

# PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA  
Sección Ingeniería Mecánica



PONTIFICIA  
**UNIVERSIDAD  
CATÓLICA**  
DEL PERÚ

## CARACTERIZACIÓN DE UNA MATRIZ DE POLIÉSTER ISOFTÁLICA REFORZADA CON FIBRAS DE VIDRIO SIMÉTRICA COMO COMPONENTES ESTRUCTURALES

Tesis para optar el Título de Ingeniero Mecánico,  
que presenta el bachiller:

**CÉSAR OCTAVIO UGARTE ARGOMEDO**

**ASESOR: M.Sc. Daniel Akamine Ramirez**

Lima, Junio de 2014

## RESUMEN

El tema central de la tesis es el estudio del comportamiento mecánico de laminados simétricos compuestos de una matriz de poliéster isoftálica reforzada con fibras de vidrio, y analizar la influencia de la orientación de las fibras debido al comportamiento anisotrópico que estas presentan. Para lograr este objetivo, se identificaron los parámetros necesarios para caracterizar el material en estudio, luego se fabricaron las probetas del material, se elaboró un modelo matemático orientado a la caracterización de este y se validó el modelo mediante ensayos mecánicos de tracción y flexión. Finalmente se usó el método de los elementos finitos usando el ANSYS Mechanical APDL 14.5 para comprobar resultados.

Se analizaron los resultados obtenidos y la influencia de la orientación de las fibras de vidrio dentro del laminado. Se encontró que cuando los laminados son sometidos a tracción los parámetros hallados para caracterizar el material son suficientes para poder predecir el comportamiento del laminado, debido a que los resultados por el modelo matemático y el método de elementos finitos son iguales y conservadores con respecto a los valores hallados experimentalmente, sin embargo cuando los laminados están sometidos a flexión se encontró que el modelo elaborado es limitado y se necesita hallar parámetros adicionales para poder predecir el comportamiento del material.



TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

TÍTULO : CARACTERIZACIÓN DE UNA MATRIZ DE POLIÉSTER ISOFTÁLICA REFORZADA CON FIBRAS DE VIDRIO SIMÉTRICA COMO COMPONENTES ESTRUCTURALES

ÁREA : Materiales. # 12

PROPUESTO POR : M.Sc. Daniel Akamine Ramirez.

ASESOR : M.Sc. Daniel Akamine Ramirez.

TESISTA : César Octavio Ugarte Argomedo.

CÓDIGO : 20070293

FECHA : 16 de Abril del 2014



**DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS:**

El acero es el material más utilizado en la industria para la fabricación de estructuras y componentes. En la actualidad, se requiere para el diseño de nuevas estructuras, componentes y materiales con una relación peso-resistencia mejores a las que ofrece el acero u otros materiales metálicos. Las elecciones recaen usualmente en las fibras, en especial las fibras de vidrio debido a su muy alta resistencia a la tracción y bajo peso en comparación con materiales metálicos. El estudio y la comprensión de estos materiales suponen un reto debido a las características anisotrópicas de las fibras.

El objetivo del presente trabajo es estudiar y comprender una matriz de poliéster isoftálica reforzada con fibras de vidrio sometido a cargas de tracción y flexión, y analizar la influencia de la orientación de las fibras de vidrio debido al comportamiento anisotrópico que estos materiales presentan, para luego corroborar el análisis mediante ensayos destructivos. El alcance de esta tesis comprende los ensayos necesarios para poder caracterizar una probeta de matriz de poliéster reforzada con fibras de vidrio, la elaboración de un modelo matemático para predecir la resistencia mecánica del material compuesto, la validación del modelo matemático mediante ensayos mecánicos a las probetas del material compuesto y comprobar los resultados mediante el método de los elementos finitos.



TEMA DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

CARACTERIZACIÓN DE UNA MATRIZ DE POLIÉSTER  
ISOFTÁLICA REFORZADA CON FIBRAS DE VIDRIO SIMÉTRICA  
COMO COMPONENTES ESTRUCTURALES

Introducción

1. Fundamentos Teóricos
2. Elaboración del Modelo Matemático del Material
3. Realización de Ensayos Mecánicos
4. Análisis de Resultados General

Observaciones y Recomendaciones

Conclusiones

Bibliografía

*Máximo: 100 páginas*

M.Sc. Daniel Akamine Ramirez.

Asesor

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres.



## ÍNDICE GENERAL

	Pág.
<b>RESUMEN</b> .....	i
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	ii
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b> .....	iii
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	v
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	1
<b>OBJETIVO GENERAL</b> .....	3
<b>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</b> .....	3
<b>1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b> .....	4
1.1 DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS.....	4
1.2 CARACTERÍSTICAS Y CONFIGURACIONES DE LA LÁMINA Y LAMINADO.....	5
1.3 PROPIEDADES BÁSICAS DE LA LÁMINA.....	10
<b>2. MODELO MATEMÁTICO DEL MATERIAL</b> .....	12
2.1 RELACIONES DE ESFUERZO-DEFORMACIÓN DE UN MATERIAL ORTOTRÓPICO.....	12
2.1.1 MATERIAL ORTOTRÓPICO BAJO ESFUERZOS EN EL PLANO.....	15
2.2 ALGORITMO MATEMÁTICO DEL MATERIAL.....	18
<b>3. REALIZACIÓN DE ENSAYOS MECÁNICOS</b> .....	25
3.1 PLANTEAMIENTO DE LA NECESIDAD.....	25
3.2 FABRICACIÓN DE LOS ESPECÍMENES DE PRUEBA.....	25
3.3 ENSAYOS DE CARACTERIZACIÓN.....	27
3.3.1 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO [0/90/90/0].....	28
3.3.2 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO [45/-45] <sub>2s</sub> .....	30
3.4 ENSAYOS DE VALIDACIÓN.....	32
3.4.1 ENSAYO DE FLEXIÓN.....	32
3.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	34
3.5.1 CÁLCULO DE PROPIEDADES DE LA LÁMINA.....	38
3.5.1.1 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO [0/90/90/0].....	38
3.5.1.1.1 ESFUERZO Y DEFORMACIÓN MÁXIMA.....	38
3.5.1.1.2 MÓDULO DE ELASTICIDAD.....	39
3.5.1.1.3 COEFICIENTE DE POISSON.....	40
3.5.1.2 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO [45/-45] <sub>2s</sub> .....	40

3.5.1.2.1	ESFUERZO Y DEFORMACIÓN CORTANTE MÁXIMA.....	40
3.5.1.2.2	MÓDULO CORTANTE.....	41
<b>4.</b>	<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS GENERAL.....</b>	<b>43</b>
4.1	RESULTADOS CON EL MODELO MATEMÁTICO.....	43
4.1.1	MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA.....	44
4.1.1.1	MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA [0/90].....	44
4.1.1.2	MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA [45/-45].....	45
4.1.2	MATRICES DE RIGIDEZ DEL LAMINADO .....	45
4.1.2.1	MATRICES DE RIGIDEZ A TRACCIÓN.....	45
4.1.2.1.1	LAMINADO [0/90/45/-45]s.....	45
4.1.2.1.2	LAMINADO [0/90/0/90]s.....	47
4.1.2.2	MATRICES DE RIGIDEZ A FLEXIÓN.....	47
4.1.2.2.1	LAMINADO [0/90/45/-45]s.....	48
4.1.2.2.2	LAMINADO [0/90/0/90]s.....	48
4.1.3	DEFORMACIONES DEL LAMINADO.....	49
4.1.3.1	DEFORMACIONES DEBIDO A LA TRACCIÓN.....	49
4.1.3.1.1	LAMINADO [0/90/45/-45]s.....	49
4.1.3.1.2	LAMINADO [0/90/0/90]s.....	51
4.1.3.2	DEFORMACIONES DEBIDO A LA FLEXIÓN.....	52
4.1.3.2.1	LAMINADO [0/90/45/-45]s.....	52
4.1.3.2.2	LAMINADO [0/90/0/90]s.....	54
4.1.4	ESFUERZOS EN EL LAMINADO.....	54
4.1.4.1	ESFUERZOS POR TRACCIÓN.....	55
4.1.4.1.1	LAMINADO [0/90/45/-45]s.....	55
4.1.4.1.2	LAMINADO [0/90/0/90]s.....	55
4.1.4.2	ESFUERZOS POR FLEXIÓN.....	56
4.1.4.2.1	LAMINADO [0/90/45/-45]s.....	56
4.1.4.2.2	LAMINADO [0/90/0/90]s.....	56
4.2	DIAGRAMA POLAR.....	57
4.3	ANÁLISIS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS.....	60
4.4	RESUMEN GENERAL DE RESULTADOS.....	60
4.4.1	LAMINADOS ENSAYADOS A TRACCIÓN.....	62
4.4.2	LAMINADOS ENSAYADOS A FLEXIÓN.....	69
	<b>OBSERVACIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>77</b>
	<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>78</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>83</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla 3.1	Materiales para la fabricación de especímenes de prueba..... 25
Tabla 3.2	Resumen de especímenes Fabricados..... 26
Tabla 3.3	Dimensiones de especímenes fabricados..... 27
Tabla 3.4	Geometría de los especímenes recomendados para ensayo de tracción. 29
Tabla 3.5	Resultados obtenidos en el ensayo de tracción..... 34
Tabla 3.6	Resultados obtenidos en el ensayo de flexión..... 35
Tabla 3.7	Rango de deformación para el cálculo del módulo de elasticidad..... 39
Tabla 3.8	Módulos de Elasticidad calculados..... 40
Tabla 3.9	Resistencia al corte calculados..... 40
Tabla 3.10	Módulos de Corte calculados..... 42
Tabla 4.1	Deformaciones máximas a lo largo de los ejes principales de cada lámina- Laminado [0/90/45/-45]s..... 53
Tabla 4.2	Deformaciones máximas a lo largo de los ejes principales de cada lámina- Laminado [0/90/0/90]s..... 54
Tabla 4.3	Esfuerzos máximos a lo largo de los ejes principales de cada lámina- Laminado [0/90/45/-45]s..... 56
Tabla 4.4	Esfuerzos máximos a lo largo de los ejes principales de cada lámina- Laminado [0/90/0/90]s..... 56
Tabla 4.5	Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90]-Laminado [0/90/0/90]s bajo tracción..... 64
Tabla 4.6	Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90]-Laminado [0/90/45/-45]s bajo tracción ..... 66
Tabla 4.7	Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [45/-45]-Laminado [0/90/45/-45]s bajo tracción ..... 66
Tabla 4.8	Últimos valores de esfuerzo y deformación cortante de la Lámina [45/-45]- Laminado [0/90/45/-45]s bajo tracción ..... 68

Tabla 4.9	Porcentaje coincidente de deformación de la curva de caracterización con las curvas del modelo matemático de los laminados bajo tracción.....	69
Tabla 4.10	Error máximo del método de elementos finitos respecto al modelo matemático de cada lámina del laminado [0/90/0/90]s bajo flexión .....	71
Tabla 4.11	Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90] <sub>1</sub> -Laminado [0/90/0/90]s bajo flexión.....	72
Tabla 4.12	Error máximo del método de elementos finitos respecto al modelo matemático de cada lámina del laminado [0/90/45/-45]s bajo flexión .....	74
Tabla 4.13	Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90] <sub>1</sub> -Laminado [0/90/45/-45]s bajo flexión .....	75
Tabla 4.14	Últimos valores de esfuerzo y deformación cortante de la Lámina [45/-45] <sub>2</sub> -Laminado [0/90/45/-45]s bajo flexión .....	75
Tabla 4.15	Porcentaje coincidente de deformación de la curva de caracterización con las curvas del modelo matemático de los laminados bajo flexión.....	76

## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1	Las fases de un material compuesto..... 4
Figura 1.2	Principales tipos de láminas..... 6
Figura 1.3	Ejes coordenados principales de una lámina bidireccional..... 6
Figura 1.4	Laminado multidireccional..... 7
Figura 1.5	Ejes coordenados de un laminado multidireccional..... 7
Figura 1.6	Orientación de la Lámina [45/-45]..... 8
Figura 1.7	Sistema coordinado del Laminado [0/90]s..... 10
Figura 2.1	Estado general de esfuerzos en un punto..... 12
Figura 2.2	Ejes de referencia del laminado quasi-isotrópico..... 20
Figura 3.1	Tejido cortado de fibra de vidrio [0/90] ..... 26
Figura 3.2	Laminado [0/90/90/0] sometido a tracción ..... 28
Figura 3.3	Esquema del espécimen a ensayar a tracción..... 30
Figura 3.4	Esquema de tracción uniaxial de laminado [45/-45] <sub>2s</sub> ..... 31
Figura 3.5	Esquema del ensayo de flexión..... 33
Figura 3.6	Curvas Esfuerzo-Deformación – Caracterización Laminado [0/90/90/0]... 36
Figura 3.7	Curvas Esfuerzo-Deformación Cortante – Caracterización Laminado [45/-45] <sub>2s</sub> ..... 36
Figura 3.8	Curvas Esfuerzo-Deformación – Validación Laminado [0/90/0/90]s..... 37
Figura 3.9	Curvas Esfuerzo-Deformación – Validación Laminado [0/90/45/-45]s..... 37
Figura 4.1	Sistema de referencia del laminado..... 43
Figura 4.2	Diagrama Polar del laminado [0/90/90/0]..... 58
Figura 4.3	Diagrama Polar del laminado [0/90/45/-45]s..... 59
Figura 4.4	Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo tracción-Resultados Laminado [0/90/0/90]s..... 63

Figura 4.5	Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo tracción-Resultados Laminado [0/90/45/-45]s.....	65
Figura 4.6	Curvas de Esfuerzo-Deformación Cortante bajo tracción-Resultados Lámina [45/-45]-Laminado [0/90/45/-45]s.....	67
Figura 4.7	Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo flexión-Resultados Laminado [0/90/0/90]s.....	70
Figura 4.8	Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo flexión-Resultados Laminado [0/90/45/-45]s.....	73
Figura 4.9	Curvas de Esfuerzo-Deformación Cortante bajo flexión-Resultados Lámina [45/-45]-Laminado [0/90/45/-45]s.....	74



## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los materiales compuestos tales como matrices poliméricas reforzadas con fibras (de vidrio, carbono, kevlar, etc) responde a la necesidad de mejorar y optimizar el empleo de materiales tradicionales (tales como el acero, aluminio, titanio, cobre, etc) y además de lograr una reducción del peso y costo. Los materiales compuestos son aquellos que están formados por 2 o más componentes, cuyas propiedades mecánicas son superiores a las de los componentes individuales que los conforman. Estos materiales combinan las propiedades de los cerámicos, los plásticos y los metales. A veces en la industria se necesitan materiales ligeros, rígidos, resistentes al impacto, la corrosión y al desgaste, propiedades las cuales se dan rara vez en un solo material.

Generalmente, el material compuesto está formado por dos fases: una matriz, la cual es continua y rodea a la otra fase (fibras) que está dispersa en el material. Las propiedades resultantes del material dependen de las proporciones de las fases constituyentes, de sus proporciones relativas, y de la geometría de la fase dispersa.

Las fibras de refuerzo en una matriz polimérica tienen como función soportar el esfuerzo aplicado al conjunto; mientras que la matriz polimérica le da otras propiedades al material compuesto, tales como buena ductilidad, estabilidad térmica, resistencia a la corrosión, etc.

Uno de estos materiales compuestos es una matriz de poliéster reforzada con fibras de vidrio, la cual se estudia en el presente trabajo. El estudio en detalle, surge como respuesta al poco conocimiento de estos materiales, además de como emplear herramientas de cálculo que permitan predecir la resistencia mecánica en estos materiales compuestos. A partir de lo investigado, se espera estar en la capacidad de

analizar geometrías y configuraciones más complejas de estos materiales mediante elementos finitos.

El trabajo comprende los ensayos necesarios para poder caracterizar una probeta de matriz de poliéster reforzada con fibras de vidrio, la elaboración de un algoritmo matemático para predecir la resistencia mecánica del material compuesto, la validación del algoritmo matemático mediante ensayos mecánicos a las probetas del material compuesto y comprobar resultados mediante el método de los elementos finitos.

El trabajo estará estructurado de la siguiente manera: El primer capítulo presentará las principales propiedades de las matrices poliméricas reforzadas con fibras (con énfasis en las fibras de vidrio). El segundo capítulo expondrá los parámetros de entrada a tomar en consideración para usar en el modelo matemático, así como la secuencia del modelo para predecir la resistencia mecánica del material compuesto. El tercer capítulo comprenderá los aspectos que se tomó en cuenta de acuerdo a normas internacionales para elaborar las probetas del material en estudio y la realización de los ensayos mecánicos; así como los resultados obtenidos. El cuarto capítulo resumirá los resultados obtenidos experimentalmente, mediante el modelo matemático y mediante el método de elementos finitos. Finalmente, se presentan las principales observaciones y conclusiones a las que se han llegado.

## OBJETIVO GENERAL

- Analizar y comprender la respuesta de la matriz de poliéster isoftálica reforzada con fibras de vidrio a ensayos mecánicos de tracción y flexión.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar la influencia de la orientación de las fibras de vidrio dentro del material compuesto sobre el grado de resistencia.
- Determinar los ensayos adecuados para conseguir información necesaria que permita caracterizar el material.
- Elaborar un modelo matemático orientado a la caracterización del material reforzado con fibras de vidrio.
- Validar el modelo mediante pruebas experimentales.
- Comprobar los resultados mediante la aplicación del método de elementos finitos.

## CAPÍTULO 1

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 1.1 DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS

Un material compuesto es un material que consiste de dos o más fases, cuyas propiedades mecánicas generalmente son superiores a las de los materiales constituyentes. Usualmente una de las fases es la más rígida, fuerte, discontinua y se le llama refuerzo, mientras que la fase menos rígida y débil es continua y se le denomina matriz (Figura 1.1).

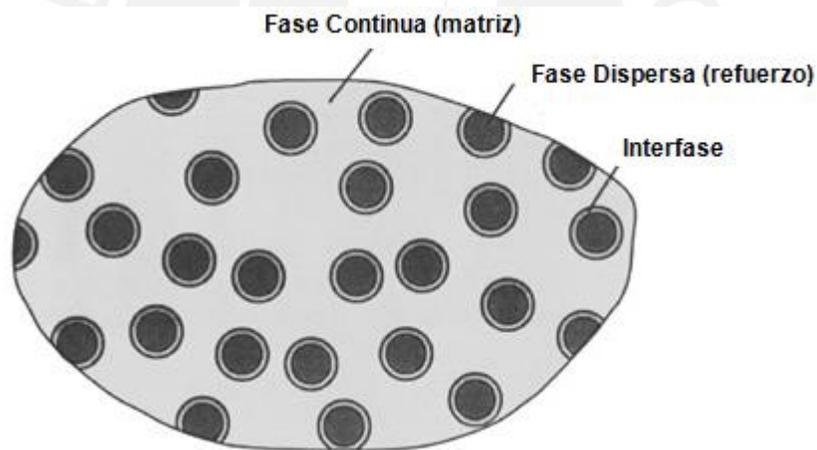


Figura 1.1: Las fases de un material compuesto [1]

En algunos casos debido a las interacciones químicas o efectos debido a la elaboración de estos compuestos, una fase adicional, llamada interfase aparece entre el refuerzo y la matriz. Las propiedades del material compuesto dependen de las propiedades de los constituyentes, geometría y la distribución de las fases. La distribución del refuerzo

(fibras) determina la homogeneidad o uniformidad del material compuesto. Mientras la distribución de las fibras sea de una manera no uniforme, más heterogéneo será el material compuesto y por lo tanto tendrá una mayor probabilidad de falla en las partes más débiles del material.

La anisotropía es una propiedad en la cual las propiedades del material varían de acuerdo a la orientación a las cuales son analizadas. Es por ello que la geometría y la orientación de las fibras afectan la anisotropía del material compuesto.

Las fases del material compuesto cumplen diferentes funciones las cuales dependen de la aplicación donde se quiera emplear este material. El refuerzo usualmente en forma de fibras le otorga propiedades mecánicas al material compuesto. La matriz, por otra parte proporciona protección y soporte a las fibras, así como propiedades físicas y químicas. La interfase cumple una función importante, en controlar los mecanismos de falla y el comportamiento esfuerzo-deformación del material.

## 1.2 CARACTERÍSTICAS Y CONFIGURACIONES DE LA LÁMINA Y LAMINADO

Una lámina es una capa plana (o curvada) de una matriz con fibras unidireccionales o tejido de fibras como se muestra en la Figura 1.2. La lámina es un material ortotrópico, el cual se define como aquel material que presenta tres ejes perpendiculares entre sí, y presenta propiedades constantes definidas en cada una de estas tres direcciones (no necesariamente iguales), con ejes principales en la dirección de las fibras (longitudinal), transversal a las fibras (plano transversal) y normal al plano de la lámina. Estos ejes se

les denominan principales ya que estos son paralelos, perpendiculares y normales a las fibras, se les designa como ejes 1,2 y 3 respectivamente, como se ilustra en la Figura 1.3.

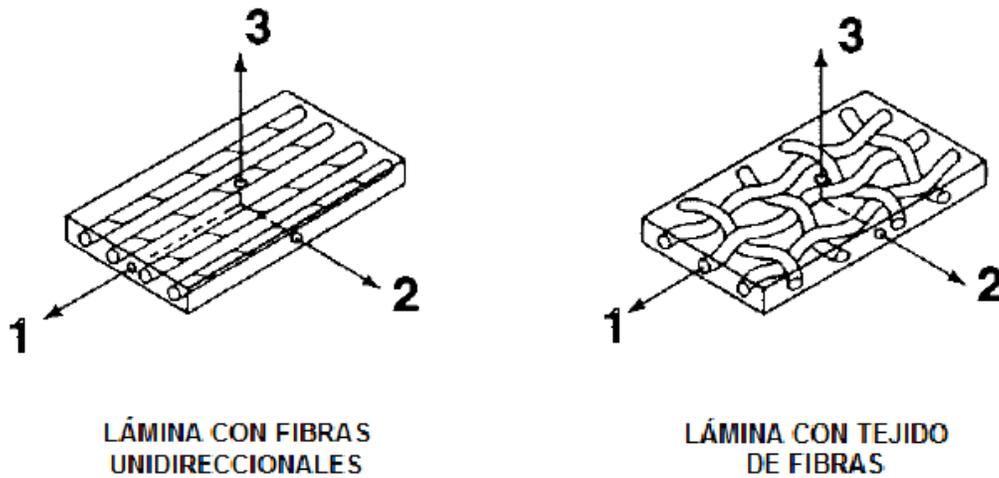


Figura 1.2: Principales tipos de láminas [2]

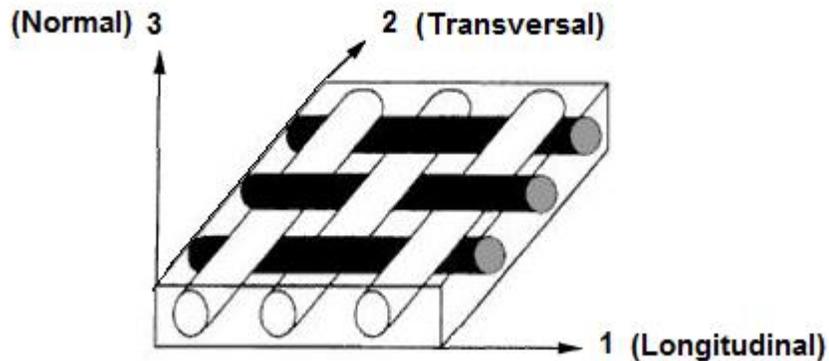


Figura 1.3: Ejes coordenados principales de una lámina bidireccional [2]

El tipo de lámina que se usó en el presente trabajo es la **lámina con tejido de fibras** de la Figura 1.3. A este tipo de lámina se le conoce como lámina bidireccional, debido a que las propiedades de la lámina a lo largo de los ejes 1 y 2 son las mismas, a diferencia de la lámina con fibras unidireccionales.

Un laminado consiste de dos o más laminas unidireccionales u orientadas en distintas direcciones unidas unas a otras, como se muestra en la Figura 1.4.

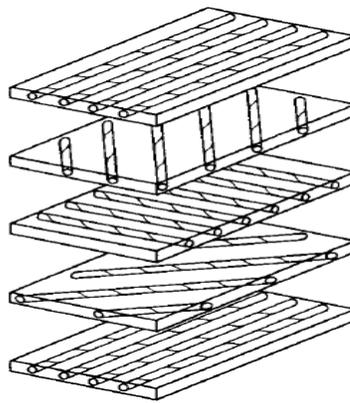


Figura 1.4: Laminado multidireccional [2]

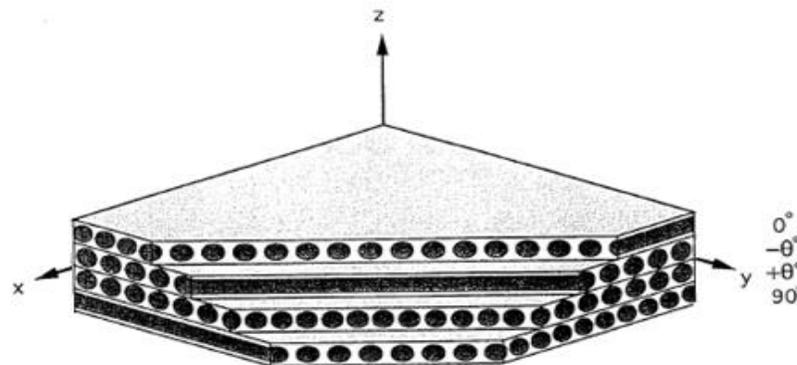
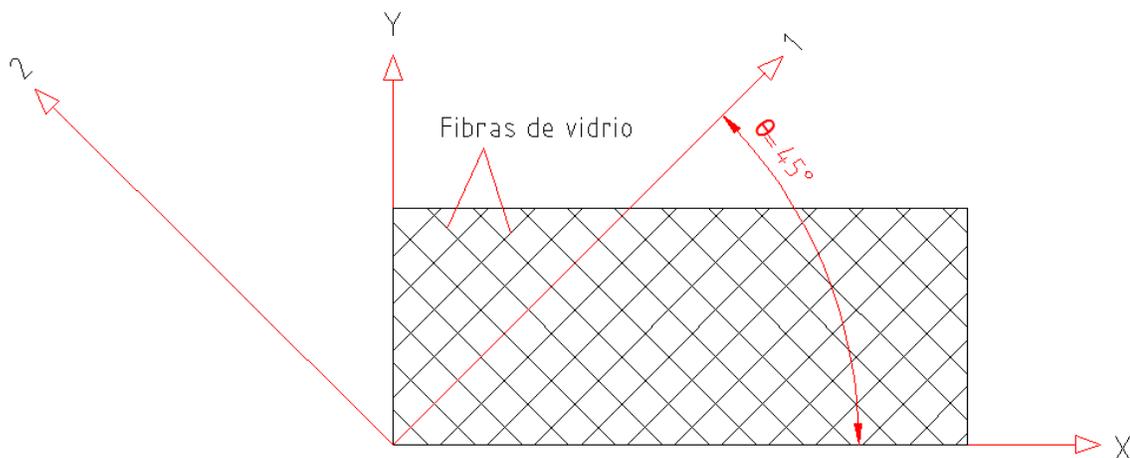


Figura 1.5: Ejes coordenados de un laminado multidireccional [1]

Las láminas pueden ser de varios espesores y también pueden ser de diferentes materiales. Debido a que los ejes principales de cada lámina pueden diferir en cuanto a orientación unas de otras, es conveniente analizar los laminados utilizando un sistema común de ejes coordenados fijos ( $x, y, z$ ) como se muestra en la Figura 1.5.

La orientación de una lámina bidireccional está dada por  $[\theta/\theta - 90]$ ,  $\theta$  es el ángulo entre el eje de referencia  $X$ , y el eje principal 1 (orientación de la fibra), medido positivamente en la dirección en contra de las agujas del reloj en el plano  $x-y$ . Las fibras orientadas a un ángulo mayor a  $90^\circ$  respecto del eje  $x$  (perpendiculares a las fibras orientadas a  $\theta$  grados) se les designa con  $(\theta - 90)^\circ$  y están orientadas a lo largo del eje 2. Como ejemplo se muestra en la Figura 1.6 la lámina  $[45/-45]$ , donde  $\theta = 45^\circ$ . En esta Figura se puede observar que si  $\theta = 0^\circ$ , los ejes ( $x, y$ ) coinciden con los ejes principales (1, 2).



**Figura 1.6: Orientación de la Lámina [45/-45]**

Los laminados que consisten de dos o más láminas de distintos materiales se les llaman compuestos híbridos. Por ejemplo un compuesto laminado podrá contener una lámina de fibras de vidrio unidireccionales de matriz epoxi, otra de carbono/epoxi, y otra de aramida/epoxi unidas en una secuencia específica.

Los laminados compuestos se designan indicando el número, tipo, orientación, y secuencia de apilamiento de las láminas. A continuación se muestran algunos ejemplos de designaciones de laminados.

- Unidireccionales:  $[0/0/0/0] = [0_4]$
- Bidireccional simétrico:  $[0/90/90/0] = [0/90]_s$   
 $[0/90/0] = [0/\overline{90}]_s$
- Simétrico orientado:  $[+45/-45/-45/+45] = [\pm 45]_s$   
 $[60/-60/60/-60/-60/60/-60/60] = [\pm 60]_{2s}$
- Multidireccional:  $[0/0/45/-45/0/0/0/0/-45/45/0/0] = [0_2/\pm 45/0_2]_s$

Donde los subíndices y símbolos significan lo siguiente:

Subíndice = Múltiplo de láminas o número de laminas

s= Secuencia simétrica

Barra superior denota que el laminado es simétrico respecto al plano medio de dicha lámina.

Como ejemplo para el primer laminado ( $[0/0/0/0] = [0_4]$ ), este está compuesto de 4 láminas unidireccionales orientadas a lo largo del eje  $x$ . El segundo laminado, bidireccional simétrico ( $[0/90/90/0] = [0/90]_s$ ), está compuesto por 4 láminas unidireccionales, dos orientadas a lo largo del eje  $X$  ( $0^\circ$ ) y las otras dos orientadas a lo largo del eje  $Y$  ( $90^\circ$ ) o el equivalente para el tipo de lámina empleado en el presente trabajo, compuesto de dos láminas bidireccionales  $[0/90]^\circ$  como se muestra en la Figura 1.7. Como se observa el laminado  $[0/90]_s$  es simétrico respecto a su plano medio, por lo tanto es un laminado simétrico.

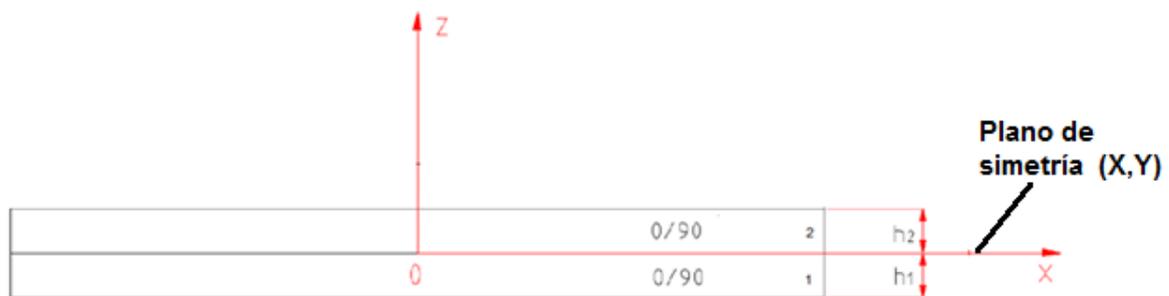


Figura 1.7: Sistema coordenado del laminado  $[0/90]_s$

Referenciando a la Figuras 1.6 y 1.7, de esta manera queda definido la lámina y el laminado, respectivamente.

### 1.3 PROPIEDADES BÁSICAS DE LA LÁMINA

El tipo de lámina utilizada en el presente trabajo es una lámina bidireccional, la cual es considerada la parte de construcción básica de cualquier laminado o estructura

compuesta. Las propiedades necesarias para su análisis y diseño de estas estructuras son las propiedades básicas de la lámina.

El alcance del presente trabajo comprende el análisis del laminado en el plano, despreciando el esfuerzo o deformación que se pueda generar en el eje z, normal al plano del laminado, las cuales son algunas de las consideraciones en las cuales está basado el modelo matemático el cual se detallará en el capítulo 2. Es por ello que las propiedades necesarias de la lámina, tomando como referencia la Figura 1.3, son las siguientes:

- $E_1 ; E_2$  = Módulo de Young a lo largo de las direcciones principales en el plano. Estos dos valores son iguales para el presente trabajo.
- $G_{12}$  = Módulo de Corte en el plano 1-2 (es igual al módulo de corte  $G_{21}$ ).
- $\nu_{12} ; \nu_{21}$  = Coeficiente de Poisson (el primer subíndice indica la dirección de la carga, y el segundo denota la dirección de la deformación. Estos dos valores son iguales para el presente trabajo).
- $F_{1t} ; F_{2t}$  = Resistencia a la tracción a lo largo de las direcciones principales en el plano. Estos dos valores son iguales para el presente trabajo.
- $F_{12}$  = Resistencia al corte en el plano 1-2 (este valor es igual a  $F_{21}$ ).

## CAPÍTULO 2

### MODELO MATEMÁTICO DEL MATERIAL

#### 2.1 RELACIONES DE ESFUERZO-DEFORMACIÓN DE UN MATERIAL ORTOTRÓPICO

El estado general de esfuerzos en un punto en un sólido puede ser representado por componentes de esfuerzo  $\sigma_{ij}$  (donde  $i, j = 1, 2, 3$ ) actuando en los lados de un cubo simple (Figura 2.1). Similarmente, el estado de deformación está representado por las componentes,  $\varepsilon_{ij}$ .

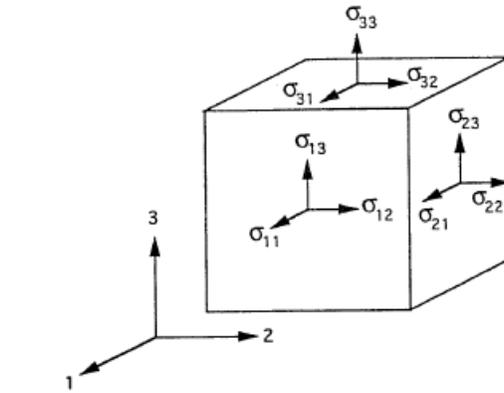


Figura 2.1: Estado general de esfuerzos en un punto [1]

Para el estado de esfuerzos anterior se cumple lo siguiente [1]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

(2.1)

$$\sigma_{11} = \sigma_1 ; \sigma_{22} = \sigma_2 ; \sigma_{33} = \sigma_3 ; \sigma_{23} = \tau_4 ; \sigma_{31} = \tau_5 ; \sigma_{12} = \tau_6$$

(2.2)

En el caso más general estas componentes de esfuerzo y deformación están relacionadas por la ley de Hooke [1] generalizada como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(2.3)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

(2.4)

Como se mostró en el capítulo anterior un material compuesto reforzado con fibra de vidrio unidireccional posee 3 ejes principales (1, 2 y 3), el eje 1 es el eje donde las fibras están orientadas, el eje 2 es el eje transversal a las fibras (en el presente trabajo es equivalente al eje 1), y el eje 3 que es el eje normal a los ejes 1 y 2 (ejes en el plano). Esta definición hace que el material se denomine como ortotrópico, como se definió anteriormente un material ortotrópico es aquel que posee tres ejes perpendiculares entre sí, y presenta propiedades constantes definidas a lo largo de estos, además estos ejes

son los ejes principales del material [1]. Las matrices (2.3) y (2.4) quedan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

En las ecuaciones (2.5) y (2.6), las constantes  $C_{ij}$  y  $S_{ij}$ , son parámetros elásticos que dependen de las constantes de ingeniería (módulo de elasticidad, coeficiente de poisson, módulo cortante) [1].

Para cada una de las matrices anteriores se cumple lo siguiente [1]:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2.7)$$

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (2.8)$$

Se muestra en las ecuaciones (2.5) y (2.6) que un material ortotrópico puede ser caracterizado por nueve constantes elásticas independientes [1]. La matriz  $[S_{ij}]$  es inversa de  $[C_{ij}]$ .

Se pueden hacer las siguientes observaciones de las relaciones de esfuerzo-deformación que se muestran en (2.5) y (2.6).

1. No existe interacción alguna entre los esfuerzos normales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y las deformaciones cortantes  $\gamma_4$ ,  $\gamma_5$ ,  $\gamma_6$ , es decir esfuerzos normales actuando en los ejes principales del material solo generan deformaciones normales.
2. No existe interacción entre los esfuerzos cortantes  $\tau_4$ ,  $\tau_5$ ,  $\tau_6$ , y las deformaciones normales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , es decir esfuerzos cortantes actuando en los planos principales del material solo generan deformaciones cortantes.
3. No existe interacción entre esfuerzos cortantes y deformaciones cortantes en diferentes planos, es decir un esfuerzo cortante actuando en un plano principal produce una deformación cortante en ese plano.

### 2.1.1 MATERIAL ORTOTRÓPICO BAJO ESFUERZOS EN EL PLANO

En la mayoría de aplicaciones estructurales los materiales compuestos son usados en la forma de laminados delgados, por esta razón el esfuerzo fuera del plano ( $\sigma_3$ ) puede despreciarse y el material compuesto (laminado) puede ser considerado a estar bajo un estado de esfuerzos en el plano [1]. Entonces se tiene:

$$\sigma_3 = 0$$

$$\tau_{23} = \tau_4 = 0 ; \tau_{13} = \tau_5 = 0$$

(2.9)

La matriz de esfuerzos-deformaciones (Ecuación 2.5) se reduce a la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(2.10)

Al resolver esta matriz se tiene lo siguiente:

$$\sigma_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3$$

$$\sigma_2 = C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2 + C_{23} \varepsilon_3$$

$$0 = C_{13} \varepsilon_1 + C_{23} \varepsilon_2 + C_{33} \varepsilon_3$$

$$\gamma_4 = \gamma_5 = 0$$

$$\tau_6 = C_{66} \gamma_6$$

(2.11)

Despejando la deformación  $\varepsilon_3$  :

$$\varepsilon_3 = \frac{-C_{13}\varepsilon_1 - C_{23}\varepsilon_2}{C_{33}}$$

(2.12)

Reemplazando (2.12) en (2.11), se tiene lo siguiente:

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}}\right) \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}\right) \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = Q_{11} \varepsilon_1 + Q_{12} \varepsilon_2$$

$$\sigma_2 = \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}}\right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}}\right) \varepsilon_2$$

$$\sigma_2 = Q_{12} \varepsilon_1 + Q_{22} \varepsilon_2$$

$$\tau_6 = C_{66} \gamma_6 = Q_{66} \gamma_6$$

(2.13)

Las ecuaciones (2.13) se pueden mostrar resumidas en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(2.14)

La matriz inversa de la ecuación (2.14) es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

(2.15)

Como se puede observar en las matrices anteriores, las relaciones de esfuerzo-deformación bajo cargas en el plano pueden expresarse en cuatro parámetros elásticos independientes  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$ ,  $Q_{66}$ , ó  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{66}$  [1].

Las relaciones de las constantes  $C_{ij}$  y  $S_{ij}$  con los parámetros de ingeniería se explica en detalle en [1], así como los valores de  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$  y  $Q_{66}$ , y la explicación de la teoría de láminas la cual es la base del modelo matemático para predecir el comportamiento del material compuesto.

## 2.2 ALGORITMO MATEMÁTICO DEL MATERIAL

A continuación se muestran los pasos que se siguió para predecir el comportamiento del material mediante el modelo matemático. Los números en corchetes se hacen referencia a la bibliografía, donde se puede encontrar la deducción y el detalle de cada ecuación que se mostrará a continuación.

### 1. Introducir las propiedades básicas de la lámina ( $E_1$ ; $E_2$ ; $G_{12}$ ; $\nu_{12}$ )

Todo laminado analizado en el presente trabajo está compuesto por un número determinado de láminas, cada una teniendo una determinada orientación, sin embargo cada una de estas láminas presenta los mismo valores de estos parámetros en sus direcciones principales, se halla estas propiedades básicas de la lámina referente a sus

ejes principales mediante ensayos, denominados por los subíndices 1 y 2, que significan respectivamente, el eje longitudinal de las fibras y el eje transversal a estas.

**2. Hallar la matriz de rigidez  $[Q]_{12}$  de cada lámina referido a sus ejes principales (1,2), usando las siguientes ecuaciones [1]:**

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

(2.16)

Para este trabajo todas láminas son del mismo material (matriz de poliéster isoftálica reforzada con fibra de vidrio), y debido a esto todas las láminas presentan la misma matriz de rigidez referida a sus ejes principales, sin embargo para posteriores cálculos se necesita tener la matriz referida a los ejes del sistema de referencia del laminado (x , y), y es acá donde se verá el efecto de la orientación de las láminas.

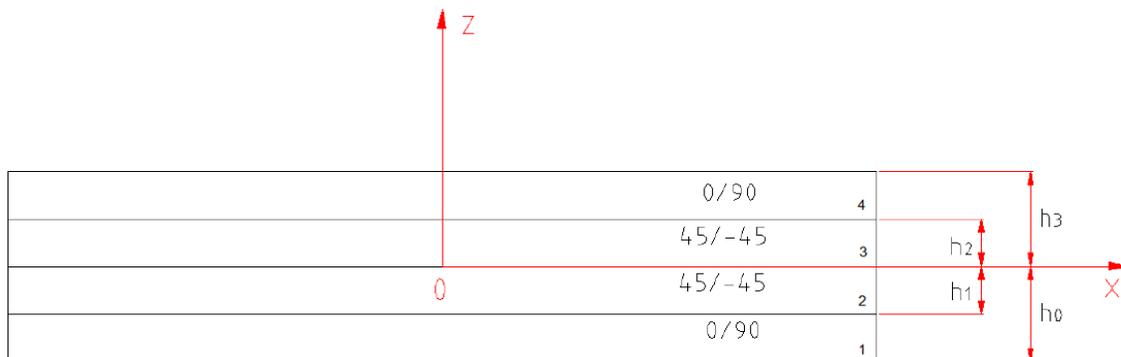
Para láminas orientadas a un ángulo ( $\theta_k$ ), es decir cuyos ejes principales no coinciden con los ejes del sistema de referencia del laminado, para hallar la matriz  $[Q]_{x,y}^k$  de cada lámina referida a estos ejes (x, y) se usa las siguientes ecuaciones [1]:

- $Q_{xx} = m^4 \cdot Q_{11} + n^4 \cdot Q_{22} + 2m^2n^2 \cdot Q_{12} + 4m^2n^2 \cdot Q_{66}$
- $Q_{yy} = n^4 \cdot Q_{11} + m^4 \cdot Q_{22} + 2m^2n^2 \cdot Q_{12} + 4m^2n^2 \cdot Q_{66}$
- $Q_{xy} = m^2n^2 \cdot Q_{11} + m^2n^2 \cdot Q_{22} + (m^4 + n^4) \cdot Q_{12} - 4m^2n^2 \cdot Q_{66}$
- $Q_{xs} = m^3n \cdot Q_{11} - mn^3 \cdot Q_{22} + (mn^3 - m^3n) \cdot Q_{12} + 2(mn^3 - m^3n) \cdot Q_{66}$
- $Q_{ys} = mn^3 \cdot Q_{11} - m^3n \cdot Q_{22} + (m^3n - mn^3) \cdot Q_{12} + 2(m^3n - mn^3) \cdot Q_{66}$
- $Q_{ss} = m^2n^2 \cdot Q_{11} + m^2n^2 \cdot Q_{22} - 2m^2n^2 \cdot Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 \cdot Q_{66}$

(2.17)

Dónde:  $[m = \cos \theta_k ; n = \text{sen } \theta_k]$ ,  $(\theta_k)$  es el ángulo orientado que se encuentra la lámina “k” medido positivo en sentido antihorario desde el eje x.

**3. Se selecciona los ejes de referencia (x, y) del laminado indicando las cotas superiores ( $h_k$ ) e inferiores ( $h_{k-1}$ ) de cada lámina que lo conforman, como se observa en la siguiente figura:**



**Figura 2.2: Ejes de referencia del laminado quasi-isotrópico**

4. Se procede a calcular las matrices de rigidez del laminado (  $[A]$ ;  $[B]$ ;  $[D]$  ) usando las siguientes ecuaciones [1].

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

$$i, j = x, y, s.$$

(2.18)

5. Se procede a calcular las matrices “inversas” del laminado (  $[a]$ ;  $[b]$ ;  $[c]$  y  $[d]$  ) según las siguientes ecuaciones [1].

- $[a] = [A^{-1}] - \{[B^*].[D^{*-1}]\}.[C^*]$
- $[b] = [B^*].[D^{*-1}]$
- $[c] = -[C^*].[D^{*-1}]$
- $[d] = [D^{*-1}]$

(2.19)

Donde:

- $[A^{-1}] = \text{inversa de la matriz } [A]$
- $[B^*] = -[A^{-1}].[B]$

- $[C^*] = [B] \cdot [A^{-1}]$
- $[D^*] = [D] - \{[B] \cdot [A^{-1}]\} \cdot [B]$

6. Se calcula las deformaciones del plano de referencia  $[\varepsilon^0]_{x,y}$  y las curvaturas  $[K]_{x,y}$ , las cuales se pueden generar debido a estas deformaciones. Previamente se ingresa la carga mecánica  $[N]_{x,y}$  y los momentos  $[M]_{x,y}$  a los que está sometido el laminado, según las siguientes ecuaciones [1]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{ys} \\ a_{sx} & a_{sy} & a_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{ys} \\ b_{sx} & b_{sy} & b_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix}$$

(2.20)

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xs} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{ys} \\ c_{sx} & c_{sy} & c_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{ys} \\ d_{sx} & d_{sy} & d_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix}$$

(2.21)

7. Se calcula las deformaciones de cada lámina “k” ( $[\varepsilon^k]_{x,y}$ ) referido a los ejes de referencia del laminado (x, y), según la siguiente ecuación [1]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{bmatrix}$$

(2.22)

Para analizar la deformación real de cada lámina, se introduce la coordenada “z” de interés para su análisis. Para laminados simétricos bajo carga en el plano (los cuales se analizan en el presente trabajo), se usa la coordenada denominada  $z_k$ . Para los casos de laminados sometidos a flexión, la coordenada  $z_k$  será medida desde el plano medio del laminado hasta la cota superior de cada lámina, obteniendo de esta forma los esfuerzos máximos en cada lámina. Como ejemplo observando la Figura 2.2, si  $z_k = h_3$ , se obtendrá los esfuerzos máximos en la lámina [0/90].

**8. Si los ejes principales de una lámina “k” no coinciden con los ejes de referencia del laminado (x, y), las deformaciones halladas en el paso anterior no serán las deformaciones a lo largo de las direcciones principales ( $[\varepsilon^k]_{1,2}$ ), por lo cual se deberá usar la siguiente ecuación [1] para poder hallarlas.**

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_6 \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_s \end{bmatrix}$$

(2.23)

Dónde:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

$$[m = \cos \theta_k ; n = \text{sen } \theta_k]$$

9. Calcular los esfuerzos a lo largo de los ejes principales (1, 2) en cada lámina

$[\sigma^k]_{1,2}$  , según la siguiente ecuación [1]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(2.24)

10. Aplicar una teoría de falla (s).

Existen muchas teorías de falla para materiales compuestos (laminados), pero por practicidad se analiza la teoría del esfuerzo máximo y deformación máxima, los cuales se entienden que si algún valor de los esfuerzos o deformaciones halladas a lo largo de los ejes principales de cada lámina supera el valor máximo permisible, el material falla en dicha lámina.

## CAPÍTULO 3

### REALIZACIÓN DE ENSAYOS MECÁNICOS

#### 3.1 PLANTEAMIENTO DE LA NECESIDAD

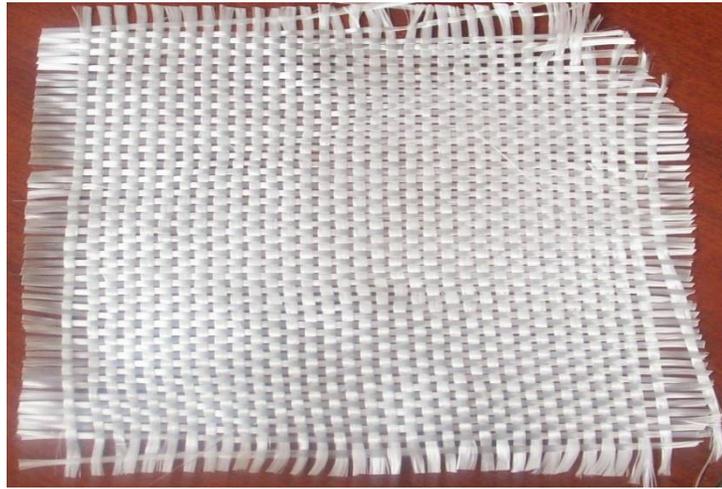
Para poder caracterizar una matriz de poliéster isoftálica reforzada con fibras de vidrio se fabricaron varios especímenes para poder realizar las pruebas experimentales. En primer lugar, se realizarán ensayos de tracción a los laminados  $[0/90/90/0]$  y  $[45/-45]_{2s}$ , los cuales llamaremos ensayos de caracterización, ya que estos nos servirán para poder hallar las propiedades mecánicas básicas de la lámina, la cual es la base de todos los laminados desarrollados en el presente trabajo. Finalmente se harán ensayos de tracción y flexión a los laminados  $[0/90/0/90]_s$  y  $[0/90/45/-45]_s$ , los cuales denominaremos ensayos de validación, los cuales nos permitirán comparar y analizar los resultados hallados experimentalmente con el modelo matemático y con la simulación mediante el método de elementos finitos.

#### 3.2 FABRICACIÓN DE LOS ESPECÍMENES DE PRUEBA

Los especímenes de prueba se fabricaron a partir de los materiales que se presentan en la Tabla 3.1, las especificaciones de estos materiales se muestran en los anexos.

Materiales	Identificación	Mezcla
Resina Poliéster Isoftálica	Cristalan 870	7 mg Catalizador / 0.25 kg Resina
Fibra de Vidrio	E WR 800-1450	-
Catalizador	Butanox M-50	-

Tabla 3.1: Materiales para la fabricación de especímenes de prueba



**Figura 3.1: Tejido cortado de fibra de vidrio [0/90]**

En la Figura 3.1 se observa la fibra de vidrio “E” es de la forma de un tejido (WR), el cual es la base de todos los laminados.

Estos especímenes de prueba se fabricaron de acuerdo a las normas ASTM D3039/D3039M – 08, ASTM D3518/D3518M – 13, ASTM D790 – 10 e ISO 14125. A continuación en la Tabla 3.2 se presenta los especímenes de prueba fabricados y los resultados a obtener:

Función	Orientación	Cantidad	Resultados a Obtener	Norma
Caracterización	[0/90/90/0]	5	Resistencia a Tracción, Deformación Última y Módulo de Elasticidad	ASTM D3039/D3039M – 08
	[45/-45] <sub>2s</sub>	5	Resistencia al Corte y Módulo Cortante	ASTM D3518/D3518M – 13
Validación	[0/90/0/90] <sub>s</sub>	5	Resistencia a Tracción	ASTM D3039/D3039M – 08
	[0/90/45/-45] <sub>s</sub>	5	Resistencia a Tracción	ASTM D3039/D3039M – 08
	[0/90/0/90] <sub>s</sub>	5	Resistencia a Flexión	ASTM D790 – 10 ; ISO 14125
	[0/90/45/-45] <sub>s</sub>	5	Resistencia a Flexión	ASTM D790 – 10 ; ISO 14125

**Tabla 3.2: Resumen de especímenes Fabricados**

En base a las normas que se indican en la Tabla 3.2, las dimensiones de los especímenes fabricados se muestran en la Tabla 3.3.

Función	Orientación	Longitud (mm)	Ancho(mm)	Espesor (mm)
Caracterización	[0/90/90/0]	250	25	1.25
	[45/-45] <sub>2s</sub>	250	25	2.8
Validación Tracción	[0/90/0/90] <sub>s</sub>	250	25	2.6
	[0/90/45/-45] <sub>s</sub>	250	25	2.7
Validación Flexión	[0/90/0/90] <sub>s</sub>	100	15	2
	[0/90/45/-45] <sub>s</sub>	100	15	2

Tabla 3.3: Dimensiones de especímenes fabricados

El procedimiento que se llevó a cabo para la fabricación de estos especímenes se muestra en los anexos.

### 3.3 ENSAYOS DE CARACTERIZACIÓN

Se realizaron ensayos de tracción uniaxiales sobre laminados de [0/90/90/0] y [45/-45]<sub>2s</sub>, los cuales nos permitieron hallar las propiedades básicas de la lámina, y con ayuda de estos parámetros obtenidos predecir el comportamiento mecánico de los laminados ensayados para validación con el modelo matemático y mediante el método de elementos finitos. En la Figura 3.2 se muestra un esquema de cómo los especímenes fueron sometidos a tracción. La sección transversal de cada laminado sometido a tracción se obtuvo multiplicando su ancho por espesor.

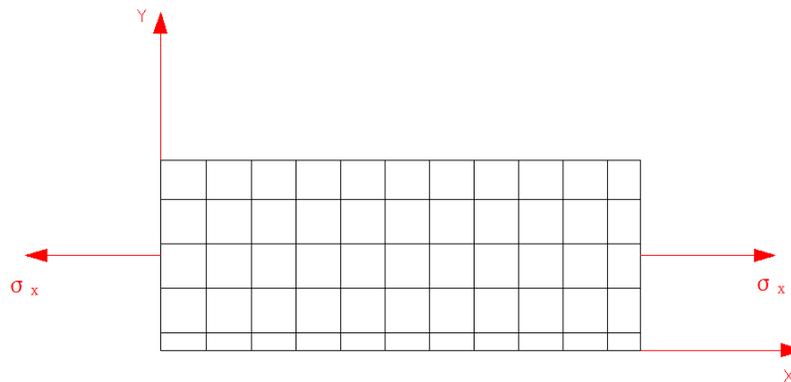


Figura 3.2: Laminado [0/90/90/0] sometido a tracción

### 3.3.1 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO [0/90/90/0]

Este laminado está compuesto por 2 tejidos de fibra de vidrio de [0/90], o [90/0] (Figura 3.1), en este caso y en los demás laminados, el orden en la designación es indiferente, sin embargo se mantiene, debido a que es una forma ordenada de presentar al laminado, además indica que el laminado es simétrico. Al poseer 2 tejidos de fibra de vidrio exactamente iguales (estar hechas del mismo material y orientadas en los ejes principales del laminado), este laminado se puede comportar como una sola lámina gruesa y es el “alma” de todos los laminados presentados en este trabajo.

Entonces al tener este laminado orientado sobre los ejes principales (1,2), las propiedades como el módulo de elasticidad serán iguales, es decir ( $E_1 = E_2$ ), el coeficiente de poisson también ( $\nu_{12} = \nu_{21}$ ), el esfuerzo último ( $\sigma_{1t}^u = \sigma_{2t}^u$ ), y la deformación última ( $\epsilon_{1t}^u = \epsilon_{2t}^u$ ) también serán iguales. A continuación se muestran los parámetros necesarios a obtener en este ensayo.

- $\sigma_{1t}^u = \sigma_{2t}^u$  : Esfuerzo último en la dirección de las fibras que coincide con los ejes principales.
- $\epsilon_{1t}^u = \epsilon_{2t}^u$  : Deformación última en la dirección de las fibras que coincide con los ejes principales.
- $E_1 = E_2$  : Módulo de elasticidad en la dirección de las fibras.
- $\nu_{12} = \nu_{21}$  : Coeficiente de Poisson principales.

Para este ensayo se decidió estimar el coeficiente de Poisson en base a tablas teóricas, debido a que este valor prácticamente no influye en el comportamiento mecánico del material.

Los laminados ensayados en el presente trabajo son balanceados y simétricos, por lo tanto, según la norma ASTM D3039/D3039M-08 las probetas deben ser rectangulares y las dimensiones son las que se resaltan en la Tabla 3.4. La velocidad usada para el ensayo de tracción fue de 2 mm/min.

Fiber Orientation	Width, mm [in.]	Overall Length, mm [in.]	Thickness, mm [in.]	Tab Length, mm [in.]	Tab Thickness, mm [in.]	Tab Bevel Angle, °
0° unidirectional	15 [0.5]	250 [10.0]	1.0 [0.040]	56 [2.25]	1.5 [0.062]	7 or 90
90° unidirectional	25 [1.0]	175 [7.0]	2.0 [0.080]	25 [1.0]	1.5 [0.062]	90
balanced and symmetric	25 [1.0]	250 [10.0]	2.5 [0.100]	emery cloth	—	—
random-discontinuous	25 [1.0]	250 [10.0]	2.5 [0.100]	emery cloth	—	—

**Tabla 3.4: Geometría de los especímenes recomendados para ensayo de tracción según norma ASTM D3039/D3039M-08 [4]**

La longitud calibrada tomada para este ensayo así como para todos los ensayos de tracción realizados a los demás laminados fue de 125 mm ( $L_0 = 125$  mm). A continuación en la Figura 3.3 se muestra un esquema donde la mitad de la diferencia entra la longitud final de 250 mm y la longitud calibrada viene a ser la longitud del espécimen que sujeta cada garra de la máquina de tracción al realizar el ensayo.

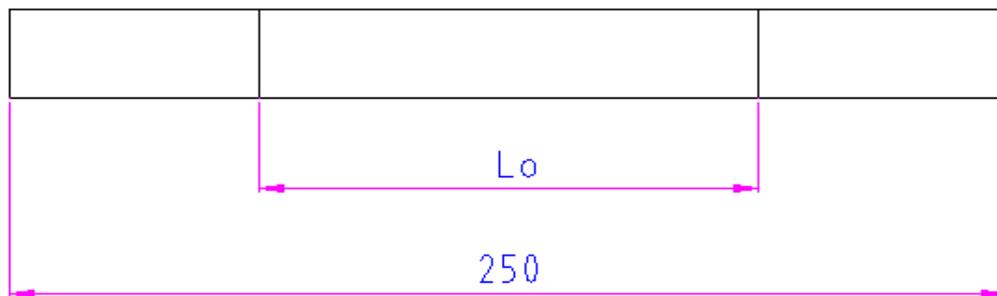


Figura 3.3: Esquema del espécimen a ensayar a tracción

### 3.3.2 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO [45/-45]<sub>2s</sub>

Este ensayo se basa en la norma ASTM D3518/D3518M-13, es similar al ensayo descrito por la norma ASTM D3039/D3039M-08, pero hay que tener algunas consideraciones.

En este ensayo se someterá el laminado [45/-45]<sub>2s</sub> compuesto por 4 láminas de fibra de vidrio a tensión uniaxial. Usando expresiones derivadas de la teoría de laminado, el esfuerzo cortante en los ejes principales del material es directamente calculado del esfuerzo axial aplicado, y la deformación cortante es determinada a partir de la deformación longitudinal y transversal del material. Esta data se usará para crear una

curva de esfuerzo-deformación cortante en el plano. En la Figura 3.4 se muestra un esquema de este ensayo.

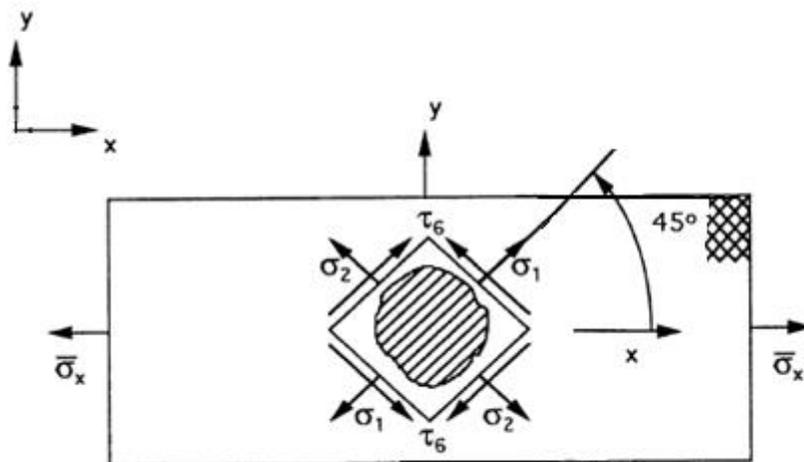


Figura 3.4: Esquema de tracción uniaxial de laminado [45/-45]2s [1]

Se obtendrá los siguientes parámetros de este ensayo:

- $G_{12}$  : Módulo cortante en el plano
- $\tau_6^u$  : Resistencia máxima cortante
- $\gamma_6^u$  : Deformación última cortante

La geometría del espécimen estará de acuerdo a lo recomendado por la norma ASTM D3518/D3518M-13:

- La secuencia del laminado es de [45/-45]2s y las probetas también son rectangulares.

Existen casos para los laminados  $[45/-45]_2s$ , que al ensayarlos a tracción presentan largas deformaciones (más del 5 %), y la norma indica que si estos no fallan antes del 5 % de deformación, en este valor se debe truncar el ensayo y tomar los valores correspondientes a la deformación última (0.05) y resistencia última. Esto se debe debido a que al presentar largas deformaciones la fibra tiende a estirarse mucho, lo cual haría girar las fibras más de  $1.5^\circ$  (es lo mínimo de tolerancia de giro de las fibras que recomienda la norma ASTM D3518/D3518M-13) y la lámina ya no estaría formando un ángulo de  $45 \pm 1.5^\circ$  con el eje donde es traccionado, por lo tanto, los valores hallados no serían confiables y el ensayo no serviría para poder caracterizar según esta norma.

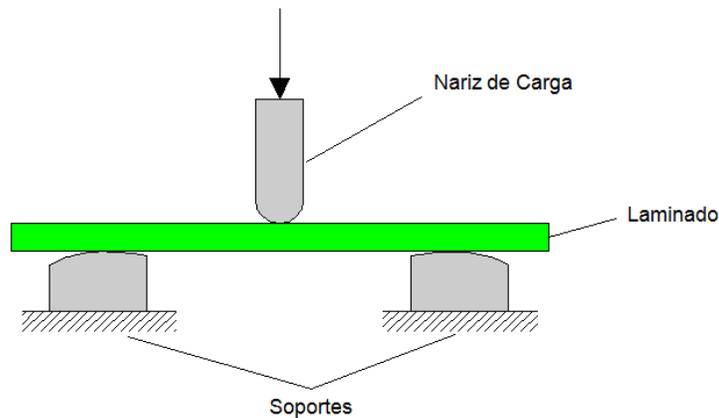
### 3.4 ENSAYOS DE VALIDACIÓN

Para los ensayos de validación se sometieron los laminados  $[0/90/0/90]_s$  y  $[0/90/45/-45]_s$ , cada uno a ensayos de tracción y ensayos de flexión. Para los ensayos de tracción se tomaron las consideraciones que se indicaron anteriormente, solo que para este caso nos basta con hallar el esfuerzo y deformación últimos, ya que estos valores hallados nos ayudará a validar el modelo matemático del material, además las propiedades básicas de la lámina se obtuvieron de los ensayos de caracterización.

#### 3.4.1 ENSAYO DE FLEXIÓN

Este ensayo se realiza según la norma ASTM D790, se realiza este ensayo para hallar las propiedades de flexión (resistencia a la flexión) de plásticos reforzados de fibra, en la forma de barras rectangulares. Sin embargo la resistencia a la flexión no puede ser determinada para aquellos materiales que no se rompen o que no fallan en la superficie exterior del espécimen dentro del 5% de deformación límite de estos métodos.

Este ensayo utiliza un sistema de carga de 3 puntos, es decir el material a ensayar simula a una viga soportada en 2 soportes con una carga aplicada en el centro como se muestra en la Figura 3.5.



**Figura 3.5: Esquema del ensayo de flexión**

Se tomaron las siguientes consideraciones para realizar el ensayo de acuerdo a la norma:

- La distancia entre los soportes fue de 50 mm.
- Una velocidad de deformación de 0.10 mm/mm/min.
- La nariz de carga tuvo un radio de 12 mm y los soportes tuvieron un radio de 15 mm. cada uno.
- La velocidad del ensayo fue alrededor de 11.5 mm/min.
- El espécimen fue deflectado hasta que la ruptura ocurrió en la superficie exterior del espécimen.

La única excepción fue las dimensiones de los especímenes, que estuvo de acuerdo a la norma ISO 14125. Las dimensiones nominales de cada espécimen según esta norma fueron de 100 mm de longitud, 15 mm de ancho y 2 mm de espesor.

Se realizaron los ensayos de tracción y flexión en el laboratorio de materiales de Ingeniería Mecánica PUCP, se utilizaron las máquinas Zwick SP-600 y MFL de 60 toneladas, para realizar los ensayos de tracción y flexión respectivamente.

### 3.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se realizaron tres ensayos de tracción para cada laminado. En la Tabla 3.5 se muestra un resumen con los valores de resistencia y deformaciones últimas adimensionales hallados en los ensayos de tracción.

Tipo de Ensayo	Laminado	Resistencia última (MPa)				Deformación última			
		#1	#2	#3	Promedio	#1	#2	#3	Promedio
Caracterización	[0/90/90/0]	316.80	305.28	298.56	306.88	0.0305	0.0287	0.0284	0.0292
	[45/-45] <sub>2s</sub>	64.28	85.72	87.14	79.05	0.0500	0.0500	0.0500	0.0500
Validación	[0/90/0/90] <sub>s</sub>	373.23	319.85	329.38	340.82	0.0360	0.0337	0.0350	0.0349
	[0/90/45/-45] <sub>s</sub>	255.26	249.63	266.67	257.19	0.0373	0.0373	0.0395	0.0380

**Tabla 3.5: Resultados obtenidos en el ensayo de tracción**

Cabe señalar que al dividir entre dos los valores de resistencia última que se muestran para los tres ensayos del laminado [45/-45]<sub>2s</sub> en la Tabla 3.5, se hallarían los esfuerzos cortantes máximos de la lámina (norma ASTM D3518/D3518M-13).

Se puede apreciar en la Tabla 3.5 que el laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub> presenta una mayor resistencia promedio que el laminado [0/90/90/0], los dos laminados tienen la misma configuración pero el primero posee dos láminas más. Los resultados deberían ser

iguales para estos laminados, y el por qué, es debido a la gran diferencia en los ensayos realizados. El primer ensayo del laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub> presenta un esfuerzo de 373.23 MPa y los dos restantes alrededor de 15 % menos, esto indica que algunos laminados pudieron presentar mayores defectos durante su elaboración y ocasionar esta diferencia notoria entre ensayos. En el laminado [45/-45]<sub>2s</sub> también se presenta esta variabilidad de resultados entre el primer ensayo y los otros dos.

Se realizaron cuatro ensayos de flexión del laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub> y dos para el laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>, se leyeron los datos de fuerza última y de deflexión última de los ensayos realizados en la máquina MFL de 60 toneladas. Los datos obtenidos de estos ensayos se muestran en la Tabla 3.6.

Orientación Laminado	Fuerza última (N)				Deflexión (cm)			
	Ensayo #1	Ensayo #2	Ensayo #3	Ensayo #4	Ensayo #1	Ensayo #2	Ensayo #3	Ensayo #4
[0/90/0/90] <sub>s</sub>	200	150	300	100	1.1	1.15	1.15	0.7
[0/90/45/-45] <sub>s</sub>	250	300	-	-	0.75	0.9	-	-

**Tabla 3.6: Resultados obtenidos en el ensayo de flexión**

Las fotos de las fracturas de todos los especímenes que fueron sometidos a ensayos de tracción y flexión se muestran en anexos.

La máquina Zwick SP-600, donde se realizaron estos ensayos de tracción, proporcionó las gráficas Fuerza (N) vs. Alargamiento (mm) que se pueden observar en anexos. En base a estas gráficas se elaboraron las gráficas Esfuerzo (MPa) vs Deformación para cada laminado, las cuales se muestran a continuación:

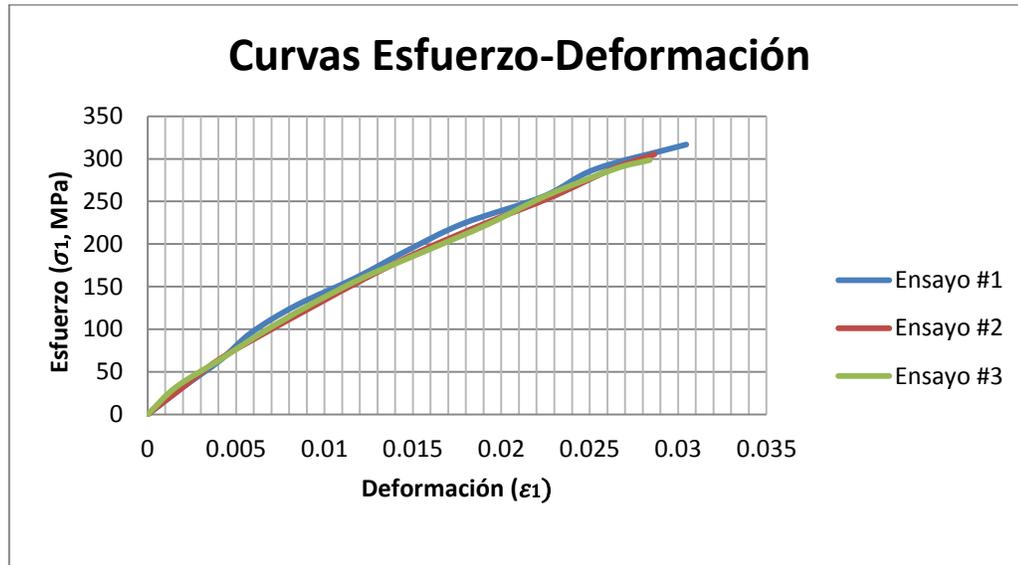


Figura 3.6: Curvas Esfuerzo-Deformación – Caracterización Laminado [0/90/90/0]

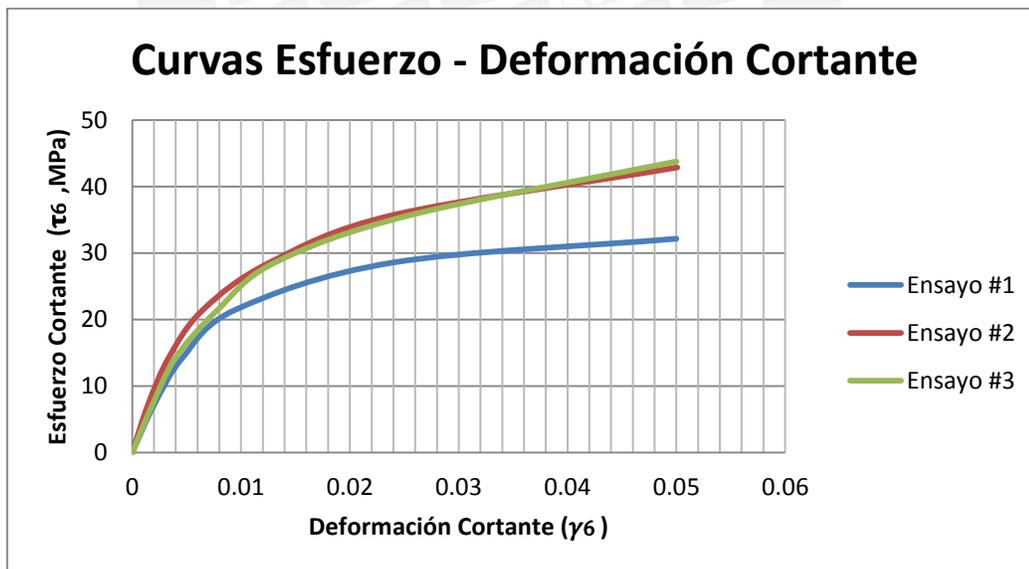


Figura 3.7: Curvas Esfuerzo-Deformación Cortante – Caracterización Laminado [45/-45]₂ₛ

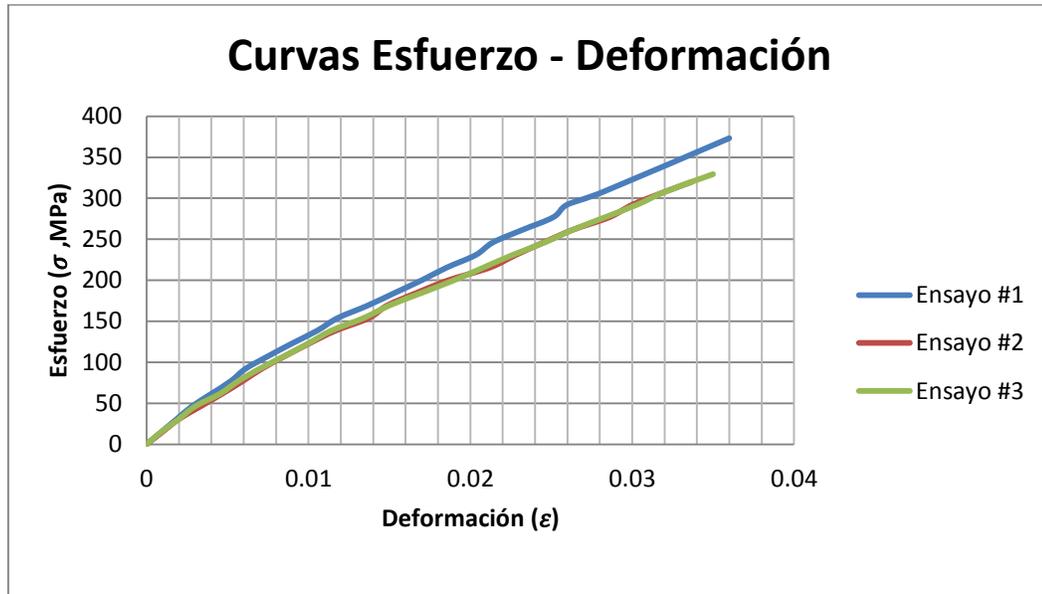


Figura 3.8: Curvas Esfuerzo-Deformación – Validación Laminado [0/90/0/90]s

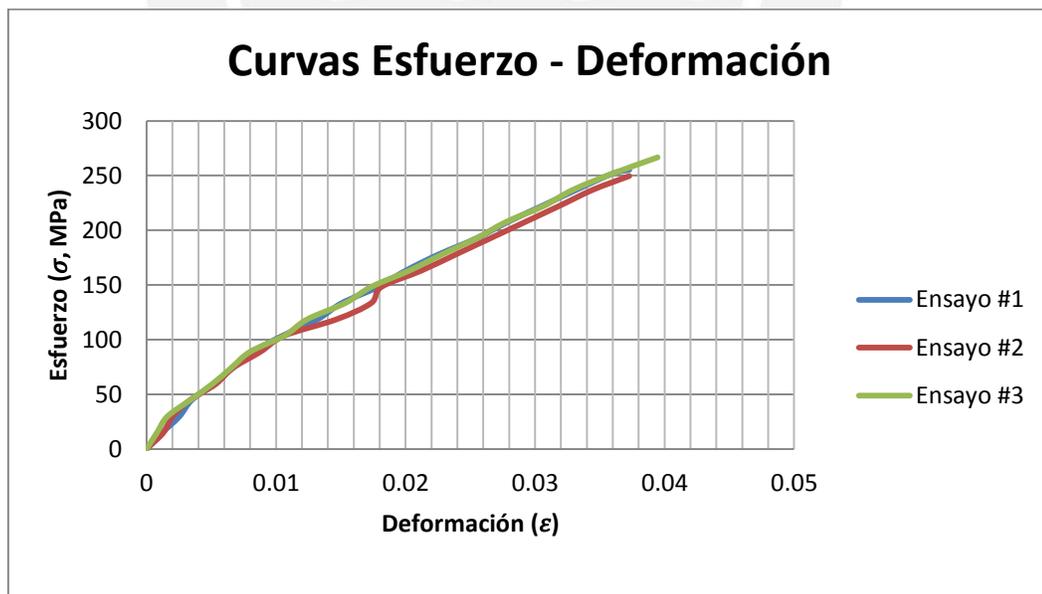


Figura 3.9: Curvas Esfuerzo-Deformación – Validación Laminado [0/90/45/-45]s

Se puede observar en las gráficas anteriores que los laminados orientados en los ejes principales,  $[0/90/90/0]$  y  $[0/90/0/90]_s$  (Figura 3.6 y Figura 3.8 , respectivamente), presentan un comportamiento lineal a la rotura. Estos también presentan la mayor resistencia entre los cuatro laminados. El laminado  $[45/-45]_{2s}$  presenta un comportamiento no lineal, muy parecido al de un material dúctil, como se puede observar en la gráfica correspondiente en los anexos, este laminado sufre una larga deformación promedio del 7%, por lo que según la norma ASTM D3518 se construye la gráfica esfuerzo-deformación cortante que se muestra en la Figura 3.7 hasta el 5% de deformación. La gráfica del laminado quasi-isotrópico  $[0/90/45/-45]_s$  de la Figura 3.9 presenta un comportamiento lineal, es decir las láminas de  $[0/90]$  predominan dentro del laminado, sin embargo presentan también largas deformaciones, esto último debido a las láminas de  $[45/-45]$ .

### 3.5.1 CÁLCULO DE PROPIEDADES DE LA LÁMINA

A continuación se mostrará las propiedades de la lámina promedio obtenidas a partir de las curvas de esfuerzo-deformación de los laminados  $[0/90/90/0]$  y  $[45/-45]_{2s}$  , Figura 3.6 y Figura 3.7, respectivamente.

#### 3.5.1.1 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO $[0/90/90/0]$

##### 3.5.1.1.1 ESFUERZO Y DEFORMACIÓN MÁXIMA

La resistencia última y deformación última promedio que se muestran en la Tabla 3.5 de este laminado serán usadas para poder analizar cada lámina de un determinado laminado, y saber en qué lámina ocurriría primero la falla.

### 3.5.1.1.2 MÓDULO DE ELASTICIDAD

La norma ASTM D3039/D3039M-08, recomienda un rango de deformación que se debe tomar para poder hallar el módulo de elasticidad, la tabla donde muestra esta recomendación se muestra a continuación:

Tensile Chord Modulus Calculation Longitudinal Strain Range		Longitudinal Strain Checkpoint for Bending
Start Point $\mu\epsilon^A$	End Point $\mu\epsilon$	$\mu\epsilon$
1000 <sup>B</sup>	3000	2000

<sup>A</sup> 1000  $\mu\epsilon$  = 0.001 absolute strain.

<sup>B</sup> This strain range is to be contained in the lower half of the stress/strain curve. For materials that fail below 6000  $\mu\epsilon$ , a strain range of 25 to 50 % of ultimate is recommended.

**Tabla 3.7: Rango de deformación para el cálculo del módulo de elasticidad, tomada de la norma ASTM D3039/D3039M-08 [4]**

El módulo de elasticidad se calculó a partir de la curva esfuerzo-deformación de la Figura 3.6 y usando la siguiente ecuación:

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}$$

Dónde:

E: Módulo de Elasticidad ( GPa)

$\Delta\sigma$ : Diferencia del esfuerzo de tracción aplicado entre los dos puntos (0.001 y 0.003) de deformación de la Tabla 3.7, (GPa).

$\Delta\epsilon$ : Diferencia de los dos puntos de deformación de la Tabla 3.7 (0.002).

A continuación se muestra en la Tabla 3.8 los valores del módulo de elasticidad hallados de los tres ensayos realizados al laminado [0/90/90/0], así como el módulo de elasticidad promedio.

Módulo de Elasticidad (GPa)	Ensayo #1	Ensayo #2	Ensayo #3	Promedio
$E_1 = E_2$	15.5	16	15.1	15.53

Tabla 3.8: Módulos de Elasticidad calculados

### 3.5.1.1.3 COEFICIENTE DE POISSON

Como se dijo anteriormente se estimó el coeficiente de poisson, por eso tomando como referencia tablas de la bibliografía ([1]), se asumió el siguiente coeficiente de poisson para el análisis de todos los laminados.

$$\nu_{12} = \nu_{21} = 0.2$$

### 3.5.1.2 ENSAYO DE TRACCIÓN DE LAMINADO [45/-45]<sub>2s</sub>

#### 3.5.1.2.1 ESFUERZO Y DEFORMACIÓN CORTANTE MÁXIMA

Los valores de esfuerzo cortante máximo hallados en este ensayo (Figura 3.7) se muestran en la Tabla 3.9.

Resistencia al Corte (MPa)	Ensayo #1	Ensayo #2	Ensayo #3	Promedio
$\tau_{\epsilon}^{45}$	32.13	42.84	43.55	39.50

Tabla 3.9: Resistencia al corte calculados

Al poseer este laminado largas deformaciones en los tres ensayos realizados, cerca del 7 % en promedio (estas largas deformaciones se pueden apreciar en la curva Fuerza-Alargamiento en los anexos), como se dijo anteriormente por las recomendaciones de la norma ASTM D3518/D3518M-13, y además al despreciar la deformación transversal, la deformación máxima cortante se considera igual al 5% de la deformación longitudinal, es decir en este valor (0.05) , la curva se corta y se toma los valores correspondientes (Figura 3.7).

### 3.5.1.2.2 MÓDULO CORTANTE

La norma ASTM D3518/D3518M-13, recomienda un rango de deformación cortante que se debe tomar para poder hallar el módulo de corte, para este caso se recomienda usar el rango entre 0.002 y 0.006 de deformación cortante. El módulo cortante se calculó a partir de la curva esfuerzo-deformación cortante de la Figura 3.7 y mediante la siguiente ecuación:

$$G_{12} = \frac{\Delta\tau_{12}}{\Delta\gamma_{12}}$$

Dónde:

$G_{12}$ : Módulo cortante (GPa)

$\Delta\tau_{12}$ : Diferencia del esfuerzo cortante entre los puntos de deformación cortante (0.006 y 0.002) , (GPa).

$\Delta\gamma_{12}$ : Diferencia entre los dos puntos de deformación cortante (0.004).

A continuación en la Tabla 3.10 se muestra los valores del módulo cortante hallados de los tres ensayos de tracción realizados, así como el módulo cortante promedio.

Módulo Cortante (GPa)	Ensayo #1	Ensayo #2	Ensayo #3	Promedio
G12	2.71	3.55	3.28	3.18

Tabla 3.10: Módulos de Corte calculados



## CAPÍTULO 4

### ANÁLISIS DE RESULTADOS GENERAL

#### 4.1 RESULTADOS CON EL MODELO MATEMÁTICO

Se realizó el cálculo con el modelo matemático que se explicó en el capítulo 2, para los laminados  $[0/90/0/90]_s$  y  $[0/90/45/-45]_s$  teniendo como parámetros de entrada las propiedades de la lámina halladas experimentalmente. A continuación se mostrará los resultados obtenidos con el modelo matemático para dichos laminados sometidos a tracción y flexión. En los anexos se muestran los cálculos con más detalle que se realizaron para dichos laminados.

Es importante indicar que el sistema de referencia para todos los laminados es como el que se muestra en la siguiente en la Figura 4.1

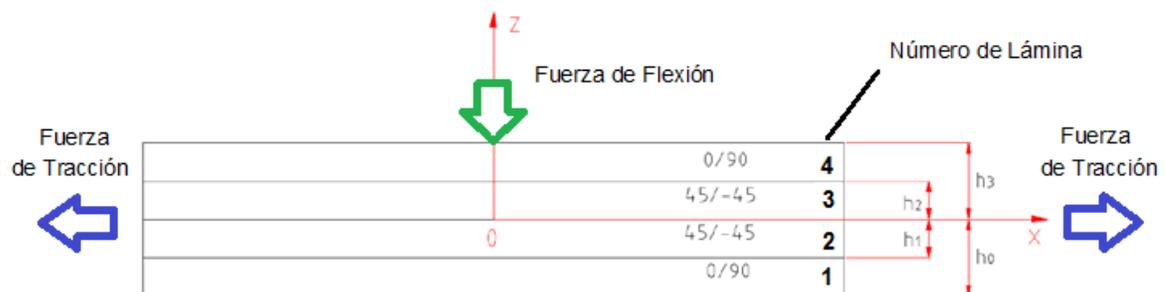


Figura 4.1: Sistema de referencia del laminado

Como se observa en la Figura 4.1 cuando el laminado se somete a tracción la carga es ejercida a lo largo del eje x, y cuando se le somete a flexión, la fuerza se encuentra en la

dirección negativa del eje z en el punto medio del laminado sobre la lámina superior (vale decir la lámina número 4). Las consideraciones son las mismas como se indicó en el primer capítulo, el eje x coincide con las fibras orientadas a 0° y el eje y, con las fibras orientadas a 90°.

#### 4.1.1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA

La matriz de rigidez de la lámina [0/90] y de [45/-45] respecto a sus ejes principales se muestran a continuación.

##### 4.1.1.1 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA [0/90]

Para esta lámina la matriz de rigidez obtenida respecto a los ejes principales coincide con la matriz referida el eje (x, y), es decir las fibras están orientadas a 0° (eje x) y 90° (eje y). Entonces de la ecuación (2.16) se tiene lo siguiente:

$$[Q]_{12}^k = [Q]_{xy}^{[0/90]} = \begin{bmatrix} 16.18 & 3.24 & 0 \\ 3.24 & 16.18 & 0 \\ 0 & 0 & 3.18 \end{bmatrix} GPa$$

(4.1)

Cabe señalar que esta matriz de rigidez hallada en (4.1), es la matriz de rigidez que se usará para cualquier lámina cuando se evalúe el estado de esfuerzos a lo largo de sus direcciones principales, sin importar la orientación que tengan, ya que el efecto de la orientación que puedan sufrir estas láminas está incluido en el cálculo de las deformaciones ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ) a lo largo de la dirección de las fibras.

#### 4.1.1.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA LÁMINA [45/-45]

Debido a que cada lámina que constituye el laminado está hecho del mismo material (misma resina y mismo tipo de fibra de vidrio), la matriz de rigidez de la lámina [0/90] se toma como base para el cálculo de rigidez de la lámina [45/-45]. Sin importar que orientación tenga cada lámina dentro del laminado, ésta siempre tendrá como matriz de rigidez respecto a sus ejes principales la calculada en la ecuación (4.1). Obviamente las cosas cambian cuando se calcula la matriz de rigidez transformada respecto a los ejes del laminado (ejes x, y), y es ahí donde se puede notar la influencia de la orientación de las láminas dentro de un laminado. La matriz de rigidez transformada de la lámina [45/-45] respecto a los ejes de referencia del laminado (x, y) usando la ecuación (2.17) y tomando como matriz de rigidez a lo largo de los ejes principales la matriz de la ecuación (2.16), se muestra en (4.2).

$$[Q]_{xy}^{[45/-45]} = \begin{bmatrix} 12.89 & 6.53 & 0 \\ 6.53 & 12.89 & 0 \\ 0 & 0 & 6.47 \end{bmatrix} GPa$$

(4.2)

### 4.1.2 MATRICES DE RIGIDEZ DEL LAMINADO

#### 4.1.2.1 MATRICES DE RIGIDEZ A TRACCIÓN

##### 4.1.2.1.1 LAMINADO [0/90/45/-45]<sub>s</sub>

La matriz  $[A]_{xy}$  de este laminado usando la ecuación (2.18) se muestra en (4.3).

$$[A]_{xy} = \begin{bmatrix} 39.24 & 13.18 & 0 \\ 13.18 & 39.24 & 0 \\ 0 & 0 & 13.03 \end{bmatrix} kN/mm$$

(4.3)

La matriz  $[B]_{xy}$  para este y para todos los laminados analizados en el presente trabajo es nula.

$$[B]_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} kN$$

(4.4)

Usando la ecuación (2.18), la matriz  $[D]_{xy}$  queda de la siguiente forma:

$$[D]_{xy} = \begin{bmatrix} 25.86 & 5.98 & 0 \\ 5.98 & 25.86 & 0 \\ 0 & 0 & 5.89 \end{bmatrix} kN.mm$$

(4.5)

Al ser la matriz  $[B]_{xy}$  nula, la matriz  $[a]_{xy}$ , depende solamente de la matriz inversa de la ecuación (4.3) para este y todos los demás laminados analizados en el presente trabajo.

Entonces según la ecuación (2.19) tiene:

$$[a]_{xy} = [A]_{xy}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.8728 (E - 08) & -9.64904 (E - 09) & 1.35452(E - 21) \\ -9.64904 (E - 09) & 2.8728 (E - 08) & -1.35452(E - 21) \\ 1.35452(E - 21) & -1.35452(E - 21) & 7.67541 (E - 08) \end{bmatrix} m/N$$

(4.6)

#### 4.1.2.1.2 LAMINADO [0/90/0/90]<sub>s</sub>

Usando la ecuación (2.18) para este laminado la matriz  $[A]_{xy}$  queda:

$$[A]_{xy} = \begin{bmatrix} 42.06 & 8.41 & 0 \\ 8.41 & 42.06 & 0 \\ 0 & 0 & 8.27 \end{bmatrix} kN/mm \quad (4.7)$$

La matriz  $[D]_{xy}$  según la ecuación (2.18) queda de la siguiente manera:

$$[D]_{xy} = \begin{bmatrix} 23.69 & 4.74 & 0 \\ 4.74 & 23.69 & 0 \\ 0 & 0 & 4.66 \end{bmatrix} kN.mm \quad (4.8)$$

La matriz  $[a]_{xy}$  usando la ecuación (2.19) queda de la siguiente manera:

$$[a]_{xy} = [A]_{xy}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.4766 (E - 08) & -4.95319 (E - 09) & 0 \\ -4.95319 (E - 09) & 2.4766 (E - 08) & 0 \\ 0 & 0 & 1.20948 (E - 07) \end{bmatrix} m/N \quad (4.9)$$

#### 4.1.2.2 MATRICES DE RIGIDEZ A FLEXIÓN

Las matrices de rigidez a la flexión son distintas a las mostradas anteriormente bajo tracción, debido a que el espesor de las probetas de los laminados ensayados a flexión fue distinto a los ensayados a tracción.

#### 4.1.2.2.1 LAMINADO [0/90/45/-45]<sub>s</sub>

La matriz  $[A]_{xy}$  usando la ecuación (2.18) queda de la siguiente manera:

$$[A]_{xy} = \begin{bmatrix} 29.06 & 9.76 & 0 \\ 9.76 & 29.06 & 0 \\ 0 & 0 & 9.65 \end{bmatrix} kN/mm \quad (4.10)$$

La matriz  $[D]_{xy}$  usando la ecuación (2.18) queda de la siguiente forma:

$$[D]_{xy} = \begin{bmatrix} 10.51 & 2.43 & 0 \\ 2.43 & 10.51 & 0 \\ 0 & 0 & 2.39 \end{bmatrix} kN.mm \quad (4.11)$$

Al ser la matriz  $[B]_{xy}$  nula, la matriz  $[d]_{xy}$  depende solamente de la matriz inversa de la ecuación (4.11). Entonces según la ecuación (2.19) tenemos:

$$[d]_{xy} = [D]_{xy}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1005 & -0.0232 & 0 \\ -0.0232 & 0.1005 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4184 \end{bmatrix} 1/Nm \quad (4.12)$$

#### 4.1.2.2.2 LAMINADO [0/90/0/90]<sub>s</sub>

La matriz  $[A]_{xy}$  según la ecuación (2.18) queda de la siguiente manera:

$$[A]_{xy} = \begin{bmatrix} 32.35 & 6.47 & 0 \\ 6.47 & 32.35 & 0 \\ 0 & 0 & 6.36 \end{bmatrix} kN/mm \quad (4.13)$$

La matriz  $[D]_{xy}$  según la ecuación (2.18) queda de la siguiente forma:

$$[D]_{xy} = \begin{bmatrix} 10.78 & 2.16 & 0 \\ 2.16 & 10.78 & 0 \\ 0 & 0 & 2.12 \end{bmatrix} kN.mm$$

(4.14)

La matriz  $[d]_{xy}$  depende solamente de la matriz inversa de la ecuación (4.14). Entonces según la ecuación (2.19) se tiene:

$$[d]_{xy} = [D]_{xy}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0966 & -0.0194 & 0 \\ -0.0194 & 0.0966 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4717 \end{bmatrix} 1/Nm$$

(4.15)

### 4.1.3 DEFORMACIONES DEL LAMINADO

#### 4.1.3.1 DEFORMACIONES DEBIDO A LA TRACCIÓN

Las deformaciones halladas a continuación se generan a partir de la carga crítica promedio que se halló experimentalmente.

##### 4.1.3.1.1 LAMINADO [0/90/45/-45]<sub>s</sub>

Usando la ecuación (2.20), las deformaciones del plano de referencia solo dependen de la matriz  $[a]_{xy}$  hallada en (4.6) y la carga  $[N_x]$  máxima hallada experimentalmente, por lo tanto las deformaciones del plano de referencia de este laminado son:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix}_{[0/90/45/-45]_s} = \begin{bmatrix} 0.01995 \\ -0.00670 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.16)

Al no estar sometido a momentos el espécimen descrito en este caso, no existe curvaturas en el laminado, por lo tanto la ecuación (2.22) queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix}_{[0/90/45/-45]_s} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_{[0/90]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_{[45/-45]} = \begin{bmatrix} 0.01995 \\ -0.00670 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.17)

La ecuación (4.17) indica que las deformaciones que sufre el plano de referencia del laminado es igual a las deformaciones que sufren las cuatro láminas que lo constituyen (el par de [0/90] y el par de [45/-45]), referentes al sistema de ejes (x, y).

Cabe señalar que la presencia de curvaturas ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ ) en el laminado, las cuales podrían ocasionar que el material falle por delaminación, no solo dependen de los momentos que puedan presentarse en un laminado. Se observa en la ecuación (2.21) que las cargas estáticas están relacionadas con la matriz inversa  $[c]_{xy}$  pero esta matriz depende de la matriz  $[B]_{xy}$  según la ecuación (2.19), por lo tanto al ser esta matriz nula, la matriz inversa  $[c]_{xy}$  también lo es, librando de la presencia de curvaturas al laminado.

Como se dijo anteriormente para el par de láminas [0/90] del laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>, la orientación de las fibras de vidrio coinciden con los ejes del sistema de referencia del laminado (x, y), por lo tanto se cumple que la deformación hallada en la ecuación (4.17)

es igual a la deformación que presenta este par de láminas respecto a sus ejes principales (ecuación 4.18), debido a que la matriz  $[T]$  y la deformación cortante del plano de referencia ( $\gamma_s$ ) son nulas la ecuación (2.23) queda de la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix}_{[0/90/45/-45]_s} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_{[0/90]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}_{[0/90]} = \begin{bmatrix} 0.01995 \\ -0.00670 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Para hallar las deformaciones a lo largo de los ejes principales (1,2) del par de láminas [45/-45] del laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>, se debe rotar estas deformaciones, por lo tanto en este caso la matriz  $[T]$  no es nula y se obtiene siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}_{[45/-45]} = \begin{bmatrix} 0.0066 \\ 0.0066 \\ -0.0266 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

#### 4.1.3.1.2 LAMINADO [0/90/0/90]<sub>s</sub>

Las deformaciones del plano de referencia solo dependen de la matriz  $[a]_{xy}$  hallada en (4.9) y la carga  $[N_x]$  máxima hallada experimentalmente de este laminado. Usando la ecuación (2.20) las deformaciones del plano de referencia de este laminado son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix}_{[0/90/0/90]_s} = \begin{bmatrix} 0.0219 \\ -0.0044 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.20)

Las deformaciones del plano de referencia del laminado halladas en la ecuación (4.20) son las deformaciones que sufre cada lámina en los ejes (x, y) y al estar cada una de estas orientadas [0/90], coinciden con los ejes principales de cada lámina, por lo tanto estas deformaciones halladas son las deformaciones a lo largo de los ejes principales de cada lámina como se muestra en la ecuación 4.21.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}_{[0/90]} = \begin{bmatrix} 0.0219 \\ -0.0044 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.21)

#### 4.1.3.2 DEFORMACIONES DEBIDO A LA FLEXIÓN

Para los dos laminados ([0/90/45/-45]s y [0/90/0/90]s) se analizaron las deformaciones bajo la carga máxima promedio hallada experimentalmente.

##### 4.1.3.2.1 LAMINADO [0/90/45/-45]s

Para este caso al no haber ninguna fuerza en el plano y simplemente el espécimen está sometido a momento flector en el eje x (causada por la fuerza aplicada en el ensayo de flexión), este laminado presentará curvaturas. Las deformaciones del plano de referencia del laminado según la ecuación (2.20) son nulas.

Las curvaturas halladas para este laminado usando la ecuación (2.21) solo depende de la matriz  $[d]_{xy}$  que se muestra en (4.12) y el momento  $[M_x]$  (calculado a partir de la fuerza máxima promedio hallada experimentalmente) , por lo tanto las curvaturas se presentan en (4.22)

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23.04 \\ 5.33 \\ 0 \end{bmatrix} 1/m \quad (4.22)$$

Se halla las deformaciones máximas de cada lámina usando la ecuación (2.22), las cuales dependen solo de las curvaturas halladas en (4.22) y la coordenada “z” , la cual toma el valor de la cota superior de cada lámina (al tomar este valor se halla la deformación máxima en cada lámina) respecto al plano medio del laminado. Para las láminas [0/90] del laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub> las deformaciones principales ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_6$ ) son iguales a las deformaciones calculadas mediante la ecuación (2.22), para el caso de las láminas [45/-45] las deformaciones halladas en (2.22) se multiplican por la matriz  $[T]$  según la ecuación (2.23) (similar cálculo al efectuado en tracción).

Los resultados de deformaciones máximas a lo largo de los ejes principales en cada lámina se muestran en la Tabla 4.1:

Deformaciones	Lámina [0/90] <sub>1</sub>	Lámina [45/-45] <sub>2</sub>	Lámina [45/-45] <sub>3</sub>	Lámina [0/90] <sub>4</sub>
$\varepsilon_1$	0.0230	0.0044	-0.0044	-0.0230
$\varepsilon_2$	-0.0053	0.0044	-0.0044	0.0053
$\gamma_6$	0.0000	-0.0142	0.0142	0.0000

**Tabla 4.1: Deformaciones máximas a lo largo de los ejes principales de cada lámina - Laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>**

Cabe señalar que en este caso que la lámina con el subíndice 1, se encuentra en la parte inferior y la lámina con el subíndice 4 en la parte superior, como se muestra en la Figura 4.1.

#### 4.1.3.2.2 LAMINADO [0/90/0/90]<sub>s</sub>

En este laminado se realiza el mismo procedimiento descrito para el laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub> y as curvaturas halladas para el laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub> se presentan en (4.23)

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.10 \\ 3.03 \\ 0 \end{bmatrix} 1/m \quad (4.23)$$

Los resultados de deformaciones máximas a lo largo de los ejes principales en cada lámina se muestran en la Tabla 4.2:

Deformaciones	Lámina [0/90] <sub>1</sub>	Lámina [0/90] <sub>2</sub>	Lámina [0/90] <sub>3</sub>	Lámina [0/90] <sub>4</sub>
$\varepsilon_1$	0.0151	0.0076	-0.0076	-0.0151
$\varepsilon_2$	-0.0030	-0.0015	0.0015	0.0030
$\gamma_6$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

**Tabla 4.2: Deformaciones máximas a lo largo de los ejes principales de cada lámina - Laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub>**

#### 4.1.4 ESFUERZOS EN EL LAMINADO

Se debe calcular ahora el estado de esfuerzos a lo largo de los ejes principales que se presentan en cada lámina los laminados [0/90/0/90]<sub>s</sub> y [0/90/45/-45]<sub>s</sub> bajo tracción y

flexión. Usando la ecuación (2.24) y considerando para cada estado de esfuerzos a ser hallado la matriz de rigidez en las direcciones principales (esta matriz se usa para todos los cálculos de esfuerzo en todas las láminas de los laminados analizados por tracción y flexión) hallada en (4.1) y las deformaciones principales halladas para cada lámina ya sea por tracción ó flexión, los resultados se muestran a continuación.

#### 4.1.4.1 ESFUERZOS POR TRACCIÓN

##### 4.1.4.1.1 LAMINADO [0/90/45/-45]<sub>s</sub>

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}_{[0/90]} = \begin{bmatrix} 301.03 \\ -43.85 \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

(4.24)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}_{[45/-45]} = \begin{bmatrix} 128.59 \\ 128.59 \\ -84.74 \end{bmatrix} MPa$$

(4.25)

##### 4.1.4.1.2 LAMINADO [0/90/0/90]<sub>s</sub>

Cada estado de esfuerzos a lo largo de los ejes principales será el mismo para cada lámina del laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub>.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}_{[0/90]} = \begin{bmatrix} 340.82 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

(4.26)

#### 4.1.4.2 ESFUERZOS POR FLEXIÓN

##### 4.1.4.2.1 LAMINADO [0/90/45/-45]<sub>s</sub>

Los esfuerzos máximos a lo largo de los ejes principales en cada lámina se presentan en la Tabla 4.3

Esfuerzos Principales (MPa)	Lámina [0/90] <sub>1</sub>	Lámina [45/-45] <sub>2</sub>	Lámina [45/-45] <sub>3</sub>	Lámina [0/90] <sub>4</sub>
$\sigma_1$	355.42	85.95	-85.95	-355.42
$\sigma_2$	-11.63	85.95	-85.95	11.63
$\tau_6$	0	-45.10	45.10	0

Tabla 4.3: Esfuerzos máximos a lo largo de los ejes principales de cada lámina - Laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>

##### 4.1.4.2.2 LAMINADO [0/90/0/90]<sub>s</sub>

Los esfuerzos máximos a lo largo de los ejes principales de cada lámina se presentan en la Tabla 4.4

Esfuerzos Principales (MPa)	Lámina [0/90] <sub>1</sub>	Lámina [0/90] <sub>2</sub>	Lámina [0/90] <sub>3</sub>	Lámina [0/90] <sub>4</sub>
$\sigma_1$	234.50	117.25	-117.25	-234.50
$\sigma_2$	-0.09	-0.05	0.05	0.09
$\tau_6$	0	0	0	0

Tabla 4.4: Esfuerzos máximos a lo largo de los ejes principales de cada lámina - Laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub>

## 4.2 DIAGRAMA POLAR

Un diagrama muy importante el cual ayudará a entender mejor el comportamiento que tiene la “lámina” orientada a distintas direcciones, es el diagrama polar. El diagrama polar que se muestra en la Figura 4.2, es del laminado  $[0/90/90/0]$ . Este laminado bidireccional es la “lámina” base de los laminados  $[0/90/0/90]_s$  y  $[0/90/45/-45]_s$ , por el cual es importante conocer su comportamiento. Este diagrama nos muestra los valores que adquiere la matriz  $[A]_{xy}$  de dicho laminado cuando este está orientado a distintos ángulos. Las unidades de la matriz  $[A]_{xy}$  que expresa el siguiente diagrama están en kN/mm, y la matriz  $[A]_{xy}$  del laminado  $[0/90/0/90]$  calculada por el modelo matemático es la siguiente:

$$[A]_{xy} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.23 & 4.05 & 0 \\ 4.05 & 20.23 & 0 \\ 0 & 0 & 4.29 \end{bmatrix} \text{ kN/mm}$$

(4.27)

En el diagrama polar de la Figura 4.2 es importante para predecir el comportamiento del laminado, se puede apreciar en este que el componente  $A_{11}$  de la matriz  $[A]_{xy}$  asume los mismos valores que la componente  $A_{22}$ . También se observa lo similares que son los valores de  $A_{12}$  y  $A_{66}$ . Se observa que los valores de la matriz de (4.27) son iguales a los valores que muestra el diagrama en los puntos  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

Llevando el análisis, cuando este laminado está sometido a tracción lo largo del eje x con la ayuda de este diagrama polar se puede observar lo siguiente. En  $0^\circ$  ( $\sigma_1$ ) toma un valor máximo,  $\sigma_2 = 0$  y el esfuerzo cortante ( $\tau_6$ ) es nulo. Luego, a medida que la orientación aumenta de  $[0-45]^\circ$   $A_{11}$  y  $A_{22}$  disminuyen, esto indica que  $\sigma_1$  disminuye y el esfuerzo ( $\sigma_2$ ) aumenta. Para este mismo rango  $A_{12}$  y  $A_{66}$  aumentan, por lo tanto el esfuerzo

cortante ( $\tau_6$ ) también aumenta, teniendo un valor máximo en  $45^\circ$  (esto indicaría una posible falla por cortante en las láminas), en este ángulo los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son iguales pero de menor magnitud que el valor máximo de  $\sigma_1$  en  $0^\circ$ . Para el rango de  $[45-90]^\circ$   $A_{11}$  y  $A_{22}$  aumentan, haciendo que el esfuerzo  $\sigma_1$  disminuya hasta el valor de 0 y logrando que  $\sigma_2$  tenga un valor máximo en  $90^\circ$ .  $A_{12}$  y  $A_{66}$  disminuyen en este rango, por lo tanto el esfuerzo cortante presente en cada lámina disminuye hasta el valor de cero.

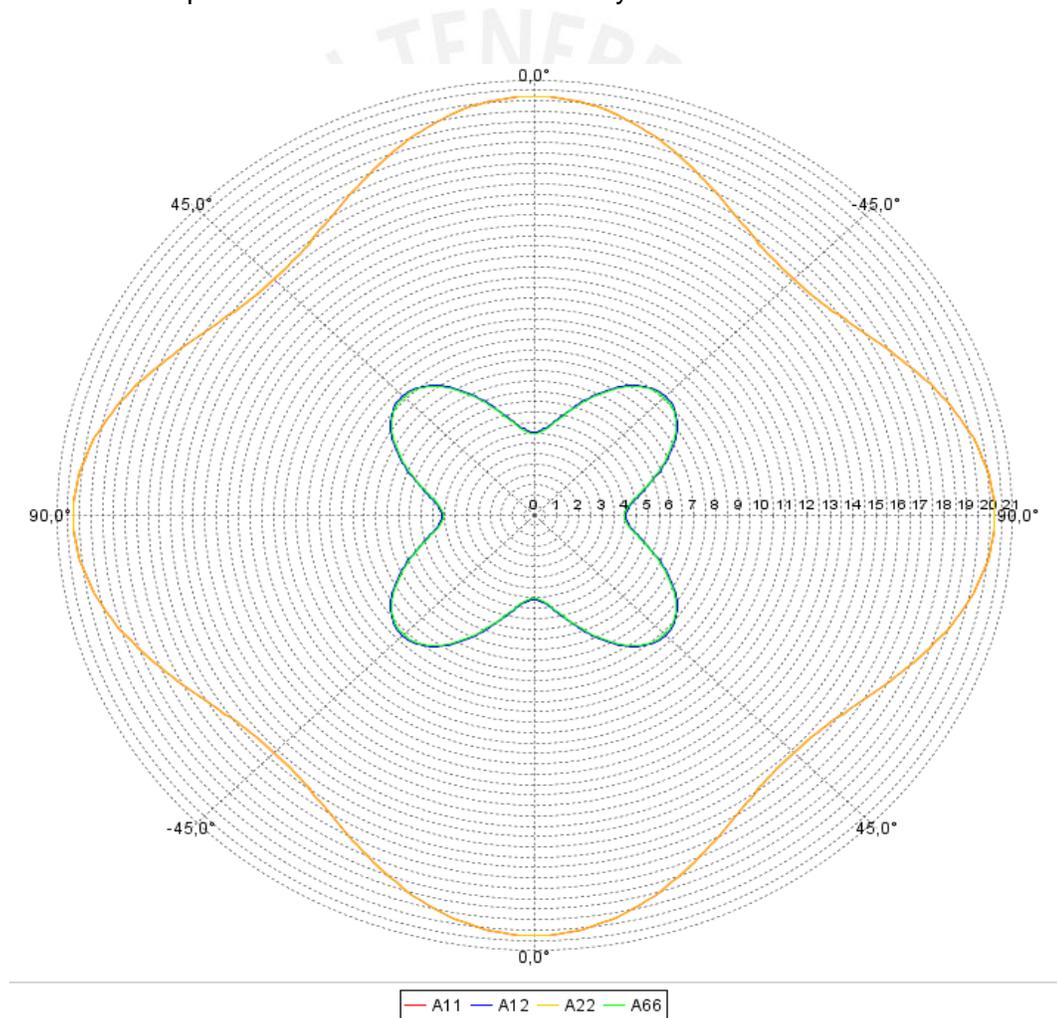


Figura 4.2: Diagrama Polar del laminado [0/90/90/0]

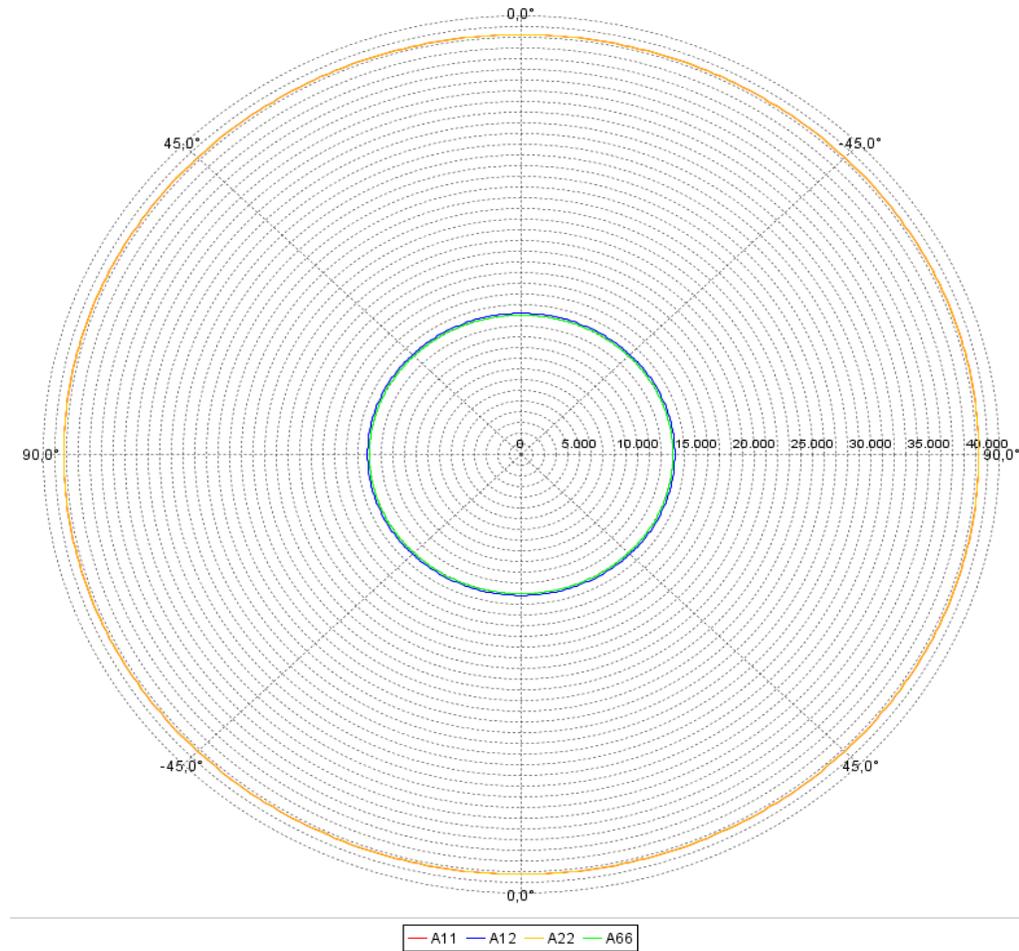


Figura 4.3: Diagrama polar del laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>

En la Figura 4.3 se observa el diagrama polar del laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>, y esta es la razón por la cual se le denomina quasi-isotrópico, ya que como se observa las componentes de la matriz de rigidez  $[A]$  del laminado son independientes de la orientación. Esto se debe a que las matrices de rigidez  $[Q]_{xy}$  de cada lámina a pesar de variar con la orientación, dejan la matriz  $[A]$  constante.

### 4.3 ANÁLISIS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Se modelaron los laminados de [0/90/45/-45]<sub>s</sub> y [0/90/0/90]<sub>s</sub> ensayados a tracción y flexión mediante elementos finitos con el software ANSYS Mechanical APDL 14.5. Estos tuvieron como parámetros de entrada las propiedades básicas de la lámina halladas experimentalmente ( $E_1 = E_2$ ;  $G_{12}$ ), el coeficiente de poisson ( $\nu_{12} = \nu_{21}$ ) y las dimensiones de los laminados que fueron ensayados. La carga a las que fueron sometidos fueron los mismos valores con los que se analizó en el modelo matemático. Se muestra en detalle los resultados obtenidos de cada lámina de los laminados [0/90/45/-45]<sub>s</sub> y [0/90/0/90]<sub>s</sub> bajo tracción y flexión en Anexos.

### 4.4 RESUMEN GENERAL DE RESULTADOS

Se resume a continuación los resultados que se obtuvieron mediante el modelo matemático, el método de elementos finitos y los ensayos experimentales para los laminados [0/90/0/90]<sub>s</sub> y [0/90/45/-45]<sub>s</sub> cuando fueron sometidos a tracción y flexión. Los resultados obtenidos en las gráficas del modelo matemático y el método de elementos finitos para cada laminado fueron obtenidos bajo la fuerza máxima promedio hallada experimentalmente.

En las Figuras 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 todas las curvas mostradas están referidas a los esfuerzos y deformaciones en los ejes principales de cada lámina. Las curvas de validación mostradas en las Figuras 4.4 y 4.5 son de los laminados validados y solo se muestran para indicar algunas observaciones. Estas no se comparan con las curvas del modelo matemático y el método de elementos finitos.

En las Figuras 4.4, 4.5, 4.7 y 4.8, la primera curva denominada como “Ensayo de caracterización (tracción) – Laminado [0/90/90/0]” es la curva hallada de los ensayos de caracterización del laminado [0/90/90/0]. Esta curva indica la respuesta bajo tracción de la lámina bidireccional [0/90] (la base de todos los laminados) a lo largo de su eje principal  $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ , la cual se usa para comparar el esfuerzo-deformación normal con las curvas obtenidas mediante el modelo matemático y el método de elementos finitos de cada lámina (las cuales están referidas a lo largo de su eje principal  $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ ) de los laminados [0/90/0/90]s y [0/90/45/-45]s. En la Figura 4.6 y 4.9 la curva denominada como “Ensayo de caracterización (tracción) – Laminado [45/-45]2s” es la curva obtenida de los ensayos de caracterización del laminado [45/-45]2s, la cual permite comparar la respuesta cortante  $(\tau_6, \gamma_6)$  de cada lámina de los laminados validados.

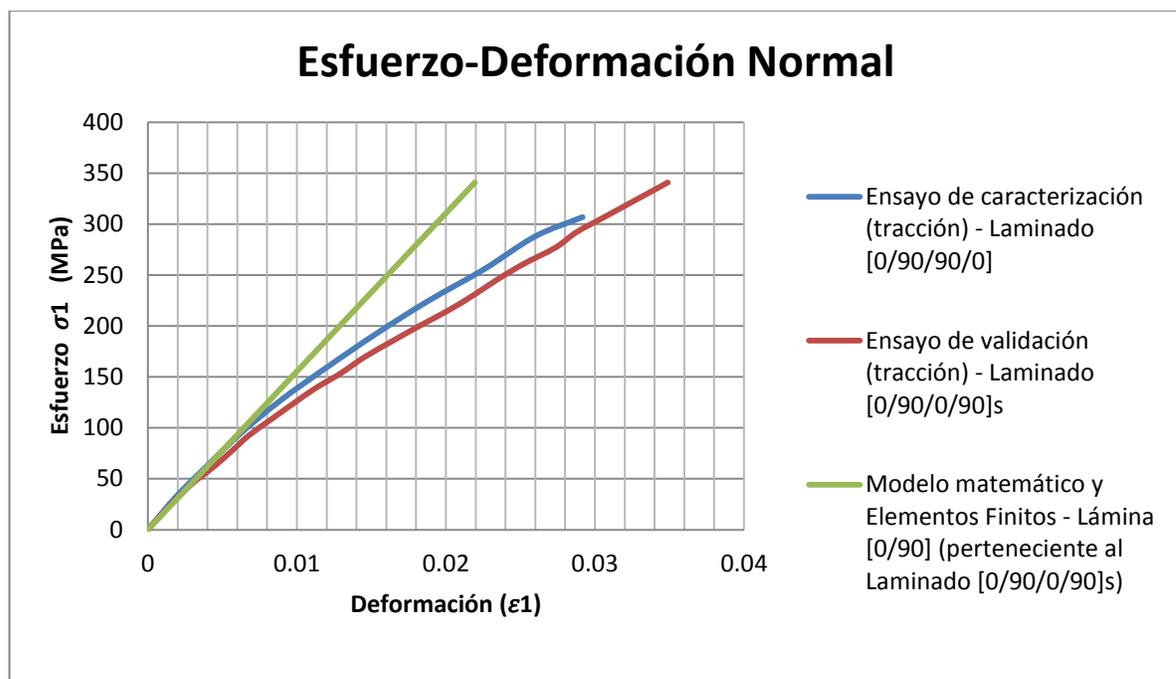
Cabe señalar que los últimos valores de esfuerzo y deformación de las curvas de caracterización de esfuerzo-deformación normal (los cuales son los valores máximos que debería soportar cada lámina) se comparan con los últimos valores de esfuerzo y deformación normal de cada lámina de los laminados validados (las cuales se hallan por el modelo matemático y elementos finitos), para poder predecir en cual lámina ocurre la posible falla. Lo mismo se realiza con la curva de caracterización cortante (laminado [45/-45]2s) si se quiere comparar el esfuerzo-deformación cortante con los últimos valores respectivos de cada lámina. El análisis de los últimos valores se realiza respecto al esfuerzo  $(\sigma_1)$  debido a que muestra valores más cercanos entre las curvas del modelo matemático y las de caracterización (la diferencia de las deformaciones  $\varepsilon_1$  y  $\gamma_6$  es grande).

#### 4.4.1 LAMINADOS ENSAYADOS A TRACCIÓN

La curva del método de elementos finitos de cada lámina de los laminados validados bajo tracción es idéntica a la del modelo matemático por lo cual en las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6 se muestran como una sola. La curva de los ensayos de validación de los laminados [0/90/0/90]s y [0/90/45/-45]s que se muestran en las Figuras 4.4 y 4.5, son las respuestas de estos laminados bajo tracción.

Se puede observar en la Figura 4.4 que la curva de validación del laminado [0/90/0/90]s difiere de la curva del ensayo de caracterización del laminado [0/90/90/0], estas curvas deberían coincidir pero se observa que el aumento de láminas en un laminado genera mayores perturbaciones, como el mayor deslizamiento entre láminas, por lo que el proceso de fabricación del laminado toma mucha más importancia e influye en el comportamiento mecánico de este. La curva del modelo matemático de la lámina [0/90] (las cuatro láminas [0/90] del laminado [0/90/0/90]s tienen el mismo comportamiento) coincide linealmente (uno de los supuestos de este modelo es que el esfuerzo y deformación varían linealmente) con la curva del ensayo de caracterización hasta 24% de la deformación máxima de la curva de caracterización. El valor de deformación ( $\epsilon_1$ ) donde la curva de caracterización cambia de pendiente es de 0.007 esto indica que el modelo matemático y el método de elementos finitos puede predecir el comportamiento exactamente igual solo hasta 24% de la curva de caracterización, después este material se deforma más rápido y esto se puede observar en el cambio de pendiente de las curvas de caracterización y validación. Las curvas de caracterización, validación y del modelo matemático coinciden en el rango de deformación [0.001-0.003] y como se explicó en el capítulo 3 este es el rango que se utilizó para hallar las propiedades básicas de la lámina,

sin embargo se utiliza la curva de caracterización (está más cerca al comportamiento mecánico según el modelo matemático) para comparar los últimos valores de esfuerzo y deformación con las curvas del modelo matemático y elementos finitos en todas las láminas analizadas.



**Figura 4.4: Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo tracción – Resultados Laminado [0/90/0/90]s**

En la Tabla 4.5 se muestra el resumen de los últimos valores de las curvas del modelo matemático y elementos finitos y el porcentaje que difieren respecto a la curva de caracterización de la Figura 4.4. Se puede apreciar que el valor de esfuerzo normal a lo largo del eje principal ( $\sigma_1$ ) del material es 11% mayor al último valor de esfuerzo de la curva de caracterización, es decir, según el modelo matemático y el método de elementos

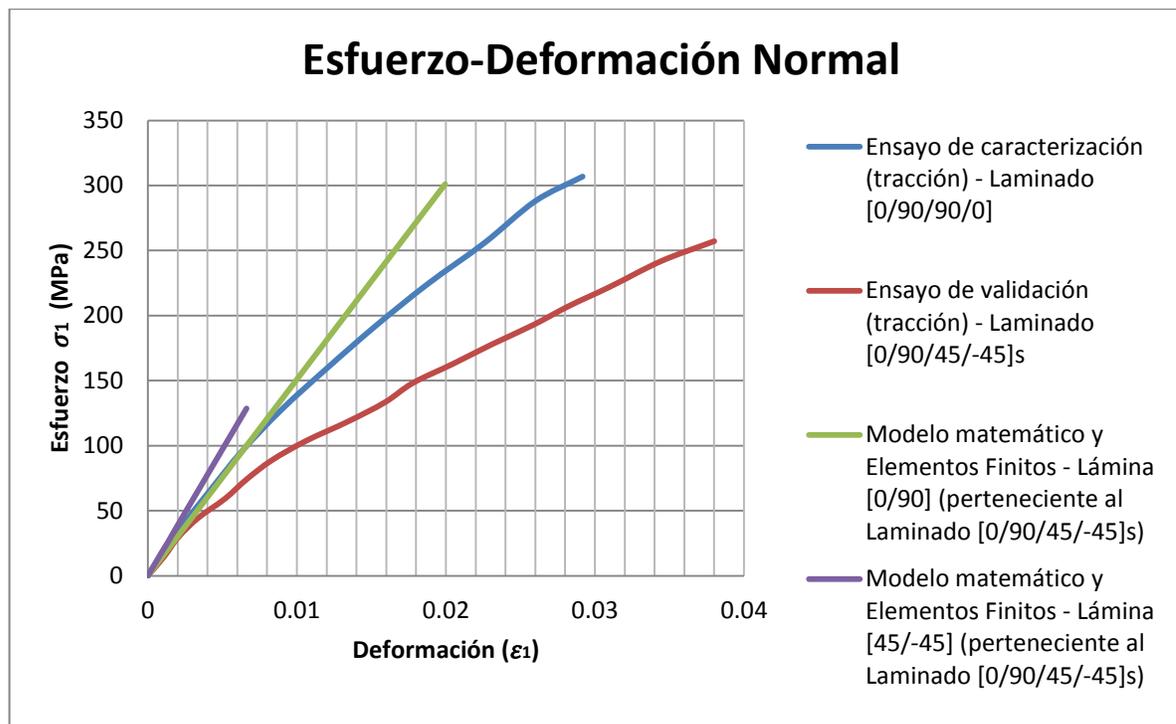
finitos el laminado [0/90/0/90]s fallaría con una carga menor a la hallada experimental. En este caso el modelo matemático es conservador respecto al esfuerzo ( $\sigma_1$ ).

Propiedades	Modelo Matemático & Elementos Finitos	Ensayo de caracterización	Diferencia respecto a la caracterización (%)
Esfuerzo ( $\sigma_1$ , MPa)	340.82	306.88	11
Deformación ( $\varepsilon_1$ )	0.0219	0.0292	25

**Tabla 4.5: Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90] – Laminado [0/90/0/90]s bajo tracción**

En la Figura 4.5 se observa que la curva de caracterización tiene una mayor aproximación en las láminas de [0/90] que en las láminas de [45/-45]. Se aprecia que las curvas del modelo matemático de las láminas [0/90] y [45/-45] son lineales pero tienen diferentes pendientes, esto se debe a la orientación de las láminas de [45/-45] con respecto a las de [0/90]. La carga de tracción ejercida a lo largo del eje x coincide con el eje principal en la lámina [0/90] generando mayor esfuerzo ( $\sigma_1$ ) en esta y en menor magnitud en la lámina [45/-45] debido a su orientación, por este motivo la presencia de esfuerzos y deformaciones normales en los ejes principales en las láminas de [45/-45] no es crítica. La curva de validación del laminado [0/90/45/-45]s difiere mucho más que la curva de caracterización (la curva de validación del laminado [0/90/0/90]s con la curva de caracterización tenía una ligera diferencia como se muestra en la Figura 4.4), esto se debe a la presencia de las láminas de [45/-45] las cuales logran un comportamiento menos lineal, debido a que en esta lámina los valores de esfuerzo ( $\sigma_1$ ) y deformación ( $\varepsilon_1$ )

son iguales a los valores de esfuerzo y deformación transversales, ( $\sigma_2$ ) y ( $\varepsilon_2$ ) respectivamente. Esto indica que la lámina [45/-45] se estira a lo largo de sus ejes principales (1 y 2) bajo tracción, ocasionando largas deformaciones en el laminado [0/90/45/-45].



**Figura 4.5: Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo tracción–  
Resultados Laminado [0/90/45/-45]s**

En la Tabla 4.6 se muestra los últimos valores de esfuerzo ( $\sigma_1$ ) y deformación ( $\varepsilon_1$ ) en las direcciones principales de las láminas [0/90] y la diferencia de estos valores con los últimos valores de la curva de caracterización de la Figura 4.5. Se aprecia que el último valor de esfuerzo del modelo matemático y el método de elementos finitos en la lámina

[0/90] es menor en un 2% que el valor de esfuerzo máximo de la curva de caracterización. Esto indica que el laminado [0/90/45/-45]s no fallaría por esfuerzo normal ( $\sigma_1$ ) en las láminas de [0/90] según el modelo matemático y el método de elementos finitos.

Propiedades	Modelo Matemático & Elementos Finitos	Ensayo de caracterización	Diferencia respecto a la caracterización (%)
Esfuerzo ( $\sigma_1$ , MPa)	301	306.88	2
Deformación ( $\varepsilon_1$ )	0.0199	0.0292	32

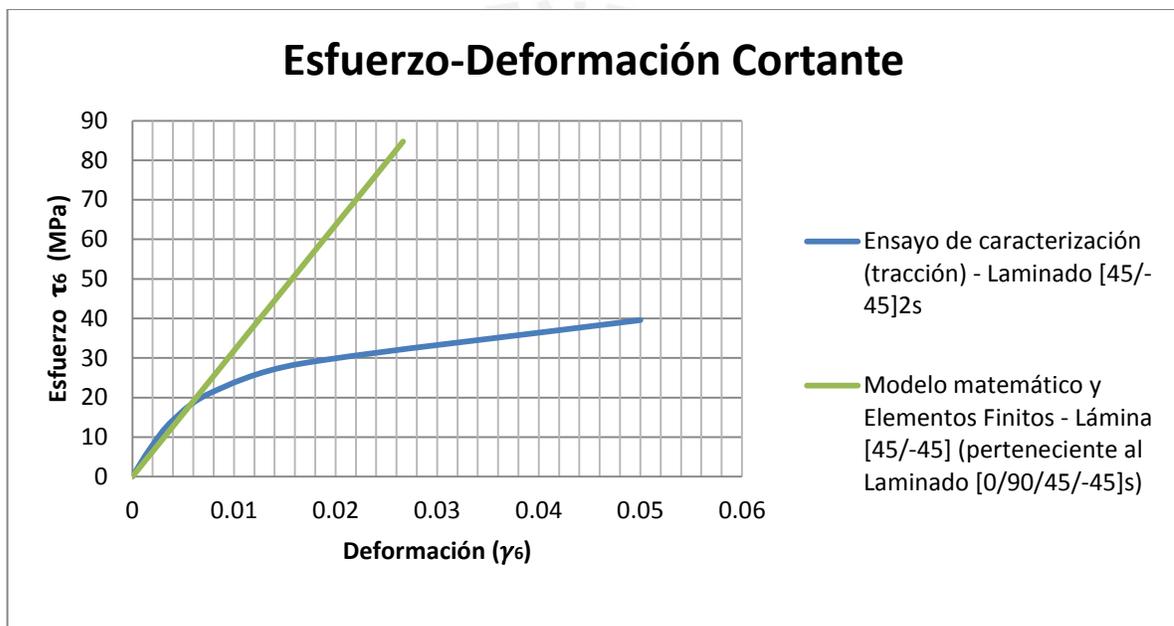
Tabla 4.6: Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90] – Laminado [0/90/45/-45]s bajo tracción

En la Tabla 4.7 se muestra los últimos valores de esfuerzo ( $\sigma_1$ ) y deformación ( $\varepsilon_1$ ) en las direcciones principales de las láminas [45/-45] y la diferencia de estos valores con los últimos valores de la curva de caracterización de la Figura 4.5. Se aprecia que la respuesta de la lámina [45/-45] ante el esfuerzo normal es mucho menor a diferencia de las láminas [0/90] por los motivos que se dijo anteriormente.

Propiedades	Modelo Matemático & Elementos Finitos	Ensayo de caracterización	Diferencia respecto a la caracterización (%)
Esfuerzo ( $\sigma_1 = \sigma_2$ , MPa)	128.59	306.88	58
Deformación ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ )	0.0066	0.0292	77

Tabla 4.7: Últimos valores esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [45/-45] – Laminado [0/90/45/-45]s bajo tracción

En la Figura 4.6 se puede apreciar que para evaluar esfuerzo – deformaciones cortantes, la predicción con el modelo matemático predice una pequeña parte del comportamiento total del material, esto debido a que las láminas de [45/-45] tienen un comportamiento menos lineal que las láminas de [0/90], lo cual dificulta la predicción con el modelo.



**Figura 4.6: Curvas de Esfuerzo-Deformación Cortante bajo tracción– Resultados Lámina [45/-45] - Laminado [0/90/45/-45]s**

En la Tabla 4.8 se muestra los últimos valores de esfuerzo ( $\tau_6$ ) y deformación ( $\gamma_6$ ) cortante en la lámina [45/-45] y la diferencia de estos valores con los últimos valores de la curva de caracterización de la Figura 4.6. Se puede apreciar que el modelo matemático y el método de elementos finitos predice que bajo la fuerza máxima crítica promedio hallada

experimentalmente del laminado [0/90/45/-45]s la lámina [45/-45] presenta un esfuerzo cortante último de un poco más del doble que el valor máximo de la curva de caracterización cortante (permisible). Esto indica que el modelo matemático y el método de elementos finitos predice que el laminado [0/90/45/-45]s sometido a tracción fallaría por esfuerzo cortante en la lámina [45/-45] con una carga global (carga sobre el laminado [0/90/45/-45]s) menor a la hallada experimentalmente. Esto es conservador ya que por lo hallado en el ensayo experimental (el detalle de rotura del laminado se puede ver en anexos) del laminado [0/90/45/-45]s, a pesar de haber fallado en las láminas de [45/-45] por cortante, este seguiría soportando carga hasta fallar en las últimas láminas de [0/90].

Propiedades	Modelo Matemático & Elementos Finitos	Ensayo de caracterización	Diferencia respecto a la caracterización (%)
Esfuerzo cortante ( $\tau_6$ , MPa)	84.74	39.3	115
Deformación ( $\gamma_6$ )	0.0266	0.05	47

**Tabla 4.8: Últimos valores de esfuerzo y deformación cortante de la Lámina [45/-45] – Laminado [0/90/45/-45]s bajo tracción**

En la Tabla 4.9 se muestra en resumen el porcentaje de deformación de la curva de caracterización que coincide con la curva del modelo matemático de cada lámina de los laminados analizados bajo tracción. Esto indica hasta qué porcentaje de la curva de caracterización respectiva, el modelo matemático y el método de elementos finitos permite predecir el comportamiento real de cada lámina.

Laminado	Lámina	Deformación de la curva de caracterización (%)
[0/90/0/90]s	[0/90]	24
[0/90/45/-45]s	[0/90]	27.4
	[45/-45]	6.85
	[45/-45] (cortante)	12

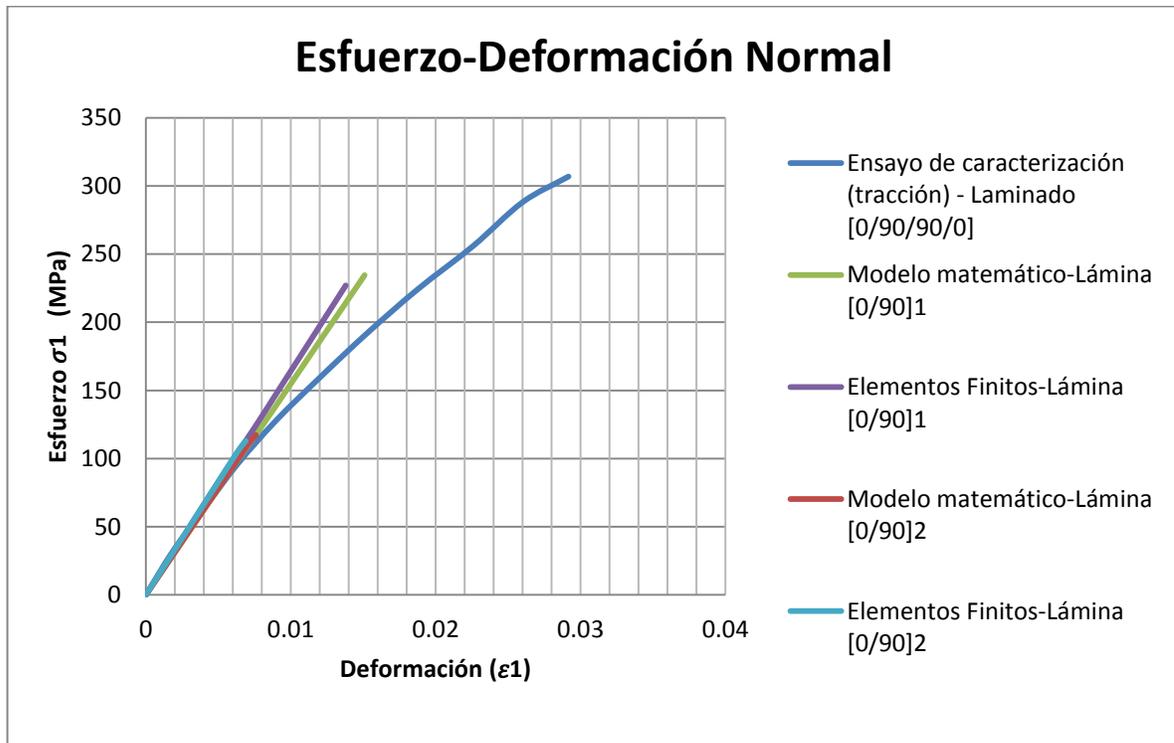
**Tabla 4.9: Porcentaje coincidente de deformación de la curva de caracterización con las curvas del modelo matemático de los laminados bajo tracción**

#### 4.4.2 LAMINADOS ENSAYADOS A FLEXIÓN

Los resultados presentados a continuación son solo del primer par de láminas inferiores de los laminados [0/90/0/90]s y [0/90/45/-45]s, ya que al someter estos laminados a flexión el par de láminas inferiores están bajo tracción y el otro par de láminas bajo compresión. Los resultados de esfuerzo y deformación normal y cortante del par de láminas superiores son de misma magnitud pero de signo contrario a los valores de las láminas inferiores que se presentarán a continuación.

En la Figura 4.7 se puede observar que ahora las curvas del modelo matemático difieren de las curvas de elementos finitos de las láminas [0/90]<sub>1</sub> y [0/90]<sub>2</sub> (en los ensayos de tracción las curvas del modelo matemático y elementos finitos coincidían para todas las láminas). Se observa que la lámina [0/90]<sub>2</sub> presenta un bajo esfuerzo ( $\sigma_1$ ) y su comportamiento ante la carga crítica promedio hallada experimentalmente coincide mayormente con la curva de caracterización (esta soporta menos carga comparada con la lámina [0/90]<sub>1</sub> debido a que está más cerca del plano medio del laminado, láminas más

alejadas del plano medio del laminado sufren mayor esfuerzo ( $\sigma_1$ ) bajo flexión (ecuación 2.22)).



**Figura 4.7: Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo flexión – Resultados Laminado [0/90/0/90]s**

En la Tabla 4.10 se muestra el error máximo del esfuerzo ( $\sigma_1$ ) y deformación normal ( $\epsilon_1$ ) en las direcciones principales del método de elementos finitos respecto al modelo matemático de las láminas del laminado [0/90/0/90]s sometido a flexión. Este error puede ser debido a que no se definieron del todo bien las condiciones de borde o la distribución de carga, sin embargo los resultados son coherentes.

Lámina	Propiedades	Modelo Matemático	Elementos Finitos	Error (%)
[0/90] <sub>1</sub>	$\sigma_1$ (MPa)	235	227	3.4
	$\varepsilon_1$	0.0151	0.0138	8.6
[0/90] <sub>2</sub>	$\sigma_1$ (MPa)	117.25	113	3.6
	$\varepsilon_1$	0.0076	0.0069	9.2

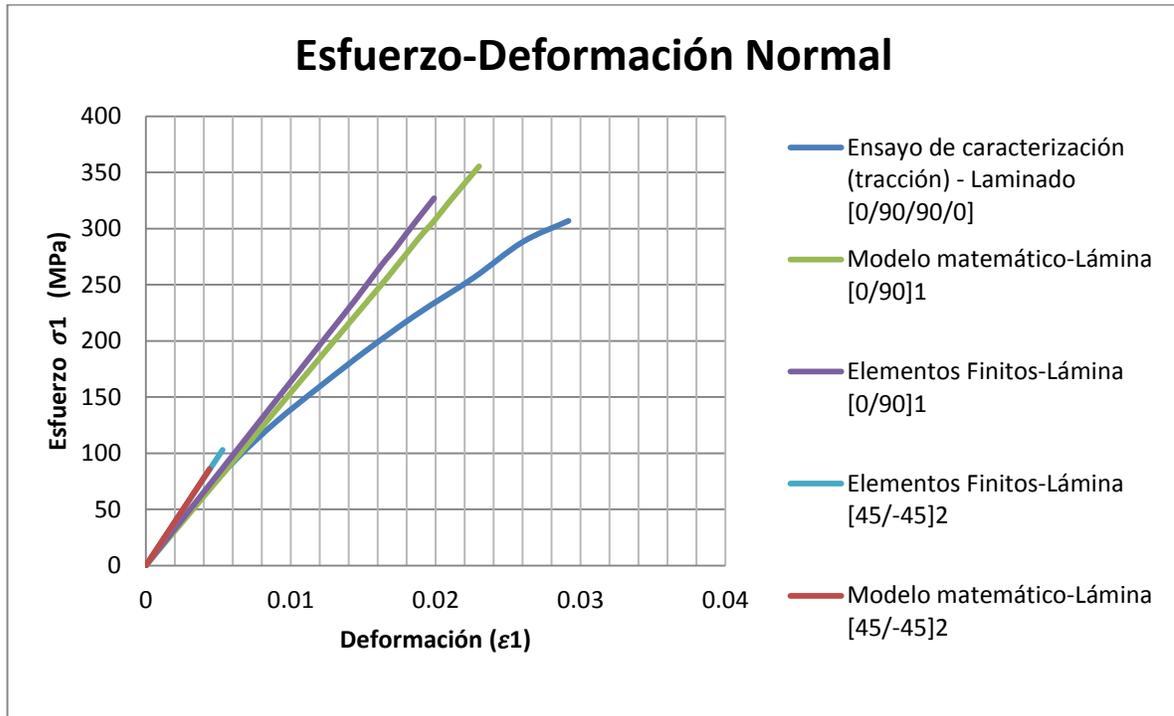
**Tabla 4.10: Error máximo del método de elementos finitos respecto al modelo matemático de cada lámina del laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub> bajo flexión**

En la Tabla 4.11 se muestra la diferencia que hay entre el último valor de esfuerzo y deformación normal de la curva del modelo matemático de la lámina crítica [0/90]<sub>1</sub> y la curva de caracterización. Se puede apreciar que bajo la fuerza máxima promedio hallada en el ensayo de flexión sobre el laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub>, el esfuerzo ( $\sigma_1$ ) presente en la lámina crítica [0/90]<sub>1</sub> es menor al valor máximo de esfuerzo de la curva de caracterización (permisible), por lo tanto el modelo matemático predice que el laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub> fallaría con una carga mayor a la carga máxima promedio hallada experimentalmente bajo flexión. Este error ocurre debido a que el modelo matemático desprecia todo parámetro relativo al eje z (eje donde se aplica la carga en el ensayo de flexión), por lo tanto si se consideran estos valores, la caracterización para flexión sería diferente a la de tracción debido a que requeriría parámetros adicionales a los hallados en el presente trabajo tales como el módulo de elasticidad fuera del plano ( $E_3$ ), el módulo cortante ( $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ) y el coeficiente de poisson ( $\nu_{13}$ ), lo cual podría permitir obtener resultados más cercanos al comportamiento real del material.

Propiedades	Modelo Matemático - Lámina [0/90]1	Ensayo de caracterización	Diferencia respecto a la caracterización (%)
Esfuerzo ( $\sigma_1$ , MPa)	235	306.88	23.4
Deformación ( $\varepsilon_1$ )	0.0151	0.0292	48.3

**Tabla 4.11: Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90]1 – Laminado [0/90/0/90]s bajo flexión**

En la Figura 4.8 se observa que las curvas del modelo matemático y elementos finitos también difieren en las láminas del laminado [0/90/45/-45]s. La curva del modelo matemático de la lámina [45/-45]<sub>2</sub> está menos cargada y posee una pendiente distinta a la de la lámina [0/90]. A diferencia de la Figura 4.7, se puede observar que el último valor de esfuerzo ( $\sigma_1$ ) de las curvas del modelo matemático y elementos finitos de la lámina crítica [0/90]1 supera al último valor de esfuerzo ( $\sigma_1$ ) de la curva de caracterización.



**Figura 4.8: Curvas de Esfuerzo-Deformación Normal en los ejes principales bajo flexión – Resultados Laminado [0/90/45/-45]s**

En la Figura 4.9 se observa que el comportamiento según el modelo matemático y el método de elementos finitos de la lámina [45/-45]2 también es lineal como en el caso de tracción ante el esfuerzo y deformación cortante.

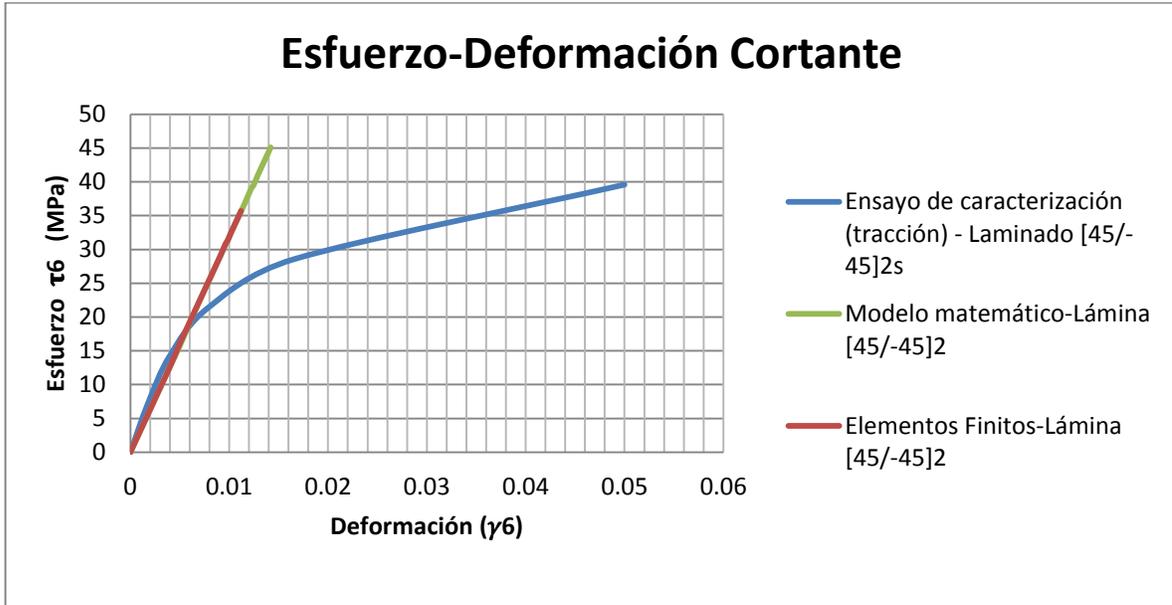


Figura 4.9: Curvas de Esfuerzo-Deformación Cortante bajo flexión – Resultados Lámina [45/-45] - Laminado [0/90/45/-45]s

En la Tabla 4.12 se muestra el error máximo del esfuerzo ( $\sigma_1$ ), deformación normal ( $\varepsilon_1$ ), esfuerzo cortante ( $\tau_6$ ) y deformación cortante ( $\gamma_6$ ) del método de elementos finitos respecto al modelo matemático de las láminas del laminado [0/90/45/-45]s bajo flexión.

Lámina	Propiedades	Modelo Matemático	Elementos Finitos	Error (%)
[0/90]₁	$\sigma_1$ (MPa)	355	327	7.9
	$\varepsilon_1$	0.023	0.0199	13.5
[45/-45]₂	$\sigma_1$ (MPa)	85.95	103	19.8
	$\varepsilon_1$	0.0044	0.0053	20.5
	$\tau_6$ (MPa)	45.1	35.7	20.8
	$\gamma_6$	0.0142	0.0112	21.12

Tabla 4.12: Error máximo del método de elementos finitos respecto al modelo matemático de cada lámina del laminado [0/90/45/-45]s bajo flexión

En la Tabla 4.13 se muestra la diferencia que hay entre el último valor de esfuerzo y deformación normal en la dirección principal de la curva del modelo matemático de la lámina crítica [0/90]<sub>1</sub> y la curva de caracterización. En este caso a diferencia del laminado [0/90/0/90]<sub>s</sub> el modelo matemático se comporta conservador, este indica que el laminado bajo flexión fallaría con una carga menor a la hallada experimentalmente.

Propiedades	Modelo Matemático - Lámina [0/90] <sub>1</sub>	Ensayo de caracterización	Diferencia respecto a la caracterización (%)
Esfuerzo ( $\sigma_1$ , MPa)	355	306.88	15.7
Deformación ( $\varepsilon_1$ )	0.023	0.0292	21.2

**Tabla 4.13: Últimos valores de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales de la Lámina [0/90]<sub>1</sub> – Laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub> bajo flexión**

En la Tabla 4.14 se muestra los últimos valores de esfuerzo y deformación cortante en la lámina [45/-45]<sub>2</sub> bajo flexión y la diferencia de estos valores con los últimos valores de la curva de caracterización de la Figura 4.9. El laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub> bajo flexión presenta, como en el caso de tracción, un esfuerzo cortante crítico en la lámina [45/-45]<sub>2</sub>.

Propiedades	Modelo Matemático	Ensayo de caracterización	Diferencia respecto a la caracterización (%)
Esfuerzo cortante ( $\tau_6$ , MPa)	45.1	39.3	14.8
Deformación ( $\gamma_6$ )	0.0142	0.05	71.6

**Tabla 4.14: Últimos valores de esfuerzo y deformación cortante de la Lámina [45/-45]<sub>2</sub> – Laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub> bajo flexión**

Laminado	Lámina	Deformación de la curva de caracterización (%)
[0/90/0/90]s	[0/90]1	22
	[0/90]2	22
[0/90/45/-45]s	[0/90]1	22
	[45/-45]2	6.2
	[45/-45]2 (cortante)	12

**Tabla 4.15: Porcentaje coincidente de deformación de la curva de caracterización con las curvas del modelo matemático de los laminados bajo flexión**

En la Tabla 4.15 se muestra en resumen el porcentaje de deformación de la curva de caracterización que coincide con la curva del modelo matemático de cada lámina de los laminados analizados bajo flexión. Esto indica hasta qué porcentaje de la curva de caracterización respectiva el modelo matemático permite predecir el comportamiento real de cada lámina. Se observa que los porcentajes hallados en las láminas de [0/90] son similares a los hallados en tracción en la Tabla 4.9. En las láminas de [45/-45] presentan un porcentaje pequeño y similar también a los de tracción.

## OBSERVACIONES Y RECOMENDACIONES

1. La elaboración de las probetas se realizaron de la mejor forma posible, siguiendo las recomendaciones de las normas mencionadas en el presente trabajo, sin embargo la mayoría de las probetas fabricadas tanto para los ensayos de tracción como de flexión presentaban burbujas al término del curado, sin embargo al observar los resultados obtenidos, esta presencia de burbujas pudo haber sido crítica en los ensayos de flexión debido a la diferencia de los valores hallados y en el ensayo de tracción del laminado [45/-45]2s, el primer ensayo efectuado a este laminado presente una fractura debido a esfuerzo cortante pero el segundo y tercer ensayo presentan una mayor resistencia mecánica, como se observa en la curva de esfuerzo-deformación cortante de la Figura 3.7.
2. Al elaborarse las configuraciones distintas de los laminados, se observó que los tejidos cortados no estaban estrictamente orientados a 90 grados ó 45 grados, la fibra presentaba un comportamiento curvilíneo lo cual indicaba una ligera desviación de la orientación ideal, sin embargo este factor no fue crítico debido a que las normas internacionales recomiendan una tolerancia de hasta 5 °.
3. Al realizarse los ensayos de tracción en el laboratorio de materiales de Ingeniería Mecánica PUCP se observó que la fractura de todos los laminados se presentaban dentro de la longitud calibrada (125 mm), es decir la fractura no ocurrió en la zona donde las garras de la máquina sujetaban y aplicaban fuerza al material.
4. El radio de la nariz de carga que se utilizó en los ensayos de flexión fue ligeramente mayor (5 mm más) al recomendado por la norma ASTM D790.

## CONCLUSIONES

1. La curva de caracterización de esfuerzo y deformación normal en los ejes principales (laminado [0/90/90/0]) presenta un comportamiento lineal coincidente hasta 22 % de su deformación máxima con las curvas de esfuerzo-deformación normal (en los ejes principales) del modelo matemático de las láminas [0/90] y hasta 6.2 % de su deformación máxima con las curvas de esfuerzo-deformación normal (en los ejes principales) del modelo matemático de las láminas [45/-45] de los laminados validados ([0/90/0/90]s y [0/90/45/-45]s) bajo tracción y flexión. Esto se presenta debido a que a partir de los porcentajes coincidentes mencionados la lámina se deforma más rápido y cambia el sentido inicial de su curva de esfuerzo-deformación, por lo que el modelo matemático y el método de elementos finitos ya no puede predecir el comportamiento real de cada lámina, dados que estos métodos se basan en un comportamiento esfuerzo-deformación lineal.

2. La curva de caracterización de esfuerzo y deformación cortante (laminado [45/-45]2s) presenta un comportamiento lineal coincidente hasta 12 % de su deformación máxima con las curvas de esfuerzo y deformación cortante del modelo matemático de las láminas [45/-45] de los laminados validados ([0/90/0/90]s y [0/90/45/-45]s) bajo tracción y flexión. El porcentaje de aproximación del modelo matemático y el método de elementos finitos es menor en estas láminas, debido a que el comportamiento de las láminas [45/-45] bajo tracción, a diferencia de la lámina [0/90], presenta un comportamiento parabólico marcado, el cual genera estas diferencias.

3. Las curvas de esfuerzo-deformación normal y cortante del modelo matemático y el método de elementos finitos de todas las láminas de los laminados analizados bajo

tracción y flexión presentan un comportamiento lineal, el cual no refleja en su totalidad el verdadero comportamiento de cada lámina.

4. La diferencia del último valor de la deformación en el eje principal ( $\varepsilon_1$ ) y la deformación cortante ( $\gamma_6$ ) de la curva del modelo matemático y el método de elementos finitos de las láminas de los laminados validados bajo tracción es grande con respecto al valor máximo de deformación de las curvas de caracterización, sin embargo con respecto al esfuerzo normal en la dirección principal ( $\sigma_1$ ) la diferencia entre los últimos valores de las láminas críticas de los laminados analizados bajo tracción es corta y logra ser como máximo de 11% en la lámina [0/90] del laminado [0/90/0/90]s. Esto indica que a pesar de diferir bastante en deformaciones ( $\varepsilon_1$ ) en el eje principal, comparar el último valor de esfuerzo ( $\sigma_1$ ) en el eje principal de cada lámina de la curva del modelo matemático y el método de elementos finitos con la curva de caracterización de los laminados bajo tracción es útil para poder predecir el comportamiento del material.

5. A pesar de la diferencia que existe entre cada curva de caracterización con las curvas del modelo matemático y el método de elementos finitos de cada lámina de los laminados validados, la predicción del comportamiento del material es cercano de lo que se halló experimentalmente en el caso de tracción.

6. Los resultados obtenidos mediante el modelo matemático y el método de elementos finitos para los laminados ([0/90/0/90]s y [0/90/45/-45]s) sometidos a flexión difieren más, a diferencia en el caso de tracción, de las curvas de caracterización (experimental). Esto se debe a que los laminados estuvieron sometidos a una carga fuera del plano ( $F_z$ ), por lo que para este caso se necesitaría hallar las propiedades de la lámina relacionadas con el eje z (3) (módulo de elasticidad fuera del plano ( $E_3$ ), módulo cortantes ( $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ), y el

módulo de poisson  $\nu_{13}$ ), las cuales son nulas para el modelo matemático del presente trabajo y despreciadas en el cálculo por el método de elementos finitos, generando mayor error en la predicción del comportamiento del material.

7. Los resultados obtenidos mediante elementos finitos para los laminados ([0/90/0/90]s y [0/90/45/-45]s) sometidos a tracción son iguales que los resultados por el modelo matemático. Para el caso de estos laminados sometidos a flexión, los resultados mediante elementos finitos difieren como máximo en 20% de los resultados por el modelo matemático debido a que al aplicar el método de elementos finitos se tiene que discretizar el elemento analizado, definir las restricciones de desplazamiento y la localización específica de la carga, lo cual si no se hace correctamente origina estas diferencias, sin embargo, la base del comportamiento se mantiene en este caso ya que la presencia de curvaturas en el laminado origina que cada lámina se comporte de manera diferente y hace que el par inferior de los laminados ensayados se comporten a tracción y el par superior a compresión.

8. El esfuerzo cortante en el plano ( $\tau_6$ ) llegó a ser un poco más del que del valor permisible (último valor de esfuerzo en la curva de caracterización cortante) en la lámina de [45/-45] del laminado [0/90/45/-45]s cuando fue sometido a tracción con la misma fuerza máxima (aplicada al laminado) hallada experimentalmente; para el caso de este mismo laminado sometido a flexión, se presentó según el modelo matemático en la lámina de [45/-45] un valor 14.8 % mayor al valor último de esfuerzo cortante en la curva de caracterización(corte). El modelo matemático se presenta conservador respecto al esfuerzo cortante en el laminado [0/90/45/-45]s.

9. En los ensayos de tracción y flexión el esfuerzo cortante toma un rol crítico (en la lámina de [45/-45]) en el laminado [0/90/45/-45]s, por otra parte los laminados que solo estén conformados por láminas de [0/90] sometidos a tracción a lo largo de su eje principal (eje 1), estas láminas se deforman de igual manera, presentan el mismo esfuerzo normal ( $\sigma_1$ ) y esfuerzo cortante ( $\tau_6$ ) nulo (en el caso del laminado [0/90/0/90]s bajo flexión el esfuerzo cortante también es nulo pero el esfuerzo normal ( $\sigma_1$ ) varía en cada lámina debido a la presencia de curvaturas) .

10. La influencia del coeficiente de poisson es despreciable en los resultados obtenidos mediante el modelo matemático y el método de elementos finitos de los laminados analizados, ya que las láminas que conforman los laminados presentan módulos de elasticidad iguales ( $E_1 = E_2$ ) y valores de poisson iguales ( $\nu_{12} = \nu_{21}$ ), esto origina que el producto de la matriz  $[Q]_{12}$  y las deformaciones en las direcciones principales de cada lámina se mantenga constante (los esfuerzos en las direcciones principales son inalterables), a pesar de que cada componente de la matriz  $[Q]_{12}$  ó de deformaciones en las direcciones principales varíen .

11. La técnica de laminación empleada para la elaboración de las probetas, la buena adhesión entre láminas ,la ausencia de impurezas en el laminado, así como el tiempo de curado adecuado, son factores primordiales para obtener buenos resultados en los ensayos mecánicos , esto se evidencia en la variabilidad de las curvas experimentales entre el primer ensayo y los otros dos ensayos efectuados a las 3 probetas del laminado [45/-45]2s (Figura 3.7), sin embargo esto no es crítico, debido a que según norma ( ASTM D3518) , la realización del ensayo de tracción sobre el laminado [45/-45]2s tiende a subestimar el verdadero valor del esfuerzo cortante máximo del laminado, lo cual se

puede apreciar en los resultados conservadores del esfuerzo cortante obtenidos en el laminado [0/90/45/-45]<sub>s</sub>. Estos factores a tomar en cuenta puede generar también que el porcentaje coincidente elástico-lineal entre el modelo matemático y la curva de caracterización logre ser mayor.

**12.** La curva experimental del laminado [45/-45]<sub>2s</sub> sometido a tracción presenta un comportamiento no lineal a la rotura, largas deformaciones y una menor resistencia mecánica a diferencia de los laminados que incluyen láminas de [0/90], los cuales presentan un comportamiento casi lineal a la rotura y una mayor resistencia mecánica.

**13.** El método de elementos finitos se torna como una herramienta importante y más eficiente si las condiciones de frontera son bien definidas para predecir el comportamiento de materiales compuestos de diversas láminas y laminados que estén sometidos a diversas cargas en los tres ejes coordenados (x, y, z), a diferencia del modelo matemático, el cual desprecia las propiedades de la lámina fuera del plano.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Daniel, Isaac M. y Ishai Ori. Engineering Mechanics of Composites Materials. Oxford University Press. 1994.
- [2] Jones, Robert M. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis Group, Segunda Edición.1999.
- [3] Miracle, Daniel B. ; Donaldson, Steven L. ASM Handbook Composites Volume 21. ASM International, Décima Edición. 2001.
- [4] ASTM Standard D3039/D3039M [2008]. Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. American Society for Testing and Materials.
- [5] ASTM Standard D3518/D3518M [2013]. Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Matrix Composite Materials by Tensile Test of a  $\pm 45^\circ$  Laminate. American Society for Testing and Materials.
- [6] ASTM Standard D790 [2010]. Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials. American Society for Testing and Materials.
- [7] Harris, Bryan. Engineering Composite Materials. IOM Communications Ltd, Segunda Edición.1999.
- [8] Chin, J.W. ; Nguyen, T. ; Aouadi, K. Effects of Environmental Exposure on Fiber-Reinforced Plastic (FRP) Materials Used in Construction. Journal of Composites Technology and Research, Volumen 19, No. 4, 205-213. 1997.

[9] Darsie Duilio. Los Plásticos Reforzados con Fibras de Vidrio. Americalee, Segunda Edición. 1980.

[10] Hyler, M.W. Stress Analysis of fiber-reinforced composite materials. McGraw – Hill, Tercera Edición. 1998.

[11] Chawla, Krishan K. Composite Materials, Science and Engineering. Springer New York, Tercera Edición. 2012.

