

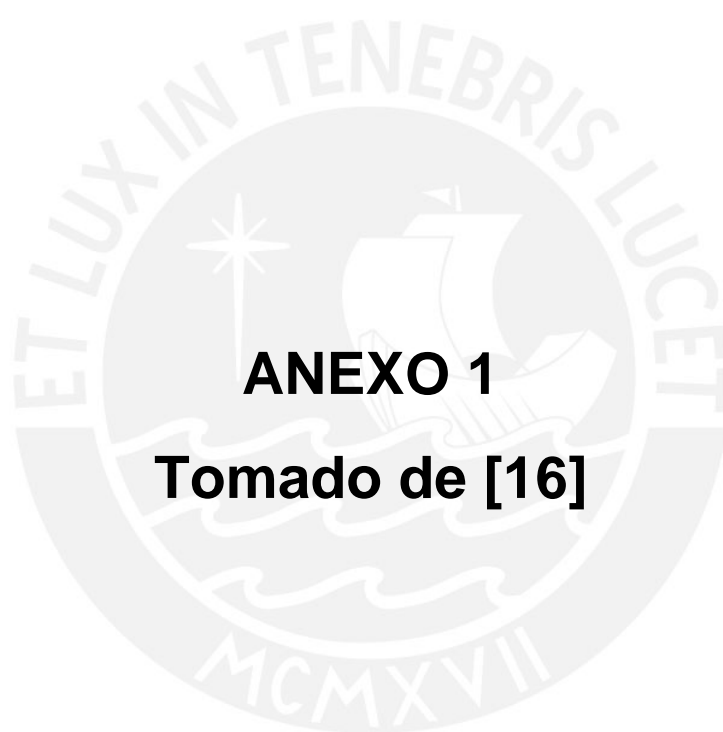


PONTIFICIA **UNIVERSIDAD CATÓLICA** DEL PERÚ

Esta obra ha sido publicada bajo la licencia Creative Commons
Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 2.5 Perú.

Para ver una copia de dicha licencia, visite
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pe/>





ANEXO 1
Tomado de [16]

DEMOSTRACIÓN DE ECUACIONES: ONDAS DE POTENCIA a Y b, Y PARÁMETROS S_{21} Y S_{12}

A.1 ONDAS DE VOLTAJE Y CORRIENTE EN UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Aplicando leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff al circuito equivalente de una línea de transmisión de longitud Δz (figura A.1), se obtiene:

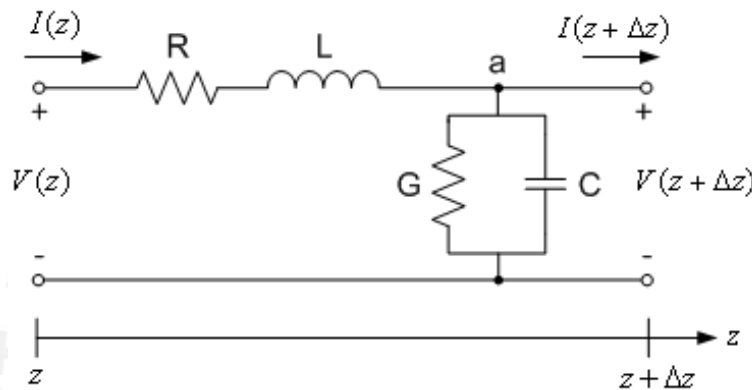


FIGURA A.1. CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN DE LONGITUD Δz

Aplicando ley de voltajes de Kirchhoff (KVL):

$$(R + j\omega L)\Delta z I(z) + V(z + \Delta z) = V(z) \quad \dots A.1$$

la cual se puede re-exresar como una ecuación diferencial cuando la longitud Δz tiende a un valor muy pequeño ($\Delta z \rightarrow 0$):

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(-\frac{V(z + \Delta z) - V(z)}{\Delta z} \right) = -\frac{dV(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z) \quad \dots A.2$$

que es lo mismo a:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \quad \dots A.3$$

Igualmente, aplicando ley de corrientes de Kirchhoff en el punto "a", se obtiene:

$$I(z) - V(z + \Delta z)(G + j\omega C)\Delta z = I(z + \Delta z) \quad \dots A.4$$

Lo cual, también se puede expresar como una ecuación diferencial cuando $\Delta z \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(-\frac{I(z + \Delta z) - I(z)}{\Delta z} \right) = \frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) \quad \dots A.5$$

La solución de A.3 y A.5 si A.3 se expresa como una ecuación diferencial de segundo orden (derivada de cada lado), obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{d}{dz} \left(-\frac{dV(z)}{dz} \right) = (R + j\omega L) \frac{dI(z)}{dz} \quad \dots A.6$$

Reemplazando A.5 en A.6:

$$-\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -(R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z) \quad \dots A.7$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \underbrace{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}_{k^2} V(z) = 0 \quad \dots A.8$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - k^2 V(z) = 0 \quad \dots A.9$$

Siguiendo un proceso similar para A.5, se obtiene:

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} - k^2 I(z) = 0 \quad \dots A.10$$

donde "K" se conoce como la constante compleja de propagación, la cual tiene la siguiente forma:

$$k = k_r + jk_i = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad \dots A.11$$

donde k_r representa el coeficiente de atenuación y k_i el número de onda.

Por lo general, se asume que las pérdidas R y G son despreciables, por lo que se suele considerar $R=G=0$, por lo tanto:

$$k = k_r + jk_i \approx j\omega\sqrt{LC} = j\beta \quad \dots A.12$$

Las soluciones de A.9 y A.10 tienen la siguiente forma:

$$V(z) = V^+ e^{-kz} + V^- e^{+kz} = V^+ + V^- \quad \dots A.13$$

$$I(z) = I^+ e^{-kz} + I^- e^{+kz} = I^+ + I^- \quad \dots A.14$$

donde los primeros términos A.13 y A.14 se pueden interpretar como las componentes del voltaje y corriente que viajan en la dirección “+z” (incidente), y los segundos términos, como las componentes que viajan en la dirección “-z” (reflejada).

A.2 IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA

La ecuación A.14 está relacionada con A.13, lo cual se puede ver claramente si A.13 se sustituye en A.3. Diferenciando y reacomodando los términos, se obtiene la expresión de la corriente en la siguiente forma:

$$I(z) = \frac{(R + j\omega L)}{k} (V^+ e^{-kz} - V^- e^{+kz}) \quad \dots A.15$$

Ya que el voltaje y la corriente están relacionados mediante una impedancia, se puede definir la llamada “impedancia característica Z_o ” de una línea de transmisión, de la siguiente forma:

$$Z_o = \frac{(R + j\omega L)}{k} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad \dots A.16$$

Substituyendo A.14 en el lado izquierdo de A.15, se encuentra:

$$Z_o = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-} \quad \dots A.17$$

Por lo que con la impedancia característica, se puede representar la corriente como:

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}(V^+ e^{-kz} - V^- e^{+kz}) \quad \dots A.18$$

A.3 ONDAS DE POTENCIA INCIDENTE Y REFLEJADA

Sea la red de dos puertos mostrada en la figura A.2 :

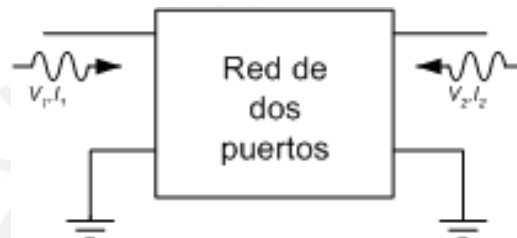


FIGURA A.2. ONDAS DE POTENCIA EN LOS PUERTOS DE ENTRADA DE UNA RED DE DOS PUERTOS

La potencia promedio en cualquiera de sus puertos está dada por:

$$P_n = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_n I_n^*\} \quad \dots A.19$$

donde “n” se refiere al puerto 1 ó 2 y V_n e I_n en función de los voltajes incidente y reflejado son:

$$V_n = V_n^+ e^{-j\beta z} + V_n^- e^{+j\beta z} = (V_n^+ + V_n^-) \text{Cos}(\beta z) - j(V_n^+ - V_n^-) \text{Sen}(\beta z) \quad \dots A.20$$

$$I_n = \frac{1}{Z_0}(V_n^+ e^{-j\beta z} - V_n^- e^{+j\beta z}) = \left(\frac{V_n^+ - V_n^-}{Z_0}\right) \text{Cos}(\beta z) - j\left(\frac{V_n^+ + V_n^-}{Z_0}\right) \text{Sen}(\beta z) \quad \dots A.21$$

Reemplazando A.20 y A.21 en A.19 y operando, se obtiene:

$$P_n = \frac{1}{2} \left(\frac{|V_n^+|^2}{Z_0} - \frac{|V_n^-|^2}{Z_0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{|V_{in}|^2}{Z_0} - \frac{|V_{rn}|^2}{Z_0} \right) = \frac{1}{2} (Z_0 |I_{in}|^2 - Z_0 |I_{rn}|^2) \quad \dots A.22$$

donde :

$$|a_n|^2 = \frac{|V_{in}|^2}{Z_o} = Z_o I_{in}^2 \rightarrow a_n = \frac{V_{in}}{\sqrt{Z_o}} = \sqrt{Z_o} I_{in} \text{ (obtenido de A.17)} \quad \dots A.23$$

$$|b_n|^2 = \frac{|V_{rn}|^2}{Z_o} = Z_o I_{rn}^2 \rightarrow b_n = \frac{V_{rn}}{\sqrt{Z_o}} = -\sqrt{Z_o} I_{rn} \text{ (obtenido de A.17)} \quad \dots A.24$$

Por lo tanto, si las ondas de potencia incidente (a) y reflejada (b) se suman se obtiene:

$$a_n + b_n = \frac{V_{in}}{\sqrt{Z_o}} + \frac{V_{rn}}{\sqrt{Z_o}} = \frac{V_{in} + V_{rn}}{\sqrt{Z_o}} = \frac{V_n}{\sqrt{Z_o}} \rightarrow V_n = \sqrt{Z_o} (a_n + b_n) \quad \dots A.25$$

Igualmente, si ahora a y b se restan, se obtiene:

$$a_n - b_n = \sqrt{Z_o} I_{in} + \sqrt{Z_o} I_{rn} = \sqrt{Z_o} (I_{in} + I_{rn}) = \sqrt{Z_o} I_n \rightarrow I_n = \frac{1}{\sqrt{Z_o}} (a_n - b_n) \quad \dots A.26$$

Por lo tanto, las definiciones generales de las ondas de potencia incidente y reflejada en términos de las ondas de voltaje y corriente totales presentes en cada puerto son:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{Z_o}} (V_n + Z_o I_n) \quad \dots A.27$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{Z_o}} (V_n - Z_o I_n) \quad \dots A.28$$

A.4. CÁLCULO DE S_{21}

Dada la conexión para la medición de S_{21} (figura A.3):

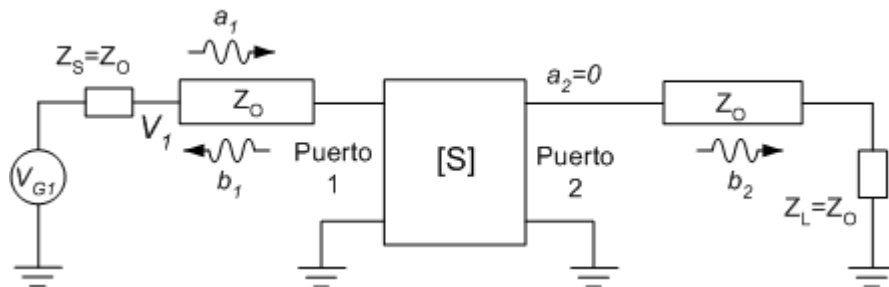


FIGURA A.3. CÁLCULO DE S_{21} ADAPTANDO Z_o EN EL PUERTO 2 A LA IMPEDANCIA DE CARGA ($Z_L = Z_o$).

Se sabe que:

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad \dots A.29$$

Si no hay onda de potencia incidente en el puerto 2 ($a_2=0$), quiere decir que toda la onda es absorbida por la carga, lo que esto quiere decir que no hay ondas de voltaje y corriente incidentes en el puerto 2. Por lo tanto, $V_{i2}=I_{i2}=0$.

Considerando lo anteriormente dicho, así como las expresiones A.17, A.27 y A.28, se obtiene:

$$\begin{aligned} S_{21} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{Z_o}}(V_2 - Z_o I_2)}{\frac{1}{2\sqrt{Z_o}}(V_1 + Z_o I_1)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{Z_o}}(V_{r2} - Z_o I_{r2})}{\frac{1}{2\sqrt{Z_o}}(V_1 + Z_o I_1)} \\ &= \frac{\frac{V_{r2}}{\sqrt{Z_o}}}{\frac{1}{2\sqrt{Z_o}}(V_1 + Z_o I_1)} \quad (\text{en A.17 se ve que } V^- = -Z_o I^-) \\ &= \frac{2V_{r2}}{V_1 + Z_o I_1} \quad \dots A.30 \end{aligned}$$

Según la figura A.3, se puede ver que V_1 es igual al voltaje de la fuente V_{G1} menos la caída de voltaje en la carga de dicha fuente, por lo tanto:

$$V_1 = V_{G1} - Z_S I_1 = V_{G1} - Z_o I_1 \quad \dots A.31$$

Además, ya que $V_{i2}=0$, El voltaje total en el puerto 2 está dado únicamente por su componente reflejada (ver ecuación A.13).

$$V_2 = V_{r2} \quad \dots A.32$$

Sustituyendo A.31 y A.32 en A.30, se obtiene finalmente:

$$S_{21} = \frac{2V_2}{V_{G1}} \quad \dots A.33$$

A.5. CÁLCULO DE S_{12}

El procedimiento para hallar S_{12} es idéntico a S_{21} .

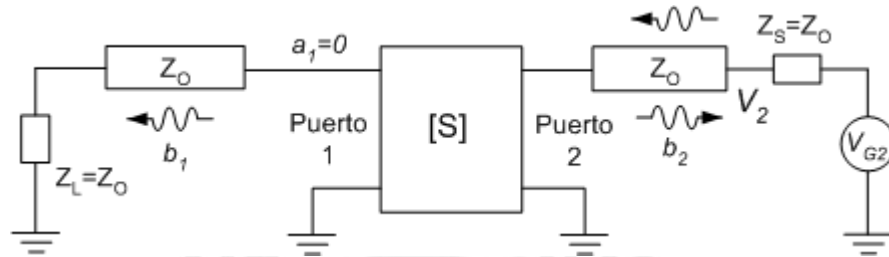
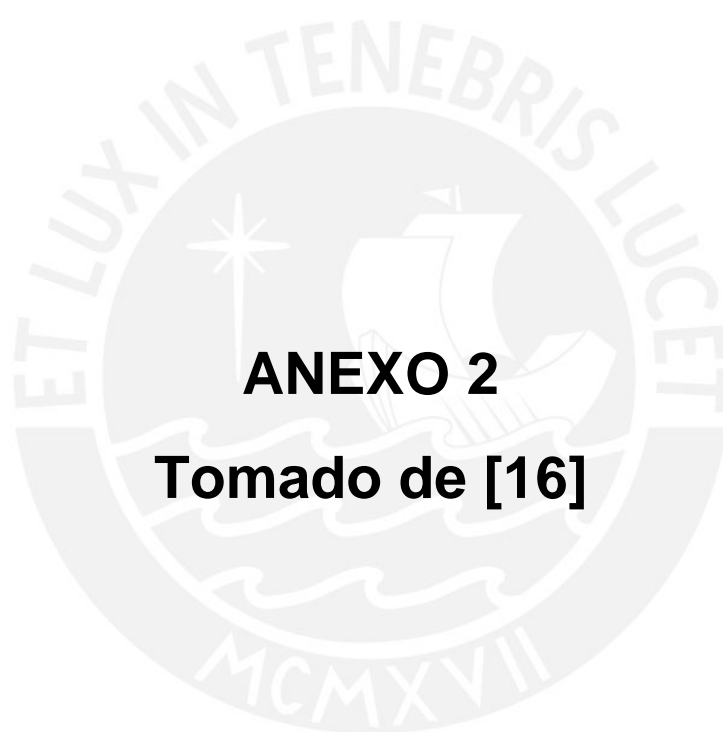


FIGURA A.4. CÁLCULO DE S_{12} ADAPTANDO Z_0 EN EL PUERTO 1 A LA IMPEDANCIA DE CARGA ($Z_L=Z_0$).

$$S_{21} = \frac{b_1}{a_2} \Big|_{a_1=0} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(V_1 - Z_0 I_1)}{\frac{1}{2\sqrt{Z_0}}(V_2 + Z_0 I_2)} = \frac{2V_{r1}}{V_2 + Z_0 I_2} = \frac{2V_1}{V_{G2}} \quad \dots A.34$$



ANEXO 2
Tomado de [16]

CONCEPTOS BÁSICOS DE LA CARTA DE SMITH

La finalidad del presente anexo es de describir los principales puntos de la carta de Smith tomados en cuenta para el diseño del amplificador. Para mayor detalle en el uso de la carta referirse a los textos [4] y [5] de la bibliografía.

B.1 CONCEPTOS BÁSICOS

La carta de Smith básica está conformada por una familia de circunferencias y arcos de circunferencia (figura B.2). Los primeros, representan circunferencias de resistencia constante, y los segundos, porciones de circunferencia donde la reactancia es constante. Por lo tanto, cualquier punto en la carta de Smith indicará una determinada impedancia, conformada por una parte real (resistencia) y una parte imaginaria (reactancia),(figura B.1).

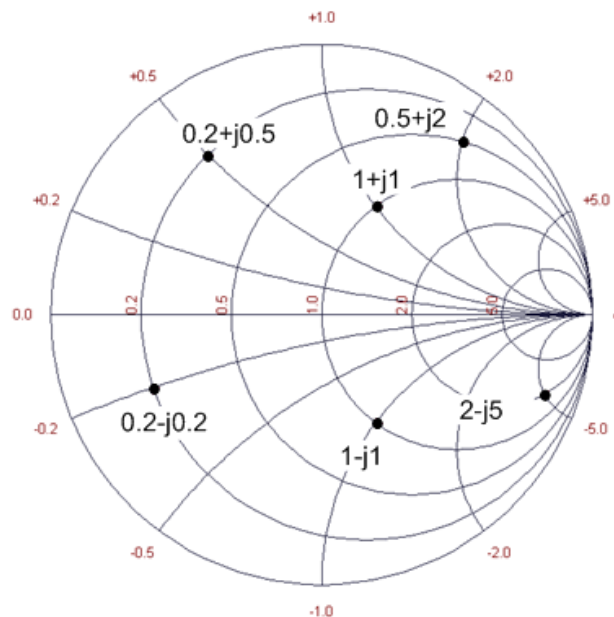


FIGURA B.1. UBICACIÓN DE DISTINTOS PUNTOS DE IMPEDANCIA EN LA CARTA DE SMITH

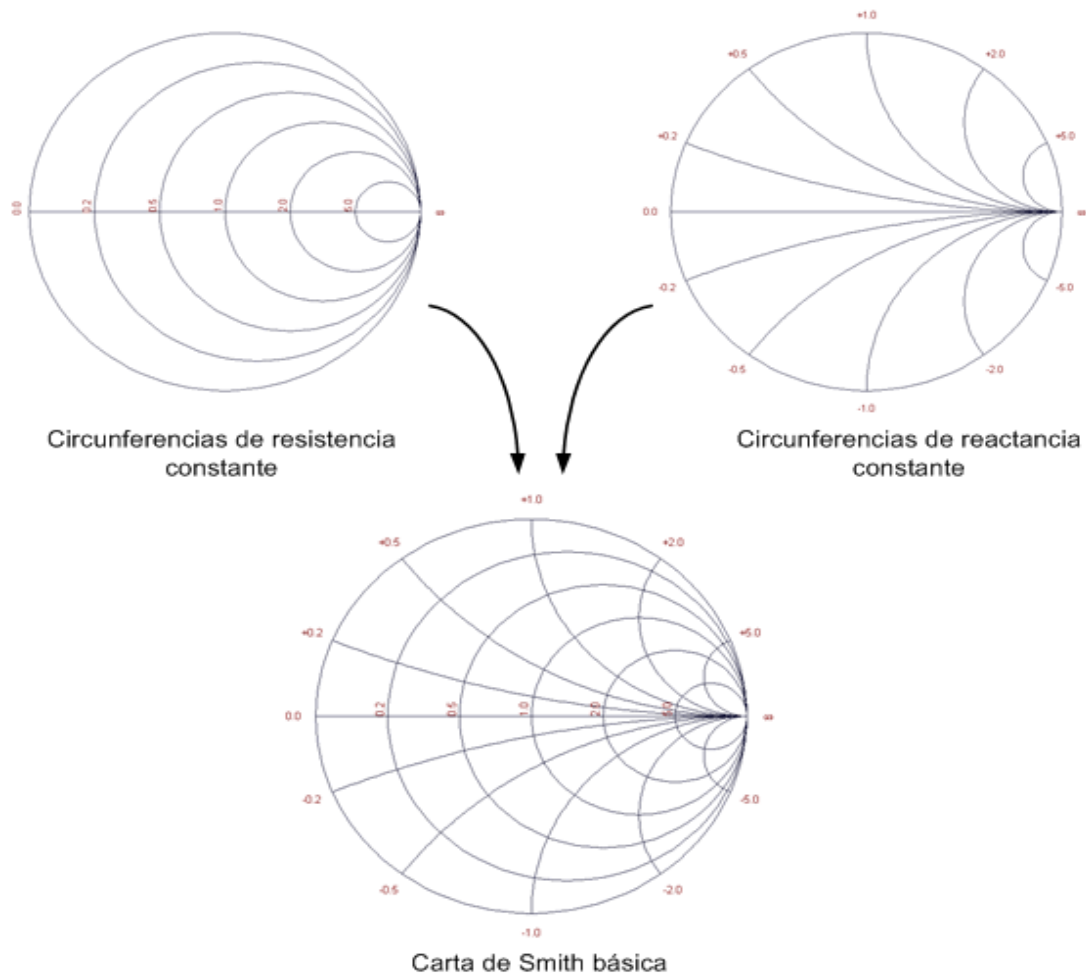


FIGURA B.2. CIRCUNFERENCIAS DE RESISTENCIA Y REACTANCIA CONSTANTE EN LA CARTA DE SMITH

Como se sabe, a cada valor de impedancia (Z), le corresponde un valor de admitancia ($Y=1/Z$), por lo que en la carta de Smith se pueden graficar también las circunferencias de conductancia y susceptancia constante. De esta forma, se pueden juntar las curvas de impedancia y admitancia en una sola carta, permitiendo la lectura rápida de éstas para cualquier punto localizado en la carta (figura B.3). Por ejemplo, al punto de impedancia $1+j1$ en la figura B.3, le corresponde una admitancia de $0.5-j0.5$, el cual se lee directamente de la carta.

Asimismo, en la misma figura B.3 se muestra otra ventaja, la cual es la obtención directa del complejo conjugado de una determinada impedancia, el cual viene a ser como la imagen del punto “A”, tomando como eje a la línea horizontal de la carta.

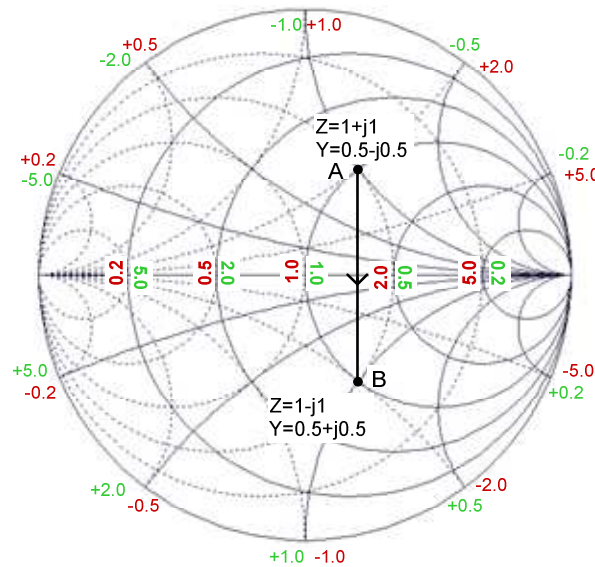


FIGURA B.3. CURVAS DE IMPEDANCIA Y ADMITANCIA EN LA CARTA DE SMITH.

B.2 NORMALIZACIÓN DE LA CARTA DE SMITH

A primera vista, pareciera que en la carta de Smith se puede representar únicamente impedancias pequeñas, tal como las mostradas en la figura B.1. Sin embargo, la realidad es otra, ya que en la carta se pueden representar sin ningún problema valores de impedancia mayores. Para esto se hace una “normalización de la carta de Smith”, lo cual quiere decir que cada valor de impedancia, a ser ubicado en la carta, será dividido por un número conveniente “N” de tal modo que la nueva impedancia se ubicará cerca de la zona central de la carta y “N” será el punto central.

Por ejemplo, si una impedancia de $50+j50\Omega$ es dividida entre 50, el valor obtenido $(1+j1)$ se ubicará cerca de la zona central, mientras que el punto central ya no será 1Ω como en las figuras anteriores, sino, 50Ω , por lo que se dice que la carta está normalizada a 50Ω . Si se divide entre 25, la carta estará normalizada a 25Ω y así sucesivamente.

B.3 ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIA

Las reglas básicas para agregar capacitores e inductores en serie o paralelo, se muestran en la figura B.4. En ella se nota que cuando se añade un capacitor o inductor en serie, el desplazamiento del punto de impedancia es sobre la curva de resistencia constante, ya que lo único que varía en ese caso es la reactancia (parte imaginaria de la impedancia). Cuando se añade un componente en paralelo, el trabajo se realiza sobre la curva de conductancia constante, ya que lo único que varía es la susceptancia (parte imaginaria de la admitancia).

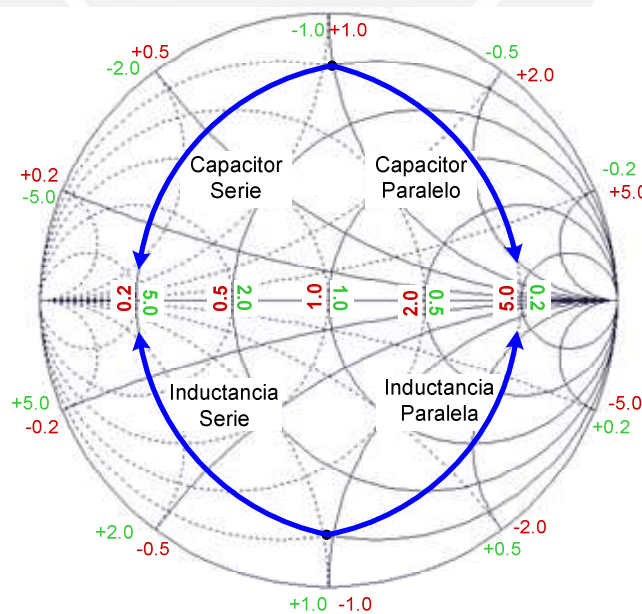


FIGURA B.4. CAPACITORES E INDUCTANCIAS EN LA CARTA DE SMITH

B.4 COEFICIENTES DE REFLEXIÓN

A cada impedancia “Z” está asociado un valor de coeficiente de reflexión (Γ). Si la carta de Smith está normalizada a un valor N (el cual generalmente es la impedancia del sistema), entonces “ Γ ” es la distancia desde el centro de la carta hasta la ubicación de la impedancia Z. Por lo que, se considera que el radio de la carta es la unidad, ya que dado que el valor de dicho coeficiente puede estar solamente entre cero y uno. Por ejemplo, para una carga de $50+j50\Omega$, su coeficiente de reflexión es $0.45\angle 63^\circ$, tal como se ve en la figura B.5 en donde la carta de Smith está normalizada a 50Ω , en donde además se muestra el caso de una carga Z_M en donde el ángulo correspondiente (Φ_M) es mayor a 270° , por lo que también éste se puede expresar del siguiente modo: $\Phi_M = \Phi_M - 360^\circ$.

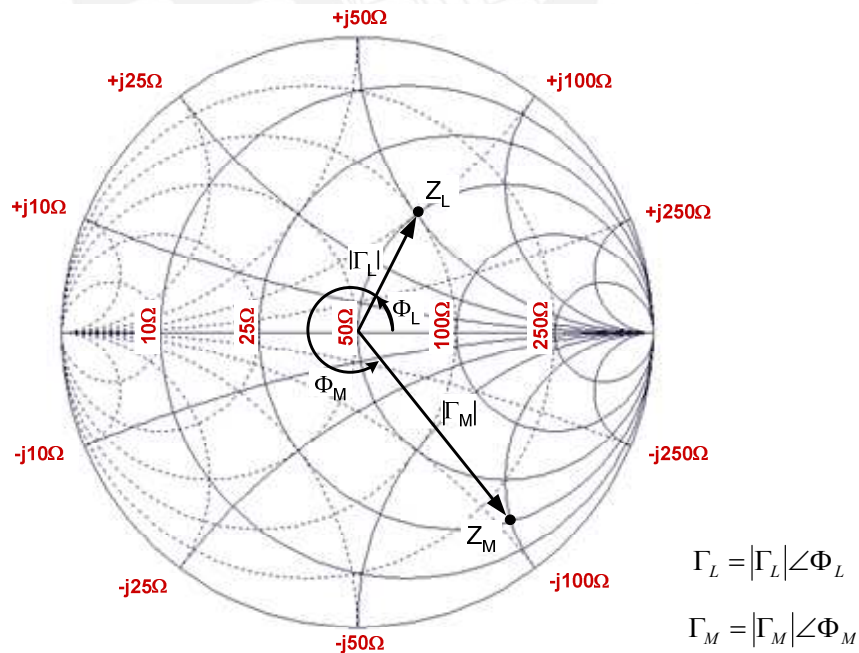


FIGURA B.5. COEFICIENTE DE REFLEXIÓN EN LA CARTA DE SMITH NORMALIZADA A 50Ω

B.5 CURVAS DE FACTOR DE CALIDAD CONSTANTE (Q)

Dada una determinada impedancia $Z=R+jX$ y su correspondiente valor de admitancia $Y=G+jB$, el factor de calidad “Q” se define como:

$$Q = \frac{|X|}{R} = \frac{|B|}{G}$$

Por lo tanto, el conjunto de puntos o impedancias que presenten un mismo “Q”, formarán contornos o curvas de “Q” constante en la carta de Smith, tal como se muestra en la figura B.6 en donde la carta se encuentra normalizada a 50Ω .

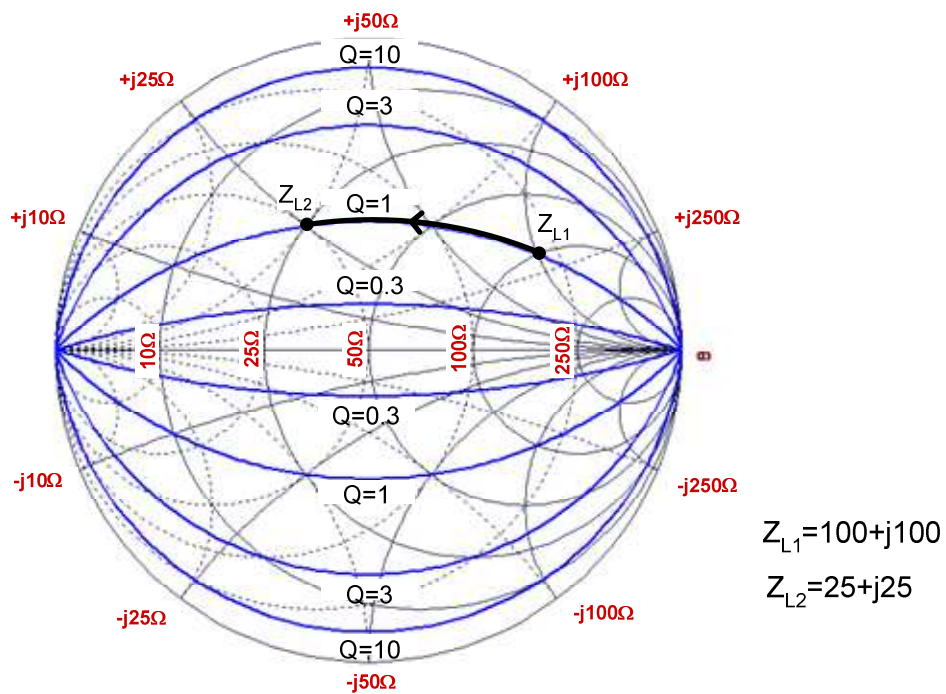


FIGURA B.6. CURVAS DE “Q” CONSTANTE Y ADICIÓN DE UN TRANSFORMADOR DE IMPEDANCIA DE 4:1 A UNA CARGA Z_{L1}

B.6 ADICIÓN DE UN TRANSFORMADOR

Cuando se añade un transformador, el valor de una determinada impedancia (o admitancia) se ve reducido o aumentado dependiendo si el

transformador es reductor o elevador. Además, dado que el transformador afecta a la parte real e imaginaria por igual, el factor de calidad se mantiene constante, por lo al añadir el transformador, el valor de impedancia se traslada hacia un nuevo punto conservando el factor de calidad, tal como se puede ver en el arco $Z_{L1}Z_{L2}$ de la figura B.6.

