por $g(x) = x$.



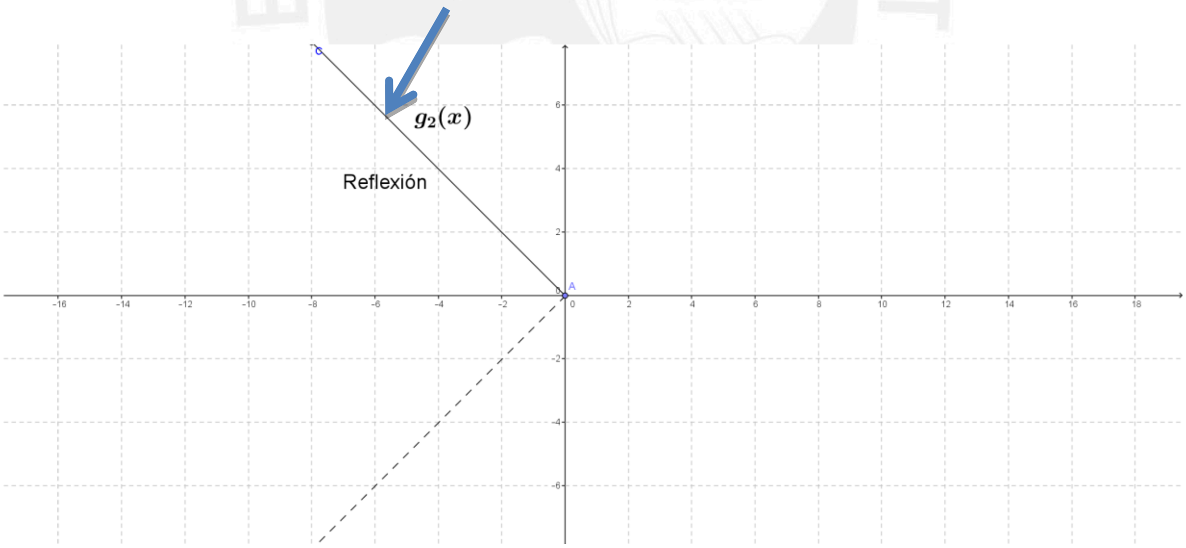
2. Restrinja el dominio de la función g, considerando solo los valores no negativos de x y grafique esta nueva función g_1.



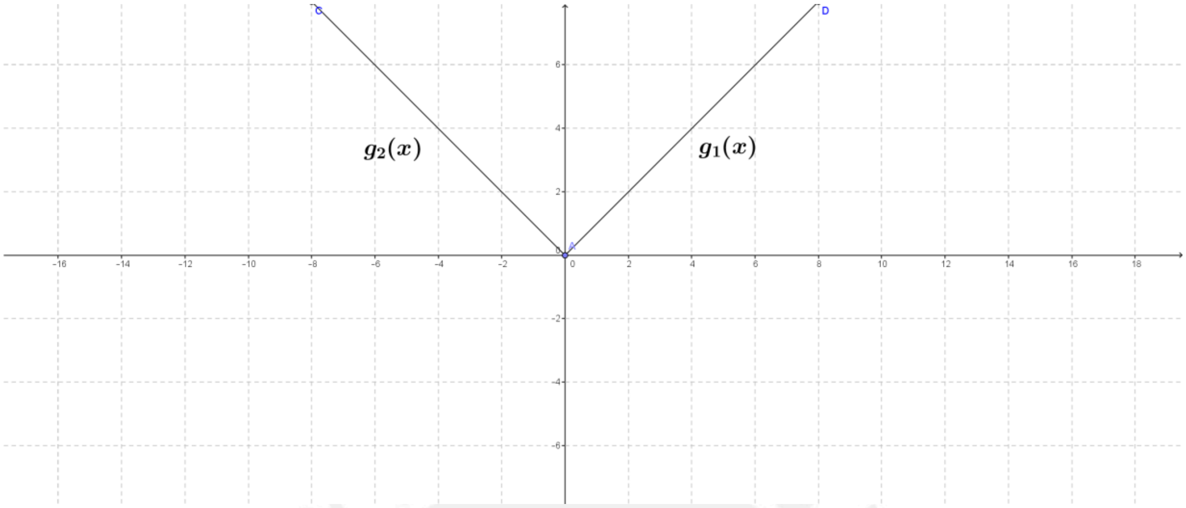
3. Identifique los valores negativos de $g(x)$ en la gráfica obtenida en el paso 1, lo que llamaremos la parte negativa de la gráfica de g.



4. Refleje con respecto del eje X la parte negativa de la gráfica de g identificada en el paso 3, y llámelo g_2.



5. Presente en un plano coordenado cartesiano, la unión de la gráfica g_1 obtenida en el paso 2 y la gráfica reflejada g_2 en el paso 4.



Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué valores toma $g\ (x)$ cuando $x \geq 0$?

Toma valores positivos

b) ¿Qué valores toma $g\ (x)$ cuando $x < 0$?

Toma valores positivos

c) ¿Cuál sería la definición de f, tomando en cuenta la definición de g?

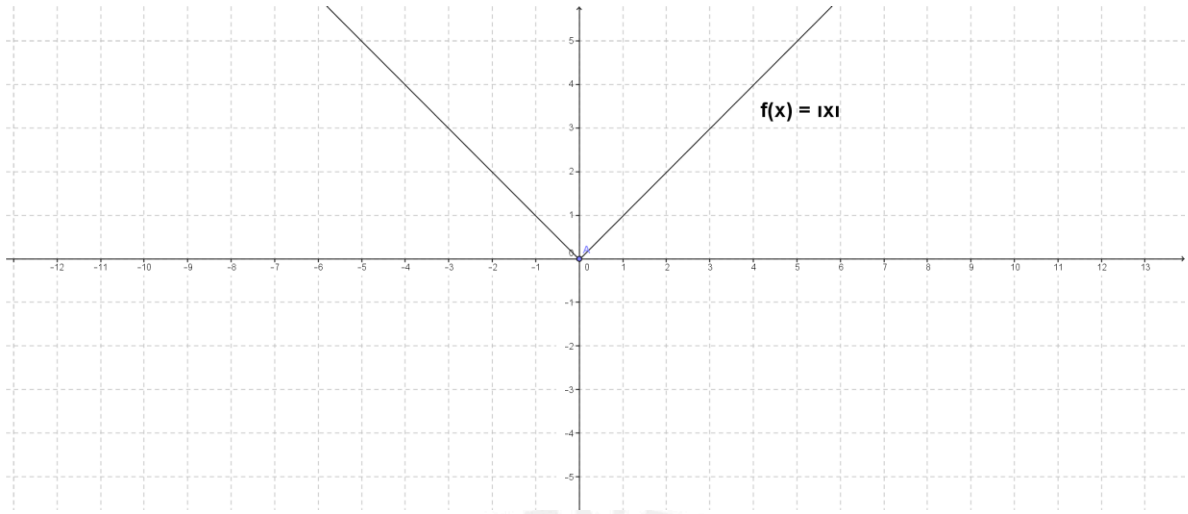
$$f\ \ x\ \ =\ \ x\ \ = x;\quad x \geq 0$$

$$f\ \ x\ \ =\ \ x\ \ = -x;\quad x < 0$$

d) ¿Qué función representa la gráfica obtenida en el paso 5?

Institucionalizamos la gráfica de la función valor absoluto

$$x\ \ =\ \ \begin{matrix} x\ ; x \geq 0 \\ x\ ; x < 0 \end{matrix}$$



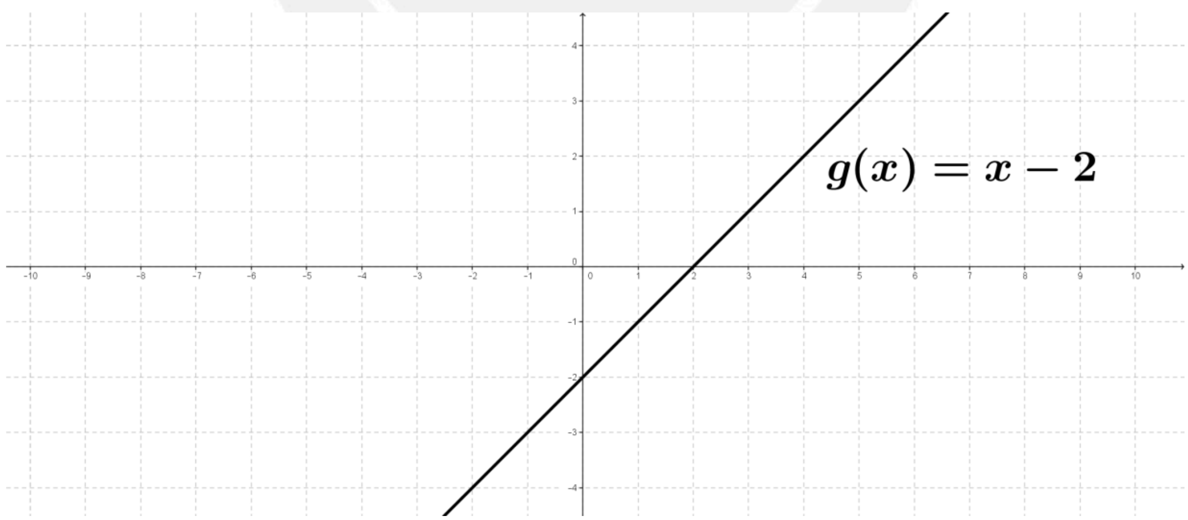
Se observa del gráfico que para todo valor x, su imagen siempre es mayor o igual a cero.

TAREA 2. Grafique $y = \ \ x - 2$ siguiendo los pasos que se muestran a continuación.

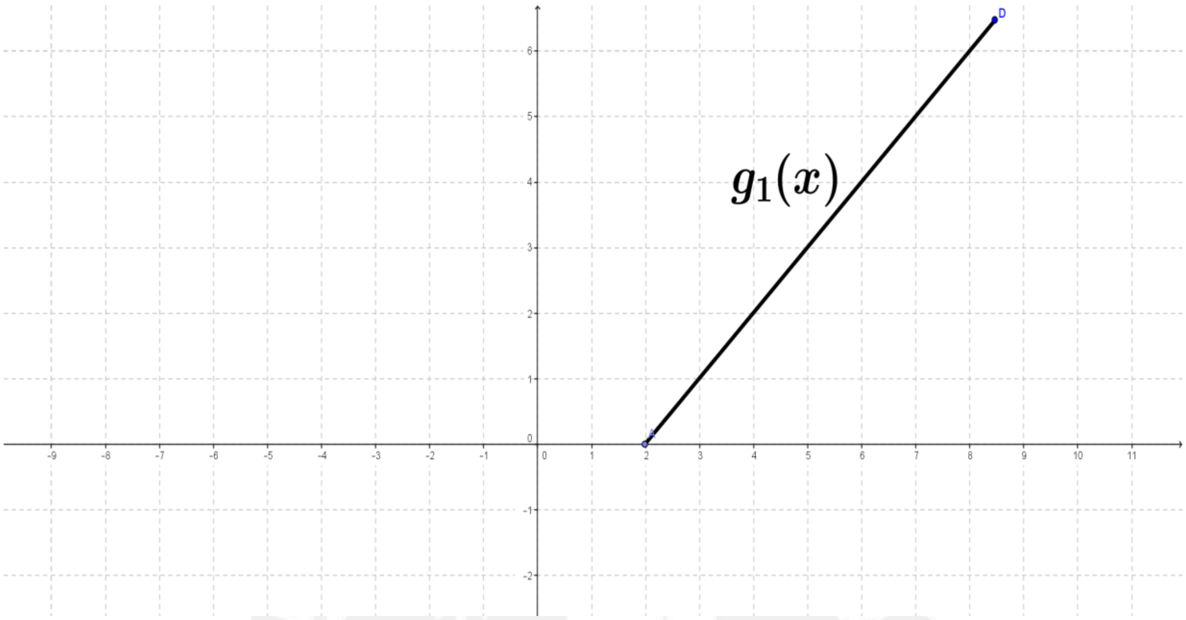
Para ello, siga el procedimiento siguiente (se le sugiere trabajar con lápiz):

Solución

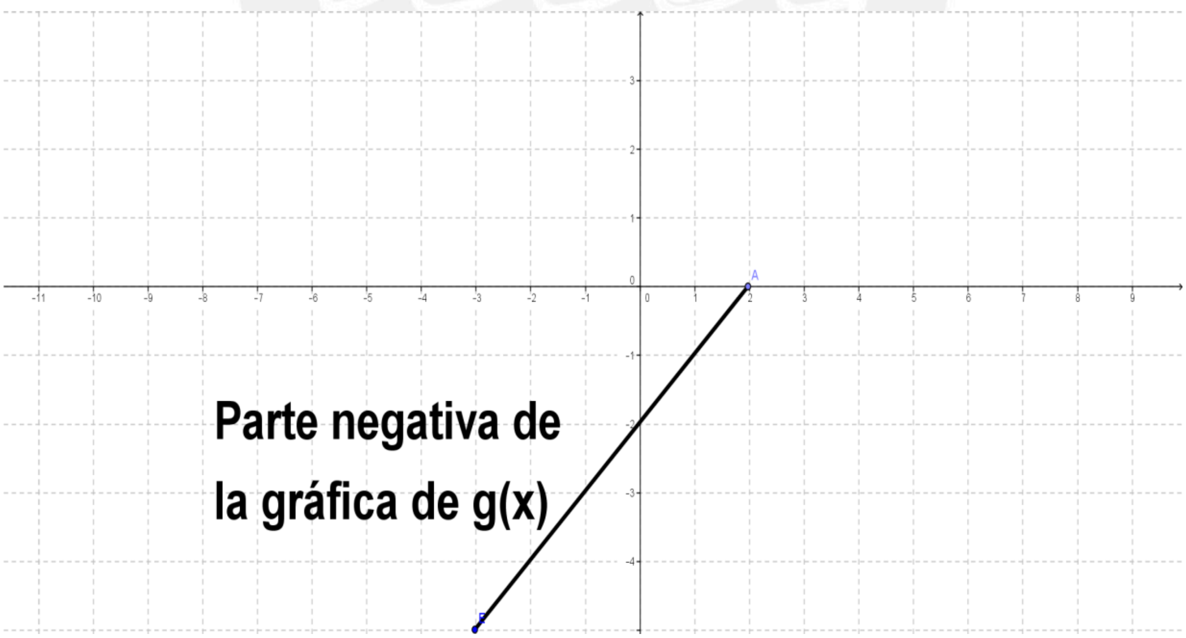
1. Grafique la función g definida por $g\ \ x\ \ = x - 2$.



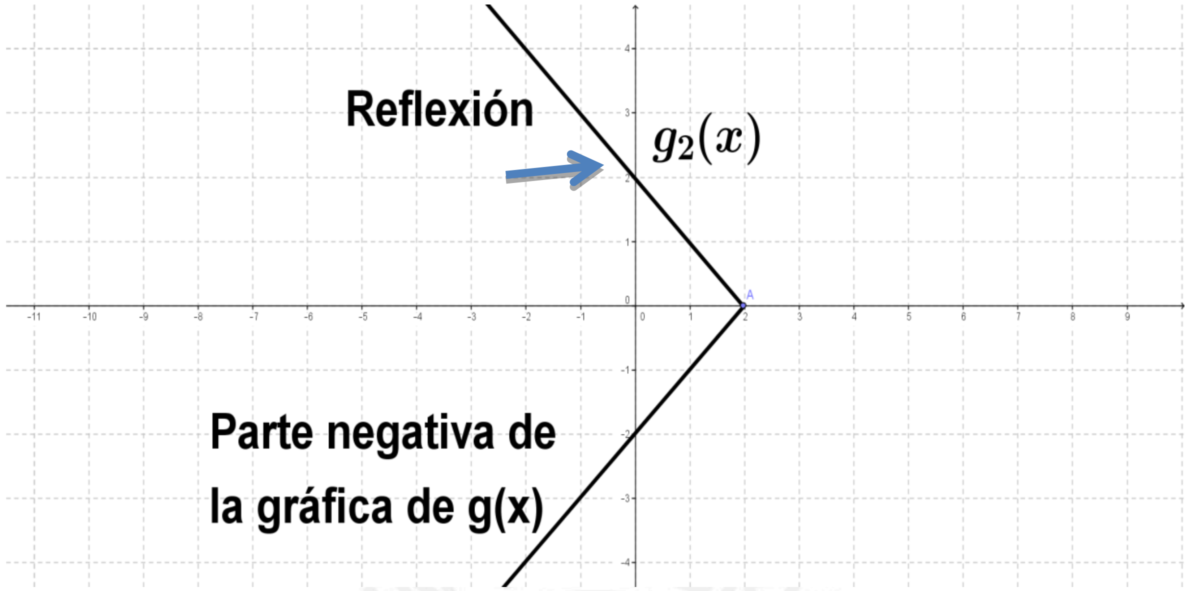
2. Restrinja el dominio de la función g, considerando solo los valores no negativos de *x-2* y grafique esta nueva función g_1.



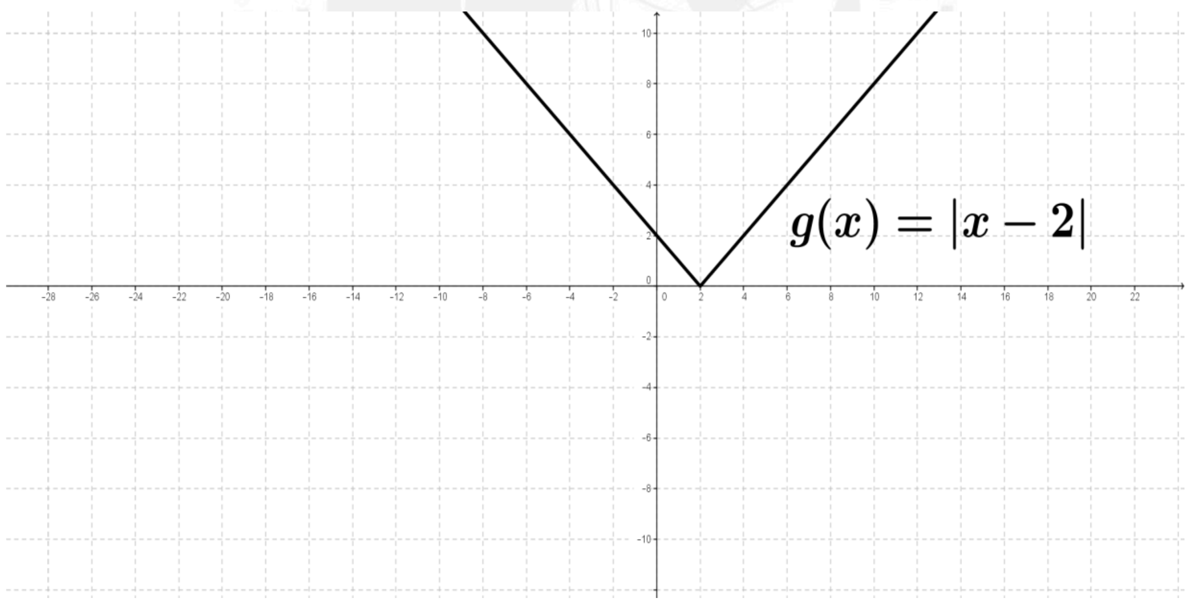
3. Identifique los valores negativos de $g(x)$ en la gráfica obtenida en el paso 1, lo que llamaremos la parte negativa de la gráfica de g.



4. Refleje con respecto del eje X la parte negativa de la gráfica de g identificada en el paso 3, y llámelo g_2.



5. Presente en un plano coordenado cartesiano, la unión de la gráfica g_1 obtenida en el paso 2 y la gráfica reflejada g_2 en el paso 4. Nombre a esta nueva gráfica como $g(x) = |x - 2|$.



Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué valores toma $g(x)$ cuando $x \geq 0$?

Toma valores positivos

b) ¿Qué valores toma g (x) cuando x <0?

Toma valores positivos

c) ¿Cuál sería la definición de f, tomando en cuenta la definición de g?

$$f\ x\ =\ x-2\ = x-2;\quad x \geq 2$$

$$f\ x\ =\ x-2\ = -(x-2);\quad x < 2$$

d) ¿Qué función representa la gráfica obtenida en el paso 5?

$$x-2\ = \begin{array}{l} x-2\ ; x \geq 2 \\ -(x-2)\ ; x < 2 \end{array}$$

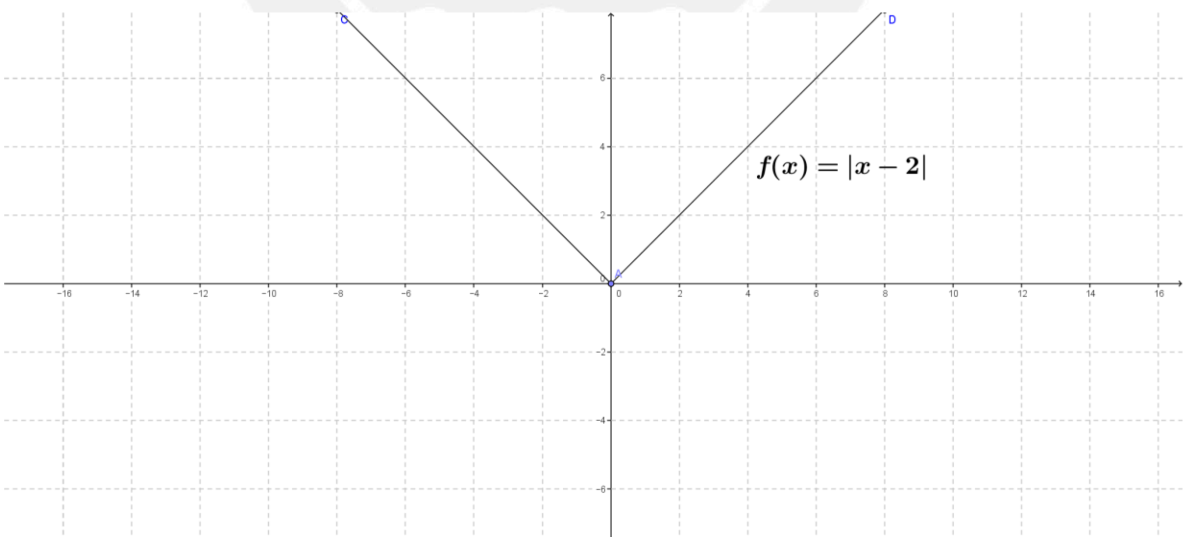
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO USANDO GRÁFICAS

TAREA 3. Resuelve $x-2\ = 2$, realizando los siguientes pasos:

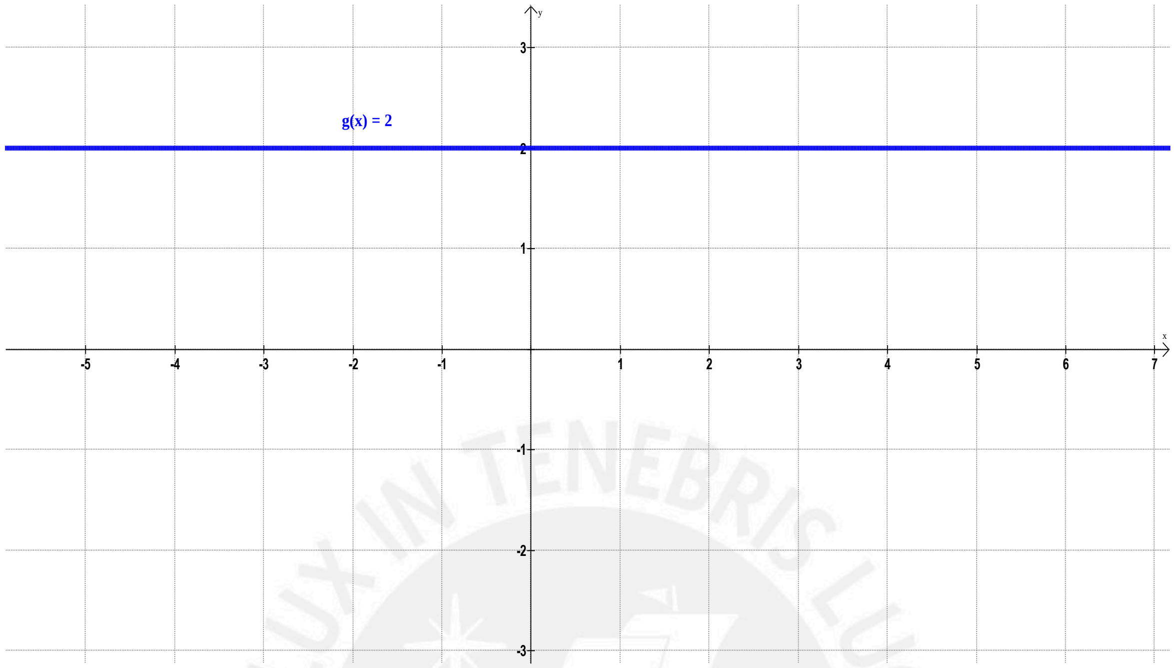
Solución

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x) =\ x-2$ y $g(x) = 2$

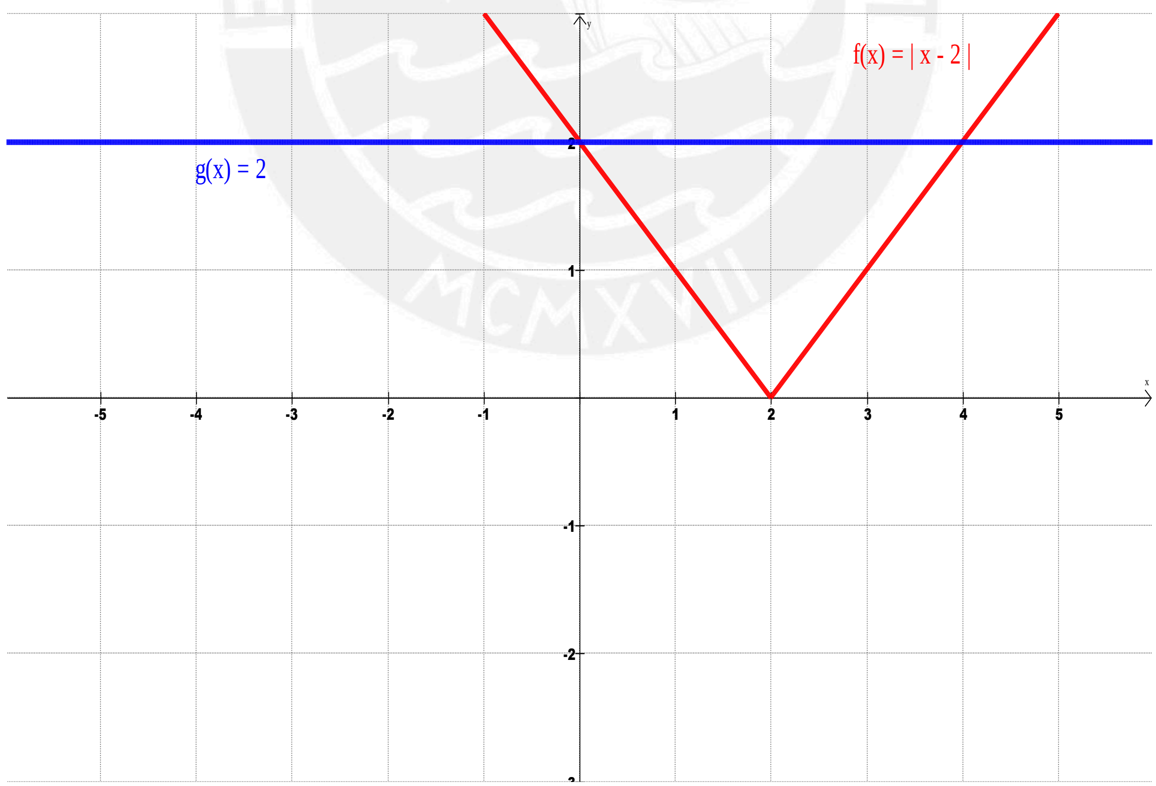
1°. Grafique: $f(x) =\ x-2$



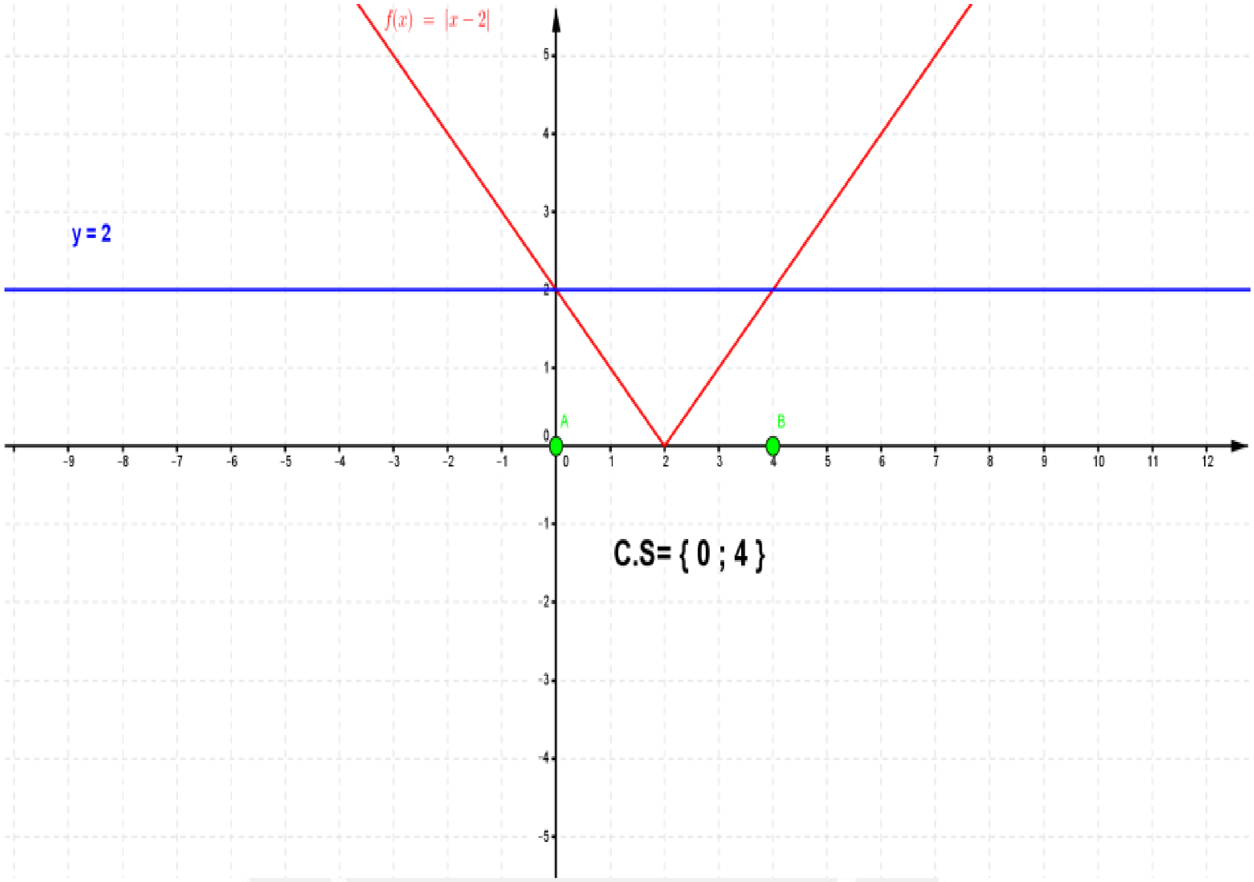
2° Grafique: $\boldsymbol{g(x) = 2}$



3° $Grafique$: $\boldsymbol{f(x) = \ x - 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = 2}$ en un mismo plano coordenado.



2) Halle los puntos de intersección de dichas gráficas.



3) Las abscisas correspondientes a las intersecciones de las gráficas serán el conjunto solución.

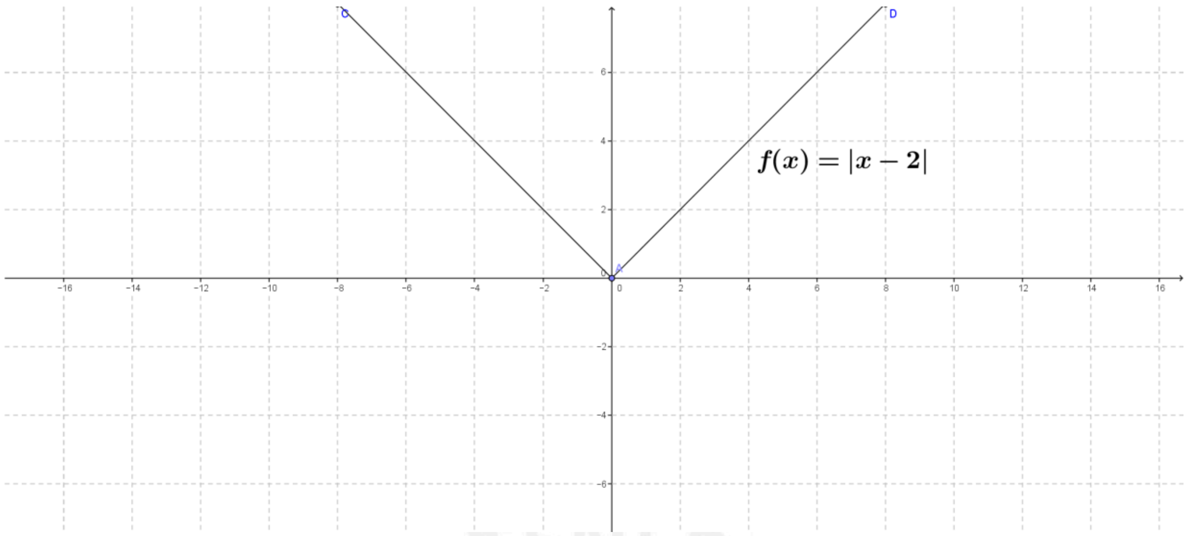
C.S = {0, 4}

TAREA 4. Resuelve $x - 2 \ = x$, realizando los siguientes pasos:

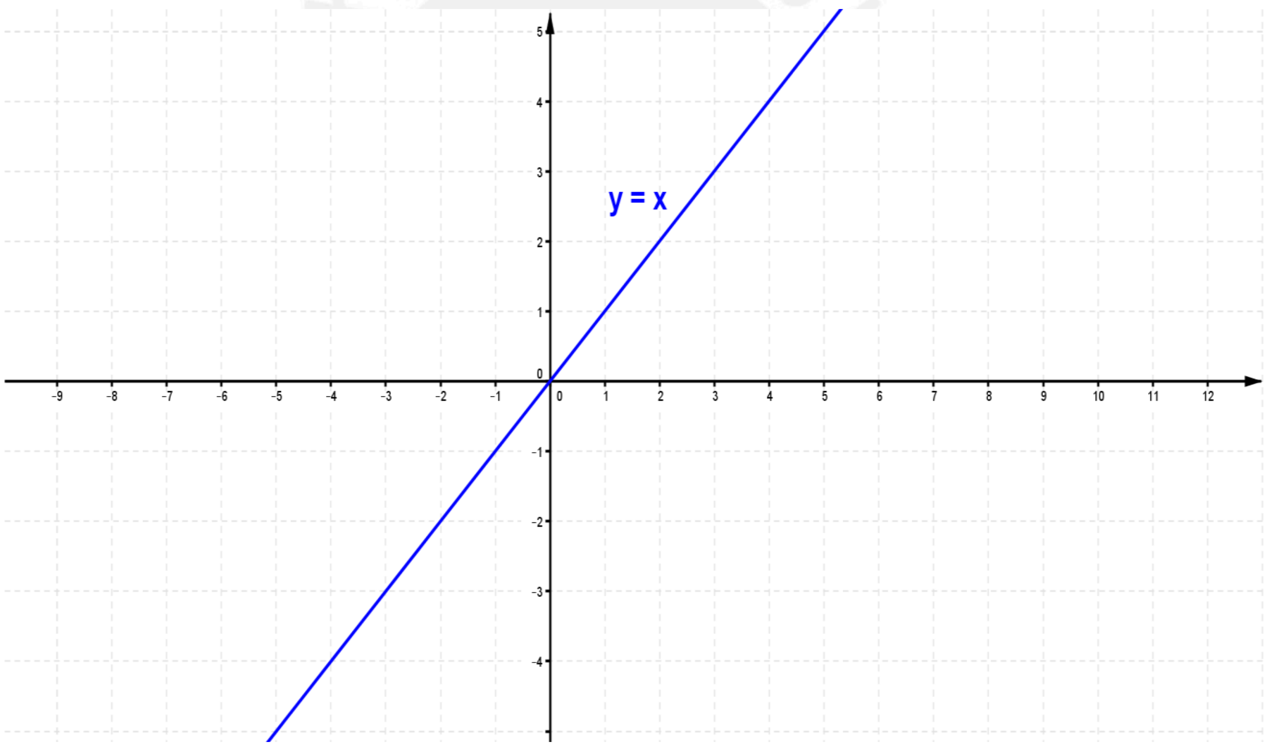
Solución

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x) = \ x - 2$ y $g(x) = x$

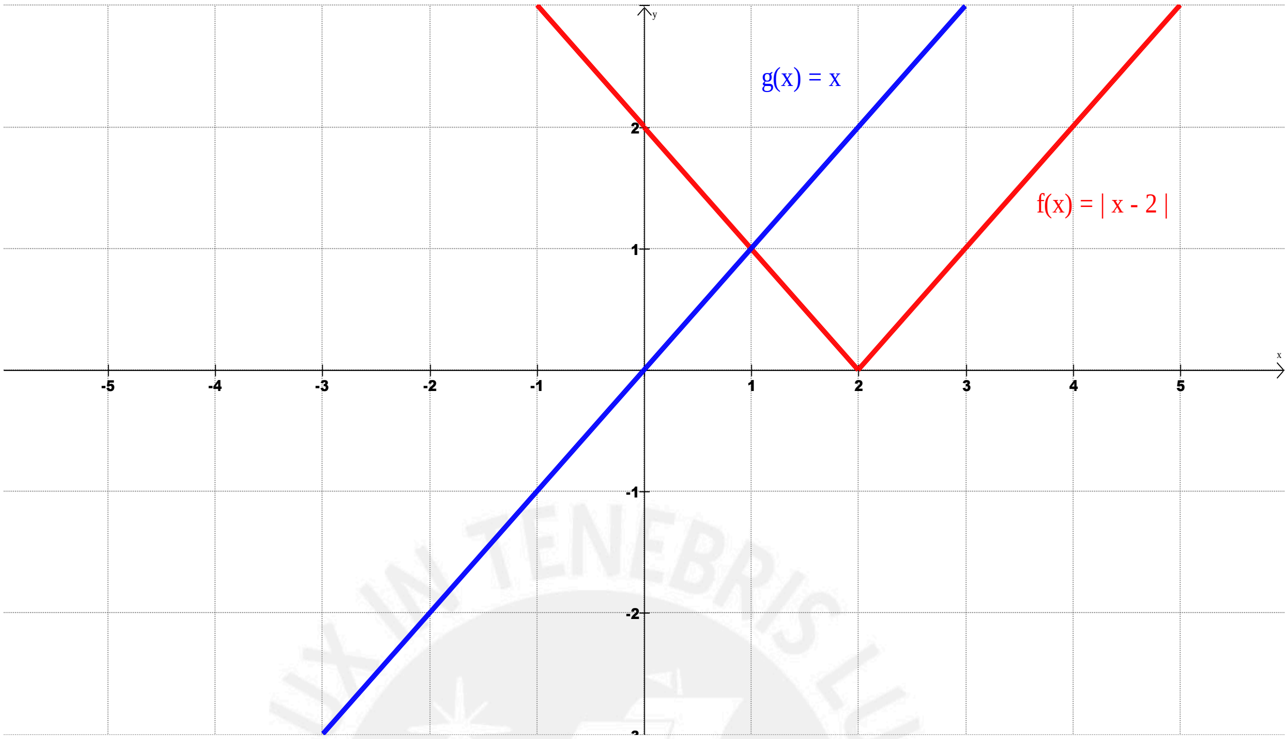
1°. Grafique: $y = \ x - 2$



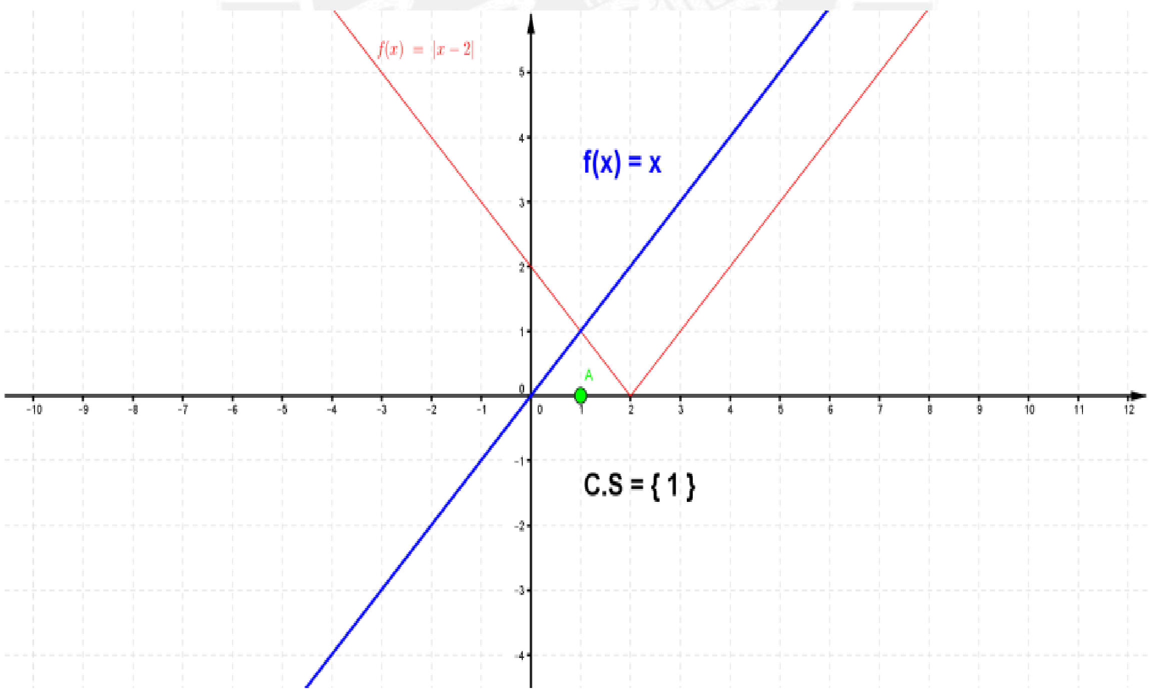
2°. Grafique: $\boldsymbol{y = x}$



3° Grafique: $f(x) = \ x - 2$ y $g(x) = x$, en un mismo plano cartesiano.



2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de *f* y *g* del paso 1.



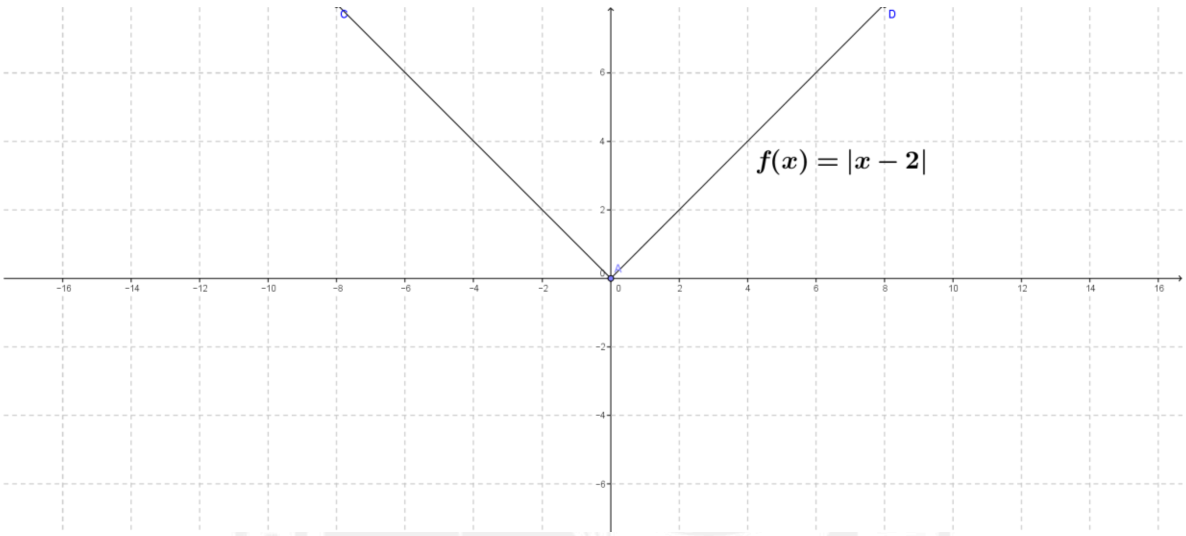
3) Las abscisas correspondientes a las intersecciones de las gráficas serán el conjunto solución. C.S={ 1 }

TAREA 5. $Resuelve\ \ x-2\ \ =-2,$ realizando los siguientes pasos:

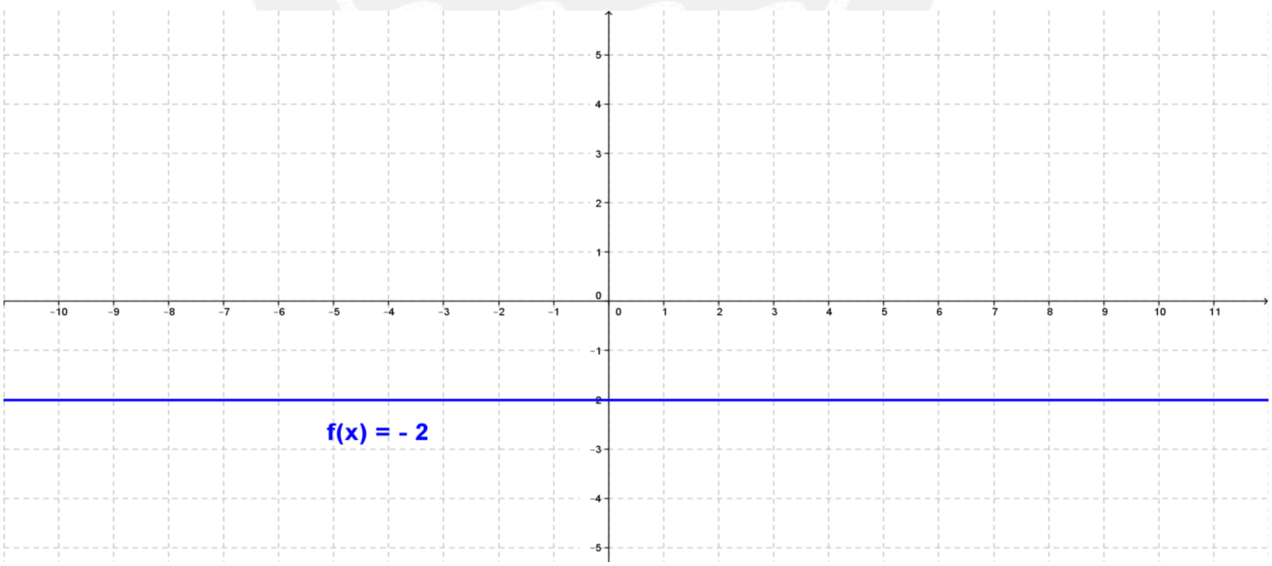
Solución

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x) =\ \ x-2$ y $g\ \ x\ \ =-2$

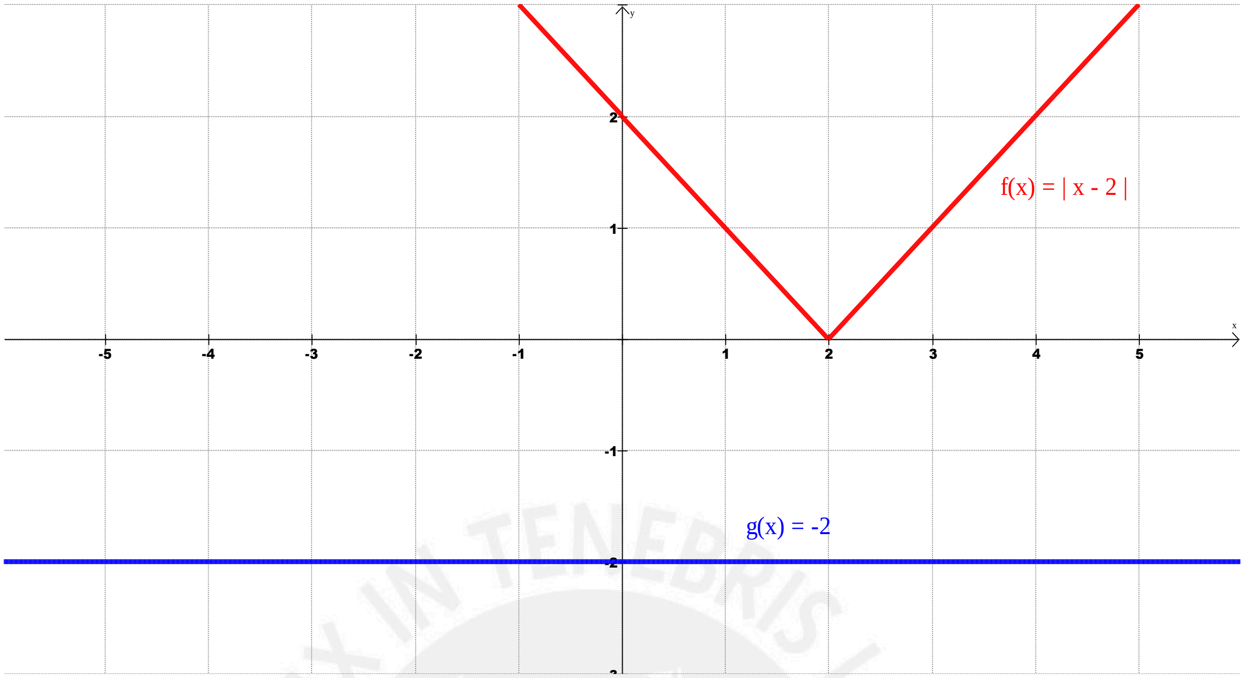
1°. Grafique: $y =\ \ x-2$



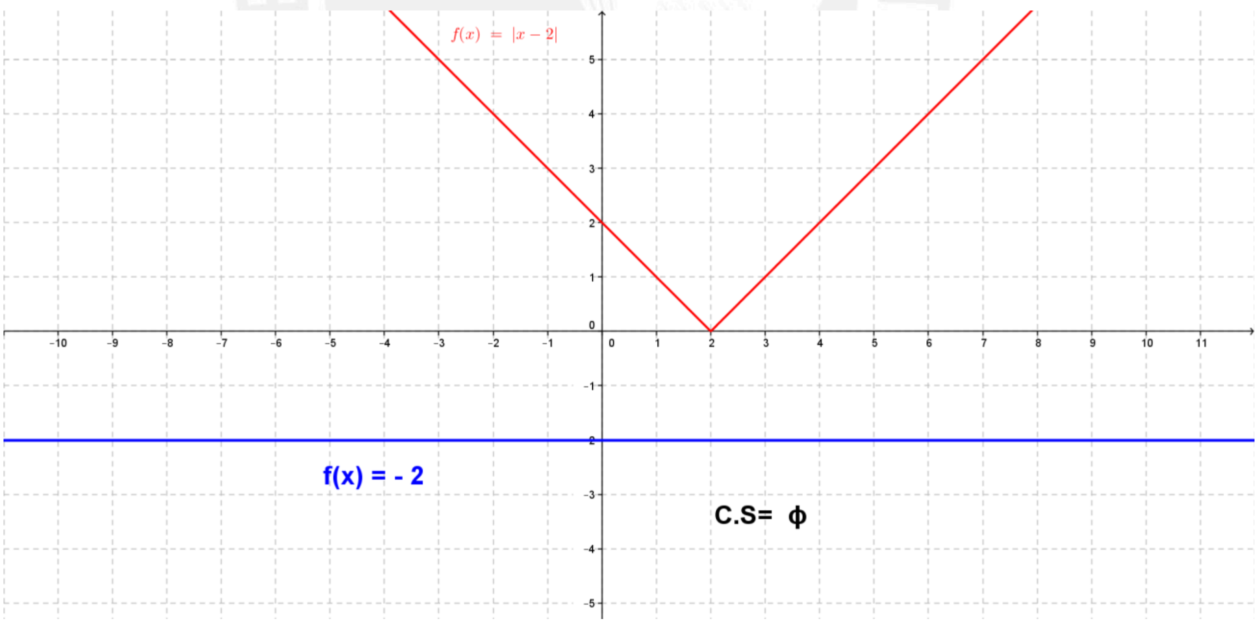
2°. Grafique: $y = -2$



3° $Grafique$: $f(x) =\ \ x-2$ y $g\ \ x\ \ = -2$, en un mismo plano coordenado.



2) Halle los puntos de intersección de dichas gráficas.



3) Las abscisas correspondientes a las intersecciones de las gráficas serán el conjunto solución.

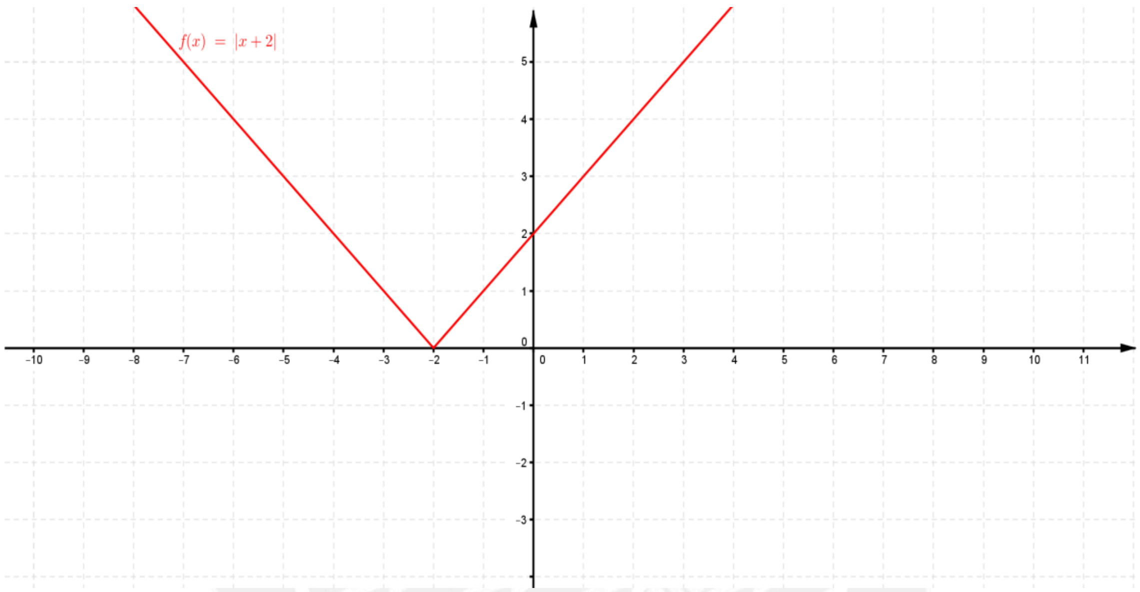
C.S = ∅ En este caso se verifica que la función valor absoluto es no negativa.

TAREA 6. $Resuelve\ \ x+2\ \ =\ 3x+4,$ realizando los siguientes pasos:

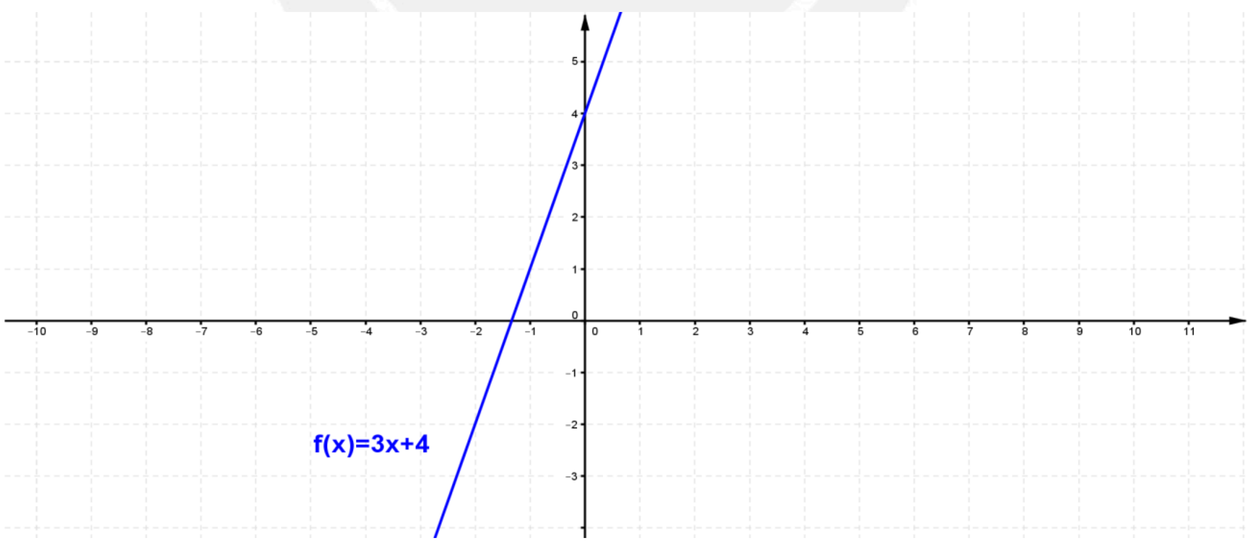
Solución

1) Grafique en un mismo plano coordenado : $f(x) =\ \ x+2$ y $g\ \ x\ \ = 3x+4$

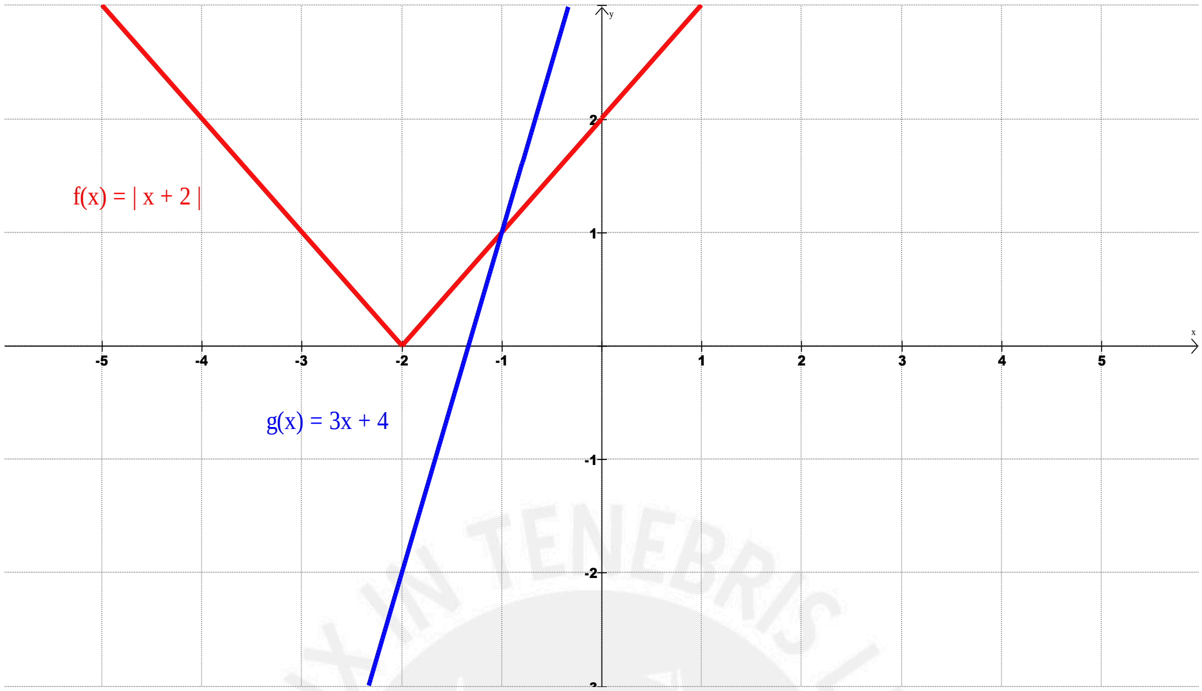
1°. Grafique: $y =\ \ x+2$



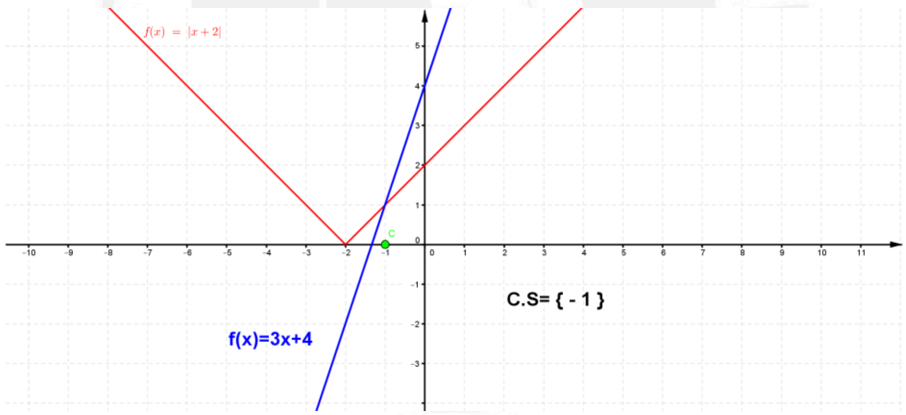
2°. Grafique: $y = 3x+4$



3° Grafique: $f(x) =\ \ x+2$ y $g\ \ x\ \ = 3x+4$ en un mismo plano coordenado.



2) Halle los puntos de intersección de dichas gráficas.



3) Las abscisas correspondientes a las intersecciones de las gráficas serán el conjunto solución.

C.S = { - 1 }

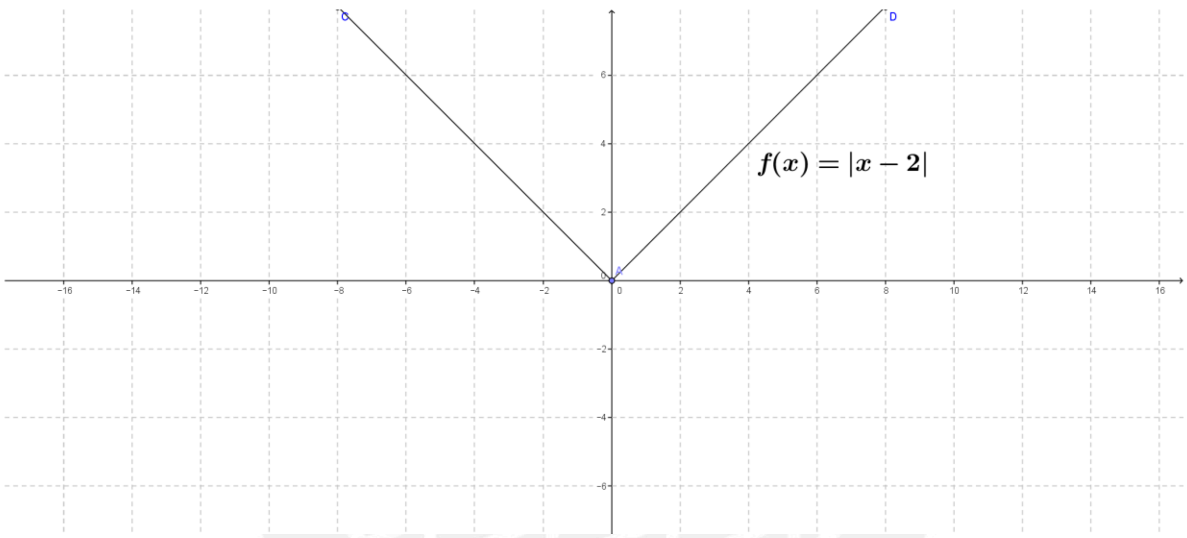
RESOLUCIÓN DE INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO USANDO GRÁFICAS

TAREA 7. Resuelve $x-2 \ < 2$, realizando los siguientes pasos:

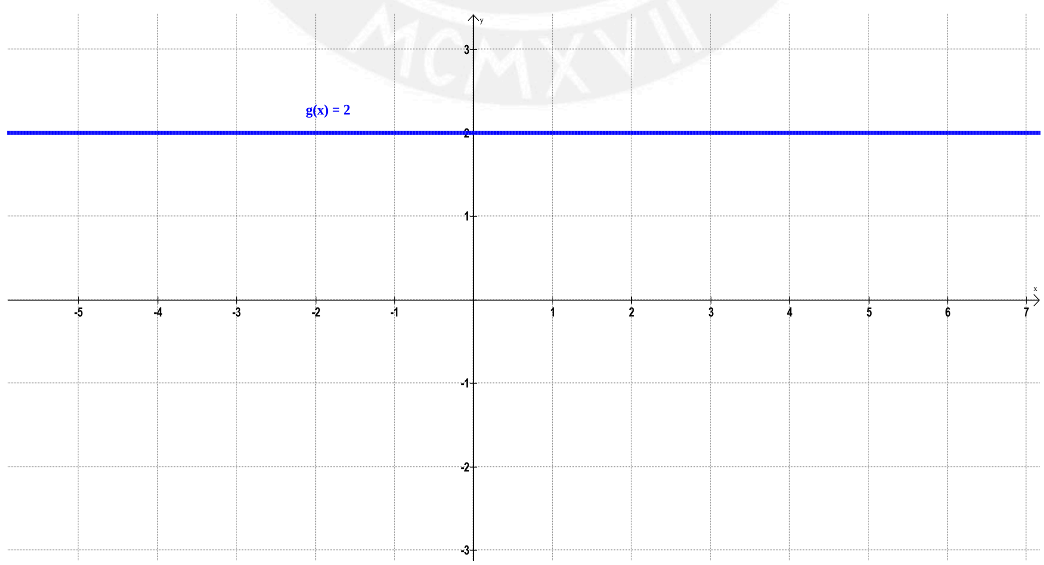
Solución

1) Grafique en un mismo plano coordenado: $f\ x\ =\ x-2$ y $g\ x\ = 2$

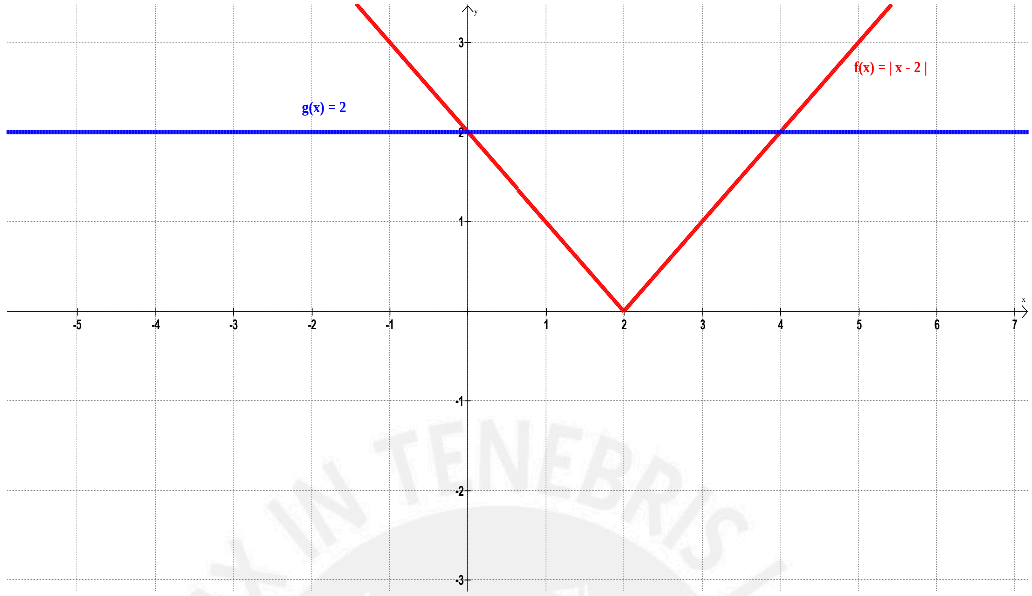
1°. Grafique: $y = \ x-2$



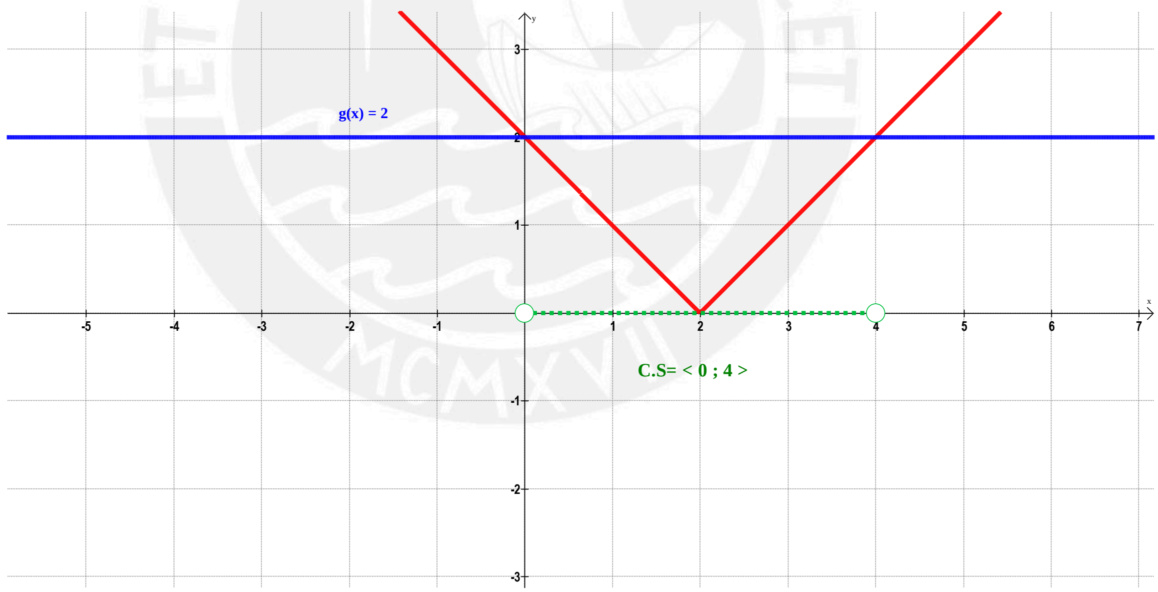
2°. Grafique: $y = 2$



3° Grafique: $f(x) = |x - 2|$ y $g(x) = 2$, en un mismo plano.



2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de las funciones *f* y *g* del paso 1



3) Observe las gráficas del paso 1 y los puntos de intersección hallados en el paso 2 y a continuación determine todos los puntos para los cuales valores de *f*(*x*) y *g*(*x*) cumplen que *f*(*x*) < *g*(*x*). Las abscisas de dichos puntos, son los elementos del conjunto solución de la inecuación $|x - 2| < 2$.

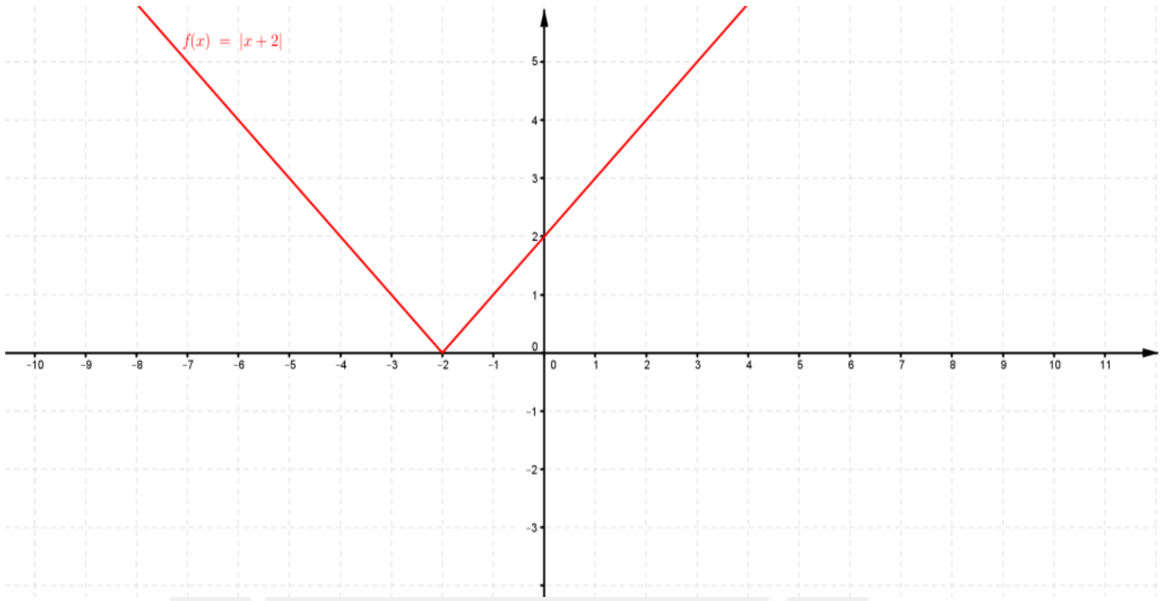
C.S = < 0 ; 4 >

TAREA 8. Resuelve $x + 2 \ < \ 3x + 4$, realizando los siguientes pasos:

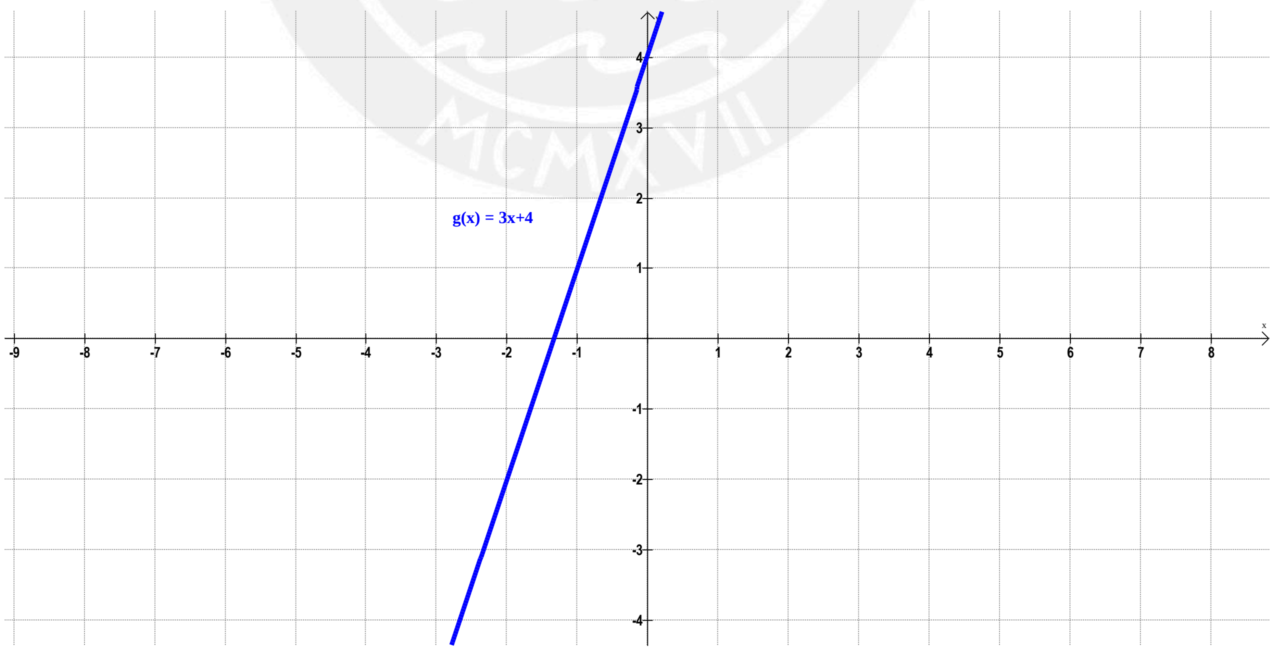
Solución

1) Grafique en un mismo plano coordenado: $f \ x \ = \ x + 2$ y $g \ x \ = 3x + 4$

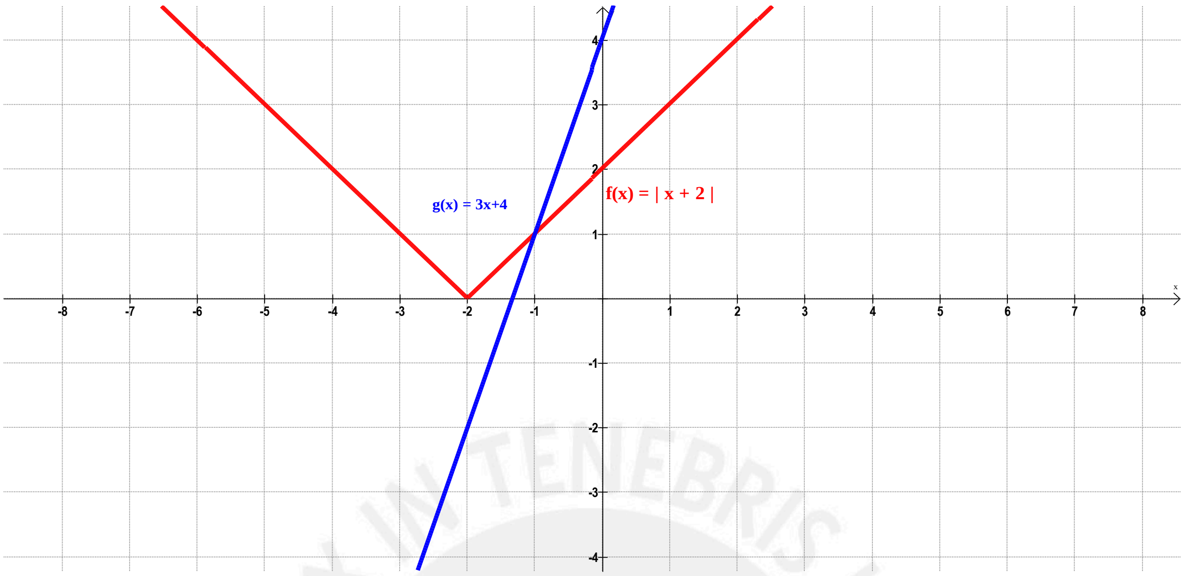
1°. Graficar: $y = \ x + 2$



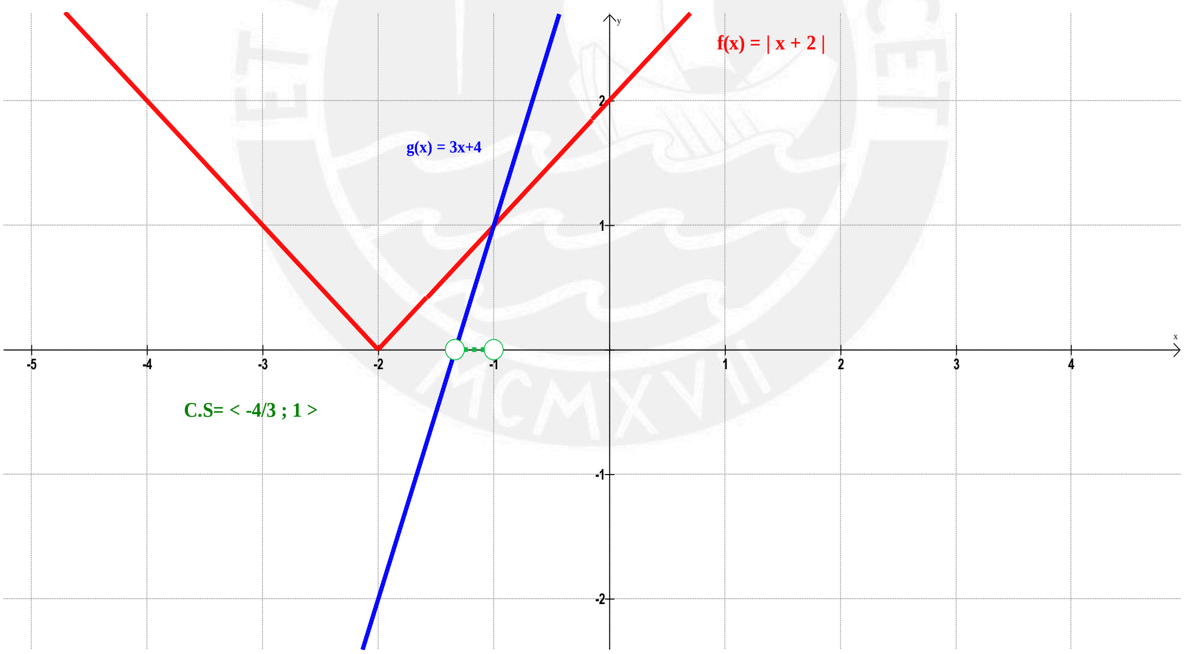
2°. Grafique: $y = 3x + 4$



3° Grafique: $f(x) = |x+2|$ y $g(x) = 3x+4$, en un mismo plano cartesiano.



2) Halle los puntos de intersección de las gráficas de las funciones *f* y *g* del paso 1.



3) Observe las gráficas del paso 1 y los puntos de intersección hallados en el paso 2 y a continuación determine todos los puntos para los cuales valores de $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $f(x)<g(x)$. Las abscisas de dichos puntos, son los elementos del conjunto solución de la inecuación $|x+2| < 3x+4$. Por tanto**:** C.S = < -4/3 ; 1 >.

SESIÓN 4: EL VALOR ABSOLUTO DENTRO DEL CONTEXTO ANALÍTICO: COMO FUNCIÓN

TAREA 1. Sea la función $f\ \ x\ \ =\ \ 2x+4$

Solución

a) Indique la regla de correspondencia en cada caso:

- Cuando $x \geq -2$

Cuando $x \geq -2$, su regla de correspondencia es: 2*x*+4

- Cuando $x < -2$

Cuando $\boldsymbol{x} < -2$, le corresponde $-$ (2*x*+4)

b) Organice los dominios explícitos de la parte a) de esta tarea, con sus respectivas reglas de correspondencias en una sola función (función por partes)

$$2x+4\ \ = \begin{array}{l} 2x+4;\ x \geq -2 \\ -\ 2x+4\ ;\ x < -2 \end{array}$$

c) Complete el sentido de las siguientes proposiciones:

- Si igualamos la función $f\ \ x\ \ = 2\ \ x+2$ a cero entonces encontramos que el valor de *x* = $-$2, representa al:

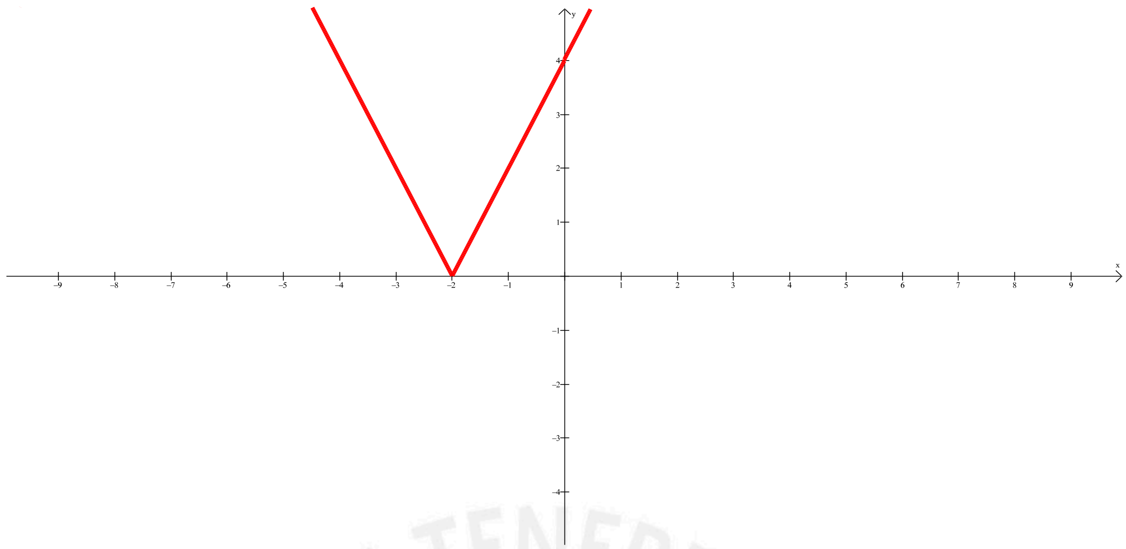
  Vértice de la gráfica de la función o punto de intersección de la gráfica con el eje X.

- Con respecto a la función, cuya regla de correspondencia es *f*(*x*)= $2\ \ 2x+\mathbf{2}$, el número 4 representa:

  La ordenada del punto de intersección de la gráfica de f con el eje Y.

d) Halle el punto simétrico de (0,4) con respecto a la recta *x*= – 2. El punto simétrico de (0,4) es (–4,4).

e) Con los pasos del ítem e) construya la gráfica de $f\ \ x\ \ = 2\ \ x+2$

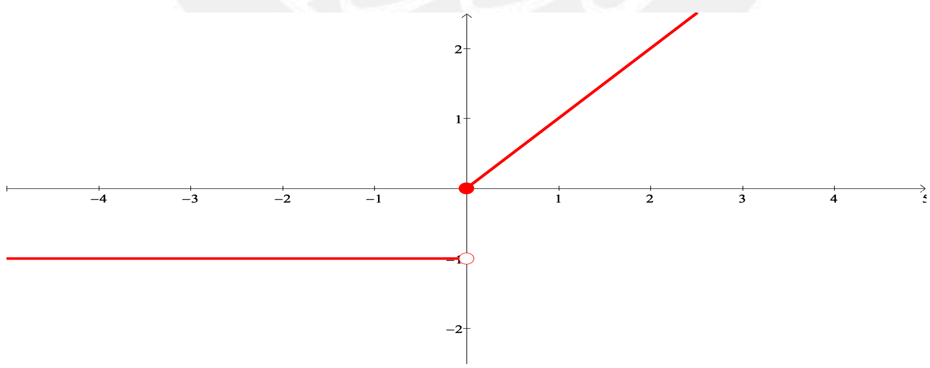


TAREA 5. Grafique la función f y exprésela en forma literal, si su regla de correspondencia está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ ; \ si\ x \geq 0 \\ 1 \ ; si\ x < 0 \end{cases}$$

Solución

Representación gráfica de f(x):



Representación literal de f(x):

Para los valores de *x*, mayores o iguales a cero, [0, infinito[, es su rango. Y para los valores de *x*, menores que cero, {1} es su rango.

TAREA 6. Responda los siguientes enunciados, colocando " V " si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa.

Si $x < 0$, entonces $x = x$ (F)

Si $x < 0$, entonces $x = -x$ (V)

Si $x > 0$, entonces $x = x$ (V)

Si $x > 0$, entonces $x = -x$ (F)

TAREA 7. Halle una regla equivalente y el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 4 = \begin{cases} 2x + 4; \; x \geq -2 \\ -\ 2x + 4 \; ; \; x < -2 \end{cases}$

Ya que, cuando la parte interna del valor absoluto (2x+4) es mayor igual a cero

$2x + 4 \geq 0$

$2x \geq -4$

$x \geq -2$

Y cuando la parte interna del valor absoluto (2x+4) es menor que cero

$2x + 4 < 0$

$2x < -4$

$x < -2$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VALOR ABSOLUTO USANDO TEOREMAS

TAREA 8. Resuelva: $x = 1$, para ello realice los siguientes pasos:

Solución

a) Describa el teorema a utilizar.

Aplicamos el teorema $a \ = b \leftrightarrow a = b \vee a = -b\,; b \geq 0$

b) Halle el conjunto solución.

$a \ = b \leftrightarrow a = b \vee a = -b\,; b \geq 0$

$x \ = 1 \quad \leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{v} \quad x = -1$

C.S = {-1,1}

c) Verifique los resultados del conjunto solución.

Verificación

$1 \ = 1$ Es verdadero

$-1 \ = 1$ Es verdadero

TAREA 9. Resuelva $x \ = -1$, para ello realice los siguientes pasos:

Solución

a) Describa el teorema a utilizar.

No se puede aplicar el teorema $a \ = b \leftrightarrow a = b \vee a = -b\,; b \geq 0$

Puesto que el valor de b, para este caso es -1, siendo -1 < 0, contradice a la condición de que $b \geq 0$.

b) Halle el conjunto solución.

Al no cumplir la condición , $b \geq 0$, el conjunto solución es el vacío.

Luego C.S.= { }

TAREA 10. Resuelva: $x + 3 \ = 1$, para ello realice los siguientes pasos:

Solución

a) Describa el teorema a utilizar.

$a\ = b \leftrightarrow a = b \vee a = -b\,; b \geq 0$

b) Halle el conjunto solución.

$a\ = b \leftrightarrow a = b \vee a = -b\,; b \geq 0$

x+3=1 v x+3 = – 1

x= –2 v x = – 4

C.S = {–4, –2}

c) Verifique los resultados del conjunto solución.

Verificación:

x= –2

$-2+3\ \ = 1$ (V)

$-1\ \ = 1$

$1 = 1$

x= –4

$-4+3\ \ = 1$ (V)

$-1\ \ = 1$

$1 = 1$

TAREA 11. Resuelva: $2x-7\ \ = x+2$, para ello realice los siguientes pasos:

Solución

a) Describe el teorema a utilizar:

$$a\ = b \leftrightarrow a = b \quad \vee \quad a = -b\,; \quad b \geq 0$$

b) Encuentre la restricción.

Restricción $b \geq 0$	$a = b$	$\vee$	$a = -b$
$x+2 \geq 0$	$2x$ - 7= x + 2	$\vee$	$2x$ - 7= - (x + 2)
$x \geq -2$	x = 9 x = 9	$\vee$	$2x$ - 7 = - x - 2 $3x$ = 5 x=5/3
Verificamos: Si los valores encontrados para x, son ≥ -2 ($x \geq -2$)			
Para x =9 ; $x \geq -2$ $9 \geq -2$ (V)			
Para x =5/3 ; $x \geq -2$ $5/3 \geq -2$ (V)			
Por lo tanto: como los números 5/3 y 9 están a la derecha de la restricción, forman parte del conjunto solución.			
 C.S= $\frac{5}{3}$; 9			

TAREA 12. Resuelva: $x + 3 \ = 1 + x$, para ello realice los siguientes pasos:

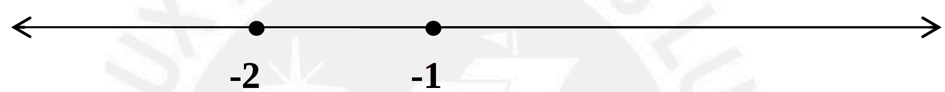
Solución

a) Describa el teorema a utilizar.

$a \ = b \leftrightarrow a = b \quad \vee \quad a = -b \ ; \quad b \geq 0$

b) Describe el teorema a utilizar.

Restricción	$a = b$	ó	$a = -b$

$b \geq 0$			
$1 + x \geq 0$	x+3=1+x	ó	x+3=-(1+x)
$x \geq -1$	2 = 0 ϕ	ó	x+3 = -1 – x 2x = -4 x= -2
Verificamos: Si los valores encontrados para x son ≥ -1 ($x \geq -1$)			
Para x=–2 ; $x \geq -1$ $-2 \geq -1$ (F)			
Por lo tanto, como el número –2 está a la izquierda de la restricción, no forma parte del conjunto solución.  Por lo tanto: C.S= ϕ			

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VALOR ABSOLUTO USANDO TEOREMAS

TAREA 13. Resuelva $|2x+1| > 2$, para ello realice los siguientes pasos:

Solución

a) Teorema: $|a| > b \leftrightarrow a > b \;\vee\; a < -b$

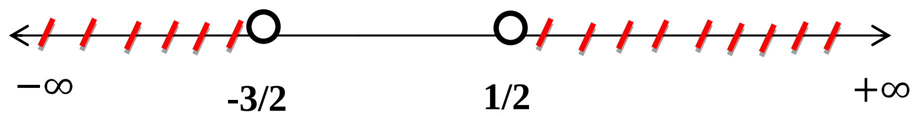
b) Aplicando el teorema adecuado, encontrar las inecuaciones resultantes.

$$|\boldsymbol{a}| > b \leftrightarrow a > b \;\vee\; a < -b$$

$$2x + 1 > 2 \;\vee\; 2x + 1 < -2$$

$$x > \frac{1}{2} \quad \vee \quad x < -\frac{3}{2}$$

c) Grafique los intervalos del inciso b, en la recta numérica.



d) El conjunto solución es la unión de los intervalos

$$C.S =< -\infty, -\frac{3}{2} > \cup < \frac{1}{2}, \infty >$$

TAREA 14. Resuelva $|x+6| < 3-2x$, para ello realice los siguientes pasos:

Solución

a) Describa el teorema a utilizar. $a < b \leftrightarrow b > 0 \quad \wedge \ -b < a < b$

b) Restricción: 3–2x > 0

c) Aplicando el teorema adecuado, encontrar las inecuaciones resultantes.

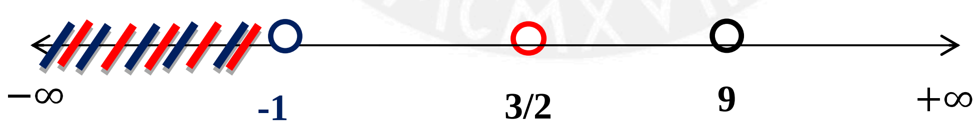
$a < b \leftrightarrow b > 0 \quad \wedge \ -b < a < b$; $(-b < a \ \wedge \ a < b)$

Condición: $3 - 2x > 0 \rightarrow x < \frac{3}{2}$

$$x + 6 < 3 - 2x \quad \vee \quad x + 6 > - \ 3 - 2x$$

$$x < -1 \quad \vee \quad x < 9$$

d) Grafique los intervalos del inciso b, en la recta numérica.



e) Halle el conjunto solución.

Mediante intervalos: $-\infty, -1 \quad \cup \quad -\infty, 9 \quad \cap \quad -\infty, \frac{3}{2}$ ó

Mediante inecuaciones: (x < -1 $\vee$ x < 9) $\wedge$ x < 3/2

El conjunto solución es: $C.S =< -\infty, -1 >$

SESIÓN 5: PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

TAREA 1: La hora de ingreso de un trabajador es a las 7h30min. Para marcar su ingreso lo hace en un sensor digital, y mediante este sistema puede hacerlo sólo con un adelanto y una tolerancia de 15 minutos (± 15 minutos) .

Indique esta situación en términos de valor absoluto.

Solución

$$x - 7h30' \ = 15'$$

¿Entre qué horas podrá marcar el trabajador su ingreso?

$$x - 7h30' = 15' \quad \vee \quad x - 7h30' = -15'$$

Luego,

- $x - 7h30' = 15'$

  $x = 7h45'$

- $x - 7h30' = -15'$

  $x = 7h15'$

El trabajador podrá marcar entre las 7h15' y las 7h45'.

TAREA 2: El peso promedio de una bolsa de arroz es de 1kg (1000 gramos). Si la información estadística en el área de control de calidad revela que los pesos promedios de las bolsas se arroz tienen un margen de error de ± 5 gramos.

a) Indique esta situación en términos de valor absoluto.

Solución:

$$x - 1000\ g \ = 5\ g$$

Indique el peso mínimo y el peso máximo que podría tener una bolsa de arroz.

Solución

$x - 1000\ g = 5\ \ g \quad \vee \quad x - 1000\ g = 5\ \ g$

- $x - 1000\ g = 5\ \ g$

  $x = 1005\ g$ Peso máximo

- $x - 1000\ g = -5\ g$

  $x = 995\ g$ Peso mínimo

Una bolsa de arroz podría tener un peso mínimo de 995 gramos y un peso máximo de 1005 gramos.

TAREA 3: Una muestra de 100 hogares de una ciudad, revela que el promedio de los ingresos mensuales es de \$ 600, con un margen de error de $\pm$ \$ 50.

Indique esta situación en términos de valor absoluto.

Solución

$x - \$600 \quad = \$50$

¿Entre que valores estarán los ingresos?

$x - \$600 = \$50 \ \ \vee \ \ x - \$600 = -\$50$

- $x - \$600 = \$50$
  $x = \$650$ Ingreso máximo.
- $x - \$600 = -\$50$
  $x = \$550$ Ingreso mínimo.

El ingreso mensual máximo es de \$650 y el ingreso mensual mínimo es de \$550.

TAREA 4: Suponga que el precio promedio *P* (en dólares) de un departamento en

Miraflores es de \$250 000 pudiendo variar su precio en $\pm$ \$ 30 000.

a) Indique esta situación en términos de valor absoluto.

Solución

$$x - \$250\,000 \quad = \$30\,000$$

b) Indique el precio mínimo y el precio máximo de un departamento en Miraflores.

Solución

$$x - \$250\,000 = \$30\,000 \quad \vee \quad x - \$250\,000 = -\$30\,000$$

- $x - \$250\,000 = \$30\,000$

  $x = \$280\,000$ Precio máximo
- $x - \$250\,000 = -\$30\,000$

  $x = \$220\,000$ Precio mínimo

El precio mínimo de un departamento en Miraflores es de \$ 220 000 y el precio máximo es de \$ 280 000.

TAREA 5: La temperatura promedio en Lima según Senamhi durante el verano del 2013 fue de 29.3°. Además considerando que la temperatura puede variar en $\pm$ 4°, indique:

a) Esta situación en términos de valor absoluto.

Solución

$$x - 29.3° \quad = 4°$$

b) La temperatura máxima durante el verano del 2013 en la ciudad de Lima.

Solución

$$x - 29.3° \ = 4°$$

$x = 33{,}3°$

$x = 33.3°$ Temperatura máxima durante el verano del 2013.

c) La temperatura mínima durante el verano del 2013 en la ciudad de Lima.

Solución

$x - 29.3° = -4°$

$x = 25.3°$

$x = 25.3°$ Temperatura mínima durante el verano del 2013.

SESIÓN 6: LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO Y EL USO DE LA TECNOLOGÍA

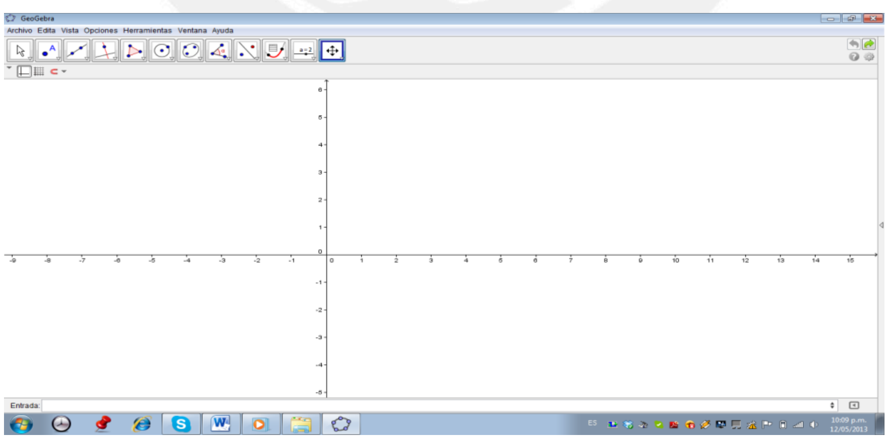
TAREA 1.

a) Grafique $f \; x \; = \; x$, utilizando el software Geogebra.

Solución

Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

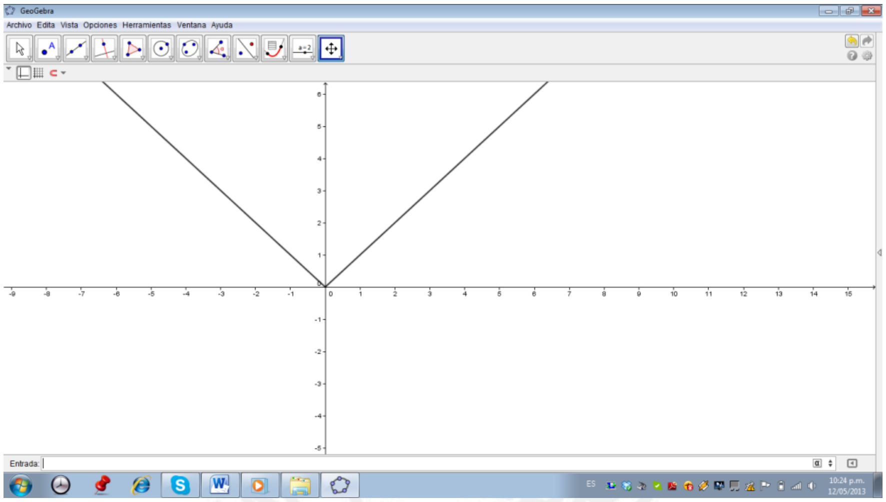
1. Al ejecutar el software Geogebra, aparece la siguiente ventana gráfica.



2. En la parte inferior hay un ícono de entrada de los valores algebraicos.

En el ícono Entrada digitar **abs(x)** presione enter.

La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x)=|x|$



b) Dada la gráfica $f\ \ x\ \ =\ \ x$, responder las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica?

El origen de las coordenadas

¿Cuál es el dominio de f ?

Dom (f) = IR = El conjunto de los números reales.

¿Cuál es el rango de f ?

Ran (f) = [0; $+\infty$ >

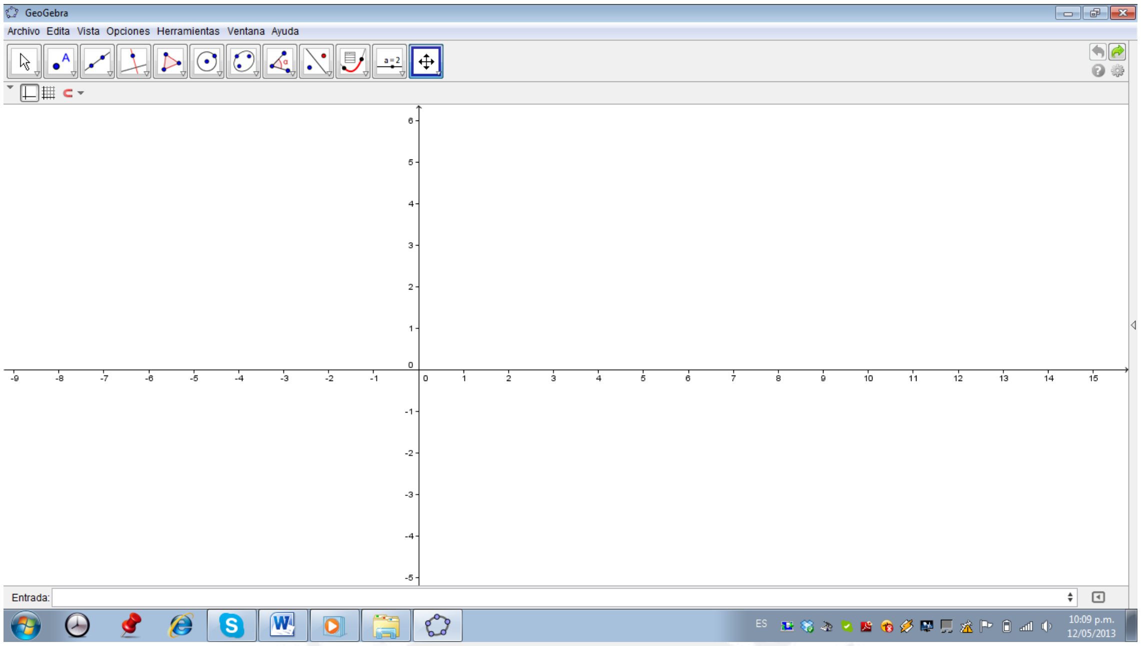
TAREA 2.

a) Grafique g $x\ \ =\ \ x+5$, utilizando el software Geogebra.

Solución

Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

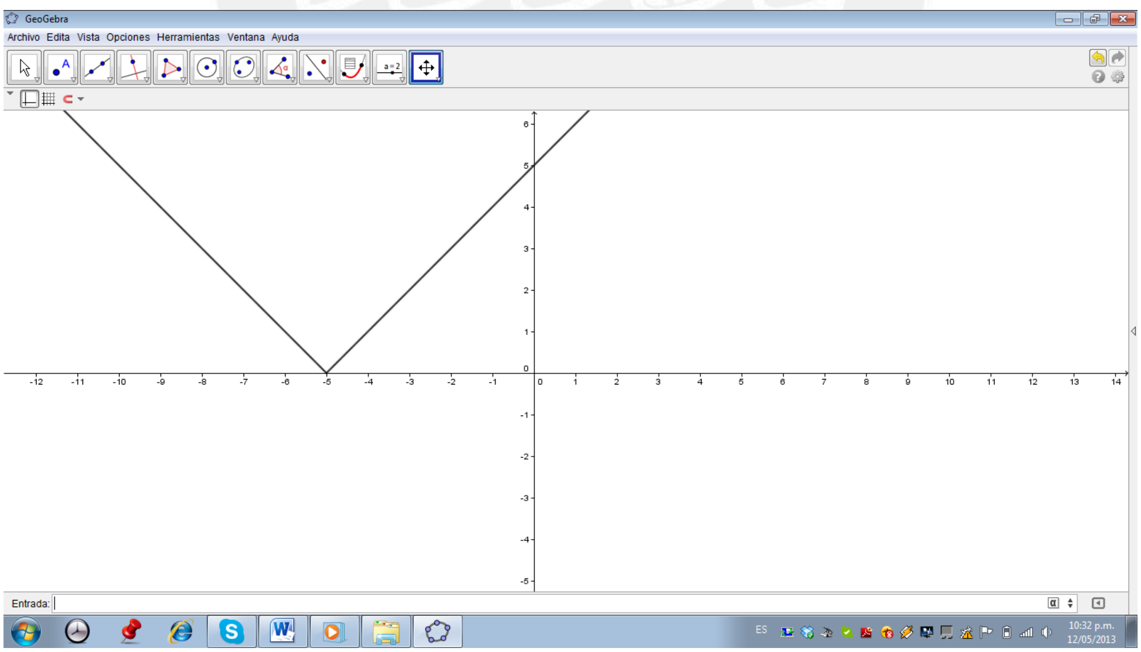
1. Al Ejecutar el software Geogebra aparece la siguiente ventana gráfica.



2. En la parte inferior hay un ícono de entrada de las funciones.

En Entrada digitar $\boxed{\textbf{abs}(x+5)}$

La siguiente figura muestra la gráfica de $g(x)= |x+5|$



b) Dada la gráfica g $x \;=\; x+5$, responder las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica? El vértice es la coordenada (-5;0)

¿Cuál es el dominio de *g*? Dom (g) = ℝ = El conjunto de los números reales.

¿Cuál es el rango de g?

Ran (*f*) = [0; $+\infty$ >

¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función *g* con respecto a la función *f, de la tarea 1*?

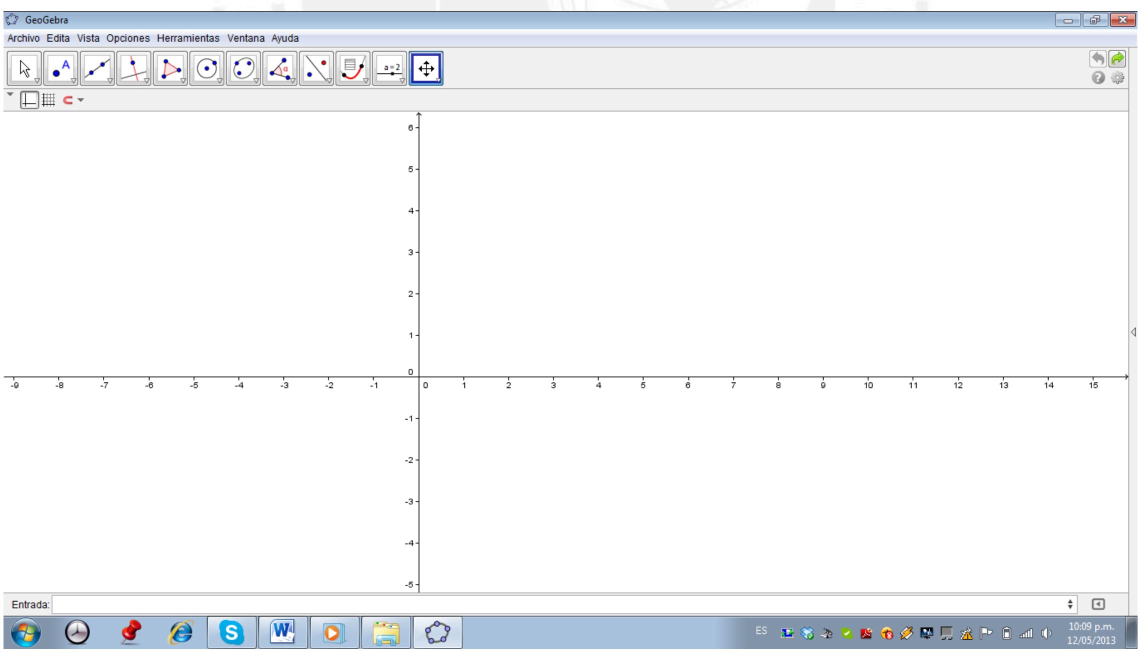
El vértice de la gráfica g, se ha trasladado cinco unidades a la izquierda del origen de las coordenadas.

TAREA 3.

a) Grafique $g(x) = |x+5| + 3$, utilizando el software Geogebra.

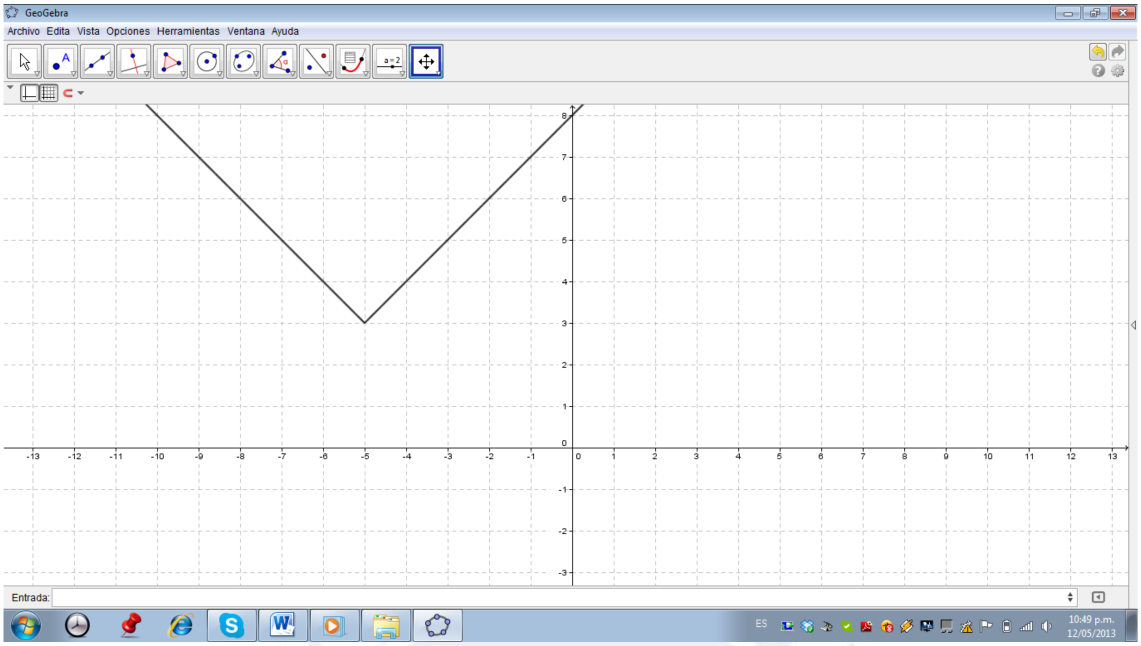
Solución

1. Al ejecutar el software Geogebra sale la siguiente presentación: (ventana gráfica)



2) En la parte inferior hay un botón de entrada de las funciones.

En Entrada digitar **abs(*x*+5)+3**



c) Dada la gráfica g $(x) = |x+5| + 3$, responder las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica?

El vértice es la coordenada (-5;3)

¿Cuál es el dominio de *g*?

Dom (g) = $\mathbb{R}$ = El conjunto de los números reales.

¿Cuál es el rango de g?

Ran (*f*) = [3; $+\infty >$

¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función *g* con respecto a la función *f*, de la tarea 1?

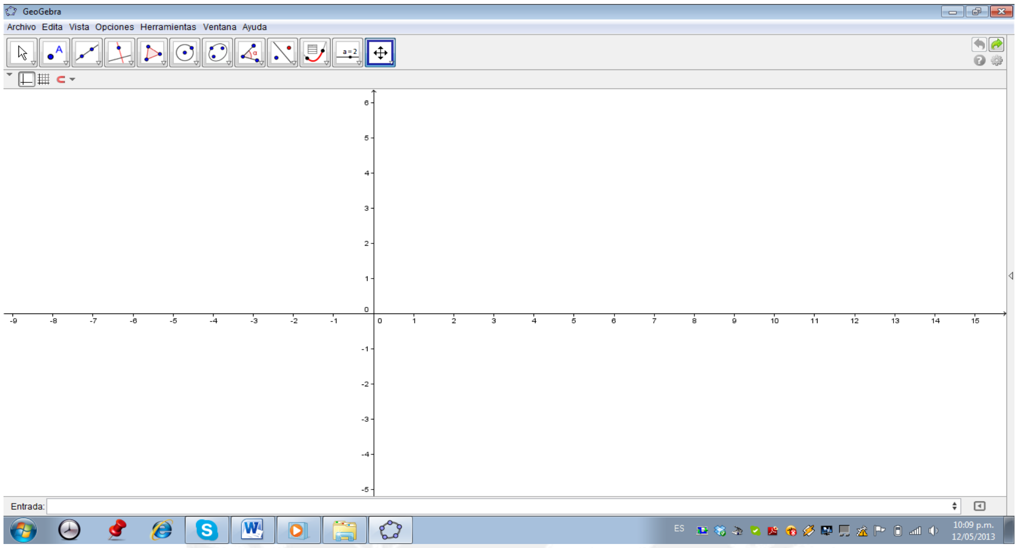
El vértice de la gráfica g, se ha trasladado cinco unidades a la izquierda del origen de las coordenadas y luego se trasladó tres unidades hacia arriba.

TAREA 4.

a) Grafique $g(x) = -|x+5| + 3$, utilizando el software Geogebra.

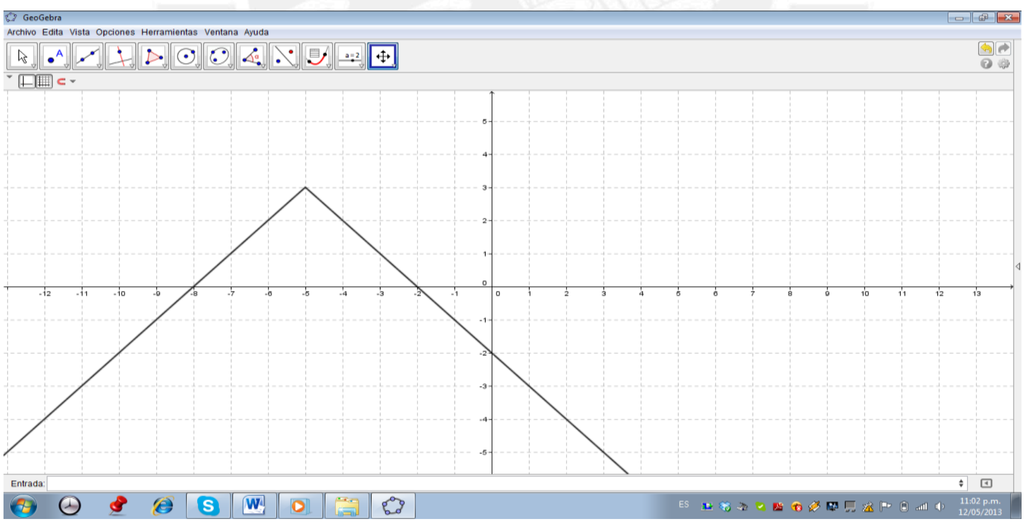
Solución

1. Al ejecutar el software Geogebra, sale la siguiente presentación: (ventana gráfica)



2. En la parte inferior hay un botón de entrada de las funciones.

En Entrada digitar **-abs(*x*+5)+3**



b) Dada la gráfica $g(x) = -|x+5| + 3$, responder las siguientes preguntas:

¿Cuál es el vértice de dicha gráfica?

El vértice es la coordenada (-5;3)

¿Cuál es el dominio de *g*?

Dom (g) = $\mathbb{R}$ = El conjunto de los números reales.

¿Cuál es el rango de g?

Ran (*f*) = $< -\infty; 3]$

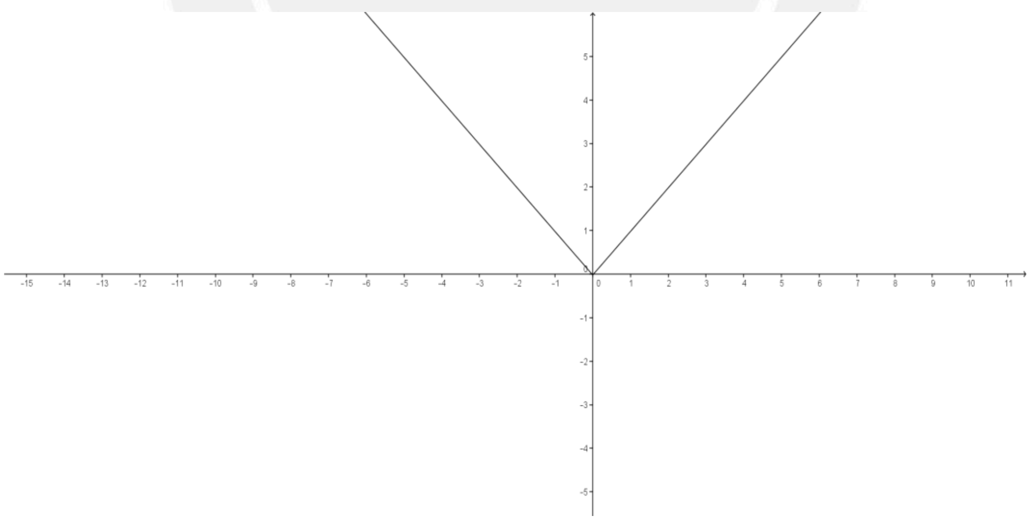
¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función g con respecto a la función *f*, de la tarea 1?

El vértice de la gráfica g, se ha trasladado cinco unidades a la izquierda del origen de las coordenadas (en forma horizontal) y luego se trasladó tres unidades hacia arriba (en forma vertical). Finalmente el signo negativo delante de la función valor absoluto nos indica que la gráfica se invierte.

TAREA 5. Grafique la función $f \;\; x \;\; = \;\; x$, utilizando el software Geogebra.

Solución

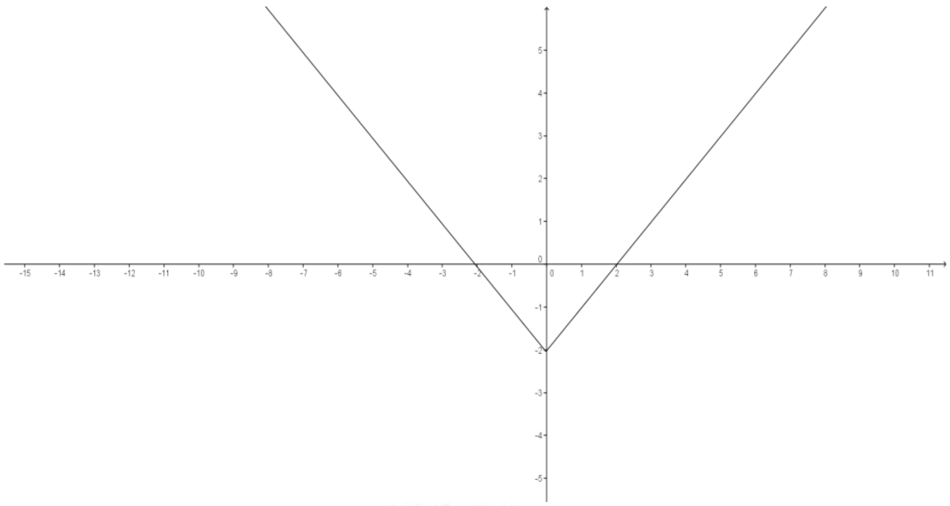
a) Grafique $f \;\; x \;\; = \;\; x$



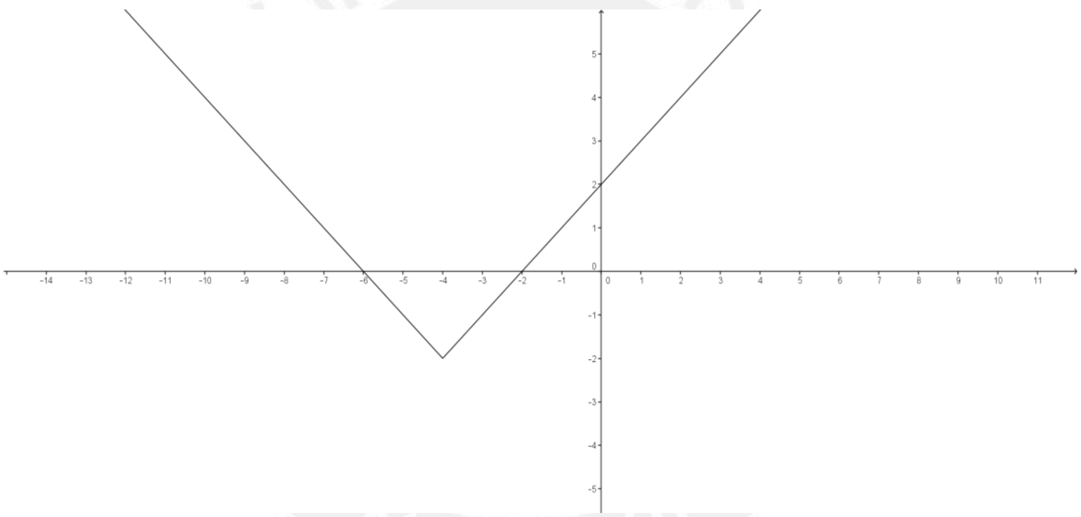
b) Grafique la función que resulta de trasladar *f*, dos unidades verticalmente hacia abajo y cuatro unidades horizontalmente a la izquierda.

Solución

Traslación de dos unidades verticalmente hacia abajo de la función $f \;\; x \;\; = \;\; x$



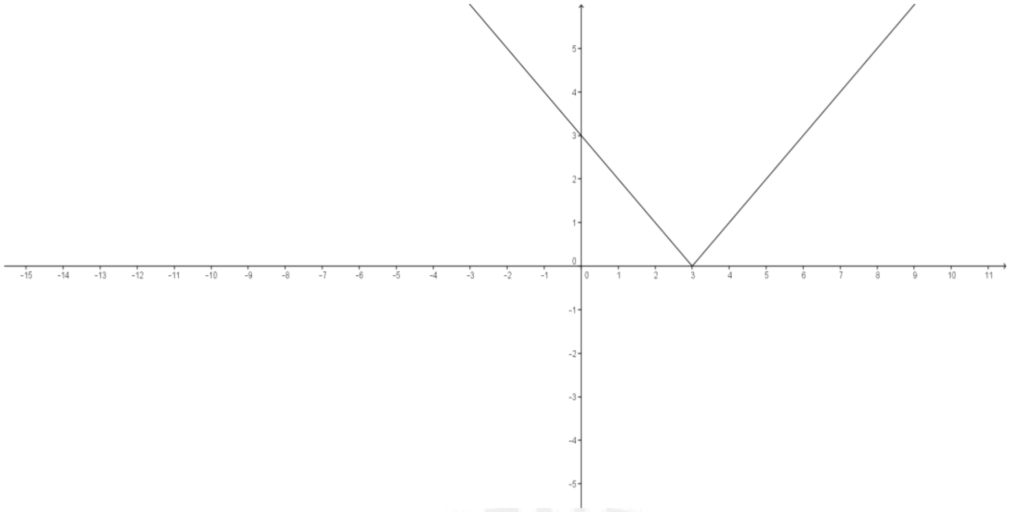
Traslación de dos unidades verticalmente hacia abajo y cuatro unidades horizontalmente a la izquierda de la función $f(x) = |x|$



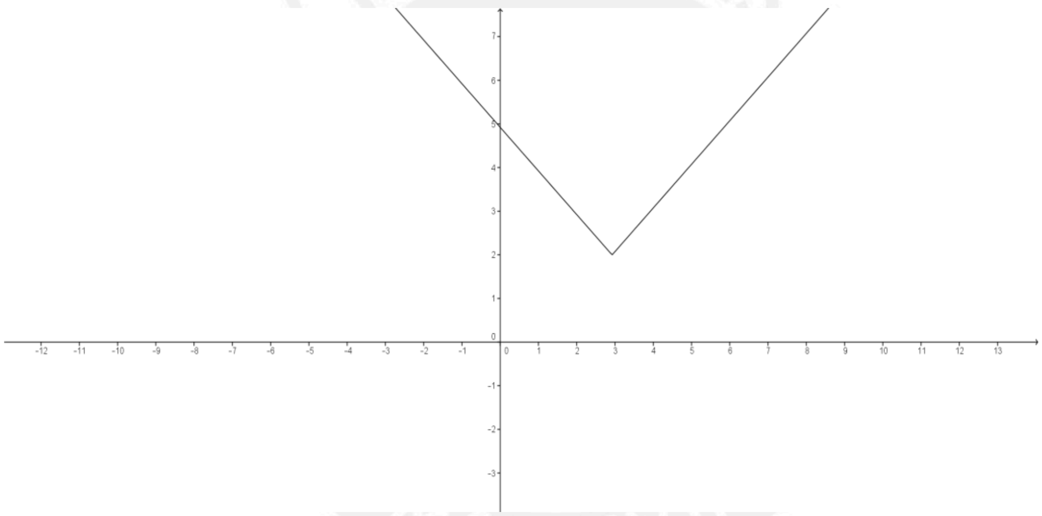
c) Grafique la función que resulta de trasladar f, tres unidades horizontalmente hacia la derecha y dos unidades verticalmente hacia arriba.

Solución

Traslación de tres unidades horizontalmente hacia la derecha de la función $f(x) = |x|$

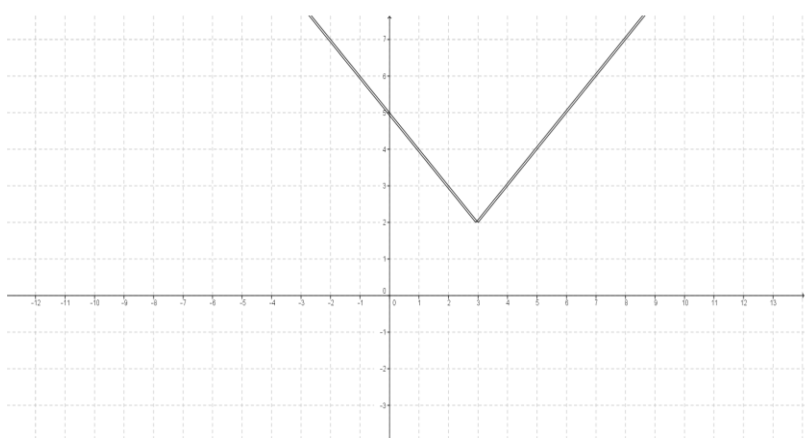


Traslación de tres unidades horizontalmente hacia la derecha y dos unidades verticalmente hacia arriba de la función $f\;\;x\;\;=\;\;x$



TAREA 6.

a) Indique la función con su respectiva regla de correspondencia, para la siguiente gráfica.

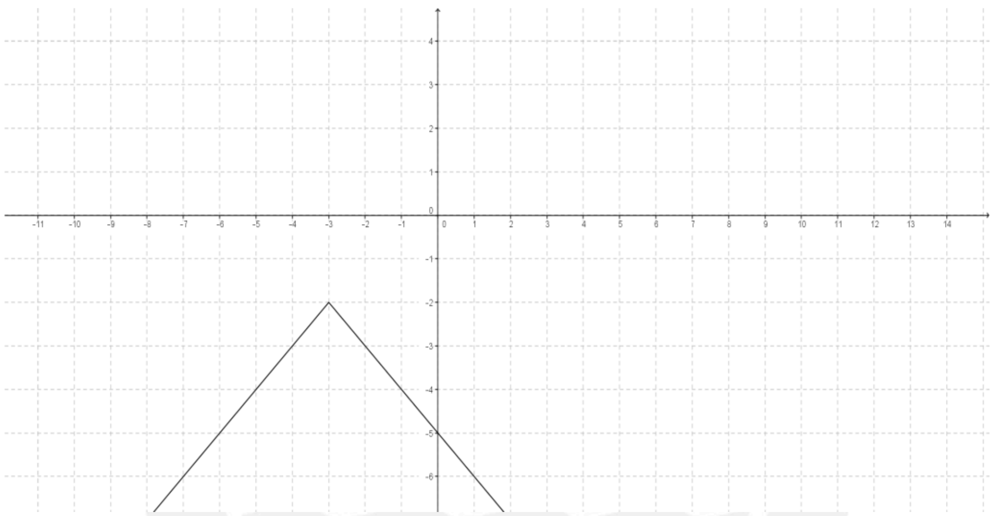


Solución

Regla de correspondencia

$$f(x) = |x - 3| + 2$$

b) Indique la función con su respectiva regla de correspondencia, para la siguiente gráfica.



Solución

Regla de correspondencia

$$f(x) = -|x + 3| - 2$$

SESIÓN 7: LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO Y SU GRÁFICA

TAREA 1. Grafique la función g, definida por $g(x) = |x + 5|$.

Solución

Pasos para hallar la gráfica de la función valor absoluto:

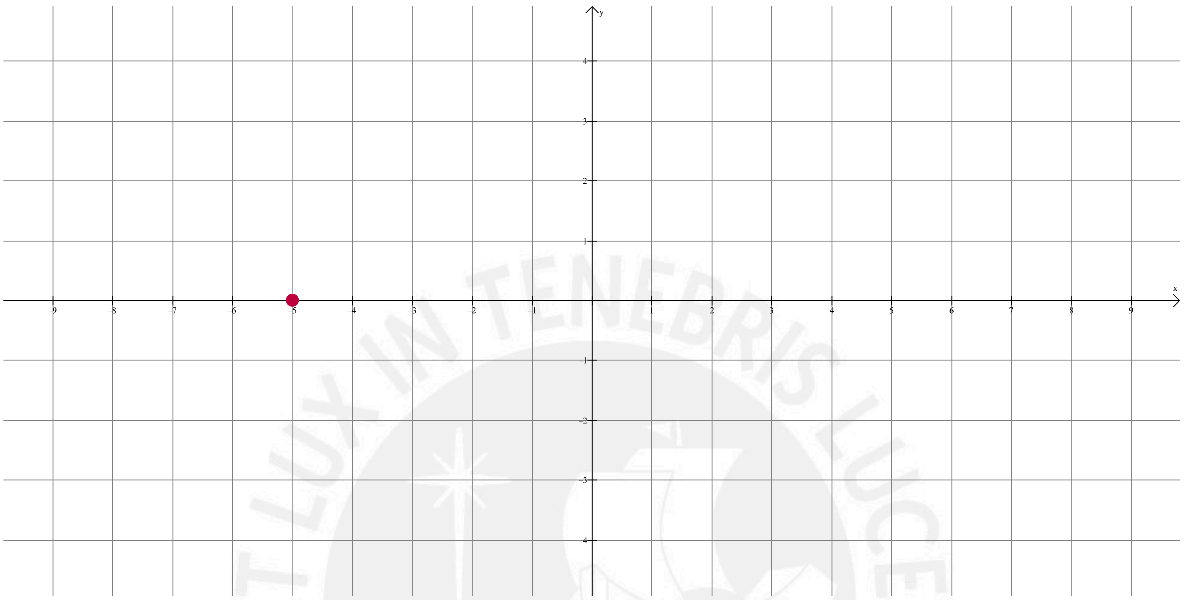
a) Ubicación del vértice. Para ello hacemos la función $f(x) = 0$

$0 = |x + 5|$

$0 = x + 5$

$-5 = x$

Entonces el vértice es: (-5; 0)



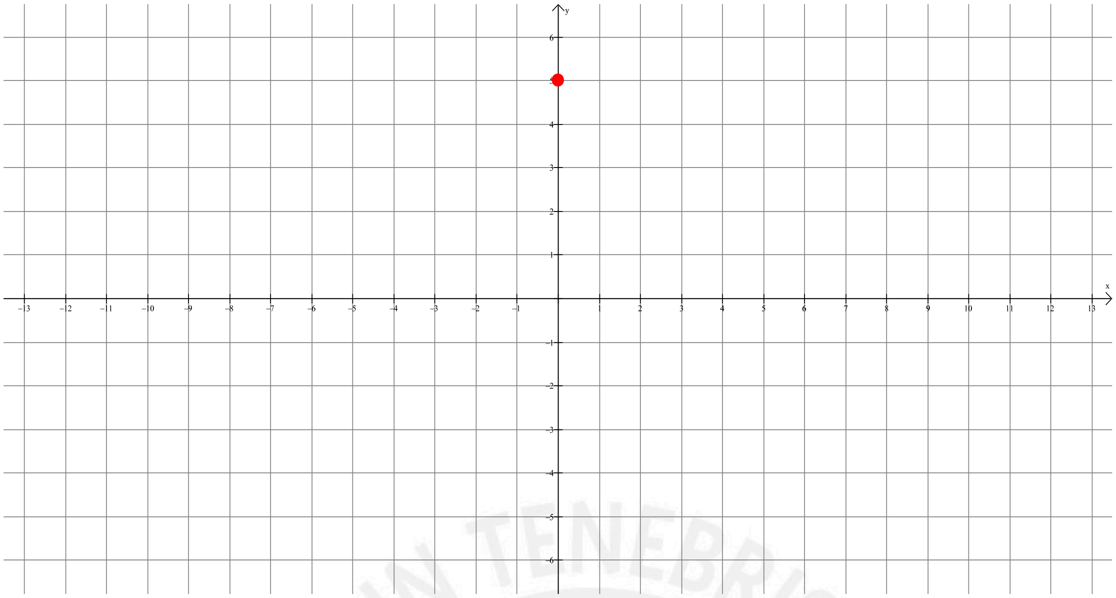
b) Ubicación del intercepto: Se hace *x=0*, en $y = f \;\; x$

$y = \;\; 0 + 5$

$y = \;\; 5$

$y = \;\; 5$

Entonces el intercepto es: (0,5)

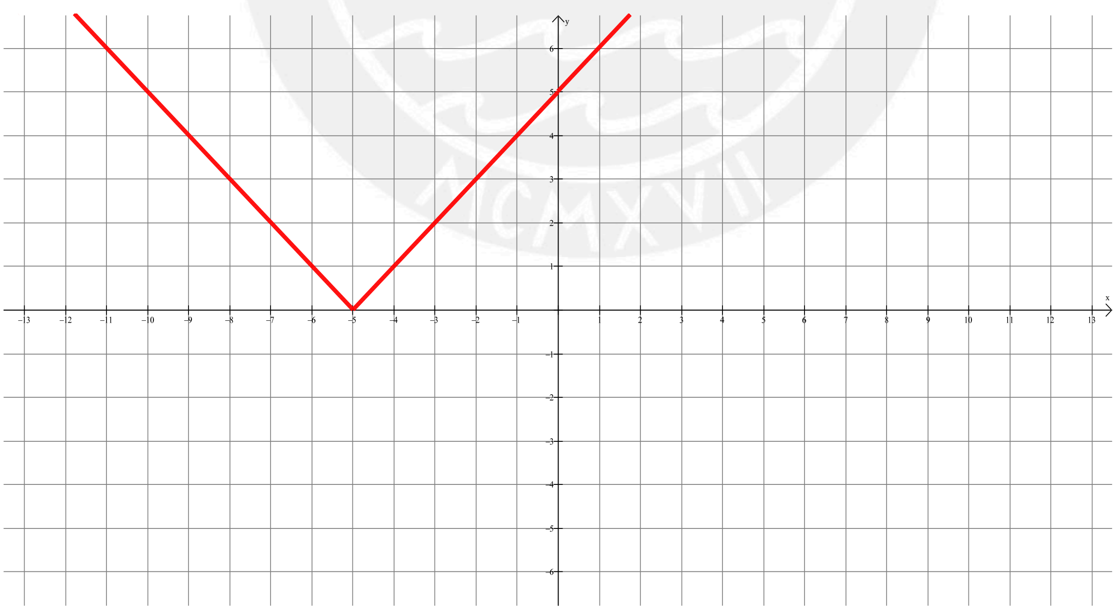


c) Las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.

Con el eje X: (-5;0)

Con el eje Y: (0;5)

d) Trace la gráfica, la cual pasa por los puntos encontrados en a y b, obteniéndose:



e) ¿Cómo se ha transformado la gráfica de la función *g* con respecto a la función *f (x)* (siendo *f* (*x*)= x)?

La gráfica de la función g se ha trasladado 5 unidades a la izquierda (en forma horizontal) con respecto a la gráfica de la función f.

TAREA 2. Grafique $g\ \ x\ \ =\ \ x+5\ \ +3$, desarrollando los siguientes pasos:

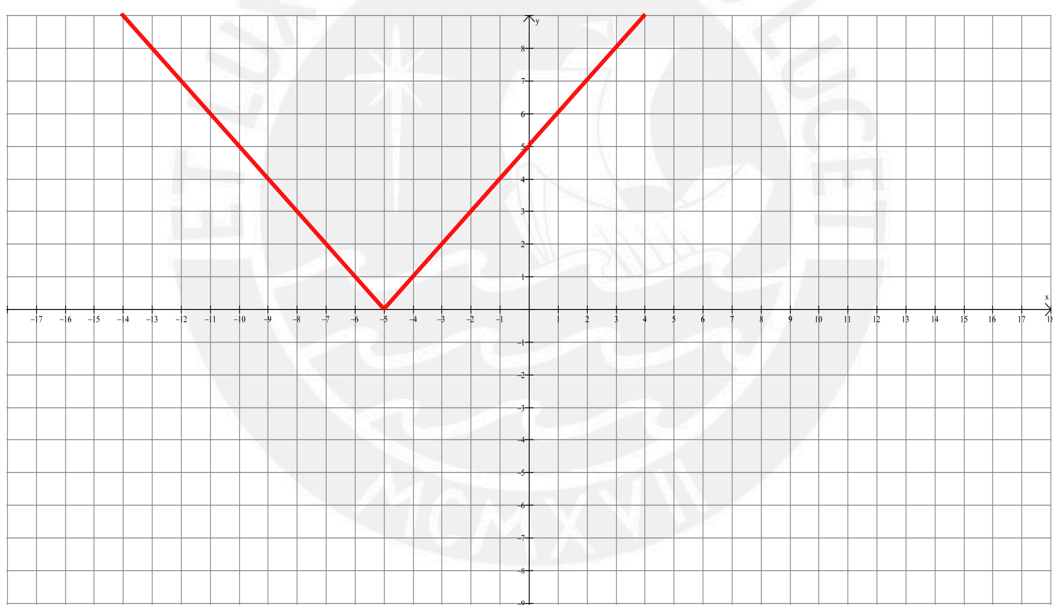
Solución

a) Grafique $g_1\ \ x\ \ =\ \ x+5$, utilizando los pasos del criterio 1.

Donde h = -5 (Traslación horizontal, 5 unidades a la izquierda)

Vértice: (h; 0) = (-5; 0)

Intercepto es: (0; $|h|$) = $(0, +5)$

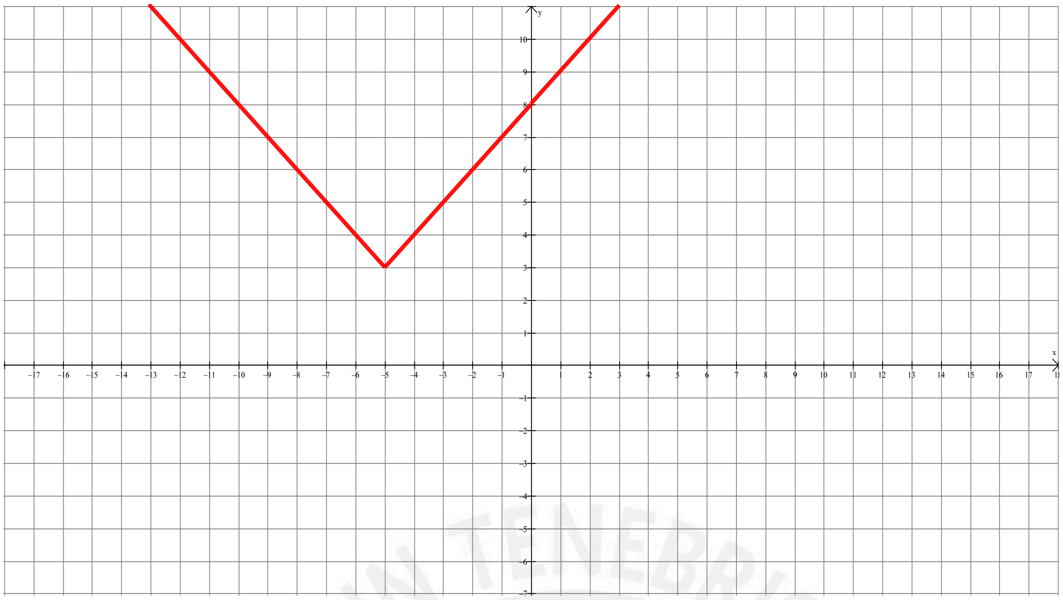


b) En $g\ \ x\ \ =\ \ x+5\ \ +3$, utilice el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

k = +3 (Traslación vertical, 3 unidades hacia arriba).

c) Trace la gráfica, utilizando los resultados de los pasos a y b.

Se traza la gráfica, la cual pasa por los puntos encontrados en a y b, obteniéndose:



TAREA 3. Grafique $g\ \ x\ = \ x-5\ \ -3$, desarrollando los siguientes pasos:

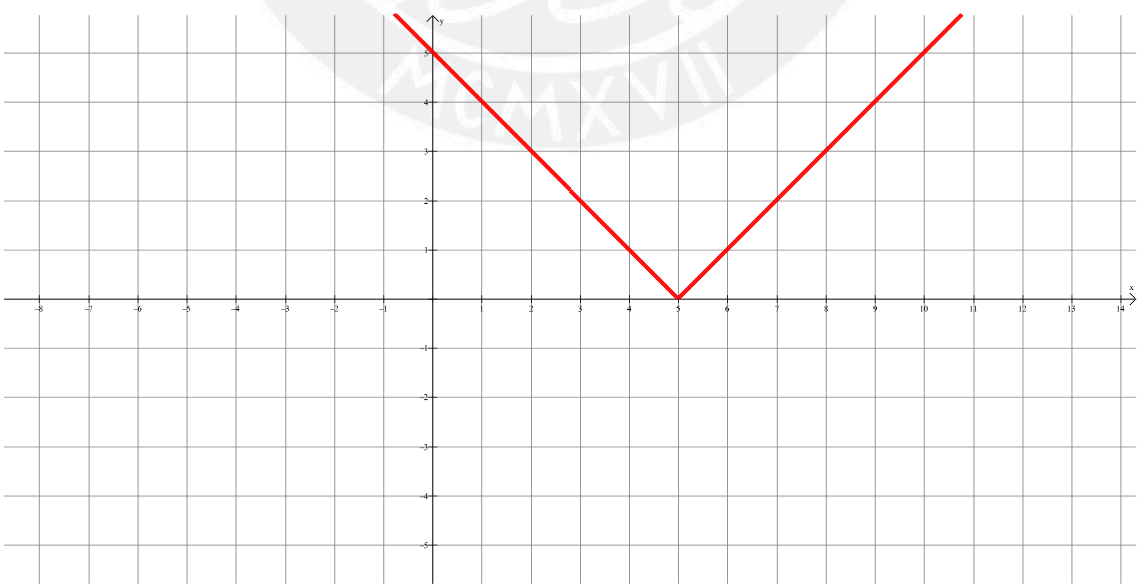
Solución

a) Grafique $g_1\ \ x\ = \ x-5$, utilizando los pasos del criterio 1.

Donde h = 5 (Traslación horizontal, 5 unidades a la derecha)

Vértice: (h; 0) = (5; 0)

Intercepto es: (0; $|h|$) = (0,5)

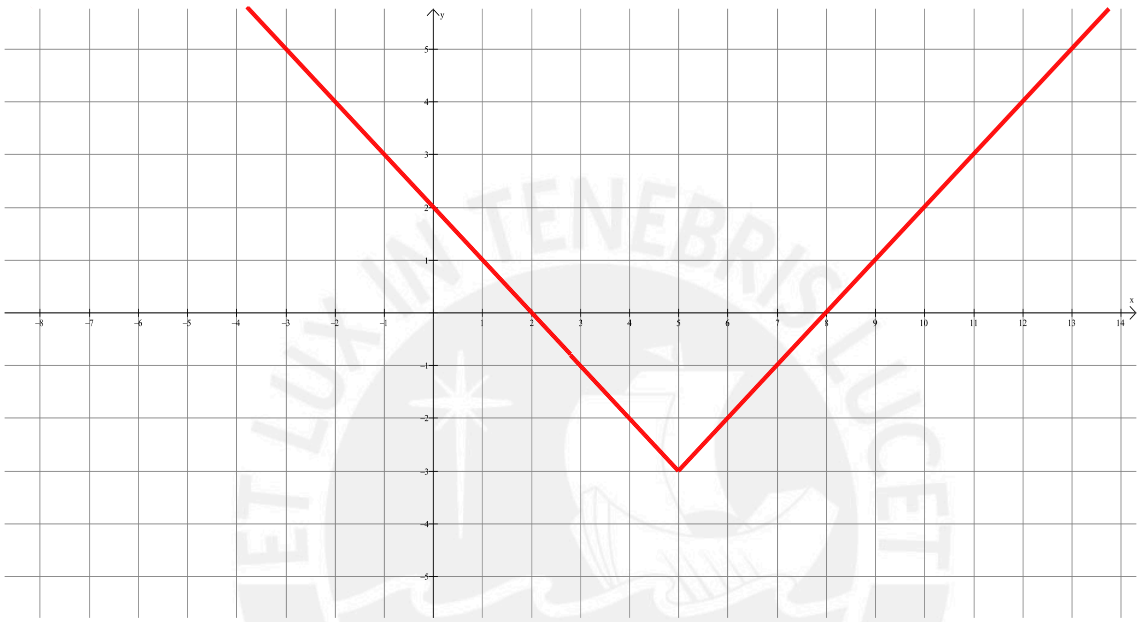


b) En $g\ \ x\ = \ x-5$ - 3, utilice el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

$k = -3$ traslación vertical, 3 unidades hacia abajo.

c) Trace la gráfica, utilizando los resultados de los pasos a y b.

Se traza la gráfica, la cual pasa por los puntos encontrados en a y b, obteniéndose:



TAREA 4. Grafique $g(x) = |x - 5| + 3$, desarrollando los siguientes pasos:

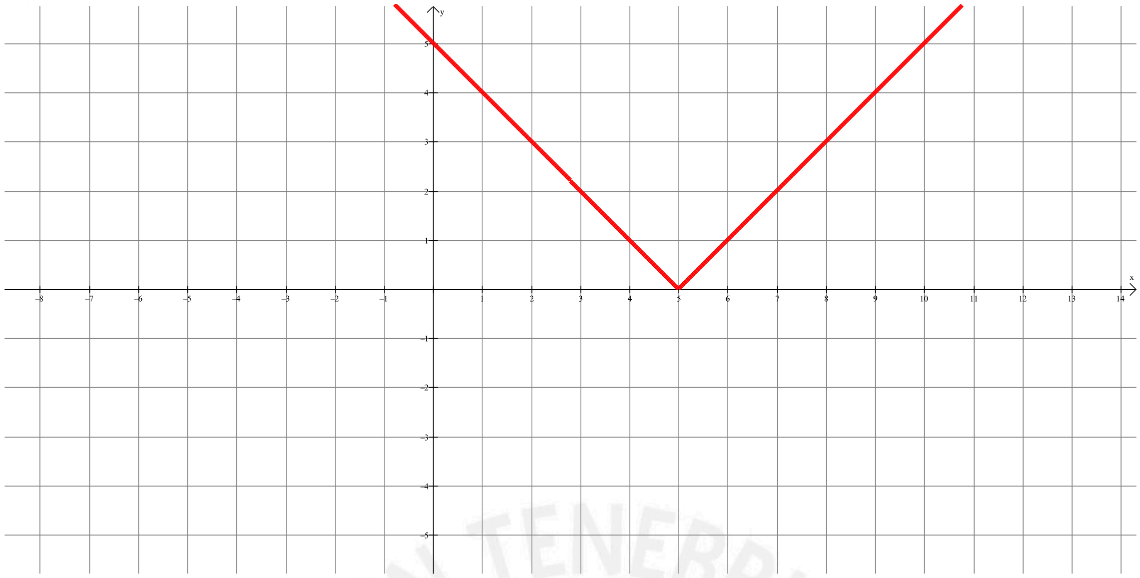
Solución

a) Grafique $g_1(x) = |x - 5|$, utilizando los pasos del criterio 1.

Donde $h = 5$ (Traslación horizontal, 5 unidades a la derecha)

Vértice: (h; 0) = (5; 0)

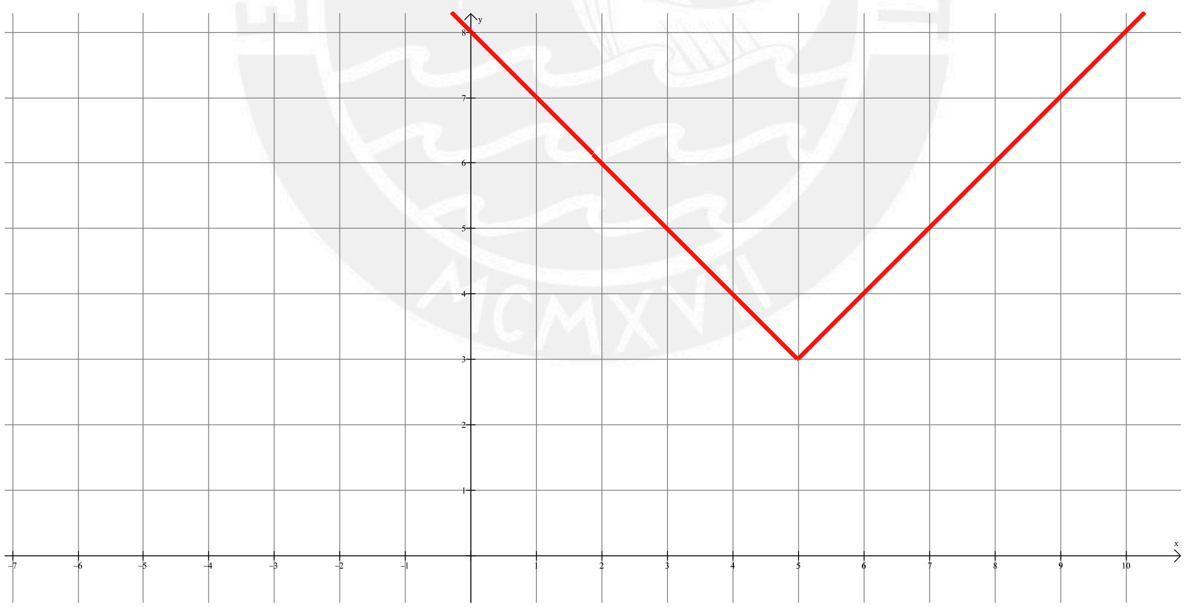
Intercepto es: $(0; |h|) = (0,5)$



b) En $g(x) = |x - 5| + 3$, utilice el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

k =$+$ 3 (Traslación vertical, 3 unidades hacia arriba)

c) Se traza la gráfica, la cual pasa por los puntos encontrados en a y b, obteniéndose:



TAREA 5. Grafique $g(x) = -|x + 5| + 3$, desarrollando los siguientes pasos:

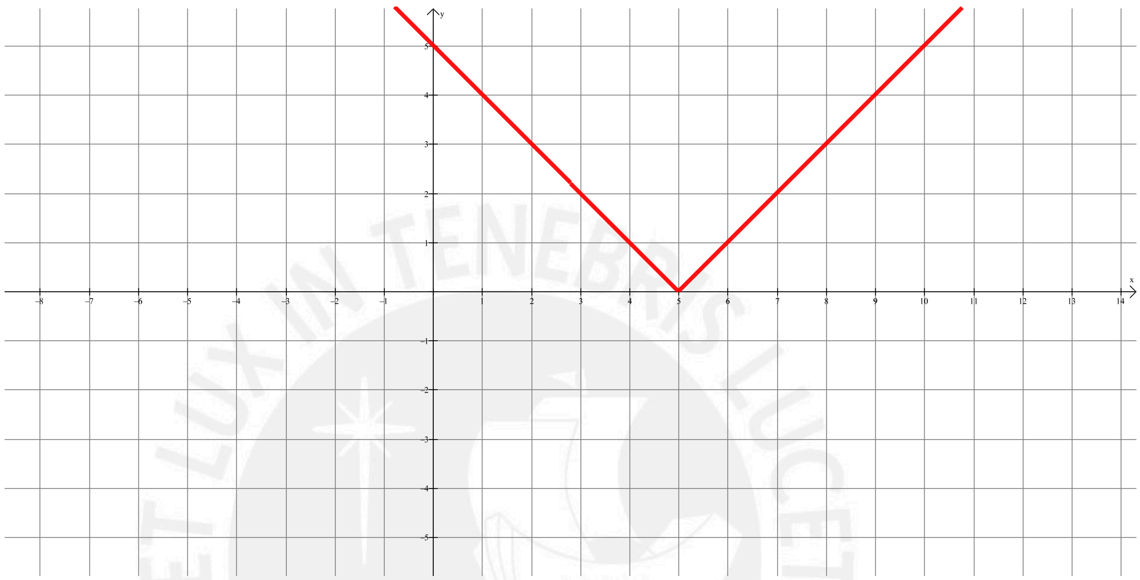
Solución

a) Grafique $g_1(x) = |x + 5|$ utilizando los pasos del criterio 1.

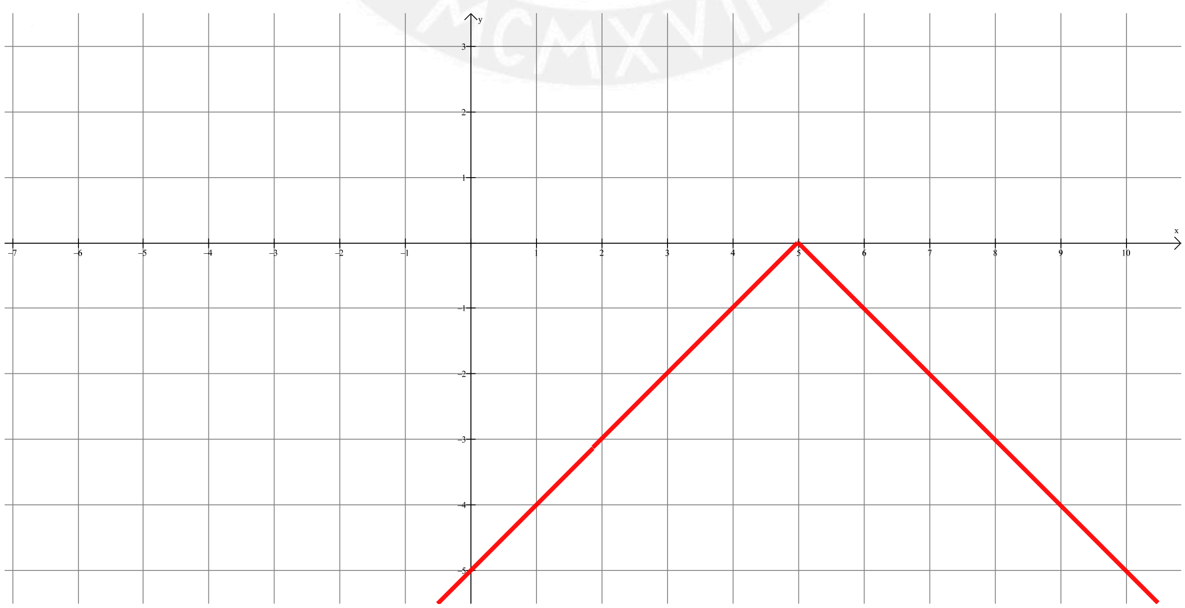
Donde h = +5 (Traslación horizontal, 5 unidades a la izquierda)

Vértice: (h; 0) = (5; 0)

Intercepto es: (0; $|h|$) = (0,5)



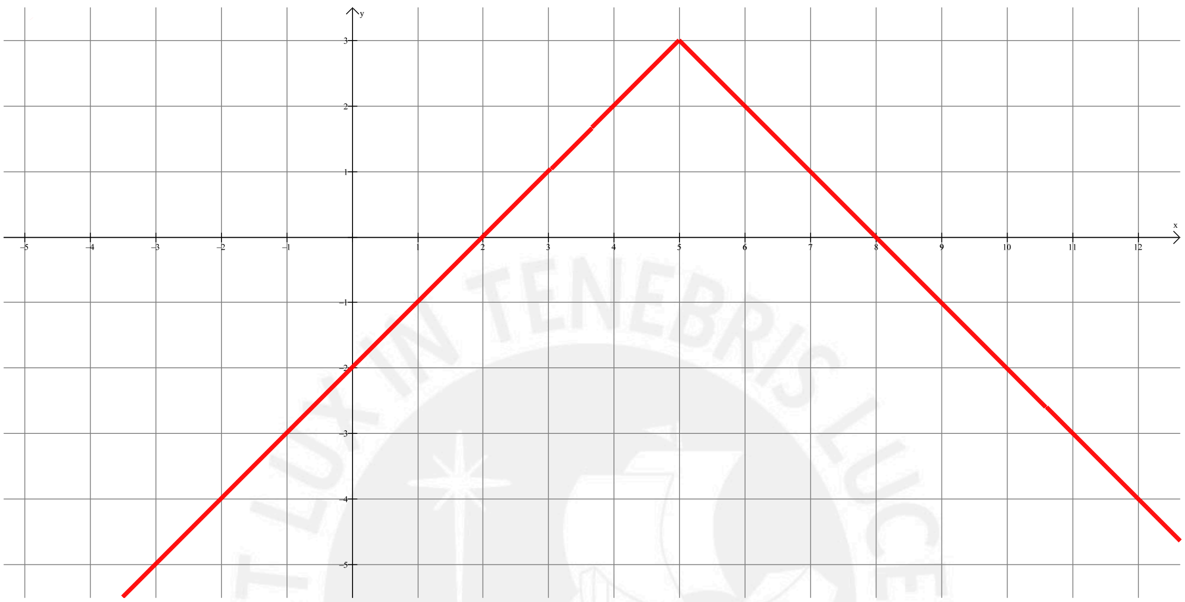
b) Grafique el simétrico de $g_1\ x\ =\ x-5$, que resulta ser de la forma $-\ x-5$ la cual se representa gráficamente:



c) En $g(x) = -|x-5| + 3$, utilice el criterio 2.2 para encontrar el valor de k.

k $= +3$ Traslación vertical, 3 unidades hacia arriba.

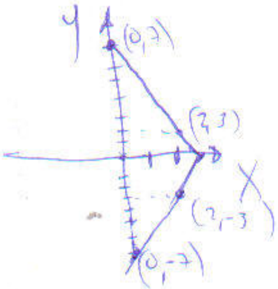
d) Se traza la gráfica, la cual pasa por los puntos encontrados en a y b, obteniéndose:



ANEXOS

(Cuestionario 2 desarrollado por los profesores)

CUESTIONARIO N ° 2-P

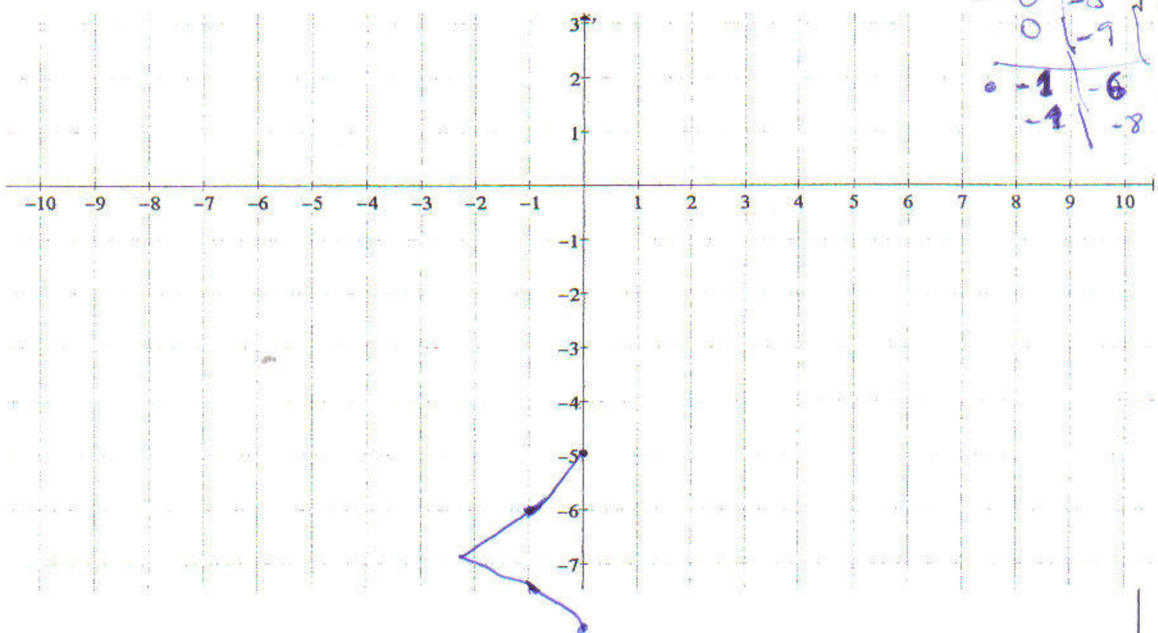
	Responde las siguientes preguntas:
1.	Coloca " V'' si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa. $\lvert x\rvert = \begin{cases} x \iff x>0 \\ -x \iff x<0 \end{cases}$ a) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x\rvert = -x$ (F) b) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x\rvert = x$ (F) c) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x\rvert = x$ (V) d) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x\rvert = x$ (F)
2.	Para todo número real x, ¿ $-x < 0$? Justifica tu respuesta. Si $x < 0$ [illegible] Si $x = (-)$ No justifica.
3.	Define el valor absoluto de un número real a. $\lvert x\rvert = x \iff x > 0$ $\lvert x\rvert = -x \iff x < 0$
4.	Define la función $f(x)$, en términos de valor absoluto, siendo $f(x) = \lvert 2x-7\rvert$, señalando los valores correspondientes de x.  x | y: 0 | 7 ($x>0$); 0 | -7 ($x<0$); 2 | 3 ($x>0$); 2 | -3 ($x<0$)
5.	Resuelve la siguiente ecuación: $\lvert 2x-7\rvert = -x+2$ de dos maneras distintas, de ser posible. $2x-7 = -x+2$ $3x = 9$ $x = 3$ $2x-7>0$ $2x>7$ $x > \frac{7}{2}$ 3 $\quad$ 7/2 $-2x+7 = -x+2$ $-2x+x = 2-7$ $-x = -5$ $x = 5$ $2x-7<0$ $2x<7$ $x<\frac{7}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\quad$ 5 Pts. Ø

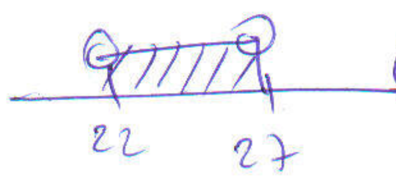
[illegible]

6. Grafica la función f, definida por $f(x) = |x + 2| - 7$, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.

x	y
0	-5
0	-9
-1	-6
-1	-8

$|x+2|>0$



7.	**Acciones en la bolsa de valores** De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio ***p*** de las acciones de la compañía GAEL S.A.C. **NO** cambiarán su precio actual que es de \$22 por más de \$ 5, durante el mes de diciembre. (tener en cuenta que los precios de estas acciones, pueden subir y bajar) a) Utiliza la notación del valor absoluto para expresar ésta predicción como una desigualdad. $22 < p < 27$
	b) Representa gráficamente la inecuación con valor absoluto de la pregunta a.  $\langle 22, 27 \rangle$
	c) Indica el valor máximo y el valor mínimo de una acción de la compañía GAEL S.A.C
	d) Representa gráficamente la solución de la pregunta c.

CUESTIONARIO N ° 2-P

	Responde las siguientes preguntas:
1.	Coloca " V" si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa. a) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = -x$ (F) b) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ (V) c) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ (V) d) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ (V)
2.	Para todo número real x, ¿$-x < 0$? Justifica tu respuesta. Falso: $x=0$ (Falla) F $x=-2$ (Falla) F $x=2$ (cumple) V contradicción no tautología
3.	Define el valor absoluto de un número real a. $\forall a \in \mathbb{R}: \lvert a \rvert = \begin{cases} a \iff a > 0 \\ -a \iff a < 0 \\ 0 \iff a = 0 \end{cases}$
4.	Define la función $f(x)$, en términos de valor absoluto, siendo $f(x) = \lvert 2x - 7 \rvert$, señalando los valores correspondientes de x. Df: $x \in \langle -\infty, \frac{7}{2} \rangle \cup [\frac{7}{2}, +\infty \rangle$ ó $\boxed{Df: x \in \mathbb{R}}$ $f(x) = \begin{cases} (2x-7) \; ; \; x \geq 7/2 \\ -(2x-7) \; : \; x < 7/2 \end{cases}$ $7/2$ $+\infty$ $-\infty$ $7/2$
5.	Resuelve la siguiente ecuación: $\lvert 2x - 7 \rvert = -x + 2$ de dos maneras distintas, de ser posible. $\lvert 2x-7 \rvert = -x+2$ $\lvert a \rvert = b \quad \forall b \geq 0$ $\hookrightarrow a = b$ $\vee \; a = -b$ $2x-7 = -x+2 \;\vee\; 2x-7 = -(-x+2)$ $x=3$ $\qquad$ $x=5$ $x-2$

$-x+2 \geq 0$
$x \leq 2$

$x < 2$

$(x \leq 2) \cap [x=3 \vee x=5]$

2 3 5

C.S = { {0} ∅

$f(x) =$

si $f(x) = 0$

$|x+2| = 7$

$x+2 = 7 \Rightarrow x = 5$

$x+2 = -7 \Rightarrow x = -9$

(5,0)

(-9,0)

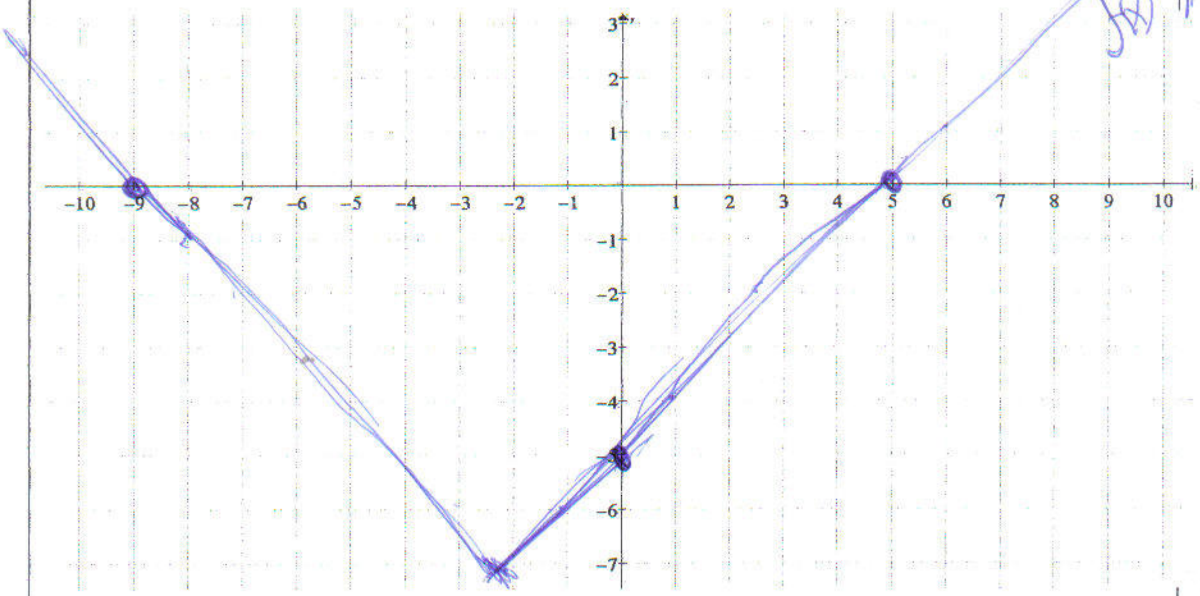
6. Grafica la función f, definida por $f(x) = |x + 2| - 7$, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.

$f(x) = |x+2| - 7$

$(x+2) - 7$

7

x 5



$ 22 $ 5 p $22 \leq x \leq 27$

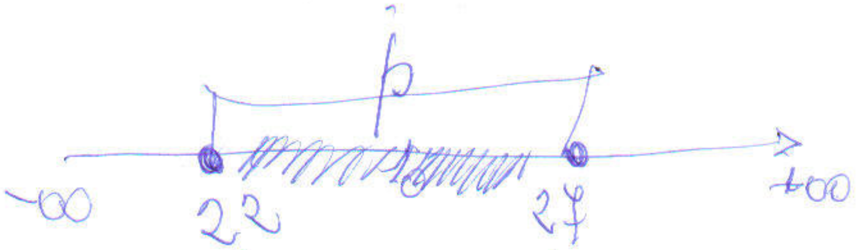
7. Acciones en la bolsa de valores

De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio ***p*** de las acciones de la compañía GAEL S.A.C. **NO** cambiarán su precio actual que es de $22 por más de $ 5, durante el mes de diciembre. (tener en cuenta que los precios de estas acciones, pueden subir y bajar)

a) Utiliza la notación del valor absoluto para expresar ésta predicción como una desigualdad.

$22 \leq p \leq 27$

b) Representa gráficamente la inecuación con valor absoluto de la pregunta a.



c) Indica el valor máximo y el valor mínimo de una acción de la compañía GAEL S.A.C

mínimo máximo

d) Representa gráficamente la solución de la pregunta c.

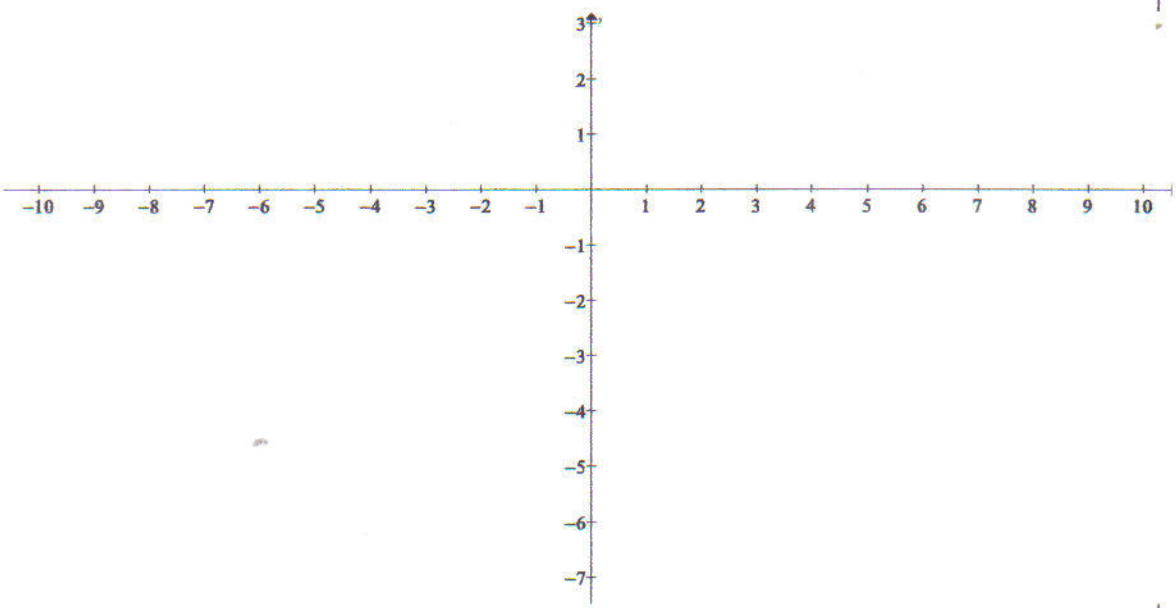
idem (b) y (c)

CUESTIONARIO N ° 2-P

FECHA: 4 DE ABRIL DE 2013

	Responde las siguientes preguntas:
1.	Coloca " V'' si la afirmación es verdadera o " F " si es falsa. a) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = -x$ (V) b) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ (V) c) Si $x < 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ (F) d) Si $x \geq 0$, entonces: $\lvert -x \rvert = x$ (V)
2.	Para todo número real x, ¿$-x < 0$? Justifica tu respuesta. Si, pues $\forall x \in \mathbb{R}, -x < 0$
3.	Define el valor absoluto de un número real a. $\lvert a \rvert = \begin{cases} -a, & -a < 0 \\ a, & a > 0 \end{cases}$
4.	Define la función f, cuya regla de correspondencia es $f(x) = \lvert 2x - 7 \rvert$, descomponiéndola por tramos. $f(x) = \lvert 2x-7 \rvert = \begin{cases} -(2x-7), & x < 7/2 \\ (2x-7) & x \geq 7/2 \end{cases}$ $2x-7=0$ $2x=7$ $x=7/2$
5.	Resuelve la siguiente ecuación: $\lvert 2x - 7 \rvert = -x + 2$ de dos maneras distintas, de ser posible. $\lvert 2x-7 \rvert = -x+2 \iff 2x-7 = -(-x+2)$ ó $2x-7 = -x+2$ $2x-7 = x-2$ o $2x-7=-x+2$ $x=5$ o $2x+x=2+7$ $\boxed{x=5} \vee x = 9/3$ $\boxed{x=3}$

6. Grafica la función f, definida por $f(x) = |x+2| - 7$, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes X e Y.



7.	De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio ***p*** de las acciones de la compañía GAEL S.A.C. **NO** cambiarán su precio actual que es de \$22 por más de \$ 5, durante el mes de diciembre. (tener en cuenta que los precios de estas acciones, pueden subir y bajar) a) Utiliza la notación del valor absoluto para expresar ésta predicción como una desigualdad. $f(p) = \|22p+5\| \Rightarrow f(p) = \begin{cases} -(22p+5) & p<0 \\ (22p+5 & p \geq 0 \end{cases}$
	b) Representa gráficamente la inecuación con valor absoluto de la pregunta a.
	c) Indica el valor máximo y el valor mínimo de una acción de la compañía GAEL S.A.C
	d) Representa gráficamente la solución de la pregunta c.