PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO

UNA PRAXEOLOGÍA MATEMÁTICA DE PROPORCIÓN
En un texto universitario

Tesis para obtener el grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

PRESENTADO POR:

CINTYA SHERLEY GONZALES HERNÁNDEZ

Asesor:

DR. FRANCISCO UGARTE GUERRA

Miembros del jurado:

Dra. MaríaJoséFerreira da Silva

Dra. Jesús Flores Salazar

Dr. Francisco Ugarte Guerra

LIMA-PERÚ

2014

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres e hijos, en especial a mi madre por guiar mis pasos.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, que con comprensión y cariño incentivó y apoyó el estudio que aquí presento. En especial a mi madre Dora Hernández, por ser un ejemplo de perseverancia, a mi padre Pedro Gonzales, por enseñarme que nunca se termina de aprender, ami esposo Denis, por su compañía y a mis hijos Adrián y Leonel, por su incondicional amor;todos ellos personas importantes en mi vida que muchas veces estuvieron sin mi compañía para terminar esta investigación.

Al profesor Francisco Ugarte, por sus correcciones y sugerencias, mi agradecimiento especial principalmente por su postura rigurosa, por la dedicación, por incentivar este estudio, por la infinita paciencia y confianza depositada en mí.

A la profesora María José da Silva, un agradecimiento especial por sus observaciones y correcciones antes, durante y después del desarrollo de este trabajo.

A la profesora Jesús Flores, por su actitud motivadora y fuente de inspiración en este trabajo y por su amistad.

A la directora de la maestría Cecilia Gaita, por su apoyo en mi desarrollo profesional, por ser un ejemplo como profesional y madre.

A Claudio Ríos y Mónica Cabrera por la confianza en mi persona y por darme la oportunidad de crecer.

Finalmente a mis queridos amigos Cristina La Plata y Lenin Vásquez, por la revisión en la redacción final, y por los encuentros agradables que compartimos en la elaboración de este trabajo.

RESUMEN

Nuestra investigación tiene por objetivo describir y analizar la Organización Matemática propuesta para la enseñanza de los conceptos de escala y proporción en un texto universitario. Así esta investigación responde a la siguiente pregunta: ¿Cuál es la organización matemática que se presenta en la organización didáctica para la enseñanza de escala y proporción en un texto de Matemáticas para Arquitectos?

Para responder a nuestra pregunta, desarrollamos una investigación cualitativa con enfoque documental, y a partir de larevisión de un conjunto de investigaciones, todas relacionadas a nuestra problemática, observamos las concepciones, dificultades y estrategias de resolución de problemas relacionadas a nuestro objeto de estudio, luego utilizamos estas observaciones para elaborar criterios de análisis de la organización matemáticapropuesta en el texto. Para identificar la organizaciónmatemática, trabajamos sobre la base de la Teoría Antropológica de lo Didácticode Chevallard (1999), que se enfoca en el estudio de las praxeologías. Como resultado de nuestro trabajo describimos la organización matemática que presentan los autores, es decir,los tipos de tareas, las técnicas que presentan y la tecnología que justifica sus técnicas en torno a escala.

Finalmente, analizamos la organización matemática encontrada y mostramos algunosresultados y consideraciones finales.

ABSTRACT

Our research aims to describe and analyze the Mathematical Organization around the concepts of scale and proportion in a textbook.Sothis paperanswers thefollowing question: What is the mathematicalorganizationpresented inthe didacticorganization teachingscale and proportionin a textMathematicsfor Architects?

We developed a qualitative research with approach documentary, and from reviewing a body of research, all related to our problem. We observed conceptions, difficulties and strategies for solving problemsrelated to our object of study,then use these observations to develop criteria for analyzing the proposed mathematical text organization. To identify the mathematical organization, we work on the basis of the Anthropological Theory of Didactics of Chevallard (1999) , which focuses on the study of praxeologies. As a result of our work we present how the authors organized task types, techniques and technology have justify their techniques.

Finally, we analyze the mathematical organization found and show some results and final considerations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El trabajo que presentamos a continuación describe y analiza la organización matemática (OM)movilizada en torno a los conceptos de *escala y proporción* en un texto universitario desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico(TAD).

La noción de proporción es un contenido que aparece implícito en el currículo de matemáticas del Perú y se desarrolla en el nivel primario desde tercer grado hasta sexto grado de educación primaria a través de las nociones de relaciones entre cantidades utilizando tablas y gráficos y en porcentajes. En el nivel secundario en primer y segundo grado de educación secundaria a través de las relaciones entre magnitudes, porcentajes, regla de interés, mezclas y funciones, según lo refiere el Diseño Curricular Nacional.

También es un contenido que aparece en la educación superior, comúnmente como una herramienta en las carreras de Ingeniería y Arquitectura, ya sea en el llamado análisis dimensional, o bien al utilizar la noción de escala, entre otros. Sin embargo, a pesar de tratarse de un mismo concepto, se estudia y se aprende desde diferentes enfoques los cuales no llegan a unificarse, con lo cual resulta que un mismo concepto y las técnicas asociadas a la resolución de problemas, son presentados con diferentes nombres, en diferentes momentos y de manera desarticulada. Por ejemplo, el estudiode la proporcionalidad no se asocia al concepto de funcional lineal, aun cuando ambos son trabajados en secundaria. Como resultado de ello los estudiantes tienen dificultades para establecer un vínculo entre la proporcionalidad y la función lineal.

Chevallard (2001) plantea lo que llama *cuestiones muertas*, al referirse a los conceptos matemáticos, es decir, se considera al conocimiento matemático como teorías transparentes y acabadas sin cuestionamiento, algo que la institución ignora de dónde proceden y hacia dónde van, produciéndose así un *fenómeno de monumentalización* de las organizaciones matemáticas escolares donde los alumnos son invitados a *visitarlas*, pero no a construirlas.

También García (2005) habla de la existencia de un *fenómeno de desarticulación* de los contenidos matemáticos, en particular en el concepto de proporción. Por ejemplo en la secundaria española este concepto se encuentra en el área de “Números y medidas”, sector “Proporcionalidad” y en el área de “Funciones y su representación gráfica”, sector “Caracterización de dependencias”, y no se conectan. Este debilitamiento progresivo en la articulación se debe según Lucas (2010) a la desaparición de las “razones de ser” de las organizaciones matemáticas.

Respecto a la importancia de articular los contenidos en Matemáticas García (2005) señala:

> Como recogen los “estándares curriculares” del Nacional Council of Teachers of Mathematics en el “principio del currículo”, las matemáticas son una materia sumamente conectada y acumulativa, por lo que el currículo de matemáticas debe incluir “ideas” de tal forma que se construyan unas sobre las otras. Los alumnos deberían percibir las relaciones entre ideas matemáticas importantes, en vez de un conjunto de temas desconectados. En consonancia con este “principio”, formulan el “estándar” de la “conexión”, en el que van más allá: los alumnos no sólo deben reconocer y usar conexiones entre diferentes ideas matemáticas y conocer cómo las ideas matemáticas se interconectan y se desarrollan unas a partir de otras para formar un todo coherente, sino que, además, deben conectar las matemáticas con situaciones de las ciencias, de las ciencias sociales, de la medicina o del comercio. (García, 2005, p.167)

Además señala que se atribuye a la resolución de problemas y a la aplicación de las matemáticas en contextos “reales”un papel articulador de los diferentes contenidos que no tienen.

Estos fenómenos referidos en la didáctica de las matemáticas muestran la pertinencia de analizar cómo se presenta la proporcionalidad en un texto a nivel universitario.

Con respectoa la técnica de resolución conocida como regla de tres, Vergnaud (1983, citado en Artifon, 2008) señala que las operaciones que intervienen en la aplicación de esta técnica son la multiplicación y la división, razón por la cual los profesores consideran que el tema se puede enseñar rápidamente. En general, los profesores de matemáticas no parecen darse cuenta del cambio en la introducción conceptual implícita de estructuras multiplicativas y se centran en la técnica de la regla de tres,con lo cual, la novedad conceptual pasa desapercibida, es decir, la regla de tres se enseña sólo como una manera conveniente para organizar los datos de un problema sin considerar la naturaleza del concepto matemático en sí.

Nosotros haremos un estudio del objeto proporcióncon la finalidad de analizar su naturaleza pero además proponemos una definición del objeto proporciónque formalizará el uso que este concepto en los diferentes niveles educativos. Para ello partimos de lainvestigación de Comin (2000).

La tesis está organizada en 5 capítulos:

En el primer capítulo, presentamos la problemática en torno a los conceptos de escala y proporción, abordando algunos aspectos planteados en otras investigaciones;también las justificaciones que tuvimos en cuenta para la realización de este trabajo y además la pregunta y los objetivos que orientaron el análisis realizado en esta investigación.

En el segundo capítulo, presentamos los estudios preliminares y revisión bibliográfica, considerando los trabajos publicados que abordan el tema de la proporcionalidad; también incluimos el estudio de las OM a través del tiempo realizado por García (2005) y los distintos aspectos en los que es visto este tema.

En el tercer capítulo, presentamos los aspectos principales de la TAD, propuesta por Yves Chevallard (1999) que estudia las organizaciones praxeológica didácticas y matemáticas, que son el fundamentodel análisis del texto de matemáticas; además planteamos de forma explícita la metodología usada para elaborar nuestro trabajo de investigación a fin de que pueda replicarse.

En el cuarto capítulo, hacemos un estudio del objeto matemático proporción desde el punto de vista matemático además de proponer una formalización que se adopta a las nociones de proporción encontradas.

En el quinto capítulo, presentamos el análisis del material didáctico, en donde describimos una organización matemática encontrada usando nuestro referencial teórico (TAD).

Concluimos nuestro trabajopresentando los resultados encontrados así como tambiénlas consideraciones finales referentes al estudio realizado.

CAPÍTULO 1 – LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo explicaremos le relevancia y pertinencia del objeto de estudio, así como las justificaciones del estudio sobre las Organizaciones Matemáticas propuesta para enseñar en un texto.

1.1 Problemática y justificación

En esta etapa de nuestro trabajo exponemos algunos fenómenos encontrados en la didáctica de las matemáticas con respecto a la enseñanza y aprendizaje de los conceptos relativos a la proporcionalidad.

Es bien sabido que el problema en la Educación Matemática ha ido evolucionando hasta cambiar de naturaleza, pues empezó como un problema *pedagógico*,con la emergencia de la Didáctica de las Matemáticas se convierte, primero en un problema *cognitivo-matemático*, y termina siendo un problema con un *componente irreductiblemente matemático*(Fonseca, 2004). Esta ampliación en su problemática incluye al conocimiento matemático entre sus objetos de estudio,en ese sentido la componente matemática en nuestro trabajo es la noción de *proporción*.

> La densidad de lo didáctico en lo matemático y de lo matemático en lo didáctico queda perfectamente modelizada mediante las nociones de *praxeología* y de *proceso de estudio*. En efecto, todo proceso de estudio de una organización matemática presupone la existencia inicial de la organización matemática que se va a estudiar, pero el *estudio* de la misma es también, en un sentido amplio, un proceso de creación, o digamos de recreación, en el caso de las instituciones didácticas. Por consiguiente, la construcción de una praxeología matemática contempla el *estudio* de la misma y viceversa. (García, 2005, p. 100).

En nuestro trabajo estudiamos la organización didácticapara la enseñanza de la proporción en un texto, con lo cual identificamos la OM movilizadaen torno a nuestro objeto de estudio.

De acuerdo con Chevallard (1998), cuando el profesor decide escribir otra edición de un texto, o utilizar uno para preparar su curso, ya hace tiempo que la transposición didáctica ha comenzado, es decir, el conocimiento matemático ha sufrido cambios en su estructura.En la misma línea Pineau (2006 citado en Santamarina 2006, p.2) afirma que “los textos introducen nuevas modificaciones en los objetos de enseñanza, constituyen una nueva y más fina delimitación del alcance de los contenidos”. En los textos no solamente se plasman conceptos, sino también obstáculos, procesos y limitaciones que repercuten directamente en las prácticas de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos. Todo lo anterior justifica nuestro interés en describir la organización matemática de los temas escala y proporción, en un texto.

La importancia del concepto de proporcionalidad es resaltadapor Ceballos (2012),quien lo considera altamente estructurante, pues permite encadenar la aritmética con el álgebra a través de procesos de variación y cambio en dos o más espacios de medida,además de fortalecer el campo conceptual de las estructuras multiplicativas dadas por Vergnaud (1983), e incluso el acercamiento al concepto de función lineal de una forma más natural y contextualizada. Afirma que también permite aprender a resolver problemas no solo de matemáticas (construir modelos simples, demostrar teoremas de la geometría), sino de otras ciencias como la física (concepto de velocidad, de aceleración, uso de factores de conversión), la química (concentración o balanceo de ecuaciones).

Para nosotros también es importante, pues,para la carrera de Arquitectura,la *proporción* es uno de los conceptos más importantes además de estructura y espacio. Alpañes (1994) afirma que “Las matemáticas han ocupado un lugar fundamental en los estudios de Ingeniería y Arquitectura, hasta el punto que podría decirse que estas ciencias no son sino un compendio de Matemática y Física Aplicada, Dibujo, Geometría Descriptiva y Experiencia” (p.33).

En la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la PUCP, donde haremos nuestra investigación, el estudio de *escala y proporción* está presente según el Programa de Estudios, en los cursos del primer ciclo de la carrera de Arquitectura yno solo está presente en el curso de matemáticas sino que constituye un contenido importante en los cursos de Dibujo Arquitectónico y Taller de Diseño.

Por todo lo anterior nuestra investigación se focaliza en el concepto de proporción en un texto a nivel universitario, titulado *Matemáticas para Arquitectos*.

Desde el *programa cognitivo* de investigación en didáctica de la matemática existen numerosasinvestigaciones que han abordado el problema de la enseñanza aprendizaje de la proporcionalidadcomo por ejemploBarreto (2001), Floriani (2004), Artifon (2008), aunque los marcos teóricos y las metodologías empleadas son diferentes, estamos de acuerdo con Bosch, García, Gascón y Ruíz (2006) que en la mayoría de las investigaciones se observa un aislamiento de la relación de proporcionalidad respecto a otro tipo de relaciones entre magnitudes. Otras investigaciones tienen como objeto de estudio el razonamiento proporcional del sujeto como por ejemplo Levain (1994), Karplus, Pulos y Stage (1983).

Para conocer cómo es el trabajo de análisis de textos desde la perspectiva de la TAD, revisamos investigaciones relacionadas al análisis de Organizaciones Matemáticas, las cuales resumimos a continuación.

La primera que mencionamos es la investigación realizada en la PUCP por Sicha (2011), quien usa como marco teórico la TAD. En ella hace un estudio de las prácticas matemáticas asociadas al tratamiento de la función cuadrática, en un curso para estudiantes de las carreras de humanidades de la PUCP. Uno de los objetivos de su trabajo es describir las Organizaciones Matemáticas (OM) presentes, en torno al tratamiento de la función cuadrática, en tres textos. Uno de ellos lo definió como una OM de referencia, en la cual se encuentran las definiciones y justificaciones con un mayor grado de generalidad y bajo el cual puede emerger las demás OM, y otros dos como OM propuestas para enseñar. El autor analizó las organizaciones praxeológicas (los tipos de tareas, las técnicas) que están inmersas en los textos.

Esta investigación es relevante para el trabajo que realizaremos porque brinda pautas tanto teóricas como metodológicas para identificar y analizar organizaciones praxeológicas. Esta investigación justifica, en parte, la manera cómo hemos abordado nuestro trabajo, pues brinda de una manera explícita el análisis de una Organización Matemática de un texto.

Otra investigación en el marco de la TAD es la realizada por Varella (2010), en la que analiza textos de nivel secundario del Estado de Sao Paulo, referentes a geometría analítica. El objetivo de su trabajo es analizar cómo los autores de los textos organizaron las actividades propuestas referentes al estudio de la ecuación general de la recta en lo que concierne al trabajo con pruebas y demostraciones. Uno de los resultados de esta investigación señala que la organización matemática (OM) de los libros escogidos exige que el alumno tenga dominio sobre la localización de puntos en el plano cartesiano, situándose en el bloque tecnológico-teórico. Al igual que la investigación de Sicha, la presente investigación es relevante porque nos presenta otras maneras de describir y analizar organizaciones matemáticas de textos.

Por otra parte, Floriani (2004) describe y caracteriza las estrategias de resolución de problemas de multiplicación referentes al concepto de proporcionalidad de estudiantes de escuela primaria y secundaria de Sao Paulo. El análisis de las estrategias usadas por los estudiantes al resolver los problemas revela, que sí es posible identificar elementos que indican la comprensión de este concepto, cuando los estudiantes se apropian de los significados de los problemas, ellos lo resuelven por medio de estrategias construidas a partir de conocimientos previos. Los resultadosdemostraron que en varios problemas de proporcionalidad, los estudiantes a menudo no reconocen este concepto como una relación multiplicativa, debido a ello intentan utilizarestrategias aditivas para resolver estos problemas. La investigación mencionada está relacionada con el objeto matemático de nuestra investigación, es decir, envuelven el estudio de las proporciones.

Estos resultados de las investigaciones nos sirven como antecedentespara nuestro tema de investigación, a continuación presentaremos la justificación y la relevancia de nuestra investigación.

Justificación del tema de investigación

Nuestro trabajo como jefe de práctica en el curso de Matemáticas I, en el primer ciclo de la carrera de Arquitectura y Urbanismo de la PUCP, nos permitió constatar la dificultad que presentan los estudiantes en la comprensión del concepto de *proporción*, lo que puede verificarse en los resultados de sus evaluaciones, al analizar los puntajes obtenidos en la preguntas correspondientes a este contenido.

La dificultad que tienen los estudiantes en el contenido de *escala* se refleja, por ejemplo, en los errores cometidos al utilizar de forma equivocada las técnicas para resolver problemas. Uno de los errores frecuentes encontrados se relaciona a la técnica asociada a la conversión de unidades, pues es común que las respuestas carezcan de unidades cuando la pregunta pide como resultado una magnitud.

Bodin (1989) señala que en el concepto de *escala* existe una ambigüedad, pues es visto como un objeto matemático en sí mismo, sin embargo existe algunas definiciones contradictorias entre sí.

Por su parteLevain (1994, p. 23) señala:

> En los problemas de ampliación, el concepto de razón se convierte en una herramienta de pensamiento antes de que pueda ser objetiva en términos de escala. Muy pocos estudiantes conceptualizan la escala como una característica esencial del significado de razón, sino en formas estereotipadas del tipo "un centímetro en el mapa representa *x* centímetros en el suelo". El uso casi exclusivo del producto cruz como un algoritmo de solución hace más difícil la objetivación de la razón de ampliación, así como la comprensión de problemas más complejos. (Traducción nuestra)

Por otro lado, estos dos contenidos: proporción y escala se encuentran dentro de los Sílabo de los cursos Taller I y Dibujo Arquitectónico I, que son cursos que también corresponden al primer ciclo de la carrera y cuyos objetivos son capacitar a los estudiantes en los conceptos básicos de escalas, proporciones, estructura, espacio-tiempo, material, lugar, físico, percepción, idea y composición tal como lo refieren los sílabos. Estos cursos se dan en paralelo con el curso Matemática I.

Por lo anterior, nuestra investigación se propone analizar la organización matemática utilizada para los temas de escala y proporción del libro de Matemática para Arquitectos que usan los estudiantes de primer ciclo de la carrera de Arquitectura de la FAU-PUCP. Tomando como referencia la TAD.

A continuación presentaremos nuestra pregunta y objetivos de investigación.

1.2 Pregunta y objetivos de investigación

Pregunta

¿Cuál es la organización matemática que se presenta en la organización didáctica para la enseñanza de escala y proporciónen un texto para la carrera de Arquitectura?

Objetivo general

Describir y analizar la Organización Matemática propuesta para la enseñanza de los conceptos de escala y proporción del texto Matemáticas para Arquitectos desarrollado por los profesores del curso de Matemáticas de la FAU- PUCP, para el primer ciclo de la carrera.

Objetivos específicos

Esta investigación tiene como objetivos específicos:

1. Identificar las concepciones de escala y proporción que se encuentra en eltexto Matemáticas para Arquitectosde la FAU- PUCP.
2. Identificar las organizaciones matemáticas puntuales y locales utilizadas referente a los contenidos escala y proporción.
3. Definir criterios de análisis para la OM, teniendo en cuenta la problemática de nuestro objeto de estudio.
4. Describir la OM encontrada en el texto desde la postura de la TAD.

A continuación presentamos algunos aspectos que se tomaron en cuenta de las investigaciones consultadas para con respecto a escala y proporción.

CAPÍTULO 2 – ESTUDIOS PRELIMINARES Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo presentaremos algunas investigaciones que ayudaron en el estudio de la noción de proporcionalidad realizados tanto en la Didáctica como en la Educación Matemática. Estos trabajos relacionados con la proporcionalidad tienen diferentes aspectos, por un lado se enfocaron en el aprendizaje del estudiante en sus estrategias de resolución:Bodin (1989), Barreto(2001), Floriani (2004), Artifon (2008).Por otro lado se centraron en la enseñanza, es decir, en las cuestiones y las variables que afectan la participación de los estudiantes, como por ejemplo:los ostensivospara representar un objeto matemático (notaciones, símbolos), tal es el caso deBosch (1994), García (2005).

2.1 Clases de problemas y estrategias de resolución en situaciones de proporcionalidad

Tomando en cuenta los anteriores estudios sobre proporción, tenemos que:

Lesh, Post & Behr (1988 citado en Floriani, 2004), clasifican los problemas que envuelvenla nociónde proporcionalidad en dos tipos de problemas: problemas de comparación y problemas de valor desconocido.

a) Problemas de comparación: en los problemas de comparación son dadas dos razones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$, donde los cuatro valores son conocidos, cuyo objetivo es compararlas, es decir, escoger entre las siguientes posibilidades: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}o\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.
b) Problemas de valor desconocido: los problemas que involucran cuatro términos, tres términos son dados y se le pide determinar un cuarto término desconocido.

Nosotros adoptaremos estos dos tipos de problemas de proporción, para integrarlos como criterio de análisis de las tareas encontradas en nuestra organización matemática(OM), es decir, para saber si en las tareas propuestas en el texto analizado se encuentran problemas de estos tipos.

Con respecto al desarrollo cognitivo, Vergnaud (1983), señala que, para entender y explicar la adquisición y el desarrollo de conocimientos y destrezas matemáticos específicos, hay que hablar de campos conceptuales, indica que el campo conceptual de las estructuras multiplicativas contiene los conceptos interconectados de multiplicación, división, fracción, razón, número racional, funciones lineales y multilineales, análisis dimensional y espacios vectoriales. Desde el punto de vista de la didáctica un campo conceptual está definido como un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes pero íntimamente relacionados. Es por ello que, Vergnaud (1983) desarrolla un análisis de los problemas multiplicativos de donde sugiere una distinción entre tres clases especiales de problemas multiplicativos.

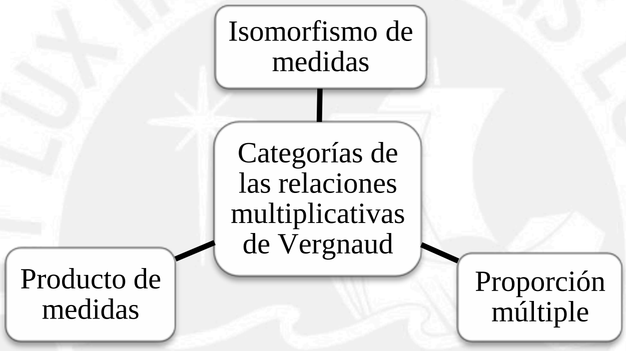


Figura 1 Categorías de las relaciones multiplicativas según Vergnaud.

a) Isomorfismo de medidas (Regla de tres), consiste en una proporción directa simple de dos espacios de medida (magnitudes)M_1 y M_2. En el caso de problemas relacionados al contenido “escala”, tenemos un ***automorfismo de medidas***, puesto que para escala se trabaja con una sola magnitud, Longitud. Esta primera categoría de relación multiplicativa, es la que será estudiada para elaborar uno de los criterios de análisis para los ejemplos resueltos en el texto analizado.

   Ejemplo: Si 2*cm* en un mapa representa 3 *km*en la realidad, ¿cuánto representa en la realidad 9 *cm*?

b) Proporción múltiple, esto es cuando las medidas de las cantidades de una magnitud es proporcional a las medidas de dos tipos de cantidadesde magnitudes diferentes.

Ejemplo: Si 4 operarios construyen una casa en 18 días trabajando 6 horas por día, ¿cuántos días llevaran trabajando 6 operarios trabajando 8 horas por día?

c) Producto de medidas, cuando existe una composición cartesiana entre las cantidades de dos magnitudes.

Ejemplo:

- Tres hombres y cuatro mujeres quieren bailar. Cada hombre quiere bailar con cada mujer y cada mujer con cada hombre, ¿cuántas pares son posibles?
- Calcular el área de una superficie, como esta tiene dos dimensiones el producto de las cantidades genera otra magnitud.

Al tratar la solución de problemas de la categoría “isomorfismo de medidas”, según cuál de las cuatro cantidades sea la incógnita, permite generar cuatro clases de problemas de tipo multiplicativo.

Multiplicación

M_1	M_2
1	a
b	x

División partition

M_1	M_2
1	$x=f(1)$
a	$b=f(a)$

División quotition

M_1	M_2
1	$a=f(1)$
x	$b=f(x)$

Regla de tres

M_1	M_2
a	b
c	x

Figura2 Problemas multiplicativos de tipo isomorfismo de medidas según Vergnaud.
Fuente: Adaptado de Artifon (2008, p. 70).

A continuación presentamos ejemplos correspondientes a cada clase de problemas, teniendo en cuenta lo siguiente, en el primer cuadro de la figura 2, el valor de 1es *a*, (el valor que le corresponde a la *unidad*de una magnitud en la otra magnitud es *a*), luego el valor de *b* en la otra magnitud será *x*.

a) Problemas de multiplicación: en esta clase de problemas se conocen tres cantidades, donde nos dan como dato el valor de la *unidad*, y nos preguntan por el valor de otra cantidad homogénea a la *unidad*(en nuestro caso cantidad de la misma naturaleza, es decir, cantidades con la misma unidad de medida). Por ejemplo:

Si 1 *cm* en un mapa representan 3 *km*, ¿cuántos kilómetros representan 5 *cm*en el mapa?

Dibujo Longitud (*cm*)	Realidad Longitud (*km*)
1	3
5	x

b) Problemas de división como partición (partition), en estos problemas se busca el valor de la *unidad* de un objeto,la división representa el número de objetos. Por ejemplo:

Si 3 *cm* en un mapa representan 12 *km*, ¿cuánto representa 1*km*de la realidad en el mapa?

Dibujo Longitud (*cm*)	Realidad Longitud (*km*)
x	1
3	12

c) Problemas de división como agrupamiento (quotition): búsqueda de una cantidad de unidades, la división representa el valor unitario del objeto. Por ejemplo:

Si 6 *cm* en un mapa representan 1 *km* de la realidad, ¿cuántos kilómetros representa 12*cm*?

Dibujo Longitud (*cm*)	Realidad Longitud (*km*)
6	1
12	x

d) Problemas de regla de tres:en esta clase de problemas se conoce tres cantidades, donde ninguna es la *unidad*. Por ejemplo:

En un dibujo hecho escala. Si 3*cm* en el dibujo 7*km* representa de la realidad, ¿Cuántos kilómetros representan 9 *cm*?

Dibujo Longitud (*cm*)	Realidad Longitud (*km*)
3	7

Por su parte, Floriani (2004), categorizó los problemas de proporcionalidad directa e inversa, pues,afirma que estas clases de problemas constituyen innumerables subclases de acuerdo con los valores numéricos, ya sean múltiplos o no múltiplos; discretos o continuos. En su investigación analiza estrategias de resolución de estudiantes ante determinados problemas usando como base subcategorías definidas de acuerdo a las relaciones numéricas; además señala que la mayoría de los maestros al escoger problemas de un texto no se preocupan por las características, es decir, por las relaciones numéricasde los problemas que trabajan en el aula y por las estrategias que apoyen a los estudiantes para su resolución.

Estas subcategorías fueron elaboradas teniendo en consideración las cuatro clases de problemas de la categoría de Isomorfismo de medidas identificados por Vergnaud, recordemos que, en nuestro trabajo nos interesa mencionar la primera categoría, es decir, problemas de proporción directa simple.

Las clases de problemas multiplicación y división están relacionados a la siguiente subcategoría:

- Problemaproporción directa unitaria, cuando la *unidad* aparecen como dato en el enunciado del problema.

Yla clase de problemas regla de tres:

- Problema proporción directa múltiplo, cuando entre los valores numéricos de las cantidades existe una relación de multiplicidad numérica.
- Problemaproporción directa no múltiplo: cuando entre los valores numéricos de las cantidades, no existe una relación de multiplicidad.

A su vez estos problemas están clasificados en: misma unidad y diferente unidad de medida,acontinuación mostramos en la tabla 1 ejemplos relativos al tema de escalas, utilizando las subcategorías de Floriani.

Tabla 1 Problemas de proporcionalidad directa según subcategorías de Floriani (2004)

Subcategorías	**Definición**	**Ejemplo**
Unitaria diferente unidad (Multiplicación)	Es un problema donde dan como dato el valor de la *unidad*, piden el valor de una cantidad con la misma unidad de medida que la *unidad*	En un dibujo hecho a escala. Si 1*cm* en el dibujo representa 2*km* de la realidad, ¿cuántos centímetros en la realidad representan 3*cm* en el dibujo?
Unitaria misma unidad (División como partición)	Es un problema donde nos piden el valor de la unidad.	En un dibujo hecho a escala. Si 5*cm* en el dibujo representa 10*km* de la realidad, ¿cuántos centímetros en la realidad representan 1 *cm* en el dibujo?
Unitaria diferente unidad (División como agrupamiento)	Es un problema donde dan como dato el valor de la *unidad*	En un dibujo hecho a escala. Si 1*cm* en el dibujo representa 2*km* de la realidad, ¿cuántos centímetros en dibujo representan 5*km* de la realidad?
Múltiplo misma unidad (regla de tres)	Cuando entre las cantidades que están en la misma magnitud (misma unidad de medida) los valores numéricos son múltiplos	En un dibujo hecho a escala. Si 5*cm* representan 12 *km*, ¿cuántos centímetros en la realidad representan 20 *cm*?
Múltiplo diferente unidad (regla de tres)	Cuando las cantidades que son múltiplos son de diferente magnitud (diferente unidad de medida)	En un dibujo hecho a escala. Si 3*cm* representan 12 *km*. ¿cuántos centímetros en el dibujo representan 15 *km*?
No múltiplo (regla de tres)	Cuando entre los valores numéricos de las cantidades, no existe una relación de multiplicidad	En un dibujo hecho a escala. Si 4*cm* en el dibujo representan 9*km* de la realidad, ¿Cuántos centímetros en el dibujo representan 6 *km* en la realidad?

Fuente: Autoría propia.

Presentamos los problemas de la tabla 1, a manera de esquema usando el modelo proporcional hablando en el sentido de García (2005).

Multiplicación

Unitaria diferente unidad

Dibujo Longitud (*cm*)		Realidad Longitud (*km*)
1	$\longrightarrow$	2
3		x

División

Unitaria misma unidad

Dibujo Longitud (*cm*)	Realidad Longitud (*km*)
5	10
1	*x*

Unitaria diferente unidad

Dibujo Longitud (*cm*)		Realidad Longitud (*km*)
1	→	2
x		5

Regla de tres

Múltiplo misma unidad

Dibujo Longitud (*cm*)	Realidad Longitud (*km*)
5	12
20	*x*

Múltiplo diferente unidad

Dibujo Longitud (*cm*)		Realidad Longitud (*km*)
3	→	12
x		15

No Múltiplo

Dibujo Longitud (*cm*)	Realidad Longitud (*km*)
4	9
x	6

No Múltiplo

Dibujo Longitud (*cm*)		Realidad Longitud (*km*)
3	→	7
8		*x*

Estudios realizados Schliemann y Carraher (1997 citados en Santana, 2010) constataron que problemas que poseen números de la misma magnitud (en nuestro caso misma unidad de medida) que son múltiplos, son más fácilmente resueltos por la estrategia escalar, y en problemas que poseen números de magnitudes diferentes que son múltiplos, son fácilmente resueltos por la estrategia funcional.

A continuación, mostraremos las estrategias identificadas por Floriani (2004) empleadas para la solución de los problemas propuestos en la categoría de problemas de proporcionalidad directa, y respecto a las subcategorías mencionadas en la Tabla 1, estas son 5:

a) Operación Aritmética: los alumnos llegan a la solución del problema, utilizando una operación aritmética simple, por medio da multiplicación o división. Vergnaud (1985), cita esa estrategia como modelo de problemas multiplicativos de aritmética escolar.

   Ejemplos:

   El precio de una cartera es $ 0,50. ¿Cuál es el precio de 6 carteras?

   6 x 0,50 = $ 3,00 (respuesta del problema)

   Un carpintero arma un ropero en 12 horas. ¿Cuántas horas demoraran 4 carpinteros para armar el mismo ropero?

   12:4 = 3 horas (respuesta del problema)

b) Adición sucesiva: los alumnos separan las dos cantidades, y establecen una relación de proporción por medio de la adición y van calculando las dos cantidades conjuntamente hasta llegar a la respuesta del problema. Esa estrategia es descrita por Nunes e Bryant (1997) como una progresión aritmética en cada conjunto.

Ejemplo: Compré 3 metros de tejido por $ 13,50. ¿Cuánto pagare por 12 metros?

3*m* ------- $ 13,50
6*m* ------- $ 27,00
9*m* ------- $ 40,50
12 *m* ------- $ 54,00 (respuesta del problema)

c) Factor de Proporción: cuando los alumnos establecen un factor de proporción dentro de la misma cantidad para, en seguida, aplicarlo a otra cantidad. Vergnaud (1991) describe esa estrategia como la utilización de una ley unitaria, donde los alumnos establecen una relación dentro de la misma cantidad, para posteriormente hallar el factor que va determinar a relación proporcional.

Ejemplo: Tres máquinas fabrican diariamente 200 hojas. Para fabricar 1600 hojas diariamente, ¿cuántas máquinas iguales a esa serían necesarias?

1600:200 = 8
8. 3 = 24 máquinas (respuesta del problema)

Otra forma,200x 8 = 1600
3x 8 = 24 máquinas (respuesta del problema)

Observación: 8 es el factor de proporción

d) Valor Unitario: es un tipo de estrategia por la cual los alumnos llegan al resultado del problema, estableciendo una relación entre las cantidades, encontrando un valor unitario. Vergnaud (1991), describe esa estrategia como la utilización de una ley binaria, donde los alumnos llegan a establecer una relación entre las cantidades diferentes, por ejemplo: litros y minutos, kilómetros y horas etc.
Ejemplo: Un automóvil recorre 300 km en 3 horas. Manteniendo a misma velocidad, ¿cuantos kilómetros recorrerán 7 horas?

300 km: 3 h = 100 km/h
100 km/h x 7 h = 700 km (respuesta del problema)

e) Regla de tres: es cuando el algoritmo consiste en: a / b = x / c, siendo dados a, b y c el estudiante determina la incógnita x. Este tipo de estrategia se describe por Vergnaud (1991) y se encuentra en la mayoría de los libros de texto, generalmente se enseña en las escuelas.

Ejemplo: El suelo de una habitación de 60 m² está cubierto por 1 341 ladrillos iguales. Si en el salón había sólo 20 m², ¿cuántos ladrillos se utilizan?

60 m² -----1 341 ladrillos
20 m² ----- x ladrillos

60 / 20 = 1341 / x
60 x = 20. 1341
x = 26 820 / 60

x = 447 ladrillos (respuesta del problema)(p. 45)

Cabe mencionar respecto al desarrollo de los ejemplos, de las distintas estrategias dadas en Floriani (2004), que al dar respuesta a los ejemplos considera las unidades entre las operaciones con medidas, por ejemplo en a) escribe 6 x 0,50 = $ 3,00 (respuesta del problema). Consideramos que este desarrollo, que inducia operaciones aritméticas y unidades, puede ser una de las causas de las dificultades que muestran los estudiantes en el aprendizaje del concepto de proporción. En su lugar proponemos el siguiente desarrollo.

6 x 0,50 = 3,00

Respuesta del problema: $ 3,00

Por otra parte, entendemos como Santana (2010) que la utilización de la estrategia de “adiciones sucesivas” muestra la comprensión de una relación multiplicativa, pues las transformaciones que ocurren en una magnitud, ocurren de manera idéntica en la otra magnitud. Por ejemplo, en b) tendríamos:

3*m* -----> $13,5 x4

12*m* -----> $ 54,00 x4

Percibiendo que si una magnitud aumenta la otra también aumenta en la misma razón.

A su vez Schliemann y Carraher (1997 citados en Santana, 2010) conocen a esta estrategia como estrategia escalar, y la estrategia de valor unitaria (ver d) como una estrategia funcional.

Siguiendo este autor, la *estrategia escalar* consiste en observar las relaciones establecidas entre los cantidades de una misma magnitud, mientras que la *estrategia funcional*, es el tipo de estrategia que establece relaciones entre dos magnitudes, determinando la razón entre ellas, esta razón se denomina constante de proporcionalidad.

A continuación presentamos algunos resultados de investigaciones relacionadas a escala, concepciones y formas de representación de este objeto matemático.

2.2Escala

Según Bodin (1989), "el objeto escala parecía ser un pequeño apéndice del concepto de proporcionalidad fácil de definir, y que fácilmente podría ser enseñado durante una sesión de una hora" (p.36), claro está, este no es el caso en un curso de matemáticas en la carrera de arquitectura.

Debido a esto Bodin realizó un análisis del concepto de escala en algunos manuales de quinto de secundaria, como resultado del análisis observó diferentes conceptos sobre la noción de escala, para algunos la escala de una representación (mapa, foto, etc.), es un número o una fracción, donde casi siempre el numerador es la unidad y a veces el denominador toma valores particulares; por otro lado, en algunos manuales se considera que se trata de una escala de reducción cuando es una fracción, y una escala de ampliación cuando es un número entero; y que a menudo la escala se presenta como coeficiente de proporcionalidad.Algunos textos utilizan rutinariamente la palabra dimensión, mientras que otros hablan de la medición o de distancia o de longitud.Otros textos mencionan: "en la escala, las dimensiones se expresan en la misma unidad"

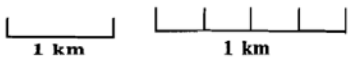
Además,Bodin (1989) señala que en todos los casos encontrados la escala es un número puro, en este caso es un coeficiente de una aplicación lineal; o una razón sin unidades de medida, en este caso se trata de un coeficiente de un ***automorfismo de espacio de medidas***(p. 38)

De cualquier forma se sabe que la escala vista como razón, por ejemplo $\frac{1}{2}$ o 1:2 es una escala de ampliación; y la escala $\frac{3}{2}$ o 3:2 es de reducción.

Algunos textos dan propiedades, como por ejemplo la llamada propiedad general en dibujos a escala: cuando las longitudes se multiplican por N; las áreas se multiplican por N^2; y los volúmenes por N^3.

Para el análisis de la OM del texto, dispondremos de las cuatro formas en las que aparecen expresadas la escalaencontradas en Bodin (1989):

a) Primera forma: Una representación dada, que se acompaña de un pequeño diseño tales como:



b) Segunda forma: Una representación, que va acompañada de una indicación del tipo: “1 km equivale a 2cm”.

c) Tercera forma: Una representación, que está acompañada de una indicación como “x15” o “: 50” con o sin la palabra “escala”, “expansión”, “aumento” o “reducción” (a veces “factor”).

d) Cuarta forma: Una representación fraccionaria, escala $\frac{1}{500}$, escala $\frac{3}{160}$.

A estas formas de representación las denomina*escala explicita*. Podemos añadir otra forma de presentar la escala, si hablamos en el sentido de Bosch (1994), otro ostensivo que representa a la noción de escala.

e) Quinta forma: Una representación de razón, dada por Euclides, 1:500.

Bodin (1989) también menciona la *escala implícita*, que es el coeficiente de proporcionalidad a determinar a partir de los datos del problema.

Estas formas de representación de escala que encontramos en Bodin, nos servirán como un criterio para realizar nuestro análisis del texto.

A continuación presentaremos como la actividad matemática ha ido evolucionando, dando lugar a diferentes OM, según García (2005). Para él las organizaciones tienen diferentes técnicas, tecnologías y teorías que han ido cambiando con el tiempo, de allí nuestro interés en analizar su trabajo.

2.3 Propuestas de organizaciones matemáticas para la proporción

García (2005), relaciona las organizaciones matemáticas, en torno a la proporcionalidad relacionado con los niveles de algebrización de Bolea (2002). En su trabajo García (2005) ala proporcionalidad la denomina Sistemas Lineales (*SL*), para construir este sistema considera aquellos pares de cantidades*a*, *a’* pertenecientes a las magnitudes *M* y *M’* respectivamente, estas evolucionan bajo una *condición de linealidad*.

Condición de linealidad: para todo par de cantidades $(a, a') \in M \times M'$, se tiene que $(ka, ka') \in M \times M' \, (\forall k \in \mathrm{IR} - \{0\})$

Entre las OM encontradas distinguimos las siguientes modelaciones: modelización discursiva, modelizaciónproporcional,modelización ecuacional y modelización funcional.

2.3.1 Modelización discursiva

Al decir modelización discursiva se refiere al marco constituido por la teoría de razones y proporciones (homogéneas), el cuadro muestra una *tecnología* $\theta_d(SL)$, es decir una justificación para este modelo.

$\theta_d(SL)$: dos magnitudes *M* y *M'* relacionadas en un sistema lineal verifican que si $(a, a') \in M \times M'$, entonces: a) Cuando la cantidad *a* aumenta al doble, al triple, …, la cantidad correspondiente *a'* aumenta al doble, al triple, … b) Cuando la cantidad *a* disminuye al doble, al triple, …, la cantidad correspondiente *a'* disminuye al doble, al triple, …

García (2005) señala que, este primer *modelo* permite, a partir de un único par de cantidades, determinar nuevos pares que sean múltiplos o divisores de éste. Sin embargo, interesa poder abordar una situación aún más general, tipo de tarea que García denomina una *tarea problemática* π_1^{SL} .Para resolver el problema, García plantea como primera *técnica*la comúnmente conocida como *reducción a la unidad* τ_{ru}^{SL} .

π_1^{SL} :consideramos un *SL* y un par de cantidades (*a*, *a'*) de este sistema, a) Para una nueva cantidad *b* de *M*, ¿cuál será la cantidad correspondiente en *M'*? b) Para una cantidad *b'* de *M'*, ¿cuál será la cantidad de *M* asociada a ella?	τ_{ru}^{SL} :Reducción a la unidad a) Partimos de un par de cantidades del sistema. b) Se calcula el par correspondiente a la unidad $\left(1, \frac{a'}{a}\right)$, mediante el discurso: " si a *a* le corresponde *a'*, a 1 le corresponderá *a* veces menos: $\frac{a'}{a} = r'$ " c) Se calcula la cantidad correspondiente a *b* mediante el discurso: "si a 1 le corresponde *r'*, a*b* le corresponde *b*-veces*r'* ": $b' = b \cdot r' = \frac{ba'}{a}$

Según García (2005) esta técnica no implica el uso de razones no homogéneas, como se podría pensar de *a*'/*a* que es la "*a*-enésima parte" de la cantidad *a*', en esta escritura, *a* se considera como un escalar. Las restricciones de esta técnica son obvias: puesto que

$\theta_d(SL)$ está descrita en términos de múltiplos y divisores enteros de cantidades de *M*, es vital que las cantidades *a* y *b* sean conmensurables.

> En resumen, la primera modelización $M_d(SL)$ describe una organización matemática puntual, generada en torno a la técnica de "reducción a la unidad", que permite la realización de una actividad matemática bastante limitada sobre el sistema. Su marco tecnológico-teórico explícito es casi inexistente. (García 2005, p. 213)

Siguiendo a Chevallard (1999)

> Cualquiera que sea el tipo de tareas *T*, la técnica relativa a *T* está siempre acompañada de al menos un embrión de tecnología, en muchos casos algunos elementos tecnológicos están integrados en la técnica. (p. 4)

De allí que García hable del carácter autotecnológico de τ_{ru}^{SL} (teoría implícita), que se justifica por su carácter de *práctica cultural*(teoría).La tabla 2 muestra a manera de resumen las componentes de la OM discursiva de las proporciones, según García.

Tabla 2OMmodelización discursiva de proporción.

$M_d(SL)$			
Problemas	Técnicas	Tecnologías	Teorías
π_1^{SL}	τ_{ru}^{SL}	$\theta_d(SL)$	Implícita y cultural

Fuente: García (2005, p.213).

2.3.2 Modelización proporcional

Esta modelización que García (2005) también denominamodelización clásica, se refiere al marco constituido por la teoría de razones y proporciones. El marco teórico está caracterizado por la ausencia de una teoría del álgebra de magnitudes que justifique la realización de operaciones entre cantidades de magnitudes de naturaleza diferente. En consecuencia, arrastra la restricción de comparar, mediante razones, sólo cantidades de la misma magnitud.

Pero no sólo cumplen esta propiedad las cantidades construidas como múltiplos enteros de un primer par de cantidades. Así, si *a* y *b*son medidas de cantidades de magnitud de *M*, *a*' y *b*' las medidas de las cantidades correspondientes en *M*', de manera que $a/b \in \mathrm{Q}^+$ entonces existen $m, n \in \mathrm{IN}$ de manera que $m \cdot n = n \cdot b$. Según la modelización discursiva anterior, a $m \cdot a$ le corresponde $m \cdot a'$ y a $n \cdot b$ le corresponde $n \cdot b'$. En consecuencia se tiene $\theta_{prop}(SL)$.

<table>
<tr>
<td>$\theta_{prop}(SL)$: Dado un SL, consideremos dos cantidades cualesquiera a, b de una magnitud M, y las correspondientes cantidades a', b' de la magnitud M'. estas cuatro cantidades verifican la relación: $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$</td>
<td>τ_{rd3}^{SL}: Regla de tres
a) Construir una tabla con las medidas de las cantidades conocidas, ordenadas de manera que las medidas de las cantidades de la misma magnitud estén en la misma columna, siendo x la medida de la cantidad desconocida:
M M’
a a'
b x
b) Formar la proporción (homogénea): $\frac{a}{b}=\frac{a'}{x}$
c) Escribir la “ecuación”: $a\cdot x=a'\cdot b$
Deducir el modelo resolvente: $x=\frac{a'\cdot b}{a}$</td>
</tr>
</table>

García (2005) señalaque como ha sido construida $\theta_{prop}(SL)$, este modelo tiene una limitación importante, las cantidades *a*y *b*tendrían que ser conmensurables. Por otra parte como que el tipo de variación no ha cambiado, el problema anterior π_1^{SL} corresponde a calcular un nuevo estado teniendo una cantidad conocida de *M*o*M*', este permite la creación de una nueva técnica, conocida como regla de tres τ_{rd3}^{SL}.

Lo que caracteriza completamente a esta segunda organización matemática es el hecho de que el marco teórico no admite la construcción de razones heterogéneas, esto es, entre cantidades de las magnitudes *M* y *M’*.

Esta modelización proporcional $M_{prop}(SL)$ constituye una organización matemática generada en torno a la “regla de tres”. La tabla 3 muestra a manera de resumen las componentes de la OM del modelo clásico de las proporciones, según García.

Tabla 3OM modelizaciónproporcional.

$M_{prop}(SL)$			
Problemas	Técnicas	Tecnologías	Teorías
π_1^{SL}	τ_{rd3}^{SL}	$\theta_{prop}(SL)$	Teoría de las magnitudes variables (en términos de razones y proporciones)

Fuente:García (2005, p.216).

2.3.3 Modelización ecuacional.

Según García (2005) en esta OM se construye un modelo de sistema proporcional en términos de ecuaciones, la ampliación del marco teórico, con la incorporación de la *teoría del álgebra entre magnitudes,* justifica las operaciones entre magnitudes y permite la construcción de razones heterogéneas (cantidades de la magnitud *M'/M*), y permitiría escribir "consentido" las proporcionesheterogéneas. Dando lugar a nuevas tecnologías que caracteriza a los sistemas lineales.

a) $\theta_{ec}^{1}(SL)$: Dado un *SL*, un conjunto de cantidades *a, b, c, d, …* de la magnitud *M*, y las correspondientes cantidades *a', b', c', d', …* de la magnitud *M'*, se verifica que:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}$$

b) $\theta_{ec}^{2}(SL)$: Dado un *SL*, se verifica que $a'=k\cdot a$, para toda cantidad *a* de la magnitud *M*, siendo *a'* la cantidad correspondiente en *M'*.

En $\theta_{ec}^{2}(SL)$ se hace referencia a una constante de proporcionalidad *k*, donde esta depende de las cantidades unitarias elegidas en las magnitudes*M* y *M'*(*u* y *u'* respectivamente), donde *k* es una cantidad que depende de *u* y *u'*, es decir, $k_{(u,u')}$.La evolución de la tecnología también dará lugar a *técnicas clásicas*.

a) τ_{ma0}^{SL}(Modelización algebraica 0): según $\theta_{ec}^{1}(SL)$, los estados del sistema están relacionados por una proporción heterogénea.Luego: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b} \Rightarrow a'{\cdot}b=b'{\cdot}a \Rightarrow b'=\frac{a'{\cdot}b}{a}$

b) τ_{ma1}^{SL}(Modelización algebraica 1): según $\theta_{ec}^{2}(SL)$, los estados del sistema están relacionados por la ecuación $y=k\cdot x$ (fijadas las unidades en *M* y en *M'*). A partir del par (*a, a'*) determinamos la constante *k*:

$a'=k\cdot a \Rightarrow k=\frac{a'}{a}$ conocida k, podemos calcular b': $b'=k\cdot b=\frac{a'}{a}\cdot b$

c) τ_{ma2}^{SL}(Modelización algebraica 2): según $\theta_{ec}^{2}(SL)$, los estados del sistema están relacionados por la ecuación $y=k\cdot x$ (fijadas las unidades en *M* y en *M'*). entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a'=k\cdot a \\ b'=k\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a'}{b'}=\frac{a}{b} \Rightarrow b'=\frac{a\cdot b}{a}$$

La caracterización de las relaciones según la constante de proporcionalidad *k* permite la emergencia de *nuevos tipos de problemas*:

- π_{2}^{SL}: Consideremos dos magnitudes *M* y *M'* relacionadas en un sistema. Sea *a* la medida de una cantidad de magnitud de *M* (respecto de una unidad *u*) y *a'* medida de la cantidad correspondiente en *M'* (respecto de la unidad *u'*). Calcular la constante de proporcionalidad *k* que caracteriza la relación entre *M* y *M'* (respecto a las unidades *u* y *u'*).

- π_3^{SL} : Dado un SL en el que se relacionan dos magnitudes M y M', ¿cómo depende la constante de proporcionalidad k de la elección de las unidades en M y en M'?

Una técnica que propone García para resolver el problema π_2^{SL} es:

τ_2^{SL}: La relación entre M y M', queda modelizada por la ecuación $y = k \cdot x$. En particular: $a' = k \cdot a \Rightarrow k = \frac{a'}{a}$

García (2005) menciona que la técnica τ_{mal}^{SL} se convierte en una técnica rutinaria simple multiplicando las medidas de cantidades de la magnitud M por k iremos obteniendo las medidas de las cantidades correspondientes en M'.

Aquí García hace la evolución de las técnicas y tecnologías permite la evolución de modelos.

La técnica para resolver el problema π_3^{SL} es algo más compleja, al jugar no sólo con la relación proporcional entre M y M', sino también con las relaciones entre unidades. Estas relaciones, son también proporcionales (directas). Luego García (2005) considera cuatro relaciones de proporcionalidad distintas, que pueden expresarse mediante el esquema de la figura.

$$\begin{tikzcd}
M\ (unidad\ \hat{u}) \arrow[r, "\hat{k}"] \arrow[d, "\alpha"'] & M'\ (unidad\ \hat{u}') \arrow[d, "\alpha'"] \\
M\ (unidad\ u) \arrow[r, "k"] & M'\ (unidad\ u')
\end{tikzcd}$$

Figura3 Las constantes de proporcionalidad que intervienen en una proporción.
Fuente: García (2005, p.229).

Según García (2005), la modelación $M_{ec}(SL)$ puede considerarse como una organización matemática local, aunque no sea relativamente completa, porque contiene cierta variedad de técnicas y de tipos de cuestiones problemáticas.

La tabla 4 muestra a manera de resumen las componentes de la OM del modelo ecuacional de lasproporciones, según García.

Tabla 4OMmodelización ecuacional.

$M_{ec}(SL)$			
Problemas	Técnicas	Tecnologías	Teorías
π_1^{SL}	τ_{ma0}^{SL}	$\theta_{ec}^1(SL)$ $\theta_{ec}^2(SL)$	a) Teoría de las magnitudes variables (en términos de razones y proporciones) b) Álgebra ecuaciones.
	τ_{ma1}^{SL}		
	τ_{ma2}^{SL}		
π_2^{SL}	τ_2^{SL}		
π_3^{SL}	τ_3^{SL}		

Fuente: García (2005, p. 231).

2.3.4 Modelización funcional.

La teoría evoluciona hasta la *teoría de las funciones reales de variable* real, esta da lugar a una variación ostensiva en las tecnologías, que considera la correspondencia entre *M* y *M'* como una correspondencia unívoca entre conjuntos numéricos, previa elección de unidades de magnitud en *M* y en *M'*. Supone la modelización del conjunto de cantidades de magnitud *M* y *M'* por un conjunto de medidas concretas (fijadas las unidades de magnitud respectivas) y éste, a su vez, por un subconjunto de números reales.

$\theta_f(SL)$: dado un *SL*, la relación entre las magnitudes puede ser considerada como una función, es decir, como una correspondencia univoca entre dos conjuntos numéricos (conteniendo las medidas de las cantidades de ambas magnitudes respecto de las unidades escogidas en la magnitud *u* y *u'*), modelizada mediante la expresión: $f(x) = k \cdot x$

Según García (2005) esta tecnología ayuda a emerger nuevas técnicas entre las cuales están la del modelo funcional analítico 1 y 2, y la técnica del modelo funcional sintético, que se desarrolla a partir de la propiedad de *linealidad* que caracteriza a los estados del sistema, combinada con la instrumentalizada de la notación *f*. De manera general, esta propiedad se expresaría mediante la escritura: $f(k\,x) = kf(x)$.

a) τ_{mfa1}^{SL} (Modelización funcional analítica 1): puesto que la relación es de proporcionalidad directa, queda modelizada por una función lineal, que será de la forma $f(x) = k \cdot x$. A partir del par de cantidades (*a*, *a'*), determinamos la constante k: $a' = f(a) = k \cdot a \Rightarrow k = \frac{a'}{a}$

conocida k, podemos calcular b': $b' = f(b) = k \cdot b \Rightarrow k \cdot b = \frac{a'}{a} \cdot b$

b) τ_{mfa2}^{SL} (Modelización funcional analítica 2): puesto que la relación es de proporcionalidad directa, queda modelizada por una función lineal, que será de la forma $f(x)=k\cdot x$.

Entonces: $\left.\begin{aligned} a' &= f(a)=k\cdot a \\ b' &= f(b)=k\cdot b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a'}{b'}=\frac{a}{b} \Rightarrow b'=\frac{a\cdot b}{a}$

c) τ_{mfs}^{SL} (modelización funcional sintética): puesto que la relación es de proporcionalidad directa, queda modelizada por una función lineal. Entonces: $b'=f(b)=f\left(\frac{b}{a}\cdot a\right)=\frac{b}{a}\cdot f(a)=\frac{b}{a}\cdot a'$

En este modelo las tareas π_2^{SL} y π_3^{SL} siguen siendo problemáticas, pero las técnicas para resolverlas en este modelo vendrían a ser las mismas. La tarea π_1^{SL} deja de ser problemática pues con la emergencia de este modelo ya se encuentran técnicas más económicas.La tabla 5 muestra a manera de resumen las componentes de la OM del modelo funcionalde las proporciones, según García.

Tabla 5OM modelización funcional.

$M_f(SL)$			
Problemas	Técnicas	Tecnologías	Teorías
π_1^{SL}	τ_{mf1}^{SL}	$\theta_f(SL)$	Teoría de funciones reales de variable real.
	τ_{mf2}^{SL}		
	τ_{mf3}^{SL}		
π_2^{SL}	τ_2^{SL}		
π_3^{SL}	τ_3^{SL}		

Fuente: Adaptado de García (2005, p. 235)

En el capítulo 4 presentamos, desde el punto de vista matemático, una definición de proporción que se adopta a todas las OM presentadas por García.

A continuación presentaremos el capítulo 3 en el que se menciona el marco teórico y los procedimientos metodológicos que fundamento nuestro trabajo.

CAPÍTULO 3 – FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA Y ASPECTOS MEDOLÓGICOS

En este capítulo, mencionaremos el referencial teórico que fundamenta nuestro análisis, la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999) en relación con los conceptos de Organización Praxeológica, así como la metodología adoptada en esta investigación.

3.1 Aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Esta teoría considera la actividad matemática como una de las actividades humanas regularmente realizadas y a su vez estas actividades pueden describirse como un modelo único, que se resume con la palabra *praxeología*, este modelo permite el análisis de prácticas sociales, tanto por su descripción, como por el estudio de las condiciones en que tales prácticas se realizan. En nuestro caso, describir y observar las prácticas de enseñanza de la Matemática, Silva (2005).

Al referirse a la actividad matemática la TAD, distingue dos tipos de praxeologías u organizaciones: las *Praxeologías Matemáticas* u Organización Matemática (OM), las cuales responden a la cuestión. ¿Qué realidad matemática puede construirse en una clase de matemáticas? y las *Praxeologías Didácticas* u Organización Didáctica (OD), responden las cuestiones ¿Cómo se estudia esa realidad?, ¿qué se necesita para elaborar una praxeología matemática? y ¿cuáles son los medios de los que dispone el matemático investigador o los alumnos de matemática para construir una praxeología matemática que responda a ciertas cuestiones? (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997, p. 274).

En nuestra investigación, el texto que analizaremos presenta una OD relacionada a los conceptos de escala y proporción, es decir, la manera como los autores organizaron estos contenidosy nosotros identificaremos la OM movilizada.

> Proceso de estudio, organizaciónmatemática (OM) y organización didáctica (OD) son tres aspectos inseparables del trabajo matemático. Elproceso de estudio puede ser entendido como el proceso de construcción matemática. El resultado de esa construcción es una OM y, finalmente,la manera en que esa organización se construye,

una OD. Los hechosdidácticos y los hechos matemáticos son inseparables.Parra y Otero (2009, p. 156)

Para la TAD el saber es relativo a una institución de referencia I y asume que el *saber* matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como producto de proceso de estudio en relación a una institución I, además este saber pasa por un proceso llamado*transposición didáctica*, que se define como un conjunto de transformaciones y adaptacionesque permiten pasar del saber sabio hasta el saber aprendido,se distinguen 4 procesos por donde pasa el saber a efecto de ser enseñado: saber sabio, es el saber producido por matemáticos e investigadores; saber a enseñar, en el que se encuentra los programas y libros de texto; saber enseñado, es el que proporciona el maestro en el salón de clases; saber aprendido,el que efectivamente adquieren los alumnos.

La noción de Praxeología Matemática (OM)

Como toda obra humana, una OM surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas tareas. Más precisamente, las OM son a la vez el objeto y el producto de la actividad de estudio. De acuerdo con Chevallard (2002), toda actividad humana consiste en cumplir una determinada tarea t de un cierto tipo T, utilizando por lo menos alguna técnicaτ, justificada por una tecnología θ que permite por un lado pensar sobre la técnica y, por otro lado, producir nuevas técnicas. Además existir una teoría Θ, que a su vez justificaría la tecnología utilizada. Estas componentes praxeológicas forman parte de dos aspectos inseparables: la práctica matemática y el discurso razonado.

- Bloque práctico-técnico[T/ τ] o del *saber hacer*,está formado por Tun **tipo de tarea** o **problema**y al menosuna**técnica**τo manera de hacer, que la institución considera pertinente para llevar a cabo las tareas de este tipo. Los tipos de tareas no son datos que nos proporciona la naturaleza, estos son “obras” que provienen de cierta construcción institucional y cuya reconstrucción en cierta institución es un objeto de estudio de la didáctica. Lo mismo puede decirse del resto de componentes de las praxeologías.

El hacer explícita una técnica o utilizarla en forma sistemática provoca que las cuestiones iniciales puedan formularse como verdaderos problemas matemáticos.

Además, al resolver problemas imprevisibles inicialmente, las técnicas permiten agrupar los problemas en lo que llamaremostipo de problemas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 124), esto no significa que, dados un tipo de tareas y una institución de referencia, exista una única técnica τ que viva en dicha institución y que permita realizar (algunas de) las tareas de ese tipo(Fonseca, 2004, p. 36). Una técnica o manera de hacer no necesariamente resuelve todas las tareas de un tipo de tareas T a la cual es relativa, la parte que si resuelve se denomina *alcance de la técnica*, de manera que se puede decir que "no se sabe, en general, realizar las tareas del tipo T"(Chevallard, 1999, p.3).Por otra parte los tipos de tareas pueden agrupar técnicas diferentes.

- Bloque tecnológico - teórico [θ/ Θ]o del saber, en este bloque se sitúan los discursos razonados sobre la práctica que describen, explican y justifican las técnicas que se utiliza, y que recibe el nombre de**tecnología**. Dentro del saber se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación que se denomina **teoría**, el cual cumple un papel similar que la tecnología hace para las técnicas, la ahora llamada teoría lo hace para la tecnología.

Según Chevallard (1999)

> Se admitirá en primer lugar como un hecho de observación que, en una institución I, cualquiera que sea el tipo de tareas T, la técnicaτ relativa a Testá siempre acompañada de al menos un *embrión*o más frecuentemente aún, de un *vestigio de tecnología* θ. En numerosos casos, incluso, algunos elementos tecnológicos están *integrados en la técnica*.Por otra parte, el hecho de que exista en I una técnica canónica, en principio la única reconocida y la única empleada, confiere a esta técnica una virtud "autotecnológica": actuar de esta manera no exige justificación, porque es la buena manera de actuar (en I). (p. 4)

La tecnología tiene 3 funciones: justificar, explicar, producir nuevas técnicas.Como cualquier otra actividad *tecnológica* también consiste en la puesta en práctica de ciertas técnicas, que podemos llamar *técnicas tecnológicas.* Se produce así una dicotomía entre las tareas que podemos llamar "técnicas" y las tareas "tecnológicas". Esta dicotomía no tiene un carácter intrínseco: una tarea tecnológica en una institución podría ser una tarea técnica en otra institución, y viceversa. (Bosch 2005, p.28)

Según Fonseca (2004), el sistema formado por los cuatro componentes constituye una *praxeología* (u *organización*) matemática que consideramos como la *unidad mínima* en que puede describirse la actividad matemática y que designaremos mediante[T/ τ;θ/ Θ].

Las nociones de "tarea", "técnica", "tecnología" y "teoría" son doblemente relativas. En primer lugar son *relativas a la institución de referencia*. Esto significa que lo que es considerado como una tarea (o técnica, o tecnología, o teoría) matemática en una institución **I** no tiene por qué serlo en otra institución **I'**. De hecho, en una institución pueden considerarse como "tipos de tareas", T, aquéllas para las que se dispone de algún tipo de técnica, τ, con su entorno tecnológico-teórico, [θ/ Θ], más o menos explícito. Así, por ejemplo, en la secundaria la descomposición en factores primos de números "pequeños" es una *tarea*, pero la de números "grandes" no lo es. Podría decirse que las técnicas siempre responden a algún tipo de tareas planteables en **I** (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).En segundo lugar, las nociones citadas son relativas a la *función* que desempeña cada objeto matemático en una actividad matemática determinada. Así, fijada una institución **I** (por ejemplo la Universidad), un mismo objeto matemático (por ejemplo el teorema de Bolzano) puede desempeñar funciones diversas (como técnica, como elemento tecnológico o teórico o, incluso, como parte de una tarea) según la actividad matemática en la que dicho objeto matemático esté inmersa. (p. 38)

El teorema de Bolzano es un caso particular de un teorema conocido como teorema de valor intermedio:

Sea *f*una función continua en un intervalo $[a,b]$, tal que $f(a)\cdot f(b)<0$, existe al menos un $c\in]a,b[$, tal que $f(c)=0$.

Posteriormente, y con el fin de tener herramientas más precisas para analizar las actividades matemáticas institucionales, Chevallard (1999) introdujo la distinción de diferentes tipos de praxeologías u organización praxeológica, según el grado de *complejidad creciente* de las praxeologías:

- Praxeologías puntuales,en adelante (PP), si están generadas por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tareas*,*T*. Esta noción es relativa a la institución considerada, alrededor de un tipo de tareas, se encuentra formada por (al menos) una técnica, por una tecnología y por una teoría constituida[T/ τ;θ/ Θ].

El predominio del *saber*, se encuentra raramente en las praxeologías puntuales. Generalmente en una institución dada, I, una teoría Θresponde a varias tecnologías θ_j, cada una de las cuales a su vez justifican y hace inteligibles varias técnicas τ_{ij}, correspondientes a otros tantos tipos de tareas T_{ij}. (Chevallard 1999, p. 6)

- Praxeologías locales (PL),es el resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología localestá caracterizada por una *tecnología* θ, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntualesque la integran,[T_i / τ_i;θ/ Θ].

- Praxeologías regionales (PR), se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una *teoría* matemática común Θ, de diversas praxeologías locales. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías (θ_j) de las praxeologías locales que integran la praxeología regional, $[T_{ij} / \tau_{ij} ; \theta_j / \Theta]$.

- Praxeologías globales, (PG) surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías, $[T_{ijk} / \tau_{ijk} ; \theta_{jk} / \Theta_k]$.

Mediante lo expuesto, queremos identificar los tipos de tareas que envuelve el concepto de escala, que tiene sus técnicas justificadas por la teoría de razones y proporciones, deteniéndonos sobre todo en el bloque práctico - técnico, generalmente sin hacer explícito el bloque tecnológico – teórico. Chevallard (1999) menciona que en la aritmética elemental el discurso tiene doble función, técnica y tecnológica, como cuando se dice “si 1 *cm* en la representación equivale a 2 *km* en la realidad, 3 *cm*, o sea 3 veces 1 *cm*, representarán 3 veces más, es decir, 3 veces 2 *km*”, que permite *encontrar* el resultado pedido (función técnica) y *justificar* que es correcto el resultado esperado (función tecnológica).

Por otra parte, para realizar un mejor análisis de la OM,mencionamos los resultados de Fonseca (2004).

Indicadores del grado de completitud de una praxeología local

Para el análisis de la Praxeología u organización matemática encontramos en Fonseca(2004)sieteindicadores para medir el grado de completitud de una Praxeología Local(PL) en términos de las características de la Organización y de las relaciones entre ellos, estos indicadores son:

1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.

2. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.

3. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.

4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”.

5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.

6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”.

7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

Con respecto a tareas abiertas, Fonseca (2004) define 2 niveles:

> Primer nivel: son aquellas en la que los datos son valores conocidos que se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son objetos matemáticos concretos (números) sino las relaciones que se establecen entre ellos en determinadas condiciones explicitas en el enunciado de la tarea. Segundo nivel: el estudiante ha de decidir ante una situación matemática determinada, que datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas más pertinentes (modelización matemática). (p. 183)

Fonseca (2004) resaltaque la noción de “completitud” es relativa y que no tienesentido hablar de OML “completas” ni de OML “incompletas”, se tratará en todos loscasos, de una cuestión de grado: existen OML más o menos “completas” que otras enfunción del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por losindicadores OML1-OML7. El estudio de las OM Locales Relativamente Completas, posibilitan la conexión entre la Enseñanza de Secundaria y la Enseñanza Universitaria, niveles pocos estudiados desde la investigación experimental(Fonseca 2004, p. 183).

Justificamos que, esta teoría nos brinda las herramientas para cumplir nuestros objetivos, es decir identificar las tareas, técnicas y el discurso tecnológico teórico, que justifican las técnicas que los autores del texto proponen en su acción para resolver las tareas presentadas, con estos elementos podemos observar el grado de *complejidad creciente* de la praxeología encontrada, con esto podremos describir la organización matemática que esta propuesta en un texto. Además podremos identificar cuál es el grado de completitud de ser una Organización Matemática Local.

3.2 Metodología de la investigación

Pretendemosanalizar como los autores organizaron el estudio de la*proporción*, en base al análisis de un texto, para ello necesitamos de una visión amplia, es decir precisamos conocer como es abordado este concepto desde otras perspectivas, lo que encontramosen libros e investigaciones. Es por ello que adoptamos una metodología cualitativa con enfoquedocumental.Concordamos con Cuba y Lincoln(1981, citado enSilva, 2005)que las ventajas de trabajar con esta metodología son:

> Los documentos constituyen una fuente rica y estable, y puede ser la base de diferentes estudios donde podemos obtener evidencia para fundamentar las afirmaciones y declaraciones del investigador, siendo una fuente natural de información, tiene un muy bajo costo, lo que permite la recogida de datos cuando el acceso a la materia es poco práctico y, por otra parte, indica que problemas debe ser más explorado por medio de otros métodos, por encima de todo, o por todo esto es una fuente de información que no debe ser ignorada (p. 30).

El análisis documental investiga la información sobre los hechos en documentos a partir de preguntas o hipótesis de nuestro interés.
A continuación presentaremos la secuencia de pasos que realizamospara la realización de nuestros objetivos.

Procedimiento metodológico:

En primer lugar se buscaron y se recopilaron investigaciones relacionadas con escala y proporción, para ello nos centramos en el tratamiento de la información: en los tipos de tareas y en lasestrategias de resolución a situaciones de proporcionalidad; luego se clasificó clasificaron las investigaciones de acuerdo al objeto matemático (tratamiento formal, enseñanza y aprendizaje), a la teoría y a la metodología;luego definimos criterios para realizar el análisisde la OM, finalmente se describió y analizó el texto tomando en cuenta los criterios definidos. En resumen el procedimiento metodológico que seguimos es el siguiente:

- Recopilar información
- Clasificar la información
- Crear criterios de análisis
- Describir y analizar del texto

Criterios de análisis del texto de Matemáticas para Arquitectos

Para el análisis del texto tomamos en cuenta los resultados de las investigaciones encontradas (ver capítulo 2).
En la tabla 6 definimos 3 criterios de análisis, un primer criterio sobre las concepciones o tratamiento de los objetos escala y proporción, es decir,tomando como referencia a

García (2005) este criterio de análisis nos ayudará a distinguir en qué nivel de modelización se encuentra la organización matemática que presenta el texto para la enseñanza de proporciones; el segundo criterio es tomado como referencia de las clases de problemas encontrados en Lesh et al (1988, citado en Floriani, 2004). Pensamosque es de gran importancia saber si estos tipos de problemas están presentes en los ejemplos resueltos y ejercicios propuestos de escalas y proporciones; y el tercer criterio nos sirve para observar si se presentan en los ejercicios resueltossobre escalas, problemas multiplicativos de la categoría de isomorfismo de medidasde acuerdo con Vergnaud (1983citado en Floriani, 2004).

Tabla 6 Criterios de análisis para el texto Matemáticas para Arquitectos

	CRITERIOS
Sobre las concepciones o tratamiento de los objetos escala y proporción.	Se presentan actividades resueltas en las que emplean las concepciones sobre la relación de proporcionalidad modelización proporcional, modelización ecuacional, modelización funcional.
Sobre los tipos de tareas de escalas.	Se presentan actividades que requieren emplear tareas de comparación, tareas de valor desconocido.
Sobre las clases de problemas de proporción de tipo isomorfismo de medidas en escalas.	Se presentan problemasde multiplicación planteados según las categorías de Vergnaud,multiplicación, división como partición, división como agrupamiento, regla de tres y subcategorías encontradas.

En el siguiente capítulo presentamos el estudio de la proporción desde el punto de vista matemático.

CAPÍTULO 4 – ESTUDIO DEL OBJETO MATEMÁTICO

En este capítulo presentamos la definición de proporción, dejando en claro que esta definición corresponde a la noción usual de *proporción directa simple* que aparece tradicionalmente en los textos de enseñanza media y superior.

Con el objetivo de poner en relieve las cuestiones relacionadas con la formalización del concepto de la proporcionalidad se hace el estudio de libros, artículos y tesis. Entre los cuales nos enfocamos en Comin (2000), en la que se encuentra un modelo general sobre la proporcionalidad. Así también, consideramos el libro "Matemática para la enseñanza media" de Lima (1999) en el tratamiento la proporción como función lineal, en donde el autor analiza el concepto de magnitudes proporcionales, su definición y uso.

4.1 Estudio de la proporcionalidad desde el punto de vista matemático

Antes de dar la definición de proporcionalidad debemos tener presente los conceptos de magnitud, cantidad, medida, unidad de medida, unidad de magnitud ymedición.

Llamaremos *magnitud* a toda propiedad susceptible de ser cuantificada, por ejemplo, la longitud, la masa, el tiempo, el precio, etc. Llamaremos *cantidad*al resultado de la medida, es decir al par (medida, unidad) donde la *medida* es un número real positivo y la *unidad* viene dada por el sistema de unidades elegido. En adelante escribiremos la medida y a continuación la unidad. Por ejemplo, en lugar de (3, *kg*) escribiremos 3 *kg* y diremos que 3*kg* es una cantidad de magnitud donde 3 es la medida y *kg* es la *unidad de medida*.

Es claro que si se fija la magnitud, la podemos definir como un conjunto de *cantidades.*

Observemos que la medida de una cantidad es un escalar, de la misma forma que en un monomio, el coeficiente lo es.

Claramente se distinguen dos clases de cantidades:

1. Decimos que A_1 y A_2 son cantidades homogéneas si pertenecen a la misma magnitud, en este caso puede suceder que A_1 y A_2 sean de la misma naturaleza, esto es, que tengan la misma unidad de medida. Por ejemplo: $A_1 = 3m$ y $A_2 = 5m$.

Notemos que, con las cantidades homogéneas de la misma naturaleza se pueden realizar operaciones. La otra posibilidad es que A_1 y A_2 sean de diferente naturaleza, es decir, que las cantidades tengan diferentes unidades de medida. Por ejemplo: $A_1 = 3m$ y $A_2 = 5\,km$

2. Decimos que A y B son cantidades no homogéneas si pertenecen a magnitudes distintas. Por ejemplo: $A = 3m$ y $B = 5\,kg$.

No queremos dejar de mencionar que otros ejemplos de cantidad son: $100\ km/h$, $5\,kg/dm^3$, etc.

En otras investigaciones encontramos definiciones que podemos relacionarlas con la nuestra. Veamos, según Godino y Batanero (2002, p. 624) los conceptos de magnitud y cantidad se definen la siguiente forma: "Una magnitud es un semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades". Por otro lado, según Chamorro (2003) "Una magnitud *M* es el conjunto de clases de equivalencia en el que se ha definido una suma $\oplus$ y un orden < que dota al conjunto $(M,<,\oplus)$ de la estructura monoide conmutativo, arquimediano, y de medida (aplicación que va de *M* a un conjunto de números positivos, IN, Z, Q, IR, que viene determinada por launidad de magnitud escogida, denominada unidad, y que tiene como imagen el 1)".

En ambas definiciones se exige una estructurapara garantizar la posibilidad de operar los elementos, lo que en nuestra definición ocurre cuando las cantidades de magnitud son homogéneas y de la misma naturaleza. Al considerar que las medidas son reales positivas hemos elegido usar la estructura de monoide y no de semigrupo. También en ambas definiciones los elementos de la magnitud resultan clases de equivalencia que agrupan cantidades como 3*km*, 3000*m*, 300000*mm* que para nosotros corresponden a cantidades homogéneas de diferente naturaleza. Finalmente ambas definiciones exigen una estructura de orden y, en el caso de Chamorro, impone además la propiedad arquimediana. En nuestra definición eso corresponde al hecho de haber elegido como medida de una cantidad a los números reales positivos, ordenados con el orden usual y que claramente tiene la propiedad arquimediana.

Por otro lado, hablamos de *medir*cuando comparamos dos cantidades homogéneas de la misma naturaleza, una de las cuales se toma como patrón, es decir, determinar cuál es la cantidad de una magnitud por comparación con otra que se toma como unidad de la magnitud. El resultado de una medida es un número que debe ir acompañado de la unidad empleada.

A continuación mostraremos la definición de proporción que se basa en el trabajo realizado por Comin (2000), que nosotros hemos la hemos adaptado a nuestras definiciones de magnitud y cantidad.

Definición de proporción.

Diremos que dos magnitudes G y G' son proporcionales, si la relación multiplicativa (la misma en ambas magnitudes) entre pares de elementos de la misma magnitud (cantidades) es igual a la relación multiplicativa entre los dos elementos correspondientes de la otra magnitud (cantidades correspondientes).

Cuando se trata de la misma magnitud: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_3}{A_4}$

Con la noción de escala se hace una proporción de este tipo puesto que se relaciona cantidades de la misma magnitud (esto es, cantidades con unidades de longitud).

Por ejemplo:

La proporción entre el radio y la longitud de la circunferencia.Dados dos radios de circunferencias de diferente tamaño r_1 y r_2, sus respectivas longitudes $2\pi r_1$ y $2\pi r_2$, se tiene que: $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{2\pi r_1}{2\pi r_2}$

Cuando se trata de magnitudes diferentes: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$

Por ejemplo:

La proporción entre la Masa y el Precio de un producto.

Si se sabe que 1*kg* del producto tiene un precio de S/.2, y asumiendo que no hay descuento en el precio (debe haber una condición de *equidad*), entonces 7*kg* del producto tiene un precio de S/.14, se tiene que: $\frac{1kg}{7kg} = \frac{S/.2}{S/.14}$

Aquí podemos entender que no todas las relaciones son relaciones de proporcionalidad,

Por ejemplo:

El lado y el área de un cuadrado. Sean l y $\bar{l}$ lados de cuadrados y sus respectivas áreas l^2 y $\bar{l}^2$, se tiene que: $\frac{l}{\bar{l}} \neq \frac{l^2}{\bar{l}^2}$

Con respecto a la condición de equidad Comin (2000), señala que esta condición se debea una convención social nos lleva a utilizar técnicas de proporcionalidad, es decir a la decisión de atribuir partes iguales, por ejemplo si un kilo de arroz cuesta 3 soles, entonces 2 kilos del mismo arroz costará 6 soles, pero esto podría cambiar si nos encontramos con una *oferta* “dos por uno”.

Por otra parte, si la proporción se da entre pares de cantidades de dos magnitudes, entonces podemos que decir que los pares (1*kg*,7000*g*) y (*S/*.2,*S/*.14) son proporcionales, es decir $\frac{1kg}{7\,000\,g} = \frac{S/.2}{S/.14}$, independientemente de la unidad de magnitud que escojamos en las dos magnitudes.

En el ejemplo anterior, queda claramente expuesta la preocupación acerca de qué es lo que sucede,en las operaciones,con las unidades de medida de las cantidades de magnituden la proporción. Es por ello que presentamos el siguiente modelo.

La situación de proporcionalidad se puede modelar matemáticamente de la siguiente manera:

Dadas dos magnitudes G y $\mathrm{G'}$, una correspondencia C entre los elementos de G y $\mathrm{G'}$, escogemos una unidad de magnitud*u*, elemento de G y una unidad de magnitud*u’* elemento de G' y dos variables algebraicas (numéricas)aditivas X e Y definidas respectivamente sobre G y G' con valores en IR$^+$ tales que $\mathrm{X}(u) = 1$ e $\mathrm{Y}(u') = 1$. Se tiene que para cada *g*, *g’* en G y G', respectivamente, con $C(g) = g'$, $X(g) = x$ e $Y(g') = y$, existe un número *k* tal que para cualquier par (*x*, *y*) se cumple que $y = kx$.

Este modelo lo entendemos como muestra eldiagrama de la figura 4, es decir la proporcionalidad entre magnitudes se extiende a una proporcionalidad numérica, dado que dos magnitudes están relacionadas, encontramos una variable numérica que hace corresponder a toda cantidad de magnitud con un valor numérico, es decir una medida en el conjunto de los números reales positivos, de acuerdo a la unidad de magnitudelegida y al trabajar ya con las medidas encontramos una relación entre los números, que más adelante concluiremos que debe tratarse de una función lineal, entonces podemos decir que para todo par de números *x* e *y* existe un $k \in \mathrm{IR}$ talque $y = kx$.

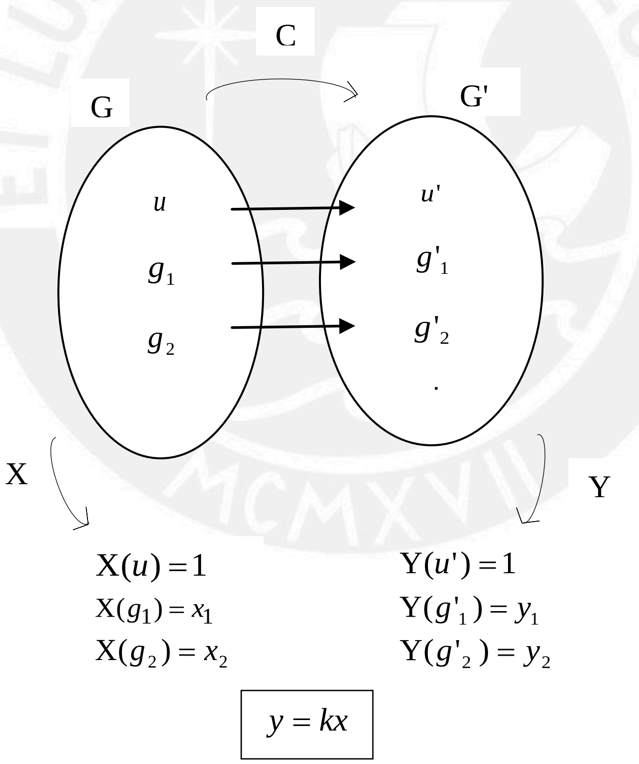


Figura 4 Modelo de proporción entre magnitudes

A continuación,en la figura 5 presentamos un diagrama que muestra la manera formal de separar la medida de la unidad de magnitud, tomando las unidades de magnitud escogidas, poder así trabajar en el campo de los números reales.

Nota 1

La existencia del número k hace que el diagramade la figura 5 sea conmutativo, es decir, para todo $g \in \mathrm{G}$ se tiene $\overline{\mathrm{Y}} \circ \mathrm{C}(g) = \overline{\mathrm{K}} \circ \overline{\mathrm{X}}(g)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[rrr, "\overline{\mathrm{X}}"] \arrow[ddd, "\mathrm{C}"'] & & & \mathrm{IR}^{+} \times \{u\} \arrow[ddd, "\overline{\mathrm{k}}"] \\
& g \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x,u) \arrow[d, mapsto] & \\
& g' \arrow[r, mapsto] & (y,u') & \\
\mathrm{G}' \arrow[rrr, "\overline{\mathrm{Y}}"'] & & & \mathrm{IR}^{+} \times \{u'\}
\end{tikzcd}$$

Figura 5 Separación de medida y unidad de magnitud
Fuente: Comin (2000), p.97

Se tiene que una magnitud se corresponde con un conjunto numérico y una unidad de magnitud, seleccionada en cada magnitud, mediante una función $\overline{\mathrm{X}}$, se tiene: $\overline{\mathrm{X}} : \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{IR}^{+} \times \{u\}$ donde $\bar{x} = (x,u)$ talque $\forall\, g \in \mathrm{G}$: $\overline{\mathrm{X}}(g) = (\mathrm{X}(g), u)$

$g \mapsto \bar{x}$

$$\overline{\mathrm{X}}(g) = (\mathrm{X}(g), u)$$

$$\overline{\mathrm{Y}}(g') = (\mathrm{Y}(g'), u')$$

$$\overline{\mathrm{K}}(x,u) = (\mathrm{y}, u')$$

Con la hipótesis de la definición se prueba que $\overline{\mathrm{Y}} \circ C(g) = \overline{\mathrm{K}} \circ \overline{\mathrm{X}}(g)$

$$\overline{\mathrm{Y}}(C(g)) = \overline{\mathrm{Y}}(g') = (\mathrm{Y}(g'), u')$$

$$\overline{\mathrm{K}}(\overline{\mathrm{X}}(g)) = \overline{\mathrm{K}}(\mathrm{X}(g), \mathrm{u}) = (\mathrm{Y}(g'), u')$$

El diagrama de la figura 5justifica la manera formal de separar las medidas y las unidades de magnitud. Luego separar las unidades de magnitud es extender la proporción numérica a una proporción entre cantidades de magnitud. Además si hay proporcionalidad entonces el diagrama es conmutativo.

Nota 2

La modelización anterior moviliza las medidas de las magnitudes, para calcular un número *k*, el cual depende de las unidades de magnitud*u* y *u'*, escogidas en cada magnitud.

Así por ejemplo, Se tiene dos magnitudes Masa y Precio de cierto producto relacionados mediante una correspondencia, donde 1*kg* cuesta S/. 4, 2*kg* cuesta *S*/. 8, 3*kg* cuesta *S*/. 12, etc.

Escogiendo las unidades correspondientes en cada magnitud encontramos que la proporcionalidad entre las magnitudes no depende de la unidad de magnitud que escojamos en cada una, veamos:

En la magnitud masa al escoger la unidad de magnitud $u = 1kg$ entonces $\mathrm{X}(1kg) = 1$ y en la magnitud precio la unidad de magnitud $u' = S/.12$ entonces $\mathrm{Y}(S/.12) = 1$.

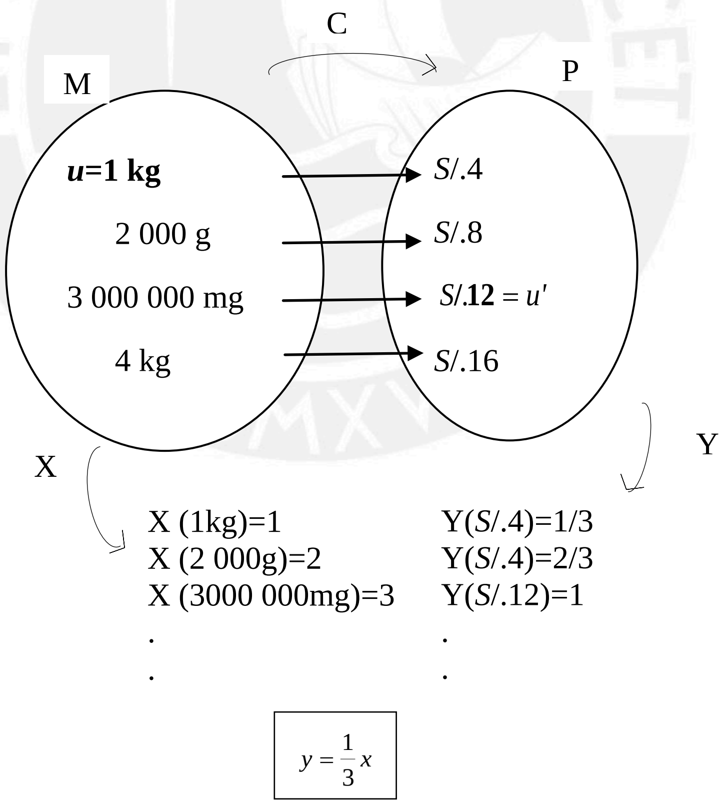


Figura 6 Ejemplo de separación de medida y unidad

Entonces decimos que para todo par (*x*, *y*) existe un *k*=1/3, talque $y = \frac{1}{3}x$

Trabajando en el mismo problema escogemos otraunidad de magnitudcorrespondiente a cada magnitud, por ejemplo en la magnitud Masa escojamos la unidad $u = 3kg$ entonces $X(3kg) = 1$ y en la magnitud Precio la unidad $u' = S/.8$ entonces $Y(S/.8) = 1$.

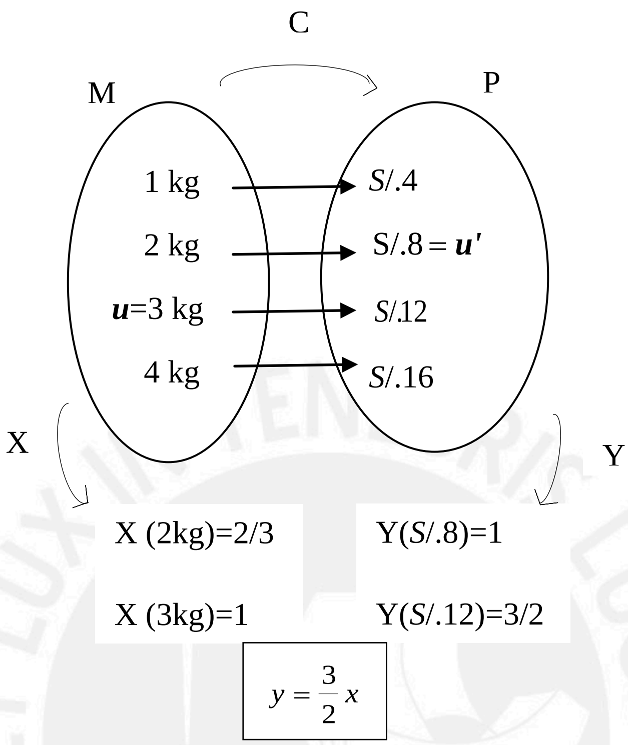


Figura 7 Ejemplo con otrasunidades de magnitud

Entonces decimos que para todo par (*x*, *y*) existe un *k*=3/2, talque $y = \frac{3}{2}x$

Trabajando en el mismo problema en el caso particular de escoger cantidades que se correspondan, como unidad de magnitud, la constante k siempre resulta 1, por ejemplo en la magnitud Masa escogemos la cantidad unitaria $u = 3kg$ entonces $X(3kg) = 1$ y en la magnitud Precio la cantidad unitaria $u' = S/.12$ entonces $Y(S/.12) = 1$,

Entonces decimos que para todo par (*x*, *y*) existe un *k*=1, talque $y = 1x$

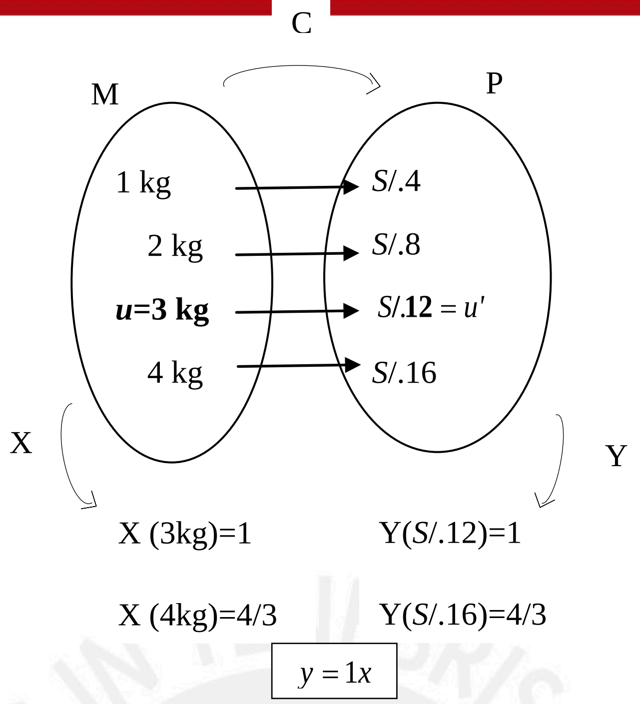


Figura 8 Ejemplo con unidades escogidas en cada magnitud que se corresponden

Una consecuencia de la proporcionalidad entre las magnitudes, es que existe una correspondencia K, que relaciona las medidas de cantidad de cada magnitud que es una función lineal, aquí es donde nos encontramos en el cuadro numérico según Comin (2000).

Consecuencia

Las magnitudes G y G' son proporcionales, si y solamente si la aplicación $\mathrm{K} : \mathrm{IR}^{+} \rightarrow \mathrm{IR}^{+}$ talque $\mathrm{K}(x) = y$, es lineal.

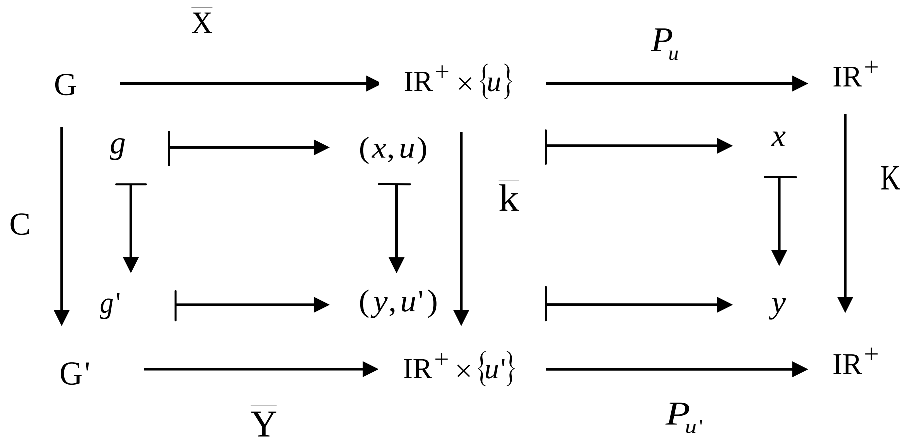


Figura 9 Relación entre magnitudes y relación entre las medidas
Fuente: Comin (2000), p.99

Por otra parte, las magnitudes permiten diferentes modelizaciones de proporcionalidad.

Clasificación de diferentes relaciones.

A toda cantidad le hace corresponder con un valor numérico, es decir una medida de acuerdo a la unidad elegida en la magnitud.

Tenemos los siguientes casos:

- a y b son dos escalares (elementos del cuerpo de los reales)
- A designa una cantidad.
- A designa una medida de cierta cantidad A
- B designa una cantidad de naturaleza diferente a la de A, no homogénea a A.
- B designa una medida de cierta cantidad B.

Relaciones

Podemos distinguir 8 clases de relaciones, cada una de ellas está definida sobre conjuntos diferentes. En todos los casos $R(x,y)$ resulta de dividir x/y. En adelante, salvo mención expresa, las unidades de medida serán las usuales, esto es, para longitud 1*m*, para tiempo 1*s* y para masa 1*kg* y usaremos indistintamente 1*m* o *m*, 1s o s, 1*kg* o *kg*.

1. R(a, b): la relación entre escalares es un escalar (natural, racional o irracional)
   Ejemplo R (3,4)
2. R(A_2, A_1): la relación entre dos cantidades de la misma naturaleza es un escalar, es decir la medida de A_2 cuando A_1 es la unidad.
   Ejemplo:
   Si L es la magnitud longitud, la relación está dada por R (L, L),
   R(A_2, A_1) = R (3*m*, 2*m*) = $\frac{3m}{2m} = \frac{3}{2}$ =1,5
3. R($\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1$): la relación de la medida de dos cantidades homogéneas es un escalar que no depende de la unidad de medida, diremos que es una relación interna. Es decirR(A_2, A_1) = R($\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1$)
   Ejemplo:

R(3*m*, 2*m*) = R(300*cm*, 200*cm*) = R(3000*mm*, 2000*mm*) = 1, 5

4. R(B,A): La relación de dos cantidades de magnitudes distintas no se puede explicitar sin las unidades de medida de las cantidades.

   Ejemplo: R(3*m*, 2*s*) = $\frac{3m}{2s}=\frac{3}{2}\frac{m}{s}$

   En general, a la relación entre una longitud y una cantidad de tiempo se le conoce como velocidad.

5. R(B,A): escalar acompañado de las unidades de medida *A* y *B*, esto corresponde a la medida de una “magnitud derivada”

   Ejemplo: si *A*=3*m* y *B*=2*s*, entonces

   R (3, 2) = $\frac{3}{2}\ \frac{m}{s}$

6. R(A,s): cantidad homogénea a A de la misma naturaleza.

   Ejemplo

   R(15*m*, 7) sigue siendo una dimensión de longitud $\frac{15m}{7}=\frac{15}{7}m$

7. R(A, s): es la medida de R (A,s) con la unidad de *A*.

   Ejemplo: si A=3m y s=7

   R(3, 7) = $\frac{3}{7}m$

8. R(s, A): la relación entre un escalar y una magnitud $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{A}}$, es decir $\mathrm{s}\times\frac{1}{\mathrm{A}}$

   Ejemplo

   R(3, 1s) = $\frac{3}{1s}=3\cdot\frac{1}{s}$

Clasificación de las situaciones en función del medio de referencia.

Comin (2000) describe cuándo una situación es de proporcionalidad, ya sea en el caso de magnitud, cantidad de magnitud,variable numérica (ver p.52) esto es importante pues muchas veces se asume situaciones de proporcionalidad sin justificar su origen.

1. Cuadro de magnitudes.

Según la definición(ver p.48) dos magnitudes G y G' son proporcionales si se tiene la siguiente igualdad $\frac{g_1}{g_2} = \frac{g'_1}{g'_2}$, en el cuadro de magnitudes según Comin (2000, p.102) hay por lo menos tres razones que permiten determinar si una relación es de proporcionalidad directa: la ley física, la necesidad matemática o lógica y el convenio social (condición de equidad, ver p.47).

2. Cuadro de las cantidades de las magnitudes.

   La razón de dos magnitudes es igual a la razón de las medidas, si se olvida de las unidades se puede usar las propiedades de la proporción numérica, según Comin (2000)"el *producto en cruz* permite validar o invalidar la proporcionalidad entre las dos magnitudes", con lo quefinalmente se puede trabajar con razones externas a partir de razones internas o recíprocamente.

   Y del modelo general se tiene que para cada par de números (*x*,*y*) existe un $k \in \mathrm{IR}$ $y = kx$

3. Cuadro numérico.

   La relación de proporcionalidad entre dos números reales *x* e *y*, siempre se da mediante una función lineal, donde las propiedades resultan de la estructura de IR.

4.2 Proporcionalidad como modelo funcional en un texto

Mostraremos la proporcionalidad como modelo funcional, para ello estudiamos aLima (2000), dondese presenta la definición de proporcionalidaden el cuadro numérico, es decir, se trabajacon las *medidas* de las cantidades de magnitud que son números reales. De acuerdo con el autor, la función lineal es el modelo matemático para los problemas de proporcionalidad.

Primero el autor propone en Lima (1991, p. 127)la siguiente definición: supongamos que la magnitud*y* está en función de la magnitud*x*, esto es $y = f(x)$.

> Diremos que *y es directamente proporcional a x*, cuando se cumplan las siguientes condiciones:
> a) *f* es una función creciente de *x*.

b) Si multiplicamos x por un número natural c, el valor correspondiente de y también queda multiplicado por c ($x \to y$, $cx \to cy$). Es decir $f(cx) = cf(x) \quad \forall c \in \mathrm{IN}$.

Sin embargo, como Lima (2000) refiere una magnitud y puede ser una función creciente respecto de la magnitud x, y no existir una relación proporcional entre las mismas.
En una nueva versión Lima (2000), propone la siguiente definición:

Una *proporcionalidad directa* es una función $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ talque, para cualesquiera números reales c, x se tiene $f(cx) = cf(x)$.

Figura 10 Definición de proporción según Lima.
Fuente: Lima (2000,p.86)

Es claro que si $f(cx) = cf(x)$ para todo c y todo x entonces, escribiendo $a = f(1)$ se tiene que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathrm{IR}$, luego f es una función lineal.

La definición tradicional equivale a decir que la medida y es directamente proporcional a la medida x cuando existe un número a (llamado constante de proporcionalidad) talque $y = ax$ para todo valor de x.

Lima (2000) hace referencia que en la práctica hay situaciones en que la constante de proporcionalidad no está clara y a veces no tiene relevancia alguna para el problema, esto es pues en los problemas relativos a la proporcionalidad lo que importa muchas veces es saber a penas que si $y = f(x)$ y $y' = f(x')$ entonces $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ es constante.

Cuando la correspondencia es una proporcionalidad, la igualdad $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ permite que se determine uno de esos cuatro números cuando se conocen los otros tres. En esto consiste la tradicional "regla de tres".
Sin embargo ¿Cómo estar seguros de que la correspondencia es una proporcionalidad?

A continuación citamos el lema encontrado en Lima.

Lema 1: Sea $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ una función tal que $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathrm{IR}$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(rx) = rf(x)$ para todo $x \in \mathrm{IR}$ y todo $r \in \mathrm{Q}$. En particular, llamando $a = f(1)$, se tiene $f(r) = ar$ para cualquier $r \in \mathrm{Q}$

Demostración:

Dado $r \in \mathrm{Q}$, se tiene $r = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$y $n \in \mathrm{IN}$, luego $m = nr \in \mathbb{Z}$

Entonces $nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x)$ por hipótesis pues $n \in \mathbb{Z}$

$nf(rx) = mf(x)$,

$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = rf(x)$, para todo $x \in \mathrm{IR}$, $r \in \mathrm{Q}$.

Tomando $x = 1$, se tiene $f(r) = rf(1) = r \cdot a$ para cualquier $r \in \mathrm{Q}$.

Siguiendo a Lima (2000), el lema anterior no se podría utilizar si relacionamos la longitud de la diagonal de un cuadrado con su lado, pues este número es irracional.

El siguiente teorema, tal como Lima (2000) refierees la clave para determinar, en todas las situaciones, si una función dada es o no lineal.

Teorema Fundamental de la Proporcionalidad: Sea $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ una función creciente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in \mathrm{IR}$.

(2) Poniendo $a = f(1)$, se tiene $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathrm{IR}$.

(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para cualquier $x, y \in \mathrm{IR}$.

Demostración:

Por el lema (1), llamamos $a = f(1)$, se tiene $f(r) = r.a$ para cualquier $r \in \mathrm{Q}$.

Como f es creciente $f(0) = 0$ y 0<1 entonces se tiene que $f(0) < f(1)$ y como $a = f(1)$, entonces $a > 0$ … (*)

$(1) \Rightarrow (2)$

Supongamos por el absurdo que existe algún $x \in R /\ f(x) < ax$, tenemos que $a > 0$ por (*)

Luego $\frac{f(x)}{a} < x$, y por la densidad de los números reales, existe un $r \in \mathrm{Q}$ talque

$\frac{f(x)}{a} < r < x$, … (**)

Luego $f(x) < ar < ax$

$f(x) < f(r)$, como f es creciente $x < r$, esto contradice a (**)

Entonces $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathrm{IR}$.

$(2) \Rightarrow (3)$

Por hipótesis se tiene que:

$f(x+y) = a(x+y)$ Para todo $x, y \in \mathrm{IR}$.

$= ax + ay$ Propiedad de números reales

$= f(x) + f(y)$

$(3) \Rightarrow (1)$

Probemos por inducción $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathrm{IN}$ y todo $x \in \mathrm{IR}$

$f(1x) = 1.f(.x)$

$f(2.x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2.f(x)$

Supongamos que se cumple para n=h se tiene que $f(hx) = hf(x)$

Probaremos que se cumple para n=h+1 $f((h+1)x) = (h+1)f(x)$

$f((h+1)x) = f(hx + x))$

$= f(hx) + f(x)$, por hipótesis inductiva,

$= hf(x) + f(x)$

$= (h+1)f(x)$

Por lo tanto $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathrm{IN}$ y todo $x \in \mathrm{IR}$.

Además $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 0$

$0 = f(0) = f(-nx + nx) = f(-nx) + nf(x)$

$0 = f(-nx) + nf(x)$

$f(-nx) = -nf(x)$

Entonces $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in \mathrm{IR}$.

Corolario. Sea $\boldsymbol{f} : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ una función creciente tal que $f(nx) = nf(x)$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathrm{IR}$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(cx) = cf(x)$ para todo $x, c \in \mathrm{IR}$.

CAPÍTULO 5 – ANÁLISIS DEL MATERIAL DIDÁCTICO

En este capítulo presentaremos una descripción de la Organización Matemática de los ejercicios resueltos del objeto escala y el análisis respectivo para la organización matemática, del libro seleccionado. Para ello utilizamos como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico envolviendo la Organización Praxeológica propuesta por Chevallard (1999).

5.1 Descripción del texto

El texto elegido lleva por título “Matemáticas para arquitectos” y es el libro de texto para el primer curso de matemáticas de la FAU-PUCP. El libro fue elaborado por los profesores del curso y resume el trabajo de diez años de experiencia, tal como lo señala uno de los autores. A continuación describiremos los temas que se trabajan teniendo en cuenta nuestro objeto de estudio.

El capítulo 1 se presenta divido en cinco partes que detallamos a continuación, indicando los títulos del capítulo 1, la única que consideraremos:

- Capítulo1
  1. Proporciones y números
     - 1.1. Las proporciones en la Arquitectura
     - 1.2. Razones y escalas
     - 1.3. El proceso de medir y los números racionales
       - 1.3.1. Ubicación de los números racionales sobre la recta
       - 1.3.2. Representación decimal de números racionales
       - 1.3.3. Representación fraccionaria de expresiones decimales exactas y periódicas
     - 1.4. Los números irracionales y las proporciones.
       - 1.4.1. Un nuevo tipo de números: los irracionales.
       - 1.4.2. Uso de la proporción áurea. Algunos ejemplos.
       - 1.4.3. Ubicación de los números irracionales sobre la recta.
     - 1.5. Presentación axiomática de los números reales.

Para nuestro trabajo de investigación analizaremos la sección 1.1 y 1.2, del capitulo1, pues en esta sección se encuentra el objeto matemático de estudio: *proporción y escala*.

En ambas secciones los autores se preocupan por articular los campos de la matemática con otras áreas de conocimiento. Plantean problemas de modelización, utilizan ejemplos resueltos, proponen actividades y enuncian ejercicios. Nuestro interés está centrado en analizar aquellos recursos que articulan las nociones de *escala* (E) *y proporción*(P).

Tabla 7 Cantidad de ejercicios sobre escalas en el texto analizado.

Nº Total de ejemplos	Nº Total de ejemplos sobre E y P	Nº Total de ejercicios propuestos	Nº Total de ejercicios propuestos sobre E y P
245	18	307	22

Fuente: Autoría propia

Podemos observar que 7,35%, de los ejemplos resueltos son referentes a *escalas y proporciones*, y 7,17% de los ejercicios propuestos son referentes a este tema.

Con respecto al contenido de proporción, eltexto ofrece el tratamiento formal al objeto matemático proporción, con la siguiente definición:

Definición: cuando dos razones son iguales, se dice que las cuatro cantidades que las componen son proporcionales. Así, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces *a*, *b*, *c*, *d*, son números reales no nulos, es decir la igualdad de dos razones es una *proporción*.

Figura 11 Definición de proporción según el texto analizado
Fuente: Ugarte & Yucra (2011, p. 14)

Observemos que en la definición anterior se utiliza indistintamente de las nociones cantidad y medida. Con respecto a la definición de escala se tiene lo siguiente:

Llamaremos *escala* a la razon entre las distancias sobre un plano o mapa y las correspondientes distancias rales; es decir,

$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia medida sobre el plano}}{\text{Distancia medida sobre la realidad}}$$

Observación. Las escalas carecen de unidades.

Figura 12 Definición de escala según el texto analizado
Fuente: Ugarte & Yucra (2011, p. 14)

Observemos que se plantea una división entre palabras en lugar de utilizar variables. A continuación, utilizando los elementos teóricos aportados por la TAD, presentamos una descripción de los ejercicios resueltos en torno a escala y proporción. Para ello centramos nuestro estudio en el análisis de las siguientes cuestiones:

- Tipos de tareas y relaciones entre ellos.
- Técnicas asociadas a los tipos de tareas.
- Elementos tecnológicos y teóricos que presenta el texto.

5.2 Descripción de los ejemplos resueltos

Con el propósito de observar cuales son las tareas, técnicas, tecnologías propuestas por los autores, se hace una descripción de los ejemplos resueltos.

> Ejemplo 10.
>
> La calle de una ciudad tiene 1,5 *km* de largo. ¿Qué longitud tiene esa calle en un plano de la ciudad a escala 1:40 000?

Este ejemplo presentauna tarea $t_{1,1}$ del TipoT_1, además por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar que es un tipo de problema de proporcionalidad directa Unitaria Diferente Unidad (división), esto es, según las subcategorías dadas por Floriani (2004) mencionadas en el capítulo 2, (ver p.25)

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud.

Tarea ($t_{1,1}$): Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en el dibujo.

Técnica ($\tau_{1,1,1}$):

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad.

En el ejemplo analizado la escala es 1: 40 000, nos indica que 1 *cm* en el plano equivale a 40 000 *cm* en la realidad.

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

$$1{,}5\ km = 150\ 000\ cm$$

Paso 3: Plantear una proporción.

$$\frac{1}{40\ 000} = \frac{x}{150\ 000} \quad \Rightarrow \quad x = 3{,}75$$

Así, la longitud de la calle en un plano de la ciudad a escala 1: 40 000 es 3,75*cm*.

Ejemplo11.

Al fotocopiar un plano de escala 1:100, se pide una reducción del 80%. ¿Ha cambiado la escala?

Con respecto al ejemplo anterior,en este se moviliza otro tipo de tarea, esta esT_2, pero algunos pasos se repiten (paso 1), por otra parte, por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar según el tipo de problema multiplicativo de Vergnaud es dedivisión partitiva.

Los pasos que corresponden para resolver este ejemplo son:

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad.

En el ejemplo analizado la escala es 1: 100, nos indica que 1*cm* en el plano equivale a 100*cm* en la realidad.

Paso 4: Realizar operaciones con porcentajes.

Reducirlo al 80% significa que: El plano que resulta al fotocopiarlo es el 20% del plano anterior, por lo tanto la escala ha cambiado.

Tipo de tarea (T_2): Hallar la escala a partir de dos medidas de longitud.

Tarea ($t_{2,1}$): Dados una medida en la realidad y una medida en el dibujo. Hallar la escala.

Técnica ($\tau_{2,1}$):

Paso 5: Reemplazar en la formula $E = \frac{D}{R}$, D y Ren las mismas unidades en la fórmula:.

Por lo tanto la nueva escala $E = \frac{\frac{1}{5}}{100} = \frac{1}{500}$

Ejemplo 12.

¿Cuál de las siguientes hojas es la más pequeña en la que se puede dibujar una bicicleta de 1,80m de largo por 1,00 m de altura, vista de perfil, en la escala 1: 5?

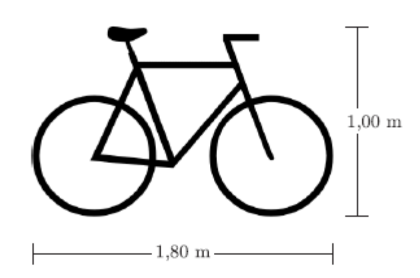


Figura 13 Ugarte &Yucra**.** Ejemplo 12 - (p. 21)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

a. Una hoja $A5$: 148 $mm \times$ 210 mm
b. Una hoja $A4$: 210 $mm \times$ 297 mm
c. Una hoja $A3$: 297 $mm \times$ 420 mm
d. Una hoja $A2$: 420 $mm \times$ 594 mm

Este ejemplo presenta una tarea del mismo tipo que el ejemplo 10, $t_{1,1}$, por lo tanto perteneceal mismo TipoT_1, pero esta presenta otra técnica $\tau_{1,1,2}$, por otra parte, por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar según el tipo de problema multiplicativo de Vergnaud es dedivisión partitiva y según las subcategorías de Florianies un tipo de problema Unitaria Diferente Unidad yMúltiplo misma unidad.

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud

Tarea ($t_{1,1}$): Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en la representación.

Técnica ($\tau_{1,1,2}$):

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

La bicicleta tiene de largo $1{,}80\ m = 1\,800\ mm$ y de alto $1\ m = 1\,000\ mm$.

Paso 3*: Usar la escala como operador.

Hallando el largo del dibujo $\frac{1}{5}(1800) = 360$

Hallando el ancho del dibujo $\frac{1}{5}(1000) = 200$

Claramente de todas las hojas, la más pequeña donde entra el dibujo con la escala dada es la hoja A_3: 297*mm*x420*mm*.

Observamos que en el paso 3* de la técnica $\tau_{1,1,2}$, la escala como fracción es considerada como operador.

Ejemplo 13.

La siguiente figura es la fotografía que les tomaron Gonzalo y Gabriela al lado de un árbol. Si Gabriela mide 1, 20 m y al medir con una regla la altura de Gonzalo en la foto, se obtiene 1,5 cm (compruébelo), entonces.

a. Determine la altura real de Gonzalo.
b. Determine la altura real del árbol.
c. ¿Cuál sería su altura en la foto?

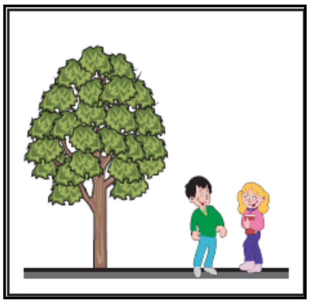


Figura 14 Ugarte &Yucra**.** Ejemplo 13 - (p. 22)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

Este ejemplo presenta dos Tipos de tareas, los ítems a y b corresponden a la misma tarea $t_{1,3}$, el ítem c es una tarea diferente $t_{1,1}$ pero estas dos son del mismo tipoT_1, por otro lado, cabe resaltar que este problema presenta la escala de forma implícita, que es el coeficiente de proporcionalidad a determinar a partir de los datos del problema, es por ello que debe realizar otro tipo de tarea T_2, así también, por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar según el tipo de problema multiplicativo de Vergnaud es deregla de tres y según las subcategorías de Florianies un tipo de problema No Múltiplo.

Tipo de tareas (T_2):Hallar la escala a partir de dos medidas de longitud.

Tarea ($t_{2,2}$): Dados una medida de la realidad y una representación (foto). Hallar la escala.

Técnica ($\tau_{2,2}$):

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en la foto utilizando la regla.

Usar la regla en centímetros, la dimensión de Gabriela en la foto es 1,4*cm.*

Paso 3: Convertir unidades de longitud.

La talla de Gabriela es 1,20 *m* = 120 *cm*

Paso 5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, *D* y *R* en las mismas unidades.

Por lo tanto la nueva escala $E = \frac{1,4}{120}$

La solución del Ítem a)

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud

Tarea ($t_{1,3}$): Dada la escala E y una representación (foto). Hallar la medida de una longitud de la realidad.

Técnica($\tau_{1,3}$):

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en la foto utilizando la regla.

Usar la regla en centímetros, la dimensión del Gonzalo en la foto es 1,5*cm.*

Paso 3: Plantear una proporción

Hallando el ancho largo del dibujo

$$\frac{1,4}{120} = \frac{1,5}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 132$$

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Así, la altura real de Gonzalo es 132 *cm* que es 1,32*m*

Para resolver el ítem b) el conjunto tarea y técnica es $(t_{1,3};\tau_{1,3})$ se sigue la misma técnica ítem a), pues corresponde a la misma tarea.

Para el ítem c)

Tarea $(t_{1,1})$: Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en la representación (foto).

Paso 3*: Usar la escala como operador

Hallando la altura en la foto $h = \frac{1,4}{120} \times L\ cm$

Ejemplo 14.

Se desea representar en una hoja A3: 297*mm*x420*mm* la planta de un edificio de 60*m* x 30*m* en una de las siguientes escalas 1: 20, 1: 50, 1:100, 1: 200, 1:500. ¿Cuál de dichas escalas es la adecuada para que la representación de la planta ocupe el mayor espacio posible en la hoja A3?

Este ejemplo presenta una sola tarea $t_{1,1}$ del Tipo T_1, además por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar según el tipo de problema multiplicativo de

Vergnaud es dedivisión partitiva y según las subcategorías de Florianies un tipo de problema Unitaria DiferenteUnidad yMúltiplo MismaUnidad.

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud.

Tarea ($t_{1,1}$): Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en el dibujo.

Técnica ($\tau_{1,1}$):

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Considere

$L = 60m = 60\ 000mm$ para el largo real del edificio y

$A = 30m = 30\ 000mm$ para el ancho real de la planta del edificio.

Paso 3: Plantea una proporción

Siendo l la medida del largo y a el ancho en la hoja.

$$\frac{1}{20} = \frac{l}{60\ 000} \quad \Rightarrow \quad l = 3\,000$$

Por tanto, el largo del dibujo del edificio es 3 000mm

$$\frac{1}{20} = \frac{a}{30\ 000} \quad \Rightarrow \quad a = 1\,500$$

Por tanto, el ancho del dibujo del edificio es 1500mm

Claramente observamos que las dimensiones obtenidas, exceden las dimensiones de la hoja A_3; es decir $3\,000mm > 420mm$ y $1\,500mm > 297mm$.

Luego la escala de 1:20 no es la adecuada.

Para dar respuesta al ejemplo14 se siguen el paso 3, repetidas 4 veces, con lo que se concluye que con la escala 1:200 y 1:500 se pueden usar para representar la planta del edificio en la hoja A_3.

Ejemplo 15.

La bandera de Lesotho, un país de Sudáfrica, la forma de un rectángulo tal como lo muestra la figura:

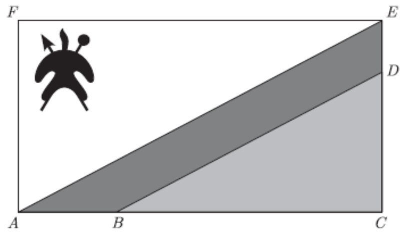


Figura 15 Ugarte &Yucra**.** Ejemplo 15- (p. 24)
Fuente: Libro de *Matemáticas para Arquitectos*

Un borde de la franja ABCD coincide con la diagonal $\overline{AE}$ del rectángulo, el otro borde $\overline{BD}$, es paralelo a la misma diagonal. Se quiere confeccionar una bandera de Lesotho de 60 cm por 90 cm sabiendo que la longitud del segmento $\overline{BC}$ debe ser de 63 cm:

a. Si además se sabe que los triángulos *BCD* y *EAF* tienen la misma forma, halle la longitud del segmento $\overline{DE}$.
b. Mida, usando su regla, las dimensiones de la figura mostrada y determine si el dibujo ha sido hecho a escala. Justifique su respuesta.
c. Dibuje una bandera de Lesotho de 60*cm* x 90*cm* a escala 1: 6, señalando en el dibujo las medidas correspondientes.

Este ejemplo presenta diferentes Tipos: para el ítem a) el paso 3 representa una tarea, para el b) $T_{3,}$ el ítem c) T_1;por otro lado el ítem c) por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar según el tipo de problema multiplicativo de Vergnaud es de división partitiva y según las subcategorías de Floriani es un tipo de problema Unitaria Diferente UnidadNo Múltiplo.

Para resolver el ítem a)

Paso 3: Plantear una proporción

Hacer una proporción, como los triángulos AEF y DBC son semejantes, tenemos la siguiente relación: $\frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC}$

$$\frac{60-x}{63} = \frac{60}{90} \quad \Rightarrow \quad x = 18$$

Por tanto la longitud del segmento $\overline{DE}$ es $18cm$.

Para el ítem b)

Tipo de tarea (T_3): Conociendo las dimensiones en la realidad, determinar si una representación (mapa, plano, foto, etc.) está hecha a escala.

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.

Usar la regla en centímetros, las dimensiones de la bandera en la figura son $7{,}2\,cm \times 4{,}3\,cm$.

Paso 3: Plantear una proporción.

El largo de la figura

$$\frac{7{,}2}{90} = \frac{4{,}3}{60}$$

$$\frac{72}{900} = \frac{43}{600} \text{, como } \frac{72}{900} = \frac{48}{600} \text{, tenemos } \frac{43}{600} = \frac{48}{600} \text{ (Absurdo)}$$

Por lo tanto, concluimos que la figura no está hecha a escala.

Para la solución del ítem c)

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud.

Tarea ($t_{1,1}$): Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en el dibujo.

Técnica ($\tau_{1,1,1}$):

Paso 3: Plantear una proporción

La longitud $\overline{AB}$: $\frac{\overline{AB}}{27} = \frac{1}{6}$ $\overline{AB} = 4{,}5$

La longitud $\overline{ED}$: $\frac{\overline{ED}}{18} = \frac{1}{6}$ $\overline{ED} = 3$

El largo de la bandera en la figura: $\frac{\overline{AF}}{60} = \frac{1}{6}$ $\overline{AF} = 10$

El ancho de la bandera en la figura: $\frac{\overline{FE}}{90} = \frac{1}{6}$ $\overline{FE} = 15$

Las dimensiones de la bandera en la figura son $10\,cm \times 15\,cm$.

Con respecto a la praxeología, afirmamos que un paso puede representar una tarea; por otra parte el Tipo de tareaT_3 no presenta tareas entonces se considera una tarea, además según Lesh et al (1988, citado en Floriani, 2004) con respecto al tipo de problema esta es una tarea (oTipo) de comparación (ver p. 21).

Ejemplo 16.

Sabiendo que las dimensiones de un mapa son 14 *cm* x 10 *cm*, y que en este mapa 5 *cm* corresponden a 250 *km*:

a. Señale la escala empleada escribiéndola en la forma 1: *r*, con $r \in \mathrm{IN}$.
b. Determinar la extensión real aproximada (largo x ancho) de la región representada.
c. Si el mapa quiere dibujarse en una hoja A2: 420 *mm* x 590 *mm*, determine la escala que deberá emplearse para que el mapa ocupe el mayor espacio posible en la hoja.
d. Si la escala que se usará en el ítem c. de esta pregunta debe ser de la forma $\frac{1}{10^n}$, determine el valor de n y luego calcule el largo y el ancho del plano resultante.

Este ejemplo también presenta diferentes tareas de diferentes Tipos: el ítem a) $t_{2,3}$ de T_2 b) $t_{1,4}$ de T_1, c) $t_{2,4}$ de T_2 y d) $t_{2,5}$ de T_2; por otra parte el ítem b) por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar según el tipo de problema multiplicativo de Vergnaud es producto de medidas, el ítem c) es de regla de tres y según las subcategorías dadas por Floriani es un tipo de problema NoMúltiplounidad diferente y el ítem d) unidad diferente unidad múltiplo misma unidad.

Para resolver el ítem a)

Tipo de tarea (T_2): Hallar la escala a partir de dos medidas de longitud.

Tarea ($t_{2,3}$): Hallar la escala en forma normalizada, escribirla de la forma 1: r, $r \in$ IN

Técnica ($\tau_{2,3}$):

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Como $250km = 2{,}5 \times 10^7 cm$

Paso 5: Usar la fórmula $E = \dfrac{D}{R}$, D y R en las mismas unidades.

Por lo tanto la nueva escala $E = \dfrac{5}{2{,}5 \times 10^7} \Rightarrow E = \dfrac{2}{10^7}$

Paso 7: Escribir la escala en forma estandarizada.

En esta tarea se pide la escala en la forma $\dfrac{1}{r}$, $r \in$ IN

$$E = \frac{2}{10^7}$$

$$E = \frac{1}{\dfrac{10^7}{2}} = \frac{1}{5 \times 10^6}$$

Donde $r = 5 \times 10^6$.

Afirmamos que, el alcance de la técnica $\tau_{2,3}$ es limitado como lo vamos a demostrar más adelante (ver p.89)

Para el ítem b)

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud.

Tarea ($t_{1,4}$): Determinar la extensión real aproximada (largo x ancho)

Técnica ($\tau_{1,4}$):

Paso 3: Plantear una proporción

Usamos las dimensiones del plano $14cm \times 10cm$ para hallar las dimensiones reales.

Usamos la escala para determinar el largo real del mapa

$$\frac{2}{10^7} = \frac{14}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{14(10^7)}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 7 \times 10^7$$

Luego, el largo real del mapa es $7 \times 10^7\, cm$

De manera similar, el ancho real del mapa

$$\frac{2}{10^7} = \frac{10}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10(10^7)}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 5 \times 10^7$$

Luego, el largo real del mapa es $5 \times 10^7\, cm$

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

$$y = 7 \times 10^7\, cm = 700\ km$$

$$x = 5 \times 10^7\, cm = 500\ km$$

Paso 6: Hallar la extensión real aproximada (largo x ancho).

$$A = 500 \times 700 = 350\ 000$$

Entonces el área real aproximada es $350\ 000\ km^2$

La solución del ítem c)

Tipo de tarea (T_2): Hallar la escala a partir de dos medidas de longitud.

Tarea ($t_{2,4}$): Hallar la escala de manera que el dibujo ocupe el mayor espacio posible.

Técnica ($\tau_{2,4}$):

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

$$700\ km = 7x10^7\, cm = 700x10^6\, mm$$

$$500\ km = 5x10^7\, cm = 500x10^6\, mm$$

Paso 8: Determinar la escala del mapa suponiendo que el largo real ocupa todo el largo de la hoja.

Suponiendo que el largo real ocupa todo el largo de la hoja

$$E_1 = \frac{594}{700x10^6}$$

Suponiendo que el largo real ocupa todo el largo de la hoja

$$E_2 = \frac{420}{500x10^6}$$

Tarea ($t_{1,1}$): Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en el dibujo.

Técnica ($\tau_{1,1}$):

Paso 3: Plantear una proporción.

Si usa E_1

$$\frac{594}{700x10^6} = \frac{x}{500x10^6}$$

$$x = 424{,}3$$

Con esta escala se necesitaría $424{,}3\ mm$ excediendo a $420mm$

Si usa E_2

$$\frac{420}{500x10^6} = \frac{x}{700x10^6}$$

$$x = 588$$

Con esta escala si entra el largo del dibujo del mapa en la hoja A2.

La solución del ítem d)

Tipo de tarea (T_2): Hallar la escala a partir de dos medidas de longitud.

Tarea ($t_{2,4}$): Hallar la escala en forma $\frac{1}{10^n}$.

Técnica ($\tau_{2,4}$):

Paso 7: Escribir la escala en forma estandarizada

Esta tarea se resuelve colocado la escala en forma 1: r, $r \in$ IN

$$E_1 = \frac{420}{500x10^6} = \frac{1}{\frac{500x10^6}{420}}$$

Paso 9: Escribir un número en notación científica.

Como $\frac{500x10^6}{420} \approx 1{,}2x10^6$

Paso 10: Acotar un número entre potencias de 10

Tenemos que $10^6 < \frac{500x10^6}{420} < 10^7$

$$\frac{1}{10^7} < \frac{1}{\frac{500x10^6}{420}} < \frac{1}{10^6}$$

$$\frac{1}{10^7} < E_2 < \frac{1}{10^6}$$

Si se usa la escala $\frac{1}{10^6}$, no se podría representar el largo real en la hoja A2, porque necesitaríamos 700*mm*, excediendo las dimensiones de la hoja A2. Por lo tanto la escala buscada es $E = E_2 = \frac{1}{10^7}$.

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud.

Tarea ($t_{1,1}$): Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en el dibujo.

Técnica ($\tau_{1,11}$):

Paso 3: Plantear una proporción.

Usando la escala *E*, hallamos el largo del plano resultante.

$$\frac{1}{10^7} = \frac{x}{700x10^6} \quad \Rightarrow \quad x = 70$$

Luego el largo del plano resultante es 70 *cm*.

$$\frac{1}{10^7} = \frac{x}{500x10^6} \quad \Rightarrow \quad x = 50$$

Luego el ancho del plano resultante es 50 *cm*.

Ejemplo 17.

La razón entre el ancho y el largo de un terreno rectangular es $\frac{3}{4}$. Si se dibuja dicho terreno en la escala $E = 1:400$, el área del dibujo es $7500mm^2$. Halle el área real del terreno.

Este ejemplo presenta una tarea $t_{1,4}$ del tipoT_1, por otra parte,por los datos que se presentan en esta tarea podemos afirmar según Vergnaud es un problema de categoría producto de medidas y según Floriani es de subcategoría Unitaria Diferente Unidad (multiplicación).

Tipo de tarea (T_1): Usar la escala para hallar una medida de longitud

Tarea ($t_{1,4}$): Determine la extensión real aproximada (largo x ancho).

Técnica ($\tau_{1,4}$):

Paso 3: Plantear una proporción. Sea el ancho del dibujo$A$ y el largo del dibujo$L$.

$\frac{A}{L} = \frac{3}{4}$, Siendo A= 3k yB = 4k

Luego el área del terreno es $7\ 500\ m^2$

$$(3k)(4k) = 7\ 500$$

$$12k^2 = 7\ 500$$

$k = 25$

Las dimensiones del terreno en la figura son $75\,mm \times 100\,mm$, es decir $7{,}5\,cm$ y $10\,cm$.

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad.

Con la razón dada 1: 400, se puede decir que 1 mm en el plano equivale a 400 mm en la realidad.

Paso 3: Plantear una proporción.

Hallando el ancho real del mapa

$$\frac{1}{400} = \frac{75}{A} \quad A = 30\,000$$

Luego, el largo real del mapa

$$\frac{1}{400} = \frac{100}{L} \quad L = 40\,000$$

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

$A = 30\,000\,mm = 30\,m$

$L = 40\,000\,mm = 40\,m$

Paso 6: Calcular el área de un rectángulo (largo x ancho).

$Área = 40 \times 30 = 1\,200$

Por lo tanto la extensión real del terreno es 1 200 m^2.

Ejemplo 18.

Una maqueta está formada por prismas rectangulares (cajas). Diremos que una maqueta está hecha a escala a: b si y solo si la razón de las medidas de un prisma de la maqueta y las medidas correspondientes del prisma real es $\frac{a}{b}$.

a. Una habitación tiene la forma de un prisma rectangular de dimensiones 7,2*m* x 5,6*m* x 2,5*m* y un alumno la representa por un prisma de dimensiones 10,8*cm* x 8,4*cm* x 3,75*cm*, ¿el alumno elaboró la maqueta a escala? Justifique su respuesta.
b. La maqueta de un colegio fue hecha usando la escala 3:200.
   i. ¿Puede ser que la altura de uno de los prismas de la maqueta que representa un aula mida 0,6*cm*? Justifique su respuesta.
   ii. Determine las dimensiones del aula del tercero A si sus dimensiones en la maqueta son 10,8*cm* x 8,4*cm* x 3, 75*cm*.
   iii. En una vista de planta, se observa que la oficina de la Dirección y el aula de tercero A tienen la misma forma. Calcule el largo de la oficina de la Dirección si el ancho es de 4*m*.

Este ejemplo en el ítem a) presenta una tarea del tipo T_3, para el ítem b) tarea $t_{1,2}$ del tipo T_1, por otra parte, por los datos que se presenta el ítem b) podemos afirmar según Vergnaud es un problema de categoría regla de tres y según Floriani es de subcategoría No Múltiplo.

Ítem a)

Tipo de tarea (T_3): Conociendo las dimensiones de la realidad, determinar si la representación está hecha a escala.

Luego, al comparar las dimensiones se tiene las siguientes escalas:

$$E_1 = \frac{10{,}8}{720} = \frac{3}{200} \quad E_2 = \frac{8{,}4}{560} = \frac{3}{200} \quad E_3 = \frac{3{,}75}{250} = \frac{3}{200}$$

Lo que muestra que el alumno si elaboró la maqueta a escala.

Ítem b)

i) Falso.

Tipo de tarea T_1: Usar la escala para hallar una medida de longitud

Tarea ($t_{1,2}$): Dada la escala E y una medida de la representación. Hallar le medida de esa longitud en la realidad.

Técnica $\tau_{1,2} = (1\ 2\ 3)$ los pasos 1 y 2 ya están implícitos.

Paso 3: Plantear una proporción

La altura de la maqueta (*h*) no puede medir 0,6 *cm*, pues usando la escala tendríamos:

$$\frac{3}{200}=\frac{0,6}{h},$$

Es decir, la altura es 40*cm*, lo cual sería absurdo, pues la altura de un aula no puede medir 40 *cm*.

ii)

Tipo de tarea T_1: Usar la escala para hallar una medida de longitud

Las dimensiones del aula están dadas por:

Tarea ($t_{1,2}$): Dada la escala E y una medida de la representación. Hallar la medida de esa longitud en la realidad.

Técnica $\tau_{1,2}=(1\,2\,3)$, los pasos 1 y 2 ya están implícitos.

Paso 3: Plantear una proporción

Denotamos el largo real (*L*), el ancho real (*A*) y la altura real (*H*), tenemos:

$$\frac{3}{200}=\frac{10,8}{L}\Rightarrow L{=}720\quad \frac{3}{200}=\frac{8,4}{A}\Rightarrow A{=}560\quad \frac{3}{200}=\frac{3,75}{H}\Rightarrow H{=}250$$

Luego el largo del aula del tercero A es 720 *cm* o 7,2 *m*; el ancho del aula del tercero A es 560 *cm* o 5,6 *m* y la altura del aula del tercero A es 250 *cm* o 2,5*m*.

iii)

Para este ítem el conjunto tarea y técnica es ($T_1/t_{1,2}/\tau_{1,2}$)

Sea *x* el largo de la dirección, haciendo la semejanza entre el largo y elancho del aula con el largo y el ancho de la dirección, tenemos:

$$\frac{7,2}{x}=\frac{5,6}{4}\Rightarrow \quad x=5{,}1429$$

Por lo tanto, el largo de la Oficina de la Dirección es aproximadamente 5,14*m*.

5.3 Descripción de la Organización Matemática en torno a escala

Como ya hemos indicado describiremos la OM en torno a escala, nuestra descripción surge del análisis de un texto universitario utilizando los elementos teóricos aportados por la TAD. En toda actividad humana tenemos tareas que realizar, que pueden ser facilitadas por la Organización Praxeológica, estas exigen el uso de técnicas asociadas a una tecnología justificada por las teorías, conforme presentamos en el capítulo 3.

Para evidenciar la organización matemática del tema de *escalas*, en el texto elegido, identificamos los tipos y tareas en cada problema y luego identificamos la técnica propuesta o inducida para resolver cada tarea.

TIPOS DE TAREAS

En primer lugar, tal como lo plantea Chevallard, cada tipo es un conjunto de tareas, de allí que consideramos que la organización matemática construida en el texto está compuesta de 3 *tipos de tareas*. Donde definimostipos de tareasT_i ;$1 \le \mathrm{i} \le 3$

T_1: Usar la escala para hallar una medida de longitud.

T_2: Hallar la escala a partir de dos medidas de longitud.

T_3: Conociendo las dimensiones en la realidad, determinar si la representación está hecha a escala.

TAREAS

Definidos los tipos de tareas encontramos 9 tareas. Donde definimos $\mathrm{t}_{i,j}$; donde *i* indica a qué tipo de tarea pertenece, *j* indica el número de tarea.

$\mathrm{t}_{1,1}$: Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en el dibujo.

$\mathrm{t}_{1,2}$: Dada la escala E y una medida en el dibujo. Hallar la medida de esa longitud en la realidad.

$\mathrm{t}_{1,3}$: Dada la escala E y un representación hecha a escala(mapas, planos, fotos, etc.). Hallar la medida de una longitud de la realidad.

$t_{1,4}$: Dada la escala E. Determine la extensión real aproximada (largo x ancho).

$t_{2,1}$: Dados una medida en la realidad y una medida en el dibujo. Hallar la escala.

$t_{2,2}$: Dados una medida de la realidad y una representación (mapa, foto, plano, etc.) hecho a escala. Hallar la escala.

$t_{2,3}$: Hallar la escala en forma normalizada, de la forma 1: r, $r \in \mathbb{N}$.

$t_{2,4}$: Hallar la escala que maximice la representación.

$t_{2,5}$: Hallar la escala en forma $\frac{1}{10^n}$.

TÉCNICAS ASOCIADAS A LOS TIPOS DE TAREAS.

Paramencionar las técnicas asociadas señalamos los pasos que ayudan a realizar las tareas, es decir la técnica está conformada por pasos. A aquellas sucesiones de pasos, con las que se pueden resolver las tareas, las llamaremos “técnicas” y al conjunto de todos los pasos lo hemos denominado*La técnica*. Veamos,

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad.

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Paso 3: Plantear una proporción.

Pasó 3*: Usar la escala como operador.

Paso 4: Realizar operaciones con porcentajes.

Paso 5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, D y R en las mismas unidades.

Paso 6: Calcular el área de un rectángulo.

Paso 7: Escribir la escala en forma normalizada.

Paso 8: Determinar la escala del mapa suponiendo que la dimensión del largo (ancho) real ocupa toda la dimensión del largo (ancho) de la hoja.

Paso 9: Acotar un número entre potencias de 10.

Paso 10: Escribir un número en notación científica.

El paso 3*, es considerado como parte del desarrollo de la tarea $t_{1,1}$, el autor utiliza la escala como operador, conforme con Silva (2005), “en las tareas que solicitan la movilización de operador o fraccionario $\frac{a}{b}$ es manipulando como algo que actúa sobre una cantidad y la modifica produciendo una nueva cantidad”

Estos 10 pasos forman un conjunto al que denominamos *La técnica*, estos a su vez pueden ser tareas, que se pueden plantear en otro tema que no sea escalas, con esto podemos confirmar el carácter dicotómico delos elementos praxeológicos. Por ejemplo en física o en química se pide que el alumno haga conversiones de unidades, por ejemplo.

a) Un frasco de un nuevo medicamento tiene una presentación de 0,25dm^3. ¿Cuántos milímetros cúbicos caben en el frasco?
b) ¿Qué longitud ocuparían 4 500 000 glóbulos rojos puestos en una fila si su diámetro es de 0,008*mm*? Exprésalo en *km*.

Estos pasos no necesariamente pertenecen a una sola técnica, subconjuntos de los pasos de *La técnica* pueden dar lugar a una técnica, por ejemplo, la técnica $\tau_{1,1,1}$ está formada por los pasos (1 2 3),

Uno o más pasos de una misma técnica puede formar parte de otras técnicas, por ejemplo, el paso 2 de *La técnica*, que también es el paso 2 de la $\tau_{1,1,1}$ está presente en la mayoría de las técnicas.

Es claro que con *La técnica* se formar subconjuntos de técnicas que pueden resolver todas las tareas de los tipos que hemos encontrado (no necesariamente usando todos los pasos cada vez).

Todos estos pasos fueron encontrados en el desarrollo de los ejemplos resueltos. Así estos tomados como *n*-uplas, (*a b c*…) forman las técnicas, y están denotadas por:

$\tau_{i,j}$,técnica asociada a la tarea *j*, del tipo *i*.

$\tau_{1,1,1} = (1\ 2\ 3)$ $\tau_{1,1,2} = (1\ 2\ 3^*)$
$\tau_{1,2} = (1\ 2\ 3)$
$\tau_{1,3} = (0\ 1\ 2\ 3)$
$\tau_{1,4} = (1\ 2\ 3\ 6)$
$\tau_{2,1} = (2\ 5)$
$\tau_{2,2} = (0\ 2\ 5)$
$\tau_{2,3} = (0\ 2\ 5\ 7)$
$\tau_{2,4} = (0\ 2\ 5\ 7\ 9\ 10)$
$\tau_{2,5} = (2\ 5\ 8)$
$\tau_{3} = (0\ 3)$

Observaciones:

- Encontramos en la organización praxeológica del texto, que tarea $t_{1,1}$ tiene dos técnicas $\tau_{1,1,1}$ y $\tau_{1,1,2}$.
- La técnica de $t_{1,1}$ es la misma que la técnica de $t_{1,2}$, es decir, $\tau_{1,1,1} = \tau_{1,2}$
- La técnica de $t_{1,3}$ es la misma que la técnica de la tarea $t_{1,1}$ pero añadiendo un paso el paso 0, es decir, $\tau_{1,3} = \tau_{1,1,1} \cup \{\text{paso } 0\}$
- La técnica de $t_{1,4}$ es la misma que la técnica de $t_{1,1}$ pero añadiendo un paso, es decir, $\tau_{1,4} = \tau_{1,1,1} \cup \{\text{paso } 6\}$
- La técnica de $t_{2,2}$ es la misma que la técnica de $t_{2,1}$ pero añadiendo un paso el paso 0, es decir, $\tau_{2,2} = \tau_{2,1} \cup \{\text{paso } 0\}$
- La técnica de $t_{2,5}$ es la misma que la técnica de $t_{2,1}$ pero añadiendo un paso el paso 8, es decir, $\tau_{2,5} = \tau_{2,1} \cup \{\text{paso } 8\}$
- La técnica de $t_{2,3}$ es la misma que la técnica de $t_{2,1}$ pero añadiendo un paso el paso 7, es decir, $\tau_{2,3} = \tau_{2,2} \cup \{\text{paso } 7\}$

Como podemos observar las técnicas se amplían para generar nuevas tareas.

TECNOLOGÍAS ASOCIADAS A LA TÉCNICA

Algunos elementos de la tecnología de las proporciones son:

Cada paso de *La técnica* puede ser una técnica de alguna tarea, en ese sentido, cada paso (técnica) tendría una tecnología asociada, es decir, justificación del paso.

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.
Tecnología: La tecnología es el conocimiento de las unidades de Longitud.

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en la representación y su correspondiente valor en la realidad.
Tecnología: El conocimiento matemático movilizado en esta tarea es razón de números reales.

Paso 2: Convertir unidades de longitud.
Tecnología: En esta tarea es el conocimiento unidades de longitud.

Paso 3: Plantear una proporción.
Tecnología: el conocimiento matemático movilizado en esta tarea es: el uso de la propiedad de las proporciones de números reales, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$

Producto de extremos es igual al producto de medios.O resolver una ecuación de primer grado.

Paso 3*: Usar la escala como operador.
Tecnología: El conocimiento que está detrás de esta técnica es fracción.

Paso 4: Realizar operaciones con porcentajes.
Tecnología: El conocimiento movilizado es porcentaje.

Paso5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, D y R en las mismas unidades.

Tecnología: El concepto que está inmerso es la razón.

Paso 6: Calcular el área de un rectángulo (largo x ancho)

Tecnología: Conocimiento de áreas poligonales.

Paso 7: Escribir la escala normalizada, es decir, $E = \frac{1}{r}$ con $r \in \mathrm{IN}$

Tecnología: Este paso necesita conocimiento de operaciones con fracciones.

Paso 8: Determinar la escala del mapa suponiendo que la dimensión del largo (ancho) real ocupa toda la dimensión del largo (ancho) de la hoja.

Tecnología: El concepto que está inmerso es la razón de números.

Paso 9: Escribir un número en notación científica.

Tecnología: Conocimiento del conjunto de números reales.

Paso 10: Acotar un número entre potencias de 10.

Tecnología: Conocimiento de desigualdades.

Con respecto a la justificación, es decir, la tecnología θ de las técnicas $\tau_{i,j}$ que están formadas por los pasos, se pudo llegar a la siguiente reflexión:

Si cada paso por si solo es una técnica decimos que es justificación del paso.

Si ($a\ b\ c\ldots$) si es técnica de alguna tarea entonces $\theta_a, \theta_b, \theta_c, \ldots$ son elementos de la tecnología relacionada a las proporciones.

La tecnología para nuestro estudio la tomaremos adoptada de la tecnología del modelo proporcional. Por otro lado, la teoría hablando en el sentido de García (2005), es la Teoría de razones y proporciones.

En la praxeología matemática identificada, encontramos 3 tipos de tareas, 9 tareas y 11 técnicas. Por lo que concluimos que el texto describe una Praxeología Local.

La Organización Matemática inmersa en el libro

En esta sección pasaremos a describir las organizaciones matemáticas encontradas.

T_1:Usar la escala para hallar una medida de longitud.

$t_{1,1}$: Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad. Hallar la medida de esa longitud en la representación (plano, mapa, foto, etc.)

Encontramos en la organización praxeológica del texto, que tarea $t_{1,1}$ tiene dos técnicas $\tau_{1,1,1}$ y $\tau_{1,1,2}$.

$\tau_{1,1,1}$

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad. (Interpretar la escala).

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Paso 3: Plantear una proporción.

$\tau_{1,1,2}$

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad. (Interpretar la escala).

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Paso 3*: Usar la escala como operador.

$t_{1,2}$: Dada la escala E y la **medida** de una longitud de la representación (mapa, plano, foto, etc.). Hallar la medida de esa longitud en la realidad.

En esta tarea no presenta o no se utiliza la representación.

$\tau_{1,2}$

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad. (Interpretar la escala).

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Paso 3: Plantear una proporción.

$t_{1,3}$: Dada la escala E y una representación hecha a escala (mapa, plano, foto, etc.) Hallar la medida de esa longitud de la realidad.

$\tau_{1,3}$

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.
Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad. (Interpretar la escala).
Paso 2: Convertir unidades de longitud.
Paso 3: Plantear una proporción.

$t_{1,4}$: Dada la escala E. Determinar la extensión real aproximada (largo x ancho).

$\tau_{1,4}$

Paso 1: Reconocer la relación entre una unidad de medida en el dibujo y su correspondiente valor en la realidad. (Interpretar la escala).
Paso 2: Convertir unidades de longitud.
Paso 3: Plantear una proporción.
Paso 6: Hallar la extensión real aproximada (largo x ancho).

T_2: Hallar la escala a partir de dos medidas de longitud.

$t_{2,1}$: Dados una medida en la realidad y una medida en el dibujo. Hallar la escala.

$\tau_{2,1}$

Paso 2: Convertir unidades de longitud.
Paso 5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, D y R en la mismas unidades.

$t_{2,2}$: Dados una medida de la realidad y una representación (mapa, foto, plano, etc.). Hallar la escala.

$\tau_{2,2}$

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.
Paso 2: Convertir unidades de longitud.
Paso 5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, D y R en la mismas unidades.

$t_{2,3}$: Hallar la escala en forma normalizada, escribirla de la forma 1: r $r \in IN$.

$\tau_{2,3}$

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Paso 5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, D y R en la mismas unidades.

Paso 7: Escribir la escala en forma normalizada, de la forma $\frac{1}{r}$, donde $r \in IN$.

$t_{2,4}$: Hallar la escala en forma $\frac{1}{10^n}$.

$\tau_{2,4}$

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Paso 5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, D y R en la mismas unidades.

Paso 7: Escribir la escala en forma normalizada, de la forma $\frac{1}{r}$, donde $r \in IN$.

Paso 9: Escribir un número en notación científica.

Paso 10: Acotar un número en potencias de 10.

$t_{2,5}$: Hallar una escala que maximice la representación.

$\tau_{2,5}$

Paso 2: Convertir unidades de longitud.

Paso 5: Usar la fórmula $E = \frac{D}{R}$, D y R en la mismas unidades.

Paso 8: Determinar la escala del mapa suponiendo que la dimensión del largo (ancho) real ocupa toda la dimensión del largo (ancho) de la hoja.

T_3: Conociendo las dimensiones en la realidad, determinar si la representación (mapa, plano, foto, etc.) está hecha a escala.

Paso 0: Aproximar la medida de una longitud en el mapa utilizando la regla.

Paso 3: Plantear una proporción.

En la tabla 8.Presentamos la organización matemática del libro *Matemáticas para Arquitectos*, como mencionamos anteriormente notamos conveniente organizar los pasos en una n-upla que conforman las técnicas que resuelven las tareas resueltas en el texto de analizado.

De esta organización observamos lo siguiente:

Para la tarea $t_{1,1}$, el texto presenta dos técnicas $\tau_{1,1,1}$ y $\tau_{1,1,2}$, en la cual la técnica $\tau_{1,1,2}$ se usa la escala como operador;esta técnica permite calcular una longitud en la representación, pero no puede ser usada para determinar una longitud en la realidad.

Por otra parte, también observamos que el Tipo T_3no presenta tareas, entonces afirmamos que puede ser considerado como tarea.

El tipo de tarea T_2en el sentido de Floriani emplea la subcategoríaUnitaria Misma Unidad el texto presenta así en todas sus tareas (ver p.25), podemos decir que para este tipo de tarea la técnica *implícita* es la reducción a la unidad.

Afirmamos que, el alcance de la técnica $\tau_{2,3}$que presenta el texto es limitado, ya que no resuelve todas las tareas del tipoT_2, afirmamos que una tarea de ese tipo, que se encuentra en el texto, esta dada para que se cumplan las condiciones.

Si tenemos la siguiente situación donde las medidas son tomadas de la forma Unitaria Misma Unidad, pero NO múltiplos (ver p. 25), por ejemplo:

Tarea: Escribiren forma normalizada, de la forma $\frac{1}{r}$ donde $r \in \mathrm{IN}$, la escala $E = \frac{2}{3}$.

Técnica: dividir el numerador y el denominador por el mismo valor que el numerador, resulta: $E = \dfrac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{1.5}$

Observamos que el denominador resulta un número racional, entonces afirmamos que faltan pasos en esta técnica para poder dar respuesta a esta tarea.

Tabla 8OMinmersa en el textoanalizado.

Tipo de tareas T_i	Tareas $t_{i,j}$ (tarea j del tipo de tarea i)	Técnica $\tau_{i,j}$ (Técnica asociada a la tarea j)
T_1	$t_{1,1}$	$\tau_{1,1,1} = (1\ 2\ 3)\ \tau_{1,1,2} = (1\ 2\ 3^*)$
	$t_{1,2}$	$\tau_{1,2} = (1\ 2\ 3)$
	$t_{1,3}$	$\tau_{1,3} = (0\ 1\ 2\ 3)$
	$t_{1,4}$	$\tau_{1,4} = (1\ 2\ 3\ 6)$
T_2	$t_{2,1}$	$\tau_{2,1} = (2\ 5)$
	$t_{2,2}$	$\tau_{2,2} = (0\ 2\ 5)$
	$t_{2,3}$	$\tau_{2,3} = (0\ 2\ 5\ 7)$
	$t_{2,4}$	$\tau_{2,4} = (0\ 2\ 5\ 7\ 9\ 10)$
	$t_{2,5}$	$\tau_{2,5} = (2\ 5\ 8)$
T_3		$\tau_3 = (0\ 3)$

Fuente: Autoría propia.

En nuestro análisis podemos añadir que las formas en que se presenta la escala en los Tipos de tareas son muy importantes para las respuestas que brindan los estudiantes, debido a esto en la tabla 9 presentamos las forma en que está representada la escala en cada ejemplo resuelto y ejercicios propuestos con o sin gráfico del texto analizado, según las formas de representación descritas en el capítulo 2, p. 29, tomando en cuenta a Bodin (1989).

Tabla 9 Formas de representación de escala encontradas en el texto analizado

		Ejemplos resueltos		Ejercicios propuestos	
		Con gráfico	Sin gráfico	Con gráfico	Sin gráfico
Escala explícita	Forma 1	--	--	--	--
	Forma 2	--	16	--	1; 11
	Forma 3	--	--	--	--
	Forma 4	--	--	--	--
	Forma 5	15	10; 12; 14; 17; 18	3; 6	7; 12
Escala implícita		13	11	5; 10	2; 4

Fuente: Adaptada de Bodin (1989).

En la tabla 9 podemos observar que en los ejemplos resueltos no hay diversidad de ostensivos, solo presentan la escala de la forma 2 y 5, pero en las respuestas que muestra el texto en los ejemplos resueltos se presenta la escala en la forma 4.

Por otra parte, como se puede ver en los ejemplos se presentan escalas de reducción y escalas normalizadas de la forma $\frac{1}{r}$, $r \in \mathrm{IN}$. Es por ello que podemos relacionarla con las categorías de problemas de tipo Isomorfismo de medidas propuestas por Vergnaud de multiplicación y división (partición y agrupamiento); además con las subcategorías Unitarias de Floriani, por ejemplo, la tarea $t_{1,2}$del Tipo T_1 estamos en el problema de proporcionalidad directa subcategoría Unitaria Diferente Unidad (Multiplicación) según Floriani, este es el caso en el ejemplo 17.

A partir de la descripción de los ejercicios resueltos sección 5.2, notamos que el ejemplo 12,a pesar de que presenta figura, no es usada en la resolución del problema, de esta descripción podemos decir que también se presenta en el ejercicio propuesto 2 no se hará uso de la figura. Es debido a esto que los presentamos ejemplo y ejercicio sin grafico en la tabla.

Tabla 10 Variedad de tareas encontradas en los ejemplos resueltos y ejercicios propuestos

Tipo de tareas	Tareas $t_{i,j}$	Ejemplos resueltos	Ejercicios propuestos
T_1	$t_{1,1}$	10, 12, 13c, 14, 15c	3, 4a, 6
	$t_{1,2}$	18 b y c	1
	$t_{1,3}$	13a y b	5b
	$t_{1,4}$	16b, 17	5c, 11b, 12a
T_2	$t_{2,1}$	11	5a, 9
	$t_{2,2}$	13	5a
	$t_{2,3}$	16a	11a
	$t_{2,4}$	16d	4b, 5e, 10, 11d, 12b
	$t_{2,5}$	16c	4b, 5d, 7, 10, 11c, 12b
T_3		15a y b, 18a	2

Fuente: Autoría propia.

En la tabla 10 podemos observar que los ejemplos desarrollados presentan tareas separados por ítems y los ejercicios propuestos también presentan tareas separados por ítems, y en un ítem pueden solicitar dos tareas como por ejemplo los ejercicios 4b, 5a, 12b, y el ejercicio 7. También podemos señalar que los ejercicios propuestos se pueden resolver con las técnicas que presenta el texto.

Encontramos una sola tarea que en realidad es un Tipo de tarea T_3, que se resuelve con la técnica τ_3, esto nos muestra la carencia de tareas que me permitan reforzar esta técnica, es decir tareas de comparación.

Vemos como resultado del análisis del libro de texto que hay algunos Tipos de tareas que no están siendo consideradas. Por ejemplo, tareas donde la escala sea de ampliación, tareas donde se relacionen diferentes unidades de medida y diferentes magnitudes.

Como por ejemplo:

Problema 1

En un dibujo se representan unas bacterias en una escala de 400 000: 1, que también se escribe como $\frac{400\ 000}{1}$, lo cual quiere decir que el tamaño de la bacteria real se ha ampliado 400 000 veces, si el tamaño real de la bacteria es 0,00000175cm, ¿Cuál es el tamaño de la bacteria en el dibujo?

Este es un problema que se resuelve con el conjunto ($T_1/t_{1,1}/\tau_{1,1}$)

Problema 2

Carlos decide ir de vacaciones por el sur el fin de semana. La ciudad a donde desea ir se encuentra a 12cm de distancia según el mapa, el cual está hecho con una escala de 1:3 000 000. Determine:

a. La distancia real en km.

b. Si su auto rinde 18 km por galón y el galón de gasolina cuesta S/. 13,60, ¿Cuánto gastará por el viaje de ida y vuelta?

Problema 3

Para una finca de terreno rectangular, se elabora un plano con escala de 1:50000. En el dibujo, uno de sus lados mide 1 *dm* y se sabe que el otro lado mide el doble.

a. Calcule el área de la finca en la realidad.

b. Si la finca se ha comprado por 18 millones de dólares. ¿Cuál es el precio pagado por metro cuadrado?

A partir de esta primera parte del análisis, pasaremos a evaluar el grado de completitud de la Organización Matemática Local identificada, utilizando los indicadores mencionado en el capítulo 3, p. 43.

Con respecto a los 7 indicadores para medir el grado de completitud de la OML, se tiene:

1. Encontramos 3 tipos de tareas, que se relacionan entre sí mediante los pasos de la técnica encontrada, podríamos decir que un paso que integra las tareas es la conversión de unidades, sobre tareas asociadas al cuestionamiento tecnológico se ve implícitamente como señala García (2005) debido a que se encuentra en la modelización proporcional.

2. Para una tarea encontramos dos técnicas, pero no se hace referencia de esto en el texto, usar la escala como operador; pero en las demás tareas del tipo T_1, T_2 y T_3 se encontraron una sola técnica para cada tarea.

3. Con respecto a nuestro objeto de estudio en el texto se presenta solo 2 formas de representar la escala, por lo tanto encontramos una dependencia de los ostensivos, esto se puede ver en la tabla 10, pues la mayoría de ejemplos se presentan con la forma 2 y se resuelven con la forma 5.

4. Con respecto a existencia y técnicas de tareas inversas aquellas definidas intercambiando los datos y las incógnitas de la tarea inicial, encontramos dos tareas que hacen referencia a la existencia de tareas inversas, $t_{1,1}$: Dada la escala E y la medida de una longitud en la realidad, hallar la medida de esa longitud en el dibujo y $t_{1,2}$: Dada la escala E y la medida de una longitud en el dibujo, hallar la medida de esa longitud real; y también dos tipos de tareas inversos, como T_1 y T_2.

5. La análisisdel texto refleja que, entre la gran cantidad de ejercicios que se proponen para resolver con el modelo proporcional, si se presentan ejercicios en los que se requiera lainterpretación del resultado.

6. Con respecto a la existencia de tareas abierta en la que los datos y las incógnitas no están prefijados completamente de antemano, el texto presenta una tarea abierta

ejemplo 13c) donde el alumno ante datos con valores desconocidos y las incógnitas no son valores concretos.

7. El texto no presenta tareas con las descripciones de este indicador.

La organización matemática en torno a escalas, tal como se lleva a cabo en el texto universitario analizado, no puede ser considerada como una PP, porque contiene tres tipos de tareas T_1, T_2 y T_3, es decir tres praxeologias puntuales, por otra parte la citada organización tampoco puede considerarse como una PL completa, en el sentido de Fonseca, pues cumple parcialmente o no cumple con todos indicadores, entonces concluimos que es una praxeología matemática local relativamente completa.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

La descripción de la organización matemática presente en torno al tratamiento de los conceptos de escala y proporción del proceso de estudio de un texto permitió conocer las prácticas matemáticas asociadas a estos conceptos en estudiantes de la carrera de Arquitectura.

En el tratamiento de escala y proporción en el texto, se identificaron 3 tipos de tarea principales relacionadas a las cuestiones de estudio surgidas en la organización matemática en el proceso de estudio del texto analizado también se presentaron las técnicas para resolver estas tareas.

De acuerdo al primer criterio de análisis: Sobre las concepciones o tratamiento de los objetos escala y proporción.

Encontramos que el tratamiento del estudio de escala y proporción, de acuerdo a las OM propuesta por García (2005), se ha identificado el uso de una concepción: modelización proporcional, esto se puede observar a través del paso 3 de *La técnica* determinar la cuarta proporcional, las concepciones de modelación discursiva, ecuacional y funcional no son consideradas en el texto.

De acuerdo al segundo criterio de análisis: sobre los tipos de tareas de escalas.

Encontramos que de acuerdo a las tareas encontradas en Floriani (2004), encontramos que en los 3 Tipos de tarea hallados, en el tipo T_1, encontramos 4 tareas del tipo de valor desconocido, y en T_3es un tipo de tarea de comparación pero dentro encontramos solo una tarea, esto quiere decir que hay un predominio de tareas de valor desconocido.

De acuerdo al tercer criterio de análisis: sobre las clases de problemas de proporción de tipo isomorfismo de medidas en escalas.

Siguiendo a Vergnaud (1983) y Floriani (2004), en el texto las clases de problemas son del tipo isomorfismo de medidas,encontramos que en las tareas del tipo T_1, es decir, en las tareas donde se da la escala como dato, la mayoría de los ejemplos presenta la escala con la cuarta forma, donde el numerador de la fracción es 1, es por ello que encontramos que en la mayoría de ejemplos se emplea la subcategoría Unitaria diferente Unidad (multiplicación y división), y en los ejemplos donde se presenta la escala de la segunda forma, donde no necesariamente se presenta la unidad, en esos casos la subcategoría donde se encuentran estos ejemplos es No múltiplo diferente unidad, por ejemplo: el ejemploresuelto 16.

Por otra parte,podemos presentar otras observaciones:

- En el texto la noción de escala es considerada como fracción, con las concepciones de operador y razón,creemos conveniente la creación tareas donde sea considerado como coeficiente de proporcionalidad $D = E \cdot R$ siguiendo el modelo ecuacional para luego articular con la función lineal.
- Se trabaja solo con tres unidades de la magnitud Longitud, metros, milímetros y centímetros; falta la ampliación de unidades y relación con otras magnitudes.
- Un paso de *La técnica*que está presente en la mayoría de las tareas de los Tipos presentes en el texto analizado es el Paso 2, Conversión de unidades, concluimos que este paso es fundamental para la realización de todas las tareas relacionadas a los conceptos de escalas y proporciones.
- La tarea $t_{2,4}$ relativa al tipo T_2, que corresponde a calcular la escala que maximice la representación (dado un plano, mapa, foto, etc.) en los límites de una hoja 21*cm*x29,7*cm*; concordamos con Levain (1994) que estas tareas son complejas para los estudiantes, en efecto calculan una escala que maximiza el tamaño de un plano con relación al tamaño de una hoja 21x29,7 *cm*. Por lo tanto, queda fuera del marco tradicional donde el alumno debe calcular una transformación conocer sus dimensiones reales.

En resumen, gracias al punto de vista que nos proporciona nuestros criterios de análisis, observamos que la organización matemática que presenta el texto separa el estudio clásico de la proporcionalidad de las relaciones funcionales.

Con el análisis del libro, es decir con la organización matemática que está inmersa en el contenido de escalas, pudimos encontrar o definir un conjunto de pasos que forman *La técnica*, la cual nos da pistas de cómo mejorar la organización didáctica del libro, porque nos ayuda a identificar que tareas y técnicas no están presentesen el texto.

CONSIDERACIONES FINALES

Al término de nuestro estudio presentamos la respuesta referente a la pregunta inicial de nuestro trabajo, basado en el análisis de un texto, en el capítulo anterior.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico ha sido pertinente pues brinda las herramientas para describir y analizar cuestiones relativas al estudio del objeto matemático proporción en el texto analizado.

Con respecto a la metodología para el análisis del texto, la definición de los criterios fue fundamental para el logro de los objetivos propuestos, los cuales permitieron realizar un análisis basado en la TAD, pero además desde otras perspectivas.

Los objetivos planteados se han alcanzado y por tanto han permitido responder a nuestra pregunta de investigación, más aún pueden ser utilizados para describir organizaciones matemáticas de otros contenidos en otros textos. Con respecto a nuestros objetivos específicos señalamos lo siguiente:
En el texto analizado se ha identificado el uso de una concepción de proporción como modelización proporcional, dejando en claro que la modelización ecuacional y funcional no son considerados, con ello observamos que la organización matemática que presenta el texto separa el estudio de la proporcionalidad de las relaciones funcionales.
Se identificaron las organizaciones puntuales y locales, con lo que rescatamos que el texto presenta 3 tipos de tareas, 9 tareas, 11 técnicas, con estos elementos observamos que la praxeología que está presente en el texto es local.El tipo de tarea que predomina es la de valor desconocido, además la mayoría de tareas que se presentan son de la categoría de Isomorfismo de medidas y con respecto a las subcategorías por tratarse de escala en la mayoría de los ejemplos se emplea la Unitaria Diferente Unidad.

Respecto a cuestiones que se desprenden de nuestro trabajo y que pensamos continuar trabajando:
Investigar que conceptos previos y técnicas en relación a los problemas de proporcionalidad conocen los alumnos antes de llevar un curso de matemáticas en la

universidad. La respuesta a esta investigación nos permitirá replantear las OM en el texto.

Con nuestro estudio dejamos abierta la posibilidad que para futuros trabajos pueda considerarse lo siguiente:

Articular la noción de proporción con la noción de función lineal en el texto analizado, mediante la creación de tareas donde se incluya el modelo ecuacional con el modelo funcional.

Realizar estudios en otros textos universitarios sobre la praxeología matemática relacionada a la noción de escala y proporción, con este estudio se puede saber qué modelo presentan los otros textos.

Realizar otros estudios sobre cómo se estudia en el aulade clases en launiversidad la proporción, con este estudio se puede conocer si los docentes conocen la relación entre proporción y función lineal.

REFERENCIAS

Alpañes, J. (1992). Las Matemáticas Aplicadas y La Ingeniería. En: *Matemática Aplicada a la Arquitectura Técnica* (pp. 33-50). España: Universidad de Sevilla.

Artifon Silva, E. (2008). *Pensamiento proporcional y regla de tres: estrategias utilizadas por alumnos de enseñanza fundamental en la resolución de problemas*, (Tesis de maestría en educación).Universidad Tuiuti de Paraná – UTP/PR, Brasil.

Barreto Almeida, I. M. (2001). *Problemas verbais multiplicativos de quarta proporcional: Adiversidade de procedimientos de resolução.* (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontifícia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Bernal, M. Ma. (2004). *Estudo do objeto proporção: elementos de suaorganização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*. (Tesis de maestría en Educación, Programa de Pos-Graduación en Educación Científica y Tecnológica – PPGECT). Universidad Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Bolea Catalán, P. (2002). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. (Tesis de doctorado en Ciencias). Universidad de Zaragoza

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001). La Transposición Didáctica de Organizaciones Matemáticas en proceso de Algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

Bodin, A. (1989). Les échelles: préparationd'unesituationd'enseignement en classe de cinquième, *Petit*, *x*(20), 35-44. Recuperado de http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/20/20x3.pdf

Bosch i Casabo M. (1994).*La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad,* (Tesis doctoral). UAB, Barcelona, España.

Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de Organizaciones Didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23 (1), 79-136.

Bosch, M.; Fonseca, C.; Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), 205-250.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74.

Ceballos Espinoza, E. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja*.(Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas yNaturales). Medellín, Colombia.

Chamorro, (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación. España. ISBN 84-205-3454-4.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE/Horsori, Barcelona. Recuperado de http://curriculares.files.wordpress.com/2011/09/el_eslabon_perdido.pdf

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique. Grupo Editor S.A., Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiquesenseignantes en théorieanthropologique du didactique. *Recherchesemdidactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de lasMatemáticas*, Huesca. Recuperado dehttp://yves.chevallard.free.f.

Chevallard, Y. (2002).*Organiserl'etude. 1. Structures&Fonctions.*Actas de la 11 Ecoled'Été de Didactique des Mathematiques. Rance: La PenséeSauvage.

Comin, E. (2000). *Proportionnalitéetfonctionlinéaire: caractères, cause et effetsdidactiques des évolutions et des réformesdans la scolaritéobligatoire*. (Tesis de doctorado, Universidad de Bordeaux I, Bordeaux, Francia). Recuperado de http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905/

Floriani, E. F. (2004) *Resolução de Problèmes de Proporcionalidade: umEstudocomAlunos do Ensino Fundamental e Médio*. (Tesis de maestría). UNIVALI-SC. Itajaí, SC.

Fonseca Bon, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. (Tesis de doctorado en Ciencias Matemáticas). Universidad de Vigo, España.

GarcíaGarcía, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis Doctoral). Universidad de Jaén, España.

Gascón, J. (2003). La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. *In: Educación Matemática Investigación*, 5(2), 11-37.

Gascón, J. (2009). El problema de la Educación Matemática entre la Secundaria y la Universidad. *Investigación en Educación Matemática*, 11(2),273-302.

Levain, J. P. (1994).*Proportionnalité et acquisition des conceptsd'agrandissement et d'echelle*, (Tesis doctoral), Universidad Paris V.

Lima, E. (1991). *Meuprofessor de matemática e outrashistórias*. Rio de Janeiro: SBM.

Lima, E. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*: IMCA-UNI.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo, España.

Parra, V., Otero, M. (2009). Praxeologías Didácticas en la Universidad: Unestudio de caso relativo al Límite y Continuidad defunciones. *ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp*. 17 (31).

Santana Vieira Goncalves M. J. (2010). *Raciocínio proporcional: estratégiasmobilizadas poralunos a partir de umaabordagemenvolvendo aoralidade*. (Pos graduación en Educación Matemática). Universidad Federal Mato Groso do Sul, Brasil.

Santamarina, F. I. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda*. (Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales con orientación en matemática). Universidad Nacional Del Comahue.

SilvaFerreyra, M. J. (2005). *Investigando saberes de profesores do ensino fundamental com enfoque en números fraccionarios para a quinta serie*. (Tesis de doctorado en Educación Matemática). PUC/SP São Paulo, Brasil.

Silva Cruz, E. (2005). *A noção de variávelemlivrosdidáticos de ensino fundamental: umestudosob a ótica da organização praxeológica*(Tesis de maestría en Educación Matemática). PUC/SP São Paulo, Brasil.

Ugarte, F. & Yucra, J. (2011). Matemáticas para Arquitectos. Lima: PUCP.

Varella, M. (2010). *Prova e demonstraçãoemGeometria Analítica: Umaanálise das organizaçõesdidática e matemática emmateriaisdidáticos*. (Tesis de maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo. PUC/SP, São Paulo, Brasil.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative Structures*.In Lesh, R. and Landau, M. (Ed.) Acquision of Mathematics concepts and processes.Academia Press, New York, 127-174.

ANEXO

Ejercicios propuestos de la sección 1.2 del texto "Matemáticas para Arquitectos" pp. 31-35

1. ¿Cuál es la distancia entre dos pueblos si se sabe que en el mapa a escala 1:25 000 000 aparecen distanciados 23 mm?

2. En la siguiente figura, el punto *F* indica la posición del foco de un proyector de diapositivas. La longitud del segmento *AB* es la altura de la diapositiva. La distancia del foco a la diapositiva es *FB* = 10 cm. Si la pantalla está a 5 m de distancia del foco *F*, ¿cuál es la altura *CD* de la imagen si la altura de la diapositiva es 1,4 cm?

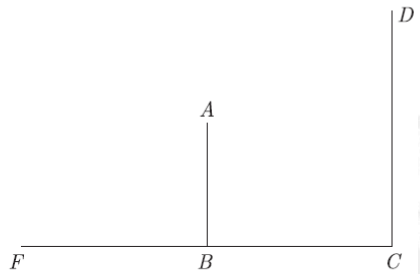


Figura 16 Ugarte &Yucra**.** Ejercicio 2 -(p. 31)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

3. Según la SMPTE (Society of Motion Picture and TelevisionEngineers) la distancia mínima a la que una persona debe situarse respecto a un televisor LCD debe ser mayor o igual que el doble del ancho de la pantalla, pero menor o igual que cinco veces el ancho de esta. Considerando que:
   - Un televisor de x pulgadas corresponde a uno cuya pantalla posee una diagonal que mide x pulgadas.
   - La pantalla de un televisor de 41 pulgadas posee una altura de 24, 6 pulgadas.
   - Una pulgada equivale a 25, 4 mm.

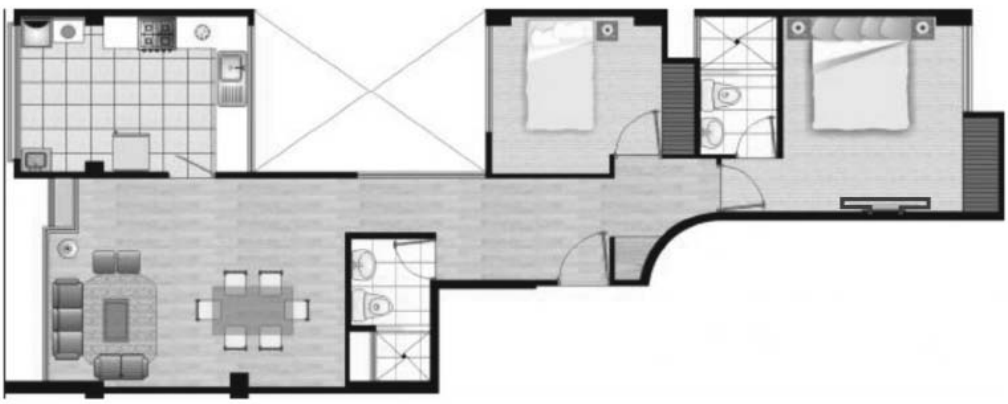


Figura 17 Ugarte &Yucra**.** Ejercicio 3 -(p. 32)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

a. Determine la máxima y la mínima distancia, respecto a la pantalla de untelevisor de 41 pulgadas, a la que debe colocarse un espectador, según laSMPTE.
b. Considerando el siguiente plano, construido a escala 1:100, señale si la ubicación propuesta para un televisor LCD de 41 pulgadas en el dormitorioprincipal cumple con las recomendaciones de la SMPTE. Justifique surespuesta.

4. La extensión aproximada del Perú es de 1 700 km × 2 400 km:
   a. Determine qué valor debe tomar X para que el mapa del Perú ocupe el mayor espacio posible de una hoja de X mm de largo por 420 mm de ancho.
   b. Se desea dibujar el mapa del Perú en una hoja $A3$: 297mm × 420 mm. Si la escala que se utilizará debe ser de la forma $E = \frac{1}{10^n}$, donde $n \in \mathrm{IN}$, determine el valor de n de tal manera que el mapa ocupe el mayor espacio posible en la hoja.

5. La siguiente foto es la vista aérea del Pentágono, famoso edificio de los EEUU; es decir, puede considerarse como un dibujo hecho a escala.

Figura 18 Ugarte &Yucra**.** Ejercicio 5 -(p. 33)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

Si el Pentágono tiene un perímetro de 1, 5 km:
a. Señale la escala empleada y escríbala en la forma 1: r, con $r \in \mathrm{IN}$.
b. Determine el perímetro real aproximado del pentágono interior (el pentágono más pequeño en la foto).
c. Suponga que el Pentágono será cercado con un muro rectangular de forma que quede inscrito en el rectángulo (ver figura). Halle la longitud real aproximada (largo × ancho) de dicho rectángulo.

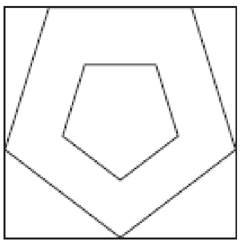


Figura 19 Ugarte &Yucra**.** Ejercicio 5, Ítem c - (p. 33)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

d. Si el rectángulo anterior quiere dibujarse en una hoja*A*2: 420 mm × 594 mm, determine la escala que deberá emplearse para que ocupe el mayor espacio posible de la hoja.

e. Si la escala que se empleará en el ítem d. debe ser de la forma $E = \frac{1}{2^n}$, determine el valor de $n \in \mathrm{IN}$. (Nota: $2^7 = 128$, $2^{13} = 8\,192$).

6. En la figura, se observa una hoja de papel en la que está representado el mapa del Perú. La región graficada corresponde a una extensión aproximada de 1 700 km × 2 400 km. ¿Cuál de las siguientes escalas permitiría representar dicho mapa en una hoja tamaño *A*3: 297mm×420 mm, si se desea que el mapa ocupe el mayor espacio posible en la hoja?

Figura 20 Ugarte &Yucra**.** Ejercicio 6 -(p.34)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

A. Escala 1:100 000 000
B. Escala 1:10 000 000
C. Escala 1:1 000 000
D. Escala 1:100 000

7. Se sabe que usando la escala E_1 =1:20, el ancho de cierto cartel publicitario ocupa todo el ancho de una hoja *A*3: 297 mm × 420 mm, y utilizando la escala E_2 =1:15, el largo del mismo cartel ocupa todo el largo de dicha hoja.
   i. ¿Cuál de las dos escalas es la adecuada para dibujar este cartel en la hoja A3?
   ii. ¿El área que sobra en esta hoja es aproximadamente 312 cm^2?

8. Se tiene dos planos *A* y *B*, que están a escalas diferentes, y se desea analizar sus escalas. Al medirse los segmentos $\overline{MN}$ del plano *A* y $\overline{PQ}$ del plano *B*, se descubre que sus longitudes guardan una relación de 2 a 3. Si se sabe que las longitudes de dichos segmentos en la realidad están en la relación de 1 a 2, ¿qué relación guardan las escalas de los planos *A* y *B*?

9. Sea R_1 un rectángulo dibujado en la escala $E_1 = \frac{1}{10}$. Si al pasar a una escala E_2 los lados del rectángulo R_1 se reducen en un 20 %, determine la escala E_2.

10. Se desea realizar el plano de planta de una piscina elíptica, cuyas dimensiones se muestran en la siguiente figura:

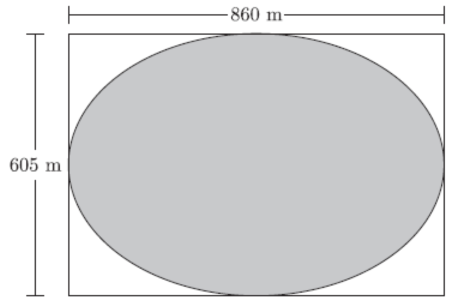


Figura 21 Ugarte &Yucra**.** Ejercicio 10 -(p. 34)
Fuente: Libro *Matemáticas para Arquitectos*

Determine el número entero n tal que la escala 1: n permita representar la piscina en una hoja $A3$: 297 mm × 420 mm, de modo que el gráfico quede lo más grande posible en la hoja.

11. Sabiendo que las dimensiones de un mapa son 28cm×20 cm y que en este mapa 2, 5 cm corresponden a 125 km:

    a. Señale la escala empleada escribiéndola en la forma 1: r, donde $r \in \mathrm{IN}$.
    b. Determine la extensión real aproximada (largo × ancho) de la región representada.
    c. Si el mapa quiere dibujarse en una hoja $A2$: 420mm × 594 mm, determine la escala que debería emplearse para que el mapa ocupe el mayor espacio posible en la hoja.
    d. Si la escala a usarse en el ítem c. de esta pregunta debe ser de la forma 1: 10^n, determine el valor de n y luego calcule el largo y ancho del plano resultante.

12. Se toma las medidas del largo y del ancho de un mapa hecho a escala 2:50 000 000, en el cual se muestra el territorio que ocupaba el Imperio incaico. Si la extensión del Imperio en dicho mapa es de 15, 5cm × 6, 5cm:
    a. Halle la extensión real (largo y ancho) aproximada que abarcó dicho territorio.
    b. Determine la escala E de la forma E =1: 10^n, donde $n \in \mathrm{IN}$, que permitiría representar dicho mapa en una hoja $A3$: 297mm×420 mm, si se desea que el mapa ocupe el mayor espacio posible en la hoja.