



PONTIFICIA **UNIVERSIDAD CATÓLICA** DEL PERÚ

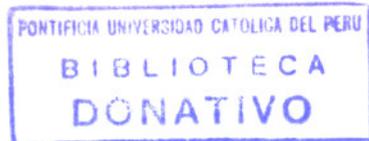
Esta obra ha sido publicada bajo la licencia Creative Commons
Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 2.5 Perú.

Para ver una copia de dicha licencia, visite
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pe/>



PO-9274

alencas



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE GRADUADOS



EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS DE
UNA ECUACIÓN HAMILTONEANA
ASINTÓTICAMENTE LINEAL

Tesis para optar el Grado de
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

Presentada por:

MARCOS ENRIQUE FERRER REYNA

LIMA - PERÚ

2003

*A Dios y a mi familia:
Elena mi esposa,
Fiorella, Lorena
y Marco mis adorados hijos.*

*A mis queridos padres por brindarme
una orientación sabia en la vida.*



Índice General

Introducción

1 Preliminares	1
1.1 Índice de una Solución Periódica de un Sistema Hamiltoniano Lineal	1
1.2 Arcos en el Grupo Simpléctico	4
1.2.1 Lazos Contractibles en $Sp(2n, \mathbb{R})$	6
1.2.2 Bases Simplécticas	7
1.2.3 Forma Normal para Autovalores Distintos	10
2 Teoría de Morse para Flujos	16
2.1 Descomposición y Pareja de Índices	17
2.2 Desigualdades de Morse para una Filtración	27
2.3 Índice y Desigualdades de Morse para un Conjunto Invariante Aislado	29
2.4 Continuación de Conjuntos Invariantes Aislados	31
3 Existencia de Soluciones Periódicas de una Ecuación Hamiltoniana Asintóticamente Lineal	42
3.1 Planteamiento del Problema y su Solución	43
3.2 El Problema Variacional Abstracto	46
3.3 El Problema Variacional Finito Dimensional	53
3.4 Teoría de Morse para el Problema Reducido	70
3.5 Prueba del Teorema 3.1	74
Apéndice	77
Bibliografía	83

Introducción

La teoría de Morse estudia propiedades analíticas y topológicas de campos vectoriales gradientes. Ésta es una disciplina variada y rica, que tiene conexiones con diversas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones. Para nuestro propósito, es el concepto de **índice de Morse** donde encontramos mayor utilidad, visto que su estudio en flujos empezó con el trabajo de C. Conley [8]. Su afán era hallar una forma de generalizar el índice de Morse de un punto crítico no degenerado con respecto al flujo gradiente en una variedad compacta.

El objetivo de este trabajo será probar la existencia de soluciones periódicas de una ecuación hamiltoneana asintóticamente lineal específica. Esto es llevado a cabo mediante la aplicación de la teoría de Morse en el sentido de C. Conley; tal teoría tiene la ventaja que no requiere que los puntos críticos de la funcional sean no degenerados.

La tesis tendrá un primer y segundo capítulo introductorio, en donde haremos un estudio de algunos resultados necesarios para nuestro objetivo.

Comenzamos con el estudio del índice de una solución periódica de un sistema hamiltoneano lineal y algunos conceptos enmarcados en el álgebra simpléctica, material que podemos encontrar en Mc. Duff y Salamon [11].

En segundo lugar, hablaremos de la teoría de Morse para flujos: acá presentamos el concepto de pareja de índice para un conjunto invariante aislado; el cual juega un papel imprescindible en la definición del índice de Morse de conjuntos invariantes aislados. Así, también enunciamos un resultado que establece la equivalencia de parejas de índice (Apaza, A., [5]). Por otra parte introducimos la

definición de la descomposición de Morse de un conjunto invariante aislado. Tal descomposición permite además construir en forma discreta sucesiones exactas de grupos de cohomología, los cuales relacionan el índice del conjunto invariante aislado con los índices de los elementos de la descomposición de Morse. No obstante, el índice de Morse (según Conley) resulta ser invariante bajo continuación. Ver Smoller, J. [13].

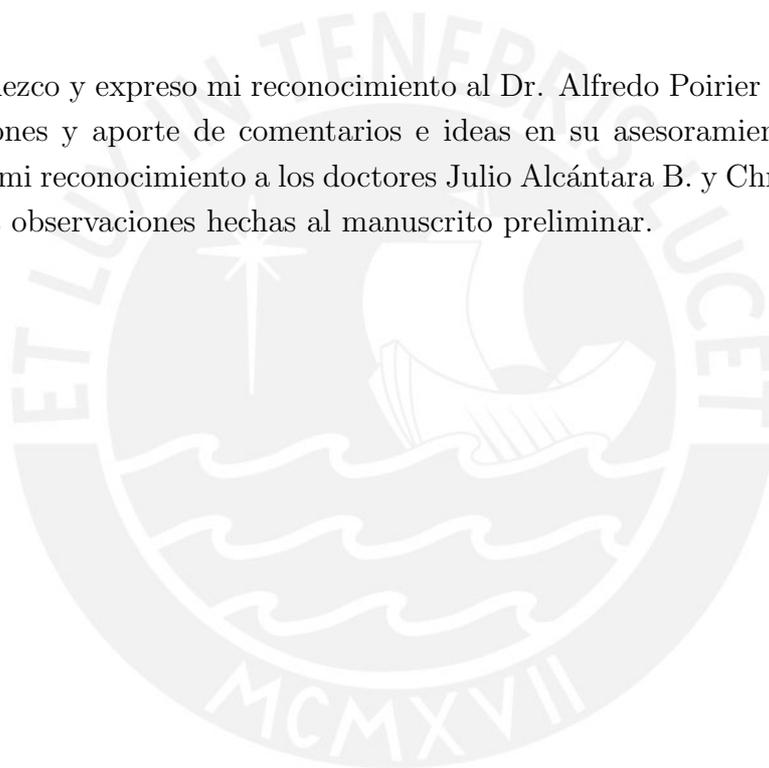
En tercer lugar, planteamos y analizamos un problema concreto, referente a la existencia de soluciones periódicas de una ecuación hamiltoniana asintóticamente lineal. La existencia de tales soluciones es una de las interrogantes que generalmente se estudian en mecánica clásica. No obstante, el problema en estudio es la simplificación de un problema de mayor complejidad enmarcado dentro de las variedades simplécticas. Asimismo, se denominan simplectomorfismos a aquellas aplicaciones entre espacios simplécticos que preservan la estructura de dichos espacios. Y ejemplos de simplectomorfismos proviene de las soluciones de ecuaciones diferenciales hamiltonianas. Por consiguiente la búsqueda de órbitas periódicas de una ecuación diferencial hamiltoniana es un caso particular del problema de existencia de simplectomorfismos. Para mejor detalle, consultar Mc. Duff y Salamon [11].

De aquí, en esta línea de investigación concretamente, planteamos el problema de la existencia de soluciones periódicas de sistemas hamiltonianos. En tal sentido, el problema que tratamos generaliza resultados ya obtenidos anteriormente dado que se trabaja con una funcional indefinida; el cual es un resultado obtenido por Conley y Zehnder (ver [7]), cuyo artículo es la base principal del presente trabajo.

Por otro lado, inmersos en el problema, presentamos el método debido a Amann (ver[2]) de reducción a puntos silla, mediante el cual el problema original de buscar puntos críticos de la funcional definida sobre un espacio de dimensión infinita se reduce al caso más simple de encontrar puntos críticos de una función definida sobre un espacio de dimensión finita. Finalmente, haciendo uso de la herramientas topológicas de la teoría de Morse presentadas en el Capítulo II, demostramos al final del Capítulo III la existencia de soluciones periódicas de nuestra ecuación diferencial hamiltoniana.

Agradecimientos

Agradezco y expreso mi reconocimiento al Dr. Alfredo Poirier por sus valiosas orientaciones y aporte de comentarios e ideas en su asesoramiento del trabajo. También mi reconocimiento a los doctores Julio Alcántara B. y Christian Figueroa S. por las observaciones hechas al manuscrito preliminar.



Capítulo 1

Preliminares

1.1 Índice de una Solución Periódica de un Sistema Hamiltoniano Lineal

En esta sección presentaremos algunas definiciones y resultados de la teoría de Floquet para sistemas lineales con coeficientes periódicos. Dichos conceptos serán de importancia fundamental, especialmente cuando llegemos a nuestro resultado central en el Capítulo 3.

A fin de adaptar una teoría de Morse al estudio de soluciones periódicas, necesitaremos una relación entre soluciones periódicas de ciertos sistemas hamiltonianos y un punto crítico de una funcional a ser definida. Con este propósito introducimos un índice, aproximadamente el signo del Hessiano de una funcional variacional en el correspondiente punto crítico. Para ello escogeremos cualquier solución periódica $x_0(\cdot)$ de la ecuación

$$\dot{x} = JD_x h(t, x),$$

y analizaremos su influencia sobre el sistema linealizado

$$\dot{y} = JD_{xx} h(t, x_0(t))y.$$

Si hacemos $A(t) = D_{xx}h(t, x_0(t))$, la ecuación anterior queda reescrita cual

$$\dot{y} = JA(t)y,$$

donde $A(t)$ es simétrica, continua y, bajo ciertas condiciones en h , también periódica, digamos de período T . Si ahora $Y(t)$ es la solución fundamental del sistema anterior, es decir satisface $\dot{Y}(t) = JA(t)Y(t)$ e $Y(0) = I$, entonces $Y(t)$ es un arco en el grupo de las matrices simplécticas que comienza en la identidad.

La matriz simpléctica $Y(T)$ encarna un papel protagónico, y sus autovalores son llamados multiplicadores de Floquet asociados con la solución periódica $x_0(t)$ de la ecuación original.

Definición 1.1 Sea la función $h = h(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, periódica en el tiempo, es decir que satisface $h(t+T, x) = h(t, x)$ para algún $T > 0$. Una solución periódica $x(t)$ de la ecuación $\dot{x} = JD_xh(t, x)$ del mismo período es llamada **no degenerada** si ella no admite multiplicador de Floquet igual a 1.

Observación 1.1 La definición anterior, expresada como tal, no es más que una forma concisa de decir que el sistema lineal $\dot{y} = JA(t)y$, con coeficientes periódicos, admite soluciones periódicas no triviales de período T , como es bien conocido de la teoría de Floquet.

Ahora consideremos el conjunto de lazos continuos $A(t)$ de matrices simétricas, periódicas de período T , con la propiedad adicional de que la ecuación $\dot{y} = JA(t)y$ no acepta mutiplicador de Floquet igual a 1. Llamemos a este conjunto \mathcal{P} . Introducimos ahí una relación de equivalencia del siguiente modo. Dos lazos $A_0(t)$ y $A_1(t)$ son **equivalentes** cuando uno puede ser deformado continuamente en el otro sin abandonar el conjunto \mathcal{P} de lazos bajo consideración. En otras palabras, existe una familia continua de lazos $A_\sigma(t)$, con $0 \leq \sigma \leq 1$, tal que $A_\sigma(t) = A_0(t)$ para $\sigma = 0$ y $A_\sigma(t) = A_1(t)$ para $\sigma = 1$, y tal que 1 no es autovalor de $Y_\sigma(T)$ para ningún $0 \leq \sigma \leq 1$, donde $Y_\sigma(t)$ es la solución fundamental del sistema deformado; es decir, satisface $\dot{Y}_\sigma(t) = JA_\sigma(t)Y_\sigma(t)$, con $Y_\sigma(0) = I$.

Resulta que el conjunto \mathcal{P} se descompone en una cantidad enumerable de clases caracterizadas por un entero, el cual definiremos primero para un lazo constante.

Sea $A(t) = S$ un lazo constante en \mathcal{P} . La solución fundamental de la ecuación $\dot{y} = JA(t)y$ es la exponencial $Y(t) = e^{tJS}$. Notemos que la existencia de soluciones -no triviales- de período T equivale a que 1 sea autovalor de e^{TJS} . Así $\lambda = 1$ no

es un multiplicador de Floquet precisamente cuando e^{TJS} no acepta autovalor 1. Para un autovalor λ de JS tenemos, en el caso de interés, por lo tanto, la condición $\lambda \notin i\frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$.

Ahora consideremos los distintos -en caso existan- autovalores de JS que son imaginarios puros. Primero notemos que como λ es un autovalor de JS , entonces su conjugado $\bar{\lambda}$ también lo es, pues tratamos con matrices de entradas reales. Si consideramos e y \bar{e} como los vectores propios complejos, correspondientes a los autovalores $\lambda, \bar{\lambda}$, se tiene que $\langle \bar{e}, Je \rangle \neq 0$ es un número imaginario puro, y escribimos $\alpha(\lambda) = \text{sign}(-i \langle \bar{e}, Je \rangle) \text{im}(\lambda)$. Observemos que se obedece $\alpha(\lambda) = \alpha(\bar{\lambda})$. Dado que, por suposición, $\alpha(\lambda) \notin \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$, existe un entero m tal que $m \frac{2\pi}{T} < \alpha(\lambda) < (m+1) \frac{2\pi}{T}$. En este caso ponemos $[\alpha(\lambda)] = m + \frac{1}{2}$, y definimos

$$j(S) = \sum_{\lambda} [\alpha(\lambda)], \quad (1.1)$$

donde λ recorre los autovalores imaginarios puros de JS ; número que resulta entero, pues, como hemos anticipado, los autovalores imaginarios puros aparecen en parejas. Si no detectamos tales autovalores, por consistencia, ponemos $j(S) = 0$. Con el índice del lazo constante $A(t) = S$ a mano, definimos

$$\text{ind}(A(t)) = j(S). \quad (1.2)$$

Con esta notación formulamos un teorema estructural que muestra que sólo es necesario definir el índice para la clase especial de lazos constantes escogidos arriba. El teorema expresa que el índice está bien definido y discrimina entre las distintas componentes de \mathcal{P} .

Teorema 1.1 *Cada clase de equivalencia del conjunto \mathcal{P} contiene, inequívocamente, lazos constantes $A(t) = S$. Todos los lazos constantes en la misma clase de equivalencia arrojan el mismo índice, y lazos constantes en diferentes componentes de \mathcal{P} tienen diferente índice. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ existe exactamente una clase de equivalencia con índice j .*

La prueba de este resultado se ofrecerá en la próxima sección.

Observación 1.2: El interés del Teorema 1.1 radica en el hecho de que nos permite asociar a cada solución periódica no degenerada $x_0(t)$ de la ecuación $\dot{x} = JD_x h(t, x)$, un número, el índice j de la correspondiente ecuación linealizada $\dot{y} = JD_{xx} h(t, x_0(t))y$.

1.2 Arcos en el Grupo Simpléctico

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 1.1. Para ello revisamos algunos pormenores del algebra lineal simpléctica.

Definición 1.2 Una matriz $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ se llama **simpléctica** si satisface $M^T J M = J$. Como de costumbre

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

e I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

El grupo de las matrices simplécticas en \mathbb{R}^{2n} es denotado en breve cual

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}), \text{ tal que } M^T J M = J\}.$$

En la secuela usamos la abreviación $W = Sp(2n, \mathbb{R})$.

Por W^* , que no debe confundirse con el dual, denotamos el subconjunto

$$W^* = \{M \in W, \text{ tal que } 1 \text{ no es autovalor de } M\}.$$

Ahora consideremos una ecuación diferencial lineal tipo

$$\dot{x} = JA(t)x \tag{1.3}$$

en \mathbb{R}^{2n} , donde $A(t+1) = A(t)$ es continua, simétrica y periódica con período unitario. Si $X(t)$ es la solución fundamental de la ecuación, es decir satisface

$$\dot{X}(t) = JA(t)X(t), \quad X(0) = I,$$

entonces $X(t)$ es un arco en W . Consideremos lazos $A(t)$ con la propiedad $X(1) \in W^*$.

Resulta que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de tales ecuaciones (1.3) y el conjunto de curvas diferenciables $X(t)$, en W , que satisfacen

$$\begin{aligned} X(0) &= I, & X(1) &\in W^*, \\ X'(1) &= X'(0)X(1), \end{aligned}$$

donde la correspondencia se establece mediante $JA(t) = X'(t)X(t)^{-1}$.

A fin de establecer el Teorema 1.1 debemos investigar cuándo dos caminos en W pueden ser deformados continuamente uno en otro sin violar la condición impuesta. Al igual que en la sección anterior, definimos el conjunto de caminos continuos

$$\mathcal{P} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow W, \text{ tal que } \gamma(0) = I \text{ y } \gamma(1) \in W^*\}.$$

Impongamos en el conjunto \mathcal{P} la topología compacto abierto (topología de convergencia uniforme), y consideremos la relación de equivalencia definida como sigue.

Dos caminos γ_1 y $\gamma_2 \in \mathcal{P}$ son equivalentes, en símbolos $\gamma_1 \sim \gamma_2$, si existe una deformación continua $\delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow W$ que satisface:

$$\begin{aligned} \delta(t, 0) &= \gamma_1(t), & \text{y} & & \delta(t, 1) &= \gamma_2(t), \\ \delta(1, \sigma) &\in W^*, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\text{y} \quad \delta(0, \sigma) = I, \quad \text{para } \sigma \in [0, 1]$$

Un ejemplo de camino en W es el exponencial, definido vía $\gamma(t) = e^{tJS}$, siempre que S sea una matriz simétrica. Este camino se encuentra en \mathcal{P} si y sólo si $e^{JS} \in W^*$, o lo que es lo mismo, si y sólo si $2\pi in$ no es autovalor de JS para ningún entero $n \in \mathbb{Z}$.

Antes de formular nuestro primer resultado, introducimos un índice para un camino exponencial inspirados en la sección anterior. Asumiendo por dado $e^{JS} \in W^*$ y que los autovalores imaginarios puros de JS son distintos, para el camino exponencial $\gamma(t) = e^{tJS}$ definimos

$$\text{ind}(\gamma) = j(S), \tag{1.5}$$

donde el término de la mano derecha es dado por la fórmula (1.1).

Teorema 1.2 *Cada clase de equivalencia de \mathcal{P} contiene un camino exponencial $\gamma(t) = e^{tJS}$ con índice definido por (1.5). Todos los caminos exponenciales en la misma clase de equivalencia arrojan el mismo índice, y caminos exponenciales en diferentes componentes tienen diferente índice. Para cada entero $j \in \mathbb{Z}$ existe exactamente una clase de equivalencia con índice j .*

La demostración del Teorema 1.2 se organiza en varias partes.

1.2.1 Lazos Contractibles en $Sp(2n, \mathbb{R})$

Cada matriz simpléctica real M puede descomponerse cual

$$M = P O, \quad (1.6)$$

su forma polar, donde $P = (MM^T)^{1/2}$ es una matriz simpléctica y simétrica definida positiva, y $O = P^{-1}M$ es una matriz simpléctica ortogonal. La matriz P tiene una representación única tipo

$$P = e^A, \quad (1.7)$$

donde los bloques de $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ están sujetos a $a_1 = a_1^T$ y $a_2 = a_2^T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. En particular, el conjunto de matrices simétricas y simplécticas definida positiva es contractible.

Cada matriz O , a su vez simpléctica y ortogonal, tiene la forma

$$O = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

donde $\bar{u} = u_1 + iu_2$ es una matriz unitaria en $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. En ambos casos, la prueba es elemental y puede encontrarse en Mc. Duff y Salamon [11], pag. 42, 43.

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow Sp(2n, \mathbb{R})$ un arco continuo de matrices simplécticas y sea $\bar{u}(t)$ el arco de matrices unitarias asociado.

Sea $\Delta(t)$ una función continua tal que $\det \bar{u}(t) = e^{i\Delta(t)}$. Entonces $\Delta(1) - \Delta(0)$ depende exclusivamente de γ . Este número es denotado por $\Delta(\gamma)$. Si γ es un lazo tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, entonces $\Delta(\gamma)$ es un entero múltiplo de 2π .

Lema 1.1 *El lazo γ es contractible en $Sp(2n, \mathbb{R})$ si y sólo si $\Delta(\gamma) = 0$.*

Prueba. Reducimos la prueba del Lema 1.1 al grupo de matrices unitarias $U(n)$ del siguiente modo.

De la ecuación (1.6) se observa $\gamma(t) = P(t)O(t)$, donde $P(t)$ es un camino cerrado de matrices simplécticas y simétricas definida positiva, de aquí contractible, mientras $O(t)$ corresponde gracias a (1.8) a un lazo de matrices unitarias, el cual es contractible si y sólo si $\Delta(\gamma) = 0$. ■

1.2.2 Bases Simpléticas

Definición 1.3 Un espacio vectorial simpléctico (V, ω) es un espacio vectorial real finito dimensional V dotado de una forma bilineal ω antisimétrica y no degenerada, es decir, $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$, para todo $u, v \in V$, y para cada $u \neq 0 \in V$ existe un $v \in V$ que satisface $\omega(u, v) \neq 0$.

El ejemplo típico es el espacio vectorial simpléctico estándar $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ con $\omega_0(u, v) = \langle Ju, v \rangle$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$.

Como la dimensión del espacio vectorial simpléctico \mathbb{R}^{2n} es el número par $2n$, existe una base ortonormal $(e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n) = (e, f)$ de \mathbb{R}^{2n} que satisface, para $i, j = 1, \dots, n$, las igualdades

$$\omega(e_i, e_j) = 0 \quad , \quad \omega(f_i, f_j) = 0 \quad , \quad \omega(f_i, e_j) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ si } i \neq j \end{cases} .$$

Una tal base es llamada una **base simpléctica** de \mathbb{R}^{2n} , y es tal que para la matriz $M = (e, f)$ tenemos $M^T J M = J$ y $M^T M = I$. Es decir M es una matriz simpléctica ortogonal. Dado que el grupo de matrices unitarias $U(n)$ es conexo, el conjunto de bases simpléticas también lo es.

Sea \bar{u} la matriz unitaria asociada con una matriz $M \in Sp(2n, \mathbb{R})$ y O_0 una matriz simpléctica ortogonal. Bajo estas condiciones la matriz unitaria asociada con $O_0^{-1} M O_0 \in Sp(2n, \mathbb{R})$ es $\bar{u}_0^{-1} \bar{u} \bar{u}_0$, donde \bar{u}_0 corresponde a O_0 . Puesto que se tiene $\det(\bar{u}_0^{-1} \bar{u} \bar{u}_0) = \det(\bar{u})$, el siguiente resultado no oculta misterio alguno.

Lema 1.2 Si $O(t)$ es un arco de matrices ortogonales simpléticas, y $\gamma(t) = O^{-1}(t) M O(t)$, donde $M \in Sp(2n, \mathbb{R})$, entonces $\Delta(\gamma) = 0$. Así, si γ es un arco, arbitrario ahora, que finaliza en M , y si además O es una matriz ortogonal simpléctica, entonces γ puede ser extendido a un arco $\tilde{\gamma}$ finalizado en $O^{-1} M O$ de modo tal que $\Delta(\gamma) = \Delta(\tilde{\gamma})$. ■

Si M es simpléctica, los autovalores de M ocurren en grupos; es decir, si λ es un autovalor, igualmente lo son λ^{-1} , $\bar{\lambda}$ y $\bar{\lambda}^{-1}$. Ver Mc Duff y Salamon [11] pag. 42.

Ahora consideramos E_α como el espacio propio generalizado asociado al autovalor α de M , es decir, el espacio nulo de $(M - \alpha I)^{2n}$.

Lema 1.3 Si $\alpha\bar{\beta} \neq 1$, entonces $\langle JE_\alpha, E_\beta \rangle = 0$.

Prueba. Sea E_α^k el espacio nulo de $(M - \alpha I)^k$, para que de este modo se tenga $0 = E_\alpha^0 \subset E_\alpha^1 \subset \dots \subset E_\alpha^{2n} = E_\alpha$. Es suficiente probar que se satisface $\langle JE_\alpha^k, E_\beta^l \rangle = 0$, para todo $k, l \geq 0$, y procederemos por inducción con respecto a $k + l$. Para $k + l = 0$ la expresión es trivial, pues no hay vectores con los cuales trabajar. Lo mismo es cierto si k ó l valen 0. Y por lo tanto asumiremos en lo sucesivo $k, l > 0$. Asumamos entonces que $\langle JE_\alpha^{k'}, E_\beta^{l'} \rangle = 0$ se satisface para $k' + l' < k + l$. Sea $s_\alpha \in E_\alpha^k$ y $s_\beta \in E_\beta^l$ y hagamos $s_\alpha^1 = (M - \alpha)s_\alpha \in E_\alpha^{k-1}$ y $s_\beta^1 = (M - \bar{\beta})s_\beta \in E_\beta^{l-1}$. Entonces $\alpha s_\alpha = Ms_\alpha - s_\alpha^1$ y $\bar{\beta}s_\beta = Ms_\beta - s_\beta^1$, y por lo tanto, debido a que M es simpléctica, se concluye

$$\alpha\bar{\beta}\langle Js_\alpha, s_\beta \rangle = \langle Js_\alpha, s_\beta \rangle - \langle JM s_\alpha, s_\beta^1 \rangle - \langle Js_\alpha^1, Ms_\beta \rangle + \langle Js_\alpha^1, s_\beta^1 \rangle$$

Dado que se cumple $Ms_\alpha \in E_\alpha^k$ y $Ms_\beta \in E_\beta^l$, los dos términos centrales son iguales a cero por la hipótesis inductiva, y como $s_\alpha^1 \in E_\alpha^{k-1}$, $s_\beta^1 \in E_\beta^{l-1}$, el último también lo es. Por consiguiente $(\alpha\bar{\beta} - 1)\langle Js_\alpha, s_\beta \rangle = 0$, lo cual prueba el lema. ■

Ahora describamos cómo se modifica los autovalores de un grupo de autovalores de una matriz simpléctica de modo tal que los espacios propios permanezcan inalterados. Para ello escogemos un autovalor λ de M . Para cada número complejo no nulo v , definimos sobre E_v una matriz M_v vía $M_v = M$ si $v \notin \{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$. En caso de tenerse $v \in \{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$ pondremos

$$M_v|_{E(\phi(\lambda))} = \phi(v)M|_{E(\phi(\lambda))},$$

donde $\phi(z)$ toma los valores complejos z, z^{-1}, \bar{z} o \bar{z}^{-1} : de modo que para $z \in E_\lambda$ se tiene $\phi(z) = z$; análogamente para $z \in E_{\lambda^{-1}}, E_{\bar{\lambda}}$ ó $E_{\bar{\lambda}^{-1}}$.

Obsérvese que en la definición, si λ es real, entonces v también lo es, y además, si $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$, entonces $\bar{v} = v^{-1}$. A continuación verificamos que la matriz M_v es real y también es simpléctica. En efecto, si $x \in E_\alpha$ e $y \in E_\beta$, entonces, por el Lema 1.3, se cumple $\langle JM_v x, M_v y \rangle = \langle Jx, y \rangle = 0$ siempre que se cumpla $\alpha\bar{\beta} \neq 1$. Asumamos $\alpha\bar{\beta} = 1$ y $\alpha \notin \{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$. Entonces $\langle JM_v x, M_v y \rangle = \langle JMx, My \rangle = \langle Jx, y \rangle$.

Si, por el contrario $\alpha \in \{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$, entonces por construcción nuevamente $\langle JM_v x, M_v y \rangle = \langle JMx, My \rangle = \langle Jx, y \rangle$ y por consiguiente $M_v^T JM_v = J$. Por lo tanto M_v es simpléctica.

Lema 1.4 *Sea $W^{**} \subset W^*$ el subconjunto de matrices cuyos autovalores de módulo unitario son todos iguales a -1 . Entonces W^{**} es un retracto de deformación fuerte de W^**

Prueba. Si en la mitad superior del disco unitario cerrado en el plano complejo suprimimos los puntos 0 y 1 , obtenemos un conjunto que admite una deformación fuerte $r(z, t)$ hacia un arco, el cuál es interior en la mitad del disco excepto en los puntos -1 y $\frac{1}{2}$, y que conecta además estos dos puntos. Escogemos esta retracción de deformación de modo que preserve módulos unitarios. A fin de construir un tal $r(z, t)$ obsérvese que el esquema

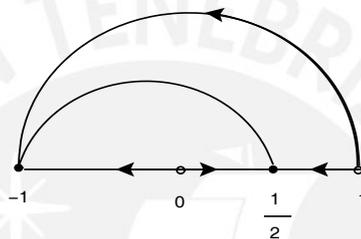


Figura 1.1

es equivalente a

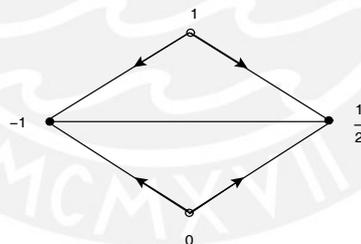


Figura 1.2

Extendemos la deformación r al plano complejo menos los puntos 0 y 1 haciendo $r(\bar{z}, t) = \overline{r(z, t)}$ y $r(z^{-1}, t) = r(z, t)^{-1}$.

La deformación $\delta = \delta(M, t)$ de W^* es realizada deformando el espectro de $M \in W^*$ por medio de r , dejando sólo el autoespacio $\delta(M, t) = \prod_{\lambda} M_{v(\lambda, t)}$, donde $v(\lambda, t) = r(\lambda, t)\lambda^{-1}$, y donde el producto recorre el grupo de autovalores de M . ■

Lema 1.5 *Cualquier vecindad de $M \in W$ contiene un arco que conecta M a una matriz cuyos autovalores son todos diferentes y ninguno de ellos igual a -1 .*

Prueba. Asumamos que λ es un autovalor en el grupo de autovalores $\{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$ de M . Por el Lema 1.3, si $\xi \in E_\lambda$ y $\eta \in E_\mu$, entonces $\langle \xi, J\bar{\eta} \rangle = 0$ o en su defecto $\mu = \bar{\lambda}^{-1}$. Escogamos una base ortogonal ξ_1, \dots, ξ_k para E_λ tal que $M\xi_1 = \lambda\xi_1$, y una base dual η_1, \dots, η_k para $E_{\bar{\lambda}^{-1}}$ tal que $\langle \xi_j, J\bar{\eta}_l \rangle = \delta_{jl}$. Dado un número complejo v , definimos M_v como sigue:

$$M_v \xi_1 = v\lambda^{-1}\xi_1 \quad , \quad M_v \bar{\xi}_1 = \bar{v}\bar{\lambda}^{-1}\bar{\xi}_1,$$

$$M_v \eta_1 = \bar{v}^{-1}\bar{\lambda}\eta_1 \quad , \quad M_v \bar{\eta}_1 = v^{-1}\lambda\bar{\eta}_1;$$

si ζ es uno cualquiera de los restantes ξ_2, \dots, ξ_k o η_2, \dots, η_k , ó si $\zeta \in E_\mu$, $\mu \notin \{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$, ponemos $M_v \zeta = \zeta$. Se ve fácilmente que M_v es una matriz real y simpléctica. Ahora sea $B_v = M_v M$. Entonces v es un autovalor de B_v , y si $\mu \notin \{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$ es autovalor de M , es también un autovalor de B_v con el mismo espacio propio.

Se puede verificar que la dimensión del espacio propio generalizado de B_v correspondiente a λ , comparada con el mismo objeto asociado a M se reduce en uno. Una construcción similar es posible cuando λ es real y está sobre el círculo unitario. Finalmente, multiplicando A por $e^{\varepsilon J}$ con ε pequeño, si fuese necesario, podemos arreglar que -1 no sea autovalor. Usando inducción se sigue la prueba del lema en toda su generalidad. ■

1.2.3 Forma Normal para Autovalores Distintos

Asumamos que $M \in Sp(2n, \mathbb{R})$ tiene autovalores distintos, ninguno igual a -1 . Entonces, existe una base simpléctica en la cual la matriz M tiene forma de bloque diagonal. Cada bloque corresponde a un grupo de autovalores y tiene una de las siguientes tres formas normal, donde usamos la abreviación

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

A continuación de cada forma normal, los bloques correspondientes de la descomposición polar $M = PO$ y la estructura simpléctica J están indicados.

- 1. Par Hiperbólico:** Si consideramos el grupo de autovalores (β, β^{-1}) , donde β es real, entonces

$$M = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \quad P = M, \quad O = I.$$

- 2. Par Elíptico:** Si el grupo de autovalores es $(\lambda, \bar{\lambda})$, $\lambda = e^{i\alpha}$ y α es real, tendremos

$$M = R(\alpha), \quad P = I, \quad O = M.$$

- 3. Grupo de Autovalores Complejos:** Cuando $(\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1})$ es un grupo de autovalores donde $\lambda = \rho e^{i\theta}$, para $\rho \neq 0, 1$ se logra

$$M = \begin{pmatrix} \rho R(\theta) & 0 \\ 0 & \rho^{-1} R(\theta) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}.$$

Para la matriz unitaria correspondiente \bar{u} , obtenemos, determinante 1 en el caso 1 y 3, y $e^{i\alpha}$ en el caso 2.

Notamos adicionalmente que en el caso 2 el vector propio $e = (1, -i)$ corresponde al autovalor $e^{i\alpha}$ y satisface $\langle \bar{e}, Je \rangle = 2i$. Si O es la matriz ortogonal simpléctica que conjuga la matriz M con un bloque diagonal $M_1 = O^{-1}MO$, entonces se puede conectar la identidad y la matriz O a través de un arco $O(t)$ en el conjunto de las matrices ortogonales simplécticas, y deducimos, con ayuda del Lema 1.2, el siguiente resultado.

Lema 1.6 *Si M es una matriz simpléctica que tiene autovalores distintos, ninguno igual a -1 , entonces M está conectada a través de un arco $\gamma(t)$ a una matriz M_1 en forma de bloque diagonal, tal que, en adición, cumple $\Delta(\gamma) = 0$. ■*

Ahora, usando el Lema 1.6, probamos el siguiente resultado.

Lema 1.7 *El subconjunto W^* consta de dos componentes simplemente conexas en W . Una componente, llamémosla W_+^* , contiene la matriz $W_+ = -id$, y el grado del punto fijo 0 de la aplicación $x \mapsto Mx$ es $+1$ (siempre que $M \in W_+^*$); la otra componente, W_-^* , contiene la matriz*

$$W_- = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & -I & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ 0 & & & -I \end{pmatrix},$$

donde en esta última expresión I representa la matriz identidad de dimensión $(n-1)$. El grado de $x \mapsto Mx$ para $M \in W_-^*$ en 0 es igual a -1 .

Prueba. Elegimos una matriz simpléctica $M \in W^*$ y la conectamos por un arco en W^* a una matriz en forma de bloque diagonal usando el Lema 1.5 y Lema 1.6 en conjunción. Ahora, si $\beta < 0$ en el caso 1, así como en los casos 2 y 3, los bloques están obviamente conectados a bloques $-I$ mediante un arco en W^* . También el bloque del caso 3 está conectado a dos bloques de tipo 1 con $\beta > 0$. Recíprocamente dos pares hiperbólicos positivos pueden ser traídos juntos y luego conectados a $-I$, haciendo escala previa en un bloque de tipo 3. Así, dependiendo de la paridad del número de pares hiperbólicos positivos, la matriz $M \in W^*$ puede ser conectada a W_- ó W_+ . Pero estas dos matrices no pueden estar en la misma componente de W^* puesto que ellas tienen diferente grado para el punto fijo 0. Que el subconjunto W^* sea simplemente conexo en W se sigue del Lema 1.4. En efecto, si γ es cualquier lazo, entonces, como vemos de las formas normales descritas arriba, se tiene que $\Delta(\gamma)$ depende solamente de la variación de los argumentos de los autovalores en el par elíptico, dado que por el Lema 1.2 de cambio de bases no contribuye. Por el Lema 1.4, cualquier lazo en W^* puede ser deformado en otro donde los autovalores de módulo uno son todos iguales a -1 , por consiguiente para un lazo donde $\Delta(\gamma) = 0$. Por el Lema 1.1, el lazo es contractible en W . ■

En el Teorema 1.2 únicamente se define el índice para la clase especial de caminos en \mathcal{P} . Además este resultado indica que el índice depende exclusivamente de la componente de \mathcal{P} que contiene tal camino.

Prueba del Teorema 1.2 Sea $\gamma(t)$ un camino en \mathcal{P} . Extendamos $\gamma(t)$ por un arco en W^* , usando el Lema 1.7, hacia una trayectoria $\bar{\gamma}$ que conecta 1 con W_- o W^+ . Como el tratamiento es similar, nos limitamos al caso W_- .

Suponiendo $n \geq 2$, se observa que la matriz W_- tiene un conjunto enumerable de logaritmos reales. Es decir, si definimos para un entero $l \in \mathbb{Z}$ la matriz simétrica $A_l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ mediante

$$A_l = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ (2l+1)\pi & \\ & \pi \\ & \ddots \\ 0 & \pi \end{array} & \begin{array}{cc} \log 2 & 0 \\ & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \log 2 & 0 \\ & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ (2l+1)\pi & \\ & \pi \\ & \ddots \\ 0 & \pi \end{array} \end{array}$$

entonces

$$W_- = e^{JA_l}.$$

Para los arcos exponenciales $\hat{\gamma}_l \in \mathcal{P}$ definidos por $\hat{\gamma}_l(t) = e^{tJA_l}$, donde $t \in [0, 1]$, los cuales conectan 1 con W_- , encontramos, por lo expuesto arriba, la relación $\Delta(\hat{\gamma}_l) = 2\pi l + \pi(n-1)$. Escogemos $l \in \mathbb{Z}$ y definimos el lazo γ_1 primero por $\bar{\gamma}$ de 1 hacia W_- y luego el camino inverso $\hat{\gamma}_l$ de W_- hacia 1. Entonces $\Delta(\gamma_1) = \Delta(\bar{\gamma}) - \Delta(\hat{\gamma}_l) = 2\pi m$ para cierto entero m . Por lo tanto, si ponemos $s = l + m$, vemos para el nuevo lazo γ_2 , definido por $\bar{\gamma}$ hacia W_- y el camino inverso $\hat{\gamma}_s$ hacia 1, que se satisface $\Delta(\gamma_2) = 0$. De aquí, por el Lema 1.1, el lazo γ_2 es contractible en W . Esto muestra que $\gamma \in \mathcal{P}$ y el camino exponencial $\hat{\gamma}_s(t) = e^{tJA_s}$, pertenecen a la misma componente de \mathcal{P} .

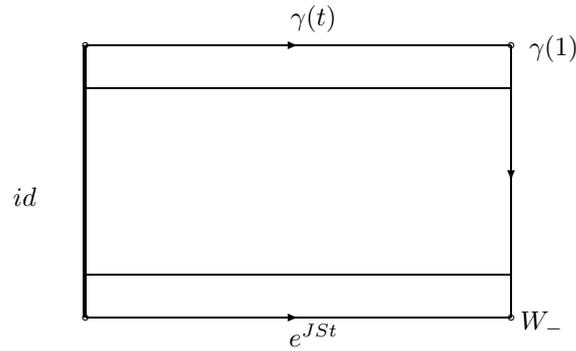


Figura 1.3

A continuación consideremos el camino exponencial $\gamma(t) = e^{JSt}$, para $t \in [0, 1]$, donde $JS \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tiene autovalores distintos. Si los autovalores imaginarios puros λ de JS son $\pm i\alpha_1, \dots, \pm i\alpha_k$, normalizados de modo que $e^{JS}\xi = e^{i\alpha}\xi$ implica $\langle \bar{\xi}, J\xi \rangle i^{-1} > 0$, entonces, por medio de la forma normal del caso 2, dado anteriormente, obtenemos

$$\Delta(\gamma) = \sum_{j=1}^k \alpha_j.$$

Extendamos ahora γ hacia el camino $\bar{\gamma}$, que conecta 1 a W_- , de tal modo que los autovalores de módulo no unitario permanezcan tales hasta el punto final, y así, ellos no contribuyen al Δ del camino extendido. Si α_j está en el intervalo abierto comprendido entre $2n\pi$ y $2(n+1)\pi$ para algún entero n , entonces es cambiado a $(2n+1)\pi$, es decir, lo convertimos en el múltiplo impar más cercano de π por deformación. Por lo tanto, si $\lambda = i\alpha$ denota los autovalores imaginarios puros de JS , se tiene

$$\Delta(\bar{\gamma}) = \pi \sum_{\lambda} [\alpha(\lambda)] = \pi j(S).$$

Naturalmente, dado que W^* es simplemente conexo, cualquier método de extender el camino $\gamma(t) = e^{JSt}$ hacia W_- por un arco en W^* produce un camino $\bar{\gamma}_1$ sujeto a $\Delta(\bar{\gamma}_1) = \pi j(S)$.

Sabido que todos los caminos exponenciales en la misma componente de \mathcal{P} tienen el mismo índice, dado por $\Delta(\bar{\gamma})$, y que dos caminos exponenciales tienen el mismo índice, concluimos que ellos pertenecen a la misma componente de \mathcal{P} . En efecto, sea e^{JAAt} el arco que conecta 1 con W_- hacia el cual el camino e^{JSt} es deformado, entonces $\Delta(e^{JAAt}) = \pi j(S)$.

Si ahora $\gamma_1(t) = e^{JS_1t}$ está en la misma componente de $\gamma(t) = e^{JSt}$, éste puede también ser deformado en el mismo camino e^{JA_t} , y por consiguiente $\Delta(\gamma) = \pi j(S_1)$, de donde concluimos $j(S_1) = j(S)$. Inversamente, si $j(S_1) = j(S)$ para dos caminos exponenciales, ellos pueden ser deformados hacia el mismo camino e^{JA_t} y estar, por lo tanto, en la misma componente de \mathcal{P} . Esto concluye la prueba del Teorema 1.1. ■



Capítulo 2

Teoría de Morse para Flujos

La idea central en este capítulo es el concepto de pareja de índice (N_1, N_0) para un conjunto invariante maximal S en una vecindad aislante N ; tal concepto juega un papel imprescindible en la definición del índice de Morse (según Conley) de conjuntos invariantes aislados.

Si (N_1, N_0) y (\bar{N}_1, \bar{N}_0) son dos parejas de índice en N , mostraremos que los espacios topológicos puntuales N_1/N_0 y \bar{N}_1/\bar{N}_0 son homotópicamente equivalentes, y de este modo el índice de Morse $h(S) = [N_1/N_0]$ queda definido por las clases de equivalencia homotópicas del espacio puntual asociado N_1/N_0 . Además, el índice de Conley $h(S)$ resulta ser invariante bajo continuación.

También introducimos el concepto de descomposición de Morse de un conjunto invariante aislado S y construimos nuestra pareja de índice a este nivel de generalidad. Así, la descomposición de Morse permite instalar, en forma directa, sucesiones exactas de grupos de cohomología, los cuales relacionan el índice del conjunto invariante aislado S con índices de los elementos de la descomposición de Morse.

Indicamos también que en nuestro trabajo el índice de Conley será usado para probar la existencia de soluciones periódicas de los sistemas hamiltonianos, y además, puesto que es un índice tipo Morse, resulta ser un invariante que carga información sobre la estabilidad del sistema.

El índice de Conley generaliza el índice clásico de Morse. Por ejemplo, si p

es un punto crítico no degenerado con respecto a un flujo gradiente presente en una variedad compacta, y n el índice clásico de Morse en p , entonces el índice de Conley del conjunto invariante $S = \{p\}$ es una n -esfera puntual, denotada por S^n .

2.1 Descomposición y Pareja de Índices

Sea Γ un espacio topológico. Un flujo sobre Γ es una aplicación continua de $\Gamma \times \mathbb{R}$ sobre Γ , tal que $(\gamma, t) \mapsto \gamma \cdot t$ satisface

- i) $\gamma \cdot 0 = \gamma$
- ii) $\gamma \cdot (s + t) = (\gamma \cdot s) \cdot t$

para todo $\gamma \in \Gamma$ y $s, t \in \mathbb{R}$.

Un subconjunto $I \subset \Gamma$ se denomina **invariante** si satisface $I \cdot \mathbb{R} = I$.

Si $N \subset \Gamma$, denotamos por $I(N)$ el conjunto invariante maximal contenido en N , es decir

$$I(N) = \{\gamma \in N / \gamma \cdot \mathbb{R} \subset N\} \subset N. \quad (2.1)$$

Definición 2.1 Asumamos que I es un conjunto invariante, de Hausdorff y compacto en Γ . Una **descomposición de Morse** de I es una colección finita $\{M_i : 1 \leq i \leq n\}$ en subconjuntos invariantes, compactos y disjuntos entre sí, que pueden ser ordenados (M_1, M_2, \dots, M_n) de modo tal que para cada $\gamma \in \left(I - \bigcup_{i=1}^n M_i\right)$ existen $i < j$ tal que $\omega(\gamma) \subset M_i$, y $\alpha(\gamma) \subset M_j$; aquí $\omega(\gamma)$, $\alpha(\gamma)$ son respectivamente el ω y α -límite de γ .

Éste es el momento de intercalar un lema de caracter trivial que necesitaremos posteriormente.

Lema 2.1 Si $\omega(\gamma) \subset M_i \cup M_{i+1} \cup \dots \cup M_n$ entonces $\alpha(\gamma) \subset M_i \cup M_{i+1} \cup \dots \cup M_n$. Similarmente, si $\alpha(\gamma) \subset M_1 \cup \dots \cup M_j$ entonces $\omega(\gamma) \subset M_1 \cup \dots \cup M_j$. ■

Ejemplo 2.1 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x(x - \frac{1}{3})(1 - x). \end{cases}$$

Claramente los puntos $(0, 0)$, $(1/3, 0)$, $(1, 0)$ son las singularidades del sistema. Por el Teorema de Hartman es suficiente estudiar localmente la parte lineal asociada a las singularidades hiperbólicas dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así en $(0, 0)$ obtenemos

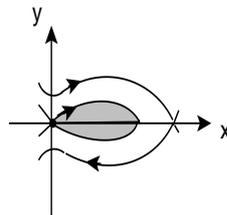
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios asociados son $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, y entonces $(0, 0)$ es un punto de silla. De igual manera para $(1, 0)$ se tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ son los valores propios correspondientes a dicha matriz. Análogamente para $(1/3, 0)$ los valores propios asociados a tal matriz son imaginarios puros dados por $\pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$, y ello implica que el punto $(\frac{1}{3}, 0)$ no es hiperbólico. Sin embargo no es difícil convergerse de que $(\frac{1}{3}, 0)$ representa un atractor.

De todo lo anterior obtenemos que el retrato de fase está conformado por la lágrima sombreada y la singularidad $(1, 0)$,



donde las componentes

(el punto es $(1/3, 0)$ al interior de la curva) son conjuntos de Morse, los cuales pueden ser ordenados para obtener la descomposición de Morse siguiente



Una tal jerarquización es llamada **admisible**. Los elementos M_i de tal descomposición son denominados **conjuntos de Morse** en I .

Dada una ordenada admisible (M_1, M_2, \dots, M_n) definimos subconjuntos $M_{ij} \subset I$, con $j \geq i$, mediante

$$M_{ij} = \{\gamma \in I : \omega(\gamma), \alpha(\gamma) \subset M_i \cup M_{i+1} \cup \dots \cup M_j\}. \quad (2.2)$$

El siguiente Lema se desprende inmediatamente de la definición anterior.

Lema 2.2 *Sea (M_1, M_2, \dots, M_n) una ordenada admisible de una descomposición de Morse. Entonces lo mismo es cierto de $(M_1, \dots, M_{i-1}, M_{ij}, M_{j+1}, \dots, M_n)$.*

Además la ordenación $(M_i, M_{i+1}, \dots, M_{j-1}, M_j)$ es admisible como descomposición de Morse para M_{ij} . ■

Observación 2.1 En la teoría clásica de Morse el espacio topológico en estudio $\Gamma = M$ es una variedad compacta, y el flujo bajo consideración es el gradiente de una función, asumida con apenas con un número finito de puntos críticos. Estos puntos críticos sirven de descomposición del conjunto invariante $I = M$, el cual en este caso abarca la variedad completa. La exposición de la teoría de Morse entonces relaciona las dimensiones de las variedades invariantes inestables de estos puntos críticos con invariantes algebraicos globales. En un contexto más ambicioso, el conjunto invariante I es un subconjunto de Γ , y el flujo no necesariamente proviene de un gradiente. Nuestro objetivo es emular este proceder e introducir invariantes algebraicos para los conjuntos Morse de una descomposición de I , y así relacionarlos con invariantes topológicos. Estos invariantes dependen del comportamiento del flujo en una vecindad de I . A fin de ser flexibles en las aplicaciones, introducimos la noción de flujo local.

Definición 2.2 Sea $X \subset \Gamma$ un subespacio de Hausdorff localmente compacto en Γ . El espacio X es llamado un **flujo local** si para cada $\gamma \in X$ existen, una vecindad $U \subset \Gamma$ de γ , y un $\varepsilon > 0$ tal que

$$(X \cap U) \cdot [0, \varepsilon) \subset X.$$

Definición 2.3 Sea $N \subset X$ un subconjunto compacto de un flujo local X . Si $I(N) \subset \text{int } N$ (interior relativo a X), entonces N es llamado una **vecindad aislante** en X e $I(N)$ un **conjunto invariante aislado**.

Teorema 2.1 Sea $I(N) = S$ un conjunto invariante aislado en el flujo local X , y sea $\{M_i\}$ una descomposición de Morse para S . Entonces cada M_i es un conjunto invariante aislado en X .

Prueba. Por hipótesis, existe un conjunto compacto $N \supset S$ tal que $I(N) = S \subset \text{int } N$. Sea $N_i \subset N$ una vecindad compacta de M_i en X tal que $N_i \cap M_k = \emptyset$ si $i \neq j$. Afirmamos que N_i es una vecindad aislante de M_i .

En efecto, si $\gamma \in I(N_i)$, entonces $\gamma \cdot \mathbb{R} \subset N_i \subset N$ y consecuentemente $\gamma \in S$. Como $\omega(\gamma)$ y $\alpha(\gamma)$ pertenecen a N_i , se sigue que el único entre los conjuntos de Morse $\{M_i\}$ que contiene alguno de ellos es M_i . Así, por la definición de descomposición de Morse, tenemos $\gamma \in M_i$ y se cumple $I(N_i) \subset M_i \subset \text{int } N_i$ relativo al flujo X . Como M_i es invariante y está incluido en N_i , se sigue $M_i \subset I(N_i)$ y por consiguiente $I(N_i) = M_i \subset \text{int } N_i$. ■

Ahora nos volcamos al importante concepto de pareja de índice para una descomposición de Morse. Antes de presentar su definición formal necesitamos ciertos preliminares.

Si $Z \subset Y \subset \Gamma$, llamamos a Z **positivamente invariante relativo a Y** , cuando $\gamma \in Z$ y $\gamma \cdot [0, t] \subset Y$ (cumpliéndose al mismo tiempo) implican $\gamma \cdot [0, t] \subset Z$. Por un **par compacto** (Z_1, Z_2) nos referimos a una pareja ordenada $Z_1 \supset Z_2$ de conjuntos compactos. El siguiente concepto es crucial en el desarrollo.

Definición 2.4 Sea $I(N) = S$ un conjunto invariante aislado en el flujo local X . Un par compacto (N_1, N_0) en X es llamado una **pareja de índice** para S , si cumple las siguientes condiciones:

- (i) la clausura $cl(N_1 \setminus N_0)$ de $N_1 \setminus N_0$ es una vecindad aislante para S ;
- (ii) el conjunto N_0 es positivamente invariante relativo a N_1 ;

(iii) si $\gamma \in N_1$ y $\gamma \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N_1$, entonces existe un $t \geq 0$ tal que la porción compacta de la órbita satisface $\gamma \cdot [0, t] \subset N_1$ y $\gamma \cdot t \in N_0$.

En lo sucesivo los conjuntos N_1 y N_0 reciben el nombre de bloque aislante y conjunto de salida respectivamente, ya que en términos prácticos N_0 representa la única puerta de escape para abandonar la región N_1 .

Ejemplo 2.2 Consideremos $X = \mathbb{R}^2$, y el flujo

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

en el cual el conjunto $S = \{0\}$ es un conjunto invariante aislado. Un cuadrado cerrado N_1 , centrado en 0, y N_0 , la unión de las paredes laterales pueden, en conjunción, ser tomadas como los constituyentes de una pareja de índices (N_1, N_0) para el conjunto S . (Ver Figura 2.1)

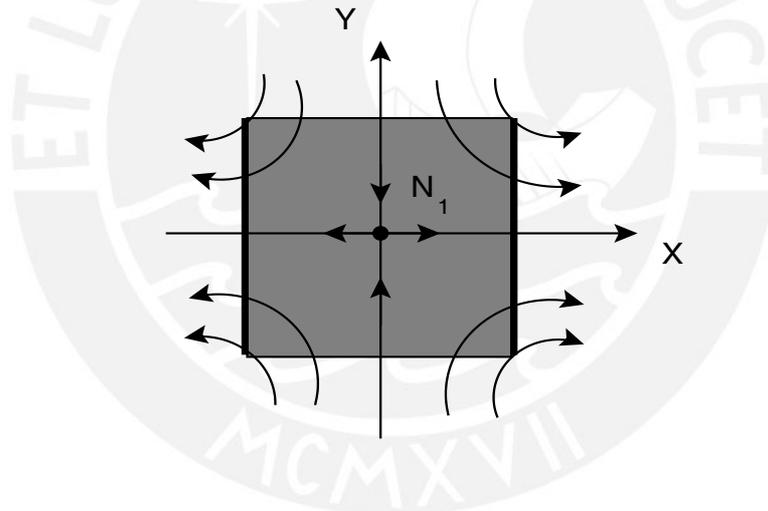


Figura 2.1: El conjunto de salida consta de dos segmentos verticales

Observación 2.2 Los invariantes algebraicos de un conjunto invariante aislado S referidos antes, incidentalmente, se asocian a una pareja de índice para S . Resulta, sin embargo, que estos invariantes no dependen de la elección particular de tal pareja de índice para S . En ese sentido ellos agradecen su existencia solamente al flujo local.

El índice de Morse (según Conley) de S es definido como una única clase de equivalencia homotópica asociada a S . Sobre este particular trataremos más adelante.

En lo concerniente a la existencia de parejas de índice, presentamos un teorema, más general, que trata acerca de la existencia de parejas de índice para cada elemento en una descomposición de Morse de S ; es decir, obtendremos una **filtración de Morse** para un conjunto invariante aislado.

Teorema 2.2 *Sea S un conjunto invariante aislado y (M_1, M_2, \dots, M_n) una ordenada admisible de una descomposición de Morse de S . Entonces existe una sucesión creciente de conjuntos compactos (una filtración de Morse para S), digamos*

$$N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n, \quad (2.3)$$

tal que para cualquier $i \leq j$, el par (N_j, N_{i-1}) es una pareja de índice para M_{ij} . En particular (N_n, N_0) es una pareja de índice para S , y (N_j, N_{j-1}) es una pareja de índice para M_j . Adicionalmente, dada cualquier vecindad aislante N de S y cualquier vecindad U de S , los conjuntos N_j pueden ser escogidos de modo que $cl(N_n \setminus N_0) \subset U$ y cada N_j sea positivamente invariante relativo a N .

Prueba. Organizaremos la demostración en varias partes.

Antes, sea N una vecindad aislante de S , de modo que $I(N) = S$, y dados $j = 1, 2, \dots, n$, con la finalidad de distinguir adecuadamente cómo una órbita positiva y negativa puede encontrarse dentro de N definimos los conjuntos

$$I_j^+ = \{ \gamma \in N : \gamma \cdot \mathbb{R}^+ \subset N \text{ y } \omega(\gamma) \subset M_j \cup M_{j+1} \cup \dots \cup M_n \}$$

(2.4)

y

$$I_j^- = \{ \gamma \in N : \gamma \cdot \mathbb{R}^- \subset N \text{ y } \alpha(\gamma) \subset M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_j \}.$$

Afirmación 1.- *Si $i < j$, entonces $M_{ij} = I_i^+ \cap I_j^-$.*

Si $\gamma \in I_i^+ \cap I_j^-$, entonces $\gamma \cdot \mathbb{R} \subset N$ y por lo tanto $\gamma \in S$. También $\omega(\gamma) \subset M_i \cup \dots \cup M_n$ implica $\alpha(\gamma) \subset M_i \cup \dots \cup M_n$ por el Lema 2.1. Pero $\alpha(\gamma) \subset M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_j$; de donde se logra $\alpha(\gamma) \subset M_i \cup \dots \cup M_j$. Similarmente, $\omega(\gamma) \subset M_i \cup \dots \cup M_j$, y así $\gamma \in M_{ij}$. Esto prueba $I_i^+ \cap I_j^- \subset M_{ij}$.

Si $\gamma \in M_{ij}$, entonces $\gamma \in S$ y además $\omega(\gamma) \subset M_i \cup \dots \cup M_j$ y $\alpha(\gamma) \subset M_i \cup \dots \cup M_j$, a parte de $\gamma \cdot \mathbb{R} \subset N$; así $\gamma \in I_i^+ \cap I_j^-$. Por consiguiente $M_{ij} \subset I_i^+ \cap I_j^-$.

De este modo hemos logrado la igualdad $I_i^+ \cap I_j^- = M_{ij}$. ■

Afirmación 2.- *Los conjuntos I_j^\pm son compactos.*

Comprobaremos primero que los conjuntos I_1^+ y I_n^- son compactos.

Como $I_1^+ = \{\gamma \in N : \gamma \cdot \mathbb{R}^+ \subset N\}$, se sigue que $\gamma \notin I_1^+$ implica $\gamma \cdot t \notin N$ para cierto $t > 0$. Usando la compacidad de N y la continuidad del flujo, existe una vecindad abierta $U \subset \Gamma$ de γ tal que $(U \cdot t) \cap N = \emptyset$. Por lo tanto, cuando $\gamma \in U \cap N$, se logra $\gamma \notin I_1^+$, y $N \setminus I_1^+$ resulta abierto relativo en N . Así I_1^+ es cerrado, y por ser subconjunto de un compacto de Hausdorff resulta compacto; lo mismo vale para I_n^- .

Detallemos ahora la prueba para el caso particular cuando $n = 2$. Sea (M_1, M_2) una ordenada admisible de una descomposición de Morse de S . Por definición $I_2^+ \subset I_1^+$ y por lo volcado en el párrafo anterior I_1^+ es compacto. Debemos mostrar que I_2^+ es cerrado. Si $\gamma_n \rightarrow \gamma$, donde $\gamma_n \in I_2^+$; entonces $\gamma \in I_1^+$ y de allí $\omega(\gamma) \subset M_1 \cup M_2$, y resta por mostrar $\omega(\gamma) \subset M_2$. Supongamos $\omega(\gamma) \subset M_1$. Como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y ambos conjuntos son compactos, disponemos de vecindades abiertas U_1 y U_2 de M_1 y M_2 , respectivamente, con $cl(U_1) \cap cl(U_2) = \emptyset$.

Dado que se satisface $\omega(\gamma_n) \subset M_2$ y $\omega(\gamma) \subset M_1$, existe una sucesión t'_n tal que $\gamma_n \cdot [t'_n, \infty) \subset U_2$ y otra sucesión t''_n tal que $\gamma_n \cdot t''_n \in U_1$, esto último debido a la continuidad del flujo, quizá pasando a una subsucesión de los n . Así por el teorema del valor intermedio, podemos encontrar una sucesión t_n tal que $\gamma_n \cdot [t_n, \infty) \subset N \setminus U_1$ y $\gamma_n \cdot t_n \in N \setminus (U_1 \cup U_2)$.

Escogamos un refinamiento tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n \cdot t_n) = \tilde{\gamma}$ exista. Entonces se tiene $\tilde{\gamma} \notin M_1 \cup M_2$ y $\tilde{\gamma} \cdot [0, \infty) \subset N \setminus U_1$ y con ello $\omega(\tilde{\gamma}) \subset M_2$.

Si la sucesión $\{t_n\}$ es acotada, entonces $\tilde{\gamma} \in \gamma \cdot \mathbb{R}$ y de aquí $\omega(\gamma) = \omega(\tilde{\gamma}) \subset M_2$, contradiciendo $\omega(\gamma) \subset M_1$, nuestra hipótesis de trabajo.

Si $\{t_n\}$ no es acotada, entonces, para cualquier $t > 0$, se tiene que $\tilde{\gamma} \cdot [-t, 0]$ es un límite de segmentos $\gamma_n \cdot t_n \cdot [-t, 0] = \gamma_n \cdot [t_n - t, t_n]$. Para n grande, estos segmentos están en $\gamma_n \cdot \mathbb{R}^+ \subset N$, y así $\tilde{\gamma} \cdot [-t, 0] \subset N$. Desde el instante que esto se mantiene para cada $t > 0$, se cumple $\tilde{\gamma} \cdot \mathbb{R}^- \subset N$, y como también se satisface $\tilde{\gamma} \cdot \mathbb{R}^+ \subset N$, se deduce $\tilde{\gamma} \in S$. Dado que (M_1, M_2) es una ordenada admisible de una descomposición de Morse de S , la contención $\omega(\tilde{\gamma}) \subset M_2$ implica $\tilde{\gamma} \in M_2$, y esto contradice $\tilde{\gamma} \notin M_1 \cup M_2$, nuestra asunción original acerca de $\tilde{\gamma}$.

Ahora trabajemos el caso general: notemos que si $j > 1$, entonces I_j^+ es el conjunto \bar{I}_2^+ donde \bar{I}_2^+ corresponde al conjunto de Morse $\bar{M}_2 = M_{j_n}$ de la novedosa descomposición $(\bar{M}_1 = M_{1(j-1)}, \bar{M}_2 = M_{j_n})$ de S . Aplicamos una observación similar a I_{j-1}^- para $j \leq n$; el resultado se desprende del caso particular trabajado para $n = 2$. ■

Para un subconjunto $Z \subset N$, definimos

$$P(Z) = \{\gamma \in N : \text{existe } \gamma' \in Z, t' \geq 0 \text{ con } \gamma'.[0, t'] \subset N \text{ y } \gamma'.t' = \gamma\} \quad (2.5)$$

Así $P(Z)$ consiste de puntos en N que pueden ser alcanzados en un tiempo $t' \geq 0$ por segmentos de órbitas contenidas en N e iniciadas en Z . Obviamente $P(Z)$ es positivamente invariante relativo a N , y contiene a Z .

Afirmación 3.- Sea V^- una vecindad abierta de $I^-(N)$ en Γ . Entonces, existe una vecindad compacta $Z \subset V^-$ de $I^-(N)$ en N tal que $P(Z)$ es compacto y contiene a $I = I(N)$

Prueba: Ver Apaza, A., [5], pag. 32, 33 y 34.

Observación 2.3 La Afirmación 3 señala que para cada vecindad abierta en Γ de I^- , existe una vecindad compacta de $I^-(N)$ en N con ciertas propiedades. Recordemos que una vecindad compacta sea positivamente invariante, significa que mientras un punto pertenezca a la vecindad compacta y se mantenga en N , entonces deberá encontrarse en dicha vecindad.

Ahora construimos la pareja de índice (N_n, N_0) para $S = I(N)$. Conocemos la relación $I_1^+ \cap I_n^- = S \subset \text{int } N$. Así, puesto que los conjuntos I_1^+ y I_n^- son compactos, podemos escoger vecindades abiertas U^+ de I_1^+ en N y U^- de I_n^- en N tal que $cl(U^+ \cap U^-) \subset U \cap \text{int } N$ para una vecindad dada U de S . Definimos

$$N_0 = P(N \setminus U^+),$$

y entonces, por definición, N_0 es positivamente invariante relativo a N . Nótese que U^+ contiene a S y por ser este último invariante, se sigue que N_0 y S son disjuntos.

Mostraremos que N_0 es compacto.

Dado que $N \setminus U^+$ es compacto y disjunto de I_1^+ , existe un $\tilde{t} > 0$ tal que $\gamma \in N \setminus U^+$ implica $\gamma.[0, \tilde{t}] \not\subset N$. Sea $\tilde{\gamma}$ un punto de acumulación de N_0 ; entonces existe una sucesión $\gamma_n \in N_0$ con $\gamma_n \rightarrow \tilde{\gamma}$. Por definición $\gamma_n = \gamma'_n.t_n$, con $\gamma'_n \in N \setminus U^+$ y $\gamma'_n.[0, t_n] \subset N$. Así $0 \leq t_n \leq \tilde{t}$, y puesto que $N \setminus U^+$ es compacto, existe un $\gamma \in N \setminus U^+$, y $t \geq 0$ tal que $\tilde{\gamma} = \gamma.t$ con $\gamma \in N \setminus U^+$ y $\gamma.[0, t] \subset N$. Consecuentemente $\tilde{\gamma} \in N_0$, y N_0 resulta compacto.

A fin de definir N_n , usamos la Afirmación 2.3, y encontramos una vecindad compacta $N'_n \subset U^-$ del conjunto I_n^- , positivamente invariante relativo a N , y definimos

$$N_n = N'_n \cup N_0.$$

Por construcción, N_n es positivamente invariante, y (N_n, N_0) es un par compacto.

Afirmación 4.- Con la notación anterior (N_n, N_0) es una pareja de índice para S y $cl(N_n \setminus N_0) \subset U$.

Verificaremos las tres condiciones de la definición (2.4).

El conjunto $cl(N_n \setminus N_0)$ es una vecindad aislante de S . En efecto, que S y N_0 sean compactos y disjuntos implica que $N \setminus N_0$ es una vecindad de S . Lo mismo es cierto para N'_n , y así N_n es una vecindad de S por construcción. En consecuencia, $N_n \setminus N_0$ es una vecindad de S . Además, dado que se obedece $N \setminus U^+ \subset N_0$ y $N'_n \subset U^-$, concluimos $N_n \setminus N_0 \subset U^- \cap U^+$ y de aquí $cl(N_n \setminus N_0) \subset cl(U^+ \cap U^-) \subset U \cap \text{int } N$. Así, $cl(N_n \setminus N_0)$ es una vecindad aislante de S .

El conjunto N_0 es positivamente invariante relativo a N_n . Si $\gamma \in N_0$ y $\gamma.[0, t] \subset N_n$, entonces $\gamma.[0, t] \subset N$ de modo que $\gamma.[0, t] \subset N_0$, pues N_0 es positivamente invariante relativo a N . Así N_0 es positivamente invariante relativo a N_n .

Ahora probemos si que $\gamma \in N_n$ y $\gamma.\mathbb{R}^+ \not\subset N_n$, entonces existe $t \geq 0$ tal que $\gamma.[0, t] \subset N_n$ y $\gamma.t \in N_0$. Si $\gamma \in N_0$, no hay nada por probar. En caso contrario, es decir, si $\gamma \notin N_0$, definimos

$$\tilde{t} = \sup \{t \geq 0 : \gamma.[0, t] \subset N_n \setminus N_0\};$$

de modo que $\gamma.\tilde{t} \in cl(N_n \setminus N_0) \subset \text{int } N$ (interior relativo a X). Ahora usemos el hecho de que X es un flujo local; es decir, puesto que $\gamma.\tilde{t}$ pertenece a X , disponemos de una Γ -vecindad W de $\gamma.\tilde{t}$, y un ϵ positivo tal que $W \cap X.[0, \epsilon] \subset X$. Dado que se tiene $\gamma.\tilde{t} \in \text{int } N$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $\gamma.[\tilde{t}, \tilde{t} + \epsilon] \subset N$. Sin embargo el hecho de que N_n es positivamente invariante relativo a N permite hallar un segmento de órbita sujeto a $\gamma.[\tilde{t}, \tilde{t} + \epsilon] \subset N_n$, y, aprovechando la definición de \tilde{t} , vemos que existe t' que obedece $\tilde{t} < t' < \tilde{t} + \epsilon$ con $\gamma.\tilde{t} \in N_0$. Al cumplirse $\gamma.[0, t'] \subset N_n$, la tercera condición de la definición queda satisfecha. ■

Recién estamos en capacidad para presentar la filtración anunciada en el Teorema 2.2. Aplicando la Afirmación 3 y las definiciones (2.4) y (2.5) a $N_n \subset N$

en lugar de N , encontramos, para cada j , entre 1 y $n - 1$, una vecindad compacta N'_j de I_j^- tal que

- $I_j^- \subset N'_j \subset N_n$,
- $N'_j \cap I_{j+1}^+ = \emptyset$,
- N'_j positivamente invariante relativo a N_n .

Antes de proseguir recordemos que se cumple $I_j^- \cap I_{j+1}^+ = \emptyset$. Ahora definimos sucesivamente $N_j = N'_j \cup N_{j-1}$, para $1 \leq j \leq n - 1$.

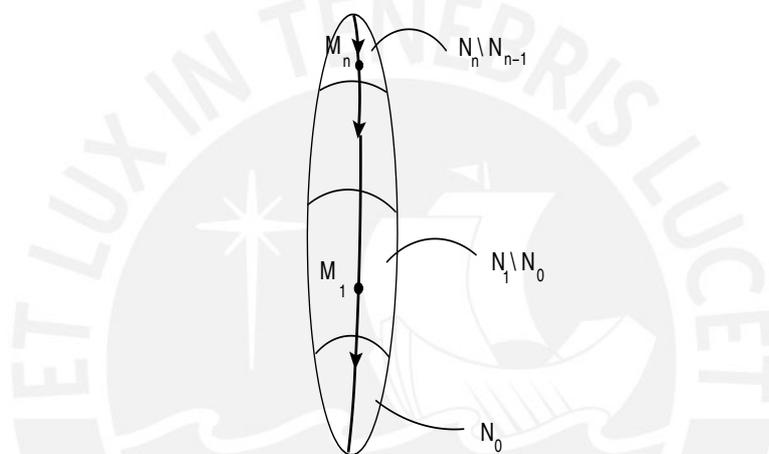


Figura 2.3

Afirmación 5.- El par (N_j, N_{i-1}) , con $i \leq j$ es una pareja de índice para M_{ij} .

Prueba: Primero probemos que $cl(N_j \setminus N_{i-1})$ es una vecindad aislante de M_{ij} . Supongamos $\gamma \in \mathbb{R} \subset cl(N_j \setminus N_{i-1})$. Gracias al Lema 2.1, entonces $\gamma \in S$, y visto $\gamma \notin I_{i-1}^-$, se tiene $\alpha(\gamma) \subset M_i \cup \dots \cup M_n$. Puesto que $\gamma \notin I_{j+1}^+$, (lo cual se debe a $N_j \cap I_{j+1}^+ = \emptyset$), se cumple $\omega(\gamma) \subset M_1 \cup \dots \cup M_j$, y por lo tanto $\gamma \in M_{ij}$ por definición, y como consecuencia de la discusión logramos $I(cl(N_j \setminus N_{i-1})) \subset M_{ij}$.

Obviamente, por un resultado anterior, se cumple

$$M_{ij} \subset I_j^- \subset N_j, \quad M_{ij} \subset I_i^+, \quad \text{y} \quad I_i^+ \cap N_{i-1} = \emptyset,$$

y por lo tanto $M_{ij} \subset N_j \setminus N_{i-1}$; motivo por el cual $cl(N_j \setminus N_{i-1})$ es una vecindad aislante de M_{ij} .

Ahora toca mostrar que N_{i-1} es positivamente invariante relativo a N_j . Por construcción N_{i-1} es positivamente invariante relativo a N_n , y dado que se satisface $N_j \subset N_n$, se concluye también que N_{i-1} es positivamente invariante relativo a N_j .

Finalmente si $\gamma \in N_j$ y $\gamma \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N_j$, entonces existe un $t \geq 0$ tal que $\gamma \cdot [0, t] \subset N_j$ y $\gamma \cdot t \in N_{i-1}$. En efecto, supongamos que se tiene simultáneamente $\gamma \in N_j \setminus N_{i-1}$ y $\gamma \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N_j$. Entonces $\gamma \cdot \mathbb{R}^+ \not\subset N_n$ puesto que N_j es positivamente invariante relativo a N_n . Así, debido a la Afirmación 4, existe $t \geq 0$, tal que $\gamma \cdot [0, t] \subset N_n$ y $\gamma \cdot t \in N_0$. De $\gamma \in N_j$ se sigue $\gamma \cdot [0, t] \subset N_j$. También, por construcción $N_0 \subset N_{i-1}$; hechos que en coordinación implican lo deseado.

Así culmina la prueba de la Afirmación 5, y por lo tanto la prueba completa del Teorema 2.2. ■

2.2 Desigualdades de Morse para una Filtración

Las desigualdades de Morse para una filtración $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n$ de espacios compactos es una consecuencia inmediata de los axiomas de la teoría elemental de cohomología. Si (X, A) es cualquier par compacto, denotamos por $H(X, A)$ la cohomología de Čech con coeficientes en algún anillo fijo. (Recomendamos Spanier [14] al lector poco familiarizado con estos conceptos). Así, si $A \supset B \supset C$ son espacios compactos, consideramos la secuencia exacta larga de cohomología

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(A, B) & \longrightarrow & H^0(A, C) & \longrightarrow & H^0(B, C) \xrightarrow{\delta^0} \\
 & & \xrightarrow{\delta^0} & H^1(A, B) & \longrightarrow & H^1(A, C) & \longrightarrow & H^1(B, C) \xrightarrow{\delta^1} \\
 & & & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(A, B) & \longrightarrow & H^2(A, C) & \longrightarrow & H^2(B, C) \xrightarrow{\delta^2} \\
 & & & & \xrightarrow{\delta^2} & H^3(A, B) & \longrightarrow & \dots
 \end{array} \tag{2.6}$$

Asumiendo que estos módulos son todos finitamente generados, denotemos por $r^k(X, Y)$ el rango de $H^k(X, Y)$, y por $d^k(A, B, C)$ el rango de la imagen de δ^k (es decir, el rango de $[H^{k+1}(A, B)/\text{Imagen}(\delta^k)]$). Si (X, Y) es un par compacto, podemos definir la siguiente serie de potencias formales con coeficientes enteros

no negativos:

$$p(t, X, Y) = \sum_{n \geq 0} r^n(X, Y)t^n, \tag{2.7}$$

$$q(t, A, B, C) = \sum_{n \geq 0} d^n(A, B, C)t^n.$$

Ahora, de la exactitud de la secuencia 2.6, para cada $n \geq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} r^0(A, B) - r^0(A, C) + r^0(B, C) - r^1(A, B) + r^1(A, C) - r^1(B, C) + \\ + \dots + (-1)^n r^n(A, B) - (-1)^n r^n(A, C) + (-1)^n r^n(B, C) - \\ - (-1)^n d^n(A, B, C) = 0 \end{aligned}$$

Esto se resume en

$$\begin{aligned} (-1)^n d^n(A, B, C) &= (-1)^{n-1} d^{n-1}(A, B, C) + (-1)^n r^n(A, B) \\ &- (-1)^n r^n(A, C) + (-1)^n r^n(B, C). \end{aligned}$$

Multiplicando por $(-1)^n t^n$ logramos

$$\begin{aligned} (-1)^n t^n [(-1)^n d^n(A, B, C)] &= (-1)^n t^n [(-1)^{n-1} d^{n-1}(A, B, C) + (-1)^n r^n(A, B) \\ &- (-1)^n r^n(A, C) + (-1)^n r^n(B, C)], \end{aligned}$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} d^n(A, B, C)t^n &= -d^{n-1}(A, B, C)t^n + r^n(A, B)t^n - r^n(A, C)t^n \\ &+ r^n(B, C)t^n, \end{aligned}$$

y por lo tanto sumando sobre n también a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} d^n(A, B, C)t^n &= - \sum_{n \geq 1} d^{n-1}(A, B, C)t^n + \sum_{n \geq 0} r^n(A, B)t^n \\ &- \sum_{n \geq 0} r^n(A, C)t^n + \sum_{n \geq 0} r^n(B, C)t^n; \end{aligned}$$

alternativamente

$$q(t, A, B, C) = -tq(t, A, B, C) + p(t, A, B) - p(t, A, C) + p(t, B, C),$$

o lo que es lo mismo

$$p(t, A, B) + p(t, B, C) = p(t, A, C) + (1 + t)q(t, A, B, C). \tag{2.8}$$

Haciendo uso de la igualdad (2.8), probaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.1 *Asumamos que $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n$ es una filtración de la descomposición de Morse (M_1, M_2, \dots, M_n) del conjunto invariante aislado S . Entonces*

$$\sum_{j=1}^n p(t, N_j, N_{j-1}) = p(t, N_n, N_0) + (1+t)Q(t),$$

donde

$$Q(t) = \sum_{j=2}^n q(t, N_j, N_{j-1}, N_0).$$

Prueba. Aplicando (2.8) al triple $N_j \supset N_{j-1} \supset N_0$, con $j \geq 2$, obtenemos

$$p(t, N_j, N_{j-1}) + p(t, N_{j-1}, N_0) = p(t, N_j, N_0) + (1+t)q(t, N_j, N_{j-1}, N_0).$$

Al sumar desde $j = 2$ hasta n obtenemos como respuesta

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n [p(t, N_j, N_{j-1}) + p(t, N_{j-1}, N_0)] &= \sum_{j=2}^n p(t, N_j, N_0) + \\ & (1+t) \sum_{j=2}^n q(t, N_j, N_{j-1}, N_0); \end{aligned}$$

así, cancelando términos repetidos, logramos

$$\sum_{j=1}^n p(t, N_j, N_{j-1}) = p(t, N_n, N_0) + (1+t)Q(t). \quad \blacksquare$$

2.3 Índice y Desigualdades de Morse para un Conjunto Invariante Aislado

Ahora enunciamos un resultado que establece que si (N_1, N_0) es una pareja de índice para el conjunto invariante aislado S , entonces el tipo de homotopía del cociente N_1/N_0 depende exclusivamente de S .

Teorema 2.3 *Sean (N_1, N_0) y (\bar{N}_1, \bar{N}_0) dos parejas de índice para el conjunto invariante aislado S . Entonces los espacios topológicos puntuales N_1/N_0 y \bar{N}_1/\bar{N}_0 son homotópicamente equivalentes.* \blacksquare

Prueba: Ver Apaza, A., [5].

El Teorema 2.3 establece que las aplicaciones en la definición del índice de Morse inducidas por inclusión o flujo son equivalencias homotópicas. Si denotamos por $[]$ la clase de equivalencia de espacios topológicos puntuales, el Teorema 2.3 debe leerse cual $[N_1/N_0] = [\bar{N}_1/\bar{N}_0]$, donde (N_1, N_0) y (\bar{N}_1, \bar{N}_0) son dos parejas de índice para un conjunto invariante aislado S contenidas en la vecindad aislante N . Podemos por lo tanto asociar a S la única clase de equivalencia

$$h(S) = [N_1/N_0],$$

donde (N_1, N_0) es cualquier pareja de índice para S y llamar a $h(S)$ el **índice de Morse (de tipo homotópico) del conjunto invariante aislado S** (llamado también **índice de Conley**).

Observación 2.4 Podemos apelar al Teorema 2.3 para obtener invariantes algebraicos asociados con un conjunto invariante aislado S . Para esto, notemos que si (X, A) es cualquier par con A no vacío, entonces una construcción típica de cohomología de Čech establece $H(X, A) = H(X/A)$ (Ver Spanier, E., [14]).

Si usamos el hecho de que las cohomologías de dos pares homotópicamente equivalentes son isomorfos (Ver Smoller, J., [13], Capítulo 23), obtenemos la siguiente consecuencia del Teorema 2.3.

Corolario 2.1 Sean (N_1, N_0) y (\bar{N}_1, \bar{N}_0) dos parejas de índices para el conjunto invariante aislado S . Entonces $H(N_1, N_0)$ es isomorfo a $H(\bar{N}_1, \bar{N}_0)$. ■

Así, los grupos de cohomología $H(N_1, N_0)$ son invariantes algebraicos asociados con el conjunto invariante aislado S . Ellos son independientes de la pareja de índice que escogamos para S . Ahora, en uso del Corolario 2.1 definimos

$$p(t, h(S)) = p(t, N_n, N_0), \quad (2.9)$$

donde $h(S)$ es el índice de Conley del conjunto invariante aislado S y (N_n, N_0) es cualquier pareja de índice para S .

Con ello en mente formulamos el resultado principal de esta sección como consecuencia de la Proposición 2.1. Por supuesto, esto generaliza las desigualdades clásicas de Morse.

Teorema 2.4 Sea S un conjunto invariante aislado en el flujo local X y (M_1, M_2, \dots, M_n) una ordenada admisible de una descomposición de Morse de S . Entonces se guarda la relación

$$\sum_{j=1}^n p(t, h(M_j)) = p(t, h(S)) + (1+t)Q(t);$$

acá $Q(t)$ es una serie como la exhibida en la Proposición 2.1. En particular, los coeficientes de $Q(t)$ son enteros no negativos.

Prueba: Por el Teorema 2.2, existe una filtración $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n$ para la descomposición de Morse tal que (N_n, N_0) es una pareja de índice para S y (N_j, N_{j-1}) es una pareja de índice para M_j , donde $1 \leq j \leq n$. El resultado se sigue ahora de la Proposición 2.1 y la fórmula (2.9). ■

2.4 Continuación de Conjuntos Invariantes

Aislados

Para motivar la siguiente definición, tomemos $J = [0, 1]$, y consideremos un subconjunto abierto X de \mathbb{R}^n , y una función $f : X \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Asumamos también que para cada $\lambda \in J$ fijo, $f(\cdot, \lambda)$ satisface una condición de Lipschitz con respecto a la variable $x \in X$. Entonces existe una única curva, digamos $\gamma_\lambda(t; x)$, en $\Gamma(X)$ tal que $\frac{d\gamma_\lambda(t)}{dt} = f(\gamma_\lambda(t), \lambda)$, con $\gamma_\lambda(0) = x$. Si $\phi : X \times J \rightarrow \Gamma(X)$, donde $\phi(x, \lambda) = \gamma_\lambda(\cdot, x)$ es el flujo usual, la continuidad de la solución con respecto a la condición inicial y parámetro muestran que ϕ es continua. El rango de ϕ , denotado por $R(\phi)$, es un flujo local en $\Gamma(X)$: a saber, $\bar{\phi} : \Gamma(X) \times \mathbb{R} \rightarrow \Gamma(X)$, definido mediante

$$(\gamma(\cdot, x), t) \mapsto \bar{\phi}[(\gamma(\cdot, x), t)] = (\gamma.t)(\cdot, x)$$

donde $(\gamma.t)(s, x) = \gamma(s+t, x)$. Ahora escribimos el rango de ϕ cual $R(\phi) = \cup\{\Phi_\lambda : \lambda \in J\}$, donde $\Phi_\lambda = \{\gamma_\lambda(\cdot, x) : x \in X\}$ es también un flujo local que consiste de la curvas solución de la ecuación para λ fijo. Por otra parte, si $\lambda, \mu \in J$, entonces Φ_λ y Φ_μ son homeomorfos puesto que la aplicación ϕ es un homeomorfismo de X en $\Gamma(X)$ cuando λ es fijo.

Usando el homeomorfismo entre Φ_λ y Φ_μ , es claro que si N_λ es una vecindad aislante en Φ_λ y μ es cercano a λ , entonces el correspondiente N_μ (bajo el homeomorfismo) es una vecindad aislante en Φ_μ , y resulta natural que los correspondientes conjuntos invariantes aislados tengan el mismo índice de Conley.

Ahora reemplazamos J por cualquier espacio topológico de Hausdorff conexo Λ , a la vez que $\Gamma(X)$ es reemplazado por $\Gamma(X \times \Lambda)$, y $\gamma(\cdot)$, por $(\gamma(\cdot), \lambda)$. En este caso la aplicación de $X \times \Lambda$ en $\Gamma(X, \Lambda)$ definida vía $(x, \lambda) \mapsto (\gamma(\cdot), \lambda)$, donde $\gamma(0) = x$, es además un homeomorfismo. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición 2.5 Una **parametrización producto** de un flujo local $\Phi \subset \Gamma(X \times \Lambda)$ es un homeomorfismo $\phi : X \times \Lambda \rightarrow \Phi$ tal que para cada λ , $\phi(X \times \{\lambda\}) = \Phi_\lambda$ es un flujo local. Escribimos $\phi_\lambda = \phi|_{X \times \{\lambda\}}$.

Ejemplo 2.3 Supongamos que la ecuación $\frac{dx}{dt} = f(x)$, sobre \mathbb{R}^n , admite una integral primera G . Sea X un subconjunto abierto relativamente precompacto de la superficie integral $G = 0$ y asumamos $\nabla G \neq 0$ sobre $cl(X)$. Entonces existe un intervalo abierto Λ alrededor de $\lambda = 0$ y un homeomorfismo $\psi : X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(X \times \{\lambda\}) \subset \{x : G(x) = \lambda\}$. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma(\mathbb{R}^n)$ es el homeomorfismo definido por la ecuación diferencial, entonces $\Phi = \varphi \circ \psi(X \times \lambda)$ es un flujo local en $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ y $\phi = \varphi \circ \psi$ es una parametrización producto de Φ .

De ahora en adelante, asumimos que X es un subconjunto localmente compacto de un espacio métrico, y Λ es un espacio de Hausdorff conexo.

Lema 2.3 Sea $\phi : X \times \Lambda \rightarrow \Phi$ una parametrización producto de Φ , K un subconjunto compacto de X , y U un abierto en Γ . Entonces el conjunto

$$\Lambda(K, U) = \{\lambda : \phi_\lambda(K) \subset U\}$$

es abierto en Λ .

Prueba. Si $\lambda_0 \in \Lambda(K, U)$, entonces $\phi(K, \lambda_0) \subset U$; es decir, $\phi(k, \lambda_0) \in U$, cuando $k \in K$. Dado que ϕ es continua y U es abierto, para cualquier $k \in K$ existe una vecindad V_k de k y un $\varepsilon_k > 0$ tal que, si $\bar{k} \in V_k$, y $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_k$, entonces $\phi(\bar{k}, \lambda) \in U$. Un número finito de los V_k cubren K , digamos V_{k_1}, \dots, V_{k_n} . Poniendo $\varepsilon = \min \varepsilon_{k_i}$, si se cumple $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, donde $k \in K$ y $k \in V_{k_i}$ para algún i de modo que $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_i$, entonces se concluye $\phi(k, \lambda) \in U$. ■

Lema 2.4 Sean K_1 y K_2 subconjuntos compactos de X . Sea además Q un subconjunto compacto de \mathbb{R} . Entonces el conjunto

$$T = \{\lambda \in \Lambda : \phi_\lambda(K_1) \cdot Q \cap \phi_\lambda(K_2) = \emptyset\}$$

es abierto.

Prueba. Elijamos $\lambda \in T$, para de este modo tener que $\phi_\lambda(K_2)$ y $\phi_\lambda(K_1) \cdot Q$ son ambos compactos, puesto que ϕ es continua. Dado que estos son disjuntos al estar λ en T , existen conjuntos abiertos disjuntos U_1 y U_2 con $\phi_\lambda(K_1) \subset U_1$, y $\phi_\lambda(K_2) \cdot Q \subset U_2$. Por el lema anterior, podemos encontrar $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tal que si $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1$, entonces $\phi_{\lambda_0}(K_1) \subset U_1$, y si $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_2$, entonces $\phi_{\lambda_0}(K_2) \cdot Q \subset U_2$. Si tomamos $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, entonces $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ implica $\lambda_0 \in T$. ■

Ahora definamos el espacio de conjuntos invariantes aislados de una familia de flujos local. Si $\phi : X \times \Lambda \rightarrow \Phi$ es una parametrización producto del flujo local Φ , definimos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi) = \{(S_\lambda, \Phi_\lambda), \text{ tal que } S_\lambda \text{ es un conjunto invariante aislado en } \Phi_\lambda\}.$$

Para adoptar una notación escueta, escribimos (S, λ) para referirnos al conjunto invariante aislado en Φ_λ .

Si N es un subconjunto compacto de X , pongamos

$$\Lambda(N) = \{\lambda \in \Lambda, \text{ tal que } \phi_\lambda(N) \text{ es una vecindad aislante en } \Phi_\lambda\},$$

y definamos

$$\sigma_N : \Lambda(N) \rightarrow \mathcal{L}$$

mediante la relación

$$\sigma_N(\lambda) = (S, \lambda),$$

donde S es el conjunto invariante maximal contenido en $\phi_\lambda(N)$. Imponemos la topología cociente sobre \mathcal{L} , generada por los conjuntos $\sigma_N(U)$, donde $U \subset \mathcal{L}$ es abierto si y sólo si $\sigma_N^{-1}(U)$ es abierto en $\Lambda(N)$.

Finalmente definimos la proyección $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \Lambda$ vía $\pi(S, \lambda) = \lambda$.

Presentamos a continuación la definición que motiva esta sección.

Definición 2.6 Dos puntos $p_1 = (S_1, \lambda_1)$, y $p_2 = (S_2, \lambda_2)$ en \mathcal{L} están **relacionados por continuación** si ellos pertenecen a la misma cuasicomponente de \mathcal{L} ; es decir, \mathcal{L} no puede ser escrita como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos, cada uno de los cuales contiene uno de los elementos en consideración.

De aquí en adelante los espacios sobre los cuales trabajaremos serán espacios puntuales de la forma N_1/N_0 , donde (N_1, N_0) es una pareja de índice para el conjunto invariante aislado S contenido en la vecindad aislante N . Para $t \geq 0$ arbitrario, definimos el **bloque aislante positivo** por

$$N_1^t = \{\gamma \in N_1 : \gamma \cdot [-t, 0] \subset N_1\}.$$

En otras palabras, N_1^t es la imagen bajo el flujo local X (revirtiendo el tiempo) de aquellos puntos que permanecen en el bloque aislante N_1 por un tiempo t . Intuitivamente, el bloque aislante positivo N_1^t es aproximadamente el bloque aislante N_1 atraído hacia adelante por un tiempo t . El efecto práctico es reducir el conjunto N_1 eliminando de este aquellos puntos cuya órbita está circunstancialmente (durante un lapso menor a $[-t, 0]$) en N_1 . De forma idéntica, cuando (N_1, N_0) es una pareja de índice para S en N y $t \geq 0$, dispondremos de un **conjunto de salida negativo**

$$N_0^{-t} = \{\gamma \in N_1 : \text{existe } \gamma' \in N_0 \text{ y } t' \in [0, t] \text{ con } \gamma' \cdot [-t', 0] \subset N_1 \text{ y } \gamma' \cdot (-t') = \gamma\}.$$

Vale observar que N_0^{-t} es aproximadamente igual al conjunto de salida N_0 que fluye hacia atrás por un tiempo t . El efecto práctico esta vez es engrosar el conjunto N_0 , añadiendo aquellos puntos que eventualmente (dentro del intervalo $[0, t]$) caen en él. Además, claramente se tiene $N_1^t \subset N_1$, $N_0 \subset N_0^{-t} \subset N_1$ y estos son subconjuntos de la vecindad aislante N .

Lema 2.5 *Sea $(S, \lambda) \in \mathcal{L}$, y N un subconjunto compacto de X tal que $\phi_\lambda(N)$ es una vecindad aislante para S . Entonces existen subconjuntos compactos N_0, N_1, \bar{N}_0 y \bar{N}_1 de N , con $N_i \subset \text{int } \bar{N}_i$ (interior relativo a N), para $i = 0, 1$, y $cl(\bar{N}_1 \setminus N_0) \subset \text{int } N$, tal que $\langle \phi_\lambda(N_0), \phi_\lambda(N_1) \rangle$ y $\langle \phi_\lambda(\bar{N}_0), \phi_\lambda(\bar{N}_1) \rangle$ son parejas de índices para (S, λ) .*

Prueba. Dado que λ está fijado y ϕ_λ es homeomorfismo, de entrada suprimimos toda referencia a él. Usando el Teorema 2.2 (ver también Afirmación 4), podemos encontrar una pareja de índice $\langle N'_1, N'_0 \rangle$ en N con $cl(N'_1 \setminus N'_0) \subset \text{int } N$.

Ahora escogamos una pareja de índice $\langle \bar{N}_1, \bar{N}_0 \rangle$ en $cl(N'_1 \setminus N'_0)$ (la cual es una vecindad aislante para S), con $\bar{N}_1 \supset N_0$, que sin pérdida de generalidad satisface

$N_0 \subset \text{int } N'_0$ (interior relativo a N). (Esta última condición puede ser forzada reemplazando N'_0 por $(N'_0)^{-t}$ para t suficientemente grande). Elegimos una pareja de índice $\langle \tilde{N}_1, \tilde{N}_0 \rangle$ en $cl(\tilde{N}_1 \setminus N_0) \subset \text{int } \tilde{N}_1$, y definimos $\langle N_1, N_0 \rangle = \langle \tilde{N}_1, N_0 \rangle$ y $\langle \bar{N}_1, \bar{N}_0 \rangle = \langle \tilde{N}_1, N'_0 \rangle$. De la construcción misma se obtiene $\bar{N}_1 \setminus N_0 \subset \text{int } N$, $N_1 \subset \text{int } \tilde{N}_1$ y $N_0 \subset \text{int } \tilde{N}_0$.

Para verificar que $\langle N_1, N_0 \rangle$ es una pareja de índice, notemos que N_1 y N_0 son positivamente invariantes relativo a N . Además $S \subset \text{int } \tilde{N}_1 \setminus N_0 = \text{int } N_1 \setminus N_0$, y si $\gamma \in N_1$, con $\gamma.t \notin N$, entonces $\gamma \in \tilde{N}_1$; así existe t' tal que $\gamma.[0, t'] \subset \tilde{N}_1 = N_1$ y $\gamma.t' \in \tilde{N}_0 \subset N_0$.

Para ver que $\langle \bar{N}_1, \bar{N}_0 \rangle$ es una pareja de índice, nuevamente anotamos que \bar{N}_1 y \bar{N}_0 son positivamente invariantes relativo a N , y $S \subset \text{int } \bar{N}_1 \setminus N'_0 = \text{int } \bar{N}_1 \setminus N_0$. Por lo tanto, si $\gamma \in \bar{N}_1$, $\gamma.t \notin N$, entonces existe un t' tal que $\gamma.[0, t'] \subset \bar{N}_1$, y $\gamma.t' \in N'_0 = N_0$. Esto completa la prueba. ■

Consideramos ahora

$$P(Z, Y) = \bigcap \{K \supset Z : K \text{ compacto y positivamente invariante relativo a } Y\},$$

donde $Z \subset Y \subset \Gamma$.

En lo que a este conjunto concierne, tenemos la siguiente información.

Lema 2.6 *Si Y es compacto y $Z \subset Y$, entonces $P(Z, Y)$ contiene a Z , y es el menor subconjunto compacto de Y positivamente invariante relativo a Y .*

Prueba. El conjunto $P(Z, Y)$ es compacto por ser la intersección de compactos, y por construcción es el menor de los compactos positivamente invariantes en Y . ■

Lema 2.7 *Si $(S, \mu) \in \mathcal{L}$ y $N, \phi_\mu(N), N_1, N_0, \bar{N}_1$ y \bar{N}_0 son como en el Lema 2.5 (con λ reemplazado por μ). Entonces se cumple lo siguiente.*

- (i) *Existe una vecindad W de μ en Λ tal que $W \subset \Lambda(N)$.*
- (ii) *Si ponemos*

$$P_i(\lambda) = \phi_\lambda^{-1} P(\phi_\lambda(N_i), \phi_\lambda(N)),$$

para $i = 0, 1$, entonces, si $\lambda \in W$, con $P_i(\lambda) \subset \bar{N}_i$, se consigue que $\langle \phi_\lambda(P_1), \phi_\lambda(P_0) \rangle$ es una pareja de índice para $S_\lambda = \sigma_N(\lambda)$ en $\phi_\lambda(N)$.

Prueba. Si $x \in cl(N \setminus \bar{N}_1)$, entonces si $\alpha_\mu(x) \subset N$, se logra $\alpha_\mu(x) \subset S \subset \bar{N}_1$, y de la invarianza positiva de \bar{N}_1 , se cumple $x \in \bar{N}_1$. Así $\alpha_\mu(x) \not\subset N$, y existe un número $t_x > 0$ con $\phi_\mu(x) \cdot (-t_x) \not\subset \phi_\mu(N)$. De la invarianza positiva de \bar{N}_1 , se tiene $\phi_\mu(x) \cdot [-t_x, 0] \cap \phi_\mu(\bar{N}_1) = \emptyset$, y por la continuidad del flujo junto con la compactidad de \bar{N}_1 , podemos encontrar una vecindad compacta K_x de x en N tal que se cumple

$$\phi_\mu(K_x) \cdot [-t_x, 0] \cap \phi_\mu(\bar{N}_1) = \emptyset$$

(2.10)

y

$$\phi_\mu(K_x) \cdot (-t_x) \cap \phi_\mu(N) = \emptyset.$$

Del Lema 2.5, para cada x existe una vecindad W_x de μ en Λ tal que $\lambda \in W_x$ implica que las relaciones dadas por (2.10) se mantienen, al reemplazar λ por μ . Puesto que $cl(N \setminus \bar{N}_1)$ es compacto, un número finito de los K_x cubre $cl(N \setminus \bar{N}_1)$; digamos K_{x_1}, \dots, K_{x_n} . Entonces $W_1 = \cap \{W_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$ es una vecindad de μ en Λ tal que (2.10) se cumple para todo $\lambda \in W_1$.

Afirmamos que si $\lambda \in W_1$, entonces $P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N)) \subset \phi_\lambda(\bar{N}_1)$. Para ver esto, sea $x \in P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N))$. Entonces x está en cualquier conjunto compacto $K \supset N_1$ que es positivamente invariante para λ relativo a N . Si mostramos que \bar{N}_1 es positivamente invariante para λ , relativo a N , entonces tenemos probado la afirmación puesto que \bar{N}_1 es compacto y $\bar{N}_1 \supset N_1$. Así, supongamos $x \in \bar{N}_1$ y $\phi_\lambda(x) \cdot [0, t] \subset N$. Si $\phi_\lambda(x) \cdot s \in \bar{N}_1$, para $0 < s \leq t$, se sigue $\phi_\lambda(x) \cdot s \in cl(N \setminus \bar{N}_1)$, y de (2.10), existe un $t_x > 0$ con $\phi_\lambda(x) \cdot [s - t_x, s] \cap \bar{N}_1 = \emptyset$, y $\phi_\lambda(x) \cdot (s - t_x) \cap N = \emptyset$. Pero $s - t_x < 0$, pues de lo contrario, tendríamos $\phi_\lambda(x) \cdot (s - t_x) \in N$; así $\phi_\lambda(x) \cdot [s - t_x, s] \cap \bar{N}_1 = \emptyset$ implica $\phi_\lambda(x) \in \bar{N}_1$, lo cual es una contradicción. De aquí, se deduce que \bar{N}_1 es positivamente invariante para λ relativo a N ; lo cual prueba nuestra afirmación. Así, W_1 es una vecindad de μ en Λ tal que si $\lambda \in W_1$ entonces $P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N)) \subset \phi_\lambda(\bar{N}_1)$, de donde se logra $P_1(\lambda) = \phi_\lambda^{-1} P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N)) \subset \bar{N}_1$.

Si ahora $x \in \bar{N}_0$, obtenemos $\phi_\mu(x) \cdot \mathbb{R}_+ \not\subset \bar{N}_0$ (puesto que $S \cap \bar{N}_0 = \emptyset$), de modo que por la invarianza positiva de \bar{N}_0 existe un $t'_x > 0$ con $\phi_\mu(x) \cdot t'_x \notin N$ y $\phi_\mu(x) \cdot [0, t'_x] \cap cl(\phi_\mu(N) \setminus \phi_\mu(\bar{N}_0)) = \emptyset$. Como arriba, existe una vecindad compacta K_x de x en N con

$$\phi_\mu(K_x) \cdot [0, t'_x] \cap cl(\phi_\mu(N) \setminus \phi_\mu(\bar{N}_0)) = \emptyset$$

y

$$\phi_\mu(x) \cdot t'_x \notin \phi_\mu(N).$$

Así, nuevamente como antes, existe una vecindad W_0 de μ en Λ tal que de $\lambda \in W_0$ y $x \in \bar{N}_0$, se infiere

$$\phi_\lambda(K_x) \cdot [0, t'_x] \cap cl(\phi_\lambda(N) \setminus \phi_\lambda(\bar{N}_0)) = \emptyset$$

y

$$\phi_\lambda(x) \cdot t'_x \notin \lambda_\mu(N), \quad (2.11)$$

y con ello $P_0(\lambda) \subset \bar{N}_0$. Si hacemos $\tilde{W} = W_1 \cap W_0$; entonces $\mu \in \tilde{W}$, de donde \tilde{W} es una vecindad de μ en Λ . Si $\lambda \in \tilde{W}$, entonces $P_i(\lambda) \subset \bar{N}_i$, para $i = 0, 1$, donde (2.10) y (2.11) se mantienen. Por consiguiente, se cumple (i).

Ahora $P_i \subset \bar{N}_i$, y por definición, $P_i \supset N_i$ para $i = 0, 1$. De aquí $P_1 \setminus P_0 \subset \bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0$ y consecuentemente $cl(P_1 \setminus P_0) \subset cl(\bar{N}_1 \setminus \bar{N}_0) \subset int N$.

A continuación encontramos una vecindad W de μ en Λ tal que (ii) se cumple. La vecindad W obtenida está en $W_1 \cap W_2$; de aquí todo los resultados dados arriba son válidos para W , y $N_i \subset P_i \subset \bar{N}_i$ también se cumple.

Si $x \notin (int N) \setminus N_0$, entonces $x \in N_0$ de modo que $x \notin S$. Así existe un t_x tal que $\phi_\mu(x) \cdot t_x \notin \phi_\mu(N)$, ó en su defecto $\phi_\mu(x) \cdot (-t_x) \notin \phi_\mu(N)$. Como antes, existe una vecindad compacta K_x de x en N tal que $\phi_\mu(K_x) \cdot t_x \cap \phi_\mu(N) = \emptyset$ ó $\phi_\mu(K_x) \cdot (-t_x) \cap \phi_\mu(N) = \emptyset$. Argumentando como antes, existe una vecindad W_3 de μ en Λ tal que si $\lambda \in W_3$ y $x \notin int(\phi_\lambda(N_1) \setminus \phi_\lambda(N_0))$ entonces se cumple

$$\phi_\lambda(x) \cdot t_x \notin \phi_\lambda(N)$$

o bien

$$(2.12)$$

$$\phi_\lambda(x) \cdot (-t_x) \notin \phi_\lambda(N).$$

Si $W = \tilde{W} \cap W_3$; mostraremos que $\lambda \in W$ implica que $\langle \phi_\lambda(P_1), \phi_\lambda(P_0) \rangle$ es una pareja de índice para $S_\lambda = \sigma_N(\lambda)$ en $\phi_\lambda(N)$. A continuación verificamos las condiciones de la Definición 2.4

1. Para ver que $\lambda \in W$ implica que $\sigma_N(\lambda) = S_\lambda$ está en $int(\phi_\lambda(P_1) \setminus \phi_\lambda(P_0))$, procedemos de la siguiente manera. Sea $\lambda \in W$ y $x \in S_\lambda$. Si $x \in \phi_\lambda(P_0)$, entonces $P_0 = P_0(\lambda) \subset \bar{N}_0$ implica $x \notin \phi_\lambda(\bar{N}_0)$. Pero de (2.11), existe un $t'_x > 0$ tal que $\phi_\lambda(x) \cdot t'_x \notin N$, y esto contradice el hecho de que $x \in S_\lambda$. Así $x \in S_\lambda$ implica $x \notin \phi_\lambda(P_0)$. Para probar $x \in int \phi_\lambda(P_1)$, supongamos $x \notin int(\phi_\lambda(N_1))$; entonces $x \notin int(\phi_\lambda(N_1)) \setminus \phi_\lambda(N_0)$, de modo que por (2.12), se tiene $\phi_\lambda(x) \cdot \mathbb{R} \not\subset N$. Esto es una contradicción, y por consiguiente $S_\lambda \subset int \phi_\lambda(N_1) \subset int P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N)) = int \phi_\lambda(P_1)$, donde se ha usado el Lema 2.6. En consecuencia, hemos establecido $S_\lambda \subset int(\phi_\lambda(P_1) \setminus \phi_\lambda(P_0))$.

2. Puesto que se cumple $\phi_\lambda(P_i) = P(\phi_\lambda(N_i), \phi_\lambda(N))$, por el Lema 2.6 mostramos que $\phi_\lambda(P_i)$ es positivamente invariante relativo a $\phi_\lambda(N)$, para $i = 0, 1$.
3. Supongamos $\phi_\lambda(x) \in \phi_\lambda(P_1)$, con $t > 0$ y $\phi_\lambda(x).t \notin \phi_\lambda(N)$. Probaremos que existe $t' > 0$ tal que $\phi_\lambda(x).[0, t'] \subset \phi_\lambda(P_1)$ y $\phi_\lambda(x).t' \in \phi_\lambda(P_0)$.
Sea $t_1 = \sup\{t > 0 : \phi_\lambda(x).[0, t] \subset \phi_\lambda(N)\}$. Por compacticidad se observa $\phi_\lambda(x).t_1 \in \phi_\lambda(N)$, y en efecto, $\phi_\lambda(x).t_1 \in \partial N$ por definición de t_1 . Afirmamos se cumple $\phi_\lambda(x).t_1 \in \phi_\lambda(\bar{N}_1)$. Esto se obedece puesto que $\phi_\lambda(x) \in P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N))$ y $\phi_\lambda(x).[0, t_1] \subset \phi_\lambda(N)$; por consiguiente dado que $P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N))$ es positivamente invariante relativo a $\phi_\lambda(N)$, se sigue $\phi_\lambda(x).[0, t_1] \subset P(\phi_\lambda(N_1), \phi_\lambda(N)) = \phi_\lambda(P_1) \subset \phi_\lambda(\bar{N}_1)$. Así $\phi_\lambda(x).t_1 \in \phi_\lambda(\bar{N}_1)$.

Ahora si $\phi_\lambda(x).t_1 \notin \phi_\lambda(N_0)$, entonces $\phi_\lambda(x).t_1 \in \phi_\lambda(\bar{N}_1) \setminus \phi_\lambda(N_0) \subset \text{int } N$ es imposible. Así $\phi_\lambda(x).t_1 \in \phi_\lambda(N_0) \subset \phi_\lambda(P_0)$. También, $\phi_\lambda(x).[0, t_1] \subset \phi_\lambda(N)$, con $\phi_\lambda(x) \in \phi_\lambda(P_1)$ puesto que $\phi_\lambda(P_1)$ es positivamente invariante relativo a $\phi_\lambda(N)$, lo cual implica $\phi_\lambda(x).[0, t_1] \subset \phi_\lambda(P_1)$. Así la tercera condición para una pareja de índice se cumple, y la prueba está completa. ■

Teorema 2.5 *La proyección $\pi : \mathcal{L}(\phi) \rightarrow \Lambda$ es un homeomorfismo local. Para ser precisos, si N es un subconjunto compacto de X , entonces $\pi|_{\sigma_N(\Lambda(N))}$ es un homeomorfismo con inversa σ_N .*

Prueba. Mostraremos que para $(S, \mu) = (S_\mu, \Phi_\mu)$ existe un conjunto abierto U que contiene (S, μ) tal que $\pi|_U$ es un homeomorfismo sobre su rango.

Sea (S, μ) cualquier punto en \mathcal{L} . Tomemos N un subconjunto compacto de X tal que $\phi_\mu(N)$ es un vecindad aislante para S en Φ_μ . Ahora $\mu \in \Lambda(N)$, y por el Lema 2.7 vemos que $\sigma_N(\Lambda(N))$ es un subconjunto abierto de \mathcal{L} con (S, μ) en su interior. Pongamos $U = \sigma_N(\Lambda(N))$, y mostraremos que U tiene las propiedades requeridas.

Si hacemos $\pi(\sigma_N(\lambda_1)) = \pi(\sigma_N(\lambda_2))$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(N)$, entonces $\pi(S_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_1}) = \pi(S_{\lambda_2}, \Phi_{\lambda_2})$ implica $\lambda_1 = \lambda_2$. Así $\pi|_U$ es uno a uno. También π es continua por la definición de la topología sobre \mathcal{L} ; es decir, si V es abierto en U , entonces $\pi^{-1}(V) = \sigma_N(V)$ es abierto en \mathcal{L} .

La prueba estará completa tan pronto mostremos que $\pi|_U$ es abierto. Para este fin, es suficiente mostrar que cuando $V_i = \sigma_i(U_i) = \sigma_{N_i}(U_i)$ son dos conjuntos abiertos subbásicos en \mathcal{L} , donde $i = 1, 2$, entonces $\pi(V_1 \cap V_2)$ es abierto en Λ . Si

este fuere el caso, entonces $\pi|_U$ sería abierto si V es cualquier conjunto abierto en \mathcal{L} , y así $V = \cup W_\alpha$, donde W_α son conjuntos abiertos básicos en \mathcal{L} , y $\pi(V)$ resulta abierto. Por consiguiente, si $\pi(x) \in \pi(V)$, entonces $x \in W_\alpha$ para algún α , así $\pi(x) \subseteq \pi(W_\alpha) \subset \pi(V)$, y puesto que $\pi(W_\alpha)$ es abierto, entonces $\pi(V)$ debe ser abierto.

Por dicho motivo, tomemos $V_i = \sigma_i(U_i)$, para $i = 1, 2$, donde U_i es abierto en $\Lambda(N_i)$, y N_i es compacto, es decir, $\sigma_i = \sigma_{N_i}$. Ahora, si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, entonces $\pi(V_1 \cap V_2)$ es abierto en Λ ; motivo por el cual podemos asumir $(S_\lambda, \Phi_\lambda) \in V_1 \cap V_2$. Sea ahora $\phi_\lambda(N_i)$, donde $i = 1, 2$, vecindades aislantes para S_λ en Φ_λ . Si $N_0 = N_1 \cap N_2$; entonces $\phi_\lambda(N_0)$ es una vecindad aislante para S_λ en Φ_λ . También por el Lema 2.7, existe una vecindad W de λ en Λ tal que si $v \in W$, entonces el conjunto invariante maximal en $\phi_v(N_i)$ está recludo $\text{int } \phi_v(N_0)$.

A fin de concluir con la prueba del Teorema 2.5, necesitamos probar el siguiente resultado.

Lema 2.8 *Sea C cerrado en Λ y supongamos que $\phi_\lambda(N)$ es una vecindad aislante para cada λ en C . Si $A = \{(\lambda, x) : \lambda \in C, x \in S_\lambda\}$; entonces A es cerrado.*

Prueba. Si el lema fuera falso, existira una secuencia $(\lambda_n, x_n) \in A$ tal que $(\lambda_n, x_n) \rightarrow (\lambda, x) \notin A$. Así $x \in S_\lambda$ y por tanto $\phi_\lambda(x) \cdot \mathbb{R} \not\subset N$. Se sigue que, para n grande, se cumple $\phi_{\lambda_n}(x) \cdot \mathbb{R} \not\subset N$; lo cual es imposible. ■

Retornando al Teorema 2.5, conocemos $S_\lambda = \sigma_\lambda(N_1) = \sigma_\lambda(N_0)$, y $N_0 \subsetneq N_1$. Afirmamos que esto implica la existencia de una vecindad W de λ tal que si $v \in W$, entonces $\sigma_v(N_1) = \sigma_v(N_0)$. Para confirmar este hecho proseguimos por contradicción: asumamos que existe $\lambda_n \in \Lambda$ con $\lambda_n \rightarrow \lambda$ y $S'_n = \sigma_{\lambda_n}(N_0) \neq \sigma_{\lambda_n}(N_1) = S_N$. Escogemos un $x_n \in S_n \setminus S'_n$. Por la compacidad de N_1 , aceptamos $x_n \rightarrow \bar{x}$, y por el Lema 2.8 ha de obedecerse $\bar{x} \in S$; también por hipótesis tenemos $\bar{x} \in S'$. Así, para n grande $x_n \in \phi_{\lambda_n}(N_0)$. También $x_n \in S_n \setminus S'_n$ implica que existe $t_n > 0$ tal que $x_n \cdot t_n \in N_1 \setminus \text{int } N_0$, y por compacticidad, podemos asumir que $\{x_n \cdot t_n\}$ converge; es decir $x_n \cdot t_n \rightarrow x \in N_1 \setminus \text{int } N_0$. Otra vez gracias al Lema 2.8, notamos $x \in S$, y por tanto $x \in S' \subset N_0$, lo cual es una contradicción. Esto prueba nuestra afirmación.

Es ahora fácil ver que las aplicaciones σ_{N_i} todas concuerdan sobre W , para $i = 0, 1, 2$. Es decir, si $v \in W$, se cumple $\sigma_N(v) = (S_v, \Phi)$, y $\sigma_{N_0}(v) = (S'_v, \Phi_v)$, y por nuestra afirmación $S_v = S'_v$, por tanto $\sigma_{N_1}(v) = \sigma_{N_0}(v)$; similarmente $\sigma_{N_2}(v) = \sigma_{N_0}(v) = \sigma_{N_1}(v)$. De esto sigue $\sigma_{N_0}(W) \subset V_1 \cap V_2$ (dado que si $v \in W$,

entonces $\sigma_{N_i}(v) = \sigma_{N_0}(v)$, para $i = 1, 2$. Pero $v \in W_i$ implica $\sigma_{N_i}(v) \in V_i$ y $\sigma_{N_1}(v) = \sigma_{N_2}(v)$; por consiguiente $\sigma_{N_i}(v) \in V_1 \cap V_2$ motivo por el cual $\sigma_{N_0} \in V_1 \cap V_2$ y así $\sigma_{N_0}(W) \subset V_1 \cap V_2$. Por lo tanto $W \subset \pi(V_1 \cap V_2)$, de modo que $\pi|_U$ es abierto y esta aplicación es un homeomorfismo. Esto demuestra que π es un homeomorfismo local y completa la prueba del Teorema 2.5. ■

Observación 2.5 El propósito del Teorema 2.5 es que permite reconocer cuando dos puntos $(S, \lambda) = (S_\lambda, \Phi_\lambda)$, y $(S, \mu) = (S_\mu, \Phi_\mu)$ están relacionados por continuación; por ejemplo cuando λ y μ están en la misma componente de $\Lambda(N)$, entonces $\sigma_N(\lambda)$ y $\sigma_N(\mu)$ están relacionados por continuación.

Ahora presentamos el teorema central de esta sección: la invarianza del índice de Conley bajo continuación.

Teorema 2.6 *Si S_λ y S_μ están relacionados por continuación, entonces ellos tienen el mismo índice de Conley.*

Prueba. Afirmamos que sólo es necesario mostrar que el conjunto de puntos en \mathcal{L} con un índice homotópico dado es abierto. Para ver esto, supongamos $(S_\mu, \Phi_\mu) \in \mathcal{L}$ y que $U = \{(S_\nu, \Phi_\nu) \in \mathcal{L} : h(S_\nu) = h(S_\mu)\}$ es abierto. Si $h(S_\alpha) \neq h(S_\lambda)$, entonces (S_α, Φ_α) claramente no puede estar en $cl(U)$, por tanto $(S_\alpha, \Phi_\alpha) \in \mathcal{L} \setminus cl(U)$, $(S_\lambda, \Phi_\lambda) \in U$ y puesto que $\mathcal{L} \setminus cl(U)$ y U son conjuntos abiertos disjuntos, deducimos que (S_α, Φ_α) y (S_μ, Φ_μ) no están relacionados por continuación. Esto prueba nuestra afirmación.

Sea ahora $(S_\mu, \Phi_\mu) \in \mathcal{L}$ y N un subconjunto compacto de X tal que $\phi_\mu(N)$ es una vecindad aislante para S_μ en Φ_μ . Escogamos conjuntos N_i , y \bar{N}_i para $i = 0, 1$ como en el Lema 2.7. Entonces existe una vecindad W_1 de μ , y $W_1 \subset \Lambda(N)$ tal que si $\lambda \in W_1$ se tiene $(N_1, N_0) \subset (P_1^\lambda, P_0^\lambda) \subset (\bar{N}_1, \bar{N}_0)$, donde $\langle \phi_\mu(N_1), \phi_\mu(N_0) \rangle$ y $\langle \phi_\mu(\bar{N}_1), \phi_\mu(\bar{N}_0) \rangle$ son parejas de índice para S_μ en Φ_μ y $\langle \phi_\lambda(P_1^\lambda), \phi_\lambda(P_0^\lambda) \rangle$ es una pareja de índice para S_λ en Φ .

Ahora $S_\mu \subset int N_1 \setminus N_0 \subset int N_1$, y por tanto N_1 es una vecindad aislante para S_μ en $\phi_\lambda(N_1)$. Tomemos N'_i , y \bar{N}'_i , para $i = 0, 1$, como en el Lema 2.7, donde $\langle \phi_\mu(N'_1), \phi_\mu(N'_0) \rangle$ y $\langle \phi_\mu(\bar{N}'_1), \phi_\mu(\bar{N}'_0) \rangle$ son parejas de índice para S_μ en N_1 . De nuevo usando el Lema 2.7, podemos encontrar una vecindad W_2 de μ en $\Lambda(N_1)$ tal que si $\lambda \in W_2$, entonces $(N'_1, N'_0) \subset (\tilde{P}_1^\lambda, \tilde{P}_0^\lambda) \subset (\bar{N}'_1, \bar{N}'_0)$, donde los \tilde{P}_i^λ son los analógos “ P ’s” asociado con estas dos parejas de índice últimas.

Sea $W = W_1 \cap W_2$; entonces $\mu \in W$, y W es abierto en Λ , y $W \subset \Lambda(N) \cap \Lambda(N_1) \subset \Lambda(N)$. Para completar la prueba, mostramos que si $\lambda \in W$, entonces $h(S_\lambda) = h(S_\mu)$.

Para $\lambda \in W$, consideremos la sucesión de aplicaciones

$$N'_1/N'_0 \xrightarrow{i_1} \tilde{P}_1^\lambda/\tilde{P}_0^\lambda \xrightarrow{i_2} \bar{N}'_1/\bar{N}'_0 \xrightarrow{\psi} N_1/N_0 \xrightarrow{i_3} P_1^\lambda/P_0^\lambda,$$

donde i_1 , i_2 y i_3 son aplicaciones inclusión inducidas, y ψ es la aplicación equivalencia homotópica entre parejas de índice (\bar{N}'_1, \bar{N}'_0) y (N_1, N_0) (para el conjunto invariante aislado S_μ), cuya existencia fue probada en el Teorema 2.3. Ahora reescribimos la sucesión anterior cual

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{i_3 \circ \psi \circ i_2} & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 N'_1/N'_0 & \xrightarrow{i_1} & \tilde{P}_1^\lambda/\tilde{P}_0^\lambda & \xrightarrow{\psi \circ i_2} & N_1/N_0 & \xrightarrow{i_3} & P_1^\lambda/P_0^\lambda \\
 & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & & & \xrightarrow{\psi \circ i_2 \circ i_1} & &
 \end{array} \tag{2.13}$$

Por simplicidad en notación, reescribimos la sucesión (2.13) en la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{f} & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow[f_1]{j} & C & \xrightarrow{g_1} & D \\
 & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & \xrightarrow{g} & &
 \end{array}$$

donde i y j son aplicaciones inclusión inducidas, f y g son equivalencias homotópicas y f_1 es escogida tal que $f = f_1 \circ i$, mientras que g_1 es elegida de modo que $g = g_1 \circ j$. Por técnicas estandarizadas (ver Proposición 12.25 en Smoller, J. [13] Capítulo 12) se sigue que i es una equivalencia homotópica. Refiriendo a (2.13), éste implica

$$N'_1/N'_0 \sim \tilde{P}_1^\lambda/\tilde{P}_0^\lambda,$$

de modo que $h(S_\mu) = h(S_\lambda)$, con lo cual completamos la prueba. ■

Capítulo 3

Existencia de Soluciones

Periódicas de una Ecuación

Hamiltoniana Asintóticamente

Lineal

Nuestro objetivo en este capítulo es presentar un teorema que muestra la existencia de soluciones periódicas de una ecuación hamiltoniana asintóticamente lineal. Las soluciones periódicas son encontradas como puntos críticos de un problema variacional en un espacio de Hilbert real H . Mediante una reducción a un punto de silla, este problema se ciñe al estudio de los puntos críticos de una función a , definida sobre un subespacio Z de dimensión finita de H . Los puntos críticos son entonces hallados usando la teoría de Conley para flujos, material desarrollado en el Capítulo 2.

3.1 Planteamiento del Problema y su Solución

Una función $h = h(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, con $n \geq 2$, periódica en el tiempo, es decir que satisface $h(t + T, x) = h(t, x)$ para algún $T > 0$, será denominada en el contexto una función **hamiltoniana periódica**. Consideremos sólo $n \geq 2$ para el problema en consideración, pues el caso $n = 1$ es conocido por el trabajo de Poincaré. (Ver Mc. Duff y Salamon [11]).

Consideremos el campo vectorial hamiltoniano

$$\dot{x} = JD_x h(t, x), \quad (3.1)$$

con $(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n})$, donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz simpléctica estándar en \mathbb{R}^{2n} . Estas ecuaciones suelen ser llamadas sistemas hamiltonianos dependientes del tiempo. Nuestro objetivo es probar la existencia de soluciones periódicas (de período T) de la Ecuación 3.1 incluso cuando el campo vectorial hamiltoniano es de tipo no autónomo.

¿Cómo conseguiremos esto? Para lograrlo, denotamos por $C_T(\mathbb{R})$ el espacio de funciones periódicas de período $T > 0$ y clase C^1 ; es decir, para este mismo T , escribimos

$$C_T(\mathbb{R}) = \{x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} / x \in C^1, \quad x(0) = x(T)\}.$$

Lo que buscamos son funciones $x(\cdot) \in C_T(\mathbb{R})$ que sean soluciones de la ecuación (3.1). Se sabe que tales soluciones corresponden biunívocamente a los puntos críticos de la funcional

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} \langle J\dot{x}(t), x(t) \rangle + h(t, x(t)) \right] dt \quad (3.2)$$

definida sobre $C_T(\mathbb{R})$. (Ver Agapito, J. [1], Capítulo 2).

Aunque la estructura dual del problema sugiere que potencialmente mejores resultados se obtienen a través de un acercamiento variacional, los progresos en

esa dirección en el pasado fueron lentos. Esto se debe al hecho de que la funcional \mathcal{L} introducida en (3.2) es indefinida en el sentido que no es acotada superior ni inferiormente. En efecto, si consideramos

$$x_k(t) = (\cos \lambda_k t)c - (\sin \lambda_k t)Jc,$$

donde $\lambda_k = \frac{2k\pi}{T}$, k es entero y $c \in \mathbb{R}^{2n}$ un vector de norma unitaria, se tiene simultáneamente $x_k \in C_T(\mathbb{R})$, $\|x_k\| = 1$ y $\langle J\dot{x}(t), x_k(t) \rangle = \lambda_k$ para todo tiempo t . Reemplazando x_k en (3.2) obtenemos

$$\mathcal{L}(x_k) = \frac{k\pi}{T} + \int_0^T h(t, x_k(t)) dt,$$

y como $x_k(t)$ tiene cota independiente de k , el integrando permanece estancado mientras $\frac{k\pi}{T}$, se dispara hacia infinito. En resumen $\mathcal{L}(x_k)$ tiende a $\pm\infty$ cuando k tiende a $\pm\infty$.

En consecuencia, no podemos hablar de mínimos ni de máximos de la funcional (3.2) y de allí que los puntos críticos a ser localizados sean por lo general puntos de silla. De ahí la necesidad de aproximaciones más sofisticadas al problema; como por ejemplo el método de *minimax* o el método *dual del principio de acción mínima*.

El presente trabajo consistirá en demostrar el siguiente teorema que trata sobre la existencia de soluciones periódicas de una ecuación hamiltoniana asintóticamente lineal apelando a la teoría de Morse generalizada, en el sentido de Charles C. Conley. (Ver Conley, Charles C. [8])

Teorema 3.1 Sea $h = h(t, x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, con $n \geq 2$, una función periódica en el tiempo y de período $T > 0$. Asumamos

1. el hessiano de h es acotado, es decir, existe un $\beta > 0$ tal que para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ se tiene $\|D_{xx}h(t, x)\| \leq \beta$;
2. el campo vectorial hamiltoniano es asintóticamente lineal, en el sentido de satisfacerse

$$JD_x h(t, x) = JA_\infty(t)x + o(\|x\|)$$

uniformemente en t cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, donde $A_\infty(t) = A_\infty(t + T)$ es un camino continuo y periódico de matrices simétricas;

3. la solución trivial de la ecuación $\dot{x} = JA_\infty(t)x$ es la única solución periódica, la cual es no degenerada y tiene índice j_∞ .

Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.

- (a) La Ecuación (3.1) arroja una solución periódica de período T . Si esta solución periódica es no degenerada con índice $j_0 \neq j_\infty$, entonces existe una segunda solución T -periódica, con índice diferente de j_∞ . Además, si hay dos soluciones periódicas no degeneradas, entonces existe también una tercera.
- (b) Asumamos que todas las soluciones periódicas sean no degeneradas. Entonces aparece apenas un número finito de ellas y esta cantidad es impar. Si j_k denota el índice de cada una, donde $k = 1, \dots, m$, estos valores se sujetan a la igualdad

$$\sum_{k=1}^m t^{-j_k} = t^{-j_\infty} + t^{-d}(1+t)Q_d(t),$$

donde $d > 0$ es un entero, y $Q_d(t)$ es un polinomio de coeficientes enteros no negativos.

Observación 3.1 La Condición 2 en el teorema anterior debe interpretarse de la siguiente manera: para todo $L > 0$ existe K tal que

$$\|\ell(\|x\|)\| = \|JD_x h(t, x) - JA_\infty(t)x\| < L\|x\| + K,$$

lo cual se expresa también como

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\ell(\|x\|)}{\|x\|} = 0.$$

Asimismo, la Condición 3 puede ser rephraseada diciendo que 1 no es un multiplicador de Floquet de la ecuación $\dot{x} = JA_\infty(t)x$, lo cual por definición ya significa que la solución trivial es no degenerada.

Las soluciones periódicas mencionadas arriba son encontradas como puntos críticos de un problema variacional en un espacio de Hilbert real H . Debido a la suposición 1 del Teorema 3.1, el problema original se reducirá a encontrar puntos críticos no triviales de una función a , definida sobre un subespacio finito dimensional $Z \subset H$. Además, debido al supuesto 2 del Teorema 3.1, la condición 3, de no resonancia, implica un comportamiento cualitativo conocido de la función en una vecindad de ∞ .

Los puntos críticos son entonces encontrados mediante el uso de las herramientas topológicas de la teoría de Morse generalizada desarrollada por C. Conley [8].

Primero reformulamos el problema (3.1) como un problema variacional abstracto para una funcional en el espacio de funciones periódicas.

Lo que haremos en adelante será estudiar el problema (3.1) en forma abstracta y para ello extenderemos $C_T(\mathbb{R})$ a un espacio más grande.

3.2 El Problema Variacional Abstracto

Sea $H^1(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ el espacio de Banach formado por funciones u en $L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ para las cuales \dot{u} , su derivada en el sentido de Sobolev, también pertenece a $L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$. Denotando por I el intervalo $[0, T]$, este espacio comprende todas aquellas $u \in L^2$ para las cuales existe $g \in L^2$ que satisface $\int_I \langle u, \varphi' \rangle = - \int_I \langle g, \varphi \rangle$, siempre que φ sea una función de clase C^1 que se anula en los extremos del intervalo.

Por teoría de los espacios de Sobolev esta g es única y por lo tanto podemos denotarla por \dot{u} sin ambigüedad. Además, toda función en $H^1(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ admite un representante absolutamente continuo (Ver Brézis [6], Capítulo 8). Este hecho nos permite definir la funcional $\Phi : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ vía

$$\Phi(u) = \int_0^T h(t, u(t)) dt,$$

sin ningún problema.

Sea ahora $D = \{u \in H^1(I; \mathbb{R}^{2n}) : u(0) = u(T)\}$. Así definido, D es un subespacio cerrado de H^1 y por lo tanto un espacio de Banach. A partir de ahora, esta D es la ampliación de $C_T(\mathbb{R})$ a la que antes hicimos referencia. Por lo tanto, nuestro problema se reduce a encontrar $u \in D$ que verifique

$$\dot{u} = JD_x h(t, u). \quad (3.3)$$

Por otro lado, para cada $v \in H^1$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Phi(u), v \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + \lambda v) - \Phi(u)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int_0^T h(t, u(t) + \lambda v(t)) dt - \int_0^T h(t, u(t)) dt}{\lambda}. \end{aligned}$$

Notemos que la imagen $(u + \lambda v)[0, T]$ es compacta por ser u y v continuas. Así, para λ cercano a 0 y u, v fijos, el conjunto $(u + \lambda v)[0, T]$ está acotado. Por ser h continua, la imagen $h([0, T] \times (u + \lambda v)[0, T])$ también permanece acotada. Por lo tanto, por el teorema de convergencia de Lebesgue, la anterior expresión es igual a

$$\begin{aligned} \int_0^T \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h(t, u(t) + \lambda v(t)) - h(t, u(t))}{\lambda} dt &= \int_0^T \langle D_x h(t, u(t)), v(t) \rangle dt \\ &= \langle D_x h(t, u), v \rangle, \end{aligned}$$

de manera que se tiene $\nabla \Phi(u) = D_x h(t, u)$ por dualidad.

Si en $L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ definimos el operador lineal $A : L^2 \rightarrow L^2$ por $Au = -J\dot{u}$ y el operador potencial continuo $F : H^1 \rightarrow H^1$ por $F(u)(t) = D_x h(t, u(t))$, podemos reescribir las relaciones de interés de forma simplificada cual

$$Au = F(u), \quad (3.4)$$

donde $u \in D$. Notemos que el operador F es continuo pero no lineal, por lo que la ecuación desplegada es no lineal.

Observación 3.2 Si escribimos la ecuación (3.1) en forma

$$-J\dot{x} = D_x h(t, x),$$

observamos que cada solución $u \in D$ de la Ecuación 3.4 define una solución T -periódica clásica de (3.1). Recíprocamente cada solución T -periódica de (3.1) define por restricción una solución u de la Ecuación (3.4). Entonces, al menos

formalmente, la Ecuación (3.4) es la ecuación de Euler del problema variacional siguiente:

Dada la funcional $\mathcal{L}(u) = \langle Au, u \rangle - \Phi(u)$, donde $u \in D$, encontrar sus puntos críticos.

Por lo tanto, conviene establecer un paralelo entre ellos.

Por este motivo es pertinente el estudio individual en cada factor involucrado en la Ecuación (3.4). El análisis del miembro izquierdo proporcionará información valiosa sobre el espacio L^2 en el cual estamos trabajando. Posteriormente analizaremos el segundo miembro, y finalmente combinaremos los resultados obtenidos para solucionar nuestro problema. Primero detallamos información sobre el operador A .

Lema 3.1 *El operador A es autoadjunto cuando se restringe a D .*

Prueba. Para u y v , dos elementos cualquiera de D , se tiene

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}, v \rangle + \langle u, \dot{v} \rangle &= \int_0^T (\langle \dot{u}(t), v(t) \rangle + \langle u(t), \dot{v}(t) \rangle) dt \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle dt \\ &= \langle u(T), v(T) \rangle - \langle u(0), v(0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Aprovechando el hecho de que $J^T = -J$ y lo observado arriba, deducimos

$$\langle Au, v \rangle = \langle -J\dot{u}, v \rangle = \langle \dot{u}, Jv \rangle = \langle u, -J\dot{v} \rangle = \langle u, Av \rangle$$

lo cual es lo deseado. ■

Antes de abordar problemas no lineales, nos interesa discutir el simple problema periódico lineal $Au = \lambda u$ con la condición de frontera $u(0) = u(T)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$. Por la definición de A , esto equivale a analizar la ecuación diferencial $\dot{u} = \lambda Ju$ sujeta a condiciones de frontera $u(0) = u(T)$, cuyas soluciones son de la forma

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\lambda t J} c \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k J^k}{k!} \right) c \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda t)^{2k} I}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda t)^{2k+1} J}{(2k+1)!} \right) c \\ &= [(\cos \lambda t)I + (\sin \lambda t)J]c, \end{aligned}$$

donde c es el vector $c = u(0)$.

Esta solución satisface la condición de T -periodicidad $u(0) = u(T)$ si y sólo si

$$[(1 - \cos \lambda T)I - (\text{sen } \lambda T)J]c = 0. \quad (3.5)$$

Aprovechamos el hecho de que $\langle Jc, c \rangle = 0$ para tomar a su vez producto interno con c y Jc , y obtener respectivamente

$$\langle [(1 - \cos \lambda T)I - (\text{sen } \lambda T)J]c, c \rangle = (1 - \cos \lambda T)\|c\|^2 = 0$$

y

$$\langle [(1 - \cos \lambda T)I - (\text{sen } \lambda T)J]c, Jc \rangle = (-\text{sen } \lambda T)\|Jc\|^2 = 0.$$

Dado que una solución no trivial está asociada con $c \neq 0$, se debe cumplir simultáneamente $1 - \cos \lambda T = 0$ y $\text{sen } \lambda T = 0$, condiciones que pueden ser satisfechas sólo por $\lambda = \lambda_k = \frac{2k\pi}{T}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Resumimos lo anterior en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *El problema $\dot{u} = \lambda Ju$ con condiciones de frontera $u(0) = u(T)$, admite solución no trivial si y sólo si $\lambda = \lambda_k = \frac{2k\pi}{T}$. De ser ese el caso el problema de frontera posee un espacio vectorial de soluciones de dimensión $2n$, específicamente hablamos de*

$$u(t) = (\cos \lambda t)c + (\text{sen } \lambda t)Jc,$$

donde $c \in \mathbb{R}^{2n}$ es arbitrario. ■

Como en la fórmula $u(t) = (\cos \lambda t)c + (\text{sen } \lambda t)Jc$ el parámetro $c \in \mathbb{R}^{2n}$ es arbitrario, inferimos que los espacios propios $E(\lambda_k) = \text{Ker}(A - \lambda_k)$ tienen dimensión $2n$. Si $m(\lambda_k)$ denota la multiplicidad de λ_k , se tiene $m(\lambda_k) = 2n$. En particular, $\text{Ker}(A) = \mathbb{R}^{2n}$ consiste de caminos [cerrados] constantes.

Si escribimos $v_{kj}(t) = (\cos \lambda_k t)e_j + (\text{sen } \lambda_k t)Je_j$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq j \leq 2n$, donde $(e_j)_{1 \leq j \leq 2n}$ es la base canónica de \mathbb{R}^{2n} , se verifica trivialmente $v_{kj} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$. Por contener todos los términos trigonométricos, el sistema $\{v_{kj}\}$ es una base ortogonal de $L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$. Por lo tanto L^2 acepta la siguiente descomposición ortogonal

$$L^2 = \bigoplus_k \text{Ker}(A - \lambda_k).$$

Además, como

$$\begin{aligned} \langle v_{kj}, v_{kj} \rangle &= \int_0^T \langle (\cos \lambda_k t) e_j + (\sin \lambda_k t) J e_j, (\cos \lambda_k t) e_j + (\sin \lambda_k t) J e_j \rangle dt \\ &= \langle e_j, e_j \rangle \int_0^T \cos^2 \lambda_k t dt + \langle J e_j, J e_j \rangle \int_0^T \sin^2 \lambda_k t dt \\ &= T, \end{aligned}$$

concluimos que $\left\{ \frac{v_{kj}}{\sqrt{T}} \right\}$ es un sistema ortonormal completo para $L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$.

Para simplificar las cuentas denotaremos por w_{kj} el vector $\frac{v_{kj}}{\sqrt{T}}$. Podemos entonces brindar una caracterización de los elementos de $L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ en términos de sus coeficientes de Fourier.

Para $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$, los números $a_{kj} \equiv \langle u, w_{kj} \rangle$ son llamados **coeficientes de Fourier** asociados a u respecto de la base ortonormal $\{w_{kj}\}$. Derivado de lo anterior se tiene

$$u \in L^2 \text{ si y sólo si } \sum_{k,j} |a_{kj}|^2 < \infty.$$

Observemos que $v \in \mathbb{R}^{2n}$ se puede descomponer cual (x, y) , donde $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, o con el abuso de notación $v = x + iy \in \mathbb{C}^n$. Con esta nomenclatura, resulta obvia la relación $Jv = iv$, es decir, la acción de J sobre cualquier vector v de \mathbb{R}^{2n} se resume en una rotación de 90 grados. De este modo

$$\begin{aligned} w_{kj}(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} ((\cos \lambda_k t) e_j + (\sin \lambda_k t) J e_j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} (\cos \lambda_k t + i \sin \lambda_k t) e_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\lambda_k t} e_j. \end{aligned}$$

Luego, si $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ se tiene

$$u(t) = \sum_{k,j} a_{kj} w_{kj}(t) = \sum_{k,j} a_{kj} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\lambda_k t} e_j,$$

y entonces

$$\dot{u}(t) = \sum_{k,j} \frac{i\lambda_k}{\sqrt{T}} a_{kj} e^{i\lambda_k t} e_j = \sum_{k,j} i\lambda_k a_{kj} w_{kj}(t).$$

Como consecuencia, brindamos la siguiente caracterización del espacio H^1 .

Lema 3.2 Sea $u = \sum_{k,j} a_{kj} w_{kj} \in L^2$. Entonces $u \in H^1$ si y sólo si

$$\sum_{k,j} |ia_{kj} \lambda_k|^2 < \infty$$

Prueba. Para los detalles faltantes, ver Agapito, J. [1]. ■

A fin de abstraer el comportamiento asintótico de la función hamiltoneana h , introducimos algunos operadores lineales en H . Sea $b = b(t)$ una matriz simétrica $2n \times 2n$ que depende continua y periódicamente en t con período $T > 0$, es decir, $b(t) = b(t + T)$. Definimos $B \in \mathcal{L}(H)$ por

$$(Bu)(t) = b(t)u(t), \quad (3.6)$$

operador claramente autoadjunto merced a la simetría de b .

Para cada $\lambda \in \sigma(A) = \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$, sea $E(\lambda) = \text{Ker}(A - \lambda I)$ el espacio propio del autovalor λ . Entonces se tiene

$$E(\lambda) + E(-\lambda) = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\lambda t) \vec{c} + \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\lambda t) \vec{d} / t \in [0, 1], \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^{2n} \right\}.$$

Éste es el momento de indicar que si b es constante entonces B deja invariante $E(\lambda) + E(-\lambda)$, pues este espacio se compone precisamente de aquellas funciones en cuyas entradas aparece tan solo $\sin \lambda t$ y $\cos \lambda t$.

El siguiente lema resume algunas propiedades del operador B necesitadas después. En lo sucesivo $\sigma_p(\cdot)$ denotará el espectro puntual del operador de referencia.

Lema 3.3 *El operador $A - B$ definido sobre $\text{dom}(A)$ es autoadjunto y tiene resolvente compacto. Además el espectro del operador $A - B$ es puntual.*

Es más, para una matriz constante b , el espectro de $A - B$ queda caracterizado por la propiedad

$$\lambda \in \sigma(A - B) \text{ si y sólo si } \sigma(J(b + \lambda)) \cap i \frac{2\pi}{T} \mathbb{Z} \neq \emptyset.$$

Adicionalmente, si $b(t) = b$ no depende de t , entonces para cada $\alpha > 0$ el operador B conmuta con $P = \sum_{-\alpha \leq \lambda \leq \alpha} E_\lambda$, la proyección ortogonal sobre el subespacio Z de H generado por los autovectores de A , que pertenecen a los autovalores en el intervalo cerrado $[-\alpha, \alpha]$.

Prueba: Por argumentos estándar (ver [4]) y el Lema 3.1 se tiene que $A - B$ es autoadjunto y tiene resolvente compacta, puesto que A goza esta misma propiedad.

Si $\lambda \in \sigma(A - B)$, la ecuación $(A - B)u = \lambda u$ arroja una solución no trivial $u \in \text{dom}(A)$. De la igualdad $-Ju = (b + \lambda)u$ se obtiene

$$u(t) = e^{[tJ(b+\lambda)]}u(0),$$

y puesto que $u(0) = u(T)$ para $u \in \text{dom}(A)$, concluimos se cumple $\lambda \in \sigma(A - B)$ si y sólo si 1 es un multiplicador de Floquet tal que

$$1 \in \sigma(e^{[TJ(b+\lambda)]}) - \{0\} = e^{[T\sigma(J(b+\lambda))]} - \{0\},$$

donde la igualdad se debe al teorema espectral.

La restricción del operador $A - B$ al subespacio $E(\lambda) + E(-\lambda) \subset H$ define una forma cuadrática $\langle \vec{u}, (A - B)\vec{u} \rangle$ sobre $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, la cual es representada por una matriz denotada por $Q(\lambda, B)$, donde obviamente B es un operador simétrico acotado que aplica $E(\lambda) + E(-\lambda)$ en sí mismo. De donde se concluye que el operador B conmuta con P . ■

Ahora determinamos el índice clásico de Morse de $A - B$, restringido a $E(\lambda) + E(-\lambda)$ denotado por $m_Z^+(A - B)$ que a su vez representa la dimensión m de un subespacio maximal Z^+ del espacio finito dimensional Z tal que $A - B$ es definido positivo.

Para $\vec{u} = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\lambda t) \vec{c} + \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\lambda t) \vec{d}$, que pertenece a $E(\lambda) + E(-\lambda)$, se tiene

$$\begin{aligned} (A - B)\vec{u} &= A\vec{u} - B\vec{u} = -J\dot{\vec{u}} - B\vec{u}, \\ &= -\cos(\lambda t) \{ \lambda J\vec{d} + B\vec{c} \} + \sin(\lambda t) \{ \lambda J\vec{d} - B\vec{d} \}. \end{aligned}$$

Luego reemplazando en la forma cuadrática dada líneas arriba y teniendo en cuenta las igualdades

$$\int_0^T \cos^2(\lambda t) dt = \int_0^T \sin^2(\lambda t) dt = \frac{T}{2}$$

y

$$\int_0^T \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) dt = 0,$$

se concluye que en términos de la base canónica usual de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ se tiene

$$\langle \vec{u}, (A - B)\vec{u} \rangle = -\langle \lambda J\vec{d} + B\vec{c}, \vec{c} \rangle + \langle \lambda J\vec{d} - B\vec{d}, \vec{d} \rangle,$$

donde la matriz asociada a esta forma en la base natural de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ es

$$Q(\lambda, B) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Resulta que para esta matriz el índice ha sido calculado en [4], Lema 12.6, y es igual a $2n$.

3.3 El Problema Variacional Finito Dimensional

Ahora aprovecharemos que el hessiano de h fue asumido acotado; esto es, existe algún $\beta > 0$ con el cual

$$\|D_{xx}h(t, x)\| \leq \beta$$

para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$.

Para el operador continuo F , definido con anterioridad, tenemos, directamente de la definición y el teorema del valor medio usual, la cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|^2 &= \int_0^T \|F(u)(t) - F(v)(t)\|^2 dt \\ &= \int_0^T \|D_x h(t, u(t)) - D_x h(t, v(t))\|^2 dt \\ &\leq \int_0^T \beta^2 \|u(t) - v(t)\|^2 dt \\ &= \beta^2 \|u - v\|^2; \end{aligned}$$

lo cual indica que F es globalmente Lipschitz. Por otro lado, de la definición de F se tiene

$$\begin{aligned} \langle F(u) - F(v), u - v \rangle &= \int_0^T \langle F(u)(t) - F(v)(t), u(t) - v(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle D_x h(t, u(t)) - D_x h(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

y debido a la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el teorema de valor medio, se cumple

$$\begin{aligned} |\langle F(u) - F(v), u - v \rangle| &= \left| \int_0^T \langle D_x h(t, u(t)) - D_x h(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt \right| \\ &\leq \int_0^T |\langle D_x h(t, u(t)) - D_x h(t, v(t)), u(t) - v(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_0^T \|D_x h(t, u(t)) - D_x h(t, v(t))\| \|u(t) - v(t)\| dt \\ &\leq \int_0^T \sup\{\|D_{xx}h(t, x)\|\} \|u(t) - v(t)\|^2 dt \\ &\leq \int_0^T \beta \|u(t) - v(t)\|^2 dt \\ &= \beta \|u - v\|^2. \end{aligned}$$

En resumen, se satisface

$$|\langle F(u) - F(v), u - v \rangle| \leq \beta \|u - v\|^2. \quad (3.7)$$

Consideremos ahora α y γ en \mathbb{R} tales que $\alpha < -\beta < \beta < \gamma$. Entonces, por (3.7), tenemos

$$\alpha \|u - v\|^2 \leq \langle F(u) - F(v), u - v \rangle \leq \gamma \|u - v\|^2. \quad (3.8)$$

Ahora ordenamos $\sigma(A) = \{\lambda_k = \frac{2k\pi}{T}, k \in \mathbb{Z}\}$, el espectro de A , como

$$\cdots \lambda_{-2} < \lambda_{-1} = -\frac{2\pi}{T} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 = \frac{2\pi}{T} < \lambda_2 < \cdots$$

Sin pérdida de generalidad asumimos que α y γ no pertenecen a $\sigma(A)$, de modo que $\sigma(A) \cap (\alpha, \gamma)$ consta a lo mucho de un número finito de autovalores. Por lo tanto, ellos satisfacen la siguiente relación,

$$\cdots < \lambda_{-(m+1)} < \alpha < \lambda_{-m} < \cdots < \lambda_0 < \cdots < \lambda_m < \gamma < \lambda_{m+1} < \cdots \quad (3.9)$$

si asumimos $\alpha = -\gamma$.

Observación 3.3 Por ser $\{w_{kj}\}$ base de L^2 , todo $u \in L^2$ acepta representación $u = \sum_{k,j} a_{kj} w_{kj}$. Esta notación no es muy afortunada porque lo que en realidad queremos expresar con ella es

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} a_{kj} w_{kj}.$$

Si para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos $u_k = \sum_{j=1}^{2n} a_{kj} w_{kj}$, tenemos $u_k \in E(\lambda_k)$ y ahora sí, en

$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k$ encontramos una descomposición más acorde.

Para $i \neq k$, los espacios propios $E(\lambda_i)$ y $E(\lambda_k)$ son ortogonales. Por lo tanto, y puesto que A es un operador lineal autoadjunto, se cumple

$$Au = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k u_k.$$

Convengamos en llamar P_k a la proyección de L^2 sobre $\text{Ker}(A - \lambda_k)$, es decir, $P_k(u) = u_k$. Por lo observado en el párrafo anterior, para $k \neq j$, las proyecciones

P_k y P_j son ortogonales. Por lo tanto, con $\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k$ se recupera la identidad, y el operador A admite descomposición $A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k P_k$. En verdad, todo esto es parte de una teoría mucho más general para operadores normales. Lo que hemos detallado se llama la **descomposición espectral del operador A** .

A continuación definamos las proyecciones ortogonales P_-, P_+ y P_Z de L^2 en L^2 dadas por

$$P_- u = \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} u_k, \quad P_+ u = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k, \quad P_Z u = \sum_{k=-m}^m u_k.$$

Si ponemos también $X = Im(P_-)$, $Y = Im(P_+)$ y $Z = Im(P_Z)$, conseguimos $L^2 = X \oplus Y \oplus Z$. Notemos que Z es un subespacio de L^2 de dimensión $dim Z = \sum_{k=-m}^m m(\lambda_k)$ finita, donde $m(\lambda_k)$ denota la multiplicidad de λ_k . Es fácil ver que X, Y y Z son espacios de Hilbert y por lo tanto también lo es $X \times Y \times Z$.

Junto a ellos, definimos los operadores lineales autoadjuntos

$$\begin{aligned} R : L^2 &\longrightarrow X \quad \text{dado por} \quad Ru = \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} (\alpha - \lambda_k)^{-\frac{1}{2}} P_k u, \\ S : L^2 &\longrightarrow Y \quad \text{dado por} \quad Su = \sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-\frac{1}{2}} P_k u, \\ T : L^2 &\longrightarrow Z \quad \text{dado por} \quad Tu = \sum_{k=-m}^m (\lambda_k - \alpha)^{-\frac{1}{2}} P_k u, \end{aligned}$$

donde P_k denota la proyección ortogonal de L^2 sobre el espacio $Ker(A - \lambda_k)$ asociado con λ_k .

Lema 3.4 *Los operadores R, S y T son autoadjuntos. Además, restringidos a X, Y y Z respectivamente, son inyectivos. También se cumplen las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned} \|R\|^2 &\leq (\alpha - \lambda_{-(m+1)})^{-1}, \\ \|S\|^2 &\leq (\lambda_{m+1} - \alpha)^{-1}, \end{aligned}$$

y para cada $z \in Z$ se tiene

$$(\lambda_k - \alpha)^{-1} \|z\|^2 \leq \|Tz\|^2 \leq (\lambda_{-m} - \alpha)^{-1} \|z\|^2.$$

Prueba: Por (3.9), para cualquier entero $k \leq -(m + 1)$ se tiene $\alpha - \lambda_k > 0$ y para $k \geq -m$ se cumple $\lambda_k - \alpha > 0$. Ello implica $(\alpha - \lambda_{-(m+1)})^{-1} > (\alpha - \lambda_k)^{-1}$ para todo $k \leq -(m + 1)$ y $(\lambda_{m+1} - \alpha)^{-1} > (\lambda_k - \alpha)^{-1}$ para $k \geq m + 1$.

Presentaremos la prueba sólo para S puesto que el trabajo es análogo para T y R . Primeramente, probemos que S es autoadjunto. Por la Observación 3.3, el producto interno $\langle Su, v \rangle$ se expresa cual

$$\begin{aligned} \langle Su, v \rangle &= \left\langle \sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-\frac{1}{2}} P_k u, \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k v \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k u, \sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-\frac{1}{2}} P_k v \right\rangle \\ &= \langle u, Sv \rangle, \end{aligned}$$

y por lo tanto S es autoadjunto.

Ahora, si $Su = 0$, entonces $(\lambda_k - \alpha)^{-\frac{1}{2}} P_k u = 0$ y por lo tanto $P_k u = 0$ para $k \geq m + 1$. Si además $u \in Y$, entonces $P_k u = 0$ para $k > \infty$ y así $u = 0$, lo que prueba la inyectividad de S cuando se restringe a Y .

Además, debido a que los P_k son ortogonales entre sí y $P_k^2 = P_k$, se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k \\ R^2 &= \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} (\alpha - \lambda_k)^{-1} P_k \\ T^2 &= \sum_{k=-m}^m (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k \end{aligned}$$

Luego, para $u \in L^2$ se cumple

$$\begin{aligned} \langle Su, Su \rangle &= \langle S^2 u, u \rangle && \text{- por ser } S \text{ autoadjunto -} \\ &\leq \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} u_k \right\| \|u\| && \text{- por Cauchy-Schwartz -} \\ &= \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \|(\lambda_k - \alpha)^{-1} u_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\| && \text{- identidad de Parseval -} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda_{m+1} - \alpha)^{-2} \|u_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\| \quad - \text{por (3.9) -} \\
 &= (\lambda_{m+1} - \alpha)^{-1} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \|u_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\| \\
 &\leq (\lambda_{m+1} - \alpha)^{-1} \|u\|^2;
 \end{aligned}$$

o lo que es idéntico

$$\|S\|^2 \leq (\lambda_{m+1} - \alpha)^{-1}. \quad \blacksquare$$

Observación 3.4 Notemos que la igualdad

$$\langle F(u) - F(v) - \alpha(u - v), u - v \rangle = \langle F(u) - F(v), u - v \rangle - \alpha \|u - v\|^2,$$

junto con (3.8) y (3.7), implica

$$0 \leq \langle F(u) - F(v) - \alpha(u - v), u - v \rangle \leq (\beta - \alpha) \|u - v\|^2,$$

de donde, si definimos $G \in C(H^1, H^1)$ por $G(u) = F(u) - \alpha u$, ésta resulta continua y fuertemente monótona según la definición 1 del Apéndice. De lo desarrollado en el Apéndice, se obedece además que G es un operador cuyo potencial, definido por $\Gamma(u) = \Phi(u) - \frac{\alpha}{2} \|u\|^2$, para $u \in H^1$, donde $\Phi(u)$ es el potencial del operador continuo F , cumple $G = \nabla \Gamma$, y gracias a lo realizado arriba, el efecto de G queda resumido en

$$0 \leq \langle G(u) - G(v), u - v \rangle \leq (\beta - \alpha) \|u - v\|^2,$$

para todo $u, v \in H^1$.

Por otro lado, de la definición de G , la ecuación $Au = F(u)$ es equivalente a $(A - \alpha I)u = G(u)$. Por el Teorema 1 del Apéndice, la ecuación anterior tiene solución única, y como α no se sitúa en el espectro de A , la restricción de $A - \alpha I$ al espacio D es inyectiva.

Ahora, probaremos la igualdad

$$-R^2 + S^2 + T^2 = (A - \alpha)^{-1}. \quad (3.10)$$

En efecto, se cumple

$$\begin{aligned}
 & (-R^2 + S^2 + T^2)(A - \alpha) = \\
 & = \left(- \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} (\alpha - \lambda_k)^{-1} P_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k + \sum_{k=-m}^m (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k \right) \\
 & \quad \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k P_k - \alpha I \right) \\
 & = \left(- \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} (\alpha - \lambda_k)^{-1} P_k + \sum_{k=-m}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k P_k - \alpha I \right) \\
 & = \left(- \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} (\alpha - \lambda_k)^{-1} P_k + \sum_{k=-m}^{\infty} (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} \lambda_k P_k + \sum_{k=-m}^{\infty} \lambda_k P_k - \alpha I \right) \\
 & = \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} -\lambda_k (\alpha - \lambda_k)^{-1} P_k + \sum_{k=-m}^{\infty} \lambda_k (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k + \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} \alpha (\alpha - \lambda_k)^{-1} P_k \\
 & \quad + \sum_{k=-m}^{\infty} -\alpha (\lambda_k - \alpha)^{-1} P_k \\
 & = \sum_{k=-\infty}^{-(m+1)} \left(\frac{\alpha - \lambda_k}{\alpha - \lambda_k} \right) P_k + \sum_{k=-m}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k - \alpha}{\lambda_k - \alpha} \right) P_k \\
 & = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \\
 & = I.
 \end{aligned}$$

Análogamente se prueba $(A - \alpha)(-R^2 + S^2 + T^2) = I$, y podemos concluir $-R^2 + S^2 + T^2 = (A - \alpha)^{-1}$, siempre y cuando trabajemos sobre D .

Observación 3.5 Utilizando la relación (3.10) se llega a

$$-R^2 = -P_- R^2 = P_- (-R^2 + S^2 + T^2) = P_- (A - \alpha)^{-1} = (A - \alpha)^{-1} P_-,$$

y consecuentemente

$$-(A - \alpha)R^2 = P_-. \tag{3.11}$$

Similarmente encontramos las relaciones

$$(A - \alpha)S^2 = P_+ \tag{3.12}$$

y

$$(A - \alpha)T^2 = P_Z. \tag{3.13}$$

Debemos recordar que andamos tras soluciones periódicas. Por lo tanto, de ahora en adelante trabajaremos en $D \subset L^2$. Así por ejemplo, cuando hablemos de X, Y o Z , realmente nos referiremos a $X \cap D, Y \cap D$ y $Z \cap D$.

Para exhibir la estructura de punto silla de la funcional $\mathcal{L}(u) = \langle Au, u \rangle - \Phi(u)$, introducimos una nueva funcional f , la cual sí está definida sobre todo H , y cuyos puntos críticos están en correspondencia uno a uno con las soluciones de la Ecuación 3.4.

Definamos $f : X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) + \Gamma(Rx + Sy + Tz).$$

Debido al teorema de representación de Riesz, para $v \in Y$ se logra la identidad $[\nabla\Gamma \circ S](v) = [\nabla\Gamma](Sv) = \langle \nabla\Gamma, Sv \rangle$, y por ser S autoadjunta, $[\nabla\Gamma](Sv) = \langle \nabla\Gamma, Sv \rangle = \langle S\nabla\Gamma, v \rangle = \langle SG, v \rangle$. Por analogía, se obtienen resultados similares cuando derivamos respecto de la primera y tercera variables, y trabajamos con R y T respectivamente. De este modo, para todo $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ se obedece

$$\begin{aligned} D_1f(x, y, z) &= x + RG(Rx + Sy + Tz) \\ D_2f(x, y, z) &= -y + SG(Rx + Sy + Tz) \\ D_3f(x, y, z) &= -z + TG(Rx + Sy + Tz). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Como $G \in C(H^1)$, se tiene $f \in C^1(X \times Y \times Z; \mathbb{R})$. Además G es Lipschitz ya que F lo es, y ello hace la propiedad extensiva a $D_i f$, para $i = 1, 2, 3$.

Con todo lo expuesto no es difícil verificar el siguiente lema, el cual reduce el problema original a encontrar puntos críticos de f .

Lema 3.5 *El punto $(x_0, y_0, z_0) \in X \times Y \times Z$ es crítico para f si y sólo si $Rx_0 + Sy_0 + Tz_0$ es solución de la ecuación funcional $Au = F(u)$.*

Prueba. Supongamos primero que (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f , es decir, se cumple

$$\begin{aligned} D_1 f(x_0, y_0, z_0) &= x_0 + RG(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) = 0, \\ D_2 f(x_0, y_0, z_0) &= -y_0 + SG(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) = 0, \\ D_3 f(x_0, y_0, z_0) &= -z_0 + TG(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La aplicación de $-R, S, T$, en ese orden, nos conduce a

$$\begin{aligned} -Rx_0 - R^2G(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) &= 0 \\ -Sy_0 + S^2G(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) &= 0 \\ -Tz_0 + T^2G(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) &= 0. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro llegamos a

$$-(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) + (-R^2 + S^2 + T^2)G(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) = 0.$$

Como $(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) \in D$, podemos aplicar $(A - \alpha I)$ a ambos lados y obtener

$$(A - \alpha I)[-(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) + (-R^2 + S^2 + T^2)G(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0)] = 0,$$

de donde

$$(A - \alpha I)(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) = G(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0).$$

En consecuencia $Rx_0 + Sy_0 + Tz_0$ es solución de $(A - \alpha I)u = G(u)$, y por tanto también de $Au = F(u)$.

Recíprocamente, puesto que $u = Rx_0 + Sy_0 + Tz_0$ es solución de $Au = F(u)$ reemplazamos y logramos

$$-(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) + (-R^2 + S^2 + T^2)G(u) = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$(-Rx_0 - R^2G(u)) + (-Sy_0 + S^2G(u)) + (-Tz_0 + T^2G(u)) = 0.$$

Pero como R, S y T son ortogonales, cada uno de los sumandos anteriores se anula, y así

$$\begin{aligned} x_0 + RG(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) &\in \text{Ker}R, \\ -y_0 + SG(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) &\in \text{Ker}S, \\ -z_0 + TG(Rx_0 + Sy_0 + Tz_0) &\in \text{Ker}T. \end{aligned}$$

Finalmente, por el Lema 3.4 los operadores $R|_X, S|_Y$ y $T|_Z$ son inyectivos, y concluimos que (3.15) queda satisfecha. ■

Observación 3.6 Recordemos que en nuestro contexto X e Y son espacios de Hilbert, y por consiguiente tendremos $D_1f(\cdot, y, z) : X \rightarrow X$ y $D_2f(x, \cdot, z) : Y \rightarrow Y$. También, definamos $\rho = \frac{\lambda_{m+1} - \gamma}{\lambda_{m+1} - \alpha}$, el cual, en vista de (3.9), cumple

$$0 < \rho < 1.$$

Lema 3.6 *Sea ρ como arriba. La aplicación $D_1f(\cdot, y, z) : X \rightarrow X$ es ρ -monótona para cada $(y, z) \in Y \times Z$; lo mismo es válido para el operador $-D_2f(x, \cdot, z)$ con $(x, z) \in X \times Z$ fijo.*

Prueba. Probaremos que $D_1f(\cdot, y, z)$ es ρ -monótona. La prueba para el operador $-D_2f(x, \cdot, z)$ es análoga.

Debemos verificar se satisface

$$\langle D_1f(u, y, z) - D_1f(v, y, z), u - v \rangle \geq \rho \|u - v\|^2$$

para cada $u, v \in X$. Para todo $(y, z) \in Y \times Z$ fijo se tiene

$$\begin{aligned} \langle D_1f(u, y, z) - D_1f(v, y, z), u - v \rangle &= \\ &= \langle u + RG(Ru + Sy + Tz) - v - RG(Rv + Sy + Tz), u - v \rangle \\ &= \langle u - v + RG(Ru + Sy + Tz) - RG(Rv + Sy + Tz), u - v \rangle \\ &= \|u - v\|^2 + \langle RG(Ru + Sy + Tz) - RG(Rv + Sy + Tz), u - v \rangle, \end{aligned}$$

y puesto que R es autoadjunto, la expresión anterior se reduce a

$$\|u - v\|^2 + \langle G(Ru + Sy + Tz) - G(Rv + Sy + Tz), Ru - Rv \rangle.$$

Luego, por las Observaciones 3.4 y 3.6, tenemos

$$\langle G(Ru + Sy + Tz) - G(Rv + Sy + Tz), Ru - Rv \rangle \geq 0$$

y con ello

$$\langle D_1f(u, y, z) - D_1f(v, y, z), u - v \rangle \geq \|u - v\|^2 \geq \rho \|u - v\|^2.$$

Por lo tanto, para $(y, z) \in Y \times Z$, la derivada $D_1f(\cdot, y, z)$ es ρ -monótona. ■

Lema 3.7 Existe una función $(x(\cdot), y(\cdot)) : Z \longrightarrow X \times Y$ globalmente Lipschitz tal que para cada $z \in Z$, el punto $(x(z), y(z))$ es el único punto de silla de $f(\cdot, \cdot, z) : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$; es más, con ellas se satisface

$$\begin{aligned} x(z) + RG(Rx(z) + Sy(z) + Tz) &= 0, \\ -y(z) + SG(Rx(z) + Sy(z) + Tz) &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, la función $g : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(z) = f(x(z), y(z), z)$ es de clase C^1 y para cada $z \in Z$ su derivada $Dg : Z \longrightarrow Z$ viene dada por $Dg(z) = -z + TG(Rx(z) + Sy(z) + Tz)$. Además para $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ se cumple

$$f(x(z), y, z) \leq g(z) \leq f(x, y(z), z).$$

Prueba. Esto es una consecuencia directa de haber probado que D_1f y D_2f son ρ -monótonas junto con las relaciones en (3.15) y los resultados que se desarrollan a continuación.

Lema 3.8 Si M es una función fuertemente monótona en un espacio vectorial finito dimensional V , entonces M es sobreyectiva.

Prueba: Si M es fuertemente monótona, entonces, si $u \neq v$ se tiene

$$\langle Mu - Mv, u - v \rangle \geq \rho \|u - v\|^2 > 0$$

y por tanto $Mu \neq Mv$. De este modo M es inyectiva, y por el teorema de rango también es sobreyectiva. ■

Teorema 3.2 Sea $f \in C^1(X \times Y \times Z; \mathbb{R})$ y $\rho > 0$ tales que

i) $D_1f(\cdot, y, z) : X \longrightarrow X$ es ρ -monótona, para todo $(y, z) \in Y \times Z$.

ii) $-D_2f(x, \cdot, z) : Y \longrightarrow Y$ es ρ -monótona, para todo $(x, z) \in X \times Z$.

Existe una función $(x(\cdot), y(\cdot)) \in C(Z, X \times Y)$ tal que $(x(z), y(z))$ es el único punto de silla de $f(\cdot, \cdot, z)$, para cada $z \in Z$. Además, la función $g : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(z) = f(x(z), y(z), z)$ es de clase C^1 y su derivada está dada por $Dg(z) = D_3f(x(z), y(z), z)$.

Prueba. De las hipótesis i) y ii) y la primera parte del Lema 2 del Apéndice, se concluye que $f(\cdot, y, z)$ y $-f(x, \cdot, z)$ son ρ -convexas para cada

$(y, z) \in Y \times Z$ y $(x, z) \in X \times Z$ respectivamente. Así, por definición de ρ -convexidad, las aplicaciones $x \mapsto f(x, y, z) - \frac{\rho}{2}\|x\|^2$ y $y \mapsto -f(x, y, z) - \frac{\rho}{2}\|y\|^2$ son convexas. Por lo tanto, para cada $z \in Z$ la función $f_\rho : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_\rho = f(x, y, z) - \frac{\rho}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2)$, en el lenguaje del Apéndice, es cóncava - convexa. De la parte ii) del Lema 3 del Apéndice, la función

$$T_z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_\rho(x, y, z) \\ -D_2 f_\rho(x, y, z) \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(x, y, z) \\ -D_2 f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

es ρ -monótona. Así definida, para todo $z \in Z$ se tiene $T_z \in C(X \times Y, X \times Y)$ y como además se cumple $\rho > 0$, resulta ser fuertemente monótona.

Por el Teorema 1 del Apéndice, para todo $z \in Z$, la función T_z arroja exactamente un cero, el cual denotaremos por $(x(z), y(z))$. Ahora, como $f(\cdot, y, z)$ es ρ -convexa y $\rho > 0$, por el Lema 2, $f(\cdot, y, z)$ es convexa. Similarmente $-f(x, \cdot, z)$ también es convexa. En consecuencia $f(\cdot, \cdot, z)$ es cóncava - convexa, y, por el Lema 3, el par $(x(z), y(z))$ es su único punto de silla. Por dicho motivo se satisface

$$f(x(z), y, z) \leq g(z) \leq f(x, y(z), z)$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$ y $z \in Z$.

Probaremos ahora $(x(\cdot), y(\cdot)) \in C(Z, X \times Y)$. Sea $u(z) = (x(z), y(z))$ con $z \in Z$. Recordemos que por definición se satisface $T_z(u(z)) = 0$. Consideremos una secuencia $z_j \in Z$ que tiende a z . Como la función T_z es ρ -monótona, se observa

$$\rho\|u(z) - u(z_j)\|^2 \leq \langle T_{z_j}(u(z)) - T_{z_j}(u(z_j)), u(z) - u(z_j) \rangle = \langle T_{z_j}(u(z)), u(z) - u(z_j) \rangle,$$

de donde, merced de los estimados de Cauchy-Schwarz, se logra

$$\rho\|u(z) - u(z_j)\| \leq \|T_{z_j}(u(z))\|.$$

Puesto que $z \mapsto T_z(u)$ es continua, se tiene $T_{z_j}(u(z)) \rightarrow T_z(u(z)) = 0$, y ello implica $u(z_j) \rightarrow u(z)$; es decir, confirmamos la continuidad de u .

Probaremos ahora que la función $g : Z \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(z) = f(x(z), y(z), z)$ es de clase C^1 con derivada $Dg(z) = D_3f(x(z), y(z), z)$. Por el teorema de representación de Riesz, basta caracterizar la acción de la derivada mediante un producto interno. Sean z y h arbitrarios en Z . Por la relación de silla se tiene

$$\begin{aligned}
 g(z+h) - g(z) - \langle D_3f(x(z), y(z), z), h \rangle &= \\
 &= f(x(z+h), y(z+h), z+h) - f(x(z), y(z), z) - \langle D_3f(x(z), y(z), z), h \rangle \\
 &\leq f(x(z), y(z+h), z+h) - f(x(z), y(z+h), z) - \langle D_3f(x(z), y(z), z), h \rangle \\
 &= \int_0^1 \langle D_3f(x(z), y(z+h), z+th) - D_3f(x(z), y(z), z), h \rangle dt \\
 &\leq \left(\int_0^1 \|D_3f(x(z), y(z+h), z+th) - D_3f(x(z), y(z), z)\| dt \right) \|h\|.
 \end{aligned}$$

Dividiendo entre $\|h\|$ y haciendo tender h a 0 se logra

$$\begin{aligned}
 \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z) - \langle D_3f(x(z), y(z), z), h \rangle}{\|h\|} \\
 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \|D_3f(x(z), y(z+h), z+th) - D_3f(x(z), y(z), z)\| dt \right).
 \end{aligned}$$

Sin embargo, tanto D_3f y como $y(\cdot)$ son continuas, y por lo mismo, el miembro derecho se anula en el límite, obteniéndose así

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z) - \langle D_3f(x(z), y(z), z), h \rangle}{\|h\|} \leq 0.$$

Apelando a la misma técnica, pero ahora utilizando la minoración de la fórmula de silla, se logra

$$\underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z) - \langle D_3f(x(z), y(z), z), h \rangle}{\|h\|} \geq 0.$$

Por consiguiente

$$Dg(z) = D_3f(x(z), y(z), z),$$

y g resulta de clase C^1 . ■

Con esta última afirmación hemos concluido la prueba del Lema 3.7.

Observación 3.7 Siendo el operador T lineal y autoadjunto, su inversa $T^{-1} : Z \rightarrow Z$ también lo es.

Si introducimos las funciones

$$a = -g \circ T^{-1} \in C^1(Z, \mathbb{R}) \quad (3.16)$$

y

$$u(z) = Rx(T^{-1}z) + Sy(T^{-1}z) + z, \quad (3.17)$$

entonces, por el Lema 3.7 ocurre que $u(\cdot) : Z \rightarrow H$ es globalmente Lipschitz, y $u(z) \in \text{dom}(A)$ para todo $z \in Z$. Además, a tiene derivada globalmente Lipschitz dada por

$$a' = -T^{-1} \circ g' \circ T^{-1}. \quad (3.18)$$

Así, el Lema 3.7 implica que z es un punto crítico de a si y sólo si $T^{-1}(z)$ es un punto crítico de g , lo cual ocurre si y sólo si $(x(T^{-1}z), y(T^{-1}z), T^{-1}z)$ es punto crítico de f , lo cual, según el Lema 3.5 equivale a que

$$u(z) = Rx(T^{-1}z) + Sy(T^{-1}z) + T(T^{-1}z),$$

es solución de $Au = F(u)$.

Por lo tanto, hemos reducido el problema original de encontrar una solución no trivial de la ecuación $Au = F(u)$ al problema equivalente de hallar puntos críticos de una función $a = a(z)$ definida sobre el subespacio de dimensión finita $Z = PH \subset H$, donde $P = \sum_{-\beta < \lambda < \beta} E_\lambda$ es la proyección sobre el espacio propio del operador autoadjunto A perteneciente a los autovalores en $(-\beta, \beta)$. Aquí E_λ es la resolvente espectral del operador A . Recuérdese que hemos asumido $\beta \notin \sigma(A)$.

Condensamos esta reducción del problema variacional de dimensión finita en el siguiente enunciado.

Lema 3.9 *Existe una función $a \in C^2(Z, \mathbb{R})$ y una aplicación de clase C^1 e inyectiva $u : Z \rightarrow H$ tal que $u(z) \in \text{dom}(A)$ e $\text{Im}(u'(z)) \subset \text{dom}(A)$ para cada $z \in Z$, la cual goza de las siguientes propiedades.*

- i) Un elemento $z \in Z$ es punto crítico de la función a , esto es $a'(z) = 0$, si y sólo si $u(z)$ es solución de la ecuación $Au = F(u)$, vale decir, una solución T -periódica de la ecuación Hamiltoniana (3.1).*
- ii) La aplicación u tiene la forma $u(z) = z + v(z)$ con $Pv(z) = 0$. Aquí P es la proyección sobre H .*
- iii) La función a está dada por*

$$a(z) = -f(u(z)) = \frac{1}{2} \langle Au(z), u(z) \rangle - \Phi(u(z));$$

su derivada es globalmente Lipschitziana, continua y además satisface

$$\begin{aligned} a'(z) &= Az - P_Z F(u(z)) = Au(z) - F(u(z)), \\ a''(z) &= (A - F'(u(z))) \cdot u'(z) = A|_Z - P_Z F'(u(z)) \cdot u'(z). \end{aligned}$$

- iv) Si F es lineal, es decir $F(u) = Bu$, donde B es una matriz simétrica independiente del tiempo, entonces $a'(z) = (A - B)z$.*
- v) Si N es un espacio topológico, y si $F : N \times H \rightarrow H$ es una aplicación continua tal que, para cada $\sigma \in N$, la función $F(\sigma, \cdot) : H \rightarrow H$ es un operador potencial continuo que satisface (3.7), y la constante β es independiente de σ , entonces la correspondiente aplicación $u = u(\sigma, z)$ es continua.*

Prueba. La primera parte es una consecuencia directa del Lema 3.7.

A continuación detallamos la segunda parte, la cual equivale a probar que la ecuación

$$Av(z) = (I_H - P)F(v(z) + z)$$

tiene solución $v(z)$, donde $v(z) = u(z) - z$ obedece $Pv(z) = 0$.

En efecto, por lo observado en la página anterior, se tiene

$$\begin{aligned} v(z) &= u(z) - z \\ &= Rx(T^{-1}z) + Sy(T^{-1}z), \end{aligned}$$

para todo $z \in Z$. Dado que $(Rx(T^{-1}z), Sy(T^{-1}z)) \in X \times Y$ esta caracterizado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} ARx(T^{-1}z) - P_-F(u(z)) &= 0 \\ ASy(T^{-1}z) - P_+F(u(z)) &= 0, \end{aligned}$$

se infiere la cadena de igualdades

$$\begin{aligned} Av(z) &= A[Rx(T^{-1}z) + Sy(T^{-1}z)] \\ &= ARx(T^{-1}z) + ASy(T^{-1}z) \\ &= P_-F(u(z)) + P_+F(u(z)) \\ &= (I_H - P)F(v(z) + z). \end{aligned}$$

Conocido este hecho, aplicamos el operador proyección $P = P_Z$ a $v(z)$ para lograr

$$Pv(z) = P[Rx(T^{-1}x) + Sy(T^{-1}z)] = 0,$$

pues el rango de tanto R como de S caen fuera de Z .

Pasemos a la tercera parte. Probaremos ahora que para cada $z \in Z$ se obedece $a(z) = -g(T^{-1}z) = \frac{1}{2}\langle Au(z), u(z) \rangle - \Phi(u(z))$. Si ponemos

$$R^{-1} = (R|_X)^{-1} : im(R) \subset X \longrightarrow X$$

y

$$S^{-1} = (S|_Y)^{-1} : im(S) \subset Y \longrightarrow Y,$$

entonces, por la relación (3.11) obtenemos, para todo $x \in X$ tal que Rx pertenece al dominio de A , lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \|R^{-1}Rx\|^2 &= \langle R^{-2}Rx, Rx \rangle = -\langle P_-^{-1}(A - \alpha)Rx, Rx \rangle \\ &= -\langle (A - \alpha)Rx, Rx \rangle. \end{aligned}$$

De igual manera, de (3.12) llegamos a

$$\begin{aligned} \|y\|^2 = \|S^{-1}Sy\|^2 &= \langle S^{-2}Sy, Sy \rangle = \langle P_+^{-1}(A - \alpha)Sy, Sy \rangle \\ &= \langle (A - \alpha)Sy, Sy \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in Y$ tal que Sy pertenece al dominio de A . Finalmente de (3.13) se logra

$$\|z\|^2 = \|T^{-1}Tz\|^2 = \langle (A - \alpha)Tz, Tz \rangle, \quad \text{para todo } z \in Z.$$

Consecuentemente, podemos desplegar

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) + \Gamma(Rx + Sy + Tz) \\ &= \frac{1}{2} [-\langle (A - \alpha)Rx, Rx \rangle - \langle (A - \alpha)Sy, Sy \rangle - \\ &\quad \langle (A - \alpha)Tz, Tz \rangle] + \Gamma(Rx + Sy + Tz) \\ &= -\frac{1}{2} \langle A(Rx + Sy + Tz), Rx + Sy + Tz \rangle + \Gamma(Rx + Sy + Tz) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \|Rx + Sy + Tz\|^2. \end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ tal que Rx, Sy pertenecen al dominio de A .
Ahora la representación aseverada de $a(z)$ sigue de (3.16) y (3.17), y es

$$a(z) = \frac{1}{2} \langle Au(z), u(z) \rangle - \Phi(u(z)).$$

Ahora calculemos la derivada, cual se obtiene a partir de (3.18) con la ayuda de (3.14) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a'(z) &= [-T^{-1} \circ g' \circ T^{-1}](z) = -T^{-1}[g'(T^{-1}z)] \\ &= -T^{-1}[D_3f(x(T^{-1}z), y(T^{-1}z), T^{-1}(z))] \\ &= -T^{-1}[-T^{-1}z + TG(Rx(T^{-1}z) + Sy(T^{-1}z) + TT^{-1}z)] \quad \text{-por (3.14)-} \\ &= -T^{-1}[-T^{-1}z + TG(Rx(T^{-1}z) + Sy(T^{-1}z) + z)] \\ &= -T^{-1}[-T^{-1}z + TG(u(z))] \\ &= T^{-2}z - G(u(z)) \\ &= P_Z^{-1}(A - \alpha)z - Fu(z) + \alpha u(z) \quad \text{-por (3.13)-} \end{aligned}$$

Aplicando el operador proyección P_Z a la igualdad anterior, obtenemos la cadena de igualdades

$$\begin{aligned} P_Z a'(z) &= P_Z[P_Z^{-1}(A - \alpha)z - Fu(z) + \alpha u(z)] \\ &= Az - \alpha z - P_Z F(u(z)) + \alpha P_Z u(z) \\ &= Az - \alpha z - P_Z F(u(z)) + \alpha z \\ &= Az - P_Z F(u(z)). \end{aligned}$$

Si aprovechamos que como en $a(z)$, el valor z pertenece por definición a Z lo mismo es válido para $a'(z)$, de la igualdad $P_Z a'(z) = a'(z)$ concluimos lo deseado. Si además recordamos $Av(z) + PF(u(z)) = Fu(z)$ logramos la segunda caracterización.

Para la segunda derivada, nos basamos en lo desarrollado al inicio. De $Av(z) = (I - P)F(u(z))$ se logra

$$Av'(z) = (I - P)F'(u(z))u'(z),$$

lo cual equivale a poner

$$A(u'(z) - I_Z) = F'(u(z))u'(z) - PF'(u(z))u'(z),$$

o lo que es lo mismo

$$Au'(z) - A|_Z = F'(u(z))u'(z) - PF'(u(z))u'(z).$$

Reordenando llegamos a

$$Au'(z) - F'(u(z))u'(z) = A|_Z - PF'(u(z))u'(z).$$

Finalmente al derivar la caracterización de a' se llega a

$$a''(z) = Au'(z) - F'(u(z))u'(z) = [A - F'(u(z))]u'(z).$$

Por lo expuesto atrás ésta expresión es igual a $A|_Z - P_ZF'(u(z))u'(z)$.

Para la cuarta parte se tiene

$$\begin{aligned} a'(z) &= Az - P_ZF(u(z)) = Az - P_ZBu(z) && \text{-por hipótesis-} \\ &= Az - BP_Zu(z) = Az - Bz && \text{-por el Lema 3.3-,} \end{aligned}$$

y por tanto

$$a'(z) = (A - B)z.$$

Finalmente supongamos que N es un espacio topológico, y $F : N \times H \rightarrow H$ una aplicación continua tal que, para cada $\sigma \in N$, la función $F(\sigma, \cdot) : H \rightarrow H$ satisface (3.17) (con β independiente de σ). Entonces, denotando por $\Phi(\sigma, \cdot)$ el potencial de $F(\sigma, \cdot)$, y definiendo $f(\sigma, \cdot) : X \times Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(\sigma, x, y, z) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) + \Gamma(\sigma, Rx + Sy + Tz),$$

según el Lema 3.7, para cada $(\sigma, z) \in N \times Z$, existe un único punto silla $(x(\sigma, z), y(\sigma, z))$ de $f(\sigma, \cdot, \cdot, z) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, de modo tal que se cumple $(x(\cdot, \cdot), y(\cdot, \cdot)) \in C(N \times Z, X \times Y)$. Además,

$$(x(\sigma, \cdot), y(\sigma, \cdot)) : Z \rightarrow X \times Y$$

es globalmente Lipschitz, uniformemente con respecto a $\sigma \in N$. Sea

$$g(\sigma, z) = f(\sigma, (x(\sigma, z), y(\sigma, z)), z)$$

para todo $(\sigma, z) \in N \times Z$. Entonces $g(\sigma, \cdot) \in C^1(Z, \mathbb{R})$ para cada $\sigma \in N$, y $D_2g(\sigma, \cdot) : Z \rightarrow Z$ es globalmente Lipschitz, uniformemente con respecto a $\sigma \in N$. De este modo, z es un punto crítico de $g(\sigma, \cdot)$ si y sólo si $Rx(\sigma, z) + Sy(\sigma, z) + Tz$ es una solución de la ecuación $Au = F(\sigma, u)$, donde $\sigma \in N$.

Por lo tanto la aplicación $u(\sigma, \cdot) : Z \rightarrow Z$ es continua. ■

En conclusión, mediante el Lema 3.9 las soluciones periódicas requeridas de (3.1) están en correspondencia uno a uno con los puntos críticos de la función a definida sobre el espacio Z de dimensión finita.

3.4 Teoría de Morse para el Problema Reducido

A fin de encontrar los puntos críticos de la función a aplicamos la teoría de Morse descrita en el Capítulo 2 al flujo gradiente del sistema

$$\dot{z} = a'(z), \quad (3.19)$$

el cual, según el Lema 3.9, está bien definido (Ver también [7]). Primero mostramos que el conjunto S de soluciones acotadas de (3.19) es compacto, siempre que las suposiciones del Teorema 3.1 sean satisfechas. Recordemos que estamos asumiendo, en adición a $\|D_{xx}h(t, x)\| \leq \beta$, que nuestro campo vectorial hamiltoneano es asintóticamente lineal, vale decir cumple

$$JD_x h(t, x) = JA_\infty(t)x + o(\|x\|) \quad (3.20)$$

uniformemente en t , cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, donde $A_\infty(t) = A_\infty(t + T)$ es un lazo continuo de matrices simétricas.

Lema 3.10 *Asumamos que se verifica (3.20) y la ecuación hamiltoneana lineal $\dot{x} = JA_\infty(t)x$ es no degenerada. Denotemos el índice de esta última por j_∞ . Entonces el conjunto S de soluciones acotadas de (3.19) es compacto, y tiene índice del tipo homotópico de una esfera puntual S^{m_∞} de dimensión m_∞ , es decir*

$$h(S) = [\dot{S}^{m_\infty}], \quad \text{donde } m_\infty = \frac{1}{2} \dim Z - j_\infty;$$

además $p(t, h(S)) = t^{m_\infty}$.

Prueba. De acuerdo con el Teorema 1.1 existe una familia continua de lazos $B_\sigma(t)$, $0 \leq \sigma \leq 1$, tal que $B_\sigma(t + T) = B_\sigma(t)$ con la propiedad que 1 no es un multiplicador de Floquet de $\dot{x} = JB_\sigma(t)x$ para todo $0 \leq \sigma \leq 1$, y que, para $\sigma = 1$ se cumple $B_1(t) = A_\infty(t)$ y, para $\sigma = 0$, el lazo constante $B_0(t) = A_0$ tiene índice $j_\infty = j(A_0)$.

Definamos la familia continua de operadores potencial F_σ vía

$$F_\sigma(u) = B_\sigma u + \sigma(F(u) - A_\infty u), \quad (3.21)$$

donde $0 \leq \sigma \leq 1$ y $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$. Notemos que para $\sigma = 1$ se cumple $F_1(u) = F(u)$, mientras para $\sigma = 0$, se tiene $F_0(u) = A_0 u$. Además F_σ satisface (3.7) para algún $\beta > 0$ independiente del valor adoptado por σ , y por lo tanto da origen, por el Lema 3.9, a una familia continua de sistemas gradiente

$$\dot{z} = a'_\sigma(z). \quad (3.22)$$

Con $u = u(\sigma, z)$ tenemos, por el Lema 3.9 (iii) y por (3.21), que se cumple

$$a'_\sigma(z) = Au - F_\sigma(u) = (A - B_\sigma)u - \sigma(F(u) - A_\infty(u)). \quad (3.23)$$

En el Lema 4 del Apéndice probamos que existen constantes $\lambda > 0$ y $\delta > 0$, independientes de σ , tal que

$$\|a'_\sigma(z)\| \geq \lambda\|z\| - \delta, \quad (3.24)$$

para $z \in Z$.

Si S_σ denota el conjunto de soluciones acotadas de la ecuación (3.22), entonces la desigualdad (3.24) implica la existencia de un conjunto compacto K que contiene a S_σ en su interior para todo $\sigma \in [0, 1]$. (Ver también Conley, C. [7], Sección II.4.3.A). Por lo tanto K es una vecindad aislante para los conjuntos invariantes aislados S_σ , $\sigma \in [0, 1]$, los cuales están por lo tanto relacionados por continuación.

Así, por la invariancia del índice homotópico, el índice homotópico de S_σ es independiente de $\sigma \in [0, 1]$, es decir, $h(S_\sigma) = h(S)$.

Para $\sigma = 0$, el campo vectorial a'_σ viene dado, gracias al Lema 3.9 (iv), por

$$a'_0(z) = (A - A_0)z. \quad (3.25)$$

Dado que 0 no pertenece al espectro de $A - A_0$ (aplicar con $\lambda = 0$ el Lema 3.3; comparar también la discusión que antecede a la definición de $j(A_0)$, despegada en la Fórmula (1.1)), el conjunto invariante aislado S_0 del sistema (3.25) consiste exactamente del punto de reposo hiperbólico $z = 0$ del flujo definido por a'_0 ; de aquí $S_0 = \{0\}$. Pero el índice homotópico de un punto de reposo hiperbólico es el tipo homotópico de una esfera puntual \dot{S}^m , cuya dimensión, m es igual al número de autovalores positivos de a'_0 (Ver Conley, C. [7], Sección I.4.3).

Así, el índice homotópico $h(S_1)$ de S_1 es tipo $[\dot{S}^m]$, donde m corresponde al índice clásico de Morse positivo de $(A - A_0)|Z$; vale decir, m es la dimensión del subespacio maximal Z_+ de Z para el cual $(A - A_0)|Z_+$ es un operador positivo. En efecto, denotado por $j(A_0)$ el entero introducido en el Capítulo 1, los cálculos finales de la Sección 3.2 respecto al ejemplo considerado permiten concluir $m = \frac{1}{2} \dim Z - j(A_0)$. Poniendo $j_\infty = j(A_0)$, el Lema 3.10 queda probado. ■

Consideremos en adelante una solución periódica especial de la ecuación (3.1), es decir un punto de equilibrio x_0 del campo vectorial hamiltoniano, el cual por simplicidad asumimos el origen; de modo que $JD_x h(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 3.11 *Asumamos que $x_0(t) = 0$ sea una solución periódica no degenerada de la ecuación (3.1) con índice $j_0 \in \mathbb{Z}$. Entonces el correspondiente punto crítico $z_0 = 0 \in Z$ de a , por sí sólo, constituye un conjunto invariante aislado cuyo índice viene dado por*

$$h(\{z_0\}) = [\dot{S}^{m_0}], \quad \text{donde } m_0 = \frac{1}{2} \dim Z - j_0,$$

y por lo tanto $p(t, h(\{z_0\})) = t^{m_0}$.

Prueba. Gracias al Teorema 1.1 existe una deformación periódica B_σ que conecta el lazo de matrices $A_0(t) = B_1(t)$ con un lazo constante $B_0(t) = A_1$ para el cual el índice está dado por $j(A_1) = j_0$. Por definición, no existe un multiplicador Floquet igual 1 para el sistema lineal $\dot{x} = JB_\sigma(t)x$, si $\sigma \in [0, 1]$. Definimos la familia F_σ de operadores potencial por:

$$F_\sigma(u) = B_\sigma(u) + \sigma(F(u) - A_0u).$$

Entonces $F_1(u) = F(u)$ y $F_0(u) = A_1u$, donde los operadores B_σ , A_1 y $A_0 \in \mathcal{L}(H)$ son definidos como en (3.6) por medio de las matrices correspondientes. El operador F_σ satisface un estimado idéntico al presentado en (3.7) para $\sigma \in [0, 1]$ con una constante β independiente de σ , y por el Lema 3.9, da origen una familia a'_σ de sistemas gradiente sobre Z con la correspondiente familia $u(\sigma, z)$, tal que $a'_\sigma(0) = 0$ y $u(\sigma, 0) = 0$ para $\sigma \in [0, 1]$. Explícitamente tenemos $u = u(\sigma, z)$, $a'_\sigma(z) = (A - B_\sigma)u - \sigma(F(u) - A_0u)$. Como en la prueba del Lema 3.10, aparece un $\lambda > 0$ tal que, para $\sigma \in [0, 1]$, aún se cumple $|(A - B_\sigma)u| \geq \lambda|u|$ para $u \in \text{dom } A = D$. Además, como $F(0) = 0$ y $F'(0) = A_0 \in \mathcal{L}(H)$, tenemos $F(u) - A_0u = o(\|u\|)$ cuando $\|u\| \rightarrow 0$ en H . A partir de $|u(\sigma, z)| \geq |z|$ concluimos que existe $\varepsilon > 0$, independiente de σ , tal que si $|z| < \varepsilon$, entonces $|a'_\sigma(z)| \geq \lambda|z|$. Por consiguiente $z = 0$ es un punto crítico aislado para cada $\sigma \in [0, 1]$ y por lo tanto, un conjunto invariante aislado del correspondiente flujo gradiente asociado. Nosotros vemos, como en la prueba del Lema 3.11, que el índice de este conjunto invariante aislado no depende de $\sigma \in [0, 1]$ y también es el índice del punto crítico de $a'_\sigma(z)$ para $\sigma = 0$, función que por el Lema 3.9 (iv), viene dada por $a'_\sigma(z) = (A - A_1)z$. Dado que 0 no pertenece al espectro de $A - A_1$, el punto crítico $z = 0$ es hiperbólico y por lo tanto su índice es de tipo homotópico de una esfera puntual de dimensión $m_0 = \frac{1}{2} \dim Z - j_0$, con $j_0 = j(A_0)$. ■

Lema 3.12 Sea $x_0(t)$ una solución T -periódica no degenerada de la ecuación hamiltoniana (3.1) con índice j . Entonces z_0 , el correspondiente punto crítico de la funcional a sobre el espacio de lazos Z es un conjunto invariante aislado; su índice está dado por

$$h(\{z_0\}) = [\dot{S}^m], \quad \text{donde } m = \frac{1}{2} \dim Z - j,$$

por lo tanto $p(t, h(\{z_0\})) = t^m$. Además, el signo del Hessiano de a en z_0 es igual a $2j$. El grado local de a' en una vecindad de z_0 es igual a $(-1)^{n+j}$.

Prueba. Sea z_0 el punto crítico de a , correspondiente a la solución periódica $x_0(t)$, tal que $u(z_0)(t) = x_0(t)$, y hagamos $u_0 = u(z_0)$. Por el Lema 3.9 tenemos $a''(z_0) = (A - F'(u_0))u'(z_0)$, donde $F'(u_0) \in \mathcal{L}(H)$ está definida por la matriz $D_{xx}h(t, x_0(t))$. Debido a la no degeneración de la solución periódica tenemos, el estimado $|(A - F'(u_0))u| \geq \lambda|u|$ para $u \in \text{dom } A$. Además, como $u(z) = z + v(z)$ con $Pv(z) = 0$, concluimos

$$|u'(z_0)\zeta|^2 = |\zeta|^2 + |v'(z_0)\zeta|^2 \geq |\zeta|^2$$

para cada $\zeta \in Z$, y por lo tanto $|a''(z_0)\zeta| \geq \lambda|\zeta|$ para todo $\zeta \in Z$. De todo ello deducimos que z_0 es un punto crítico aislado.

Para determinar su índice reducimos el problema a la situación de los lemas previos y definimos, la familia de operadores potencial

$$F_\sigma(u) = F(u + \sigma u_0) - \sigma F(u_0), \tag{3.26}$$

los cuales continúan sujetos a (3.7) para $\sigma \in [0, 1]$.

Claramente se cumple $F_0(u) = F(u)$ y $F_1(u) = F(u + u_0) - F(u_0)$, así como $F_1(0) = 0$ y $F'_1(0) = F'(u_0)$. Hagamos $v_\sigma = (1 - \sigma)u_0$. Ahora probaremos la igualdad

$$Av_\sigma = F_\sigma(v_\sigma). \tag{3.27}$$

En efecto, como u_0 es una solución periódica, satisface $Au_0 = F'(u_0)$ y por lo tanto tenemos $Av_\sigma = A(1 - \sigma)u_0 = (1 - \sigma)Au_0 = (1 - \sigma)F'(u_0)u_0$.

El miembro derecho de (3.26) puede ser reescrito cual

$$F_\sigma(v_\sigma) = F(v_\sigma + \sigma u_0) - \sigma F(u_0) = F(u_0 - \sigma u_0 + \sigma u_0) - \sigma F(u_0) = F(u_0) - \sigma F(u_0);$$

de donde, junto con lo desarrollado en el párrafo anterior, se llega a (3.27).

Denotemos por a_σ y u_σ la familia de funcionales y aplicaciones presentes en la fórmula (3.26). Virtud al Lema 3.9 existe, para cada v_σ como en (3.27), un único punto crítico z_σ de a_σ tal que

$$v_\sigma = u(\sigma, z_\sigma).$$

Ahora comprobemos que los puntos críticos z_σ son aislados. Puesto que $F'_\sigma(v_\sigma) = F'(u_0)$, tenemos, para el Hessiano de a_σ en el punto z_σ , la igualdad

$$a''_\sigma(z_\sigma) = (A - F'(u_0))u'_\sigma(z_\sigma).$$

Por tal motivo, para $\sigma \in [0, 1]$, el estimado $|a''_\sigma(z_\sigma)\zeta| \geq \lambda|\zeta|$ se mantiene intacto para todo $\zeta \in Z$ y para algún $\lambda > 0$ independiente de σ . Por consiguiente los conjuntos invariantes aislados $S_\sigma = \{z_\sigma\}$, asociados con a'_σ , están relacionados por continuación, y así $h(\{z_\sigma\})$ es independiente de σ y por lo tanto igual al índice del punto crítico $z_1 = 0$ del flujo correspondiente al parámetro $\sigma = 1$. Este flujo es definido por $a'_1(z)$ en el problema $Au = G(u)$, donde $G(u) = F(u + u_0) - F(u_0)$. Dado que se cumple $G(0) = 0$ y $G'(0) = F'(u_0)$, el problema queda reducido a la prueba de los lemas previos, donde en este momento $A_0(t)$ es reemplazado por $D_{xx}h(t, x_0(t))$, y $x_0(t)$ es la solución periódica.

La primera expresión ahora se sigue por una nueva deformación del gradiente a'_1 al sistema lineal $(A - A_1)(z)$ para algún lazo constante con índice dado por $j(A_1) = j$.

Para probar la segunda mitad del lema observamos, por definición del espacio Z y por el Lema 2.1 de Conley Zehnder [7], la igualdad $\dim Z = 2n + 4l$ para algún entero positivo l .

Por lo tanto, para alguna vecindad abierta U de z_0 , se cumple

$$\text{grad}(a'(z), U, 0) = \text{sign}(\det a''(z_0)) = (-1)^{n+j} \quad \blacksquare$$

En conclusión, el Lema 3.12 permite establecer un paralelo entre el índice de una solución periódica no degenerada de la ecuación (3.1) y el índice del punto crítico correspondiente del flujo gradiente sobre el espacio de lazos (funciones).

3.5 Prueba del Teorema 3.1

Al poner $d = \frac{1}{2} \dim Z$, resulta que d es un entero pues $\dim Z$ es par. Sea S el conjunto de órbitas acotadas del flujo gradiente $\dot{z} = \nabla a(z)$, el cual consiste

de puntos críticos de a y de conexiones entre ellos. Por el Lema 3.9, los puntos críticos están en correspondencia uno a uno con las soluciones periódicas de la ecuación hamiltoneana (3.1).

Por el Lema 3.10 el conjunto invariante $S \subset Z$ es compacto y de tipo homotópico $h(S) = [\dot{S}^{m_\infty}]$ con $m_\infty = d - j_\infty$. Éste no es el índice del conjunto vacío, pues tal corresponde al de un espacio puntual de un punto y de aquí que tenga índice del tipo homotópico $[(\{p\}, p)]$ para un punto arbitrario p . Por lo tanto concluimos $S \neq \emptyset$. Ya que el conjunto ω -límite de órbitas acotadas de un sistema gradiente consiste de puntos críticos, se infiere que la función a posee al menos un punto crítico y consecuentemente la ecuación hamiltoneana admite al menos una solución T -periódica.

Si la órbita periódica encontrada arriba es no degenerada, a ella, por el Teorema 1.1, le corresponde un índice, denotado por $j \in \mathbb{Z}$. Por el Lema 3.12, el correspondiente punto crítico z de a es entonces un conjunto invariante aislado de índice $h(\{z\}) = [\dot{S}^m]$, donde $m = d - j$. Asumamos que z es el único punto crítico de a ; entonces $S = \{z\}$ puesto que estamos tratando con un sistema gradiente y, por lo tanto, $h(S) = [\dot{S}^m]$, el cual, por otra parte, es igual a $[\dot{S}^{m_\infty}]$ y en consecuencia $m = m_\infty$.

Por lo tanto, cuando $j \neq j_\infty$ (y por consiguiente $m \neq m_\infty$) debe aparecer más de un punto crítico para a .

Asumamos ahora que el sistema hamiltoneano posee dos órbitas periódicas no degeneradas de índices j_1 y j_2 . Ahora probaremos que hay al menos una tercera.

En efecto, de no ser ese el caso, el conjunto invariante aislado S contendría exactamente dos puntos críticos aislados z_1 y z_2 con índices $h(\{z_1\}) = [\dot{S}^{m_1}]$, $m_1 = d - j_1$, y $h(\{z_2\}) = [\dot{S}^{m_2}]$, $m_2 = d - j_2$. Si nosotros los rotulamos de modo que $a(z_1) \leq a(z_2)$, entonces (z_1, z_2) es una ordenada admisible de una descomposición de Morse de S . Del Teorema 2.4 concluimos la identidad

$$p(t, h(\{z_1\})) + p(t, h(\{z_2\})) = p(t, h(S)) + (1 + t)Q(t),$$

lo cual, por el Lema 3.12, conduce a la identidad

$$t^{m_1} + t^{m_2} = t^{m_\infty} + (1 + t)Q(t).$$

Al hacer $t = 1$ obtenemos la ecuación $2 = 1 + 2Q(1)$ la cual es incompatible con el hecho de que $Q(t)$ tenga coeficientes enteros. Así, debemos tener al menos tres puntos críticos para a .

Asumamos por último que todas las soluciones periódicas son no degeneradas y denotemos sus respectivos índices por j_k . Ellas corresponden a los

puntos críticos de a , los cuales son aislados. Al ser S compacto, hay una cantidad limitada de ellos, es decir (z_1, z_2, \dots, z_n) . Ahora los ordenamos de modo que $a(z_i) \leq a(z_j)$ si $i < j$. Entonces (z_1, z_2, \dots, z_n) es una ordenada admisible de una descomposición de Morse de S , y por el Teorema 2.4 y Lema 3.10 se tiene

$$\sum_{k=1}^n p(t, h(z_k)) = t^{m_\infty} + (1+t)Q(t),$$

con $m_\infty = d - j_\infty$. Por suposición, las soluciones periódicas son no degeneradas; por consiguiente, debido al Lema 3.12, conocemos la igualdad $p(t, h(z_k)) = t^{m_k}$, donde $m_k = d - j_k$, y de ese modo

$$\sum_{k=1}^n t^{m_k} = t^{m_\infty} + (1+t)Q(t),$$

y así, después de multiplicar por t^{-d} , donde $d = \frac{1}{2} \dim Z$, arribamos a la identidad del Teorema 3.1 parte b). Los detalles se desprenden de las relaciones

$$\begin{aligned} t^{-d} \sum_{k=1}^n t^{m_k} &= t^{-d}(t^{m_\infty} + (1+t)Q(t)), \\ \sum_{k=1}^n t^{m_k-d} &= t^{m_\infty-d} + t^{-d}(1+t)Q_d(t), \\ \sum_{k=1}^m t^{-j_k} &= t^{-j_\infty} + t^{-d}(1+t)Q_d(t). \end{aligned}$$

De este modo se concluye la existencia de al menos una solución periódica de índice j_∞ . (Recuérdese del Teorema 2.4 que los coeficientes de $Q(t)$ son enteros no negativos)

Por último, hacemos $t = 1$ para obtener $m = 1 + 2Q(1)$. Así el número de soluciones periódicas es impar como habíamos adelantado en el enunciado del Teorema 3.1. ■

Apéndice

Definición 1 Sean H un espacio de Hilbert, $\rho \in \mathbb{R}$ y $M : H \rightarrow H$ una función continua. Decimos que M es ρ -monótona si satisface $\langle M(u) - M(v), u - v \rangle \geq \rho \|u - v\|^2$, para cada $u, v \in M$. Si $\rho > 0$, diremos que M es fuertemente monótona.

La trascendencia de los operadores ρ -monótonos se aprecia en el Teorema 1, que es una generalización del conocido teorema de Lax - Milgram para operadores lineales y continuos. A continuación presentamos algunos lemas.

Lema 1.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $r \geq 0$ y A un operador continuo de V en V . Entonces, existe $u_r \in \overline{B(r)}$ tal que para todo $v \in \overline{B(r)}$, se cumple la relación $\langle Au_r, v - u_r \rangle \leq 0$. En particular si $\|u_r\| < r$ entonces $Au_r = 0$.

Prueba. Sea Π_r la proyección radial sobre la bola $\overline{B(r)}$, definida por

$$\Pi_r(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } \|x\| < r, \\ r \frac{x}{\|x\|} & , \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

Obviamente esta función es continua y por lo tanto la composición $\Pi_r \circ (A + Id)$ definida sobre $\overline{B(r)}$ es también una función continua que lleva $\overline{B(r)}$ en sí mismo. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, ésta admite un punto fijo u_r , es decir, que satisface $u_r = \Pi_r(A + Id)u_r$.

Notemos que si $(A + Id)u_r \in \overline{B(r)}$ entonces $u_r = Au_r + u_r$ y de aquí $Au_r = 0$. De lo contrario $\|u_r\| = r$ y $(A + Id)u_r = \lambda u_r$ con $\lambda \geq 1$. Así,

$$\begin{aligned} \langle Au_r, v - u_r \rangle &= \langle Au_r + u_r - u_r, v - u_r \rangle = \langle (\lambda - 1)u_r, v - u_r \rangle \\ &= (\lambda - 1)\langle u_r, v - u_r \rangle = (\lambda - 1)(\langle u_r, v \rangle - r^2) \leq 0 \end{aligned}$$

pues $\lambda \geq 1$ y $v \in \overline{B(r)}$. ■

Teorema 1.- Sea H un espacio de Hilbert y M un operador continuo de H en H . Supongamos que existe $\rho > 0$ tal que M es ρ -monótona. Dado $f \in H$, existe un único $u \in H$ tal que $Mu = f$.

Prueba: Primero observemos que si $V \subset H$ es finito dimensional y si existe $u_V \in V$ tal que $\langle f - Mu_V, v - u_V \rangle = \langle \Pi_V(f - Mu_V), v - u_V \rangle = 0$, para todo $v \in V$, entonces $\|u_V\|$ está acotado por $\frac{2\|f\|}{\rho} + K$, donde K es una constante, y por lo tanto, es independiente del espacio V .

Ahora, sea $V_1 \subset V_2 \subset \dots$ una sucesión creciente de espacios de dimensión finita tales que $\overline{\bigcup V_n} = H$. Así, en cada V_i existe u_i con $\|u_i\| \leq \frac{2\|f\|}{\rho} + K$ tal que si $v \in V_i$, se tiene $\langle f - Mu_i, v - u_i \rangle \leq 0$. La sucesión u_i es acotada y por lo tanto se puede extraer una subsucesión débilmente convergente $u_i \rightharpoonup u$. Así $\langle f - Mu, v - u \rangle \leq 0$ para $v \in \bigcup V_n$. Pero como $\bigcup V_n$ es denso en H , el resultado se cumple para todo $v \in H$.

Ahora, si hacemos $v = u + w$ y despejamos $v = u - w$, se sigue $\langle f - Mu, w \rangle = 0$ para todo $w \in H$ y por lo tanto, $Mu = f$. La unicidad se desprende de la monotocidad fuerte de M . ■

Para funciones diferenciables definidas sobre un espacio de Hilbert arbitrario a \mathbb{R} , presentamos una caracterización de convexidad.

Sea g una función de H en \mathbb{R} . Diremos que g es **convexa** siempre que se cumpla

$$g(v) \geq g(u) + \langle Dg(u), v - u \rangle \quad (1)$$

para cada u y $v \in H$.

Definición 2 Sea H un espacio de Hilbert y $\rho \in \mathbb{R}$. Una función f de H en \mathbb{R} se llama ρ -convexa si la función $u \mapsto f(u) - \frac{\rho}{2}\|u\|^2$ es convexa en el sentido anterior.

Lema 2.- Sea $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

- i) La función f es ρ -convexa si y sólo si Df es ρ -monótona.
- ii) Si f es ρ -convexa y $\rho \geq 0$ entonces f es convexa.

Prueba: Probemos la primera parte. Teniendo en cuenta la definición, decir que f es ρ -convexa es lo mismo que afirmar que $g(u) = f(u) - \frac{\rho}{2}\|u\|^2$ es convexa. Notemos primeramente la igualdad $Dg(u) = Df(u) - \rho u$. Por ser g convexa, se cumple (1). Usando dos veces esta relación y la definición de g , podemos obtener las dos desigualdades

$$\begin{aligned} \langle Df(u), u - v \rangle &\geq f(u) - f(v) + \frac{\rho}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2) + \langle \rho u, u - v \rangle \\ \langle -Df(v), u - v \rangle &\geq f(v) - f(u) - \frac{\rho}{2}(\|v\|^2 - \|u\|^2) - \langle \rho v, u - v \rangle, \end{aligned}$$

de donde sumando miembro a miembro se obtiene

$$\langle Df(u) - Df(v), u - v \rangle \geq \rho\|u - v\|^2.$$

Es decir, Df es ρ -monótona. El recíproco es análogo.

Analizemos ahora con la segunda parte. Como f es ρ -convexa, $g(u) = f(u) - \frac{\rho}{2}\|u\|^2$ es convexa. Reescribiendo la relación (1) en términos de f se obtiene

$$\begin{aligned} f(v) &\geq f(u) + \frac{\rho}{2}\|v\|^2 - \frac{\rho}{2}\|u\|^2 + \langle Df(u), v - u \rangle - \langle \rho u, v - u \rangle \\ &\geq f(u) + \langle Df(u), v - u \rangle + \frac{\rho}{2}\|v\|^2 + \frac{\rho}{2}\|u\|^2 - \rho\langle u, v \rangle \\ &= f(u) + \langle Df(u), v - u \rangle + \frac{\rho}{2}\|u - v\|^2 \\ &\geq f(u) + \langle Df(u), v - u \rangle, \end{aligned}$$

y por lo tanto, f es convexa. ■

Definición 3 Sean X e Y dos espacios de Hilbert. Una función $\Phi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ se llama cóncava-convexa si

- i) Para cada $y \in Y$, la función $\Phi(., y) : X \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.
- ii) Para cada $x \in X$, la función $-\Phi(x, .) : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

Un punto (\bar{x}, \bar{y}) se llama punto de silla de Φ si se cumple

$$\Phi(\bar{x}, y) \leq \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \leq \Phi(x, \bar{y})$$

sean cual fueran $x \in X, y \in Y$.

Lema 3.- Sea $\Phi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable cóncava-convexa.

i) El par (\bar{x}, \bar{y}) es un punto silla de Φ si y sólo si

$$D\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (D_1\Phi(\bar{x}, \bar{y}), D_2\Phi(\bar{x}, \bar{y})) = 0.$$

ii) La función $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$ definida por

$$T(x, y) = (D_1\Phi(x, y), -D_2\Phi(x, y)) + \rho(x, y)$$

es ρ -monótona.

Prueba: Por ser (\bar{x}, \bar{y}) un punto de silla de Φ , la aplicación cóncava $y \mapsto \Phi(\bar{x}, y)$ asume su máximo en \bar{y} . Y por dicho motivo se cumple $D_2\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Del mismo modo, la aplicación convexa $x \mapsto \Phi(x, \bar{y})$ tiene un mínimo en \bar{x} , de donde se obtiene $D_1\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Por otro lado, por ser convexas las aplicaciones $y \mapsto -\Phi(\bar{x}, y)$ y $x \mapsto \Phi(x, \bar{y})$, se tienen las siguientes relaciones,

$$-\Phi(\bar{x}, y) \geq -\Phi(\bar{x}, \bar{y}) + \langle -D_2\Phi(\bar{x}, \bar{y}), y - \bar{y} \rangle$$

además de

$$\Phi(x, \bar{y}) \geq \Phi(\bar{x}, \bar{y}) + \langle D_1\Phi(\bar{x}, \bar{y}), x - \bar{x} \rangle.$$

Por lo tanto, si $(D_1\Phi(\bar{x}, \bar{y}), D_2\Phi(\bar{x}, \bar{y})) = 0$, se obtiene

$$\Phi(\bar{x}, y) \leq \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \leq \Phi(x, \bar{y}).$$

Detallamos ahora la prueba de la segunda parte. La convexidad de $\Phi(\cdot, y)$ y $-\Phi(x, \cdot)$ para cada $y \in Y$ y cada $x \in X$, por separado, permite deducir las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} \Phi(x_2, y_1) &\geq \Phi(x_1, y_1) + \langle D_1\Phi(x_1, y_1), x_2 - x_1 \rangle, \\ \Phi(x_1, y_2) &\geq \Phi(x_2, y_2) + \langle D_1\Phi(x_2, y_2), x_1 - x_2 \rangle, \\ -\Phi(x_1, y_2) &\geq -\Phi(x_1, y_1) + \langle -D_2\Phi(x_1, y_1), y_2 - y_1 \rangle, \\ -\Phi(x_2, y_1) &\geq -\Phi(x_2, y_2) + \langle -D_2\Phi(x_2, y_2), y_1 - y_2 \rangle, \end{aligned}$$

de las cuales, al sumar miembro a miembro se obtiene

$$0 \geq \langle D_1\Phi(x_1, y_1) - D_1\Phi(x_2, y_2), x_2 - x_1 \rangle + \langle -D_2\Phi(x_1, y_1) + D_2\Phi(x_2, y_2), y_1 - y_2 \rangle,$$

o equivalentemente

$$\langle D_1\Phi(x_1, y_1) - D_1\Phi(x_2, y_2), x_1 - x_2 \rangle + \langle -D_2\Phi(x_1, y_1) + D_2\Phi(x_2, y_2), y_1 - y_2 \rangle \geq 0.$$

De este modo se logra

$$\begin{aligned}
 \langle T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2), (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \rangle &= \\
 &= \langle D_1\Phi(x_1, y_1) - D_1\Phi(x_2, y_2) + \rho x_1 - \rho x_2, x_1 - x_2 \rangle + \\
 &\quad \langle -D_2\Phi(x_1, y_1) + D_2\Phi(x_2, y_2) + \rho y_1 - \rho y_2, y_1 - y_2 \rangle \\
 &= \langle D_1\Phi(x_1, y_1) - D_1\Phi(x_2, y_2), x_1 - x_2 \rangle + \rho \|x_1 - x_2\|^2 + \\
 &\quad + \langle -D_2\Phi(x_1, y_1) + D_2\Phi(x_2, y_2), y_1 - y_2 \rangle + \rho \|y_1 - y_2\|^2 \\
 &\geq \rho \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|^2;
 \end{aligned}$$

desigualdades que permiten concluir que T es ρ -monótona. ■

Consideremos la siguiente hipótesis concerniente al comportamiento asintótico del operador F cerca del infinito. (Ver Capítulo 3).

Supongamos existe un operador simétrico B tal que

$$\sigma(B) \subset [\alpha, \beta] \quad \text{y} \quad 0 \notin \sigma(A - B),$$

y constantes $\delta \geq 0$ y $0 < r_\infty < \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A - B)\}$ sujeto a

$$\|F(u) - Bu\| \leq r_\infty \|u\| + \delta, \tag{2}$$

para todo u en H .

Obviamente, la condición $0 \notin \sigma(A - B)$ es más bien una condición de no resonancia. Además, como B es simétrico y acotado, $A - B$ es autoadjunto. Por lo tanto

$$\min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A - B)\} = \|(A - B)^{-1}\|^{-1}, \tag{3}$$

donde la restricción

$$r_\infty < \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A - B)\}$$

es equivalente a la condición

$$r_\infty \|(A - B)^{-1}\| < 1. \tag{4}$$

Recordemos que F es asintóticamente lineal si existe un operador al que llamar $F'(\infty)$ tal que

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\|F(u) - F'(\infty)u\|}{\|u\|} = 0.$$

Entonces $F'(\infty)$ está únicamente determinada, y es llamada la derivada de F en el infinito.

A continuación enunciamos una consecuencia importante de la hipótesis (2).

Lema 4.- *Si se cumple la hipótesis (2) entonces*

$$\|a'(z)\| \geq \lambda \|z\| - \delta,$$

para todo $z \in Z$. Donde $\lambda = \|(A - B)^{-1}\|^{-1} - r_\infty > 0$.

Prueba: De (4), se tiene $\lambda > 0$.

$$a'(z) = Au(z) - F(u(z)) = (A - B)u(z) - (F - B)(u(z)) \quad \text{-Lema 3.9-}$$

y la condición (2) implica

$$\begin{aligned} \|a'(z)\| &\geq \|(A - B)u(z)\| - \|(F - B)(u(z))\| \\ &\geq \|(A - B)^{-1}\|^{-1} \|u(z)\| - r_\infty \|u(z)\| - \delta \\ &= \|u(z)\| (\|(A - B)^{-1}\|^{-1} - r_\infty) - \delta \\ &= \lambda \|u(z)\| - \delta, \end{aligned}$$

ahora por la ortogonalidad y de la relación (3.17) obtenemos

$$= \lambda \|z\| - \delta. \quad \blacksquare$$

Bibliografía

- [1] Agapito, J., *Existencia de Soluciones Periódicas de una Ecuación Hamiltoniana Particular*. Tesis de Maestría, PUCP, 1997.
- [2] Amann, H., *Saddle Points and Multiple Solutions of Differential Equations*, *Mathematische Zeitschrift*, 169, 1979, pp. 127-166.
- [3] Amann, H., and Zehnder, E., *Periodic Solutions of Asymptotically Linear Hamiltonian Systems*, *Manus. Math.* 32, 1980, pp. 149-189.
- [4] Amann, H., and Zehnder, E., *Nontrivial Solutions for a Class of non Resonance Problems and Applications to nonlinear Differential Equations*, *Annali Scuola Sup. Pisa cl. sc. serie IV*, VII(4), 1980. pp. 539-603.
- [5] Apaza, A., *Índice de Morse*. Tesis de Maestría, PUCP, 1999
- [6] Brézis, H., *Analyse Fonctionnelle*, Masson Editeur, París, 1983.
- [7] Conley, C., and Zehnder, E., *Morse-Type Index Theory for Flows and Periodic Solutions for Hamiltonian Equations*, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37, 1983, pp. 207-253.
- [8] Conley, Charles C. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math, n38, Amer. Math. Soc. Providence R. I., 1976.
- [9] Hoffman, K., and Kunze, R., *Algebra Lineal*, Prentice Hall, 1973.
- [10] Mawhin, J., and Willem, M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Applied Mathematical Sciences, 74, New York, 1989.
- [11] Mc. Duff, D., and Salamon, D., *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, New York, 1997.

- [12] Milnor, J., *Topology form the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.
- [13] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [14] Spanier, E., *Algebraic Topology*, Mc Graw-Hill, 1966.

