PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Análisis Didáctico como Herramienta para Determinar el Grado de Idoneidad de las Tareas sobre Ecuaciones Lineales entre la Educación Secundaria y la Educación Superior Tecnológica

Tesis para obtener el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Presentada por:

Walmer Garcés Córdova

Asesor de Tesis:

Dra. Norma Violeta Rubio Goycochea

Miembros del Jurado:

Dra. Jesús VictoriaFlores Salazar
Mg. Rosa CeciliaGaita Iparraguirre

Lima - Perú
2013

Dedicatoria

Para mi esposa Edipt y

La niña de mis ojos,Ariana Carolina

A mis padres Manuel y Ana

Agradecimientos

De manera especial a la Dra. Norma Rubio,

por su gran ayuda, guía, consejos y paciencia.

A mis profesores y profesoras de la Maestría,

por su contribución y apoyo académico.

ÍNDICE

	Página
Glosario de términos	6
Lista de figuras, tablas y cuadros	9
Resumen	11
Introducción	12
Capítulo I: Antecedentes	15
1.1. La problemática	15
1.2. Justificación del tema de investigación	18
1.3. Delimitación y formulación del Problema	23
1.4. Objetivos de la investigación	26
1.5. Cuestiones de la investigación	28
1.6. Hipótesis de la investigación	29
Capítulo II: Marco Teórico	30
2.1. Introducción	30
2.2. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática	32
2.3. Niveles de análisis didáctico en el Enfoque Ontosemiótico	37
2.4. Nociones teóricas del EOS asumidas en la presente investigación	48
Capítulo III: Metodología y Procedimientos	49
Capítulo IV: Análisis de objetos y procesos matemáticos	57
4.1. Introducción	57
4.2. Selección de los textos de matemática de educación secundariapública del Perú	58
4.3. Descripción del tema ecuaciones lineales en los libros de texto de educación secundaria pública peruana	63
4.4. Análisis de los objetos matemáticos: configuración epistémica de las tareas de educación secundaria pública	80

4.5. Selección de los libros de texto de matemática de educación superior 94

4.6. Descripción del tema ecuaciones lineales en libros de texto de educación superior seleccionados 96

4.7. Análisis de los objetos matemáticos: configuración epistémica del temaEcuaciones lineales en cada texto del nivel superior 118

4.8. Análisis comparativo de objetos matemáticos intervinientes en cada tarea de educación secundaria 147

4.9. Análisis comparativo de objetos matemáticos intervinientes encada tareadel nivel superior 149

Capítulo V:Idoneidad didáctica de las tareas 151

5.1. Idoneidad didáctica de las tareas de ecuaciones lineales – DimensiónEpistémica 151

5.2. Idoneidad didáctica de las tareas de ecuaciones lineales – DimensiónCognitiva a priori 172

5.3. Idoneidad didáctica de las ecuaciones lineales en la propuesta de formación profesional – Dimensión Ecológica 177

5.4. Análisis comparativo de la idoneidad didáctica de las tareas sobre “ecuaciones lineales” –Dimensión Epistémica 179

Conclusiones y Recomendaciones 188

Referencias 195

Anexos 199

GLOSARIO DE TÉRMINOS

- **A priori.** Se dice que un conocimiento es a priori (literalmente: *prior*, anterior a la existencia), cuando no depende para su validez de la evidencia de la experiencia.

- **Aprendizaje.** En el marco del Enfoque Ontosemiótico, implica la apropiación (por parte de los estudiantes) de los significados institucionales pretendidos, a través de la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Además, supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los alumnos y los significados institucionales planificados.

- **Comprensión.** La comprensión en el Enfoque Ontosemiótico, más que como proceso mental, es entendida como competencia; se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

- **Configuración Epistémica (C.E).** Es la red de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas institucionales. Es decir, la relación de las componentes o entidades primarias: situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos.

- **Conocimiento.** Es el contenido de una o varias funciones semióticas, resultando una variedad de conocimientos que se corresponden con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades del modelo teórico Enfoque Ontosemiótico.

- **Dificultad.** Según el Enfoque Ontosemiótico, el término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea matemática o tema de estudio. Si el índice de dificultad es elevado, se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho índice es bajo, entonces se considera que la dificultad ante la tarea es baja.

- **Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).** Es un enfoque teórico y de investigación en Didáctica de las Matemáticas, se caracteriza porque parte de una ontología de los objetos matemáticos y toma en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática: resolución de problemas socialmente compartida, lenguaje simbólico y un sistema conceptual lógicamente organizado. Además, en este enfoque de la educación matemática, se le asigna un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a los diversos objetos matemáticos que intervienen y emergen cuando se enfrenta una situación – problema en matemáticas.

- **Epistemología.** La epistemología, o teoría del conocimiento, es la rama de la Filosofía que se ocupa de la naturaleza del conocimiento, de su posibilidad, alcance y base general.

- **Epistémico.** O epistemológico, es un adjetivo derivado de "*epistēmē*", palabra griega que significa conocimiento. Todo lo que sea descrito con ella tiene alguna relación con el conocimiento (o con la justificación de la creencia), o con la teoría general de éste (epistemología). Una proposición es epistémica si y sólo si tiene algunas implicaciones para lo que, en algunas circunstancias, es racionalmente digno de ser creído.

- **Error.** En el sentido del Enfoque Ontosemiótico hablamos de error, cuando el alumno realiza una práctica matemática que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.

- **Lenguajes.** Son todos aquellos términos, notaciones, expresiones, gráficos, en sus diferentes registros de representación semiótica como el verbal, gráfico, simbólico, escrito, gestual, etc.

- **Objeto matemático.** En el EOS el significado de los objetos matemáticos tiene una naturaleza ontológica y epistemológica, es decir, se refiere a la naturaleza y origen de los objetos matemáticos. Objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas.

- **Ontología.** Ciencia o teoría que estudia la naturaleza del conocimiento. Como rama de la metafísica, es la ciencia del ser en general y abarca temas tales como la naturaleza de la existencia y la estructura categorial de la realidad. Una ontología matemática se define como la teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos.

- **Práctica matemática.** Se refiere a toda aquella actuación o expresión (verbal, gráfica, simbólica), realizada por un sujeto para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución encontrada, y validarla o generalizarla en otros contextos o problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una instituciónestá constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas.

- **Semiótica.** Teoría general de los signos, tales como: íconos, signos naturales y signos convencionales. La semiótica es usualmente dividida en tres campos: semántica, el estudio del significado; sintáctica, el estudio de la estructura (la superficie gramatical y también la estructura profunda); y, pragmática, que trata de objetivos extra-lingüísticos y de los efectos de las comunicaciones.

- **Situación - problema.** Es el origen o la razón de ser de la actividad matemática y se manifiesta mediante aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, problemas contextualizados, casos de aplicación a la realidad o entorno.

- **Tipos de objetos matemáticos. "**Lenguaje" (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual); "Situaciones-problemas" (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.); "Acciones" (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos); "Conceptos" introducidos mediante definiciones o descripciones (ecuación lineal, recta, pendiente de recta, sistema de ecuaciones, matrices y sistemas de ecuaciones, etc.); "Propiedades" proposiciones o atributos de los objetos (enunciados sobre conceptos); y, "Argumentos" los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción, por inferencia o de otro tipo.

- **Sistema lineal.** Es el conjunto de ecuaciones lineales o de primer grado que puede estar formado por dos, tres o más ecuaciones, las mismas que pueden contener dos, tres o más incógnitas.

LISTA DE FIGURAS, TABLAS Y CUADROS

Figura N°	Descripción	Pág.
01	Facetas y niveles de análisis didáctico.	37
02	Tipos de significados institucionales y personales	39
03	Configuración de objetos matemáticos primarios	42
04	Configuración de objetos y procesos secundarios	43
05	Componentes de la Idoneidad Didáctica	46
Cuadro N°		
01	Estrategias a seguir por cada objetivo específico y desagregado	53
02	Competencias por ciclo en educación secundaria	59
03	Contenidos del tercer, cuarto y quinto grado de secundaria.	60
04	Textos de matemática de educación secundaria, según grado	62
Figura N°		
06	Pendiente de una recta, según la posición en el plano cartesiano	72
07	Rectas paralelas y Rectas perpendiculares	74
Cuadro N°		
05	C.E. TAREA 1. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas texto 5° de secundaria 2012.	80
06	C.E. TAREA 2. Ecuaciones de la recta – texto 5° de secundaria 2012	83
07	C.E. TAREA 3. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas texto 4° de secundaria 2012.	86
08	C.E. TAREA 4. Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas texto 4° de secundaria 2012.	89
09	C.E. TAREA 5: Sistemas de ecuaciones lineales de dos variables texto 5to. de secundaria 2008	91
Figura N°		
08	Puntos en el plano cartesiano.	97
09	Cuadrantes del plano cartesiano.	97
10	(a) Diagonales del plano. (b) Sentido positivo de rotación.	97
11	(a) Triángulos semejantes. (b) Inclinación de recta. (c) Rectas paralelas. (d) Intersección de dos rectas.	98
12	Sistema con dos incógnitas: indeterminado, imposible y determinado.	100
13	El método de eliminación, visto geométricamente.	101
14	Posiciones relativas entre tres planos.	105
15	Dos rectas se intersecan en un punto, en ninguno o en un número infinito de puntos. (a) Rectas no paralelas; un punto de intersección.	106

	(b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección y (c) Rectas que coinciden; infinitos puntos de intersección.	
16	(a) Los tres planos se intersecan en un solo punto. (b) Los tres planos se intersecan en la misma recta. (c) Dos planos se intersecan en una recta. (d) Los planos paralelos no tienen puntos en común. (e) Dos planos paralelos y uno secante.	108
17	(a) Pendientes de recta. (b) Recta de forma punto-pendiente. (c) Recta en la forma pendiente intersección. (d) Recta vertical, y (e) Recta horizontal.	111
18	(a) Curva de demanda lineal. (b) Curva de oferta lineal. (c) Equilibrio entre la curva de oferta y demanda. (d) Sistema lineal con una solución, sin solución y con infinitas soluciones.	113
19	Pendiente de la recta dados dos puntos.	115
20	Modelos lineales de oferta y demanda y punto de equilibrio.	117
Cuadro N°		
10	Configuración epistémica del primer texto.	118
11	Configuración epistémica del segundo texto.	124
12	Configuración epistémica del tercer texto.	131
13	Configuración epistémica del cuarto texto.	141
Tabla N°		
01	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Tarea 1.	153
02	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Tarea 2.	155
03	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Tarea 3.	157
04	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Tarea 4.	159
05	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Tarea 5.	161
06	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Primer texto.	164
07	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Segundo texto.	166
08	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Tercer texto.	168
09	Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA - Cuarto texto.	170
10	Indicadores de IDONEIDAD COGNITIVA - Secundaria.	173
11	Indicadores de IDONEIDAD COGNITIVA - Superior.	175
12	Indicadores de IDONEIDAD ECOLÓGICA - Superior.	178
13	Comparativo de idoneidad epistémica de las tareas de ecuaciones lineales de la educación secundaria pública.	181
14	Comparativo de idoneidad epistémica de las tareas de ecuaciones lineales de la educación superior.	185

Resumen

En este informe se expone un estudio de la idoneidad didáctica de las tareas matemáticas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas, desde cómo son asignadas a los alumnos en la educación secundaria pública, hasta su tratamiento y estudio en la carrera de Administración Bancaria de la educación superior tecnológica, y su respectiva interrelación y dependencia entre ambos niveles educativos.

Las competencias matemáticas con las que egresan los alumnos de educación secundaria pública, para luego ingresar en la educación superior tecnológica, en este caso específico, sirven de base como conocimientos previos para estudiar situaciones – problemas del contexto en la carrera que eligen. En consecuencia, los ingresantes deben tener bases sólidas matemáticas y haber desarrollado competencias matemáticas.

Tomando como punto de partida el hecho de que las ecuaciones lineales se trabajan a través de situaciones contextualizadas en la educación superior, y que por lo tanto, los estudiantes necesitan traer consigo sólidos conocimientos matemáticos previos de la educación secundaria, es que decidimos dar una mirada a la forma cómo se vienen planteando las tareas de ecuaciones lineales en la secundaria y en superior. Para lograrlo, nos apoyamos en las herramientas de análisis que ofrece el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, tales como las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos, las configuraciones epistémicas, y la idoneidad didáctica en su faceta epistémica, cognitiva a priori y ecológica, usando como herramienta de análisis las tablas de indicadores de idoneidad didáctica.

Luego del análisis respectivo, encontramos que las tareas matemáticas de ecuaciones lineales que se proponen a los alumnos de la secundaria pública, tienen una baja idoneidad epistémica, lo cual nos permite afirmar que existe una brecha entre la educación secundaria pública y la educación superior. Aquí es donde radica la importancia de nuestra investigación, puesto que creemos aporta elementos de análisis para reflexionar acerca de la forma en que se viene proponiendo las tareas de ecuaciones lineales, en los últimos grados de educación secundaria pública de nuestro país.

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las tareas matemáticas diseñadas y desarrolladas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de educación superior, con frecuencia observamos que se suele enfatizar en ejercicios algorítmicos, dejando de lado el planteamiento, análisis y resolución de situaciones – problemas que están directamente relacionados con el día a día de los estudiantes en cada carrera profesional, y que se resuelven haciendo uso de las matemáticas.

Esta situación se torna más preocupante si nos fijamos en las tareas matemáticas desarrolladas con los alumnos de la educación secundaria pública, puesto que el nivel de competencia matemática que llevan consigo hacia la educación superior es bastante pobre, en la mayoría de los casos.

Vista esta realidad, es que para nuestra investigación elegimos el tema matemático específico ecuaciones lineales en una dos y tres incógnitas, perteneciente al campo de las matemáticas del álgebra lineal, tema que es incluido actualmente en los contenidos curriculares (sílabos) de diversas carreras profesionales, tanto tecnológicas como universitarias, y en nuestro caso, es trabajado en la formación de estudiantes de la carrera profesional de Administración Bancaria, del Instituto de Formación Bancaria, Lima – Perú. Además, se debe señalar que este tema matemático se trabaja previamente a la educación superior, en la secundaria, y se encuentra contemplado en la Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, DCN de la EBR – 2009.

También es cierto que, hasta el momento diversas investigaciones se han realizado en esta temática como las de Segura (2004),Ibarra (2008), Ochoviet (2009), gracias al surgimiento de la Didáctica de las Matemáticas, y dentro de ella, la emergencia de enfoques como el que hemos tomado en el presente estudio: Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática – EOS. Dicho enfoque se caracteriza por tomar como punto de partida las situaciones –problemas matemáticas, enfatizando en la diversidad de lenguajes, en los procesos de interpretación y comunicación y en una diversidad de objetos y procesos matemáticos.

A continuación presentamos brevemente la organización de la tesis de investigación, el mismo que está estructurado en cinco capítulos.

En el capítulo I, contextualizamos el problema que hemos elegido. Es decir, hacemos una descripción contextualizada de la problemática actual resultante del estudio de las "ecuaciones lineales" en la educación superior, y de manera específica en la educación superior tecnológica. Asimismo abordamos la problemática actual por la que atraviesa el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales en la escuela secundaria pública, en particular en los tres últimos grados de dicho nivel de estudios básicos.

Este análisis lo hemos hecho, convencidos de que, según las investigaciones revisadas en otros niveles educativos y por la experiencia en el día a día con los estudiantes del nivel superior tecnológico, inferimos que las dificultades de éstos en las tareas matemáticas, se debería al bajo nivel académico o a los pobres conocimientos matemáticos previos que traen consigo desde la educación básica, en este tema específico.

Además de la problemática, este capítulo contiene la justificación del problema, a través de algunos estudios de investigación hechos alrededor del tema, la delimitación y el planteamiento del problema de investigación, los objetivos general y específicos, y algunas cuestiones de investigación.

En el capítulo II, resumimos parte de la teoríadel enfoque que soportará nuestra investigación, a saber, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática – EOS, debido a las herramientas concretas que éste ofrece en el campo de la investigación en didáctica de la matemática. Dicho enfoque presenta cinco niveles de análisis bien definidos, de los cuales hemos tomado, el primer nivel, sistemas de prácticas operativas y discursivas, el segundo nivel, configuración de objetos y procesos matemáticos, y el quinto nivel, de la idoneidad didáctica en su faceta epistémica, cognitiva (a priori) y ecológica.

En el capítulo III, presentamos un esquema general para investigaciones de corte cualitativo, como metodología de la investigación, el cual describe los pasos consecutivos que se siguieron en el desarrollo del presente estudio. Además, se presenta un cuadro con las estrategias y procedimientos seguidos para lograr cada uno de los objetivos específicos planteados, y los que de éstos se derivan, pero que en conjunto y entrelazados en una especie de red, apuntan hacia el logro del objetivo general.

El capítulo IV, al cual le hemos denominado "Análisis de procesos y objetos matemáticos" contiene el desarrollo de cada uno de los objetivos, general y específicos propuestos, así como el desarrollo de las estrategias planificadas en la metodología. Empezamos con la selección de textos de matemática de secundaria de tercero, cuarto y quinto grado; descripción del tema ecuaciones lineales en cada uno de los libros de texto; y, configuración epistémica de cada una de las tareas matemáticas que se trabajan en la educación secundaria pública.

Continúa el capítulo, con la selección de textos de matemática de educación superior, específicamente aquellos que abordan el tema ecuaciones lineales; descripción del objeto matemático estudiado en cada uno de los libros de texto; y, configuración epistémica de las tareas y de los objetos matemáticos de las ecuaciones lineales en cada texto.

Finalmente, en el capítulo V, analizamos la idoneidad didáctica en su faceta epistémica, cognitiva a priori y ecológica utilizando las tablas de indicadores. Además, se presenta un análisis del cumplimiento de las tres idoneidades parciales comprendidas, para lo cual se elaboró una tabla de valores resumen de los indicadores de idoneidad entre los distintos textos y en ambos niveles educativos: secundaria y superior. Presentamos también las Conclusiones y Recomendaciones, derivadas del análisis hecho en el capítulo anterior, las mismas que responden al problema planteado y a los objetivos trazados en el presente estudio. Además, de permitirnos hacer algunas sugerencias y recomendaciones finales, en aras de continuar investigando en didáctica de las matemáticas y buscándole soluciones a la problemática que presenta hoy en día el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales, tanto en el nivel superior, como en la secundaria, especialmente en la educación pública.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

(Resumen)

En este capítulo analizamos la problemática que se viene atravesando durante el proceso de enseñanza y aprendizaje en el tema específico de la matemática, ecuaciones lineales en una, dos y tres variables y su proceso de contextualización, en la educación superior, así como en la educación secundaria pública, en los tres últimos grados de dicho nivel. Para ello, hacemos un análisis y síntesis de aquellos trabajos de investigación relacionados con nuestro tema de investigación: ecuaciones lineales y su proceso de contextualización, que han sido desarrollados en diferentes partes del mundo y por distintos profesionales de la educación matemática, los mismos que servirán como antecedentes que justifiquen nuestro estudio.

Luego formulamos el problema que dio origen a esta investigación, enunciaremoslos objetivos generales y aquellos objetivos específicos derivados, así como algunas cuestiones que direccionan la presente investigación. Finalmente, planteamos las hipótesis correspondientes al presente estudio.

1.1. LA PROBLEMÁTICA

El desarrollo de la noción de ecuación lineal es fundamental en la estructura de conocimientos de los estudiantes en cualquier nivel educativo y carrera profesional. Así vemos que, el objeto matemático ecuación lineal está contemplado en el cartel de contenidos del tercer grado del nivel secundario, en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular peruana (DCN, 2009), básicamente como sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas. Luego, el tema específico aparece incluido en el quinto grado de educación secundaria para ser trabajado con mayor profundidad como sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas y también como programación lineal.

Posteriormente, en la enseñanza superior vuelve a abordarse con mayor grado de profundidad, este tema matemático ecuación lineal, contemplado en los sílabos de distintas carreras profesionales, tanto en carreras técnicas, como en carreras profesionales universitarias. En el nivel superior, se trabajan los sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, así como también los sistemas de inecuaciones lineales, siendo las ecuaciones lineales conocimientos previos requeridos. Además, en la enseñanza superior se abordan estos objetos matemáticos en el curso de álgebra lineal, donde se tratan los sistemas lineales con dos, tres, cuatro o más ecuaciones con el mismo número de incógnitas, hasta los sistemas de “m” ecuaciones lineales con “n” incógnitas, donde para su resolución se trabaja el tema relacionándolo con la teoría de matrices, incluso hasta las transformaciones lineales.

En diversos trabajos de investigación Sierpinska (2000, citada en Ochoviet, 2009), Peralta (2003), Segura (2004), Ibarra (2008), Ochoviet (2009), estudios tanto del nivel de educación secundaria, como del nivel superior, se encuentra que en la enseñanza tradicional se ha enfatizado en métodos de resolución algorítmicos, especialmente cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables, dejando en un segundo plano el planteamiento y resolución de situaciones-problemas que den sentido de utilidad y aplicación de la matemática en la vida cotidiana de los estudiantes; y por tanto, que se acerquen a las matemáticas con temas propios de su carrera profesional, en el caso de la educación superior.

En los libros de texto de matemáticas distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú, para la enseñanza y aprendizaje en el nivel secundario, podemos observar el énfasis en actividades matemáticas meramente operativas y algorítmicas, descuidando la interpretación de las soluciones, por ejemplo; dejando además, de lado actividades que requieren el tránsito de ida y vuelta entre los distintos registros de representación semiótica que propone Duval (1995), o el trabajo en distintos lenguajes que señala Godino(2006; 2009).

En el tema específico de ecuaciones lineales, creemos que se descuida el proceso de contextualización de las ecuaciones lineales en el trabajo con los estudiantes del nivel de educación secundaria, omitiendo así la posibilidad de que los alumnos en sus actividades y tareas matemáticas, analicen diversas situaciones de su vida cotidiana y propongan soluciones a las mismas, aplicando sus conocimientos previos de matemáticas, utilizando distintos lenguajes (verbal, gráfico, simbólico, etc.), transitando entre estos lenguajes y corroborando sus resultados. De esta manera, creemos que se lograría un interés y motivación adicional de los estudiantes por esta ciencia.Pero, este proceso de contextualización de las ecuaciones lineales, también es dejado de lado en algunos casos en la educación superior peruana, aunque en menor escala.

Debido a las múltiples aplicaciones de las ecuaciones lineales en distintas ramas del conocimiento y en especial en la administración, en la economía y en los negocios, es que nos centraremos en el presente trabajo de investigación, en el objeto matemático ecuaciones lineales. Específicamente, nos interesa su representación a través de los distintos lenguajes y su proceso de contextualización, considerando para ello situaciones contextualizadas al campo de la administración, la economía y los negocios, desde el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

Nos proponemos analizar los objetos matemáticos intervinientes y emergentes en las tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas, así como su contextualización a través de situaciones–problemas. Además, nos proponemos analizar la idoneidad didáctica a nivel epistémica, cognitiva (a priori) y ecológica, de las tareas matemáticas presentadas en los textos a los alumnos de educación secundaria pública y de educación superior tecnológica; las situaciones-problemas aplicadas al campo de la administración, la economía y los negocios y su pertinencia con aquellas que actualmente se vienen trabajando en el Instituto de Formación Bancaria, para la carrera profesional de administración bancaria, objeto del presente estudio.

A continuación, presentaremos algunos reportes de investigaciones realizados sobre ecuaciones lineales bajo diferentes marcos teóricos, los mismos que por sus objetivos o por su problemática de investigación, guardan cierta relación con el presente estudio. Es preciso señalar que las diferentes investigaciones están más relacionadas con los sistemas de ecuaciones y que poco se ha enfatizado en la investigación de tareas matemáticas centradas en situaciones-problemas contextualizadas a la administración y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales, objeto que pretendemos profundizar y estudiar a fondo en nuestra investigación. Finalmente, haremos una breve síntesis de lo avanzado en dichos trabajos y su contribución y aporte hacia el nuestro.

1.2. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN

Sierpinska (2000, citada en Ochoviet, 2009) analiza distintos tipos de razonamiento de los estudiantes, como posibles causantes de dificultades en el estudio del álgebra lineal, en tal sentido, postula tres modos de pensamiento, a saber: el modo sintético-geométrico, modo analítico-aritmético y el modo analítico-estructural, los cuales si bien es cierto, aparecieron en la historia de las matemáticas de manera secuencial, no son para nada excluyentes, sino más bien, se complementan entre sí; son igual de útiles acorde con el contexto, propósitos y fines a los que se aplique.

Cada uno de estos tres modos de pensamiento utiliza un sistema de representación, que de acuerdo al EOS sería un sistema semiótico. Así por ejemplo, el modo sintético-geométrico utiliza el lenguaje de las gráficas y figuras geométricas; el modo analítico-aritmético usa los pares ordenados y n-uplas en general; en tanto que, en el modo analítico-estructural los objetos del álgebra son definidos como una serie de propiedades y teoremas.

Según Sierpinska, una de las características que diferencia ambos modos de pensamiento sintético y analítico, es que, en el modo sintético, los conceptos están dados directamente a la mente, mientras que en el modo analítico, dichos conceptos se presentan indirectamente a través de sus definiciones y propiedades.

En un caso reportado por la autora, se presenta a los estudiantes un sistema lineal de ecuaciones 3 x 3, para que encuentren su solución; sin embargo, lo que hacen los alumnos es resolver como un sistema lineal 2 x 2, errando de entrada, en la resolución de estos sistemas de ecuaciones, afrontando además, una serie de dificultades para su solución. A partir de este hecho, se observa la generalización de procedimientos, por parte de los alumnos, para pasar de un sistema de dos ecuaciones lineales a uno de tres.

Desde la perspectiva del marco teórico EOS, consideramos que los mencionados alumnos,estarían teniendo dificultades en el manejo y tránsito de ida y vuelta, de los lenguajes algebraico, verbal, simbólico y gráfico, en el planteamiento y resolución de este tipo de situaciones-problemas, lo cual conlleva a que cometan errores en sus procedimientos y soluciones. Por ejemplo, no reflexionan que la solución de un sistema lineal 2 x 2, cuando tiene solución única, es un punto en el plano, en tanto que, la solución única del sistema lineal 3 x 3, es un punto en el espacio.

Duval (1995), en base a diversas investigaciones señala y analiza las dificultades que muestran los alumnos ingresantes en la educación superior, para leer e interpretar representaciones gráficas de ecuaciones en el plano cartesiano. Así por ejemplo, los alumnos no manejan bien el concepto de pendiente de recta y tienen dificultades para determinar la ecuación general de recta a partir de la gráfica (tránsito del registro gráfico al algebraico). Sostiene además, que para el tránsito entre los registros mencionados, la forma punto – punto, en lugar de ayudar a los estudiantes, se convierte en un obstáculo.

El mismo autor, a partir de diferentes investigaciones con estudiantes que terminan su enseñanza media (que para nosotros sería la secundaria) e ingresan en la educación superior (caso que es de nuestro interés en este estudio), sostiene también que las dificultades que tienen los alumnos para transitar entre registros de representación semiótica, dependería de la congruencia entre los mismos. En consecuencia, muchos de los errores y dificultades que presentan los estudiantes, pueden ser descritos y explicados como una falta de coordinación de registros de representación semiótica.

Esta tesis es compartida en el presente trabajo, puesto que debido a la experiencia, hemos podido observar y tenemos evidencia de los diferentes errores y dificultades que presentan nuestros alumnos, para transitar entre diferentes registros de representación, en la actividad matemática de ecuaciones lineales; los mismos que pretendemos estudiar bajo el marco del Enfoque Ontosemiótico, que en adelante denotaremos por sus iniciales EOS.

Segura (2004), en su trabajo que consistió en diseñar y poner a prueba una secuencia didáctica que facilitara la solución de un sistema de ecuaciones lineales, en aras de que emerjan comportamientos matemáticos y cognitivos de los alumnos, encuentra que las dificultades que tienen éstos, están relacionadas con los fenómenos de desarticulación entre las ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y su solución; fenómenos que luego de experimentar la secuencia didáctica propuesta por la mencionada investigadora, quedaron subsanados.

La mencionada autora también concluye que, con respecto al reconocimiento del objeto sistema de ecuaciones lineales sólo con un conjunto de ecuaciones dadas en forma algebraica, el trabajo con los registros de representación facilita que el alumno identifique el objeto en todos los registros, ya que se emplean indistintamente para simbolizarlo.

Panizza, et al., (1995, citado en Segura, 2004), abordan temas relacionados con la concepción de ecuación como igualdad numérica, la concepción de solución,y la desarticulación entre el objeto ecuaciones lineales y su conjunto solución. Estos autores encontraron que los alumnos identifican a la ecuación como el procedimiento para resolverla. Con respecto a la solución, hallaron que la mayor parte de los estudiantes la relacionan con el resultado escrito a la derecha del signo igual, es decir que no le dan interpretación alguna a las ecuaciones, sino que la toman como meramente simbólica y operativa.

En nuestra opinión, consideramos a priori que, en el caso de los estudiantes del Instituto Superior Tecnológico de Formación Bancaria, cuando obtienen una solución a una situación de ecuaciones lineales, no reflexionan respecto de lo encontrado, puesto que creemos es importante analizar si la solución es pertinente o adecuada, más aún si se trata de un problema contextualizado de administración o negocios, donde un cambio de signo en una respuesta, cambia de sentido los resultados.

Pérez-Donoso (1998, citado por Segura, 2004), en su estudio de ecuaciones y pasaje de registros, aplicado a un grupo de ciento cinco alumnos de los primeros ciclos de universidad, puntualiza que: los alumnos tienen una tendencia por el uso del registro algebraico para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, y que evaden los problemas dados en el registro verbal. De otro lado, también encuentra que solamente en algunas ocasiones recurren al pasaje del registro gráfico al algebraico, pero que a menudo y con mayor confianza lo hacen del algebraico al gráfico para solucionar un problema que involucre ecuaciones lineales.

Ochoviet (2009), en su trabajo de investigación, se propuso estudiar el concepto de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que construyen los estudiantes de secundaria y bachillerato, cuando la enseñanza del tema empieza con sistemas de 2 x 2, así como poner en marcha una secuencia de enseñanza y de actividades, para mejorar la construcción de dicho concepto. Luego de hacer el análisis correspondiente, la autora encontró errores en los alumnos, debido a una inadecuada interpretación de las representaciones gráficas de los objetos geométricos de sistemas de ecuaciones. Desde nuestra perspectiva teórica y para nuestro caso, esto corresponderíaa dificultades en el manejo de lenguajes del EOS (lenguaje verbal, simbólico, algebraico y gráfico).

La noción de solución, asociada al punto de corte de un sistema lineal, según la autora, constituye un obstáculo originado por la enseñanza de sistemas de ecuaciones iniciando por sistema lineal 2 x 2. Para superar dicho problema, la autora recomienda, asociar recta con ecuación y punto con par ordenado de números reales. Además, Ochoviet, encontró la dificultad de asociar número de soluciones con el número de incógnitas o confundir el número de soluciones con la cantidad de puntos de corte de las rectas dadas con el eje horizontal.

Finalmente, Ochoviet (2009) recomienda que para que los estudiantes construyan una visión amplia del concepto de solución de un sistema lineal de ecuaciones, que les permita adquirir estructuras más generales y abstractas, en la educación superior, por ejemplo, se debería enseñar los sistemas lineales en distintos modos de pensamiento, tal como señala Sierpinska (2000). Tal metodología, produciría en los estudiantes, diversas maneras de pensar a los objetos matemáticos, que permitan una comprensión profunda de los mismos.

Nuevamente, consideramos que las conclusiones y recomendaciones hechas por Ochoviet, están acorde con lo que nos proponemos en nuestra investigación de ecuaciones aplicadas al contexto de la administración, donde los modos de pensamiento de Sierpinska, son analizados integralmente como lenguajes en el marco del EOS.

En la investigación de Guzmán (1998), acerca de los registros de representación y el aprendizaje de las nociones relativas a funciones lineales, se muestra que los alumnos tienen deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre los registros: algebraico, gráfico y lenguaje natural, consecuencia posiblemente de la enseñanza recibida previamente; también se detectó la dificultad para relacionar entre registros.

Asimismo, concluye la mencionada autora que, para favorecer los aprendizajes y el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas, para lo cual es necesario enfrentarlos a situaciones problemáticas adecuadas, que el profesor debe formular creativamente acerca de traslados entre las distintas representaciones semióticas.

Es preciso señalar que, en nuestro trabajo de investigación el interés por el estudio de las ecuaciones lineales estriba en el hecho de su importancia que tiene este objeto matemático, ya sea dentro del campo de las matemáticas, como sus aplicaciones a otros campos a través del modelado de fenómenos de nuestro contexto vinculados a la economía, administración, los negocios, la educación, etc.

Peralta (2003), en su investigación acerca de las dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular de la función y ecuación lineal, en estudiantes universitarios del segundo semestre del área económico-administrativo, encuentra que la noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Esta dificultad se hace más latente, cuando el registro de partida es el gráfico.

La misma autora, revela también que los estudiantes muestran excesiva inseguridad en sus procedimientos, debido a que han mecanizado los procedimientos, pero que no manifiestan tener una significación clara. Además concluye que el registro tabular utilizado como registro de partida ha resultado desconcertante. Finalmente, concluye la autora que en general, los estudiantes no han mostrado una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio, esto dado que no han mostrado una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones; y que por lo tanto, dadas estas condiciones es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito las ecuaciones lineales como herramientas para resolver problemas de oferta y demanda.

Finalmente, en base a los resultados de las investigaciones revisadas hasta el momento, y basados en las dificultades y errores cometidos por los alumnos, cuando resuelven tareas de ecuaciones lineales. Consideramos de entrada que, las tareas matemáticas propuestas a los alumnos de la educación secundaria, tanto pública como privada, deberían ser lo suficientemente analizadas, consensuadas, estudiadas y elaboradas en base a los resultados de las investigaciones, antes de ser incluidas en las actividades de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Lo mismo debería ocurrir, en el caso de las tareas matemáticas, propuestas a los estudiantes de la educación superior. Es allí, donde radica la importancia de nuestro estudio, la de encontrar elementos que nos ayuden a mejorar la propuesta de tareas en el tema de ecuaciones lineales, a los estudiantes de la educación superior tecnológica.

1.3. DELIMITACIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las últimas investigaciones en educación matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1996; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero, y Font, 2009) muestran que, la orientación en el aprendizaje de las matemáticas, es hacia la forma como se apropian los seres humanos de los objetos matemáticos, cuáles son los significados personales e institucionales al resolver una situación-problema y cómo comprenden las nociones matemáticas, pues ¿de qué sirve el rigor matemático sin la comprensión del significado de los objetos involucrados?

Según Guzmán (2000), en la enseñanza tradicional son numerosos los errores en que incurren los estudiantes, tanto en el nivel secundario como a nivel superior, a pesar de los denodados esfuerzos que hacen los profesores para que los corrijan y eviten en lo sucesivo. Por ejemplo, presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales de enunciados verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales; aun cuando saben aplicar correctamente los algoritmos de resolución, tales errores vuelven a surgir en la introducción a la escritura literal para valores numéricos y en los comienzos del álgebra, sobre todo en igualdades y desigualdades (Guzmán, 2000 citado por Segura, 2004).

La referida autora, señala también, que las dificultades en el aprendizaje de ecuaciones lineales tienen orígenes diversos; unos están ligados a la complejidad en sí mismo de los objetos emergentes en la actividad matemática con ecuaciones lineales (variables, propiedades, lenguajes, procedimientos, etc.); otros están ligados al concepto ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales y su solución; y otros tienen que ver más con la ruptura entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico.

La presente investigación la haremos en base a las dificultades para el desarrollo de las tareas matemáticas, que presentan la mayoría de los estudiantes de los primeros ciclos de la carrera de Administración Bancaria, del Instituto Superior Tecnológico Privado de Formación Bancaria – Lima, los mismos que provienen mayoritariamente de las instituciones educativas públicas, del nivel secundario de nuestro país.

La experiencia de trabajar varios años con este tipo de estudiantes en la mencionada institución, nos indica que las dificultades en cuanto a competencias matemáticas se pueden evidenciar en el sentido siguiente: al presentarles un ejercicio algebraico (resolver por ejemplo, un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas) de ecuaciones lineales, generalmente lo resuelven sin dificultad aplicando métodos algebraicos (reducción, sustitución, igualación). En consecuencia, consideramos que los estudiantes aplican fundamentalmente el pensamiento analítico – aritmético propuesto por Sierpinska (2000) y que manejan el lenguaje algebraico propuesto por Godino (2009) en el EOS.

Sin embargo, cuando se les presenta una situación-problema contextualizada al campo de la administración, la economía y los negocios en general, la gran mayoría de los estudiantes tiene dificultades para plantear las ecuaciones lineales asociadas a dicha situación-problema. En caso de plantearlas correctamente, algunos de ellos cometen otro tipo de errores, como por ejemplo, en el tránsito entre lenguajes.

Además, se puede observar que la mayoría de los estudiantes de la mencionada carrera profesional y que cursan la unidad didáctica de matemáticas, cuando obtienen una solución a una situación - problema planteada, no reflexionan acerca de la solución encontrada, no se detienen un momento a corroborar si tal solución hallada es aceptable e idónea, si es que llegan a obtenerla. Más complicada aún, se torna la situación cuando se les solicita que bosquejen un gráfico y expliquen sus soluciones desde el lenguaje gráfico, es decir, si se les pide que transiten de ida y vuelta entre los distintos lenguajes planteados por el EOS.

Tal situación nos hace reflexionar acerca del trabajo que venimos realizando en el área de matemáticas, de la mencionada institución educativa superior, específicamente en lo que respecta al objeto matemático ecuaciones lineales.

Por todo lo expuesto, consideramos que el estudio y análisis de tal problemática debe ser abordado desde distintas facetas, que abarque diferentes dimensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que atraviese distintos niveles de la educación peruana (desde la enseñanza media hasta la educación superior). Y que debe estar sustentado bajo un marco teórico que ofrezca herramientas que describan y expliquen las prácticas matemáticas desarrolladas en dicho proceso.

En consecuencia, consideramos que la teoría con tales características y que ofrece herramientas para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de las matemáticas, es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e

Instrucción Matemática (EOS), con sus cinco niveles o facetas de análisis didáctico de un proceso, propuesta por Godino y colaboradores.

Puesto que el problema es muy amplio y complejo, en la presente investigación delimitaremos el problema y nos centraremos en un estudio a nivel de análisis de objetos y procesos de las tareas matemáticas propuestas, y de idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, cognitiva a priori y ecológica de las ecuaciones lineales. Para tal efecto, analizaremos los libros de texto de matemáticas del nivel secundario, que han sido distribuidos a los estudiantes de las instituciones educativas públicas del país, por el Ministerio de Educación del Perú, en los últimos diez años, en los que se trabaja con el objeto matemático ecuaciones lineales.

En ese sentido, nuestra pregunta de entrada sería, ¿en qué medida las tareas propuestas en los textos de matemáticas de secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación del Perú, ayudan a los alumnos de dicho nivel y, posteriormente a los estudiantes del nivel superior tecnológico, a transitar entre los diversos lenguajes como el verbal, algebraico, gráfico, simbólico?

También, analizaremos algunos libros de texto de matemáticas, los más representativos en la educación superior peruana tecnológica y universitaria, que están contemplados en los sílabos del curso y que proponen el estudio de las ecuaciones lineales. La finalidad es tener un panorama claro de la manera como se viene enfocando este tema matemático específico desde el punto de vista institucional (epistémico), qué tipo de lenguajes vienen siendo trabajados con los estudiantes de secundaria (tránsito de ida y vuelta entre distintos lenguajes), los objetos presentes y emergentes en las prácticas matemáticas.

De otro lado,investigaremos acerca de la idoneidad didáctica que poseen dichas tareas, puesto que de su progreso y desarrollo dependen el nivel matemático y los conocimientos previos que deberán tener los alumnos en la educación superior, para resolver con éxito situaciones-problemas contextualizadas a la administración, la economía y los negocios, que se resuelven con ecuaciones lineales.

Las consideraciones expuestas hasta el momento nos permiten plantear el problema que nos proponemos estudiar, con la finalidad de responder a la siguiente interrogante:

¿Qué grado de idoneidad didáctica tienen las tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas, propuestas en los libros de textoa los alumnos del nivel secundario, de las instituciones educativas públicas del país, y a los estudiantes de la carrera Administración Bancaria del Instituto de Formación Bancaria-Lima, que permitamejorar el desarrollo de las actividades matemáticas?

Finalmente, con respecto a los textos didácticos de matemáticas, tanto aquellos que utilizan los alumnos de la educación secundaria pública, de los tres últimos grados, como los más representativos y utilizados en la educación superior. Señalamos que fueron seleccionados, puesto que, en éstos se proponen las tareas matemáticas de ecuaciones lineales que desarrollan los estudiantes, y que pretendemos analizar en esta investigación.

Son relevantes, en el caso de los textos de secundaria, porque de acuerdo al grado de idoneidad didáctica que posean las tareas, permitirán que los alumnos se apropien de los objetos matemáticos, desarrollen diversos procesos matemáticos y adquieren conocimientos previos, para la educación superior. En el caso de los textos de superior seleccionados, su relevancia radica en que son aquellos textos tomados como guía de estudios para el desarrollo de las actividades matemáticas con los estudiantes.

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

❖ OBJETIVO GENERAL

Determinar el grado de idoneidad didáctica de las tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas, propuestas en los libros de texto de matemáticas, a los alumnos del nivel secundario de las instituciones educativas públicas del país, y a los alumnos de la carrera Administración Bancaria del Instituto de Formación Bancaria - Lima, paramejorarel desarrollo de las actividades matemáticas.

❖ OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Determinar los objetos matemáticos asociados a las tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas propuestas en los libros de texto distribuidos por el Ministerio de Educación y usados por los estudiantes de educación secundaria de las instituciones educativas públicas del país, con la finalidad de analizar el grado de idoneidad didáctica de las tareas matemáticas.

1.1. Analizar los textos de matemáticas de educación secundaria, distribuidos a los estudiantes por el Ministerio de Educación, que contengan el tema específico ecuaciones lineales, de acuerdo al Diseño Curricular Nacional para identificar las tareas matemáticas.

1.2. Describir el tema ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas tratado en cada uno de los libros de texto previamente seleccionados, para analizar las tareas matemáticas.

1.3. Elaborar la configuración epistémica del tema ecuaciones lineales para cada una de las tareas contenidas en los textos seleccionados y descritos, con la finalidad de determinar los objetos matemáticos emergentes e intervinientes.

2. Determinar los objetos matemáticos delas tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas, propuestas en los libros de texto más usados en la educación superior peruana para estudiantes de administración bancaria, con la finalidad de analizar el grado de idoneidad didáctica de dichas tareas matemáticas.

2.1. Analizar los textos de matemáticas de educación superior que contengan el tema ecuaciones lineales, para identificar las tareas matemáticas.

2.2. Describir el tema ecuaciones lineales en una, dos tres variables tratado en cada uno de los libros de texto de superior previamente seleccionados, para analizar las tareas matemáticas.

2.3. Elaborar la configuración epistémica del tema ecuaciones lineales para cada uno de los libros de texto seleccionados y descritos, para determinar los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en las tareas.

3. Determinar el grado de idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, cognitiva (a priori) y ecológica de las tareas de ecuaciones lineales (en una, dos y tres incógnitas), propuestas en los textos a los alumnos de educación secundaria pública, y a los estudiantes de la carrera Administración Bancaria, aplicando los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS.

1.5. CUESTIONES DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación presentamos a manera de extensión a la pregunta del problema de investigación anteriormente mencionada, algunas interrogantes que servirán de guía en el desarrollo de la presente investigación y que sin duda irán direccionando nuestro análisis a fin de no salirnos de nuestros objetivos propuestos.

- ¿Qué tipo de situaciones-problemas contextualizadas que se resuelven con ecuaciones lineales se deben plantear a los estudiantes de la carrera de Administración Bancaria, cuando se desarrolla la actividad matemática, para que el proceso de aprendizaje y enseñanza tenga alta idoneidad didáctica y se pueda alcanzar lo que la institución pretende?

- ¿Qué tipo de actividades matemáticas (tareas) plantean los autores de los libros de texto, tanto para los alumnos de secundaria, como para la educación superior, con respecto a las prácticas matemáticas implementadas de ecuaciones lineales con una, dos y tres variables y su respectiva contextualización a campo de la administración y los negocios?

- ¿Existe interrelación (o correspondencia) entre los elementos matemáticos primarios (situaciones - problemas, lenguajes, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos) presentes en las tareas de ecuaciones lineales propuestas en los textos de secundaria? ¿y en las tareas de ecuaciones lineales propuestas en los textos de educación superior?

1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Durante la puesta en marcha del presente estudio, esperamos verificar o refutar las siguientes hipótesis de investigación:

Creemos a priori que, algunas razones de las limitaciones y dificultades mostradas por los estudiantes del primer ciclo de la carrera Administración Bancaria para resolver situaciones-problemas de ecuaciones lineales (en una, dos y tres incógnitas) contextualizadas al campo de la administración, la economía y los negocios, podrían deberse a que:

- En la educación secundaria pública las tareas con las que trabajan los alumnos, en los libros de texto, están desarticuladas.

- En las tareas matemáticas de educación secundaria pública, según los textos, no se prioriza el proceso de contextualización, sino el de algoritmización en las actividades matemáticas.

- El grado de idoneidad didáctica epistémica, cognitiva (a priori) y ecológica de las tareas de ecuaciones lineales propuestas por los libros de texto, es baja, tanto en el nivel de educación secundaria pública, como en la educación superior. Lo cual nos proporcionará mayores elementos para suponer que, la desarticulación y la descontextualización de las tareas matemáticas, podrían limitar el desarrollo de las mismas por parte de los estudiantes, en la educación superior.

En esta investigaciónpretendemos reunir evidencias que sustenten las hipótesis planteadas. Aspiramos obtener resultados que contribuyan en brindar elementos para el análisis de la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático ecuaciones lineales y su representación semiótica. También pretendemos, brindar elementos para mejorar la propuesta de tareas matemáticas a los estudiantes, tanto de superior como de la educación secundaria pública, a través de los libros de texto, de manera que se contemplen diversas ópticas o modos de análisis en la resolución de una situación-problema.Todo lo anterior, se hará con la finalidad de contribuir en mejorar la educación y cultura matemática de los estudiantes del nivel secundario, superior tecnológica y universitaria de nuestro país.

MARCO TEÓRICO

(Resumen)

En este segundo capítulo desarrollamos el enfoque teórico que sustenta nuestra investigación, a saber, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática – EOS, marco teórico que nació a partir de las investigaciones propias de la Didáctica de las Matemáticas, y que creemos ofrece herramientas adecuadas para la investigación en matemática educativa.

Luego de una breve introducción, presentamos las nociones teóricas que dieron paso al nacimiento del EOS, y de manera general abordamos la clasificación en cinco niveles de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas. Luego desarrollamos de manera específica los niveles del EOS, enfatizando en aquellos que nos sustentan de forma explícita nuestro estudio, como es el caso del quinto nivel: idoneidad didáctica. Finalmente, comentamos acerca de las nociones del EOS asumidas en esta investigación.

2.1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación es fundamental tener en cuenta la forma como se vienen planteando las tareas matemáticas a los estudiantes de Administración Bancaria, qué tipo de problemas del contexto plantean estas tareas, utilizando temas específicos de la matemática, como las ecuaciones lineales. Nuestra intencionalidad es indagar acerca de las actividades matemáticas que se proponen a los estudiantes de la mencionada carrera profesional, los objetos matemáticos previos y emergentes de las tareas; así comoqué tipo de tareas matemáticas se vienen proponiendo a los alumnos de la educación secundaria pública, en relación con el tema ecuaciones lineales. Además, de la interrelación entre las tareas de ambos niveles educativos.

También, nos interesa analizar el grado de idoneidad didáctica desagregada en idoneidades parciales de las tareas del objeto matemático ecuaciones lineales, propuestas a los estudiantes de Administración Bancaria y de los tres últimos grados de la educación secundaria pública. Para ello, sustentaremos esta investigación en el marco teórico de la didáctica de la matemática, denominado Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), desarrollado por Juan D. Godino y colaboradores, el mismo que ha nacido como alternativa distinta, en tanto teoría instruccional, para hacer análisis didácticos de temas específicos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2009), sostienen que el punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática: como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situaciones-problema, se definen los conceptos teóricos de práctica matemática, objeto matemático (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática antes señalado por los fundadores del EOS, y por otro lado, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

Los autores del EOS, consideran como práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla y generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una instituciónestá constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas.

2.2. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA - EOS

La Didáctica de las Matemáticas es la ciencia llamada a asumir las tareas y la responsabilidad de elaborar, organizar y sistematizar los conocimientos útiles para describir, diseñar, implementar, ejecutar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en sus distintos niveles de la educación. En consecuencia, la Didáctica de las Matemáticas integra cuestiones que son normalmente abordadas en forma separada por otras disciplinas del conocimiento, tales como la epistemología, ontología, la semiótica, la psicología, pedagogía, sociología, entre otras.

Como respuesta a las tareas antes mencionadas surge el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática - EOS (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; D' Amore y Godino, 2007; D' Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Ramos y Font, 2008), enfoque que hemos tomado como marco teórico de referencia para nuestro trabajo de investigación.

Godino, et al. (2007; 2011), son de la opinión que en el EOS se adopta un modelo epistemológico pragmatista-antropológicoy se procura integrar diversos enfoques y modelos teóricos utilizados en la investigación en educación matemática basado en: presupuestos antropológicos/ socioculturales (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006, citados por Godino et al, 2011); un modelo de cognición matemática sobre bases semióticas (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce, 1931-1958, citados por Godino et al, 2011); un modelo instruccional que adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista (Ernest, 1998; Brousseau, 1998, citados por Godino et al, 2007) e interaccionista (Cobb y Bauersfeld, 1995, citados por Godino et al, 2011); un modelo sistémico – ecológico (Morín, 1977, citado por Godino, 2011) que interrelaciona las dimensiones anteriores entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural (Maturana y Varela, 1984, citados por Godino et al, 2007) para el estudio y mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El conjunto de nociones teóricas y las herramientas que se proponen en el EOS, se han ido construyendo y refinando de manera progresiva a lo largo del tiempo en tres etapas. En la primera fase desarrollada entre los años 1993 y 1998, en la que se publicaron los primeros trabajos (Godino y Batanero, 1994; Godino & Batanero, 1998) se desarrollaron y precisaron las nociones de “significado institucional y significado personal de un objeto matemático”, relacionándolas con las nociones de conocimiento y comprensión y, proponiéndose como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensión institucional y dimensión personal del conocimiento matemático) los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante cierto tipo de situaciones-problemas, así como los diversos objetos emergentes de dichas prácticas matemáticas.

En la segunda fase desarrollada entre 1998 y 2006, se elaboraron modelos ontológicos y semióticos más detallados (Godino,Font,Contreras & Wilhelmi, 2006), llegándose a la conclusión de que era necesario ampliar y profundizar en el estudio de las relaciones dialécticas entre el pensamiento (ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas. Por lo tanto, a lo largo de este periodo, se planteó el desarrollo de una ontología y una semiótica específicas que analicen los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos presentes en la interacción didáctica.

En la tercera etapa desarrollada desde el 2006 hasta la actualidad, el énfasis ha estado centrado en los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática (Godino et al, 2012), quienes basados en ciertas limitaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas consideraron necesario desarrollar nuevas herramientas e incorporar otras nociones de marcos teóricos que permitiesen describir en forma detallada las interacciones que ocurren en el aula de matemáticas.

En ese sentido, dichos autores proponen diferenciar en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones: epistémica (relativa al conocimiento institucional), cognitiva (génesis de significados personales), docente (relativa a las funciones del profesor), discente (relacionada con las funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de los recursos instruccionales) y afectiva (que tiene que ver con las actitudes, necesidades, emociones, motivaciones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas).

En resumen, el conjunto de nociones teóricas que en la actualidad componen el EOS se han clasificado en cinco niveles o grupos, donde además cada grupo permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas. Tales niveles, de acuerdo con Godino et al. (2007; 2011), son los siguientes:

1. ***Sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas***. En este nivel de análisis se asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). Se aplica, sobre todo, a la planificación e implementación de un proceso de estudio, donde la actividad de resolución de problemas es adoptada como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

2. ***Configuración de objetos y procesos matemáticos***, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. En este nivel se asume una noción interaccionista de objeto matemático y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas). Aquí los diversos medios de expresión, es decir los lenguajes, desempeñan un doble papel, a saber, de instrumentos del trabajo matemático y el de representación de los restantes objetos matemáticos.

3. ***Configuraciones y trayectorias didácticas***. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas constituyen la principal herramienta para el análisis de los procesos de instrucción matemática, al articular los roles docentes y discentes de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema. Estas configuraciones toman en cuenta las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático, a saber: faceta epistémica (referida a los conocimientos institucionales), cognitiva (sobre los conocimientos personales), afectiva (emociones, necesidades y motivaciones de los estudiantes), mediacional (relativa a los recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica (relativa a la pertinencia al contexto y a la sociedad).

4. ***Sistema de normas y metanormas*** que condicionan y hacen posible el proceso de estudio. Este nivel de análisis contempla el sistema de reglas, hábitos y

normas que soportan y hacen posible las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. En este nivel de análisis se considera que el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos, es el reconocimiento de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático.

5. ***Idoneidad didáctica del proceso de estudio***. Desglosada en una serie de idoneidades parciales, es concebida como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones realizadas por los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. En cada una de las facetas o idoneidades parciales, se ha identificado un sistema de indicadores empíricos que constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática y que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La perspectiva global adoptada por el EOS, tiene en cuenta las diferentes dimensiones implicadas y las interacciones entre estas dimensiones. En la figura N° 01 siguiente, se muestra el carácter relacional y multidimensional de la enseñanza de las matemáticas adoptado por el EOS, donde observamos que se resume las distintas facetas y los niveles del análisis didáctico.

Comprensión y Conocimiento en el EOS

En el EOS, Godino et al. (2009) señalan que, de acuerdo a los posicionamientos pragmatistas de este mismo enfoque, debiéramos entender la comprensión no tanto como proceso mental, sino más bien, como competencia. Observamos también, que en el EOS, consideran que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento.

En consecuencia, en el sentido del EOS, referirnos o hacer alusión al conocimiento, es equivalente a referirnos al contenido de una o muchas funciones semióticas, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la variedad de funciones semióticas.

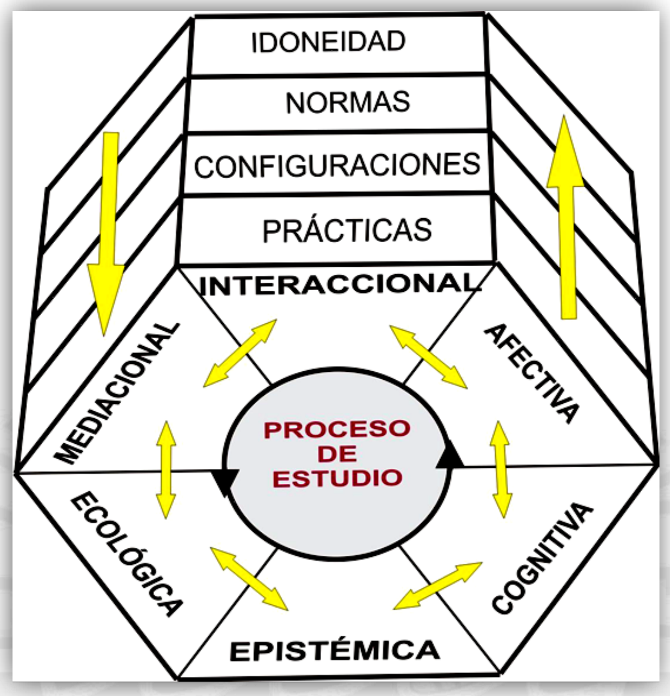


Figura N° 01.Facetas y Niveles de Análisis Didáctico.
Fuente: Godino, J. D. (2011, p. 4)

2.3. NIVELES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

En diferentes trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas hechos bajo el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (Font y Godino, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2007; D' Amore, Font y Godino, 2007) se han propuesto cinco niveles o grupos de análisis que se pueden aplicar en un proceso (planificado o bien implementado) de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Estos cinco grupos o niveles de análisis (arriba mencionados) tienen un peso distinto según el momento del proceso de instrucción que se considere. Así, el primer y segundo nivel de análisis son particularmente útiles en la fase de diseño curricular y en la planificación de un proceso de instrucción matemática. El tercer y cuarto nivel de análisis son aplicables al estudio de la implementación realizada del proceso de instrucción. En tanto que, el quinto nivel es aplicable en la fase de planificación y en la valoración de los procesos de instrucción matemática.

A continuación vamos a precisar y ampliar la ontología que se propone en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático, respecto de estos cinco niveles de análisis.

2.3.1. PRIMER NIVEL DE ANÁLISIS: SISTEMAS DE PRÁCTICAS OPERATIVAS, DISCURSIVAS Y NORMATIVAS

Este primer nivel de análisis está basado en la aplicación de las nociones de práctica matemática ligada a la solución de un tipo de situaciones-problemas (en nuestro caso, situaciones-problemas de ecuaciones lineales contextualizadas a la administración y los negocios), objetos emergentes e intervinientes y a los significados sistémicos personales e institucionales.

Según Font, Planas & Godino (2010), el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (por ejemplo lectura y producción de textos), así como una práctica discursiva (por ejemplo, reflexión de la lectura o de la producción de textos) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto, siendo éste el profesor. Así, el discurso del profesor, es un componente de su práctica profesional que tiene como objetivo, generar en el estudiante un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva de esta práctica operativa, considerada como matemática por el profesor.

En consecuencia, se considera práctica matemática a toda actuación o manifestación (verbal, simbólica, gráfica, etc.) ejecutada por alguien, en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de las soluciones obtenidas a otras personas, con la finalidad de validarlas y generalizarlas a otros contextos de la realidad y otros problemas del conocimiento que implican la aplicación de las matemáticas.

Este nivel de análisis que plantea estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en un proceso de instrucción matemática, se aplica, fundamentalmente en la fase de planeamiento e implementación de un proceso de enseñanza y aprendizaje; permite descomponer el proceso de instrucción en una secuencia de episodios, y para cada uno de los episodios, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal.Además, permite describir una configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas y realizadas.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009), son de la opinión que, en el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas, como es el caso específico de las ecuaciones lineales. Los significados entendidos como sistemas de prácticas y su utilidad en el análisis didáctico de un proceso de estudio, se resumen en la Figura N° 02, tales significados pueden ser personales e institucionales. Con relación a los significados institucionales los autores antes citados recomiendan tener en cuenta los siguientes tipos:

- **Implementado**: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- **Evaluado**: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

- **Pretendido**: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- **Referencial**: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

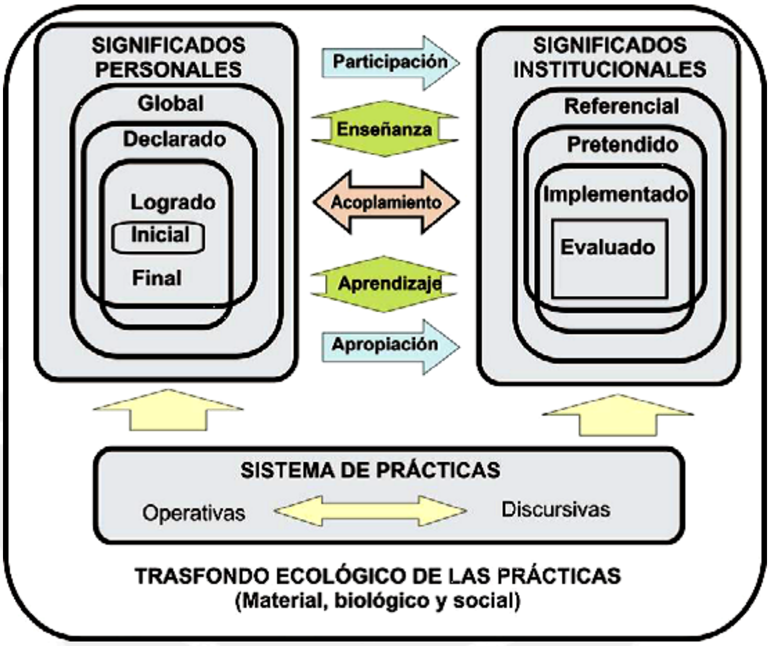


Figura N° 02.Tipos de Significados Institucionales y Personales
Fuente: Godino, et al. (2007b, p. 5)

Con relación a los significados personales dichos autores señalan los siguientes tipos:

- **Global**: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.

- **Declarado**: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- **Logrado**: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados inicialeso previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

A partir de la figura 02,Godino, et al. (2007b) encontraron que existe una relación dialéctica entre el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje, la misma que trae como consecuencia una especie de acoplamiento progresivo ente los significados personales y los institucionales. De otro lado, el proceso de enseñanza requiere que el estudiante participe activamente en la comunidad de prácticas que sirve de base y sustento para los significados institucionales, en tanto que el proceso de aprendizaje, implica que el estudiante se apropie de los significados institucionales.

2.3.2. SEGUNDO NIVEL DE ANÁLISIS: CONFIGURACIÓN DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

Si bien, la noción de sistemas de prácticas, es particularmente útil para determinados análisis de tipo macrodidáctico de los procesos de instrucción, se requiere también, un análisis más detallado de la actividad matemática; razón por la cual se hace necesario introducir una clasificación de objetos matemáticos, los mismos que emergen de los sistemas de prácticas.

Tal emergencia de objetos es un fenómeno complejo y para entenderlo se debe considerar, de un lado, aquellas entidades primarias que se pueden observar directamente en un texto matemático (así por ejemplo, problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), las cuales se encuentran relacionadas entre sí, formando configuraciones, definidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y de las relaciones que se establecen entre los mismos.

De otro lado, se encuentra una tipología de objetos que emerge de las diversas formas de ver, comunicar, operar, etc. con tales entidades primarias. Es decir, se refiere a los objetos personales o institucionales, objetos ostensivos o no ostensivos, sistémicos o unitarios, extensivos o intensivos y expresiones o contenidos.

✪ ***Objetos matemáticos***

Para desarrollar una práctica matemática, el estudiante necesita de determinados conocimientos que le sirvan de base tanto para su proceder como para la interpretación de sus resultados. Considerando tales conocimientos que el estudiante tiene que utilizar cuando se enfrenta a una situación-problema, en la que deberá plantear y resolver, por ejemplo, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables, observamos que dicho estudiante ha de utilizar un lenguaje verbal (por ejemplo: sistema lineal, solución única), lenguaje gráfico (por ejemplo: punto de intersección de los tres planos en el espacio tridimensional), lenguaje simbólico (por ejemplo: x , y , z , $=$).

Estos lenguajes representan la parte ostensiva de una serie de conceptos (p.e. ecuación de oferta y demanda lineal), proposiciones (p.e. la intersección entre la recta de oferta y demanda representa en nivel de equilibrio del mercado) y procedimientos (p.e. resolución de un sistema lineal por reducción de renglones, por eliminación) que se realizan para sustentar con argumentos las acciones sucesivas en la práctica matemática.

Según Font y Godino (2006; 2009), cuando un estudiante realiza y evalúa una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por algunos o todos los objetos matemáticos, a saber: situaciones - problemas, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la Figura 03. Describiremos a continuación la topología de objetos matemáticos primarios que se muestran en la Figura N° 03:

- *Lenguajes*. Conformado por términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. en sus diversos registros o representaciones (escrito, oral, gráfico, gestual, etc.).
- *Situaciones – problemas.* Manifestadas mediante aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, problemas contextualizados, casos de aplicación.
- *Conceptos – definiciones.* Introducidos y presentados a través de definiciones o descripciones, como por ejemplo, definición de sistema de ecuaciones lineales, de sistema homogéneo, de pendiente de recta, etc.
- *Proposiciones.* Se expresan mediante enunciados sobre conceptos y definiciones de un tema matemático específico.
- *Procedimientos.* Algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, formas de proceder propias del quehacer matemático.

- *Argumentos.* Se manifiestan a través deenunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, como por ejemplo, teoremas, corolarios y sus demostraciones.

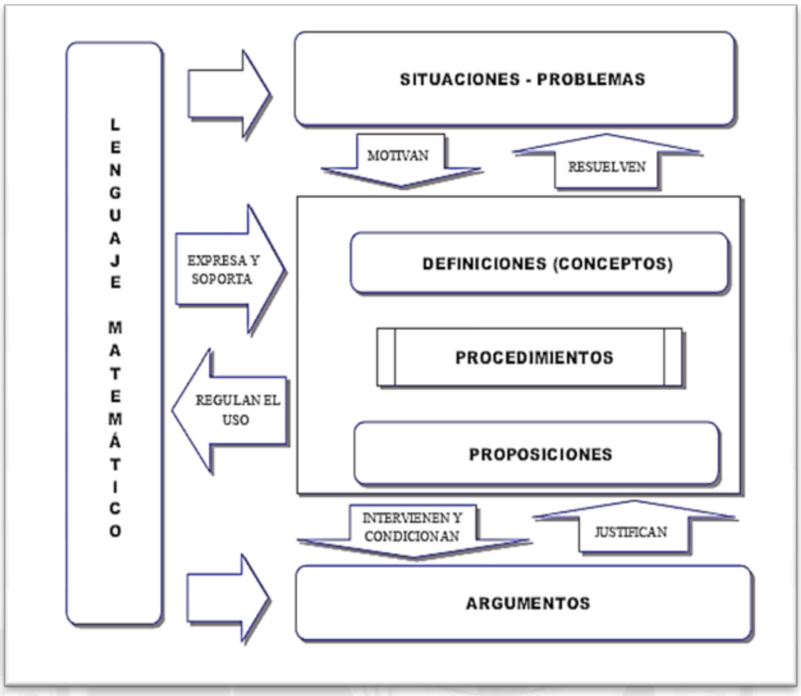


Figura N° 03. Configuración de Objetos Matemáticos Primarios
Fuente: Godino, et al. (2007b, p. 6)

✪ *Procesos matemáticos*

En base a la configuración de objetos matemáticos primarios que se muestran en la figura 03, y de acuerdo con Godino, et al. (2007b), se puede evidenciar la complejidad de la actividad matemática en una sesión o episodio de clase. Pero, además de la intervención y emergencia de objetos matemáticos, interesa la interrelación entre los mismos, entonces se hace necesario utilizar la tipología de procesos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico para el Conocimiento e Instrucción Matemática.

Los sistemas de prácticas operativas y discursivas modelan la actividad matemática, a través de la emergencia de diferentes objetos matemáticos (lenguajes, situaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos); tal emergencia tiene lugar a través de los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización) y argumentación, y su interrelación puede agruparse en base a cinco facetas o dimensiones duales.

Estas dualidades al mismo tiempo dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos, a saber: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/ descomposición – síntesis/ reificación; materialización/ concreción – idealización/ abstracción; expresión/ representación – significación. En la Figura N° 04, se muestra la configuración de procesos y objetos matemáticos.

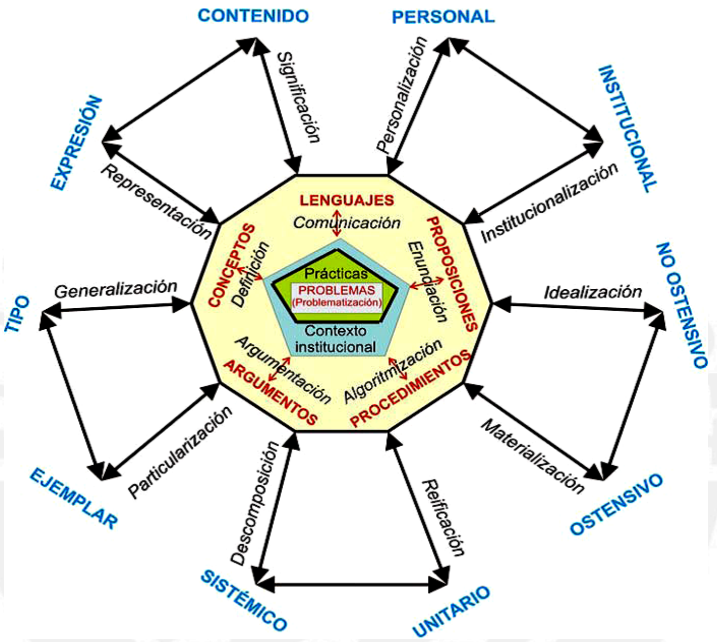


Figura N° 04.Configuración de Objetos y Procesos Secundarios
Fuente: Godino,et al. (2007b, p. 9)

2.3.3. QUINTO NIVEL DE ANÁLISIS: IDONEIDAD DIDÁCTICA

En el EOS, el quinto nivel de análisis “la idoneidad didáctica”, brinda criterios y principios generales resultado de la investigación, los mismos que constituyen elementos originales y significativos propios de un enfoque instruccional apropiado para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de temas específicos de esta, como el de ecuaciones lineales, objeto del presente estudio.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios y desglose operativo, han sido introducidos en el EOS como un conjunto de herramientas que permiten el progreso desde una didáctica descriptiva – explicativa hacia una didáctica normativa. Es decir, una didáctica orientada hacia la intervención efectiva en el aula.

En el Enfoque Ontosemiótico la *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción se puede definir como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes o criterios que a continuación precisamos:

- ***Idoneidad epistémica***, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos, respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en dos variables en la educación secundaria puede limitarse al aprendizaje de ejercicios de rutina aplicando algoritmos, lo cual se puede calificar como de baja idoneidad, o incluir diferentes situaciones que ocurren en el día a día del alumno y que se resuelven con sistemas de ecuaciones, justificando los algoritmos aplicados, lo que constituye una alta idoneidad.

- ***Idoneidad cognitiva***, alude al grado en que los significados pretendidos e implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos e implementados. Un proceso de enseñanza y aprendizaje que posee un alto grado de idoneidad cognitiva, sería por ejemplo, en el estudio de las operaciones aritméticas con números de tres o más cifras, que el profesor evaluará inicialmente, una especie de diagnóstico, para saber si los estudiantes dominan los números de una y dos cifras, y en caso que no fuera así, empezar el proceso de instrucción abordando dichos números.

- ***Idoneidad interaccional***, un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional, si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, de un lado, identificar a priori conflictos semióticos potenciales, y de otro lado permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. Así por ejemplo, un proceso de estudio realizado de acuerdo a una secuencia de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica frente a un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los alumnos.

- ***Idoneidad mediacional***, expresa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, cuando el profesor y los alumnos tienen a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio de un tema matemático específico (un software: cabri o derive para geometría analítica, p.ej.).

  El proceso de estudio que se apoye en estos recursos tiene potencialmente mayor idoneidad mediacional frente a otro que se desarrolle de manera tradicional utilizando solamente pizarra, lápiz y papel. Otro ejemplo de un proceso de enseñanza – aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional en relación a los medios temporales, sería una clase magistral, donde el profesor se dedica a reproducir íntegramente y sin interacción con los alumnos el significado pretendido (enfoque tradicional).

- ***Idoneidad afectiva***, indica el grado de implicación (actitudes, afectos, intereses, motivaciones y preocupaciones) de los alumnos con el proceso de estudio. Así pues, la idoneidad emocional está directamente relacionada con factores que dependen de la institución como con aquellos factores que dependen básicamente del alumno y de su experiencia escolar previa. Así por ejemplo, poseen alta idoneidad afectiva aquellos procesos basados en situaciones-problemas que sean de interés para los estudiantes.

- ***Idoneidad ecológica***, expresa el grado en que el proceso de estudio se adapta y/o ajusta al proyecto educativo de centro, al proyecto de desarrollo institucional, a la sociedad y a los condicionamientos del entorno en el cual se desarrolla. Así por ejemplo, cuando en el área de matemáticas se trabajan proyectos y los alumnos recogen información real del precio de los productos de primera necesidad para plantear problemas de utilidad, ingresos y costos, que se resuelven con ecuaciones, se está incentivando hacia la cultura del ahorro y de la matematización de la realidad.

Los criterios componentes de la idoneidad didáctica se muestran como un proceso sistémico en la Figura N° 05. En el hexágono regular están representadas las idoneidades que competen a un proceso de estudio pretendido, planificado o programado,donde a priori se asume un grado máximo de las idoneidades parciales. En el hexágono irregular interior se representan las idoneidades efectivamente logradas en el desarrollo de un proceso de enseñanza – aprendizaje implementado. Además, se sitúa en la base las idoneidades epistémica y cognitiva, puesto que en el EOS se considera que un proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de ciertos conocimientos específicos.

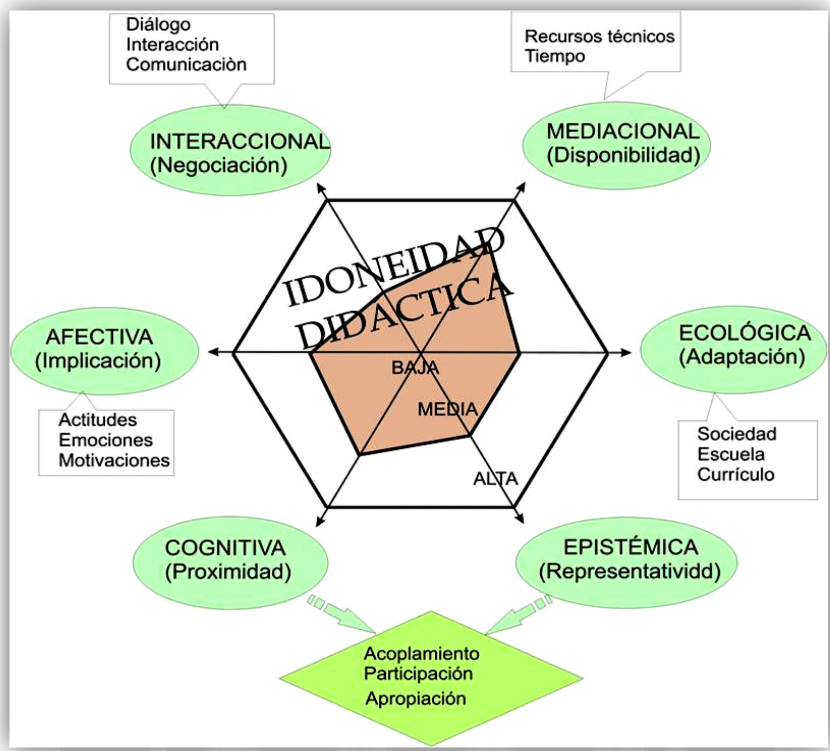


Figura N° 05. Componentes de la Idoneidad Didáctica

Fuente: Godino, J. D. (2011, p. 6)

De lo descrito anteriormente, podemos deducir que la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos criterios de idoneidad se deben abordar de manera interrelacional, es decir, que debemos referirnos a la *idoneidad didáctica* de manera holística, con un criterio sistémico de adaptación y pertinencia respecto del proyecto educativo global. Sin embargo, esta idoneidad se debe interpretar, como relativa a determinadas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo cual exige una actitud de reflexión e investigación por parte del docente, discente y demás miembros involucrados en el proyecto de desarrollo educativo e institucional.

Todas estas nociones son consideradas en Godino, et al. (2009), como útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza. Lograr alta idoneidad en una de las dimensiones antes mencionadas, por ejemplo, la epistémica, puede requerir ciertas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los cuales se dirige la enseñanza.

Se debe procurar lograr un equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva para después identificar y solucionar conflictos semióticos a través de la trayectoria didáctica. En tanto que los recursos técnicos y el tiempo disponible también interactúan con los objetos primarios como las situaciones-problemas, el lenguaje, los argumentos, los procedimientos, entre otros.

Es necesario mencionar que las herramientas descritas, es decir los criterios de idoneidad se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de aprendizaje (microcurrículo), a la planificación y desarrollo de una unidad didáctica (mesocurrrículo), o a un nivel de planificación más global, como por ejemplo al análisis de una propuesta curricular (macrocurrículo).

Además, podemos utilizar también la idoneidad didáctica como herramienta de análisis de ciertos aspectos de un proceso de estudio, como un material didáctico, un módulo de estudio, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o aquellos incidentes didácticos que pudieran ocurrir en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.4. NOCIONES TEÓRICAS DEL EOS ASUMIDAS EN LA PRESENTE INVESTIGACIÓN

En esta investigación y para efectos de hacerla viable con respecto a la duración de la misma, hemos procedido a delimitar y a considerar sólo algunos niveles del EOS, los cuales nos servirán como herramienta para determinar la interrelación o el divorcio que existe actualmente, en las tareas matemáticas sobre “ecuaciones lineales”, que se proponen en los libros de texto, de la educación secundaria pública y la educación superior tecnológica. Y determinar también, cómo esta interrelación podría influir como conocimientos previos, en el desarrollo idóneo de las prácticas matemáticas de los estudiantes de la carrera de Administración Bancaria.

Puesto que nuestra investigación es descriptiva y analítica, entonces hemos considerado el segundo nivel de análisis: Configuración de objetos y procesos matemáticos. Con este nivel pretendemos hacer el análisis de los objetos emergentes e intervinientes en las tareas matemáticas que se proponen a los alumnos de los últimos grados de la educación secundaria estatal (tercero, cuarto y quinto), a través de la herramienta configuración epistémica (C.E.); y, de las tareas propuestas a los estudiantes de educación superior tecnológica, de la carrera de Administración Bancaria.

Luego, hemos tomado el quinto nivel de análisis del EOS: Idoneidad didáctica del proceso de estudio, y de las seis dimensiones que contiene, seleccionamos la faceta epistémica, la faceta cognitiva en un análisis a priori, y la faceta ecológica. Con la aplicación de este quinto nivel a nuestra investigación, pretendemos determinar el alto, medio o bajo grado de idoneidad didáctica que poseen actualmente las tareas matemáticas de ecuaciones lineales, presentadas a los estudiantes del primer ciclo de Administración Bancaria, así como aquellas tareas asignadas a los alumnos de los tres últimos grados de secundaria, de la educación pública de nuestro país.

METODOLOGÍA Y PROCEDIMIENTOS

(Resumen)

En este tercer capítulo describimos de manera resumida el trabajo específico o los pasos que seguimos en la ejecución de cada una de las actividades planeadas. Para ello, tomamos una metodología que consta de seis pasos y que creemos se adapta a una investigación cualitativa.

En seguida, presentamos un cuadro en el que detallamos los pasos a seguir para cumplir con las actividades propuestas, las mismas que nos conducirían al logro de los objetivos específicos, y éstos al logro del objetivo general.

El propósito fundamental de nuestra investigación es, por un lado, describir la forma como se vienen planteando las tareas y actividades matemáticas en los libros de texto, dirigidos a los alumnos del nivel de educación secundaria pública del Perú y a los estudiantes de Administración Bancaria del nivel de educación superior tecnológica. También se ha planteado,determinar grado de idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, cognitiva y ecológica, que tienen dichas tareas matemáticas, más específicamente, las ecuaciones lineales, en relación a la desarticulación del tema matemático específico y a la contextualización de las situaciones-problemas, planteadas a los mencionados alumnos.

Definimos el presente estudio, como una investigación cualitativa de tipo descriptiva, acorde con lo señalado por Toro & Parra (2010), puesto que la investigación cualitativa, por definición se aboca a hacer descripciones detalladas, de situaciones, tareas, etc., que son observables. Y dado que nuestro estudiopretende describir tareas matemáticas propuestas a estudiantes de secundaria y superior, y en ese desarrollo también se brindarán, entonces algunas razones matemáticas que limitan y dificultan el planteamiento y resolución de situaciones-problemas de ecuaciones lineales, en los estudiantes de educación superior tecnológica, de la carrera de Administración Bancaria.

Latorre y Cols (2003, citados por Ibarra, 2008), proponen un esquema general para investigaciones cualitativas. Este esquema contempla seis fases generales que debe seguir toda investigación de corte cualitativo. Para nuestro estudio, hemos adaptado las fases señaladas por Ibarra (2008) y hemos agregado las actividades y estrategias adecuadas que responden a nuestro problema y acorde a nuestros intereses.

A continuación describimos cada una de las fases, comentando y precisando los pasos seguidos en este estudio.

1. ***Fase exploratoria o de reflexión,***en la misma que se:
   a) Identificó la problemática a investigar
   b) Planteó el problema de investigación
   c) Plantearon las cuestiones de la investigación
   d) Realizó la revisión de investigaciones antecedentes
   e) Formuló la hipótesis de la investigación.

2. ***Fase de planificación,***en la misma que se:
   a) Determinó la institución educativa superior objeto de investigación
   b) Delimitó y se ajustó el problema y cuestiones de la investigación
   c) Reformularon y ajustaron los objetivos de investigación
   d) Seleccionaron los textos de matemáticas a analizar, tanto del nivel secundario como del nivel de educación superior.
   e) Se eligió el marco teórico para la investigación
   f) Seleccionó la estrategia a seguir en la investigación

3. ***Fase de entrada en el escenario,***para ello se:
   a) Seleccionó el público objetivo a quienes se dirigió la investigación
   b) Definió el papel del investigador

4. ***Fase de recogida y análisis de la información,***aquí se precisaron:
   a) Las estrategias para la recolección de la información

b) Las técnicas a seguir para el análisis de la información

5. ***Fase de retirada del escenario,***en esta etapa se:
   a) Finalizó la recogida de la información de los libros de texto
   b) Se hizo un análisis comparativo y reflexivo de la información y se dieron los resultados.

6. ***Fase de elaboración del informe,***en esta etapa:
   a) Se redactaron las conclusiones de la investigación, y
   b) Se elaboró la redacción y refinamiento de dicho informe.

En toda investigación es fundamental, en primer lugar, identificar la problemática que nos interesa estudiar o las dificultades que pretendemos solucionar. Es así, que para nuestro caso específico yen base a la literatura e investigaciones revisadas (en antecedentes), la problemática giró en torno a los errores reiterativos y a las dificultades que tienen muchos de los estudiantes, que inician su educación superior tecnológica, para plantear y resolver situaciones-problemas en matemáticas. Además, debido a que nuestro público objetivo fueron estudiantes de Administración Bancaria y finanzas, la preocupación como docente e investigador fue más intensa, por el hecho de que nuestros estudiantes tienen que adquirir competencias matemáticas básicas para poder avanzar con éxito en su carrera profesional.

La intención de pretender solucionar tales dificultades matemáticas evidenciadas en los alumnos, a lo largo de varios ciclos previos, nos llevó a realizar este estudio en didáctica de las matemáticas, específicamente en el tema ecuaciones lineales. Y para ello, una vez identificada la problemática, planteamos el problema de investigación, el objetivo general y sus respectivos objetivos específicos, las cuestiones que direccionaron la investigación, así como la hipótesis de estudio.

Para lograr fundamentar y documentar esta primera etapa, tuvimos que recurrir a investigaciones previas hechas en el mismo tema que nos habíamos propuesto, es decir, tesis de maestría, tesis doctorales, artículos científicos, publicaciones nacionales e internacionales, reportes de investigación en didáctica de las matemáticas, entre otros documentos.

A continuación, se seleccionaron las investigaciones que sirvieron como antecedentes al presente estudio y se delimitó el tema matemático específico, es decir, ecuaciones lineales en una, dos y tres variables y su proceso de contextualización en las tareas de los libros de texto. Se decidió que la institución en la que se realizaría el estudio sería el Instituto de Educación Superior Tecnológica de Formación Bancaria, Lima; y que las tareas matemáticas a analizar serían aquellas propuestas en los textos con los que trabajan los estudiantes que cursan el primer ciclo en la carrera de Administración Bancaria con mención en finanzas, y sus conocimientos previos y competencias matemáticas traídas desde su educación secundaria.

En ese contexto y basados en la experiencia de trabajar varios años con este tipo de tareas,cuyos estudiantes presentan serias dificultades en relación a las ecuaciones lineales, reflexionamos acerca de la importancia de nuestro estudio y su contribución a la didáctica de las matemáticas, a la solución de los problemas de índole matemático en la institución, así como su contribución en la mejora de la educación secundaria y superior tecnológica del país. A partir de este hecho, se ajustó el problema, se delimitó y reformuló mejor el objetivo general y se desglosaron los objetivos específicos propuestos hasta ese momento.

Después de realizadas todas las acciones antes mencionadas, se decidió que el marco teórico para nuestra investigación sería el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática – EOS, por las herramientas teóricas de análisis que este enfoque ofrece, por los niveles bien definidos de su estructura, por las configuraciones didácticas que posee y por las idoneidades didácticas parciales que permiten analizar el problema desde distintas dimensiones. Además, está el hecho de que es una teoría que se presta para hacer análisis matemáticos a nivel macro y meso y micro curricular, así como estudios de casos puntuales de las matemáticas.

También, luego de reflexionar (a priori) acerca de los errores y dificultades que suelen cometer nuestros alumnos de educación superior tecnológica, cuando trabajan el tema ecuaciones lineales, volteamos la mirada retrospectivamente y decidimos estudiar las tareas y actividades matemáticas que se les viene presentando a estos alumnos en el nivel previo: la educación secundaria pública. Nuestro propósito era averiguar qué tan articulados están los temas matemáticos en los libros de texto de secundaria; si se trabaja o no, el proceso de contextualización de las ecuaciones lineales; entre qué tipo de lenguajes transitan los estudiantes en sus tareas matemáticas.

Para ello, seleccionamos y analizamos las tareas de los libros de texto de matemáticas (tema ecuaciones lineales) del tercero, cuarto y quinto grado de secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación, propuestas a los alumnos de las instituciones educativas públicas del país. Esto por el hecho de que, los alumnos que recibimos en el Instituto de Formación Bancaria, en su gran mayoría, provienen de las instituciones educativas públicas del Perú, las cuales por directivas ministeriales deben utilizar los textos que el Ministerio de Educación distribuye.

En base a los objetivos ya mencionados, planteamos las estrategias y procedimientos para el registro de la información, así como para el análisis de la misma. En el cuadro 01, que se muestra a continuación, presentamos los objetivos específicos y los desagregados de cada uno de ellos, además de las estrategias y tareas para cumplir con tales objetivos.

Cuadro N° 01. Estrategias a seguir por cada objetivo específico y desagregado.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ACCIONES POR OBJETIVO	PASOS POR CADA ACTIVIDAD
O_1 : Determinar los objetos matemáticos asociados a las tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas propuestas en los	**1.1.** Analizar los textos de matemáticas de educación secundaria, distribuidos a los estudiantes por el Ministerio de Educación, que contengan el tema específico ecuaciones lineales, de acuerdo al diseño curricular nacional para identificar las tareas matemáticas.	Para cumplir con esta primera parte del primer objetivo específico, seleccionamos los libros de texto que utilizan los alumnos del tercero, cuarto y quinto grado de educación secundaria, de las instituciones educativas públicas de nuestro país. Esta decisión, se tomó fundamentados en el diseño curricular nacional de la educación básica regular del Perú (DCN, 2009); documento en el cual divide la educación secundaria en dos ciclos, y que para nuestro estudio, consideramos el VII ciclo (tercero, cuarto y quinto), por el hecho de constituir, lo adquirido en los últimos grados, conocimientos previos para aquellos alumnos que empiezan la educación superior. En consecuencia, los textos seleccionados, corresponden a los tres últimos grados de secundaria, los mismos que son distribuidos a los estudiantes y profesores a nivel nacional, por el MINEDU.

libros de texto distribuidos por el Ministerio de Educación y usados por los estudiantes de educación secundaria de las instituciones educativas públicas del país, con la finalidad de analizar el grado de idoneidad didáctica de las tareas matemáticas.	**1.2.** Describirel tema ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas tratado en cada uno de los libros de texto previamente seleccionados, para analizar las tareas matemáticas.	Para cumplir con esta parte específica, describimos el tema matemático, ecuaciones lineales, de cada uno de los textos seleccionados por grado. En tal descripción, se pretendió mostrar a groso modo, los distintos objetos matemáticos (lenguajes, situaciones-problemas, definiciones, procedimientos, argumentos) que utiliza el autor del texto, para enfocar el tema, en cada grado. Además, el objetivo fue también, describir, el tipo de tareas matemáticas que el autor propone para los alumnos de educación secundaria pública, de cuyas actividades, el alumno adquirirá competencias matemáticas para enfrentarse a la resolución de problemas en la educación superior.
	1.3. Elaborar la configuración epistémica del tema ecuaciones lineales para cada una de las tareas contenidas en los textos seleccionados y descritos, con la finalidad de determinar los objetos matemáticos emergentes e intervinientes.	Elaboramos la configuración epistémica C.E. de las tareasde ecuaciones lineales en cada texto. Cabe señalar que con la configuración epistémica, el propósito fue determinar de manera específica los objetos matemáticos (situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos) presentes en cada subtema y en las tareas matemáticas, con las que vienen aprendiendo nuestros alumnos de secundaria pública. Para lograrlo, recurrimos a la técnica del análisis, teniendo como instrumento una tabla de configuración epistémica ofrecida por el EOS.
O_2 :		
Determinar los objetos matemáticos de las tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres	**2.1.** Analizar los textos de matemáticas de educación superior que contengan el tema ecuaciones lineales, para identificar las tareas matemáticas.	Recurrimos a los documentos oficiales de la carrera de administración bancaria, del Instituto Superior Tecnológico de Formación Bancaria, IFB. En los sílabos de matemática de la carrera, encontramos la bibliografía del curso sugerida a los estudiantes. Es así que, en base a los libros de texto sugeridos por el currículo de la institución, decidimos seleccionar cuatro libros de texto de matemáticas de educación superior. Dicho sea de paso, son textos que más se usa, en diferentes universidades e institutos de educación superior de nuestro país.
		Procedimos a realizar una descripción sintética del tema matemático, ecuaciones lineales en una, dos y tres

incógnitas, propuestas en los libros de texto más usados en la educación superior peruana para estudiantes de administración bancaria, con la finalidad de analizar el grado de idoneidad didáctica de dichas tareas matemáticas.	**2.2.** Describir el tema ecuaciones lineales en una, dos tres variables tratado en cada uno de los libros de texto de superior previamente seleccionados, para analizar las tareas matemáticas.	variables, de cada uno de los textos seleccionados en el apartado anterior. En tal descripción, se pretendió mostrar los distintos objetos matemáticos (lenguajes, situaciones-problemas, definiciones, procedimientos, etc.) que utiliza el autor del texto, para abordar el tema matemático específico, en cada uno de los textos. Además, el propósito fue también, describir, el tipo de tareas matemáticas que los autores proponen para los alumnos de educación superior, tanto tecnológica como universitaria; de cuyas actividades, el futuro egresado adquirirá competencias matemáticas, para enfrentarse con éxito a problemas propios de su campo profesional, como es el campo de la banca y finanzas.
	2.3. Elaborar la configuración epistémica del tema ecuaciones lineales para cada uno de los libros de texto seleccionados y descritos, para determinar los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en las tareas.	Elaboramos la configuración epistémica C.E. del objeto matemático ecuaciones lineales, en cada texto. Debemos mencionar, que con la configuración epistémica, el propósito fue determinar de manera específica los objetos matemáticos (situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos) presentes en cada subtema y en las tareas matemáticas, con las que nuestros estudiantes vienen trabajando en su formación profesional. Para lograrlo, recurrimos a la técnica del análisis, teniendo como instrumento la tabla de configuración epistémica, proporcionada por el EOS.
O_3 :	**IDONEIDAD DIDÁCTICA**	
Determinar el grado de idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, cognitiva (a priori) y ecológica de las tareas de ecuaciones lineales (en una,	**EPISTÉMICA**	Para lograr este objetivo, utilizamos la técnica del análisis didáctico. Es decir, a partir de la descripción de cada uno de los textos, tanto de secundaria como de superior considerados en el presente estudio, y en base a las configuraciones epistémicas C.E. hechas para cada libro de texto, es que se hizo el análisis comparativo de los componentes y objetos matemáticos de las ecuaciones lineales, abordadas en cada texto. Toda la información resultado de tal análisis, fue registrada en el instrumento: tabla de indicadores de idoneidad epistémica, ofrecida por el EOS, la misma que fue adaptada para nuestro caso. (ver anexo). Este instrumento, nos permitió verificar el alto, medio o bajo grado de idoneidad epistémica, de las tareas de

dos y tres incógnitas), propuestas a los alumnos del nivel de educación secundaria de las instituciones educativas públicas del Perú, y a los estudiantes de la carrera administración bancaria, a través de los libros de texto, aplicando los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS.		ecuaciones lineales, con las que vienen trabajando nuestros estudiantes del nivel de educación secundaria pública y de superior tecnológica.
	COGNITIVA	En el caso de esta dimensión, utilizamos también la técnica del análisis comparativo de la información, a partir de la descripción y de la configuración cognitiva hecha para cada libro de texto. El instrumento usado fue la tabla de indicadores de idoneidad didáctica, propuesta por el EOS, tabla que para nuestro estudio, la hemos adaptado de acuerdo a nuestros intereses (ver anexos). El instrumento es una especie de lista de cotejo, en el cual se pudo verificar el alto, medio o bajo grado de idoneidad cognitiva, de las tareas de ecuaciones lineales.
	ECOLÓGICA	Para cumplir con este tercer objetivo específico, y con esta tercera dimensión ecológica, también utilizamos la técnica del análisis didáctico, basado en los documentos oficiales de la carrera de administración bancaria del IFB, como son: perfil profesional, sílabos de matemática y la malla curricular. Además, basados en el diseño curricular nacional (DCN, 2009) y en el diseño curricular de la carrera. El instrumento que usamos para este caso puntual, fue la tabla de indicadores de idoneidad ecológica, propuesta por el EOS, la misma que también fue aplicada y adaptada para nuestro propósito y de acuerdo a los intereses perseguidos en la presente investigación.

Fuente: elaboración propia

ANÁLISIS DE OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

(Resumen)

En elcuarto capítulo presentamos la información organizada, resumida y analizada, resultado de la ejecución de las actividades que nos habíamos propuesto en la metodología. Iniciamos con una breve introducción al capítulo; en seguida, seleccionamos los textos de matemática de la educación secundaria pública, que nos interesan estudiar; luego, en cada uno de los textos seleccionados describimos el tema ecuaciones lineales, para el tercer, cuarto y quinto grado de educación secundaria pública, para luego, analizar los objetos matemáticos, a través de la configuración epistémica de las tareas de la secundaria pública.

A continuación, seleccionamos los textos de matemáticas más representativos de educación superior, que contengan el tema ecuaciones lineales para su respectivo análisis. En seguida, describimos el tema ecuaciones lineales en cada uno de los textos seleccionados, para luego, elaborar la configuración epistémica de las tareas matemáticas presentadas en cada texto del nivel superior.

4.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo desarrollamos el análisis de la información estipulada en cada una de las fases de investigación. Empezamos esta discusión describiendo la forma en que los textos de nuestro medio presentan el tema ecuaciones lineales, tomando como base para su descripción y análisis, las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) que hemos planteado en el capítulo del marco teórico.

Seguidamente elaboramos la configuración epistémica de los objetos matemáticos primarios para las ecuaciones lineales a partir de la propuesta de los libros de texto, de los significados institucionales pretendidos, estipulados en el sílabo del curso, y del grado de idoneidad de las tareas en las facetas epistémica, cognitiva a priori y ecológica; así como también, realizamos el análisis de la idoneidad didáctica de las tareas y su interrelación y dependencia (como conocimientos previos) en ambos niveles de educación.

Tal como señala Godino (2011), la noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o “incidentes didácticos” puntuales.

4.2. SELECCIÓN DE LOS TEXTOS DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PÚBLICA DEL PERÚ

Puesto que, los alumnos ingresantes en el Instituto de Formación Bancaria, a la carrera de Administración Bancaria, en su mayoría son estudiantes que acaban de terminar sus estudios de educación secundaria y que proceden de las instituciones educativas públicas del país, entonces, nos propusimos analizar los objetos matemáticos presentes en los libros de texto de matemática del tercero, cuarto y quinto grado de secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación a las escuelas públicas, para ser trabajados en aula por los docentes y alumnos.

Para lograr esta fase, hemos recurrido al diseño curricular nacional de la educación básica regular (DCN, 2009), el mismo que se viene aplicando y rigiendo nuestra educación media pública peruana, desde hace una década aproximadamente, es decir, durante los tres últimos gobiernos, con algunos pequeños cambios y ajustes en el año 2008.

En el DCN(2009), de la educación básica regular peruana, el mismo que está vigente en la actualidad, se observa que, en el caso del área de matemática, las capacidades que persigue la educación secundaria en los estudiantes de las escuelas públicas, en todos los grados, involucran los siguientes procesos transversales:

- ❖ Razonamiento y demostración
- ❖ Comunicación matemática, y
- ❖ Resolución de problemas

Es a partir del proceso transversal resolución de problemas, del cual se formulan las competencias del área de matemáticas para cada ciclo y para cada nivel de organización de los contenidos matemáticos. Para fines curriculares, los contenidos del área de matemática según el DCN (2009), han sido organizados en tres niveles, a saber:

- Números, relaciones y funciones
- Geometría y medición
- Estadística y probabilidad

Competencias por Ciclo en Secundaria

Según el DCN (2009), las Competencias por Ciclo y nivel de contenidos en la Educación Secundaria del Perú, son:

Cuadro N° 02. Competencias por Ciclo en Educación Secundaria.

	CICLO VI	CICLO VII
NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES	Resuelve problemas con números reales y polinomios; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático	Resuelve problemas de programación lineal y funciones; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático
GEOMETRÍA Y MEDICIÓN	Resuelve problemas que relacionan figuras planas y sólidos geométricos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático	Resuelve problemas que requieren de razones trigonométricas, superficies de revolución y elementos de geometría analítica; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	Resuelve problemas que requieren de las conexiones de datos estadísticos y probabilísticos; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático	Resuelve problemas de traducción simple y compleja que requieren el cálculo de probabilidad condicional y recursividad; argumenta y comunica los procesos de solución y resultados utilizando lenguaje matemático

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (DCN, 2009, p. 318)

De acuerdo con el DCN (2009), los contenidos considerados por el Ministerio de Educación para desarrollar las competencias y capacidades establecidas en el cuadro anterior, para el VII Ciclo, es decir, tercero, cuarto y quinto grado de educación secundaria, correspondiente al nivel: número relaciones y funciones, son los siguientes:

Cuadro N° 03. Contenidos del tercer, cuarto y quinto grado de secundaria

	VII CICLO - SECUNDARIA: CONTENIDOS POR GRADO		
Nivel	TERCERO	CUARTO	QUINTO
Número, Relaciones y Funciones	• Sistemas numéricos Representación, orden, operaciones con números reales Radicación con números reales.Intervalos: representación y operaciones Valor absoluto. • Álgebra Grado expresiones algebraicas División de polinomios, teorema del residuo, método de Ruffini Productos y cocientes notables Ecuaciones cuadráticas Modelos cuadráticos Factorización por aspa simple • Funciones: Dominio, rango de funciones cuadráticas. Gráfica de funciones cuadráticas Modelación de fenómenos del mundo real con funciones cuadráticas Análisis de funciones cuadráticas completando cuadrados Dominio y rango de funciones, valor absoluto y raíz cuadrada Gráfica de las funciones, valor absoluto, cuadrática y raíz cuadrada • Relaciones lógicas y conjuntos Proposiciones, conectivos lógicos, tablas de verdad Relaciones lógicas	• Sistemas numéricos Números reales. Operaciones, densidad y completitud Progresiones aritméticas y geométricas Interés simple y compuesto Modelos financieros • Álgebra Fracciones algebraicas inecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita teoría de exponentes Sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas • Funciones: Funciones trigonométricas Funciones sinusoidales y cosenoidales Modelos con funciones trigonométricas • Relaciones lógicas Operaciones básicas Proposiciones lógicas compuestas. Tablas de verdad cuantificadores	• Sistemas numéricos Relaciones entre los sistemas numéricos: N, Z, Q y R. • Álgebra Método gráfico y método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones. Inecuaciones lineales de dos incógnitas Introducción a la programación lineal Ecuaciones trigonométricas • Funciones: Funciones inyectiva, suryectiva y biyectiva. Función inversa Función logarítmica Función exponencial Modelos exponenciales Modelos logarítmicos • Relaciones lógicas y conjuntos Tablas de verdad de proposiciones compuestas Cuadros y esquemas de organización de relaciones lógicas Los argumentos y su estructura Argumentos deductivos e inductivos

Geometría y Medición	• Geometría plana • Medida de ángulos • Geometría del espacio • Trigonometría	• Geometría plana • Geometría del espacio • Trigonometría • Geometría analítica Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Ecuaciones de la recta: punto – pendiente, ordenada en el origen y ecuación general Posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y rectas perpendiculares Ángulo entre dos rectas	• Geometría plana • Geometría del espacio • Geometría analítica Ecuación de la circunferencia Recta tangente a una circunferencia Posiciones relativas de dos circunferencias no concéntricas Ecuación de la parábola. Deducción Ecuación de la elipse. Deducción. • Trigonometría

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (DCN, 2009, pp. 329 - 340)

Según lo que podemos observar en el cartel de contenidos del actual DCN (2009) de los grados tercero, cuarto y quinto de Educación Secundaria Pública, el tema ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones con una dos y tres variables, se aborda en cuarto grado y en quinto grado, pero no en el tercer grado (en el DCN, anterior al actual, sí contemplaba ecuaciones en tercer grado).

Además, en general los autores de los libros de texto señalan que el propósito fundamental de escribir y publicar textos, es ayudar a los profesores y a los estudiantes a hacer accesibles la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.Sin embargo, desde nuestra posición consideramos que los libros de texto de matemáticas son una proyección de las prácticas y actividades matemáticas del aula, nos brindan un panorama de lo que se viene enseñando y cómo se está enseñando, además de ser la concreción de lo que los autores creen que significa aprender y enseñar temas específicos de álgebra lineal, de geometría analítica, de las matemáticas para los alumnos de la educación secundaria.

Por tal motivo, en el presente estudio creemos conveniente centrar nuestro análisis en los textos de matemáticas del Ministerio de Educación, correspondientes a los gradostercero, cuarto y quinto de secundaria; por ser además los grados últimos de la educación básica y los que servirían de base, respecto de los conocimientos matemáticos previos que lleven consigo los alumnos hacia la educación superior.

En el cuadro que presentamos a continuación, hacemos una lista de los libros de texto de matemática de educación secundaria pública, correspondiente a los tres últimos grados de dicho nivel, de los cuales haremos una descripción en el acápite siguiente.

Cuadro N° 04. Textos de matemática de educación secundaria según grado.

GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA	NOMBRE DEL TEXTO
TERCERO	Matemática 3° Secundaria (2012)
	Matemática 3ro. de Secundaria (2008)
	Matemática Tercero de Secundaria (2005)
CUARTO	Matemática 4° Secundaria (2012)
	Matemática, Cuarto grado de Educación Secundaria (2008)
	Matemática 4° Secundaria (2005)
QUINTO	Matemática 5° Secundaria (2012)
	Matemática 5to de Secundaria (2008)
	Matemática Quinto Secundaria (2005)

Fuente: elaboración propia

Finalmente, debemos señalar también que, tal como se aprecia en el cuadro anterior, hemos considerado los textos de matemática distribuidos por el Ministerio de Educación, de las tres últimas ediciones, con los cuales nuestros estudiantes de las instituciones educativas secundarias públicas vienen estudiando y utilizándolos, por mandato del ministerio, para desarrollar las tareas y actividades matemáticas. A continuación, describimos el tema ecuaciones lineales en cada texto seleccionado.

4.3. DESCRIPCIÓN DEL TEMA ECUACIONES LINEALES EN LIBROS DE TEXTO EMPLEADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA PÚBLICA PERUANA

✪ Tercer grado de secundaria

De acuerdo a los contenidos contemplados en el DCN (2009), describiremos los tres libros de texto del tercer grado de Educación Secundaria correspondientes a los tres últimos gobiernos del Perú, y que vienen siendo distribuidos a los alumnos de las instituciones educativas públicas de nuestro país, por el Ministerio de Educación, para que se utilicen de manera obligatoria en las tareas y actividades matemáticas. Tales descripciones nos servirán de base para el análisis de las tareas matemáticas realizadas por los alumnos de secundaria, en el tema específico de ecuaciones lineales, con la finalidad de identificar los objetos matemáticos que intervienen en dichas tareas y los procesos matemáticos (significación, representación, etc.) que se utilizan para la enseñanza de la matemática en este grado.

En Matemática 3° Secundaria (2012), luego de revisar el texto, debemos señalar que éste se está utilizando actualmente como libro de consulta y tareas por los alumnos de las instituciones educativas públicas, en el nivel secundario. En este texto, no se considera al tema matemático específico ecuaciones lineales en su contenido, pese a ser estipulado en el DCN (2009). En consecuencia, podemos señalar que, actualmente en el tercer grado de educación secundaria pública, no se está desarrollando el tema ecuaciones lineales, por el hecho que los textos del ministerio son los que guían la enseñanza. Además, en cada texto, viene estipulada la programación anual de contenidos y actividades de aprendizaje.

En Gálvez (2008). Matemática 3ro.de Secundaria, fue el texto con el que estudiaron nuestros alumnos desde el 2009 hasta el 2012, y el cual fue distribuido por el Ministerio de Educación. En la primera unidad, se inicia con ecuaciones e inecuaciones, pero en realidad lo que se desarrolla es la recta real, representando en dicha recta los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$. En seguida lo que se aborda son las ecuaciones con valor absoluto, resolución de ecuaciones lineales con valor absoluto de la forma $|x-3|=6$, su conjunto solución y su representación en la recta real. Luego se desarrolla ecuaciones cuadráticas racionales y ecuaciones racionales. Para finalizar la unidad se abordan las inecuaciones cuadráticas e inecuaciones racionales.

En la segunda unidad denominada “sistema de ecuaciones lineales”, se empieza con notas históricas de los sistemas de ecuaciones lineales, desde cómo éstas se utilizaron en la cultura babilónica, los egipcios, los griegos y la antigua civilización china. Luego se desarrolla el subtema ecuaciones lineales con dos variables, a partir de un ejemplo: analicemos la ecuación $x + y = 4$, en el conjunto de los números reales; se analiza el número de variables, se asigna valores a la variable x y se encuentran distintos pares ordenados de la forma $(x,\ y)$, los mismos que se ubican en el plano cartesiano y se traza la recta. Luego, Gálvez (2008) se define las ecuaciones lineales con dos variables, de la siguiente manera:

Una ecuación de la forma $ax + by = c$, donde $a,\ b,\ c$, son números reales tal que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, se llama **ecuación lineal con dos variables**.
El conjunto solución de dicha ecuación se denota como:
$$C.S. = \{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ ax + by = c\}$$
La representación del conjunto - solución en el plano es una recta. (p. 49)

En seguida, se asigna una actividad para el alumno, en la cual se pide representar gráficamente distintas ecuaciones lineales con dos variables, hallar su conjunto solución a partir de la intersección de las restas y resolver un par de problemas sencillos.

El siguiente subtema, introduce con un ejemplo el sistema de ecuaciones lineales, presenta dos ecuaciones lineales y construye una tabla de tabulación para cada ecuación, encuentra varios pares ordenados y los representa en el plano cartesiano, trazando la respectiva recta que une tales puntos; concluye haciendo ver que en ambas rectas hay un punto de paso común, que sería el conjunto solución a ambas. Es así como, Gálvez (2008) presenta la siguiente definición:

Al conjunto de dos o más ecuaciones lineales con dos o más variables se le llama **sistema de ecuaciones lineales**.
La solución de un sistema consiste en hallar el conjunto de soluciones comunes a todas las ecuaciones del sistema; es decir, la intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones que conforman el sistema. (p. 50)

A través de un ejemplo, determina por tabulación que, cuando ambas rectas tienen un punto de intersección, entonces al sistema se denomina ***SISTEMA***

COMPATIBLE DETERMINADO; en un segundo ejemplo, en el cual presenta un sistema con dos ecuaciones equivalentes, por tabulación, se determina que hay infinitos puntos de coincidencia. En consecuencia, concluye que se trata de dos rectas que son coincidentes, y apoyados en una gráfica en el plano cartesiano, se trata de un sistema denominado ***SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.***

Mediante un tercer ejemplo, se presenta otro sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y haciendo un análisis de tabulación y gráfico, se encuentra que ambas ecuaciones están representadas por rectas paralelas y cuyo conjunto solución es vacío; concluyendo que se trata de un ***SISTEMA INCOMPATIBLE.***

Luego, a manera de subtítulo, se presenta un par de formas de sistemas de ecuaciones lineales. A saber:

- Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Finalmente, se presenta una actividad a los estudiantes con cinco ejercicios, en cada uno de ellos se solicita se interprete gráficamente si el sistema es compatible o incompatible, dados los sistemas lineales.Para luego hablar del otrocaso, en el que se presentan las gráficas de rectas paralelas y secantes y a partir del análisis gráfico, se solicita obtener el conjunto solución.

En el subtema siguiente, a través de ejemplos, se presentan métodos algebraicos por eliminación para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; explicándose el método de eliminación por igualación. A través de un ejemplo, se detallan los pasos a seguir en el método de eliminación por sustitución; y también con un ejemplo, se presentan los pasos a seguir, cuando se quiere resolver un sistema por el método de eliminación por reducción.

Seguidamente, a manera de ejemplo se resuelven dos problemas de volúmenes y mezclas, para terminar asignando a los alumnos, que resuelvan otra actividad sobre ejercicios de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, para encontrar su conjunto solución; proponiendo además algunos problemas sobre edades, volúmenes y mezclas que se resuelven con ecuaciones lineales.

En otro apartado, Gálvez (2008) aborda la resolución de un sistema de ecuaciones con tres variables, a través de la siguiente definición:

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con tres variables, se expresa el sistema en la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z = d_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z = d_2} \\ \boldsymbol{a_3x + b_3y + c_3z = d_3} \end{cases}$$

Y luego se procede a obtener su conjunto – solución aplicando cualquiera de los métodos de eliminación. (p. 67)

Mediante un ejemplo, en el que se presenta un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, se explica paso a paso el proceso de resolución de dicho sistema aplicando el método de eliminación por reducción hasta llegar a obtener el conjunto solución. Además, se hace notar que el conjunto solución será una terna ordenada de la forma (x, y, z), siempre y cuando el sistema sea compatible determinado, apoyando la explicación con la ubicación de la terna como un punto cualquiera del espacio.

Finaliza este subtema con la asignación a los alumnos de una actividad, en la que se presentan varios ejercicios de sistemas lineales con tres incógnitas para que, aplicando el método de eliminación, los estudiantes encuentren el conjunto solución. Se proponen además, algunos problemas diversos. Cabe mencionar que en este punto específico, se trabaja solamente en lenguaje algebraico, simbólico, para nada se utiliza el lenguaje gráfico.

En el siguiente apartado, se aborda los temas dematrices y determinantes, se define una matriz, luego se plantean las operaciones con matrices: adición de matrices, producto de un número real por una matriz, propiedades de las operaciones con matrices. A continuación, se definen los determinantes, se ejemplifica con el determinante de una matriz de segundo orden, con el determinante de una matriz de tercer orden, aplicando la **regla de Sarrus**. Finaliza este tema asignando a los alumnos, nueve ejercicios de matrices y determinantes para que los resuelvan.

Para finalizar la segunda unidad, se estudia la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de determinantes. A través de un ejemplo, se explica el procedimiento de aplicación de la **regla de Cramer** para resolver un sistema de ecuaciones con dos variables y un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Para ello, se designa por Δ_s al determinante del sistema; Δ_x es el determinante con respecto a "x" ; Δ_y es el determinante con respecto a "y"; y, Δ_z es el determinante con respecto a la variable "z". Además, si $\Delta_s \neq 0$, la regla señala que se cumple lo siguiente:

$$\boldsymbol{x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \quad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} \quad ; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s}}$$

Fuente: Gálvez (2008, p. 68)

La unidad termina asignando otra actividad a los estudiantes, en la que se les solicita aplicar la regla de Cramer para encontrar el conjunto solución de una serie de ejercicios de sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas; además de resolver un problema. En seguida, el autor a manera de ejemplos, presenta siete ejercicios y problemas resueltos de matrices y sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas, en los cuales aplica los distintos métodos de eliminación y determinantes.

Finaliza la sección, con un acápite de ejercicios y problemas propuestos, donde se pretende reforzar todo lo tratado y estudiado en la unidad, en lo referente a sistemas de ecuaciones lineales y sus distintos métodos de resolución, ya sea mediante lenguaje gráfico, verbal o algebraico. Podemos apreciar que no se les proporciona a los alumnos, repuestas ni alternativas de respuesta en las tareas asignadas.

Es preciso señalar que para la descripción de textos de secundaria, como la que acabamos de hacer, nos hemos basado en el método de análisis de las configuraciones epistémicas empíricas (realistas, inductivas y descriptivas), proporcionado por el EOS en (Font & Godino, 2006). Consideramos además, que el EOS nos ha proporcionado la herramienta para la descripción de los textos, así como la metodología para las configuraciones epistémicas de las tareas, que presentamos más adelante en el acápite:

configuración epistémica. Los aspectos que consideramos relevantes en la descripción, fueron aquellos que señala el EOS, tales como, las situaciones problema, los lenguajes, las definiciones, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos, considerados por el autor del texto.

En Doroteo, F. & Gálvez, R. (2005). Matemática Tercero de Secundaria, que fue el texto elaborado y distribuido por el Ministerio de Educación a los estudiantes de educación secundaria de las escuelas públicas durante los años 2004 al 2008, los contenidos son exactamente iguales a los desarrollados en el texto de tercero de secundaria del 2008. Además, uno de los autores es el mismo.

Finalmente y para cerrar este apartado, debemos mencionar que de las tres ediciones de texto consideradas para la descripción y análisis, en el tercer grado de educación secundaria, en la que hemos puesto énfasis, es en la edición del año 2008, puesto que es la única que ahonda en el tema ecuaciones lineales. La edición actual, tal como ya lo señalamos, simplemente no considera el tema ecuaciones lineales dentro de la programación anual para este grado de estudios.

✪ Cuarto grado de secundaria

De acuerdo a los contenidos contemplados en el DCN (2009), describiremos los tres libros de texto del cuarto grado de educación secundaria correspondientes a los tres últimos gobiernos de nuestro país. Tales descripciones nos servirán de base para el análisis de las tareas matemáticas realizadas por los alumnos de secundaria en el tema específico de ecuaciones lineales; también, para identificar los objetos matemáticos que intervienen en dichas tareas y los procesos matemáticos (significación, representación, etc.) que se utilizan para la enseñanza de la matemática en este grado.

En Matemática 4° Secundaria (2012), que es el libro de texto distribuido por el Ministerio de Educación del actual gobierno, y es el texto que los estudiantes de la secundaria pública vienen utilizando actualmente para desarrollar sus tareas de matemática; se abordan las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales de la siguiente manera:

En el tercer capítulo, denominado "Álgebra", antes del estudio de los sistemas de ecuaciones, se comienza revisando las expresiones algebraicas tanto en su lenguaje usual (verbal), como en su lenguaje algebraico. Se estudia las operaciones de suma y resta con monomios, mediante ejemplos de perímetro de un cuadrado, triángulo y rectángulo. Se revisa la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita a través de un ejemplo, y se asignan algunos ejercicios a los alumnos.

Se hace hincapié también, en algunos productos notables, ejemplificando y asignando ejercicios para ser resueltos por los alumnos; asimismo, se estudian las fracciones algebraicas, transformación de fracciones por simplificación en fracciones irreductibles, operaciones con fracciones algebraicas y algunos ejercicios con fracciones algebraicas.

Luego, se estudia los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, introduciendo el tema con un ejemplo que se resuelve con tablas de tabulación. En seguida se define: un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y = c_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y = c_2} \end{cases}$$

Donde $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$son números reales llamados coeficientes; x e y son las incógnitas, y c_1 y c_2 son los términos independientes y cuyo conjunto solución (**C.S.**) es el conjunto formado por el par ordenado(x, y) que satisface simultáneamente las dos ecuaciones; creemos que esta definición es para el caso que el sistema sea compatible determinado.

En seguida, a manera de ejemplo, se presenta la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, por el método de reducción, acompañado del método gráfico, en el cual se representan cada una de las ecuaciones en el plano cartesiano, enfatizando que el conjunto solución hallado es el punto de intersección de las rectas en el plano. Luego, se resuelve un sistema por el método de sustitución, y a través de un ejemplo se explican los pasos a seguir para obtener el conjunto solución del sistema, y también se apoya la explicación del método algebraico con una representación gráfica de las ecuaciones en el plano cartesiano; además, se ejemplifica la aplicación del método con un par de problemas.

A continuación, se estudia la resolución de un sistema de ecuaciones por el método de igualación, y mediante un ejercicio y un problema se explican los pasos a seguir para arribar al conjunto solución de un sistema de ecuaciones por igualación. Esta explicación se complementa también con un lenguaje gráfico, representando cada una de las dos ecuaciones del sistema en el plano cartesiano y recalcando que el conjunto solución es el punto de intersección de las rectas del sistema. Se asigna una actividad, que contiene varios ejercicios y problemas para que el alumno resuelva utilizando los distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones estudiados.

Esta unidad termina con el estudio de los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, donde se introduce el tema con un problema que tiene que ver con precios y usando una tabla de doble entrada, se forma el sistema. Se plantea la siguiente definición: "resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es determinar la terna ordenada (x, y, z) de números reales que satisface a la vez a las tres ecuaciones. Esta terna se denomina solución única del sistema" (Perú, Ministerio de Educación, 2012. Matemática 4° Secundaria, p. 90).

Luego se desarrollan los métodos para encontrar la terna. Esto es, resolución por el método de reducción, resolución por el método de sustitución, y resolución por el método de igualación. En cada uno de los métodos, se explica detalladamente los pasos que se debe seguir para obtener el conjunto solución; se complementa el conjunto solución hallado con una representación gráfica, un punto en el espacio tridimensional. Finalmente, se plantea una actividad de ejercicios y problemas de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas para que el alumno resuelva, aplicando los métodos algebraicos estudiados.

De este texto, vemos que podría crearse conflicto a los alumnos, respecto de la concepción del conjunto solución de un sistema lineal, por el hecho de que el autor no ofrece el caso de los sistemas incompatibles, tampoco presenta el caso de los sistemas lineales compatibles indeterminados.

Posteriormente en el capítulo 7, denominada "Geometría Analítica" se empieza revisando los sistemas de coordenadas cartesianas y su división en cuatro cuadrantes, la construcción de un sistema de coordenadas con regla y escuadra y la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. En el texto: Perú, Ministerio de Educación (2012). Matemática 4° Secundaria, se presenta la siguiente definición:

Se denomina distancia entre dos puntos, $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$, de un mismo plano, y se representa $d_{(A,B)}$, a la longitud del segmento de recta que tiene por extremos a A y B. Para calcularla se aplica el teorema de Pitágoras: (p. 210)

$$\mathbf{d}_{(\mathbf{A},\mathbf{B})} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para determinar las coordenadas del punto medio "M" de un segmento AB, debemos aplicar la siguiente relación:

$$\mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}}{\mathbf{2}} ; \frac{\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}}{\mathbf{2}}\right)$$

En seguida se plantea una actividad con diferentes ejercicios, para que el alumno resuelva usando lo estudiado hasta el momento de geometría analítica.

A continuación se estudia el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta, presentando la siguiente definición: la pendiente (m) de una recta no vertical es la tangente del ángulo de inclinación de dicha recta y está dada por la expresión:

$$\boxed{m_{\overleftrightarrow{AB}} = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; \; x_1 \neq x_2}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 214). Matemática 4° secundaria

Dependiendo del ángulo de inclinación (α), la pendiente puede ser: positiva, si el ángulo α es agudo; no definida, si el ángulo α es recto; negativa, si el ángulo α es obtuso, a esto el autor le acompaña con una representación de la recta en lenguaje gráfico, en cada uno de los casos. (ver figura N° 06).

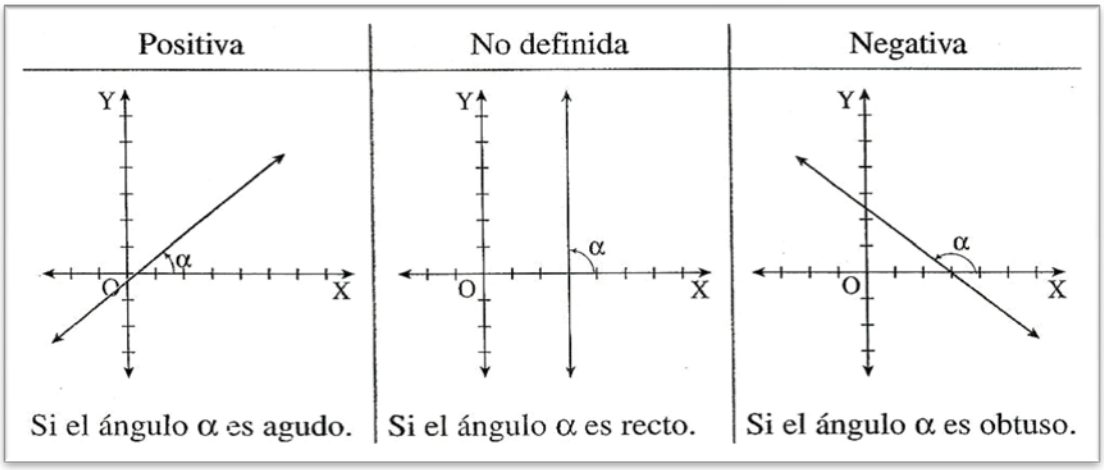


Figura N° 06.Pendiente de una recta, según la posición en el plano cartesiano
Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 214). Matemática 4° secundaria

En seguida, ejemplifica con pares ordenados dados y a partir de ello los ubica en el plano cartesiano y calcula la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos. Luego, asigna una actividad con cinco ejercicios del mismo tipo, para que el alumno ubique pares ordenados en el plano y calcule la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por dichos puntos.

En otro subtema del capítulo, el autor presenta las ecuaciones de la recta de la siguiente manera:

Ecuación punto-pendiente, como la ecuación de la recta que se determina conociendo su pendiente $\boldsymbol{m}$y un punto $\boldsymbol{P(x_1\ ;\ y_1)}$ perteneciente a ella, tiene la forma:

$$\boxed{\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 216). Matemática 4° secundaria

Ecuación cartesiana de la recta, como aquella que se determina conociendo dos puntos cualesquiera de la recta: $(x_1;\ y_1)$ y $(x_2;\ y_2)$, además debería señalar que $x_1 \neq x_2$, pero no se observa, ni en la ecuación. La ecuación es de la forma:

$$\boxed{\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad ; \quad x_1 \neq x_2}}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 216). Matemática 4° secundaria

Ecuación principal de la recta (ordenada en el origen), es la ecuación de la recta que se determina conociendo su pendiente $\boldsymbol{m}$y el punto de corte con el eje Y, cuyas coordenadas son (0, b). Esta ecuación es de la forma:

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 217). Matemática 4° secundaria

Ecuación general de la recta, se denomina ecuación general de la recta a la expresión de la forma:

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 217). Matemática 4° secundaria

Donde: A, B y C representan números reales, y A y B no pueden ser a la vez nulos; además, la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$ y su ordenada en el origen es $b = -\frac{C}{B}$).

Para las diversas formasde ecuación de una recta, el autor resuelve entre dos y tres ejercicios no contextualizados, a manera de ejemplo,trata de mostrar al alumno los pasos como aplicar las ecuaciones de recta y además del lenguaje algebraico utiliza el lenguaje gráfico, donde representa las rectas en el plano cartesiano. Finaliza esta parte del capítulo con una actividad para el estudiante, en la cual se asigna una serie de ejercicios para usar las distintas formas de ecuación de recta, usando lenguaje algebraico y lenguaje gráfico, es decir, la representación de las rectas en el plano.

A continuación, el autor presenta el tema posiciones relativas de dos rectas en el plano, de la siguiente manera: sean dos rectas $l_1: y = m_1x + b_1$ y $l_2: y = m_2x + b_2$; para establecer si son paralelas o perpendiculares entre sí, solo es necesario evaluar sus pendientes.

Dos rectas l_1 y l_2 son paralelas si y solo si tienen igual pendiente $m_1 = m_2$; en tanto que dos rectas l_1 y l_2 son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es $m_1.m_2 = -1$. (ver figura N° 07)

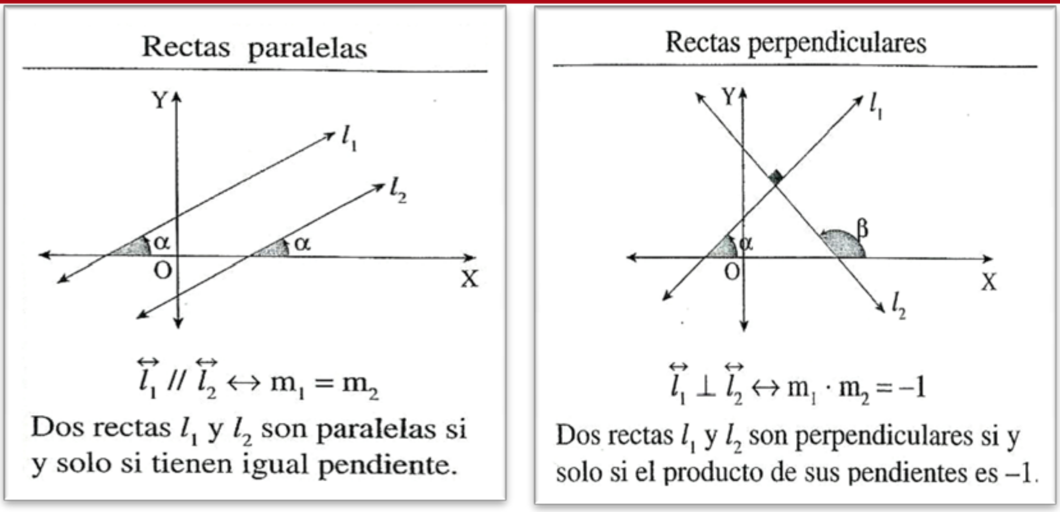


Figura N° 07.Rectas paralelas y Rectas perpendiculares

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 220). Matemática 4° secundaria

Debemos señalar que, el autor no advierte a los alumnos que esta definición es válida en el caso de que las rectas paralelas sean no verticales, lo cual creemos constituye un nuevo conflicto para los estudiantes, que van a generalizar para cualquier ubicación de las rectas, para rectas verticales no hace ninguna precisión.

Para hacer la descripción de este texto, nos hemos basado en el método de análisis de las configuraciones epistémicas empíricas (realistas, inductivas y descriptivas), proporcionado por el EOS en (Font & Godino, 2006). Los aspectos que consideramos relevantes en la descripción, fueron aquellos que señala el EOS, tales como, las situaciones problemas descontextualizados, los lenguajes con énfasis en el lenguaje algebraico, las definiciones, las proposiciones, los procedimientos algorítmicos básicamente y la carencia de argumentos, considerados por el autor del texto.

En Coveñas, M. (2008). **Matemática, cuarto grado de educación secundaria. Lima. Bruño**, que fue el libro de texto distribuido por el Ministerio de Educacióna los alumnos de las instituciones educativas públicas del país,durante los años 2009 al 2012, el mismo que fuera utilizado por los docentes y por los mismos alumnos para desarrollar sus tareas matemáticas durante el periodo señalado. Podemos apreciar, luego de hacer una revisión de sus contenidos matemáticos, que no se aborda o no se incluye el tema ecuaciones lineales. Debemos señalar también, que este texto es una copia exactamente igual del texto Matemática 4° Secundaria de la edición 2005, que describimos a continuación.

En Matemática 4° Secundaria. (2005). **Lima. Primera edición. Santillana**, que fuera el texto distribuido por el Ministerio de Educación y utilizado por los docentes y alumnos para desarrollar sus tareas matemáticas desde el año 2005 hasta el año 2008. Podemos apreciar, luego de revisar sus contenidos matemáticos, que tampoco se incluye el tema ecuaciones lineales. En lugar de ello, de lo que trata en todo su estudio es:

Primer capítulo, Funciones y Progresiones: función, dominio y rango, composición de funciones; función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente, decreciente; función inversa; funciones reales de variable real; funciones algebraicas: lineal, afín, cuadrática, raíz cuadrada, valor absoluto y máximo entero.

Segundo capítulo, Progresiones

Tercer capítulo, Geometría plana y

Cuarto capítulo, Estadística y Probabilidad.

Para terminar con la descripción de los textos de matemática considerados en el cuarto grado de educación secundaria, mencionaremos que nos hemos centrado en la edición actual (2012), puesto que es la única edición que incluye el tema ecuaciones lineales. Las otras ediciones, luego de hacer la revisión respectiva, hemos encontrado que en su programación de contenidos, no incluyen el tema de estudioecuación lineal

✪ Quinto grado de secundaria

Según los contenidos contemplados en el DCN (2009), describiremos los tres libros de texto de matemática del quinto grado de educación secundaria, distribuidos por el Ministerio de Educación,en los tres últimos diez años. Tales descripciones nos servirán de base para el análisis de las tareas matemáticas realizadas por los alumnos de secundaria en el tema específico de ecuaciones lineales; también, para identificar los objetos matemáticos que intervienen en dichas tareas y la configuración epistémica e idoneidad didáctica de las tareas que se trabajan enla enseñanza de la matemática de este grado.

En Matemática 5° Secundaria (2012), que es el libro de texto distribuido por el Ministerio de Educación del actual gobierno, y aquel que los estudiantes de educación secundaria pública vienen utilizando actualmente para desarrollar sus tareas de matemática; se aborda en la segunda unidad denominada “Álgebra” el tema ecuaciones lineales. Se empieza ejemplificando con un par de ecuaciones de primer grado con una incógnita, y representando la solución en la recta numérica. Además, se asigna a los alumnos resuelvan cuatro ejercicios de este tipo de ecuaciones.

En seguida, se define una ecuación de primer grado con dos incógnitas como una relación lineal entre dos variables "diagonales" x e y; se ejemplifica, y por tabulación se encuentran varios puntos (pares ordenados) mediante la asignación de valores en una ecuación específica y se grafica en el plano cartesiano, trazándose la recta de dicha ecuación. Se asigna algunos ejercicios de este tema específico, para que los alumnos representen gráficamente las soluciones.

Luego se representan regiones del plano cartesiano determinadas por rectas, expresando la ecuación lineal de la forma $y = ax + b$ como una inecuación, ya sea en sentido estricto $(<, >)$ o en sentido amplio $(\leq, \geq)$; se asignan también algunos ejercicios tanto en lenguaje algebraico, como en lenguaje gráfico.

En el subtema siguiente, se estudianlos sistemas de ecuaciones lineales, en el cual el texto: Perú, Ministerio de Educación (2012). Matemática 5° Secundaria, propone la definición siguiente:

Un sistema de dos ecuaciones lineales, x e y, tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

a_1, a_2, b_1, b_2 son los coeficientes; c_1, c_2 son los términos independientes

El conjunto solución es aquel conjunto formado por los pares ordenados (x, y) que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones. (p. 45)

Seguidamente, el autor presenta métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales, en la que a través de ejemplos explica paso a paso el procedimiento y las estrategias para resolver una situación por el método gráfico, un sistema por el método de reducción, método de sustitución y método de igualación.

Finalmente, se estudia el método de eliminación de Gauss - Jordan para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas solamente. En base a la definición de sistema lineal, presenta la matriz aumentada del sistema y la matriz identidad; a través de un par de ejemplos de sistema de dos ecuaciones lineales, explica paso a paso las operaciones elementales de filas para transformar la matriz aumentada en una matriz identidad, para luego obtener el conjunto solución. Para terminar esta sección, se asigna doce ejercicios y problemas, en los cuales se solicita al alumno, resolver los sistemas de ecuaciones, represente gráficamente y justifique sus respuestas.

El capítulo continúa presentando las inecuaciones lineales con dos incógnitas, los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, desarrollando paso a paso ejemplos, en los que se utiliza el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. Para en seguida hacer una introducción a la programación lineal, revisar los métodos de optimización lineal tales como, el método algebraico o de los vértices y el método gráfico o de las rectas de nivel, y terminar el capítulo con el estudio de los tipos de soluciones de los problemas de programación lineal, tales como, la solución única, la solución múltiple, la solución no acotada y la solución no factible, y la respectiva asignación de tarea (una diversidad de ejercicios y problemas) del tema para ser resuelta por los alumnos.

Posteriormente, en el capítulo 7 del texto, denominado “Geometría Analítica”, el autor pretende que los estudiantes relacionen el álgebra con la geometría plana, de manera que puedan resolver problemas geométricos de manera algebraica. Para ello, se comienza revisando algunos conocimientos previos en lo referente a sistemas de coordenadas cartesianas, como: la partición del plano cartesiano en cuatro cuadrantes y la ubicación de pares ordenados en dicho plano y ejercicios; la determinación de las coordenadas del punto medio de un segmento y sus respectivos ejercicios; la revisión de la distancia entre dos puntos, ejemplos y ejercicios; y, la definición y cálculo de la pendiente de recta a partir de la representación de una recta en el plano cartesiano. También, se revisan las posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y rectas perpendiculares, a partir de la relación de sus pendientes, así como en lenguaje gráfico en el plano.

En seguida, se define las ecuaciones de la recta, de la siguiente manera:

Ecuación principal de la recta,

$$\boxed{\boldsymbol{y = mx + b \;;\;\; m = {}^{b}/_{a}}}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 206). Matemática 5° secundaria

Ecuación punto-pendiente,

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 206). Matemática 5° secundaria

Ecuación simétrica de la recta,

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 206). Matemática 5° secundaria

Ecuación cartesiana de la recta,

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 206). Matemática 5° secundaria

Ecuación general de la recta,

$$\boxed{Ax + By + C = 0 \;; \quad m = -\frac{A}{B} \;; \quad b = -\frac{C}{B}}$$

Fuente: Perú, Ministerio de Educación (2012, p. 207). Matemática 5° secundaria

Precisamos que, en el caso de la ecuación cartesiana de la recta, el autor no restringe el hecho que $x_1 \neq x_2$, pues en este caso la ecuación no existe.

Se resuelven algunos ejercicios en los que se muestra la utilidad de cada una de las formas de ecuaciones de recta mostradas, apoyados además, de sus respectivas representaciones en el plano cartesiano (lenguaje gráfico). Se asigna una tarea para que resuelvan los alumnos, la cual consta de nueve ejercicios en lenguaje gráfico, algebraico y verbal y se plantea una evaluación con cinco ejercicios propuestos.

Nuestra crítica con respecto a la presentación de las ecuaciones de recta, es que el autor no propone a los estudiantes casos de rectas paralelas o coincidentes, de manera que el alumno no tiene la oportunidad de discriminar entre sistemas lineales compatibles (determinados o indeterminados) e incompatibles.

En Gálvez, R. (2008). Matemática 5to de Secundaria, que fue el texto distribuido por el Ministerio de Educación durante los años 2009 al 2012, y fue utilizado por los alumnos de las instituciones educativas públicas, para el desarrollo de las tareas matemáticas, contiene lo mismo que el texto de matemática quinto secundaria 2005. El tema ecuaciones lineales es abordado muy concretamente y se observa que se ha copiado el contenido tal cual y solamente se han hecho arreglos de forma, como en las figuras por ejemplo; además, uno de los autores es el mismo.

En Doroteo, F. & Gálvez, R. (2005). Matemática Quinto Secundaria, que fuera el texto elaborado y distribuido por el Ministerio de Educación a los estudiantes de educación secundaria de las instituciones educativas públicas durante el periodo 2005 al 2008, el autor inicia el primer capítulo denominado “introducción a la programación lineal” con un proceso de revisión de conocimientos previos, en el cual solicita a los estudiantes resuelvan ejercicios de plano cartesiano, relación de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con su respectiva representación gráfica e inecuaciones lineales.

Luego, se introduce brevemente los sistemas de ecuaciones lineales de dos variables con un ejemplo, cuyo conjunto solución se obtiene mediante el método gráfico, es decir, a partir de la intersección de las rectas que representan a cada ecuación lineal en el plano cartesiano. Luego, se ejemplifica con sistemas de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas enfatizando en una solución gráfica. Todo esto con la finalidad de abocarse por completo en la programación lineal, resolviendo problemas en lenguaje verbal, gráfico y algebraico, ejemplificando e indicando paso por paso los procedimientos de resolución.

Finalmente, en esta parte de la descripción de textos, hemos utilizado también, la metodología de análisis basada en configuraciones epistémicas empíricas, proporcionado por el EOS. Debemos mencionar además, que los aspectos tomados en cuenta en la presente descripción, tienen que ver con los lenguajes utilizados por el autor para proponer las tareas, las situaciones problemas propuestas, los definiciones, las propiedades, los procedimientos, etc.; y que nos hemos centrado en la edición actual (2012) de los textos, por ser el texto que más elementos de análisis ofrece con respecto al tema ecuaciones lineales. Los textos de las ediciones anteriores, como ya señalamos, abordan en tema en forma concreta, solamente como un recordatorio de saberes previos.

4.4. ANÁLISIS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS: CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DE LAS TAREAS DE LA SECUNDARIA PÚBLICA

En este apartado realizamos el análisis de los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en las tareas que se les asigna a los estudiantes de la educación secundaria pública, las mismas que están contempladas en los libros de texto oficiales que distribuye el Estado a través del Ministerio de Educación. Es decir, haremos la configuración epistémica de algunas tareas matemáticas del tema específico ecuaciones lineales, con la finalidad de utilizar los resultados de dicho análisis, para la comparación con las tareas matemáticas asignadas en la educación superior.

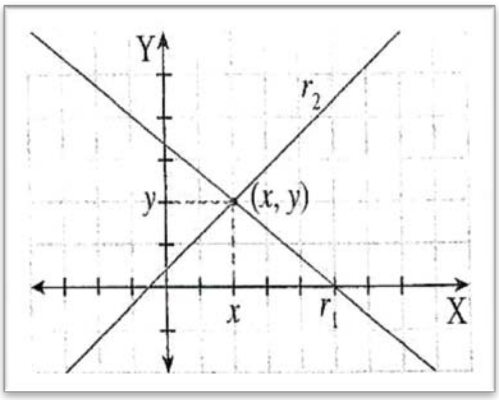
✪ Cuadro N° 05.C.E. TAREA 1: Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas – texto 5° de secundaria 2012.

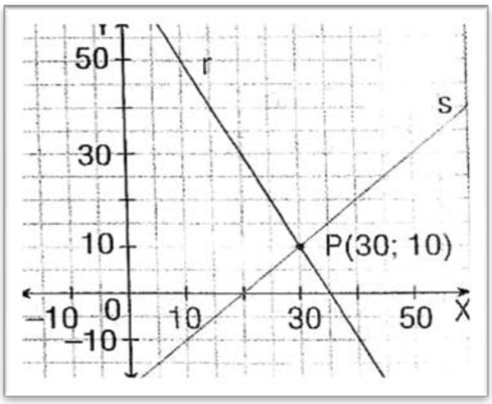
LENGUAJE

❖ **Verbal:**

- Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales
- Método gráfico, métodos algebraicos (reducción, sustitución, igualación)
- Método de eliminación de Gauss – Jordan.
- Sistema, matriz aumentada, matriz identidad.
- Operaciones elementales sobre filas.
- Planteo de un sistema de ecuaciones lineales.

❖ **Gráfico:**





❖ **Simbólico:**

- x ; y ; (x,y); $C.S. = \{\ ;\ \}$; $\begin{cases} 2x + y = 70 \\ x - y = 20 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$
- $\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 20 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \end{array}\right]$; $\begin{cases} x = s_1 \\ y = s_2 \end{cases}$

SITUACIONES - PROBLEMAS

- Pedro va al estadio y en la puerta observa este anuncio: paga sólo S/. 70 por dos boletos de adulto más un boleto de niño. Los niños pagan S/. 20 menos que los adultos. ¿Cuál es el precio de cada boleto?
- Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$
- Halla el conjunto solución del sistema:…, etc.

Este objeto matemático se caracteriza porque, se proponen ejercicios repetitivos de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas,así como algunos problemas de aplicación descontextualizados, para ser resueltos por los métodos algebraicos, gráfico o por el método de Gauss- Jordan.

DEFINICIONES - CONCEPTOS

Previos:

- Ecuación de primer grado con una incógnita
- Ecuación de primer grado con dos incógnitas.
- Representación gráfica del conjunto solución.

Emergentes:

- Planteo de sistema de ecuaciones lineales.
- Resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Método gráfico, el punto de intersección de las dos rectas es la solución del sistema.
- Métodos algebraicos, conocidos también como métodos por eliminación, entre los que destacan: por sustitución, por igualación y por reducción.
- Método de Gauss-Jordan, consiste en expresar en forma matricial un sistema de ecuaciones y transformar dicha matriz en una matriz identidad.

PROCEDIMIENTOS

- Método gráfico, se dibuja las dos rectas que son la representación gráfica de las dos ecuaciones lineales. El punto de intersección de las dos rectas es la solución del sistema.
- Método de reducción, se debe hacer opuestos los coeficientes de una

PROPOSICIONES - PROPIEDADES

- Para graficar una recta es suficiente con determinar dos puntos de ella.
- Para aplicar el método de reducción tenemos que conseguir que las "x" o bien las "y" tengan coeficientes opuestos en las dos ecuaciones.

incógnita, luego sumar ambas ecuaciones y resolver la ecuación resultante. ▪ Método de sustitución, se debe despejar una incógnita en una de las ecuaciones, luego sustituir esta expresión la otra ecuación y resolver la ecuación resultante ▪ Método de igualación, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones, en seguida igualar las expresiones obtenidas y resolver la ecuación resultante. ▪ Método de Gauss – Jordan, se obtiene la matriz aumentada del sistema. Cada fila corresponde a una ecuación y cada columna a los coeficientes de una incógnita. Se efectúan operaciones elementales sobre las filas para transformar la matriz aumentada en una matriz identidad, obteniendo así la solución del sistema. ▪ Seguir un plan de resolución de problemas implica trabajar cuatro fases: comprensión, planteamiento, resolución y comprobación.	▪ El método de sustitución es práctico si alguna de las incógnitas tiene como coeficiente 1 ó -1. ▪ El método de igualación es práctico si los coeficientes de las incógnitas son números diferentes de 1. ▪ Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ La matriz aumentada, será de la forma: $\left[\begin{array}{cc\|c} 3 & 5 & 15 \\ 2 & -3 & 12 \end{array}\right]$ ▪ A partir de la matriz aumentada del sistema, se puede transformar en una matriz identidad, mediante operaciones elementales sobre filas. ▪ Una vez reducida la matriz aumentada y transformada en matriz identidad, lo que se obtiene es ecuaciones de una sola incógnita, cuyo valor es igual al coeficiente situado en la misma fila de la matriz.

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

El conjunto solución, es aquel conjunto formado por los pares ordenados (x, y) que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

❖ **Demostración:** deductiva en la que se usan los siguientes argumentos:

1) Representación gráfica, en la que por tabulación, se construyen dos tablas de valores o pares ordenados los mismos que son graficados en el plano cartesiano, y el par ordenado común a ambos o el punto de intersección de las rectas, es el conjunto solución del sistema lineal de ecuaciones.
2) Métodos algebraicos, son métodos de eliminación de variables entre los que destacan el método de reducción, el método de sustitución y el método de igualación. En cada uno de ellos, la estrategia es eliminar una variable y reducir el sistema de dos a una sola ecuación, para luego obtener la solución de esta variable y en seguida reemplazar para obtener la solución de la otra ecuación.

3) Aplicación del método de Gauss-Jordan, que consiste en:
Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

A partir de allí, extraemos la matriz aumentada del sistema, de la forma:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$$

Mediante transformaciones elementales sobre las filas, se transforma dicha matriz en una matriz identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \end{array}\right]$$

De donde, la solución al sistema es de la forma:

$$\begin{cases} x = s_1 \\ y = s_2 \end{cases}$$

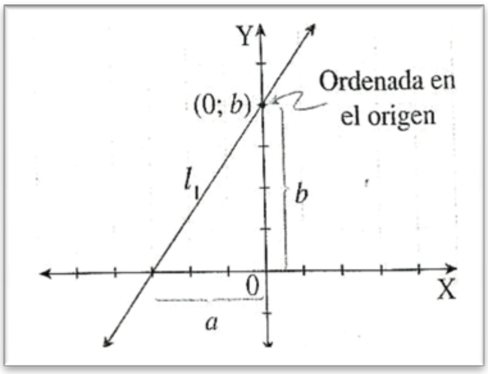
✪ Cuadro N° 06. C.E. TAREA 2: Ecuaciones de la recta – texto 5° de secundaria 2012.

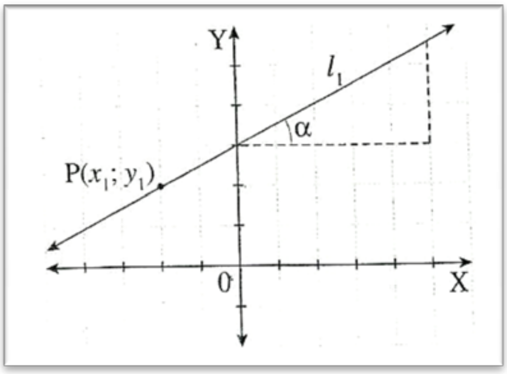
LENGUAJE

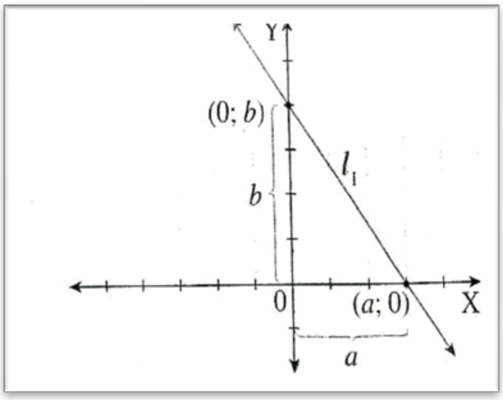
❖ **Verbal:**

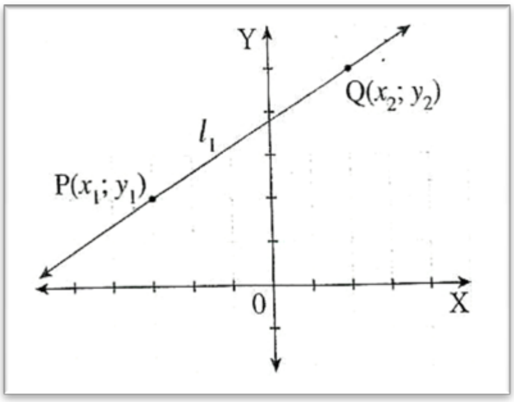
- Sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas del punto medio de un segmento.
- Pendiente de recta, ecuación de recta.
- Punto de corte con el eje Y.
- Ecuación principal, ecuación punto-pendiente, ecuación simétrica, ecuación cartesiana.
- Ecuación general de la recta.
- Ángulo de inclinación de una recta.
- Rectas paralelas, rectas perpendiculares.
- Recta paralela al eje X.
- Recta paralela al eje Y.

❖ **Gráfico:**









❖ **Simbólico:**

- x ; y ; (x, y) ; m ; $m_{\overleftrightarrow{AB}}$; $\tan\alpha$; $m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$; $\overleftrightarrow{l_1} \perp \overleftrightarrow{l_2}$; $\Leftrightarrow$; $m_1 . m_2$; $m_1 = m_2$; $x_1 \neq x_2$
- $y = mx + b$; $m = \frac{b}{a}$; $y - y_1 = m(x - x_1)$
- $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \; ; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$
- $$Ax + By + C = 0 \; ; \quad m = -\frac{A}{B} \; ; \quad b = -\frac{C}{B}$$
- $P\,(x_1;\ y_1)$; $Q\,(x_2;\ y_2)$; α ; $(0\,;\ b)$

SITUACIONES - PROBLEMAS

- Calcula el área de la superficie triangular limitada por los ejes de coordenadas y la recta de ecuación:
  $$2x + 5y - 10 = 0$$
- Determina el ángulo de inclinación de la recta de ecuación:
  $$4x - 3y - 12 = 0$$
- Determina la ecuación general de la recta l_2 que pasa por el punto $A\,(-2;\ 5)$ y es paralela a la recta l_1

DEFINICIONES - CONCEPTOS

Previos:

- Sistema de coordenadas cartesianas
- Coordenadas del punto medio de un segmento.
- Distancia entre dos puntos del plano cartesiano.
- La recta, es el lugar geométrico de todos los puntos colineales de un plano.
- Pendiente de recta, es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación que forma la recta con el eje X, medido en el sentido positivo.

de ecuación:

$$3x - y - 1 = 0$$

- Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos: $A\ (3;\ 4)$ y $R\ (-3;\ 4)$, etc.

  Una serie de nueve ejercicios como actividad para el alumno, pero descontextualizados.

  Observamos que las situaciones problema, se caracterizan porque se enfatiza en los ejercicios algorítmicos, básicamente para aplicación de procedimientos repetitivos. No se observa la propuesta de problemas contextualizados.

- Posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Emergentes:

- Ecuación principal de una recta
- Ecuación punto-pendiente.
- Ecuación simétrica de la recta.
- Ecuación cartesiana de la recta.
- Ecuación general de la recta: en geometría analítica toda recta viene representada en forma general como $Ax + By + C = 0$, donde A y B no pueden ser simultáneamente nulos, y A, B y C representan números reales.

PROCEDIMIENTOS

- Básicamente, el procedimiento que el estudiante debe seguir para resolver los ejercicios de la actividad asignada en este parte de la unidad denominada geometría analítica, consiste en reemplazar los datos de los pares ordenados, por ejemplo en las distintas formas de recta, a saber:

  Ecuación principal
  Ecuación punto-pendiente
  Ecuación simétrica
  Ecuación cartesiana, y
  Ecuación general de recta.

PROPOSICIONES - PROPIEDADES

- Cuando dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales:

$$\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \iff m_1 = m_2$$

- Cuando dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1:

$$\overleftrightarrow{l_1} \perp \overleftrightarrow{l_2} \iff m_1 . m_2 = -1$$

- El radio de una circunferencia es perpendicular a la recta tangente en su punto de tangencia:

$$\overleftrightarrow{l_1} \perp \overline{PC}$$

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** Dada la ecuación general de la recta, $Ax + By + C = 0$, se presentan los siguientes casos:

- Si $A = 0$ y $B \neq 0$, entonces la recta es paralela al eje X.
- Si $A \neq 0$ y $B = 0$, entonces la recta es paralela al eje Y.

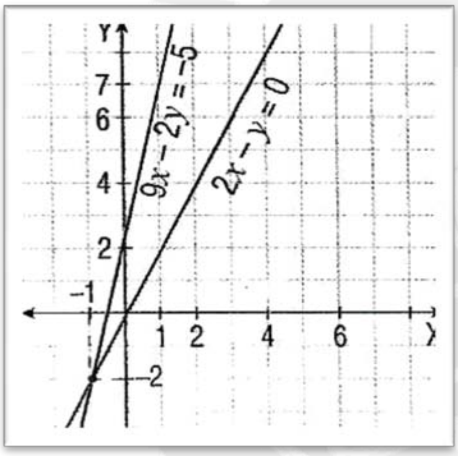
❖ **Demostración:** No se evidencian argumentos para demostrar la tesis planteada. En el caso de las proposiciones como de rectas paralelas y perpendiculares, para su justificación, se utiliza la ejemplificación y las explicaciones con lo que se pretende facilitar la comprensión del alumno.

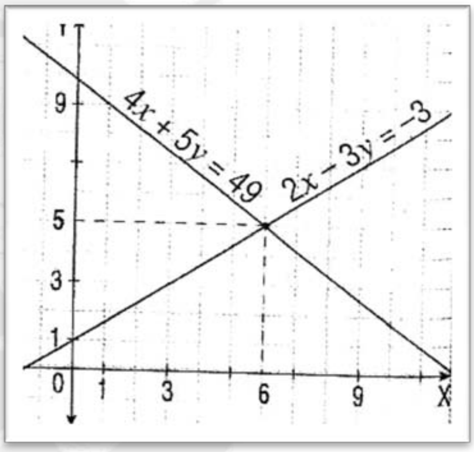
✪ Cuadro N° 07. C.E. TAREA N° 3: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas – texto 4° de secundaria 2012.

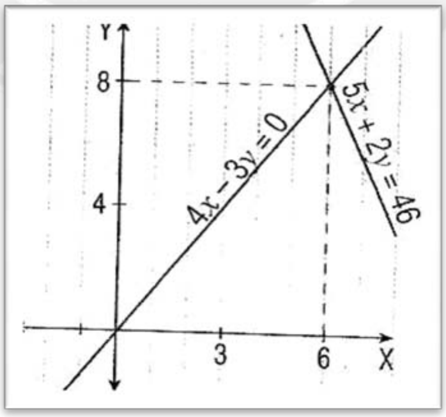
LENGUAJE
❖ **Verbal:**

- Par ordenado, incógnita, coeficientes, términos independientes.
- Conjunto solución del sistema,
- Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolución de un sistema lineal
- Método de reducción.
- Método de sustitución.
- Método de igualación.
- Método gráfico.

❖ **Gráfico:**







❖ **Simbólico:**

- x ; y; (x,y) ; a_1 ; a_2 ; b_1 ; b_2; c_1 ; c_2;C. S.
- $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

SITUACIONES - PROBLEMAS	DEFINICIONES - CONCEPTOS
▪ Halla el conjunto solución del sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ 4x + 5y = 49 \end{cases}$ ▪ Resuelve el sistema formado por: $2(x + 5) = 4(y - 4x)$ y $10(y - x) = 11y - 12x$ ▪ En una granja donde existen vacas y gallinas, se contaron 80 cabezas y 220 patas. ¿Cuántas gallinas hay? ▪ Resuelve el sistema formado por: $\frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0$ y $\frac{x-4}{2} - \frac{y+2}{5} = 3$ ▪ Para ingresar a un museo, Carmen paga S/. 61 por 3 entradas de adulto y 2 de niño, y Luis paga S/. 107 por 4 de niño y 5 de adulto. ¿Cuánto cuesta la entrada de adulto? ¿Y la de niño? Además, de presentar una serie de ejercicios y algunas situaciones poco contextualizadas como asignación para los estudiantes.	***Previas:*** ▪ Resolución de ecuaciones de primer grado con una variable. ▪ Productos notables. ▪ Fracciones algebraicas. ▪ Transformación por simplificación. ▪ Operaciones con fracciones algebraicas. ***Emergentes:*** ▪ Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la forma: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ Donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son números reales llamados coeficientes; x y y son las incógnitas, y c_1 y c_2 son los términos independientes. ▪ El conjunto solución C.S., es el conjunto formado por el par ordenado (x, y) que satisface simultáneamente las dos ecuaciones.

PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES - PROPIEDADES
▪ Método de reducción, hacer opuestos los coeficientes de una de las incógnitas y sumar las ecuaciones para obtener una ecuación de una incógnita. ▪ Método de sustitución, se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye esta expresión en la otra ecuación. ▪ Método de igualación, se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.	▪ Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$ $a(b - c) = ab - ac$ ▪ Signos de colección: $+(a - b + c) = a - b + c$ $-(a - b + c) = -a + b - c$ ▪ En el método gráfico, el punto de intersección de ambas rectas del sistema de ecuaciones lineales de la forma (x, y) es el conjunto solución del

▪ Plan de resolución de problemas, implica trabajar cuatro fases para resolver un problema. Comprensión, planteamiento, resolución y comprobación.	sistema. ▪ El fin del método gráfico es reconocer la intersección de los posibles valores que podría tomar la incógnita, representándose como resultado un punto que relaciona los valores x e y.

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Tiene como conjunto solución C.S. el par ordenado (x, y) que satisface simultáneamente las dos ecuaciones

Demostración: no se aprecian argumentos para demostrar la tesis planteada. Más bien lo que se hace es a través de la ejemplificación, y utilizando distintos procedimientos y lenguajes obtener dicho par ordenado, pero para casos específicos.

Así por ejemplo, se resuelve un sistema lineal (ejercicio) aplicando el método de reducción (lenguaje algebraico), se comprueba la solución reemplazando los valores obtenidos para x e y en cada una de las ecuaciones iniciales, corroborando que se cumple la igualdad.

En simultáneo, cada una de las ecuaciones se representa en el plano cartesiano (lenguaje gráfico), donde se comprueba que el punto de intersección (par ordenado) de ambas rectas es el mismo que el encontrado por el método algebraico.

Se repite este mecanismo de complementar lenguaje algebraico con el gráfico en otros ejemplos, y con el método de igualación y sustitución.

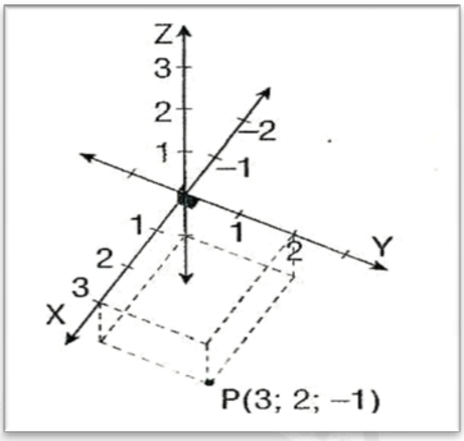
✪ Cuadro N° 08. C.E. TAREA 4: Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas – texto 4° de secundaria 2012.

LENGUAJE

❖ **Verbal:**
- Terna ordenada, incógnitas.
- Sistema de ejes de coordenadas rectangulares en el espacio.
- Sistema de tres ecuaciones lineales.

- Resolución de un sistema lineal
- Métodos de resolución.
- Método de reducción.
- Método de sustitución.
- Método de igualación

❖ **Gráfico:**



❖ **Simbólico:**

- x ; y ; z ; ; $(x,\ y,\ z)$; C. S. ; $P\ (3, 2, -1)$
- $\begin{cases} x \ -3y \ +z \ = \ -4 \\ 2x \ +3y \ -3z \ = 15 \\ 5x \ -2y \ -z \ = 12 \end{cases}$
- $C.S. = \ \{(3\ ; 2\ ; \ -1)\}$

SITUACIONES - PROBLEMAS	DEFINICIONES - CONCEPTOS
▪ Halla el conjunto solución de: $\begin{cases} x \ -3y \ +z \ = \ -4 \\ 2x \ +3y \ -3z \ = 15 \\ 5x \ -2y \ -z \ = 12 \end{cases}$ ▪ La suma de tres números es 5. El doble del primero menos el triple del segundo es igual a 12, y la diferencia del segundo y el tercer número es igual a -6. Halla dichos números. ▪ Resuelve el sistema formado por las ecuaciones: $x \ +2y \ -z \ = 4$; $x \ -y \ +z \ = 5$; $2x \ +y \ +2z \ = 1$ ▪ Si al doble de la edad de Vera se le suma la edad de María, se obtiene la edad de Luisa más 17 años. Si a la	***<u>Previas:</u>*** ▪ Resolución de ecuaciones de primer grado ▪ Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ▪ Resolución por el método de reducción. ▪ Resolución por el método de sustitución. ▪ Resolución por el método de igualación. ▪ Método gráfico. ***<u>Emergentes:</u>*** ▪ Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

tercera parte de la edad de María se le suma el doble de la edad de Luisa, se obtiene la edad de Vera más 39 años. Si la tercera parte de la suma de las edades de Vera y María es 16 años menos que la edad de Luisa, ¿qué edad tiene cada una? En conclusión, lo que encontramos es que las escasas situaciones problemas de aplicación que se presentan, están descontextualizadas. Nuevamente en esta parte, se prioriza la algoritmización mediante los ejercicios.	Resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es determinar la terna ordenada (x, y, z) de números reales que satisface a la vez a las tres ecuaciones. ▪ Conjunto solución, se llama así a la terna ordenada que satisface a la vez a las tres ecuaciones del sistema y es la solución única del sistema.

PROCEDIMIENTOS	**PROPOSICIONES - PROPIEDADES**
Los métodos para encontrar las ternas son los mismos que para resolver un sistema con dos incógnitas: ▪ Método de reducción, hacer opuestos los coeficientes de una incógnita en dos pares de ecuaciones, eliminarla al sumar las ecuaciones de cada par y formar un nuevo sistema de dos incógnitas con las dos ecuaciones resultantes. ▪ Método de sustitución, se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye esta expresión en las otras dos ecuaciones, formando así un sistema con dos ecuaciones. ▪ Método de igualación, se despeja una misma incógnita en las tres ecuaciones para luego igualar sus valores dos a dos, resultando un sistema de ecuaciones con dos incógnitas ▪ Elaboración de tablas de doble entrada, que consiste en identificar categorías para relacionar matemáticamente los datos pertenecientes a cada categoría.	▪ Los métodos para encontrar las ternas de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, son los mismos que aquellos aplicables para resolver un sistema con dos incógnitas. ▪ Para eliminar z en las ecuaciones 1 y 2, multiplicamos la ecuación 2 por (-2). Así obtenemos: $-4x - 2y - 2z = -1200$. ▪ Para eliminar z en la ecuaciones 2 y 3, multiplicamos la ecuación 2 por (-1). Así obtenemos: $-2x - y - z = -600$. ▪ Para ubicar en el espacio el punto P de coordenadas (x, y, z), se utiliza el sistema de ejes de coordenadas rectangulares en el espacio. ▪ Para resolver un sistema de ecuaciones, se colocan en columnas los monomios semejantes, luego se eliminan variables sumando en columna.

ARGUMENTOS
❖ **Tesis:** Resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es determinar la terna ordenada $(x\ ,y\ ,z)$, de números reales que satisface a la vez a las tres ecuaciones del sistema lineal. Dicha terna es la solución única del sistema. ❖ **Demostración:** no se evidencian argumentos para demostrar la tesis planteada. Sin embargo, lo que se hace es seguir la técnica de la ejemplificación y la explicación de ejercicios y un par de situaciones-problema poco contextualizadas, las cuales se resuelven a manera de ejemplo y paso por paso, mediante métodos algebraicos, tales como: Método de reducción, Método de sustitución y, Método de igualación Estas formas de justificar, pretenden facilitar la comprensión de los alumnos, y a todas luces se nota que no se desea evitar caer en el formalismo matemático.

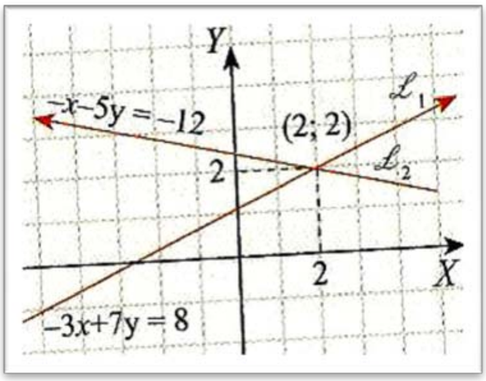
✪ Cuadro N° 09. C.E. TAREA 5: Sistemas de ecuaciones lineales de dos variables – texto 5to. de secundaria 2008.

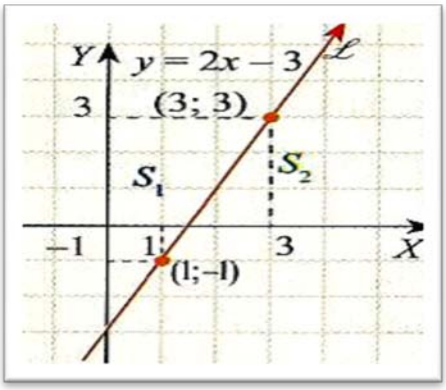
LENGUAJE

❖ **Verbal:**

- Plano cartesiano, variables.
- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, Gráfica de una recta.
- Conjunto solución del sistema de ecuaciones.
- Sistema compatible determinado.
- Sistema compatible indeterminado.
- Sistema incompatible.
- Método algebraico, método gráfico.
- Intersección de las rectas.

❖ **Gráfico:**





❖ **Simbólico:**

- x ; y ; $(x,\ y)$; C. S. ; $\mathscr{L}: y - x = 0$; E_1 ; E_2
- $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$; $\mathscr{L}_1$; $\mathscr{L}_2$
- $\begin{cases} -3x + 7y = 8 \\ -x - 5y = -12 \end{cases}$
- $$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 8 \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{2} = 17 \end{cases}$$

SITUACIONES - PROBLEMAS

- Relaciona cada sistema con el gráfico correcto:
$$\begin{cases} x + y = -6 \\ x - y = 0 \end{cases}$$
- Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones con dos variables:
$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 8 \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{2} = 17 \end{cases}$$
- Graficar la recta L $: x + y - 2 = 0$ en el plano cartesiano.
- Consideremos el sistema de ecuaciones lineales de dos variables:
$$\begin{cases} -3x + 7y = 8 \\ -x - 5y = -12 \end{cases}$$
Encuentre el conjunto solución aplicando cualquier método algebraico o método gráfico.
En esta parte de la proposición de tareas, también se observa que se incide en la algoritmización y aplicación de métodos. Los escasos problemas de aplicación que el autor presenta, están descontextualizados.

DEFINICIONES - CONCEPTOS

Previas:

- Plano cartesiano.
- Sistema de ecuaciones lineales
- Desigualdades.
- Resolución de ecuaciones de primer grado

Emergentes:

- Sistema de dos ecuaciones lineales de dos variables.
Un sistema de dos ecuaciones de primer grado de dos variables es de la forma:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
Que puede ser un sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado o un sistema incompatible.

PROCEDIMIENTOS

- Método gráfico, en el que las rectas representan gráficamente a cada una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones de primer grado. Además se debe utilizar las tablas de tabulación.
- Método algebraico, que consiste en aplicar la eliminación de variables: método de reducción, igualación y sustitución.

PROPOSICIONES - PROPIEDADES

- El conjunto solución de un sistema, se determina aplicando cualquier método algebraico o método gráfico.
- El conjunto solución del sistema de ecuaciones, E_1yE_2 está representado por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ respectivamente.
- Cuando la solución del sistema es única, el sistema de ecuaciones E_1yE_2 es un sistema compatible determinado.

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Puede ser un sistema compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

❖ **Demostración:** no se aprecian argumentos para demostrar y justificar la tesis planteada, ni para justificar las propiedades y proposiciones descritas. En lugar de ello, se usa como técnica la ejemplificación y las explicaciones deductivas. Creemos que esta manera de justificar, aunque carece del rigor y la formalidad matemática, está dirigida para los alumnos de educación secundaria.

Al finalizar el análisis de la C.E. de las cinco tareas de ecuaciones lineales, seleccionadas de los libros de texto de la educación secundaria pública, podemos decir que, con respecto a los lenguajes presentes en las tareas, se enfatiza en el lenguaje simbólico (algebraico) y se descuida el lenguaje gráfico, el lenguaje verbal y el tránsito entre estos lenguajes; las situaciones problema propuestas, a los alumnos, son en su mayoría ejercicios de aplicación de fórmulas o procedimientosalgorítmicos, prestando poca o ninguna atención a los problemas de contextualización; las definiciones presentadas son puntuales, sin rigor matemático; en tanto que los procedimientos, observamos que son algorítmicos basados en métodos algebraicos de eliminación, en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales.Además, las proposiciones y propiedades, carecen de justificación, en consecuencia, los argumentos son en base a la ejemplificación y explicación de métodos.

4.5. SELECCIÓN DE LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Puesto que, nuestro estudio está focalizado en los estudiantes que ingresan en la educación superior tecnológica, en la carrera de administración bancaria. En consecuencia y en base a la experiencia de trabajo en dicha institución y con dicho tipo de estudiantes, en base a los sílabos de matemáticas de ciclos anteriores, y a la bibliografía consultada para la elaboración del módulo de matemáticas de la institución; tomaremos como referencia cuatro libros de texto, los más usados en la enseñanza superior peruana en general, que abordan el tema específico "ecuaciones lineales" del álgebra lineal y de las matemáticas contextualizadas aplicadas a la administración.

El objetivo es presentar el escenario didáctico-matemático actual en el que se encuentran los estudiantes de la carrera de administración bancaria, en la enseñanza tecnológica no universitaria, y también esto alcanza a la enseñanza universitaria; observar distintos enfoques de enseñanza, revisar diferentes actividades y tareas que se plantean habitualmente a los alumnos y así obtener mayores elementos que nos permitan sugerir en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales, en aras de lograr un alto grado de idoneidad didáctica en las actividades matemáticas.

Iremos describiendo la forma de abordar las ecuaciones lineales que cada uno de los libros de texto presenta y los objetos matemáticos que intervienen y emergen en las actividades matemáticas desarrolladas en la educación superior tecnológica. Como señala Chevallard (2000), los textos norman una progresión y autorizan una didáctica. En general los autores de los libros de texto señalan que el propósito fundamental de escribir y publicar textos, es ayudar a los profesores y a los estudiantes a hacer accesibles la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, desde nuestra posición consideramos que los libros de texto de matemáticas son una proyección de las prácticas y actividades matemáticas del aula, nos brindan un panorama de lo que se viene enseñando y cómo se está enseñando, además de ser la concreción de lo que los autores creen que significa aprender y enseñar el álgebra lineal, la geometría analítica, las matemáticas para administración y negocios, etc. Los textos seleccionados son:

- En primer lugar, consideraremos como libro de texto que nos servirá de base para el análisis de las prácticas matemáticas sugeridas, los objetos matemáticos que intervienen en dicha práctica y los procesos matemáticos (significación, representación, etc.) que se utilizan para la enseñanza del álgebra lineal, el libro de *Geometría Analítica y Álgebra Lineal* de Lages (2004).

- En segundo lugar, analizaremos también como libro de texto que nos servirá de base para los significados institucionales (matemáticos) y que es bastante utilizado para la enseñanza del álgebra lineal, tanto en nuestro país como en diferentes países de Latinoamérica, el libro de *Álgebra Lineal*deGrossman (2008).

- En tercer lugar, para los significados referenciales contextualizados directamente ligados con la carrera de administración, economía y los negocios, abordaremos el texto *Matemáticas para administración y economía* de Haeussler, et al. (2008).

- Finalmente, y con el propósito de analizar los significados pretendidos abordaremos el módulo de texto con el que se viene trabajando como base para la unidad didáctica de matemática en la institución objeto del presente estudio, el texto M*ódulo de matemática Administración Bancaria* del Instituto de Formación Bancaria (2009).

4.6. DESCRIPCIÓN DEL TEMA ECUACIONES LINEALES EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SUPERIOR SELECCIONADOS.

✪ Primer texto: Geometría analítica y álgebra lineal, Lages (2004)

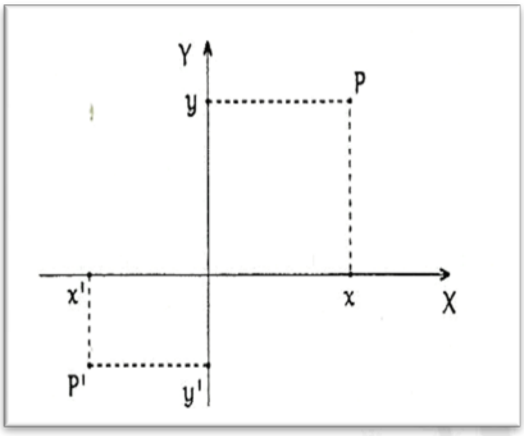
El autor inicia presentando$\mathbb{R}^2$ como el conjunto formado por los pares ordenados (x, y) donde x y y son números reales, y su ubicación en el sistema de coordenadas cartesianas (plano cartesiano), enfatiza en la diferencia entre par ordenado (x, y) y el conjunto de elementos $\{x, y\}$; seguidamente describe la ubicación de un punto P de coordenadas (x, y) en el plano cartesiano con x como abscisa y y como ordenada ambas positivas $(\mathbf{P} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ y un punto$\mathbf{P}'$de coordenadas negativas $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$**.**(ver figura N° 08)

Lages (2004) asegura que el empleo de coordenadas en el plano cartesiano sirve para dos propósitos que se complementan:

> El primero, es el de atribuir un significado geométrico (y con esto dar un mayor contenido intuitivo) a los hechos de naturaleza numérica, como el comportamiento de una función real de una variable real, que gana mucho en comprensión cuando se mira para su gráfico. El segundo, es en el sentido opuesto: se recurre a ellas (las coordenadas) a fin de resolver problemas de Geometría. (p. 8)

En la práctica, esos dos puntos de vista se entrelazan para establecer los hechos iniciales de la Geometría Analítica usándose los resultados básicos de la Geometría Euclidiana. Los ejes ortogonales OX y OY descomponen el plano Πen cuatro regiones, denominadas cuadrantes. (ver figura N° 09)

Luego se trazan dos rectas que los autores consideran como rectas diagonales: Δ bisectriz del primer y tercer cuadrante (recta que divide a ambos cuadrantes en dos partes iguales) y que pasa por el punto $\mathbf{P} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$; y Δ' bisectriz del segundo y cuarto cuadrante que pasa por el punto $\mathbf{Q} = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$del plano π con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}'$. Así como también, se precisa el sentido positivo de rotación o sentido anti-horario del semi-eje positivo OX sobre el semi-eje positivo OY, tal como se aprecia en la figura N° 10.



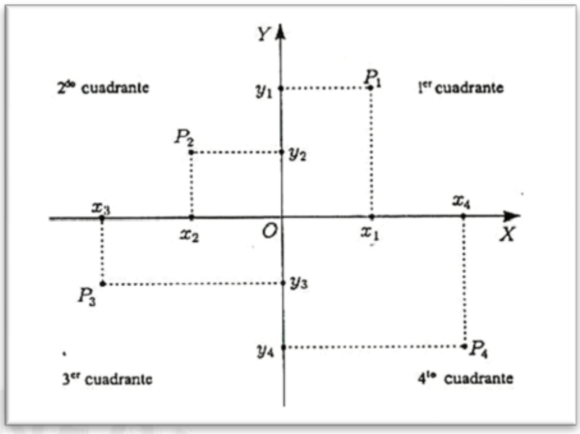


Figura N° 08. Puntos en el plano cartesianoFigura N° 09. Cuadrantes del plano cartesiano

Fuente: Lages (2004, pp. 8 - 9)

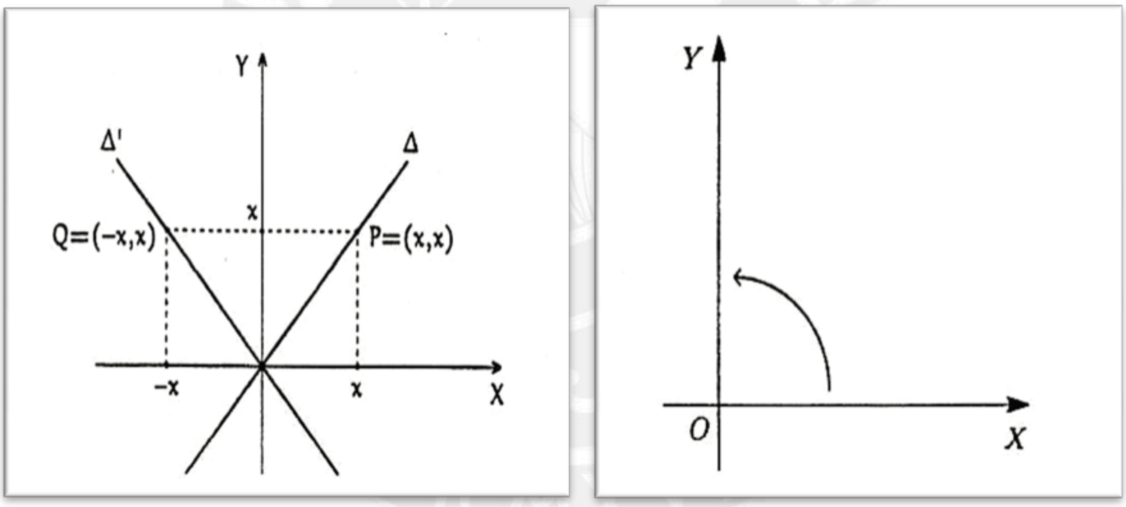


Figura N° 10.(a) Diagonales del plano (b) Sentido positivo de rotación

Fuente: Lages (2004, p. 10)

Este capítulo del texto presenta un ejemplo y una serie de ejercicios, básicamente para que el estudiante desarrolle procesos de algoritmización en el sentido del EOS. Así por ejemplo, presentamos uno de los ejercicios tomado de Lages (2004):

Ejercicio 10. Determine las coordenadas del simétrico del punto P $= (2, -3)$ en relación:

a) al eje OX;
b) al eje OY;
c) a la diagonal Δ;
d) al punto $(-3,\ 2)$

En el capítulo siguiente y usando Geometría Plana se introduce la noción de segmentos de recta en el plano y punto medio entre dos puntos. A partir de dos puntos cualesquiera $A = (a, b)$ y $A' = (a', b')$ se desea saber ¿cuáles son las coordenadas del punto medio $M = (x, y)$ del segmento de recta AA' ?, obteniendo como respuesta:

$$\boxed{x = \frac{a + a'}{2} \text{ y } \qquad y = \frac{b + b'}{2}}$$

Fuente: Lages (2004, p. 13)

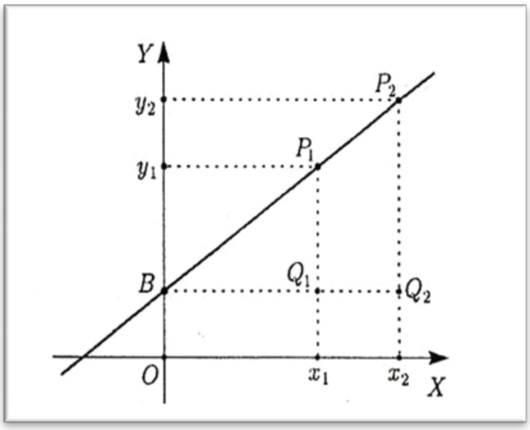
En otro capítulo del texto, se presentan las ecuaciones de recta como tres principales tipos de ecuación que definen rectas en el plano. Estos son:

La ecuación de la forma:$\boldsymbol{y = ax + b}$ que representa a la recta no vertical $\boldsymbol{r}$, donde b es la ordenada del punto en que $\boldsymbol{r}$corta al eje vertical OY y $\boldsymbol{a}$, se interpreta como la inclinación de la recta $\boldsymbol{r}$quien mide la tasa de crecimiento de $\boldsymbol{y}$ en función de $\boldsymbol{x}$, es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad x_2 \neq x_1}}$$

Fuente: Lages (2004, p. 39)

Donde$\boldsymbol{a}$es la razón del incremento de $\boldsymbol{y}$ al incremento de $\boldsymbol{x}$. Consideramos que esta es una forma de introducir lo que más adelante será la noción de pendiente de recta, aunque no se señala a $\boldsymbol{a}$ como tal hasta esta sección. Cuando $a > 0$ la recta estará inclinada "para arriba", en tanto que si $a < 0$ la recta estará inclinada "para abajo". Se enfatiza también el caso de la intersección entre dos rectas en un punto $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$;así como el caso particular de dos rectas que no se cortan.



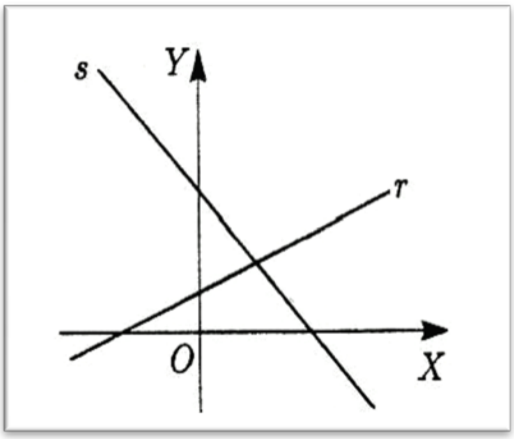
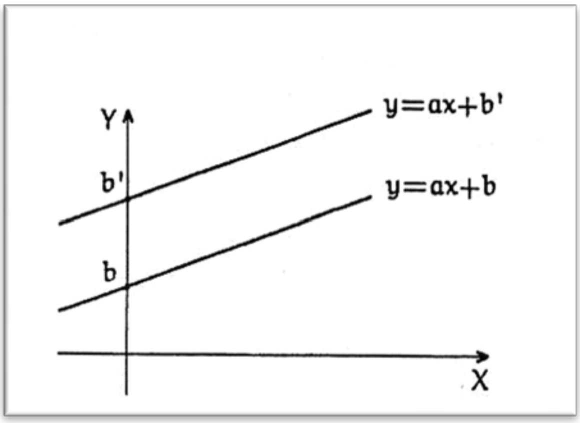
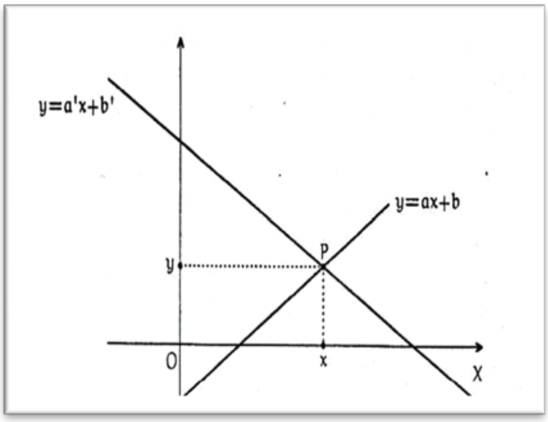


Figura N° 11.(a)Triángulos semejantes (b) Inclinación de recta





(c) Rectas paralelas (d) Rectas secantes

Fuente: Lages, E. (2004, pp. 39 - 41)

Las rectas $y = ax + by$ $y = a'x + b'$son paralelas si y solamente si, poseen la misma inclinación $\boldsymbol{a}$y cortan al eje OYen puntos distintos, de ordenadas $b \neq b'$, tal como se aprecia en la figura N° 11. (a, b, c y d)

La ecuación de la forma: $\boldsymbol{ax + by = c}$, hace referencia que el punto P = (x, y) pertenece a la recta r, si y solamente si, sus coordenadas satisfacen a la ecuación $ax + by = c$. La recta representada por la ecuación $ax + by = c$ es horizontal, si y solamente si, $a = 0$. Ésta será vertical, si y solamente si, $b = 0$, por supuesto, con estas condiciones se señala implícitamente que y es constante y que x es constante respectivamente a lo largo de la recta. Luego a través de teoremas y corolarios se analiza y demuestra el caso particular de las rectas paralelas o coincidentes y concurrentes en términos de los coeficientes de sus ecuaciones. Así por ejemplo, el corolario 7.1., textualmente dice “las ecuaciones $ax + by = c$ y $a'x + b'y = c'$ representan la misma recta si, y solamente si, existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$” (Lages, 2004, p. 40).

Se afirma además, que las rectas $ax + by = c$ y $a'x + b'y = c'$ son concurrentes si y solamente si, $ab' - ba' \neq 0$. Este análisis de la posición relativa de dos rectas con base en los coeficientes de las ecuaciones que las definen, es equivalente al estudio de las soluciones del sistema lineal de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{ax + by} &= \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y} &= \boldsymbol{c'} \end{aligned}}$$

Fuente: Lages (2004, p. 47)

Ecuaciones paramétricas. Dados dos puntos $A = (a,b)$ y $C = (c,d)$ y sea t un parámetro que asume todos los valores reales, se llaman ecuaciones paramétricas de la recta AC a aquellas ecuaciones de la forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{x = a + t(c - a)} \\ \boldsymbol{y = b + t(d - b)} \end{array} \; ; \; \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}}$$

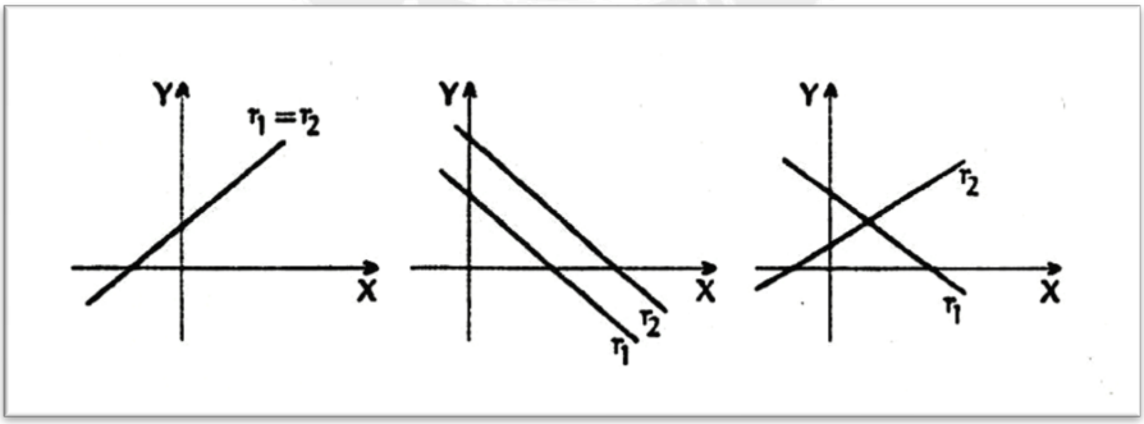
Fuente: Lages (2004, p. 48)

Es decir, dichas ecuaciones describen la trayectoria del punto (x,y) en función del parámetro que puede representar la variable tiempo, por ejemplo. En consecuencia, cuando t asume todos los valores reales, el punto (x,y) describe realmente la recta que pasa por los puntos A y C. Al final de esta sección, el autor presenta algunos ejemplos a manera de explicación de lo estudiado en el capítulo, así como también una serie de ejercicios de tipo algorítmico. No se observan problemas contextualizados.

En un capítulo posterior del texto, se estudian los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, donde se define un sistema lineal de la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y = c_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y = c_2} \end{cases}$$

Cuya solución es un par$(x,y) \in \mathbb{R}^2$donde tanto x como y satisfacen ambas ecuaciones, haciéndose luego el siguiente análisis geométrico respecto de la solución. (ver figura N° 12)



(a)Indeterminado(b)Imposible(c)Determinado

Figura N° 12. Sistema lineal con dos incógnitas
Fuente: Lages (2004, p. 182)

Lages (2004) con respecto a este sistema de ecuaciones plantea que:

> El sistema anterior se dice indeterminado, imposible o determinado cuando admite más de una solución, ninguna solución o una única solución respectivamente. Equivalentemente, el sistema lineal es indeterminado, imposible o determinado, conforme las rectas r_1 y r_2 representadas por las dos ecuaciones, coincidan, sean paralelas o sean concurrentes respectivamente. (p. 182)

Seguidamente se hace un análisis matricial y vectorial de los coeficientes del sistema lineal. Se demuestra algebraicamente mediante el determinante de la matriz de coeficientes, cuándo un sistema es indeterminado, imposible y determinado. Se presenta la matriz cuadrada 2 x 2 de los coeficientes de las variables, así como la matriz 2 x 3 como la matriz aumentada del sistema. Asimismo, se hace el análisis mediante la combinación lineal de los vectores columna de la matriz del sistema lineal. Además se introduce el método de eliminación para resolver el sistema realizando un análisis en el lenguaje simbólico-algebraico y también con un lenguaje gráfico-geométrico. (ver figura N° 13).

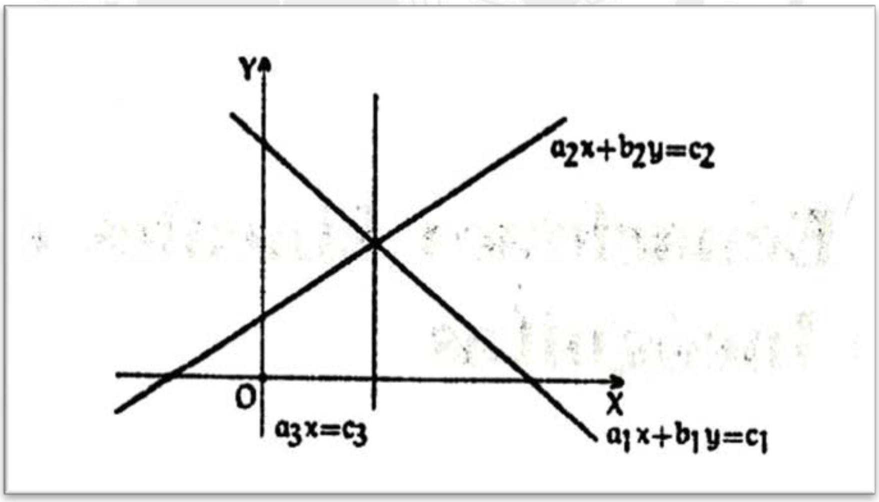


Figura N° 13.El método de eliminación, visto geométricamente

Fuente: Lages (2004, p. 185)

En el siguiente capítulo se presenta el tema: sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas los cuales adoptan la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z = d_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z = d_2} \end{cases}$$

cuya solución es la terna $(x, y, z) \epsilon \mathbb{R}^3$. Las ecuaciones del sistema representan planos Π_1 y Π_2 que pueden ser paralelos, en tal caso, el sistema es imposible: sin solución; los planos pueden coincidir o interceptarse en una recta, en tales casos, el sistema lineal será indeterminado: cuando tiene infinitas soluciones. También en esta sección, se trabaja con la matriz asociada al sistema y la matriz aumentada, así como con los vectores fila de la matriz del sistema. Finalmente, el autor ejemplifica con algunas situaciones algorítmicas y plantea ejercicios para ser resueltos por los estudiantes.

Para finalizar con ecuaciones, en el capítulo siguiente, se estudia los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, dicho sistema lineal presenta la forma:

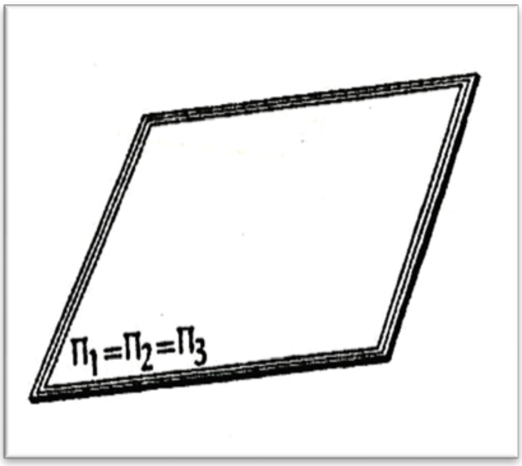
$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z = d_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z = d_2} \\ \boldsymbol{a_3x + b_3y + c_3z = d_3} \end{cases}$$

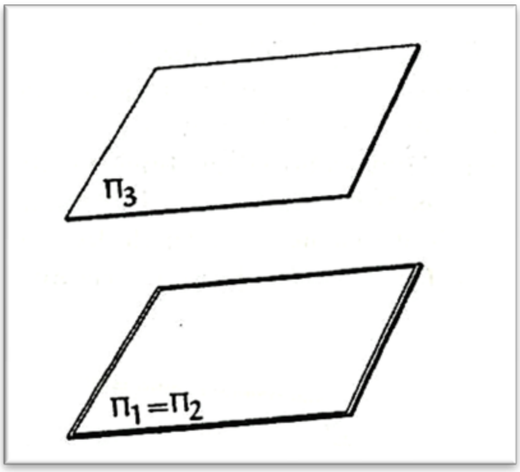
Estas ecuaciones definen respectivamente los planos Π_1, Π_2yΠ_3. La solución del sistema es una terna $(x, y, z) \epsilon \mathbb{R}^3$cuando el punto $P = (x, y, z)$ pertenece a la intersección de los planos $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$, es decir, P está simultáneamente en cada uno de los tres planos. La existencia de las soluciones del sistema arriba mostrado, se hace en base al análisis de la matriz asociadaal sistema y a la matriz aumentada. Así como también, en base a la dependencia o independencia lineal de los vectores fila de la matriz del sistema y de los vectores fila de la matriz aumentada, los mismos que son perpendiculares a los planos.

El autor presenta también, desde el punto de vista de la existencia o no de las soluciones del sistema, ocho situaciones posibles de los planos (se refiere a las diversas posiciones de los tres planos del sistema lineal)Π_1, Π_2yΠ_3, definidos por las tres ecuaciones, que a continuación se describen:

Primer caso: Los tres planos coinciden. Esto es geométricamente $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$, siendo en este caso el sistema, indeterminado; los vectores fila de la matriz aumentada son colineales, es decir, múltiplos uno de los otros.

Segundo caso: Dos de los planos coinciden y el tercero es paralelo a ellos. La solución del sistema es imposible donde:$\Pi_1 = \Pi_2$y$\Pi_2, \Pi_3 \parallel \Pi_1$.

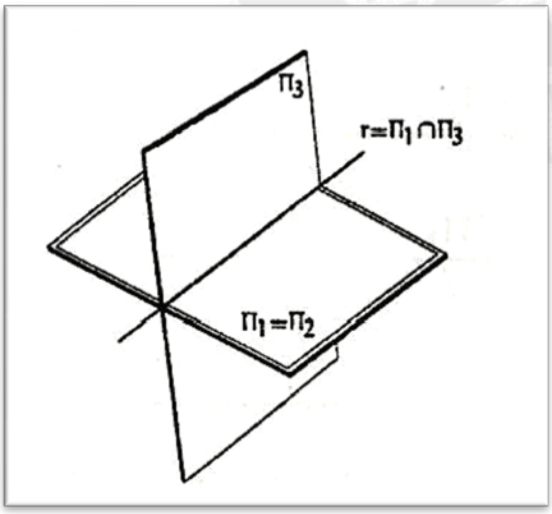


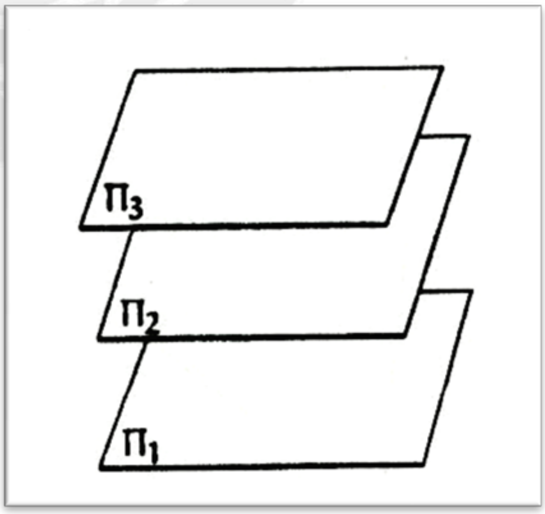


(a) Primer caso: planos coinciden (b) Segundo caso

Tercer caso: Dos de los planos coinciden y el tercero los interseca según una recta. Desde el punto de vista geométrico $\Pi_1 = \Pi_2$ y$\Pi_1 \cap \Pi_3 = r$, siendo el sistema indeterminado, pues tiene múltiples soluciones y son todos los puntos (x, y, z) de la recta r.

Cuarto caso: Los planos Π_1 , Π_2yΠ_3 son paralelos dos a dos. En este caso el sistema es imposible, no admite solución. Uno de los vectores fila de la matriz del sistema es múltiplo del otro, pero los vectores de la matriz aumentada son dos a dos no-colineales.



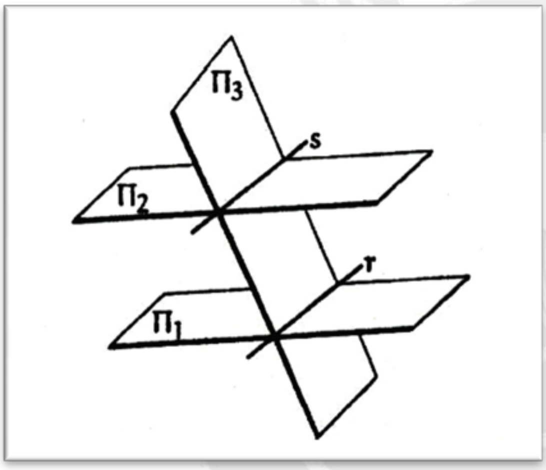


(c) Tercer caso

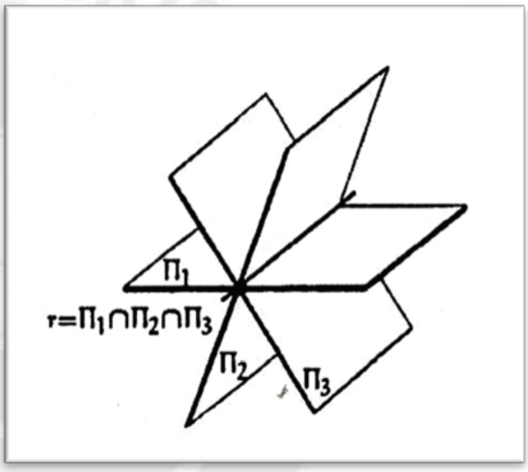
(d) Cuarto caso: planos paralelos

Quinto caso: Los planos $\Pi_1 y \Pi_2$ son paralelos y Π_3 los interseca según las rectas paralelas r y s. Este sistema es imposible, sin solución, puesto que: $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$.

Sexto caso: Π_1 , $\Pi_2 y \Pi_3$ son tres planos distintos que tienen una recta r común. Este tipo de sistemas son indeterminados, pues poseen infinitas soluciones y están ubicadas sobre la recta de intersección de los planos $r = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$. Algebraicamente esta situación geométrica ocurre al no haber paralelismo ni coincidencia entre dos cualesquiera de los planos Π_1 , $\Pi_2 y \Pi_3$, uno de los vectores fila de la matriz aumentada es combinación lineal de los otros dos y, ninguno de los vectores de la matriz del sistema es múltiplo del otro.



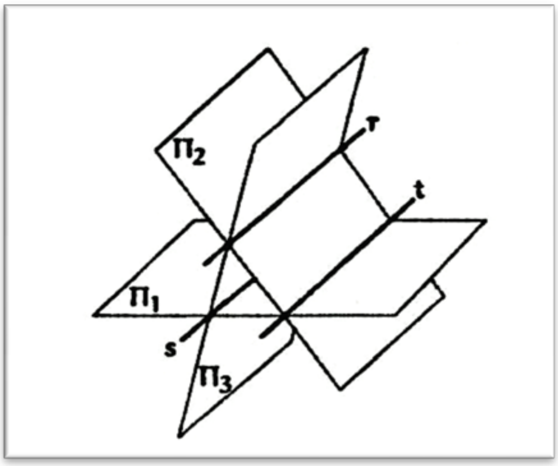
(e) Quinto caso: no hay solución

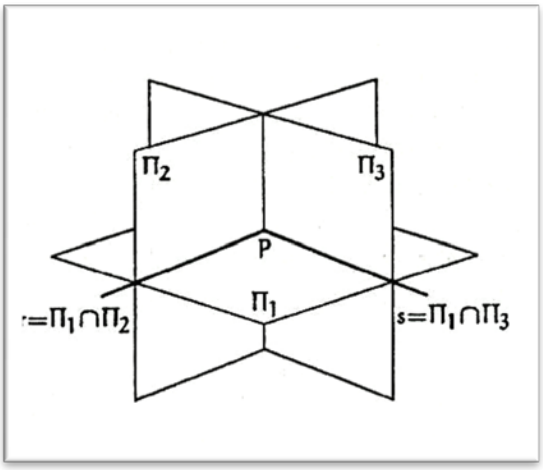


(f) Sexto caso: recta en común

Séptimo caso: Los tres planos se intersecan dos a dos, según las rectas $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$, $s = \Pi_1 \cap \Pi_3$ y $t = \Pi_2 \cap \Pi_3$ paralelos uno a los otros. Este caso de sistema es imposible y sucede cuando los vectores fila de la matriz del sistema son dos a dos no-colineales, es decir que ninguno de estos vectores es múltiplo del otro; esto equivale a decir que los tres vectores fila de la matriz aumentada del sistema son l. i.

Octavo caso: Los tres planos Π_1 , $\Pi_2 y \Pi_3$ tienen un único punto en común. En este caso el sistema tiene solución, es determinado. Desde la óptica del álgebra, esta situación puntual ocurre cuando los vectores-fila de la matriz del sistema de ecuaciones lineales $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$ y $l_3 = (a_3, b_3, c_3)$, son linealmente independientes. Geométricamente, puesto que no hay coincidencia ni paralelismo entre los tres planos, los vectores l_1, $l_2 y l_3$ son dos a dos no-colineales. (verfigura N° 14)





(g) Séptimo caso (h) Octavo caso: solución única

Figura N° 14: a, b, c, d, e, f, g, h.Posiciones relativas entre tres planos.

Fuente: Lages (2004, pp. 195 - 202)

Para concluir con la descripción de este primer texto, debemos señalar que en éste y los anteriores capítulos del libro, el autor explica a manera de ejemplo algunos ejercicios del tema que se está estudiando, para en seguida plantear una serie de ejercicios principalmente para análisis algebraico (proceso de algoritmización), sin ninguna contextualización. Sin embargo, como significados institucionales (matemáticos), la presentación, estudio y análisis de los objetos matemáticos ecuaciones lineales es muy riguroso y exigente en la verificación y demostración de los teoremas y propiedades que emergen a la actividad matemática, así que requerirá la activación de los procesos de algoritmización o mecanización que propone el EOS.

La técnica de análisis seguida es la proporcionada por el EOS: análisis de las configuraciones epistémicas empíricas contextualizadas y realistas. (Font & Godino, 2006, pp. 67 - 98), utilizada para la descripción y análisis de las configuraciones epistémicas de los textos universitarios de matemáticas, y que estudia los aspectos de lenguajes, situaciones problemas, procedimientos, argumentos, entre otros.

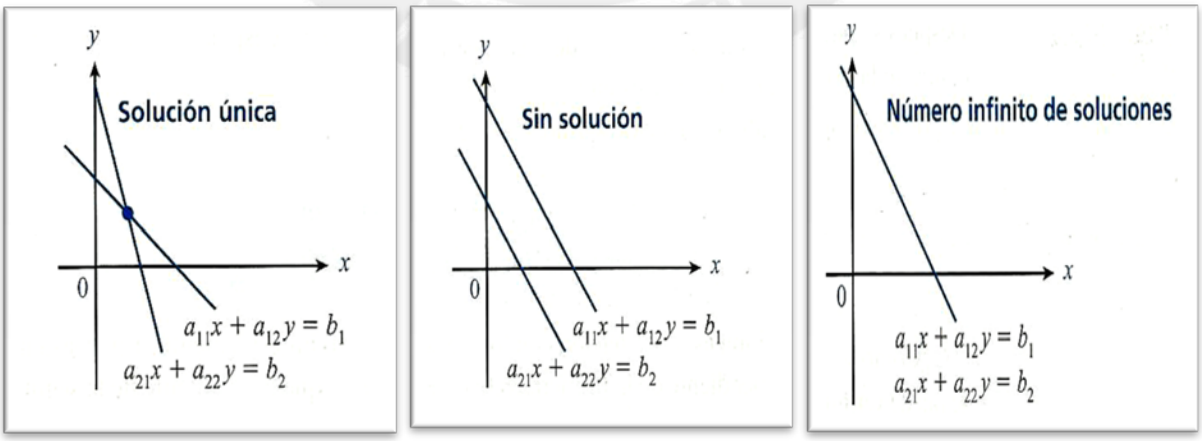
✪ Segundo texto: Álgebra lineal, Grossman (2008)

El autor empieza el primer capítulo del Álgebra Lineal estudiando los sistemas de ecuaciones lineales y matrices, a manera de hechos fundamentales sobre las líneas rectas define la pendiente de recta que pasa por dos puntos del plano, como la variación de la variable y con respecto a la variación de la variable x. Puntualiza sobre la manera de escribir la ecuación de recta en su forma pendiente – ordenada al origen, el caso de las rectas paralelas que tienen la misma pendiente, el caso de aquellas rectas con pendiente cero, es decir paralelas al eje x. Luego, presenta de manera directa, dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el mismo que tiene la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x + a_{22}y = b_2} \end{cases}$$

Seguido del análisis respectivo de las soluciones del sistema lineal (resolución del sistema), para ello mediante un ejemplo explica el caso del sistema con una solución única; en otro ejemplo analiza el caso del sistema con un número infinito de soluciones, así como el caso particular de un sistema sin solución al cual le llama sistema inconsistente. A continuación, realiza el análisis de la solución del sistema lineal desde el punto de vista geométrico mediante el comportamiento de las rectas en el plano cartesiano, para lo cual muestra la figura siguiente. (ver figura N° 15).

En el análisis para el caso específico de la solución única del sistema lineal, recurre al determinante de la matriz del sistema diferente de cero, precisando que: el sistema tiene solución única, si y sólo si, el determinante de la matriz asociada al sistema, es diferente de cero:$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; mientras que, el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si, el determinante de su matriz asociada es nulo: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Además, se solicita al alumno que demuestre tal afirmación algebraica.



(a) Rectas secantes(b)Rectas paralelas(c)Rectas que coinciden

Figura N° 15. Dos rectas se intersecan en un punto, en ninguno o en un número infinito de puntos.

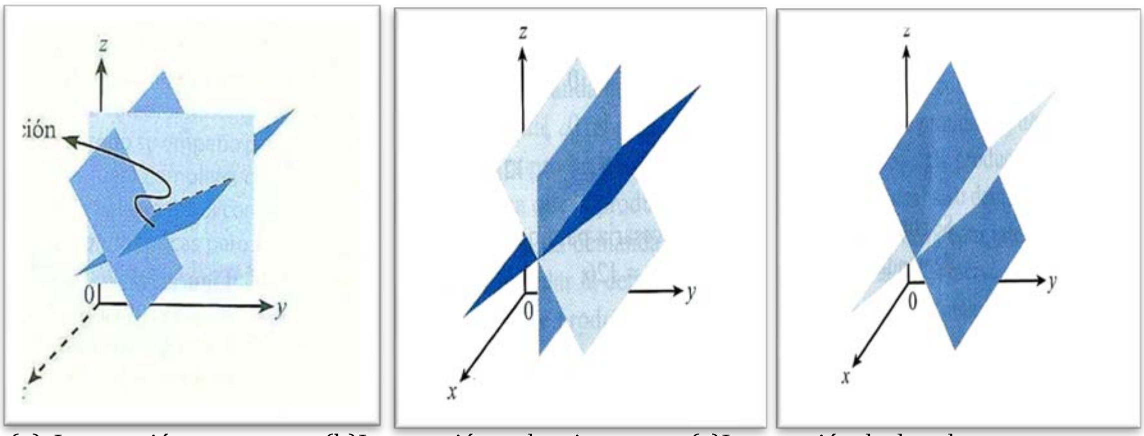
Fuente: Grossman (2008, p. 3)

A continuación se propone una autoevaluación y una serie de ejercicios de sistemas de ecuaciones. Creemos que con tales situaciones-problema que no están contextualizadas, el autor pretende que el estudiante se ejercite y maneje adecuadamente los objetos matemáticos que emergen en los sistemas de ecuaciones lineales (propiedades, procedimientos, definiciones, distintos lenguajes y argumentos). Luego se estudia m ecuaciones lineales con n incógnitas: eliminación de Gauss-Jordan y eliminación Gaussiana.

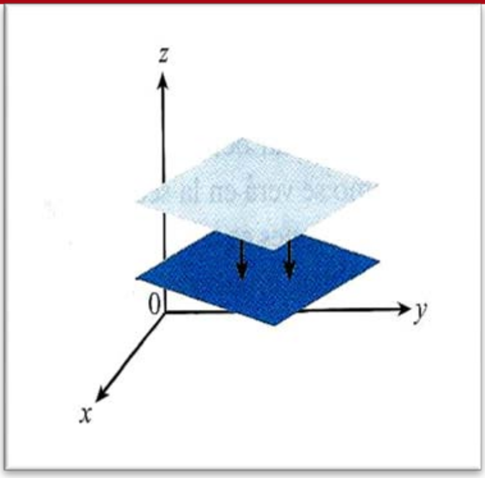
Se ejemplifica a través de un sistema 3 x 3, usando primero el método de eliminación de Gauss, para en seguida utilizar el método de reducción por renglones de la matriz de coeficientes del sistema y de la matriz aumentada. Se ejemplifica el caso particular de solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, con un número infinito de soluciones mediante el método de reducción por renglones de la matriz aumentada; revisándose además, el caso de los sistemas lineales inconsistentes (sin solución).

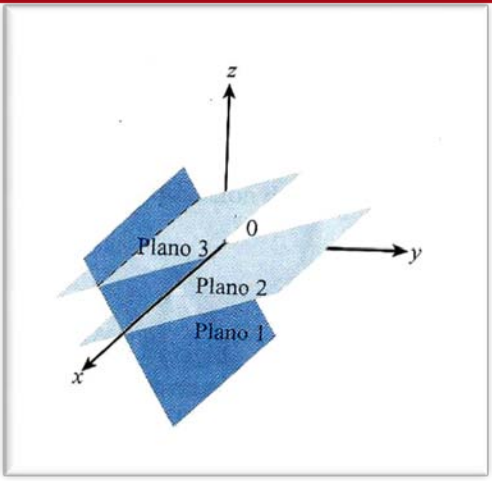
A manera de ejemplo, analiza la situación- problema contextualizado a la administración de recursos, explicándola con el método matricial de eliminación gaussiana; presenta también el tema (a manera de opcional) de análisis de insumo y producto, ejemplificando con un modelo de Leontief (ver detalle en la configuración epistémica) aplicado a un sistema económico con tres industrias.

Finalmente, presenta el análisis geométrico de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, en el cual muestra la ubicación de los planos para el sistema de solución única, sistema inconsistente (sin solución) y el sistema con infinitas soluciones, apoyándose de las gráficas que se muestran a continuación. (ver figura N° 16. a, b, c, d, e).



(a) Intersección en un punto.(b)Intersección en la misma recta.(c)Intersección de dos planos





(d)Planos paralelos (e)Dos planos paralelos y uno secante

Figura N° 16.Posiciones relativas de tres planos
Fuente: Grossman (2008, pp. 19 - 20)

Al final del capítulo, se aprecia diversas situaciones-problema del contexto de las finanzas, la economía y la administración a manera de problemas propuestos para el estudiante. En las siguientes secciones, se estudian a fondo los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con un análisis riguroso (mediante demostraciones) de las soluciones y en diferentes casos particulares usando la teoría de matrices, las operaciones con vectores fila y columna, así como el determinante de una matriz, enfatizando bastante en la parte algorítmica, pero no dejando de lado casos con situaciones contextualizadas de la vida cotidiana.

Además, dentro del capítulo, el autor considera un acápite dedicado al manejo de la calculadora científica para la resolución de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas; así como el software MATLAB 1.3. para resolver ejercicios y problemas de aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales con la ayuda de un ordenador.

Finalmente, debemos precisar que el método de análisis que hemos seguido para este texto, es el análisis de las configuraciones epistémicas empíricas contextualizadas y realistas (Font & Godino, 2006, pp. 67 - 98), utilizada para la descripción y análisis de configuraciones epistémicas de textos universitarios de matemáticas, proporcionada por el EOS. Además, que el autor ejemplifica algunos ejercicios del tema que se está estudiando, para en seguida plantear una serie de ejercicios principalmente para análisis algorítmico, y que se hace énfasis en la resolución de ecuaciones mediante métodos matriciales, de manera rigurosa. La contextualización de las situaciones problemas, es otro aspecto abordado por el autor, a diferencia del texto anterior.

✪ Tercer texto: Matemáticas para administración y economía, Haeussler (2008)

El autor empieza el capítulo cero, presentando la noción de ecuación de manera general, explicando las operaciones para resolver una ecuación mediante ecuaciones equivalentes, para luego estudiar en el objeto matemático ecuaciones lineales. Define una ecuación lineal a través de la forma $ax + b = 0$, con a y b constantes y $a \neq 0$. Muestra con ejemplos el procedimiento a seguir en la resolución de una ecuación de primer grado o lineal con una variable y al finalizar el capítulo presenta una cantidad considerable de ejercicios para que el alumno se ejercite y familiarice con las ecuaciones lineales en una variable.

En el primer capítulo, al cual le denomina aplicaciones de ecuaciones, desarrolla técnicas y conceptos básicos para la resolución de situaciones-problemas prácticos, al que le llama modelado. Observamos que en esta sección presenta situaciones problema contextualizadas como problemas de mezclas, situaciones que involucran el planteamiento y resolución de ecuaciones lineales de costo fijo, costo variable, costo total, ingreso y utilidad; además de situaciones de inversión, precios y rentas en los negocios. Al final de estecapítulo, nuevamente, propone una serie de problemas en contexto de la administración y los negocios, para que el estudiante analice y resuelva; en este caso creemos que la intención del autor, es que el estudiante luego de familiarizarse con los ejercicios algorítmicos, dé el siguiente paso y transite del lenguaje simbólico-algebraico al lenguaje verbal y viceversa, pero no introduce aún en la actividad matemática el lenguaje gráfico.

En el segundo capítulo, presenta la noción de par ordenado como un punto en el sistema de coordenadas rectangulares; divide el plano cartesiano en cuatro regiones, a las que también les llama cuadrantes, ubicando distintos puntos en cada cuadrante del plano y apoyado en una tabla; analiza la ubicación en el plano de los puntos, según el signo de las coordenadas; así como también precisa que la unión de varios puntos alineados en el plano, dan paso a la gráfica de una recta. Representa además, la gráfica de una ecuación lineal, usando la tabla de tabulación primero, determina algunos pares ordenados aleatorios, para luego ubicarlos en el plano y unirlos formándose la gráfica de la recta.

El tercer capítulo, denominado rectas y sistemas de ecuaciones, empieza con una situación en contexto, comentando acerca de la contaminación ambiental generada por las empresas industriales y el costo de gravamen que tienen que pagar las mismas a los estados en diferentes países para resarcir tal daño, plantea un modelo lineal inversamente proporcional entre la variable costo por tonelada (gravamen) y la variable toneladas de contaminación. Seguidamente introduce la noción de pendiente de recta como inclinación de la misma y cuya medida se da entre el cambio vertical en y y el cambio horizontal en x. Es decir, Haeussler (2008) plantea que:

Definición de pendiente de recta

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de recta es: (p. 117)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(= \frac{cambio\ vertical}{cambio\ horizontal}\right) \; ; \; x_1 \neq x_2$$

En seguida, a través de un ejemplo, se precisa que la orientación de la recta en el plano depende de la pendiente. Esto es, si la pendiente es cero, la recta es horizontal; cuando la pendiente no está definida, la recta es vertical; cuando la pendiente es positiva, la recta sube de izquierda a derecha; mientras que si la pendiente es negativa, la recta desciende de izquierda a derecha. Luego, presenta la ecuación de la recta expresada en diferentes formas, tanto en lenguaje algebraico como en lenguaje gráfico; así como, el caso particular de rectas paralelas y perpendiculares definidas en función de sus pendientes. Esto es:

Ecuación de la recta en la forma punto-pendiente,

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Fuente: Haeussler (2008, p. 118)

Ecuación de la recta en la forma pendiente - intersección,

$$\boxed{y = mx + b}$$

Fuente: Haeussler (2008, p. 119)

Ecuación de la recta en la forma lineal general,

$$\boxed{A\,x + By + C = 0}$$

Fuente: Haeussler (2008, p. 120)

Ecuación de la recta vertical,

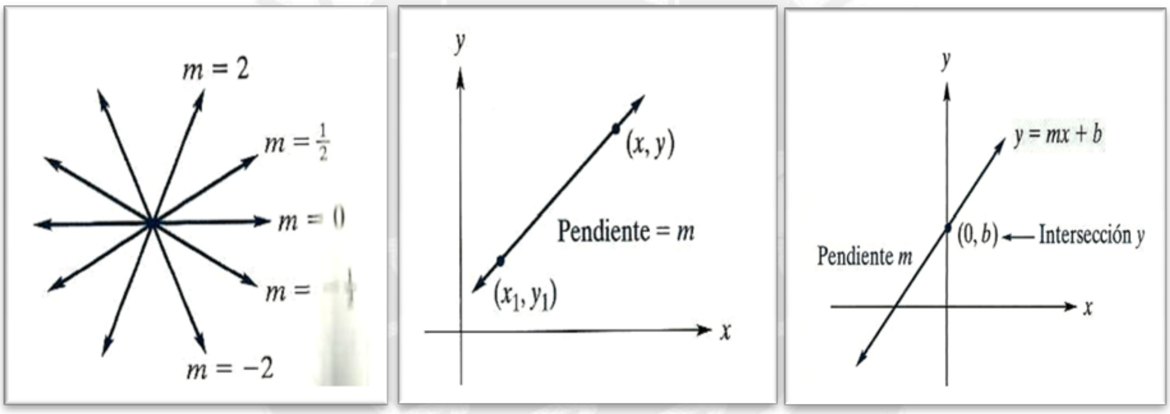
$$\boxed{x = a}$$

Ecuación de la recta horizontal,

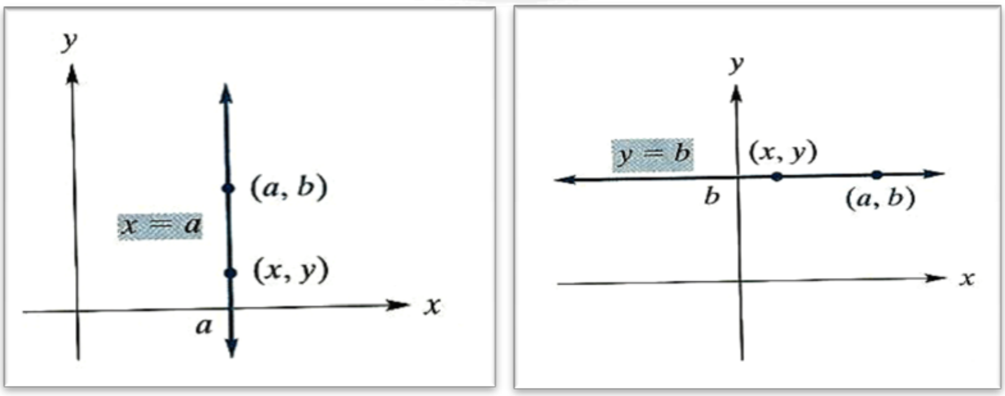
$$\boxed{y = b}$$

Fuente: Haeussler (2008, p. 120)

En la Figura siguiente, el autor representa en lenguaje gráfico las rectas asociadas las ecuaciones de recta anteriores. (ver figura N° 17)



(a) Pendientes de recta. (b) Recta de forma (c) Recta en la forma
punto-pendiente. pendiente intersección.



(d) Recta vertical (e) Recta horizontal.

Figura N° 17. Pendientes y ecuaciones de recta.
Fuente: Haeussler (2008, pp. 118 - 120)

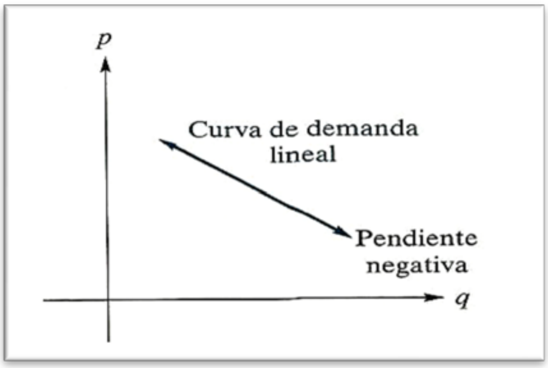
En el siguiente capítulo, presenta aplicaciones de las ecuaciones lineales contextualizadas al campo de la economía y la administración, situaciones de niveles de producción, curvas de demanda y de oferta lineal, realizando el análisis en lenguaje algebraico, simbólico y gráfico.

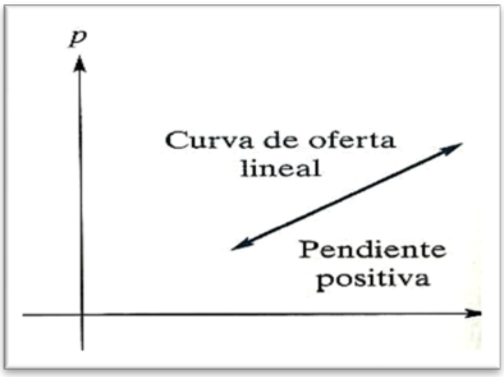
En otro capítulo, el autor aborda en primer lugar,los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, donde empieza mostrando una tabla con datos que conducen a formar un sistema de dos ecuaciones con dos variables y a través de ejemplos de ejercicios algorítmicos presenta los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, el método de eliminación por adición y el método de eliminación por sustitución, acompañados del respectivo análisis de las soluciones del sistema y el análisis gráfico, donde muestra diversas opciones de gráficas de recta en el plano cartesiano.

En segundo lugar, mediante un ejemplo, se explica el procedimiento de resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables por el método de eliminación por sustitución, para luego proponer una situación-problema de costos. Termina la sección ilustrando con un ejemplo de solución de sistemas de ecuaciones con parámetros, y proponiendo una cantidad considerable de ejercicios y problemas del contexto, como tarea para el alumno.

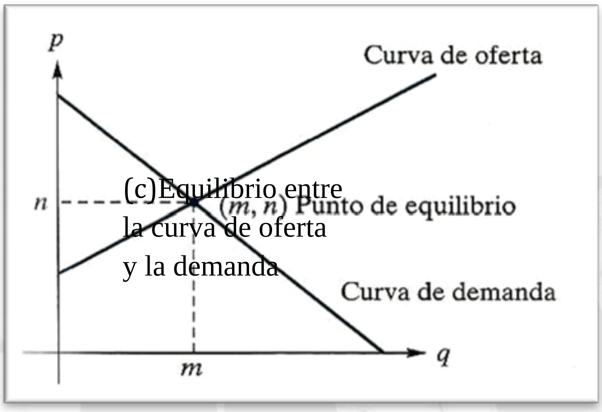
Seguidamente, desarrolla una sección a la que le denomina aplicaciones de sistemas de ecuaciones, centrándose en resolver sistemas de casos de equilibrio (nivel de equilibrio) entre la oferta lineal y la demanda lineal, en los que se relacionan las variables precios y cantidades; presenta el análisis algebraico y gráfico, así como situaciones-problemas resueltas sobre impuestos, acerca del equilibrio entre la ecuación de ingresos y la ecuación de costo total, punto de equilibrio, utilidad y pérdida.

El capítulo finaliza con situaciones – problemas propuestas del contexto, para que el estudiante profundice y afiance sus significados personales, las situaciones están contextualizadas al campo de la administración, la economía y los negocios, puesto que el texto está dirigido para estudiantes de estas especialidades. (ver figura N° 18).

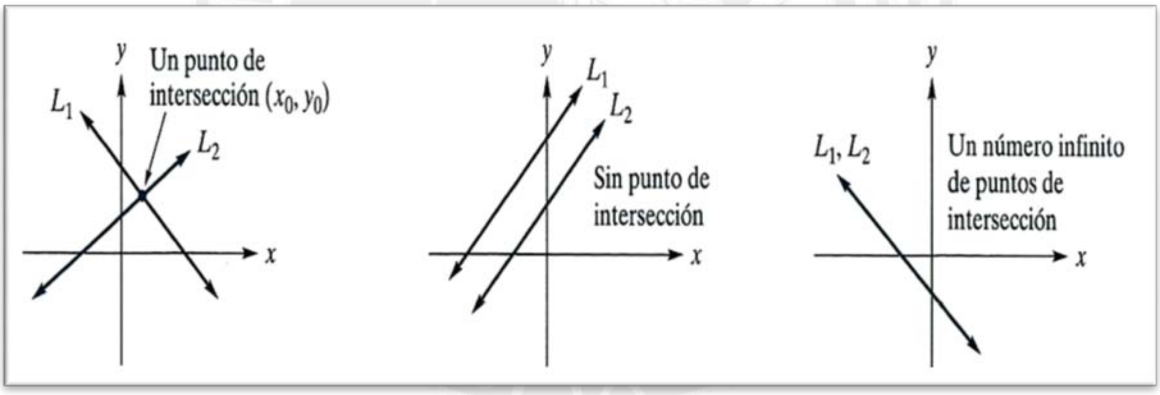




(a) Curva de demanda lineal(b)Curva de oferta lineal



(c)Equilibrio entre la curva de oferta y la demanda



(d)Sistema lineal con una solución, sin solución y con infinitas soluciones.

Figura N° 18.Equilibrio, oferta, demanda y sistema lineal
Fuente: Haeussler (2008, pp. 126 - 139)

En un capítulo posterior, relativo al estudio de las matrices, se vuelve a plantear los sistemas de ecuaciones lineales, con el objetivo de analizar el proceso de resolución utilizando la reducción de matrices a través de operaciones elementales con renglones. Compara la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables por el método de eliminación por reducción y luego por el método de reducción por renglones de la matriz aumentada del sistema. Por último, presenta el análisis matricial de sistemas homogéneos y no homogéneos de m ecuaciones lineales con $n$variables.

Para finalizar con la descripción de este texto, debemos señalar que el autor propone en las tareas a los estudiantes, situaciones problemas contextualizadas a la administración y los negocios, puesto que es hacia ese segmento al que se dirige, aparte de los ejercicios algorítmicos. Los lenguajes utilizados son los que señala el EOS, lenguaje verbal, algebraico, gráfico y se transita de ida y vuelta entre estos lenguajes. También aquí, como en las descripciones anteriores, hemos seguido la técnica del análisis de las configuraciones epistémicas empíricas contextualizadas de textos universitarios, ofrecida por el EOS; además, si bien el autor no cae en un formalismo matemático, sin embargo, justifica las proposiciones y propiedades planteadas, a través de argumentos y procedimientos deductivos y mediante la explicación.

- ✪ Cuarto texto: Módulo de Matemática paraAdministración Bancaria, IFB (2009)

En este texto, se empieza con la definición de las ecuaciones lineales, es decir se presenta la forma general de una ecuación de primer grado en una variable $ax + b = 0$, con a y b constantes reales y $a \neq 0$. En seguida, se sugieren algunos pasos para la resolución algebraica de las ecuaciones lineales, básicamente la transposición de términos en ambos miembros de la ecuación y se presenta una serie de ejercicios propuestos para la ejercitación algorítmica de los estudiantes.

Luego, en aras de contextualizar las ecuaciones lineales en una variable, se introduce las ecuaciones de costos fijos, costos variables, costo total, ingresos y utilidad, ejemplificando con situaciones-problemas del campo de la administración y los negocios, para finalizar la sección con algunos ejercicios propuestos para el análisis por parte de los estudiantes.

En la sección siguiente, el autor presenta las ecuaciones de primer grado con dos variables, es decir, sistema de dos ecuaciones con dos variables de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} &= \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{ey} &= \boldsymbol{f} \end{aligned}}$$

Fuente: Instituto de Formación Bancaria (2009, p. 286)

Para hallar el conjunto solución, se introduce directamente el método algebraico de eliminación, a los que les denomina: método de sustitución, método de igualación y método de reducción. Presenta cada uno de los métodos y lo desarrolla explicando paso a paso el procedimiento de resolución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, termina la sección planteando algunas situaciones que se resuelven con sistemas lineales. Podemos observar que hasta el momento solamente se presenta las ecuaciones en lenguaje algebraico y verbal, más no, en lenguaje gráfico.

De otra parte, tampoco se estudia los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables. Sin embargo, en el siguiente capítulo se estudia la ecuación de recta en lenguaje gráfico en el plano cartesiano, divide el plano cartesiano en cuatro cuadrantes representando diferentes pares ordenados en distintos cuadrantes del plano. Luego, grafica una ecuación lineal en el plano obteniendo los pares ordenados mediante la tabulación. Seguidamente presenta la noción de pendiente de recta como la inclinación con respecto al eje x, definiéndola como la razón de y con respecto a x de la siguiente manera.

$$\boxed{\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}}$$

Fuente: Instituto de Formación Bancaria (2009, p. 311)

Es preciso mencionar que, el autor olvida la restricción$x_1 \neq x_2$. En la figura siguiente, se representa gráficamente la definición de pendiente de recta.

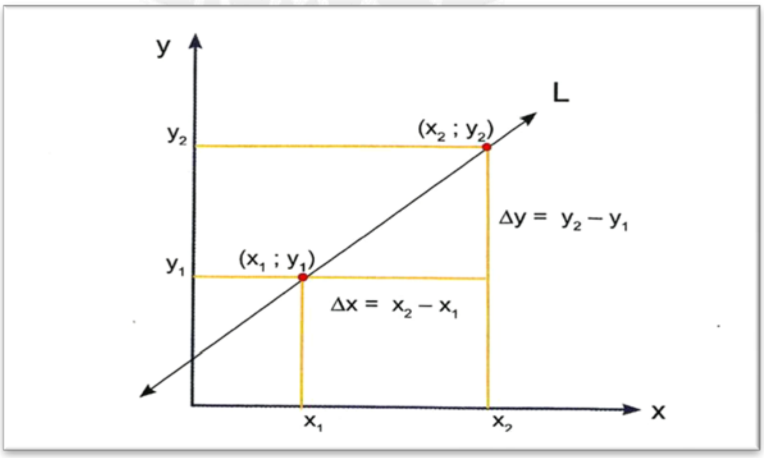


Figura N° 19. Pendiente de la recta dados dos puntos
Fuente: Instituto de Formación Bancaria (2009, p. 311)

Se hace el análisis de la pendiente para el caso de rectas horizontales paralelas al eje $x$con pendiente cero y para el caso particular de rectas verticales con pendiente no definida. Se estudia la ecuación de recta en sus distintas formas, tales como:

Ecuación de la recta punto-pendiente,

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Fuente: Instituto de Formación Bancaria (2009, p. 316)

Ecuación de la recta en la forma pendiente - intercepto,

$$\boxed{y = mx + b}$$

Fuente: Instituto de Formación Bancaria (2009, p. 319)

Ecuación de la recta en la forma general,

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Fuente: Instituto de Formación Bancaria (2009, p. 320)

Para terminar este capítulo, se presenta la ecuación de recta aplicada a la economía y la administración, es decir, se contextualiza específicamente a estos campos del conocimiento, puesto que estos significados institucionales están dirigidos a estudiantes de la carrera de administración bancaria, por lo que específicamente se introduce los modelos lineales de oferta y demanda, en los que se relacionan las variables precios y cantidades y el nivel de equilibrio entre la oferta y la demanda, así como el punto de equilibrio entre ingresos y costos.

Dicho análisis se hace en lenguaje verbal, algebraico y gráfico. (ver figura N° 20). Además, al final de la sección se presenta una serie de ejercicios y algunos problemas para ser analizados y resueltos por los estudiantes.

Finalmente, luego de hacer descrito el módulo de matemática que se viene utilizando como texto base en el Instituto de Formación Bancaria, para la carrera de Administración Bancaria, señalaremos que los aspectos que nos interesan son los lenguajes utilizados por el autor, las situaciones problema propuestas a los estudiantes, los procedimientos y argumentos usados, así como la articulación entre éstos elementos, lo cual quedará más claro en el siguiente acápite, con la C.E. de las tareas matemáticas.

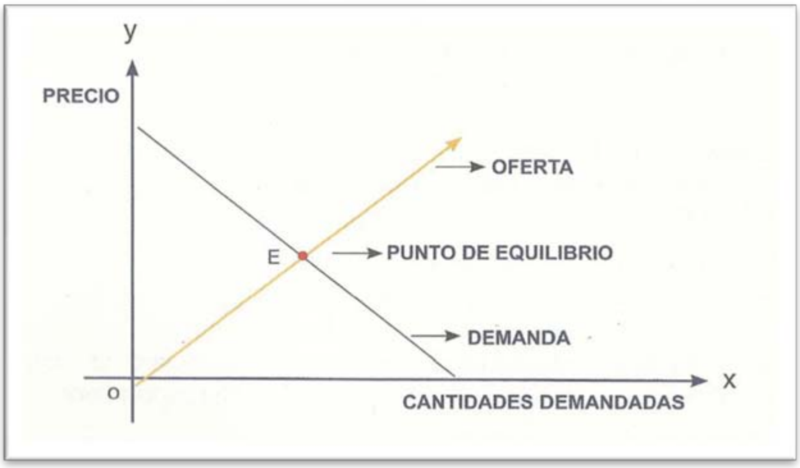


Figura N° 20.Modelos lineales de oferta y demanda y punto de equilibrio.
Fuente: Instituto de Formación Bancaria (2009, p. 321)

De otro lado, precisar que hemos seguido la técnica de análisis de las configuraciones epistémicas empíricas contextualizadas, que nos ofrece el EOS (Font & Godino, 2006, pp. 67 - 98) para la descripción de los objetos matemáticos presentes en las tareas matemáticas de ecuaciones lineales.

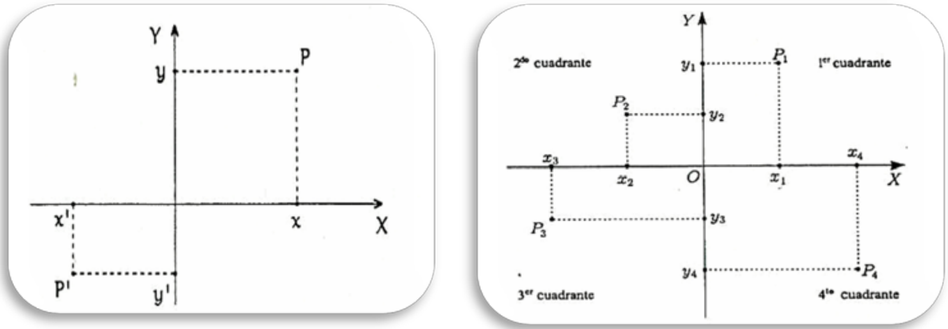
4.7. ANÁLISIS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS: CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DEL TEMA ECUACIONES LINEALES EN CADA TEXTO DE SUPERIOR.

En este apartado nos centraremos en el análisis de los objetos matemáticos emergentes e intervinientes en el tema matemático específico “ecuaciones lineales” en cada uno de los textos de matemática de educación superior que previamente hemos seleccionado y descrito. Es decir, haremos la configuración epistémica de los objetos matemáticos que intervienen a lo largo del desarrollo de las ecuaciones lineales (ecuaciones en una, dos y tres variables; sistemas de ecuaciones lineales y sus aplicaciones) y la forma en que el autor concibe y presenta el tratamiento del mencionado tema.

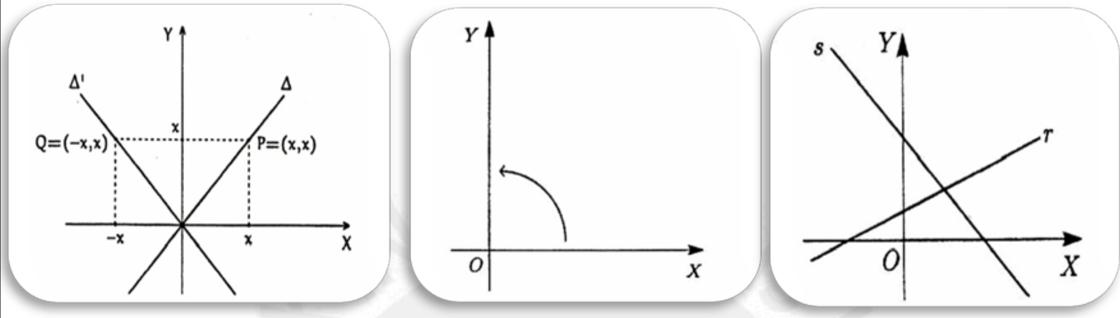
La finalidad es utilizar los resultados de dicho análisis, para la comparación y correlación con las tareas matemáticas asignadas a los alumnos de la educación secundaria pública de nuestro país.

❖ Cuadro N° 10. **Configuración epistémica del primer texto**

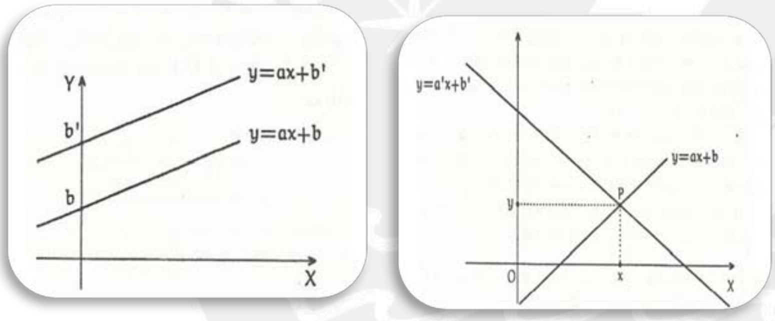
LENGUAJE
❖ **Verbal:** ▪ Coordenadas en el plano cartesiano (pares ordenados). ▪ Cuadrantes del plano. ▪ Diagonales del plano. ▪ Punto medio de un segmento. ▪ Inclinación de la recta y sentido de rotación. ▪ Ecuaciones de la recta, rectas paralelas, rectas secantes y familia de rectas. ▪ Ecuaciones paramétricas de una recta. ▪ Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: indeterminado, imposible y determinado. ▪ Dos ecuaciones lineales con tres incógnitas. ▪ Tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. ▪ Matriz de coeficientes y matriz aumentada del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. ❖ **Gráfico:**

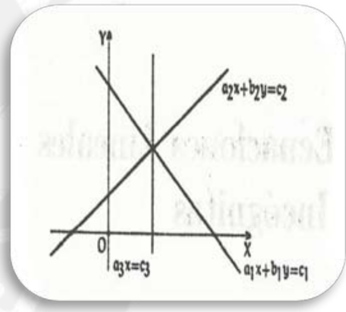


Puntos y rectas en el plano cartesiano

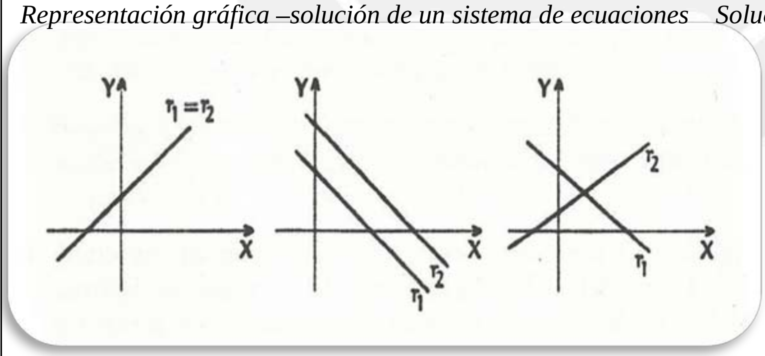


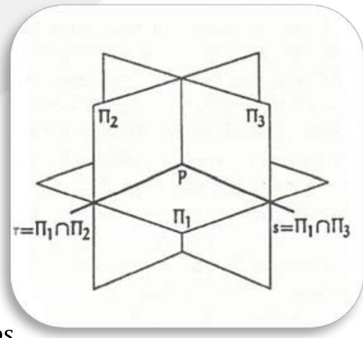
Rectas paralelas y secantes



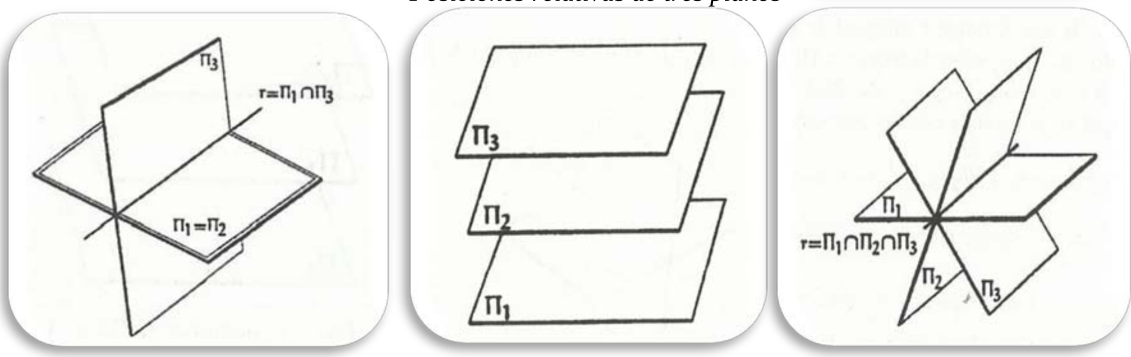


Representación gráfica –solución de un sistema de ecuaciones *Solución única de tres ecuaciones*





Posiciones relativas de tres planos



❖ **Simbólico:**

- $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$; $P = (x,y)$; $Q = (x,y)$; $x = y$; $x = -y$
- $x = \frac{a+a'}{2}$; $y = \frac{b+b'}{2}$; Δ ; Δ'
- $y = ax + b$; $ax + by = c$; $x = a + t(c-a)$; $y = b + t(d-b)$
- $$a = \frac{y-b}{x} \quad ; \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
- $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$
- $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$
- $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$; $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$
- $m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$; $m = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 d_3 \end{bmatrix}$

SITUACIONES - PROBLEMAS

- Sean $A = (a, 0)$ y $B = (0, b)$ con $ab \neq 0$. Escriba bajo la forma $\alpha x + \beta y = c$, la ecuación de la recta que contiene la altura del triángulo rectángulo OAB, bajada del vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa.
- Dados los puntos $A = (2{,}5)$, $B = (3{,}2)$ y $C = (-1{,}3)$, hallar las ecuaciones de las rectas r paralelas a AB pasando por C y s, perpendicular a AB también pasando por el punto C.
- Sean $a_1 x + b_1 y = c_1$ y $a_2 x + b_2 y = c_2$ rectas que se intersecan en el punto P. Pruebe que una recta del plano pasa por P si y solo si, su ecuación es de la forma $(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 +$

DEFINICIONES - CONCEPTOS

- Un sistema de coordenadas en el plano consiste en un par de ejes perpendiculares (eje de las abscisas y eje de las ordenadas) con el mismo origen O. A cada punto P del plano se hace corresponder un par ordenado $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, donde "x" es la abscisa y "y" la ordenada del punto P.
- Los ejes ortogonales OX y OY descomponen el plano en cuatro regiones, llamadas cuadrantes.
- A la recta "Δ" formada por los puntos $P = (x\,,y)$ se llama diagonal del plano si, y solamente si, $x = y$. Análogamente, un punto $Q = (x\,,y)$ pertenece a la bisectriz "Δ'" al segundo y

$\beta b_2)y = \alpha c_1 + \beta c_2$, donde α y β son números reales no simultáneamente nulos.

- En el sistema mostrado, atribuya sucesivamente valores a los parámetros m, n de modo que las tres ecuaciones representen un único plano, dos planos o tres planos:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = m \\ 3x - 6y - 9z = n \\ -2x + 4y + 6z = 1 \end{cases}$$

- El bronce es una aleación de cobre y zinc, en la cual el porcentaje de cobre varía generalmente entre 60% y 70%. Usando dos tipos de bronce, uno con 62% y otro con 70% de cobre, se desea obtener una tonelada de bronce con exactamente 65% de cobre. ¿Cuántos kilos del primer tipo de bronce y cuántos kilos del segundo deben ser usados?
- Considerando los cuatro vectores columna $\boldsymbol{u} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{v} = (b_1, b_2)$, $\boldsymbol{w} = (c_1, c_2)$ y $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2)$, escriba el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas de la forma $x.\boldsymbol{u} + y.\boldsymbol{v} + z.\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}$ y, a partir de ahí, interprete la coincidencia o paralelismo y la concurrencia de los planos definidos por las ecuaciones $a_1x + b_1y = d_1$ y $a_2x + b_2y = d_2$.

Podemos apreciar, que las situaciones problemas planteados se caracterizan por usar el formalismo matemático y la rigurosidad; no se observa la contextualización.

cuarto cuadrante, si y solamente si, $x = -y$.

- Sea r una recta no vertical que corta al eje OY en un punto cuya ordenada es b. Afirmamos que para todos los puntos de la recta, con $x \neq 0$, el cociente $(y - b) / x$ tiene el mismo valor. A dicha constante se llama inclinación de la recta no vertical.
- Dos rectas son paralelas si, y solamente si, poseen la misma inclinación y cortan al eje OY en puntos distintos.
- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se dice indeterminado, imposible o determinado, cuando admite más de una solución, ninguna solución o una única solución, respectivamente. Equivalentemente, el sistema lineal es indeterminado, imposible o determinado, conforme las rectas r_1 y r_2 representadas por las dos ecuaciones, coincidan, sean paralelas o sean concurrentes respectivamente.
- Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes, cuando admiten las mismas soluciones. Cuando se sustituye una de las ecuaciones del sistema por la suma de ésta ecuación con un múltiplo de la otra, se obtiene un sistema equivalente.
- Se dice que una matriz es escalonada cuando el primer elemento no nulo de cada una de sus filas se sitúa a la izquierda del primer elemento no nulo de la fila siguiente. Además, las filas que tuvieran todos sus elementos iguales a cero deben estar debajo de los demás.

PROCEDIMIENTOS

- Cálculo de la constante de inclinación de la recta no vertical (pendiente), mediante:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Método de eliminación para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con

PROPOSICIONES - PROPIEDADES

- Dada una recta r, el punto $P = (x, y)$ pertenece a r, si y solamente si, vale $y = ax + b$, con a y b reales.
- Dos rectas son paralelas si y solamente si, poseen la misma inclinación a y cortan al eje OY en puntos distintos.
- Dos rectas que posean más de un punto

dos incógnitas, tanto analíticamente como geométricamente, mediante la intersección de las rectas.

- Dependencia o independencia lineal de los vectores-fila de la matriz del sistema y de la matriz aumentada.

- Método de escalonamiento o eliminación gaussiana para resolver sistemas lineales y sus respectivos subprocesos basados en la sucesión de operaciones elementales que se hacen a la matriz aumentada del sistema, tales como:
  (1) Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema;
  (2) Substituir una ecuación del sistema por su suma con un múltiplo de otra ecuación del mismo sistema.

en común deben coincidir; luego el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es indeterminado si y solamente si, sus ecuaciones definen la misma recta.

- El sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es imposible cuando las rectas son paralelas. Equivalentemente, esto ocurre cuando el determinante la matriz asociada al sistema es igual a cero.
- El sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es determinado cuando las rectas son concurrentes, es decir, cuando el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.
- Equivalencia de un sistema lineal: todo sistema es equivalente a un sistema escalonado (método de escalonamiento), en esta propiedad se basan los métodos algebraicos de resolución.

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** Sea la recta no-vertical r que corta al eje OY en un punto de ordenada b, afirmamos que, para todos los puntos $P = (x, y)$ de la recta r, con $x \neq 0$, el cociente $(y - b)/x$ tiene el mismo valor.

Demostración: Se toma dos puntos $P_1(x_1\,,\, y_1)$ y $P_2(x_2\,,\, y_2)$, con abscisas $x_1 \neq x_2$ no nulas sobre la recta r, se proyecta sobre el plano la ordenada al origen b y las abscisas x_1, x_2 formándose dos triángulos rectángulos; luego por semejanza de triángulos se tiene que:

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2}$$

Vemos que, en efecto, el cociente $(y - b)/x$ no depende de la posición del punto $P = (x, y)$ sobre la recta r. Luego dicho cociente es la constante a y representa la inclinación de la recta no vertical r (pendiente).

❖ **Tesis:** Sean r y r' dos rectas representadas por ecuaciones lineales y dos puntos sobre las mismas $A = (a, b)$ y $A' = (a', b')$ respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Las rectas r y r' son paralelas o coinciden;
(2) Los puntos O, A y A' son colineales;
(3) $a'b - b\,a' = 0$;
(4) Existe $k \neq 0$ tal que $a' = k.a$ y $b' = k.b$.

Demostración: Como r es perpendicular a OA y r' perpendicular a OA', si r y r' son paralelas o coinciden, los segmentos OA y OA' están sobre la misma recta, luego $O,\ A\ y\ A'$ son colineales. Por tanto $(1) \Leftrightarrow (2)$.
Si $O,\ A\ y\ A'$ son colineales, entonces se tiene que $a'b - ba' = 0$. Luego $(2) \Leftrightarrow (3)$.

De manera similar se verifica las afirmaciones restantes.

❖ **Tesis:** (1) Dos rectas que posean más de un punto en común deben coincidir. Luego el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es indeterminado si y solamente si, sus ecuaciones definen la misma recta; (2) el sistema es imposible si las rectas son paralelas y (3) El sistema lineal es determinado cuando no es indeterminado ni imposible.

Demostración: (1) basta probar a partir de la matriz aumentada del sistema lineal que:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0.$$

(2) El sistema será imposible si, y solamente si, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (determinante de la matriz), pero por lo menos uno de los números $a_1c_2 - a_2c_1$; $b_1c_2 - b_2c_1$ es diferente de cero.

(3) Esto ocurre cuando las rectas del sistema lineal son concurrentes; basta probar que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es no nulo:$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

❖ **Tesis:** Decimos que los vectores $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ (en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ó $\mathbb{R}^4$) son linealmente independientes cuando ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.

Demostración: basta probar que no se pueden encontrar números α_1, α_2 tales que $v_3 = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2$ ni números β_1, β_3 tales que $v_2 = \beta_1v_1 + \beta_3v_3$, ni tampoco existen γ_2, γ_3 tales que $v_1 = \gamma_2v_2 + \gamma_3v_3$. Además, si algún vector del conjunto puede escribirse como combinación lineal de los demás, se dice que los vectores del conjunto dado son linealmente dependientes.

❖ **Tesis:** Los tres planos $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$**y**$\boldsymbol{\Pi_3}$de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tienen un único punto en común. En este caso el sistema es determinado.

Demostración: basta probar que, el sistema lineal, posee una única solución si, y solamente si, los vectores-fila de la matriz del sistema lineal $l_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $l_2 = (a_2, b_2, c_2)$ y $l_3 = (a_3, b_3, c_3)$ son linealmente independientes.

Los argumentos que utiliza el autor para justificar y demostrar las proposiciones, propiedades, teoremas y corolarios de las ecuaciones lineales, se caracterizan por ser rigurosos desde el punto de vista formalista de las matemáticas. Para ello se recurre a los axiomas de la teoría de matrices y determinantes, a la combinación lineal de vectores, al método inductivo – deductivo o demostraciones por reducción al absurdo.

❖ Cuadro N° 11. **Configuración epistémica del segundo texto**

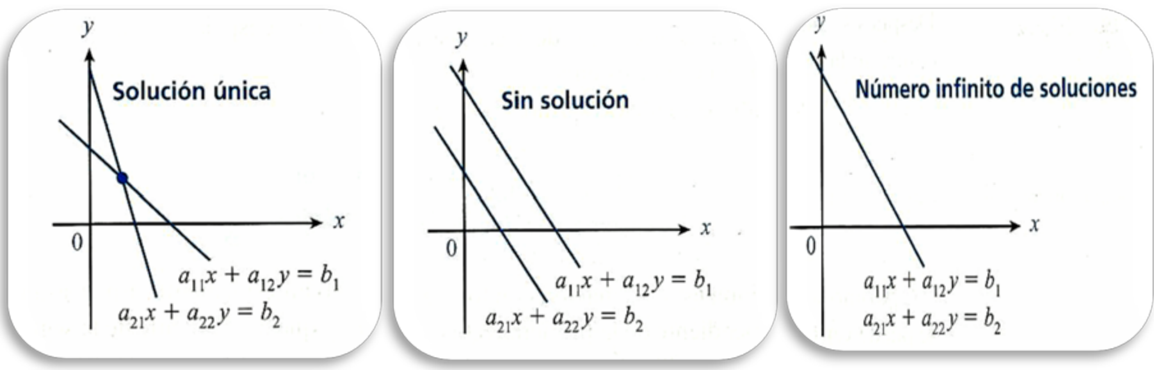
LENGUAJE

❖ **Verbal:**

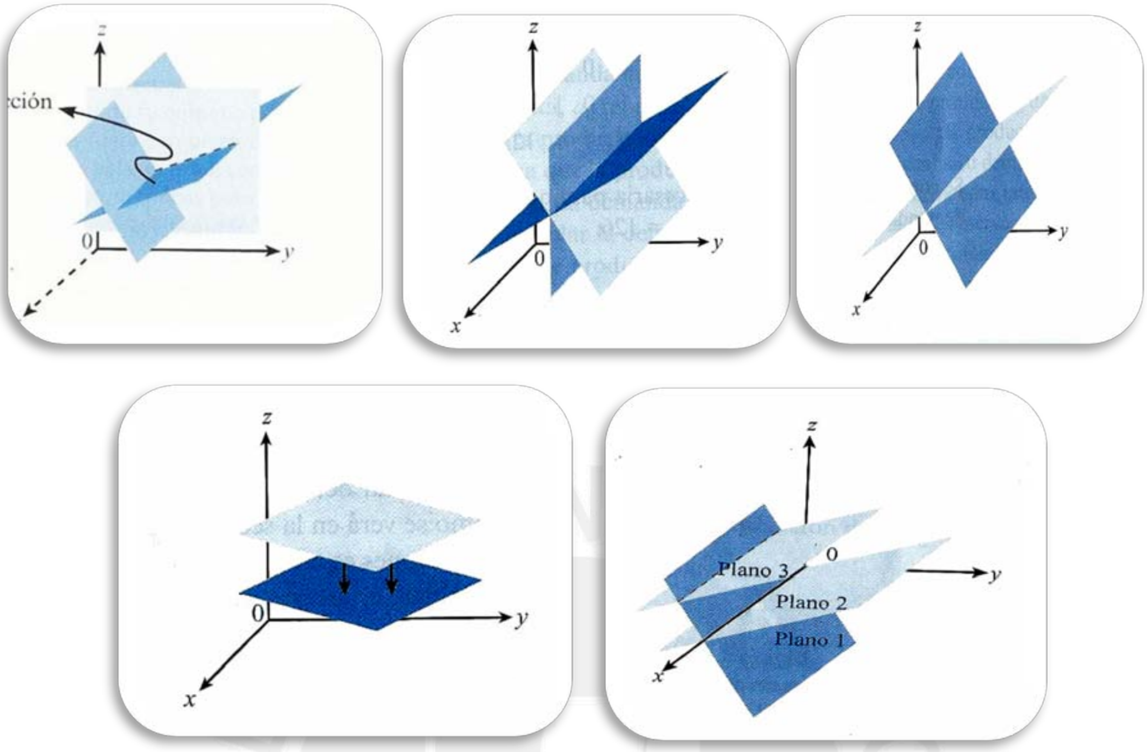
- Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Sistema con solución única, sistema con un número infinito de soluciones, sistema sin solución.
- Sistemas inconsistentes y consistentes, sistemas equivalentes.
- m ecuaciones lineales con n incógnitas.
- Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.
- Pendiente de una recta.
- Ecuación de recta en su forma pendiente-ordenada al origen.
- Rectas paralelas, rectas perpendiculares.
- Eliminación gaussiana, eliminación de Gauss-Jordan, sustitución hacia atrás.
- Sustitución, eliminación, reducción por renglones, operaciones elementales con renglones.
- Matriz, matriz de coeficientes, matriz aumentada.
- Forma escalonada reducida por renglones y pivote de una matriz.
- Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas.
- Ejemplos de aplicación: administración de recursos, análisis de insumo-producto, distribución de calor, flujo de tráfico.
- El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias.
- Geometría de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
- Manejo de la calculadora científica y del software MATLAB en la solución de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Sistemas homogéneos de ecuaciones, solución trivial o solución cero.
- Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.
- Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales.
- Sistema homogéneo asociado.

❖ **Gráfico:**

Representación gráfica de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas



Posiciones relativas de tres planos de la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales



❖ **Simbólico:**

- $y = mx + b$; $ax + by = c$; $b \neq 0$; $m = -a/b$; $m_2 = -1/m_1$
- $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad ; \quad x_1 \neq x_2 \ ; x_2 - x_1 = 0 \ ; \quad y_2 \neq y_1$$
- $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} a_{11}a_{22}\,x + a_{12}a_{22}\,y = a_{22}b_1 \\ a_{12}\,a_{21}\,x + a_{12}a_{22}\,y = a_{12}b_2 \end{cases}$
- $$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \quad ; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0 \quad ; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0$$
- $\begin{cases} 2\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 = 18 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 = 24 \\ 3\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 4 \end{cases}$; $(4, -2, 3)$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$
- $R_i \longrightarrow c\,R_i$; $R_j \longrightarrow R_j + c\,R_i$; $R_i \rightleftarrows R_j$; $A \longrightarrow B$

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad ; \quad m \times n$$
- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$
- $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; $A\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$; $A\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$

SITUACIONES - PROBLEMAS	DEFINICIONES - CONCEPTOS
▪ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales? a) No existe una solución b) La gráfica del sistema está sobre el eje y. c) La gráfica de la solución es una recta d) La gráfica de la solución es el punto de intersección de dos líneas. ▪ Encuentre las soluciones (si las hay) del sistema dado; además, calcule el valor de $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. $4x + 7y = 3$ $7x - 4y = 3$ ▪ Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Suponga que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$, $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda. ▪ Utilice el método de eliminación de Gauss – Jordan para encontrar, si existen,	▪ Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. ▪ Sistemas inconsistentes y consistentes: Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución. Se dice que un sistema que tiene al menos una solución es **consistente**. ▪ Una matriz es un arreglo rectangular de números. Una matriz de m renglones con n columnas se llama matriz de $m \times n$. ▪ Forma escalonada reducida por renglones y pivote: Una matriz se encuentra en la forma escalonada reducida por renglones si se cumplen las siguientes condiciones. i. Todos los renglones cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz. ii. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1 iii. Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en

todas las soluciones del sistema dado:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

- Resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

- Encuentre la matriz A y los vectores $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{b}$tales que el sistema representado por la siguiente matriz aumentada se escriba en la forma $A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$y resuelva el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

Las situaciones problemas sobre ecuaciones lineales, sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, se caracterizan por la rigurosidad matemática, el uso de propiedades, procedimientos y definiciones como matrices y determinantes.

Se aprecia la resolución de sistemas lineales con métodos matriciales, como las operaciones elementales con renglones y el método de Gauss-Jordán. Incluso la contextualización de los problemas como la matriz de Leontief aplicado a las industrias.

el renglón de arriba.

iv. Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón se llama pivote para ese renglón.

- Geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:
  Considere un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cada ecuación del sistema es la ecuación de un plano; entonces existen seis posibilidades respecto de su solución:

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta
3. Los tres planos coinciden
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos (sistema inconsistente)
6. Dos de los planos coinciden en una recta. El tercer plano es paralelo a dicha recta, de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros.

   En todos los casos el sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o es inconsistente.

- Un sistema general de m x n ecuaciones lineales se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \cdots, b_m$, son cero. Para este sistema lineal general existen tres sistema posibilidades: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga un número infinito de soluciones.

PROCEDIMIENTOS

PROPOSICIONES - PROPIEDADES

- La pendiente de una recta que pasa por los puntos $(x_1\,,\,y_1)$ y $(x_2\,,\,y_2)$ está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}$$

- Sistemas equivalentes:
  Si a cada una de las ecuaciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se multiplica por un número, el nuevo sistema que se obtiene es equivalente al sistema inicial. Esto quiere decir que cualquier solución del primer sistema es solución del equivalente y viceversa.

- Método de eliminación de Gauss-Jordan:

i. Se divide la primera ecuación entre una constante para convertir el coeficiente de x_1 igual a 1.

ii. Se eliminan los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuación. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuación, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se elimina.

iii. Se divide la segunda ecuación entre una constante para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usa la segunda ecuación para “eliminar” los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

iv. Se divide la tercera ecuación entre una constante para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y luego se usa esta tercera ecuación para “eliminar” los términos de x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

- Operaciones elementales con renglones en la matriz aumentada:

i. Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.

ii. Sumar un múltiplo de un renglón otro renglón.

- Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$
- Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.
- La pendiente de una recta que pasa por dos puntos está dada por el cociente de la diferencia de las segundas componentes entre la diferencia de las primeras componentes de dichos puntos.
- Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es indefinida.
- Cualquier recta se puede describir al escribir su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.
- Dos rectas distintas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.
- Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$ $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente $m = -a/b$.
- Las rectas paralelas al eje x tienen una pendiente igual a cero.
- Las rectas paralelas al eje y tienen una pendiente indefinida.
- Para dos rectas que son perpendiculares, el producto de sus pendientes es igual a - 1.
- Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: tiene solución única si y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$; y, no tiene solución o tiene infinitas soluciones si y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0$.
- El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se llama reducción por renglones.
- En toda matriz en forma escalonada reducida por renglones se encuentra también la forma escalonada por renglones, pero el inverso no es cierto.
- Siempre se puede reducir una matriz a la forma escalonada reducida por renglones o a la forma escalonada por renglones realizando operaciones elementales con renglones.
- Una matriz puede ser equivalente, en

iii. Intercambiar dos renglones. ▪ Método de Eliminación Gaussiana Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.	sus renglones, a más de una matriz en forma escalonada por renglones. ▪ Si se desea encontrar todas las soluciones a un sistema lineal no homogéneo de la forma $A\,\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$, basta con encontrar una solución al sistema no homogéneo y todas las soluciones al sistema homogéneo asociado $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** El sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i. Tiene solución única si y sólo sí, $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

ii. No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0.$$

❖ **Demostración:** Geométricamente es fácil justificar lo que sucede con las soluciones del sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables.

(1) Ambas ecuaciones del sistema lineal antes mencionado son dos líneas rectas.

(2) Una solución al sistema lineal es un punto $(x,\ y)$ que se encuentra sobre las dos rectas.

(3) Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersecan en un solo punto (solución única), esto ocurre cuando el determinante de la matriz de coeficientes asociada al sistema es diferente de cero.

(4) Si las dos rectas son paralelas, entonces nunca se intersecan, es decir, no tienen puntos en común (no hay solución). Algebraicamente, esto ocurre cuando el determinante de la matriz de coeficientes asociada al sistema es cero.

(5) Si las dos rectas son paralelas, entonces son la misma recta, es decir, son coincidentes (hay infinitas soluciones, puesto que tienen un número infinito de puntos en común). Algebraicamente, esto ocurre también, cuando el determinante de la matriz de coeficientes asociada al sistema es cero.

❖ **Tesis:** El sistema lineal general homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es decir, sistema de m x n, tiene tres posibilidades respecto de su solución: (1) que no tenga soluciones; (2) que tenga una solución o (3) que tenga un número infinito de soluciones.

Demostración. La demostración es deductiva y tiene los siguientes argumentos:

(1) Supongamos que el sistema lineal homogéneo de m x n tiene una solución.

(2) Basta probar, que la reducción por renglones nos conduce al sistema siguiente:

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{x_1} & & & = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{x_2} & & = \mathbf{0} \\ & & \vdots & \\ & & \boldsymbol{x_n} & = \mathbf{0} \end{array}$$

(3) Puesto que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución del sistema lineal homogéneo, entonces solamente hay dos posibilidades: que la solución trivial o solución cero es la única solución; o, existe un número infinito de soluciones además de ésta.

(4) Las soluciones distintas a la solución cero se llaman soluciones no triviales.

(5) Para que el sistema lineal homogéneo tenga infinitas soluciones, la solución de cada una de las variables deberá estar en función de otra variable. Además de cumplirse que la reducción por renglones debe tener por lo menos una fila de ceros, entonces el sistema equivalente será de la forma:

$$\begin{array}{llllll} \boldsymbol{x_1} & + & \boldsymbol{x_2} & & & = \mathbf{0} \\ & & \boldsymbol{x_2} & + & + \boldsymbol{x_n} & = \mathbf{0} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \mathbf{0} & = \mathbf{0} \end{array}$$

❖ **Tesis:** El sistema lineal homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es decir, sistema de m x n , tiene un número infinito de soluciones si $n > m$.

Demostración. La demostración es deductiva basada en los siguientes argumentos.

(1) Supongamos que, en términos generales, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo de m x n siempre tendrá un número infinito de soluciones.

(2) Para apreciar esto, si el sistema homogéneo sólo tuviera la solución trivial, la reducción por renglones conduciría al sistema:

$$\begin{array}{llll} \boldsymbol{x_1} & & & = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{x_2} & & = \mathbf{0} \\ & & \vdots & \\ & & \boldsymbol{x_n} & = \mathbf{0} \end{array}$$

(3) Además, posiblemente hayan algunas ecuaciones adicionales de la forma $0 = 0$.

(4) Pero este sistema tiene al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Puesto que la reducción por renglones no cambia ni el número de ecuaciones ni el número de incógnitas, se tiene una contradicción en la suposición inicial,

(5) En consecuencia, el sistema lineal homogéneo tiene infinitas soluciones si y solo si, tiene más incógnitas que ecuaciones, es decir, $n > m$.

❖ **Tesis:** Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ soluciones al sistema no homogéneo $A\,\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$. Entonces su diferencia $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución al sistema homogéneo de la forma $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración: Usando las leyes distributivas para la multiplicación de matrices, esto es:

$$A\,(B\;+C)\;=AB\;+AC$$
$$(A\;+B)\,C\;=AC\;+BC$$

Basta probar que: $A\,(\mathbf{x}_1\;-\;\mathbf{x}_2)\;=\;A\,\mathbf{x}_1\;-\;A\,\mathbf{x}_2\;=\boldsymbol{b}\;-\boldsymbol{b}\;=\mathbf{0}$

❖ **Tesis:** Sea $\mathbf{x}$una solución particular al sistema no homogéneo $A\,\mathbf{x}\;=\boldsymbol{b}$y sea $\mathbf{y}$ otra solución al mismo sistema. Entonces existe una solución $\mathbf{h}$ al sistema homogéneo$A\,\mathbf{x}\;=\mathbf{0}$, tal que:

$$\mathbf{y}\;=\;\mathbf{x}\;+\;\mathbf{h}$$

Demostración: Si $\mathbf{h}$está definida por $\mathbf{h}\;=\mathbf{y}\;-\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{h}$ es una solución del sistema lineal homogéneo por el teorema anterior, en consecuencia $\mathbf{y}\;=\;\mathbf{x}\;+\;\mathbf{h}$.

Debemos precisar que los argumentos utilizados por el autor para las ecuaciones lineales y para resolver sistemas de ecuaciones lineales, son claros y categóricos, usando para ello procedimientos de la teoría de matrices y determinantes, así como las representaciones gráficas de los sistemas de ecuaciones (lenguaje gráfico). Además de la rigurosidad matemática que la utiliza con bastante énfasis, la ejemplificación y la explicación son usadas con la finalidad de incidir en la comprensión de los estudiantes lectores.

A continuación hacemos el análisis de los distintos objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas que propone el autor del texto “matemáticas para administración y economía” considerado para el análisis y que ya hemos descrito. Es decir, presentamos la configuración epistémica de los objetos matemáticos que intervienen a lo largo del desarrollo del tema ecuaciones lineales (ecuaciones en una, dos y tres variables; sistemas de ecuaciones; aplicaciones al campo de la administración, la economía y los negocios) y la forma en que el autor plantea las distintas actividades matemáticas.

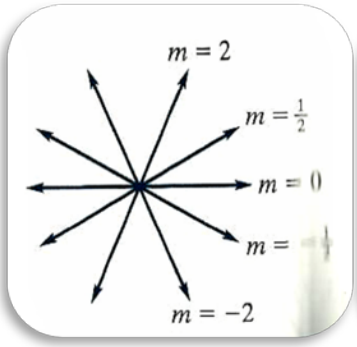
❖ Cuadro N° 12. **Configuración epistémica del tercer texto**

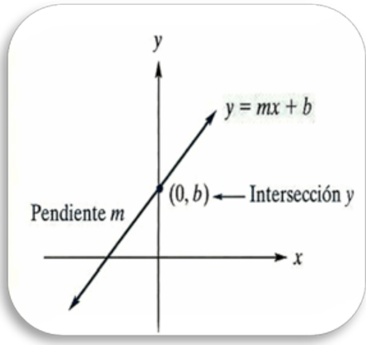
LENGUAJE
❖ **Verbal:** ▪ Ecuaciones, expresiones, igualdad, lados o miembros, incógnitas, constantes. ▪ Restricciones sobre las variables, solución o raíz de una ecuación. ▪ Ecuaciones equivalentes, ecuaciones lineales, resolución de una ecuación lineal. ▪ Propiedad distributiva, simplificar, restar de ambos miembros, dividir ambos

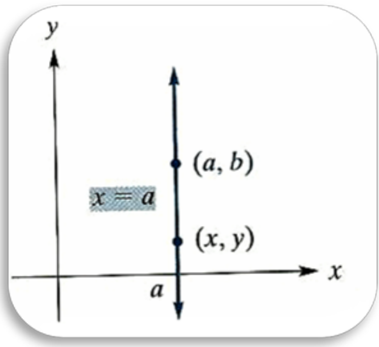
miembros entre.

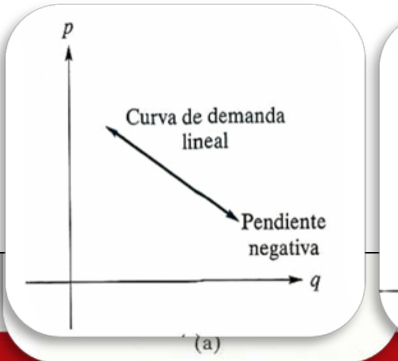
- Aplicaciones de ecuaciones, resolver problemas prácticos, modelado.
- Modelado de situaciones por medio de ecuaciones lineales.
- Costo fijo, costo variable, costo total, Ingreso total, utilidad, precios, inversión.
- Sistema de coordenadas rectangulares, gráficas.
- Plano cartesiano, cuadrantes, par ordenado.
- Recta vertical, recta horizontal, intersecciones con los ejes y gráficas.
- Pendiente de una recta, cambio vertical, cambio horizontal, pendiente positiva y negativa.
- Recta que sube de izquierda a derecha, recta que desciende de izquierda a derecha.
- Ecuaciones de rectas, formas de ecuaciones de rectas.
- Forma punto-pendiente, forma pendiente-intersección o pendiente ordenada al origen.
- Ecuación lineal general (o ecuación de primer grado) en dos variables.
- Rectas paralelas y rectas perpendiculares.
- Curvas de demanda y oferta lineales.
- Determinación de una ecuación de oferta y determinación de una ecuación de demanda.
- Sistemas de ecuaciones lineales, sistema equivalente.
- Sistema lineal con una solución, sin solución y con infinitas soluciones.
- Método de eliminación por adición y por sustitución.
- Sistemas lineales con dos variables, sistemas con tres variables.
- Familia de soluciones con uno y dos parámetros.
- Resolución de sistemas mediante la reducción de matrices.
- Operaciones elementales con renglones, ecuaciones matriciales.
- Matriz de coeficientes, matriz aumentada, matriz reducida
- Sistemas homogéneos y no homogéneos, solución trivial, matriz insumo-producto de Leontief.

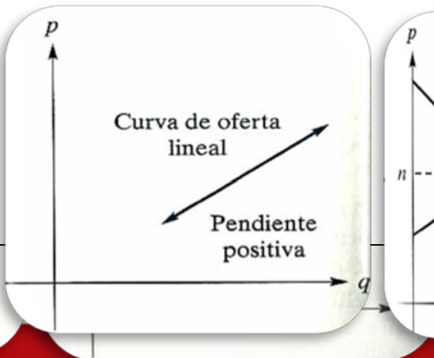
❖ **Gráfico:**

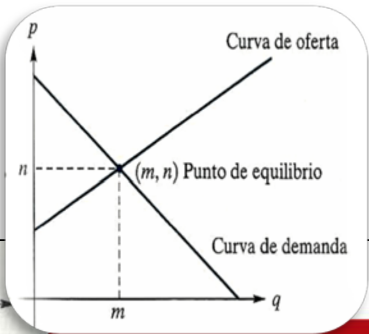


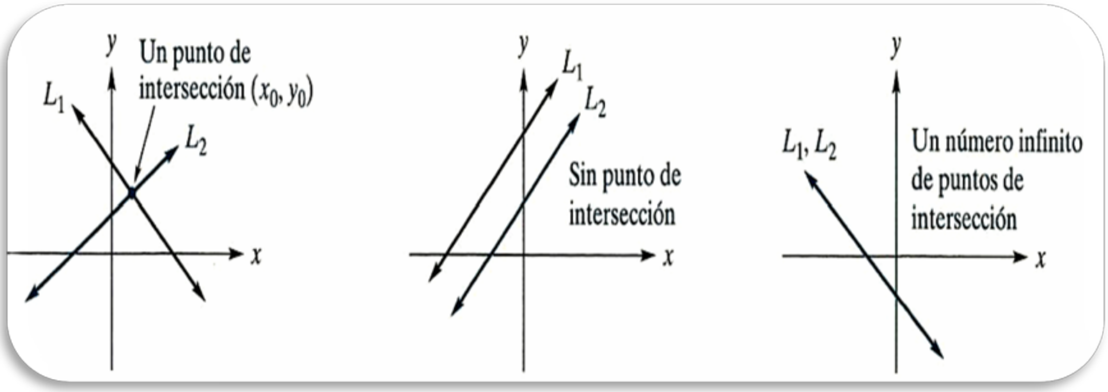


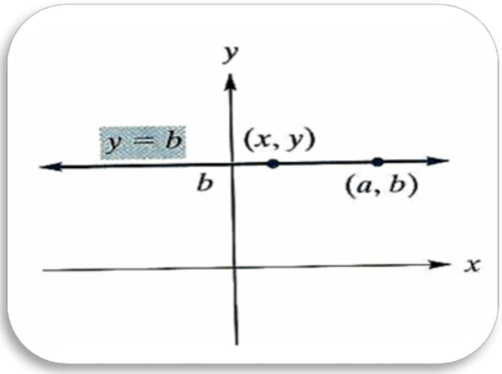


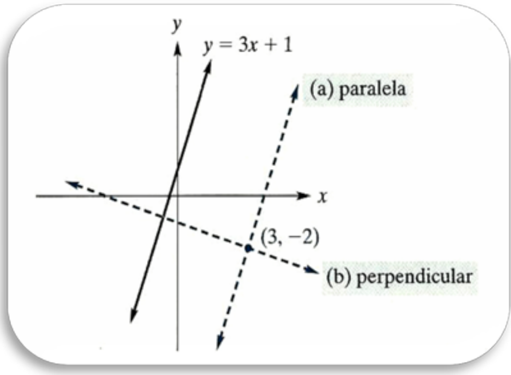












❖ **Simbólico:**

- $ax + b = 0$; $a \neq 0$; $=$; $\neq$; p ; q
- $P\,(a, b)$; $(4, 2) \neq (2, 4)$; (x_1, y_1) , $x_1 > 0$, $y_1 > 0$
- (x_2, y_2) , $x_2 < 0$, $y_2 > 0$; (x_3, y_3) , $x_3 < 0$, $y_3 < 0$
- (x_4, y_4) , $x_4 > 0$, $y_4 < 0$
- $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(= \frac{cambio\ vertical}{cambio\ horizontal}\right)$$
- $y - y_1 = m(x - x_1)$; $y = mx + b$; $A\,x + By + C = 0$
- $x = a$; $x = b$; $m_1 = m_2$; $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
- L_1 ; L_2 ; $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = 3 \end{cases}$; $A\,x + By + Cz = D$

- $\begin{cases} p = -\frac{1}{180}q + 12 \\ p = \frac{1}{300}q + 8 \end{cases}$; $y_{TC} = y_{VC} + y_{FC}$
- $y_{TR} = y_{TC}$; $U = y_{TR} - y_{TC}$
- $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$; $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$; $R_i \leftrightarrow R_j$; kR_i ; $kR_i + R_i$
- $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$; $m \times n$
- $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right]$
- $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$
- $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$; $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$; $k < n$; $k = n$
- Consumidores (insumo)

	Industria *A*	Industria *B*	Demanda final	*Totales*
Industria A	240	500	460	1200
Industria B	360	200	940	1500
Otros factores de producción	600	800	–	
Totales	1200	1500		

SITUACIONES - PROBLEMAS

- Resuelva $2(p + 4) = 7p + 2$.
- Resuelva:
$$\frac{7x + 3}{2} - \frac{9x - 8}{4} = 6.$$
- La compañía Anderson fabrica un

DEFINICIONES - CONCEPTOS

- Una ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que forman una ecuación se denominan **lados** (o **miembros**), y están producto para el cual el costo variable por unidad es $ 6 y el costo fijo de $ 80,000. Cada unidad tiene un precio de venta de $ 10. Determine el número de artículos que deben venderse para obtener una utilidad de $ 60,000.

- Se invirtió un total de $ 10,000 en acciones de dos compañías, A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de 6% y $5\frac{3}{4}$%, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de $ 588.75?
- Determine las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$ y haga el bosquejo de su gráfica.
- Determine las intersecciones de la gráfica de $x = 3$, y bosqueje la gráfica.
- La recta de la figura (ver en lenguaje gráfico) muestra la relación entre el precio de un artículo (en dólares) y la cantidad de artículos (en miles) que los consumidores comprarán a ese precio. Encuentre e interprete la pendiente.
- Determine una ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto (1,-3)
- Encuentre una ecuación de la recta que pasa por (-3,8) y (4,-2).
- Encuentre una ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y igual a -4.
- Haga el bosquejo de la gráfica $2x - 3y + 6 = 0$.
- En la figura (ver en lenguaje gráfico) se muestran dos rectas que pasan por (3,-2). Una es paralela y la otra es perpendicular a la recta $y = 3x + 1$. Determine las ecuaciones de estas rectas.
- La demanda semanal de televisores de 26 pulgadas es 1200 unidades cuando el precio es de $ 575 cada

separados por el **signo de igualdad**, $=$.

- Se dice que dos ecuaciones son equivalentes si ambas tienen las mismas soluciones.
- Una ecuación lineal en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma $ax + b = 0$, con a y b constantes y $a \neq 0$.

- Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales, implica resolver problemas prácticos traduciendo las relaciones a símbolos matemáticos.

- Los **costos fijos** son aquellos que bajo condiciones normales, no dependen del nivel de producción; es decir, en algún periodo permanecen constantes en todos los niveles de producción, por ejemplo la renta, salarios, seguros, mantenimiento, etc.

- Los **costos variables** son los que cambian con el nivel de producción, por ejemplo, la mano de obra, materiales, mantenimiento debido al uso.
- **Costo total** es la suma de los costos fijos y variables
  costo total = costo variable + costo fijo
- **Ingreso total** es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producción.
  ingreso total = (precio unitario) x (N° de unidades vendidas)

- **Utilidad** es el ingreso total menos el costo total:
  utilidad = ingreso total - costo total

- Una **intersección** $\boldsymbol{x}$ de la gráfica de una ecuación en x y y es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una **intersección** $\boldsymbol{y}$ es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

- Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es:

uno y 800 unidades cuando el precio es de \$ 725 por televisor. Determine la ecuación de demanda para los televisores, suponga un comportamiento lineal.

- Imagine que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 cuando el precio es 30. Encuentre la ecuación de oferta, suponga que el precio p y la cantidad q se relacionan linealmente.
- Utilice eliminación por adición para resolver el sistema:
$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = \ \ 3 \end{cases}$$
- Utilice la eliminación por sustitución para resolver el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$
- Resuelva algebraicamente el sistema:
$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$
- Un total de \$ 35,000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de \$ 2,830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad invertida originalmente al 9% ganó 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de \$ 2,960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?
- Un fabricante vende un producto a \$ 8.35 por unidad, y vende todo lo que se produce. Los costos fijos son de \$ 2,116 y el costo variable es de \$ 7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$ 4,600?, ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$ 1,150?, ¿A qué nivel se alcanza el punto de equilibrio?
- Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(= \frac{cambio\ vertical}{cambio\ horizontal}\right)$$

- $y - y_1 = m(x - x_1)$ es la forma punto – pendiente de una ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

- $y = mx + b$ es la forma pendiente – intersección de una ecuación de la recta con pendiente m e intersección y igual a b.
- Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o si ambas son verticales.
- Dos rectas con pendiente m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si:
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$
Aún más, toda recta horizontal y toda recta vertical son perpendiculares entre sí.

- Para cada nivel de precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto, que los consumidores demandarán durante cierto periodo. A la ecuación que relaciona precio y cantidad se llama **ecuación de demanda**.

- Como respuesta a los diferentes precios, existe una cantidad correspondiente de artículos que los productores están dispuestos a proveer al mercado. A esta relación entre precio y cantidad se llama **ecuación de oferta**.

- Se denomina sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x y y al conjunto de dos ecuaciones, donde el problema es encontrar valores para las variables para los cuales ambas ecuaciones sean verdaderas de manera simultánea.

- Una ecuación lineal general con tres variables x, y y z es una ecuación que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$, donde A, B, C y D son constantes y

$$3q - 200p + 1800 = 0$$
$$3q + 100p - 1800 = 0$$

respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades vendidas por periodo.

(a) Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo mediante una gráfica

(b) Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

- Con el uso de la reducción de matrices, resuelva

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 6 = 0 \\ 2z + y - 3 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Determine si el sistema homogéneo tiene solución única o un número infinito de soluciones, después resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Como podemos apreciar, en este texto, las situaciones problemas están bien dosificadas entre ejercicios y problemas contextualizados de administración y economía. Usa los distintos lenguajes del EOS, así como el tránsito entre éstos.

A, B y C al menos una de ellas es diferente de cero.

- Desde el punto de vista geométrico, una ecuación lineal general con tres variables representa un plano en el espacio, y una solución a un sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos.

- El **punto de equilibrio** es donde el ingreso total es igual al costo total y ocurre cuando los niveles de producción y de ventas tienen como resultado cero pérdidas y cero utilidades.

- En general, una **ecuación matricial** se dice que tiene la siguiente forma: **AX** $=$ **B**, donde **A** es la matriz obtenida de los coeficientes de las variables, **X**es una matriz columna obtenida a partir de las variables, y **B** es una matriz columna obtenida de las constantes. La matriz **A** se llama matriz de coeficientes del sistema.

- El sistema lineal m x n se llama sistema homogéneo si $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. El sistema es un sistema no homogéneo si al menos una de las c no es igual a cero.

PROCEDIMIENTOS
▪ Ecuaciones equivalentes: i. Sumar (o restar) el mismo polinomio a ambos lados de una ecuación, donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación. ii. Multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por la misma constante distinta de cero. iii. Reemplazar cualquiera de los lados de una ecuación por una expresión

PROPOSICIONES - PROPIEDADES
▪ Nunca se permite que en una ecuación haya una variable que tenga un valor para el cual esa ecuación no esté definida. ▪ Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se denominan soluciones de la ecuación y se dice que satisfacen la ecuación.

equivalente.

- Puede describirse el primer paso en la solución de una ecuación como el acto de mover un término de un lado a otro cambiando su signo; esto se conoce comúnmente como **transposición**.
- Para medir la inclinación de una recta se usa la noción de pendiente. La tasa promedio de cambio de y con respecto a x es la razón:
$$\frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{cambio\ vertical}{cambio\ horizontal}$$
- El paso de un sistema lineal a otro equivalente se logra mediante uno de los siguientes procedimientos:
  1. Intercambio de dos ecuaciones.
  2. Multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero.
  3. Reemplazo de una ecuación por sí misma más un múltiplo de otra ecuación.
- Método de eliminación por adición para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables.
- Método de eliminación por sustitución para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables.
- Método de eliminación por adición y por sustitución para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.
- Para determinar con precisión el punto de equilibrio entre la curva de oferta y la curva de demanda, debe resolverse el sistema lineal formado por las ecuaciones de oferta y demanda. El conjunto solución de dicho sistema será el denominado punto de equilibrio entre la demanda y la oferta.
- Operaciones elementales con renglones:
  1. Intercambio de dos renglones de una matriz.
  2. Multiplicación de un renglón de

- Una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable de la ecuación.

- Costo total = costo variable + costo fijo
- Ingreso total = (precio unitario) x (N° de unidades vendidas)

- Utilidad = ingreso total - costo total

- En general, si P es un punto cualquiera, entonces sus coordenadas rectangulares se determinan por un par ordenado de la forma (a, b). Se llama a a la abscisa y a b la ordenada

- Una recta vertical no tiene pendiente, porque cualesquiera dos puntos sobre ella deben tener $x_1 = x_2$, lo que da un denominador cero en la expresión de la pendiente.

- Para una recta horizontal, cualesquiera dos puntos deben tener $y_1 = y_2$, esto da un numerador cero en la expresión de la pendiente, por lo tanto, la pendiente de la recta es cero.

- Para que dos rectas sean perpendiculares, cuando ninguna de ellas es vertical, necesariamente una se elevará de izquierda a derecha mientras que la otra descenderá de izquierda a derecha. Así que las pendientes deben tener signos diferentes.

- Debido a que una curva de demanda lineal por lo general desciende de izquierda a derecha, tiene pendiente negativa. Sin embargo, la pendiente de una curva de oferta lineal es positiva, porque la curva asciende de izquierda a derecha.

- Se dice que dos sistemas son equivalentes si sus conjuntos de soluciones son iguales. En términos más precisos, se busca un sistema equivalente que contenga una

una matriz por un número distinto de cero.

3. Suma de un múltiplo de un renglón de una matriz a un renglón diferente de esa matriz.

- Un procedimiento matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales es: primero, se forma la matriz aumentada del sistema; después, por medio de operaciones elementales sobre renglones, se determina una matriz equivalente que indique claramente la solución. Esta es la matriz reducida.
- Para reducir una matriz, debe hacerse que la entrada principal sea 1 en el primer renglón, un 1 en el segundo renglón y así sucesivamente hasta llegar a un renglón cero, si los hay. Además, debe trabajarse de izquierda a derecha porque la entrada principal de cada renglón debe encontrarse a la izquierda de todas las otras entradas principales en los renglones de abajo.
- El método de reducción para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, puede generalizarse a sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, el cual implica:
  1. Determinar la matriz aumentada del sistema, y
  2. Determinar una matriz reducida tal que la matriz aumentada sea equivalente a ella. Con frecuencia este paso es llamado, reducción de la matriz aumentada.

ecuación en la que una de las variables sea eliminada.

- Operación con renglón correspondiente:
  1. $R_i \leftrightarrow R_j$, implica intercambiar los renglones R_i y R_j.
  2. kR_i , multiplicar el renglón R_i por la constante k distinta de cero.
  3. $kR_i + R_i$, implica sumar k veces el renglón R_i al renglón R_j (pero el renglón R_i permanece igual).

- Cuando se resuelve un sistema homogéneo por reducción de matrices, por conveniencia se debe eliminar la última columna de la matriz involucrada; es decir, se reducirá sólo la matriz de coeficientes del sistema.

- Si bien un sistema de ecuaciones lineales puede tener solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones. Cuando existe un número infinito de soluciones, la solución general se expresa en términos de al menos uno o dos parámetros, donde estos parámetros pueden ser cualquier número real.

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** Si una recta vertical pasa por el punto (a, b), entonces cualquier otro punto (x, y) pertenece a la recta si y sólo si $x = a$.

Demostración: La demostración está basada en la gráfica de la recta vertical en el plano cartesiano, donde la coordenada y puede asumir cualquier valor, y por ende, una ecuación de la recta será $x = a$.

- **Tesis:** Si una recta horizontal pasa por el punto (a, b), entonces cualquier otro punto (x, y) pertenece a la recta si y sólo si $y = b$.

  Demostración: La demostración está basada en la gráfica de la recta horizontal en el plano cartesiano, donde la coordenada x puede tener cualquier valor, y en consecuencia, una ecuación de la recta horizontal será $y = b$.

- **Tesis:** Toda línea recta es la gráfica de una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes, y ni A ni B son simultáneamente igual a cero. A esta ecuación se denomina ecuación lineal general (o ecuación de primer grado) en las variables x y y, y se dice además que x y y están relacionadas linealmente.

  Demostración: La demostración está basada en la gráfica de la ecuación en el plano de coordenadas rectangulares. Puesto que su gráfica es una línea recta y su ecuación no es ni de recta vertical, $x = a$, ni de una recta horizontal, $y = b$; ni tampoco pertenece a la ecuación de una de los ejes, entonces sólo es necesario determinar dos puntos diferentes para poder hacer el bosquejo.

- **Tesis:** Un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x y y, cuyas gráficas son líneas rectas, que pueden llamarse L_1 y L_2, puede tener una solución, puede ser sin solución o tener un número infinito de soluciones.

  Demostración: La demostración es geométrica con los argumentos siguientes:
  Si se dibujan L_1 y L_2 en el mismo plano, pueden ocurrir tres situaciones.

  1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en un punto único, por ejemplo (a, b). (ver figura en lenguaje gráfico). Así, el sistema lineal tiene la solución $x = a$ y $x = b$.
  2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener puntos en común. Es decir, sin punto de intersección, en este caso no existe solución.
  3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta (ver figura en lenguaje gráfico). Aquí, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta constituyen una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

- **Tesis:** Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse por una matriz que indique claramente la solución, esta matriz es llamada **matriz reducida**.

  Demostración. Para que una matriz sea reducida, debe cumplir con las siguientes condiciones:
  1. Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz.
  2. Para cada renglón diferente de cero, la entrada principal es 1, y todas las otras entradas en la columna donde aparece la entrada principal son ceros.
  3. La entrada principal en cada renglón está a la derecha de la entrada principal de cualquier renglón que esté arriba de él.

- **Tesis:** Sea **A** la matriz reducida de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si **A** tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además,

1. Si $k < n$, el sistema tiene un número infinito de soluciones, y
2. Si $k = n$, el sistema tiene una única solución (la solución trivial)

Demostración. La demostración es deductiva – explicativa, basada en el número de renglones diferentes de cero que aparecen en la matriz reducida del sistema. Considérese además, que un renglón diferente de cero es un renglón que no consiste sólo en ceros.

❖ **Tesis:** Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas tiene un número infinito de soluciones.

Demostración: La demostración es deductiva – explicativa e indica que, si un sistema homogéneo consiste en m ecuaciones con n incógnitas, entonces la matriz de coeficientes del sistema tiene un tamaño de m x n. Por lo tanto, si $m < n$ y k es el número de renglones diferentes de cero en el coeficiente de la matriz reducida, entonces $k \leq m$, y entonces $k < n$. Por la tesis anterior, el sistema debe tener un número infinito de soluciones.

Los argumentos, propiedades y proposiciones, vienen justificadas geométricamente, es decir, usando el lenguaje gráfico, pero también el lenguaje simbólico y algebraico, mediante la teoría y los procedimientos de las matrices y determinantes. Las representaciones en el plano cartesiano, se combinan muy bien con el lenguaje verbal en que son enunciados los problemas aplicados a la administración y los negocios.

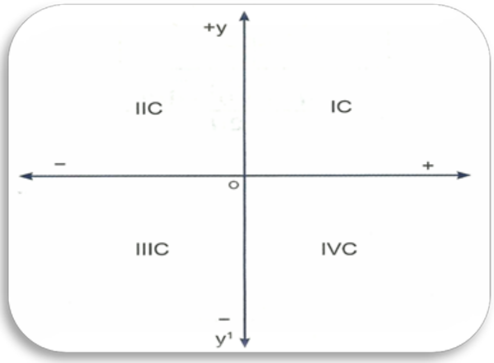
Finalmente, hacemos el análisis de los distintos objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas que se propone en el módulo de matemática, el mismo que es tomado como guía y base en el primer ciclo de la carrera de administración bancaria, del Instituto de Formación Bancaria – Lima, objeto de la presente investigación y que ya hemos descrito. Es decir, presentamos la configuración epistémica de los objetos matemáticos que intervienen a lo largo del desarrollo del tema ecuaciones lineales (ecuaciones en una, dos y tres variables; sistemas de ecuaciones; aplicaciones al campo de la administración, la economía y los negocios) y la forma en que el autor plantea las distintas actividades matemáticas del tema en estudio.

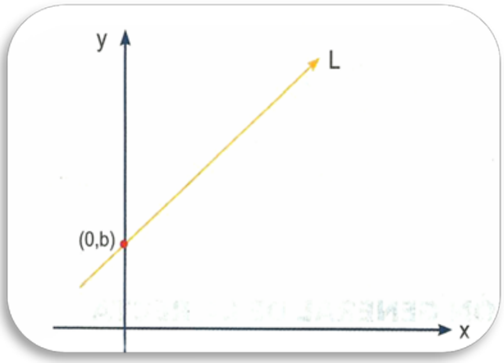
❖ Cuadro N° 13. **Configuración epistémica del cuarto texto**

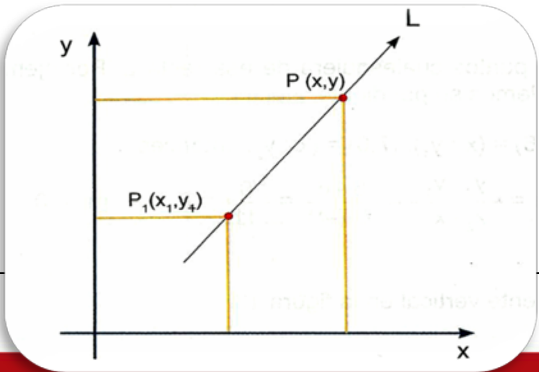
LENGUAJE
❖ **Verbal:**

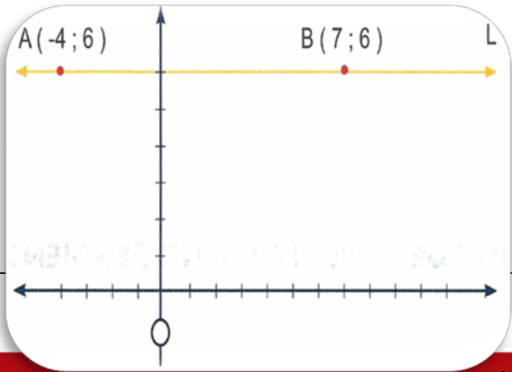
- Expresiones algebraicas, igualdad, variables, constantes, coeficientes.
- Ecuaciones de primer grado de una variable.
- Solución de una ecuación de primer grado en una variable.
- Traslación de términos en uno y otro miembro de la ecuación.
- Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado con una variable.
- Costos fijos, costos variables, costo total, ingreso y utilidad, precio de venta por unidad, número de unidades.
- Ecuaciones de primer grado con dos variables.
- Conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Método de sustitución, método de igualación, método de reducción.
- Ejemplos, ejercicios y problemas propuestos de sistema de dos ecuaciones lineales.
- Ecuación de la recta.
- Plano cartesiano, eje de abscisas, eje de ordenadas, cuadrantes, par ordenado.
- Gráfica de una ecuación con dos incógnitas.
- Interceptos de la gráfica de recta con los ejes.
- Inclinación, razón de cambio y pendiente de una recta.
- Ángulo obtuso, ángulo agudo.
- Pendiente positiva, pendiente negativa, pendiente cero y pendiente no definida.
- Recta vertical y recta horizontal.
- Ecuación de la recta punto pendiente.
- Ecuación de la recta: forma pendiente-intercepto.
- Ecuación general de la recta.
- Ecuación de recta aplicada a la economía y a la administración.
- Oferta, demanda, punto de equilibrio, precio, cantidad.
- Problemas y ejercicios propuestos de gráficas de recta y de ecuación de demanda y oferta lineal.

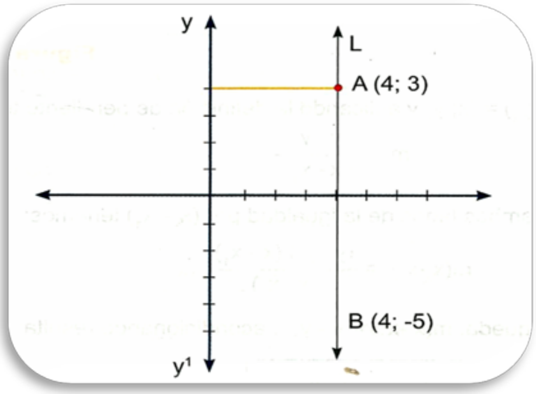
❖ **Gráfico:**

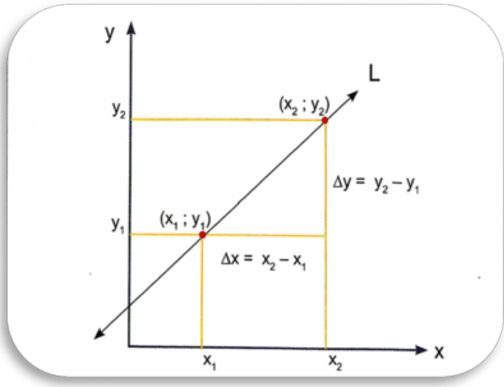


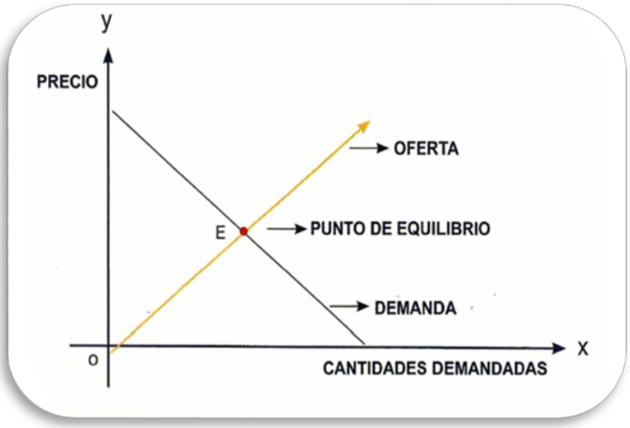












❖ **Simbólico:**

- $ax \pm b = 0$; $a \neq 0$; $=$; $\neq$; $a, b \in \mathbb{R}$
- (,) ; [,] ; $C.S = \{\ ;\ \}$
- CF ; CV ; CT ; I ; Pv ; q ; U.
- CT = CF + CV ; I = (Pv).(q) ; U = I - CT
- $ax + by = c$
 $dx + ey = f$
- $x\,x'$; $y\,y'$; "O" ; I C , II C , III C , IV C.
- P (x, y) ; A (0, 0) ; B (4, 5) ; C (6, -4) ; D (,)

- $x + y + 6 = 0$; $y = 0$; $x = 0$; L ; L_1 ; L_2
- $(x_1 ; y_1)$; $(x_2 ; y_2)$; "Δ" ; "α" ; "β"

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad m = -\frac{A}{B}$$

- $\mathrm{m} = 0$; $\mathrm{m} = \text{indefinida}$
- $y - y_1 = m(x - x_1)$; $y = mx + b$; $Ax + By + C = 0$
- "p"; "q" ; "E" ;$I = C$.

SITUACIONES - PROBLEMAS	DEFINICIONES - CONCEPTOS
▪ Resolver la siguiente ecuación: $3[2x + 1 - 2(2x - 1)] + 4 = 2[1 + 2(3 - x)]$ ▪ Resuelva: $\frac{6 - 5x}{4} - \frac{3x + 10}{3} = \frac{2x}{5}$ ▪ Una empresa fabrica un producto que tiene costos variables de S/. 15 por unidad y costos fijos de S/. 6,000. Cada unidad tiene un precio de venta de S/. 18. Determine el número de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades de S/. 8,000. ▪ Resolver el siguiente sistema por el método de sustitución: $3x + 5y = 12$; $4x - 3y = -13$ ▪ Resolver el siguiente sistema por el método de igualación: $2x - 4y = 30$; $2y - 7x = -9$ ▪ Resolver el siguiente sistema por el método de reducción:	▪ Una ecuación de primer grado, es la igualdad de dos expresiones algebraicas, que pueden contener una o más variables; además, el mayor exponente de la variable es uno. ▪ Una ecuación de primer grado con una variable se representa por: $ax \pm b = 0$ Donde $a, b \in \mathbb{R}$; además $a \neq 0$. ▪ Costos fijos, son los costos que toda empresa debe asumir sin tomar en cuenta la cantidad producida del bien; es decir, no depende del nivel de producción. ▪ Costos variables, son los costos que dependen del nivel de producción; es decir, de la cantidad de bienes producidos ▪ Costo total, es el costo constituido por la suma del costo fijo y del costo variable. ▪ Ingreso, es la cantidad de dinero recibida por la venta de un bien. ▪ Utilidad, como toda actividad comercial uno de los aspectos más importantes es la utilidad que dejará finalmente la inversión realizada. La utilidad viene dada por la diferencia entre el ingreso y el costo total. ▪ Un sistema de ecuaciones de primer

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = -1$$

- Un cliente de un banco ahorra en billetes de S/. 20 y monedas de S/. 5 para poder adquirir un artefacto. Recuerda que ha depositado un total de 300 unidades entre billetes y monedas, y la entidad financiera le manifiesta que tiene un total de S/. 2,400 ¿Cuántos billetes de S/. 20 y monedas de S/. 5 ahorró?
- Hallar la ecuación de una recta que tiene una pendiente de 1/2 y pasa por el punto P (-3, 4).
- Hallar la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es:
$$2x + 6y = 12$$
- Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-2, -5) y (6, 9).
- Hallar los interceptos de la gráfica de cada ecuación con los ejes “x” e “y”.
$$5x - 8y - 12 = 0$$
- Una recta pasa por los puntos P (-4, 10) y Q (6, -4). Hallar la pendiente de dicha recta y los puntos de intersección con los ejes coordenados.
- Un comerciante observa que sus ventas son de 20,000 paquetes de galletas al mes cuando el precio es de S/. 0.60 cada paquete; pero cuando el precio es de S/. 0.50 por paquete, las ventas aumentan a 25,000 paquetes. Se desea saber cuál es la ecuación de la demanda suponiendo que es lineal.
- Cuando el precio de un equipo de sonido es de S/. 350, se ofrecen en el mercado 45 unidades; pero si el precio se incrementa en S/. 110 por equipo se pondrán a la venta 85 unidades. Hallar la ecuación de oferta y graficarla.

Encontramos que los problemas están contextualizados, pero que los lenguajes del EOS no son utilizados de manera idónea para complementar el desarrollo de las tareas de ecuaciones, por parte de

grado con dos variables se define por la expresión:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Donde a, b, d, e, son los coeficientes de las variables; c y f son constantes o términos independientes.

- Plano cartesiano, son dos ejes orientados en sus dos sentidos que se cortan en forma perpendicular en un punto llamado origen de coordenadas.
- Par ordenado, es una pareja de números reales (x, y), donde “x” representa al eje de las abscisas e “y” representa al eje de las ordenadas, siendo su representación un punto del plano cartesiano.
- Los Interceptos con los ejes de coordenadas, son los puntos en que la gráfica de una ecuación corta a los ejes de abscisas “x” y ordenadas “y”.
- La pendiente de una recta, es la medida de la inclinación de la recta con respecto al eje “x” ó también, la pendiente se expresa como la razón de cambio de “y” con respecto a “x”: $m = \Delta y / \Delta x$
- Una recta “L” no vertical que pasa por un punto P_1 (x_1, y_1) fijo, y por un punto variable P (x, y) y que tiene una pendiente “m”, está definida por:
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Sea “L” una recta que no es horizontal ni vertical y que se conoce la pendiente “m”. La intersección de dicha recta con el eje “y” tiene por coordenadas (0, b); dicha recta tiene por ecuación:
$$y = mx + b$$

- La ecuación general de una recta, se define por la forma: $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes; A = 0 ó B = 0 pero no ambas a la vez.

- El punto de equilibrio “E” es el nivel en donde los ingresos son iguales a los costos totales.

los estudiantes. Además la ejemplificación es escasa.	

PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES - PROPIEDADES
▪ Al graficar una ecuación es recomendable despejar una de las variables en función de la otra; es decir, despejaremos “y” en función de “x” y tabulando en una tabla de doble entrada. ▪ Para calcular el intercepto de la gráfica de una recta con el eje “x” hacemos y = 0 en la ecuación y hallamos “x”. ▪ Para calcular el intercepto de la gráfica con el eje “y” hacemos x = 0 en la ecuación y hallamos “y”.	▪ Un conjunto de dos ecuaciones lineales de primer grado constituye un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables. ▪ Las ecuaciones con dos incógnitas las podemos graficar en el plano cartesiano como un conjunto finito de pares ordenados (x, y), de tal manera que al reemplazar dichos valores en la ecuación, éstas la satisfacen. ▪ Cuando una recta tiene pendiente positiva va hacia arriba (asciende) si forma un ángulo agudo con el eje “x”. ▪ Cuando una recta tiene pendiente negativa va hacia abajo (desciende) si forma un ángulo obtuso con el eje “x”. ▪ La demanda lineal tiene pendiente negativa, en tanto que la oferta tiene pendiente positiva. ▪ En los problemas de tipo económico o administrativo se trabaja en el primer cuadrante. En el eje “x” se colocan las cantidades demandadas y dicho eje se representa por “q”; en el eje “y” se colocan los precios y dicho eje se representa por “p”

ARGUMENTOS

❖ **Tesis:** Sean (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2) dos puntos diferentes y cualesquiera de una recta no vertical “L”, entonces su pendiente “m” se expresa como una razón de cambio de “y” con respecto a “x”. Es decir:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Demostración: La demostración es deductiva y gráfica basada en los siguientes argumentos:

1. Por los puntos (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2) trazamos una recta L.
2. Al deslizarnos sobre la recta L desde (x_1 , y_1) hasta (x_2 , y_2) el valor de “y” cambia de y_1 a y_2 en una cantidad: $(y_2 – y_1)$.
3. Al mismo tiempo el valor de “x” de x_1 a x_2 en una cantidad: $(x_2 – x_1)$.

4. El cambio vertical viene dado por: $\Delta\, y = y_2 - y_1$; en tanto que el cambio horizontal está dado por: $\Delta\, x = x_2 - x_1$.

En conclusión, las propiedades y proposiciones carecen de justificación y demostración, puesto que según lo encontrado, el autor prefiere evitar el formalismo matemático. Creemos que, esto ocurre porque el módulo de texto está dirigido a estudiantes de instituto tecnológico, donde lo que interesa son los procedimientos, más que el formalismo y la rigurosidad matemática. En lugar de ello, se utiliza la ejemplificación y la explicación de ejercicios, con la finalidad de que los estudiantes comprenden mejor el tema.

4.8. ANÁLISIS COMPARATIVO DE OBJETOS MATEMÁTICOS INTERVINIENTES EN CADA TAREA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Luego de haber descrito cada uno de los textos de matemática de educación secundaria seleccionados, distribuidos por el ministerio de educación, a los alumnos de las instituciones educativas públicas,y después de hacer el análisis comparativo entre los mismos, respecto de los objetos matemáticos presentes en las tareas de ecuaciones lineales, hemos encontrado lo siguiente.

Los lenguajes que presentan las tareas matemáticas, consignadas en los libros de texto, son similares tanto en cuarto como en quinto grado de educación secundaria. En el caso del lenguaje verbal, coinciden en usar conjunto solución, métodos de eliminación de los sistemas de ecuaciones, ecuaciones de recta en el plano, pero muy poco lenguaje verbal en lo que respecta al planteamiento de situaciones-problemas.

En lo referente al lenguaje gráfico, se observa que en escasas ocasiones se hace uso de este lenguaje para la ejemplificación y para la explicación de los ejercicios, así como para la propuesta de situaciones problema en las tareas; en lo que sí enfatizan los autores, es en el lenguaje algebraico (simbólico). Se evidencia además, escasa interrelación entre los lenguajes de tal manera que se complementen en el análisis de una situación problema, es decir, las tareas no presentan situaciones en las cuales el alumno tenga que transitar de ida y vuelta, entre los diferentes lenguajes, tal como lo plantea el EOS, y tal como se aprecia en los cuadros de las configuraciones epistémicas. Este mismo tratamiento se da en cada uno de los textos del nivel secundario descritos.

En lo que respecta a las situaciones-problema propuestas, se aprecia que los autores de los textos descritos ponen especial énfasis en el proceso de algoritmización del EOS, esto se evidencia en la resolución de ejercicios de ecuaciones lineales, de sistema de dos y tres ecuaciones lineales y en los ejercicios de ecuaciones de recta, descuidandootros procesos del EOS, tales como el de comunicación y el de contextualización. Los escasos problemas de aplicación que se proponen, consideramos que no son del contexto y que no dan oportunidad a los alumnos a analizar sus respuestas o soluciones obtenidas. Creemos que, por esta razón, los estudiantes que ingresan en la educación superior, presentan dificultades para resolver problemas del contexto, en su mayoría.

En cuanto a las definiciones y conceptos en los textos y las tareas, los autores no son muy rigurosos en su presentación; algunas definiciones no están bien hechas o no son precisas. Por lo que creemos que, esto se presta para confusiones posteriores de los alumnos, en el desarrollo de las tareas matemáticas.

Respecto de los procedimientos, a partir de la descripción del tema en cada texto y de la C.E., observamos que se repiten los métodos algebraicos de reducción, sustitución, igualación, y en un caso el método de Gauss-Jordan, tanto en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, como en el caso de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. Además, en algunos casos, utilizan el lenguaje gráfico, como método gráfico, pero sólo para complementar la explicación de un ejemplo, mas no para que el alumno transite entre distintos lenguajes.

En lo referente a las proposiciones y propiedades, se presentan solo algunas, por ejemplo en ecuaciones de recta, pero no son rigurosos en cuanto a su uso para el desarrollo de los pocos ejemplos de ecuaciones lineales, que cada texto muestra.

Con respecto a los argumentos que utilizan los autores de cada texto para justificar las proposiciones, propiedades y tesis, a partir de la C.E. de cada tarea podemos apreciar que la gran mayoría carece de demostración o simplemente no se justifican las proposiciones y proposiciones. Es decir, encontramos que no se argumenta matemáticamente o no se sustenta lo que se presenta en la teoría de ecuaciones lineales. En lugar de ello, lo que se hace en cada texto es utilizar como argumento la ejemplificación y mediante la explicaciónde la resolución de algunos ejercicios, se intenta lograr que los alumnos comprendan y se apropien de las proposiciones y las apliquen en las tareas matemáticas propuestas.

4.9. ANÁLISIS COMPARATIVO DE OBJETOS MATEMÁTICOS INTERVINIENTES EN CADA TAREA DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Luego de haber descrito cada uno de los textos de matemática de educación superior seleccionados y descritos en este estudio y después de hacer el análisis comparativo entre los mismos, respecto de los objetos matemáticos presentes en las tareas de ecuaciones lineales, hemos encontrado lo siguiente.

Consideramos que los lenguajes que presentan las tareas matemáticas son adecuados en cuanto a su combinación entre lenguaje verbal, gráfico y simbólico, puesto que se complementan el uso de éstos lenguajes y se evidencia el tránsito entre los mismos; además, en cada texto se aprecia el rigor matemático y se pone especial cuidado en el uso de los diversos lenguajes. Aunque hay que señalar que el módulo de matemática del Instituto de Formación Bancaria, presenta carencia de uso de estos lenguajes, en varios acápites. En el caso de las tareas presentadas en Lages (2004), se enfatiza de manera contundente y rigurosa en el lenguaje gráfico y algebraico, mas no en el lenguaje verbal, debido a que no presenta situaciones-problema del contexto.

Con respecto a las situaciones problemas, en Lages, se prioriza los ejercicios, pero en los demás textos, se contextualiza a situaciones propias de la administración, la economía y los negocios, que se resuelven con ecuaciones lineales. Debemos precisar también, que el módulo de matemática del IFB, plantea escasas situaciones-problemas para que los alumnos desarrollen en sus tareas.

En lo referente a definiciones y conceptos, el libro de Lages (2004), es riguroso y formalista en definir las ecuaciones lineales, lo mismo ocurre en el texto de Grossman (2008); ambos autores son especialmente cuidadosos en las definiciones y concepto que presentan a los estudiantes, hacen precisiones y especificaciones en cada acápite de los capítulos del tema ecuaciones lineales. Aunque en el texto de Haeussler (2008), se enfatiza más en el proceso de contextualización, no se deja de lado la rigurosidad matemática de las definiciones, pero en menor grado que los anteriores. En el texto del IFB, observamos que algunas definiciones de ecuaciones lineales no son adecuadas, precisas y no presentan un adecuado rigor institucional (matemático).

En cuanto a los procedimientos, todos los autores coinciden en aplicar métodos de eliminación en los sistemas de dos y tres ecuacioneslineales. En el caso de Lages, Grossman y Haeussler, utilizan además el método de Gauss-Jordan y el método de eliminación gaussiana, en los cuales utilizan las operaciones por renglones de las matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones lineales; además, de utilizar el método gráfico para representar la solución de los sistemas de ecuaciones en el plano cartesiano. El en texto del IFB, solamente se utiliza el método de sustitución, reducción e igualación, y en ecuaciones de recta, el método gráfico por separado, es decir, que no se usan los métodos algebraicos y gráficos de manera que se complementen, como sí lo presentan los anteriores textos.

En cuanto a las proposiciones y propiedades, los autores son rigurosos en plantearlas y utilizarlas para la resolución de situaciones problema, algunos con mayor rigurosidad o más formalidad matemática que otros, como es el caso de Lages. En el texto de matemática del IFB, observamos que no se recurre a las propiedades para explicar ejemplos de ecuaciones lineales.

Finalmente, los argumentos presentados en los textos son contundentes en el sentido del EOS, en cuanto a las proposiciones planteadas y a las demostraciones de las mismas, así como en cuanto a los argumentos utilizados para la resolución de situaciones problemas. Si bien es cierto, algunos autores emplean argumentos más formalistas o con mayor rigor matemático que otros, como en el caso de Lages, en general, todos presentan argumentos para que los estudianteslos utilicen en el análisis, justificación y sustentación de los resultados obtenidos en las tareas matemáticas propuestas de ecuaciones lineales. Consideramos que de esta manera, los autores de los textos analizados pretenden acercar más las matemáticas a los estudiantes y que éstos comprendan mejor los objetos matemáticos.

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS TAREAS

(Resumen)

En el quinto capítulo presentamos el análisis de la idoneidad didáctica de las tareas de ecuaciones lineales en su dimensión epistémica, la idoneidad didáctica de estas tareas en su dimensión cognitiva, así como la idoneidad en su dimensión ecológica de las tareas de ecuaciones lineales, tanto para la educación secundaria, como para las tareas propuestas en la educación superior.

Es preciso señalar que este análisis de las idoneidades de las tares de ecuaciones lineales, se realizó a través de los indicadores de idoneidad didáctica, tomadas y aplicadas en tablas de indicadores, propuestas por el EOS. Además del análisis de la interrelación entre las tareas de ambos niveles educativos.

5.1. IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS TAREAS DE ECUACIONES LINEALES – DIMENSIÓN EPISTÉMICA.

Godino et al. (2007c) y Godino (2011), son de la opinión que para que el accionar educativo sea idóneo, se requiere de directrices claras y explícitas sobre los fines de la actividad educativa; en tanto que, para lograr una alta idoneidad didáctica en un proceso de estudio matemático, se debe tener en cuenta diversas dimensiones estructuradas en componentes, que no son observables directamente, por lo que se hace necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos.

En base a esta necesidad, es que los autores antes mencionados presentan algunos indicadores de idoneidad parcial (epistémica en este caso), para que sirvan de pauta o guía para el diseño y valoración de actividades formativas o implementadas, puesto que según los mismos autores, un proceso de estudio matemático tiene mayor idoneidad epistémica, cuando los significados institucionales pretendidos representan bien a un significado de referencia.

En el presente acápite, presentamos las tablas de indicadores de idoneidad epistémica del tema matemático específico “ecuaciones lineales”. Pero para efectos de seguir un orden, haremos primero el análisis de las tareas matemáticas de la educación secundaria pública peruana, para en segundo lugar, presentar el análisis de idoneidad epistémica de las tareas matemáticas de la educación superior.

5.1.1. Indicadores de idoneidad epistémica de las tareas matemáticas de educación secundaria.

A continuación aplicaremos la tabla de indicadores de idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, a cada una de las cinco tareas matemáticas seleccionadas, y que se les proponen a los alumnos de educación secundaria pública en nuestro país, de las cuales previamente hemos hecho su configuración epistémica. Cabe mencionar que para el análisis seguiremos el mismo orden que hemos seguido en la C.E.

Las tablas de indicadores de idoneidad epistémica proporcionadas por el EOS las hemos aplicado, adaptadas al nivel educativo de educación secundaria y en el tema de las tareas de ecuaciones lineales, y nos han servido para analizar la idoneidad epistémica de los significados de referencia de las ecuaciones lineales. Consideramos que los componentes y los indicadores son relevantes, puesto que, permiten operativizar la noción de idoneidad epistémica o matemática, y en este caso específico, hemos aplicado las tablas de indicadores para analizar la idoneidad matemática de las tareas del tema mencionado en los textos de educación secundaria pública.

Según Godino, para que nuestro accionar matemático tenga alta idoneidad epistémica, las tareas matemáticas deben ser ricas, de manera que interconecten situaciones problemas, diversos lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones, así como la justificación de las mismas a través de argumentos. Siguiendo esta línea, hemos procurado interrelacionar diferentes componentes y sus respectivos indicadores en las tablas que presentamos en seguida.

Tabla N° 01. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Tarea 1 de educación secundaria pública

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 1 SI	CUMPLE TAREA 1 NO	OBSERVACIONES
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones de recta con dos incógnitas	X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y economía		X	Sólo se presenta un par de situaciones no contextualizadas
	Se proponen situaciones de problematización de oferta, demanda y equilibrio de mercado que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación de recta	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con ecuaciones de la recta	X		El lenguaje gráfico es usado sólo como complemento
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		Énfasis en los ejercicios, puesto que los problemas son escasos
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico)		X	En general, lenguaje algebraico
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X	

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIONES
		TAREA 1		
		SI	NO	
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones de la recta son claros y correctos	X		
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria	X		
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X	
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básico para resolver estos problemas con sistemas de ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de ecuaciones de la recta donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos		X	Puesto que se enfatiza en métodos algebraicos
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo secundario	X		
	Las comprobaciones de las soluciones de los ejercicios de ecuaciones de la recta son adecuadas para el nivel de educación secundaria, desde el punto de vista de la matemática	X		Métodos algebraicos y gráfico se complementa
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales son adecuadas desde la matemática		X	
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí		X	No se proponen problemas del contexto

Tabla N° 02. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Tarea 2 de educación secundaria pública

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 2 SI	CUMPLE TAREA 2 NO	OBSERVACIONES
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones de recta con dos incógnitas	X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y economía		X	
	Se proponen situaciones de problematización de oferta, demanda y equilibrio de mercado que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación de recta	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con ecuaciones de la recta	X		Sólo entre lenguaje gráfico y lenguaje algebraico
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación		X	Énfasis en los ejercicios, puesto que los problemas son escasos
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico)		X	Lenguaje algebraico y gráfico
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X	

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 2 SI	CUMPLE TAREA 2 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones de la recta son claros y correctos	X		
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria	X		
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X	
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básico para resolver estos problemas con sistemas de ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales		X	Ejercicios algorítmicos para reemplazar
	Se proponen situaciones de ecuaciones de la recta donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos		X	Puesto que se enfatiza en métodos algebraicos
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo secundario	X		
	Las comprobaciones de las soluciones de los ejercicios de ecuaciones de la recta son adecuadas para la educación secundaria, desde el punto de vista de la matemática		X	No se comprueba las soluciones obtenidas
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales son adecuadas desde la matemática		X	
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		Sólo en ejercicios, no se plantean problemas
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí		X	No se proponen problemas del contexto

Tabla N° 03. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Tarea 3 de educación secundaria pública

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 3		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones de recta con dos incógnitas	X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y economía		X	
	Se proponen situaciones de problematización de oferta, demanda y equilibrio de mercado que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		En escasas circunstancias
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación de recta	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con ecuaciones de la recta	X		El lenguaje gráfico se usa solo como complemento
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		Énfasis en los ejercicios, puesto que los problemas son escasos
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico)		X	Generalmente en lenguaje algebraico
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X	No se plantean ni resuelven problemas contextualizados

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 3 SI	CUMPLE TAREA 3 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones de la recta son claros y correctos	X		
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria	X		
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X	
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básico para resolver estos problemas con sistemas de ecuaciones lineales		X	No se plantean problemas del contexto
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de ecuaciones de la recta donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos		X	Puesto que se enfatiza en métodos algebraicos
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo secundario	X		
	Las comprobaciones de las soluciones de los ejercicios de ecuaciones de la recta son adecuadas para la educación secundaria, desde el punto de vista de la matemática		X	No se comprueba las soluciones obtenidas
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales son adecuadas desde la matemática		X	No hay demostraciones
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		Hasta cierto punto, sólo con ejercicios
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí		X	No se proponen problemas del contexto

Tabla N° 04. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Tarea 4 de educación secundaria pública

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 4 SI	CUMPLE TAREA 4 NO	OBSERVACIONES
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones de recta con dos incógnitas	X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y economía		X	
	Se proponen situaciones de problematización de oferta, demanda y equilibrio de mercado que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		En escasas circunstancias para situaciones descontextualizadas
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación de recta	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con ecuaciones de la recta		X	
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		Sólo en lenguaje simbólico, en los ejercicios
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico)		X	Generalmente en lenguaje algebraico
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X	No se plantean ni resuelven problemas contextualizados

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 4 SI	CUMPLE TAREA 4 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones de la recta son claros y correctos		X	No se precisan distintos casos del sistema lineal
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria	X		
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X	
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básico para resolver estos problemas con sistemas de ecuaciones lineales		X	No se plantean problemas del contexto
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de ecuaciones de la recta donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos		X	Pues, los ejercicios son meramente algorítmicos
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo secundario		X	No se representa el sistema en el espacio
	Las comprobaciones de las soluciones de los ejercicios de ecuaciones de la recta son adecuadas para la educación secundaria, desde el punto de vista de la matemática		X	No se comprueba las soluciones obtenidas
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales son adecuadas desde la matemática		X	No hay demostraciones
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		Hasta cierto punto, sólo con ejercicios algorítmic
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí		X	Las tareas no incluyen problemas del contexto

Tabla N° 05. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Tarea 5° de educación secundaria pública

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 5 SI	CUMPLE TAREA 5 NO	OBSERVACIONES
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		Se resuelve solo un ejemplo de sistema de dos ecuaciones
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones de recta con dos incógnitas		X	
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y economía		X	
	Se proponen situaciones de problematización de oferta, demanda y equilibrio de mercado que se resuelven con ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales		X	Además, se usa la expresión algebraica muy levemente
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación de recta	X		Sólo en forma específica
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con ecuaciones de la recta		X	Sólo un ejemplo en lenguaje algebraico y su gráfica
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		Sólo en ejercicios, puesto que no hay problemas de aplicación
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico)		X	solamente en lenguaje algebraico
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X	No se plantean ni resuelven problemas contextualizados

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TAREA 5 SI	CUMPLE TAREA 5 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones de la recta son claros y correctos		X	Una sola definición es insuficiente
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		A nivel de tabulaciones se hace la gráfica
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria		X	Se debe explicitar más, paso por paso
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X	
	En caso que se propongan problemas contextualizados, se muestran procedimientos básico para resolver estos problemas con sistemas de ecuaciones lineales		X	No se plantean problemas del contexto
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de ecuaciones de la recta donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos		X	Puesto que se enfatiza en métodos algebraicos
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo secundario		X	No se es explícito en las explicaciones de los objetos matemáticos
	Las comprobaciones de las soluciones de los ejercicios de ecuaciones de la recta son adecuadas para la educación secundaria, desde el punto de vista de la matemática		X	No se comprueba las soluciones obtenidas
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales son adecuadas desde la matemática		X	No hay demostraciones
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	Ninguna
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		En una mínima proporción
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí		X	Las tareas no incluyen problemas del contexto

5.1.2. Indicadores de idoneidad epistémica de las tareas matemáticas de la educación superior

En esta segunda parte, aplicamos la tabla de indicadores de idoneidad didáctica en su dimensión epistémica a cada uno de los cuatro libros de texto de matemáticas de educación superior, seleccionados en el presente estudio, y a cada una de las configuraciones epistémicas respectivas. En dichos textos, están expresadas explícitamente las tareas matemáticas que el autor presenta a los estudiantes de la educación superior, tanto la tecnológica como la universitaria, de las cuales previamente hemos hecho la C.E.

Debemos señalar que las tablas de indicadores de idoneidad epistémica que hemos aplicado fueron proporcionadas por el EOS, fueron adaptadas al nivel de educación superior y a las tareas de ecuaciones lineales, y nos han servido para analizar la idoneidad epistémica de los significados de referencia de las ecuaciones lineales. Consideramos que los componentes y los indicadores son relevantes, puesto que, permiten operativizar la noción de idoneidad epistémica o matemática de las ecuaciones lineales, en los textos del nivel superior.

Según Godino, para que las actividades matemáticas que impartimos con los estudiantes tenga alta idoneidad epistémica, las tareas matemáticas deben ser ricas, de manera que interconecten situaciones problemas, diversos lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones, así como la justificación de las mismas a través de argumentos. En base a todo ello, hemos procurado integrar diferentes componentes y sus respectivos indicadores en las tablas que presentamos en seguida.

Cabe mencionar que los indicadores del nivel superior son similares a aquellos indicadores de educación secundaria, puesto que, se trata del mismo tema, solamente que con diferente grado de profundidad. Además, porque pretendemos hacer un comparativo sobre los objetos matemáticos de las tareas del final de la educación secundaria y los inicios del nivel superior.Esto es, conocimientos previos y básicos para resolver situaciones matemáticas propias de la educación superior. Para el análisis,la primera tabla se aplicará al análisis epistémico del primer texto y de la primera configuración epistémica, y así sucesivamente.

Tabla N° 06. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Primer texto de educación superior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 1 SI	CUMPLE TEXTO 1 NO	OBSERVACIONES
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X	Dado que el autor enfatiza en el formalismo de las matemáticas
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones lineales con una, dos y tres incógnitas	X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y la economía		X	Puesto que el texto es formalista
	Se proponen situaciones de problematización de ahorro en cuenta corriente para resolver con sistemas de ecuaciones lineales		X	Puesto que el texto es meramente formalista
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	Dado que el texto es rigurosamente formalista
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X	Se usa, pero no en aplicaciones
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación lineales en general	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	X		
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de administración bancaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico, etc.)	X		
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.	X		Aunque enfatiza más en la parte algorítmica y formal

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 1 SI	CUMPLE TEXTO 1 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas son claros y correctos	X		Son contundentes y explícitas
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación superior tecnológica, en el sentido de no caer en el formalismo matemático	X		
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X	Énfasis en lo formal
	Se muestran los procedimientos fundamentales para resolver problemas de administración como utilidad, oferta y demanda lineal		X	Énfasis en la parte matemática
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales	X		
	Se proponen situaciones de ecuaciones en una, dos y tres incógnitas donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos	X		
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo superior	X		
	Las comprobaciones del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales son adecuadas para la educación superior	X		
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales poseen rigor matemático	X		
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	Solamente en ejercicios
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones lineales en una y dos incógnitas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		
	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones lineales (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí	X		

Tabla N° 07. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Segundo texto de educación superior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 2 SI	CUMPLE TEXTO 2 NO	OBSERVACIONES
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales	X		
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones lineales con una, dos y tres incógnitas	X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y la economía	X		
	Se proponen situaciones de problematización de ahorro en cuenta corriente para resolver con sistemas de ecuaciones lineales		X	
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales	X		
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X	Se usa el lenguaje gráfico, pero en otras aplicaciones
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación lineales en general	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	X		
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de administración bancaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico, etc.)	X		
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.	X		En problemas ligados a la administración y la economía

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 2 SI	CUMPLE TEXTO 2 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas son claros y correctos	X		Son contundentes y explícitas
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		Enfatiza en métodos matriciales
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación superior tecnológica, en el sentido de no caer en el formalismo matemático	X		Enfatiza en métodos matriciales
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad	X		
	Se muestran los procedimientos fundamentales para resolver problemas de administración como utilidad, oferta y demanda lineal		X	En otros, casos pero no en oferta y demanda
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales	X		
	Se proponen situaciones de ecuaciones en una, dos y tres incógnitas donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos	X		
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo superior	X		
	Las comprobaciones del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales son adecuadas para la educación superior	X		
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales poseen rigor matemático	X		Métodos matriciales
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	En otras aplicaciones
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones lineales en una y dos incógnitas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		
	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones lineales (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí	X		

Tabla N° 08. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Tercer texto de educación superior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 3 SI	CUMPLE TEXTO 3 NO	OBSERVACIONES
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales	X		
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones lineales con una, dos y tres incógnitas	X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y la economía	X		
	Se proponen situaciones de problematización de ahorro en cuenta corriente para resolver con sistemas de ecuaciones lineales	X		
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales	X		
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado	X		
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación lineales en general	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	X		
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de administración bancaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico, etc.)	X		
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.	X		En problemas ligados a la administración y la economía

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 3 SI	CUMPLE TEXTO 3 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas son claros y correctos	X		Son bastante explícitos
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación superior tecnológica, en el sentido de no caer en el formalismo matemático	X		
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad	X		
	Se muestran los procedimientos fundamentales para resolver problemas de administración como utilidad, oferta y demanda lineal	X		
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales	X		
	Se proponen situaciones de ecuaciones en una, dos y tres incógnitas donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos	X		
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo superior	X		
	Las comprobaciones del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales son adecuadas para la educación superior	X		
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales poseen rigor matemático		X	No son muy formales
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente	X		En otras aplicaciones
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones lineales en una y dos incógnitas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		
	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones lineales (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí	X		

Tabla N° 09. Indicadores de IDONEIDAD EPISTÉMICA – Cuarto texto de educación superior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 4		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales	X		
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		Sólo con ecuaciones de dos incógnitas
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones lineales con una, dos y tres incógnitas	X		Con una y dos incógnitas
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y la economía		X	Se proponen algunos problemas para que el alumno resuelva
	Se proponen situaciones de problematización de ahorro en cuenta corriente para resolver con sistemas de ecuaciones lineales	X		Solamente dos ejemplos
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	Para reemplazar datos en fórmulas dadas
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado	X		
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación lineales en general	X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas		X	
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de administración bancaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación		X	Falta ser bastante explícito
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico, etc.)		X	
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X	

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE TEXTO 4 SI	CUMPLE TEXTO 4 NO	OBSERVACIONES
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas son claros y correctos	X		Solamente con una y dos incógnitas
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación superior tecnológica, en el sentido de no caer en el formalismo matemático	X		
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad	X		
	Se muestran los procedimientos fundamentales para resolver problemas de administración como utilidad, oferta y demanda lineal	X		
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales		X	Problemas para reemplazar fórmulas
	Se proponen situaciones de ecuaciones en una, dos y tres incógnitas donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos		X	
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo superior	X		
	Las comprobaciones del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales son adecuadas para la educación superior		X	No se comprueban las soluciones
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales poseen rigor matemático		X	No hay demostraciones
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X	Reemplazar fórmula
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones lineales en una y dos incógnitas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		
	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones lineales (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí	X		

5.2. IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS TAREAS DE ECUACIONES LINEALES – DIMENSIÓN COGNITIVA A PRIORI

En esta parte, presentamos las tablas de indicadores de idoneidad cognitiva (a priori) del tema matemático específico “ecuaciones lineales”. Es decir, analizamos el grado en que los contenidos implementados y/o pretendidos son adecuados para los alumnos decuarto y quinto grado de secundaria y para los estudiantes del nivel superior tecnológica de la carrera de administración bancaria.

Puesto que se trata de un análisis a priori, los indicadores los hemos tomado de las tablas de indicadores de idoneidad del EOS, y los hemos adaptado en base a la experiencia, con la finalidad de que sean validados en un estudio futuro. Hacemos primero el análisis de la idoneidad cognitiva de los contenidos matemáticos en la educación secundaria pública, para en segundo lugar, presentar el análisis de idoneidad cognitiva de los contenidos matemáticos en la educación superior tecnológica, de la carrera de Administración Bancaria del IFB.

5.2.1. Indicadores de idoneidad cognitiva de las tareas matemáticas de educación secundaria pública

A continuación aplicamos la tabla N° 10de indicadores de idoneidad cognitiva, a las cinco tareas matemáticas seleccionadas que se les asignan a los alumnos de educación secundaria pública en nuestro país, de las cuales, previamente hemos hecho la descripción de los libros de matemática distribuidos por el Ministerio de Educación en los tres últimos grados. Dichos textos, son repartidos a cada alumno para que los utilice en forma mandatoria a lo largo del año de estudios.

5.2.2. Indicadores de idoneidad cognitiva de las tareas matemáticas de la educación superior tecnológica

En la tabla N° 11, aplicamos los indicadores de idoneidad cognitiva a las tareas de los cuatro libros de texto de matemáticas de educación superior seleccionados en el presente estudio. En dichos textos, están expresadas explícitamente las tareas matemáticas de ecuaciones lineales que los autores presentan a los estudiantes de la educación superior, tanto la tecnológica como la universitaria, y que los docentes tomamos como referencias para la enseñanza de las matemáticas.

Tabla N° 10. Indicadores de IDONEIDAD COGNITIVA a priori – Educación secundaria pública

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Conocimientos previos (situaciones, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, relaciones)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de las ecuaciones de primer grado en una y dos variables	X		
	Los estudiantes cuentan con saberes previos acerca de nociones de costo fijo, costo variable, ingresos y utilidad		X	Se resuelven preferentemente ejercicios algorítmicos
	Los alumnos poseen saberes previos sobre la resolución de ejercicios de sistemas de ecuaciones con dos y tres variables	X		Solamente sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas
	Los estudiantes tienen nociones teóricas previas de oferta y demanda lineal y su interrelación entre sí		X	Se resuelven preferentemente ejercicios algorítmicos
	Los contenidos pretendidos de ecuaciones lineales en el plano cartesiano se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes	X		
	El grado de dificultad de los contenidos implementados de ecuaciones lineales es adecuado para los alumnos de secundaria	X		
Adaptación curricular a las diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación en el tema ecuaciones de primer grado con una, dos y tres variables	X		Asumimos que se refuerza en horarios de clase
	Se programan actividades de nivelación y refuerzo para sistemas de ecuaciones con dos y tres variables		X	Suponemos que si lo hay es escasa
	Se programan actividades de refuerzo a la actividad de resolución de problemas del contexto con ecuaciones de oferta y demanda lineal		X	No se resuelven problemas contextualizados
	Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes durante el desarrollo de la actividad matemática ecuaciones de primer grado		X	Por el excesivo número de alumnos en cada aula

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Aprendizaje (situaciones, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, y relaciones entre sí)	Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos de ecuaciones lineales pretendidos	X		
	Los diferentes modos de evaluación señalan que los estudiantes logran comprender los modelos de oferta y demanda lineal		X	Asumimos que no se resuelven problemas contextualizados
	Las diversas formas de evaluación evidencian que los alumnos han logrado el desarrollo de la competencia (pretendida en el sílabo o en la programación) en ecuaciones de primer grado		X	Suponemos que si esto ocurre, no es en su mayoría
	Se observa comprensión conceptual y proposicional de las ecuaciones de primer grado en los alumnos de secundaria pública.	X		
	Se evidencia competencia comunicativa y argumentativa por parte los estudiantes en la actividad con ecuaciones de primer grado	X		
	Existe fluencia procedimental en el desarrollo de la actividad matemática sistema de ecuaciones lineales en dos y tres variables	X		Es mucho más notorio con sistemas de dos ecuaciones
	Se observa en los alumnos comprensión situacional para plantear y resolver problemas de costos, ingresos y utilidad	X		Pero no se trabaja tales situaciones
	Se desarrolla competencia metacognitiva en los estudiantes a lo largo de la actividad matemática		X	
	La evaluación de los contenidos pretendidos e implementados de ecuaciones lineales tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia de los estudiantes		X	Se estila aplicar pruebas únicas para todos
	Los resultados de las evaluaciones a los estudiantes se publican y usan para tomar decisiones.		X	Se carece de sistemas informáticos institucional

Tabla N° 11. Indicadores de IDONEIDAD COGNITIVA a priori – Educación superior tecnológica

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE SI	CUMPLE NO	OBSERVACIONES
Conocimientos previos (situaciones, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, relaciones)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para plantear problemas de ecuaciones lineales en una, dos variables y tres variables		X	A lo sumo para resolver ejercicios algorítmicos
	Los estudiantes cuentan con saberes previos acerca de nociones de costo fijo, costo variable, ingresos y utilidad		X	
	Los alumnos poseen saberes previos sobre la resolución de ejercicios de sistemas de ecuaciones con dos y tres variables	X		
	Los estudiantes tienen nociones teóricas previas de oferta y demanda lineal y su interrelación entre sí		X	
	Los contenidos pretendidos de ecuaciones lineales en el plano cartesiano se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes	X		Según el sílabo y el módulo de matemáticas de la institución
	El grado de dificultad de los contenidos implementados de ecuaciones lineales es adecuado para los alumnos de administración bancaria	X		De acuerdo al sílabo y a la experiencia en la institución
Adaptación curricular a las diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación en el tema ecuaciones de primer grado con una, dos y tres variables	X		Clases de reforzamiento esporádicas y con escasa concurrencia
	Se programan actividades de nivelación y refuerzo en el tema de aplicación de las ecuaciones a ingresos, costos y utilidades.	X		Clases esporádicas y con poca asistencia de los alumnos
	Se programan actividades de refuerzo a la actividad de resolución de problemas del contexto con ecuaciones de oferta y demanda lineal	X		
	Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes durante el desarrollo de la actividad matemática ecuaciones de lineales		X	La cantidad de alumnos por aula es elevado, es difícil la enseñanza personalizada

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Aprendizaje (situaciones, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, y relaciones entre sí)	Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos de ecuaciones lineales pretendidos		X	De acuerdo a la experiencia, en menos de la mitad
	Los diferentes modos de evaluación señalan que los estudiantes logran comprender los modelos de oferta y demanda lineal		X	No, en su mayoría los resultados de las evaluaciones indican.
	Las diversas formas de evaluación evidencian que los alumnos han logrado el desarrollo de la competencia (pretendida en el sílabo) en ecuaciones de lineales y sus aplicaciones a la administración y economía		X	
	Se observa comprensión conceptual y proposicional de las ecuaciones de primer grado en los alumnos de administración	X		
	Se evidencia competencia comunicativa y argumentativa por parte los estudiantes en la actividad con ecuaciones de primer grado	X		Sólo hasta cierto punto y en ciertos alumnos
	Existe fluencia procedimental en el desarrollo de la actividad matemática sistema de ecuaciones lineales en una y dos variables	X		Solamente cuando se trabaja con ejercicios
	Se observa en los alumnos comprensión situacional para plantear y resolver problemas de costos, ingresos y utilidad		X	Puesto que no traen el conocimiento previo necesario
	Se desarrolla competencia metacognitiva en los estudiantes a lo largo de la actividad matemática		X	Por falta de tiempo, además se debe cumplir con el sílabo
	La evaluación de los contenidos pretendidos e implementados de ecuaciones lineales tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia de los estudiantes		X	Se aplica pruebas únicas para todos los alumnos
	Los resultados de las evaluaciones a los estudiantes se publican y usan para tomar decisiones	X		

5.3. IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS ECUACIONES LINEALES EN LA PROPUESTA DE FORMACION PROFESIONAL – DIMENSIÓN ECOLÓGICA.

En esta parte del análisis nos centramos en la idoneidad ecológica de la planificación de la formación del estudiante, en la carrera de Administración Bancaria. Es decir, analizamos el grado en que la propuesta formativa que presenta la institución educativa superior tecnológica objeto de estudio, para aprender matemáticas, resulta adecuada respecto del entono o el medio en el cual se desenvolverán los futuros egresados de Administración Bancaria. Esto es, si la propuesta educativa responde a las necesidades de la sociedad, de los bancos, de las empresas, del mercado laboral limeño, de los estudiantes, de nuestra realidad, etc.

En consecuencia, lo que hacemos es aplicar los indicadores de idoneidad ecológica adaptados al tema matemático “ecuaciones lineales” y estructurados en una tabla de idoneidad ecológica, la misma que ha sido proporcionada por el EOS (Godino, 2011). Estas tablas de indicadores de idoneidad ecológica las hemos aplicado hacia algunos documentos oficiales de la carrera de Administración Bancaria; dentro de estos documentos curriculares estamos considerando, la malla curricular, el sílabo del curso de matemática, la tabla de valores institucionales, la visión y misión institucionales, y el perfil del egresado. Para luego, valorar la alta, media o baja idoneidad ecológica de dicha propuesta de formación profesional.

A continuación presentamos la tabla de indicadores de la parte ecológica correspondiente solamente al nivel de educación superior, a la institución objetos de estudio, el Instituto de Formación Bancaria – IFB, Lima. Señalar además, que no hemos considerado indicadores de idoneidad ecológica para la educación secundaria, puesto que es el nivel superior, el objetivo final de nuestro estudio.

Tabla N° 12. Indicadores de IDONEIDAD ECOLÓGICA – Educación superior tecnológica

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
Adaptación al currículo	Los contenidos de la actividad ecuaciones lineales y su implementación se corresponden con las directrices curriculares de la carrera administración bancaria del Instituto de Formación Bancaria	X		Especialmente con el análisis de alternativas y riesgo de financiamiento
	La evaluación de los contenidos de ecuaciones de primer grado se corresponde con la competencia pretendida en los documentos curriculares de la carrera de administración bancaria		X	Se señala una evaluación por competencias, pero se tiende a evaluar con sistema tradicional
Apertura hacia la innovación didáctica	La Innovación está basada en la investigación de situaciones del contexto que se resuelven con ecuaciones lineales; y en la práctica reflexiva	X		Situaciones comerciales o de negocios de la realidad
	Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, actualización docente, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto de desarrollo institucional del IFB	X		Aulas, bibliotecas y laboratorios equipados con lo último de la tecnología, conexión a internet
Adaptación socio -profesional y cultural	Los contenidos pretendidos e implementados de ecuaciones de primer grado y su contextualización, contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes de administración bancaria	X		
	La actividad ecuaciones lineales responde a la propuesta curricular institucional de currículo por competencias	X		De manera específica responde al sílabo planificado.
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico en los documentos curriculares de la carrera de administración	X		Formación del alumno acorde con los valores institucionales bien definidos.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos de ecuaciones de primer grado en una dos y tres variables se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares	X		Por ejemplo, con contenidos de matemática financiera, fundamentos de estadística, riesgo financiero, etc.

5.4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LAS TAREAS DE “ECUACIONES LINEALES” -DIMENSIÓN EPISTÉMICA

A continuación, hacemos un análisis comparativo del nivel de cumplimiento de los indicadores de idoneidad epistémica, de las tareas de ecuaciones lineales, correspondientes a la educación secundaria pública de nuestro país.

En la tabla N° 13, resumimos el nivel de cumplimiento de los componentes e indicadores de idoneidad epistémica de cada una de las cinco tareas de ecuaciones lineales, de educación secundaria pública, descritas y analizadas en el presente estudio. A partir de esta tabla podemos observar que, en cuanto al componente “situaciones problemas”, el cual posee seis indicadores, todas las tareas analizadas no cumplen con la mayoría de los indicadores, por lo que de acuerdo con el EOS, dichas tareas tienen un bajo grado de idoneidad epistémica en este componente específico.

En lo referente al componente “lenguajes”, podemos apreciar a partir de la tabla N° 13, que el nivel de cumplimiento llega a la mitad de indicadores, y la otra mitad no estaría cumpliendo con estos siete indicadores de idoneidad epistémica. En consecuencia, de acuerdo con el EOS, podemos concluir, para este componente específico, que las tareas matemáticas de secundaria pública, poseen un grado medio de idoneidad epistémica.

En lo que respecta al componente “reglas” (definiciones, proposiciones y procedimientos), podemos apreciar que, en cada tarea matemática analizada, no se cumple la mayoría de los indicadores de idoneidad epistémica y que este no cumplimiento es una constante en cada una de dichas tareas. Por tanto, en base al EOS, podemos señalar que las tareas matemáticas (ecuaciones lineales) que se proponen a los alumnos de la educación secundaria pública, tienen un bajo grado de idoneidad epistémica para este componente específico.

De manera similar, para el componente “argumentos”, a partir de la misma tabla resumen, podemos observar que en cada tarea matemática propuesta a los alumnos de secundaria pública, no se cumple con la mayoría de los cuatro indicadores de idoneidad epistémica. En consecuencia, afirmamos que dichas tareas, tienen un bajo grado de idoneidad epistémica en este componente específico.

Finalmente, en cuanto al componente “relaciones” entre componentes, podemos apreciar que, puesto que los indicadores son solamente dos, el cumplimiento está la mitad para el sí, y la otra mitad para el no. Por lo tanto, concluimos que dichas tareas tienen un grado de idoneidad epistémica medio, para este componente.

En consecuencia, podemos concluir que, las tareas matemáticas de ecuaciones lineales que se proponen a los alumnos de la educación secundaria pública, en los libros de texto distribuidos por el ministerio de educación, de acuerdo con el EOS, poseen un grado bajo a medio de idoneidad epistémica. Lo cual se manifiesta en un escaso o nulo, en algunos casos, planteamiento de situaciones-problemas, no se promueve el proceso de contextualizacióndel tema ecuaciones lineales, desde los textos; desarticulación y el no tránsito de ida y vuelta entre los diferentes lenguajes gráfico, algebraico, verbal; uso de procedimientos meramente algorítmicos y falta de precisión en las definiciones y conceptos.

Además, de falta de argumentos o situaciones donde el alumno tenga que sustentar o defender los resultados obtenidos a partir de los cálculos, donde el alumno tenga que comprobar y analizar las soluciones arribadas. Así como, a través de la desarticulación o escasas relaciones entre los objetos matemáticos presentes en las tareas propuestas. Creemos, que todas estas características y el bajo grado de idoneidad epistémica, contribuyen a que los alumnos lleguen con escasos conocimientos previos de matemáticas, a la educación superior tecnológica, puntualmente.

Lo encontrado hasta este momento, confirma nuestra hipótesis inicial, acerca de la desarticulación de las tareas, acerca de la descontextualización de las situaciones-problemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria y sobre todo, acerca de la baja idoneidad didáctica que poseen las tareas propuestas a los alumnos del nivel secundario de la educación pública de nuestro país. Confirma también, el hecho de que en la secundaria se prioriza los métodos algorítmicos, de manera que cuando estos alumnos ingresan en la educación superior, presentan serias dificultades para desarrollar situaciones matemáticas contextualizadas a su carrera profesional.

Tabla N° 13. Comparativo deIDONEIDAD EPISTÉMICA de las tareasde ecuaciones lineales - educación secundaria pública

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE O NO CUMPLE										OBSERVACIONES
		TAREA1		TAREA2		TAREA 3		TAREA 4		TAREA 5		
		SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	N0	SI	NO	
Situaciones - Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X		X		X		X		X	
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		X		X		X		X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones de recta con dos incógnitas	X		X		X		X			X	
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y economía		X		X		X		X		X	
	Se proponen situaciones de problematización de oferta, demanda y equilibrio de mercado que se resuelven con ecuaciones lineales		X		X		X		X		X	
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X		X		X		X		X	
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		X		X		X			X	
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X		X		X		X		X	
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación de recta	X		X		X		X		X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con ecuaciones de la recta	X		X		X			X		X	
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de secundaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X			X	X		X		X		
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico)		X		X		X		X		X	Sólo lenguajealgebraico
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.		X		X		X		X		X	No se plantean problemas

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE O NO CUMPLE										OBSERVACIONES
		TAREA1		TAREA 2		TAREA 3		TAREA 4		TAREA 5		
		SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones de la recta son claras y correctas	X		X		X			X		X	
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		X		X		X		X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación secundaria	X		X		X		X			X	
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X		X		X		X		X	
	Se muestran los procedimientos fundamentales para resolver problemas de contextualizados con sistemas de ecuaciones lineales		X		X		X		X		X	
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales		X		X		X		X		X	
	Se proponen situaciones de ecuaciones de la recta donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos		X		X		X		X		X	Ninguna tarea se cumple el indicador
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo	X		X		X			X		X	
	Las comprobaciones de las soluciones de los ejercicios de ecuaciones de la recta son adecuadas para la educación secundaria	X			X		X		X		X	No se realizan demostraciones
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales son contundentes		X		X		X		X		X	
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X		X		X		X		X	Ninguna en todas
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		X		X		X		X		La relación es mínima en todas
	Los objetos matemáticos emergentes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones de la recta (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí		X		X		X		X		X	En todas las tareas no se plantean problemas contextualizados

La tabla N° 14 siguiente, contiene el análisis comparativo del nivel de cumplimiento de la idoneidad epistémica de las tareas matemáticas propuestas a los alumnos de educación superior, a través de los libros de texto, y que hemos considerado en el presente estudio. Más específicamente, se trata de las tareas que están directamente relacionadas con aquellas que se imparten en el área de matemática en la carrera de administración bancaria del IFB, Lima.

En lo referente al componente “situaciones-problemas”, podemos apreciar que todos los textos cumplen la mayoría de los indicadores de idoneidad epistémica; aunque en el caso de Lages (2004), no cumple, pero es por el hecho de enfocarse en las demostraciones y en la parte formalista de las matemáticas. En consecuencia, podemos concluir que, las tareas de ecuaciones lineales propuestas en los textos de matemática de educación superior, poseen un alto grado de idoneidad epistémica, en este componente.

Con respecto al componente “lenguajes”, observamos que las tareas propuestas por los textos, cumplen la gran mayoría de los indicadores de idoneidad epistémica, esto es, que en las tareas se articulan los diferentes lenguajes gráfico, verbal y algebraico. Sin embargo, el módulo de matemática del IFB, no cumple con este componente, puesto que no se transita de ida y vuelta entre los diferentes lenguajes. En consecuencia, podemos afirmar que, las tareas matemáticas de superior, poseen un alto grado de idoneidad epistémica en este componente específico.

En cuanto al componente “Reglas”, podemos observar que las tareas cumplen la mayoría de los siete indicadores de idoneidad epistémica planteados, puesto que presentan, definiciones precisas y adecuadas desde el punto de vista de la institución matemática, proposiciones y propiedades acompañadas de la formalidad y rigurosidad matemática y demostración, así como procedimientos contundentes. Señalamos también que en el caso del módulo de matemática del IFB, el cumplimiento es en menor grado. Por tanto, concluimos que dichas tareas poseen un alto grado de idoneidad epistémica en lo que al componente reglas se refiere.

Precisamos además, que dichas tareas presentan un alto grado de idoneidad epistémica en cuanto al componente “argumentos”, puesto que según los resultados de la tabla 14, estas tareas cumplen con la gran mayoría de los indicadores de idoneidad epistémica planteados en el análisis. Es decir, en las tareas se aprecia la proposición de situaciones problemas, para que los estudiantes tengan la oportunidad de argumentar los resultados numéricos obtenidos, analizar las soluciones encontradas y criticar otras con justificaciones y argumentos matemáticos contundentes.

Finalmente, en lo que respecta al componente “relaciones”, podemos concluir que las tareas presentan un alto grado de idoneidad epistémica en este componente, basados en las relaciones entre los componentes y las relaciones entre los objetos matemáticos intervinientes en dichas tareas.

En conclusión, todo lo analizado hasta el momento nos proporciona elementos contundentes para afirmar que, las tareas matemáticas de ecuaciones lineales que se presentan a los estudiantes del nivel superior, en los libros de texto seleccionados, poseen un alto grado de idoneidad epistémica. Esto se manifiesta porque las tareas proponen situaciones-problemas contextualizadas, entre otros, al campo de la administración, la economía y los negocios, que se resuelven con ecuaciones lineales.

Por otra parte, en lo referente a la idoneidad cognitiva de las tareas de secundaria, a partir de la tabla 10, podemos apreciar a priori que, las tareas de este nivel educativo cumplen la mitad de los indicadores planteados, por lo que afirmamos que, éstas poseen un grado medio de idoneidad cognitiva. Del mismo modo, de la tabla 11, podemos afirmar que las tareas de educación superior, a priori cumplen con más de la mitad de los indicadores de idoneidad cognitiva planteados. Por tanto, dichas tareas tendrían un medio – alto grado de idoneidad cognitiva.

Con respecto a la idoneidad ecológica de las tareas matemáticas de educación superior, a partir de la tabla 12, podemos apreciar, que en base al análisis de algunos documentos oficiales del Instituto de Formación Bancaria, las tareas cumplen con la gran mayoría de indicadores de idoneidad ecológica. Lo cual nos permite afirmar que, dichas tareas poseen un alto grado de idoneidad ecológica, es decir, que se ejecuta una educación en valores, hay una gran apertura hacia la innovación y la tecnología, existe una adecuada adaptación del currículo hacia la sociedad y el campo laboral, entre otros.

Tabla N° 14. **Comparativo de IDONEIDAD EPISTÉMICA de las tareas de ecuaciones lineales de la educación superior**

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE O NO CUMPLE								OBSERVACIONES
		TEXTO 1		TEXTO 2		TEXTO 3		TEXTO4		
		SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	N0	
Situaciones – Problemas	Se presentan varios problemas contextualizados a la administración, la economía y los negocios que se resuelven con ecuaciones lineales		X	X		X		X		
	Se ejemplifica con ejercicios de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	X		X		X		X		
	Se resuelven ejercicios algorítmicos de ecuaciones lineales con una, dos y tres incógnitas	X		X		X		X		
	Se ejemplifica con casos de aplicación del objeto ecuaciones lineales a la administración y la economía		X	X		X			X	
	Se proponen situaciones de problematización de ahorro en cuenta corriente para resolver con sistemas de ecuaciones lineales		X		X	X		X		
	Se proponen situaciones de generación de problemas de costos fijos y variables, ingresos y utilidades con ecuaciones lineales		X	X		X			X	
Lenguajes	Uso del modo de expresión verbal en las actividades de ecuaciones lineales	X		X		X		X		
	Se usa la expresión gráfica en aplicaciones de oferta, demanda lineal y equilibrio de mercado		X		X	X		X		
	Se usa la expresión simbólica en la ejemplificación de ecuación lineales en general	X		X		X		X		
	Se usan traducciones y conversiones entre los diferentes modos de expresión matemática en la actividad con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	X		X		X			X	
	Nivel de lenguaje adecuado a los estudiantes de administración bancaria, tanto en la ejemplificación como en los casos de aplicación	X		X		X			X	
	Se proponen situaciones de expresión matemática en distintos lenguajes (simbólico, gráfico, algebraico, etc.)	X		X		X			X	
	Se proponen situaciones de interpretación de los resultados de los problemas contextualizados usando el lenguaje verbal, gráfico y algebraico.	X		X		X			X	

….continuación de la tabla anterior

COMPONENTES	INDICADORES	CUMPLE O NO CUMPLE								OBSERVACIONES
		TEXTO 1		TEXTO 2		TEXTO 3		TEXTO4		
		SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	Las definiciones y conceptos de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas son claras y correctas	X		X		X		X		Se cumple en todas las tareas
	Los procedimientos utilizados en la ejemplificación y en la actividad matemática son correctos	X		X		X		X		
	Los procedimientos son apropiados al nivel de educación superior tecnológica	X		X		X		X		Este indicador cumple en todo
	Se presentan los enunciados principales de ecuaciones de costos, ingresos y utilidad		X	X		X		X		
	Se muestran los procedimientos fundamentales para resolver problemas de administración como utilidad, oferta y demanda lineal		X		X	X		X		
	Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones o proposiciones de ecuaciones lineales	X		X		X			X	
	Se proponen situaciones de ecuaciones en una, dos y tres incógnitas donde los alumnos tengan que generar o negociar procedimientos	X		X		X			X	
Argumentos	Las explicaciones de los objetos matemáticos presentados y los emergentes en la actividad con ecuaciones lineales en el plano cartesiano, son adecuadas al nivel educativo superior	X		X		X		X		
	Las comprobaciones del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales son adecuadas para la educación superior	X		X		X			X	
	Las demostraciones de ciertas propiedades de las ecuaciones lineales son contundentes	X		X			X		X	
	Se promueven situaciones-problemas de oferta y demanda lineal para que el alumno argumente		X		X	X			X	
Relaciones	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad con ecuaciones lineales en una y dos incógnitas (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan entre sí.	X		X		X		X		Cumple en todas las tareas
	Los objetos matemáticos intervinientes en la actividad de resolución de problemas contextualizados con ecuaciones lineales (problemas, definiciones, proposiciones) se relacionan y conectan entre sí	X		X		X		X		Cumple en todas las tareas revisadas

Para finalizar el presente capítulo de nuestro estudio de investigación, debemos precisar que a partir de las tablas que acabamos de presentar, se puede comparar el cumplimiento o no de los indicadores pertenecientes a los componentes matemáticos, presentes en las tareas de los textos del nivel de secundaria. En lo que respecta a la idoneidad epistémica, podemos apreciar en la tabla N° 13, que las cinco tareas analizadas tienen un grado de cumplimiento similar, la mayoría de indicadores no se cumplen, lo cual y en sentido del EOS consideramos que la idoneidad epistémica de estas tareas posee un bajo grado.

Esta situación contrasta con la tabla N° 14, donde se puede evidenciar que la gran mayoría de los indicadores de idoneidad epistémica correspondientes a los componentes matemáticos, se cumplen, de manera similar en cada texto de superior analizado, con lo cual podemos afirmar que las tareas matemáticas de ecuaciones lineales, en el caso del nivel superior, poseen un alto grado de idoneidad epistémica. Esto es, en las tareas se complementan los componentes matemáticos, de manera que eso permite proponer tareas ricas e interesantes, en el sentido del EOS.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta parte dela tesis, presentamos las conclusiones a las que hemos llegado a lo largo de la investigación, así como algunas sugerencias y recomendaciones de carácter general con respecto al tema ecuación lineal y su contextualización.

En el capítulo I, señalamos que nuestro objetivo general es determinar el grado de idoneidad didáctica de las tareas de ecuaciones lineales, propuestas en los libros de texto de matemáticas, para los estudiantes del nivel secundario de las instituciones educativas públicas del país y para los alumnos de la carrera Administración Bancaria – Lima, para mejorar el desarrollo de las actividades matemáticas. Y para lograrlo nos propusimos como primer objetivo específico:

Determinar los objetos matemáticos asociados a las tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas propuestas en los libros de texto distribuidos por el Ministerio de Educación y usados por los estudiantes de educación secundaria de las instituciones educativas públicas del país, con la finalidad de analizar el grado de idoneidad didáctica de las tareas matemáticas.

En relación al primer objetivo, luego de analizar los textos de los tres últimos grados de educación secundaria, distribuidos a los alumnos de las instituciones educativas públicas, encontramos que,los objetos matemáticos (situaciones-problemas, propiedades, lenguajes, procedimientos, definiciones) intervienen en tales tareas de ecuaciones lineales, pero de manera desarticulada, de manera que no se complementan para el desarrollo de las tareas de ecuaciones lineales.

Por ejemplo, el lenguaje algebraico se trabaja en un capítulo y el lenguaje gráfico en otro capítulo al final de los textos; en tanto que no se enfatiza el lenguaje verbal, puesto que no se trabajan problemas contextualizados con ecuaciones. Además, no se proponen situaciones en las que los alumnos tengan que argumentar, sustentar o criticar las soluciones encontradas.

Tal desarticulación de objetos matemáticos en las tareas de la educación secundaria pública, genera a su vez la desarticulación de las entidades primarias que propone el EOS. Es decir, no se plantean situaciones-problemas del contexto del alumno, se prioriza el lenguaje algebraico, activándose el proceso de algoritmización.Las definiciones son imprecisas y con poca rigurosidad matemática, los procedimientos son meras recetas, se observa carencia de propiedades y ausencia de argumentos que sustenten las tesis. Lo cual creemos, conlleva a no activar el proceso de argumentación propuesto por el EOS, en los alumnos, trayendo como consecuencia que no se desarrollen la capacidad de razonamiento, demostración, comunicación matemática, entre otras, en los alumnos.

Como segundo objetivo específico, nos propusimos:

Determinar los objetos matemáticos delas tareas de ecuaciones lineales en una, dos y tres incógnitas, propuestas en los libros de texto más representativos de la educación superior peruana para estudiantes de AdministraciónBancaria, con la finalidad de analizar el grado de idoneidad didáctica de dichas tareas matemáticas.

Con respecto al segundo objetivo, al realizar la configuración epistémica de algunas tareas de ecuaciones lineales, en cada uno de los cuatro textos del nivel superior, encontramos que los objetos matemáticos intervinientes en dichas tareas, se encuentran articulados. También observamos que, se plantean situaciones problemas contextualizados a la administración y los negocios, lo que nos indica que el proceso de contextualización se trata de activar en los estudiantes. Se transita de ida y vuelta entre los distintos lenguajes, se interrelacionan entre sí, los diferentes componentes propuestos por el EOS, a saber: definiciones y conceptos rigurosos, procedimientos diversificados, diversas propiedades y su respectiva justificación, y se presentan sólidos y contundentes argumentos. Esto nos lleva a decir que se activa el proceso de comunicación.

Consideramos que tales procesos (de comunicación, contextualización, algoritmización, etc.), darían lugar a que se diseñen e implementen tareas matemáticas que desarrollen la capacidad de argumentación, verificación y crítica en los estudiantes de la carrera de Administración Bancaria, siempre y cuando, dichas tareas sean bien ejecutadas mediante las actividades matemáticas, por el docente en el aula.

Como tercer objetivo específico, nos propusimos:

Determinar el grado de idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, cognitiva (a priori) y ecológica de las tareas de ecuaciones lineales (en una, dos y tres incógnitas), propuestas a los alumnos del nivel de educación secundaria de las instituciones educativas públicas del Perú, y a los estudiantes de la carrera Administración Bancaria, a través de los libros de texto, aplicando los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS.

En relación al tercer objetivo, sobre la idoneidad didáctica en su dimensión epistémica, de las tareas matemáticas de ecuaciones lineales de educación secundaria, luego de aplicar las tablas de indicadores de idoneidad propuestas por el EOS, encontramos que, dichas tareas de los textos de secundaria, tienen un bajo grado de idoneidad epistémica, puesto que no cumplen con la mayoría de los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por el EOS, tal como lo detallamos en el análisis a partir de la tabla N° 13. De donde se puede apreciar que, la ausencia de situaciones-problemas contextualizadas, el uso del lenguaje solamente algebraico dejando de lado el lenguaje gráfico y verbal, la falta de argumentos, de relaciones, y el escaso uso de propiedades adecuadas desde el punto de vista de la institución matemática, generan el bajo grado de idoneidad epistémica.

Consideramos que este bajo grado de idoneidad epistémica, es uno de los factores que influye en el hecho que, cuando los alumnos egresan de la educación secundaria pública e ingresan inmediatamente en la educación superior, encuentran muchas dificultades para desarrollar las tareas de ecuaciones lineales contextualizadas, por ejemplo, a la administración, la economía y los negocios, entre otras de la matemática.

Con respecto a la idoneidad cognitiva de las tareas del nivel secundario, consideradas en este estudio,encontramos que éstas podrían tener una idoneidad de grado medio, basados en un análisis a priori y a partir de las tablas proporcionadas por el EOS,puesto que no hemos aplicado con alumnos tales indicadores. De acuerdo al análisis realizado, en el componente de conocimientos previos, es donde se presentaríael menor grado de idoneidad cognitiva, por el hecho de que, la mayoría de indicadores de idoneidad de este componente, no se cumplen, lo mismo ocurre con el componente de adaptación curricular a las diferencias individuales, se cumplen menos de la mitad de indicadores, tal como se puede apreciar en la tabla N° 10.

En relación a las tareas matemáticas propuestas en los textos del nivel superior, encontramos que éstas poseen un alto grado de idoneidad epistémica, puesto que, de acuerdo al análisis, todas las tareas cumplen con la gran mayoría de indicadores de idoneidad epistémica propuestas por el EOS, en todos los componentes, tal como se puede apreciar en la tabla N° 14.En consecuencia, deducimos que las tareas de ecuaciones lineales que se proponen a los estudiantes de Administración Bancaria son adecuadas. Sin embargo, por el análisis a priori de la idoneidad cognitiva, se justifica que los egresados de secundaria y estudiantes de la carrera de Administración Bancaria, en la práctica, presentan dificultades para resolver dichas tareas. Creemos que esto se debe principalmente, al bajo grado de idoneidad epistémica de las tareas de la secundaria, que trae consigo la falta de conocimientos matemáticos previos, en los estudiantes.

Respecto de la idoneidad cognitiva de las tareas matemáticas del nivel superior, a partir de un análisis a priori y basados en los textos analizados, hemos determinado que éstas tendrían un grado medio de idoneidad. Consideramos que, una de las razones para que la idoneidad cognitiva no sea alta, es la falta de conocimientos previos que muestran los estudiantes que ingresan en la educación superior, algunos indicadores de los componentes de aprendizaje, conocimientos previos, no se cumplen, tal como se puede apreciar en la tabla N° 11. Además, ésta mediana idoneidad cognitiva, se corresponde con aquella encontrada en las tareas de la secundaria.

En lo referente a la idoneidad ecológica, luego de aplicar la tabla de indicadores a los documentos de la carrera de Administración Bancaria del Instituto de Formación Bancaria, Lima, concluimos que, existe un alto grado de idoneidad ecológica. Esto se sustenta por el hecho de que, en la institución se prioriza una educación superior en valores, acorde con la competencia y el comportamiento del mercado laboral. Desde todas las unidades didácticas, se contribuye a cumplir con los componentes e indicadores que en esta investigación propone el EOS, es decir, la adaptación curricular de acuerdo al mercado, existe innovación didáctica para trabajar las tareas matemáticas, y se enfatiza en la adaptación socio-profesional de las matemáticas, tal como se aprecia en la tabla N° 12. Además, de estar actualizados con los avances tecnológicos para desarrollar una educación que esté a la vanguardia con la modernidad.

En resumen, podemos afirmar que hemos logrado los objetivos que nos habíamos propuesto, hemos cumplido con el objetivo general y los objetivos específicos. Es decir, y contestando a la pregunta principal del problema,hemos determinado que las tareas matemáticas propuestas en los libros de texto de educación superior, en el tema específico“ecuaciones lineales”, poseen un grado medio-alto de idoneidad didáctica, tomando en cuenta solamente la dimensión epistémica, la cognitiva a priori y la ecológica; lo cual no ocurre con lo encontrado para las tareas matemáticas,propuestas en los textos de educaciónsecundaria pública. Puesto que éstas, tienen un bajo grado de idoneidad didáctica. En consecuencia, al no haber interrelación o correspondencia entre las tareas matemáticas de ambos niveles educativos, podemos afirmar que existe una especie de brecha matemática entre el nivel de educación secundaria pública y el nivel superior de estudios, lo cual consideramos acarrea una especie de desfase entre ambos niveles educativos.

En lo referente al marco teórico, consideramos que en este estudio fue fundamental aplicar el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática - EOS, ya que nos proporcionó los niveles estructurados y bien definidos de análisis, de los cuales elegimos el primer nivel (objetos y procesos matemáticos) y el quinto nivel (de la idoneidad didáctica en su faceta epistémica, cognitiva y ecológica). Además, por las herramientas que nos brindó el EOS, como por ejemplo, las configuraciones epistémicas, las cuales nos sirvieron para determinar los diversos objetos matemáticos que intervienen en las tareas de ecuaciones lineales, tanto las propuestas en los textos de secundaria, como aquellas propuestas en los textos del nivel superior.También,por el hecho de proporcionarnos las tablas de indicadores de idoneidad epistémica, cognitiva y ecológica, que luego de aplicarlas al análisis de textos, nos permitió determinar el grado de idoneidad de las tareas matemáticas.

En lo que a la metodología se refiere, la adoptada en el presente estudio nos ha brindado un ordenamiento lógico en el análisis, conforme los pasos que nos habíamos propuesto, hemos seguido el procedimiento y desarrollado de cada una de las actividades propuestas en el cuadro N° 01. Por lo que, consideramos que la metodología seguida se ajustó a nuestros objetivos y propósitos.

Con respecto a la hipótesis, concluimos que ésta ha sido corroborada, puesto que, hemos encontrado que existe desarticulación de los objetos matemáticos presentes en las tareas de ecuaciones lineales, propuestas en los libros de texto de educación secundaria pública. Hemos concluido que, en tales tareas, se enfatiza el proceso de algoritmización y se descuidan los procesos de contextualización, comunicación matemática y argumentación. Además, hemos determinado que existe bajo grado de idoneidad epistémica en las tareas propuestas en los textos de secundaria, pero un alto grado de idoneidad epistémica en las tareas propuestas en los textos del nivel superior.

Las cuestiones de investigación que nos plantemos al principio, efectivamente nos sirvieron como guía y direccionaron nuestro estudio, de manera que nos permitieron ceñirnos puntualmente en nuestro problema y objetivos perseguidos. Así por ejemplo, acerca de la interrelación o articulación de los elementos matemáticos primarios, presentes en las tareas de secundaria, ésta pregunta, nos permitió, analizar que en las tareas de secundaria, algunos elementos no presentan el rigor matemático adecuado, entre ellos las situaciones problema y las justificaciones.

Hemos podido apreciar, a partir de las C.E.,por ejemplo, que los lenguajes no se usan de manera que se relacionen y se complementen entre sí, no existe un tránsito de ida y vuelta entre los distintos lenguajes del EOS, en las tareas de secundaria. En tanto que en las tareas del nivel superior, la articulación entre componentes es más evidente, a decir del análisis epistémico de los textos.

Acerca de las recomendaciones sobre las tareas matemáticas de “ecuaciones lineales, con una, dos y tres incógnitas y su contextualización”, nos permitimos en forma general recomendar lo siguiente:

Proponer y aplicar en aula tareas matemáticas de ecuaciones lineales, a los alumnos de educación secundaria, teniendo en cuenta los diversos componentes, que señala el EOS, deben estar presentes para que la actividad matemática sea rica. Esto es, utilizando los distintos lenguajes (gráfico, algebraico, verbal y simbólico), planteando situaciones problema del contexto de los alumnos, dando definiciones claras y entendibles, aplicando procedimientos no meramente repetitivos, justificandolas proposiciones, de manera que se brinde la oportunidad al alumno de argumentar sus resultados y así desarrollar en ellos procesos de contextualización, comunicación, argumentación, entre otros propuestos por el EOS.

En el contexto de la educación superior, sugerimos desarrollar tareas de ecuaciones lineales a partir de situaciones problema contextualizadas al campo de desempeño laboral del futuro profesional, situaciones matemáticas en donde se complementen y con el mismo nivel de importancia, los seis elementos primarios que propone el EOS, de manera que las actividades matemáticas sean integrales, de manera que se activen varios procesos en el estudiante.

Aplicar este estudio en aula y ampliarlo, considerando las seis dimensiones de la idoneidad didáctica propuestas por el EOS, con la finalidad de determinar en forma integral el alto, medio o bajo grado de idoneidad didáctica de las tareas de ecuaciones lineales en la educación superior.

REFERENCIAS

- Chevallard, Y. (2000). *La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

- Coveñas, M. (2008). *Matemática. Cuarto grado de educación secundaria. Educación Básica Regular* – MINEDU. Lima: Bruño.

- Cutz, B. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución.* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional - CINVESTAV – IPN, México. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/

- D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. pp. 177-195*.Recuperado dehttp://redalyc.uaemex.mx/redalyc/

- Doroteo, F., Gálvez, R. (2005). *Matemática. Quinto de secundaria* – MINEDU. Lima: Ediciones El Nocedal.

- Duval, R. (1995). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Trad. por M. Vega) Cali: Universidad del Valle. Recuperado de http://sintesis.univalle.edu.co/

- Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores.*Educ. Mat. Pesqui., Sao Paulo,* 8(1), 67 - 98.Recuperado dehttp://www.ugr.es/local/jgodino/

- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y aprendizaje*.Recuperado dehttp://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

- Gálvez, R. (2008). *Matemática. Quinto de secundaria* – MINEDU. Lima: Ediciones El Nocedal.

- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática - CIAEM. Recife, Brasil. Recuperado dehttp://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. XVI Simposio de la SEIEM. Seminario de investigación. Aportaciones a la investigación desde la didáctica de la matemática como disciplina científica. Baeza, España. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355. Recuperado dewww.ugr.es/local/jgodino

- Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa,* 9, (001), 117 – 150. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/

- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007a). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. IV Congreso Internacional de Ensino da Matemática - ULBRA, Brasil. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. & Lurduy, O. (2007b). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007c). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.* Recuperado dehttp://www.ugr.es/local/jgodino/

- Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.*Recuperado dehttp://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

- Grossman, S. (2008). *Álgebra Lineal*. Sexta edición. México, D.F.: Mc Graw-Hill Interamericana.

- Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal*. Quinta edición. México, D.F.: Mc Graw-Hill Interamericana.

- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa,* 1 (001). Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/

- Haeussler, E., Paul, R. (2008). *Matemáticas para administración y economía*. Décimo segunda edición. (Trad. por J. Murrieta) México, D.F.: Pearson Educación.

- Ibarra, S. (2008). *La transposición didáctica del álgebra en las ingenierías. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales*. (Tesis de doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional - CINVESTAV – IPN, México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/

- Instituto de Formación Bancaria (2009). *Módulo de matemática para la carrera de administración bancaria*. Vol. I. Lima.

- Lages, L. E. (2004). *Geometría Analítica y Álgebra Lineal*. (Trad. por P. Fernández). Lima: Instituto de Matemática y Ciencias Afines - IMCA.

- Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Lima. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/

- Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 5° secundaria*. Primera edición. Lima. Santillana.

- Perú, Ministerio de Educación (2012). *Matemática 4° secundaria*. Primera edición. Lima. Santillana.

- Perú, Ministerio de Educación(2012). *Matemática 3° secundaria*. Primera edición. Lima. Editorial Norma.

- Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional - CINVESTAV – IPN, México. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/

- Oxford University Press (2008). *Enciclopedia Oxford de Filosofía*. Segunda edición. Madrid: Editorial Tecnos.

- Peralta, J. (2003). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la ecuación lineal*. (Tesis de maestría). Instituto tecnológico de Sonora, México. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/

- Ramírez, M. (1997). *El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional - CINVESTAV – IPN, México. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/

- Segura, d. S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 7 (001): Recuperado dehttp://redalyc.uaemex.mx/redalyc/

- Toro, I. & Parra, D. (2010). *Fundamentos epistemológicos de la investigación cualitativa/cuantitativa*. Primera edición. Bogotá: Fondo editorial Universidad EAFIT.

ANEXOS

A. CUADRO PARA CONFIGURACION EPISTÉMICA DE OBJETOS MATEMÁTICOS

LENGUAJE
❖ **Verbal:**   ❖ **Gráfico:**   ❖ **Simbólico:**

SITUACIONES - PROBLEMAS	DEFINICIONES - CONCEPTOS

PROCEDIMIENTOS	PROPOSICIONES - PROPIEDADES

ARGUMENTOS
❖ **Tesis:**   **Demostración:**

B. PERFIL DEL EGRESADO, MALLA CURRICULAR Y SÍLABO DE MATEMÁTICA DE LA CARRERA DE ADMINISTRACIÓN BANCARIA

Formamos profesionales que dominan correctamente los productos y servicios que intervienen en la gestión bancaria; por lo tanto están capacitados para administrar agencias del sistema financiero y para desempeñarse en áreas administrativas y financieras de empresas en general.

PERFIL DEL EGRESADO

- Administrar agencias del sistema financiero.
- Gestionar créditos de consumo, comercial y microempresas.
- Manejar correctamente los productos, servicios y riesgos de una entidad financiera.
- Analizar y negociar alternativas de financiamiento.
- Plantear ideas y proyectos para el establecimiento de nuevos negocios.

Misión

Formar personas de excelencia que logren sus proyectos de vida.

Visión

Ser la comunidad educativa reconocida por la calidad de sus egresados gracias a un modelo académico de vanguardia.

Valores

- **Integridad** (Nuestra única opción)
- **Respeto** (Con quienes estamos y en donde estamos)
- **Trabajo en Equipo** (Sinergia y eficiencia en la gestión)
- **Trascendencia** (Marcamos la diferencia)
- **Enfoque en nuestros clientes** (Nos preocupamos por lo que necesitan nuestros estudiantes y lo que requiere el mercado laboral)
- **Calidad** (Búsqueda de la excelencia en todo lo que hacemos)

MALLA CURRICULAR DE LA CARRERA ADMINISTRACIÓN BANCARIA

CICLO I	CICLO II	CICLO III	CICLO IV	CICLO V	CICLO VI
Productos y Servicios Financieros I	Productos y servicios Financieros II	Ejecutivo de negocios minoristas	Banca Empresa	Formulación y Evaluación de proyectos	Tesis
Simulador de caja	Taller de asesor de ventas y servicios	Finanzas I	Banca MYPE	Gestión comercial de la oficina	Taller de Dirección y Gestión de Oficinas
Administración	Matemática Financiera y sus aplicaciones en excel	Costos	Negociación y recuperaciones	Análisis de Indicadores Financieros	Gestión de Mercado de capitales
Legislación Comercial y Tributaria	Contabilidad	Riesgo Crediticio	Código de consumo	Gestión del Potencial Humano	Empresas colaterales del sistema financiero
Desarrollo personal	Fundamentos de estadística	Riesgo operacional	Finanzas II	Planeamiento Estratégico	Riesgo de mercado
Ventas y Atención al público	Inglés	Supervisión y Regulación Bancaria	Investigación Tecnológica I	Auditoria de control interno	Formación y Orientación Laboral
Informática	Comunicación	Economía	Gestión Empresarial	Investigación Tecnológica II	Relaciones en el entorno del trabajo
Matemática		Actividades		Ecología y Desarrollo Sostenible	
		Sociedad y Economía			

CERTIFICACIONES PARCIALES		
ANALISTA DE OPERACIONES	ANALISTA DE CREDITOS Y RECUPERACIONES	GESTOR DE CREDITOS Y OPERACIONES BANCARIAS Y FINANCIERAS

SÍLABO

PROGRAMA REGULAR	:	**ADMINISTRACIÓN BANCARIA**
MÓDULO	:	**MARKETING Y ASISTENCIA OPERATIVA DE SERVICIOS BANCARIOS Y FINANCIEROS**
UNIDAD DIDÁCTICA	:	**MATEMÁTICA**
NIVEL	:	**PRIMER CICLO**
CÓDIGO	:	**M101**
PRE-REQUISITO	:	**NINGUNO**
Nº DE HORAS SEMANALES	:	**5**
Nº DE HORAS POR CICLO	:	**85**

I.- COMPETENCIA GENERAL

Organizar las labores de comercialización de los productos y servicios financieros así como ejecutar sus operaciones; realizar el análisis y evaluación de riesgos sobre la base de la información del cliente y de mercado, bajo los conocimientos y criterios técnicos de administración y gerencia.

II.- UNIDADES DE COMPETENCIA

Obtener, procesar, organizar y analizar la información financiera para ejecutar el mercadeo así como realizar las operaciones asistenciales técnicas de los servicios financieros de la entidad bancaria o financiera.

III.- CAPACIDADES TERMINALES

CAPACIDAD TERMINAL 1	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Identificar el conjunto de números enteros para diferenciar las leyes de signos.	• Identifica las propiedades de los números enteros.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 1

✓ Calcula operaciones con números enteros.

SESIÓN 1

Los números enteros

- Adición y sustracción de números enteros.
- Multiplicación, potenciación y radicación de números enteros.
- División de números enteros.

- Operaciones combinadas de números enteros.

CAPACIDAD TERMINAL 2	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Identificar el conjunto de números racionales, sus propiedades en la solución de ejercicios.	• Identifica las propiedades de los números racionales.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 2

✓ Calcula operaciones con números racionales.

SESIÓN 2

Los Números Racionales

- Definición de números racionales.
- Adición y sustracción de números racionales.
- Multiplicación de números racionales, fracción de fracción.
- Potenciación y radicación de números racionales.
- División de números racionales.

CAPACIDAD TERMINAL 3	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Identificar las diversas funciones de una calculadora científica en la aplicación de fórmulas financieras.	• Identifica las funciones de una calculadora científica.
• Identificar una expresión algebraica y un polinomio en diversos ejercicios.	• Identifica los elementos de un término algebraico y opera con polinomios.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 3

✓ Usa una calculadora científica en fórmulas financieras.

SESIÓN 3

La calculadora científica

- Funciones básicas en una calculadora científica.
- Valor numérico de una formula financiera.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 4

✓ Calcula la suma, diferencia y el producto de polinomios.

Expresiones Algebraicas

- Definición de una expresión algebraica y un polinomio.

- Adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

SESIÓN 4

Productos Notables

- Cuadrado de la suma y diferencia de un binomio.
- Producto de dos binomios con término común.

1ra. Práctica Calificada

CAPACIDAD TERMINAL 4	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Identificar una ecuación de primer grado con una, dos variables en la solución de ejercicios y problemas.	• Identifica y resuelve, una ecuación de primer grado con una y dos variables. • Asocia problemas relativos a, diversas situaciones; costos fijos y variables.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 5

✓ Resuelve ecuaciones y problemas de primer grado en una y dos variables.

SESIÓN 5

Ecuaciones de primer grado

- Definición de una ecuación de primer grado en una variable.
- Solución de una ecuación de primer grado en una variable.
- Definición de una ecuación de primer grado en dos variables.
- Método de sustitución, igualación y reducción para resolver una ecuación de primer grado en dos variables.
- Problemas con ecuaciones de primer grado en una y dos variables.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 6

✓ Construye y resuelve una ecuación para el ingreso y el costo total.

SESIÓN 6

- El costo total como la suma del costo fijo y costo variable.
- El ingreso como producto del precio y las unidades vendidas.
- La utilidad en función al ingreso y el costo total.
- Problemas de utilidad, costo total e ingreso.

2da. Práctica Calificada

CAPACIDAD TERMINAL 5	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Reconocer una ecuación de segundo grado en la solución de ejercicios y problemas.	• Identifica y resuelve una ecuación de segundo grado. • Plantea y resuelve problemas que requiere una ecuación cuadrática.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 7

✓ Resuelve una ecuación de segundo grado mediante la fórmula general.

SESIÓN 7

Ecuaciones cuadráticas

- Definición de Ecuaciones de segundo grado.
- Formula general de una ecuación de segundo grado.
- Ejercicios y problemas con ecuaciones de segundo grado.

CAPACIDAD TERMINAL 6	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Reconocer una línea recta, su ecuación en la solución de ejercicios y problemas.	• Identifica y traza una recta en el plano cartesiano. • Determina la ecuación, grafica la recta de la oferta y demanda.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 8

✓ Traza una recta en el plano y escribe la ecuación general.
✓ Resuelve problemas de oferta y demanda.

SESIÓN 8

El plano cartesiano y la línea recta

- La línea recta.
- Angulo de inclinación de una recta.
- Pendiente de una recta.

3ra. Práctica Calificada

SESIÓN 9

- Ecuación general y grafica de la recta dado un punto, y la pendiente.
- Ecuación general y grafica de la recta dados dos puntos.
- La línea recta de la oferta y demanda, sus ecuaciones, graficas.
- Punto de equilibrio de mercado.

CAPACIDAD TERMINAL 7	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Percibir el significado y aplicación de razones, proporciones en la solución de problemas.	• Identifica las propiedades de razones y proporciones. • Distingue la importancia del reparto proporcional y regla de compañía. • Identifica y distingue el significado de regla de tres simple y compuesta. • Identifica el significado de porcentaje en la solución de diversos problemas, y fijación de precios.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 9

✓ Resuelve problemas de razones, proporciones, reparto proporcional y regla de compañía.

SESIÓN 10

Razones y proporciones

- Razón aritmética y geométrica.
- Proporción aritmética y geométrica.
- Reparto proporcional directo e inverso.
- Regla de compañía.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 10

✓ Resuelve problemas de regla de tres simple y compuesta.

SESIÓN 11

Regla de tres

- Regla de tres simple directa e inversa
- Regla de tres compuesta

ELEMENTO DE CAPACIDAD 11

✓ Resuelve problemas comerciales de porcentaje.

SESIÓN 12

Porcentaje

- El tanto por ciento.
- Porcentaje.

SESIÓN 13

- Descuento y aumento sucesivo.
- El precio de venta en función al precio de costo y la ganancia.
-

CAPACIDAD TERMINAL 8	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Reconocer una progresión aritmética, geométrica en la solución de ejercicios y problemas.	• Identifica y resuelve problemas de una progresión aritmética y geométrica.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 12
✓ Resuelve problemas de progresiones aritméticas y geométricas.

SESIÓN 14

Progresiones
- Definición de una progresión aritmética.
- Fórmula para hallar un término cualquiera.
- La suma de términos en una progresión aritmética.
- Definición de una progresión geométrica.
- Fórmula para hallar un término cualquiera en una progresión geométrica.
- La suma de términos en una progresión geométrica.
- Séptima practica calificada (porcentajes)

CAPACIDAD TERMINAL 9	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
• Reconocer el interés simple en la solución de problemas financieros.	• Identifica y resuelve problemas de interés simple. • Determina la ecuación del valor de acuerdo a las variables involucradas.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 13

✓ Calcula el interés y monto simple en problemas financieros.

SESIÓN 15

Interés simple
- Definición de interés y monto simple.
- Tasa de interés, valor actual y tiempo.
- Problemas financieros de interés simple.

ELEMENTO DE CAPACIDAD 14
✓ Calcula el interés simple en casos especiales.

SESIÓN 16

Interés simple en casos especiales
- Interés simple con un valor actual fijo y tasa de interés variable.

- El interés simple con tasa fija y capital variable.
- Préstamos y ecuación de valor.

SESIÓN 17

Evaluación final

III.- METODOLOGÍA

Exposición teórico practica por parte del profesor
- Se fomentará el trabajo grupal destinado al desarrollo de las capacidades (conocimientos, habilidades) y actitudes, en la resolución de situaciones problemáticas diversas.

Talleres con dinámica grupal asumiendo el profesor la función de facilitador.

IV.- EVALUACIÓN

La evaluación será permanente y comprenderá tres notas a promediar, según los pesos o ponderados que se indica a continuación. El promedio final se obtendrá del promedio ponderado de las siguientes notas:

Nota parcial (NP) = Promedio de tres prácticas calificadas – Peso 3.
Tarea académica (TA) = Promedio de tareas académicas – Peso 3.
Examen Final (EF) = Peso 4

El promedio final (PF) del curso se obtendrá así:

$$\boxed{PF = \frac{3NP + 3TA + 4EF}{10}}$$

V.- FUENTES DE INFORMACIÓN

BIBLIOGRAFÍA

1. ESPINOZA RAMOS, Eduardo. *Matemática Básica*. Lima: [s.e.], 2002. *

2. FIGUEROA GARCÍA., Ricardo. *Matemática Básica 1*. Lima: Ediciones RFG, 2009. *

(*) Existe en versión digital en el intranet y en físico puede encontrarlo en la biblioteca del IFB.

PÁGINAS WEB

1. Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática
www.fisem.org/