

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL  
PERÚ  
ESCUELA DE GRADUADOS



**El Teorema del Centro.**

TESIS  
PARA OPTAR EL GRADO DE MAGISTER EN  
MATEMÁTICAS

Presentada por:

**Lic. Gloria Solvey Crespo Guerrero**

Bajo la orientación del Doctor

**Percy Fernández Sánchez**

Miembros del Jurado

**Dr. Renato Benazic Tome**

**Dr. Rudy Rosas Bazan**

Lima, Diciembre del 2009

# AGRADECIMIENTO

Le agradezco en primer lugar a Dios por darme la vida y permitirme lograr uno de mis más deseados anhelos estudiar mi Maestría en la Pontificia Universidad Católica del Perú. Este logro no hubiera sido posible si en mi camino no hubiera tenido el apoyo incondicional de personas tan especiales que de una manera u otra ayudaron a hacer realidad esto: Mi abuelita Hilda, cuyos consejos de perseverancia, esfuerzo y entrega total me mantuvieron firme hasta el final, mis padres Javier y Francisca que estuvieron allí siempre que los necesité, mis hermanas Susy y Roxana sin su apoyo esto no hubiera sido posible, a los profesores cuyas enseñanzas y esa calidad humana que los hace únicos jamás olvidaré. Quiero agradecer de una manera especial al profesor Percy Fernández Sánchez por su paciencia y por todos los conocimientos que compartió conmigo, al profesor César Carranza por su apoyo y por motivarnos a seguir estudiando y capacitándonos para aportar con un granito de arena en la mejora de la educación peruana, al profesor Rudy Rosas por su amistad y por ayudarme siempre que lo necesité, a los profesores con los cuales trabajé en las jefaturas de práctica gracias por su apoyo y por enseñarnos a ser mejores profesionales, a Fabiola Jabo por estar allí siempre que necesité de una mano amiga. Gracias amigos(as) nunca olvidaré esa linda amistad que hicimos en las aulas y que sé perdurará por siempre. Gracias al Proyecto DAI 2009-0052 por el apoyo brindado para la elaboración de esta tesis. Gracias a todos, muchas gracias.

# RESUMEN

Dada una 1-forma analítica real  $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ . ¿Cómo reconocer si la ecuación  $\omega = 0$  posee una integral primera?. El Teorema del Centro nos dá ciertas condiciones sobre la singularidad  $0 \in \mathbb{R}^2$  para que la ecuación de Pfaff  $\omega = 0$  posea una integral primera analítica. Lo interesante en la demostración de éste teorema (realizada por Robert Moussu en [11]) es como argumentos de la teoría de variable compleja son utilizados para demostrar este teorema de naturaleza real. Lo primero que hacemos es considerar la ecuación complejificada de  $\omega = 0$ , esto es, consideramos los puntos  $(x, y)$  en el plano complejo  $\mathbb{C}^2$ . Como estamos interesados en la geometría de las soluciones (comportamiento cualitativo) surge la necesidad de la teoría de foliaciones. Pues, el complejificado de  $\omega$  induce una foliación singular de dimensión compleja 1, cuyas hojas localmente son las curvas solución del campo holomorfo (dual de la 1-forma holomorfa). El propósito siguiente es estudiar ésta foliación asociada al campo holomorfo, pero lastimosamente no tenemos mucha información al respecto, sin embargo, mediante la técnica del Blow-up de la foliación en el punto  $0 \in \mathbb{C}^2$ , logramos obtener suficiente información acerca de esta foliación. Información que junto con el Grupo de Holonomía de una hoja y el Teorema de Mattei-Moussu nos conducen a la conclusión del teorema, la existencia de una integral primera para el campo holomorfo. Finalmente se sigue que la integral primera buscada para el campo analítico real es la parte real de la integral primera obtenida del campo holomorfo.

# Índice general

Índice general	I
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Complejificado de un Espacio Vectorial Real. . . . .	1
1.2. Linealización . . . . .	2
1.2.1. Comportamiento Local en Torno de un Punto Regular.	3
1.2.2. Comportamiento Local en Torno de un Punto Singular.	8
1.3. Ecuaciones Diferenciales Complejas . . . . .	14
1.3.1. Un Flujo Real dentro de un Flujo Complejo . . . . .	17
1.3.2. Comportamiento Local en Torno de un Punto Regular.	19
1.3.3. El Teorema de Briot-Bouquet . . . . .	22
1.4. 1-Formas Holomorfas . . . . .	31
1.5. Integral Primera . . . . .	33
1.6. Germen . . . . .	34
<b>2. Foliaciones</b>	<b>35</b>
2.1. Proceso de Explosión o Blow-up . . . . .	45
2.1.1. El Blow-up centrado en $0 \in \mathbb{C}^2$ . . . . .	45
2.1.2. El Blow-up centrado en $0 \in \mathbb{R}^2$ . . . . .	50
2.1.3. El Blow-up de una foliación $\mathcal{F}$ en el punto $0 \in \mathbb{C}^2$ . . . . .	55
2.2. Holonomía . . . . .	59
2.2.1. Holonomía de una Hoja . . . . .	59
2.2.2. Grupo de Holonomía . . . . .	64
2.2.3. Ejemplos de Holonomía . . . . .	65
2.3. El Teorema de Mattei-Moussu . . . . .	67
<b>3. El Teorema del Centro</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# INTRODUCCIÓN

La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es un campo relativamente nuevo dentro del mundo de las Matemáticas, que se inició en el siglo XIX con Lyapunov y continuó con Poincaré. Ante la imposibilidad de resolver explícitamente un gran número de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, Poincaré desarrolló una serie de técnicas que le permitían conocer el comportamiento de estos sin necesidad de saber la solución explícita de los mismos. Así, la mayor parte de su trabajo se centró en estudiar el comportamiento de este tipo de sistemas en el entorno de una singularidad aislada. En esta monografía lo que pretendemos es dar a conocer algunas de éstas técnicas de la teoría cualitativa que Robert Moussu [11] utilizó para demostrar el “Teorema de Liapunov-Poincaré” o también conocido como “Teorema del Centro”, sobre la existencia de integrales primeras. Lo fascinante de esta demostración es como argumentos de la teoría cualitativa de variable compleja son utilizados para demostrar este teorema de naturaleza real. Este teorema se enuncia así:

**Teorema 0.1.** *Sea  $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$  un germen de una 1-forma analítica real en  $0 \in \mathbb{R}^2$ , siendo este punto de  $\mathbb{R}^2$  una singularidad de  $\omega$ . Si la parte lineal de  $\omega$  es no degenerada y  $0$  es un centro para  $\omega$  entonces  $\omega$  posee una integral primera.*

El campo vectorial dual asociado a  $\omega = 0$  está dado por:

$$X = -b(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1)$$

En esta monografía estamos interesados en un estudio local de existencia de integrales primeras de 1-formas diferenciales con singularidad aislada en  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Es bien sabido, que éstas de cierta forma permiten entender el comportamiento cualitativo de las soluciones de (1).

En el primer capítulo son expuestas las nociones básicas que serán utilizadas a lo largo de la demostración del “Teorema del Centro”, además de presentar los conceptos de integral primera, complejificado de un espacio vectorial, germen y 1-formas holomorfas..

En el segundo capítulo son tratados algunos aspectos básicos de foliaciones, luego estudiamos las explosiones (blow-up), este método juega un papel importante en la demostración del Teorema del Centro. Posteriormente presentamos el grupo de holonomía. En todo momento es puesta en evidencia la dualidad existente entre 1-formas diferenciales y campos vectoriales diferenciales.

En el tercer capítulo mostramos las técnicas cualitativas de las ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizadas por R. Moussu para demostrar la existencia de integrales primeras para 1-formas analíticas en un entorno de 0 de  $\mathbb{R}^2$ . Entre estas técnicas cabe mencionar: La complexificación del espacio vectorial real  $\mathbb{R}^2$ , la linealización del campo vectorial (1) dual de la 1-forma analítica real, el blow-up de la foliación inducida por la 1-forma holomorfa, la conjugación de campos holomorfos (Teorema de Mattei-Moussu). Todos estos métodos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias fueron aplicados de manera elegante para demostrar este teorema de naturaleza real.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Complejificado de un Espacio Vectorial Real.

Sea  $\mathbb{E}$  un espacio vectorial real ( $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}) = 2$ ), el conjunto denotado por  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  y definido como

$$\mathbb{E}_{\mathbb{C}} = \{u + iv/u, v \in \mathbb{E}\}$$

con las operaciones de suma

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{E}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{E}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}} \\ (u + iv, u' + iv') &\longrightarrow (u + iv) + (u' + iv') = (u + u') + i(v + v') \end{aligned}$$

y producto por un número complejo (escalar)

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{C} \times \mathbb{E}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}} \\ (\alpha + i\beta, u + iv) &\longrightarrow (\alpha + i\beta) \cdot (u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u), \end{aligned}$$

constituye un espacio vectorial complejo de dimensión (compleja) 2, llamado el *Complejificado de  $\mathbb{E}$* .

Algunos hechos importantes que debemos resaltar en este nuevo espacio y que serán de mucha utilidad más adelante son los siguientes:

1.  $\mathbb{E} \subset \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$

Sea  $u \in \mathbb{E}$ , escribimos  $u = u + i0$  y con eso se tiene que  $u \in \mathbb{E}_{\mathbb{C}}$ .

2. El operador  $\mathbb{R}$  - *lineal*  $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$  se extiende de manera natural a un operador  $\mathbb{C}$  - *lineal*

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C}} : \quad \mathbb{E}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}} \\ u + iv &\longrightarrow T_{\mathbb{C}}(u + iv) = T(u) + iT(v) \end{aligned}$$

A este operador  $T_{\mathbb{C}}$  se le llama el complejificado de  $T$ .



3. Toda base de  $\mathbb{E}$  (espacio vectorial real) es también base de  $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}$  (espacio vectorial complejo).
4. Relativa a esta base, la matriz de  $T_{\mathbb{C}}$  es la misma matriz de  $T$ .
5. Los polinomios característicos de  $T$  y  $T_{\mathbb{C}}$  coinciden. Luego, las raíces características de ambos polinomios son iguales.
6. El Complejificado de  $\mathbb{R}^2$  es  $\mathbb{C}^2$ .

## 1.2. Linealización

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Un campo vectorial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  en  $U$ , es una aplicación  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$ , la cual asocia a cada punto  $x \in U$  un vector  $X(x) = (X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x))$  en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Cada  $X_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  es una función de clase  $C^r$ , llamada función coordenada o componente de  $X$ . Si al menos una de estas funciones coordenadas es una función no lineal diremos que  $X$  es un campo vectorial no lineal.

Al campo vectorial  $X$  le asociamos el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X_1(x) \\ \frac{dx_2}{dt} = X_2(x) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(x) \end{cases}$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; el cual podemos expresar en forma simplificada como

$$x' = X(x) \quad (1.1)$$

donde  $x' = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$ .

Fijado  $x_0 \in U$ , una *Solución* de (1.1) pasando por  $x_0$  es una aplicación diferenciable  $\varphi(\cdot, x_0) : I_{x_0} \rightarrow U$ , definida en su intervalo maximal de existencia  $I_{x_0}$  conteniendo el 0, satisfaciendo:

- i)  $\varphi(0, x_0) = x_0$
- ii)  $\frac{d\varphi}{dt}(t, x_0) = X(\varphi(t, x_0))$ , para todo  $t \in I_{x_0}$ .

Las soluciones de (1.1) son llamadas trayectorias o curvas integrales de  $X$  o del sistema (1.1).



**Definición 1.2.1.** (*Flujo*). Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $X$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en  $U$ . Para cada  $x \in U$ , sea  $\varphi(t, x)$  la solución de (1.1) pasando por  $x$  en el tiempo  $t = 0$ , definida en su intervalo maximal de existencia  $I_x$ . Sea  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U / t \in I_x\}$ . Se define el flujo de la ecuación diferencial (1.1) como la aplicación  $\varphi : D \rightarrow U$ , satisfaciendo:

- i)  $\varphi(0, x) = x$ , para todo  $x \in U$ .
- ii)  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = X(\varphi(t, x))$ , para todo  $(t, x) \in D$ .
- iii)  $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(t + s, x)$ ,  $x, \varphi(t, x) \in U$ ,  $s, t, t + s \in I_x$ .

**Observación 1.1.** .

1. El conjunto  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es abierto.
2.  $\varphi$  es de clase  $C^1$  en  $D$  (la misma clase de diferenciabilidad de  $X$ ).

Dado  $x \in U$ , el conjunto  $\mathcal{O}_X(x) = \{\varphi(t, x) / t \in I_x\} \subset U$  será por definición la *órbita* de  $X$  pasando por el punto  $x$ . La configuración o distribución de las órbitas de  $X$  en el conjunto  $U$  se denomina *retrato* o *diagrama de fase* del sistema (1.1).

**Definición 1.2.2.** Un punto  $x \in U$  es llamado *Punto Singular* de  $X$  si  $X(x) = 0$  y *Punto Regular* si  $X(x) \neq 0$ .

Si todos los puntos  $x \in U$  son puntos regulares de  $X$  se dice que  $X$  es un *Campo Vectorial no Singular* o *Campo Vectorial Regular*.

### 1.2.1. Comportamiento Local en Torno de un Punto Regular.

#### Teorema del Flujo Tubular.

La dinámica local en torno de un punto regular de un campo vectorial  $X$  es caracterizada por el *Teorema del Flujo Tubular*, que nos dice a grosso modo que en una vecindad de un punto regular las curvas integrales de  $X$  se comportan como “líneas paralelas”. Antes de enunciar este importante teorema, vamos a definir lo que es una *sección transversal* y una *conjugación* entre campos vectoriales.

**Definición 1.2.3.** (*Sección Transversal*). Sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  un abierto. Si  $p \in U$  es un punto regular de  $X$ , llamamos *sección transversal* a  $X$  en  $p$ , a la aplicación diferenciable  $\sigma : A \rightarrow U$  tal que  $p \in \sigma(A)$  y

- i)  $\sigma$  es una inmersión.
- ii) Si  $\Sigma = \sigma(A)$  entonces  $\sigma : A \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo.
- iii) Para todo  $a \in A$  los subespacios  $\sigma'(a)(\mathbb{R}^{n-1})$  y  $X(\sigma(a))$  generan el espacio  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.4.** (*Conjugación de Campos Vectoriales*). Sean  $X_1, X_2$  campos vectoriales definidos en los abiertos  $U_1, U_2$  de  $\mathbb{R}^n$  respectivamente. Se dice que  $X_1$  es topológicamente conjugado a  $X_2$  cuando existe un homeomorfismo  $h : U_1 \rightarrow U_2$ , tal que,

$$h(\varphi(t, p)) = \phi(t, h(p)), \tag{1.2}$$

donde  $\varphi : I_p \times V_p \rightarrow U_1$  es el flujo generado por el campo  $X_1$  en una vecindad  $V_p$  de un punto  $p \in U_1$  y  $\phi : I_{h(p)} \times V_{h(p)} \rightarrow U_2$  es el flujo generado por el campo  $X_2$  en una vecindad  $V_{h(p)}$  del punto  $h(p) \in U_2$ .

El homeomorfismo  $h$  se llama *Conjugación Topológica*. Si la aplicación  $h$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$  diremos que  $h$  es una  $C^r$ -Conjugación y que los campos  $X_1$  y  $X_2$  son  $C^r$  - Conjugados. Es claro que, si dos campos son  $C^r$  - conjugados, ellos son topológicamente conjugados.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos los campos  $X_1(x, y) = (-x, 2y)$  y  $X_2(x, y) = (-x, 2y + x^2)$  en  $\mathbb{R}^2$ . La aplicación  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $h(x, y) = \left(x, y - \frac{x^2}{4}\right)$  es una  $C^\infty$  - Conjugación entre  $X_1$  y  $X_2$ . En efecto, para que  $h$  sea una  $C^\infty$  - Conjugación,  $h$  debe ser un difeomorfismo de clase  $C^\infty$  y además debe verificar (1.2). Puesto que las componentes de  $h$  son polinomios, luego de clase  $C^\infty$ , se tiene que  $h$  es  $C^\infty$ . Ahora hallemos la inversa de  $h$

$$h(x, y) = \left(x, y - \frac{x^2}{4}\right) = (u, w)$$

entonces

$$h^{-1}(u, w) = \left(u, w + \frac{u^2}{4}\right).$$

Puesto que las componentes de  $h^{-1}$  son  $C^\infty$  entonces  $h^{-1}$  es  $C^\infty$ . Luego,  $h$  es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$ .

Ahora veamos que se verifica la condición (1.2).

El flujo generado por el campo  $X_1$ , el cual se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$$

está dado por:  $\varphi(t, (x_0, y_0)) = (x_0 \cdot e^{-t}, y_0 \cdot e^{2t})$ , donde  $t \in \mathbb{R}$  y  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Por otro lado, el flujo generado por el campo  $X_2$  se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2y + x^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

De la primera ecuación de (1.3) obtenemos que  $x(t) = u_0 \cdot e^{-t}$  con  $x(0) = u_0$ . Reemplazando este valor  $x(t) = u_0 \cdot e^{-t}$  en la segunda ecuación obtenemos:

$$\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = u_0^2 \cdot e^{-2t},$$

siendo esta última ecuación una ecuación lineal de primer orden cuya solución viene dada por

$$y(t) = e^{-\int P(t)dt} \left( \int Q(t) \cdot e^{\int P(t)dt} dt + C \right), \quad (1.4)$$

donde en este caso,  $P(t) = -2$  y  $Q(t) = u_0^2 \cdot e^{-2t}$ . Reemplazando estos valores de  $P(t)$  y  $Q(t)$  en (1.4) obtenemos que

$$y(t) = -\frac{u_0^2}{4} \cdot e^{-2t} + C \cdot e^{2t}.$$

Si  $y(0) = w_0$  entonces  $C = w_0 + \frac{u_0^2}{4}$ . Así,

$$y(t) = w_0 \cdot e^{2t} + \frac{u_0^2}{4}(e^{2t} - e^{-2t}).$$

Luego, el flujo generado por el campo  $X_2$  está dado por:

$$\phi(t, (u_0, w_0)) = (u_0 \cdot e^{-t}, w_0 \cdot e^{2t} + \frac{u_0^2}{4}(e^{2t} - e^{-2t})),$$

donde  $t \in \mathbb{R}$  y  $(u_0, w_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , verifiquemos que  $h(\varphi(t, (x_0, y_0))) = \phi(t, h(x_0, y_0))$ .

$$\begin{aligned} h(\varphi(t, (x_0, y_0))) &= h(x_0 \cdot e^{-t}, y_0 \cdot e^{2t}) \\ &= \left( x_0 \cdot e^{-t}, y_0 \cdot e^{2t} - \frac{x_0^2}{4} \cdot e^{-2t} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Por otro lado,

$$\phi(t, h(x_0, y_0)) = \phi\left(t, \left(x_0, y_0 - \frac{x_0^2}{4}\right)\right)$$

$$= \left( x_0 \cdot e^{-t}, y_0 \cdot e^{2t} - \frac{x_0^2}{4} \cdot e^{-2t} \right). \quad (1.6)$$

Comparando (1.5) y (1.6) vemos que se cumple

$$h(\varphi(t, (x_0, y_0))) = \phi(t, h(x_0, y_0)),$$

para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

El siguiente lema dá una caracterización para la conjugación entre campos vectoriales.

**Lema 1.1.** Sean  $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos de clase  $C^r$ , y  $h : U_1 \rightarrow U_2$  un difeomorfismo de clase  $C^r$ . Entonces,  $h$  es una conjugación entre  $X_1$  y  $X_2$  si y sólo si

$$Dh(p) \cdot X_1(p) = X_2(h(p)), \quad \text{para todo } p \in U_1. \quad (1.7)$$

**Demostración:** Sean  $\varphi_1 : D_1 \rightarrow U_1$  y  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow U_2$  los flujos de  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente, donde

$$D_1 = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U_1 / t \in I_p\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

y

$$D_2 = \{(t, q) \in \mathbb{R} \times U_2 / t \in I_q\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Supongamos que  $h$  satisface (1.9). Sea  $p \in U_1$  y  $\gamma(t) = h(\varphi_1(t, p))$ ,  $t \in I_p$ . Probemos que  $\gamma(t)$  es solución de  $x' = X_2(x)$  con  $x(0) = h(p)$ .

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t, p) \\ &= Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot X_1(\varphi_1(t, p)), \quad \varphi_1(t, p) \in U_1 \\ &= X_2(h(\varphi_1(t, p))) \\ &= X_2(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Además,  $\gamma(0) = h(\varphi_1(0, p)) = h(p)$ .

Por otro lado,  $\varphi_2(t, h(p))$  con  $t \in I_{h(p)}$  es la solución pasando por el punto  $h(p) \in U_2$ , luego por la unicidad de soluciones se tiene que  $\gamma(t) = \varphi_2(t, h(p))$ . Entonces  $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$ . Recíprocamente, supongamos que  $h$  es una conjugación entre  $X_1$  y  $X_2$ , entonces dado  $p \in U_1$ , se tiene que  $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$ , con  $t \in I_p$ . Puesto que  $h$  es diferenciable, derivando con respecto a  $t$  esta última relación obtenemos:

$$Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t, p) = \frac{d}{dt} \varphi_2(t, h(p))$$

$$Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot X_1(\varphi_1(t, p)) = X_2(\varphi_2(t, h(p))).$$

Si  $t = 0$  entonces

$$Dh(\varphi_1(0, p)) \cdot X_1(\varphi_1(0, p)) = X_2(\varphi_2(0, h(p))).$$

$$Dh(p) \cdot X_1(p) = X_2(h(p)).$$

**Teorema 1.1.** (*Flujo Tubular*). Sea  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  y  $p \in U$  un punto regular de  $X$ . Sea  $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Sigma$  una sección transversal de  $X$  de clase  $C^r$ , con  $\sigma(\bar{0}) = p$ . Entonces existe una vecindad  $V$  de  $p$  en  $U$  y un difeomorfismo  $h : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow V$  de clase  $C^r$ , donde  $\epsilon > 0$  y  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  es una bola abierta de centro  $\bar{0} = \sigma^{-1}(p)$ , tal que

i)  $h(\{0\} \times B) = \Sigma \cap V$ .

ii)  $h$  es una  $C^r$ -conjugación entre  $X|_V$  y el campo constante  $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y = (1, 0, \dots, 0)$ .

**Demostración:** Sea  $\varphi : D \rightarrow U$  el flujo de  $X$ , donde  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U / t \in I_x\}$ . Consideremos  $F : I_x \times A \rightarrow U$  definida por  $F(t, u) = \varphi(t, \sigma(u))$  con  $(t, \sigma(u)) \in D$ .  $F$  está bien definida y además es de clase  $C^r$  (de la misma clase de diferenciabilidad que  $X$ ). Si fijamos  $u \in A$  y hacemos variar  $t$  en  $I_x$ , lo que obtenemos es una línea paralela a  $\mathbb{R}$ . Eso significa que  $F$  aplica líneas paralelas a  $\mathbb{R}$  en curvas integrales de  $X$ , definidas en el intervalo  $I_x$ , que cruzan la sección transversal  $\Sigma$  en los puntos  $\sigma(u) \in \Sigma$ . Vamos a probar que  $F$  es un difeomorfismo en  $0 = (0, \bar{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Por el Teorema de la Función Inversa, es suficiente probar que  $DF(0)$  es invertible. Tenemos que

$$DF(0) = \left( \frac{\partial F}{\partial t}(0) \quad \frac{\partial F}{\partial u_1}(0) \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}(0) \right),$$

donde  $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in A$ .

Sea  $\bar{0} \in A$ ,  $t \rightarrow F(t, \bar{0}) = \varphi(t, \sigma(\bar{0})) = \varphi(t, p)$ . Al tomar la derivada en  $t = 0$  se tiene  $\frac{\partial F}{\partial t}(0, \bar{0}) = \varphi'(0, p) = X(\varphi(0, p)) = X(p)$ . Para el resto, tomamos  $t = 0$  y obtenemos  $(u_1, \dots, u_{n-1}) \rightarrow F(0, u_1, \dots, u_{n-1}) = \varphi(0, \sigma(u_1, \dots, u_{n-1})) = \sigma(u_1, \dots, u_{n-1})$ . Al tomar derivada en  $u = \bar{0}$  se tiene  $\frac{\partial F}{\partial u}(0, \bar{0}) = \sigma'(\bar{0})$ . Así,

$$DF(0) = (X(p) \quad \sigma'(\bar{0})).$$

Puesto que los vectores  $X(p)$  y  $\sigma'(\bar{0})$  son linealmente independientes, entonces  $DF(0)$  es invertible. Luego, por el Teorema de la Función Inversa existen  $\epsilon > 0$ , una vecindad  $V \subset U$  de  $F(0) = p$  y una bola abierta  $B = B(\bar{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  con centro en el origen  $\bar{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$  y radio  $\delta > 0$ , tales que  $h = F|_{(-\epsilon, \epsilon) \times B} : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow V$  es un difeomorfismo.

- i)  $h(\{0\} \times B) = \Sigma \cap V$ .  
 $h(0, u) = F(0, u) = \varphi(0, \sigma(u)) = \sigma(u) \in \Sigma$ , para todo  $u \in B$ .
- ii)  $h$  es una  $C^r$ - conjugación entre  $X|_V$  y  $Y = (1, 0, \dots, 0)$ .  
 Sea  $(t, u) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B$ , entonces,

$$Dh(t, u) \cdot Y(t, u) = DF(t, u) \cdot (1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, u) = \varphi'(t, \sigma(u)) =$$

$$X(\varphi(t, \sigma(u))) = X(F(t, u)) = X(h(t, u)).$$

Luego, por el Lema 1.1, se tiene que  $h$  es una  $C^r$ - conjugación entre  $X|_V$  y  $Y = (1, 0, \dots, 0)$ .

### 1.2.2. Comportamiento Local en Torno de un Punto Singular.

#### Teorema de Hartman-Grobman.

La dinámica local en torno de una singularidad (hiperbólica) de un campo vectorial no lineal,  $X$  es caracterizada por el *Teorema de Hartman-Grobman*, que nos dice que en una vecindad de un punto singular hiperbólico, las curvas integrales de  $X$  se comportan de manera similar que las curvas integrales del campo dado por la parte lineal de  $X$  en torno de la singularidad  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Este campo dado por la parte lineal de  $X$  será denotado por  $DX(p)$  y es llamado la linealización de  $X$  en torno de la singularidad hiperbólica  $p$ .

El *Teorema de Hartman-Grobman* nos garantiza que cerca a esta singularidad hiperbólica  $p$ , el comportamiento del sistema no lineal (1.1) es similar al comportamiento del sistema lineal

$$x' = Ax \tag{1.8}$$

con  $A = DX(p)$ , cerca del origen.

**Definición 1.2.5.** *Un punto singular  $p$  de un campo vectorial  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , se llama hiperbólico si todos los autovalores de  $DX(p)$  (la derivada de  $X$  en  $p$ ) tienen parte real diferente de cero.*

Antes de enunciar el resultado principal de esta sección (el Teorema de Hartman-Grobman), enunciaremos dos proposiciones que son claves para la demostración de este importante teorema de la teoría cualitativa local de ecuaciones diferenciales ordinarias.



**Proposición 1.1.** Sea  $E$  un espacio vectorial normado y  $\alpha > 0$ . Definimos la aplicación  $r_\alpha : E \rightarrow B[0, \alpha]$  por:

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| \leq \alpha \\ \frac{\alpha x}{|x|}, & \text{si } |x| \geq \alpha \end{cases}$$

donde  $B[0, \alpha]$  es la bola cerrada de centro  $0 \in E$  y radio  $\alpha$ . Entonces  $r_\alpha$  es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz 2.

**Demostración:** Sean  $x, y \in E$  y supongamos que  $|x| > \alpha \geq |y|$ , entonces,

$$\begin{aligned} |r_\alpha(x) - r_\alpha(y)| &= \left| \alpha x |x|^{-1} - \alpha y |y|^{-1} + \alpha y |x|^{-1} - y \right| \\ &\leq \left| \alpha x |x|^{-1} - \alpha y |x|^{-1} \right| + \left| \alpha y |x|^{-1} - y \right| \\ &= \alpha |x|^{-1} |x - y| + |y| |x|^{-1} |x| - \alpha. \end{aligned}$$

Puesto que,  $\alpha |x|^{-1} < 1$  y  $|y| |x|^{-1} |x| - \alpha < |x| - |y| \leq |x - y|$  se tiene que,

$$\begin{aligned} |r_\alpha(x) - r_\alpha(y)| &< |x - y| + |x - y| \\ &= 2|x - y|. \end{aligned}$$

Si  $|x| > \alpha$  y  $|y| > \alpha$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} |r_\alpha(x) - r_\alpha(y)| &= \left| \alpha x |x|^{-1} - \alpha y |x|^{-1} + \alpha y |x|^{-1} - \alpha y |y|^{-1} \right| \\ &\leq \left| \alpha x |x|^{-1} - \alpha y |x|^{-1} \right| + \left| \alpha y |x|^{-1} - \alpha y |y|^{-1} \right| \\ &\leq \alpha |x|^{-1} |x - y| + \alpha |x|^{-1} ||y| - |x||. \end{aligned}$$

Puesto que  $\alpha |x|^{-1} < 1$  y  $\alpha |x|^{-1} ||y| - |x|| \leq |x - y|$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |r_\alpha(x) - r_\alpha(y)| &< |x - y| + |x - y| \\ &= 2|x - y|. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $r_\alpha$  es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz 2.

Sea  $E$  un espacio vectorial normado (e.v.n), definimos los siguientes subconjuntos sobre  $E$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &= \{T : E \rightarrow E/T \text{ es un operador lineal}\}, \\ \sigma(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda \text{ es un autovalor de } T\}, \quad y \\ S_{\mathbb{C}} &= \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}. \end{aligned}$$

**Proposición 1.2.** Sea  $A \in \mathcal{L}(E)$  invertible y tal que  $A$  no tiene autovalores en el círculo unitario, esto es,  $\sigma(A) \cap S_{\mathbb{C}} = \emptyset$ . Entonces para toda  $g : E \rightarrow E$  limitada, satisfaciendo

$$|g(x) - g(y)| \leq \epsilon |x - y|$$



con  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, se tiene que  $A$  y  $A+g$  son topológicamente conjugados.

No daremos la demostración de esta proposición aquí, por ser bastante extensa (pueden consultar [6], pág.259), pero sí necesitamos rescatar de dicha prueba una observación bastante interesante que nos será de mucha utilidad más adelante.

**Observación 1.2.** . Sea  $BC(E, E)$  el espacio de las funciones continuas y limitadas de  $E$  en  $E$ . Entonces existe una única conjugación topológica  $h$  de  $A$  y  $A + g$ , la cual satisface  $h - id \in BC(E, E)$ .

**Teorema 1.2.** (Hartman-Grobman). Sean  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  conteniendo el punto  $0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $X$  un campo vectorial no lineal de clase  $C^1$  en  $U$  y  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (1.1). Supongamos que  $0 \in U$  es un punto singular hiperbólico de  $X$ . Entonces existe un homeomorfismo  $h$  definido en una vecindad suficientemente pequeña de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$h \circ e^{tA} = \phi_t \circ h,$$

donde  $A = DX(0)$ .

**Demostración:** Dado que  $X \in C^1(U)$  y  $0 \in U$ , existe  $\alpha > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$X(x) = DX(0) \cdot x + g(x), \tag{1.9}$$

para todo  $x \in B(0, \alpha) \subset U$ , donde  $g$  es una función, tal que,  $g(0) = 0$  y  $Dg(0) = 0$ . Tomemos  $\alpha$  tal que la bola cerrada  $B[0, \alpha]$  siga estando contenida en  $U$ . Puesto que  $X \in C^1(U)$ ,  $DX$  es continua en  $U$ . Además,  $DX(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua también en  $U$ , luego  $(DX - DX(0))|_{B[0, \alpha]}$  es continua. Entonces, existe  $\lambda > 0$  arbitrario tal que

$$|(DX - DX(0))(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \tag{1.10}$$

para todo  $x \in B[0, \alpha]$ .

Por otro lado, puesto que la función  $X - DX(0) : B[0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable (pues,  $X - DX(0) \in C^1(U)$ ) y además se cumple (1.10), se tiene por la Desigualdad del Valor Medio que la función  $X - DX(0)$  satisface la condición de Lipschitz con constante de Lipschitz  $\frac{\lambda}{2}$ . Esto es,

$$|(X - DX(0))(x) - (X - DX(0))(y)| \leq \frac{\lambda}{2}|x - y|$$

para todo  $x, y \in B[0, \alpha]$ .

Reemplazemos la función  $g(x)$  en (1.9) por una nueva función  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en todo  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $G|_{B(0, \alpha)} = g$ , de la siguiente manera:

$$G := (X - DX(0)) \circ r_\alpha,$$

donde  $r_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow B[0, \alpha]$  es una función definida como en la Proposición 1.1.  $G$  así definida es globalmente Lipschitz con constante de Lipschitz  $\lambda$ . En efecto, sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} |G(x) - G(y)| &= |(X - DX(0))(r_\alpha(x)) - (X - DX(0))(r_\alpha(y))| \\ &\leq \frac{\lambda}{2} |r_\alpha(x) - r_\alpha(y)|, \end{aligned}$$

pues  $X - DX(0)$  es Lipschitz en  $B[0, \alpha]$  con constante de Lipschitz  $\frac{\lambda}{2}$ . Además, por Proposición 1.1,  $r_\alpha$  es Lipschitz en  $\mathbb{R}^n$  con constante de Lipschitz 2, entonces

$$|G(x) - G(y)| \leq \lambda |x - y| \tag{1.11}$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Sea  $A = DX(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , entonces de (1.9) se tiene que

$$(A + G)|_{B(0, \alpha)} = X|_{B(0, \alpha)}. \tag{1.12}$$

Puesto que  $A + G \in C^1(\mathbb{R}^n)$  es un campo vectorial Lipschitz, entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , el P.V.I

$$\begin{cases} x' = Ax + G(x) \\ x(0) = x \end{cases} \tag{1.13}$$

tiene una única solución  $(t, x)$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Si  $\tau_t$  denota el flujo en  $\mathbb{R}^n$  (flujo global) generado por el campo  $A + G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces (1.12) muestra que  $\tau_t$  coincide con  $\phi_t$  en  $B(0, \alpha)$ , esto es,

$$\tau_t|_{B(0, \alpha)} = \phi_t|_{B(0, \alpha)}.$$

Ahora para probar el teorema es suficiente mostrar que existe un homeomorfismo  $h$  definido en  $B(0, \alpha)$  tal que  $h$  conjugue los flujos  $\tau_t$  y  $e^{tA}$ , flujos generados por los campos  $A + G$  y  $A$  respectivamente. La solución global  $\tau_t$ , del P.V.I (1.13), está dado por (Fórmula de Variación de Constantes):

$$\tau_t(x) = e^{tA} \cdot x + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \cdot G(\tau(x)) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Usando (1.14) deducimos que:

$$|\tau_t(x) - \tau_t(y)| \leq e^{t|A|} \cdot |x - y| + \int_0^t e^{(t-\tau)|A|} \cdot \lambda |\tau_\tau(x) - \tau_\tau(y)| d\tau,$$

para todo  $t \geq 0$  y para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Multiplicando esta última desigualdad por  $e^{-t|A|}$ , obtenemos:

$$e^{-t|A|} \cdot |{}_t(x) - {}_t(y)| \leq |x - y| + \int_0^t \lambda \cdot e^{-\tau|A|} |{}_\tau(x) - {}_\tau(y)| d\tau.$$

Siendo  $u(t) = e^{-t|A|} |{}_t(x) - {}_t(y)| \geq 0$ , por el Lema de Gronwall, tenemos

$$|{}_t(x) - {}_t(y)| \leq |x - y| \cdot e^{t(\lambda+|A|)} \quad (1.15)$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ . Finalmente, se sigue de (1.11), (1.14) y (1.15) que  ${}_t - e^{tA}$  es globalmente Lipschitz para todo  $t \geq 0$ . En efecto, sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , entonces:

$$\begin{aligned} |({}_t - e^{tA})(x) - ({}_t - e^{tA})(y)| &= \left| \int_0^t e^{(t-\tau)A} \cdot (G({}_\tau(x)) - G({}_\tau(y))) \right| \\ &\leq \int_0^t |e^{(t-\tau)A}| \cdot |(G({}_\tau(x)) - G({}_\tau(y)))| \\ &\leq \int_0^t e^{(t-\tau)|A|} \cdot \lambda |{}_ \tau(x) - {}_ \tau(y)| d\tau \\ &\leq \lambda |x - y| e^{t|A|} \cdot \int_0^t e^{\tau\lambda} d\tau \\ &= |x - y| \cdot e^{t|A|} (e^{t\lambda} - 1). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Puesto que  $\mathbb{R}^n$  es un e.v.n, definimos la norma de  $G$  como:

$$\|G\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |G(x)|_{\mathbb{R}^n}.$$

Luego, obtenemos de (1.14) que

$$|{}_t(x) - e^{tA} \cdot x| \leq \|G\|_\infty \left| \int_0^t e^{(t-\tau)|A|} \cdot d\tau \right|, \quad (1.17)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . De este modo,  ${}_t - e^{tA}$  es limitada para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Tomemos  $t = 1$  y sea  $\tilde{G} = {}_1 - e^A$ . Entonces, de (1.16) tenemos que,

$$|\tilde{G}(x) - \tilde{G}(y)| \leq e^{|A|} (e^\lambda - 1) \cdot |x - y|. \quad (1.18)$$

Puesto que  $\lambda$  se puede tomar arbitrariamente pequeño, se sigue de (1.18) que la constante de Lipschitz  $e^{|A|}(e^\lambda - 1)$  de  $\tilde{G}$  se puede hacer arbitrariamente pequeña.

Por hipótesis tenemos que  $0 \in U$  es un punto singular hiperbólico de  $X$ , entonces  $A = DX(0)$  no tiene autovalores con parte real nula, lo cual implica que el operador invertible  $e^A$  no tiene autovalores en el círculo unitario. Puesto que  $\tilde{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es limitada (por (1.17)), podemos concluir por la

Proposición 1.2 que  $e^A$  y  $\varphi_t = e^A + \tilde{G}$  son topológicamente conjugados. Al ser  $\varphi_t$  y  $e^A$  topológicamente conjugados, se tiene que existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$h \circ e^A = \varphi_t \circ h. \quad (1.19)$$

Por (1.19) y la parte (iii) de la Definición 1.2.1, para cada  $t \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_t \circ (\varphi_t \circ h \circ e^{-tA}) &= \varphi_t \circ \varphi_t \circ h \circ e^{-tA} \\ &= \varphi_t \circ h \circ e^A \circ e^{-tA} \\ &= (\varphi_t \circ h \circ e^{-tA}) \circ e^A. \end{aligned}$$

Vemos que  $\varphi_t \circ h \circ e^{-tA}$  es también una conjugación topológica de  $\varphi_t$  y  $e^A$ . Además,

$$\begin{aligned} \varphi_t \circ h \circ e^{-tA} - id &= \varphi_t \circ h \circ e^{-tA} - e^{tA} \circ h \circ e^{-tA} + e^{tA} \circ h \circ e^{-tA} - id \\ &= (\varphi_t - e^{tA}) \circ h \circ e^{-tA} + e^{tA} \circ (h - id) \circ e^{-tA}. \end{aligned}$$

De (1.17) tenemos que  $\varphi_t - e^{tA}$  es limitada, entonces  $\varphi_t - e^{tA} \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . También el operador  $e^{tA} \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , luego  $\varphi_t \circ h \circ e^{-tA} - id \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Supongamos que  $h - id \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , entonces por la Observación 1.2 se tiene que  $h = \varphi_t \circ h \circ e^{-tA}$  y por lo tanto  $h \circ e^{tA} = \varphi_t \circ h$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De este modo, se ha probado que existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que conjugua los flujos  $e^{tA}$  y  $\varphi_t$ , flujos generados por los campos  $A$  y  $A + G$  respectivamente.

Ahora, si nos restringimos a la bola abierta  $B(0, \alpha)$ , se tiene que  $h|_{B(0, \alpha)} : B(0, \alpha) \rightarrow B(0, \alpha)$  es una conjugación topológica de los flujos  $e^{tA}$  y  $\phi_t$ , flujos generados por los campos  $A$  y  $X$  respectivamente, que era lo que queríamos probar.

**Ejemplo 1.2.** Sea  $X_2(x, y) = (-x, 2y + x^2)$  el campo vectorial no lineal de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  dado en el Ejemplo 1.1. El sistema de ecuaciones diferenciales asociado a este campo está dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = -x \\ \frac{dy}{dt}(t) = 2y + x^2 \end{cases} \quad (1.20)$$

El punto  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  es la única singularidad de  $X_2$ , además es una singularidad hiperbólica, pues los autovalores de la matriz

$$DX_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tienen parte real diferente de cero. Entonces, por el Teorema de Hartman-Grobman podemos afirmar que el campo vectorial no lineal  $X_2$  es topológicamente conjugado al campo vectorial lineal  $X_1 = DX_2(0)$  en  $\mathbb{R}^2$ ,

$$X_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Como podemos observar, el campo  $X_1(x, y) = DX_2(0)(x, y)$  es la parte lineal del campo  $X_2$ . A este campo  $X_1$  se le conoce como la linealización de  $X_2$  en torno de la singularidad  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

Puesto que los autovalores de la matriz  $DX_2(0)$  son reales y de signos contrarios, se tiene que  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  es un punto de silla del sistema lineal  $X_1$  y, dado que los campos  $X_1$  y  $X_2$  son topológicamente conjugados, se tiene que la singularidad  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  de  $X_2$  es también una silla. Los diagramas de fase de los sistemas (1.20) y (1.21) cerca de la singularidad  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  son similares, como podemos observar en la siguiente figura.

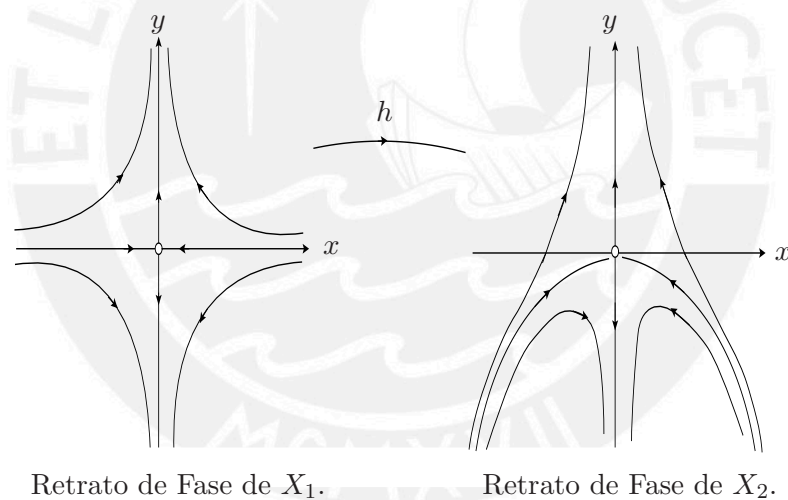


Figura 1.1: Campos Vectoriales Topológicamente Conjugados

### 1.3. Ecuaciones Diferenciales Complejas

**Definición 1.3.1.** (*Campo Vectorial Holomorfo*). Sea  $U \subset \mathbb{C}^n$  abierto. Un campo vectorial holomorfo en  $U$  es una aplicación  $Z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorfa, la cual asocia a cada punto  $z \in U$  un vector  $Z(z) = (Z_1(z), Z_2(z), \dots, Z_n(z))$

en el espacio  $\mathbb{C}^n$ . Cada  $Z_j : U \rightarrow \mathbb{C}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) es una función holomorfa, llamada función coordenada o componente de  $Z$ .

Podemos escribir el vector  $Z(z)$  como combinación lineal de los elementos de la base canónica  $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$  de  $\mathbb{C}^n$ , es decir,

$$Z(z) = Z_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + Z_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + Z_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \forall z \in U.$$

Luego, el campo vectorial  $Z$  lo podemos expresar como:

$$Z = Z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + Z_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

o simplemente  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ .

Cada  $Z_j$  es holomorfa, entonces en cada punto  $z_0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in U$ , existe una vecindad abierta  $V$ ,  $z_0 \in V \subset U$  tal que  $Z_j$  tiene expansión en serie de potencias

$$Z_j(z) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=0}^{\infty} c_{j,(k_1,k_2,\dots,k_n)} (z_1 - z_1^0)^{k_1} \cdot (z_2 - z_2^0)^{k_2} \dots (z_n - z_n^0)^{k_n},$$

$c_{j,(k_1,k_2,\dots,k_n)} \in \mathbb{C}$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ ; la cual converge para cualquier  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in V$ .

En forma simplificada escribimos

$$Z_j(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_{j,k} (z - z_0)^k,$$

donde  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ,  $c_{j,k} = c_{j,(k_1,k_2,\dots,k_n)}$ ,  $(z - z_0)^k = (z_1 - z_1^0)^{k_1} \cdot (z_2 - z_2^0)^{k_2} \dots (z_n - z_n^0)^{k_n}$ .

**Definición 1.3.2.** Sea  $Z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  un campo vectorial holomorfo definido en  $U \subset \mathbb{C}^n$ .

1. Un punto  $p \in U$  es llamado Punto Singular cuando  $Z(p)=0$ .
2. Un punto  $p \in U$  es llamado Punto Regular cuando  $Z(p) \neq 0$ .

El conjunto de todos los puntos singulares de  $Z$  se denota por  $Sing(Z)$ . Si todos los puntos  $p \in U$  son puntos regulares decimos que  $Z$  es un Campo Vectorial no Singular o un Campo Vectorial Holomorfo Regular.



**Definición 1.3.3.** (*Singularidad Aislada*). Sea  $U \subset \mathbb{C}^n$  abierto,  $Z \in \mathfrak{X}(U)$ . Decimos que  $z_0 \in U$  es una singularidad aislada de  $Z$  si existe una vecindad abierta  $V$ ,  $z_0 \in V \subset U$  tal que cualquier  $z \in V$ ,  $z \neq z_0$  es un punto regular.

Al campo vectorial holomorfo  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  le asociamos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dT} = Z_1(z) \\ \frac{dz_2}{dT} = Z_2(z) \\ \vdots \\ \frac{dz_n}{dT} = Z_n(z) \end{cases}$$

en donde  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in U$ ,  $T \in \mathbb{C}$ ; el cual podemos expresar en forma simplificada como

$$z' = Z(z), \quad (1.22)$$

donde  $z' = \left(\frac{dz_1}{dT}, \frac{dz_2}{dT}, \dots, \frac{dz_n}{dT}\right)$ . Denotemos por  $\mathfrak{X}(U)$  el conjunto de todos los campos vectoriales holomorfos sobre  $U$  y  $\Delta(p, r)$  el polidisco abierto de centro  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^n$  y poliradio  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ :

$$\Delta(p, r) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n / |z_i - p_i| < r_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

**Definición 1.3.4.** (*Flujo Local Complejo*). Sea  $U \subset \mathbb{C}^n$  abierto,  $Z \in \mathfrak{X}(U)$ . Un flujo local de  $Z$  en el punto  $p \in U$  es una aplicación holomorfa  $\varphi : D_\epsilon \times \Delta(p, \delta) \rightarrow U$ , donde  $D_\epsilon = D(0, \epsilon)$  es un disco de radio  $\epsilon > 0$  y centro  $0$  en  $\mathbb{C}$  y  $\Delta(p, \delta)$  un polidisco de radio  $\delta$  y centro  $p$  en  $U$ , gozando de las siguientes propiedades:

- i)  $\varphi(0, z) = z$ , para todo  $z \in \Delta(p, \delta)$ .
- ii)  $\frac{\partial \varphi}{\partial T}(T, z) = Z(\varphi(T, z))$ , para todo  $(T, z) \in D(0, \epsilon) \times \Delta(p, \delta)$ .
- iii)  $\varphi(T_2, \varphi(T_1, z)) = \varphi(T_1 + T_2, z)$  siempre que ambos miembros estén definidos, esto es, si  $z, \varphi(T_1, z) \in \Delta(p, \delta)$  y  $T_1, T_2, T_1 + T_2 \in D(0, \epsilon)$ .

Fijado  $p \in U$ . Decimos que la función holomorfa  $\varphi : D(0, \epsilon) \rightarrow U$ ,  $T \rightarrow \varphi(T, p)$  es solución local de (1.22) con condición inicial  $z(0) = p$ .

**Definición 1.3.5.** Se define la Órbita de  $Z$  por el punto  $p$  como el conjunto

$$\mathcal{O}_Z(p) = \{\varphi(T, p) / T \in D(0, \epsilon)\}.$$



### 1.3.1. Un Flujo Real dentro de un Flujo Complejo

Sea  $U \subset \mathbb{C}^n$  abierto y  $Z \in \mathfrak{X}(U)$ . Al campo  $Z$  le asociamos la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dT} = Z(z), \quad T \in \mathbb{C}. \quad (1.23)$$

Sea  $\varphi : D(0, \epsilon) \times W \rightarrow U$ ,  $W$  polidisco suficientemente pequeño centrado en  $p$ , el flujo asociado a  $Z$  en el punto  $p \in U$ , satisfaciendo i), ii) y iii) de la Definición 1.3.4.

Dado cualquier  $\alpha \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ , se define la ecuación diferencial real

$$\frac{dz}{dt} = \alpha Z(z), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.24)$$

a la cual le asociamos el flujo  $\varphi_\alpha$  (inducido por  $\varphi$ )

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times W &\longrightarrow U \\ (t, z) &\longrightarrow \varphi_\alpha(t, z) = \varphi(\alpha t, z), \end{aligned}$$

siendo este analítico real.

Veamos que  $\varphi_\alpha$  es el flujo del campo  $\alpha Z$ . En efecto,

i)  $\varphi_\alpha(0, z) = \varphi(\alpha \cdot 0, z) = \varphi(0, z) = z$ , pues  $\varphi$  satisface (i) de la Definición 1.3.4.

ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}(t, z) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\alpha t, z) = \varphi'(\alpha t, z) \cdot \frac{d(\alpha t)}{dt} \\ &= \alpha \varphi'(\alpha t, z) \\ &= \alpha Z(\varphi(\alpha t, z)) \\ &= \alpha Z(\varphi_\alpha(t, z)), \end{aligned}$$

entonces  $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}(t, z) = \alpha Z(\varphi_\alpha(t, z))$ .

iii) Sean  $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$  y  $z, \varphi_\alpha(t_1, z) \in W$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t_2, \varphi_\alpha(t_1, z)) &= \varphi(\alpha t_2, \varphi(\alpha t_1, z)) \\ &= \varphi(\alpha t_1 + \alpha t_2, z) \\ &= \varphi(\alpha(t_1 + t_2), z) \\ &= \varphi_\alpha(t_1 + t_2, z). \end{aligned}$$

De i), ii) y iii) decimos que  $\varphi_\alpha$  es el flujo del campo  $\alpha Z$ . Además se tiene que  $\mathcal{O}_{\alpha Z}(p) = \{\varphi_\alpha(t, p) / t \in (-\epsilon, \epsilon)\} \subset \mathcal{O}_Z(p)$ , esto es, la órbita del campo  $\alpha Z$  pasando por  $p$  está contenida en la órbita del campo  $Z$  pasando por  $p$ . Si hacemos variar el punto  $p$  en todo  $W$  entonces tendremos un flujo real contenido en un flujo complejo.

**Ejemplo 1.3.** Consideremos el campo vectorial

$$Z(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) \quad (1.25)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ .

Vemos que  $Z$  es un campo vectorial holomorfo, pues cada una de sus funciones coordenadas es holomorfa, además el único punto singular es el origen, pues si  $Z(z_1, z_2) = (0, 0)$  entonces  $z_1 = 0$  y  $z_2 = 0$ . Así,  $(0, 0)$  es una singularidad aislada del campo  $Z$ .

El sistema de ecuaciones diferenciales asociado a (1.25) es:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dT} = \lambda_1 z_1 \\ \frac{dz_2}{dT} = \lambda_2 z_2 \end{cases} \quad (1.26)$$

La solución de (1.26) que pasa por el punto  $z_0 = (z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$  esta definida en todo  $\mathbb{C}$  y está dada por:

$$\varphi(T, z_0) = (e^{\lambda_1 T} \cdot z_1^0, e^{\lambda_2 T} \cdot z_2^0), \quad T \in \mathbb{C}. \quad (1.27)$$

La órbita de  $Z$  pasando por  $z_0$  denotada por  $\mathcal{O}_Z(z_0)$  es el conjunto

$$\mathcal{O}_Z(z_0) = \{\varphi(T, z_0); T \in \mathbb{C}\}.$$

Para  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  se define el flujo real  $\varphi_\alpha$  (el cual es inducido por el flujo  $\varphi$ ), como:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (t, z) &\longrightarrow \varphi_\alpha(t, z) = \varphi(\alpha t, z). \end{aligned}$$

Usando (1.27), tenemos que la solución que pasa por el punto  $(z_1^0, z_2^0)$  está dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t, (z_1^0, z_2^0)) &= \varphi(\alpha t, (z_1^0, z_2^0)) \\ &= (e^{\lambda_1 \alpha t} \cdot z_1^0, e^{\lambda_2 \alpha t} \cdot z_2^0), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En particular, si  $\alpha = \frac{2\pi i}{\lambda_1}$  tenemos,

$$\varphi_{\frac{2\pi i}{\lambda_1}}(t, (z_1^0, z_2^0)) = (e^{2\pi i t} \cdot z_1^0, e^{2\pi i \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t} \cdot z_2^0). \quad (1.28)$$

Vemos que el comportamiento cualitativo de las curvas solución de (1.28) está estrechamente relacionado con los valores  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ . Por ejemplo, si  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}^-$ , esto es,  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{n}{m}$ , con  $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n, m$  primos entre sí, el flujo estaría dado por:

$$\varphi_{\frac{2\pi i}{\lambda_1}}(t, (z_1^0, z_2^0)) = (e^{2\pi i t} \cdot z_1^0, e^{-2\pi i \frac{n}{m} t} \cdot z_2^0),$$

donde para  $t = 0$ ,  $\varphi_{\frac{2\pi i}{\lambda_1}}(0, (z_1^0, z_2^0)) = (z_1^0, z_2^0)$ , mientras que para  $t = m$ ,  $\varphi_{\frac{2\pi i}{\lambda_1}}(m, (z_1^0, z_2^0)) = (z_1^0, z_2^0)$ . Esto indica que después de un tiempo real  $t = m$  el flujo vuelve al punto  $(z_1^0, z_2^0)$ . Es decir, las curvas de este flujo real  $\varphi_\alpha$  para  $\alpha = \frac{2\pi i}{\lambda_1}$  son cerradas.

### 1.3.2. Comportamiento Local en Torno de un Punto Regular.

#### Teorema del Flujo Tubular para Campos Holomorfos.

Igual que en el caso real, la dinámica local en torno de un punto regular de un campo holomorfo está caracterizada por el Teorema del Flujo Tubular para Campos Holomorfos. Antes de enunciar este importante teorema, definimos Sección Transversal a un campo holomorfo y damos un ejemplo de una sección transversal a un campo lineal holomorfo en  $\mathbb{C}^2$ . Además, veremos que por un punto regular de un campo holomorfo en  $\mathbb{C}^n$  siempre existe una sección transversal homeomorfa a un polidisco abierto de dimensión  $n - 1$ .

**Definición 1.3.6.** (*Sección Transversal*). Sea  $U \subset \mathbb{C}^n$  abierto y  $Z \in \mathfrak{X}(U)$ . Si  $p \in U$  es un punto regular de  $Z$ , llamamos sección transversal a  $Z$  en  $p$  a una aplicación holomorfa  $\sigma : D \rightarrow U$  definida en un dominio  $D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ , tal que  $p \in \sigma(D)$  y además:

- i)  $\sigma$  es una inmersión.
- ii) Si  $\Sigma = \sigma(D)$  entonces  $\sigma : D \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo.
- iii) Para todo  $q \in D$  los subespacios  $\sigma'(q)(\mathbb{C}^{n-1})$  y  $Z(\sigma(q))$  generan el espacio  $\mathbb{C}^n$ .

**Ejemplo 1.4.** Sea  $Z : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  el campo vectorial lineal holomorfo definido por:  $Z(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ , con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ . El punto  $p = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$  es un punto regular de  $Z$  pues  $Z(p) \neq 0$ . Vamos a definir una sección transversal al campo  $Z$  en el punto  $p$ .

Sea  $D(0, 1) \subset \mathbb{C}$  el disco abierto centrado en  $0 \in \mathbb{C}$  y radio 1. Definimos la aplicación diferenciable  $\sigma : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $\sigma(z) = (1, z)$ , donde  $p = \sigma(0) \in \sigma(D(0, 1))$ . Verifiquemos que se cumplen las condiciones i), ii) y iii) de la Definición 1.3.6, para que  $\sigma$  sea una sección transversal al campo  $Z$  en el punto  $p$ .

- i)  $\sigma$  es una inmersión.  
Sea  $z \in D(0, 1)$ . Veamos que  $\sigma'(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  es inyectiva.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\sigma'(z)) &= \{h \in \mathbb{C} / \sigma'(z) \cdot h = (0, 0)\} = \{h \in \mathbb{C} / (0, 1) \cdot h = (0, 0)\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

$\sigma'(z)$  es inyectiva.

ii) Sea  $\Sigma = \sigma(D(0,1)) = \{(1, z) \in \mathbb{C}^2 / z \in D(0,1)\}$ , entonces  $\sigma : D(0,1) \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo.

Definimos

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} : \Sigma &\longrightarrow D(0,1) \\ (1, z) &\longrightarrow \sigma^{-1}(1, z) = z. \end{aligned}$$

Evidentemente,  $\sigma$  y  $\sigma^{-1}$  son continuas. Además,  $\sigma^{-1}(\sigma(z)) = z$  y  $\sigma(\sigma^{-1}(w)) = w$  para cualesquiera  $z \in D(0,1)$  y  $w \in \Sigma$ .

Luego,  $\sigma$  es un homeomorfismo.

iii) Puesto que  $\sigma'(z) = (0, 1)$  y  $Z(\sigma(z)) = (\lambda_1, \lambda_2 z)$  son vectores L.I, ellos generan el espacio  $\mathbb{C}^2$ . Esto es,

$$\sigma'(z)(\mathbb{C}) \oplus \langle Z(\sigma(z)) \rangle = \mathbb{C}^2 \quad \forall z \in D(0,1).$$

**Lema 1.2.** Sea  $Z : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  campo holomorfo,  $U$  abierto y  $p \in U$  punto regular de  $Z$ . Entonces existe  $\sigma : D \subset \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow U$  sección transversal a  $Z$  en  $p$ .

**Demostración:** Como  $Z(p) \neq 0$ , podemos completar con  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{C}^n$  una base de  $\mathbb{C}^n$ .

Afirmamos que, existe  $r \in (\mathbb{R}^+)^n$  tal que,  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, Z(q)\}$  es base de  $\mathbb{C}^n$ , para todo  $q \in \Delta(p, r) \subset U$ . En efecto, supongamos por el absurdo que,  $\forall m \in \mathbb{Z}^+, \exists q_m \in \Delta(p, r_m)$  donde  $r_m = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$  tal que,  $Z(q_m) \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$ , esto es,  $q_m \rightarrow p$  y

$$Z(p) = \lim_{m \rightarrow \infty} Z(q_m) \in \overline{\langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle} = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle.$$

Entonces  $Z(p) \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$ , lo cual es una contradicción, pues,  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, Z(p)\}$  es base de  $\mathbb{C}^n$ .

Definamos

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta(0, \delta) \subset \mathbb{C}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) &\longrightarrow p + \sum_{i=1}^{n-1} z_i v_i \end{aligned}$$

holomorfa. Sea  $z \in \Delta(0, \delta)$  entonces,

$$|\sigma_i(z) - p_i| = |z_1 v_{1i} + z_2 v_{2i} + \dots + z_{n-1} v_{(n-1)i}| \leq |z_1| |v_{1i}| + |z_2| |v_{2i}| + \dots + |z_{n-1}| |v_{(n-1)i}|.$$

Sea  $M = \max\{|v_{ji}|; j = 1, 2, \dots, n-1\}$ , entonces,

$$|\sigma_i(z) - p_i| \leq M\{|z_1| + |z_2| + \dots + |z_{n-1}|\}.$$

$z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \Delta(0, \delta) \subset \mathbb{C}^{n-1}$  entonces,  $|z_i| < \delta_i < |\delta|$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Luego,

$$|\sigma_i(z) - p_i| < M(n - 1)|\delta|.$$

Sea  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1})$  tal que,  $|\delta| < \frac{r_i}{(n-1)M}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces  $|\sigma_i(z) - p_i| < r_i$ . Así,  $\sigma(z) \in \Delta(p, r)$ , luego, por la afirmación  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, Z(\sigma(z))\}$  es base de  $\mathbb{C}^n$ .

Veamos que  $\sigma$  es inyectiva. En efecto, sean  $z, w \in \Delta(0, \delta)$  tal que  $\sigma(z) = \sigma(w)$ ,

$$\sigma(z) = p + \sum_{i=1}^{n-1} z_i v_i = p + \sum_{i=1}^{n-1} w_i v_i = \sigma(w)$$

entonces  $\sum_{i=1}^{n-1} z_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} w_i v_i$ . Puesto que  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  son linealmente in-

dependientes se tiene que  $z_i = w_i$  para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ . Luego,  $z = w$ . Sea  $\Sigma = \sigma(\Delta(0, \delta)) = \{p + z_1 v_1 + \dots + z_{n-1} v_{n-1} / z \in \Delta(0, \delta)\} \subset \Delta(p, r)$ . Puesto que  $\sigma$  es inyectiva entonces  $\sigma : \Delta(0, \delta) \rightarrow \Sigma$  es biyectiva. Además,  $\sigma(z_1, \dots, z_{n-1}) = p + z_1 v_1 + \dots + z_{n-1} v_{n-1}$  es continua, pues sus funciones coordenadas son continuas. Por otro lado,  $\sigma^{-1}(p + z_1 v_1 + \dots + z_{n-1} v_{n-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$  también es continua. Por lo tanto,  $\sigma : \Delta(0, \delta) \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo.

Por otro lado, puesto que,  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  son linealmente independientes, el rango de  $\sigma'(z) = (v_1 v_2 \dots v_{n-1})$  es  $n - 1$  entonces  $\sigma'(z)$  es inyectiva. Luego,  $\sigma$  es una inmersión.

Puesto que,  $\sigma'(z) = (v_1 v_2, \dots, v_{n-1})$  y  $Z(\sigma(z))$  son vectores L.I, ellos generan el espacio  $\mathbb{C}^n$ . Esto es,

$$\sigma'(z)(\mathbb{C}^{n-1}) \oplus \langle Z(\sigma(z)) \rangle = \mathbb{C}^n \quad \forall z \in \Delta(0, \delta).$$

**Definición 1.3.7.** (Conjugación de Campos Vectoriales Holomorfos). Dos campos holomorfos  $X$  e  $Y$  definidos en los abiertos  $U, W$  de  $\mathbb{C}^n$ , respectivamente, son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow W$ , tal que,

$$h(\varphi(T, p)) = (T, h(p)), \tag{1.29}$$

donde  $\varphi : D_\epsilon \times U_p \rightarrow U$  es el flujo generado por el campo  $X$ , en una vecindad  $U_p$  de un punto  $p \in U$  y  $\psi : D_\delta \times U_{h(p)} \rightarrow W$  es el flujo generado por el campo  $Y$ , en una vecindad  $U_{h(p)}$  del punto  $h(p) \in W$ .

**Teorema 1.3.** (Flujo Tubular para Campos Holomorfos). Sea  $Z : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  campo holomorfo y  $p \in U$  punto regular de  $Z$ . Dada una sección

transversal  $\sigma : V \subset \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \Sigma$  a  $Z$  en  $p$ ,  $0 \in V$  y  $\sigma(0) = p$ . Entonces existe una vecindad  $W_p$  de  $p$  en  $U$  y un biholomorfismo  $h : D(0, \epsilon) \times \Delta' \longrightarrow W_p$ , donde  $\Delta' \subset \mathbb{C}^{n-1}$  polidisco con centro  $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ , tal que,

$$i) h(\{0\} \times \Delta') = \Sigma \cap W_p.$$

$$ii) h \text{ es una conjugación entre } Z|_{W_p} \text{ y el campo constante } Y : D(0, \epsilon) \times \Delta' \longrightarrow \mathbb{C}^n, Y = (1, 0, \dots, 0).$$

La demostración es análoga a la demostración del Teorema 1.1 (Teorema del Flujo Tubular para campos vectoriales reales).

### 1.3.3. El Teorema de Briot-Bouquet

Sea  $Z \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $U$  abierto de  $\mathbb{C}^2$  conteniendo  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ , siendo este punto la única singularidad de  $Z$ . Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales asociado a  $Z$  de la forma

$$\begin{cases} z'_1 = \lambda_1 z_1 + \phi_1(z_1, z_2) \\ z'_2 = \lambda_2 z_2 + \phi_2(z_1, z_2) \end{cases} \quad (1.30)$$

donde  $\phi_j(z) = \sum_{|Q| \geq 2} a_{j,Q} z^Q$  para  $j = 1, 2$ , es convergente en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ .

**Definición 1.3.8.**  $D_s = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 / \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-\}$  es el dominio de Siegel de  $\mathbb{C}^2$ .

**Observación 1.3.** Decimos que la singularidad  $(0, 0)$  de  $Z$  esta contenida en el dominio de Siegel si  $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_s$ .

**Teorema 1.4.** (Briot-Bouquet).- Supongamos que la singularidad de (1.30) esta contenida en el dominio de Siegel. Entonces existe un cambio de coordenadas  $z = \xi(w)$

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{1,Q} w^Q \\ z_2 = w_2 + \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{2,Q} w^Q \end{cases} \quad (1.31)$$

holomorfo, que transforma (1.30) en

$$\begin{cases} w'_1 = \lambda_1 w_1 + w_1 w_2 \quad \phi_1(w_1, w_2) \\ w'_2 = \lambda_2 w_2 + w_1 w_2 \quad \phi_2(w_1, w_2) \end{cases} \quad (1.32)$$



donde  $z_j(w) = \sum_{|Q| \geq 2} \lambda_{j,Q} w^Q$  para  $j = 1, 2$ , es convergente en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ .

En este sistema coordenado  $w_1 = 0$  y  $w_2 = 0$  son curvas invariantes de  $Z$ .

**Demostración:** Sea  $z = (z_1, z_2) = (w_1 + \xi_1(w), w_2 + \xi_2(w)) = \xi(w)$  el cambio de coordenadas formal (1.31) que transforma (1.30) en (1.32). Como  $z_j = w_j + \xi_j(w)$ , derivando tenemos:

$$z'_j = w'_j + \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w) w'_1 + \frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w) w'_2, \quad j = 1, 2.$$

Reemplazando (1.30) y (1.32) en la ecuación anterior obtenemos

$$\lambda_j z_j + \phi_j(z_1, z_2) = \lambda_j w_j + w_1 w_2 \lambda_{j,Q} w^Q + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k} (\lambda_k w_k + w_1 w_2 \lambda_{k,Q} w^Q).$$

Haciendo  $z_j = w_j + \xi_j(w)$  y  $(z_1, z_2) = \xi(w)$  tenemos

$$\lambda_j w_j + \lambda_j \xi_j(w) + \phi_j(\xi(w)) = \lambda_j w_j + w_1 w_2 \lambda_{j,Q} w^Q + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k} (\lambda_k w_k + w_1 w_2 \lambda_{k,Q} w^Q).$$

Cancelando y reordenando tenemos

$$\lambda_j \xi_j(w) - \sum_{k=1}^2 \lambda_k w_k \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) - w_1 w_2 \lambda_{j,Q} w^Q = \sum_{k=1}^2 w_1 w_2 \lambda_{k,Q} w^Q \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) - \phi_j(\xi(w)). \quad (1.33)$$

Como  $w_k \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) = \sum_{|Q| \geq 2} q_k \xi_{j,Q} w^Q$ , tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_j \xi_j(w) - \sum_{k=1}^2 \lambda_k w_k \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) - w_1 w_2 \lambda_{j,Q} w^Q = \\ \sum_{|Q| \geq 2} \lambda_j \xi_{j,Q} w^Q - \sum_{k=1}^2 \lambda_k \left( \sum_{|Q| \geq 2} q_k \xi_{j,Q} w^Q \right) - w_1 w_2 \sum_{|Q| \geq 2} \lambda_{j,Q} w^Q = \\ \sum_{|Q| \geq 2} (\lambda_j - \lambda_1 q_1 - \lambda_2 q_2) \xi_{j,Q} w^Q - w_1 w_2 \sum_{|Q| \geq 2} \lambda_{j,Q} w^Q. \end{aligned}$$

Hacemos  $\delta_{j,Q} = \lambda_j - \lambda_1 q_1 - \lambda_2 q_2$  y reemplazamos en (1.33)

$$\sum_{|Q| \geq 2} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} w^Q - w_1 w_2 \sum_{|Q| \geq 2} \lambda_{j,Q} w^Q = \sum_{k=1}^2 w_1 w_2 \lambda_{k,Q} w^Q \frac{\partial \xi_j}{\partial w_k}(w) - \phi_j(\xi(w)). \quad (1.34)$$



Consideremos el conjunto  $(w_1 \cdot w_2) = \{w_1 \cdot w_2 g(w_1, w_2) / g \text{ es una función holomorfa definida en una vecindad de } 0 \in \mathbb{C}^2\}$ . Para hallar los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  y  $\eta_{j,Q}$  vamos a seguir la siguiente regla:

1. Si  $w^Q \in (w_1 \cdot w_2)$ , hacemos  $\xi_{j,Q} = 0$
2. Si  $w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)$ , hacemos  $\eta_{j,Q} = 0$ .

Tenemos que, si  $w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)$  entonces  $\delta_{j,Q} \neq 0$ , para  $j = 1, 2, |Q| \geq 2$ . En efecto, supongamos por el absurdo que,  $\delta_{j,Q} = \lambda_j - \lambda_1 q_1 - \lambda_2 q_2 = 0$ . Si  $w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)$  entonces  $q_1 = 0 \vee q_2 = 0$ . Si  $q_1 = 0$  entonces  $\lambda_j = \lambda_2 q_2$ , lo cual es un absurdo pues,  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$  y  $q_2 \geq 2$ . Algo análogo ocurre si suponemos que,  $q_2 = 0$ .

Para simplificar los cálculos y hallar los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  y  $\eta_{j,Q}$  de las series que satisfacen las condiciones del teorema, aplicaremos la regla dada arriba y procederemos por inducción.

Supongamos que  $|Q| = 2$ . Aplicando la regla, de (1.34) tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} w^Q - w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \eta_{j,Q} w^Q = \\ & w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \eta_{1,Q} w^Q \left( \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} q_1 \xi_{j,Q} w_1^{q_1-1} w_2^{q_2} \right) + \\ & w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \eta_{2,Q} w^Q \left( \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} q_2 \xi_{j,Q} w_1^{q_1} w_2^{q_2-1} \right) - \phi_j(\xi(w)). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Para hallar  $\xi_{j,Q}$  y  $\eta_{j,Q}$  igualamos los coeficientes de  $w^Q$ , en la ecuación (1.35). Como en los dos primeros sumandos  $w_1 w_2 \eta_{1,Q}(w) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)$  y  $w_1 w_2 \eta_{2,Q}(w) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w)$  del segundo miembro de la ecuación (1.35) se tiene que  $w^Q \in (w_1 \cdot w_2)$  entonces los coeficientes de  $w_1^2$  y  $w_2^2$  dependerán de la expresión  $\phi_j(\xi(w))$ , donde  $\phi_j(\xi(w)) = \phi_j(w_1 + \xi_1(w), w_2 + \xi_2(w)) = \sum_{|Q|=2} a_{j,Q} (w_1 + \xi_1(w))^{q_1} (w_2 + \xi_2(w))^{q_2}$ .

Igualando los coeficientes de  $w_1^2$  y  $w_2^2$  en la ecuación (1.35), tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{j,(2,0)} \xi_{j,(2,0)} = -a_{j,(2,0)} & \implies \xi_{j,(2,0)} = \frac{-a_{j,(2,0)}}{\delta_{j,(2,0)}}, \quad j = 1, 2. \\ \delta_{j,(0,2)} \xi_{j,(0,2)} = -a_{j,(0,2)} & \implies \xi_{j,(0,2)} = \frac{-a_{j,(0,2)}}{\delta_{j,(0,2)}}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Del mismo modo, hallamos  $\delta_{j,(1,1)}$  comparando los coeficientes de  $w_1^2 \cdot w_2^2$  en la ecuación (1.35), obteniendo

$$\delta_{j,(1,1)} = 2a_{j,(2,0)}\xi_{1,(2,0)}\xi_{1,(0,2)} + a_{j,(1,1)}\xi_{1,(2,0)}\xi_{2,(0,2)} + a_{j,(1,1)}\xi_{1,(0,2)}\xi_{2,(0,2)} + 2a_{j,(0,2)}\xi_{2,(2,0)}\xi_{2,(0,2)}.$$

Como podemos observar, para  $j = 1, 2$ ,  $\delta_{j,(1,1)}$  depende de  $\xi_{1,(2,0)}$ ,  $\xi_{2,(2,0)}$ ,  $\xi_{1,(0,2)}$  y  $\xi_{2,(0,2)}$ , constantes ya conocidas por el paso anterior.

Así para  $|Q| = 2$  han sido calculados los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  y  $\delta_{j,Q}$  para  $j = 1, 2$ . Ahora supongamos que  $2 \leq |Q| \leq 3$ . Nuevamente aplicando la regla dada arriba, de (1.34) tenemos

$$\sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} w^Q - w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \delta_{j,Q} w^Q = w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \delta_{1,Q} w^Q \left( \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} q_1 \xi_{j,Q} w_1^{q_1-1} w_2^{q_2} \right) + w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \delta_{2,Q} w^Q \left( \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} q_2 \xi_{j,Q} w_1^{q_1} w_2^{q_2-1} \right) - \phi_j(\xi(w)). \quad (1.36)$$

Los coeficientes  $w_1^3$  y  $w_2^3$  son calculados a partir de la expresión  $\phi_j(\xi(w))$ , ya que los sumandos  $w_1 w_2^{-1}(w) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)$  y  $w_1 w_2^{-2}(w) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w)$  del segundo miembro de (1.36) contienen sólo términos con potencia  $w^Q \in (w_1 \cdot w_2)$ . Igualando los coeficientes de  $w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)$  con  $|Q| = 3$ , en la ecuación (1.36), tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{j,(3,0)} \xi_{j,(3,0)} &= -2a_{j,(2,0)}\xi_{1,(2,0)} - a_{j,(1,1)}\xi_{2,(2,0)} - a_{j,(3,0)} \implies \\ \xi_{j,(3,0)} &= \frac{-2a_{j,(2,0)}\xi_{1,(2,0)} - a_{j,(1,1)}\xi_{2,(2,0)} - a_{j,(3,0)}}{\delta_{j,(3,0)}}, \quad j = 1, 2. \\ \delta_{j,(0,3)} \xi_{j,(0,3)} &= -a_{j,(1,1)}\xi_{1,(0,2)} - 2a_{j,(0,2)}\xi_{2,(0,2)} - a_{j,(0,3)} \implies \\ \xi_{j,(0,3)} &= \frac{-a_{j,(1,1)}\xi_{1,(0,2)} - 2a_{j,(0,2)}\xi_{2,(0,2)} - a_{j,(0,3)}}{\delta_{j,(0,3)}}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Como podemos observar  $\xi_{j,(3,0)}$  y  $\xi_{j,(0,3)}$  dependen de los coeficientes del tipo  $\xi_{j,Q}$  con  $|Q| < 3$ , coeficientes ya calculados en el paso anterior. Así hemos hallado los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  para  $|Q| = 3$ ,  $j = 1, 2$ .

Del mismo modo que en la primera parte de la inducción, calculamos también los coeficientes  $\delta_{j,Q}$  para  $|Q| = 3$ , coeficientes que este caso dependen de  $\xi_{j,Q}$

con  $|Q| \leq 3$  y de  $\xi_{j,Q}$  con  $|Q| < 3$ , coeficientes ya conocidos por los pasos anteriores, luego,  $\delta_{j,Q}$  es conocido. Así para  $|Q| = 3$  han sido calculados los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  y  $\delta_{j,Q}$  para  $j = 1, 2$ .

Continuando así por inducción, tomemos  $Q_0 = (q_1^0, q_2^0)$  tal que  $|Q_0| = r > 3$  y supongamos que conocemos los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  y  $\delta_{j,Q}$  para todo  $Q$  satisfaciendo  $2 \leq |Q| < r$  (Hipótesis Inductiva).

De la misma manera que en las dos primeras partes de la inducción al aplicar la regla y suponer que  $2 \leq |Q| \leq r$ , de (1.34) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} w^Q - w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \xi_{j,Q} w^Q = \\ w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \xi_{1,Q} w^Q \left( \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} q_1 \xi_{j,Q} w_1^{q_1-1} w_2^{q_2} \right) + \\ w_1 w_2 \sum_{w^Q \in (w_1 \cdot w_2)} \xi_{2,Q} w^Q \left( \sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} q_2 \xi_{j,Q} w_1^{q_1} w_2^{q_2-1} \right) - \phi_j(\xi(w)). \end{aligned} \quad (1.37)$$

En el primer miembro de esta última ecuación, las potencias de ambas sumatorias son diferentes. En la primera sumatoria  $\sum_{w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} w^Q$  tenemos

las potencias  $w_1^r$  y  $w_2^r$  (que no aparecen en la segunda sumatoria). Los coeficientes  $\delta_{j,Q} \xi_{j,Q}$  de estas potencias se igualan con los coeficientes del segundo miembro que involucran estas mismas potencias. Puesto que las expresiones  $w_1 w_2^{-1}(w) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_1}(w)$  y  $w_1 w_2^{-2}(w) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial w_2}(w)$  en el segundo miembro de (1.37) no involucran las potencias  $w_1^r$  y  $w_2^r$  se tiene que los coeficientes de  $w_1^r$  y  $w_2^r$  sólo dependerán de la expresión  $\phi_j(\xi(w))$ , con  $\phi_j(\xi(w)) = \sum_{2 \leq |Q| \leq r} a_{j,Q} (w_1 + \xi_1(w))^{q_1} (w_2 + \xi_2(w))^{q_2}$ . Así,

$$\xi_{j,(r,0)} = \frac{1}{\delta_{j,(r,0)}} \left( \text{suma de los coeficientes de } w_1^r \text{ que aparecen en } \phi_j(\xi(w)) \right)$$

$$\xi_{j,(0,r)} = \frac{1}{\delta_{j,(0,r)}} \left( \text{suma de los coeficientes de } w_2^r \text{ que aparecen en } \phi_j(\xi(w)) \right)$$

Observe que los coeficientes de  $w_1^r$  y  $w_2^r$  que aparecen en  $\phi_j(\xi(w))$  son del tipo  $\xi_{j,Q}$  con  $|Q| < |Q_0|$ , coeficientes ya determinados según la hipótesis inductiva. Así de este modo se han hallado los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  para  $|Q| = r$  y  $j = 1, 2$ . Los coeficientes  $\xi_{j,Q}$  de  $w^Q \in (w_1 \cdot w_2)$  con  $|Q| = r$  que aparecen en el primer miembro de esta última ecuación se igualan con los coeficientes del

segundo miembro que involucran estas mismas potencias. Estos coeficientes provenientes del segundo miembro son del tipo  $\xi_{j,Q}$  con  $|Q| \leq r$  y  $\eta_{j,Q}$  con  $|Q| < r$ , coeficientes ya conocidos por el paso anterior y por la hipótesis inductiva, luego,  $\eta_{j,Q}$  es conocido para  $j = 1, 2$  y  $|Q| = r$ . Así de este modo hemos obtenido las series formales  $\xi_j$  y  $\eta_j$  para  $j = 1, 2$ .

Ahora para probar la convergencia de la serie  $\xi_j(w) = \sum_{|Q| \geq 2} \xi_{j,Q} w^Q$  para  $j = 1, 2$ , uno determina una serie mayorante convergente. Adoptaremos las siguientes notaciones:

1.  $\mathbb{C}[[z, w]]$  el conjunto de todas las series formales en las variables  $z, w$  con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Esto es,

$$\mathbb{C}[[z, w]] = \left\{ \sum_{|Q| \geq 0} a_Q z^{q_1} w^{q_2} / a_Q \in \mathbb{C} \right\}.$$

2. Si  $A(z, w) = \sum_{|Q| \geq 0} a_Q z^{q_1} w^{q_2} \in \mathbb{C}[[z, w]]$  denotamos por:

$$\widehat{A}(z, w) = \sum_{|Q| \geq 0} |a_Q| z^{q_1} w^{q_2} \quad \text{y} \quad \widehat{\widehat{A}}(z) = \widehat{A}(z, z) = \sum_{|Q| \geq 0} |a_Q| z^{|Q|}.$$

3. Si  $B(z, w) = \sum_{|Q| \geq 0} b_Q z^{q_1} w^{q_2} \in \mathbb{C}[[z, w]]$ , la notación  $\widehat{A} \preceq \widehat{B}$  significa que, para todo multiíndice  $Q$ ,  $|a_Q| \leq |b_Q|$ . A partir de esta definición tenemos que se cumplen las siguientes propiedades:

a)  $\widehat{A + B} \preceq \widehat{A} + \widehat{B}$ .

b)  $\widehat{\alpha A} = |\alpha| \widehat{A}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ .

c) Si  $\widehat{A} \preceq \widehat{B}$  y  $\widehat{C} \preceq \widehat{D} \implies \widehat{A + C} \preceq \widehat{B + D}$ .

d)  $\widehat{AB} \preceq \widehat{A} \widehat{B}$ .

e)  $A, B, C \in \mathbb{C}[[z, w]]$ . Entonces  $A \circ (B, C) = \sum_{|Q| \geq 0} a_Q B^{q_1} C^{q_2} \in \mathbb{C}[[z, w]]$ ,

$$A \circ (\widehat{B}, \widehat{C}) \preceq \widehat{A}(\widehat{B}, \widehat{C}).$$

**Proposición 1.3.** Existe  $\delta = \inf\{|\delta_{j,Q}| / w^Q \notin (w_1 \cdot w_2), |Q| \geq 2, j = 1, 2\} > 0$ .

**Demostración:** Si  $w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)$  entonces  $q_1 = 0 \vee q_2 = 0$ . Supongamos que  $q_1 = 0$  entonces  $q_2 \geq 2$ .

Fijemos  $j = 1$

$$|\delta_{1,Q}| = |\lambda_1 - \lambda_1 q_1 - \lambda_2 q_2| = |\lambda_1(1 - q_1) - \lambda_2 q_2| = \left| \lambda_2 \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - q_1) - q_2 \right] \right| = |\lambda_2| \left| \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - q_1) - q_2 \right] \right| = |\lambda_2| \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - q_2 \right|. \quad (1.38)$$

Si  $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_s$  entonces  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ , así  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < q_2$ . Luego, en (1.38) tenemos que

$$|\delta_{1,Q}| = |\lambda_2| \left[ q_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right].$$

Pero,  $q_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \geq 1$ , pues sino fuera así, si  $q_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$  entonces se tendrá que  $q_2 - 1 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ , lo cual es un absurdo puesto que  $q_2 - 1 \geq 1$  y  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ . Luego,  $|\delta_{1,Q}| \geq |\lambda_2| > 0$ . Tomemos  $\delta = |\lambda_2| > 0$ .

Si  $q_2 = 0$  entonces  $q_1 \geq 2$ , luego en (1.38) tenemos

$$|\delta_{1,Q}| = |\lambda_2| \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - q_1) \right| = |\lambda_1| |1 - q_1| = |\lambda_1| [q_1 - 1].$$

Pero  $q_1 - 1 \geq 1$  entonces,  $|\delta_{1,Q}| \geq |\lambda_1| > 0$ . Tomemos  $\delta = |\lambda_1| > 0$ .

Hemos visto que el cálculo de  $\xi_{j,Q}$  cuando  $w^Q \notin (w_1 \cdot w_2)$  está determinado o sólo depende de  $\phi_j(\xi(w_1, w_2))$ , esto es,

$$\sum_{|Q| \geq 2} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} w_1^{q_1} w_2^{q_2} = -\phi_j(\xi(w_1, w_2)), \quad j = 1, 2 \quad w^Q \notin (w_1 \cdot w_2),$$

donde,  $\phi_j(\xi(w_1, w_2)) = \phi_j(w_1 + \xi_1(w_1, w_2), w_2 + \xi_2(w_1, w_2))$ .

Sea  $P_j(w_1, w_2) = \sum_{|Q| \geq 2} \delta_{j,Q} \xi_{j,Q} w_1^{q_1} w_2^{q_2}$ ,  $j = 1, 2$  entonces  $\widehat{P}_j(w_1, w_2) =$

$\sum_{|Q| \geq 2} |\delta_{j,Q}| |\xi_{j,Q}| w_1^{q_1} w_2^{q_2}$ . Por la Proposición (1.3),  $\delta \leq |\delta_{j,Q}|$  entonces,

$$\delta \sum_{|Q| \geq 2} |\xi_{j,Q}| w_1^{q_1} w_2^{q_2} \preceq \sum_{|Q| \geq 2} |\delta_{j,Q}| |\xi_{j,Q}| w_1^{q_1} w_2^{q_2} = \widehat{P}_j(w_1, w_2).$$

Pero  $\widehat{P}_j(w_1, w_2) = -\phi_j(\widehat{\xi}(w_1, w_2)) = |-1| \phi_j(\widehat{\xi}(w_1, w_2)) = \phi_j(\widehat{\xi}(w_1, w_2))$ . Aplicando la propiedad e), sabiendo que  $\phi_j(\xi(w_1, w_2)) = \phi_j(w_1 + \xi_1(w_1, w_2), w_2 + \xi_2(w_1, w_2))$  tenemos que

$$\phi_j(\widehat{\xi}(w_1, w_2)) \preceq \widehat{\phi}_j(w_1 + \widehat{\xi}_1(w_1, w_2), w_2 + \widehat{\xi}_2(w_1, w_2)).$$

Luego,

$$\delta \sum_{|Q| \geq 2} |\xi_{j,Q}| w_1^{q_1} w_2^{q_2} \preceq \widehat{\phi}_j(w_1 + \widehat{\xi}_1(w_1, w_2), w_2 + \widehat{\xi}_2(w_1, w_2))$$

así,

$$\delta \widehat{\xi}_j(w_1, w_2) \preceq \widehat{\phi}_j(w_1 + \widehat{\xi}_1(w_1, w_2), w_2 + \widehat{\xi}_2(w_1, w_2))$$

entonces,

$$\widehat{\xi}_j(w_1, w_2) \preceq \delta^{-1} \widehat{\phi}_j(w_1 + \widehat{\xi}_1(w_1, w_2), w_2 + \widehat{\xi}_2(w_1, w_2)).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{\xi}}_j(w) = \widehat{\xi}_j(w, w) &\preceq \delta^{-1} \widehat{\phi}_j(w + \widehat{\xi}_1(w), w + \widehat{\xi}_2(w)) \\ &\preceq \delta^{-1} \widehat{\phi}_j(w + \widehat{\xi}_1(w) + \widehat{\xi}_2(w), w + \widehat{\xi}_2(w) + \widehat{\xi}_1(w)) \\ &= \delta^{-1} \widehat{\phi}_j(w + \widehat{\xi}_1(w) + \widehat{\xi}_2(w)), \end{aligned}$$

entonces,  $\widehat{\widehat{\xi}}_j(w) \preceq \delta^{-1} \widehat{\phi}_j(w + \widehat{\xi}_1(w) + \widehat{\xi}_2(w))$ , para  $j = 1, 2$ . Así por la propiedad c) tenemos

$$\sum_{j=1}^2 \widehat{\widehat{\xi}}_j(w) \preceq \delta^{-1} \sum_{j=1}^2 \widehat{\phi}_j(w + \widehat{\xi}_1(w) + \widehat{\xi}_2(w)). \quad (1.39)$$

Sea

$$F(z) = \delta^{-1} \sum_{j=1}^2 \widehat{\widehat{\phi}}_j(z) = \delta^{-1} \sum_{|Q| \geq 2} (|a_{1,Q}| + |a_{2,Q}|) z^{|Q|} = \sum_{n \geq 2} f_n z^n,$$

donde  $f_n = \delta^{-1} \sum_{|Q|=n} (|a_{1,Q}| + |a_{2,Q}|)$ ,  $n \geq 2$ .

Por hipótesis sabemos que la serie  $\phi_j(z_1, z_2) = \sum_{|Q| \geq 2} a_{j,Q} z_1^{q_1} z_2^{q_2}$ , para  $j = 1, 2$

es convergente en una vecindad  $V$  de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ . Si  $(z_1, z_2) \in V$  entonces por el criterio de Abel la serie  $\phi_j(z_1, z_2) = \sum_{|Q| \geq 2} a_{j,Q} z^Q$ , para  $j = 1, 2$ , converge

absoluta y uniformemente en compactos del polidisco  $\Delta((0, 0), (|z_1|, |z_2|))$ , esto es, la serie  $\sum_{|Q| \geq 2} |a_{j,Q}| z^Q = \widehat{\phi}_j(z_1, z_2)$  converge para  $j = 1, 2$  en una

vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ . Luego,  $\widehat{\widehat{\phi}}_j(z) = \widehat{\phi}_j(z, z)$  converge en el disco abierto  $D(0, r)$  donde  $0 < r < |z_1|$ , esto implica que  $F$  es una función analítica en



$D(0, r)$ .

Definamos

$$f : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(w, v) \longrightarrow v - F(v + w)$$

$(\mathbb{C}^2, 0)$  vecindad de  $0 \in \mathbb{C}^2$ .

Puesto que  $F$  es analítica entonces  $f$  es analítica. Además se cumple:

a)  $f(0, 0) = 0 - F(0 + 0) = F(0) = 0$ .

b)  $\frac{\partial f}{\partial v}(w, v) = 1 - F'(v + w) \cdot 1$  entonces,  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 1 - F'(0) = 1 \neq 0$ .

Luego, por el Teorema de la Función Implícita existen  $r_1, r_2 > 0$  y  $\varphi : D(0, r_1) \longrightarrow D(0, r_2)$  holomorfa, tal que,  $\varphi(0) = 0$  y  $f(w, \varphi(w)) = 0$ , para todo  $w \in D(0, r_1)$ . Pero  $f(w, \varphi(w)) = \varphi(w) - F(w + \varphi(w)) = 0$  entonces,  $\varphi(w) = F(w + \varphi(w))$ .

Por otro lado, sea

$$S(w) = \sum_{j=1}^2 \widehat{\xi}_j(w) = \sum_{|Q| \geq 2} (|\xi_{1,Q}| + |\xi_{2,Q}|) w^{|Q|} = \sum_{n \geq 2} s_n w^n,$$

donde  $s_n = \sum_{|Q|=n} (|\xi_{1,Q}| + |\xi_{2,Q}|)$ ,  $n \geq 2$ .

Podemos reescribir (1.39) como

$$S(w) \preceq \delta^{-1} \sum_{j=1}^2 \widehat{\phi}_j(w + S(w)) = F(w + S(w)). \quad (1.40)$$

Como

$$\begin{aligned} \varphi(w) = F(w + \varphi(w)) &\implies \varphi'(w) = F'(w + \varphi(w)) \cdot (1 + \varphi'(w)) \\ &\implies \varphi'(0) = F'(0 + \varphi(0)) \cdot (1 + \varphi'(0)) \\ &= F'(0) \cdot (1 + \varphi'(0)) \\ &= 0, \quad \text{pues, } F'(0) = 0. \end{aligned}$$

Luego,  $\varphi(w) = \sum_{n \geq 2} c_n w^n$ . Pero también  $\varphi(w) = F(w + \varphi(w)) = \sum_{n \geq 2} f_n(w + \varphi(w))^n$ . Esto es,

$$\begin{aligned} c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 + \dots &= f_2(w + \varphi(w))^2 + f_3(w + \varphi(w))^3 + f_4(w + \varphi(w))^4 + \dots \\ &= f_2(w^2 + 2w\varphi(w) + \varphi^2(w)) + f_3(w^3 + 3w^2\varphi(w) + \dots \end{aligned}$$



$$3w\varphi^2(w) + \varphi^3(w) + \dots$$

Igualando los coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} c_2 &= f_2 \geq 0 && \implies c_2 \geq f_2 \\ c_3 &= 2c_2f_2 + f_3 \geq 0 && \implies c_3 \geq f_3 \\ c_4 &= 2c_3f_2 + c_2^2f_2 + 3c_2f_3 + f_4 \geq 0 && \implies c_4 \geq f_4 \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Así,  $c_n \geq f_n \geq 0$ ,  $\forall n \geq 2$ .

Análogamente de (1.40) tenemos

$$S(w) = \sum_{n \geq 2} s_n w^n \preceq F(w + S(w)) = \sum_{n \geq 2} f_n(w + S(w))^n.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} s_2 w^2 + s_3 w^3 + s_4 w^4 + \dots &\preceq f_2(w + S(w))^2 + f_3(w + S(w))^3 + f_4(w + S(w))^4 + \dots \\ &= f_2(w^2 + 2wS(w) + S^2(w)) + f_3(w^3 + 3w^2S(w) + \\ &\quad 3wS^2(w) + S^3(w)) + \dots \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} s_2 &\leq f_2 \leq c_2 && \implies s_2 \leq c_2 \\ s_3 &\leq 2s_2f_2 + f_3 \leq c_3 && \implies s_3 \leq c_3 \\ s_4 &\leq 2s_3f_2 + s_2^2f_2 + 3s_2f_3 + f_4 \leq c_4 && \implies s_4 \leq c_4 \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Así,  $0 \leq s_n \leq c_n$ ,  $\forall n \geq 2$ . Entonces,  $S(w) \preceq \varphi(w)$ . Luego por el criterio de Weierstras la serie  $S(w)$  converge en  $D(0, r_1)$ . Pero,  $S(w) = \widehat{\widehat{\xi}}_1(w) + \widehat{\widehat{\xi}}_2(w) \succeq \widehat{\widehat{\xi}}_j(w)$ , nuevamente por el criterio de Weierstras  $\widehat{\widehat{\xi}}_j(w)$  converge en  $D(0, r_1)$ , luego la serie  $\xi_j(w_1, w_2)$  para  $j = 1, 2$  converge en el polidisco  $\Delta((0, 0), (r_1, r_1))$ .

## 1.4. 1-Formas Holomorfas

Sea  $U$  una vecindad de un punto  $p \in \mathbb{C}^n$ . Una 1-forma holomorfa definida en  $U$  es una función

$$\begin{aligned} \omega &: U \longrightarrow (T_q U)^* = (\mathbb{C}^n)^* \\ q &\longrightarrow \omega(q) \end{aligned}$$

donde  $(\mathbb{C}^n)^* = \{f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es lineal}\}$ . Esto es  $\omega(q)$  es un funcional lineal.

Dada una 1-forma holomorfa  $\omega$  en  $U$ , tenemos que

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dz_i$$

donde  $a_i : U \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones holomorfas en  $U$ .

**Definición 1.4.1.** Sean  $\omega$  y  $\eta$  dos 1-formas holomorfas en  $U$  tales que,

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dz_i \quad \text{y} \quad \eta = \sum_{j=1}^n b_j dz_j$$

Definimos el producto exterior de  $\omega$  por  $\eta$  como

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j dz_i \wedge dz_j.$$

**Propiedades 1.1.** Sean  $\omega, \eta$  y  $\theta$  1-formas holomorfas en  $U$ , se tiene:

- 1)  $\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega$ .
- 2)  $\omega \wedge \eta = 0$  si  $\omega = \eta$ .
- 4)  $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ .
- 5)  $\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta$ .

**Definición 1.4.2.** Sea  $\omega$  una 1-forma diferencial holomorfa no idénticamente nula en  $U$ . Una función holomorfa  $\varphi : D(0, \epsilon) \rightarrow U$  definida sobre un disco  $D(0, \epsilon)$  de radio  $\epsilon > 0$  y centro 0 en  $\mathbb{C}$  es solución de la ecuación  $\omega = 0$  si para cualquier  $t \in D(0, \epsilon)$  se tiene

$$\omega(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0. \tag{1.41}$$

Sea  $\omega$  una 1-forma holomorfa no idénticamente nula en  $U$ . Sea  $S = \{q \in U / \omega(q) = 0\}$ , el conjunto singular de  $\omega$ . A cada punto  $q \in U$  tal que  $\omega(q) \neq 0$  le hacemos corresponder el funcional lineal  $\omega_q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . El conjunto

$$Ker(\omega_q) = \{v \in \mathbb{C}^n / \omega_q v = 0\}$$

es un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^n$  de dimensión  $n-1$ . En este caso,  $\omega$  induce un campo de hiperplanos  $L$  en el abierto  $V = U - S$ , definidos por  $L_q = Ker(\omega_q)$ .

**Observación 1.4.** Si  $n = 2$ , un campo vectorial holomorfo no singular  $Z$  puede ser substituído por un "campo de líneas" definido por una 1-forma holomorfa. Sea

$$Z = Z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \quad (1.42)$$

un campo vectorial holomorfo no singular en  $U \subset \mathbb{C}^2$ . Esto es, para cada  $i = 1, 2$ ,  $Z_i : U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en  $U$ . La 1-forma holomorfa en  $U$  sin singularidades asociada al campo  $Z$  es:

$$\omega = Z_2(z_1, z_2)dz_1 - Z_1(z_1, z_2)dz_2 = 0 \quad (1.43)$$

La relación que existe entre el campo (1.42) y la 1-forma diferencial (1.43) es

$$\omega(Z_1, Z_2) = 0 \quad (1.44)$$

**Observación 1.5.** De (1.44) podemos decir que toda solución del campo (1.42) es solución de la 1-forma (1.43) asociada al campo. Lo recíproco es falso. Por ejemplo, consideremos la 1-forma

$$\omega = 2xdx + 2ydy$$

definida en  $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . El campo asociado a  $\omega$  es dado por:

$$X(x, y) = (-2y, 2x).$$

Sea  $C : x^2 + y^2 = c^2$  una solución de  $\omega = 0$ . Una parametrización para  $C$ ,  $\varphi(t) = (c \cos t, c \sin t)$  satisface (1.41). Sin embargo,  $X(\varphi(t)) = X(c \cos t, c \sin t) = (-2c \sin t, 2c \cos t) = 2\varphi'(t) \neq \varphi'(t)$ . Por lo tanto,  $\varphi(t)$  no es solución del campo  $X$ .

## 1.5. Integral Primera

**Definición 1.5.1.** Sea  $U$  una vecindad abierta de  $0 \in \mathbb{C}^2$  y  $\omega = a(z, w)dz + b(z, w)dw$  una 1-forma diferencial holomorfa en  $U$ . Denotemos por  $\mathcal{O}(U)$  el conjunto de las funciones holomorfas en  $U$ , esto es,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es holomorfa}\}$$

Sea  $f \in \mathcal{O}(U)$  no constante. Decimos que  $f$  es una integral primera de  $\omega$  en  $U$  si se cumple que

$$\omega \wedge df = 0.$$

**Ejemplo 1.5.** Sea  $\omega = pw dz + qz dw$  una 1-forma holomorfa en  $\mathbb{C}^2$ , donde  $p, q \in \mathbb{N}$  y  $m.c.d(p, q) = 1$ . Observamos que,  $f = z^p w^q$  es una integral primera holomorfa para  $\omega$ , pues

$$\begin{aligned} \omega \wedge df &= (pw dz + qz dw) \wedge \left( \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial w} dw \right) \\ &= (pw dz + qz dw) \wedge (pz^{p-1}w^q dz + qz^p w^{q-1} dw) \\ &= (pq z^p w^q - qp z^p w^q) dz \wedge dw \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces  $\omega \wedge df = 0$ , luego  $f$  representa una integral primera para  $\omega$ .

## 1.6. Germen

En esta monografía estamos interesados en el estudio local de la existencia de integrales primeras de 1-formas diferenciales holomorfas con singularidad aislada en  $0 \in \mathbb{C}^2$ , no nos vamos a preocupar en cuales vecindades de 0 valen los resultados, para nosotros bastará que estos valgan para alguna vecindad (abierta) de 0. Por ello, introducimos el concepto de germen de funciones y germen de 1-formas diferenciales.

**Definición 1.6.1.** (*Gérmenes de Funciones Holomorfas*) Sea  $p \in \mathbb{C}^n$  y consideremos la familia  $\mathcal{F}_p = \{f : V_p \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa, definida en alguna vecindad abierta } V_p \text{ de } p\}$ . Definimos en  $\mathcal{F}_p$ , la siguiente relación de equivalencia ( $\sim$ ): dados  $f : V_p \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : W_p \rightarrow \mathbb{C}$  dos elementos de  $\mathcal{F}_p$ , decimos que  $f \sim g$  si y solamente si, existe una vecindad abierta  $U \subset V_p \cap W_p$  de  $p$  tal que,  $f|_U = g|_U$ . La clase de equivalencia de  $f$  por esta relación de equivalencia, que será denotada por  $[f]_p$  es llamado germen de  $f$  en  $p$ .

**Definición 1.6.2.** (*Gérmenes de 1-Formas Diferenciales Holomorfas*) Sean

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dz_i, \quad a_i \in \mathcal{O}(U)$$

y

$$\varpi = \sum_{i=1}^n b_i dz_i, \quad b_i \in \mathcal{O}(V)$$

1-formas holomorfas definidas en las vecindades  $U$  y  $V$  respectivamente, de un punto  $p \in \mathbb{C}^n$ . Decimos que  $\omega$  es equivalente a  $\varpi$  ( $\omega \sim \varpi$ ) si y solamente si, existe una vecindad abierta  $W \subset U \cap V$  de  $p$  tal que,  $\omega|_W = \varpi|_W$ . Esto es,  $a_i|_W = b_i|_W$ . La clase de equivalencia de  $\omega$  por esta relación de equivalencia, es llamado germen de  $\omega$  en  $p$ .

## Capítulo 2

### Foliaciones

Uno de los temas tratados en ésta monografía es el de *Foliaciones*, motivo por el cual no podemos dejar de dar algunas nociones básicas referentes a este tema, que serán de mucha utilidad mas adelante.

Una *Foliación* se puede ver como una descomposición de una variedad  $M$ , en subvariedades inmersas conexas, disjuntas, de una misma dimensión llamadas *hojas* de la foliación, las cuales se comportan localmente como subconjuntos de  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$  con segunda coordenada constante.

**Definición 2.0.3.** *Sea  $M^m$  una variedad diferenciable de dimensión  $m \geq 2$  y clase  $C^\infty$ . Una Foliación regular sobre  $M$  de dimensión  $k$  ( $0 < k < m$ ) y clase  $C^r$  es un atlas  $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de clase  $C^r$  en  $M$  satisfaciendo las siguientes propiedades:*

- i)  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ .*
- ii)  $\varphi_i(U_i) = \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{m-k}$ , donde  $\mathbb{D}^k$  y  $\mathbb{D}^{m-k}$  son discos abiertos de  $\mathbb{R}^k$  y de  $\mathbb{R}^{m-k}$  respectivamente.*
- iii) Si  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces la aplicación cambio de coordenada  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_{ij}) \rightarrow \varphi_j(U_{ij})$  es un difeomorfismo de clase  $C^r$  y tiene la forma*

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x, y) = (f_{ij}(x, y), g_{ij}(y)).$$

Si  $M$  admite un atlas  $\mathcal{F}$  satisfaciendo *i)*, *ii)* y *iii)* de la definición arriba, decimos que el par  $(M, \mathcal{F})$  es una variedad foliada, y los subconjuntos de la forma  $\varphi_i^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{y\}) = P_i$  para algún  $y \in \mathbb{D}^{m-k}$  son llamados *placas* de la foliación  $\mathcal{F}$  en  $U_i$  (Ver Figura(2.1)). También diremos que  $\mathcal{F}$  es de codimensión  $m - k$ .

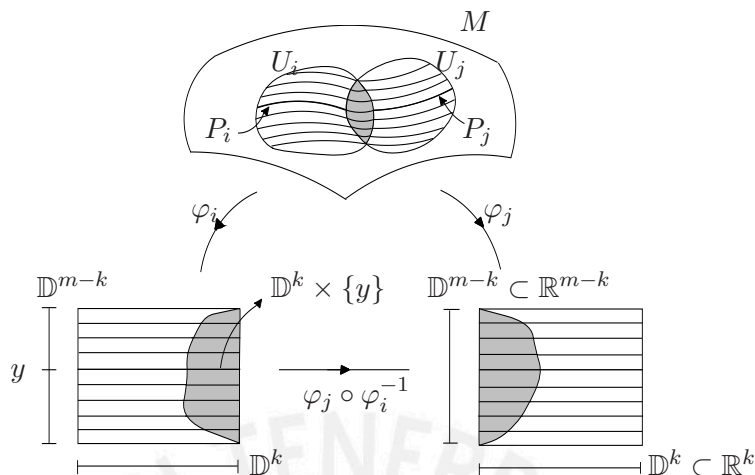


Figura 2.1: Variedad Foliada  $M$ .

Definamos en  $M$  la siguiente relación de equivalencia  $\mathcal{R}$ : dados  $p, q \in M$ ,  $p \mathcal{R} q$  si y sólo si, existen  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (placas) tales que  $p \in P_1, q \in P_n$  y  $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Las clases de equivalencia de la relación  $\mathcal{R}$  en  $M$  son llamadas *hojas* de la foliación.

**Observación 2.1.** .

- 1) Las hojas son subvariedades diferenciables de dimensión  $k$  inmersas en la variedad  $M$ .
- 2) Por cada punto de  $M$  pasa una única hoja.
- 3) Las hojas son subvariedades conexas.

Damos a continuación una definición alternativa de foliación (equivalente a la Definición 2.0.3) dada por submersiones, definición que resultará muy útil en algunos casos para nuestros propósitos.

**Definición 2.0.4.** (*Definición Alternativa de Foliación*). Una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $k$  y clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  de  $M$  esta definida por una colección de pares  $(U_i, f_i)$ ,  $i \in I$ , donde los  $U_i$  son abiertos en  $M$  y las  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  son submersiones satisfaciendo:

- i)  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ .
- ii) Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $f_i = g_{ij} \circ f_j$  donde



$$g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{m-k} \longrightarrow f_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{m-k}$$

es un difeomorfismo local de clase  $C^r$ .

Las  $f_i$  son llamadas aplicaciones distinguidas de  $\mathcal{F}$ , y las *placas* de  $\mathcal{F}$  en  $U_i$  son en este caso, las componentes conexas de los conjuntos  $f_i^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^{m-k}$ . A continuación presentamos una serie de ejemplos de foliaciones que nos servirán más adelante para justificar algunas afirmaciones hechas a lo largo del desarrollo del trabajo.

**Ejemplo 2.1.** (*Foliación generada por un campo de vectores*). Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto,  $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial no singular (regular) de clase  $C^r$ . A este campo le podemos asociar una ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{2.1}$$

con  $t \in \mathbb{R}$ .

Las curvas integrales de  $X$  o de la ecuación (2.1), definen una foliación regular local de dimensión 1 en  $U$ . La estructura de foliación se debe al Teorema del Flujo Tubular.

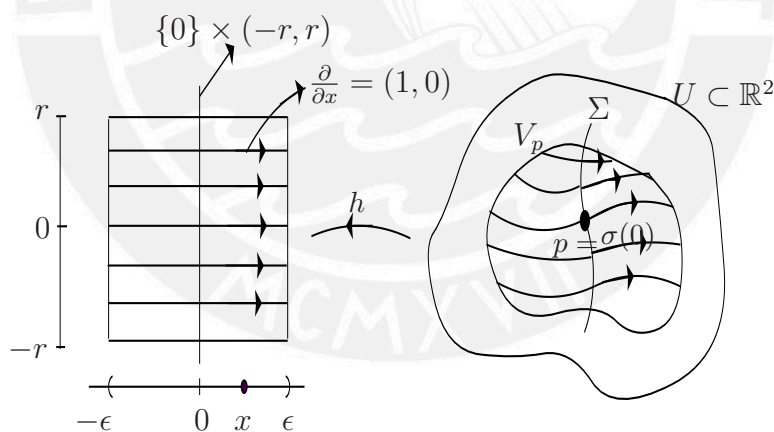


Figura 2.2: Foliación Generada por un Campo de Vectores.

En efecto, sea  $p \in U$ , puesto que  $X$  es un campo sin singularidades,  $p$  es un punto regular de  $X$ . Sea  $\sigma : V \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma$  una sección transversal local de  $X$  de clase  $C^r$  con  $\sigma(0) = p$ . Entonces por el Teorema del Flujo Tubular existe una vecindad  $V_p \subset U$  de  $p$  y un difeomorfismo  $h : V_p \longrightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times (-r, r)$  de clase  $C^r$ , con  $\epsilon, r > 0$ , tales que:

i)  $h(\Sigma \cap V_p) = \{0\} \times (-r, r)$ .

ii)  $h$  es una  $C^r$ -conjugación entre  $X|_{V_p}$  y el campo constante  $Y = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$

$$Y : \begin{matrix} (-\epsilon, \epsilon) \times (-r, r) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & Y(x, y) = (1, 0). \end{matrix}$$

Por la condición (ii) y la ecuación diferencial (2.1), vemos que las trayectorias de  $X$  en  $V_p$  se comportan de manera similar que "líneas" horizontales en  $\mathbb{R}^2$  (trayectorias definidas por el campo constante  $Y = (1, 0)$ ). (Ver Figura 2.2). De este modo, las trayectorias de  $X$  en  $V_p$  se pueden expresar de la forma  $h^{-1}((-\epsilon, \epsilon) \times \{y\})$  con  $y \in (-r, r) \subset \mathbb{R}$ , obteniendo así una foliación local de dimensión 1, cuyas hojas son las trayectorias de  $X$ . A esta foliación la denotamos por  $\mathcal{F}_X$  y se lee foliación generada por el campo  $X$ .

Observe que la trayectoria (u órbita) generada por  $X$  es la misma que la generada por  $gX$  donde  $g \in \mathcal{O}(U)$  con  $g(0) \neq 0$ .

**Ejemplo 2.2.** (Foliación generada por una 1-forma diferencial).

Sea  $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ , una 1-forma diferencial de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$  sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\omega(p) \neq 0$  para todo  $p \in U$ . El campo vectorial no singular asociado a la ecuación diferencial  $\omega = 0$  está dado por:

$$X = -b(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.2}$$

Las soluciones de  $X$  son soluciones de la ecuación  $\omega = 0$ . En efecto, sea  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ ,  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  una solución de (2.2), entonces

$$\begin{cases} x'(t) = -b(x(t), y(t)) \\ y'(t) = a(x(t), y(t)). \end{cases} \tag{2.3}$$

$\omega(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)$ . Reemplazando las ecuaciones de (2.3) en esta última ecuación, se tiene que,  $\omega(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$ . Así,  $\varphi'(t) = X(\varphi(t)) \in \text{Ker}(\omega(\varphi(t))) \subset T_{\varphi(t)}\mathbb{R}^2$ , con  $\varphi(t) \in U$ . Las curvas integrales de  $X$  determinan sobre  $U \subset \mathbb{R}^2$  una foliación regular local de dimensión 1 (Ver Ejemplo 2.1), y puesto que ellas son también subvariedades integrales de  $\omega = 0$ , se tiene que la foliación  $\mathcal{F}_\omega$  generada por  $\omega$  coincide con  $\mathcal{F}_X$  en  $U$ .

**Ejemplo 2.3.** (Foliación generada por una submersión). Sea  $U \subset \mathbb{R}^m$  abierto,  $f : U \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una submersión de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Las componentes conexas de  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  definen una foliación regular de codimensión 1 en  $U$ . La estructura de foliación se debe al Teorema de la Forma

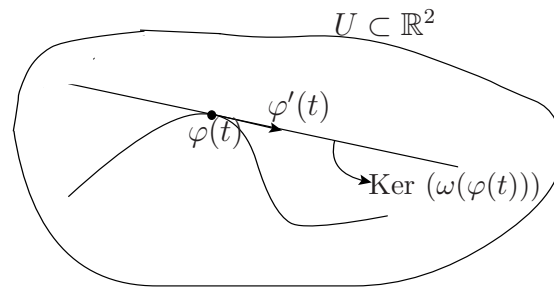


Figura 2.3: Foliación Generada por la 1-Forma  $\omega$ .

*Local de las Submersiones.* En efecto, sea  $p = (x, y) \in U$  y  $z = f(p) \in \mathbb{R}$  entonces por el Teorema Local de las Submersiones existen vecindades abiertas  $W \subset U$  de  $p$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  de  $z$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{m-1}$  de  $x$  y un difeomorfismo  $\varphi : V \times I \rightarrow W$  de clase  $C^r$ , tal que,  $(f \circ \varphi)(u, v) = v$  para todo  $(u, v) \in V \times I$ .

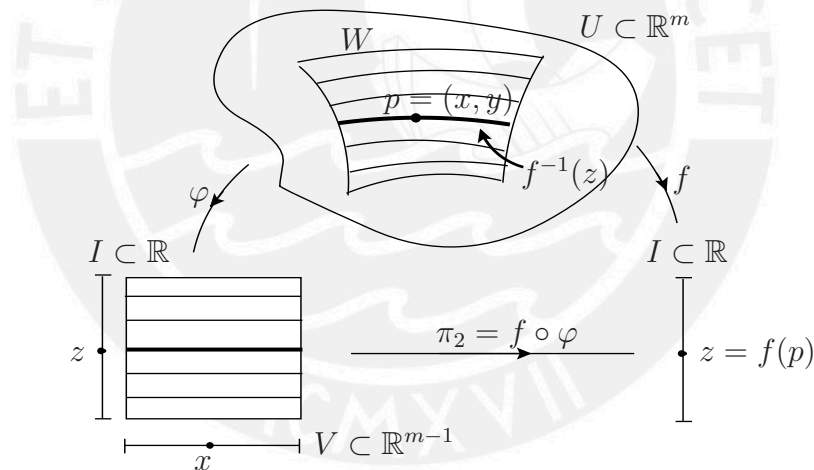


Figura 2.4: Foliación Generada por la Submersion  $f$ .

Por ser  $f$  una submersion entonces  $f^{-1}(z)$  es una subvariedad de codimensión 1, en  $U$ . Esta subvariedad (no necesariamente conexa) esta localmente dispuesta del mismo modo que la fibra horizontal  $\pi_2^{-1}(z) = V \times \{z\}$ ,  $z \in I$  (Ver Figura 2.4), entonces  $f^{-1}(z) \cap W = \varphi(V \times \{z\})$ , siendo las componentes conexas de  $f^{-1}(z) \cap W$  las placas de esta foliación inducida por  $f$ . Obtenemos así una foliación regular de codimensión 1 cuyas hojas son las componentes conexas de la subvariedad  $f^{-1}(z) \cap W$ . A esta foliación la denotamos por  $\mathcal{F}_f$

y se lee foliación generada por la submersión  $f$ .

**Ejemplo 2.4.** (Foliaciones Holomorfas). Una variedad (real)  $M^{2m}$  es una variedad compleja ( $m$  – dimensional), si  $M$  como variedad real admite un atlas diferenciable  $\{\varphi_j : U_i \subset M^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}\}_{j \in J}$  tal que los correspondientes cambios de coordenadas

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m$$

son aplicaciones holomorfas. Tal atlas es llamado holomorfo.

Gracias a este homeomorfismo natural ( $\mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m$ ) todos los conceptos básicos de variedades diferenciales, tales como: espacio tangente, fibrado tangente, curvas, etc son trasladados de manera natural a variedades complejas. Este es el caso del concepto de Foliación.

**Definición 2.0.5.** Una Foliación Holomorfa  $\mathcal{F}$  de dimensión (compleja)  $k$  en una variedad compleja  $M$  es dada por un atlas holomorfo  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  que goza de las siguientes propiedades:

- i)  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ .
- ii)  $\varphi_i(U_i) = P_i \times Q_i$ , donde  $P_i$  y  $Q_i$  son polidiscos abiertos de  $\mathbb{C}^k$  y de  $\mathbb{C}^{m-k}$  respectivamente.
- iii) Si  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces la aplicación cambio de coordenada  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_{ij}) \subset \mathbb{C}^m \longrightarrow \varphi_j(U_{ij}) \subset \mathbb{C}^m$  es un biholomorfismo y tiene la forma

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(z, w) = (A_{ij}(z, w), B_{ij}(w)).$$

Cada carta  $(U_i, \varphi_i)$  es llamada carta distinguida de la foliación  $\mathcal{F}$  y los conjuntos de la forma  $\varphi_i^{-1}(P_i \times \{q\})$  son llamados placas de la foliación  $\mathcal{F}$  en  $U_i$ .

Ejemplos de tales foliaciones son dados como en el caso real por campos vectoriales holomorfos, 1-formas diferenciales holomorfas, submersiones holomorfas, etc.

**Ejemplo 2.5.** (Foliaciones generadas por campos vectoriales holomorfos singulares). Análogamente al Ejemplo 2.1, las ecuaciones diferenciales complejas de la forma

$$\frac{dz}{dT} = Z(z) \tag{2.4}$$

con  $T \in \mathbb{C}$ , definen campos de vectores holomorfos,  $Z : U \subset \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$  que poseen como solución curvas integrales complejas.

Sea  $S = \{z \in U / Z(z) = 0\}$  el conjunto singular de  $Z$ . Entonces  $Z$  genera una foliación regular holomorfa denotada por  $\mathcal{F}_Z$  de dimensión (compleja) 1 en el abierto  $W = U - S$ . Las hojas de  $\mathcal{F}_Z$  son las curvas integrales (complejas) de  $Z$  en  $W$ . En este caso las hojas son superficies de Riemann inmersas en  $\mathbb{C}^2$ .

La estructura de foliación se debe como en el caso real al Teorema del Flujo Tubular para Campos Holomorfos.

**Ejemplo 2.6.** (Pull-back o imagen inversa de una foliación). Sean  $M$  y  $N$  variedades complejas,  $f : M \rightarrow N$  una aplicación holomorfa y  $\mathcal{F}$  una foliación en  $N$  de codimensión  $k$ . Vamos a ver como a través de  $f$  traemos la foliación  $\mathcal{F}$  de  $N$  a  $M$ . Para ello necesitamos de la siguiente definición de transversalidad.

**Definición 2.0.6.** Decimos que  $f$  es transversal a  $\mathcal{F}$ , cuando  $f$  es transversal a todas las hojas de  $\mathcal{F}$ , osea si se cumple la condición de transversalidad para todo  $p \in M$ :

$$T_q N = T_q \mathcal{F} + Df_p(T_p M) \quad (2.5)$$

siendo  $q = f(p)$ .

Se entiende aquí que  $T_q \mathcal{F} = T_q L$ , donde  $L =$  hoja de la foliación  $\mathcal{F}$  pasando por  $q$ .

Si  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación transversal a una foliación  $\mathcal{F}$  en  $N$  entonces las componentes conexas de las imágenes inversas por  $f$ ,  $f^{-1}(L)$ , con  $L \in \mathcal{F}$ , determinan una foliación en  $M$ , denotada por  $f^*(\mathcal{F})$ , de la misma codimensión de  $\mathcal{F}$ . La foliación  $f^*(\mathcal{F})$  es llamada el pull-back o imagen inversa de  $\mathcal{F}$  por  $f$ .

La estructura de foliación en  $M$  se debe a la siguiente definición, análoga a la Definición 2.0.4 dada para el caso de variedades diferenciables.

**Definición 2.0.7.** Sea  $M^m$  una variedad holomorfa,  $\mathcal{F}$  una foliación de dimensión  $k$  en  $M$ , definida por una cobertura abierta  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  y por colecciones  $\{y_i\}_{i \in I}$  y  $\{g_{ij}\}_{U_i \cap U_j \neq \emptyset}$  satisfaciendo:

- i) Para todo  $i \in I$ ,  $y_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^{m-k}$  es una submersión.
- ii) Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces  $y_i = g_{ij} \circ y_j$  donde

$$g_{ij} : y_j(U_i \cap U_j) \rightarrow y_i(U_i \cap U_j)$$

es un biholomorfismo.



En este caso las placas de  $\mathcal{F}$  en  $U_i$  son los conjuntos de la forma  $y_i^{-1}(q)$ ,  $q \in \mathbb{C}^{m-k}$ . La foliación  $f^*(\mathcal{F})$  en  $M$  es construida utilizando esta definición. En efecto, consideremos una cobertura abierta  $\{V_i\}$  de  $N$ , y colecciones  $\{x_i\}_{i \in I}$  y  $\{g_{ij}\}_{V_i \cap V_j \neq \emptyset}$  satisfaciendo i) y ii) de la definición arriba. Dado  $i \in I$ , sea  $U_i = f^{-1}(V_i) \subset M$  y  $y_i = x_i \circ f : U_i \rightarrow \mathbb{C}^{m-k}$ . Obtenemos de esta forma una cobertura abierta  $U_i$  de  $M$ , y una colección de aplicaciones holomorfas  $\{y_i\}$ .

Si  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  entonces  $x_i = g_{ij} \circ x_j$  (por (ii)). Luego,  $U_i \cap U_j = f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j) = f^{-1}(V_i \cap V_j) \neq \emptyset$  y  $y_i = x_i \circ f = (g_{ij} \circ x_j) \circ f = g_{ij} \circ (x_j \circ f) = g_{ij} \circ y_j$ . Así, para verificar que  $f^*(\mathcal{F})$  es una foliación sólo falta probar que  $y_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^{m-k}$  es una submersión, para todo  $i \in I$ .

Sea  $U_i \subset M$  y  $f(p) = q$ . Entonces por ser  $f$  transversal a  $\mathcal{F}$  en  $N$  se tiene que se cumple la condición de transversalidad (2.5). Además, puesto que,  $x_i : V_i \subset N \rightarrow \mathbb{C}^{m-k}$  es submersión se tiene que  $(Dx_i)_q(T_qN) = \mathbb{C}^{m-k}$ .

Aplicando  $(Dx_i)_q : T_qN \rightarrow \mathbb{C}^{m-k}$  a ambos miembros de (2.5) tenemos

$$\mathbb{C}^{m-k} = (Dx_i)_q(T_qN) = (Dx_i)_q(T_q\mathcal{F}) + (Dx_i)_q(Df_p(T_pM)). \quad (2.6)$$

Por la Regla de la Cadena  $(Dx_i)_q(Df_p(T_pM)) = D(x_i \circ f)_p(T_pM)$ . Reemplazando en (2.6) obtenemos

$$\mathbb{C}^{m-k} = (Dx_i)_q(T_q\mathcal{F}) + D(x_i \circ f)_p(T_pM). \quad (2.7)$$

Por otro lado, por ser  $x_i$  una submersión,  $x_i^{-1}(c) = L$  es una hoja de  $\mathcal{F}$  en  $V_i$ ,  $c \in \mathbb{C}^{m-k}$ . Además, dado que,  $x_i$  es constante para todo  $q$  en  $L$ , se tiene que,  $(Dx_i)_q = 0$  en  $T_qL = T_q\mathcal{F}$ . Así,  $(Dx_i)_q(T_q\mathcal{F}) = \{0\}$ . Reemplazando esto último en (2.7) tenemos que

$$D(x_i \circ f)_p(T_pM) = \mathbb{C}^{m-k}. \quad (2.8)$$

Osea,  $x_i \circ f = y_i$  es una submersión.

**Ejemplo 2.7.** (Una foliación sobre la Banda de Möbius). La Banda de Möbius  $M_o$  es una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ , construida del siguiente modo (Ver Figura 2.5): Consideremos el círculo  $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$  en el plano  $XY$ , y el segmento de recta  $\overline{AB} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0, y = 2, -1 \leq z \leq 1\}$  en el plano  $YZ$ ; deslizemos el punto medio  $c = (0, 2, 0)$  de  $\overline{AB}$  a lo largo de  $S^1$  a través de un ángulo  $u$ ,  $0 < u < 2\pi$ . Mientras  $c$  se desliza sobre  $S^1$  a través de un ángulo  $u$ , rotamos el segmento  $\overline{AB}$  un ángulo  $\frac{u}{2}$ . Cuando  $c$  completa una vuelta alrededor de  $S^1$ ,  $\overline{AB}$  retorna a su posición inicial pero con sus extremos invertidos.

A partir de esta construcción, podemos ver que un sistema de coordenadas  $x_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_o$  para la Banda de Möbius viene dado por:



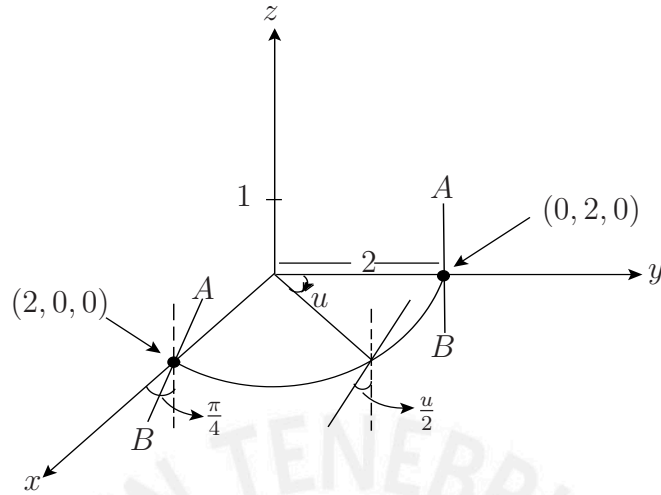


Figura 2.5: Construcción de la Banda de Möbius.

$$x_1(u, v) = ((2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2}),$$

donde  $0 < u < 2\pi$  y  $-1 < v < 1$ .

En este sistema de coordenadas,  $u$  es medido en sentido horario desde el eje  $Y$  positivo, cubriendo con este sistema casi todo  $M_o$  excepto el segmento de recta  $\overline{AB}|_{u=0} = \{(0, 2, v) \in \mathbb{R}^3 / -1 < v < 1\}$ . Entonces tomando el origen del ángulo  $u$  en el eje  $X$  positivo, obtenemos otro sistema de coordenadas  $x_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_o$ , para la Banda de Möbius,

$$x_2(\bar{u}, \bar{v}) = ((2 - \bar{v} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2})) \cos \bar{u}, -(2 - \bar{v} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2})) \sin \bar{u}, \bar{v} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2})),$$

donde  $0 < \bar{u} < 2\pi$  y  $-1 < \bar{v} < 1$ . Con este sistema de coordenadas cubrimos casi todo  $M_o$  excepto el segmento de recta  $\overline{AB}|_{u=\frac{\pi}{2}} = \{(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in \mathbb{R}^3 / -1 < v < 1\}$  contenido en el plano  $XZ$ . Así, con el par  $\{(x_1, M_o - \overline{AB}|_{u=0}), (x_2, M_o - \overline{AB}|_{u=\frac{\pi}{2}})\}$  cubrimos toda la Banda de Möbius  $M_o$ , haciendo de este conjunto una superficie regular.

Denotemos por  $U_1 = M_o - \overline{AB}|_{u=0}$  y  $U_2 = M_o - \overline{AB}|_{u=\frac{\pi}{2}}$  los abiertos coordenados que cubren la Banda de Möbius  $M_o$ . Observamos que  $U_1 \cap U_2 = W_1 \cup W_2 \neq \emptyset$  donde

$$W_1 = \left\{ x_1(u, v) / \frac{\pi}{2} < u < 2\pi, -1 < v < 1 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ x_1(u, v) / 0 < u < \frac{\pi}{2}, -1 < v < 1 \right\}.$$

El cambio de coordenada está dado por:

$$\begin{cases} \bar{u} = u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{cases} \quad \text{en } W_1$$

y

$$\begin{cases} \bar{u} = u + \frac{3\pi}{2} \\ \bar{v} = -v \end{cases} \quad \text{en } W_2.$$

Dado que las composiciones

$$y_i = \pi_2 \circ x_i^{-1} : U_i \longrightarrow ]-1, 1[ \subset \mathbb{R},$$

para  $i = 1, 2$ , son submersiones y además  $y_1 = g_{12} \circ y_2$  es un difeomorfismo, donde

$$g_{12} : \begin{array}{ccc} y_2(W_1 \cup W_2) & \longrightarrow & y_1(W_1 \cup W_2) \\ \bar{v} & \longrightarrow & g_{12}(\bar{v}) \end{array} = \begin{cases} v & \text{en } W_1 \\ -v & \text{en } W_2, \end{cases}$$

se tiene por la Definición 2.0.4 que el par  $\{(U_1, y_1), (U_2, y_2)\}$ , define una foliación de dimensión 1 sobre  $M_o$ , cuyas placas en  $U_i$  son las componentes conexas de los conjuntos  $y_i^{-1}(v)$ , con  $v \in ]-1, 1[$ .

Sea  $v_0 \in ]-1, 1[$  fijo, se tiene que

$$y_i^{-1}(v_0) = x_i(u, v_0), \quad 0 < u < 2\pi$$

es una curva (llamada curva coordenada) contenida en  $U_i$ . Esta curva  $u \longrightarrow x_i(u, v_0)$  es una placa de la foliación en  $U_i$ . Por ejemplo, si tomamos el primer sistema de coordenadas  $x_1$  y fijamos  $v_0 = 0$ , obtenemos la curva coordenada  $v_0 = 0$  definida por

$$x_1(u, 0) = (2 \sin u, 2 \cos u, 0), \quad 0 < u < 2\pi,$$

que viene hacer la parametrización de la curva  $S^1 - \{(0, 2, 0)\}$  contenida en  $U_1$ . Esta curva es una placa de la foliación definida sobre  $M_o$  en  $U_1$ .

Del mismo modo, si consideramos el otro sistema de coordenadas  $x_2$  y fijamos  $\bar{v}_0 = 0$ , obtenemos la curva coordenada  $\bar{v}_0 = 0$  definida por

$$x_2(\bar{u}, 0) = (2 \cos \bar{u}, -2 \sin \bar{u}, 0), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi,$$

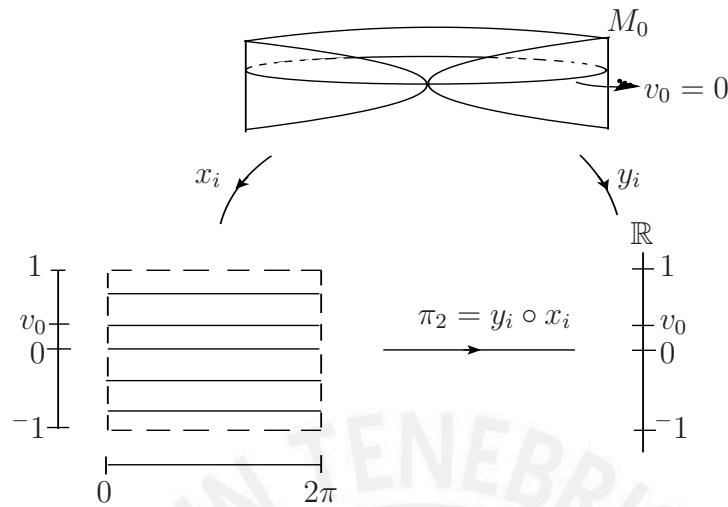


Figura 2.6: Foliación sobre la Banda De Möbius.

que viene hacer la parametrización de la curva  $S^1 - \{(2, 0, 0)\}$  contenida en  $U_2$ . Siendo esta curva una placa de la foliación definida sobre  $M_o$  en  $U_2$ . La unión de estas dos placas  $P_1 = S^1 - \{(0, 2, 0)\} \subset U_1$  y  $P_2 = S^1 - \{(2, 0, 0)\} \subset U_2$  nos dá el círculo  $S^1$ , que viene a ser una hoja de la foliación definida sobre  $M_o$ . (Ver Figura 2.6)

De este modo en la Banda de Möbius tenemos definida una foliación por curvas (curvas homeomorfas a círculos) donde  $S^1$  es una hoja de esta foliación.

## 2.1. Proceso de Explosión o Blow-up

Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n$  y  $p \in M$ . El Blow-up (Explosión) de  $M$  en  $p$ , es la variedad compleja  $\widetilde{M}$  que se obtiene sustituyendo el punto  $p$  por el espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n - 1)$ , dejando los otros puntos de  $M$  invariantes en un sentido biholomorfo.

### 2.1.1. El Blow-up centrado en $0 \in \mathbb{C}^2$

**Definición 2.1.1.** Sea  $0 \in \mathbb{C}^2$ . El Blow-up (explosión) de  $\mathbb{C}^2$  en  $0$  es el par  $(\widetilde{\mathbb{C}^2}, \pi)$ , donde  $\widetilde{\mathbb{C}^2}$  es una variedad compleja holomorfa de dimensión 2 definida por:

$$\widetilde{\mathbb{C}^2} = \left\{ ((z, w), [z : w]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}\mathbb{P}(1) / (z, w) \neq (0, 0) \right\} \cup \left( \{(0, 0)\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}(1) \right)$$

y  $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$  una aplicación holomorfa (la aplicación proyección)

$$\begin{cases} \pi((z, w), [z : w]) = (z, w), & \text{si } (z, w) \neq (0, 0) \\ \pi((0, 0), [z : w]) = (0, 0), & \text{si } (z, w) = (0, 0). \end{cases}$$

$\tilde{\mathbb{C}}^2$  así definido es una variedad compleja holomorfa de dimensión 2. En efecto, sean  $(V_1, \varphi_1), (V_2, \varphi_2)$  las cartas locales de  $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$  donde

$$V_1 = \{[z : w] \in \mathbb{C}\mathbb{P}(1) / z \neq 0\} \quad \text{y} \quad V_2 = \{[z : w] \in \mathbb{C}\mathbb{P}(1) / w \neq 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : \mathbb{C} & \longrightarrow & V_1 \\ T & \longrightarrow & \varphi_1(T) = [1 : T] \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \varphi_2 : \mathbb{C} & \longrightarrow & V_2 \\ S & \longrightarrow & \varphi_2(S) = [S : 1] \end{array}$$

Consideremos los siguientes subconjuntos de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= \left\{ ((z, w), [z : w]) \in \mathbb{C}^2 \times V_1 / \frac{w}{z} = \varphi_1^{-1}([z : w]) \right\} \cup \left( \{(0, 0)\} \times V_1 \right) \\ &= \left\{ ((z, zT), [1 : T]) \in \mathbb{C}^2 \times V_1 / T = \varphi_1^{-1}([1 : T]) \right\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 &= \left\{ ((z, w), [z : w]) \in \mathbb{C}^2 \times V_2 / \frac{z}{w} = \varphi_2^{-1}([z : w]) \right\} \cup \left( \{(0, 0)\} \times V_2 \right) \\ &= \left\{ ((Sw, w), [S : 1]) \in \mathbb{C}^2 \times V_2 / S = \varphi_2^{-1}([S : 1]) \right\} \end{aligned}$$

y las funciones

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}_1 : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \tilde{V}_1 \\ (z, T) & \longrightarrow & \tilde{\varphi}_1(z, T) = \begin{cases} ((z, zT), [1 : T]), & z \neq 0 \\ ((0, 0), [1 : T]), & z = 0 \end{cases} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi}_2 : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \tilde{V}_2 \\ (S, w) & \longrightarrow & \tilde{\varphi}_2(S, w) = \begin{cases} ((Sw, w), [S : 1]), & w \neq 0 \\ ((0, 0), [S : 1]), & w = 0. \end{cases} \end{array}$$

Observamos que,

1.  $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2$ , esto es cierto desde que  $\mathbb{C}\mathbb{P}(1) = V_1 \cup V_2$ . Llamamos a  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$  las vecindades coordinadas de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ .

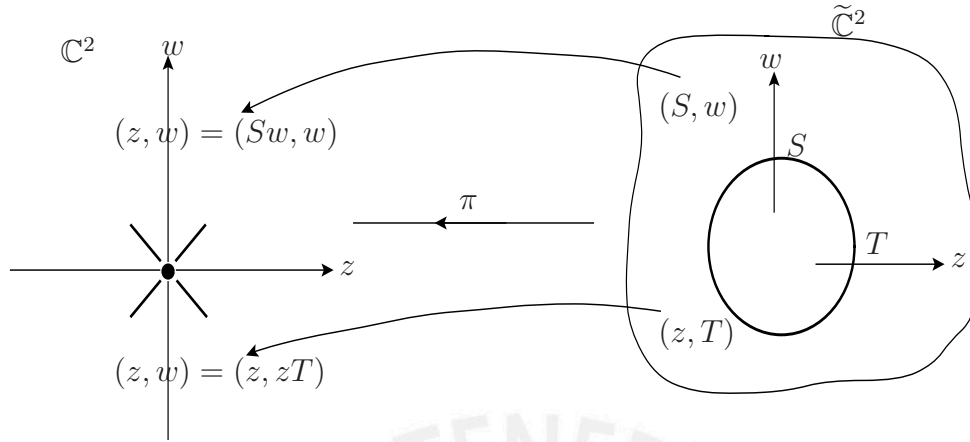


Figura 2.7: El Blow-up en  $0 \in \mathbb{C}^2$ .

2.  $\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2 = (\mathbb{C}^2 \times (V_1 \cap V_2)) \cup (\{(0, 0)\} \times (V_1 \cap V_2)) \neq \emptyset$ , pues,  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ .  
Además,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2) &= \{(z, T) \in \mathbb{C}^2 / \tilde{\varphi}_1(z, T) \in \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2\} \\ &= \{(z, T) \in \mathbb{C}^2 / ((z, zT), [1 : T]) \in \mathbb{C}^2 \times (V_1 \cap V_2)\} \\ &= \{(z, T) \in \mathbb{C}^2 / T \neq 0\} \\ &= \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \text{ abierto de } \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2^{-1}(\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2) &= \{(S, w) \in \mathbb{C}^2 / \tilde{\varphi}_2(S, w) \in \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2\} \\ &= \{(S, w) \in \mathbb{C}^2 / ((Sw, w), [S : 1]) \in \mathbb{C}^2 \times (V_1 \cap V_2)\} \\ &= \{(S, w) \in \mathbb{C}^2 / S \neq 0\} \\ &= \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \text{ abierto de } \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

3. Las aplicaciones Cambio de Coordenadas están dadas por:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} & \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2^{-1}} & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (z, T) & \longrightarrow & ((z, zT), [1 : T]) & = & ((z, zT), [\frac{1}{T} : 1]) & \longrightarrow & (\frac{1}{T}, zT) \end{array}$$

$$(\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1)(z, T) = (\frac{1}{T}, zT) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} & \tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1^{-1}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ (S, w) & \longrightarrow & ((Sw, w), [S : 1]) & = & ((Sw, w), [1 : \frac{1}{S}]) & \longrightarrow & (Sw, \frac{1}{S}) \end{array}$$

$$(\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2)(S, w) = (Sw, \frac{1}{S}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$$

Puesto que  $T \neq 0$  y  $S \neq 0$  se tiene que  $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$  y  $\tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2$  son holomorfas. Así, el par  $\{(\tilde{V}_1, \tilde{\varphi}_1), (\tilde{V}_2, \tilde{\varphi}_2)\}$  forma un atlas holomorfo de dimensión 2 sobre  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ , y por tanto,  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  es una variedad compleja holomorfa de dimensión 2, llamado el blow-up (explosión) en 0 de  $\mathbb{C}^2$ .

Por otro lado, observamos que,  $\pi^{-1}(0, 0) = \mathbb{C}P(1)$ . Llamaremos al conjunto  $D = \pi^{-1}(0, 0)$  el divisor de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ .

**Observación 2.2.** .

a)  $\tilde{\mathbb{C}}^2 = (\tilde{\mathbb{C}}^2, D, E, \mathbb{C})$  es un  $\mathbb{C}$ -fibrado vectorial de rango 1 sobre  $D$ . En efecto, sea  $E : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow D$  la aplicación proyección definida por:

$$\begin{cases} E((z, w), [z : w]) = [z : w], & \text{si } (z, w) \neq (0, 0) \\ E((0, 0), [z : w]) = [z : w], & \text{si } (z, w) = (0, 0) \end{cases}$$

y  $p = [a : b] \in D$ . Supongamos que  $a \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} E^{-1}(p) &= \left\{ ((z, w), [z : w]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2 / E((z, w), [z : w]) = [a : b] \right\} \\ &= \left\{ ((z, w), [z : w]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2 / [z : w] = [a : b] \right\} \\ &= \left\{ ((z, w), [a : b]) \in \mathbb{C}^2 \times \{[a : b]\} / bz = aw \right\} \\ &= \left\{ ((z, w), [a : b]) \in \mathbb{C}^2 \times \{[a : b]\} / w = \frac{b}{a}z \right\} \\ &= \left\{ (z, \frac{b}{a}z) / z \in \mathbb{C} \right\} \times \{[a : b]\} \\ &\simeq \left\{ (z, \frac{b}{a}z) / z \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Como  $\{(z, \frac{b}{a}z) / z \in \mathbb{C}\}$  es isomorfo a  $\mathbb{C}$  se tiene que  $E^{-1}(p) \simeq \mathbb{C}$ .

Si suponemos que  $b \neq 0$  la demostración es análoga. De este modo, podemos decir que, para todo  $p \in D$ ,  $E^{-1}(p)$  tiene la estructura de un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión 1.

Por otro lado, definamos las biyecciones

$$F_1 : \begin{array}{ccc} E^{-1}(V_1) & \longrightarrow & V_1 \times \mathbb{C} \\ ((z, zT), [1 : T]) & \longrightarrow & F_1((z, zT), [1 : T]) = ([1 : T], z) \end{array}$$

y

$$F_2 : \begin{array}{ccc} E^{-1}(V_2) & \longrightarrow & V_2 \times \mathbb{C} \\ ((Sw, w), [S : 1]) & \longrightarrow & F_2((Sw, w), [S : 1]) = ([S : 1], w). \end{array}$$

Claramente observamos que, para  $j = 1, 2$  y  $p \in V_j \subset D$ , la restricción

$$F_j|_{E^{-1}(p)} : E^{-1}(p) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{C}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, el diagrama siguiente conmuta.



$$\begin{array}{ccc}
 E^{-1}(V_j) \subset \tilde{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{F_j} & V_j \times \mathbb{C} \\
 \searrow E & & \swarrow \pi_1 \\
 & & V_j
 \end{array}$$

Esto es,  $\pi_1 \circ F_j = E$ , donde  $\pi_1$  es la proyección sobre la primera componente. Sea  $V_{12} = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , entonces

$$F_2 \circ F_1^{-1} : V_{12} \times \mathbb{C} \xrightarrow{F_1^{-1}} E^{-1}(V_{12}) \xrightarrow{F_2} V_{12} \times \mathbb{C}$$

$$([1 : T], z) \longrightarrow ((z, zT), [1 : T]) \longrightarrow ([1 : T], zT)$$

$$F_2 \circ F_1^{-1}([1 : T], z) = ([1 : T], zT)$$

y

$$F_1 \circ F_2^{-1} : V_{12} \times \mathbb{C} \xrightarrow{F_2^{-1}} E^{-1}(V_{12}) \xrightarrow{F_1} V_{12} \times \mathbb{C}$$

$$([S : 1], w) \longrightarrow ((Sw, w), [S : 1]) \longrightarrow ([S : 1], Sw)$$

$$F_1 \circ F_2^{-1}([S : 1], w) = ([S : 1], Sw).$$

$F_2 \circ F_1^{-1}$  y  $F_1 \circ F_2^{-1}$  son homeomorfismos, llamados trivializaciones y los abiertos  $V_1 \times \mathbb{C}$  y  $V_2 \times \mathbb{C}$  son llamados abiertos trivializadores.

- b) La restricción  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  es un biholomorfismo. En efecto, sean  $z_1 = ((z, w), [a_1 : b_1])$ ,  $z_2 = ((z, w), [a_2 : b_2]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D$ , tales que

$$\pi((z, w), [a_1 : b_1]) = \pi((z, w), [a_2 : b_2]).$$

Como  $z_1$  y  $z_2$  pertenecen a  $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D$ , tenemos que  $b_1 z = a_1 w$  y  $b_2 z = a_2 w$  con  $z \neq 0$  o  $w \neq 0$ . Si  $z \neq 0$  entonces  $a_i \neq 0$  para todo  $i = 1, 2$ . Pues sino es así, es decir, si  $a_i = 0$  con  $z \neq 0$  entonces  $b_i = 0$ , lo cual es absurdo, pues  $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
 [a_i : b_i] &= z[a_i : b_i], & z \neq 0 \\
 &= [za_i : zb_i] \\
 &= [za_i : wa_i] \\
 &= a_i[z : w], & a_i \neq 0 \\
 &= [z : w]
 \end{aligned}$$

para todo  $i = 1, 2$ . Luego,  $[a_1 : b_1] = [a_2 : b_2]$ , así,  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}$  es inyectiva.

Por otro lado,  $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , la aplicación proyección

$$\begin{cases} \pi((z, w), [z : w]) = (z, w), & \text{si } (z, w) \neq (0, 0) \\ \pi((0, 0), [z : w]) = (0, 0), & \text{si } (z, w) = (0, 0). \end{cases}$$

es sobreyectiva, y puesto que,  $\pi^{-1}(0, 0) = D$  se tiene que  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  es sobreyectiva. Por lo tanto,  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}$  es biyectiva. Además,

$$\begin{array}{ccccc} \pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_1 : \mathbb{C}^2 \setminus \{z = 0\} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} & \tilde{V}_1 \setminus D & \xrightarrow{\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}} & \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (z, T) & \longrightarrow & ((z, zT), [1 : T]) & \longrightarrow & (z, zT) \end{array}$$

es holomorfa. Análogamente,  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_2 : \mathbb{C}^2 \setminus \{w = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $(S, w) \rightarrow (Sw, w)$  es holomorfa.

Definimos la inversa de  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_1$  y  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_2$  por:

$$\begin{array}{ccc} (\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_1)^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \setminus \{z = 0\} \\ (z, w) & \longrightarrow & (z, \frac{w}{z}), \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} (\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_2)^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \setminus \{w = 0\} \\ (z, w) & \longrightarrow & (\frac{z}{w}, w). \end{array}$$

Evidentemente  $(\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_1)^{-1}$  y  $(\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}_2)^{-1}$  son holomorfas. Asimismo,  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}$  es un biholomorfismo.

Puesto que  $\mathbb{R}^2$  está contenido en  $\mathbb{C}^2$  naturalmente, al hacer la explosión de  $\mathbb{C}^2$  en  $0 \in \mathbb{C}^2$ , se está haciendo simultáneamente una explosión en  $0 \in \mathbb{R}^2$ , y al igual que el caso anterior se obtiene una nueva variedad, la cual denotaremos por  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  y probaremos en la siguiente sección que es homeomorfa a la Banda de Möbius. Así tenemos que dentro de la variedad compleja  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  está la variedad diferenciable (real)  $\tilde{\mathbb{R}}^2$ .

### 2.1.2. El Blow-up centrado en $0 \in \mathbb{R}^2$

**Definición 2.1.2.** *El Blow-up (Explosión) de  $\mathbb{R}^2$  en  $0 \in \mathbb{R}^2$ , es una variedad diferenciable de dimensión 2, definida por:*

$$\tilde{\mathbb{R}}^2 = \left\{ ((x, y), [x : y]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}(1) / (x, y) \neq (0, 0) \right\} \cup \left( \left\{ (0, 0) \right\} \times \mathbb{RP}(1) \right),$$

y una aplicación diferenciable  $\pi : \tilde{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  (la aplicación proyección)

$$\begin{cases} \pi((x, y), [x : y]) = (x, y), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \pi((0, 0), [x : y]) = (0, 0), & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La variedad  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  junto con la proyección  $\pi$  es llamado el blow-up (explosión) de  $\mathbb{R}^2$  en el punto 0.

Veamos que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  así definida es una variedad diferenciable de dimensión 2. En efecto, sean  $(U_1, \phi_1)$ ,  $(U_2, \phi_2)$  las cartas locales de  $\mathbb{RP}(1)$ , donde,

$$U_1 = \{[x : y] \in \mathbb{RP}(1) / x \neq 0\} \text{ y } U_2 = \{[x : y] \in \mathbb{RP}(1) / y \neq 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \phi_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & U_1 \\ t & \longrightarrow & \phi_1(t) = [1 : t] \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \phi_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & U_2 \\ s & \longrightarrow & \phi_2(s) = [s : 1] \end{array}$$

Definamos los siguientes subconjuntos de  $\tilde{\mathbb{R}}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \left\{ ((x, y), [x : y]) \in \mathbb{R}^2 \times U_1 / \frac{y}{x} = \phi_1^{-1}([x : y]) \right\} \cup \left( \{(0, 0)\} \times U_1 \right) \\ &= \left\{ ((x, xt), [1 : t]) \in \mathbb{R}^2 \times U_1 / t = \phi_1^{-1}([1 : t]) \right\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2 &= \left\{ ((x, y), [x : y]) \in \mathbb{R}^2 \times U_2 / \frac{x}{y} = \phi_2^{-1}([x : y]) \right\} \cup \left( \{(0, 0)\} \times U_2 \right) \\ &= \left\{ ((sy, y), [s : 1]) \in \mathbb{R}^2 \times U_2 / s = \phi_2^{-1}([s : 1]) \right\} \end{aligned}$$

y las funciones

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\phi}_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \tilde{U}_1 \\ (x, t) & \longrightarrow & \tilde{\phi}_1(x, t) = \begin{cases} ((x, xt), [1 : t]), & x \neq 0 \\ ((0, 0), [1 : t]), & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\phi}_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \tilde{U}_2 \\ (s, y) & \longrightarrow & \tilde{\phi}_2(s, y) = \begin{cases} ((sy, y), [s : 1]), & y \neq 0 \\ ((0, 0), [s : 1]), & y = 0. \end{cases} \end{array}$$

El par  $\{(\tilde{U}_1, \tilde{\phi}_1), (\tilde{U}_2, \tilde{\phi}_2)\}$  forma un atlas diferenciable de dimensión 2 sobre  $\tilde{\mathbb{R}}^2$ . En efecto, observamos que:

1.  $\tilde{\mathbb{R}}^2 = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$ , esto es cierto desde que  $\mathbb{RP}(1) = U_1 \cup U_2$ . Llamamos a  $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$  las vecindades coordenadas de  $\tilde{\mathbb{R}}^2$ .

2.  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = (\mathbb{R}^2 \times (U_1 \cap U_2)) \cup (\{(0, 0)\} \times (U_1 \cap U_2)) \neq \emptyset$ , pues,  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .  
Además,

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1^{-1}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / \tilde{\phi}_1(x, t) \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2\} \\ &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / ((x, xt), [1 : t]) \in \mathbb{R}^2 \times (U_1 \cap U_2)\} \\ &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 / t \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \text{ abierto de } \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2^{-1}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) &= \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 / \tilde{\phi}_2(s, y) \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2\} \\ &= \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 / ((sy, y), [s : 1]) \in \mathbb{R}^2 \times (U_1 \cap U_2)\} \\ &= \{(s, y) \in \mathbb{R}^2 / s \neq 0\} \\ &= \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \text{ abierto de } \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

3. Las aplicaciones Cambio de Coordenadas están dadas por:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* & \xrightarrow{\tilde{\phi}_1} & \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 & \xrightarrow{\tilde{\phi}_2^{-1}} & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ (x, t) & \longrightarrow & ((x, xt), [1 : t]) & = & ((x, xt), [\frac{1}{t} : 1]) & \longrightarrow & (\frac{1}{t}, xt) \end{array}$$

$$(\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1)(x, t) = (\frac{1}{t}, xt) = (s, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_2} & \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 & \xrightarrow{\tilde{\phi}_1^{-1}} & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ (s, y) & \longrightarrow & ((sy, y), [s : 1]) & = & ((sy, y), [1 : \frac{1}{s}]) & \longrightarrow & (sy, \frac{1}{s}) \end{array}$$

$$(\tilde{\phi}_1^{-1} \circ \tilde{\phi}_2)(s, y) = (sy, \frac{1}{s}) = (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

Puesto que  $t \neq 0$  y  $s \neq 0$  se tiene que  $\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1$  y  $\tilde{\phi}_1^{-1} \circ \tilde{\phi}_2$  son diferenciables. Así,  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  es una variedad diferenciable de dimensión 2, llamado el blow-up (explosión) en 0 de  $\mathbb{R}^2$ .

### Observación 2.3. .

- a)  $\pi^{-1}(0, 0) = \mathbb{RP}(1)$  con  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \pi^{-1}\{(0, 0)\} &= \left\{ ((x, y), [x : y]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}(1) / \pi((x, y), [x : y]) = (0, 0) \right\} \\ &= \left\{ ((x, y), [x : y]) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}(1) / (x, y) = (0, 0) \right\} \\ &= \{(0, 0)\} \times \mathbb{RP}(1). \end{aligned}$$

b)  $\tilde{\mathbb{R}}^2 = (\tilde{\mathbb{R}}^2, \mathbb{RP}(1), P, \mathbb{R})$  es un  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial de rango 1 (lineal) sobre  $\mathbb{RP}(1)$ . En efecto, sea  $P : \tilde{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{RP}(1)$  la aplicación proyección, definida por:

$$\begin{cases} P((x, y), [x : y]) = [x : y], & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ P((0, 0), [x : y]) = [x : y], & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ya  $q = [a : b] \in \mathbb{RP}(1)$  con  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ .  
Supongamos que  $a \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} P^{-1}(q) &= \left\{ ((x, y), [x : y]) \in \tilde{\mathbb{R}}^2 / P((x, y), [x : y]) = [a : b] \right\} \\ &= \left\{ ((x, y), [x : y]) \in \tilde{\mathbb{R}}^2 / [x : y] = [a : b] \right\} \\ &= \left\{ ((x, y), [a : b]) \in \mathbb{R}^2 \times \{[a : b]\} / bx = ay \right\} \\ &= \left\{ ((x, y), [a : b]) \in \mathbb{R}^2 \times \{[a : b]\} / y = \frac{b}{a}x \right\} \\ &= \left\{ (x, \frac{b}{a}x) / x \in \mathbb{R} \right\} \times \{[a : b]\} \\ &\simeq \left\{ (x, \frac{b}{a}x) / x \in \mathbb{R} \right\} \times \{[a : b]\} \end{aligned}$$

Ya que  $\mathcal{L} = \{(x, \frac{b}{a}x) / x \in \mathbb{R}\}$ , la recta real pasando por  $0 \in \mathbb{R}^2$  con pendiente  $\frac{b}{a}$ , es isomorfo a  $\mathbb{R}$ , se tiene que,  $P^{-1}(q) \simeq \mathbb{R}$ . Si  $a = 0$  entonces  $b \neq 0$  y la demostración es análoga.

Así, para todo  $q \in \mathbb{RP}(1)$ ,  $P^{-1}(q)$  tiene la estructura de un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 1.

Definamos las funciones

$$\begin{aligned} f_1 : P^{-1}(U_1) &\longrightarrow U_1 \times \mathbb{R} \\ ((x, xt), [1 : t]) &\longrightarrow f_1((x, xt), [1 : t]) = ([1 : t], x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_2 : P^{-1}(U_2) &\longrightarrow U_2 \times \mathbb{R} \\ ((sy, y), [s : 1]) &\longrightarrow f_2((sy, y), [s : 1]) = ([s : 1], w). \end{aligned}$$

Para todo  $q \in U_j \subset \mathbb{RP}(1)$ ,  $P^{-1}(q)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 1, entonces la restricción  $f_j|_{P^{-1}(q)} : P^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}$ , para  $j = 1, 2$ , es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Definamos la inversa de  $f_1$  y  $f_2$  por:

$$\begin{aligned} f_1^{-1} : U_1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow P^{-1}(U_1) \\ ([a : b], x) &\longrightarrow f_1^{-1}([a : b], x) = ((x, \frac{b}{a}x), [a : b]) \end{aligned}$$

$y$

$$\begin{aligned} f_2^{-1} : U_2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow P^{-1}(U_2) \\ ([a : b], y) &\longrightarrow f_2^{-1}([a : b], y) = \left(\left(\frac{a}{b}y, y\right), [a : b]\right) \end{aligned}$$

así,  $f_1$  y  $f_2$  son biyecciones. Además, para  $j = 1, 2$  el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(U_j) \subset \tilde{\mathbb{R}}^2 & \xrightarrow{f_j} & U_j \times \mathbb{R} \\ & \searrow P & \swarrow \pi_1 \\ & & U_j \end{array}$$

esto es,  $\pi_1 \circ f_j = P$ , donde  $\pi_1$  es la proyección sobre la primera componente.

Sea  $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , entonces

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1^{-1} : U_{12} \times \mathbb{R} &\xrightarrow{f_1^{-1}} P^{-1}(U_{12}) \xrightarrow{f_2} U_{12} \times \mathbb{R} \\ ([a : b], x) &\longrightarrow \left(\left(x, \frac{b}{a}x\right), [a : b]\right) \longrightarrow \left([a : b], \frac{b}{a}x\right) \end{aligned}$$

$$f_2 \circ f_1^{-1}([a : b], x) = \left([a : b], \frac{b}{a}x\right).$$

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2^{-1} : U_{12} \times \mathbb{R} &\xrightarrow{f_2^{-1}} P^{-1}(U_{12}) \xrightarrow{f_1} U_{12} \times \mathbb{R} \\ ([a : b], y) &\longrightarrow \left(\left(\frac{a}{b}y, y\right), [a : b]\right) \longrightarrow \left([a : b], \frac{a}{b}y\right) \end{aligned}$$

$$f_1 \circ f_2^{-1}([a : b], y) = \left([a : b], \frac{a}{b}y\right).$$

$f_2 \circ f_1^{-1}$  y  $f_1 \circ f_2^{-1}$  son homeomorfismos, llamados trivializaciones y los abiertos  $U_1 \times \mathbb{R}$  y  $U_2 \times \mathbb{R}$  son llamados abiertos trivializadores.

- c)  $\pi|_{\tilde{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}P(1)} : \tilde{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathbb{R}P(1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  es un difeomorfismo. La demostración es análoga a la parte b) de la Observación 2.2 de la sección anterior.

Hemos probado que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  es una variedad diferenciable de dimensión 2, mas precisamente es un  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial de rango 1 sobre  $\mathbb{R}P(1)$ . Ahora vamos a ver que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  es homeomorfa a la Banda de Möbius.



**Proposición 2.1.**  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  es una variedad diferenciable no orientable.

**Demostración :** Sea  $\{(\tilde{U}_1, \tilde{\phi}_1), (\tilde{U}_2, \tilde{\phi}_2)\}$  la estructura diferenciable de  $\tilde{\mathbb{R}}^2$ , definida arriba. Sea  $(x, t) \in \tilde{\phi}_1^{-1}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  y

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1 : \tilde{\phi}_1^{-1}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) &\longrightarrow \tilde{\phi}_2^{-1}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) \\ (x, t) &\longrightarrow \left(\frac{1}{t}, xt\right) \end{aligned}$$

la aplicación cambio de coordenada. El Jacobiano de  $(\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1)(x, t)$ , definido por

$$J[(\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1)(x, t)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{t}) & \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{t}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(xt) & \frac{\partial}{\partial t}(xt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2} \\ t & x \end{pmatrix}$$

tiene como determinante

$$\det(J[(\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \tilde{\phi}_1)(x, t)]) = \frac{1}{t}$$

siendo positivo, si  $t > 0$  y negativo, si  $t < 0$ . De esta manera podemos decir que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  es una variedad diferenciable no orientable.

Puesto que, los únicos  $\mathbb{R}$ -fibrados vectoriales sobre  $S^1 \simeq \mathbb{RP}(1)$  son el Cilindro y la Banda de Möbius y el primero es orientable, podemos concluir que la variedad diferenciable  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  es homeomorfa a la Banda de Möbius.

### 2.1.3. El Blow-up de una foliación $\mathcal{F}$ en el punto $0 \in \mathbb{C}^2$

Denotemos por  $\mathbb{C}\{z, w\}$ , el conjunto de las series de potencias convergentes en una vecindad  $V$  de  $0 \in \mathbb{C}^2$  con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Sean  $P(z, w), Q(z, w) \in \mathbb{C}\{z, w\}, (z, w) \in V$ ,

$$P(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=k}^{\infty} a_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta \quad \text{y} \quad Q(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=k}^{\infty} b_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta.$$

Denotemos por  $P_j(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=j} a_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta$  y  $Q_j(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=j} b_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta$ ,

los polinomios homogéneos de grado  $j$ , con  $P_k \not\equiv 0$  ó  $Q_k \not\equiv 0$ . Entonces

$$P(z, w) = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(z, w) \quad \text{y} \quad Q(z, w) = \sum_{j=k}^{\infty} Q_j(z, w).$$

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dT} = P(z, w) = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(z, w) = P_k(z, w) + P_{k+1}(z, w) + \dots \\ \frac{dw}{dT} = Q(z, w) = \sum_{j=k}^{\infty} Q_j(z, w) = Q_k(z, w) + Q_{k+1}(z, w) + \dots \end{cases}$$

A este sistema le asociamos el campo vectorial holomorfo

$$X = P(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + Q(z, w) \frac{\partial}{\partial w} \quad (2.9)$$

o equivalentemente la 1-forma dual

$$\Omega = Q(z, w) dz - P(z, w) dw = 0. \quad (2.10)$$

Supongamos que  $(0, 0) \in V$  es la única singularidad de  $X$  (equivalentemente de  $\Omega$ ). Sea  $\mathcal{F}$  la foliación generada por (2.9) (o equivalentemente por (2.10)). Veamos lo que ocurre con esta foliación  $\mathcal{F}$  después de un blow-up  $\pi$  de  $V$  en  $0 \in \mathbb{C}^2$ .

Denotemos por  $\pi^*(X)$  (o equivalentemente  $\pi^*(\Omega)$ ) el campo (o la forma) obtenido después de un blow-up  $\pi$  de  $V$  en  $0$ . Este campo (o la forma) define sobre  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  una *foliación saturada* que denotamos por  $\pi^*(\mathcal{F})$  y llamamos el blow-up de  $\mathcal{F}$  en  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Las singularidades de esta foliación  $\pi^*(\mathcal{F})$  van a estar contenidas en el divisor de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ , pues  $X$  es singular solamente en  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ .

El campo  $\pi^*(X)$  se escribe en la carta  $((z, T), \tilde{V}_1)$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  (donde  $w = zT$ ), dada en 2.1.1 como:

$$\pi^*(X) = z^k \left[ z(P_k(1, T) + zP_{k+1}(1, T) + \dots) \frac{\partial}{\partial z} + ((Q_k(1, T) - TP_k(1, T)) + z(Q_{k+1}(1, T) - TP_{k+1}(1, T)) + \dots) \frac{\partial}{\partial T} \right].$$

La 1-forma diferencial equivalente a este campo es:

$$\begin{aligned} \pi^*(\Omega) = z^k \left[ ((Q_k(1, T) - TP_k(1, T)) + z(Q_{k+1}(1, T) - TP_{k+1}(1, T)) \right. \\ \left. + \dots) dz - z(P_k(1, T) + zP_{k+1}(1, T) + \dots) dT \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Análogamente, escribimos  $\pi^*(X)$  en la carta  $((S, w), \tilde{V}_2)$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  como:

$$\pi^*(X) = w^k \left[ ((P_k(S, 1) - SQ_k(S, 1)) + w(P_{k+1}(S, 1) - SQ_{k+1}(S, 1)) + \dots) \frac{\partial}{\partial S} + w(Q_k(S, 1) + wQ_{k+1}(S, 1) + \dots) \frac{\partial}{\partial w} \right].$$

La 1-forma diferencial equivalente es:

$$\begin{aligned} \pi^*(\Omega) = w^k \left[ w(Q_k(S, 1) + wQ_{k+1}(S, 1) + \dots) dS - ((P_k(S, 1) - SQ_k(S, 1)) \right. \\ \left. + w(P_{k+1}(S, 1) - SQ_{k+1}(S, 1)) + \dots) dw \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Definamos el polinomio homogéneo de grado  $k+1$

$$R(z, w) = zQ_k(z, w) - wP_k(z, w) \quad (2.13)$$

Dos casos distintos podemos tener:

**Caso 1** :  $R(z, w) \equiv 0$ . En este caso decimos que la singularidad de  $X$  es dicrítica. Observando que

$$R(1, T) = Q_k(1, T) - T P_k(1, T) \equiv 0,$$

tenemos que la 1-forma diferencial (2.11) se puede dividir por  $z^{k+1}$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1(z, T) = \frac{\pi^*(\Omega)}{z^{k+1}} = & ((Q_{k+1}(1, T) - T P_{k+1}(1, T)) + z(Q_{k+2}(1, T) - T P_{k+2}(1, T)) \\ & + \dots) dz - (P_k(1, T) + zP_{k+1}(1, T) + \dots) dT = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Del mismo modo, teniendo que

$$R(S, 1) = S Q_k(S, 1) - P_k(S, 1) \equiv 0,$$

la 1-forma diferencial (2.12) se puede dividir por  $w^{k+1}$ , obteniendo así

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_2(S, w) = \frac{\pi^*(\Omega)}{w^{k+1}} = & (Q_k(S, 1) + w Q_{k+1}(S, 1) + \dots) dS - ((P_{k+1}(S, 1) - \\ & S Q_{k+1}(S, 1)) + (P_{k+2}(S, 1) - S Q_{k+2}(S, 1)) + \dots) dw = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La forma  $\tilde{\Omega}_i$ , para  $i = 1, 2$  define sobre el abierto  $\tilde{V}_i$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  una foliación  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_i}$  (foliación por curvas, curvas solución de la ecuación  $\tilde{\Omega}_i = 0$ ). La foliación  $\pi^*(\mathcal{F})$  estará representada en la primera carta de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  por la forma  $\tilde{\Omega}_1$  y en la otra carta por la forma  $\tilde{\Omega}_2$ . Además se cumple que

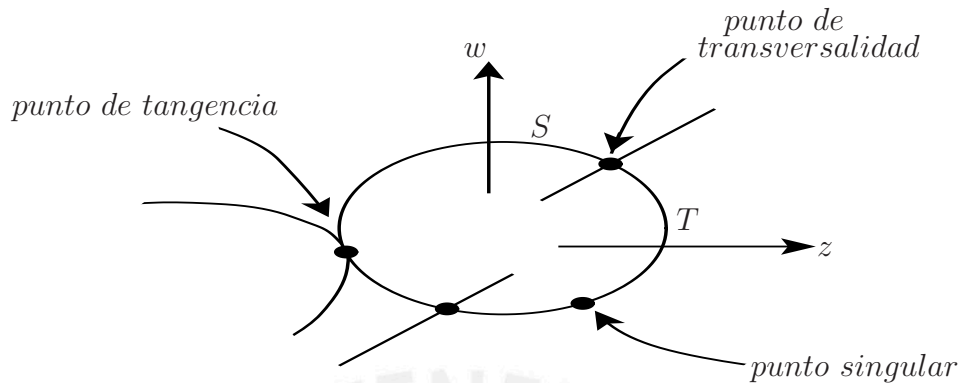
$$\tilde{\Omega}_2(S, w) = \left(\frac{1}{T}\right)^{k+1} \tilde{\Omega}_1(z, T)$$

en  $\tilde{V}_1 \cap \tilde{V}_2$ .

Esta última ecuación nos dice que las curvas solución se “pegan” en la intersección de los abiertos  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$ . Así de este modo tenemos definida una foliación (foliación saturada) sobre  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ . Las singularidades de  $\pi^*(\mathcal{F})$  en la primera carta de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  son los puntos de la forma  $(0, T_0)$ , que satisfacen el sistema de ecuaciones (como se puede apreciar en (2.14))

$$P_k(1, T) = 0 \quad \text{y} \quad Q_{k+1}(1, T) - T P_{k+1}(1, T) = 0.$$

En los puntos del divisor ( $z=0$ ) donde  $P_k(1, T) = 0$  y  $Q_{k+1}(1, T) - T P_{k+1}(1, T) \neq 0$  las hojas de  $\pi^*(\mathcal{F})$  son tangentes al divisor. En los demás puntos del divisor donde  $P_k(1, T) \neq 0$  las hojas de  $\pi^*(\mathcal{F})$  son transversales al divisor.



**Caso 2 :**  $R(z, w) \neq 0$ . En este caso decimos que la singularidad de  $X$  es no dicrítica. Las formas (2.11) y (2.12) son en este caso divisibles por  $z^k$  y  $w^k$  respectivamente. Así

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1(z, T) = \frac{\pi^*(\Omega)}{z^k} = (R(1, T) + z(Q_{k+1}(1, T) - T P_{k+1}(1, T)) + \dots) dz - \\ z(P_k(1, T) + zP_{k+1}(1, T) + \dots) dT = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_2(S, w) = \frac{\pi^*(\Omega)}{w^k} = w(Q_k(S, 1) + w Q_{k+1}(S, 1) + \dots) dS - (-R(S, 1) + \\ w(P_{k+1}(S, 1) - S Q_{k+1}(S, 1)) + \dots) dw = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Igual que el caso anterior las formas  $\tilde{\Omega}_1(z, T)$  y  $\tilde{\Omega}_2(S, w)$  definen sobre  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  una foliación (foliación saturada) que denotamos por  $\pi^*(\mathcal{F})$ . En este caso la ecuación que garantiza que las soluciones en la intersección de los abiertos  $\tilde{V}_1$  y  $\tilde{V}_2$  se “pegan” está dada por:

$$\tilde{\Omega}_2(S, w) = \left(\frac{1}{T}\right)^k \tilde{\Omega}_1(z, T).$$

Las singularidades de  $\pi^*(\mathcal{F})$  en el divisor  $D = \{z = 0\}$  en la primera carta estan dadas por los puntos de la forma  $(0, T_0)$ , que satisfacen la ecuación  $R(1, T_0) = 0$  (como se puede apreciar en (2.16)). Puesto que,  $R(z, w)$  es un polinomio homogéneo de grado  $k+1$ ,  $\pi^*(\mathcal{F})$  poseerá  $k+1$  singularidades, contadas con multiplicidad en el divisor.

En este caso el divisor  $D$  es invariante, esto es, está compuesto por singularidades y una hoja.

El polinomio homogéneo (2.13) es llamado el *Cono Tangente* de la foliación  $\mathcal{F}$ .

## 2.2. Holonomía

### 2.2.1. Holonomía de una Hoja

**Definición 2.2.1.** Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n$  y  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa sobre  $M$  de codimensión  $k$  ( $0 < k < n$ ). Fijemos una hoja  $L$  de  $\mathcal{F}$  y  $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow L$  un camino continuo en  $L$ . Sean  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_1$  secciones transversales a  $\mathcal{F}$  (homeomorfas a discos de dimensión  $k$ ), tales que  $p_0 = \gamma(0) \in \Sigma_0$  y  $p_1 = \gamma(1) \in \Sigma_1$ . Sean  $U_0$  y  $U_1$  cartas distinguidas en  $p_0$  y  $p_1$  respectivamente, de la foliación  $\mathcal{F}$ , entonces  $\Sigma_i$ ,  $i=0,1$  intersepta cada placa de  $U_i$  en exactamente un punto, como lo muestra la siguiente figura.

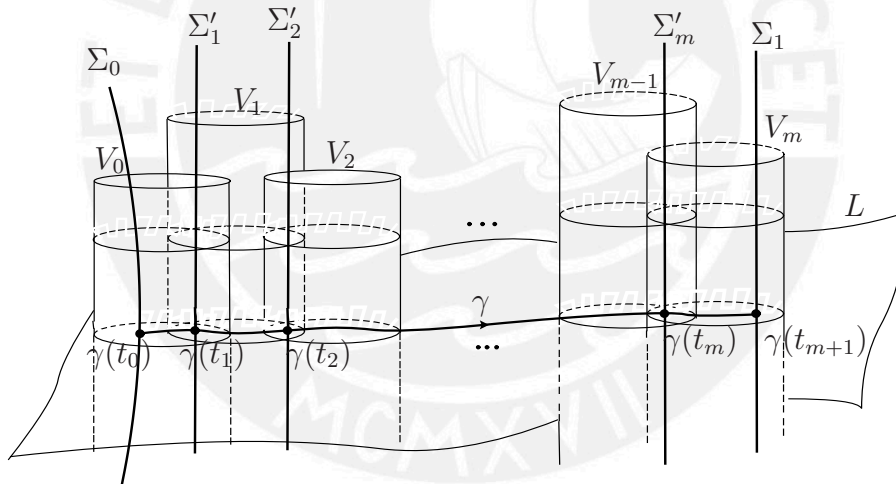


Figura 2.8: Holonomía de la hoja  $L$ .

Consideremos una cobertura finita de  $\gamma(I)$  por cartas distinguidas de  $\mathcal{F}$ , digamos  $V_0, \dots, V_m$  tal que:

- i)  $V_0 = U_0$  y  $V_m = U_1$ .
- ii) Para todo  $j = 1, \dots, m$ ,  $V_{j-1} \cap V_j \neq \emptyset$ .

iii) Para todo  $j = 1, \dots, m$  existe una carta distinguida  $U$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $V_{j-1} \cup V_j \subset U$ .

iv) Existe una partición  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} = 1\}$  de  $I = [0, 1]$  tal que  $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset V_j$  para  $j = 0, \dots, m$ .

Decimos que la familia  $\{V_j\}_{j=0}^m$  satisfaciendo (i), (ii), (iii) y (iv) es una cadena subordinada al camino  $\gamma$ .

Ahora, para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$  fijemos  $\Sigma'_j$  una sección transversal a  $\mathcal{F}$  (homeomorfa a un disco de dimensión  $k$ ) tal que  $\gamma(t_j) \in \Sigma'_j \subset V_{j-1} \cap V_j$ . Pongamos también  $\Sigma'_0 = \Sigma_0$  y  $\Sigma'_{m+1} = \Sigma_1$ .

Para cada  $j = 0, \dots, m$ , sea  $q \in \Sigma'_j$  suficientemente cercano a  $\gamma(t_j)$ ; la placa de  $V_j$  que pasa por  $q$  intersepta  $\Sigma'_{j+1}$  en un único punto, llamémosle  $f_j(q)$  quedando así definida una función:

$$\begin{aligned} f_j : A_j \subset \Sigma'_j &\longrightarrow \Sigma'_{j+1} \\ q &\longrightarrow f_j(q) \end{aligned}$$

tal que  $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$ .  $A_j$  es una pequeña vecindad de  $\gamma(t_j)$  en  $\Sigma'_j$ .

Como podemos observar, posiblemente para algunos  $q \in A_j$  sus imágenes  $f_j(q) \notin A_{j+1} \subset f_j(A_j)$ , entonces no será posible definir la composición  $f_{j+1} \circ f_j$  en esos puntos, pero como  $f_j$  es continua (ya lo justificaremos mas adelante) y  $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$  existirá una vecindad  $A'_j \subset A_j$  de  $\gamma(t_j)$  tal que  $f_j(A'_j) \subset A_{j+1}$  en ese caso es posible hacer la composición. Luego es claro que  $f_\gamma = f_m \circ \dots \circ f_0$  esta bien definida en una pequeña vecindad  $A'_0 \subset A_0$  de  $p_0$  en  $\Sigma_0$ ; además se cumple que  $f_\gamma(p_0) = p_1$ . Llamamos a  $f_\gamma$  la aplicación de holonomía con respecto a  $\gamma$  y a las secciones  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_1$ .

La existencia de la vecindad  $A'_j$  de  $\gamma(t_j)$  nos esta haciendo notar que lo que estamos componiendo son los gérmenes de  $f_{j+1}$  con  $f_j$ .

Para cada  $j = 0, \dots, m$ , denotamos el germen de  $f_j$  en  $\gamma(t_j)$  por  $[f_j]$  y definimos la composición de  $[f_{j+1}]$  con  $[f_j]$  de la siguiente manera:

$$[f_{j+1}] \circ [f_j] = [f_{j+1} \circ f_j|_{A'_j}],$$

donde el germen en  $\gamma(t_j)$  de  $f_{j+1} \circ f_j|_{A'_j}$  no depende de  $A'_j$ .

De allí es claro, que la composición  $[f]_\gamma = [f_m] \circ \dots \circ [f_0]$  esta bien definida. Llamamos a  $[f]_\gamma$  el *germen de holonomía* de  $\gamma$  con respecto a las secciones  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_1$ .

**Observación 2.4.** Si  $\mathcal{F}$  es holomorfa, las aplicaciones  $f_j(0 \leq j \leq m)$  son holomorfas, luego  $f_\gamma$  es holomorfa.



En efecto, puesto que  $\mathcal{F}$  es holomorfa de codimensión  $k$  entonces las parametrizaciones

$$\phi_j : \mathbb{D}^{n-k} \times \mathbb{D}^k \longrightarrow V_j$$

son holomorfas.

Para cada  $j = 0, \dots, m$ , sea  $\mathbb{D}_j = \{(x, y) \in \mathbb{D}^{n-k} \times \mathbb{D}^k / x = x_j\} \cong \mathbb{D}^k$  un disco abierto de dimensión  $k$ , donde  $x_j \in \mathbb{D}^{n-k}$  es constante, tal que  $\Sigma'_j \cong \mathbb{D}_j$ . Definamos

$$\begin{aligned} \widehat{f}_j : \mathbb{D}_j &\longrightarrow \mathbb{D}_{j+1} \\ (x_j, y) &\longrightarrow \widehat{f}_j(x_j, y) = (x_{j+1}, y). \end{aligned}$$

$\widehat{f}_j$  así definida es holomorfa. Entonces la aplicación  $f_j = \phi_j \circ \widehat{f}_j \circ \phi_j^{-1} : \Sigma'_j \longrightarrow \Sigma'_{j+1}$  es holomorfa, para cada  $j = 0, \dots, m$ . Luego,  $f_\gamma$  es holomorfa.

Aún más, puesto que  $\phi_j$  y  $\widehat{f}_j$  son biholomorfismos entonces  $f_j$  para  $j = 0, \dots, m$  es un biholomorfismo. Así,  $f_\gamma$  será un biholomorfismo sobre su imagen.

Para definir la inversa de  $f_\gamma$  tomamos el camino inverso de  $\gamma$ , es decir  $\gamma^{-1}$ , camino que nos permite definir la aplicación de holonomía  $f_{\gamma^{-1}} = (f_\gamma)^{-1}$  (inversa de  $f_\gamma$ ) del modo siguiente:

**Observación 2.5.** (la inversa de  $f_\gamma$ ). Sea  $\gamma^{-1}$  (el camino inverso de  $\gamma$ ) un camino continuo en  $L$  definido por:

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : [0, 1] &\longrightarrow L \\ t &\longrightarrow \gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t), \end{aligned}$$

donde  $p_1 = \gamma^{-1}(0) = \tilde{p}_0$  y  $p_0 = \gamma^{-1}(1) = \tilde{p}_1$ .

Sean  $\Sigma_0, \Sigma_1$  secciones transversales, tales que  $\tilde{p}_0 \in \Sigma_1$  y  $\tilde{p}_1 \in \Sigma_0$  y  $U_0, U_1$  cartas distinguidas en  $\tilde{p}_1$  y en  $\tilde{p}_0$  respectivamente de la foliación  $\mathcal{F}$ .

Podemos considerar como cadena subordinada a  $\gamma^{-1}$  la misma familia  $\{V_j\}_{j=0}^m$  de cartas distinguidas de  $\mathcal{F}$ , satisfaciendo (i), (ii), (iii) y (iv) de la Definición 2.2.1. Luego existe una partición  $\{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m+1} = 1\}$  de  $I$  con  $s_j = 1 - t_{m-j+1}$  tal que  $\gamma^{-1}([s_j, s_{j+1}]) \subset V_{m-j}$  para  $j = 0, \dots, m$ . De esta manera, podemos definir la inversa de  $f_\gamma$  como la composición  $(f_\gamma)^{-1} = f_{\gamma^{-1}} = \tilde{f}_m \circ \dots \circ \tilde{f}_0$ , donde para cada  $j = 0, \dots, m$

$$\tilde{f}_j = f_{m-j}^{-1}|_{V_{\gamma(t_{m-j+1})}} : V_{\gamma(t_{m-j+1})} \longrightarrow \Sigma'_{m-j},$$

con  $\tilde{f}_j(\gamma(t_{m-j+1})) = \gamma(t_{m-j})$  y  $V_{\gamma(t_{m-j+1})} \subset \Sigma'_{m-j+1}$  una pequeña vecindad de  $\gamma(t_{m-j+1})$  en  $\Sigma'_{m-j+1}$ .

El siguiente lema nos define el germen de holonomía de un camino que es el producto de dos caminos.

**Lema 2.1.** Sean  $\gamma, \delta : I \longrightarrow L$  dos caminos continuos en  $L$  tal que  $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = \delta(0) = p_1$  y  $\delta(1) = p_2$ . Fijemos secciones transversales a  $\mathcal{F}$ ,  $\Sigma_0, \Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  por  $p_0, p_1$  y  $p_2$  respectivamente. Entonces

$$[f]_{\gamma*\delta} = [f]_{\delta} \circ [f]_{\gamma},$$

donde los gérmenes arriba son obtenidos como holonomías en las secciones  $\Sigma_0, \Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .

**Demostración:** Sean  $U_0, U_1$  y  $U_2$  cartas distinguidas en  $p_0, p_1$  y  $p_2$  respectivamente, de la foliación  $\mathcal{F}$ . Consideremos una cobertura de  $\gamma(I)$  por cartas distinguidas de  $\mathcal{F}$ , digamos  $V_0, \dots, V_m$  tal que:

- i)  $V_0 = U_0$  y  $V_m = U_1$ .
- ii) Para todo  $j = 1, \dots, m, V_{j-1} \cap V_j \neq \emptyset$ .
- iii) Para todo  $j = 1, \dots, m$  existe una carta distinguida  $U$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $V_{j-1} \cup V_j \subset U$ .
- iv) Existe una partición  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} = 1\}$  de  $I = [0, 1]$  tal que  $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset V_j$  para  $j = 0, \dots, m$ .

Del mismo modo consideremos una cobertura finita de  $\delta(I)$  por cartas distinguidas de la foliación  $\mathcal{F}$ , digamos  $V_m, V_{m+1}, \dots, V_{m+k}, k \geq 0$  tal que:

- i)  $V_m = U_1$  y  $V_{m+k} = U_2$ .
- ii) Para todo  $j = m, \dots, m+k-1, V_j \cap V_{j+1} \neq \emptyset$ .
- iii) Para todo  $j = m, \dots, m+k-1$  existe una carta distinguida  $U$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $V_j \cup V_{j+1} \subset U$ .
- iv) Existe una partición  $\{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k+1} = 1\}$  de  $I = [0, 1]$  tal que  $\delta([s_j, s_{j+1}]) \subset V_{m+j}$  para  $j = 0, \dots, k$ .

Sabemos que bajo esas condiciones, es posible definir aplicaciones de holonomía para cada camino con respecto a las secciones transversales. Sea  $f_{\gamma} = f_m \circ \dots \circ f_0$  la aplicación de holonomía de  $\gamma$  con respecto a las secciones transversales  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_1$ , donde  $f_j$  para todo  $j = 0, \dots, m$  es un biholomorfismo definido sobre una vecindad suficientemente pequeña de  $\gamma(t_j)$ . Del mismo modo, sea  $f_{\delta} = f'_k \circ \dots \circ f'_0$  la aplicación de holonomía de  $\delta$  con respecto a las secciones transversales  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , donde  $f'_j$  para todo  $j = 0, \dots, k$  es un biholomorfismo

definido sobre una vecindad suficientemente pequeña de  $\delta(s_j)$ . El camino  $\delta * \gamma$  definido por

$$(\delta * \gamma(s)) = \begin{cases} \gamma(2s); & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \delta(2s - 1); & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

es un camino continuo en  $L$ , que comienza en  $\gamma(0) = p_0$  y termina en  $\delta(1) = p_2$  (en la mayoría de los textos de teoría de homotopía el camino que hemos definido se denota por  $\gamma * \delta$  nosotros adoptaremos la siguiente notación  $\delta * \gamma$  por conveniencia). Este camino tiene un cubrimiento finito dado por la unión de las cartas distinguidas de la foliación  $V_0, \dots, V_m, V_{m+1}, \dots, V_{m+k}$  tales que satisfacen las condiciones:

- i)  $V_0 = U_0, V_m = U_1$  y  $V_{m+k} = U_2$ .
- ii) Para todo  $j = 1, \dots, m, \dots, m+k$ ,  $V_{j-1} \cap V_j \neq \emptyset$ .
- iii) Para todo  $j = 1, \dots, m, \dots, m+k$  existe una carta distinguida  $U$  de  $\mathcal{F}$  tal que  $V_{j-1} \cup V_j \subset U$ .
- iv) Existe una partición  $\{0 = t_0 < \frac{t_1}{2} < \dots < \frac{t_{m+1}}{2} = \frac{s_0+1}{2} < \frac{s_1+1}{2} < \dots < \frac{s_{k+1}+1}{2} = 1\}$  de  $I$  tal que  $\gamma([t_j, t_{j+1}]) = (\delta * \gamma)([\frac{t_j}{2}, \frac{t_{j+1}}{2}]) \subset V_j$ , para  $j = 0, \dots, m$  y  $\delta([s_j, s_{j+1}]) = (\delta * \gamma)([\frac{s_j+1}{2}, \frac{s_{j+1}+1}{2}]) \subset V_{m+j}$ , para  $j = 0, \dots, k$ .

Según la Definición 2.2.1 es posible definir la aplicación de holonomía  $f_{\delta * \gamma}$  de  $\delta * \gamma$  con respecto a las secciones  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_2$ . Definimos esta aplicación como:

$$f_{\delta * \gamma} = f_\gamma \circ f_\delta,$$

donde  $f_\gamma$  y  $f_\delta$  son las aplicaciones de holonomía definidas arriba. Asimismo,  $[f]_{\delta * \gamma} = [f]_\gamma \circ [f]_\delta$ .

**Observación 2.6.** Si el camino  $\delta$  es obtenido del camino  $\gamma$  por deformación continua de  $\gamma$ , manteniendo los extremos de ambos caminos fijos durante la deformación, entonces se tiene que las aplicaciones de holonomía de ambos caminos coinciden, es decir,  $f_\gamma = f_\delta$ . En efecto, sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$  un camino continuo en  $L$  y  $\delta : [0, 1] \rightarrow L$  otro camino en  $L$  (obtenido por deformación continua de  $\gamma$ ) tal que  $p_0 = \gamma(0) = \delta(0)$  y  $p_1 = \gamma(1) = \delta(1)$ . Si  $\delta$  está muy próximo de  $\gamma$ , existe una cadena  $(U_i)_{i=0}^k$  subordinada a  $\gamma$  y  $\delta$  simultáneamente.

Sean  $f_\delta$  y  $f_\gamma$  las aplicaciones de holonomía con respecto a  $\delta$  y  $\gamma$  respectivamente y a las secciones  $\Sigma_0 \subset U_0$  y  $\Sigma_1 \subset U_k$ . Sea  $q \in V_{p_0} \subset \Sigma_0, V_{p_0}$

una pequeña vecindad de  $p_0$ , sabemos que  $f_\gamma(q)$  es el punto donde la hoja pasando por  $q$  (siguiendo el camino  $\gamma$ ) intersepta a la sección transversal  $\Sigma_1$ . Del mismo modo,  $f_\delta(q)$  es el punto donde la hoja pasando por  $q$  (siguiendo el camino  $\delta$ ) intersepta a la sección transversal  $\Sigma_1$ . Puesto que la cadena subordinada es la misma para  $\gamma$  y  $\delta$  y el punto de intersección de la hoja con la sección transversal  $\Sigma_1$  es único entonces  $f_\gamma(q) = f_\delta(q)$  para todo  $q \in V_{p_0}$ . Así,  $f_\gamma = f_\delta$  en una vecindad de  $p_0 \in \Sigma_0$ .

El siguiente lema nos permitirá definir el "grupo de holonomía" de una hoja de  $\mathcal{F}$ .

**Lema 2.2.** *Sea  $M$  una variedad compleja de dimensión  $n$  y  $\mathcal{F}$  una foliación holomorfa de codimensión  $k$  en  $M$ ,  $L$  una hoja de  $\mathcal{F}$ ,  $p_0, p_1 \in L$ ,  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_1$  secciones holomorfas transversales a  $\mathcal{F}$  tal que  $p_0 \in \Sigma_0$  y  $p_1 \in \Sigma_1$ . Si  $\gamma, \delta : I \rightarrow L$  son dos curvas tal que  $\gamma(0) = \delta(0) = p_0, \gamma(1) = \delta(1) = p_1$  y  $\gamma$  y  $\delta$  son homotópicas en  $L$  con extremos fijos, entonces  $[f]_\gamma = [f]_\delta$ .*

**Demostración:** Puesto que  $\gamma$  y  $\delta$  son homotópicas entonces existe  $H : I \times I \rightarrow L$  continua tal que  $H(t, 0) = \gamma(t), H(t, 1) = \delta(t)$  y  $H(0, s) = p_0, H(1, s) = p_1$  para todo  $s, t \in I$ .

Para cada camino  $\gamma_s : I \rightarrow L, \gamma_s(t) = H(t, s)$  existe una cadena subordinada a  $\gamma_s$ . Por continuidad si  $s'$  está próxima a  $s$  entonces la cadena subordinada a  $\gamma_s$  es también subordinada a  $\gamma_{s'}$ . Entonces, si tomamos una partición  $\{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1\}$  de  $I$  y denotamos con  $C_i$  una cadena subordinada a todos los caminos  $\gamma_s, s_{i-1} \leq s \leq s_i$ , se tiene por la Observación 2.6, que  $[f]_{\gamma_{s_{i-1}}} = [f]_{\gamma_{s_i}}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Luego,  $[f]_\gamma = [f]_\delta$ .

### 2.2.2. Grupo de Holonomía

Consideremos ahora el caso que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$  sea una curva cerrada en  $L$ , es decir  $p_1 = p_0$  y  $\Sigma_1 = \Sigma_0$  entonces  $[f]_\gamma$  es un elemento del grupo  $Dif(\Sigma_0, p_0)$  (el grupo de gérmenes de biholomorfismos en  $p_0$  con punto fijo  $p_0$ ), llamado germen de holonomía de  $\gamma$  con respecto a  $\Sigma_0$ , o simplemente holonomía de  $\gamma$ . Por otro lado sabemos por Lema 2.2, que el germen de  $f_\gamma$  en  $p_0 \in \Sigma_0$  es invariante por homotopías de  $\gamma$  con extremos fijos, inducimos así una aplicación natural

$$H : \begin{array}{ccc} \pi_1(L, p_0) & \longrightarrow & Dif(\Sigma_0, p_0) \\ [\gamma] & \longrightarrow & H([\gamma]) = [f]_\gamma \end{array}$$

entre el grupo fundamental de  $L$  en  $p_0$  y el grupo de gérmenes de biholomorfismos de  $\Sigma_0$  en  $p_0$ , donde  $[f]_\gamma$  es el germen de  $f_\gamma$  en  $p_0 \in \Sigma_0$ .

**Proposición 2.2.**  $H$  así definido es un homomorfismo de grupos.

**Demostración:** Sean  $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(L, p_0)$ ,

$$\begin{aligned} H([\gamma] * [\delta]) &= H([\delta * \gamma]) \\ &= [f]_{\delta * \gamma} \\ &= [f]_{\gamma} \circ [f]_{\delta} \\ &= H([\gamma]) \circ H([\delta]) \end{aligned}$$

Entonces  $H([\gamma] * [\delta]) = H([\gamma]) \circ H([\delta])$ .

**Definición 2.2.2.** El subgrupo  $Hol(L, p_0) = H(\pi_1(L, p_0))$  de  $Dif(\Sigma_0, p_0)$  es llamado el grupo de holonomía de  $L$  en  $p_0$ .

Puesto que  $L$  es conexo por caminos entonces para cualesquiera puntos básicos  $p_0, p_1 \in L$ , los grupos fundamentales  $\pi_1(L, p_0)$  y  $\pi_1(L, p_1)$  son isomorfos. Así ya no diremos el grupo de holonomía de  $L$  en  $p_0$  o en  $p_1$  sino simplemente el grupo de holonomía de  $L$  y lo denotaremos por  $Hol(L)$ .

### 2.2.3. Ejemplos de Holonomía

**Ejemplo 2.8.** Consideremos el campo lineal  $X : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$X(z_1, z_2) = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$$

al cual asociamos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} z_1' = \lambda_1 z_1 \\ z_2' = \lambda_2 z_2 \end{cases} \quad (2.19)$$

cuyo flujo esta dado por:

$$\varphi(T, z) = (\varphi_1(T, z), \varphi_2(T, z)) = (e^{\lambda_1 T} z_1, e^{\lambda_2 T} z_2)$$

$T \in \mathbb{C}$ ,  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ .

Denotemos por  $\mathcal{F}_X$  la foliación generada por  $X$ . Observamos que los conjuntos

$$L = \{\varphi(T, (0, 1)) = (0, e^{\lambda_2 T}) / T \in \mathbb{C}\} = \{z_1 = 0\} - \{(0, 0)\} = \{0\} \times \mathbb{C}^*$$

y

$$L' = \{\varphi(T, (1, 0)) = (e^{\lambda_1 T}, 0) / T \in \mathbb{C}\} = \{z_2 = 0\} - \{(0, 0)\} = \mathbb{C}^* \times \{0\}$$

son hojas de  $\mathcal{F}_X$  pasando por los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  respectivamente.

Vamos a definir la aplicación de holonomía  $l_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de  $L$  con respecto al punto  $P_1 = (0, 1) \in L$  y a la sección transversal  $\Sigma_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_2 = 1\} \simeq \mathbb{C}$  pasando por  $P_1$ .

Sean  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow L$ ,  $\gamma(t) = (0, e^{it})$  una curva cerrada contenida en  $L$  (esta curva pasa por  $(0, 1)$  y envuelve la singularidad  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ ) y  $q = (z_1, 1) \in \Sigma_1$  suficientemente próximo de  $P_1$ . El levantamiento de  $\gamma$  a lo largo de la hoja de  $\mathcal{F}_X$  pasando por  $q$  está dado por:

$$\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}_1(t), e^{it}), \quad t \in [0, 2\pi]$$

con  $\tilde{\gamma}_1(0) = z_1$  y  $\tilde{\gamma}_1(2\pi) = l_\gamma(z_1)$ .

Los puntos  $(z_1, z_2) = (\tilde{\gamma}_1(t), e^{it})$  para  $t \in [0, 2\pi]$  pertenecen a la hoja de  $\mathcal{F}_X$  pasando por  $q$  entonces estos puntos satisfacen el sistema (2.19), cumpliéndose entonces que:

$$\frac{z'_1}{z'_2} = \frac{\tilde{\gamma}'_1(t)}{i e^{it}} = \frac{\lambda_1 \tilde{\gamma}_1(t)}{\lambda_2 e^{it}}$$

luego,

$$\frac{\tilde{\gamma}'_1(t)}{\tilde{\gamma}_1(t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} i.$$

Integrando

$$\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\gamma}'_1(t)}{\tilde{\gamma}_1(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} i dt$$

obtenemos

$$\ln(\tilde{\gamma}_1(2\pi)) - \ln(\tilde{\gamma}_1(0)) = 2\pi i \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{l_\gamma(z_1)}{z_1}\right) &= 2\pi i \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ \frac{l_\gamma(z_1)}{z_1} &= e^{2\pi i \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \end{aligned}$$

Así,

$$l_\gamma(z_1) = z_1 e^{2\pi i \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}.$$

es la holonomía de  $L$  con respecto a  $\gamma$ .

Del mismo modo, obtenemos por cálculo análogo que la holonomía  $l'_\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de  $L'$  con respecto al punto  $P_2 = (1, 0) \in L'$  y a la sección transversal  $\Sigma_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_1 = 1\} \simeq \mathbb{C}$  pasando por  $P_2$  esta dada por:

$$l'_\gamma(z_2) = z_2 e^{2\pi i \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \forall z_2 \in \mathbb{C}.$$



**Ejemplo 2.9.** *Vimos en el Ejemplo 2.7, una foliación sobre la Banda de Möbius ( $M_o$ ); cuyas hojas son homeomorfas a círculos (curvas cerradas) siendo una de estas hojas el círculo  $S^1$ . Vamos a probar que la aplicación de holonomía de la hoja  $S^1$  es periódica de periodo 2.*

*Sean  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ ,  $\gamma(u) = (2 \sin u, 2 \cos u, 0)$  la parametrización de la curva cerrada  $S^1$  y  $f_\gamma : ]-1, 1[ \rightarrow ]-1, 1[$  la aplicación de holonomía sobre  $\gamma$  y a lo largo de las hojas de esta foliación.*

*Sea  $\Sigma_0 = \overline{AB}|_{u=0} = \{(0, 2, v) \in \mathbb{R}^3 / -1 < v < 1\} \simeq ]-1, 1[$  el segmento de recta vertical pasando por el punto  $(0, 2, 0) \in S^1$ . Fijemos  $v = v_0 \neq 0$  y sea  $q = (0, 2, v_0) \in \Sigma_0$ . El levantamiento de  $\gamma$  por los segmentos de rectas verticales  $\overline{AB}|_{u=t}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$  (fibras del  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial  $M_o$  sobre  $S^1$ ) a lo largo de la hoja que pasa por  $q$  está dado por:*

$$\tilde{\gamma}(u) = \begin{cases} x_2(u + \frac{3\pi}{2}, -v_0), & 0 \leq u < \frac{\pi}{2} \\ x_1(\frac{\pi}{2}, v_0), & u = \frac{\pi}{2} \\ x_2(u - \frac{\pi}{2}, v_0), & \frac{\pi}{2} < u \leq 2\pi \end{cases}$$

*con  $\tilde{\gamma}(0) = x_2(\frac{3\pi}{2}, -v_0) = (0, 2, v_0)$  y  $\tilde{\gamma}(2\pi) = x_2(\frac{3\pi}{2}, v_0) = (0, 2, f_\gamma(v_0))$ .*

*Pero  $x_2(\frac{3\pi}{2}, v_0) = (0, 2, v_0 \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}))$  entonces  $f_\gamma(v_0) = -v_0$ .*

*Así la aplicación de holonomía o primer retorno  $f_\gamma$  es periódica de periodo 2.*

## 2.3. El Teorema de Mattei-Moussu

Así como en dinámica real el Teorema de Hartman-Grobman nos dá un criterio para saber cuando dos retratos de fase de campos vectoriales diferenciales son equivalentes, en dinámica compleja el Teorema de Mattei-Moussu nos dará un criterio para saber cuando dos foliaciones asociadas a campos holomorfos son equivalentes.

**Teorema 2.1.** *Dados los campos vectoriales holomorfos*

$$Z_j = (\lambda_{1j}z_1 + z_1z_2A_{1j}(z_1, z_2))\frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda_{2j}z_2 + z_1z_2A_{2j}(z_1, z_2))\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad j = 1, 2$$

*definidos en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ , con  $(\lambda_{1j}, \lambda_{2j}) \in D_s$  y  $\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{21}} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}}$ . Sean  $f$  y  $g$  las aplicaciones de holonomía de  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  en el punto  $(1, 0)$ . Si existe un biholomorfismo local  $\hat{\xi}$  en  $0 \in \mathbb{C}$  de modo que  $\hat{\xi} \circ f = g \circ \hat{\xi}$  entonces existe un biholomorfismo local  $\xi$  en  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  tal que conjuga  $\mathcal{F}_{Z_1}$  con  $\mathcal{F}_{Z_2}$ .*

**Demostración:** Demostraremos este teorema para el caso en que  $Z_1$  sea un campo no lineal y  $Z_2$  un campo lineal. Sea

$$Z_1 = (\lambda_{11}z_1 + z_1z_2A_{11}(z_1, z_2)) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda_{21}z_2 + z_1z_2A_{21}(z_1, z_2)) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

donde para cada  $j = 1, 2$ ,  $A_{j1}$  es una función holomorfa definida en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  y  $A_{11}(0, 0) = A_{21}(0, 0) = 0$ .

Multiplicamos  $Z_1$  por  $g(z_1, z_2) = (\lambda_{11} + z_2A_{11})^{-1}$  y continuamos denotando por  $Z_1$  a este nuevo campo

$$Z_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \left( \frac{\lambda_{21} + z_1A_{21}(z_1, z_2)}{\lambda_{11} + z_2A_{11}(z_1, z_2)} \right) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Haciendo  $\lambda = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}}$  y  $\gamma_1(z_1, z_2) = \frac{\lambda_{21}^{-1}z_1A_{21}(z_1, z_2) - \lambda_{11}^{-1}z_2A_{11}(z_1, z_2)}{1 + \lambda_{11}^{-1}z_2A_{11}(z_1, z_2)}$  se tiene que

$$Z_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda z_2 (1 + \gamma_1(z_1, z_2))$$

con  $\gamma_1(0, 0) = 0$  y  $\gamma_1$  holomorfa en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ .

Consideremos ahora el campo lineal  $Z_2$

$$Z_2 = \lambda_{12}z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_{22}z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Multiplicamos  $Z_2$  por  $\lambda_{12}^{-1}$  y seguimos denotando por  $Z_2$  al nuevo campo obtenido

$$Z_2 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Denotemos por  $\varphi^1(T, (z_1, z_2))$  el flujo generado por el campo  $Z_1$ , el cual está dado por:

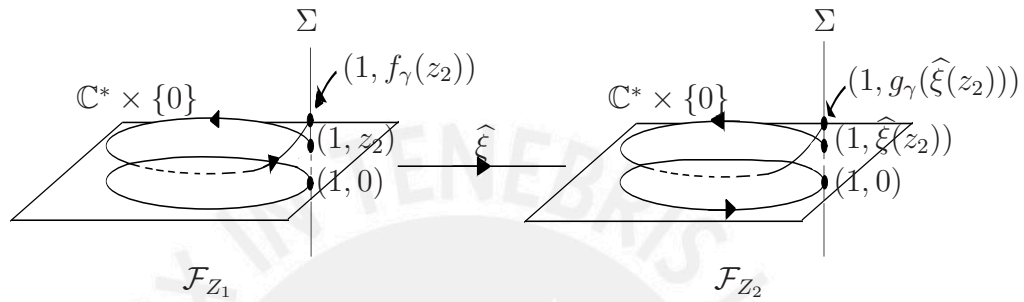
$$\varphi^1(T, (z_1, z_2)) = (e^T \cdot z_1, \varphi_2^1(T, (z_1, z_2))).$$

Análogamente, denotemos por  $\varphi^2(T, (z_1, z_2))$  el flujo generado por el campo  $Z_2$  que pasa por  $(z_1, z_2)$ ,

$$\varphi^2(T, (z_1, z_2)) = (e^T \cdot z_1, e^{\lambda T} \cdot z_2).$$

Sea  $\mathcal{O}_{Z_j}(z) = \{\varphi^j(T, z)/T \in \mathbb{C}\}$  la curva solución de  $Z_j$  pasando por el punto  $z = (z_1, z_2)$ . Observamos que, para  $j = 1, 2$ , el conjunto  $S_1 = \{z_2 = 0\}$  es una curva invariante de  $Z_j$  y  $S_1 - \{(0, 0)\} = \mathcal{O}_{Z_j}(1, 0) = \mathbb{C}^* \times \{0\}$  es una hoja de  $\mathcal{F}_{Z_j}$  foliación regular generada por el campo  $Z_j$ . Denotemos por  $\mathcal{F}_{Z_j}^* = \mathcal{F}_{Z_j} - \{\mathbb{C}^* \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{C}^*\}$ .

Sean  $0 < \rho < 1$  y  $D_\rho(0) = \{z_2 \in \mathbb{C} / |z_2| < \rho\}$  vecindad abierta de  $0 \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = (e^{it}, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  curva cerrada contenida en la hoja  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  y  $\Sigma = \{(1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_2 \in D_\rho(0)\}$  sección transversal a  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  pasando por el punto  $(1, 0) \in \Sigma$ . Sean  $f_\gamma$  y  $g_\gamma$  las aplicaciones de holonomía de  $\mathcal{F}_{Z_1}$  y  $\mathcal{F}_{Z_2}$  respectivamente, relativas a la hoja  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  y a la sección transversal  $\Sigma$  pasando por el punto  $(1, 0)$ .



Sea

$$\begin{aligned} \widehat{\xi} : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (1, z_2) &\longrightarrow \widehat{\xi}(1, z_2) = (1, \widehat{\xi}(z_2)) \end{aligned}$$

el biholomorfismo local que conjuga  $f_\gamma$  y  $g_\gamma$ , es decir,

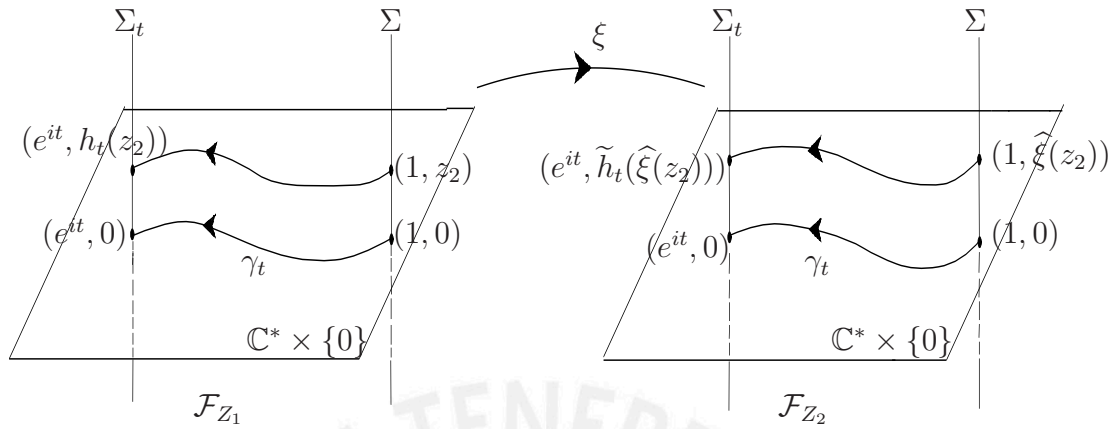
$$\widehat{\xi} \circ f_\gamma = g_\gamma \circ \widehat{\xi}.$$

Vamos a construir a partir de  $\widehat{\xi}$  un biholomorfismo  $\xi : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  definido en una vecindad de  $0 \in \mathbb{C}^2$ , que conjuga  $\mathcal{F}_{Z_1}$  con  $\mathcal{F}_{Z_2}$ .

Consideremos la familia  $\Sigma_t = \{(e^{it}, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_2| < \rho\}$  con  $t \in (0, 2\pi]$ , de secciones transversales a  $\mathbb{C}^* \times \{0\}$  pasando por los puntos  $(e^{it}, 0) \in \Sigma_t$ . Tenemos que  $\Sigma_{2\pi} = \Sigma$ .

Definamos aplicaciones de holonomía de  $\Sigma$  (fija) en  $\Sigma_t$  con respecto a la curva  $\gamma_t$  (arco de  $\gamma$  que une el punto  $(1, 0) \in \Sigma$  con  $(e^{it}, 0) \in \Sigma_t$ ) contenida en la hoja  $\mathbb{C}^* \times \{0\} \in \mathcal{F}_{Z_j}$ , ( $j = 1, 2$ ). Indiquemos por  $h_t$  la aplicación de holonomía de  $\Sigma$  en  $\Sigma_t$  obtenida por levantamiento del arco  $\gamma_t$  sobre la hoja de  $\mathcal{F}_{Z_1}$  pasando por el punto  $(1, z_2)$ , con  $0 < |z_2| < \rho$ ,

$$h_t(1, z_2) = (e^{it}, h_t(z_2)) = (e^{it}, \varphi_2^1(it, (1, z_2))).$$



Análogamente, indiquemos por  $\tilde{h}_t$  la aplicación de holonomía de  $\Sigma$  en  $\Sigma_t$  obtenida por levantamiento del arco  $\gamma_t$  sobre la hoja de  $\mathcal{F}_{Z_2}$  pasando por el punto  $(1, \hat{\xi}(z_2))$ ,

$$\tilde{h}_t(1, \hat{\xi}(z_2)) = (e^{it}, \tilde{h}_t(\hat{\xi}(z_2))) = (e^{it}, \varphi_2^2(it, (1, \hat{\xi}(z_2)))).$$

Estas aplicaciones son biholomorfismos; esto, según lo visto en la Observación 2.4 es consecuencia de la trivialidad local de las foliaciones  $\mathcal{F}_{Z_j}$  a lo largo del arco  $\gamma_t$ . Además,  $h_{2\pi} = f$  y  $\tilde{h}_{2\pi} = g$ .

Definimos  $\xi : \Sigma_t \rightarrow \Sigma_t$  tal que,  $\xi = \tilde{h}_t \circ \hat{\xi} \circ h_t^{-1}$ , de modo que,

$$\xi(e^{it}, h_t(z_2)) = (e^{it}, \tilde{h}_t(\hat{\xi}(z_2))). \quad (2.20)$$

para cualquier  $t \in (0, 2\pi]$  y  $z_2 \in D_\rho(0)$ .

$\xi$  así definido es un biholomorfismo.

Sea el conjunto  $C_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1| = 1\} = S^1 \times \mathbb{C}$  y la órbita  $\mathcal{O}_{Z_j}(z_1, z_2) \in \mathcal{F}_{Z_j}^*$ , entonces para  $j = 1, 2$  la curva

$$\begin{aligned} \alpha_j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\longrightarrow \alpha_j(t) = \varphi^j(it, (z_1, z_2)) = (z_1 e^{it}, \varphi_2^j(it, (z_1, z_2))) \end{aligned}$$

parametriza  $C_1 \cap \mathcal{O}_{Z_j}(z)$ . Esto es,  $C_1 \cap \mathcal{O}_{Z_j}(z)$  es una hoja de la foliación  $\mathcal{F}_{Z_j}^*|_{C_1}$  que pasa por  $z \in C_1$ .

Vamos a probar que  $\xi$  así definida lleva hojas de  $\mathcal{F}_{Z_1}^*|_{C_1}$  en hojas de  $\mathcal{F}_{Z_2}^*|_{C_1}$ . En efecto, sea  $p = (z_1, z_2) \in \Sigma_t \subset C_1$  (esto es,  $p$  está en alguna de las fibras de  $C_1$ ) entonces existe  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z'_2 \in D_\rho(0)$  tal que  $(z_1, z_2) = (e^{it}, h_t(z'_2)) = (e^{it}, \varphi_2^1(it, (1, z'_2))) = \varphi^1(it, (1, z'_2))$ .

Sea  $q \in C_1 \cap \mathcal{O}_{Z_1}(p) \in \mathcal{F}_{Z_1}^*|_{C_1}$  entonces  $q = \varphi^1(it_0, p) = (e^{it_0} \cdot z_1, \varphi_2^1(it_0, p))$  para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Así tenemos que,

$$\begin{aligned}
 \xi(q) &= \xi(\varphi^1(it_0, (z_1, z_2))) = \xi(e^{it_0} z_1, \varphi_2^1(it_0, (z_1, z_2))) \\
 &= \xi(e^{it_0} \cdot e^{it}, \varphi_2^1(it_0, \varphi^1(it, (1, z'_2)))) \\
 &= \xi(e^{i(t_0+t)}, \varphi_2^1(i(t_0+t), (1, z'_2))) \\
 &= \xi(e^{i(t_0+t)}, h_{t_0+t}(z'_2)) \\
 &= (e^{i(t_0+t)}, \tilde{h}_{t_0+t}(\hat{\xi}(z'_2))) \\
 &= (e^{i(t_0+t)}, \varphi_2^2(i(t_0+t), (1, \hat{\xi}(z'_2)))) \\
 &= (e^{it_0} \cdot e^{it}, e^{i\lambda(t_0+t)} \cdot \hat{\xi}(z'_2)) \\
 &= (e^{it_0} \cdot e^{it}, e^{i\lambda t_0} \cdot \hat{\xi}(z'_2) \cdot e^{i\lambda t}) \\
 &= \varphi^2(it_0, (e^{it}, \hat{\xi}(z'_2) \cdot e^{i\lambda t})) \\
 &= \varphi^2(it_0, (e^{it}, \varphi_2^2(it, (1, \hat{\xi}(z'_2)))))) \\
 &= \varphi^2(it_0, (e^{it}, \tilde{h}_t(\hat{\xi}(z'_2)))) \\
 &= \varphi^2(it_0, \xi(e^{it}, h_t(z'_2))) \\
 &= \varphi^2(it_0, \xi(e^{it}, \varphi_2^1(it, (1, z'_2)))) \\
 &= \varphi^2(it_0, \xi(\varphi^1(it, (1, z'_2)))) \\
 &= \varphi^2(it_0, \xi(p))
 \end{aligned}$$

Entonces  $\xi(q) \in C_1 \cap \mathcal{O}_{Z_2}(\xi(p)) \in \mathcal{F}_{Z_2}^*|_{C_1}$ ,  $p \in C_1$ .

Así hemos probado que  $\xi$  lleva hojas de  $\mathcal{F}_{Z_1}^*|_{C_1}$  en hojas de  $\mathcal{F}_{Z_2}^*|_{C_1}$ . De este modo, la conjugación  $\xi$  queda definida en el cilindro  $C_1$  de radio 1.

Ahora extenderemos  $\xi$  al polidisco  $\Delta((0, 0), (1, \rho)) = D_1(0) \times D_\rho(0) \subset \mathbb{C}^2$

$$\xi : \Delta((0, 0), (1, \rho)) \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

Sea  $z_1 \in D_1(0)$ ,  $z_1 \neq 0$ . Definamos el camino radial

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{z_1} &: [0, -\log|z_1|] \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \{0\} \\
 &\quad t \longrightarrow (e^t \cdot z_1, 0)
 \end{aligned}$$

contenido en la hoja  $\mathbb{C}^* \times \{0\} \in \mathcal{F}_{Z_1}$  con punto inicial  $(z_1, 0)$  y extremo  $(\frac{z_1}{|z_1|}, 0) \in C_1$ . Fijemos una sección transversal  $\Sigma_{z_1} = \{z_1\} \times D_\rho(0)$ , pasando por el punto  $(z_1, 0)$  y levantemos el camino radial  $\Gamma_{z_1}$  dentro de la hoja de  $\mathcal{F}_{Z_1}$  pasando por el punto  $(z_1, z_2) \in \Sigma_{z_1}$  en el camino

$$\Gamma_{(z_1, z_2)} : t \longrightarrow (e^t \cdot z_1, z_2(t)), \quad z_2(0) = z_2$$

cuyo punto inicial es  $(z_1, z_2)$  y el extremo  $(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)) \in C_1$ ,  $\tau = -\log|z_1|$ . De este modo,

$$\Gamma_{(z_1, z_2)}(t) = (e^t \cdot z_1, z_2(t)) = \varphi^1(t, (z_1, z_2)), \quad \forall t \in [0, -\log|z_1|].$$

Entonces,  $z_2(t) = \varphi_2^1(t, (z_1, z_2))$ , para todo  $t \in [0, -\log|z_1|]$ . Esto es, la solución  $z_2(t)$  de la ecuación diferencial

$$z_2'(t) = \lambda z_2(t)(1 + \varphi_1(z_1(t), z_2(t)))$$

con condición inicial  $z_2(0) = z_2$ , está definida en el intervalo  $[0, -\log|z_1|]$ , para  $0 < |z_2| < 1$ . En efecto tenemos que,

$$\log|z_2(t)|^2 = \log|z_2(0)|^2 + \int_0^t \frac{d}{ds} \log|z_2(s)|^2 ds$$

entonces

$$2 \log \frac{|z_2(t)|}{|z_2(0)|} = \int_0^t \frac{\frac{d}{ds} |z_2(s)|^2}{|z_2(s)|^2} ds.$$

Pero

$$\frac{d}{ds} |z_2(s)|^2 = 2 \langle z_2'(s), z_2(s) \rangle = 2 \operatorname{Re} (\langle z_2'(s), z_2(s) \rangle_H)$$

entonces

$$\begin{aligned} 2 \log \frac{|z_2(t)|}{|z_2(0)|} &= \int_0^t \frac{2 \operatorname{Re} (\langle z_2'(s), z_2(s) \rangle_H)}{|z_2(s)|^2} ds \\ &= \int_0^t \frac{2 \operatorname{Re} (z_2'(s) \cdot \overline{z_2(s)})}{|z_2(s)|^2} ds. \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} z_2'(s) \cdot \overline{z_2(s)} &= \lambda z_2(s) (1 + \varphi_1(z_1(s), z_2(s))) \cdot \overline{z_2(s)} \\ &= \lambda |z_2(s)|^2 (1 + \varphi_1(z_1(s), z_2(s))). \end{aligned}$$

Entonces

$$2 \log \frac{|z_2(t)|}{|z_2(0)|} = 2\lambda \int_0^t \operatorname{Re} (1 + \varphi_1(z_1(s), z_2(s))) ds.$$

Por otro lado,

$$\operatorname{Re} (1 + \varphi_1(z_1(s), z_2(s))) \leq |1 + \varphi_1(z_1(s), z_2(s))| \leq 1 + |\varphi_1(z_1(s), z_2(s))| \leq 1 + b$$

donde  $b > 0$  tal que  $|\varphi_1(z_1, z_2)| \leq b$ . Entonces

$$2 \log \frac{|z_2(t)|}{|z_2(0)|} \leq 2\lambda(1 + b)t$$

luego,

$$|z_2(t)| \leq |z_2(0)| \cdot e^{\lambda(1+b)t} \leq |z_2| < \rho, \quad (2.21)$$



para todo  $t \in [0, -\log|z_1|]$ , pues  $\lambda \in \mathbb{R}^-$  y  $t \geq 0$ .

Análogamente para el campo  $Z_2$  definamos el camino radial (el camino inverso de  $\Gamma_{z_1}$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_{z_1}^{-1} : [0, -\log|z_1|] &\longrightarrow \mathbb{C}^* \times \{0\} \\ t &\longrightarrow (e^{-t-\log|z_1|} \cdot z_1, 0) \end{aligned}$$

el cual se levanta dentro de las hojas de  $\mathcal{F}_{Z_2}$  pasando por el punto  $(\frac{z_1}{|z_1|}, w_2)$ , en el camino

$$\Gamma_{(z_1, w_2)}^{-1} : t \longrightarrow (e^{-t-\log|z_1|} \cdot z_1, w_2(t)), \quad w_2(0) = w_2$$

cuyo punto inicial es  $(\frac{z_1}{|z_1|}, w_2) \in C_1$  y el extremo  $(z_1, w_2(\tau))$ .

La coordenada  $w_2(t)$  para todo  $t \in [0, -\log|z_1|]$ , satisface el problema de valor inicial

$$w_2'(t) = \lambda \cdot w_2(t), \quad w_2(0) = w_2.$$

Luego,

$$\frac{dw_2(t)}{w_2(t)} = \lambda dt, \quad \forall t \in [0, -\log|z_1|]$$

entonces

$$\frac{d}{dt} (\log(w_2(t))) = \lambda dt.$$

Integrando

$$\int_0^t \frac{d}{ds} (\log(w_2(s))) ds = \int_0^t \lambda ds$$

$$\log(w_2(t)) - \log(w_2(0)) = \lambda t$$

$$\log\left(\frac{w_2(t)}{w_2(0)}\right) = \lambda t$$

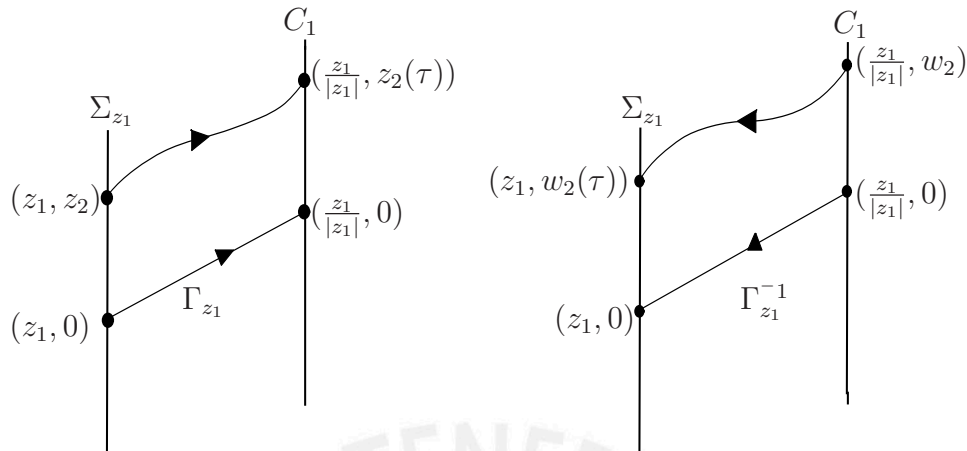
así,  $w_2(t) = w_2(0) \cdot e^{\lambda t}$  para todo  $t \in [0, -\log|z_1|]$ . Además,

$$|w_2(t)| = |w_2| \cdot e^{\lambda t} \leq |w_2| \tag{2.22}$$

pues,  $\lambda \in \mathbb{R}^-$ ,  $t \geq 0$ .

De este modo, construimos  $\xi$  de la siguiente manera: Al punto inicial  $(z_1, z_2)$  del camino  $\Gamma_{(z_1, z_2)}$  le hacemos corresponder el punto  $(z_1, w_2(\tau))$  del camino  $\Gamma_{(z_1, w_2)}^{-1}$ , el extremo  $(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)) \in C_1$  del camino  $\Gamma_{(z_1, z_2)}$  le hacemos corresponder el punto  $(\frac{z_1}{|z_1|}, w_2) \in C_1$  del camino  $\Gamma_{(z_1, w_2)}^{-1}$ . Así entonces tenemos:

$$\xi(z_1, z_2) = (z_1, w_2(\tau)) = \left( z_1, \varphi_2^2 \left( -\tau, \left( \frac{z_1}{|z_1|}, w_2 \right) \right) \right) = (z_1, e^{-\lambda \tau} \cdot w_2),$$



$$\Gamma_{(z_1, z_2)} = (e^t \cdot z_1, z_2(t))$$

$$\Gamma_{(z_1, w_2)}^{-1} = (e^{-t - \log|z_1|} \cdot z_1, w_2(t))$$

$$\tau = -\log|z_1|.$$

Pero, puesto que  $(\frac{z_1}{|z_1|}, w_2) \in C_1$  y  $\xi$  esta definida en  $C_1$  se tiene

$$\left(\frac{z_1}{|z_1|}, w_2\right) = \xi\left(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)\right),$$

así  $w_2 = \xi_2\left(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)\right)$  donde  $z_2(\tau) = \varphi_2^1(\tau, (z_1, z_2))$ .

Luego,  $\xi$  queda definida por:

$$\xi(z_1, z_2) = \left(z_1, e^{\lambda \log|z_1|} \cdot \xi_2\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(\tau, (z_1, z_2))\right)\right)$$

para todo  $(z_1, z_2) \in (D_1(0) - \{0\}) \times D_\rho(0)$ .

Puesto que,  $(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)) \in C_1$  y sabemos por (2.20) que  $\xi$  está bien definida en ese conjunto y además es un biholomorfismo entonces  $\xi(z_1, z_2)$  es un biholomorfismo, para todo  $(z_1, z_2) \in (D_1(0) - \{0\}) \times D_\rho(0)$ .

El conjunto  $V$  de los puntos  $(z_1, z_2) \in (D_1(0) - \{0\}) \times D_\rho(0)$  tales que el extremo de  $\Gamma_{(z_1, z_2)} \in C_1$  es un abierto y  $V \cup \{z_1 = 0\}$  es una vecindad de  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Veamos que  $\xi$  así definida es una conjugación de las hojas  $\mathcal{F}_{z_1}|_V$  en hojas de  $\mathcal{F}_{Z_2}|_{\xi(V)}$ .

En efecto, sea  $p \in V$  tal que  $p = \varphi^1(T, (z_1, z_2))$  para algún  $T \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \xi(p) &= \xi(\varphi^1(T, (z_1, z_2))) = \xi(e^T \cdot z_1, \varphi_2^1(T, (z_1, z_2))) \\ &= (e^T \cdot z_1, e^{-\lambda \tau} \cdot \xi_2\left(\frac{e^T \cdot z_1}{|e^T \cdot z_1|}, \varphi_2^1(\tau, (e^T \cdot z_1, \varphi_2^1(T, (z_1, z_2))))\right)) \end{aligned}$$

donde  $\tau = -\log |e^T \cdot z_1|$ .

Si consideramos  $T = t + \theta i$  entonces  $\tau = -t - \log |z_1|$ . Así,

$$\begin{aligned}
 \xi(p) &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda(t+\log |z_1|)} \cdot \xi_2\left(\frac{e^{\theta i} \cdot z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-t - \log |z_1|, (e^T \cdot z_1, \varphi_2^1(T, (z_1, z_2))))\right)) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(\frac{e^{\theta i} \cdot z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-t - \log |z_1|, \varphi^1(T, (z_1, z_2))))\right) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(\frac{e^{\theta i} \cdot z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-t - \log |z_1| + t + \theta i, (z_1, z_2))))\right) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(\frac{e^{\theta i} \cdot z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-\log |z_1| + \theta i, (z_1, z_2))))\right) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(\frac{e^{\theta i} \cdot z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(\theta i, \varphi^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))))\right) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(\frac{e^{\theta i} \cdot z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(\theta i, (e^{-\log |z_1|} \cdot z_1, \varphi_2^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))))\right)) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(e^{\theta i} \cdot \frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1\left(\theta i, \left(\frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))\right)\right)\right)) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(\varphi^1(\theta i, \left(\frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))\right)\right))\right) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot \varphi_2^2\left(\theta i, \xi\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))\right)\right)) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot |z_1|^\lambda \cdot e^{\lambda(i\theta)} \cdot \xi_2\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))\right)) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda i\theta} \cdot e^{\lambda \log |z_1|} \cdot \xi_2\left(e^{-\log |z_1|} \cdot z_1, \varphi_2^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))\right)) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda(t+\theta i)} \cdot e^{-\lambda\tau} \cdot \xi_2\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(\tau, (z_1, z_2))\right)) \\
 &= (e^T \cdot z_1, e^{\lambda(t+\theta i)} \cdot \xi_2(z_1, z_2)) \\
 &= \varphi^2(t + \theta i, (z_1, \xi_2(z_1, z_2))) \\
 &= \varphi^2(t + \theta i, \xi(z_1, z_2))
 \end{aligned}$$

Luego,  $\xi(p) = \varphi^2(T, \xi(z_1, z_2)) \in \mathcal{O}_{Z_2}(\xi(z_1, z_2))$  para algún  $T = t + \theta i \in \mathbb{C}$ .

Así hemos probado que  $\xi$  lleva hojas de  $\mathcal{F}_{Z_1}|_V$  en hojas de  $\mathcal{F}_{Z_2}|_{\xi(V)}$ .

Observamos hasta ahora según la contrucción hecha que  $\xi(z_1, z_2)$  es un biholomorfismo sobre  $V$  satisfaciendo:

1.  $\xi(0, 0) = (0, 0)$ , esto es, el punto singular de  $Z_1$  es llevado en el punto singular de  $Z_2$ .
2. Si  $z_1 \neq 0$ ,  $\xi(z_1, 0) = (z_1, 0)$ , esto es, la hoja  $\mathbb{C}^* \times \{0\} \in \mathcal{F}_{Z_1}$  es llevada en la hoja  $\mathbb{C}^* \times \{0\} \in \mathcal{F}_{Z_2}$ .

3.  $\xi(1, z_2) = (1, \widehat{\xi}(z_2)), \quad z_2 \in D_\rho(0).$
4.  $\xi(z_1, z_2) = (z_1, \varphi_2^2(i \arg(z_1), (1, \widehat{\xi}(z_2')))), \quad (z_1, z_2) \in C_1, \text{ con } z_2' = h_t^{-1}(z_2).$
5.  $\xi(z_1, z_2) = (z_1, e^{\lambda \log |z_1|} \cdot \xi_2(\frac{z_1}{|z_1|}, \varphi_2^1(-\log |z_1|, (z_1, z_2))))), \quad (z_1, z_2) \in (D_1(0) - \{0\}) \times D_\rho(0).$

Sólo falta extender  $\xi$  a la separatriz vertical  $\{z_1 = 0\}$ . Para ello probaremos que  $\xi_2 : V \rightarrow \mathbb{C}$  es acotada. Veamos

$$\xi_2(z_1, z_2) = |z_1|^\lambda \cdot \xi_2\left(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)\right), \quad \tau = -\log |z_1|.$$

Entonces

$$|\xi_2(z_1, z_2)| = |z_1|^\lambda \cdot \left| \xi_2\left(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)\right) \right|,$$

siendo,  $\xi_2\left(\frac{z_1}{|z_1|}, z_2(\tau)\right) = w_2(0) = w_2$ .

Por otro lado, de (2.22) tenemos que,  $|w_2(\tau)| = |w_2| \cdot e^{\lambda\tau}$ . Así,

$$|w_2| = |w_2(\tau)| \cdot e^{-\lambda\tau}. \tag{2.23}$$

De (2.21) se tiene

$$|z_2(\tau)| \leq |z_2(0)| \cdot e^{\lambda(1+b)\tau} = |z_2| \cdot e^{\lambda\tau} \cdot e^{\lambda b\tau},$$

entonces

$$|z_2(\tau)| \cdot e^{-\lambda\tau} \leq |z_2| \cdot e^{\lambda b\tau}.$$

Multiplicando por  $|w_2(\tau)|$  esta última desigualdad y reemplazando (2.23) obtenemos que,

$$|z_2(\tau)| |w_2| \leq |w_2(\tau)| |z_2| \cdot e^{\lambda b\tau}$$

luego,

$$|w_2| \leq \frac{|w_2(\tau)|}{|z_2(\tau)|} |z_2| \cdot e^{\lambda b\tau}.$$

Así,

$$|\xi_2(z_1, z_2)| \leq \frac{|w_2(\tau)|}{|z_2(\tau)|} \cdot e^{\lambda\tau(b-1)} |z_2| < \frac{|w_2(\tau)|}{|z_2(\tau)|} \cdot e^{-\lambda\tau} |z_2| < k \rho = \delta,$$

donde,  $k = \frac{|w_2(\tau)|}{|z_2(\tau)|} \cdot e^{-\lambda\tau} > 0$ . Entonces, existe  $\delta > 0$  de modo que,  $\delta \rightarrow 0$  cuando  $\rho \rightarrow 0$  y  $|\xi_2(z_1, z_2)| < \delta$ , para todo  $(z_1, z_2) \in V$ . De este modo  $\xi_2$  es acotada, entonces por el Teorema de Extensión de Riemann,  $\xi$  se extiende al conjunto  $V \cup \{z_1 = 0\}$ , que es una vecindad abierta de  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Luego, existe un biholomorfismo local de  $\mathbb{C}^2$  en  $0 \in \mathbb{C}^2$  que transforma la foliación asociada a  $Z_1 = (z_1, \lambda z_2(1 + \varphi_1(z_1, z_2)))$  en aquella asociada a  $Z_2 = (z_1, \lambda w_2)$ .

## Capítulo 3

### El Teorema del Centro

En este capítulo enunciaremos y demostraremos el Teorema del Centro, resultado principal de esta monografía. Vamos a ver como argumentos de la teoría de variable compleja son utilizados para demostrar este teorema de naturaleza real. Denotemos por  $\mathbb{R}\{x, y\}$  el conjunto de las series de potencias convergentes en alguna vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^2$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ . Esto es, si  $P(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$  entonces  $P(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=k}^{\infty} c_{(\alpha,\beta)} x^\alpha y^\beta$  con  $k \geq 0$ , es convergente en alguna vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Consideremos la ecuación

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy \quad (3.1)$$

la cual denota un germen de una 1-forma analítica real en  $0 \in \mathbb{R}^2$ , esto es,  $a(x, y), b(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$ . Las singularidades de  $\omega$  son los puntos  $(x, y)$  tales que  $a(x, y) = b(x, y) = 0$ .

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -b_{(1,0)} & -b_{(0,1)} \\ a_{(1,0)} & a_{(0,1)} \end{pmatrix}.$$

Si  $\det A \neq 0$  entonces  $\omega$  tiene parte lineal.

**Definición 3.0.1.** *Decimos que  $0 \in \mathbb{R}^2$  es un centro para  $\omega$  si existe una vecindad  $U$  de  $0$  dentro de  $\mathbb{R}^2$  tal que las curvas integrales de  $\omega$  en  $U - \{0\}$  son cerradas.*

**Teorema 3.1.** *Sea  $0 \in \mathbb{R}^2$  una singularidad de  $\omega$ . Si  $\det A \neq 0$  y  $0$  es un centro para  $\omega$  entonces  $\omega$  posee una integral primera.*

**Demostración:** Puesto que  $0 \in \mathbb{R}^2$  es una singularidad de  $\omega$  y  $\det A \neq 0$  se tiene que los desarrollos en series de potencias de las funciones  $a(x, y)$

y  $b(x, y)$  en una vecindad de 0 son:  $a(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} a_{(\alpha,\beta)}x^\alpha y^\beta$  y  $b(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} b_{(\alpha,\beta)}x^\alpha y^\beta$ .

El campo vectorial dual asociado a  $\omega = 0$  está dado por:

$$X = -b(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.2}$$

La parte lineal de  $\omega$

$$\omega_1 = (a_{(1,0)}x + a_{(0,1)}y)dx + (b_{(1,0)}x + b_{(0,1)}y)dy$$

tiene como campo lineal asociado

$$X_1 = (-b_{(1,0)}x - b_{(0,1)}y) \frac{\partial}{\partial x} + (a_{(1,0)}x + a_{(0,1)}y) \frac{\partial}{\partial y}$$

el cual se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales

$$X_1 = \begin{cases} x' = -b_{(1,0)}x - b_{(0,1)}y \\ y' = a_{(1,0)}x + a_{(0,1)}y \end{cases} \tag{3.3}$$

cuya representación matricial tiene la forma

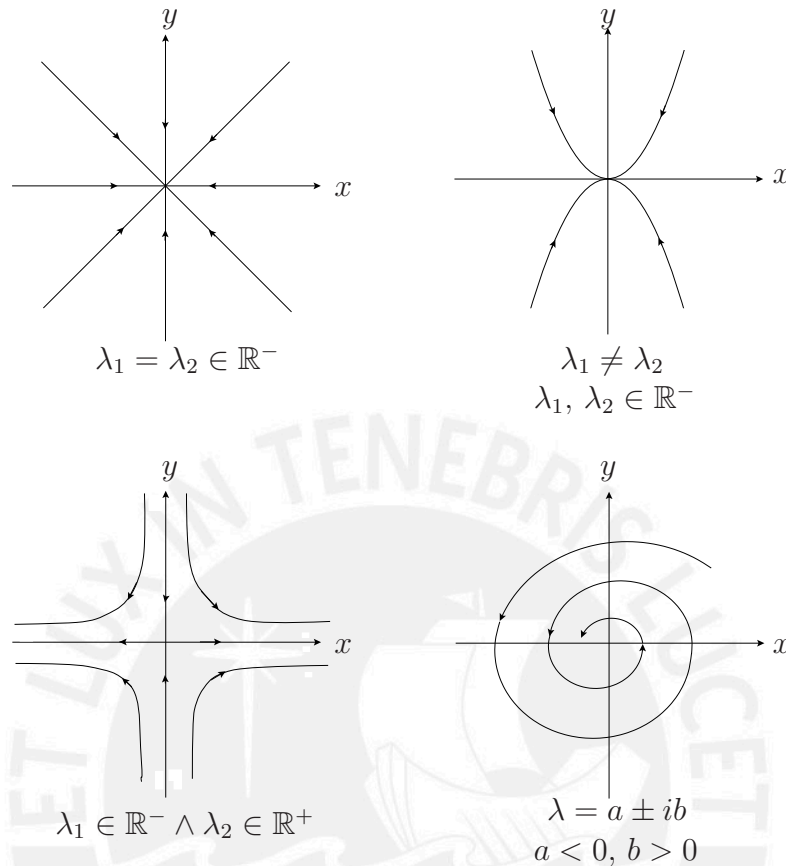
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -b_{(1,0)} & -b_{(0,1)} \\ a_{(1,0)} & a_{(0,1)} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Proposición 3.1.** *Los valores característicos de  $A$  son números complejos imaginarios puros.*

**Demostración:** Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los valores característicos de  $A$  y supongamos que no son imaginarios puros, esto es,  $Re(\lambda_i) \neq 0$  para  $i = 1, 2$ ; entonces  $(0, 0)$  es un punto singular hiperbólico de  $X$  (Definición 1.2.5). Tenemos los siguientes casos:

- i)  $\lambda_1 = \lambda_2$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$  (o  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ).
- ii)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$  (o  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ).
- iii)  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-$  y  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$  (o  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$  y  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^-$ ).
- iv)  $\lambda = a \pm ib$ , con  $a, b \neq 0$ .





Según estos casos vemos que las curvas integrales de  $X_1$  se comportan como alguno de los tipos mostrados en la Figura de abajo (foco, nodo, silla o espiral); comportamiento cualitativo que se sigue manteniendo según el *Teorema de Hartman Grobman* para  $X$  (equivalentemente para  $\omega$ ), puesto que  $(0, 0)$  es un punto singular hiperbólico de  $X$ . Pero observamos que dentro de estos casos (foco, nodo, silla o espiral) al menos una de las curvas integrales no singulares de  $X$  contiene al cero dentro de su adherencia, lo cual es una contradicción, pues  $(0, 0)$  es un centro para  $\omega$ , todas las curvas son cerradas ninguna se acumula a cero. Por lo tanto, los valores característicos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $A$  son imaginarios puros, esto es,  $\lambda_1 = ib$  y  $\lambda_2 = -ib$ , con  $b \neq 0$ .

Sabemos que el complejificado de  $\mathbb{R}^2$  es  $\mathbb{C}^2$  y que el operador  $\mathbb{R}$ -lineal  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se extiende de manera natural a un operador  $\mathbb{C}$ -lineal  $A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  (el complejificado de  $A$ ) definido por:

$$A_{\mathbb{C}}(u + iv) = A(u) + iA(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^2;$$

además, si  $u + iv \in \mathbb{C}^2$  para algún  $u, v \in \mathbb{R}^2$  es el vector característico de  $A_{\mathbb{C}}$  correspondiente al valor característico  $\lambda_1 = ib$  entonces el conjunto

$\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$  es una base para  $\mathbb{R}^2$ . Relativa a esta base la matriz  $A$  tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} -b_{(1,0)} & -b_{(0,1)} \\ a_{(1,0)} & a_{(0,1)} \end{pmatrix} \text{ es semejante a } \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

ellas representan la misma transformación lineal pero en bases diferentes. En esta nueva base, el sistema (3.3) toma la forma (vamos a seguir considerando las nuevas coordenadas como  $(x, y)$ )

$$X_1 = \begin{cases} x' = -by \\ y' = bx \end{cases} \quad (3.4)$$

La foliación generada por el campo (3.4) es igual a la foliación generada por el campo

$$X_1 = \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Así, finalmente el campo (3.2) toma la forma

$$X = -(y + b_{(2,0)}x^2 + b_{(1,1)}xy + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + (x + a_{(2,0)}x^2 + a_{(1,1)}xy + \dots) \frac{\partial}{\partial y}$$

y

$$\omega = (x + a_{(2,0)}x^2 + a_{(1,1)}xy + \dots) dx + (y + b_{(2,0)}x^2 + b_{(1,1)}xy + \dots) dy = 0.$$

Nuestro propósito es utilizar argumentos de la teoría de variable compleja para demostrar este teorema sobre centros reales, para lograrlo a partir de aquí en adelante vamos a trabajar con la Ecuación Complejificada de  $\omega = 0$ , la cual definimos como:

$$\Omega = (z + a_{(2,0)}z^2 + a_{(1,1)}zw + \dots) dz + (w + b_{(2,0)}z^2 + b_{(1,1)}zw + \dots) dw = 0 \quad (3.5)$$

donde  $\Omega$  es un germen de una 1-forma holomorfa en  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$  con  $Re(z) = x$  y  $Re(w) = y$ .

El campo vectorial dual asociado a  $\Omega = 0$  está dado por:

$$X = -(w + b_{(2,0)}z^2 + b_{(1,1)}zw + \dots) \frac{\partial}{\partial z} + (z + a_{(2,0)}z^2 + a_{(1,1)}zw + \dots) \frac{\partial}{\partial w}$$

Ahora podemos utilizar argumentos de la teoría de variable compleja para continuar de manera natural la demostración del Teorema del Centro.

El primer argumento de variable compleja a utilizar es el concepto de Explosión de una foliación  $\mathcal{F}$  en un punto (Ver Sección 2.1.3).

El representante del germen de la 1-forma holomorfa  $\Omega$ , que denotamos nuevamente por  $\Omega$  define una foliación holomorfa  $\mathcal{F}_\Omega$  de dimensión 1 en alguna vecindad  $U$  de  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Veamos lo que ocurre con esta foliación en  $U$  después de un blow-up  $\pi$  de  $\mathbb{C}^2$  en el punto  $0 \in \mathbb{C}^2$ .

El Cono Tangente de la foliación  $\mathcal{F}_\Omega$  es en este caso un polinomio homogéneo de grado 2 dado por:

$$R(z, w) = w^2 + z^2.$$

Puesto que  $R(z, w) \not\equiv 0$  la singularidad  $(0, 0)$  de  $X$  es no dicrítica y según lo visto en 2.1.3 en el sistema de coordenadas  $(z, T)$  para  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 = \frac{\pi^*(X)}{z} = & -z(T + z(b_{(2,0)} + b_{(1,1)}T + b_{(0,2)}T^2) + \dots) \frac{\partial}{\partial z} + ((1 + T^2) + \\ & z((a_{(2,0)} + b_{(2,0)}T) + (a_{(1,1)} + b_{(1,1)}T)T + (a_{(0,2)} + b_{(0,2)}T)T^2) + \dots) \frac{\partial}{\partial T} \end{aligned}$$

o equivalentemente la 1-forma dual

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 = \frac{\pi^*(\Omega)}{z} = & ((1 + T^2) + z((a_{(2,0)} + b_{(2,0)}T) + (a_{(1,1)} + b_{(1,1)}T)T + (a_{(0,2)} + \\ & b_{(0,2)}T)T^2) + \dots) dz + z(T + z(b_{(2,0)} + b_{(1,1)}T + b_{(0,2)}T^2) + \dots) dT = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En el otro sistema de coordenadas  $(S, w)$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  obtenemos por cálculo análogo que

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 = \frac{\pi^*(X)}{w} = & -((1 + S^2) + w((b_{(0,2)} + a_{(0,2)}S) + (b_{(1,1)} + a_{(1,1)}S)S + (b_{(2,0)} + \\ & a_{(2,0)}S)S^2) + \dots) \frac{\partial}{\partial S} + w(S + w(a_{(0,2)} + a_{(1,1)}S + a_{(2,0)}S^2) + \dots) \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned}$$

o equivalentemente la 1-forma dual

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_2 = \frac{\pi^*(\Omega)}{w} = & w(S + w(a_{(0,2)} + a_{(1,1)}S + a_{(2,0)}S^2) + \dots) dS + ((1 + S^2) + \\ & w((b_{(0,2)} + a_{(0,2)}S) + (b_{(1,1)} + a_{(1,1)}S)S + (b_{(2,0)} + a_{(0,2)}S)S^2) + \dots) dw = 0. \end{aligned}$$

Las singularidades de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_1}$  (foliación en  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ , generada por la 1-forma holomorfa  $\tilde{\Omega}_1$ ) en el divisor  $D$  son los puntos de la forma  $(0, T_0)$  que satisfacen la ecuación  $R(1, T_0) = 0$ .

$$R(1, T_0) = 1 + T_0^2 = 0 \iff T_0 = \pm i$$

Así tenemos que las singularidades de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_1}$  son los puntos  $p_1 = (0, i)$  y  $p_2 = (0, -i)$ .

Análogamente, las singularidades de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_2}$  (foliación en  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ , generada por la 1-forma holomorfa  $\tilde{\Omega}_2$ ) en el divisor  $D$  son los puntos de la forma  $(S_0, 0)$  tales que  $R(S_0, 1) = 0$ .

$$R(S_0, 1) = S_0^2 + 1 = 0 \iff S_0 = \pm i$$

Así tenemos que las singularidades de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_2}$  son los puntos  $q_1 = (i, 0)$  y  $q_2 = (-i, 0)$ .

Hacemos notar, que sólo tenemos dos singularidades en el divisor  $D$ , ya que  $p_1 = (0, i)$  en las coordenadas  $(z, T)$  es el mismo punto  $q_2 = (-i, 0)$  en las coordenadas  $(S, w)$ . Del mismo modo que,  $p_2 = (0, -i)$  en las coordenadas  $(z, T)$  es el mismo punto  $q_1 = (i, 0)$  en las coordenadas  $(S, w)$ . Además,  $D - \{p_1, p_2\}$  es una hoja de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_1}$ . Luego, las formas  $\tilde{\Omega}_1(z, T)$  y  $\tilde{\Omega}_2(S, w)$  definen sobre  $\tilde{\mathbb{C}}^2 - \{p_1, p_2\}$  una foliación sin singularidades denotada por  $\pi^*(\mathcal{F}_\Omega)$  y llamada el blow-up de  $\mathcal{F}_\Omega$  en  $0 \in \mathbb{C}^2$ .

Ahora veamos como se comportan las hojas de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_1}$  próximas a esta hoja fija  $\tilde{L}_0 = D - \{p_1, p_2\}$ . Observaremos este comportamiento en una vecindad del punto  $(0, i)$ , pero sin pérdida de generalidad nos podemos trasladar al punto  $(0, 0) \in D$  haciendo el cambio de coordenadas  $T = u + i$ . Así tenemos que (3.6) en las coordenadas  $(z, u)$  se escribe como:

$$\tilde{\Omega}_1 = (2iu + u^2 + a_{(2,0)}z + b_{(2,0)}(u + i)z + a_{(1,1)}(u + i)z + b_{(1,1)}(u + i)^2z + \dots)dz + (iz + uz + z^2(b_{(2,0)} + b_{(1,1)}(u + i) + b_{(0,2)}(u + i)^2) + \dots)du = 0.$$

Ordenando la parte lineal y agrupando los términos de orden superior(t.o.s) se tiene que

$$\tilde{\Omega}_1 = (2iu + i\alpha z + t.o.s)dz + (iz + t.o.s)du.$$

donde  $\alpha = -ia_{(2,0)} + a_{(1,1)} + ia_{(0,2)} + b_{(2,0)} + ib_{(1,1)} - b_{(0,2)}$ . Entonces la parte lineal  $\tilde{\Omega}_{11}$  de  $\tilde{\Omega}_1$  en el punto  $(0, i)$  está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{11} &= (2iu + i\alpha z) dz + iz du \\ &= i[(2u + \alpha z) dz + z du]. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $v = u + \frac{\alpha}{3}z$  obtenemos

$$\tilde{\Omega}_{11} = i[2v dz + z dv]. \tag{3.7}$$

La foliación generada por (3.7) es igual a la foliación generada por

$$\tilde{\Omega}_{11} = 2v dz + z dv.$$

Así el campo vectorial holomorfo  $\tilde{X}_1$  asociado a la 1-forma holomorfa  $\tilde{\Omega}_1$  toma la forma:

$$\tilde{X}_1 = \begin{cases} z' = -z + A_1(z, v) \\ v' = 2v + A_2(z, v) \end{cases} \quad (3.8)$$

donde las funciones  $A_j$  son analíticas en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  y  $A_j(0, 0) = 0$  para  $j = 1, 2$ .

Observamos en (3.8) que el cociente  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-1}{2}$  de los autovalores es un número real negativo entonces la singularidad  $(0, i) \in D$  (la cual identificamos con la singularidad  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  de  $X$ ) de  $\tilde{X}_1$  está en el dominio de Siegel, luego por el *Teorema de Briot-Bouquet* (Ver Sección 1.3.3) existe un cambio de coordenadas holomorfo (el cual seguiremos denotando por  $(z, v)$ ) que transforma (3.8) en

$$\tilde{X}_1 = \begin{cases} z' = -z + zv a_1(z, v) \\ v' = 2v + zv a_2(z, v) \end{cases} \quad (3.9)$$

donde las funciones  $a_j$  son analíticas en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  y  $a_j(0, 0) = 0$  para  $j = 1, 2$ . Además, los conjuntos  $S_1 = \{z = 0\}$  y  $S_2 = \{v = 0\}$  son curvas invariantes de  $\tilde{X}_1$  (equivalentemente de  $\tilde{\Omega}_1$ ), siendo  $S_1 = D$  el divisor de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  y  $\tilde{L}_0 = D - \{p_1, p_2\}$  una hoja de  $\mathcal{F}_{\tilde{X}_1}$ .

**Proposición 3.2.** *La holonomía de  $\tilde{L}_0$  es periódica de periodo 2.*

**Demostración:** Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  una vecindad abierta de  $0 \in \mathbb{R}^2$  en la cual el representante del germen de la 1-forma  $\omega$  que denotamos nuevamente por  $\omega$  es analítica. Al hacer la explosión de  $\mathbb{R}^2$  en 0, obtenemos la variedad diferenciable  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  (Banda de Möbius) la cual como sabemos es un  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial sobre  $\mathbb{R}P(1) \simeq S^1$ , con fibra  $P^{-1}(q)$ ,  $q \in \mathbb{R}P(1)$ .

Sea  $P_0 = (z, T) = (0, 0) \in D = \mathbb{C}P(1)$ . Puesto que,  $\tilde{L}_0 \simeq \mathbb{R}^2 - \{0\}$  entonces  $\pi_1(\tilde{L}_0, P_0) \simeq \mathbb{Z}$ . Esto es, el grupo fundamental de  $\tilde{L}_0$  con punto base  $P_0$  es generado por un sólo elemento. Podemos considerar a este elemento como la clase de homotopía de la curva  $\gamma = S^1 \simeq \mathbb{R}P(1) \subset \mathbb{C}P(1) = D$  (con punto inicial y final en  $P_0 \in D$ ) contenida en  $\tilde{L}_0$ .

Vamos a estudiar la holonomía de  $\tilde{L}_0$  con respecto al punto  $P_0 \in \tilde{L}_0$  y a la sección transversal  $\Sigma_{\mathbb{C}} = E^{-1}(P_0) \simeq \mathbb{C}$  a lo largo de este camino  $\gamma \subset \tilde{L}_0$ , donde  $E^{-1}(P_0)$  es la fibra del  $\mathbb{C}$ -fibrado vectorial  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  pasando por el punto  $P_0 \in \mathbb{C}P(1) =$  base de este  $\mathbb{C}$ -fibrado.

Sea  $H : \pi_1(\tilde{L}_0, P_0) \rightarrow \text{Dif}(\Sigma_{\mathbb{C}}, P_0)$  el representante de holonomía de  $\tilde{L}_0$

con respecto a  $P_0$  y a  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ . Puesto que  $H$  es un homomorfismo de grupos y  $\pi_1(\tilde{L}_0, P_0)$  es generado por un sólo elemento ( $[\gamma]$ ) entonces el Grupo de Holonomía  $Hol(\tilde{L}_0, P_0) \subset Dif(\Sigma_{\mathbb{C}}, P_0)$  de  $\tilde{L}_0$  en  $P_0$  también tendrá un sólo generador que denotamos por  $[f]_{\gamma}$  significando que este generador  $[f]$  (germen de holonomía) va a ser estudiado a partir de este camino  $\gamma$ . Así para estudiar la holonomía de  $\tilde{L}_0$  en  $P_0$  será suficiente estudiar la holonomía de esta curva  $\gamma = S^1$  con respecto al punto  $P_0 \in S^1 \simeq \mathbb{R}P(1) \subset \mathbb{C}P(1)$  y a la sección transversal  $\Sigma_{\mathbb{R}} \subset \Sigma_{\mathbb{C}}$  donde  $\Sigma_{\mathbb{R}} = P^{-1}(P_0) \simeq \mathbb{R}$  es la fibra del  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  pasando por el punto  $P_0 \in \mathbb{R}P(1) =$  base de este  $\mathbb{R}$ -fibrado.

La holonomía de  $\gamma$  relativa a  $\Sigma_{\mathbb{R}}$  y al punto  $P_0 \in \Sigma_{\mathbb{R}}$  es un difeomorfismo  $f_{\gamma} : \Sigma'_{\mathbb{R}} \rightarrow \Sigma_{\mathbb{R}}$ , definido en una pequeña vecindad abierta  $\Sigma'_{\mathbb{R}} \subset \Sigma_{\mathbb{R}}$  de  $P_0$  ( $\Sigma'_{\mathbb{R}} \simeq$  segmento de línea recta).

Como sabemos  $\gamma = S^1 \simeq \mathbb{R}P(1)$  es la base del  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  que es homeomorfo a la Banda de Möbius  $M_o$ , entonces estudiar la holonomía de esta curva  $\gamma$  a lo largo de las fibras  $\Sigma_{\mathbb{R}}$  de este  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  equivale a estudiar la holonomía de la curva  $\gamma = S^1$  como base del  $\mathbb{R}$ -fibrado vectorial  $M_o$  sobre  $S^1$ , vista en la Sección 2.2.3 (Ejemplo 2.9 de Holonomía) donde en este caso el segmento de recta  $\Sigma'_{\mathbb{R}} \subset \Sigma_{\mathbb{R}}$  coincide con el intervalo abierto  $] -1, 1[ \subset \mathbb{R}$ . Así tenemos que  $f_{\gamma} : \Sigma'_{\mathbb{R}} \simeq ] -1, 1[ \rightarrow \Sigma_{\mathbb{R}} \simeq ] -1, 1[$  es periódica de periodo 2.

Por otro lado, puesto que la aplicación de holonomía  $f_{\gamma}$  (representante del germen de holonomía  $[f]_{\gamma}$ ) de  $\tilde{L}_0$  con respecto a  $P_0$  y a  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  es un biholomorfismo definido en alguna pequeña vecindad  $\Sigma'_{\mathbb{C}} \subset \Sigma_{\mathbb{C}}$  de  $P_0$  y además siendo  $f_{\gamma}^2 =$  identidad en  $\Sigma'_{\mathbb{R}} \subset \Sigma_{\mathbb{C}}$  con  $P_0 \in \Sigma'_{\mathbb{R}}$  un punto de acumulación en  $\Sigma'_{\mathbb{C}}$  se tiene por el Teorema de la Identidad que

$$f_{\gamma}^2(z) = z, \quad \forall z \in \Sigma'_{\mathbb{C}}.$$

Así la aplicación de holonomía  $f_{\gamma} : \Sigma'_{\mathbb{C}} \rightarrow \Sigma_{\mathbb{C}}$  de  $\tilde{L}_0$  con respecto a  $P_0$  y a  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  a lo largo del camino  $\gamma = S^1 \subset \tilde{L}_0$  es periódica de periodo 2.

Ahora, tomemos la parte lineal de (3.9)

$$\tilde{X}_{11} = \begin{cases} z' = -z \\ v' = 2v \end{cases}$$

Según lo visto en el Ejemplo 2.8 de la Sección 2.2.3, la aplicación de holonomía  $l_{\gamma} : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  ( $(\mathbb{C}, 0) =$  vecindad abierta de  $0 \in \mathbb{C}$ ) de la hoja  $\tilde{L}_0 \simeq \{0\} \times \mathbb{C}^*$  de  $\mathcal{F}_{\tilde{X}_{11}}$  se define como:

$$l_{\gamma}(z) = z \cdot e^{2\pi i \left(\frac{-1}{2}\right)} = -z.$$



Se tiene que  $l_\gamma(z) = -z$  es la parte lineal de la aplicación de holonomía  $f_\gamma$ . Puesto que  $h(z) = \frac{1}{2}(z - f_\gamma(z))$  es un biholomorfismo que conjuga  $f_\gamma$  con  $l_\gamma$ , pues  $h \circ f_\gamma = l_\gamma \circ h$ , se tiene en virtud del *Teorema de Mattei-Moussu* que la foliación  $\mathcal{F}_{\tilde{X}_1}$  es equivalente en una vecindad de  $P_1 = (0, i)$  a la foliación dada por el campo lineal  $\tilde{X}_{11}$ .

El conjunto  $S_2 = \{v = 0\}$  es otra curva invariante de  $\tilde{X}_{11}$  (equivalentemente de  $\tilde{X}_1$ ) y es transversal al divisor  $D$  en el punto  $(0, 0) \in D$ . Además,  $\tilde{L}'_0 = S_2 - \{(0, 0)\}$  es una hoja de  $\mathcal{F}_{\tilde{X}_{11}}$  (equivalentemente de  $\tilde{X}_1$ ) y puesto que,  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 - D} : \tilde{\mathbb{C}}^2 - D \rightarrow \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$  es un biholomorfismo se tiene que  $\pi(\tilde{L}'_0) = L'_0$  es una hoja de  $\mathcal{F}_X$  (equivalentemente de  $\mathcal{F}_\Omega$ ). Veamos que la holonomía de  $L'_0$  está bien definida en alguna pequeña vecindad de  $0 \in \mathbb{C}$ . En efecto, sea  $P_2 = (1, 0) \in \tilde{L}'_0 \simeq \mathbb{C}^* \times \{0\}$  y  $\Sigma = \{(1, v) \in \mathbb{C}^2 / v \in D_\rho(0) \subset \mathbb{C}\} \subset U$  una sección transversal a  $\tilde{L}'_0$  en el punto  $P_2$ . Sea

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \tilde{L}'_0 \simeq \mathbb{C}^* \times \{0\} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = (e^{it}, 0) \end{aligned}$$

una curva cerrada contenida en  $\tilde{L}'_0$  y  $\tilde{\gamma}(t) = (e^{it}, \tilde{\gamma}_2(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  con  $\tilde{\gamma}(0) = (1, v)$  y  $\tilde{\gamma}(2\pi) = (1, l'_\gamma(v))$  el levantamiento de  $\gamma$  sobre la hoja de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_1}$  pasando por  $(1, v) \in \Sigma$ ,  $(1, v)$  suficientemente cercano de  $(1, 0)$ .

Los puntos  $(e^{it}, \tilde{\gamma}_2(t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$  pertenecen a la hoja de  $\mathcal{F}_{\tilde{\Omega}_1}$  pasando por  $(1, v) \in \Sigma$ . Puesto que  $e^{it} \neq 0$ ,  $\forall t \in [0, 2\pi]$  se tiene que los puntos  $(e^{it}, \tilde{\gamma}_2(t)) \notin D$ . Entonces la aplicación de holonomía de  $L'_0$  con respecto al punto  $P_2 = (1, 0) \in L'_0$  y a la sección transversal  $\Sigma \simeq D_\rho(0)$  pasando por  $P_2$  está bien definida en  $\Sigma \subset U$ . Luego,

$$\begin{aligned} l'_\gamma : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (1, v) &\longrightarrow l'_\gamma(1, v) = (1, l'_\gamma(v)) \end{aligned}$$

esta bien definida en la vecindad abierta  $D_\rho(0) \subset \mathbb{C}$ .

Del mismo modo, sabemos por el Ejemplo 2.8 de la Sección 2.2.3 que la holonomía  $l'_\gamma$  de la hoja  $\tilde{L}'_0 \in \mathcal{F}_{\tilde{X}_{11}}$  está dada por:

$$l'_\gamma(v) = v \cdot e^{2\pi i \left(\frac{2}{-1}\right)} = v,$$

es decir, es periódica de periodo 1 (es la Identidad). Entonces al ser conjugadas las foliaciones  $\mathcal{F}_{\tilde{X}_1}$  con  $\mathcal{F}_{\tilde{X}_{11}}$  se tiene que la holonomía de  $\tilde{L}'_0 \in \mathcal{F}_{\tilde{X}_1}$  es también la Identidad. Luego, la holonomía de  $L'_0 = \pi(\tilde{L}'_0) \in \mathcal{F}_X$  es la Identidad.

Tenemos según (3.5) que la parte lineal de  $\Omega$  esta dada por:

$$\Omega_1 = z dz + w dw,$$

siendo su campo lineal asociado (parte lineal de  $X$ )

$$X_1 = -w \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial w}.$$

Mediante el cambio de coordenadas  $z' = z + iw$ ,  $w' = z - iw$ ,  $\Omega_1$  se transforma en:

$$\Omega_1(z', w') = \frac{1}{2} z' dw' + \frac{1}{2} w' dz',$$

equivalentemente

$$X_1(z', w') = -\frac{1}{2} z' \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{1}{2} w' \frac{\partial}{\partial w'}.$$

Así tenemos que el campo vectorial  $X$  en las variables  $(z', w')$  se escribe

$$X = \left( -\frac{1}{2} z' + \phi_1(z', w') \right) \frac{\partial}{\partial z'} + \left( \frac{1}{2} w' + \phi_2(z', w') \right) \frac{\partial}{\partial w'} \quad (3.10)$$

donde  $\phi_1(0, 0) = \phi_2(0, 0) = 0$ .

Puesto que la singularidad  $(0, 0)$  de  $X$  está contenida en el dominio de Siegel (pues,  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-1/2}{1/2} = -1 \in \mathbb{R}^-$ ) se tiene por el Teorema de Briot-Bouquet que existe un cambio de coordenadas holomorfo (el cual seguiremos denotando por  $(z', w')$ ) que transforma (3.10) en

$$Z = \left( -\frac{1}{2} z' + z' w' \phi_1(z', w') \right) \frac{\partial}{\partial z'} + \left( \frac{1}{2} w' + z' w' \phi_2(z', w') \right) \frac{\partial}{\partial w'} \quad (3.11)$$

donde  $\phi_1(0, 0) = \phi_2(0, 0) = 0$ . Además, los conjuntos  $\{z' = 0\}$  y  $\{w' = 0\}$  son curvas invariantes de  $X$ .

Puesto que los campos (3.10) y (3.11) son equivalentes se tiene que la hoja  $L'_0 \in \mathcal{F}_X$  es también una hoja de  $\mathcal{F}_Z$  con la misma aplicación de holonomía, es decir, la aplicación Identidad, y puesto que ella es conjugada a su parte lineal (mediante el biholomorfismo Identidad) se tiene por el Teorema de Mattei-Moussu (Ver Sección 2.3) que la foliación  $\mathcal{F}_Z$  es equivalente mediante el biholomorfismo  $\xi$  en una vecindad de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  a la foliación dada por el campo lineal  $Z_1 = -\frac{1}{2} z' \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{1}{2} w' \frac{\partial}{\partial w'}$ .

La 1-forma diferencial asociada al campo  $Z_1$  esta dada por:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} (w' dz' + z' dw').$$

Observamos que  $f(z', w') = z' \cdot w'$  es una integral primera analítica de  $\Omega_1$  (equivalentemente de  $Z_1$ ) pues,  $\Omega_1 \wedge df = 0$ .

Puesto que  $Z_1$  admite una integral primera y  $\xi$  es un biholomorfismo que conjuga  $\mathcal{F}_{Z_1}$  con  $\mathcal{F}_Z$  se tiene que la función  $F = f \circ \xi$  es una integral primera para  $Z$ .

$$F(z', w') = (z' + \dots)(w' + \dots).$$

Dentro de las coordenadas  $(z, w)$  ella se escribe

$$F(z, w) = z^2 + w^2 + \dots$$

Al ser  $F$  una integral primera de  $\Omega$ , se cumple que  $\Omega \wedge dF = 0$ . Asimismo,  $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  definida en una vecindad de  $0 \in \mathbb{C}^2$ , se puede expresar como:

$$F(z, w) = g(z, w) + ih(z, w)$$

donde  $g, h : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones con valores en  $\mathbb{R}$ . La parte real de  $F$ ,  $Re(F) = g(z, w) = x^2 + y^2 - x'^2 - y'^2 + \dots$ , siendo  $z = x + ix'$  y  $w = y + iy'$ . Al restringir  $g$  a la vecindad  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$ , tal que,  $V \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  se tiene que,  $x' = y' = 0$ . Entonces,

$$g|_V(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$$

Por otro lado,  $\Omega = A(z, w)dz + B(z, w)dw$  donde  $A(z, w) = z + \sum_{|Q| \geq 2} a_Q z^{q_1} w^{q_2}$  y  $B(z, w) = w + \sum_{|Q| \geq 2} b_Q z^{q_1} w^{q_2}$ ; asimismo,  $dF = dg + idh$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \Omega \wedge dF &= (A(z, w)dz + B(z, w)dw) \wedge (dg + idh) = 0 \\ &= (A(z, w)(dx + idx') + B(z, w)(dy + idy')) \wedge (dg + idh) = 0 \\ &= ((A(z, w)dx + B(z, w)dy) + i(A(z, w)dx' + B(z, w)dy')) \wedge (dg + idh) = 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$(\Omega \wedge dF)|_V = ((A(x, y)dx + B(x, y)dy)) \wedge (dg + idh) = 0. \quad (3.12)$$

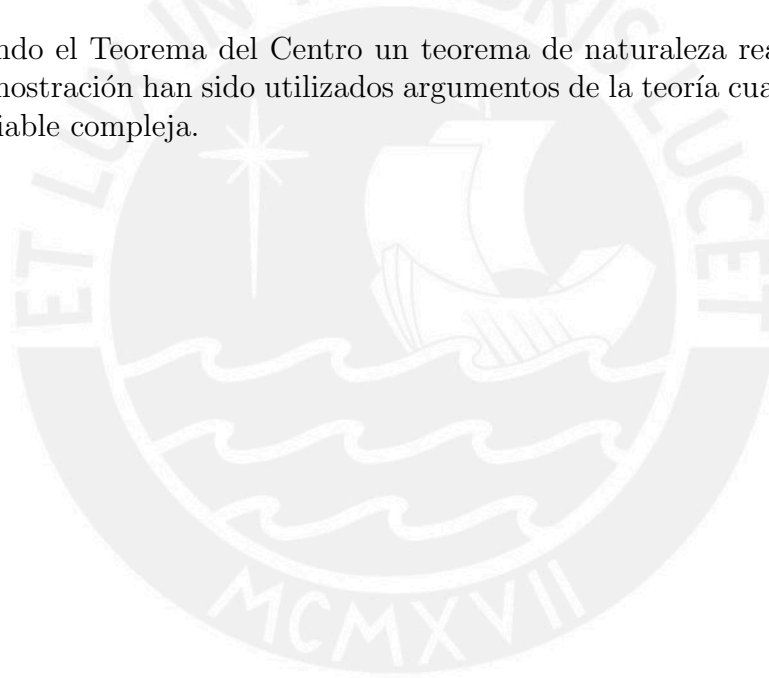
Como podemos observar  $A(x, y)dx + B(x, y)dy = \omega$ , entonces se tiene de (3.12) que

$$\omega \wedge dg = 0 \quad y \quad \omega \wedge dh = 0.$$

Luego,  $g|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una integral primera para  $\omega$ . Así hemos probado la existencia de una integral primera para  $\omega$ .

## CONCLUSIONES

- Hemos conseguido en la demostración del Teorema del Centro que interactúe la Dinámica Compleja con otras áreas de la Matemática como: Geometría Diferencial, Topología Algebraica y Dinámica Real.
- Siendo el Teorema del Centro un teorema de naturaleza real, para su demostración han sido utilizados argumentos de la teoría cualitativa de variable compleja.



## Bibliografía

- [1] Camacho, C.–Neto, L. *Introdução à Teoria das Folheações*, IMPA CNPq,1977.
- [2] Camacho, C.–Neto, L. *Teoría Geométrica das Folheações*, IMPA CNPq,1979.
- [3] Cerveau ,D.–Mattei. *Formes Intégrables Holomorphes Singulières*, Société Mathématique de France, Astérisque, vol 97, 1982.
- [4] Gunning, R.–Rossi, H. *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice Hall, INC-1965.
- [5] Hirsch,M.–Smale, S. *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal*, Alianza Editora, S.A, 1983 .
- [6] Hochstadt, H. *Differential Equations - A Modern Approach.*, Holt, Rinehart and Winston, INC-1964.
- [7] J.–F. Mattei, R. Moussu. *Holonomie et Intégrales Premières*, Ann. Scien. E.N.S., tome 13, n°4 (1980), p. 469-523.
- [8] Lima, E. *Curso de Análise Volumen 2*, IMPA CNPq, 1989.
- [9] Lima, E. *Algebra Lineal*, Colección Textos del IMCA, 1998.
- [10] Lima, E. *Variedades Diferenciaveis*, IMPA 1973.
- [11] Moussu, R. *Une démonstration géométrique d'un théorème de Lyapunov-Poincaré*, Astérisque, 98-99, París 1982.
- [12] Neto, L.–Scardua, B. *Folheações Algébricas Complexas*, IMPA, 1997.
- [13] Otto, P. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Reverté, S.A 1974.

- [14] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems.*, Editorial Springer, 1991.
- [15] Sad, P.–Camacho, C. *Pontos Singulares de Equações Diferenciais Analíticas*, 16° Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1987.
- [16] Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA CNPq, 1979.

